

8.3 Untersuche die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  auf Konvergenz und absolute Konvergenz, wobei

(a)  $a_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$ ;

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+i}{2}\right)^n - 1 \end{aligned}$$

Geometrische Reihe mit  $\left|\frac{1+i}{2}\right| = \frac{|1+i|}{|2|} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ :  
 $\Rightarrow$  konvergent.

Überprüfen absoluter Konvergenz:

$$\begin{aligned} & - \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(\frac{1+i}{2}\right)^n \right| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1+i}{2} \right|^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n - 1 \end{aligned}$$

Aus der geometrischen Reihe mit  $\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| < 1$  folgt  $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\left(\frac{1+i}{2}\right)^n\right|$  konvergiert.  
 $\Rightarrow$  absolut konvergent

$$(b) \ a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}} = (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n}};$$

Nach dem Leibniz-Kriterium, konvergiert eine Reihe, wenn die Folge  $(b_n) := \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$  eine monoton fallende Nullfolge ist. Es gilt:  $a > b \Rightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}$ .  
 $\Rightarrow \sqrt[3]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  (monoton fallend)  
 $\Rightarrow$  konvergent.

Absolute Konvergenz:

$$\left| \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}} \right| = \frac{|(-1)^n|}{|\sqrt[3]{n}|} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \left( \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} \right)^n = \left( \frac{1}{\sqrt[3n]{n}} \right)^n$$

Geometrische Reihe mit  $\frac{1}{\sqrt[3]{n}} < 1$ :

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt[3]{n}}} = \frac{1}{\frac{3n\sqrt[3]{n}-1}{3n\sqrt[3]{n}}} = \frac{3n\sqrt[3]{n}}{3n\sqrt[3]{n}-1}$$

$$\begin{aligned} & \frac{3n\sqrt[3]{n}}{3n\sqrt[3]{n}-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \\ \Rightarrow & \frac{3n\sqrt[3]{n}}{3n\sqrt[3]{n}-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \Rightarrow & \frac{3n\sqrt[3]{n}}{3n\sqrt[3]{n}-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  divergent  $\Rightarrow$  nicht absolut konvergent.

(Umrechnungen von  $\sum_{n=1}^{\infty}$  zu  $\sum_{n=0}^{\infty}$  mit  $n+1$  wurden weggelassen, weil sie durch den allgemeineren Fall von  $n$  gezeigt wurden).

(c)  $a_n = (-1)^n \frac{n+2}{2n}$ .

Nach dem Leibniz-Kriterium, konvergiert eine Reihe, wenn die Folge  $(b_n) := \frac{n+2}{2n}$  für  $n \geq 1$  eine monoton fallende Nullfolge ist.

$$\begin{aligned} & \frac{n+2}{2n} > \frac{n+3}{2n+2} && | \cdot (2n+2) \\ \Leftrightarrow & \frac{(n+2)(2n+2)}{2n} > n+3 \\ \Leftrightarrow & \frac{2n^2+6n+4}{2n} > n+3 && | - (n+3) \\ \Leftrightarrow & \frac{2n^2+6n+4}{2n} - \frac{2n(n+3)}{2n} > 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{2n^2+6n+4}{2n} - \frac{2n^2+6n}{2n} > 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{4}{2n} = \frac{2}{n} > 0 && | \checkmark \text{ für alle } n \geq 1 \end{aligned}$$

Die Folge ist für alle Elemente, die in der Reihe vertreten sind ( $n \geq 1$ ) monoton fallend.

Grenzwert (siehe Umformung Ungleichung zu  $\frac{2}{n} > 0$ ):

$$a_n = a_{n+1} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2} > 0 \Rightarrow$  keine Nullfolge.  
 $\Rightarrow$  nicht konvergent  $\Rightarrow$  nicht absolut konvergent  
 $\Rightarrow$  divergent.

8.4 Sei  $s_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$  und  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  die Euler'sche Zahl.

- (a) Zeige die Ungleichungen  $0 < e - s_n < \frac{1}{n \cdot n!}$  für  $n \in \mathbb{N}$ , mit Hilfe einer geeigneten geometrischen Reihe.

$$e - s_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

$$0 < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Da alle Summanden  $> 0$ , muss  $e - s_n > 0$  sein.

$e - s_n$  wird größer, je kleinere Werte  $s_n$  annimmt. Da es sich bei  $s_n$  um eine Summe mit rein positiven Summanden handelt, ist  $s_n$  am kleinsten, wenn es die wenigstens möglichen Summanden besitzt ( $n = 1$ ).

$$\Leftrightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n \cdot n!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)!} \left( 1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots \right) < \frac{1}{n \cdot n!}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n \cdot n!} &= \frac{n+1}{n} \frac{1}{(n+1)!} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n \cdot n!} &= \frac{1}{\frac{n}{n+1}} \frac{1}{(n+1)!} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n \cdot n!} &= \frac{1}{\frac{1+n}{1+n} - \frac{1}{n+1}} \frac{1}{(n+1)!} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n \cdot n!} &= 1 - \frac{1}{n+1} \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

mit Geometrischer Reihe

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n \cdot n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n+1} \right)^k \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)!} \left( 1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots \right) &< \left( 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \right) \frac{1}{(n+1)!} \\ \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots &< 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \\ &\Rightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{n \cdot n!} \end{aligned}$$

- (b) Bestimme mit Hilfe von (a) eine Zahl  $n \in \mathbb{N}$ , für die  $|e - s_N| \leq 0.5 \cdot 10^{-4}$  gilt, und gib den Wert von  $s_N$  an.

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} - 0.5 \cdot 10^{-4} &< \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} - 0.5 \cdot 10^{-4} \leq 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} - 0.5 \cdot 10^{-4} &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 2 - 0.5 \cdot 10^{-4} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} &\geq 2 - 0.5 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

$\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 2 \Rightarrow$  an der k-ten Stelle fehlt der Reihe bis zum Grenzwert 2 noch  $\frac{1}{2^k}$ .

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{1}{2^k} \leq 0.5 \cdot 10^{-4} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2^k} &\geq \frac{1}{2 \cdot 10^4} && | \log_2 \\ \Leftrightarrow k &\geq \log_2(2 \cdot 10^4) \\ \Leftrightarrow k &\gtrsim 14.2877 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow n \geq 15. \\ s_{15} &= \sum_{k=0}^{15} \frac{1}{k!} \approx 2.71828128 \end{aligned}$$

(c) Zeige, dass die Euler'sche Zahl  $e$  irrational ist.

$$p, q \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= e & | \cdot q! \\ \Leftrightarrow (q-1)! \cdot p &= e \cdot q! \\ \Leftrightarrow (q-1)! \cdot p &= q! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \\ \Leftrightarrow (q-1)! \cdot p &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q!}{k!} \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{q!}{k!} = \frac{q!}{0!} + \frac{q!}{1!} + \dots + \frac{q!}{q!} + \dots + \frac{q!}{k!}$$

Spaltet man die Reihe in 2 Teile  $x$  und  $y$  auf, wobei  $x = \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!}$  und  $y = \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!}$ ,

fällt auf, weil  $a, b \in \mathbb{N}, a \geq b \Rightarrow \frac{a!}{b!} \in \mathbb{N}$ , dass jeder Summand  $x_k$  in  $x$  ein Element von  $\mathbb{N}$  sein muss. Somit folgt:  $x \in \mathbb{N}$ .

Für  $y$  gilt:  $\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!} < \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!}$

$$\begin{aligned} &\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} \\ &= e - 2 < 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y \notin \mathbb{N} \Rightarrow x + y \notin \mathbb{N}$$

Aus

$$(q-1)! \cdot p = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q!}{k!} \Leftrightarrow (q-1)! \cdot p = x + y$$

mit  $(q-1)! \cdot p \in \mathbb{N}$  und  $x + y \notin \mathbb{N}$  ergibt sich ein Widerspruch.  $\Rightarrow e \notin \mathbb{Q}$

8.5 (a) Konvergiert die Reihe  $\sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n}-1} + \frac{1}{\sqrt{n}+1} \right)$ ?

$$\frac{1}{\sqrt{n}-1} + \frac{1}{\sqrt{n}+1} \\ \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{n}}{n-1}$$

$$\frac{2\sqrt{n}}{n-1} > \frac{1}{n-1} > \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n}-1} + \frac{1}{\sqrt{n}+1} \right) = \infty$$

(b) Berechne  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$ .

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$$

$$\Leftrightarrow A = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{n!} - \frac{1}{n!} \right)$$

$$\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$$

$$\Rightarrow A = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} \right)$$

$$\Leftrightarrow A = 1 - 1 + 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots - \frac{1}{n!}$$

$$\Leftrightarrow A = 1 - \frac{1}{n!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0$$

$$\Rightarrow A = 1$$

(c) Für welche  $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$  konvergiert die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(1+z)^n}$ ?

Bestimme den Grenzwert, falls er existiert.

Quotientenkriterium:

$$\left| \frac{z^n(1+z)^n}{(1+z)^{n+1}z^{n-1}} \right|$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{z}{1+z} \right|$$

Da  $|z| < |1+z|$  muss  $\frac{|z|}{|1+z|} < 1$  und damit wissen wir dass:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(1+z)^n}$  für all  $z$  konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(1+z)^n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{z}{1+z} \right)^n$$

$$\text{da wir schon wissen dass } \left| \frac{z}{1+z} \right| < 1$$

können wir die geometrische Reihe verwenden

$$\frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{z}{1+z} \right)^n = \frac{1}{z} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z}{1+z} \right)^n - 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{z}{1+z} \right)^n = \frac{1}{z} \left( \frac{1}{1 - \frac{z}{1+z}} - 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(1+z)^n} = 1$$



8.6 Ermittle (durch Probieren) das kleinste  $n \in \mathbb{N}$ , für das  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > 3$  ist. benutze einen Computer, um herauszufinden, wie groß man  $n$  wählen muss, damit die Summe  $> 6$  bzw.  $> 9$  wird.

```
sum = 0
three = 0
six = 0
nine = 0
for i in range(1,1000000):
    sum += 1/i
    if sum > 3 and three == 0:
        three = i
        print(sum, i)
    if sum > 6 and six == 0:
        six = i
        print(sum, i)
    if sum > 9 and nine == 0:
        nine = i
        print(sum, i)
        break;
```

$$\sum_{k=1}^{11} = 3.0198773448773446$$
$$\sum_{k=1}^{227} = 6.004366708345567$$
$$\sum_{k=1}^{4550} = 9.000208062931115$$
$$\mathbb{L} = \{11, 227, 4550\}$$