Übung 1

2.5 Bestimme die reelen Lösungen der Gleichungen

(a) $\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} = \sqrt{2x-12}$

(b) $|x-3| + |x+2| - |x-4| = 3$

2.6 bestimme sämtliche reelen Lösungen der Ungleichungen

(a) $\frac{2}{x+1} < \frac{1}{x-3}$
Da $\frac{2}{x+1} > 0$ mit $x \in \mathbb{R}; x > -1$
Und $\frac{1}{x-3} < 0$ mit $x \in \mathbb{R}; x < 3$
Gibt gibt es keine reelen Lösungen in $x \in \mathbb{R}; -1 < x < 3$

Nullpunkt bestimmen:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{x+1} < \frac{1}{x-3} & \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{2x-6}{x+1} < 1 & \quad |*(x-3) \end{aligned}$$

Polynom division:

$$(2x-6) \div (x+1) = 2 - \frac{8}{x+1}$$
$$-2x-2$$
$$-8$$

$$\begin{aligned} & 2 - \frac{8}{x+1} < 1 & \\ \Leftrightarrow\quad & 1 < \frac{8}{x+1} & \quad |-1+\tfrac{8}{x+1} \\ \Leftrightarrow\quad & x+1 < 8 & \quad |x+1 \\ \Leftrightarrow\quad & x < 7 & \quad |-1 \end{aligned}$$

Somit gilt $\forall x \in \mathbb{R}; (x < 7; x \notin \{-1 \leq x \leq 3\}) : \frac{2}{x+1} < \frac{1}{x-3}$

(b) $(x+2)\,(4-x)\,(x-2)^2 > 0$
da x^2 für $x \in \mathbb{R}$ immer ≥ 0, kann der Term nur negativ werden, wenn $(x+2)$ oder $(4-x)$ negativ sind.
Die Bedingung erfüllen alle Elemente von $M\{x \in \mathbb{R}; x \neq 2, (x+2)(4-x) > 0\}$

$$
\begin{aligned}
& & (x+2)(4-x) &> 0 & \\
&\Leftrightarrow & -x^2+2x+8 &> 0 & \mid *(-1) \\
&\Leftrightarrow & x^2-2x-8 &< 0 &
\end{aligned}
$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := x^2 - 2x - 8$ stellt eine nach oben geöffnete Parabel da. Somit müssen alle Werte zwischen den beiden Nullstellen < 0 sein.
Die Nullstellen lassen sich direkt aus der Parameterform oben ablesen.
$\Rightarrow x_1 = (-2) \wedge x_2 = 4$
Somit gilt $\forall x \in \mathbb{R}; (-2 < x < 4, x \neq 2) : ((x+2)(4-x)(x-2)^2 > 0)$