

- 1.5 Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := \sin x$ . Für  $n \in \mathbb{N}$  bestimme das Taylor-Polynom von  $f$  vom Grad  $n$  um den Entwicklungspunkt  $a = 0$ . Zeige, dass die Taylor-Reihe von  $f$  auf ganz  $\mathbb{R}$  gegen  $f$  konvergiert, d.h. für jedes (feste)  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $R_n(x) \rightarrow 0$ . Benutze dazu die Formel für das Lagrange-Restglied  $R_n$  aus HM1, Satz 21.1.
- 1.6 Sind die angegebenen Funktionen  $\varphi_k : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R} (k = 1, 2, 3, 4)$  Treppenfunktionen? Wenn ja, ist ihr Integral zu ermitteln.

(a)  $\varphi_1(x) = \lfloor x \rfloor$

$$\varphi_1(x) = \lfloor x \rfloor = \begin{cases} \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \\ 2 & 2 \leq x < 3 \\ \vdots & \vdots \\ n & n \leq x < n+1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \varphi_1 \in T$  ( $\varphi_1$  ist eine Treppenfunktion) mit Treppenknoten =  $\{\dots, 1, 2, 3, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_a^b \varphi_1(x) dx &= \int_0^b \varphi_1(x) dx - \int_0^a \varphi_1(x) dx \\ \text{mit } \int_0^c \varphi_1(x) dx &= \left( \sum_{k=1}^{\lfloor c \rfloor} k - 1 \right) + (c - \lfloor c \rfloor) \lfloor c \rfloor \\ &= \left( \sum_{k=1}^{\lfloor c \rfloor} k \right) - \lfloor c \rfloor + (c - \lfloor c \rfloor) \lfloor c \rfloor \\ &= \frac{\lfloor c \rfloor (\lfloor c \rfloor + 1)}{2} + (c - \lfloor c \rfloor - 1) \lfloor c \rfloor \\ \int_0^2 \varphi_1(x) dx &= \frac{6}{2} - 2 - 0 = 1 \end{aligned}$$

(b)  $\varphi_2(x) = \lfloor 2x \rfloor$

$$\varphi_2(x) = \varphi_1(2x)$$

$\Rightarrow \varphi_2 \in T$  da  $\varphi_1 \in T$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_a^b \varphi_2(x) dx &= \int_a^b \varphi_1(2x) dx = \frac{\int_{2a}^{2b} \varphi_1(x) dx}{2} \\ \Rightarrow \int_0^2 \varphi_2(x) dx &= \frac{\int_0^4 \varphi_1(x) dx}{2} = \frac{\frac{20}{2} - 4 - 0}{2} = 3 \end{aligned}$$

$$(c) \quad \varphi_3(x) = 7\lfloor x \rfloor - 5\lfloor 2x \rfloor$$

$$\varphi_3(x) = 7\varphi_1(x) - 5\varphi_2(x) = 7\varphi_1(x) - 5\varphi_1(2x)$$

$\Rightarrow \varphi_3 \in T$  da sie eine lineare Kombination aus den beiden Treppenfunktionen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  ist. (Vektorraum)

$$\Rightarrow \int_a^b \varphi_3(x) dx = 7 \int_a^b \varphi_1(x) dx - 5 \int_a^b \varphi_1(2x) dx = 7 \int_a^b \varphi_1(x) dx - \frac{5}{2} \int_{2a}^{2b} \varphi_1(x) dx$$

$$\Rightarrow 7 \int_0^2 \varphi_1(x) dx - 5 \int_0^2 \varphi_2(x) dx = 7 - 15 = -8$$

$$(d) \quad \varphi_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0, \\ \lfloor \frac{1}{x} \rfloor & \text{falls } x \neq 0. \end{cases}$$

$$\int_0^2 \varphi_4(x) dx = \int_0^1 \varphi_4(x) dx + \int_1^2 \varphi_4(x) dx$$

$$\forall x > 1 : \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow \forall x > 1 : \lfloor \frac{1}{x} \rfloor = 0$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \varphi_4(x) dx = 0 \Rightarrow \int_0^2 \varphi_4(x) dx = \int_0^1 \varphi_4(x) dx$$

$$a_n := \left( \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n} \right)$$

berechnen der Treppenfunktion (Fläche unter den letzten n Stufen):

$$\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1})k = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \varphi_4(x) dx \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} \\
 &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \right) - 1 \\
 &= \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \right) - 1
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  harmonische Reihe  
 $\Rightarrow$  divergiert  
 $\Rightarrow$  nicht Riemann integrierbar.

1.7 Die rationalen Zahlen im Intervall  $[0, 2)$  seien als Folge  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  geschrieben. Entscheide, ob die angegebenen Funktionen  $f_n : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ ) Riemann-integrierbar sind.

- (a)  $f_1(x) = \lfloor 2x \rfloor$ ;
- (b)  $f_2(x) = e^{-x^2}$ ;
- (c)  $f_3(x) = \sum_{k: r_k < x} 2^{-k}$ ;
- (d)  $f_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0, \\ x^{-2} & \text{falls } x \neq 0. \end{cases}$

1.8 Sei  $a > 1$ . gehe ähnlich wie in Aufgabe 1.4 vor, um das Riemann-Integral  $\int_1^a \frac{dx}{x}$  zu bestimmen.

$$\int_1^a \frac{dx}{x} = \int_1^a \frac{1}{x} dx = \int_1^a f(x) dx$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$$

$$1 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = a \text{ mit } x_k := a^{\frac{k}{n}} \text{ mit } x, k \in \mathbb{N}; k < n$$

$$\int_1^a \varphi(x) dx = \sum_{k=0}^n (x_{k+1} - x_k) f(x_k) > \int_1^a f(x) dx > \int_1^a \psi(x) dx = \sum_{k=0}^n (x_{k+1} - x_k) f(x_{k+1})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^a \varphi(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^a \psi(x) dx = \int_1^a f(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (x_{k+1} - x_k) f(x_k) = \sum_{k=0}^{\infty} (x_{k+1} - x_k) f(x_{k+1})$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (a^{\frac{k+1}{n}} - a^{\frac{k}{n}}) \frac{1}{a^{\frac{k}{n}}} = \sum_{k=0}^{\infty} (a^{\frac{k+1}{n}} - a^{\frac{k}{n}}) \frac{1}{a^{\frac{k+1}{n}}}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (a^{\frac{k}{n}} a^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{k}{n}}) \frac{1}{a^{\frac{k}{n}}} = \sum_{k=0}^{\infty} (a^{\frac{k}{n}} a^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{k}{n}}) \frac{1}{a^{\frac{k}{n}}} \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (a^{\frac{1}{n}} - 1) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - a^{-\frac{1}{n}})$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - a^{-\frac{1}{n}})$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - a^{-\frac{1}{n}}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{a^{-\frac{1}{n}}}{a^{-\frac{1}{n}}} - a^{-\frac{1}{n}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} a^{-\frac{1}{n}} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1)}{\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) \\
 &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1)}{1} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx}(e^{\ln(a)^{\frac{1}{n}}} - 1)}{\frac{d}{dx} \frac{1}{n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx} \left( \frac{\ln(a)}{n} \right) e^{\ln(a)^{\frac{1}{n}}}}{-\frac{1}{n^2}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln(a)}{n^2} a^{\frac{1}{n}}}{-\frac{1}{n^2}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(a) a^{\frac{1}{n}} \\
 &= \ln(a)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_1^a \frac{dx}{x} = \ln(a)$$