

1.1 Gib die folgenden Mengen jeweils durch Aufzählung aller Elemente an.

$$(a) \{x \in \mathbb{R}; 4x^2 + x - 5 = 0\} = \{-\frac{1}{4} \pm \sqrt{(\frac{1}{4})^2 + \frac{5}{4}}\} = \{-1.3956, 0.8956\}$$

$$(b) \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; (x^2 - 1)(y^2 - 1) = 0 \wedge x + y = 4\} = \{(-1, 5), (1, 3), (5, -1), (3, 1)\}$$

1.2 (a) Die Abbildungen  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  seien definiert durch  $f(x) = 2x - 5$  und  $g(x) = x^3$ . Bestimme die komponierten Abbildungen  $f \circ g$  und  $g \circ f$ .

$$f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (f \circ g)(x) := f(g(x)) = 2x^3 - 5$$

$$g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x)) = (2x - 5)^3$$

(b) Sei  $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,  $f(x) = \frac{x-5}{x-2}$ . Zeige, dass  $f$  bijektiv ist, und berechne die Umkehrfunktion  $f^{-1}$ .

$$f(x) = \frac{x-5}{x-2} = (x-5)/(x-2) \rightarrow \begin{array}{r} x+2 \rightarrow 1 - \frac{3}{x-2} \\ x-2 \bigg) \frac{x^2}{-5} \\ \hline -x^2 + 2x \\ \hline 2x - 5 \\ -2x + 4 \\ \hline -1 \end{array}$$

Aus  $f(x) = \frac{3}{x-2}$  folgt, dass  $f(x)$  bijektiv ist, da es für jeden x-Wert nur einen y-Wert ergibt.

$$\begin{aligned} y &= \frac{x-5}{x-2} \\ \Leftrightarrow xy - 2y &= x - 5 \\ \Leftrightarrow -2y &= x - 5 - xy \\ \Leftrightarrow -2y &= -5 - x(y-1) \\ \Leftrightarrow -2y + 5 &= -x(y-1) \\ \Leftrightarrow 2y - 5 &= x(y-1) \\ \Leftrightarrow \frac{2y-5}{y-1} &= x \\ \rightarrow f^{-1}(x) &= \frac{2y-5}{y-1} \end{aligned}$$

1.3 Welche der folgenden Aussagen über Element- und Teilmengenbeziehungen sind wahr?

$$(a) 2 \in \{1, 2, 3, 4\} \checkmark$$

$$(b) \{2, 1\} \in \{1, 2, 3, 4\} \times$$

$$(c) \{2, 1\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\} \checkmark$$

$$(d) \{2, 1\} \in \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\} \checkmark$$

$$(e) \{2, 1\} \in \{\{1, 2, 3\}, \{4\}\} \times$$

- 1.4 Ein Fußballtrainer hat in seiner Mannschaft 18 Personen. Davon kann eine Person nur als Torhüter eingesetzt werden, acht sind als Verteidiger geeignet und sechs als Mittelfeldspieler. Drei Personen können sowohl als Verteidiger, Mittelfeldspieler oder Stürmer spielen, fünf können im Mittelfeld und im Sturm spielen, und vier können im Mittelfeld und in der Verteidigung eingesetzt werden. Im Sturm und in der Verteidigung können drei Personen spielen.

- (a) Wie viele reine Stürmer gibt es?

$$\begin{aligned} 18 &\leftarrow \text{Spieler} \\ 18 - 1 &\leftarrow \text{Torwart} \\ =17 - 8 &\leftarrow \text{Verteidiger} \\ =11 - 6 &\leftarrow \text{Mittelfeld} \\ =5 &\rightarrow \text{Stürmer} \end{aligned}$$

- (b) Wie viele Spieler können nur in der Verteidigung eingesetzt werden?

$$\begin{aligned} 8 &\leftarrow \text{als verteidiger geeignet} \\ 8 - 3 &\leftarrow \text{geeignet als Stürmer, Mittelfeld und Verteidigung} \\ 5 - 3 &\leftarrow \text{geeignet als Stürmer und Verteidigung} \\ 2 - (4 - 3) &\leftarrow 4 * \text{"können im Sturm und in der Verteidigung eingesetzt werden"} \\ &\quad - 3 * \text{"geeignet als Stürmer, Mittelfeld und Verteidigung"} \\ &\quad = 1 * \text{"geeignet als Stürmer oder Verteidigung"} \\ &= 1 \rightarrow \text{Verteidigung} \end{aligned}$$