Übung 4

4.3 Berechne den Rang der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 7 & 2 & -6 & 4 \\ 2 & 1 & s & t \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -1 & -1 & 2 \\ -3 & 15 & -3 & 0 & 3 \\ -3 & 29 & -7 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Der Rang von A hängt dabei von den Parametern $s, t \in \mathbb{R}$ ab.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 7 & 2 & -6 & 4 \\ 2 & 1 & s & t \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -20 & 4 \\ 0 & -1 & s-4 & t \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -20 & 4 \\ 0 & 0 & s & t-\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

für $s \neq 0 \wedge t \neq \frac{4}{5}$ ist der Rang 3
für $s = 0 \wedge t = \frac{4}{5}$ ist der Rang 2

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -1 & -1 & 2 \\ -3 & 15 & -3 & 0 & 3 \\ -3 & 29 & -7 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 39 & -6 & -3 & 9 \\ 0 & 53 & -10 & -1 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 13 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{24}{13} & \frac{40}{13} & -\frac{16}{13} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 13 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -24 & 40 & -16 \end{pmatrix}$$

B besitzt den Rang 3.

4.4 Bestimme alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrr} & & & 3x_2 & - & 5x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ - & x_1 & - & 3x_2 & & & - & x_4 & = & -5 \\ - & 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ - & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 8 \end{array}$$

LGS definiert als A:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & -5 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -1 & -5 \\ -2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 4 & 2 & 2 & 8 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -3 & 0 & -1 & -5 \\ -2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 4 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -3 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 7 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & 13 & 2 & 5 & 23 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -3 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 7 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & -12 & -17 & 5 \\ 0 & 0 & -41 & -5 & -36 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -3 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 7 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & -12 & -17 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow x_4 = -1$$

$$\begin{aligned} && -12x_3 - 17x_4 &= 5 && |(x_4 = -1) \text{ einsetzen} \\ \Leftrightarrow && -12x_3 + 17 &= 5 && | -17, / -12 \\ \Leftrightarrow && x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} && 7x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 12 && |(x_4 = -1, c_3 = 1) \text{ einsetzen} \\ \Leftrightarrow && 7x_2 + 2 - 4 &= 12 && | + 2, /7 \\ \Leftrightarrow && x_2 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} && -1x_1 - 3x_2 - 1x_4 &= -5 && |(x_2 = 2, x_4 = -1) \text{ einsetzen} \\ \Leftrightarrow && -1x_1 - 6 + 1 &= -5 && | + 5 \\ \Leftrightarrow && x_1 &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 1, x_4 = -1$

4.5 Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & 2x_1 & + & 2x_2 & + & tx_3 & = & 1 \\ - & & 2tx_1 & + & tx_2 & + & 9x_3 & = & 6 \end{array}$$

mit einem Parameter $t \in \mathbb{R}$.

(a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist das System eindeutig lösbar? Wie lautet die Lösung?

(b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ gibt es unendlich viele Lösungen? Gib alle lösungen an.

(c) Für welche $t \in \mathbb{R}$ gibt es keine Lösung?

LGS als matrix A:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & t & 1 \\ -2t & t & 9 & 6 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \qquad A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t-1 & 1 \\ -2t & t & 9 & 6 \end{array}\right)$$

(a) A mit $t = 1$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 9 & 6 \end{array}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 10 & 6 \end{array}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 4 \end{array}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{10} \end{array}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -0.7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0.4 \end{array}\right)$$

Das LGS hat eine eindeutige Lösung für $t = 1$:

$$x_1 = -0.7,$$
$$x_2 = 0,$$
$$x_3 = 0.4$$

(b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2t & t & 9 & 6 \\ 0 & 1 & t-1 & 1 \end{array}\right)$$

(c)

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t-1 & 1 \\ -2t & t & 9 & 6 \end{array}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t-1 & 1 \\ -2t & t+1 & 8+t & 7 \end{array}\right)$$

Da in der 3ten Zeile von A

4.6 Sei $A = (a_{j,k}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$

(a) In jedem der folgenden fünf Fälle finde Matrizen x und/oder y mit folgenden Eigenschaften: Eines der Produkte Ax, yA, yAx ist

i. die j-te zeile von A,
ii. die k-te Spalte von A,
iii. das Element a_{jk},
iv. die Summe der Einträge der j-ten zeile von A,
v. die Summe der Einträge der k-ten Spalte von A.

Seien $a, b \in \mathbb{R}^{1 \times m}$ und $c, d \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ mit:

$$\begin{gathered} a^l \coloneqq e^l = \big(0, \dots, 1, \dots, 0\big), \\ b \coloneqq (b_{jk} = 1) \\ c^l \coloneqq e^l = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ d \coloneqq (d_{jk} = 1) \end{gathered}$$

i. (yA) $a^j A$
ii. (Ax) Ac^k
iii. (yAx) $a^j Ac^k$
iv. (yAx) $a^j Ad$
v. (yAx) bAc^k

(b) Sei $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$

i. die j-te und die k-te Spalte von A vertauscht,
ii. die j-te und die k-te Zeile von A vertauscht,
iii. das λ-Fache der j-ten Zeile zur k-ten zeile von A addiert.

In jedem der deri Fälle finde eine matrix C, so dass entweder $B = CA$ oder $B = AC$