

11.3 (a) Gib Polardarstellungen der komplexen Zahlen $1 + i$ und $\sqrt{3} - i$ an.

$$1 + i = \sqrt{2} \cdot \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) \Leftarrow \arctan \left(\frac{1}{1} \right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\sqrt{3} - i = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) \Leftarrow -\arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = -\frac{\pi}{6}$$

(b) Sei $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ und $x = \tan \varphi$. Zeige $\frac{1+ix}{1-ix} = \exp(2i\varphi)$.

$$x = \tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{1+ix}{1-ix} \\ &= \frac{1 + i \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}}{1 - i \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}} \\ &= \frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{\cos \varphi - i \sin \varphi} \\ &= \frac{(\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \varphi + i \sin \varphi)}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} \\ &= \frac{e^{i\varphi} \cdot e^{i\varphi}}{1} = e^{2i\varphi} \\ &= \exp(2i\varphi) \end{aligned}$$

11.4 Berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen (auf dem jeweils sinnvollen Definitionsbereich):

$$f_1(x) = \sin(\cos x)$$

Produktregel:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sin(\cos x) &= -\cos(\cos x) \cdot \sin x \\ &\Rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$f_2(x) = \frac{1 - \sin x}{2 + \sin x}$$

Quotientenregel:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{1 - \sin x}{2 + \sin x} &= \frac{-\cos(x) \cdot (2 + \sin(x)) - \cos(x) \cdot (1 - \sin(x))}{(2 + \sin(x))^2} = \frac{-3 \cos(x)}{(2 + \sin(x))^2} \\ &\Rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$f_3(x) = x \cdot |x|$$

$$\frac{d}{dx} |x| = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Produktregel:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} x \cdot |x| &= |x| + x \cdot \frac{d}{dx} |x| = |x| + |x| = 2|x| \\ &\Rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$f_4(x) = x^{x^x}$$

Produktregel, Kettenregel:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} x^{x^x} \\ &= \frac{d}{dx} e^{x^x \cdot \ln(x)} \\ &= e^{x^x \cdot \ln(x)} \cdot \frac{d}{dx} (x^x \cdot \ln(x)) \\ &= e^{x^x \cdot \ln(x)} \cdot \left(x^x \cdot \frac{1}{x} + \left(\frac{d}{dx} e^{x \ln(x)} \right) \cdot \ln(x) \right) \\ &= e^{x^x \cdot \ln(x)} \cdot \left(x^x \cdot \frac{1}{x} + e^{x \ln(x)} \cdot \left(\frac{d}{dx} x \ln(x) \right) \cdot \ln(x) \right) \\ &= e^{x^x \cdot \ln(x)} \cdot \left(x^x \cdot \frac{1}{x} + e^{x \ln(x)} \cdot \left(\ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} \right) \cdot \ln(x) \right) \\ &= e^{x^x \cdot \ln(x)} \cdot \left(x^x \cdot \frac{1}{x} + e^{x \ln(x)} \cdot (\ln(x) + 1) \cdot \ln(x) \right) \\ &= x^{x^x} \cdot (x^{x-1} + x^x \cdot (\ln^2(x) + \ln(x))) \\ &= x^{x^x} \cdot (x^{x-1} + x^{x-1} x \cdot (\ln^2(x) + \ln(x))) \\ &= x^{x^x} \cdot x^{x-1} (1 + x \cdot (\ln^2(x) + \ln(x))) \\ &= x^{x^x+x-1} (1 + x \ln^2(x) + x \ln(x)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R}^{>0}$$

- 11.5 (a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei in $a \in \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeige, dass dann der Grenzwert $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ existiert, und berechne ihn.

Aus $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ differenzierbar, folgt f stetig, da damit $a \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist, es für jedes $a \in \mathbb{R}$ eine Folge geben muss, die sich a annähert \Rightarrow stetig, differenzierbar

Da $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ nur aus nachgewiesenen stetigen Funktionen besteht, muss sie ebenfalls stetig sein.

\Rightarrow ein Grenzwert existiert.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{2} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{f(a) - f(a-h)}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dx} f(a) + \frac{d}{dx} f(a) \right) \\ &= \frac{d}{dx} f(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(a-h) - f(a+h)}{-2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} -\frac{1}{2} \left(\frac{f(a-h) - f(a)}{h} + \frac{f(a) - f(a+h)}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} -\frac{1}{2} \left(-\frac{f(a) - f(a-h)}{h} - \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} -\frac{1}{2} \left(-\frac{d}{dx} f(a) - \frac{d}{dx} f(a) \right) \\ &= \frac{d}{dx} f(a) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = \frac{d}{dx} f(a)$$

- (b) Folgt aus der Existenz des Grenzwertes in (a) die Differenzierbarkeit von f in a ?

Nein. Die Existenz eines Grenzwertes lässt keinen Schluss über die Differenzierbarkeit in diesem Punkt zu. Beispiel:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0-} |x| = 0$$

aber

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{d}{dx} |x| = 1 \neq -1 = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{d}{dx} |x|$$

11.6 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $n \in \mathbb{N}$. Seien $g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, die n -mal differenzierbar in $x \in I$ sind. Dann kann man durch vollständige Induktion die *Leibniz-Regel* zeigen.

$$(g \cdot h)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(k)}(x) \cdot h^{(n-k)}(x)$$

(a) Berechne $f^{(1000)}(x)$ für $f(x) = x^2 \cdot e^x$

$$g(x) = x^2, h(x) = e^x, n = 1000$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f^{(1000)}(x) &= \sum_{k=0}^{1000} \binom{1000}{k} g^{(k)}(x) \cdot h^{(1000-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^2 \binom{1000}{k} g^{(k)}(x) \cdot h^{(1000-k)}(x) \\ &= (1 \cdot x^2 \cdot e^x) + (1000 \cdot 2x \cdot e^x) + (499500 \cdot 2 \cdot e^x) \\ &= e^x(x^2 + 2000x + 999000) \end{aligned}$$

(b) Berechne $f^{(100)}(x)$ für $f(x) = x^3 \cdot \cos(x)$

$$g(x) = x^3, h(x) = \cos(x), n = 100$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f^{(100)}(x) &= \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} g^{(k)}(x) \cdot h^{(100-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^3 \binom{100}{k} g^{(k)}(x) \cdot h^{(100-k)}(x) \\ &= (1 \cdot x^3 \cdot \cos(x)) + (100 \cdot 3x^2 \cdot \sin(x)) - (4950 \cdot 6x \cdot \cos(x)) - (161700 \cdot 6 \cdot \sin(x)) \\ &= x^3 \cos(x) - 29700x \cos(x) + 300x^2 \sin(x) - 970200 \sin(x) \\ &= \cos(x)(x^3 - 29700x) + \sin(x)(300x^2 - 970200) \end{aligned}$$