5.2 Entscheide (mit Begründung!), ob die folgenden 4 Abbildungen linear sind:

(a) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+1 \\ 2y \\ x+y \end{pmatrix}$;

Bedingung 1:

$$
\begin{aligned}
& \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) \\
\Leftrightarrow \quad & \varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + \varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ 2y \\ x+y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x+1 \\ 2y \\ x+y \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 2x+1 \\ 4y \\ 2x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+2 \\ 4y \\ 2x+2y \end{pmatrix} \qquad |\times
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow 2x+1 \neq 2x+2 \Rightarrow \varphi$ ist keine lineare Abbildung, da eine der Bedingungen für lineare Abbildungen nicht erfüllt werden kann.

(b) $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{k=1}^n |x_k|$;

Bedingung 1:

$$
\begin{aligned}
& \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) \\
\Leftrightarrow \quad & \varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) + \varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) + \varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) \\
\Leftrightarrow \quad & \varphi\left(\begin{pmatrix} 2x_1 \\ \vdots \\ 2x_n \end{pmatrix}\right) = \sum_{k=1}^n |x_k| + \sum_{k=1}^n |x_k| \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{k=1}^n |2x_k| = \sum_{k=1}^n 2|x_k| \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{k=1}^n |2x_k| = \sum_{k=1}^n |2x_k| \qquad |\surd
\end{aligned}
$$

Bedingung 2:

$$\begin{aligned}
&& \varphi(\lambda a) &= \lambda\varphi(a) \\
\Leftrightarrow && \varphi\left(\lambda\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right) &= \lambda\varphi\left(\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right) \\
\Leftrightarrow && \varphi\left(\begin{pmatrix}\lambda x_1\\ \vdots\\ \lambda x_n\end{pmatrix}\right) &= \lambda\sum_{k=1}^{n}|x_k| \\
\Leftrightarrow && \sum_{k=1}^{n}|\lambda x_k| &= \sum_{k=1}^{n}\lambda|x_k| && |\times
\end{aligned}$$

Da $\lambda|x_k|$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ positive und negative Werte annehmen kann, $|\lambda x_k|$ jedoch stets positiv ist, folgt $|\lambda x_k| \neq \lambda|x_k|$. Somit erfüllt φ die 2. Bedingung, also die Kriterien für lineare Abbildungen nicht. $\Rightarrow \varphi$ ist keine lineare Abbildung.

(c) $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \mapsto \sum_{k=1}^{n} x_k;$

Bedingung 1:

$$\begin{aligned}
&& \varphi(a+b) &= \varphi(a) + \varphi(b) \\
\Leftrightarrow && \varphi\left(\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right) &= \varphi\left(\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right) + \varphi\left(\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right) \\
\Leftrightarrow && \varphi\left(\begin{pmatrix}2x_1\\ \vdots\\ 2x_n\end{pmatrix}\right) &= \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} x_k \\
\Leftrightarrow && \sum_{k=1}^{n} 2x_k &= \sum_{k=1}^{n} 2x_k && |\surd
\end{aligned}$$

Bedingung 2:

$$\begin{aligned}
& & \varphi(\lambda a) &= \lambda\varphi(a) \\
&\Leftrightarrow & \varphi\left(\lambda\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}\right) &= \lambda\varphi\left(\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}\right) \\
&\Leftrightarrow & \varphi\left(\begin{pmatrix}\lambda x_1\\ \vdots \\ \lambda x_n\end{pmatrix}\right) &= \lambda\sum_{k=1}^{n} x_k \\
&\Leftrightarrow & \sum_{k=1}^{n}\lambda x_k &= \sum_{k=1}^{n}\lambda x_k & |\checkmark
\end{aligned}$$

Da beide Bedingungen erfüllt sind, ist φ eine lineare Abbildung.

(d) $\varphi\colon V \to \mathbb{R}, f \mapsto f(x_0)$, wobei V der Vektorraum aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist, und $x_0 \in \mathbb{R}$.
Bedingung 1:

$$\begin{aligned}
& & \varphi(a+b) &= \varphi(a)+\varphi(b) \\
&\Leftrightarrow & \varphi(f+f) &= \varphi(f)+\varphi(f) \\
&\Leftrightarrow & (2f)(x_0) &= f(x_0)+f(x_0) \\
&\Leftrightarrow & 2f(x_0) &= 2f(x_0) & |\checkmark
\end{aligned}$$

Bedingung 2:

$$\begin{aligned}
& & \varphi(\lambda a) &= \lambda\varphi(a) \\
&\Leftrightarrow & \varphi(\lambda f) &= \lambda\varphi(f) \\
&\Leftrightarrow & (\lambda f)(x_0) &= \lambda f(x_0) \\
&\Leftrightarrow & \lambda f(x_0)) &= \lambda f(x_0) & |\checkmark
\end{aligned}$$

Da beide Bedingungen erfüllt sind, ist φ eine lineare Abbildung.

5.3 Begründe jeweils, warum V kein Vektorraum ist:

(a) $V \coloneqq \mathbb{R}^2$ mit $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} \coloneqq \begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\end{pmatrix}$ und $\lambda\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \coloneqq \begin{pmatrix}\lambda x_1\\x_2\end{pmatrix}$.
Es widerspricht der Grunddefinition von Vektor-Multiplikation $\lambda\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda x_1\\ \lambda x_2\end{pmatrix}$

(b) $V := \mathbb{R}^2$ mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_2 \\ x_2 + y_1 \end{pmatrix}$ und $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$.

Nach kommutativ Gesetz sollte

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_2 \\ x_2 + y_1 \end{pmatrix}$$

Auch gleich

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + x_2 \\ y_2 + x_1 \end{pmatrix}$$

Sein.
Da dies nicht der Fall ist, bricht es das Kommutativ-Gesetz

(c) $V := \mathbb{R}^2$ mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$ und $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Hiermit ergibt

$$1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das bricht die Definition des neutralen Elements der Multiplikation.

(d) $V := \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2; x = y^2\}$ mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$ und $\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$.

Mit $f(x) = y^2$ sollte

$$f\left(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda^2 y^2 \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

aber auch

$$f\left(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \lambda f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \lambda \begin{pmatrix} y^2 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda y^2 \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

Die Tatsache das die beiden Rechnungen nicht die gleiche Lösung ergeben zeigt das das Kommutativ-Gesetz gebrochen wird

5.4 Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit

$$\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Durch welche Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ist die Abbildung φ gegeben? Berechne $\varphi\begin{pmatrix}7\\12\end{pmatrix}$.

$$A := \begin{pmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{pmatrix}$$

$$\varphi(x) = Ax \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
x_1 + y_1 &= & 1\\
x_1 + 2y_1 &= & 0\\
x_2 + y_2 &= & 0\\
x_2 + 2y_2 &= & 1\\
x_3 + y_3 &= & -2\\
x_3 + 2y_3 &= & -1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}$$

$$\varphi(A) = \begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\\-9\end{pmatrix}$$

5.5 Sei V ein Vektorraum, und v^1, v^2, v^3, v^4 seien linear unabhängige Vektoren in V. Ermittle in jedem der folgenden 3 Fälle, ob die gegebenen Vektoren linear unabhängig sind:

(a) $v^1, v^1 + v^2, v^1 + v^2 + v^3, v^1 + v^2 + v^3 + v^4$,

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 v^1 + \lambda_2(v^1 + v^2) + \lambda_3(v^1 + v^2 + v^3) + \lambda_4(v^1 + v^2 + v^3 + v^4) = 0\\
\Leftrightarrow \quad & v^1(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) + v^2(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) + v^3(\lambda_3 + \lambda_4) + v^4\lambda_4 = 0\\
& \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = \lambda_3 + \lambda_4 = \lambda_4 = 0\\
& \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0\\
& \Rightarrow \text{linear unabhängig}
\end{aligned}$$

(b) $v^1 - v^2, v^2 + v^3, v^3 - v^4, v^4 + v^1,$

$$\begin{aligned} & \lambda_1(v^1 - v^2) + \lambda_2(v^2 + v^3) + \lambda_3(v^3 - v^4) + \lambda_4(v^4 + v^1) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & v^1(\lambda_1 + \lambda_4) + v^2(-\lambda_1 + \lambda_2) + v^3(\lambda_2 + \lambda_3) + v^4(-\lambda_3 + \lambda_4) = 0 \\ & \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_4 = \lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_4 - \lambda_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2, \lambda_3 = \lambda_4, \lambda_1 = -\lambda_4$$

$\Rightarrow$ nicht linear unabhänig $\lambda_1 = -\lambda_4$ hat unendlich viele Lösungen

(c) $v^1 + v^2, v^2 + v^3, v^3 + v^4, v^4 - v^1.$

$$\begin{aligned} & \lambda_1(v^1 + v^2) + \lambda_2(v^2 + v^3) + \lambda_3(v^3 + v^4) + \lambda_4(v^4 - v^1) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & v^1(\lambda_1 - \lambda_4) + v^2(\lambda_1 + \lambda_2) + v^3(\lambda_2 + \lambda_3) + v^4(\lambda_3 + \lambda_4) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 - \lambda_4 = \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_3 + \lambda_4 = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 - \lambda_4 = 0 &\Leftrightarrow \lambda_4 = \lambda_1 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \wedge \lambda_4 + \lambda_3 = 0 &\Rightarrow \lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_1 \\ \lambda_4 = \lambda_1 \wedge \lambda_3 + \lambda_4 = 0 &\Rightarrow \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \wedge \lambda_1 + \lambda_2 = 0 &\Rightarrow \lambda_2 = \lambda_3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$
$\Rightarrow$ linear unabhängig