

4.3 Berechne den Rang der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 7 & 2 & -6 & 4 \\ 2 & 1 & s & t \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -1 & -1 & 2 \\ -3 & 15 & -3 & 0 & 3 \\ -3 & 29 & -7 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Der Rang von A hängt dabei von den Parametern $s, t \in \mathbb{R}$ ab.

4.4 Bestimme alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rrrrrrcl} & & 3x_2 & - & 5x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ - & x_1 & - & 3x_2 & & & - & x_4 & = & -5 \\ - & 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ - & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 8 \end{array}$$

LGS definiert als A:

$$\begin{aligned} A &= \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & -5 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -1 & -5 \\ -2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 4 & 2 & 2 & 8 \end{array} \right) \\ \Leftrightarrow A &= \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -3 & 0 & -1 & -5 \\ -2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 4 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ \Leftrightarrow A &= \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -3 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 7 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & 13 & 2 & 5 & 23 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ \Leftrightarrow A &= \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -3 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 7 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & -12 & -17 & 5 \\ 0 & 0 & -41 & -5 & -36 \end{array} \right) \\ \Leftrightarrow A &= \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -3 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 7 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & -12 & -17 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_4 = -1$$

$$\begin{array}{lll} & -12x_3 - 17x_4 = 5 & |(x_4 = -1) \text{ einsetzen} \\ \Leftrightarrow & -12x_3 + 17 = 5 & | -17, / -12 \\ \Leftrightarrow & x_3 = 1 & \\ \\ & 7x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 12 & |(x_4 = -1, x_3 = 1) \text{ einsetzen} \\ \Leftrightarrow & 7x_2 + 2 - 4 = 12 & | +2, /7 \\ \Leftrightarrow & x_2 = 2 & \\ \\ & -1x_1 - 3x_2 - 1x_4 = -5 & |(x_2 = 2, x_4 = -1) \text{ einsetzen} \\ \Leftrightarrow & -1x_1 - 6 + 1 = -5 & | +5 \\ \Leftrightarrow & x_1 = 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 1, x_4 = -1$$

4.5 Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rclclcl} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & tx_3 & = & 1 \\ -2tx_1 & + & tx_2 & + & 9x_3 & = & 6 \end{array}$$

mit einem Parameter $t \in \mathbb{R}$.

- (a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist das System eindeutig lösbar? Wie lautet die Lösung?
- (b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ gibt es unendlich viele Lösungen? Gib alle Lösungen an.
- (c) Für welche $t \in \mathbb{R}$ gibt es keine Lösung?

4.6 Sei $A = (a_{j,k}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$

- (a) In jedem der folgenden fünf Fälle finde Matrizen x und/oder y mit folgenden Eigenschaften: Eines der Produkte Ax, yA, yAx ist
 - i. die j -te Zeile von A ,
 - ii. die k -te Spalte von A ,
 - iii. das Element a_{jk} ,
 - iv. die Summe der Einträge der j -ten Zeile von A ,
 - v. die Summe der Einträge der k -ten Spalte von A .
- (b) Sei $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$
 - i. die j -te und die k -te Spalte von A vertauscht,
 - ii. die j -te und die k -te Zeile von A vertauscht,
 - iii. das λ -Fache der j -ten Zeile zur k -ten Zeile von A addiert.

In jedem der drei Fälle finde eine Matrix C , so dass entweder $B = CA$ oder $B = AC$