9.3 (a) Zeige die *umgekehrte Dreiecksungleichung*:

$$||x| - |y|| \leq |x - y| (x, y \in \mathbb{R})$$

.

$$\begin{aligned}
& & |x| - |y| &\leq |x - y| & &|x \to x + y \\
&\Leftrightarrow & |x + y| - |y| &\leq |x + y - y| & & \\
&\Leftrightarrow & |x + y| - |y| &\leq |x| & &| + |y| \\
&\Leftrightarrow & |x + y| &\leq |x| + |y| & &| \leftarrow Dreicksungleichung
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& & |y| - |x| &\geq |x - y| & &|y \to x + y \\
&\Leftrightarrow & |x + y| - |x| &\geq |x - (x + y)| & & \\
&\Leftrightarrow & |x + y| - |x| &\geq |y| & &| + |x| \\
&\Leftrightarrow & |x + y| &\geq |x| + |y| & &| \leftarrow Dreicksungleichung
\end{aligned}$$

Aus $|x| - |y| \leq |x - y|$ und $|y| - |x| \leq |x - y|$ folgt $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

(b) Zeige, dass die Funktion abs: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ stetig ist.

$$abs(x) := \begin{cases} x \geq 0 & x \\ x < 0 & -x \end{cases}$$

Da f, g mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$ als Identität von x und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (-1) \cdot x$ als $g = (h \cdot f)$ mit der konstanten Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (-1)$ stetig sind folgt, dass abs ebenfalls stetig ist.

(c) Begründe, warum die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := |e^x - 5x| + \frac{3x^2+|x|}{2+\sin(7x^3)}$ stetig ist.

Satz 1: Eine Funktion ist stetig, wenn alle Bestandteile nachgewiesen stetig sind und durch valide Methoden miteinander kombiniert werden (Verkettung, Addition, Multiplikation).

$$f = a + b$$

$$a = \text{abs}(\exp(x) - 5 \cdot x) \text{ stetig,}$$

da alle Bestandteile (abs, exp, x, -5) auf *Satz 1* zutreffen.

$b = \frac{p}{q}$ stetig, wenn p stetig und q stetig und $q \neq 0$.

$$p = 3x^2 + |x| = 3x \cdot x + \text{abs}(x) \text{ stetig,}$$

da alle Bestandteile (3, x, abs) auf *Satz 1* zutreffen.

$$q = 2 + \sin(7x^3) = 2 + \sin(7x \cdot x \cdot x) \text{ stetig,}$$

da alle Bestandteile (2, 7, sin, x) auf *Satz 1* zutreffen.

$\min q = 2 + \min sin = 2 - 1 = 1 \neq 0$
$\Rightarrow b = \frac{p}{q}$ stetig
$\Rightarrow f = a + b$ stetig.

9.4 (a) Bestätige für $x, y \in \mathbb{R}$ die Formeln

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$\Rightarrow \cos x - \cos y + i\sin x - i\sin y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} + i2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$
$\Leftrightarrow \cos x + i\sin x - (\cos y + i\sin y) = 2i\sin\frac{x-y}{2}(\cos\frac{x+y}{2} + i\sin\frac{x+y}{2})$

$$\Leftrightarrow \quad e^{ix} - e^{iy} = 2i\sin\frac{x-y}{2} \cdot e^{i\frac{x+y}{2}}$$
$$\Leftrightarrow \quad e^{ix} - e^{iy} = 2i\frac{e^{i\frac{x-y}{2}} - e^{-i\frac{x-y}{2}}}{2i} \cdot e^{i\frac{x+y}{2}}$$
$$\Leftrightarrow \quad e^{ix} - e^{iy} = (e^{i\frac{x-y}{2}} - e^{-i\frac{x-y}{2}}) \cdot e^{i\frac{x+y}{2}}$$
$$\Leftrightarrow \quad e^{ix} - e^{iy} = e^{ix} - e^{iy}$$

$\Rightarrow \sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}, \cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$.

(b) Zeige: Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $|e^z| = e^{\mathrm{Re} z}$.

$$\begin{aligned} |e^z| &= |e^{\mathrm{Re}z + i\mathrm{Im}z}| \\ &= |e^{\mathrm{Re}z} \cdot e^{i\mathrm{Im}z}| \\ &= e^{\mathrm{Re}z} \cdot |e^{i\mathrm{Im}z}| \\ &= e^{\mathrm{Re}z} \cdot |1| \\ &= e^{\mathrm{Re}z} \end{aligned}$$

9.5 Einerseits ist $e^{-100} \approx 3.72 \cdot 10^{-44}$; andererseits gilt $e^{-100} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-100)^n}{n!}$.

(a) Für welches $N \in \mathbb{N}$ ist die Partialsumme $S_N := \sum_{n=0}^{\mathbb{N}} \frac{(-100)^n}{n!}$ am größten? Wie groß ist S_N für dieses N?

$S_{98} = S_{100} = 5.344124163786122 \cdot 10^{41}$

```
function fac(n){
    if(n<=1) return 1;
    return n*fac(n-1);
}

function S(N){
    let sum = 0;
    for(let n = 0; n <= N; n++){
        sum+=Math.pow(-100,n)/fac(n);
    }
    return sum;
}

function S(N){
    let sum = 0;
    for(let n = 0; n <= N; n++){
        let psum = 1;
        for(let k = n; k > 0 ; k--){
            psum*=(-100)/k;
        }
        sum+=psum;
    }
    return sum;
}

//9.5a
let maxN = [0], max = 0;
for(let N = 0; N < 100000; N++){
    let SN = S(N);
    if(SN>max){
        maxN = [N];
        max = SN;
    }
    else if(SN==max){
        maxN.push(N);
    }
}
```

$\Rightarrow \text{maxN} = [98, 100]; \text{max} = 5.344124163786122e + 41$

(b) Wie groß muss $N \in \mathbb{N}$ mindestens gewählt werden, damit die Partialsumme $S_N = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-100)^n}{n!}$ die Zahl e^{-100} so gut approximiert, dass man wenigstens die führende Dezimalstelle 3 aus $3.72 \cdot 10^{-44}$ erkennt?
Für erste Dezimalstelle 3 aus $3.72 \cdot 10^{-44}$ erkennbar:

$\times S_{356} = 4.627919971489251176270463774151444024359400153675323554231 8... \times 10^{-44}$

$\surd S_{357} = 3.4663337034603887022762781045216607271882933063737185572255... \times 10^{-44}$

$\Rightarrow N \geq 357$

Für Dezimalstellen 3.72 aus $3.72 \cdot 10^{-44}$ erkennbar:

$$\times S_{359} = 3.7004187966113475892874466892263135290177985066126781861020 \cdots \times 10^{-44}$$
$$\surd S_{360} = 3.7255244479574392760110812435704418861423700639098639034847 \cdots \times 10^{-44}$$

$\Rightarrow N \geq 360;$

9.6 Berechne die folgenden (eigentlichen oder uneigentlichen) Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3+3x^2}{7x^3-5x-1}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+3x^2}{7x^3-5x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3}{7x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{7} = \frac{2}{7}$$

(b) $\lim\limits_{x\to 0-} x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0-} x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \\
=&\lim_{x\to 0-} -\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \\
=&\lim_{x\to 0-} -\sqrt{x^2+\frac{x^2}{x^2}} \\
=&\lim_{x\to 0-} -\sqrt{x^2+1} \\
=&-\sqrt{1} \\
=&-1
\end{aligned}$$

(c) $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{x^2+1}{x}$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^2+1}{x} = \lim_{x\to 0+} x + \frac{1}{x} = 0 + \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \infty$$

(d) Begründe zusätzlich, warum in (b) und (c) der beidseitige Limes $\lim\limits_{x\to 0}$ nicht existiert.

$$\lim_{x\to 0+} x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1 \neq -1 = \lim_{x\to 0-} x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$
$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^2+1}{x} = \infty \neq -\infty = \lim_{x\to 0-} \frac{x^2+1}{x}$$

Durch die Annäherung an 0, aus dem negativen/positiven Bereich unterscheiden sich die Vorzeichen der Ergebnisse. Wenn der $\lim\limits_{x\to 0} \cdots \neq 0$ folgt daraus, dass $\lim\limits_{x\to 0+} \cdots \neq \lim\limits_{x\to 0-} \cdots$