Übung 4

4.3 Berechne den Rang der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 7 & 2 & -6 & 4 \\ 2 & 1 & s & t \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -1 & -1 & 2 \\ -3 & 15 & -3 & 0 & 3 \\ -3 & 29 & -7 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Der Rang von A hängt dabei von den Parametern $s, t \in \mathbb{R}$ ab.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 7 & 2 & -6 & 4 \\ 2 & 1 & s & t \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -20 & 4 \\ 0 & -1 & s-4 & t \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -20 & 4 \\ 0 & 0 & s & t-\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

für $s \neq 0 \wedge t \neq \frac{4}{5}$ ist der Rang 3
für $s = 0 \vee t = \frac{4}{5}$ ist der Rang 2

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -1 & -1 & 2 \\ -3 & 15 & -3 & 0 & 3 \\ -3 & 29 & -7 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 39 & -6 & -3 & 9 \\ 0 & 53 & -10 & -1 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 13 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{24}{13} & \frac{40}{13} & -\frac{16}{13} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 13 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -24 & 40 & -16 \end{pmatrix}$$

Rang ist 3

4.4 Bestimme alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} & & 3x_2 & - & 5x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ - & x_1 & - & 3x_2 & & - & x_4 & = & -5 \\ - & 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ - & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 8 \end{array}$$

LGS definiert als A:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & -5 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -1 & -5 \\ -2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 4 & 2 & 2 & 8 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -3 & 0 & -1 & -5 \\ -2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 4 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -3 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 7 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & 13 & 2 & 5 & 23 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -3 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 7 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & -12 & -17 & 5 \\ 0 & 0 & -41 & -5 & -36 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -3 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 7 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & -12 & -17 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow x_4 = -1$$

$$\begin{aligned} & & -12x_3 - 17x_4 &= 5 & & |(x_4 = -1) \text{ einsetzen} \\ &\Leftrightarrow & -12x_3 + 17 &= 5 & & |-17, /-12 \\ &\Leftrightarrow & x_3 &= 1 & & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & & 7x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 12 & & |(x_4 = -1, c_3 = 1) \text{ einsetzen} \\ &\Leftrightarrow & 7x_2 + 2 - 4 &= 12 & & |+2, /7 \\ &\Leftrightarrow & x_2 &= 2 & & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & & -1x_1 - 3x_2 - 1x_4 &= -5 & & |(x_2 = 2, x_4 = -1) \text{ einsetzen} \\ &\Leftrightarrow & -1x_1 - 6 + 1 &= -5 & & |+5 \\ &\Leftrightarrow & x_1 &= 0 & & \end{aligned}$$

$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 1, x_4 = -1$

4.5 Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & tx_3 & = & 1 \\ -\ 2tx_1 & + & tx_2 & + & 9x_3 & = & 6 \end{array}$$

mit einem Parameter $t \in \mathbb{R}$.

(a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist das System eindeutig lösbar? Wie lautet die Lösung?

(b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ gibt es unendlich viele Lösungen? Gib alle lösungen an.

(c) Für welche $t \in \mathbb{R}$ gibt es keine Lösung?

LGS als matrix A:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & t & 1 \\ -2t & t & 9 & 6 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t-1 & 1 \\ 0 & 2t & 9+t & 6 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t-1 & 1 \\ 0 & 0 & 9+3t-2t^2 & 6-2t \end{array}\right)$$

(b) Für welche t $9+3t-2t^2=0$

$$\begin{aligned} & 9+3t-2t^2=0 && \mid *-\tfrac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\quad & -4.5-1.5t+t^2=0 \\ & \text{pq-Formel mit } p=-1.5 \text{ und } q=-4.5 \\ & t\in\{3,-\frac{3}{2}\}: 9+3t-2t^2=0 \end{aligned}$$

Bei betrachtung von Zeile 3 von A fällt jetzt auf das für $t=3$ die Zeile zu 0 wird. Damit haben wir zu wenig Informationen um eine eindeutige Lösung zu finden damit gibt es unentlich viele Lösungen.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow\quad & A=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t-1 & 1 \\ 0 & 0 & 9+3t-2t^2 & 6-2t \end{array}\right) \\ & \text{mit } t=3 \\ \Leftrightarrow\quad & A=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \\ \Leftrightarrow\quad & A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \\ & x_1-\frac{x_3}{2}=-\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\quad & x_1=\frac{x_3-1}{2} \\ & x_2+2x_3=1 \\ \Leftrightarrow\quad & x_2=1-2x_3 \end{aligned}$$

Für $t=3$ hat A unentlich viele Lösungen definiert durch:

$$x_1=\frac{x_3-1}{2} \text{ und } x_2=1-2x_3$$

(c) Unterste Zeile von A mit $t=-\frac{3}{2}$ aus (b):

$$0x_3=9\lightning$$

Damit gibt es keine Lösung bei

$$t=-\frac{3}{2}$$

(a)

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t-1 & 1 \\ 0 & 0 & 9+3t-2t^2 & 6-2t \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Daraus folgt } x_3 &= \frac{6-2t}{9+3t-2t^2} \\ \Leftrightarrow \quad x_3 &= \frac{3-t}{-(t^2-1.5t-4.5)} \\ \Leftrightarrow \quad x_3 &= \frac{3-t}{-((t-3)(t+1.5))} \\ \Leftrightarrow \quad x_3 &= \frac{2}{2t+3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= 1-(\frac{2}{2t+3}(t-1)) \\ \Leftrightarrow \quad x_2 &= 1-(\frac{2t-2}{2t+3}) \\ \text{poly div:} & \\ \Leftrightarrow \quad x_2 &= \frac{5}{2t+3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{2}-((-\frac{t}{2}+1)\frac{2}{2t+3}) \\ \Leftrightarrow \quad x_1 &= -\frac{1}{2}+\frac{t-2}{2t+3} \\ \text{poly div:} & \\ \Leftrightarrow \quad x_1 &= \frac{-3.5}{2t+3} \end{aligned}$$

Aus (b) unc (c) folgen das $t \notin \{3, -\frac{3}{2}\}$ sein muss

$$\text{für } t \notin \{3, -\frac{3}{2}\} : \mathbb{L} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} * \frac{1}{2t+3}$$

4.6 Sei $A = (a_{j,k}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$

(a) In jedem der folgenden fünf Fälle finde Matrizen x und/oder y mit folgenden Eigenschaften: Eines der Produkte Ax, yA, yAx ist

i. die j-te zeile von A,
ii. die k-te Spalte von A,
iii. das Element a_{jk},
iv. die Summe der Einträge der j-ten zeile von A,
v. die Summe der Einträge der k-ten Spalte von A. Seien $a, b \in \mathbb{R}^{1\times m}$ und $c, d \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ mit:

$$a^l := (a_{1,k}); \qquad a_{1,k} := \begin{cases} 0 & k \neq l, \\ 1 & k = l \end{cases},$$

$$b := (b_{1,k}); \qquad b_{1,k} := 1$$

$$c^l := (c_{j,1}); \qquad c_{j,1} := \begin{cases} 0 & j \neq l, \\ 1 & j = l \end{cases}$$

$$d := (d_{j,1}); \qquad d_{j,1} := 1$$

i. (yA) $a^j A$
ii. (Ax) Ac^k
iii. (yAx) $a^j Ac^k$
iv. (yAx) $a^j Ad$
v. (yAx) bAc^k

(b) Sei $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$

i. die l-te und die p-te Spalte von A vertauscht,

$$C^{l,p} = (c_{j,k}) \in \mathbb{R}^{m\times n}; c_{j,k} := \begin{cases} 1 : j = k\neg \wedge (k = l \vee k = p) \\ 1 : j = l \wedge k = p \\ 1 : j = p \wedge k = l \\ 0 : sonst \end{cases}$$

$$C^{2,3} \in \mathbb{R}^{4\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B = AC

ii. die l-te und die p-te Zeile von A vertauscht,

$$C^{l,p} = (c_{j,k}) \in \mathbb{R}^{m \times n}; c_{j,k} \coloneqq \begin{cases} 1 : j = k \neg \wedge (k = l \vee k = p) \\ 1 : j = l \wedge k = p \\ 1 : j = p \wedge k = l \\ 0 : sonst \end{cases}$$

$$C^{2,3} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B = CA

iii. das λ-Fache der l-ten Zeile zur p-ten zeile von A addiert.

$$C^{l,p,\lambda} = (c_{j,k}) \in \mathbb{R}^{m \times n}; c_{j,k} \coloneqq \begin{cases} 1 : j = k \\ \lambda : l = k \wedge p = j \\ 0 : sonst \end{cases}$$

$$C^{2,3,\lambda} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B = CA

In jedem der deri Fälle finde eine matrix C, so dass entweder $B = CA$ oder $B = AC$