Übung 10

10.2 Eine (idealisiert homogene) Kette der Länge l liegt auf einem horizontalen, reibungsfreien Tisch, wobei ein Stück Kette der Länge a über den Rand hängt. Wie lange dauert es, bis die kette vom Tisch geglitten ist?

Hinweis: Bezeichne die Gesamtmasse der Kette mit m und die Länge des überhängenden Stücks zur Zeit t mit $y(t)$. Berechne die Masse $m_{ü}(t)$ des überhängenden Stücks zur Zeit t. Die Gravitationskraft $m_{ü}(t)g$ muss dann gleich $F = m\ddot{y}(t)$ sein.

$$\begin{array}{crcl} & m_{ü}(t) & = & y(t)\frac{m}{l} \\ & F & = & m\ddot{y}(t) \\ \Leftrightarrow & F & = & m_{ü}(t)g \\ \Rightarrow & m\ddot{y}(t) & \overset{!}{=} & m_{ü}(t)g \\ \Leftrightarrow & \ddot{y}(t) - y(t)\frac{g}{l} & = & 0 \end{array}$$

Homogene Differentialgleichung lösen:

$$\begin{array}{crcl} \Rightarrow & p(\lambda) & = & \lambda^2 - \frac{g}{l} = 0 \\ \Rightarrow & \lambda & = & \pm\sqrt{\frac{g}{l}} \\ \Rightarrow & y(t) & = & c_1 e^{t\sqrt{\frac{g}{l}}} + c_2 e^{-t\sqrt{\frac{g}{l}}} \end{array}$$

Bedingung $y(0) = a$ einsetzen, da die Länge des überhängenden Stücks der Kette zum Zeitpu

$$\begin{array}{crcl} \Rightarrow & c_1 + c_2 & = & a \\ \Leftrightarrow & c_1 & = & a - c_2 \\ \Rightarrow & y(t) & = & (a - c_2)e^{t\sqrt{\frac{g}{l}}} + c_2 e^{-t\sqrt{\frac{g}{l}}} \end{array}$$

Da die Kette eine idealisiert homogene Verteilung ihres Gewichts aufweist, folgt $\ddot{m}_{ü}(t) \overset{!}{=} 0$:

$$\begin{array}{crcl} & m_{ü}(t) & = & y(t)\frac{m}{l} \\ \Rightarrow & \dot{m}_{ü}(t) & = & \sqrt{\frac{g}{l}}\frac{(a-c_2)m}{l}e^{t\sqrt{\frac{g}{l}}} - \sqrt{\frac{g}{l}}\frac{c_2 m}{l}e^{-t\sqrt{\frac{g}{l}}} \\ \Rightarrow & \ddot{m}_{ü}(t) & = & \frac{mg}{l^2}\left((a - c_2)e^{t\sqrt{\frac{g}{l}}} + c_2 e^{-t\sqrt{\frac{g}{l}}}\right) \overset{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow & 0 & = & ae^{t\sqrt{\frac{g}{l}}} - c_2 e^{t\sqrt{\frac{g}{l}}} + c_2 e^{-t\sqrt{\frac{g}{l}}} \\ \Leftrightarrow & 0 & = & c_2(e^{-t\sqrt{\frac{g}{l}}} - e^{t\sqrt{\frac{g}{l}}}) \\ \Leftrightarrow & c_2 & = & 0 \end{array}$$

c_2 in y einsetzen:

$$\begin{array}{crcl} \Rightarrow & y(t) & = & ae^{t\sqrt{\frac{g}{l}}} \end{array}$$

Zum Zeitpunkt des Abrutschen, muss $y(t) = l$ betragen (Die gesamte Kette ist vom Tisch ge

$$\begin{array}{crcl} & ae^{t\sqrt{\frac{g}{l}}} & \overset{!}{=} & l \\ \Leftrightarrow & t\sqrt{\frac{g}{l}} & = & \ln(\frac{l}{a}) \\ \Leftrightarrow & t & = & \frac{\ln(\frac{l}{a})}{\sqrt{\frac{g}{l}}} \end{array}$$

10.3 Löse die folgenden Anfangswertaufgaben:

(a) $\ddot{y} + 2\dot{y} - 3y = e^{2t}, y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1.$

(b) $\ddot{y} + y = t + 2\cos(t), y(\pi) = 2\pi, \dot{y}(\pi) = \pi.$

10.4 (a) Stelle eine homogene lineare Differentialgleichung 3.Ordnung auf, so dass eine Lösungsbasis gegeben ist durch $y_1(t) = 1, y_2(t) = t, y_3(t) = e^t$.

(b) Finde eine homogene lineare Differentialgleichung, so dass $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y_1(t) = t$ und $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y_2(t) = \sin(t)$ Lösungen sind.

(c) Warum ist es in (b) unmöglich, eine homogene lineare Differentialgleichung 2.Ordnung aufzustellen, selbst wenn man zeitabhängige Koeffizienten zulässt, d.h. wenn man eine Differentialgleichung der Form

$$\ddot{y} + a_1(t)\dot{y} + a_0(t)y = 0$$

sucht, mit $a_0, 1_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

(d) Warum ist es in (b) auch nicht möglich, eine homogene lineare Differentialgleichung 3.Ordnung aufzustellen, selbst wenn man zeitabhängige Koeffizienten zulässt?

Hinweis zu (c) und (d): Wronski-Determinante, Satz 10.1, n Lösungen $y_1, \ldots, y_n$ einer homogenen linearen Differentialgleichung n.Ordnung sind genau dann linear unabhängig, wenn

$$\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \ldots & y_n(t) \\ \dot{y}_1(t) & \dot{y}_2(t) & \ldots & \dot{y}_n(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \neq 0$$

für alle t. Was passiert hier für $t = 0$?

10.5 Eine gedämpfte Schwingung ohne Anregung sei modelliert durch

$$\ddots y + a\dot{y} + 4y = 0, \quad y(0) = 5, \quad \dot{y}(0) = -1$$

Bestimme den Parameter $a > 0$ so, dass gerade der aperiodische Grenzfall eintritt, und berechne die Lösung für diesen Fall. Stelle den zeitlichen Verlauf der Schwingungen graphisch dar.