2.5 Bestimme die reellen Lösungen der Gleichungen

(a) $\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} = \sqrt{2x-12}$

$$\begin{aligned}
& & \sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} &= \sqrt{2x-12} & &|^2 \\
&\Leftrightarrow & (\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x})^2 &= 2x-12 & & \\
&\Leftrightarrow & (x+1) - 2\sqrt{x+1}\sqrt{9-x} + (9-x) &= 2x-12 & & \\
&\Leftrightarrow & x+1-x+9-2\sqrt{(x+1)(9-x)} &= 2x-12 & & \\
&\Leftrightarrow & 10-2\sqrt{(x+1)(9-x)} &= 2x-12 & &|/-2 \\
&\Leftrightarrow & -5+\sqrt{(x+1)(9-x)} &= -x+6 & &|+5 \\
&\Leftrightarrow & \sqrt{(x+1)(9-x)} &= -x+11 & &|^2 \\
&\Leftrightarrow & (x+1)(9-x) &= (-x+11)^2 & & \\
&\Leftrightarrow & -x^2+8x+9 &= 11^2-22x+x^2 & &|-x^2;+22x;-11^2 \\
&\Leftrightarrow & -2x^2+30x-112 &= 0 & &|/(-2) \\
&\Leftrightarrow & x^2-15x+56 &= 0 & &
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = -\frac{-15}{2} \pm \sqrt{(\frac{-15}{2})^2+56} = 7.5 \pm 0.5$$

$$\Rightarrow x_1 = 7 \land x_2 = 8$$

(b) $|x-3| + |x+2| - |x-4| = 3$
Wenn man $|x-3|$, $|x+2|$ und $|x-4|$ als drei separate Abbildungen $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ begreift, so ergibt sich für:

$$f(x) = \begin{cases} x-3 & x \geq 3 \\ -x-3 & x < 3 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x+2 & x \geq -2 \\ -x-2 & x < -2 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x-4 & x \geq 4 \\ -x+4 & x < 4 \end{cases}$$

Wenn man $gh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, gh(x) \coloneqq g(x) - h(x)$ definiert, folgt:

$$gh(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 4 \\ 2x-7 & 3 < x < 4 \\ -1 & x \leq 3 \end{cases}$$

Definiert man weiter $fgh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, fgh(x) := gh(x) + f(x)$, folgt:

$$fgh(x) = \begin{cases} x+3 & x \geq 4 \\ 3x-5 & 3 < x < 4 \\ x+1 & -2 \leq x \leq 3 \\ -x-3 & x < -2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x+3 = 3 \Leftrightarrow x = 0, &\qquad 0 \ngeq 4 | \times \\ 3x-5 = 3 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}, &\qquad 3 \nless \frac{8}{3} < 4 | \times \\ x+1 = 3 \Leftrightarrow x = 2, &\qquad -2 \leq 2 \leq 3 | \checkmark \\ -x-3 = 3 \Leftrightarrow x = -6, &\qquad -6 < -2 | \checkmark \end{aligned}$$

$\Rightarrow x_1 = 2 \wedge x_2 = -6$

2.6 bestimme sämtliche reellen Lösungen der Ungleichungen

(a) $\dfrac{2}{x+1} < \dfrac{1}{x-3}$

Es gilt:
$\frac{1}{a} < \frac{1}{b} \Leftrightarrow a > b$
$-\frac{1}{a} < -\frac{1}{b} \Leftrightarrow -a > -b$
Damit $\frac{2}{x+1}$ und $\frac{1}{x-3}$ beide entweder positiv oder negativ sind, muss $x > -1 \wedge x > 3 = x < 3$ bzw. $x < -1 \wedge x < 3 = x < -1$ sein.
Daraus ergibt sich für $x < -1 \vee x > 3$:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{x+1} < \frac{1}{x-3} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{x+1}{2} > \frac{x-3}{1} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} > x - 3 && | -\tfrac{1}{2}x; +3 \\ \Leftrightarrow \quad & 3.5 > 0.5x && | * 2 \\ \Leftrightarrow \quad & 7 > x \\ \Leftrightarrow \quad & x < 7 \end{aligned}$$

Innerhalb des restlichen Intervalls $(-1, 3)$ nimmt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := \frac{2}{x+1}$ alle Werte zwischen $(\frac{1}{2}, \infty)$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) := \frac{1}{x-3}$ alle Werte zwischen $(-\frac{1}{4}, -\infty)$ an.
Somit gilt: $\forall x \in \mathbb{R} -1 < x < 3 : (f(x) \nless h(x))$.

Insgesamt gilt: $\forall x \in \mathbb{R}_{x<7} \setminus \{-1 \leq x \leq 3\} : (\frac{2}{x+1} < \frac{1}{x-3})$

(a) ORIGINAL - MORITZ
Da $\frac{2}{x+1} > 0$ mit $x \in \mathbb{R}; x > -1$
Und $\frac{1}{x-3} < 0$ mit $x \in \mathbb{R}; x < 3$
Gibt gibt es keine reellen Lösungen in $x \in \mathbb{R}; -1 < x < 3$

Nullpunkt bestimmen:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{x+1} < \frac{1}{x-3} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{2x-6}{x+1} < 1 && \mid * (x-3) \end{aligned}$$

Polynom Division:

$$\begin{array}{l} \left(\quad 2x - 6 \right) \div \left(x + 1 \right) = 2 + \dfrac{-8}{x+1} \\ \underline{-\,2x - 2} \\ \quad -\,8 \end{array}$$

$$\begin{aligned} & 2 - \frac{8}{x+1} < 1 \\ \Leftrightarrow \quad & 1 < \frac{8}{x+1} && \mid -1 + \tfrac{8}{x+1} \\ \Leftrightarrow \quad & x+1 < 8 && \mid x+1 \\ \Leftrightarrow \quad & x < 7 && \mid -1 \end{aligned}$$

Somit gilt $\forall x \in \mathbb{R}; (x < 7; x \notin \{-1 \leq x \leq 3\}) : \frac{2}{x+1} < \frac{1}{x-3}$

(b) $(x+2)\,(4-x)\,(x-2)^2 > 0$
da x^2 für $x \in \mathbb{R}$ immer ≥ 0, kann der Term nur negativ werden, wenn $(x+2)$ oder $(4-x)$ negativ sind.
Die Bedingung erfüllen alle Elemente von $M\{x \in \mathbb{R}; x \neq 2, (x+2)(4-x) > 0\}$

$$\begin{aligned} & (x+2)(4-x) > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & -x^2 + 2x + 8 > 0 && \mid * (-1) \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - 2x - 8 < 0 \end{aligned}$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := x^2 - 2x - 8$ stellt eine nach oben geöffnete Parabel da. Somit müssen alle Werte zwischen den beiden Nullstellen < 0 sein.
Die Nullstellen lassen sich direkt aus der Parameterform oben ablesen.
$\Rightarrow x_1 = (-2) \wedge x_2 = 4$
Somit gilt $\forall x \in \mathbb{R}; (-2 < x < 4, x \neq 2) : ((x+2)\,(4-x)\,(x-2)^2 > 0)$

2.7 Beweise durch Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(a) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.

(b) $\sum_{k=0}^{n} (q^k) = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (wobei $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$).

(c) $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ ist durch 11 teilbar.
IA mit $n = 1$:

$$\begin{aligned} & 6^{2*1-2} + 3^{1+1} + 3^{1-1} \pmod{11} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 6^0 + 3^2 + 3^0 \pmod{11} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 1 + 9 + 1 = 11 \pmod{11} = 0 \qquad \checkmark \end{aligned}$$

IS:

$$\begin{aligned} & 6^{2(n+1)-2} + 3^{n+1+1} + 3^{n+1-1} \\ =& 6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n \\ =& 6^2 * 6^{2n-2} + 3 * 3^{n+1} + 3 * 3^{n-1} \\ =& 3 * 12 * 6^{2n-2} + 3 * 3^{n+1} + 3 * 3^{n-1} \\ =& 3 * (11 * 6^{2n-2} + 6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}) \\ =& 3 * 11 * 6^{2n-2} + 3 * (6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}) \end{aligned}$$

Da $3 * 11 * 6^{2n-2}$ und wie im Induktionsanfang gezeigt $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ und somit auch $3*(6^{2n-2}+3^{n+1}+3^{n-1})$ Vielfache von 11 sind, muss die Gesamtsumme ebenfalls für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 11 teilbar sein.

2.8 (a) Berechne $|5 + 12i|$
$|5 + 12i| = \sqrt{(5^2 + 12^2)} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$

(b) Berechne $\sum_{k=2}^{4} (2i)^k$

$\sum_{k=2}^{4} (2i)^k = (2i)^2 + (2i)^3 + (2i)^4 = -4 - 6i + 16 = 12 - 6i$

(c) Bestimme Real und Imaginärteil von $\frac{1 + i\sqrt{2}}{1 - i\sqrt{2}} + \frac{1 - i\sqrt{2}}{1 + i\sqrt{2}}$.

$z = 1 + i\sqrt{2} = a + ib$,
$\bar{z} = 1 - i\sqrt{2} = a - ib$

$$\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} = \frac{z^2 + \bar{z}^2}{z\bar{z}} = \frac{a^2 + 2iab - b^2 + a^2 - 2iab - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{2a^2 - 2b^2}{a^2 + b^2} = \frac{2(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2(1^2 - \sqrt{2}^2)}{1^2 + \sqrt{2}^2} = \frac{2 - 4}{1 + 2} = -\frac{2}{3}$$

Re: $-\frac{2}{3}$,
Im: 0

(d) Bestimme Real und Imaginärteil von $\dfrac{1+i^{15}}{2-i^{21}}$.

$$\begin{aligned}\frac{1+i^{15}}{2-i^{21}} = \frac{1+(-1)^{7.5}}{2-(-1)^{10.5}} = \frac{1+(-1)^{7}*(-1)^{\frac{1}{2}}}{2-(-1)^{10}*(-1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1+(-1)*\sqrt{-1}}{2-(1)*\sqrt{-1}} = \frac{1-i}{2-i} \\ = \frac{(1-i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2-i}{5} = 0.4+0.2i\end{aligned}$$

Re: 0.4,
Im: 0.2