11.3 (a) Sei $D \coloneqq \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x \neq 0\}$. Bestimme den Gradienten Δf der Funktion $f : D \to \mathbb{R}, f(x,y,z) \coloneqq y\sin(xz^2) + \frac{x\cos(y)}{y}$.

$$\Delta f = \begin{pmatrix} y\cos(xz^2)z^2 + \frac{\cos(y)}{y} \\ \sin(xz^2) - x(\frac{\sin(y)}{y} + \frac{\cos(y)}{y^2}) \\ y\cos(2xz) \end{pmatrix}$$

(b) Entscheide, ob es partiell differenzierbare Funktionen auf R^2 bzw. R^3 gibt mit

$$\Delta f(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ -x+y \end{pmatrix} \quad \text{bzw. } \Delta f(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$$

Bestimme gegebenenfalls ein solches f.

$$\begin{array}{rrcl} & \Delta f(x,y) & = & \begin{pmatrix} x+y \\ -x+y \end{pmatrix} \\ \Rightarrow & f(x,y) & = & \int x + ydx \\ \Leftrightarrow & f(x,y) & = & \int -x + ydy \\ \Rightarrow & \int x + ydx & = & \int -x + ydy \\ \Leftrightarrow & \frac{x^2}{2} + yx & = & \frac{y^2}{2} - yx \end{array}$$

$\Rightarrow$ Es existiert keine partiell differenzierbare Funktion $f \in \mathbb{R}^2$
mit $\Delta f(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ -x+y \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rrcl} & \Delta f(x,y,z) & = & \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \\ \Rightarrow & f(x,y,z) & = & \int yzdx \\ & & = & \int xzdy \\ & & = & \int xydz \\ \Rightarrow & f(x,y,z) & = & xyz \end{array}$$

11.4 Sei $c > 0$, und $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien zweimal stetig differenzierbar. Zeige: Die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u(t,x) \coloneqq f(x+ct) + g(x-ct)$ ist eine Lösung der *Wellengleichung*

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t,x) = c^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x)$$

$$\begin{array}{rrcl} & \frac{\partial^2}{\partial t^2}u & = & \frac{\partial^2}{\partial t^2}(f(x+ct)) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}(g(x-ct)) \\ & \frac{\partial^2}{\partial t^2}u & = & c(\frac{\partial}{\partial t}(f'(x+ct)) + \frac{\partial}{\partial t}(g'(x-ct))) \\ \text{(I)} & \frac{\partial^2}{\partial t^2}u & = & c^2(f''(x+ct) + g''(x-ct)) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial^2}{\partial x^2}u & = & \frac{\partial^2}{\partial x^2}(f(x+ct)) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(g(x-ct)) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}u & = & \frac{\partial}{\partial x}(f'(x+ct)) + \frac{\partial}{\partial x}(g'(x-ct)) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}u & = & f''(x+ct) + g''(x-ct) \end{array}$$

In (I) einsetzen:

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}u = c^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}u$$

11.5 Bestimme Lage und Art der lokalen Extrema folgender Funktionen:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) \coloneqq xy^2 - 4xy + x^4$

Kandidaten finden:

$$\begin{array}{lrcl} & \nabla f & = & \begin{pmatrix} y^2 + 4y + 4x^3 \\ 2xy - 4x \end{pmatrix} \\ \Rightarrow & 0 & = & 2xy - 4x \\ \Leftrightarrow & 0 & = & x(2y-4) \\ \Rightarrow & y_1 & = & 2 \\ \Rightarrow & x_2 & = & 0 \\ \\ & 0 & = & y^2 - 4y + 4x^3 \end{array}$$

$y_1 = 2$ einsetzen:

$$\begin{array}{lrcl} \Rightarrow & 4 & = & 4x^3 \\ \Rightarrow & x_1 & = & 1 \end{array}$$

$x_2 = 0$ einsetzen:

$$\begin{array}{lrcl} \Rightarrow & 0 & = & y^2 - 4y \\ \Leftrightarrow & 0 & = & y(y-4) \\ \Rightarrow & y_2 & = & 0 \\ \Rightarrow & y_3 & = & 4 \end{array}$$

$$\text{Hess } f = \begin{pmatrix} 12x^2 & 2y-4 \\ 2y-4 & 2x \end{pmatrix}$$

Kandidat $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ einsetzen:

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16$$

$\Rightarrow$ indefinite Hesse matrix, also ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Sattelpunkt.

Kandidat $\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$ einsetzen:

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix}0 & 4\\4 & 0\end{vmatrix} \quad = \quad -16$$

$\Rightarrow$ indefinite Hesse matrix, also ist $\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$ ein Sattelpunkt.

Kandidat $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ einsetzen:

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix}12 & 0\\0 & 2\end{vmatrix} \quad = \quad 24$$

$\Rightarrow$ positiv definite Hesse matrix, also ist $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ein lokales striktes Minimum.

(b) $g : (0,\pi) \times (0,\pi) \to \mathbb{R}, g(x,y) \coloneqq \sin(x) + \sin(y) + \sin(x+y)$

Kandidaten finden:

$$\begin{array}{llrcl} & & \nabla g & = & \begin{pmatrix}\cos(x)+\cos(x+y)\\\cos(y)+\cos(x+y)\end{pmatrix}\\ \text{(I)} & \Rightarrow & \cos(x) & = & -\cos(x+y)\\ & \Rightarrow & \cos(y) & = & -\cos(x+y)\\ & \Rightarrow & x & = & y\end{array}$$

In (I) einsetzen:

$$\begin{array}{lrcll} \Rightarrow & \cos(x) & = & -\cos(2x) & \\ \Leftrightarrow & \cos(x) & = & -1(\cos(x)^2 - \sin(x)^2) & \mid +\cos(x)^2\\ \Leftrightarrow & \cos(x) + 2\cos(x)^2 & = & 1 & \mid \div 2 + \frac{1}{16}\\ \Leftrightarrow & \frac{1}{16} + \frac{\cos(x)}{2} + \cos(x)^2 & = & \frac{9}{16} & \\ \Leftrightarrow & (\frac{1}{4} + \cos(x))^2 & = & \frac{9}{16} & \\ \Rightarrow & x & = & \frac{\pi}{3} & \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} & \text{Hess } f & = & \begin{pmatrix}-\sin(x)-\sin 2x & -\sin(2x)\\ -\sin(2x) & -\sin(x)-\sin(x+y)\end{pmatrix}\\ \Leftrightarrow & \sin(x)^2 & = & \begin{vmatrix}-\sin(x) & 0\\ 0 & -\sin(x)\end{vmatrix}\end{array}$$

Kandidat einsetzen:

$$\Rightarrow \quad \sin(\tfrac{\pi}{3}) \quad > \quad 0$$

$\Rightarrow$ Hess f ist negativ definit, daraus folgt das der Kandidat $\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ein strikes lokales Maximum ist.

11.6 (a) Berechne die Jacobi-Matrix der Abbildungen (Polar- bzw. Kugelkoordinaten)

i. $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, F(r,\varphi) \coloneqq (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))^T$

$$J_f(r,\varphi)\begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -r\sin(\varphi)\\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi)\end{pmatrix}$$
$$\nabla F_2 = \begin{pmatrix} r\sin(\varphi)\\ r\cos(\varphi)\end{pmatrix}$$

ii. $G:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3, G(r,\theta,\varphi) := (r\cos(\theta)\cos(\varphi), r\cos(\theta)\sin(\varphi), r\sin(\theta))^T$
Gib die partiellen Ableitungen von F_2 und G_3 an, wobei $F=(F_1,F_2)^T$ und $G=(G_1,G_2,G_3)^T$.

$$J_G(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix}\cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\cos(\varphi) & -r\cos(\theta)\sin(\varphi)\\ \cos(\theta)\sin(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) & r\cos(\theta)\cos(\varphi)\\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0\end{pmatrix}$$
$$\nabla G_3 = \begin{pmatrix}\sin(\theta)\\ r\cos(\theta)\\ 0\end{pmatrix}$$

(b) Bestimme, in welchen Punkten die Jacobi-Matrizen aus (a) invertierbar sind.

$$\begin{vmatrix}\cos(\varphi) & -r\sin(\varphi)\\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi)\end{vmatrix} = r(\cos(\varphi)^2+\sin(\varphi)^2) = r$$
$\Rightarrow$ die Determinante ist 0 bei $r=0$, daraus folgt das J_f invertierbar ist für alle $r\neq 0$

$$\begin{aligned}
d &:= |\text{Hess } f|\\
d &= \begin{vmatrix}\cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\cos(\varphi) & -r\cos(\theta)\sin(\varphi)\\ \cos(\theta)\sin(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) & r\cos(\theta)\cos(\varphi)\\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0\end{vmatrix}\\
\Leftrightarrow\ d &= \sin(\theta)(-r^2\sin(\theta)\cos(\theta)\cos(\varphi)^2 - r^2\sin(\theta)\cos(\theta)\sin(\varphi)^2)
\end{aligned}$$

$$-r\cos(\theta)(r\cos(\theta)^2\cos(\varphi)^2) + r\cos(\theta)^2\sin(\theta)^2$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\ d &= -r^2\sin(\theta)^2\cos(\theta)(\cos(\varphi)^2+\sin(\varphi)^2) - r^2\cos(\theta)^2\cos(\theta)(\cos(\varphi)^2+\sin(\varphi)^2)\\
\Leftrightarrow\ d &= r^2\cos(\theta)(-\sin(\theta)^2(\cos(\varphi)^2+\sin(\varphi)^2) - \cos(\theta)^2(\cos(\varphi)^2+\sin(\varphi)^2))\\
\Leftrightarrow\ d &= -r^2\cos(\theta)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow J_G$ ist invertierbar für $r\neq 0$ und $\theta\neq\frac{(1+2n)\pi}{2}n\in\mathbb{N}$