Übung 1

1.5 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) \coloneqq \sin x$. Für $n \in \mathbb{N}$ bestimme das Taylor-Polynom von f vom Grad n um den Entwicklungspunkt $a = 0$. Zeige, dass die Taylor-Reihe von f auf ganz $\mathbb{R}$ gegen f konvergiert, d.h. für jedes (feste) $x \in \mathbb{R}$ gilt $R_n(x) \to 0$. Benutze dazu die Formel für das Lagrange-Restglied R_n aus HM1, Satz 21.1.

$$T = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{sin^{(k)}(0)}{k!} x^k \right)$$

$$\Leftrightarrow \qquad T = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{(-1)^k}{(1+2k)!} x^{1+2k} \right)$$

$$R_n = \frac{sin^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

R_n läuft für $n \to \infty$ gegen 0, wenn

$$(n+1)! > x^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \qquad nn! > x^n x$$

Da n größer als x wird und $n!$ größer als x^n ist, folgt das R_n für n$\to \infty$ gegen 0 läuft

1.6 Sind die angegebenen Funktionen $\varphi_k : [0, 2] \to \mathbb{R} (k = 1, 2, 3, 4)$ Treppenfunktionen? Wenn ja, ist ihr Integral zu ermitteln.

(a) $\varphi_1(x) = \lfloor x \rfloor$

$$\varphi_1(x) = \lfloor x \rfloor = \begin{cases} \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \\ 2 & 2 \leq x < 3 \\ \vdots & \vdots \\ n & n \leq x < n+1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \varphi_1 \in T$ (φ_1 ist eine Treppenfunktion) mit Treppenpunkten $= \{\ldots, 1, 2, 3, \ldots, n\}$

$$\Rightarrow \int_a^b \varphi_1(x)dx = \int_0^b \varphi_1(x)dx - \int_0^a \varphi_1(x)dx$$

$$\text{mit } \int_0^c \varphi_1(x)dx = \left(\sum_{k=1}^{\lfloor c \rfloor} k - 1\right) + (c - \lfloor c \rfloor)\lfloor c \rfloor$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{\lfloor c \rfloor} k\right) - \lfloor c \rfloor + (c - \lfloor c \rfloor)\lfloor c \rfloor$$

$$= \frac{\lfloor c \rfloor(\lfloor c \rfloor + 1)}{2} + (c - \lfloor c \rfloor - 1)\lfloor c \rfloor$$

$$\int_0^2 \varphi_1(x)dx = \frac{6}{2} - 2 - 0 = 1$$

(b) $\varphi_2(x) = \lfloor 2x \rfloor$

$$\varphi_2(x) = \varphi_1(2x)$$

$\Rightarrow \varphi_2 \in T$ da $\varphi_1 \in T$

$$\Rightarrow \int_a^b \varphi_2(x)dx = \int_a^b \varphi_1(2x)dx = \frac{\int_{2a}^{2b} \varphi_1(x)dx}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^2 \varphi_2(x)dx = \frac{\int_0^4 \varphi_1(x)}{d} x2 = \frac{\frac{20}{2} - 4 - 0}{2} = 3$$

(c) $\varphi_3(x) = 7\lfloor x \rfloor - 5\lfloor 2x \rfloor$

$$\varphi_3(x) = 7\varphi_1(x) - 5\varphi_2(x) = 7\varphi_1(x) - 5\varphi_1(2x)$$

$\Rightarrow \varphi_3 \in T$ da sie sie eine lineare Kombination aus den beiden Treppenfunktionen φ_1 und φ_2 ist. (Vektorraum)

$$\Rightarrow \int_a^b \varphi_3(x)dx = 7\int_a^b \varphi_1(x)dx - 5\int_a^b \varphi_1(2x)dx = 7\int_a^b \varphi_1(x)dx - \frac{5}{2}\int_{2a}^{2b} \varphi_1(x)dx$$

$$\Rightarrow 7\int_0^2 \varphi_1(x)dx - 5\int_0^2 \varphi_2(x)dx = 7 - 15 = -8$$

(d) $\varphi_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0, \\ \lfloor \frac{1}{x} \rfloor & \text{falls } x \neq 0. \end{cases}$

$$\int_0^2 \varphi_4(x)dx = \int_0^1 \varphi_4(x)dx + \int_1^2 \varphi_4(x)dx$$

$\forall x > 1 : \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow \forall x > 1 : \lfloor \frac{1}{x} \rfloor = 0$

$$\Rightarrow \int_1^2 \varphi_4(x)dx = 0 \Rightarrow \int_0^2 \varphi_4(x)dx = \int_0^1 \varphi_4(x)dx$$

$$a_n \coloneqq \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$$

berechnen der Treppenfunktion (Fläche unter den letzten n Stufen):

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1})k = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$$

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \varphi_4(x)dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}\right) - 1 \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\right) - 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ harmonische Reihe
$\Rightarrow$ divergiert
$\Rightarrow$ nicht Riemann integrierbar.

1.7 Die rationalen Zahlen im Intervall $[0, 2)$ seien als Folge $(r_n)_{k\in\mathbb{N}}$ geschrieben. Entscheide, ob die angegebenen Funktionen $f_n : [0, 2] \to \mathbb{R} (m = 1, 2, 3, 4)$ Riemann-integrierbar sind.

(a) $f_1(x) = \lfloor 2x \rfloor$;
Laut 1.6 ist $\lfloor 2x \rfloor$ eine Treppenfunktion $\Rightarrow \lfloor 2x \rfloor$ ist R-intbar

(b) $f_2(x) = e^{-x^2}$;
e^x ist stetig und $-x$ ist stetig $\Rightarrow e^{-x^2}$ stetig. Stetige Funktionen sind R-intbar also ist f_2 R-intbar.

(c) $f_3(x) = \sum\limits_{k:r_k<x} 2^{-k}$;

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}; x_1 < x_2 \Rightarrow \{r_k; r_k < x_1\} < \{r_k; r_k < x_2\}$
$\Rightarrow \sum\limits_{k:r_k<x_1} 2^{-k} < \sum\limits_{k:r_k<x_2} 2^{-k} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$
$\Rightarrow$ f ist monoton
$\Rightarrow$ f ist Riemann integrierbar

(d) $f_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0, \\ x^{-2} & \text{falls } x \neq 0. \end{cases}$

f_4 ist unbeschränkt und damit nicht R-intbar.
Es läuft für $x \to 0$ nach ∞.

1.8 Sei $a > 1$. gehe ähnlich wie in Aufgabe 1.4 vor, um das Riemann-Integral $\int_1^a \frac{dx}{x}$ zu bestimmen.

$$\int_1^a \frac{dx}{x} = \int_1^a \frac{1}{x} dx = \int_1^a f(x) dx$$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$

$$1 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = a \text{ mit } x_k \coloneqq a^{\frac{k}{n}} \text{ mit } x, k \in \mathbb{N}; k < x$$

$$\int_1^a \varphi(x) dx = \sum_{k=0}^{n} (x_{k+1} - x_k) f(x_k) > \int_1^a f(x) dx > \int_1^a \psi(x) dx = \sum_{k=0}^{n} (x_{k+1} - x_k) f(x_{k+1})$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^a \varphi(x) dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^a \psi(x) dx = \int_1^a f(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} (x_{k+1} - x_k) f(x_k) = \sum_{k=0}^{\infty} (x_{k+1} - x_k) f(x_{k+1})$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} (a^{\frac{k+1}{n}} - a^{\frac{k}{n}}) \frac{1}{a^{\frac{k}{n}}} = \sum_{k=0}^{\infty} (a^{\frac{k+1}{n}} - a^{\frac{k}{n}}) \frac{1}{a^{\frac{k+1}{n}}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} (a^{\frac{k}{n}} a^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{k}{n}}) \frac{1}{a^{\frac{k}{n}}} = \sum_{k=0}^{\infty} (a^{\frac{k}{n}} a^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{k}{n}}) \frac{1}{a^{\frac{k}{n}}} \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} (a^{\frac{1}{n}} - 1) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - a^{-\frac{1}{n}})$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \lim_{n\to\infty} n(1 - a^{-\frac{1}{n}})$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n(1 - a^{-\frac{1}{n}}) \\
&= \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{a^{-\frac{1}{n}}}{a^{-\frac{1}{n}}} - a^{-\frac{1}{n}} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1)}{\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\lim_{n\to\infty} n(a^{\frac{1}{n}}-1)}{1} \\
&= \lim_{n\to\infty} n(a^{\frac{1}{n}}-1) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}(e^{\ln(a)\frac{1}{n}}-1)}{\frac{d}{dx}\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln(a)}{n}\right)e^{\ln(a)\frac{1}{n}}}{-\frac{1}{n^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln(a)}{n^2}a^{\frac{1}{n}}}{-\frac{1}{n^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \ln(a)a^{\frac{1}{n}} \\
&= \ln(a)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \int_1^a \frac{dx}{x} = \ln(a)$