2.5 Bestimme die reelen Lösungen der Gleichungen

(a) $\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} = \sqrt{2x-12}$

$$
\begin{aligned}
& & \sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} &= \sqrt{2x-12} & &|^2 \\
&\Leftrightarrow & (\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x})^2 &= 2x-12 & & \\
&\Leftrightarrow & (x+1) - 2\sqrt{x+1}\sqrt{9-x} + (9-x) &= 2x-12 & & \\
&\Leftrightarrow & x+1-x+9-2\sqrt{(x+1)(9-x)} &= 2x-12 & & \\
&\Leftrightarrow & 10-2\sqrt{(x+1)(9-x)} &= 2x-12 & &|/-2 \\
&\Leftrightarrow & -5+\sqrt{(x+1)(9-x)} &= -x+6 & &|+5 \\
&\Leftrightarrow & \sqrt{(x+1)(9-x)} &= -x+11 & &|^2 \\
&\Leftrightarrow & (x+1)(9-x) &= (-x+11)^2 & & \\
&\Leftrightarrow & -x^2+8x+9 &= 11^2-22x+x^2 & &|-x^2;+22x;-11^2 \\
&\Leftrightarrow & -2x^2+30x-112 &= 0 & &|/(-2) \\
&\Leftrightarrow & x^2-15x+56 &= 0 & &
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow x_{1/2} = -\frac{-15}{2} \pm \sqrt{(\frac{-15}{2})^2 + 56} = 7.5 \pm 0.5
$$

$$
\Rightarrow x_1 = 7 \land x_2 = 8
$$

(b) $|x-3| + |x+2| - |x-4| = 3$
Wenn man $|x-3|$, $|x+2|$ und $|x-4|$ als drei separate Abbildungen $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ begreift, so ergibt sich für:

$$f(x) = \begin{cases} x-3 & x \geq 3 \\ -x-3 & x < 3 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x+2 & x \geq -2 \\ -x-2 & x < -2 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x-4 & x \geq 4 \\ -x+4 & x < 4 \end{cases}$$

Wenn man $gh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, gh(x) \coloneqq g(x) - h(x)$ definiert, folgt:

$$gh(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 4 \\ 2x-7 & 3 < x < 4 \\ -1 & x \leq 3 \end{cases}$$

Definiert man weiter $fgh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, fgh(x) \coloneqq gh(x) + f(x)$, folgt:

$$fgh(x) = \begin{cases} x+3 & x \geq 4 \\ 3x-5 & 3 < x < 4 \\ x+1 & -2 \leq x \leq 3 \\ -x-3 & x < -2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x+3 = 3 \Leftrightarrow x = 0, & \qquad 0 \ngeq 4 | \times \\ 3x-5 = 3 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}, & \qquad \frac{8}{3} \ngeq 4 | \times \\ x+1 = 3 \Leftrightarrow x = 2, & \qquad -2 \leq 2 \leq 3 | \surd \\ -x-3 = 3 \Leftrightarrow x = -6, & \qquad -6 < -2 | \surd \end{aligned}$$

$\Rightarrow x_1 = 2 \land x_2 = -6$

2.6 bestimme sämtliche reelen Lösungen der Ungleichungen

(a) $\frac{2}{x+1} < \frac{1}{x-3}$
Da $\frac{2}{x+1} > 0$ mit $x \in \mathbb{R}; x > -1$
Und $\frac{1}{x-3} < 0$ mit $x \in \mathbb{R}; x < 3$
Gibt gibt es keine reelen Lösungen in $x \in \mathbb{R}; -1 < x < 3$

Nullpunkt bestimmen:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{x+1} < \frac{1}{x-3} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{2x-6}{x+1} < 1 \qquad | * (x-3) \end{aligned}$$

Polynom division:

$$\begin{aligned} (2x-6) \div (x+1) = 2 - \frac{8}{x+1} \\ -2x-2 \\ -8 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& 2-\frac{8}{x+1}<1 \\
\Leftrightarrow \quad & 1<\frac{8}{x+1} && \mid -1+\tfrac{8}{x+1} \\
\Leftrightarrow \quad & x+1<8 && \mid x+1 \\
\Leftrightarrow \quad & x<7 && \mid -1
\end{aligned}
$$

Somit gilt $\forall x \in \mathbb{R}; (x < 7; x \notin \{-1 \le x \le 3\}) : \frac{2}{x+1} < \frac{1}{x-3}$

(b) $(x+2)(4-x)(x-2)^2 > 0$
da x^2 für $x \in \mathbb{R}$ immer ≥ 0, kann der Term nur negativ werden, wenn $(x+2)$ oder $(4-x)$ negativ sind.
Die Bedingung erfüllen alle Elemente von $M\{x \in \mathbb{R}; x \neq 2, (x+2)(4-x) > 0\}$

$$
\begin{aligned}
& (x+2)(4-x)>0 \\
\Leftrightarrow \quad & -x^2+2x+8>0 && \mid *(-1) \\
\Leftrightarrow \quad & x^2-2x-8<0
\end{aligned}
$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) \coloneqq x^2 - 2x - 8$ stellt eine nach oben geöffnete Parabel da. Somit müssen alle Werte zwischen den beiden Nullstellen < 0 sein.
Die Nullstellen lassen sich direkt aus der Parameterform oben ablesen.
$\Rightarrow x_1 = (-2) \wedge x_2 = 4$
Somit gilt $\forall x \in \mathbb{R}; (-2 < x < 4, x \neq 2) : ((x+2)(4-x)(x-2)^2 > 0)$