Übung 1

2.5 Bestimme die reelen Lösungen der Gleichungen

(a) $\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} = \sqrt{2x-12}$

$$
\begin{aligned}
& & \sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} &= \sqrt{2x-12} && |^2 \\
\Leftrightarrow & & (\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x})^2 &= 2x-12 \\
\Leftrightarrow & & (x+1) - 2\sqrt{x+1}\sqrt{9-x} + (9-x) &= 2x-12 \\
\Leftrightarrow & & x+1-x+9-2\sqrt{(x+1)*(9-x)} &= 2x-12 \\
\Leftrightarrow & & 10-2\sqrt{(x+1)*(9-x)} &= 2x-12 && |/-2 \\
\Leftrightarrow & & -5+sqrt(x+1)*(9-x) &= -x+6 && |+5 \\
\Leftrightarrow & & sqrt(x+1)*(9-x) &= -x+11 && |^2 \\
\Leftrightarrow & & (x+1)*(9-x) &= (-x+11)^2 \\
\Leftrightarrow & & -x^2+8x+9 &= 11^2-22x+x^2 && |-x^2;+22x;-11^2 \\
\Leftrightarrow & & -2x^2+30x-112 &= 0 && |/(-2) \\
\Leftrightarrow & & x^2-15x+56 &= 0 \\
& & \Rightarrow x_{1/2} &= -\frac{-15}{2} \pm \sqrt{(\frac{-15}{2})^2+56} \\
& & &= 7.5 \pm 0.5 \\
& & \Rightarrow x_1 = 7 \wedge x_2 = 8
\end{aligned}
$$

(b) $|x-3| + |x+2| - |x-4| = 3$

2.6 bestimme sämtliche reelen Lösungen der Ungleichungen

(a) $\frac{2}{x+1} < \frac{1}{x-3}$

(b) $(x+2)\,(4-x)\,(x-2)^2 > 0$
da x^2 für $x \in \mathbb{R}$ immer ≥ 0, kann der Term nur negativ werden, wenn $(x+2)$ oder $(4-x)$ negativ sind.
Die Bedingung erfüllen alle Elemente von $M\{x \in \mathbb{R}; x \neq 2, (x+2)(4-x) > 0\}$

$$
\begin{aligned}
& & (x+2)(4-x) &> 0 \\
\Leftrightarrow & & -x^2+2x+8 &> 0 && |*(-1) \\
\Leftrightarrow & & x^2-2x-8 &< 0
\end{aligned}
$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) \coloneqq x^2-2x-8$ stellt eine nach oben geöffnete Parabel da. Somit müssen alle Werte zwischen den beiden Nullstellen < 0 sein.
Die Nullstellen lassen sich direkt aus der Parameterform oben ablesen.
$\Rightarrow x_1 = (-2) \wedge x_2 = 4$
Somit gilt $\forall x \in \mathbb{R}; (-2 < x < 4, x \neq 2) : ((x+2)\,(4-x)\,(x-2)^2 > 0)$