9.2 In den vier Ecken einer quadratischen Schachtel der Seitenlänge 2 sitzen vier Ameisen, von denen jede in die jeweils im Gegen-Uhrzeigersinn nächste verliebt ist, und daher zu ihr gelangen möchte. Die Ameisen laufen gleichzeitig mit konstanter Geschwindigkeit los, und zwar jeweils auf die von ihr Geliebte zu.

(a) Stelle ein lineares System von Differentialgleichungen für die Bahn der Ameisen auf.

Position der Ameise 1:

$$A_1 = \big(x_{11}, x_{12}\big)$$

Konstante Geschwindigkeit der Ameise 1:

$$\begin{aligned} v_1 &= \tfrac{A_2 - A_1}{|A_2 - A_1|} v \\ \Leftrightarrow \quad v_1 &= \frac{\begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{11} \\ x12 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{11} \\ x12 \end{pmatrix} \right|} v \end{aligned}$$

$A_2 = A_1$ um 90° rotiert $\Rightarrow \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_{12} \\ x_{11} \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad v_1 &= \frac{\begin{pmatrix} -x_{11} - x_{12} \\ x_{11} - x_{12} \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} -x_{11} - x_{12} \\ x_{11} - x_{12} \end{pmatrix} \right|} v \\ \Rightarrow \quad y &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} y \frac{v}{\sqrt{2(x_{11}^2 + x_{12}^2)}} \end{aligned}$$

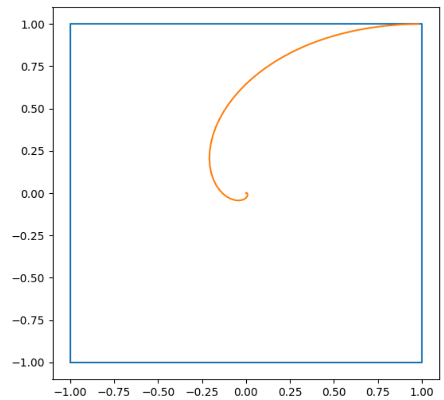
(b) Bestimme die Bahnkurve der bei $(1, 1)$ startenden Ameise.

Da sich die Bahnkurve der Ameise durch ihre Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t nicht verändert, die Länge des Geschwindigkeitsvektors keinen Einfluss auf die Bahnkurve besitzt, kann der Faktor der Geschwindigkeitsbegrenzung $\frac{v}{\sqrt{2(x_{11}^2 + x_{12}^2)}} \to 1$ geändert werden.

Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad P_\lambda(A) &= \begin{vmatrix} -1 - \lambda & -1 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1 - \lambda)^2 + 1 \\ \Leftrightarrow \quad \lambda &= \pm i - 1 \\ \\ \Rightarrow \quad \lambda_1 &= -1 - i, \\ \lambda_2 &= -1 + i \end{aligned}$$

$$
\begin{array}{llcl}
v_1 & \Leftarrow & 0 & = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad {\cdot i \atop +} \\
 & \Leftrightarrow & 0 & = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 & \Rightarrow & v_1 & = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$



$$
\begin{array}{llcl}
v_2 & \Leftarrow & 0 & = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad {\cdot(-i) \atop +} \\
 & \Leftrightarrow & 0 & = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 & \Rightarrow & v_2 & = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
\Rightarrow & y^1 & = e^{-(1+i)t} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \\
 & y^2 & = e^{(-1+i)t} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow & y & = y^1 c_1 + y^2 c_2
\end{array}
$$

Anfangswert $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ einsetzen:

$$
\begin{array}{lrcl}
\Rightarrow & \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} c_2 & = & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} {\cdot(-i) \atop +} \quad c & = & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad {\cdot(-i) \atop +} \\
\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -i & i \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad c & = & \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} \\
\Rightarrow & c_2 & = & \frac{1}{2}(1-i) \\
\Rightarrow & c_1 & = & \frac{1}{2}(1+i)
\end{array}
$$

$$
\Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}\left((1+i)e^{-(1+i)t} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} + (1-i)e^{(-1+i)t} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right)
$$

9.3 Löse das Anfangswertproblem

$$
\begin{cases} \dot{y_1} = 3y_1 + 8y_2, & y_1(0) = 6, \\ \dot{y_2} = y_1 + y_2 + 4e^t, & y_2(0) = 2. \end{cases}
$$

$$\Rightarrow \qquad \dot{y} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} y + e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Das homogene System lösen:

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} y$$

Eigenwerte und Eigenvektoren von A berechnen:

$$\begin{array}{lrcl}
 & P_\lambda(A) & = & \begin{vmatrix} 3-\lambda & 8 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
\Leftrightarrow & & = & (3-\lambda)(1-\lambda) - 8 \\
\Leftrightarrow & 0 & = & \lambda^2 - 4\lambda + 5 \\
 & & & \\
\Leftrightarrow & \lambda & = & 2 \pm 3 \\
\Rightarrow & \lambda_1 & = & -1, \\
 & \lambda_2 & = & 5
\end{array}$$

$$\begin{array}{llrcl}
v_1 & \Leftarrow & 0 & = & \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad {}^{\cdot(-\frac{1}{2})}_{+} \\
 & \Leftrightarrow & 0 & = & \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 & \Rightarrow & v_1 & = & \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{llrcl}
v_2 & \Leftarrow & 0 & = & \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \quad {}^{\cdot\frac{1}{2}}_{+} \\
 & \Leftrightarrow & 0 & = & \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 & \Rightarrow & v_2 & = & \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Lösungsbasis der homogenen Differentialgleichung:

$$\begin{array}{lrcl}
\Rightarrow & y^1(t) & = & e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \\
\Leftrightarrow & y^2(t) & = & e^{5t} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Eine spezielle Lösung finden:

$$\begin{array}{lrcll}
\text{(I)} & y(t) & = & e^t w & \quad | \text{ ableiten} \\
\Rightarrow & \dot{y}(t) & = & e^t w &
\end{array}$$

$$\Rightarrow \quad e^t w \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} y + e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

I einsetzen und kürzen:

$$\Leftrightarrow \quad w = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \left| - \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} w \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} w = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad w = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad y^3 = e^t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad y = y^1 c_1 + y^2 c_2 + y^3$$

Bedingung $y(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ einsetzen:

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad c = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = -e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2e^{5t} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

9.4 Bestimme eine Lösungsbasis der *Bessel'schen Differentialgleichung der Ordnung* $p = \frac{1}{2}$,

$$y'' + \frac{1}{x} y' + (1 - \frac{1}{4x^2}) y = 0$$

,
durch die Substitution $z = y \cdot \sqrt{x}$.

$$\begin{aligned} y &= z x^{-\frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow \quad y' &= z' x^{-\frac{1}{2}} - \tfrac{z}{2} x^{-\frac{3}{2}} \\ \Leftrightarrow \quad y'' &= z'' x^{-\frac{1}{2}} - z' x^{-\frac{3}{2}} + \tfrac{3}{4} z x^{-\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

Einsetzen in (1)

$$\Rightarrow z'' x^{-\frac{1}{2}} - z' x^{-\frac{3}{2}} + z' x^{-\frac{3}{2}} + \tfrac{3}{4} z x^{-\frac{5}{2}} - \tfrac{1}{2} z x^{-\frac{5}{2}} - \tfrac{1}{4} z x^{-\frac{5}{2}} + z x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad z'' + z = 0$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\begin{array}{rrcl}
\Rightarrow & \lambda & = & \pm i \\
\Rightarrow & z & = & c_1 \cos + c_2 \sin \\
\Rightarrow & y & = & \frac{c_1 \cos + c_2 \sin}{\sqrt{x}}
\end{array}$$

9.5 Betrachtet wird die Differentialgleichung

$$(1):\ y''' - 3y' + 2y = 9e^x.$$

(a) Bestimme eine Lösungsbasis für die zugehörige homogene Differentialgleichung.

$$\begin{array}{rrcl}
 & p(\lambda) & = & \lambda^3 - 3\lambda + 2 \\
\Rightarrow & 0 & = & (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)
\end{array}$$

Lösung raten mit hilfe vom Satz über rationale Nullstellen

$$\begin{array}{rrcll}
\Rightarrow & \lambda_1 & = & 1 & \\
\Leftrightarrow & 0 & = & \lambda^3 - 3\lambda + 2 & \mid (\lambda - 1) \\
\Leftrightarrow & 0 & = & \lambda^2 + \lambda - 2 & \\
\Leftrightarrow & 0 & = & (\lambda - 1)(\lambda + 2) &
\end{array}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -2$

$$\Rightarrow \quad y_H = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{-2}$$

(b) Finde eine spezielle Lösung durch den Ansatz $y(x) = cx^2 e^x$.

$$\begin{array}{rrcl}
\Rightarrow & y_p & = & cx^2 e^x \\
\Rightarrow & y_p' & = & ce^x(2x + x^2) \\
\Rightarrow & y_p'' & = & ce^x(x^2 + 4x + 2) \\
\Rightarrow & y_p''' & = & ce^x(x^2 + 6x + 6) \\
\Rightarrow & y_p & = & ce^x(x^2 + 6x + 6 - 6x - 3x^2 + 2x^2) \\
 & & & \\
\Leftrightarrow & y_p & = & 6ce^x \stackrel{!}{=} 9e^x \\
\Rightarrow & c & = & \frac{3}{2} \\
\Rightarrow & y_p & = & \frac{3}{2}x^2 e^x \\
 & & & \\
\Rightarrow & y & = & c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{-2} + \frac{3}{2}x^2 e^x
\end{array}$$

(c) Löse das Anfangswertproblem zum Anfangswert

$$y(0) = -1, \quad y'(0) = -8, \quad y''(0) = 6$$

.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & y(o) &=& \quad c_1 + c_3 = -1 \\
\Rightarrow \quad & y'(o) &=& \quad c_1 + c_2 - 2c_3 = -8 \\
\Rightarrow \quad & y''(o) &=& \quad c_1 + 2c_2 + 4c_3 = 3 \\
\Rightarrow \quad & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} c &=& \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} c &=& \quad \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \quad & y &=& \quad e^x(-3 - x + \tfrac{3}{2}x^2) + 2e^{-2x}
\end{aligned}$$