10.3 Ermittle sämtliche Zahlen $z \in \mathbb{C}$, die den folgenden Gleichungen genügen:

(a) $z^4 = -16$

$$
\begin{aligned}
|z^4| &= \sqrt{(-16)^2} = 16 \\
\varphi &= \pi \\
z^4 &= 16e^{i\pi} \\
z_k &= 2e^{i(\frac{\pi+2\pi k}{4})} \\
\\
\Rightarrow z_0 &= 2e^{i(\frac{\pi}{4})} \\
z_1 &= 2e^{i(\frac{3\pi}{4})} \\
z_2 &= 2e^{i(\frac{5\pi}{4})} \\
z_3 &= 2e^{i(\frac{8\pi}{4})} \\
\mathbb{L} &= \{2e^{i(\frac{\pi}{4})}, 2e^{i(\frac{3\pi}{4})}, 2e^{-i(\frac{\pi}{4})}, 2e^{-i(\frac{3\pi}{4})}\}
\end{aligned}
$$

(b) $z^3 + 3iz^2 - 3z - 9i = 0$ (Hinweis: kubische Ergänzung)

$$
\begin{aligned}
& z^3 + 3iz^2 - 3z - 9i = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (z + 3i)(z^2 - 3) = 0 \\
& \Rightarrow z = -3i, z^2 = 3 \\
& = \{-3i, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}
\end{aligned}
$$

(c) $z^2 - 3z + 3 - i = 0$

$$\begin{aligned}
& & z^2 - 3z + 3 - i &= 0 \\
&\Leftrightarrow & (z-1.5)^2 - 1.5^2 + 3 - i &= 0 & &\mid -\tfrac{3}{4} + i \\
&\Leftrightarrow & (z-1.5)^2 &= -\frac{3}{4} + i & &\mid\sqrt{} \\
&\Leftrightarrow & z - 1.5 &= \pm\sqrt{-\frac{3}{4} + i} & &\mid +1.5 \\
&\Leftrightarrow & z &= \pm\sqrt{-\frac{3}{4} + i} + 1.5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& & (x+iy)^2 &= a + ib \\
&\Leftrightarrow & x + iy &= \sqrt{a+ib}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow a = -\frac{3}{4}, b = 1$

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= \sqrt{a^2+b^2} \\
x^2 - y^2 &= a \\
\Rightarrow x &= \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\
\Rightarrow y &= \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}}
\end{aligned}$$

$$x = \sqrt{\frac{-\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{9}{16} + 1}}{2}} = \sqrt{\frac{-\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{25}{16}}}{2}} = \sqrt{\frac{-\frac{3}{4} + \frac{5}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$y = \sqrt{\frac{\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{9}{16} + 1}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{25}{16}}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{3}{4} + \frac{5}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{8}{4}}{2}} = 1$$

$\Rightarrow z = \pm(0.5 + i) + 1.5$
$\Rightarrow z_1 = 2 + i, z_2 = 1 - i$

10.4. Sei $a > 0$, $a \neq 1$. Berechne ohne Taschenrechner / Computer:

$$\log_2(0.125)$$

$$0.125 = \frac{1}{8} = 8^{-1} = (2^3)^{-1} = 2^{-3}$$
$$\Rightarrow \log_2(0.125) = -3$$

$$\log_{a^2}(\sqrt{a})$$

$$\sqrt{a} = \sqrt{\sqrt{a^2}} = \sqrt[4]{a^2} = (a^2)^{\frac{1}{4}}$$
$$\Rightarrow \log_{a^2}(\sqrt{a}) = \frac{1}{4}$$

$$\log_2 \sqrt[3]{32}$$

$$\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^5} = (2^5)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{3}}$$
$$\log_2(\sqrt[3]{32}) = \frac{5}{3}$$

$$3^{\log_9(4)}$$

$$3^{\log_9(4)} = \sqrt{(3^{\log_9(4)})^2} = \sqrt{3^{2\log_9(4)}} = \sqrt{9^{\log_9(4)}} = \sqrt{4} = 2$$

10.5. (a) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig, mit $f(0) = f(1)$. Dann gibt es ein $t \in [0, \frac{1}{2}]$ mit $f(t) = f(t + \frac{1}{2})$.

$g(t) = f(t) - f(t + \frac{1}{2})$, stetig.

$g(0) = f(0) - f(\frac{1}{2}) = f(1) - f(\frac{1}{2})$
$g(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) - f(1) = f(\frac{1}{2}) - f(0)$
$\Rightarrow g(0) = -g(\frac{1}{2})$ (Vorzeichenwechsel zwischen $g(0)$ und $g(\frac{1}{2})$)

$\Rightarrow g(t) = 0$ mit $t \in [0, \frac{1}{2}]$
$\Rightarrow$ Es muss ein $t \in [0, \frac{1}{2}]$ geben, für das gilt $f(t) = f(t + \frac{1}{2})$

(b) Die Gleichung $x^6 - x^5 + 42x^3 - 5 = 0$ hat mindestens zwei reelle Lösungen.

```
function f(x){
    return Math.pow(x,6)-Math.pow(x,5)+42*Math.pow(x,3)-5;
}

for(let i = -20; i <= 20; i++){
    console.log(i+ " %c "+f(i), f(i)<0?'background: #222; color: #bada55':'');
}
```

Aus $f(0) < 0$ und $f(1) > 0$ folgt $x_0 \in [0, 1]$.
Aus $f(-3) < 0$ und $f(-4) > 0$ folgt $x_2 \in [-3, -4]$.
$\Rightarrow f$ besitzt mindestens 2 Nullstellen.

10.6. Die Hyperbelfunktionen oder hyperbolischen Funktionen Cosinus hyperbolicus und Sinus hyperbolicus sind definiert durch

$$cosh(x) := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \text{ und } sinh(x) := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})(x \in \mathbb{R})$$

(a) Bestätige die Formel

$$cosh^2(x) - sinh^2(x) = 1 \; x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & e^{2x} + e^{-2x} + 2 - (e^{2x} + e^{-2x} - 2) = 4 \\ \Leftrightarrow \quad & 4 = 4 \end{aligned}$$

(b) Zeige, dass die Funktion $sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und bijektiv ist, und dass die Umkehrfunktion $arsinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Areafunktion: Area Sinus hyperbolicus) stetig ist und durch $arsinh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ gegeben ist.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 1} > x \\ \ln(x2) \text{ ist streng monoton wachsend} \\ \Rightarrow \ln(\sqrt{x^2 + 1}) \text{ ist streng monoton wachsend} \end{aligned}$$

Dadurch ist laut der Stetigkeit der Umkehrfunktion, auch die Umkehrfunktion von arcshin(x), also sinh(x), stetig und streng monoton wachsend.
Da sinh(x) auch auf ein die Erforderungen für den Satz über die Stetigkeit der Umkehrfunktion erfüllt, wissen wir wiederum das arcsin(x) stetig ist und sinh(x) bijektiv