Übung Präsenz 1

1.1 Berechne das Taylor-Polynom von $f = \exp$ vom Grad 3 um den Entwicklungspunkt $a = 2$

$$\text{Taylor-Polynom: } \sum_{n=0}^{g} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow g = 3, a = 2 : \sum_{n=0}^{3} \frac{(e^2)^{(n)}}{n!}(x-2)^n \\ =& e^2 \sum_{n=0}^{3} \frac{(x-2)^n}{n!} \\ =& \frac{1}{6}e^2(x-2)^3 + \frac{1}{2}e^2(x-2)^2 + e^2(x-2)^1 + e^2\end{aligned}$$

1.2 Eine Rakete soll ins Weltall fliegen! Hat die Rakete eine Ruhemasse m_0 und Geschwindigkeit v, so ist ihre *relativistische Energie* gegeben durch

$$E_{rel} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}},$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist. Mit $f : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}, f(x) := \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ gilt $E_{rel} = m_0c^2 f((\frac{v}{c})^2)$.

(a) Berechne das Taylor-Polynom von f vom Grad 1 um den Entwicklungspunkt $a = 0$. Welche Näherung für E_{rel} erhält man daraus? Gib die physikalische Interpretation der auftretenden Terme an.

$$\text{Taylor-Polynom: } \sum_{n=0}^{g} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow g = 1, a = 0 : \sum_{n=0}^{1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ =& \frac{1}{\sqrt{1-0}} + \frac{d}{da}\left(\frac{1}{\sqrt{1-a}}\right)x \\ =& 1 + \frac{-\frac{d}{da}\sqrt{1-a}}{1-0}x \\ =& 1 - \frac{1}{2}(1-0)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{da}(1-a)x \\ t_2(x) =& 1 + \frac{1}{2}x\end{aligned}$$

$\Rightarrow E_{rel} \approx m_0c^2(1 + \frac{1}{2}(\frac{v}{c})^2) \Rightarrow E_{rel0} \xrightarrow{v\to c} \frac{3}{2}E_{rel0} \Rightarrow$ Die maximale *relativistische Energie* beträgt in dieser Näherung 150% der Ruheenergie.

(b) Gib das Lagrange'sche Restglied $R_1(x)$ für den Entwicklungspunkt $a = 0$ an. Wie gut ist die Näherung aus Teil (a) im Fall $m_0 = 15000kg$ und $v = 11\frac{km}{s}$?

$$\text{Lagrange-Restglied: } R_g(x) = f(x) - t_2(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1 - \frac{1}{2}x$$

Für $v = 11\frac{km}{s} \Rightarrow E_{rel0} \approx 1.3451 \cdot 10^{21}, E_{rel1} \approx 1.3481 \cdot 10^{21} \Rightarrow E_{rel0} \cdot 1.0022 \approx E_{rel1}$
$\Rightarrow$ Der Fehler ist $< 2.3\%$
$\Rightarrow$ Eine gute Näherung für diese Werte

1.3 Für $x \in \mathbb{R}$ sei $\lfloor x \rfloor$ die eindeutig bestimmte Zahl m mit $m \leq x < m+1$. Sind die folgenden Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 : [0,2] \to \mathbb{R}$ Treppenfunktionen? Wenn ja, bestimme das Integral.

(a) $\varphi_1(x) = \sin x$
$\varphi_{1_1} : [0, \frac{\pi}{2}] \to [0,1]$ bijektiv und $\varphi_{1_2} : [\frac{\pi}{2}, 2] \to [\sin 2, 1]$ bijektiv.
Bijektivität widerspricht einer Treppenfunktion, da diese den selben Funktionswert in einem bestimmten Funktionswert aufweist.
$\Rightarrow \varphi_1 \notin T$

(b) $\varphi_2(x) = \lfloor x^2 \rfloor$

$$a_n := (\sqrt{n}) \text{ mit } n \in \mathbb{N}_0$$
$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < \sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{2} \leq x < \sqrt{3} \\ 3 & \sqrt{3} \leq x < 2 \\ \cdots & \cdots \\ n & a_n \leq x < a_{n+1} \end{cases}$$

$\Rightarrow \varphi_2 \in T$

$$\int_0^b \varphi_2(x)dx = \left(\sum_{k=1}^{\lfloor b^2 \rfloor} (a_k - a_{k-1})\varphi_2(a_{k-1}) \right) + (b^2 - \lfloor b^2 \rfloor)\varphi_2(b^2)$$

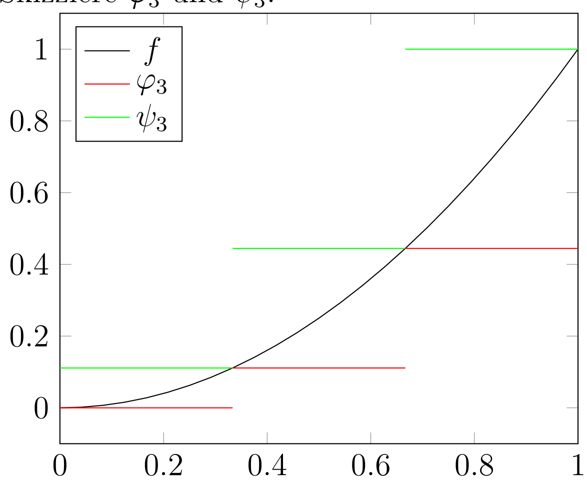
$$\begin{aligned} &\Rightarrow \int_0^2 \varphi_2(x)dx \\ &= \sum_{k=1}^{4} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) \lfloor \sqrt{k-1}^2 \rfloor + 0 \\ &= \sum_{k=1}^{4} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})(k-1) \\ &= 0 + (\sqrt{2} - 1) + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + 3(2 - \sqrt{3}) \\ &= -1 - \sqrt{2} - \sqrt{3} + 6 \\ &\approx 1.8537 \end{aligned}$$

1.4 Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) \coloneqq x^2$. Sei $n \in \mathbb{N}$ und betrachte die Zerlegung $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ von $[0,1]$, wobei $x_k \coloneqq \frac{k}{n}$. Betrachte Treppenfunktionen φ_n, ψ_n mit $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ und

$$\varphi_n(x) = \inf_{x_{k-1}<t<x_k} f(t), \quad \psi_n(x) = \sup_{x_{k-1}<t<x_k} f(t)$$

für alle $x \in (x_{k-1}, x_k)$.

(a) Skizziere φ_3 und ψ_3.



(b) Berechne $\int_0^1 \varphi_n(x)dx$ und $\int_0^1 \psi_n(x)dx$.

$$\int_0^1 \varphi_n(x)dx = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})f(x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}) \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2$$

$$\int_0^1 \psi_n(x)dx = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})f(x_k) = \sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}) \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

(c) Benutze Teil (b), um zu zeigen, dass f Riemann-integrierbar ist und um $\int_0^1 f(x)dx$ zu bestimmen.

$$\int_0^1 \varphi_n(x)dx = \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1} k^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \varphi_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \psi_n(x)dx$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \varphi_n(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \psi_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$
$\Rightarrow$ Riemann-integrierbar

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \\
=&\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)+2(n+1)}{2n} \\
=&\frac{1}{12}\lim_{n\to\infty}\frac{4n+3}{n} \\
=&\frac{1}{12}\lim_{n\to\infty}4+\frac{3}{n} \\
=&\frac{4}{12} \\
=&\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3}$