

7.2 Löse die Anfangswertprobleme

$$(a) \quad y' + y \sin(x) = 4x^3 e^{\cos(x)}, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2;$$

$$(H) \quad \begin{aligned} y' + y \sin(x) &= 0 \\ \Rightarrow y_{(H)}(x) &= e^{\cos(x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (I) \quad &\Rightarrow \quad y = c \cdot y_{(H)} \\ (II) \quad &\Rightarrow \quad y(x) = c(x) e^{\cos(x)} \quad | \text{ ableiten} \\ &\Rightarrow \quad y'(x) = c'(x) e^{\cos(x)} - c(x) e^{\cos(x)} \sin(x) \end{aligned}$$

I und II in Ausgangsgleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} c'(x) &= 4x^3 \\ \Rightarrow c(x) &= x^4 + c \end{aligned}$$

Einsetzen in I:

$$\Rightarrow y(x) = (x^4 + c) e^{\cos(x)}$$

Bedingung $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow c &= 2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \\ \Rightarrow y(x) &= (x^4 + 2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^4) e^{\cos(x)} \end{aligned}$$

$$(b) \quad xy' + y + xe^x = 0, y(1) = 0.$$

$$(H) \quad \begin{aligned} xy' + y &= 0 \\ \Rightarrow y_{(H)}(x) &= e^{-\ln(x)} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (I) \quad &\Rightarrow \quad y = c \cdot y_{(H)} \\ (II) \quad &\Rightarrow \quad y(x) = c(x) \frac{1}{x} \quad | \text{ ableiten} \\ &\Rightarrow \quad y'(x) = c'(x) \frac{1}{x} - c(x) \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

I und II in Ausgangsgleichung einsetzen:

$$c'(x) = -xe^x$$

partielle Integration mit $f(x) = -x, g(x) = e^x$

$$\Rightarrow c(x) = (1-x)e^x + c$$

Einsetzen in I:

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1-x}{x} e^x + \frac{c}{x}$$

Bedingung $y(1) = 0$:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow c &= 0 \\ \Rightarrow y(x) &= \frac{1-x}{x} e^x \end{aligned}$$

7.3 Bestimme diejenigen Lösungen der Differentialgleichung

$$\dot{x} \cdot \sin(2t) = 2x + 2 \cos(t),$$

die für $t \rightarrow \frac{\pi}{2}$ beschränkt ist.

$$\begin{aligned} \text{(H)} \quad \dot{x} \sin(2t) - 2x &= 0 \\ \Rightarrow x_{(H)}(t) &= e^{\int \frac{2}{\sin(2t)} dt} = \tan(t) \end{aligned}$$

Nachweis über Ableitung (Quotientenregel):

$$\frac{d}{dt} \tan(t) = \frac{\cos^2(t) + \sin^2(t)}{\cos^2(t)} = 1 + \tan^2(t)$$

$$\begin{aligned} x &= c \cdot x_{(H)} \\ \text{(I)} \Rightarrow x(t) &= c(t) \tan(t) && | \text{ ableiten} \\ \text{(II)} \Rightarrow \dot{x}(t) &= c'(t) \tan(t) + c(t)(1 + \tan^2(t)) \end{aligned}$$

I und II in Ausgangsgleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} c'(t) &= \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)} \\ \Rightarrow c(t) &= -\frac{1}{\sin^2(t)} + c \end{aligned}$$

Nachweis über Ableitung (Quotientenregel):

$$\frac{d}{dx} \frac{-1}{\sin(x)} + c = \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$$

Einsetzen in I:

$$\Rightarrow x(t) = \left(-\frac{1}{\sin(t)} + c\right) \tan(t)$$

Da $\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} x(t) = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} (-1 + c) \tan(t)$, folgt aus l'Hospital, dass x nur dann für $t \rightarrow \frac{\pi}{2}$ beschränkt ist, wenn $-1 + c = 0 \Leftrightarrow c = 1$.

\Rightarrow Menge aller Lösungen der Differentialgleichung für $t \rightarrow \frac{\pi}{2}$ beschränkt
 $= \left\{ \left(-\frac{1}{\sin(t)} + 1\right) \tan(t) \right\}$

7.4 Bestimme die Lösungen der Differentialgleichungen

$$y' = \frac{x+y}{x} \quad \text{und} \quad y' = 2\frac{y}{x}$$

(a) durch Betrachten als lineare Differentialgleichung 1. Ordnung.

$$y' = \frac{x+y}{x} :$$

$$\begin{aligned} \text{(H)} \quad y' - \frac{1}{x}y &= 0 \\ \Rightarrow y_{(H)}(x) &= e^{\int \frac{1}{x} dx} = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad y &= c \cdot y_{(H)} \\ \Rightarrow y(x) &= c(x)x \quad | \text{ ableiten} \\ \text{(II)} \quad y'(x) &= c'(x)x + c(x) \end{aligned}$$

I und II in Ausgangsgleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} c'(x) &= \frac{1}{x} \\ \Rightarrow c(x) &= \ln(x) + c \end{aligned}$$

Einsetzen in I:

$$\Rightarrow y(x) = \ln(x)x + cx$$

$$y' = 2\frac{y}{x} :$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow y' &= \frac{2}{x}y \\ \Rightarrow y(x) &= e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2(\ln(x)+c)} = e^{\ln(x)^2} = x^2 \cdot c_2 \end{aligned}$$

(b) durch Substitution $z = \frac{y}{x}$
 $y' = \frac{x+y}{x} :$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow y' &= 1 + \frac{y}{x} \\ \Leftrightarrow y' &= 1 + z \end{aligned}$$

$$z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = zx \Rightarrow y' = z'x + z:$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow z'x + z &= 1 + z \\ \Leftrightarrow z' &= \frac{1}{x} \\ \Rightarrow z &= \ln(x) + c \end{aligned}$$

Rücksubstitution mit $z = \frac{y}{x}$

$$\Leftrightarrow y = \ln(x)x + cx$$

$$y' = 2\frac{y}{x} :$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \quad y' &= 2z \\ z = \frac{y}{x} \Rightarrow y &= zx \Rightarrow y' = z'x + z: \\ \Leftrightarrow \quad z'x + z &= 2z \\ \Leftrightarrow \quad z'x - z &= 0 \\ \Rightarrow \quad z &= x \cdot c\end{aligned}$$

Rücksubstitution mit $z = \frac{y}{x}$

$$\Leftrightarrow \quad y = x^2 \cdot c$$

7.5 Bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Bernoulli'schen Differentialgleichungen:

(a) $(1 + x^2)y' + xy - xy^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad y' = -\frac{x}{1+x^2}y + \frac{x}{1+x^2}y^2$$

Substitution mit $z = y^{-1} - 1$:

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad z' &= -y^{-2}y' \\ \Leftrightarrow \quad z' &= -y^{-2}\left(\frac{x}{1+x^2}y^2 - \frac{x}{1+x^2}y\right) \\ \Leftrightarrow \quad z' &= \frac{x}{1+x^2}(y^{-1} - 1)\end{aligned}$$

z einsetzen:

$$\Leftrightarrow \quad z' = \frac{x}{1+x^2}z$$

Homogene Differentialgleichung:

$$\Rightarrow \quad z = e^{\int \frac{x}{1+x^2} dx}$$

Substitution mit $u = 1 + x^2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2\sqrt{u-1}} du$:

$$\Leftrightarrow \quad z = \sqrt{u}c$$

Rücksubstitution von z und u :

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \quad y^{-1} - 1 &= \sqrt{1+x^2}c \\ \Leftrightarrow \quad y &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}c+1}\end{aligned}$$

(b) $y' + y + (\sin(x) + e^x)y^3 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad y' = -y - y^3(\sin(x) + e^x)$$

Substitution mit $z = y^{-2}$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad z' &= -2y^{-3}y' \\ \Leftrightarrow \quad z' &= 2y^{-3}(y + y^3(\sin(x) + e^x)) \\ \Leftrightarrow \quad z' &= 2y^{-2} + 2(\sin(x) + e^x) \end{aligned}$$

z einsetzen:

$$\Leftrightarrow \quad z' = 2z + 2(\sin(x) + e^x)$$

Über Homogene Differentialgleichung berechnen:

$$\begin{aligned} z' - 2z &= 0 \\ (1) \Rightarrow \quad z_H &= e^{\int 2dx} = e^{2x} \\ \Leftrightarrow \quad z'_H &= 2e^{2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= c \cdot z_H \\ \Leftrightarrow \quad z' &= c' z_H + c z'_H \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad c' e^{2x} &= 2(\sin(x) + e^x) \\ \Leftrightarrow \quad c' &= 2(\sin(x) + e^x) e^{-2x} \\ \Leftrightarrow \quad c &= 2 \int \frac{\sin(x) + e^x}{e^{2x}} dx \\ \Leftrightarrow \quad c &= 2 \left(\int e^{-x} dx + \int \frac{\sin(x)}{e^{2x}} dx \right) \\ \Leftrightarrow \quad c &= -2e^{-x} + c + \int \frac{\sin(x)}{e^{2x}} dx \end{aligned}$$

Aus doppelter partieller Integration von $\int \frac{\sin(x)}{e^{2x}} dx$ mit $f(x) = e^{-2x}$, $g_1(x) = \sin(x)$, $g_2(x) = \cos(x)$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \int e^{-2x} \sin(x) &= -e^{-2x} \cos(x) - 2e^{-2x} \sin(x) - 4 \int e^{-2x} \sin(x) \\ \Leftrightarrow \quad \int e^{-2x} \sin(x) &= -\frac{\cos(x) + 2 \sin(x)}{5e^{2x}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad c = -2e^{-x} + c - \frac{2(\cos(x) + 2 \sin(x))}{5e^{2x}}$$

In (1) einsetzen:

$$\Rightarrow \quad z = -2e^x + ce^{2x} - \frac{2}{5}(\cos(x) + 2 \sin(x))$$

Rücksubstitution von z :

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{\sqrt{-2e^x - \frac{2}{5}(\cos(x) + 2 \sin(x)) + ce^{2x}}}$$