Übung 7

7.2 Löse die Anfangswertprobleme

(a) $y' + y\sin(x) = 4x^3 e^{\cos(x)}, y(\frac{\pi}{2}) = 2;$

$$\begin{array}{llrcll}
(H) & & y' + y\sin(x) & = & 0 & \\
& \Rightarrow & y_{(H)}(x) & = & e^{\cos(x)} & \\
& & & & & \\
& & y & = & c \cdot y_{(H)} & \\
(I) & \Rightarrow & y(x) & = & c(x)e^{\cos(x)} & \mid \text{ableiten} \\
(II) & \Rightarrow & y'(x) & = & c'(x)e^{\cos(x)} - c(x)e^{\cos(x)}\sin(x) &
\end{array}$$

I und II in Ausgangsgleichung einsetzen:

$$\begin{array}{lrcl}
& c'(x) & = & 4x^3 \\
\Rightarrow & c(x) & = & x^4 + c
\end{array}$$

Einsetzen in I:

$$\Rightarrow \quad y(x) = (x^4 + c)e^{\cos(x)}$$

Bedingung $y(\frac{\pi}{2}) = 2:$

$$\begin{array}{lrcl}
\Leftrightarrow & c & = & 2 - (\frac{\pi}{2})^4 \\
\Rightarrow & y(x) & = & (x^4 + 2 - (\frac{\pi}{2})^4)e^{\cos(x)}
\end{array}$$

(b) $xy' + y + xe^x = 0, y(1) = 0.$

$$\begin{array}{llrcll}
(H) & & xy' + y & = & 0 & \\
& \Rightarrow & y_{(H)}(x) & = & e^{-\ln(x)} = \frac{1}{x} & \\
& & & & & \\
& & y & = & c \cdot y_{(H)} & \\
(I) & \Rightarrow & y(x) & = & c(x)\frac{1}{x} & \mid \text{ableiten} \\
(II) & \Rightarrow & y'(x) & = & c'(x)\frac{1}{x} - c(x)\frac{1}{x^2} &
\end{array}$$

I und II in Ausgangsgleichung einsetzen:

$$c'(x) = -xe^x$$

partielle Integration mit $f(x) = x, g(x) = e^x$

$$\Rightarrow \quad c(x) = (1 - x)e^x + x$$

Einsetzen in I:

$$\Rightarrow \quad y(x) = \frac{1-x}{x}e^x + \frac{c}{x}$$

Bedingung $y(1) = 0:$

$$\begin{array}{lrcl}
\Leftrightarrow & c & = & 0 \\
\Rightarrow & y(x) & = & \frac{1-x}{x}e^x
\end{array}$$

7.3 Bestimme diejenigen Lösungen der Differentialgleichung

$$\dot{x} \cdot \sin(2t) = 2x + 2\cos(t),$$

die für $t \to \frac{\pi}{2}$ beschränkt ist.

$$\begin{array}{llrcl}
\text{(H)} & & \dot{x}\sin(2t) - 2x & = & 0 \\
 & \Rightarrow & x_{(H)}(t) & = & e^{\int \frac{2}{\sin(2t)}dt} = \tan(t)
\end{array}$$

Nachweis über Ableitung (Quotientenregel):

$$\frac{d}{dt}\tan(t) = \frac{\cos^2(t)+\sin^2(t)}{\cos^2(t)} = 1 + \tan^2(t)$$

$$\begin{array}{llrcll}
 & & x & = & c \cdot x_{(H)} & \\
\text{(I)} & \Rightarrow & x(t) & = & c(t)\tan(t) & \mid \text{ableiten} \\
\text{(II)} & \Rightarrow & \dot{x}(t) & = & c'(t)\tan(t) + c(t)(1+\tan^2(t)) &
\end{array}$$

I und II in Ausgangsgleichung einsetzen:

$$\begin{array}{lrcl}
 & c'(t) & = & \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)} \\
\Rightarrow & c(t) & = & -\frac{1}{\sin^2(t)} + c
\end{array}$$

Nachweis über Ableitung (Quotientenregel):

$$\frac{d}{dx}\frac{-1}{\sin(x)} + c = \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$$

Einsetzen in I:

$$\Rightarrow \quad x(t) = (-\frac{1}{\sin(t)} + c)\tan(t)$$

Da $\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} x(t) = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} (-1+c)\tan(t)$, folgt aus l'Hospital, dass x nur dann für $t \to \frac{\pi}{2}$ beschränkt ist, wenn $-1 + c = 0 \Leftrightarrow c = 1$.
$\Rightarrow$ Menge aller Lösungen der Differentialgleichung für $t \to \frac{\pi}{2}$ beschränkt
$= \{(-\frac{1}{\sin(t)} + 1)\tan(t)\}$

7.4 Bestimme die Lösungen der Differentialgleichungen

$$y' = \frac{x+y}{x} \quad \text{und} \quad y' = 2\frac{y}{x}$$

(a) durch Betrachten als lineare Differentialgleichung 1. Ordnung.
$y' = \frac{x+y}{x}$:

$$\begin{array}{rrcl}
\text{(H)} & y' - \frac{1}{x}y & = & 0 \\
\Rightarrow & y_{(H)}(x) & = & e^{\int \frac{1}{x}dx} = x
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrcll}
 & y & = & c \cdot y_{(H)} & \\
\text{(I)} \quad \Rightarrow & y(x) & = & c(x)x & \mid \text{ableiten} \\
\text{(II)} \quad \Rightarrow & y(x) & = & c'(x)x + c(x) &
\end{array}$$

I und II in Ausgangsgleichung einsetzen:

$$\begin{array}{rrcl}
 & c'(x) & = & \frac{1}{x} \\
\Rightarrow & c(x) & = & \ln(x) + c
\end{array}$$

Einsetzen in I:

$$\Rightarrow \quad y(x) = \ln(x)x + cx$$

$y' = 2\frac{y}{x}$:

$$\begin{array}{rrcl}
\Leftrightarrow & y' & = & \frac{2}{x}y \\
\Rightarrow & y(x) & = & e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2(\ln(x)+c)} = e^{\ln(x)^2} = x^2 \cdot c_2
\end{array}$$

(b) durch Substitution $z = \frac{y}{x}$
$y' = \frac{x+y}{x}$:

$$\begin{array}{rrcl}
\Leftrightarrow & y' & = & 1 + \frac{y}{x} \\
\Leftrightarrow & y' & = & 1 + z
\end{array}$$

$z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = zx \Rightarrow y' = z'x + z$:

$$\begin{array}{rrcl}
\Leftrightarrow & z'x + z & = & 1 + z \\
\Leftrightarrow & z' & = & \frac{1}{x} \\
\Rightarrow & z & = & \ln(x) + c
\end{array}$$

Rücksubstitution mit $z = \frac{y}{x}$

$$\Leftrightarrow \quad y = \ln(x)x + cx$$

$y' = 2\frac{y}{x}$:

$$\Leftrightarrow \quad y' = 2z$$

$z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = zx \Rightarrow y' = z'x + z$:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad z'x + z &= 2z \\ \Leftrightarrow \quad z'x - z &= 0 \\ \Rightarrow \quad z &= x \cdot c \end{aligned}$$

Rücksubstitution mit $z = \frac{y}{x}$

$$\Leftrightarrow \quad y = x^2 \cdot c$$

7.5 Bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Bernoulli'schen Differentialgleichungen:

(a) $(1 + x^2)y' + xy - xy^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad y' = -\frac{x}{1+x^2}y + \frac{x}{1+x^2}y^2$$

Substitution mit $z = y^{-1} - 1$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad z' &= -y^{-2}y' \\ \Leftrightarrow \quad z' &= -y^{-2}\left(\frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{+x^2}y\right) \\ \Leftrightarrow \quad z' &= \frac{x}{1+x^2}(y^{-1} - 1) \end{aligned}$$

z einsetzen:

$$\Leftrightarrow \quad z' = \frac{x}{1+x^2}z$$

Homogene Differentialgleichung:

$$\Rightarrow \quad z = e^{\int \frac{x}{1+x^2}dx}$$

Substitution mit $u = 1 + x^2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2\sqrt{u-1}}du$:

$$\Leftrightarrow \quad z = \sqrt{u}c$$

Rücksubstitution von z und u:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad y^{-1} - 1 &= \sqrt{1 + x^2}c \\ \Leftrightarrow \quad y &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}c+1} \end{aligned}$$

(b) $y' + y + (\sin(x) + e^x)y^3 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad y' = -y - y^3(\sin(x) + e^x)$$

Substitution mit $z = y^{-2}$:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad z' &= -2y^{-3}y' \\
\Leftrightarrow \quad z' &= 2y^{-3}(y + y^3(\sin(x) + e^x) \\
\Leftrightarrow \quad z' &= 2y^{-2} + 2(\sin(x) + e^x)
\end{aligned}$$

z einsetzen:

$$\Leftrightarrow \quad z' = 2z + 2(\sin(x) + e^x)$$

Über Homogene Differentialgleichung berechnen:

$$\begin{aligned}
z' - 2z &= 0 \\
(1) \quad \Rightarrow \quad z_H &= e^{\int 2dx} = e^{2x} \\
\Leftrightarrow \quad z'_H &= 2e^{2x} \\
\\
z &= c \cdot z_H \\
\Leftrightarrow \quad z' &= c' z_H + c z'_H \\
\\
\Leftrightarrow \quad c' e^{2x} &= 2(\sin(x) + e^x) \\
\Leftrightarrow \quad c' &= 2(\sin(x) + e^x)e^{-2x} \\
\Leftrightarrow \quad c &= 2 \int \frac{\sin(x)+e^x}{e^{2x}} dx \\
\Leftrightarrow \quad c &= 2(\int e^{-x} dx + \int \frac{\sin(x)}{e^{2x}})dx \\
\Leftrightarrow \quad c &= -2e{-2x} + c + \int \frac{\sin(x)}{e^{2x}})dx
\end{aligned}$$

Aus doppelter partieller Integration von $\int \frac{\sin(x)}{e^{2x}})dx$ mit $f(x) = e^{-2x}, g_1(x) = \sin(x), g_2(x) = \cos(x)$:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \int e^{-2x} \sin(x) &= -e^{-2} \cos(x) - 2e^{-2x} \sin(x) - 4 \int e^{-2x} \sin(x) \\
\Leftrightarrow \quad \int e^{-2x} \sin(x) &= -\frac{\cos(x)+2\sin(x)}{5e^{2x}} \\
\\
\Rightarrow \quad c &= -2e^{-x} + c - \frac{2(\cos(x)+2\sin(x))}{5e^{2x}}
\end{aligned}$$

In (1) einsetzen:

$$\Rightarrow \quad z = -2e^x + ce^{2x} - \frac{2}{5}(\cos(c) + 2\sin(x))$$

Rücksubstitution von z:

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{\sqrt{-2e^x - \frac{2}{5}(\cos(x)+2\sin(x)) + ce^{2x}}}$$