

8.2 *Energiemethode* zur Lösung der Differentialgleichung $y'' = f(y)$: Man multipliziert die Gleichung mit $2y'$ und benutzt $(y'^2)' = 2y'y''$.

Behandle das Anfangswertproblem $y'' = 2e^y, y(0) = 0, y'(0) = -2$ auf diese Weise.

$$\begin{aligned} (y'^2)' &= 2y'y'' \\ \Leftrightarrow (y'^2)' &= 2y'2e^y && | \text{ integrieren} \\ \Leftrightarrow y'^2 &= 4 \int y'e^y dx \\ \Leftrightarrow y'^2 &= 4e^y + c \\ \Leftrightarrow y' &= \pm 2(e^y + c)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Bedingung $y'(0) = -2, y(0) = 0$ einsetzen:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow c &= 1 - e^0 = 0 \\ \Rightarrow y' &= -2e^{\frac{1}{2}y} \end{aligned}$$

Substitution mit $z = y'^{-1}$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow z' &= -y'^{-2}y'' \\ \Leftrightarrow z' &= -\frac{1}{4}e^{-y}2e^y \\ \Leftrightarrow z' &= -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow z &= -\left(\frac{1}{2}x + c\right) \end{aligned}$$

Rücksubstitution von $z = y'^{-1}$:

$$\Leftrightarrow y' = -\frac{1}{\frac{1}{2}x + c}$$

Bedingung $y'(0) = -2$ einsetzen:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow -\frac{1}{0+c} &= -2 \\ \Leftrightarrow c &= \frac{1}{2} \\ \Rightarrow y'(x) &= -\frac{2}{(x+1)} && | \text{ integrieren} \\ \Leftrightarrow y(x) &= -2 \int \frac{1}{(x+1)} dx \end{aligned}$$

Substitution mit $u = x + 1 \Rightarrow dx = 1du$:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow y(x) &= -2 \int \frac{1}{u} du \\ \Leftrightarrow y(x) &= -2(\ln(u) + c) \end{aligned}$$

Rücksubstitution von $u = x + 1$:

$$\Leftrightarrow y(x) = -2\ln(x+1) + c$$

Bedingung $y(0) = 0$ einsetzen:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow -2\ln(x+1) + c &= 0 \\ \Leftrightarrow c &= 0 \\ \Rightarrow y(x) &= -2\ln(x+1) \end{aligned}$$

8.3 Auf Grund des Gravitationsgesetzes beschreibt das Anfangswertproblem

$$m\ddot{r} = -\gamma \frac{Mm}{r^2}, \quad r(0) = R, \quad \dot{r}(0) = v_0$$

Die Flugbahn eines Körpers der Masse m zur Erde hin bzw. von der Erde weg. Dabei ist $r(t)$ der Abstand des Körpers vom Erdmittelpunkt zur Zeit t , M die Erdmasse, und die Gravitationskonstante ist mit γ bezeichnet.

- (a) Forme geeignet um, und führe die Differentialgleichung in eine Differentialgleichung erster Ordnung über (vgl. Aufgabe 8.2); die entstehende Gleichung muss nicht gelöst werden. Berücksichtige die Anfangsbedingungen.

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{r} = -\gamma M r^{-2}$$

Energiemethode anwenden:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad 2\dot{r}\ddot{r} &= \dot{\dot{r}}^2 \\ \Leftrightarrow \quad -2\gamma M r^{-2}\dot{r} &= \dot{\dot{r}}^2 & | \text{ integrieren} \\ \Leftrightarrow \quad 2\gamma M \int -r^{-2}\dot{r} dt &= \dot{r}^2 \\ \Leftrightarrow \quad 2\gamma M(r^{-1} + c) &= \dot{r}^2 \end{aligned}$$

Bedingungen $r(0) = R, \dot{r} = v_0$ einsetzen:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad 2\gamma M(R^{-1} + c) &= v_0^2 \\ \Leftrightarrow \quad c &= \frac{v_0^2}{2\gamma M} - \frac{1}{R} \end{aligned}$$

c einsetzen:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad 2\gamma M\left(r^{-1} + \frac{v_0^2}{2\gamma M} - \frac{1}{R}\right) &= \dot{r}^2 \\ \Leftrightarrow \quad v_0^2 - \frac{2\gamma M}{R} &= \dot{r}^2 - \frac{2\gamma M}{r} \end{aligned}$$

- (b) Es soll die kleinste Geschwindigkeit v_0 (Fluchtgeschwindigkeit von der Erde, zweite kosmische Geschwindigkeit) ermittelt werden, für die die Bewegung bis ins Unendliche reicht, also nicht umkehrt. Dem entsprechen die beiden Forderungen $r(t) \rightarrow \infty$ und $\dot{r}(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$.

$$(M = 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg}, \gamma = 6.673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}, R = 6.370 \cdot 10^6 \text{ m})$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad v_0^2 - \frac{2\gamma M}{R} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{r}^2 - \frac{2\gamma M}{r} \\ \Leftrightarrow \quad v_0^2 - \frac{2\gamma M}{R} &= 0 - 0 \\ \Leftrightarrow \quad v_0 &= \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} \end{aligned}$$

Werte einsetzen:

$$\Rightarrow \quad v_0 \approx 11183.8932 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1.1183 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- (c) Löse das Anfangswertproblem, falls v_0 die zweite kosmische Geschwindigkeit ist.

8.4 gegeben sei die Differentialgleichung

$$(*) \quad y' = \sqrt{y}$$

- (a) Bestimme eine Lösung von $(*)$ zum Anfangswert $y(2) = 1$. Ist diese eindeutig?
- (b) Finde mindestens drei Lösungen von $(*)$ zum Anfangswert $y(0) = 0$.
- (c) Skizziere das durch die Differentialgleichung gegebene Richtungsfeld und trage die gefundenen Lösungen ein.
- (d) Erfüllt die rechte Seite von $(*)$ eine Lipschitz-Bedingung?

8.5 Bestimme die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems $y' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} y$.

Berechne die Lösung zum Anfangswert $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$