Übung 6

6.3 Das Newton'sche Gesetz der Abkühlung sagt aus, dass die zeitliche Rate der Temperaturänderung eines Körpers proportional zur Temperaturdifferenz zwischen Körper und Umgebung ist. Eine Flasche Bier von sommerlicher Raumtemperatur (23°C) wird im Kühlschrank (Innentemperatur 6°C) gelagert. Nach 45 Minuten ist sie auf 14°C abgekühlt. Wie lange dauert es, eine Flasche Bier von Zimmertemperatur auf 9°C zu bringen?

Temperatur [°C] zum Zeitpunkt t [min]: $T(t)$.

$$T'(t) = a(T_1 - T_2) = mbe^{tb}$$
$$T(t) = me^{tb} + c$$

Bedingungen:
$T(0) = 23 \Rightarrow m + c = 23 \Leftrightarrow m = 23 - c$
$T(45) = 14$
$T'(0) = a(23 - 6) \Rightarrow mb = 17a \Leftrightarrow m = \frac{17a}{b}$
$T'(45) = a(14 - 6)$

$T(45) = me^{45b} + c = 14 \Leftrightarrow m = \frac{14-c}{e^{45b}}$
$T'(45) = mbe^{45b} = 8a \Leftrightarrow m = \frac{8a}{be^{45b}}$

b finden:

$$\begin{aligned} 17\tfrac{a}{b} &= 8\tfrac{a}{b}\tfrac{1}{e^{45b}} \\ \Leftrightarrow \quad b &= \frac{\ln(\frac{8}{17})}{45} \end{aligned}$$

b einsetzen und c finden:

$$\begin{aligned} 23 - c &= \tfrac{14-c}{e^{45b}} \\ \Leftrightarrow \quad 23 - c &= \tfrac{17}{8}(14 - c) \\ \Leftrightarrow \quad c &= 6 \end{aligned}$$

c einsetzen und m finden

$$m = 17$$

m und b einsetzen und a finden:

$$a = b = \frac{\ln(\frac{8}{17})}{45}$$

$$\Rightarrow T(t) = 17\left(\frac{8}{17}\right)^{\frac{t}{45}} + 6$$

$$
\begin{array}{rrcl}
 & T(t) & = & 9 \\
\Leftrightarrow & 17\left(\frac{8}{17}^{\frac{t}{45}}\right)+6 & = & 9 \\
\Leftrightarrow & t & = & \log_{\frac{8}{17}}\left(\frac{3}{17}\right)45 \\
\Leftrightarrow & t & \approx & 103.5553
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ Es dauert ca. 1Stunde 43Minuten und 33Sekunden um ein Bier durch den Kühlschrank auf 9°C zu kühlen.

6.4 Finde die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungen

(a) $y' - 2y = x^2e^{2x}$

$$
\begin{array}{llrcll}
\text{(H)} & & y'-2y & = & 0 & \\
 & \Rightarrow & y_{(H)}(x) & = & e^{2x} & \\
 & & y & = & c\cdot y_{(H)} & \\
\text{(I)} & \Rightarrow & y(x) & = & c(x)e^{2x} & \mid \text{ableiten} \\
\text{(II)} & \Rightarrow & y'(x) & = & c'(x)e^{2x}+c(x)2e^{2x} &
\end{array}
$$

I und II in Ausgangsgleichung einsetzen:

$$
\begin{array}{lrcl}
\Leftrightarrow & c'(x)e^{2x}+c(x)2e^{2x}-2c(x)e^{2x} & = & x^2e^{2x} \\
 & c'(x) & = & x^2 \\
\Rightarrow & c(x) & = & \frac{1}{3}x^3+c
\end{array}
$$

Einsetzen in I:

$$
\Rightarrow \quad y(x) = (\tfrac{1}{3}x^3+c)e^{2x}
$$

(b) $xy' + 2y = \sin(x)$ auf $(0, \infty)$.

$$
\begin{array}{llrcll}
\text{(H)} & & xy'+2y & = & 0 & \\
 & \Leftrightarrow & y' & = & -\frac{2}{x}y & \\
 & \Rightarrow & y_{(H)} & = & e^{\int -\frac{1}{2}x dx} = e^{-2\ln(x)} = \frac{1}{x^2} & \\
 & & y & = & c\cdot y_{(H)} & \\
\text{(I)} & \Rightarrow & y(x) & = & c(x)\frac{1}{x^2} & \mid \text{ableiten} \\
\text{(II)} & \Rightarrow & y'(x) & = & c'(x)\frac{1}{x^2}-2c(x)\frac{1}{x^3} &
\end{array}
$$

I und II in Ausgangsgleichung einsetzen:

$$
\begin{array}{lrcl}
 & c'(x)\frac{1}{x}-2c(x)\frac{1}{x^2}+2c(x)\frac{1}{x^2} & = & \sin(x) \\
\Leftrightarrow & c'(x) & = & \sin(x)x \\
\Rightarrow & c(x) & = & -x\cos(x)+\sin(x)+c
\end{array}
$$

Einsetzen in I:

$$
\Rightarrow \quad y(x) = \frac{-x\cos(x)+\sin(x)+c}{x^2}
$$

6.5 Löse die Anfangswertprobleme

(a) $x^2y' + 2xy = \cos(x), y(\pi) = 0;$

$$\Leftrightarrow \quad xy' + 2y = \frac{\cos(x)}{x}$$

Siehe Aufgabe (6.4b):

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad c'(x) &= \cos(x) \\ \Rightarrow \quad c(x) &= \sin(x) + c \end{aligned}$$

Einsetzen in I:

$$\Rightarrow \quad y(x) = \frac{\sin(x)+c}{x^2}$$

Bedingung $y(\pi) = 0$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \frac{\sin(\pi)+c}{\pi^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad c &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \frac{\sin(x)}{x^2}$$

(b) $y' - 2y = e^{2x}, y(0) = 2;$

Siehe Aufgabe (6.4a):

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad c'(x) &= 1 \\ \Rightarrow \quad c(x) &= x + c \end{aligned}$$

Einsetzen in I:

$$\Rightarrow \quad y(x) = (x + c)e^{2x}$$

Bedingung $y(0) = 2$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad (0 + c)e^0 &= 2 \\ \Leftrightarrow \quad c &= 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = (x + 2)e^{2x}$$

6.6 Ein Pferd läuft in x-Richtung bei $x = l > 0$ mit konstanter Geschwindigkeit v_P los. Ein beliebig dehnbares homogenes Band ist mit dem einen Ende im Nullpunkt befestigt, mit dem anderen Ende am Pferd. Eine Schnecke beginnt gleichzeitig mit dem Pferd im Nullpunkt mit konstanter (Relativ-)Geschwindigkeit v_S auf dem Band zu laufen. Der Abstand der Schnecke vom Nullpunkt zur Zeit t sei $x(t)$.

(a) Formuliere das Anfangswertproblem zur Bestimmung von $x(t)$ und löse es.

$$\begin{array}{llrcll}
\text{(Pferd)} & & p'(t) & = & v_P & \\
 & \Rightarrow & p(t) & = & v_P \cdot t + c & \mid \text{da } p(0) = l \\
 & \Rightarrow & p(t) & = & v_P \cdot t + l &
\end{array}$$

Eine Stelle $x, 0 \leq x \leq d = p(t)$ auf dem vom Pferd aufgespannten Band besitzt die Geschwindigkeit $v_x(t) = \frac{x}{d} v_P = \frac{x}{v_P \cdot t + l} v_P$.

$$\begin{array}{llrcl}
\text{(Schnecke)} & \Rightarrow & x'(t) & = & v_S + v_{x(t)}(t) \\
 & \Leftrightarrow & x'(t) & = & \frac{v_P}{v_P t + l} x(t) + v_S \\
 & & & & \\
\text{(H)} & \Rightarrow & x'(t) - \frac{v_P}{v_P t + l} x(t) & = & 0 \\
 & \Leftrightarrow & x'(t) & = & \frac{v_P}{v_P t + l} x(t) \\
 & \Rightarrow & x_{(H)}(t) & = & e^{\int \frac{v_P}{v_P t + l} dt} = e^{\ln(v_P t + l)} = v_P t + l \\
 & & & & \\
 & & x & = & c \cdot x_{(H)} \\
\text{(I)} & \Rightarrow & x(t) & = & c(t)(v_P t + l) \\
\text{(II)} & \Rightarrow & x'(t) & = & c'(t)(v_P t + l) + c(t) v_P
\end{array}$$

I und II in Ausgangsgleichung einsetzen:

$$\Leftrightarrow \quad c'(t) = \frac{v_S}{v_P t + l}$$

Substitution mit $u = v_P t + l \Rightarrow dt = \frac{1}{v_P} du$:

$$\Rightarrow \quad c(t) = \frac{v_S}{v_P} \ln(v_P t + l) + c$$

Einsetzen in I:

$$\begin{array}{lrcl}
\Leftrightarrow & x(t) & = & \frac{v_S}{v_P} \ln(v_P t + l)(v_P t + l) + c(v_P t + l) \\
\Leftrightarrow & x(t) & = & v_S \ln(v_P t + l)(t + \frac{l}{v_P}) + c(v_P t + l) \\
\Leftrightarrow & x'(t) & = & v_S + v_S \ln(v_P t + l) + c v_P
\end{array}$$

Bedingung $x'(0) = v_S$:

$$\begin{array}{lrcl}
\Leftrightarrow & v_S + v_S \ln(l) + c v_P & = & v_S \\
\Rightarrow & c & = & -\frac{v_S}{v_P} \ln(l) \\
\Rightarrow & x(t) & = & v_S(t + \frac{l}{v_P})(\ln(v_p t + l) - \ln(l))
\end{array}$$

(b) Erreicht die Schnecke das Pferd? Wenn ja, nach welcher Zeit? Hängt es von den Geschwindigkeiten v_P, v_S ab, ob die Schnecke das Pferd erreicht?

$$\begin{array}{lrcl}
 & x(t) & = & p(t) \\
\Leftrightarrow & v_S(t + \frac{l}{v_P})(\ln(v_p t + l) - \ln(l)) & = & v_P t + l \\
\Leftrightarrow & v_S(t + \frac{l}{v_P})(\ln(v_p t + l) - \ln(l)) & = & v_P(t + \frac{l}{v_P}) \\
\Leftrightarrow & v_S(\ln(v_p t + l) - \ln(l)) & = & v_P \\
\Leftrightarrow & \frac{v_P t + l}{l} & = & e^{\frac{v_P}{v_S}} \\
\Leftrightarrow & t & = & \frac{l}{v_P}(e^{\frac{v_P}{v_S}} - 1)
\end{array}$$

$\Rightarrow$ Die Schnecke erreicht das Pferd zum Zeitpunkt t unabhängig von den Geschwindigkeiten v_S, v_P, solange v_S, v_P das gleiche Vorzeichen besitzen und $v_S, v_P \neq 0$.