

3.3 Berechne die folgenden Integrale:

(a) $\int_0^\pi \cos(x) \cdot e^{\sin(x)} dx$

Die Kettenregel rückwärts angewandt ergibt:

$$\begin{aligned} &= e^{\sin(x)} dx \Big|_0^\pi \\ &= 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

(b) $\int_{-1}^1 x^2 e^{4x} dx$

zweifache partielle Integration mit $f(x) = x^2, g(x) = e^{4x}$

$$\begin{aligned} &= x^2 \frac{1}{4} e^{4x} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 2x \frac{1}{4} e^{4x} dx \\ &= x^2 \frac{1}{4} e^{4x} \Big|_{-1}^1 - 2x \frac{1}{16} e^{4x} \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 2 \frac{1}{16} e^{4x} dx \\ &= x^2 \frac{1}{4} e^{4x} \Big|_{-1}^1 - 2x \frac{1}{16} e^{4x} \Big|_{-1}^1 + 2 \frac{1}{64} e^{4x} \Big|_{-1}^1 - 0 \\ &= \frac{e^4}{4} - \frac{1}{4e^4} - \frac{2e^4}{16} - \frac{2}{16e^4} + \frac{2e^4}{64} - \frac{2}{64e^4} \\ &= \frac{16e^8 - 16 - 8e^8 - 8 + 2e^8 - 2}{64e^4} \\ &= \frac{5e^4}{32} - \frac{13}{32e^4} \\ &\approx 8.5235 \end{aligned}$$

(c) $\int_0^1 \ln(x) dx$

partielle Integration mit $f(x) = \ln(x), g(x) = 1$:

$$\begin{aligned} &= \ln(x)x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{x} x dx \\ &= \ln(x)x \Big|_0^1 - \int_0^1 1 dx \\ &= 0 - 0 - 1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(d)} \quad \int_0^\infty \frac{1}{4\sqrt{x} + \sqrt{x^3}} dx \\ = \int_0^\infty \frac{1}{4\sqrt{x} + \sqrt{x^3}} dx \end{aligned}$$

Substitution mit $\sqrt{x} = a \Rightarrow dx = 2ada$:

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty \frac{2a}{4a + a^3} da \\ &= \int_0^\infty \frac{2}{4 + a^2} da \end{aligned}$$

Substitution mit $a^2 = 4s^2 \Rightarrow da = 2ds$

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty \frac{1}{1 + s^2} ds \\ &= \arctan(s) \Big|_0^\infty \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

3.4 Nutze das Integralvergleichskriterium zur Entscheidung, ob die folgenden Reihen konvergieren:

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \ln(n)}$$

Nach dem Integralvergleichskriterium konvergiert $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \ln(n)}$, wenn $f(n) = \frac{1}{n \ln(n)}$ monoton fallend ist und $\int_2^\infty \frac{1}{n \ln(n)} dn$ konvergiert.

Quotienten- und Produktregel:

$$\Rightarrow f'(n) = -\frac{\ln(n) + 1}{n^2 \ln(n)^2}$$

$\Rightarrow f(n)$ ist monoton fallend, da $f'(n) < 0$ für $n \in \mathbb{N}$.

$$\int_2^\infty \frac{1}{n \ln(n)} dn$$

Substitution mit $a = \ln(n) \Rightarrow dn = e^a da$

$$\begin{aligned} &= \int_{\ln(2)}^\infty \frac{e^a}{e^a a} da \\ &= \int_{\ln(2)}^\infty \frac{1}{a} da \\ &= \ln(a) \Big|_{\ln(2)}^\infty \\ &= \left(\lim_{a \rightarrow \infty} a \right) - \ln(\ln(2)) \end{aligned}$$

\Rightarrow divergiert.

$$(b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^2}$$

Nach dem Integralvergleichskriterium konvergiert $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)^2}$, wenn $g(n) = \frac{1}{n \ln(n)^2}$ monoton fallend ist und $\int_2^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)^2} dn$ konvergiert.

Quotienten- und Produktregel:

$$\Rightarrow g'(n) = -\frac{\ln(n) + 2}{n^2 \ln(n)^3}$$

$\Rightarrow g(n)$ ist monoton fallend, da $g'(n) < 0$ für $n \in \mathbb{N}$.

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)^2} dn$$

Substitution mit $a = \ln(n) \Rightarrow dn = e^a da$

$$\begin{aligned} &= \int_{\ln(2)}^{\infty} \frac{e^a}{e^a a^2} da \\ &= \int_{\ln(2)}^{\infty} \frac{1}{a^2} da \\ &= -a^{-1} \Big|_{\ln(2)}^{\infty} \\ &= \frac{1}{\ln(2)} \end{aligned}$$

\Rightarrow konvergiert.

3.5 Berechne die folgenden Determinanten:

$$A := \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}, B := \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

A :

Laplace'scher Entwicklungssatz der $k = 3$. Spalte

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j+k} a_{jk} \det(A_{jk}) \\ &= -\det(A_{23}) \\ &= -\det \left(\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \right) \end{aligned}$$

Regel von Sarrus:

$$\begin{aligned} &= -(4 - 18 + 5 - 30 - 3 + 4) \\ &= 38 \end{aligned}$$

B :

$$\begin{aligned} \det(B) &= 0 \cdot \det(B_{11}) - 1 \det(B_{12}) + 2 \cdot \det(B_{13}) - 3 \cdot \det(B_{14}) \\ &= - \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix} - 3 \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Regel von Sarrus:

$$\begin{aligned} &= (-3 + 4 - 1) + 2(8 - 6 - 2) - 3(-1 + 4 - 3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

3.6 Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt nilpotent, falls $A^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$ ist, und idempotent, falls $A^2 = A$ ist. Zeige:

(a) $\det(A^k) = (\det A)^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Induktion:

IV: $\det(A^k) = \det(A)^k$

IA ($k = 1$): $\det(A) = \det(A)$

IS ($k \rightarrow k + 1$):

$$\begin{aligned} &\det(A^{k+1}) = \det(A)^{k+1} \\ \Leftrightarrow &\det(A^k + A) = \det(A)^k \cdot \det(A) \\ \Leftrightarrow &\det(A^k) \cdot \det(A) = \det(A)^k \cdot \det(A) \\ \Leftrightarrow &\det(A^k) = \det(A)^k \end{aligned}$$

(b) A nilpotent $\Rightarrow \det(A) = 0$.

nilpotent: $A^k = 0 \Leftrightarrow \det(A^k) = 0 \Leftrightarrow \det(A)^k = 0 \Rightarrow \det(A) = 0$

(c) A idempotent $\Rightarrow \det(A) \in \{0, 1\}$; A idempotent und $\det(A) = 1 \Leftrightarrow A = E_n$.

$$A^2 = A \Rightarrow A^k = A \Leftrightarrow \det(A^k) = \det(A) \Leftrightarrow \det(A)^k = \det(A)$$

Da $x^k = x$ nur für $x \in \{0, 1\}$ gilt, folgt: $\det(A) \in \{0, 1\}$.

$$A = E_n \Rightarrow A \text{ idempotent und } \det(A) = 1:$$

$$\det(E_n) = 1 \cdot \det(E_{n-1}) = \dots = 1^n \cdot \det(E_{n-n}) = 1$$

$$B \in \mathbb{C}^{n \times n}; B \cdot E_n = B \Rightarrow E_n^2 = E_n \Rightarrow E_n \text{ idempotent.}$$

A idempotent und $\det(A) = 1 \Rightarrow A = E_n$:

$\det(A) \neq 0 \Rightarrow A$ invertierbar

A idempotent mit: $AA^{-1} = E_n \Rightarrow \det(A) = 1$

$A^{-1}A = E_n \Rightarrow A^{-1}A^2 = E_nA = E_n \Rightarrow A = E_n$