Übung 3

3.3 Berechne die folgenden Integrale:

(a) $\int_0^\pi \cos(x) \cdot e^{\sin(x)} dx$

Die Kettenregel rückwärts angewandt ergibt:

$$
\begin{aligned}
&= e^{\sin(x)} dx \Big|_0^\pi \\
&= 0 - 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

(b) $\int_{-1}^1 x^2 e^{4x} dx$

dreifache partielle Integration mit $f(x) = x^2, g(x) = e^{4x}$

$$
\begin{aligned}
&= x^2 \frac{1}{4} e^{4x} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 2x \frac{1}{4} e^{4x} dx \\
&= x^2 \frac{1}{4} e^{4x} \Big|_{-1}^1 - 2x \frac{1}{16} e^{4x} \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 2 \frac{1}{16} e^{4x} dx \\
&= x^2 \frac{1}{4} e^{4x} \Big|_{-1}^1 - 2x \frac{1}{16} e^{4x} \Big|_{-1}^1 + 2 \frac{1}{64} e^{4x} \Big|_{-1}^1 - 0 \\
&= \frac{e^4}{4} - \frac{1}{4e^4} - \frac{2e^4}{16} - \frac{2}{16e^4} + \frac{2e^4}{64} - \frac{2}{64e^4} \\
&= \frac{16e^8 - 16 - 8e^8 - 8 + 2e^8 - 2}{64e^4} \\
&= \frac{5e^4}{32} - \frac{13}{32e^4} \\
&= \approx 8.5235
\end{aligned}
$$

(c) $\int_0^1 \ln(x) dx$

partielle Integration mit $f(x) = \ln(x), g(x) = 1$:

$$
\begin{aligned}
&= \ln(x) x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{x} x dx \\
&= \ln(x) x \Big|_0^1 - \int_0^1 1 dx = \qquad 0 - 0 - 1 \\
&= -1
\end{aligned}
$$

(d) $\int_0^\infty \frac{1}{4\sqrt{x} + \sqrt{x^3}} dx$

3.4 Nutze das Integralvergleichskriterium zur Entscheidung, ob die folgenden Reihen konvergieren:

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$

(b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^2}$

3.5 Berechne die folgenden Determinanten:

$$A := \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}, B := \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

A :

Laplace'scher Entwicklungssatz der $k = 3$. Spalte

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} \det(A_{jk}) \\ &= -\det(A_{23}) \\ &= -\det\left(\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}\right) \end{aligned}$$

Regel von Sarrus:

$$\begin{aligned} &= -(4 - 18 + 5 - 30 - 3 + 4) \\ &= 38 \end{aligned}$$

B :

$$\begin{aligned} \det(B) &= 0 \cdot \det(B_{11}) - 1\det(B_{12}) + 2 \cdot \det(B_{13}) - 3 \cdot \det(B_{14}) \\ &= -\det\left(\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix}\right) + 2\det\left(\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix}\right) - 3\det\left(\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix}\right) \end{aligned}$$

Regel von Sarrus:

$$\begin{aligned} &= (-3 + 4 - 1) + 2(8 - 6 - 2) - 3(-1 + 4 - 3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

3.6 Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt nilpotent, falls $A^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$ ist, und idempotent, falls $A^2 = A$ ist. Zeige:

(a) $\det(A^k) = (\det A)^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(b) A nilpotent $\Rightarrow \det(A) = 0$.

(c) A idempotent $\Rightarrow \det(A) \in \{0, 1\}$; A idempotent und $\det(A) = 1 \Leftrightarrow A = E_n$.