

11.3 (a) Gib Polardarstellungen der komplexen Zahlen $1 + i$ und $\sqrt{3} - i$ an.

$$1 + i = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \Leftarrow \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\sqrt{3} - i = 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right) \Leftarrow -\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

(b) Sei $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ und $x = \tan \varphi$. Zeige $\frac{1+ix}{1-ix} = \exp(2i\varphi)$.

$$x = \tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{1+ix}{1-ix} \\ &= \frac{1 + i \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}}{1 - i \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}} \\ &= \frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{\cos \varphi - i \sin \varphi} \\ &= \frac{(\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \varphi + i \sin \varphi)}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} \\ &= \frac{e^{i\varphi} \cdot e^{i\varphi}}{1} = e^{2i\varphi} \\ &= \exp(2i\varphi) \end{aligned}$$

11.4 Berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen (auf dem jeweils sinnvollen Definitionsbereich):

$$f_1(x) = \sin(\cos x)$$

Produktregel:

$$\frac{d}{dx} \sin(\cos x) = -\cos(\cos x) \cdot \sin x$$

$$f_2(x) = \frac{1 - \sin x}{2 + \sin x}$$

Quotientenregel:

$$\frac{d}{dx} \frac{1 - \sin x}{2 + \sin x} = \frac{-\cos(x) \cdot (2 + \sin(x)) - \cos(x) \cdot (1 - \sin(x))}{(2 + \sin(x))^2} = \frac{-3 \cos(x)}{(2 + \sin(x))^2}$$

$$f_3(x) = x \cdot |x|$$

$$\frac{d}{dx}|x| = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Produktregel:

$$\frac{d}{dx}x \cdot |x| = |x| + x \cdot \frac{d}{dx}|x|$$

$$f_4(x) = x^{x^x}$$

Produktregel, Kettenregel:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx}x^{x^x} \\ &= \frac{d}{dx}e^{x^x \cdot \ln(x)} \\ &= e^{x^x \cdot \ln(x)} \cdot \frac{d}{dx}(x^x \cdot \ln(x)) \\ &= e^{x^x \cdot \ln(x)} \cdot \left(x^x \cdot \frac{1}{x} + \left(\frac{d}{dx}e^{x \ln(x)} \right) \cdot \ln(x) \right) \\ &= e^{x^x \cdot \ln(x)} \cdot \left(x^x \cdot \frac{1}{x} + e^{x \ln(x)} \cdot \left(\frac{d}{dx}x \ln(x) \right) \cdot \ln(x) \right) \\ &= e^{x^x \cdot \ln(x)} \cdot \left(x^x \cdot \frac{1}{x} + e^{x \ln(x)} \cdot \left(\ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} \right) \cdot \ln(x) \right) \\ &= e^{x^x \cdot \ln(x)} \cdot \left(x^x \cdot \frac{1}{x} + e^{x \ln(x)} \cdot \ln(x) \cdot \ln(x) \right) \\ &= e^{x^x \cdot \ln(x)} \cdot (x^{x-1} + e^{x \ln(x)} \cdot \ln^2(x)) \\ &= e^{\ln(x) \cdot (x^x + x)} \cdot \ln^2(x) + e^{x^x \cdot \ln(x)} \cdot x^{x-1} \\ &= x e^{x^x + x} \cdot \ln^2(x) + x e^{x^x} \cdot x^{x-1} \\ &= x e^{x^x + x} \cdot \ln^2(x) + e^{x^x} \cdot x^x \end{aligned}$$

- 11.5 (a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sein in $a \in \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeige, dass dann der Grenzwert $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ existiert, und berechne ihn.

Da sich $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ für $h \rightarrow 0$ einem festen Wert annähert, muss $\frac{d}{dh} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = 0$ sein.

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \frac{d}{dh} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = 0 \quad | \text{Quotientenreg.} \\ \Leftrightarrow & \frac{2h \left(\frac{d}{dh} f(a+h) - \frac{d}{dh} f(a-h) \right) - 2(f(a+h) - f(a-h))}{4h^2} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{\frac{d}{dh} f(a+h) - \frac{d}{dh} f(a-h)}{2h} - \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \frac{\frac{d}{dh} f(a+h) - \frac{d}{dh} f(a-h)}{2h} = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h^2} \quad | \cdot 2h \\ \Leftrightarrow & \frac{d}{dh} f(a+h) - \frac{d}{dh} f(a-h) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d}{dh} f(a+h) - \frac{d}{dh} f(a-h) = f'(a) - f'(a) = 0$$