5.2 Es sei

$$A := \begin{pmatrix} -1-3i & 2+i & -1-2i \\ 0 & 2 & 0 \\ 2+4i & -2-i & 2+3i \end{pmatrix}$$

Bestimme die Eigenwerte von A samt ihrer algebraischen und geometrischen Vielfachheiten, sowie die zugehörigen Eigenräume.

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-3i-\lambda & 2+i & -1-2i \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2+4i & -2-i & 2+3i-\lambda \end{vmatrix}$$

Entwickeln nach 2. Zeile:

$$\Leftrightarrow \quad p_A(\lambda) = (2-\lambda) \begin{vmatrix} -1-3i-\lambda & -1-2i \\ 2+4i & 2+3i-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad p_A(\lambda) = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1+i-\lambda & 1+i-\lambda \\ 2+4i & 2+3i-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad p_A(\lambda) = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1+i-\lambda & 1+i-\lambda \\ 2i+2\lambda & i+\lambda \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad p_A(\lambda) = (2-\lambda)(1+i-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2i+2\lambda & i+\lambda \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad p_A(\lambda) = (2-\lambda)(1+i-\lambda)(-i-\lambda)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = i+1, \lambda_3 = -i$$

$$\alpha_\lambda = 1$$

Berechnung der Eigenvektoren: λ_1 :

$$\begin{pmatrix} -3-3i & 2+i & -1-2i \\ 2+4i & -2-i & 3i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3-3i & 2+i & -1-2i \\ -1+i & 0 & -1+i \end{pmatrix} \quad \mid \frac{1}{-1+i}$$

$$\begin{pmatrix} -5-i & 2+i & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mid \frac{1}{2+i}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Eig}(A, \lambda_1) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\gamma_1 = 1$

λ_2 :

$$\begin{pmatrix} -2-4i & 2+i & -1-2i \\ 0 & 1-i & 0 \\ 2+4i & -2-i & 1+2i \end{pmatrix} \quad \mid \frac{1}{1-i}$$

$$\begin{pmatrix} -2-4i & 0 & -1-2i \\ 0 & 1 & 0 \\ 2+4i & 0 & 1+2i \end{pmatrix} \quad \mid \frac{1}{1+2i}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Eig}(A, \lambda_2) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$\gamma_2 = 1$

λ_3 :

$$\begin{pmatrix} -1-2i & 2+i & -1-2i \\ 0 & 2+i & 0 \\ 2+4i & -2-i & 2+4i \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \mid \frac{1}{-1-2i} \\ \mid \frac{1}{2+i} \\ \mid \frac{1}{2+4i} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Eig}(A, \lambda_3) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\gamma_3 = 1$

5.3 Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $v \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ.

a) Zeige, dass v auch Eigenvektor von A^2 ist. Zu welchem Eigenwert?

$$\begin{aligned} & Av = v\lambda && | \cdot \text{A von links} \\ \Leftrightarrow \quad & A^2 v = Av\lambda \\ \Leftrightarrow \quad & A^2 v = v\lambda^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow v$ ist Eingenvektor von A zu λ^2

b) Zeige, dass v Eigenvektor von A^{-1} ist, wenn A invertierbar ist. Zu welchem Eigenwert?

$$\begin{aligned} & Av = v\lambda && | \cdot A^{-1}\text{von links} \\ \Leftrightarrow \quad & v = A^{-1} v\lambda \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{\lambda} v = A^{-1} v \end{aligned}$$

v ist ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $\frac{1}{\lambda}$

c) Wenn $A^2 = E_n$ ist, wieso ist dann mindestens eine der Zahlen ± 1 Eigenwert von A? Wieso gibt es keine anderen Eigenwerte?

$$A = A^{-1} \tag{1}$$

$$\Rightarrow Av = v\lambda, A^{-1} v = v\lambda \tag{2}$$

$$A^{-1} v = v\lambda \qquad | \cdot A \text{ von links} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & v = Av\lambda && | mit(2) \\ \Leftrightarrow \quad & v = v\lambda^2 \\ \Leftrightarrow \quad & 1 = \lambda^2 \end{aligned} \tag{4}$$

$\Rightarrow$ die einzig möglichen Eigenwerte sind ± 1

d) Haben A und A^T dieselben Eigenwerte?

$$\det(A) = \det(A^T)$$
$$\det(A^T - \lambda E_n) = \det(A - \lambda E_n)^T$$

da die Veränderung der Diagonalen nicht die Transponierbarkeit beeinflusst

$$\Rightarrow \det(A - \lambda E_n) = \det(A - \lambda E_n)^T$$

Da das charakteristische Polynom gleich ist, sind auch die Eigenwerte gleich.

5.4 Es Sei

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechne die Eigenwerte von A samt ihrer algebraischen und geometrischen Vielfachheiten. Ist die Matrix A diagonalisierbar?

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Entwickeln nach der 4-ten Spalte

$$\Leftrightarrow \quad p_A(\lambda) = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & -3 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} \; +$$

$$\Leftrightarrow \quad p_A(\lambda) = -\lambda(-1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -3 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \; +$$

$$\Leftrightarrow \quad p_A(\lambda) = -\lambda(-1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -3 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Entwickeln nach der 3-ten Spalte

$$\Leftrightarrow \quad p_A(\lambda) = -\lambda(-1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -3 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad p_A(\lambda) = -\lambda(-1-\lambda)(-2\lambda + \lambda^2)$$

$$\begin{aligned}
&\lambda^2(1+\lambda)(-2+\lambda)=0 \\
\Rightarrow &\lambda_1 = 0, && \alpha_1 = 2 \\
&\lambda_2 = -1, && \alpha_1 = 1 \\
&\lambda_3 = 2, && \alpha_1 = 1
\end{aligned}$$

Eigenvektoren ausrechnen: λ_1 :

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \frac{1}{-3} \quad -2 \quad -3 \\ + \qquad\qquad \mid -1 \\ \qquad + \quad \mid -1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Eig}(A,\lambda_1) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\gamma_1 = 2$$

λ_2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -1 \quad + \mid -1 \\ \\ + \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Eig}(A,\lambda_2) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\gamma_2 = 1$$

λ_3 :

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid -1 \\ \mid -1 \\ \\ \mid -1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -1 \\ + \quad \mid \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Eig}(A, \lambda_3) = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\gamma_3 = 1$$

Da $\alpha_\lambda = \gamma_\lambda$ ist A diagonalisierbar

5.5 Die *Fibonacci-Folge*:
Jemand brachte ein Kaninchenpaar in einen gewissen, allseits von Wänden umgebenen Ort, um herauszufinden, wieviel [Paare] aus diesem Paar in einem neuen Jahr entstehen würden. Es sei die Natur der Kaninchen, pro Monat ein neues Paar hervorzubringen und im zweiten Monat nach der Geburt [erstmals] zu gebären. [Todesfälle mögen nicht eintreten.] Die Anzahl der Kaninchenpaare im n-ten Monat ist somit durch die rekursiv definierte Folge:

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$$

mit den Startwerten $x_0 = 1$ und $x_1 = 1$, gegeben. Diese Folge wird *Fibonacci-Folge* genannt.

(a) Gib eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ an, so dass

$$A\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_n + x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Zeige, dass A diagonalisierbar ist und bestimme eine invertierbare Matrix T mit $T^{-1}AT = D$, wobei D eine Diagonalmatrix ist.

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda(1-\lambda) - 1 \\ &= \lambda^2 - \lambda - 1 \\ \Rightarrow \lambda_1 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \lambda_2 &= \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

$\mathrm{Eig}(A, \lambda_1)$:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gauß-Algorithmus:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix} \right\}$$

$\mathrm{Eig}(A, \lambda_2)$:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gauß-Algorithmus:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1-\sqrt{5} \end{pmatrix} \right\}$$

Aus $\gamma_{\lambda_1}(A) = \alpha_{\lambda_1}(A) = 1$ und $\gamma_{\lambda_2}(A) = \alpha_{\lambda_2}(A) = 1 \Rightarrow A$ diagonalisierbar.

$$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} \Leftarrow \left(\begin{matrix} 2 & 2 \\ 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2(1-\sqrt{5})-2(1+\sqrt{5})}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} & -2 \\ -1-\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{5}}{20}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} & -2 \\ -1-\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{5-\sqrt{5}}{20} & \frac{\sqrt{5}}{10} \\ \frac{5+\sqrt{5}}{20} & -\frac{\sqrt{5}}{10} \end{pmatrix}$$

(c) Finde eine explizite (d.h. nicht rekursive) Formel für das Folgenglied x_n, für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

$$A\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \quad A^n\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \quad TD^nT^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n & 0 \\ 0 & (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{5-\sqrt{5}}{20} & \frac{\sqrt{5}}{10} \\ \frac{5+\sqrt{5}}{20} & -\frac{\sqrt{5}}{10} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x_n &= 2(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n(\frac{5-\sqrt{5}}{20}+\frac{\sqrt{5}}{10}) + 2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n(\frac{5+\sqrt{5}}{20}-\frac{\sqrt{5}}{10}) \\ &= 2((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n\frac{5+\sqrt{5}}{20} + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\frac{5-\sqrt{5}}{20}) \end{aligned}$$