4.3 Berechne den Rang der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 7 & 2 & -6 & 4 \\ 2 & 1 & s & t \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -1 & -1 & 2 \\ -3 & 15 & -3 & 0 & 3 \\ -3 & 29 & -7 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Der Rang von A hängt dabei von den Parametern $s, t \in \mathbb{R}$ ab.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 7 & 2 & -6 & 4 \\ 2 & 1 & s & t \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -20 & 4 \\ 0 & -1 & s-4 & t \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -20 & 4 \\ 0 & 0 & s & t-\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

für $s \neq 0 \land t \neq \frac{4}{5}$ ist der Rang 3
für $s = 0 \land t = \frac{4}{5}$ ist der Rang 2

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -1 & -1 & 2 \\ -3 & 15 & -3 & 0 & 3 \\ -3 & 29 & -7 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 39 & -6 & -3 & 9 \\ 0 & 53 & -10 & -1 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 13 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{24}{13} & \frac{40}{13} & -\frac{16}{13} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 13 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -24 & 40 & -16 \end{pmatrix}$$

Rang ist 3

4.4 Bestimme alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} & & 3x_2 & - & 5x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ - & x_1 & - & 3x_2 & & - & x_4 & = & -5 \\ - & 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ - & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 8 \end{array}$$

4.5 Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrrrrr} & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & 2x_1 & + & 2x_2 & + & tx_3 & = & 1 \\ - & 2tx_1 & + & tx_2 & + & 9x_3 & = & 6 \end{array}$$

mit einem Parameter $t \in \mathbb{R}$.

(a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist das System eindeutig lösbar? Wie lautet die Lösung?

(b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ gibt es unendlich viele Lösungen? Gib alle lösungen an.

(c) Für welche $t \in \mathbb{R}$ gibt es keine Lösung?

LGS als matrix A:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & t & 1 \\ -2t & t & 9 & 6 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t-1 & 1 \\ 0 & 2t & 9+t & 6 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t-1 & 1 \\ 0 & 0 & 9+3t-2t^2 & 6-2t \end{array}\right)$$

(b) Berrechnen für welche t dies $9 + 3t - 2t^2$ 0 ergibt

$$9 + 3t - 2t^2 = 0 \qquad | * -\tfrac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad -4.5 - 1.5t + t^2 = 0$$

pq-Formel mit $p = -1.5$ und $q = -4.5$

$$t \in \{3, -\frac{3}{2}\}$$

Bei betrachtung von Zeile 3 von A fällt jetzt auf das für $t = 3$ die komplette Zeile zu 0 wird. Damit haben wir zu wenig Informationen um eine eindeutige Lösung zu finden damit gibt es unentlich viele Lösungen.

$$\Leftrightarrow \quad A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t-1 & 1 \\ 0 & 0 & 9+3t-2t^2 & 6-2t \end{array}\right)$$

mit $t = 3$

$$\Leftrightarrow \quad A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$x_1 - \frac{x_3}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{x_3 - 1}{2}$$

$$x_2 + 2x_3 = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x_2 = 1 - 2x_3$$

Für $t = 3$ hat A unentlich viele Lösungen definiert durch:

$$x_1 = \frac{x_3 - 1}{2} \text{ und } x_2 = 1 - 2x_3$$

(b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2t & t & 9 & 6 \\ 0 & 1 & t-1 & 1 \end{array}\right)$$

(c)

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t-1 & 1 \\ -2t & t & 9 & 6 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t-1 & 1 \\ -2t & t+1 & 8+t & 7 \end{array}\right)$$

Da in der 3ten Zeile von A

Übung 3

4.6 Sei $A = (a_{j,k}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$

(a) In jedem der folgenden fünf Fälle finde Matrizen x und/oder y mit folgenden Eigenschaften: Eines der Produkte Ax, yA, yAx ist

i. die j-te zeile von A,

ii. die k-te Spalte von A,

iii. das Element a_{jk},

iv. die Summe der Einträge der j-ten zeile von A,

v. die Summe der Einträge der k-ten Spalte von A.

(b) Sei $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$

i. die j-te und die k-te Spalte von A vertauscht,

ii. die j-te und die k-te Zeile von A vertauscht,

iii. das λ-Fache der j-ten Zeile zur k-ten zeile von A addiert.

In jedem der deri Fälle finde eine matrix C, so dass entweder $B = CA$ oder $B = AC$