

3.3 (a) Bestimme die Polardarstellungen von $\frac{i\sqrt{3}-1}{2}$ und von $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^5$.

$$\begin{aligned} & \frac{i\sqrt{3}-1}{2} \\ &= \frac{(i\sqrt{3}-1)i\sqrt{3}}{2i\sqrt{3}} \\ &= \frac{-3-i\sqrt{3}}{2i\sqrt{3}} \\ &= \frac{-3}{2i\sqrt{3}} - \frac{i\sqrt{3}}{2i\sqrt{3}} \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{1.5}{i\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{\left(-\frac{1.5}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} \\ \Leftrightarrow |z| &= \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow |z| &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \pi - \sin^{-1}\left(\left|\frac{-1.5}{\sqrt{3}}\right|\right) \wedge \alpha = \pi - \cos^{-1}\left(\left|\frac{-1}{2}\right|\right) \wedge \alpha = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{\frac{-1.5}{\sqrt{3}}}{-0.5}\right) \\ \alpha &= \frac{2}{3}\pi \\ z &= \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) i \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) \end{aligned}$$

(b) Bestimme alle Lösungen der Gleichung $z^3 = -8$.

3.4 Berechne sämtliche möglichen Produkte aus den gegebenen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & t \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei t ein reeller Parameter ist.

$$\begin{aligned} & A \times B \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} A \times C \begin{pmatrix} 3 & t-3 \\ -3 & 2t-1 \end{pmatrix} \\ & B^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} B \times D \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ & C \times A \begin{pmatrix} -2+2t & -4 & -6+t \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} C \times B \begin{pmatrix} 2t & -2-t \\ 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} C \times D \begin{pmatrix} -2-t & -4+t & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ & D \times C \begin{pmatrix} 1 & t-1 \\ 3 & -t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.5 Berechne

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

für $n = 1, 2, 3, 4$, stelle eine Vermutung für eine Formel für allgemeines $n \in \mathbb{N}$ und beweise diese Formel durch Induktion.

 $n = 1, 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^1 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^4 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

IA: $n = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

IV:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

IS: $n \rightarrow n + 1$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.6 Die *Pauli-Matrizen* sind definiert durch

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mit der imaginären Einheit i . zeige für alle $j, k = 1, 2, 3$:

$$\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk} E_2 + i \sum_{l=1}^3 \epsilon_{jkl} \sigma_l,$$

wobei δ_{jk} das Kronecker-Delta ist und

$$\epsilon_{jkl} \begin{cases} 0 & \text{falls mindestens 2 der Indizes } j, k, l \text{ denselben Wert haben,} \\ 1 & \text{falls } (j, k, l) \in \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}, \\ -1 & \text{falls } (j, k, l) \in \{(3, 2, 1), (2, 1, 3), (1, 3, 2)\}, \end{cases}$$

das *Levi-Civita-Symbol*.