3.3 Berechne die folgenden Integrale:

(a) $\int_0^\pi \cos(x) \cdot e^{\sin(x)} dx$

Die Kettenregel rückwärts angewandt ergibt:

$$
\begin{aligned}
&= e^{\sin(x)} dx \Big|_0^\pi \\
&= 0 - 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

(b) $\int_{-1}^1 x^2 e^{4x} dx$

dreifache partielle Integration mit $f(x) = x^2, g(x) = e^{4x}$

$$
\begin{aligned}
&= x^2 \frac{1}{4} e^{4x} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 2x \frac{1}{4} e^{4x} dx \\
&= x^2 \frac{1}{4} e^{4x} \Big|_{-1}^1 - 2x \frac{1}{16} e^{4x} \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 2 \frac{1}{16} e^{4x} dx \\
&= x^2 \frac{1}{4} e^{4x} \Big|_{-1}^1 - 2x \frac{1}{16} e^{4x} \Big|_{-1}^1 + 2 \frac{1}{64} e^{4x} \Big|_{-1}^1 - 0 \\
&= \frac{e^4}{4} - \frac{1}{4e^4} - \frac{2e^4}{16} - \frac{2}{16e^4} + \frac{2e^4}{64} - \frac{2}{64e^4} \\
&= \frac{16e^8 - 16 - 8e^8 - 8 + 2e^8 - 2}{64e^4} \\
&= \frac{5e^4}{32} - \frac{13}{32e^4} \\
&\approx 8.5235
\end{aligned}
$$

(c) $\int_0^1 \ln(x) dx$

partielle Integration mit $f(x) = \ln(x), g(x) = 1$:

$$
\begin{aligned}
&= \ln(x) x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{x} x dx \\
&= \ln(x) x \Big|_0^1 - \int_0^1 1 dx \\
&= 0 - 0 - 1 \\
&= -1
\end{aligned}
$$

(d) $\int_0^\infty \frac{1}{4\sqrt{x}+\sqrt{x}^3}dx$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{4\sqrt{x}+\sqrt{x}^3}dx$$

Substitution mit $\sqrt{x} = a \Rightarrow dx = 2a$:

$$= \int_0^\infty \frac{2a}{4a+a^3}da$$
$$= \int_0^\infty \frac{2}{4+a^2}da$$

Substitution mit $a^2 = 4s^2 \Rightarrow da = 2$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{1+s^2}ds$$
$$= \arctan(s)\Big|_0^\infty$$
$$= \frac{\pi}{2}$$

3.4 Nutze das Integralvergleichskriterium zur Entscheidung, ob die folgenden Reihen konvergieren:

(a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$

Nach dem Integralvergleichskriterium konvergiert $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$, wenn $f(n) = \frac{1}{n\ln(n)}$ monoton fallend ist und $\int_2^\infty \frac{1}{n\ln(n)}dn$ konvergiert.

Quotienten- und Produktregel:

$$\Rightarrow f'(n) = -\frac{\ln(n)+1}{n^2\ln(n)^2}$$

$\Rightarrow f(n)$ ist monoton fallend, da $f'(n) < 0$ für $n \in \mathbb{N}$.

$$\int_2^\infty \frac{1}{n\ln(n)}dn$$

Substitution mit $a = \ln(n) \Rightarrow dn = e^a$

$$= \int_{\ln(2)}^\infty \frac{e^a}{e^a a}da$$
$$= \int_{\ln(2)}^\infty \frac{1}{a}da$$
$$= \ln(a)\Big|_{\ln(2)}^\infty$$
$$= (\lim_{a\to\infty} a) - \ln(\ln(2))$$

$\Rightarrow$ divergiert.

(b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^2}$

Nach dem Integralvergleichskriterium konvergiert $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)^2}$, wenn $g(n) = \frac{1}{n\ln(n)^2}$ monoton fallend ist und $\int_2^\infty \frac{1}{n\ln(n)^2} dn$ konvergiert.

Quotienten- und Produktregel:

$$\Rightarrow g'(n) = -\frac{\ln(n)+2}{n^2\ln(n)^3}$$

$\Rightarrow g(n)$ ist monoton fallend, da $g'(n) < 0$ für $n \in \mathbb{N}$.

$$\int_2^\infty \frac{1}{n\ln(n)^2} dn$$

Substitution mit $a = \ln(n) \Rightarrow dn = e^a$

$$\begin{aligned} &= \int_{\ln(2)}^\infty \frac{e^a}{e^a a^2} da \\ &= \int_{\ln(2)}^\infty \frac{1}{a^2} da \\ &= -\, a^{-1} \Big|_{\ln(2)}^{\infty} \\ &= \frac{1}{\ln(2)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ konvergiert.

3.5 Berechne die folgenden Determinanten:

$$A := \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}, B := \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

A :

Laplace'scher Entwicklungssatz der $k = 3$. Spalte

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} \det(A_{jk}) \\ &= -\det(A_{23}) \\ &= -\det\left(\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}\right) \end{aligned}$$

Regel von Sarrus:

$$\begin{aligned}&= -\,(4 - 18 + 5 - 30 - 3 + 4)\\&=38\end{aligned}$$

B :

$$\begin{aligned}\det(B) =&0 \cdot \det(B_{11}) - 1 \det(B_{12}) + 2 \cdot \det(B_{13}) - 3 \cdot \det(B_{14})\\=& -\det\left(\begin{vmatrix}-1 & 1 & 2\\-2 & 0 & 1\\-3 & -1 & 0\end{vmatrix}\right) + 2\det\left(\begin{vmatrix}-1 & 0 & 2\\-2 & -1 & 1\\-3 & -2 & 0\end{vmatrix}\right) - 3\det\left(\begin{vmatrix}-1 & 0 & 1\\-2 & -1 & 0\\-3 & -2 & 1\end{vmatrix}\right)\end{aligned}$$

Regel von Sarrus:

$$\begin{aligned}=&(-3 + 4 - 1) + 2(8 - 6 - 2) - 3(-1 + 4 - 3)\\=&0\end{aligned}$$

3.6 Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt nilpotent, falls $A^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$ ist, und idempotent, falls $A^2 = A$ ist. Zeige:

(a) $\det(A^k) = (\det A)^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Induktion:
IV: $\det(A^k) = det(A)^k$
IA $(k = 1)$: $\det(A) = \det(A)$
IS $(k \to k + 1)$:

$$\begin{aligned}&& \det(A^{k+1}) &= \det(A)^{k+1}\\ \Leftrightarrow && \det(A^k + A) &= \det(A)^k \cdot \det(A)\\ \Leftrightarrow && \det(A^k) \cdot \det(A) &= \det(A)^k \cdot \det(A)\\ \Leftrightarrow && \det(A^k) &= \det(A)^k\end{aligned}$$

(b) A nilpotent $\Rightarrow \det(A) = 0$.
nilpotent: $A^k = 0 \Leftrightarrow \det(A^k) = 0 \Leftrightarrow \det(A)^k = 0 \Rightarrow \det(A) = 0$

(c) A idempotent $\Rightarrow \det(A) \in \{0, 1\}$; A idempotent und $\det(A) = 1 \Leftrightarrow A = E_n$.
$A^2 = A \Rightarrow A^k = A \Leftrightarrow \det(A^k) = \det(A) \Leftrightarrow \det(A)^k = \det(A)$
Da $x^k = x$ nur für $x \in \{0, 1\}$ gilt, folgt: $\det(A) \in \{0, 1\}$.

$\det(E_n) = 1 \cdot \det(E_{n-1}) = \ldots = 1^n \cdot \det(E_{n-n}) = 1$
$B \in \mathbb{C}^{n\times n}; B \cdot E_n = B \Rightarrow E_n^2 = E_n \Rightarrow E_n$ idempotent.
$\det(A) = 1 \Leftrightarrow \det(A)^k = 1$