Übung 8

8.3 Untersuche die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auf Konvergenz und absolute Konvergenz, wobei

(a) $a_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+i}{2}\right)^n - 1$$

Geometrische Reihe mit $|\frac{1+i}{2}| = \frac{|1+i|}{|2|} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$:
$\Rightarrow$ konvergent.

Überprüfen absoluter Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(\frac{1+i}{2}\right)^n \right|$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1+i}{2}\right|^n$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n - 1$$

Aus der geometrischen Reihe mit $|\frac{\sqrt{2}}{2}| < 1$ folgt $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\left(\frac{1+i}{2}\right)^n\right|$ konvergiert.
$\Rightarrow$ absolut konvergent

(b) $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}} = (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$;

Nach dem Leipniz-Kriterium, konvergiert eine Reihe, wenn die Folge $(b_n) := \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Es gilt: $a > b \Rightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}$.
$\Rightarrow \sqrt[3]{n} \xrightarrow{n \to \infty} \infty \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \xrightarrow{n \to \infty} 0$ (monoton fallend)
$\Rightarrow$ konvergent.

Absolute Konvergenz:

$$\left| \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}} \right| = \frac{|(-1)^n|}{|\sqrt[3]{n}|} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \left(\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} \right)^n = \left(\frac{1}{\sqrt[3n]{n}} \right)^n$$

Geometrische Reihe mit $\frac{1}{\sqrt[3]{n}} < 1$:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt[3n]{n}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt[3n]{n}-1}{\sqrt[3n]{n}}} = \frac{\sqrt[3n]{n}}{\sqrt[3n]{n} - 1}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[3n]{n} &\xrightarrow{n \to \infty} 1 \\ \Rightarrow \sqrt[3n]{n} - 1 &\xrightarrow{n \to \infty} 0 \\ \Rightarrow \frac{\sqrt[3n]{n}}{\sqrt[3n]{n} - 1} &\xrightarrow{n \to \infty} \infty \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ divergent $\Rightarrow$ nicht absolut konvergent.
(Umrechnungen von $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ zu $\sum\limits_{n=0}^{\infty}$ mit $n+1$ wurden weggelassen, weil sie durch den allgemeineren Fall von n gezeigt wurden).

(c) $a_n = (-1)^n \frac{n+2}{2n}$.

Nach dem Leipniz-Kriterium, konvergiert eine Reihe, wenn die Folge $(b_n) \coloneqq \frac{n+2}{2n}$ für $n \geq 1$ eine monoton fallende Nullfolge ist.

$$
\begin{aligned}
& & \frac{n+2}{2n} &> \frac{n+3}{2n+2} & & | \cdot (2n+2) \\
&\Leftrightarrow & \frac{(n+2)(2n+2)}{2n} &> n+3 & & \\
&\Leftrightarrow & \frac{2n^2+6n+4}{2n} &> n+3 & & | -(n+3) \\
&\Leftrightarrow & \frac{2n^2+6n+4}{2n} - \frac{2n(n+3)}{2n} &> 0 & & \\
&\Leftrightarrow & \frac{2n^2+6n+4}{2n} - \frac{2n^2+6n}{2n} &> 0 & & \\
&\Leftrightarrow & \frac{4}{2n} = \frac{2}{n} &> 0 & & |\surd \text{ für alle } n \geq 1
\end{aligned}
$$

Die Folge ist für alle Elemente, die in der Reihe vertreten sind $(n \geq 1)$ monoton fallend.

Grenzwert *(siehe Umformung Ungleichung zu $\frac{2}{n} > 0$)*:

$$a_n = a_{n+1} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2} > 0 \Rightarrow$ keine Nullfolge.
$\Rightarrow$ nicht konvergent $\Rightarrow$ nicht absolut konvergent
$\Rightarrow$ divergent.

8.4 Sei $s_n := \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ und $e = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ die Euler'sche Zahl.

(a) Zeige die Ungleichungen $0 < e - s_n < \frac{1}{n*n!}$ für $n \in \mathbb{N}$, mit Hilfe einer geeigneten geometrischen Reihe.

$$e - s_n$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 0 < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Da alle Summanden > 0, muss $e - s_n > 0$ sein.
$e - s_n$ wird größer, je kleinere Werte s_n annimmt. Da es sich bei s_n um eine Summe mit rein positiven Summanden handelt, ist s_n am kleinsten, wenn es die wenigstens möglichen Summanden besitzt ($n = 1$).

$$\Leftrightarrow \qquad \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n \cdot n!}$$
$$\Leftrightarrow \qquad \frac{1}{(n+1)!}(1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots) < \frac{1}{n \cdot n!} \quad | \cdot n!$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)}(1 + \frac{1}{n+2} + (1 + \frac{1}{(n+3)} + \frac{1}{(n+3)(n+4)} + \cdots)) < \frac{1}{n}$$

Durch geometrische Reihe
$(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots) < (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots) = 2$
$\Leftrightarrow (1 + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{(n+3)(n+4)} + \cdots) < (1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} \cdots) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
abschätzen:

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\frac{3}{2}}{(n+1)^2(n+2)} < \frac{1}{n} \qquad | \cdot n$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\frac{3}{2}n}{(n+1)^2(n+2)} < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\frac{3}{2}n}{(n^2+2n+1)(n+2)} < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\frac{3}{2}n}{n^3+4n^2+5n+2} < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\frac{3}{2}}{n^2+4n+5+\frac{2}{n}} < \frac{\frac{3}{2}}{n^2+4n+5} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}(n^2+4n+5) > 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 2n^2+8n+10 > 8n > 3 \qquad |\text{für } n \geq 1 > \tfrac{3}{8}$$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n \cdot n!}$ für $n \geq 1$

(b) Bestimme mit Hilfe von (a) eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, für die $|e - s_N| \leq 0.5 \cdot 10^{-4}$ gilt, und gib den Wert von s_N an.

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} - 0.5 \cdot 10^{-4} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} - 0.5 \cdot 10^{-4} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} - 0.5 \cdot 10^{-4} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 - 0.5 \cdot 10^{-4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \geq 2 - 0.5 \cdot 10^{-4}$$

$\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 2 \Rightarrow$ an der k-ten Stelle fehlt der Reihe bis zum Grenzwert 2 noch $\frac{1}{2^k}$.

$$\Rightarrow \frac{1}{2^k} \leq 0.5 \cdot 10^{-4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2^k} \geq \frac{1}{2 \cdot 10^4} \qquad | \log_2$$

$$\Leftrightarrow \quad k \geq \log_2(2 \cdot 10^4)$$

$$\Leftrightarrow \quad k \gtrsim 14.2877$$

$\Rightarrow n \geq 15.$

$s_{15} = \sum\limits_{k=0}^{15} \frac{1}{k!} \approx 2.71828128$

(c) Zeige, dass die Euler'sche Zahl e irrational ist.

8.5 (a) Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}-1} + \frac{1}{\sqrt{n}+1} \right)$?

(b) Berechne $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$.

(c) Für welche $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(1+z)^n}$?
Bestimme den Grenzwert, falls er existiert.

8.6 Ermittle (durch Probieren) das kleinste $n \in \mathbb{N}$, für dass $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > 3$ ist. benutze einen Computer, um herauszufinden, wie groß man n wählen muss, damit die Summe > 6

bzw. > 9 wird.

$$\sum_{k=1}^{11} \frac{1}{k} \approx 3.0199 > 3$$
$$\sum_{k=1}^{227} \frac{1}{k} \approx 6.0044 > 6$$
$$\sum_{k=1}^{4550} \frac{1}{k} \approx 9.0002 > 9$$