

- 11.3 (a) Sei $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x \neq 0\}$. Bestimme den Gradienten Δf der Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) := y \sin(xz^2) + \frac{x \cos(y)}{y}$.

$$\Delta f = \begin{pmatrix} y \cos(xz^2)z^2 + \frac{\cos(y)}{y} \\ \sin(xz^2) - x\left(\frac{\sin(y)}{y} + \frac{\cos(y)}{y^2}\right) \\ y \cos(2xz) \end{pmatrix}$$

- (b) Entscheide, ob es partiell differenzierbare Funktionen auf \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3 gibt mit

$$\Delta f(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\ -x + y \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \Delta f(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$$

Bestimme gegebenenfalls ein solches f .

$$\begin{aligned} \Delta f(x, y) &= \begin{pmatrix} x + y \\ -x + y \end{pmatrix} \\ \Rightarrow f(x, y) &= \int x + y dx \\ \Leftrightarrow f(x, y) &= \int -x + y dy \\ \Rightarrow \int x + y dx &= \int -x + y dy \\ \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + yx &= \frac{y^2}{2} - yx \end{aligned}$$

\Rightarrow Es existiert keine partiell differenzierbare Funktion $f \in \mathbb{R}^2$
mit $\Delta f(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\ -x + y \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \Delta f(x, y, z) &= \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \\ \Rightarrow f(x, y, z) &= \int yz dx \\ &= \int xz dy \\ &= \int xy dz \\ \Rightarrow f(x, y, z) &= xyz \end{aligned}$$

- 11.4 Sei $c > 0$, und $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seien zweimal stetig differenzierbar. Zeige: Die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, u(t, x) := f(x + ct) + g(x - ct)$ ist eine Lösung der *Wellengleichung*

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) = c^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x+ct)c^2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} g(x-ct)c^2 \\ c^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} u &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x+ct) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x-ct) \end{aligned}$$

11.5 Bestimme Lage und Art der lokalen Extrema folgender Funktionen:

(a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) := xy^2 - 4xy + x^4$

Kandidaten finden:

$$\begin{aligned} \nabla f &= \begin{pmatrix} y^2 + 4x + 4x^3 \\ 2xy - 4x \end{pmatrix} \\ \Rightarrow 0 &= 2xy - 4x \\ \Leftrightarrow y &= 2 \\ 0 &= y^2 - 4x + 4x^3 \end{aligned}$$

$y = 2$ Einsetzen:

$$\begin{aligned} \Rightarrow x &= 1 \\ \text{Hess } f &= \begin{pmatrix} 2 & 2y - 4 \\ 2y - 4 & 2x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Kandidat Einsetzen:

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

Hess f ist positiv definit da $|\text{Hess } f| > 0$ ist und $\text{Hess } f_{11} > 0$, daraus folgt das der Kandidat $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein striktes lokales Minimum ist.

(b) $g: (0, \pi) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, g(x, y) := \sin(x) + \sin(y) + \sin(x + y)$

Kandidaten finden:

$$\begin{aligned} \nabla g &= \begin{pmatrix} \cos(x) + \cos(x+y) \\ \cos(y) + \cos(x+y) \end{pmatrix} \\ \text{(I)} \Rightarrow \cos(x) &= -\cos(x+y) \\ \Rightarrow \cos(y) &= -\cos(x+y) \\ \Rightarrow x &= y \end{aligned}$$

In (I) Einsetzen:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \cos(x) &= -\cos(2x) \\ \Leftrightarrow \cos(x) &= -1(\cos(x)^2 - \sin(x)^2) & | + \cos(x)^2 \\ \Leftrightarrow \cos(x) + 2\cos(x)^2 &= 1 & | \div 2 + \frac{1}{16} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{16} + \frac{\cos(x)}{2} + \cos(x)^2 &= \frac{9}{16} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4} + \cos(x)\right)^2 &= \frac{9}{16} \\ \Rightarrow x &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Hess } f &= \begin{pmatrix} -\sin(x) - \sin 2x & -\sin(2x) \\ -\sin(2x) & -\sin(x) - \sin(x+y) \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \sin(x)^2 &= \begin{vmatrix} -\sin(x) & 0 \\ 0 & -\sin(x) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Kandidat Einsetzen:

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) > 0$$

\Rightarrow Hess f ist negativ definit, daraus folgt das der Kandidat $\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ein striktes lokales Maximum ist.

11.6 (a) Berechne die Jacobi-Matrix der Abbildungen (Polar- bzw. Kugelkoordinaten)

i. $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, F(r, \varphi) := (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))^T$

ii. $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, G(r, \theta, \varphi) := (r \cos(\theta) \cos(\varphi), r \cos(\theta) \sin(\varphi), r \sin(\theta))^T$

Gib die partiellen Ableitungen von F_2 und G_3 an, wobei $F = (F_1, F_2)^T$ und $G = (G_1, G_2, G_3)^T$.

(b) Bestimme, in welchen Punkten die Jacobi-Matrizen aus (a) invertierbar sind.