Übung 8

8.2 *Energiemethode* zur Lösung der Differentialgleichung $y'' = f(y)$: Man multipliziert die Gleichung mit $2y'$ und benutzt $(y'^2)' = 2y'y''$.
Behandle das Anfangswertproblem $y'' = 2e^y, y(0) = 0, y'(0) = -2$ auf diese Weise.

$$
\begin{array}{lrcll}
 & (y'^2)' & = & 2y'y'' & \\
\Leftrightarrow & (y'^2)' & = & 2y'2e^y & \mid \text{integrieren} \\
\Leftrightarrow & y'^2 & = & 4\int y'e^y dx & \\
\Leftrightarrow & y'^2 & = & 4e^y + c & \\
\Leftrightarrow & y' & = & \pm 2(e^y + c)^{\frac{1}{2}} &
\end{array}
$$

Bedingung $y'(0) = -2, y(0) = 0$ einsetzen:

$$
\begin{array}{lrcl}
\Leftrightarrow & c & = & 1 - e^0 = 0 \\
\Rightarrow & y' & = & -2e^{\frac{1}{2}y}
\end{array}
$$

Substitution mit $z = y'^{-1}$:

$$
\begin{array}{lrcl}
\Rightarrow & z' & = & -y'^{-2}y'' \\
\Leftrightarrow & z' & = & -\frac{1}{4}e^{-y}2e^y \\
\Leftrightarrow & z' & = & -\frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow & z & = & -(\frac{1}{2}x + c)
\end{array}
$$

Rücksubstitution von $z = y'^{-1}$:

$$
\begin{array}{lrcl}
\Leftrightarrow & y' & = & -\frac{1}{\frac{1}{2}x+c}
\end{array}
$$

Bedingung $y'(0) = -2$ einsetzen:

$$
\begin{array}{lrcll}
\Leftrightarrow & -\frac{1}{0+c} & = & -2 & \\
\Leftrightarrow & c & = & \frac{1}{2} & \\
\Rightarrow & y'(x) & = & -\frac{2}{(x+1)} & \mid \text{integrieren} \\
\Leftrightarrow & y(x) & = & -2\int \frac{1}{(x+1)} dx &
\end{array}
$$

Substitution mit $u = x + 1 \Rightarrow dx = 1du$:

$$
\begin{array}{lrcl}
\Leftrightarrow & y(x) & = & -2\int \frac{1}{u} du \\
\Leftrightarrow & y(x) & = & -2(\ln(u) + c)
\end{array}
$$

Rücksubstitution von $u = x + 1$:

$$
\begin{array}{lrcl}
\Leftrightarrow & y(x) & = & -2\ln(x + 1) + c
\end{array}
$$

Bedingung $y(0) = 0$ einsetzen:

$$
\begin{array}{lrcl}
\Leftrightarrow & -2\ln(x + 1) + c & = & 0 \\
\Leftrightarrow & c & = & 0 \\
\Rightarrow & y(x) & = & -2\ln(x + 1)
\end{array}
$$

8.3 Auf Grund des Gravitationsgesetzes beschreibt das Anfangswertproblem

$$m\ddot{r} = -\gamma \frac{Mm}{r^2}, \quad r(0) = R, \quad \dot{r}(0) = v_0$$

Die Flugbahn eines Körpers der Masse m zur Erde hin bzw. von der Erde weg. Dabei ist $r(t)$ der Abstand des Körpers vom Erdmittelpunkt zur Zeit t, M die Erdmasse, und die Gravitationskonstante ist mit γ bezeichnet.

(a) Forme geeignet um, und führe die Differentialgleichung in eine Differentialgleichung erster Ordnung über (vgl. Aufgabe 8.2); die entstehende Gleichung muss nicht gelöst werden. Berücksichtige die Anfangsbedingungen.

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{r} = -\gamma M r^{-2}$$

Energiemethode anwenden:

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad 2\ddot{r}\dot{r} &= \dot{\dot{r^2}} \\
\Leftrightarrow \quad -2\gamma M r^{-2}\dot{r} &= \dot{\dot{r^2}} \qquad | \text{ integrieren} \\
\Leftrightarrow \quad 2\gamma M \int -r^{-2}\dot{r}dt &= \dot{r}^2 \\
\Leftrightarrow \quad 2\gamma M(r^{-1} + c) &= \dot{r}^2
\end{aligned}$$

Bedingungen $r(0) = R, \dot{r} = v_0$ einsetzen:

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad 2\gamma M(R^{-1} + c) &= v_0^2 \\
\Leftrightarrow \quad c &= \tfrac{v_0^2}{2\gamma M} - \tfrac{1}{R}
\end{aligned}$$

c einsetzen:

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad 2\gamma M(r^{-1} + \tfrac{v_0^2}{2\gamma M} - \tfrac{1}{R}) &= \dot{r}^2 \\
\Leftrightarrow \quad v_0^2 - \tfrac{2\gamma M}{R} &= \dot{r}^2 - \tfrac{2\gamma M}{r}
\end{aligned}$$

(b) Es soll die kleinste Geschwindigkeit v_0 (Fluchtgeschwindigkeit von der Erde, zweite kosmische Geschwindigkeit) ermittelt werden, für die die Bewegung bis ins Unendliche reicht, also nicht umkehrt. Dem entsprechen die beiden Forderungen $r(t) \to \infty$ und $\dot{r}(t) \to 0$ für $t \to \infty$.
($M = 5.97 \cdot 10^{24} kg, \gamma = 6.673 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}, R = 6.370 \cdot 10^6 m$)

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad v_0^2 - \tfrac{2\gamma M}{R} &= \lim_{t\to\infty} \dot{r}^2 - \tfrac{2\gamma M}{r} \\
\Leftrightarrow \quad v_0^2 - \tfrac{2\gamma M}{R} &= 0 - 0 \\
\Leftrightarrow \quad v_0 &= \sqrt{\tfrac{2\gamma M}{R}}
\end{aligned}$$

Werte einsetzen:

$$\Rightarrow \quad v_0 \approx 11183.8932 \tfrac{m}{s} = 1.1183 \cdot 10^4 \tfrac{m}{s}$$

(c) Löse das Anfangswertproblem, falls v_0 die zweite kosmische Geschwindigkeit ist.

$$\begin{array}{rrcl} & a & = & 2M\gamma \\ \Leftrightarrow & \dot{r} & = & \sqrt{ar^{-1} - \frac{a}{R} + v_0^2} \quad \mid \frac{a}{R}, v_0 \text{ Einsetzen} \\ \Leftrightarrow & \dot{r} & = & \sqrt{a}\sqrt{r^{-1}} \end{array}$$

Trennung der Veränderlichen:

$$\begin{array}{rrcl} \Rightarrow & \int \sqrt{r}dr & = & \int \sqrt{a}dt + c \\ \Leftrightarrow & \int \sqrt{r}dr & = & \sqrt{a}t + c \end{array}$$

Integration durch Substitution mit $u = \sqrt{r}$:

$$\begin{array}{rrcl} \Rightarrow & \varphi(u) & = & u^2 \\ \Leftrightarrow & \varphi(u)' & = & 2u \\ \Leftrightarrow & \int u2udu & = & \sqrt{a}t + c \\ \Leftrightarrow & \frac{2}{3}u^3 & = & \sqrt{a}t + c \end{array}$$

Rücksubstitution:

$$\begin{array}{rrcl} \Rightarrow & \frac{2}{3}r^{\frac{3}{2}} & = & \sqrt{a}t + c \\ \Leftrightarrow & r & = & (\frac{3t\sqrt{a}}{2} + c)^{\frac{2}{3}} \end{array}$$

Bedingung $r(0) = R$ einsetzen:

$$\begin{array}{rrcl} \Rightarrow & R^{\frac{3}{2}} & = & c \\ \Rightarrow & r & = & (\frac{3t\sqrt{a}}{2} + R^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}} \end{array}$$

8.4 gegeben sei die Differentialgleichung

$$(*) \quad y' = \sqrt{y}$$

(a) Bestimme eine Lösung von (*) zum Anfangswert $y(2) = 1$. Ist diese eindeutig?

$$\begin{array}{lrrcl} & & \frac{dy}{dx} & = & y^{\frac{1}{2}} \\ & \Leftrightarrow & \int \frac{1}{\sqrt{y}}dy & = & \int 1dx \\ & \Leftrightarrow & 2y^{\frac{1}{2}} + c & = & x \\ (1) & \Leftrightarrow & y & = & \frac{(x+c)^2}{4} \end{array}$$

Bedingung $y(2) = 1$ einsetzen:

$$\begin{array}{rrcl} \Rightarrow & 4 & = & (2+c)^2 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{4} - 2 & = & c \end{array}$$

$y_1 = 0$, $y_2 = -4$

$$\begin{array}{rrcl} \Leftrightarrow & y_1 & = & \frac{x^2}{4} \\ \Leftrightarrow & y_2 & = & (\frac{x}{2} - 2)^2 \end{array}$$

(b) Finde mindestens drei Lösungen von (*) zum Anfangswert $y(0) = 0$.

Triviale Lösung:

$$y_1 = 0$$

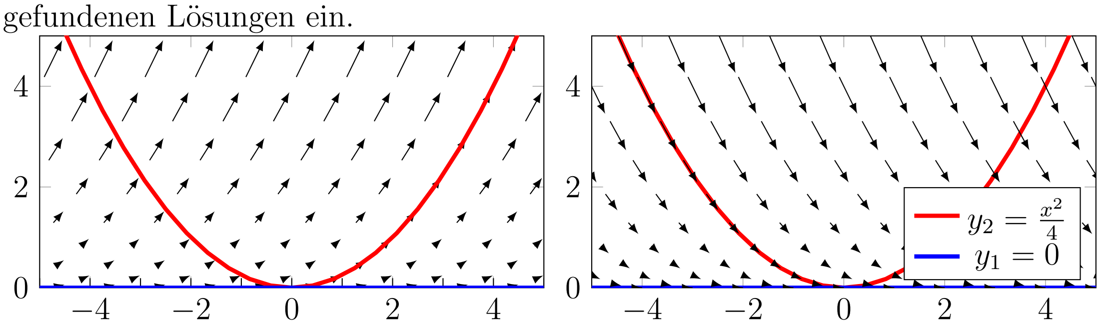
Bedingung $y(0) = 0$ in (1) einsetzen:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad c &= 0 \\ \Rightarrow \quad y_2 &= \frac{x^2}{4} \\ \Rightarrow \quad \text{Ł} &= \{0, \frac{x^2}{4}\} \end{aligned}$$

Da $\sqrt{y} = y' \Leftrightarrow y = (\pm y')^2$ muss $-y'$ ebenfalls eine Lösung sein.

Somit muss $\int -y' = -\int y' = -\frac{x^2}{4}$ ebenfalls eine Lösung sein

(c) Skizziere das durch die Differentialgleichung gegebene Richtungsfeld und trage die gefundenen Lösungen ein.



(d) Erfüllt die rechte Seite von (*) eine Lipschitz-Bedingung?

$L \geq 0$

$$\begin{aligned} f(y) - f(z) &\leq L|y - z| \\ \sqrt{y} - \sqrt{z} &\leq L|y - z| \end{aligned}$$

ist immer Wahr für $y < z$, da linke Seite negativ wird

$$\begin{aligned} y > z: \quad \sqrt{y} - \sqrt{z} &\leq L(\sqrt{y} - \sqrt{z})(\sqrt{y} + \sqrt{z}) \\ y > z: \quad 1 &\leq L(\sqrt{y} + \sqrt{z}) \end{aligned}$$

Da $\sqrt{y} + \sqrt{z}$ beliebig klein werden kann, gibt es y, z Werte für die die Lipschitz-Bedingung nicht erfüllt wird.

8.5 Bestimme die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems $y' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} y$.

Übung 8

Berechne die Lösung zum Anfangswert $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Eigenwerte bestimmen:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad -4 - 3\lambda + \lambda^2 &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = -1$

Eigenvektoren bestimmen:

$$\begin{aligned} & v_1 && : && \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad & v_1 && = && \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ & v_2 && : && \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad & v_2 && = && \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lösungsansatz $y = e^{t\lambda} v$:

$$\Rightarrow \quad y = c_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bedingung $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ einsetzen:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\Rightarrow c_1 = \frac{1}{5}\ c_2 = \frac{3}{5}$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$