Übung 6

6.3 Zeige mit der Definition des Grenzwertes (ohne Verwendung von "Rechenregeln"), dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+3n}{4n^3-5} = \frac{1}{4}$ ist.

Für $n \to \infty$ ist das Ergebnis des Bruchs ausschließlich von $\frac{n^3}{4n^3}$ abhängig. Daraus folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+3n}{4n^3-5} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{4n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

6.4 Untersuche, ob die Folgen konvergent sind, und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $\left(\frac{4n^2+1}{9n^2-n+3}\right)$

Für $n \to \infty$ ist das Ergebnis des Bruchs ausschließlich von $\frac{4n^2}{9n^2}$ abhängig. Daraus folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+1}{9n^2-n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2}{9n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{9} = \frac{4}{9}$$

Die Folge konvergiert für $n \to \infty$ gegen $\frac{4}{9}$.

(b) $\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)$

Für

$$b, c \in \mathbb{R}; b < c \Rightarrow \sqrt{b} < \sqrt{c},$$
$$n^2 < n^2 + n$$
$$\Rightarrow \sqrt{n^2} < \sqrt{n^2+n}$$

Mit $a \in \mathbb{R}; a > 0$ folgt $\sqrt{n^2+n} = n + an$.

Somit ergibt sich:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - n = \lim_{n\to\infty} n + an - n = \lim_{n\to\infty} an$$

$\Rightarrow \sqrt{n^2+n} - n = an \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

(c) $\left(\prod\limits_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\right)$

$$\begin{aligned} & & k^2 - 1 &= (k-1)(k+1) \\ &\Leftrightarrow & k^2 - 1 &= k^2 - k + k - 1 \\ &\Leftrightarrow & k^2 - 1 &= k^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)$$
$$=\frac{(k^2-1)\cdot((k-1)^2-1)\cdot((k-2)^2-1)\cdot\ldots}{k^2\cdot(k+1)^2\cdot(k+2)^2\cdot\ldots}$$
$$=\frac{(k-1)(k+1)\cdot(k+2)(k+0)\cdot(k+3)(k+1)\cdot\ldots}{(k+0)(k+0)\cdot(k+1)(k+1)\cdot(k+2)(k+2)\cdot\ldots}$$
$$=\frac{\cancel{(k+1)}(k-1)\cdot\cancel{(k+2)}\cancel{(k+0)}\cdot\cancel{(k+3)}\cancel{(k+1)}\cdot\ldots}{(k+0)\cancel{(k+0)}\cdot\cancel{(k+1)}\cancel{(k+1)}\cdot\cancel{(k+2)}\cancel{(k+2)}\cdot\ldots}$$
$$=\frac{k-1}{k+0}$$

Für $k=2; k\to\infty$ ist $k=2$ (der Startwert) in der obigen Folge.
$\Rightarrow \frac{k-1}{k+0}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$
$\Rightarrow \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\xrightarrow{k\to\infty}\frac{1}{2}$

(d) $\sqrt[n]{n!}$
$\sqrt[n]{n!}=n^{\frac{1}{n}}\cdot(n-1)^{\frac{1}{n}}\cdot(n-2)^{n}\cdot\ldots\cdot 1^{\frac{1}{n}}$.
Für alle Grenzwerte der Faktoren a in der Fakultät außer $1^{\frac{1}{n}}$ gilt für $n\to\infty\Rightarrow a>1$. Für die Ausnahme $b:=1^{\frac{1}{n}}$ gilt $b=1$.
Mit $c:=\min a_n; c>1$ folgt $c\cdot c\cdot\ldots\cdot c=c^n$.
$\Rightarrow c\xrightarrow{n\to\infty}\infty$.
Da $a_n\geq c$ folgt $b*a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n\geq c^n\Rightarrow\sqrt[n]{n!}\xrightarrow{n\to\infty}\infty$

6.5 Seien $(a_n),(b_n)$ Folgen in $\mathbb{R}$. Beweise oder widerlege:

(a) $a_n\to a, b_n\neq 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$, $\frac{a_n}{b_n}\to 0\Rightarrow(b_n)$ keine Nullfolge.
Widerspruch: b kann eine Nullfolge sein wenn $a_n=0$ da alle $\frac{a_n}{b_n}\to 0\Rightarrow\frac{0}{b}=0$

(b) (b_n) Nullfolge, $b_n\neq 0$ für alle $n\in\mathbb{N}\Rightarrow(\frac{1}{b_n})$ nicht konvergent.

$$b_n\to 0$$
$$\lim_{n\to 0}\left(\frac{1}{n}\right)=\infty$$
$$\Rightarrow\frac{1}{b_n}\to\infty$$

(c) $a_n\to a, a_n\cdot b_n\to c\Rightarrow(b_n)$ konvergent.
Wiederspruch: b kann divergent sein wenn $a_n=0$

ist $b_n \cdot 0 = 0$
Also konvergiert $a_n \cdot b_n$ zu 0

(d) $a_n \to 0, (b_n)$ beschränkt $\Rightarrow a_n \cdot b_n \to 0$.
Da b_n beschränkt ist $\lim_{n\to\infty} \neq \infty$

$$a_n \cdot b_n \to c$$
$$\Leftrightarrow 0 \cdot b = c$$

6.6 Ermittle (ohne Beweis, aber mit kurzer Begründung) das Supremum, Infimum und, falls existent, Maximum und Minimum folgender Mengen:

(a) $A = \{1 - \frac{(-1)^n}{n}; n \in \mathbb{N}\}$;

$$n \bmod 2 = 0 : 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow \max \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$$
$$n \bmod 2 \neq 0 : 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow \max \frac{1}{n} = 1$$

$$\Rightarrow \sup A = \max A = 2,$$
$$\inf A = \max A = \frac{1}{2}$$

(b) $B = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}; m, n \in \mathbb{N}\}$;

$$b_{n,m} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}; m, n \in \mathbb{N}$$

$$p \in \mathbb{N} : \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} = 0$$
$$p \in \mathbb{N} : \lim_{p\to 1} \frac{1}{p} = 1$$
$$\Rightarrow \lim_{n,m\to\infty} b_{n,m} = 0,$$
$$\lim_{n,m\to 1} b_{n,m} = 2$$

$$\Rightarrow \max B = \sup B = 2,$$
$$\inf B = 0;$$

(c) $C = \{x \in \mathbb{R}; x^2 - 10x \leq 24\}$;

$$x^2 - 10x \leq 24$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 10x - 24 \leq 0$$
aus p-q formel
$$x_1 = -2, x_2 = 12$$

Da für $x \in \{-2, 12\}, x^2 - 10x = 24$ und
$x^2 - 10x > 24$ für $x > 12 \lor x < -2$
sind $-2, 12$ das Minimum und Maximum der Menge D

$$\sup C = 12 = \max C$$

$$\inf C = -2 = \min C$$

(d) $D = \{\frac{x}{x+1}; x \geq 0; x \in \mathbb{R}\}$.

$$D_n = \{\ldots, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}\}$$
$$\Rightarrow \lim_{n \to 0} D_n = 0, \lim_{n \to \infty} D_n = 1$$
$$\Rightarrow \sup D = 1,$$
$$minD = \inf D = 0$$