

8.3 Untersuche die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  auf Konvergenz und absolute Konvergenz, wobei

(a)  $a_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$ ;

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+i}{2}\right)^n - 1 \end{aligned}$$

Geometrische Reihe mit  $\left|\frac{1+i}{2}\right| = \frac{|1+i|}{|2|} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ :

(b)  $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ ;

(c)  $a_n = (-1)^n \frac{n+2}{2^n}$ .

8.4 Sei  $s_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$  und  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  die Euler'sche Zahl.

(a) Zeige die Ungleichungen  $0 < e - s_n < \frac{1}{n \cdot n!}$  für  $n \in \mathbb{N}$ , mit Hilfe einer geeigneten geometrischen Reihe.

(b) Bestimme mit Hilfe von (a) eine Zahl  $n \in \mathbb{N}$ , für die  $|e - s_n| \leq 0.5 \cdot 10^{-4}$  gilt, und gib den Wert von  $s_N$  an.

(c) Zeige, dass die Euler'sche Zahl  $e$  irrational ist.

8.5 (a) Konvergiert die Reihe  $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ ?

(b) Berechne  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$ .

(c) Für welche  $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$  konvergiert die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(1+z)^n}$ ?  
Bestimme den Grenzwert, falls er existiert.

8.6 Ermittle (durch Probieren) das kleinste  $n \in \mathbb{N}$ , für das  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > 3$  ist. benutze einen Computer, um herauszufinden, wie groß man  $n$  wählen muss, damit die Summe  $> 6$  bzw.  $> 9$  wird.