

10.2 Eine (idealisiert homogene) Kette der Länge  $l$  liegt auf einem horizontalen, reibungsfreien Tisch, wobei ein Stück Kette der Länge  $a$  über den Rand hängt. Wie lange dauert es, bis die Kette vom Tisch geglitten ist?

Hinweis: Bezeichne die Gesamtmasse der Kette mit  $m$  und die Länge des überhängenden Stücks zur Zeit  $t$  mit  $y(t)$ . Berechne die Masse  $m_{\ddot{u}}(t)$  des überhängenden Stücks zur Zeit  $t$ . Die Gravitationskraft  $m_{\ddot{u}}(t)g$  muss dann gleich  $F = m\ddot{y}(t)$  sein.

$$\begin{aligned} m_{\ddot{u}}(t) &= y(t) \frac{m}{l} \\ F &= m\ddot{y}(t) \\ \Leftrightarrow F &= m_{\ddot{u}}(t)g \\ \Rightarrow m\ddot{y}(t) &\stackrel{!}{=} m_{\ddot{u}}(t)g \\ \Leftrightarrow \ddot{y}(t) - y(t) \frac{g}{l} &= 0 \end{aligned}$$

Homogene Differentialgleichung lösen:

$$\begin{aligned} \Rightarrow p(\lambda) &= \lambda^2 - \frac{g}{l} = 0 \\ \Rightarrow \lambda &= \pm \sqrt{\frac{g}{l}} \\ \Rightarrow y(t) &= c_1 e^{t\sqrt{\frac{g}{l}}} + c_2 e^{-t\sqrt{\frac{g}{l}}} \end{aligned}$$

Bedingung  $y(0) = a$  einsetzen, da die Länge des überhängenden Stücks der Kette zum Zeitpunkt

$$\begin{aligned} \Rightarrow c_1 + c_2 &= a \\ \Leftrightarrow c_1 &= a - c_2 \\ \Rightarrow y(t) &= (a - c_2) e^{t\sqrt{\frac{g}{l}}} + c_2 e^{-t\sqrt{\frac{g}{l}}} \end{aligned}$$

Da die Kette eine idealisiert homogene Verteilung ihres Gewichts aufweist, folgt  $\ddot{m}_{\ddot{u}}(t) \stackrel{!}{=} 0$ :

$$\begin{aligned} m_{\ddot{u}}(t) &= y(t) \frac{m}{l} \\ \Rightarrow \dot{m}_{\ddot{u}}(t) &= \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{(a-c_2)m}{l} e^{t\sqrt{\frac{g}{l}}} - \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{c_2 m}{l} e^{-t\sqrt{\frac{g}{l}}} \\ \Rightarrow \ddot{m}_{\ddot{u}}(t) &= \frac{mg}{l^2} \left( (a-c_2) e^{t\sqrt{\frac{g}{l}}} + c_2 e^{-t\sqrt{\frac{g}{l}}} \right) \\ \Rightarrow \ddot{m}_{\ddot{u}}(t) &= \frac{mg}{l^2} \sqrt{\frac{g}{l}} \left( (a-c_2) e^{t\sqrt{\frac{g}{l}}} - c_2 e^{-t\sqrt{\frac{g}{l}}} \right) \stackrel{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow 0 &= a e^{t\sqrt{\frac{g}{l}}} - c_2 e^{t\sqrt{\frac{g}{l}}} - c_2 e^{-t\sqrt{\frac{g}{l}}} \\ \Leftrightarrow 0 &= -c_2 (e^{-t\sqrt{\frac{g}{l}}} - e^{t\sqrt{\frac{g}{l}}}) \\ \Leftrightarrow c_2 &= 0 \end{aligned}$$

$c_2$  in  $y$  einsetzen:

$$\Rightarrow y(t) = a e^{t\sqrt{\frac{g}{l}}}$$

Zum Zeitpunkt des Abrutschens, muss  $y(t) = l$  betragen (Die gesamte Kette ist vom Tisch ge-

$$\begin{aligned} a e^{t\sqrt{\frac{g}{l}}} &\stackrel{!}{=} l \\ \Leftrightarrow t\sqrt{\frac{g}{l}} &= \ln\left(\frac{l}{a}\right) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad t = \frac{\ln(\frac{l}{a})}{\sqrt{\frac{g}{l}}}$$

10.3 Löse die folgenden Anfangswertaufgaben:

(a)  $\ddot{y} + 2\dot{y} - 3y = e^{2t}, y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1.$

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad \lambda &= -1 \pm 2 \\ \Rightarrow \quad \lambda_1 &= -3, \\ \lambda_2 &= 1 \end{aligned}$$

eine homogene Lösungsbasis finden:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad y_H(t) &= c_1 e^t + c_2 e^{-3t} \\ \ddot{y} + 2\dot{y} - 3y &= 0 \end{aligned}$$

eine spezielle Lösungsbasis finden:

da  $b(t) = 2^{2t}$  mit  $\lambda = 2 \neq \lambda_1, \lambda_2$  liegt kein Resonanzfall vor:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad y_s(t) &= c_3 e^{2t} \\ \Leftrightarrow \quad \dot{y}_s(t) &= 2c_3 e^{2t} \\ \Leftrightarrow \quad \ddot{y}_s(t) &= 4c_3 e^{2t} \end{aligned}$$

in Ausgangsgleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 5c_3 e^{2t} &= e^{2t} \\ \Leftrightarrow \quad c_3 &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$c_3$  in  $y_s$  einsetzen:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad y_s(t) &= \frac{1}{5} e^{2t} \\ \Rightarrow \quad y(t) &= c_1 e^t + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{5} e^{2t} \\ \Leftrightarrow \quad \dot{y}(t) &= c_1 e^t - 3c_2 e^{-3t} + \frac{2}{5} e^{2t} \end{aligned}$$

Anfangswertbedingungen einsetzen:

$$\begin{aligned} y(0) = 0 & \quad c_1 + c_2 = \frac{1}{5} \\ \dot{y}(0) = 1 & \quad c_1 - 3c_2 = \frac{2}{5} \\ \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} c &= \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} c &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad c_2 &= -\frac{1}{5} \\ \Rightarrow \quad c_1 &= 0 \end{aligned}$$

$c_1, c_2$  in  $y$  einsetzen:

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{5}(e^{3t} - e^{-3t})$$

$$(b) \ddot{y} + y = t + 2 \cos(t), y(\pi) = 2\pi, \dot{y}(\pi) = \pi.$$

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^2 + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \lambda &= \pm i \end{aligned}$$

eine homogene Lösungsbasis finden:

$$y_H(t) = c_1 e^{it} + c_2 e^{-it}$$

spezielle Lösungsbasen finden:

$$y_{s1} \quad \Leftarrow \quad \ddot{y} + y = t$$

da  $\lambda = 0 \neq \lambda_1, \lambda_2$  liegt kein Resonanzfall vor:

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_{s1} &= c_3 + c_4 t \\ \Leftrightarrow \dot{y}_{s1} &= c_4 \\ \Leftrightarrow \ddot{y}_{s1} &= 0 \end{aligned}$$

in Ausgangsgleichung ( $y_{s1}$ ) einsetzen:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow c_3 + c_4 &= t \\ \Rightarrow c_3 &= 0, \\ c_4 &= 1 \end{aligned}$$

$c_3, c_4$  in  $y_{s1}$  einsetzen:

$$\Rightarrow y_{s1} = t$$

$$y_{s2} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{y} + y = 2 \cos(t) = \Re(2e^{it})$$

durch  $\lambda = i = \lambda_1$  liegt ein Resonanzfall einer einfachen Nullstelle vor. Dadurch muss ein Vorfa

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tilde{y}_{s2}(t) &= cte^{it} \\ \Leftrightarrow \dot{\tilde{y}}_{s2}(t) &= ce^{it}(ti + 1) \\ \Leftrightarrow \ddot{\tilde{y}}_{s2}(t) &= ce^{it}(2i - t) \end{aligned}$$

in Ausgangsgleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 2ci &= 2 \\ \Leftrightarrow c &= -i \\ \Rightarrow \tilde{y}_{s2} &= -ite^{it} \\ \Leftrightarrow y_{s2} &= \Re(\tilde{y}_{s2}) \\ \Leftrightarrow y_{s2} &= t \sin(t) \end{aligned}$$

Da  $y = y_H + y_s$ :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad y(t) &= c_1 e^{it} + c_2 e^{-it} + t + t \sin(t) \\ \Leftrightarrow \quad \dot{y}(t) &= c_1 i e^{it} - c_2 e^{-it} + 1 + \sin(t) + t \cos(t) \end{aligned}$$

Anfangswertbedingungen einsetzen:

$$\begin{aligned} y(\pi) = 2\pi \quad & -ic_1 - c_2 + \pi = 2\pi \\ \Leftrightarrow \quad & ic_1 + c_2 = -\pi \\ \dot{y}(\pi) = \pi \quad & -ic_1 + c_2 + 1 - \pi = \pi \\ \Leftrightarrow \quad & -ic_1 + c_2 = 2\pi - 1 \\ \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \square \\ \leftarrow \end{matrix} \cdot (-1) \quad c &= \begin{pmatrix} -\pi \\ 2\pi - 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\pi \\ 3\pi - 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad & c_2 = \frac{1}{2}(\pi - 1), \\ & c_1 = \frac{i}{2}(-\pi - 1) \end{aligned}$$

$c_1, c_2$  in  $y$  einsetzen:

$$\Leftrightarrow y(t) = \frac{1}{2}(-i(\pi + 1)e^{it} + (\pi - 1)e^{-it}) + t(\sin(t) + 1)$$

- 10.4 (a) Stelle eine homogene lineare Differentialgleichung 3. Ordnung auf, so dass eine Lösungsbasis gegeben ist durch  $y_1(t) = 1, y_2(t) = t, y_3(t) = e^t$ .

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$  doppelte Nullstelle

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad p(\lambda) &= (\lambda - 1)\lambda^2 \\ \Rightarrow \quad y''' - y'' &= 0 \end{aligned}$$

- (b) Finde eine homogene lineare Differentialgleichung, so dass  $y_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y_1(t) = t$  und  $y_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y_2(t) = \sin(t)$  Lösungen sind.

$$\begin{aligned} \lambda_1 = t, \lambda_2 = \sin(t) &= \Im(e^{it}) \\ \Rightarrow \quad p(\lambda) &= \lambda^2(\lambda^2 + 1) \\ \Rightarrow \quad y'''' + y'' &= 0 \end{aligned}$$

- (c) Warum ist es in (b) unmöglich, eine homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung aufzustellen, selbst wenn man zeitabhängige Koeffizienten zulässt, d.h. wenn man eine Differentialgleichung der Form

$$\ddot{y} + a_1(t)\dot{y} + a_0(t)y = 0$$

sucht, mit  $a_0, a_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ?

$$\begin{vmatrix} t & \sin(t) \\ 1 & \cos(t) \end{vmatrix} = t \cos(t) - \sin(t)$$

Im Fall  $t = 0$  ist die Wronski-Determinante gleich 0

Daraus folgt, dass die gegebenen Lösungen nicht linear unabhängig sind. Und da eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung dieser Art, zwei linear unabhängige Lösungen hat wissen wir, dass es keine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit den gegebenen Lösungen gibt.

- (d) Warum ist es in (b) auch nicht möglich, eine homogene lineare Differentialgleichung 3. Ordnung aufzustellen, selbst wenn man zeitabhängige Koeffizienten zulässt?

$$\begin{vmatrix} t & \sin(t) & a \\ 1 & \cos(t) & b \\ 0 & -\sin(t) & c \end{vmatrix} = t \cos(t)c - \sin(t)a + \sin(b)t - c \sin(t)$$

Im Fall  $t = 0$  ist die Wronski-Determinante gleich 0

Wie in (d) folgt hieraus, dass es keine lineare Differentialgleichung 3. Ordnung mit den gegebenen Lösungen gibt.

Hinweis zu (c) und (d): Wronski-Determinante, Satz 10.1,  $n$  Lösungen  $y_1, \dots, y_n$  einer homogenen linearen Differentialgleichung  $n$ . Ordnung sind genau dann linear unabhängig, wenn

$$\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ \dot{y}_1(t) & \dot{y}_2(t) & \dots & \dot{y}_n(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \neq 0$$

für alle  $t$ . Was passiert hier für  $t = 0$ ?

10.5 Eine gedämpfte Schwingung ohne Anregung sei modelliert durch

$$\ddot{y} + a\dot{y} + 4y = 0, \quad y(0) = 5, \quad \dot{y}(0) = -1$$

Bestimme den Parameter  $a > 0$  so, dass gerade der aperiodische Grenzfall eintritt, und berechne die Lösung für diesen Fall. Stelle den zeitlichen Verlauf der Schwingungen graphisch dar.

Aus dem Ansatz für Kritisch gedämpfte Fälle:

$$\Rightarrow \ddot{y} + 2p\dot{y} + \omega^2 y = \ddot{y} + a\dot{y} + 4y$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad a &= 2p \\ \Rightarrow \quad \omega &= 2 \\ \Rightarrow \quad y &= c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}\end{aligned}$$

Anfangswerte einsetzen:

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad c_1 &= 5 \\ \Rightarrow \quad -1 &= -2c_1 + c_2 \\ \Leftrightarrow \quad c_2 &= 9 \\ \Rightarrow \quad y &= e^{-2t}(t + 9t)\end{aligned}$$

