4.3 Berechne den Rang der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 7 & 2 & -6 & 4 \\ 2 & 1 & s & t \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -1 & -1 & 2 \\ -3 & 15 & -3 & 0 & 3 \\ -3 & 29 & -7 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Der Rang von A hängt dabei von den Parametern $s, t \in \mathbb{R}$ ab.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 7 & 2 & -6 & 4 \\ 2 & 1 & s & t \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -20 & 4 \\ 0 & -1 & s-4 & t \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -20 & 4 \\ 0 & 0 & s & t-\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

für $s \neq 0 \land t \neq \frac{4}{5}$ ist der Rang 3
für $s = 0 \land t = \frac{4}{5}$ ist der Rang 2

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -1 & -1 & 2 \\ -3 & 15 & -3 & 0 & 3 \\ -3 & 29 & -7 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 39 & -6 & -3 & 9 \\ 0 & 53 & -10 & -1 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 13 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{24}{13} & \frac{40}{13} & -\frac{16}{13} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 13 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -24 & 40 & -16 \end{pmatrix}$$

Rang ist 3

4.4 Bestimme alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} & & 3x_2 & - & 5x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ - & x_1 & - & 3x_2 & & - & x_4 & = & -5 \\ - & 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ - & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 8 \end{array}$$

LGS definiert als A:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & -5 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -1 & -5 \\ -2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 4 & 2 & 2 & 8 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \qquad A = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -3 & 0 & -1 & -5 \\ -2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 4 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \qquad A = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -3 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 7 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & 13 & 2 & 5 & 23 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \qquad A = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -3 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 7 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & -12 & -17 & 5 \\ 0 & 0 & -41 & -5 & -36 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \qquad A = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -3 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 7 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & -12 & -17 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow x_4 = -1$$

$$\begin{aligned} & -12x_3 - 17x_4 = 5 && |(x_4 = -1) \text{ einsetzen} \\ \Leftrightarrow\ & -12x_3 + 17 = 5 && |-17, /-12 \\ \Leftrightarrow\ & x_3 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 7x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 12 && |(x_4 = -1, c_3 = 1) \text{ einsetzen} \\ \Leftrightarrow\ & 7x_2 + 2 - 4 = 12 && |+2, /7 \\ \Leftrightarrow\ & x_2 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -1x_1 - 3x_2 - 1x_4 = -5 && |(x_2 = 2, x_4 = -1) \text{ einsetzen} \\ \Leftrightarrow\ & -1x_1 - 6 + 1 = -5 && |+5 \\ \Leftrightarrow\ & x_1 = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 1, x_4 = -1$

4.5 Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & tx_3 & = & 1 \\ -\ 2tx_1 & + & tx_2 & + & 9x_3 & = & 6 \end{array}$$

mit einem Parameter $t \in \mathbb{R}$.

(a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist das System eindeutig lösbar? Wie lautet die Lösung?

(b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ gibt es unendlich viele Lösungen? Gib alle lösungen an.

(c) Für welche $t \in \mathbb{R}$ gibt es keine Lösung?

LGS als matrix A:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & t & 1 \\ -2t & t & 9 & 6 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t-1 & 1 \\ 0 & 2t & 9+t & 6 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t-1 & 1 \\ 0 & 0 & 9+3t-2t^2 & 6-2t \end{array}\right)$$

(b) Berrechnen für welche t dies $9 + 3t - 2t^2$ 0 ergibt

$$
\begin{aligned}
& & 9 + 3t - 2t^2 &= 0 & &| * -\tfrac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow & -4.5 - 1.5t + t^2 &= 0 \\
& & \text{pq-Formel mit } p = -1.5 &\text{ und } q = -4.5 \\
& & t \in \{3, -\frac{3}{2}\} &: 9 + 3t - 2t^2 = 0
\end{aligned}
$$

Bei betrachtung von Zeile 3 von A fällt jetzt auf das für $t = 3$ die komplette Zeile zu 0 wird. Damit haben wir zu wenig Informationen um eine eindeutige Lösung zu finden damit gibt es unentlich viele Lösungen.

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow & A &= \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t-1 & 1 \\ 0 & 0 & 9+3t-2t^2 & 6-2t \end{array}\right) \\
& & \text{mit } t &= 3 \\
&\Leftrightarrow & A &= \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \\
&\Leftrightarrow & A &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \\
& & x_1 - \frac{x_3}{2} &= -\frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow & x_1 &= \frac{x_3 - 1}{2} \\
& & & \\
& & x_2 + 2x_3 &= 1 \\
&\Leftrightarrow & x_2 &= 1 - 2x_3
\end{aligned}
$$

Für $t = 3$ hat A unentlich viele Lösungen definiert durch:

$$x_1 = \frac{x_3 - 1}{2} \text{ und } x_2 = 1 - 2x_3$$

(c) Unterste Zeile von A mit $t = -\frac{3}{2}$ aus (b):

$$0x_3 = 9 \lightning$$

Damit gibt es keine Lösung bei

$$t = -\frac{3}{2}$$

(a)

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t-1 & 1 \\ 0 & 0 & 9+3t-2t^2 & 6-2t \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned}
&\text{Daraus folgt } x_3 = \frac{6-2t}{9+3t-2t^2} \\
\Leftrightarrow \quad & x_3 = \frac{3-t}{-(t^2-1.5t-4.5)} \\
\Leftrightarrow \quad & x_3 = \frac{3-t}{-((t-3)(t+1.5))} \\
\Leftrightarrow \quad & x_3 = \frac{2}{2t+3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x_2 = 1 - (\frac{2}{2t+3}(t-1)) \\
\Leftrightarrow \quad & x_2 = 1 - (\frac{2t-2}{2t+3}) \\
& \text{poly div:} \\
\Leftrightarrow \quad & x_2 = \frac{5}{2t+3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x_1 = -\frac{1}{2} - ((-\frac{t}{2}+1)\frac{2}{2t+3}) \\
\Leftrightarrow \quad & x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{t-2}{2t+3} \\
& \text{poly div:} \\
\Leftrightarrow \quad & x_1 = \frac{-3.5}{2t+3}
\end{aligned}$$

Aus (b) unc (c) folgen das $t \notin \{3, -\frac{3}{2}\}$ sein muss

$$\text{für } t \notin \{3, -\frac{3}{2}\} : \mathbb{L} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} * \frac{1}{2t+3}$$

4.6 Sei $A = (a_{j,k}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Übung 4

(a) In jedem der folgenden fünf Fälle finde Matrizen x und/oder y mit folgenden Eigenschaften: Eines der Produkte Ax, yA, yAx ist

i. die j-te zeile von A,

ii. die k-te Spalte von A,

iii. das Element a_{jk},

iv. die Summe der Einträge der j-ten zeile von A,

v. die Summe der Einträge der k-ten Spalte von A. Seien $a, b \in \mathbb{R}^{1\times m}$ und $c, d \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ mit:

$$
\begin{aligned}
a^l &:= (a_{1,k}); & a_{1,k} &:= \begin{cases} 0 & k \neq l, \\ 1 & k = l \end{cases}, \\
b &:= (b_{1,k}); & b_{1,k} &:= 1 \\
c^l &:= (c_{j,1}); & c_{j,1} &:= \begin{cases} 0 & j \neq l, \\ 1 & j = l \end{cases} \\
d &:= (d_{j,1}); & d_{j,1} &:= 1
\end{aligned}
$$

A. (yA) $a^j A$

B. (Ax) Ac^k

C. (yAx) $a^j Ac^k$

D. (yAx) $a^j Ad$

E. (yAx) bAc^k

(b) Sei $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$

i. die j-te und die k-te Spalte von A vertauscht,

ii. die j-te und die k-te Zeile von A vertauscht,

iii. das λ-Fache der j-ten Zeile zur k-ten zeile von A addiert.

In jedem der deri Fälle finde eine matrix C, so dass entweder $B = CA$ oder $B = AC$