Übung 10

10.2 Eine (idealisiert homogene) Kette der Länge l liegt auf einem horizontalen, reibungsfreien Tisch, wobei ein Stück Kette der Länge a über den Rand hängt. Wie lange dauert es, bis die kette vom Tisch geglitten ist?

Hinweis: Bezeichne die Gesamtmasse der Kette mit m und die Länge des überhängenden Stücks zur Zeit t mit $y(t)$. Berechne die Masse $m_{ü}(t)$ des überhängenden Stücks zur Zeit t. Die Gravitationskraft $m_{ü}(t)g$ muss dann gleich $F = m\ddot{y}(t)$ sein.

$$\begin{array}{rrcl} & m_{ü}(t) & = & y(t)\frac{m}{l} \\ & F & = & m\ddot{y}(t) \\ \Leftrightarrow & F & = & m_{ü}(t)g \\ \Rightarrow & m\ddot{y}(t) & \overset{!}{=} & m_{ü}(t)g \\ \Leftrightarrow & \ddot{y}(t) - y(t)\frac{g}{l} & = & 0 \end{array}$$

Homogene Differentialgleichung lösen:

$$\begin{array}{rrcl} \Rightarrow & p(\lambda) & = & \lambda^2 - \frac{g}{l} = 0 \\ \Rightarrow & \lambda & = & \pm\sqrt{\frac{g}{l}} \\ \Rightarrow & y(t) & = & c_1 e^{t\sqrt{\frac{g}{l}}} + c_2 e^{-t\sqrt{\frac{g}{l}}} \end{array}$$

Bedingung $y(0) = a$ einsetzen, da die Länge des überhängenden Stücks der Kette zum Zeitpunkt $t = 0 \to a$ ist:

$$\begin{array}{rrcl} \Rightarrow & c_1 + c_2 & = & a \\ \Leftrightarrow & c_1 & = & a - c_2 \\ \Rightarrow & y(t) & = & (a - c_2)e^{t\sqrt{\frac{g}{l}}} + c_2 e^{-t\sqrt{\frac{g}{l}}} \\ \Rightarrow & \dot{y}(t) & = & \sqrt{\frac{g}{l}}((a - c_2)e^{t\sqrt{\frac{g}{l}}} - c_2 e^{-t\sqrt{\frac{g}{l}}}) \end{array}$$

Da die Kette am Anfang liegt, die Geschwindigkeit $\dot{y}$ zum Zeitpunkt t demnach 0 ist ($\dot{y}(0) = 0$) folgt:

$$\begin{array}{rrcl} & 0 & = & \sqrt{\frac{g}{l}}(a - 2c_2) \\ \Leftrightarrow & c_2 & = & \frac{a}{2} \end{array}$$

c_2 in y einsetzen:

$$\Rightarrow \quad y(t) = \frac{a}{2}\left(e^{t\sqrt{\frac{g}{l}}} + e^{-t\sqrt{\frac{g}{l}}}\right)$$

Zum Zeitpunkt des Abrutschen, muss $y(t) = l$ betragen (Die gesamte Kette ist vom Tisch gerutscht):

$$\begin{array}{rrcl} & l & \overset{!}{=} & \frac{a}{2}\left(e^{t\sqrt{\frac{g}{l}}} + e^{-t\sqrt{\frac{g}{l}}}\right) \\ \Leftrightarrow & l & = & a\cosh(\sqrt{\frac{g}{l}}t) \\ \Leftrightarrow & t & = & \operatorname{arccosh}(\frac{l}{a})\sqrt{\frac{l}{g}} \end{array}$$

10.3 Löse die folgenden Anfangswertaufgaben:

(a) $\ddot{y} + 2\dot{y} - 3y = 4e^{2t}, y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1.$

$$
\begin{array}{lrcl}
 & P(\lambda) & = & \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \\
\Leftrightarrow & \lambda & = & -1 \pm 2 \\
\Rightarrow & \lambda_1 & = & -3, \\
 & \lambda_2 & = & 1
\end{array}
$$

eine homogene Lösungsbasis finden:

$$
\begin{array}{lrcl}
\Rightarrow & y_H(t) & = & c_1 e^t + c_2 e^{-3t} \\
 & \ddot{y} + 2\dot{y} - 3y & = & 0
\end{array}
$$

eine spezielle Lösungsbasis finden:

da $b(t) = 4e^{2t}$ mit $\lambda = 2 \neq \lambda_1, \lambda_2$ liegt kein Resonanzfall vor:

$$
\begin{array}{lrcl}
\Leftrightarrow & y_s(t) & = & 4c_3 e^{2t} \\
\Leftrightarrow & \dot{y}_s(t) & = & 8c_3 e^{2t} \\
\Leftrightarrow & \ddot{y}_s(t) & = & 16c_3 e^{2t}
\end{array}
$$

in Ausgangsgleichung einsetzen:

$$
\begin{array}{lrcl}
\Rightarrow & 20c_3 e^{2t} & = & 4e^{2t} \\
\Leftrightarrow & c_3 & = & \frac{1}{5}
\end{array}
$$

c_3 in y_s einsetzen:

$$
\begin{array}{lrcl}
\Rightarrow & y_s(t) & = & \frac{4}{5} e^{2t} \\
\Rightarrow & y(t) & = & c_1 e^t + c_2 e^{-3t} + \frac{4}{5} e^{2t} \\
\Leftrightarrow & \dot{y}(t) & = & c_1 e^t - 3c_2 e^{-3t} + \frac{8}{5} e^{2t}
\end{array}
$$

Anfangswertbedingungen einsetzen:

$$
\begin{array}{llrcl}
y(0) = 0 & & c_1 + c_2 & = & -\frac{4}{5} \\
\dot{y}(0) = 1 & & c_1 - 3c_2 & = & -\frac{3}{5} \\
 & \Rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ + \end{matrix} \; c & = & \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \\
 & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} c & = & \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} \\
 & \Rightarrow & c_2 & = & -\frac{1}{20} \\
 & \Rightarrow & c_1 & = & -\frac{3}{4}
\end{array}
$$

c_1, c_2 in y einsetzen:

$$
\Rightarrow \quad y(t) = -\frac{3}{4} e^t - \frac{1}{20} e^{-3t} + \frac{4}{5} e^{2t}
$$

(b) $\ddot{y} + y = t + 2\cos(t), y(\pi) = 2\pi, \dot{y}(\pi) = \pi$.

$$\begin{aligned} && P(\lambda) &= \lambda^2+1=0 \\ \Leftrightarrow && \lambda &= \pm i \end{aligned}$$

eine homogene Lösungsbasis finden:

$$y_H(t) = c_1e^{it} + c_2e^{-it}$$

spezielle Lösungsbasen finden:

$$y_{s1} \quad \Leftarrow \quad \ddot{y}+y = t$$

da $\lambda = 0 \neq \lambda_1, \lambda_2$ liegt kein Resonanzfall vor:

$$\begin{aligned} \Rightarrow && y_{s1} &= c_3 + c_4 t \\ \Leftrightarrow && \dot{y}_{s1} &= c_4 \\ \Leftrightarrow && \ddot{y}_{s1} &= 0 \end{aligned}$$

in Ausgangsgleichung (y_{s1}) einsetzen:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow && c_3 + c_4 &= t \\ \Rightarrow && c_3 &= 0, \\ && c_4 &= 1 \end{aligned}$$

c_3, c_4 in y_{s1} einsetzen:

$$\Rightarrow \quad y_{s1} = t$$

$$y_{s2} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{y}+y = 2\cos(t) = \Re(2e^{it})$$

durch $\lambda = i = \lambda_1$ liegt ein Resonanzfall einer einfachen Nullstelle vor. Dadurch muss ein Vorfaktor t hinzugefügt werden:

$$\begin{aligned} \Rightarrow && \widetilde{y}_{s2}(t) &= cte^{it} \\ \Leftrightarrow && \dot{\widetilde{y}}_{s2}(t) &= ce^{it}(ti+1) \\ \Leftrightarrow && \ddot{\widetilde{y}}_{s2}(t) &= ce^{it}(2i-t) \end{aligned}$$

in Ausgangsgleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow && 2ci &= 2 \\ \Leftrightarrow && c &= -i \\ \Rightarrow && \widetilde{y}_{s2} &= -ite^{it} \\ \Leftrightarrow && y_{s2} &= \Re(\widetilde{y}_{s2}) \\ \Leftrightarrow && y_{s2} &= t\sin(t) \end{aligned}$$

Da $y = y_H + y_s$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow && y(t) &= c_1e^{it} + c_2e^{-it} + t + t\sin(t) \\ \Leftrightarrow && \dot{y}(t) &= c_1ie^{it} - c_2e^{-it} + 1 + \sin(t) + t\cos(t) \end{aligned}$$

Anfangswertbedingungen einsetzen:

$$y(\pi) = 2\pi \qquad -ic_1 - c_2 + \pi = 2\pi$$

$$\begin{array}{rrcl}
 & \Leftrightarrow \quad ic_1 + c_2 & = & -\pi \\
\dot{y}(\pi) = \pi & -ic_1 + c_2 + 1 - \pi & = & \pi \\
 & \Leftrightarrow \quad -ic_1 + c_2 & = & 2\pi - 1 \\
 & \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} \overset{\cdot(-1)}{\underset{+}{\rightleftarrows}} c & = & \begin{pmatrix} -\pi \\ 2\pi - 1 \end{pmatrix} \\
 & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} -pi \\ 3\pi - 1 \end{pmatrix} \\
 & \Rightarrow \quad c_2 & = & \frac{1}{2}(\pi - 1), \\
 & c_1 & = & \frac{i}{2}(-\pi - 1)
\end{array}$$

c_1, c_2 in y einsetzen:

$$\Leftrightarrow \quad y(t) = \frac{1}{2}(-i(\pi+1)e^{it} + (\pi-1)e^{-it}) + t(\sin(t) + 1)$$

10.4 (a) Stelle eine homogene lineare Differentialgleichung 3.Ordnung auf, so dass eine Lösungsbasis gegeben ist durch $y_1(t) = 1, y_2(t) = t, y_3(t) = e^t$.

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ doppelte Nullstelle

$$\begin{array}{lrcl}
\Rightarrow & p(\lambda) & = & (\lambda - 1)\lambda^2 \\
\Rightarrow & y''' - y'' & = & 0
\end{array}$$

(b) Finde eine homogene lineare Differentialgleichung, so dass $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y_1(t) = t$ und $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y_2(t) = \sin(t)$ Lösungen sind.

$y_1 = t = te^{0t}$, $y_2 = \sin(t) = \Im(e^{it})$

$$\begin{array}{lrcl}
\Rightarrow & \lambda_1 & = & 0 \text{ doppelte Nullstelle} \\
\Rightarrow & \lambda_2 & = & \pm i \\
\Rightarrow & p(\lambda) & = & \lambda^2(\lambda^2 + 1) \\
\Rightarrow & y'''' + y'' & = & 0
\end{array}$$

(c) Warum ist es in (b) unmöglich, eine homogene lineare Differentialgleichung 2.Ordnung aufzustellen, selbst wenn man zeitabhängige Koeffizienten zulässt, d.h. wenn man eine Differentialgleichung der Form

$$\ddot{y} + a_1(t)\dot{y} + a_0(t)y = 0$$

sucht, mit $a_0, a_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

$$\begin{vmatrix} t & \sin(t) \\ 1 & \cos(t)) \end{vmatrix} = t\cos(t) - \sin(t)$$

Im Fall $t = 0$ ist die Wronski-Determinante gleich 0 und trifft somit keine Aussage über lineare Abhängigkeit. Für jeden anderen Wert von t ist sie $\neq 0$ und die

Lösungsbasis somit linear unabhängig.
Da für $t = 0$ für die beiden Lösungen $y_1 = y_2$ gilt, sind diese in diesem Punkt linear Abhängig. Somit lässt sich keine komplett linear unabhängige Lösungsbasis von der Lösungsbasis aus (b) für eine lineare Differentialgleichung 2.Ordnung aufspanne.

(d) Warum ist es in (b) auch nicht möglich, eine homogene lineare Differentialgleichung 3.Ordnung aufzustellen, selbst wenn man zeitabhängige Koeffizienten zulässt?

$$\begin{vmatrix} t & \sin(t) & a \\ 1 & \cos(t) & b \\ 0 & -\sin(t) & c \end{vmatrix} = t\cos(t)c - \sin(t)a + \sin(b)t - c\sin(t)$$

Im Fall $t = 0$ ist die Wronski-Determinante gleich 0
Wie in (d) folgt hieraus, dass es keine lineare Differentialgleichung 3.Ordnung mit den gegebenen Lösungen gibt.

Hinweis zu (c) und (d): Wronski-Determinante, Satz 10.1, n Lösungen $y_1, \ldots, y_n$ einer homogenen linearen Differentialgleichung n.Ordnung sind genau dann linear unabhängig, wenn

$$\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \ldots & y_n(t) \\ \dot{y}_1(t) & \dot{y}_2(t) & \ldots & \dot{y}_n(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \neq 0$$

für alle t. Was passiert hier für $t = 0$?

10.5 Eine gedämpfte Schwingung ohne Anregung sei modelliert durch

$$\ddot{y} + a\dot{y} + 4y = 0, \quad y(0) = 5, \quad \dot{y}(0) = -1$$

Bestimme den Parameter $a > 0$ so, dass gerade der aperiodische Grenzfall eintritt, und berechne die Lösung für diesen Fall. Stelle den zeitlichen Verlauf der Schwingungen graphisch dar.

Aus dem Ansatz für Kritisch gedämpfte Fälle:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \ddot{y} + 2p\dot{y} + \omega^2 y &= \ddot{y} + a\dot{y} + 4y \\ \Rightarrow \quad a &= 2p \\ \Rightarrow \quad \omega &= 2 \\ \Rightarrow \quad y &= c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} \end{aligned}$$

Anfangswerte einsetzen:

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad && c_1 &= 5 \\
\Rightarrow \quad && -1 &= -2c_1 + c_2 \\
\Leftrightarrow \quad && c_2 &= 9 \\
\Rightarrow \quad && y &= e^{-2t}(5 + 9t)
\end{aligned}
$$