

8.3 Untersuche die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auf Konvergenz und absolute Konvergenz, wobei

(a) $a_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n;$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+i}{2}\right)^n - 1 \end{aligned}$$

Geometrische Reihe mit $\left|\frac{1+i}{2}\right| = \frac{|1+i|}{|2|} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$:
 \Rightarrow konvergent.

Überprüfen absoluter Konvergenz:

$$\begin{aligned} & - \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(\frac{1+i}{2}\right)^n \right| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1+i}{2} \right|^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n - 1 \end{aligned}$$

Aus der geometrischen Reihe mit $\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| < 1$ folgt $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\left(\frac{1+i}{2}\right)^n\right|$ konvergiert.
 \Rightarrow absolut konvergent

$$(b) \ a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}} = (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n}};$$

Nach dem Leibniz-Kriterium, konvergiert eine Reihe, wenn die Folge $(b_n) := \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Es gilt: $a > b \Rightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}$.
 $\Rightarrow \sqrt[3]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (monoton fallend)
 \Rightarrow konvergent.

Absolute Konvergenz:

$$\left| \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}} \right| = \frac{|(-1)^n|}{|\sqrt[3]{n}|} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \left(\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} \right)^n = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \right)^n$$

Geometrische Reihe mit $\frac{1}{\sqrt[3]{n}} < 1$:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt[3]{n}}} = \frac{1}{\frac{3\sqrt[3]{n}-1}{\sqrt[3]{n}}} = \frac{3\sqrt[3]{n}}{3\sqrt[3]{n}-1}$$

$$\begin{aligned} & \frac{3\sqrt[3]{n}}{3\sqrt[3]{n}-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \\ \Rightarrow & \frac{3\sqrt[3]{n}}{3\sqrt[3]{n}-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \Rightarrow & \frac{3\sqrt[3]{n}}{3\sqrt[3]{n}-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \end{aligned}$$

\Rightarrow divergent \Rightarrow nicht absolut konvergent.

(Umrechnungen von $\sum_{n=1}^{\infty}$ zu $\sum_{n=0}^{\infty}$ mit $n+1$ wurden weggelassen, weil sie durch den allgemeineren Fall von n gezeigt wurden).

(c) $a_n = (-1)^n \frac{n+2}{2n}$.

Nach dem Leibniz-Kriterium, konvergiert eine Reihe, wenn die Folge $(b_n) := \frac{n+2}{2n}$ für $n \geq 1$ eine monoton fallende Nullfolge ist.

$$\begin{aligned} & \frac{n+2}{2n} > \frac{n+3}{2n+2} && | \cdot (2n+2) \\ \Leftrightarrow & \frac{(n+2)(2n+2)}{2n} > n+3 \\ \Leftrightarrow & \frac{2n^2+6n+4}{2n} > n+3 && | - (n+3) \\ \Leftrightarrow & \frac{2n^2+6n+4}{2n} - \frac{2n(n+3)}{2n} > 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{2n^2+6n+4}{2n} - \frac{2n^2+6n}{2n} > 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{4}{2n} = \frac{2}{n} > 0 && | \checkmark \text{ für alle } n \geq 1 \end{aligned}$$

Die Folge ist für alle Elemente, die in der Reihe vertreten sind ($n \geq 1$) monoton fallend.

Grenzwert (siehe Umformung Ungleichung zu $\frac{2}{n} > 0$):

$$a_n = a_{n+1} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2} > 0 \Rightarrow$ keine Nullfolge.
 \Rightarrow nicht konvergent \Rightarrow nicht absolut konvergent
 \Rightarrow divergent.

8.4 Sei $s_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ und $e = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ die Euler'sche Zahl.

- (a) Zeige die Ungleichungen $0 < e - s_n < \frac{1}{n \cdot n!}$ für $n \in \mathbb{N}$, mit Hilfe einer geeigneten geometrischen Reihe.

$$e - s_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

$$0 < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Da alle Summanden > 0 , muss $e - s_n > 0$ sein.

$e - s_n$ wird größer, je kleinere Werte s_n annimmt. Da es sich bei s_n um eine Summe mit rein positiven Summanden handelt, ist s_n am kleinsten, wenn es die wenigstens möglichen Summanden besitzt ($n = 1$).

$$\Leftrightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n \cdot n!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots \right) < \frac{1}{n \cdot n!}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n \cdot n!} &= \frac{n+1}{n} \frac{1}{(n+1)!} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n \cdot n!} &= \frac{1}{\frac{n}{n+1}} \frac{1}{(n+1)!} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n \cdot n!} &= \frac{1}{\frac{1+n}{1+n} - \frac{1}{n+1}} \frac{1}{(n+1)!} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n \cdot n!} &= 1 - \frac{1}{n+1} \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

mit Geometrischer Reihe

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n \cdot n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} \right)^k \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots \right) &< \left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots \right) \frac{1}{(n+1)!} \\ \Leftrightarrow \quad 1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots &< 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots \\ &\Rightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{n \cdot n!} \end{aligned}$$

- (b) Bestimme mit Hilfe von (a) eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, für die $|e - s_N| \leq 0.5 \cdot 10^{-4}$ gilt, und gib den Wert von s_N an.

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} - 0.5 \cdot 10^{-4} &< \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} - 0.5 \cdot 10^{-4} \leq 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} - 0.5 \cdot 10^{-4} &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 2 - 0.5 \cdot 10^{-4} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} &\geq 2 - 0.5 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

$\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 2 \Rightarrow$ an der k -ten Stelle fehlt der Reihe bis zum Grenzwert 2 noch $\frac{1}{2^k}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{2^k} &\leq 0.5 \cdot 10^{-4} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2^k} &\geq \frac{1}{2 \cdot 10^4} && |\log_2 \\ \Leftrightarrow k &\geq \log_2(2 \cdot 10^4) \\ \Leftrightarrow k &\gtrsim 14.2877 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow n &\geq 15. \\ s_{15} &= \sum_{k=0}^{15} \frac{1}{k!} \approx 2.71828128 \end{aligned}$$

- (c) Zeige, dass die Euler'sche Zahl e irrational ist.

8.5 (a) Konvergiert die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$?

$$\frac{1}{\sqrt{n}-1} + \frac{1}{\sqrt{n}+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{n}}{n-1}$$

$$\frac{2\sqrt{n}}{n-1} > \frac{1}{n-1} > \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}-1} + \frac{1}{\sqrt{n}+1} \right) = \infty$$

(b) Berechne $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$.

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$$

$$\Leftrightarrow A = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n!} - \frac{1}{n!} \right)$$

$$\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$$

$$\Rightarrow A = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} \right)$$

$$\Leftrightarrow A = 1 - 1 + 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots - \frac{1}{n!}$$

$$\Leftrightarrow A = 1 - \frac{1}{n!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0$$

$$\Rightarrow A = 1$$

(c) Für welche $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(1+z)^n}$?
Bestimme den Grenzwert, falls er existiert.

Quotientenkriterium:

$$\left| \frac{z^n(1+z)^n}{(1+z)^{n+1}z^{n-1}} \right| \\ \Leftrightarrow \left| \frac{z}{1+z} \right|$$

Da $|z| < |1+z|$ muss $\frac{|z|}{|1+z|} < 1$ und damit wissen wir dass: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(1+z)^n}$ für all z konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(1+z)^n} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{1+z} \right)^n$$

$$\text{da wir schon wissen dass } \left| \frac{z}{1+z} \right| < 1$$

können wir die geometrische Reihe verwenden

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{1+z} \right)^n &= \frac{1}{z} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1+z} \right)^n - 1 \right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{1+z} \right)^n &= \frac{1}{z} \left(\frac{1}{1 - \frac{z}{1+z}} - 1 \right) \\ \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(1+z)^n} &= 1 \end{aligned}$$

8.6 Ermittle (durch Probieren) das kleinste $n \in \mathbb{N}$, für dass $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > 3$ ist. benutze einen Computer, um herauszufinden, wie groß man n wählen muss, damit die Summe > 6 bzw. > 9 wird.


```
sum = 0
three = 0
six = 0
nine = 0
for i in range(1,1000000):
    sum += 1/i
    if sum > 3 and three == 0:
        three = i
        print(sum, i)
    if sum > 6 and six == 0:
        six = i
        print(sum, i)
    if sum > 9 and nine == 0:
        nine = i
        print(sum, i)
        break;
```

$$\sum_{k=1}^{11} = 3.0198773448773446$$

$$\sum_{k=1}^{227} = 6.004366708345567$$

$$\sum_{k=1}^{4550} = 9.000208062931115$$

$$\mathbb{L} = \{11, 227, 4550\}$$