Übung 11

11.3 (a) Sei $D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x \neq 0\}$. Bestimme den Gradienten Δf der Funktion $f : D \to \mathbb{R}, f(x,y,z) := y\sin(xz^2) + \frac{x\cos(y)}{y}$.

$$\Delta f = \begin{pmatrix} y\cos(xz^2)z^2 + \frac{\cos(y)}{y} \\ \sin(xz^2) - x(\frac{\sin(y)}{y} + \frac{\cos(y)}{y^2}) \\ y\cos(2xz) \end{pmatrix}$$

(b) Entscheide, ob es partiell differenzierbare Funktionen auf R^2 bzw. R^3 gibt mit

$$\Delta f(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ -x+y \end{pmatrix} \quad \text{bzw. } \Delta f(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$$

Bestimme gegebenenfalls ein solches f.

$$\begin{array}{rrcl} & \Delta f(x,y) & = & \begin{pmatrix} x+y \\ -x+y \end{pmatrix} \\ \Rightarrow & f(x,y) & = & \int x + ydx \\ \Leftrightarrow & f(x,y) & = & \int -x + ydy \\ \Rightarrow & \int x + ydx & = & \int -x + ydy \\ \Leftrightarrow & \frac{x^2}{2} + yx & = & \frac{y^2}{2} - yx \end{array}$$

$\Rightarrow$ Es existiert keine partiell differenzierbare Funktion $f \in \mathbb{R}^2$ mit $\Delta f(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ -x+y \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rrcl} & \Delta f(x,y,z) & = & \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \\ \Rightarrow & f(x,y,z) & = & \int yzdx \\ & & = & \int xzdy \\ & & = & \int xydz \\ \Rightarrow & f(x,y,z) & = & xyz \end{array}$$

11.4 Sei $c > 0$, und $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien zweimal stetig differenzierbar. Zeige: Die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u(t,x) := f(x+ct) + g(x-ct)$ ist eine Lösung der *Wellengleichung*

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t,x) = c^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x)$$

$$
\begin{aligned}
& \tfrac{\partial}{\partial t}u(t,x) &=& \; c(f'(x+ct)-g'(x-ct)) \\
\Rightarrow\; & \tfrac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,x) &=& \; c^2(f''(x+ct)+g''(x-ct)) \\
& \tfrac{\partial}{\partial x}u(t,x) &=& \; f'(x+ct)+g'(x-ct) \\
\Rightarrow\; & \tfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) &=& \; f''(x+ct)+g''(x-ct) \\
\Rightarrow\; & \tfrac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,x) &=& \; c^2\tfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x)
\end{aligned}
$$

11.5 Bestimme Lage und Art der lokalen Extrema folgender Funktionen:

(a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y) \coloneqq xy^2-4xy+x^2$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\quad & \mathit{\Delta} f(x,y) &=& \begin{pmatrix} y^2-4y+2x \\ 2xy-4x \end{pmatrix} \\
\Rightarrow\quad & \mathrm{Hess} f(x,y) &=& \begin{pmatrix} 2 & 2y-4 \\ 2y-4 & 2x \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Nullstellen finden:

$$
\begin{aligned}
& \mathit{\Delta} f(x,y) &\overset{!}{=}& \; 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \begin{pmatrix} y^2-4y+2x \\ 2xy-4x \end{pmatrix} &\overset{!}{=}& \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& y^2-4y+2x &=& \; 0 \\
\text{(I)}\quad \Rightarrow\quad & x &=& \; \tfrac{4y-y^2}{2} \\
& 2xy-4x &=& \; 0 \\
\text{(II)}\quad \Rightarrow\quad & x &=& \; 0
\end{aligned}
$$

I in die 2.Gleichung einsetzen:

$$
\begin{aligned}
& 2y+4y-y^2-8y+2y^2 &=& \; 0 \\
\Leftrightarrow\quad & y^2-2y &=& \; 0 \\
\Rightarrow\quad & y_1 &=& \; 0, \\
& y_2 &=& \; 2
\end{aligned}
$$

II in die 1.Gleichung einsetzen:

$$
\begin{aligned}
& y^2-4y &=& \; 0 \\
\Rightarrow\quad & y_3 &=& \; y_1 = 0, \\
& y_4 &=& \; 4
\end{aligned}
$$

$y_1 = y_3, y_2, y_4$ in $\Delta f(x,y) \stackrel{!}{=} 0$ einsetzen und nach x lösen:

$\Rightarrow Ł = \{(0,0),(2,2),(0,4)\}$.

Alle Nullstellen in Hess$f(x,y)$ einsetzen um die Art des Extremums zu bestimmen.

$$\text{Hess}f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

negative Determinante $\Rightarrow$ indefinit $\Rightarrow$ Sattelpunkt.

$$\text{Hess}f(2,2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

positive Determinante mit $a_{11} > 0 \Rightarrow$ definit $\Rightarrow$ Tiefpunkt.

$$\text{Hess}f(0,4) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

negative Determinante $\Rightarrow$ indefinit $\Rightarrow$ Sattelpunkt.

(b) $g : (0,\pi) \times (0,\pi) \to \mathbb{R}, g(x,y) \coloneqq \sin(x) + \sin(y) + \sin(x+y)$

11.6 (a) Berechne die Jacobi-Matrix der Abbildungen (Polar- bzw. Kugelkoordinaten)

i. $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, F(r,\varphi) \coloneqq (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))^T$

ii. $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, G(r,\theta,\varphi) \coloneqq (r\cos(\theta)\cos(\varphi), r\cos(\theta)\sin(\varphi), r\sin(\theta))^T$
Gib die partiellen Ableitungen von F_2 und G_3 an, wobei $F = (F_1, F_2)^T$ und $G = (G_1, G_2, G_3)^T$.

(b) Bestimme, in welchen Punkten die Jacobi-Matrizen aus (a) invertierbar sind.