

5.2 Es sei

$$A := \begin{pmatrix} -1-3i & 2+i & -1-2i \\ 0 & 2 & 0 \\ 2+4i & -2-i & 2+3i \end{pmatrix}$$

Bestimme die Eigenwerte von A samt ihrer algebraischen und geometrischen Vielfachheiten, sowie die zugehörigen Eigenräume.

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-3i-\lambda & 2+i & -1-2i \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2+4i & -2-i & 2+3i-\lambda \end{vmatrix}$$

Entwickeln nach 2. Zeile:

$$\Leftrightarrow p_A(\lambda) = (2-\lambda) \begin{vmatrix} -1-3i-\lambda & -1-2i \\ 2+4i & 2+3i-\lambda \end{vmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow + \\ \rightarrow \end{array}$$

$$\Leftrightarrow p_A(\lambda) = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1+i-\lambda & 1+i-\lambda \\ 2+4i & 2+3i-\lambda \end{vmatrix} \begin{array}{c} \rightarrow -2 \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\Leftrightarrow p_A(\lambda) = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1+i-\lambda & 1+i-\lambda \\ 2i+2\lambda & i+\lambda \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow p_A(\lambda) = (2-\lambda)(1+i-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2i+2\lambda & i+\lambda \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow p_A(\lambda) = (2-\lambda)(1+i-\lambda)(-i-\lambda)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = i+1, \lambda_3 = -i$$
$$\alpha_\lambda = 1$$

Berechnung der Eigenvektoren: λ_1 :

$$\begin{pmatrix} -3-3i & 2+i & -1-2i \\ 2+4i & -2-i & 3i \end{pmatrix} \begin{array}{c} \boxed{}^+ \\ \leftarrow^+ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -3-3i & 2+i & -1-2i \\ -1+i & 0 & -1+i \end{pmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow^+ \\ \boxed{}_2^+ \end{array} \mid \frac{1}{-1+i}$$

$$\begin{pmatrix} -5-i & 2+i & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow^+ \\ \boxed{}_3^+ \end{array} \mid \frac{1}{2+i}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Eig}(A, \lambda_1) = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\gamma_1 = 1$$

 $\lambda_2 :$

$$\begin{pmatrix} -2-4i & 2+i & -1-2i \\ 0 & 1-i & 0 \\ 2+4i & -2-i & 1+2i \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \quad \leftarrow + \\ \leftarrow -1 \mid \frac{1}{1-i} \leftarrow -3 \\ \leftarrow + \quad \leftarrow + \end{array} \begin{array}{l} + \\ \\ + \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -2-4i & 0 & -1-2i \\ 0 & 1 & 0 \\ 2+4i & 0 & 1+2i \end{pmatrix} \mid \frac{1}{1+2i}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Eig}(A, \lambda_2) = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\gamma_2 = 1$$

 $\lambda_3 :$

$$\begin{pmatrix} -1-2i & 2+i & -1-2i \\ 0 & 2+i & 0 \\ 2+4i & -2-i & 2+4i \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \mid \frac{1}{-1-2i} \\ \leftarrow -1 \mid \frac{1}{2+i} \\ \leftarrow + \mid \frac{1}{2+4i} \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{Eig}(A, \lambda_3) = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\gamma_3 = 1$$

5.3 Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $v \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ .

a) Zeige, dass v auch Eigenvektor von A^2 ist. Zu welchem Eigenwert?

$$\begin{aligned} & Av = v\lambda && | \cdot A \text{ von links} \\ \Leftrightarrow & A^2v = Av\lambda \\ \Leftrightarrow & A^2v = v\lambda^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow v$ ist Eigenvektor von A zu λ^2

b) Zeige, dass v Eigenvektor von A^{-1} ist, wenn A invertierbar ist. Zu welchem Eigenwert?

$$\begin{aligned} & Av = v\lambda && | \cdot A^{-1} \text{ von links} \\ \Leftrightarrow & v = A^{-1}v\lambda \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{\lambda}v = A^{-1}v \end{aligned}$$

v ist Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $\frac{1}{\lambda}$

c) Wenn $A^2 = E_n$ ist, wieso ist dann mindestens eine der Zahlen ± 1 Eigenwert von A ? Wieso gibt es keine anderen Eigenwerte?

$$\begin{aligned} & A = A^{-1} && (1) \\ & \Rightarrow Av = v\lambda, A^{-1}v = v\lambda && (2) \\ & A^{-1}v = v\lambda && | \cdot A \text{ von links} \quad (3) \\ \Leftrightarrow & v = Av\lambda && | \text{ mit (2)} \\ \Leftrightarrow & v = v\lambda^2 \\ \Leftrightarrow & 1 = \lambda^2 \end{aligned}$$

(4)

\Rightarrow die einzigen möglichen Eigenwerte sind ± 1

d) Haben A und A^T dieselben Eigenwerte?

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(A^T) \\ \det(A^T - \lambda E_n) &= \det(A - \lambda E_n)^T \end{aligned}$$

da die veränderung der Diagonalen nicht die transponierbarkeit beeinflusst

$$\Rightarrow \det(A - \lambda E_n) = \det(A - \lambda E_n)^T$$

Da das charakteristische Polynom gleich ist, sind auch die Eigenwerte gleich.

5.4 Es Sei

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechne die Eigenwerte von A samt ihrer algebraischen und geometrischen Vielfachheiten. Ist die Matrix A diagonalisierbar?

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Entwickeln nach der 4-ten Spalte

$$\Leftrightarrow p_A(\lambda) = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & -3 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} \begin{array}{c} \boxed{} \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\Leftrightarrow p_A(\lambda) = -\lambda(-1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -3 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \boxed{} \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\Leftrightarrow p_A(\lambda) = -\lambda(-1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -3 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Entwickeln nach der 3-ten Zeile

$$\Leftrightarrow p_A(\lambda) = -\lambda(-1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -3 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow p_A(\lambda) = -\lambda(-1-\lambda)(-2\lambda + \lambda^2)$$

$$\begin{aligned} \lambda^2(1 + \lambda)(-2 + \lambda) &= 0 \\ \Rightarrow \lambda_1 &= 0, & \alpha_1 &= 2 \\ \lambda_2 &= -1, & \alpha_1 &= 1 \\ \lambda_3 &= 2, & \alpha_1 &= 1 \end{aligned}$$

Eigenvektoren ausrechnen: λ_1 :

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left| \frac{1}{-3} \right. \left. \begin{array}{l} -2 \\ + \end{array} \right]^{-3} \\ \leftarrow \left. \begin{array}{l} -2 \\ + \end{array} \right]^{-3} \\ \leftarrow \left. \begin{array}{l} -2 \\ + \end{array} \right]^{-3} \end{array} \begin{array}{l} | -1 \\ | -1 \\ | -1 \end{array} \\ &\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \text{Eig}(A, \lambda_1) &= \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ \gamma_1 &= 2 \end{aligned}$$

λ_2 :

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \left. \begin{array}{l} -1 \\ + \end{array} \right]^{-1} \\ \leftarrow \left. \begin{array}{l} -1 \\ + \end{array} \right]^{-1} \\ \leftarrow \left. \begin{array}{l} -1 \\ + \end{array} \right]^{-1} \end{array} \begin{array}{l} | -1 \\ | -1 \\ | -1 \end{array} \\ &\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \text{Eig}(A, \lambda_2) &= \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ \gamma_2 &= 1 \end{aligned}$$

6

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (b) Zeige, dass A diagonalisierbar ist und bestimme eine invertierbare Matrix T mit $T^{-1}AT = D$, wobei D eine Diagonalmatrix ist.

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda(1-\lambda) - 1 \\ &= \lambda^2 - \lambda - 1 \\ \Rightarrow \lambda_1 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \lambda_2 &= \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Eig(A, λ_1):

$$\begin{pmatrix} -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gauß-Algorithmus:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} -1-\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Eig(A, λ_2):

$$\begin{pmatrix} -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gauß-Algorithmus:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} -1+\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Aus $\gamma_{\lambda_1}(A) = \alpha_{\lambda_1}(A) = 1$ und $\gamma_{\lambda_2}(A) = \alpha_{\lambda_2}(A) = 1 \Rightarrow A$ diagonalisierbar.

$$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} -1-\sqrt{5} & -1+\sqrt{5} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 T^{-1} &\Leftarrow \begin{pmatrix} -1 - \sqrt{5} & -1 + \sqrt{5} & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{5} - 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{5} - 3 & -\frac{2}{1+\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 5 - \sqrt{5} & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{5}-3}{2} & -\frac{1}{1+\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5-\sqrt{5}} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

- (c) Finde eine explizite (d.h. nicht rekursive) Formel für das Folgenglied x_n , für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
 &A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \\
 \Leftrightarrow &A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \\
 \Leftrightarrow &\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$