

## 2.5 Bestimme die reellen Lösungen der Gleichungen

(a)  $\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} = \sqrt{2x-12}$

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} = \sqrt{2x-12} && |^2 \\ \Leftrightarrow & (\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x})^2 = 2x-12 \\ \Leftrightarrow & (x+1) - 2\sqrt{x+1}\sqrt{9-x} + (9-x) = 2x-12 \\ \Leftrightarrow & x+1-x+9-2\sqrt{(x+1)(9-x)} = 2x-12 \\ \Leftrightarrow & 10-2\sqrt{(x+1)(9-x)} = 2x-12 && |/-2 \\ \Leftrightarrow & -5+\sqrt{(x+1)(9-x)} = -x+6 && |+5 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{(x+1)(9-x)} = -x+11 && |^2 \\ \Leftrightarrow & (x+1)(9-x) = (-x+11)^2 \\ \Leftrightarrow & -x^2+8x+9 = 11^2-22x+x^2 && |-x^2; +22x; -11^2 \\ \Leftrightarrow & -2x^2+30x-112 = 0 && |/(-2) \\ \Leftrightarrow & x^2-15x+56 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x_{1/2} &= -\frac{-15}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-15}{2}\right)^2 + 56} = 7.5 \pm 0.5 \\ &\Rightarrow \mathbb{L} = \{7, 8\} \end{aligned}$$

(b)  $|x-3| + |x+2| - |x-4| = 3$

Wenn man  $|x-3|$ ,  $|x+2|$  und  $|x-4|$  als drei separate Abbildungen  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  begreift, so ergibt sich für:

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} x-3 & x \geq 3 \\ -x-3 & x < 3 \end{cases} \\ g(x) &= \begin{cases} x+2 & x \geq -2 \\ -x-2 & x < -2 \end{cases} \\ h(x) &= \begin{cases} x-4 & x \geq 4 \\ -x+4 & x < 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Wenn man  $gh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $gh(x) := g(x) - h(x)$  definiert, folgt:

$$gh(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 4 \\ 2x-7 & 3 < x < 4 \\ -1 & x \leq 3 \end{cases}$$

Definiert man weiter  $fgh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $fgh(x) := gh(x) + f(x)$ , folgt:

$$fgh(x) = \begin{cases} x+3 & x \geq 4 \\ 3x-5 & 3 < x < 4 \\ x+1 & -2 \leq x \leq 3 \\ -x-3 & x < -2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x+3=3 &\Leftrightarrow x=0, & 0 \not\leq 4 | \times \\ 3x-5=3 &\Leftrightarrow x=\frac{8}{3}, & 3 \not< \frac{8}{3} < 4 | \times \\ x+1=3 &\Leftrightarrow x=2, & -2 \leq 2 \leq 3 | \checkmark \\ -x-3=3 &\Leftrightarrow x=-6, & -6 < -2 | \checkmark \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \{2, -6\}$$

2.6 bestimme sämtliche reellen Lösungen der Ungleichungen

(a)  $\frac{2}{x+1} < \frac{1}{x-3}$

Es gilt für  $a, b \in \mathbb{R}_{x>0}$ :

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b} \Leftrightarrow a > b$$

$$-\frac{1}{a} < -\frac{1}{b} \Leftrightarrow -a > -b$$

Damit  $\frac{2}{x+1}$  und  $\frac{1}{x-3}$  beide entweder positiv oder negativ sind, muss  $x > -1 \wedge x > 3 \Leftrightarrow x > 3$  bzw.  $x < -1 \wedge x < 3 \Leftrightarrow x < -1$  sein.

Daraus ergibt sich für  $x < -1 \vee x > 3$ :

$$\begin{aligned} & \frac{2}{x+1} < \frac{1}{x-3} \\ \Leftrightarrow & \frac{x+1}{2} > \frac{x-3}{1} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} > x - 3 & | -\frac{1}{2}x; +3 \\ \Leftrightarrow & 3.5 > 0.5x & | * 2 \\ \Leftrightarrow & 7 > x \\ \Leftrightarrow & x < 7 \end{aligned}$$

Innerhalb des restlichen Intervalls  $(-1, 3)$  nimmt  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) := \frac{2}{x+1}$  alle Werte zwischen  $(\frac{1}{2}, \infty)$  und  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) := \frac{1}{x-3}$  alle Werte zwischen  $(-\frac{1}{4}, -\infty)$  an.

Somit gilt:  $\forall x \in \mathbb{R}_{-1 < x < 3} : (f(x) \not< h(x))$ .

Insgesamt gilt:  $\forall x \in \mathbb{R}_{x < 7} \setminus \{-1 \leq x \leq 3\} : (\frac{2}{x+1} < \frac{1}{x-3})$

$$(b) (x+2)(4-x)(x-2)^2 > 0$$

da  $x^2$  für  $x \in \mathbb{R}$  immer  $\geq 0$ , kann der Term nur negativ werden, wenn  $(x+2)$  oder  $(4-x)$  negativ sind.

Die Bedingung erfüllen alle Elemente von  $M\{x \in \mathbb{R}; x \neq 2, (x+2)(4-x) > 0\}$

$$\begin{aligned} & (x+2)(4-x) > 0 \\ \Leftrightarrow & -x^2 + 2x + 8 > 0 & | * (-1) \\ \Leftrightarrow & x^2 - 2x - 8 < 0 \end{aligned}$$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := x^2 - 2x - 8$  stellt eine nach oben geöffnete Parabel da. Somit müssen alle Werte zwischen den beiden Nullstellen  $< 0$  sein.

Die Nullstellen lassen sich direkt aus der Parameterform oben ablesen.

$$\Rightarrow x_1 = (-2) \wedge x_2 = 4$$

Somit gilt  $\forall x \in \mathbb{R}; (-2 < x < 4, x \neq 2) : ((x+2)(4-x)(x-2)^2 > 0)$

2.7 Beweise durch Induktion, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$(a) \sum_{k=1}^n k^3 = \left( \sum_{k=1}^n k \right)^2.$$

$$\text{IA: } n=1 \quad \sum_{k=1}^n k^3 = 1 = \left( \sum_{k=1}^n k \right)^2$$

$$\text{IV: Für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt } \sum_{k=1}^n k^3 = \left( \sum_{k=1}^n k \right)^2$$

$$\text{IS: } n \rightarrow n+1$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left( \sum_{k=1}^{n+1} k \right)^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 = \left( \sum_{k=1}^n k + (n+1) \right)^2 \quad | \text{IV einsetzen}$$

$$\Leftrightarrow \left( \sum_{k=1}^n k \right)^2 + (n+1)^3 = \left( \sum_{k=1}^n k + (n+1) \right)^2 \quad | \sum_{k=1}^n k = \frac{n}{2}(n+1) \text{ einsetzen}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \left(\frac{n}{2}(n+1)\right)^2 + (n+1)^3 = \left(\frac{n}{2}(n+1) + (n+1)\right)^2 \\
 &\Leftrightarrow \left(\frac{n}{2}(n+1)\right)^2 + (n+1)^3 = \left(\frac{n}{2}(n+1)\right)^2 + (n+1)^2 + n(n+1)^2 \quad | - \left(\frac{n}{2}(n+1)\right)^2 \\
 &\Leftrightarrow (n+1)^3 = (n+1)^2 + n(n+1)^2 \quad | (n+1)^2 \\
 &\Leftrightarrow n+1 = n+1
 \end{aligned}$$

(b)  $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$  (wobei  $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ).

IA:  $n=1$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^1 q^k &= \frac{1-q^{1+1}}{1-q} \\
 \sum_{k=0}^1 q^k &= q^0 + q^1 = 1+q
 \end{aligned}$$

Polynom Division:

$$\frac{1-q^2}{1-q} = (1-q^2) \div (1-q) = q+1$$

IV:  $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$  (wobei  $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ )

IS:  $n \rightarrow n+1$

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{n+1+1}}{1-q} \\
 \Leftrightarrow &\sum_{k=0}^n q^k + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1+1}}{1-q} \quad | \text{IV einsetzen} \\
 \Leftrightarrow &\frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1+1}}{1-q} \quad | * (1-q) \\
 \Leftrightarrow &1 - q^{n+1} + (1-q) * q^{n+1} = 1 - q^{n+1} * q \quad | / (q^{n+1}); -1 \\
 \Leftrightarrow &q = q
 \end{aligned}$$

(c)  $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$  ist durch 11 teilbar.

IA:  $n = 1$ :

$$\begin{aligned} & 6^{2 \cdot 1 - 2} + 3^{1+1} + 3^{1-1} \pmod{11} = 0 \\ \Leftrightarrow & 6^0 + 3^2 + 3^0 \pmod{11} = 0 \\ \Leftrightarrow & 1 + 9 + 1 = 11 \pmod{11} = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

IV:  $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$  ist durch 11 teilbar.

IS:  $n \rightarrow n + 1$ :

$$\begin{aligned} & 6^{2(n+1)-2} + 3^{n+1+1} + 3^{n+1-1} \\ &= 6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n \\ &= 6^2 * 6^{2n-2} + 3 * 3^{n+1} + 3 * 3^{n-1} \\ &= 3 * 12 * 6^{2n-2} + 3 * 3^{n+1} + 3 * 3^{n-1} \\ &= 3 * (11 * 6^{2n-2} + 6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}) \\ &= 3 * 11 * 6^{2n-2} + 3 * (6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}) \end{aligned}$$

Da  $3 * 11 * 6^{2n-2}$  und wie im Induktionsanfang gezeigt  $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$  und somit auch  $3 * (6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1})$  Vielfache von 11 sind, muss die Gesamtsumme ebenfalls für alle  $n \in \mathbb{N}$  durch 11 teilbar sein.

2.8 (a) Berechne  $|5 + 12i|$

$$|5 + 12i| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

(b) Berechne  $\sum_{k=2}^4 (2i)^k$

$$\sum_{k=2}^4 (2i)^k = (2i)^2 + (2i)^3 + (2i)^4 = -4 - 8i + 16 = 12 - 8i$$

(c) Bestimme Real und Imaginärteil von  $\frac{1 + i\sqrt{2}}{1 - i\sqrt{2}} + \frac{1 - i\sqrt{2}}{1 + i\sqrt{2}}$ .

$$\begin{aligned} z &= 1 + i\sqrt{2} = a + ib, \\ \bar{z} &= 1 - i\sqrt{2} = a - ib \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} &= \frac{z^2 + \bar{z}^2}{z\bar{z}} = \frac{a^2 + 2iab - b^2 + a^2 - 2iab - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{2a^2 - 2b^2}{a^2 + b^2} = \frac{2(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2} \\ &\Rightarrow \frac{2(1^2 - \sqrt{2}^2)}{1^2 + \sqrt{2}^2} = \frac{2 - 4}{1 + 2} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Re: } & -\frac{2}{3}, \\ \text{Im: } & 0 \end{aligned}$$

(d) Bestimme Real und Imaginärteil von  $\frac{1+i^{15}}{2-i^{21}}$ .

$$\begin{aligned}\frac{1+i^{15}}{2-i^{21}} &= \frac{1+(-1)^{7.5}}{2-(-1)^{10.5}} = \frac{1+(-1)^7 * (-1)^{\frac{1}{2}}}{2-(-1)^{10} * (-1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1+(-1) * \sqrt{-1}}{2-(1) * \sqrt{-1}} = \frac{1-i}{2-i} \\ &= \frac{(1-i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2-i}{5} = 0.6 + 0.2i\end{aligned}$$

Re: 0.6,  
Im: 0.2