Übung 8

8.3 Untersuche die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auf Konvergenz und absolute Konvergenz, wobei

(a) $a_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$;

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+i}{2}\right)^n - 1$$

Geometrische Reihe mit $|\frac{1+i}{2}| = \frac{|1+i|}{|2|} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$:
$\Rightarrow$ konvergent.

Überprüfen absoluter Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(\frac{1+i}{2}\right)^n\right|$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1+i}{2}\right|^n$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n - 1$$

Aus der geometrischen Reihe mit $|\frac{\sqrt{2}}{2}| < 1$ folgt $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(\frac{1+i}{2}\right)^n\right|$ konvergiert.
$\Rightarrow$ absolut konvergent

(b) $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}} = (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$;

Nach dem Leipniz-Kriterium, konvergiert eine Reihe, wenn die Folge $(b_n) := \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Es gilt: $a > b \Rightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}$.
$\Rightarrow \sqrt[3]{n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (monoton fallend)
$\Rightarrow$ konvergent.

Absolute Konvergenz:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}\right| \\
=&\frac{|(-1)^n|}{|\sqrt[3]{n}|} \\
=&\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \\
=&\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}^{\,n} \\
=&\frac{1}{\sqrt[3n]{n}}^{\,n}
\end{aligned}$$

Geometrische Reihe mit $\frac{1}{\sqrt[3]{n}} < 1$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt[3n]{n}}} \\
=&\frac{1}{\frac{\sqrt[3n]{n}-1}{\sqrt[3n]{n}}} \\
=&\frac{\sqrt[3n]{n}}{\sqrt[3n]{n}-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sqrt[3n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \\
\Rightarrow\ &\sqrt[3n]{n}-1 \xrightarrow{n\to\infty} 0 \\
\Rightarrow\ &\frac{\sqrt[3n]{n}}{\sqrt[3n]{n}-1} \xrightarrow{n\to\infty} \infty
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ divergent $\Rightarrow$ nicht absolut konvergent.
(Umrechnungen von $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ zu $\sum\limits_{n=0}^{\infty}$ mit $n+1$ wurden weggelassen, weil sie durch den allgemeineren Fall von n gezeigt wurden).

(c) $a_n = (-1)^n \frac{n+2}{2n}$.

Nach dem Leipniz-Kriterium, konvergiert eine Reihe, wenn die Folge $(b_n) := \frac{n+2}{2n}$ für $n \geq 1$ eine monoton fallende Nullfolge ist.

$$
\begin{aligned}
& & \frac{n+2}{2n} &> \frac{n+3}{2n+2} & & |\cdot(2n+2)\\
&\Leftrightarrow & \frac{(n+2)(2n+2)}{2n} &> n+3 & & \\
&\Leftrightarrow & \frac{2n^2+6n+4}{2n} &> n+3 & & |-(n+3)\\
&\Leftrightarrow & \frac{2n^2+6n+4}{2n}-\frac{2n(n+3)}{2n} &> 0 & & \\
&\Leftrightarrow & \frac{2n^2+6n+4}{2n}-\frac{2n^2+6n}{2n} &> 0 & & \\
&\Leftrightarrow & \frac{4}{2n} &> 0 & & |\surd \text{ für alle } n \geq 1
\end{aligned}
$$

Die Folge ist für alle Elemente, die in der Reihe vertreten sind ($n \geq 1$) monoton fallend.
$\Rightarrow$ konvergent.

Absolute Konvergenz:

$$\left|\frac{n+2}{2n}\right| = \frac{|n+2|}{|2n|} = \frac{n+2}{2n}$$

Nun gilt der selbe Beweis wie für die Konvergenz dieser Reihe.
$\Rightarrow$ absolut konvergent.

8.4 Sei $s_n := \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ und $e = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ die Euler'sche Zahl.

(a) Zeige die Ungleichungen $0 < e - s_n < \frac{1}{n*n!}$ für $n \in \mathbb{N}$, mit Hilfe einer geeigneten geometrischen Reihe.

$$
\begin{aligned}
& & 0 &< e - s_n\\
&\Leftrightarrow & 0 &< \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\\
&\Leftrightarrow & 0 &< \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}
\end{aligned}
$$

Da alle Summanden > 0, muss $e - s_n > 0$ sein.
$e - s_n$ wird größer, je kleinere Werte s_n annimmt. Da es sich bei s_n um eine

Summe mit rein positiven Summanden handelt, ist s_n am kleinsten, wenn es die wenigstens möglichen Summanden besitzt ($n = 1$).
$\Rightarrow \min s_n = \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{k!} = 2.$

$$\begin{aligned} && e - s_n &< \frac{1}{n \cdot n!} \\ \Leftrightarrow && e - 2 &< 1 \end{aligned}$$

(b) Bestimme mit Hilfe von (a) eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, für die $|e - s_N| \leq 0.5 \cdot 10^{-4}$ gilt, und gib den Wert von s_N an.

(c) Zeige, dass die Euler'sche Zahl e irrational ist.

8.5 (a) Konvergiert die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$?

(b) Berechne $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$.

(c) Für welche $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(1+z)^n}$?
Bestimme den Grenzwert, falls er existiert.

8.6 Ermittle (durch Probieren) das kleinste $n \in \mathbb{N}$, für dass $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > 3$ ist. benutze einen Computer, um herauszufinden, wie groß man n wählen muss, damit die Summe > 6 bzw. > 9 wird.

$\sum_{k=1}^{11} \frac{1}{k} \approx 3.0199 > 3$
$\sum_{k=1}^{227} \frac{1}{k} \approx 6.0044 > 6$
$\sum_{k=1}^{4550} \frac{1}{k} \approx 9.0002 > 9$