Übung 1

1.5 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) \coloneqq \sin x$. Für $n \in \mathbb{N}$ bestimme das Taylor-Polynom von f vom Grad n um den Entwicklungspunkt $a = 0$. Zeige, dass die Taylor-Reihe von f auf ganz $\mathbb{R}$ gegen f konvergiert, d.h. für jedes (feste) $x \in \mathbb{R}$ gilt $R_n(x) \to 0$. Benutze dazu die Formel für das Lagrange-Restglied R_n aus HM1, Satz 21.1.

1.6 Sind die angegebenen Funktionen $\varphi_k : [0,2] \to \mathbb{R}(k = 1,2,3,4)$ Treppenfunktionen? Wenn ja, ist ihr Integral zu ermitteln.

(a) $\varphi_1(x) = \lfloor x \rfloor$

$$\varphi_1(x) = \lfloor x \rfloor = \begin{cases} \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \\ 2 & 2 \leq x < 3 \\ \vdots & \vdots \\ n & n \leq x < n+1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \varphi_1 \in T$ (φ_1 ist eine Treppenfunktion)

$$\Rightarrow \int_a^b \varphi_1(x)dx = \int_0^b \varphi_1(x)dx - \int_0^a \varphi_1(x)dx$$

$$\int_0^c \varphi_1(x)dx$$

$$= \frac{c^2}{2} - \frac{\lfloor c \rfloor}{2} - \frac{(c - \lfloor c \rfloor)^2}{2}$$

$$= \frac{c^2 - \lfloor c \rfloor - (c - \lfloor c \rfloor^2)}{2}$$

$$= \frac{\lfloor c \rfloor(2c-1) - \lfloor c \rfloor^2}{2}$$

$$\Rightarrow \int_a^b \varphi_1(x)dx$$

$$= \frac{\lfloor b \rfloor(2b-1) - \lfloor b \rfloor^2 - \lfloor a \rfloor(2a-1) + \lfloor a \rfloor^2}{2}$$

(b) $\varphi_2(x) = \lfloor 2x \rfloor$

$$\varphi_2(x) = \varphi_1(2x)$$

$\Rightarrow \varphi_2 \in T$

$$\Rightarrow \int_a^b \varphi_2(x)dx = \int_a^b \varphi_1(2x)dx = \frac{\int_{2a}^{2b} \varphi_1(x)dx}{2}$$

(c) $\varphi_3(x) = 7\lfloor x \rfloor - 5\lfloor 2x \rfloor$

$$\varphi_3(x) = 7\varphi_1(x) - 5\varphi_2(x) = 7\varphi_1(x) - 5\varphi_1(2x)$$

$\Rightarrow \varphi_3 \in T$ da sie sie eine lineare Kombination aus den beiden Treppenfunktionen φ_1 und φ_2 ist. (Vektorraum)

$$\Rightarrow \int_a^b \varphi_3(x)dx = 7\int_a^b \varphi_1(x)dx + 5\int_a^b \varphi_1(2x)dx = 7\int_a^b \varphi_1(x)dx + \frac{5}{2}\int_{2a}^{2b} \varphi_1(x)dx$$

(d) $\varphi_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0, \\ \lfloor \frac{1}{x} \rfloor & \text{falls } x \neq 0. \end{cases}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1] : \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor < 1$$

$$\Rightarrow \int_a^b \varphi_4(x)dx = 0 \text{ für } x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$$

Für $x \in [0,1]$ wird die Breite der Treppenstufen für $x \to 0$ zu 0.
$\Rightarrow \varphi_4 \notin T$

1.7 Die rationalen Zahlen im Intervall $[0,2)$ seien als Folge $(r_n)_{k \in \mathbb{N}}$ geschrieben. Entscheide, ob die angegebenen Funktionen $f_n : [0,2] \to \mathbb{R} (m = 1,2,3,4)$ Riemann-integrierbar sind.

(a) $f_1(x) = \lfloor 2x \rfloor$;

(b) $f_2(x) = e^{-x^2}$;

(c) $f_3(x) = \sum_{k: r_k < x} 2^{-k}$;

(d) $f_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0, \\ x^{-2} & \text{falls } x \neq 0. \end{cases}$

1.8 Sei $a > 1$. gehe ähnlich wie in Aufgabe 1.4 vor, um das Riemann-Integral $\int_1^a \frac{dx}{x}$ zu bestimmen.