

2.5 Bestimme die reellen Lösungen der Gleichungen

(a) $\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} = \sqrt{2x-12}$

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} = \sqrt{2x-12} && |^2 \\ \Leftrightarrow & (\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x})^2 = 2x-12 \\ \Leftrightarrow & (x+1) - 2\sqrt{x+1}\sqrt{9-x} + (9-x) = 2x-12 \\ \Leftrightarrow & x+1-x+9-2\sqrt{(x+1)(9-x)} = 2x-12 \\ \Leftrightarrow & 10-2\sqrt{(x+1)(9-x)} = 2x-12 && |/-2 \\ \Leftrightarrow & -5+\sqrt{(x+1)(9-x)} = -x+6 && |+5 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{(x+1)(9-x)} = -x+11 && |^2 \\ \Leftrightarrow & (x+1)(9-x) = (-x+11)^2 \\ \Leftrightarrow & -x^2+8x+9 = 11^2-22x+x^2 && |-x^2; +22x; -11^2 \\ \Leftrightarrow & -2x^2+30x-112 = 0 && |/(-2) \\ \Leftrightarrow & x^2-15x+56 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x_{1/2} &= -\frac{-15}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-15}{2}\right)^2 + 56} = 7.5 \pm 0.5 \\ &\Rightarrow x_1 = 7 \wedge x_2 = 8 \end{aligned}$$

(b) $|x-3| + |x+2| - |x-4| = 3$

Wenn man $|x-3|$, $|x+2|$ und $|x-4|$ als drei separate Abbildungen $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ begreift, so ergibt sich für:

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} x-3 & x \geq 3 \\ -x-3 & x < 3 \end{cases} \\ g(x) &= \begin{cases} x+2 & x \geq -2 \\ -x-2 & x < -2 \end{cases} \\ h(x) &= \begin{cases} x-4 & x \geq 4 \\ -x+4 & x < 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Wenn man $gh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $gh(x) := g(x) - h(x)$ definiert, folgt:

$$gh(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 4 \\ 2x-7 & 3 < x < 4 \\ -1 & x \leq 3 \end{cases}$$

Definiert man weiter $fgh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $fgh(x) := gh(x) + f(x)$, folgt:

$$fgh(x) = \begin{cases} x+3 & x \geq 4 \\ 3x-5 & 3 < x < 4 \\ x+1 & -2 \leq x \leq 3 \\ -x-3 & x < -2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x+3=3 &\Leftrightarrow x=0, & 0 \not\leq 4 | \times \\ 3x-5=3 &\Leftrightarrow x=\frac{8}{3}, & 3 \not< \frac{8}{3} < 4 | \times \\ x+1=3 &\Leftrightarrow x=2, & -2 \leq 2 \leq 3 | \checkmark \\ -x-3=3 &\Leftrightarrow x=-6, & -6 < -2 | \checkmark \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_1 = 2 \wedge x_2 = -6$$

2.6 bestimme sämtliche reellen Lösungen der Ungleichungen

(a) $\frac{2}{x+1} < \frac{1}{x-3}$

Es gilt:

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b} \Leftrightarrow a > b$$

$$-\frac{1}{a} < -\frac{1}{b} \Leftrightarrow -a > -b$$

Damit $\frac{2}{x+1}$ und $\frac{1}{x-3}$ beide entweder positiv oder negativ sind, muss $x > -1 \wedge x > 3 = x < 3$ bzw. $x < -1 \wedge x < 3 = x < -1$ sein.

Daraus ergibt sich für $x < -1 \vee x > 3$:

$$\begin{aligned} &\frac{2}{x+1} < \frac{1}{x-3} \\ \Leftrightarrow &\frac{x+1}{2} > \frac{x-3}{1} \\ \Leftrightarrow &\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} > x - 3 & | -\frac{1}{2}x; +3 \\ \Leftrightarrow &3.5 > 0.5x & | * 2 \\ \Leftrightarrow &7 > x \\ \Leftrightarrow &x < 7 \end{aligned}$$

Innerhalb des restlichen Intervalls $(-1, 3)$ nimmt $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{2}{x+1}$ alle Werte zwischen $(\frac{1}{2}, \infty)$ und $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) := \frac{1}{x-3}$ alle Werte zwischen $(-\frac{1}{4}, -\infty)$ an.

Somit gilt: $\forall x \in \mathbb{R} -1 < x < 3 : (f(x) \not< h(x))$.

Insgesamt gilt: $\forall x \in \mathbb{R}_{x < 7} \setminus \{-1 \leq x \leq 3\} : (\frac{2}{x+1} < \frac{1}{x-3})$

(a) ORIGINAL - MORITZ

Da $\frac{2}{x+1} > 0$ mit $x \in \mathbb{R}; x > -1$ Und $\frac{1}{x-3} < 0$ mit $x \in \mathbb{R}; x < 3$ Gibt es keine reellen Lösungen in $x \in \mathbb{R}; -1 < x < 3$

Nullpunkt bestimmen:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x+1} &< \frac{1}{x-3} \\ \Leftrightarrow \frac{2x-6}{x+1} &< 1 && | * (x-3) \end{aligned}$$

Polynom Division:

$$\begin{array}{r} (2x-6) : (x+1) = 2 + \frac{-8}{x+1} \\ \underline{-2x-2} \\ -8 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2 - \frac{8}{x+1} &< 1 \\ \Leftrightarrow 1 &< \frac{8}{x+1} && | -1 + \frac{8}{x+1} \\ \Leftrightarrow x+1 &< 8 && | x+1 \\ \Leftrightarrow x &< 7 && | -1 \end{aligned}$$

Somit gilt $\forall x \in \mathbb{R}; (x < 7; x \notin \{-1 \leq x \leq 3\}) : \frac{2}{x+1} < \frac{1}{x-3}$ (b) $(x+2)(4-x)(x-2)^2 > 0$ da x^2 für $x \in \mathbb{R}$ immer ≥ 0 , kann der Term nur negativ werden, wenn $(x+2)$ oder $(4-x)$ negativ sind.Die Bedingung erfüllen alle Elemente von $M\{x \in \mathbb{R}; x \neq 2, (x+2)(4-x) > 0\}$

$$\begin{aligned} (x+2)(4-x) &> 0 \\ \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 8 &> 0 && | * (-1) \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 &< 0 \end{aligned}$$

 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := x^2 - 2x - 8$ stellt eine nach oben geöffnete Parabel da. Somit müssen alle Werte zwischen den beiden Nullstellen < 0 sein.

Die Nullstellen lassen sich direkt aus der Parameterform oben ablesen.

$$\Rightarrow x_1 = (-2) \wedge x_2 = 4$$

Somit gilt $\forall x \in \mathbb{R}; (-2 < x < 4, x \neq 2) : ((x+2)(4-x)(x-2)^2 > 0)$

2.7 Beweise durch Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

- (a) $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$.
(b) $\sum_{k=0}^n (q^k) = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (wobei $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$).
(c) $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ ist durch 11 teilbar.

IA mit $n = 1$:

$$\begin{aligned} & 6^{2 \cdot 1 - 2} + 3^{1+1} + 3^{1-1} \pmod{11} = 0 \\ \Leftrightarrow & 6^0 + 3^2 + 3^0 \pmod{11} = 0 \\ \Leftrightarrow & 1 + 9 + 1 = 11 \pmod{11} = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

IS:

$$\begin{aligned} & 6^{2(n+1)-2} + 3^{n+1+1} + 3^{n+1-1} \\ &= 6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n \\ &= 6^2 * 6^{2n-2} + 3 * 3^{n+1} + 3 * 3^{n-1} \\ &= 3 * 12 * 6^{2n-2} + 3 * 3^{n+1} + 3 * 3^{n-1} \\ &= 3 * (11 * 6^{2n-2} + 6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}) \\ &= 3 * 11 * 6^{2n-2} + 3 * (6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}) \end{aligned}$$

Da sowohl $3 * 11 * 6^{2n-2}$, als auch wie im Induktionsanfang gezeigt $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ und somit auch $3 * (6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1})$ Vielfache von 11 sind, muss die Gesamtsumme ebenfalls durch 11 teilbar sein.

- 2.8 (a) Berechne $|5 + 12i|$
 $|5 + 12i| = \sqrt{(5^2 + 12^2)} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$

- (b) Berechne $\sum_{k=2}^4 (2i)^k$
 $\sum_{k=2}^4 (2i)^k = (2i)^2 + (2i)^3 + (2i)^4 = -4 - 6i + 16 = 12 - 6i$

- (c) Bestimme Real und Imaginärteil von $\frac{1+i\sqrt{2}}{1-i\sqrt{2}} + \frac{1-i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{2}}$.

$$\begin{aligned} z &= 1 + i\sqrt{2} = a + ib, \\ \bar{z} &= 1 - i\sqrt{2} = a - ib \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} &= \frac{z^2 + \bar{z}^2}{z\bar{z}} = \frac{a^2 + 2iab - b^2 + a^2 - 2iab - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{2a^2 - 2b^2}{a^2 + b^2} = \frac{2(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2} \\ &\Rightarrow \frac{2(1^2 - \sqrt{2}^2)}{1^2 + \sqrt{2}^2} = \frac{2 - 4}{1 + 2} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Re: $-\frac{2}{3}$,
Im: 0

(d) Bestimme Real und Imaginärteil von $\frac{1+i^{15}}{2-i^{21}}$.

$$\begin{aligned}\frac{1+i^{15}}{2-i^{21}} &= \frac{1+(-1)^{7.5}}{2-(-1)^{10.5}} = \frac{1+(-1)^7 * (-1)^{\frac{1}{2}}}{2-(-1)^{10} * (-1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1+(-1) * \sqrt{-1}}{2-(1) * \sqrt{(-1)}} = \frac{1-i}{2-i} \\ &= \frac{(1-i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2-i}{5} = 0.4 + 0.2i\end{aligned}$$

Re: 0.4,
Im: 0.2