3.3 (a) Bestimme die Polardarstellungen von $\frac{i\sqrt{3}-1}{2}$ und von $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^5$.

i.

$$\frac{i\sqrt{3}-1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$$|z| = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (-\frac{1}{2})^2} = 1$$

$$\alpha = \pi - sin^{-1}\left(\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|\right) = \pi - cos^{-1}\left(\left|\frac{-1}{2}\right|\right) = \pi - tan^{-1}\left(\left|\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-0.5}\right|\right)$$

$$\alpha = \frac{2}{3}\pi$$

$$z = cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) isin\left(\frac{2}{3}\pi\right)$$

ii.

$$
\begin{aligned}
& w = \sqrt[5]{z} \\
\Leftrightarrow \quad & w = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1+i} \\
\Leftrightarrow \quad & w = \frac{(1 - i\sqrt{3})(1-i)}{(1+i) * (1-i)} \\
\Leftrightarrow \quad & w = \frac{1 - i(1+\sqrt{3}) - \sqrt{3}}{2} \\
\Leftrightarrow \quad & w = \frac{1-\sqrt{3}}{2} - i\frac{1+\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|w| &= \sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{2} \\
\alpha &= \pi + sin^{-1}\left(\left|\frac{-\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}}\right|\right) = \pi + cos^{-1}\left(\left|\frac{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}}\right|\right) \\
\alpha &= \frac{17}{12}\pi
\end{aligned}
$$

Polardarstellung von w

$$
\begin{aligned}
w &= \sqrt{2}\left(cos\left(\frac{17}{12}\pi\right) + isin(\frac{17}{12}\pi)\right) \\
z &= w^5 \\
z &= 4\sqrt{2}\left(cos\left(\frac{85}{12}\pi\right) + isin\left(\frac{85}{12}\pi\right)\right)
\end{aligned}
$$

Winkel um 6π verkleinert

$$
\Leftrightarrow \quad z = 4\sqrt{2}\left(cos\left(\frac{13}{12}\pi\right) + isin\left(\frac{13}{12}\pi\right)\right)
$$

(b) Bestimme alle Lösungen der Gleichung $z^3 = -8$.

$$
\begin{aligned}
& w = z^3 \\
& |w| = \sqrt{(-8)^2} \\
\Leftrightarrow \quad & |w| = 8
\end{aligned}
$$

Da der imaginäre Teil von $w = 0$ ist und der reale Teil negativ, ist w eine horizontale Linie in Richtung der negativen Reellen Zahlen auf der complexen Ebene und damit ist $\alpha = \pi$ für die Polardarstellung.

$$w = 8(cos(\pi) + isin(\pi))$$
$$z = \sqrt[3]{w}$$

$$z_0 = 2(cos(\frac{\pi}{3}) + isin(\frac{\pi}{3}))$$
$$z_1 = 2(cos(\pi) + isin(\pi))$$
$$z_2 = 2(cos(\frac{5\pi}{3}) + isin(\frac{5\pi}{3}))$$

$$\mathbb{L} = \left\{2(cos(\frac{\pi}{3}) + isin(\frac{\pi}{3})), -2, 2(cos(-\frac{\pi}{3}) + isin(-\frac{\pi}{3}))\right\}$$

3.4 Berechne sämtliche möglichen Produkte aus den gegebenen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & t \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei t ein reeler Parameter ist.

$A \times B \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ $A \times C \begin{pmatrix} 3 & t-3 \\ -3 & 2t-1 \end{pmatrix}$

$B^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ $B \times D \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$C \times A \begin{pmatrix} -2+2t & -4 & -6+t \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $C \times B \begin{pmatrix} 2t & -2-t \\ 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ $C \times D \begin{pmatrix} -2-t & -4+t & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$D \times C \begin{pmatrix} 1 & t-1 \\ 3 & -t \end{pmatrix}$

3.5 Berechne

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

für n = 1,2,3,4, stelle eine Vermutung für eine Formel für allgemeines $n \in \mathbb{N}$ und beweise diese Formel durch Induktion.

$n = 1, 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^1 && &= \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} & &= \begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^3 &= \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} & &= \begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^4 &= \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^3\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} & &= \begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

IA: $n = 1$

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

IV:

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$$

IS: $n \to n + 1$

$$\begin{aligned}
& & \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^{n+1} &= \begin{pmatrix}1&n+1\\0&1\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow & \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1&n+1\\0&1\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow & \begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1&n+1\\0&1\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow & \begin{pmatrix}1&n+1\\0&1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1&n+1\\0&1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

3.6 Die *Pauli-Matrizen* sind definiert durch

$$\sigma_1 \coloneqq \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \sigma_2 \coloneqq \begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}, \sigma_1 \coloneqq \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

mit der imaginären Einheit i. Zeige für alle $j, k = 1, 2, 3$:

$$\sigma_j\sigma_k = \delta_{jk}E_2 + i\sum_{l=1}^{3}\epsilon_{jkl}\sigma_l,$$

wobei δ_{jk} das Kronecker-Delta ist und

$$\epsilon_{jkl}\begin{cases}0 & \text{falls mindestens 2 der Inizes } j,k,l \text{denselben Wert haben,}\\ 1 & \text{falls}(j,k,l)\in\{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\},\\ -1 & \text{falls}(j,k,l)\in\{(3,2,1),(2,1,3),(1,3,2)\},\end{cases}$$

das *Levi-Civita-Symbol*.

$$\sigma_j\sigma_k=\begin{cases}E_n & j=k\\ i\sigma_l & (j,k)\in\{(1,2),(2,3),(3,1)\} \text{ mit } l\neq j\neq k,\\ -i\sigma_l & (j,k)\in\{(3,2),(2,1),(1,3)\} \text{ mit } l\neq j\neq k\end{cases}$$

für $j=k$:

$$\sigma_1^2=E_n\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\checkmark$$

$$\sigma_2^2=E_n\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\checkmark$$

$$\sigma_3^2=E_n\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\checkmark$$

für $(j,k)\in\{(1,2),(2,3),(3,1)\}$ mit $l\neq j\neq k$:

$$\begin{aligned}
\sigma_1\sigma_2=i\sigma_3 &\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}=i\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}\checkmark\\
\sigma_2\sigma_3=i\sigma_1 &\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=i\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}\checkmark\\
\sigma_3\sigma_1=i\sigma_2 &\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=i\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\checkmark
\end{aligned}$$

für $(j,k)\in\{(3,2),(2,1),(1,3)\}$ mit $l\neq j\neq k$:

$$\begin{aligned}
\sigma_3\sigma_2=-i\sigma_1 &\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}=-i\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&-i\\-i&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-i\\-i&0\end{pmatrix}\checkmark\\
\sigma_2\sigma_1=-i\sigma_3 &\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=-i\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix}\checkmark\\
\sigma_1\sigma_3=-i\sigma_2 &\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-i\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\checkmark
\end{aligned}$$