

- 11.3 (a) Sei $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x \neq 0\}$. Bestimme den Gradienten Δf der Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) := y \sin(xz^2) + \frac{x \cos(y)}{y}$.

$$\Delta f = \begin{pmatrix} y \cos(xz^2)z^2 + \frac{\cos(y)}{y} \\ \sin(xz^2) - x\left(\frac{\sin(y)}{y} + \frac{\cos(y)}{y^2}\right) \\ y \cos(2xz) \end{pmatrix}$$

- (b) Entscheide, ob es partiell differenzierbare Funktionen auf \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3 gibt mit

$$\Delta f(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\ -x + y \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \Delta f(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$$

Bestimme gegebenenfalls ein solches f .

$$\begin{aligned} \Delta f(x, y) &= \begin{pmatrix} x + y \\ -x + y \end{pmatrix} \\ \Rightarrow f(x, y) &= \int x + y dx \\ \Leftrightarrow f(x, y) &= \int -x + y dy \\ \Rightarrow \int x + y dx &= \int -x + y dy \\ \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + yx &= \frac{y^2}{2} - yx \end{aligned}$$

\Rightarrow Es existiert keine partiell differenzierbare Funktion $f \in \mathbb{R}^2$
mit $\Delta f(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\ -x + y \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \Delta f(x, y, z) &= \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \\ \Rightarrow f(x, y, z) &= \int yz dx \\ &= \int xz dy \\ &= \int xy dz \\ \Rightarrow f(x, y, z) &= xyz \end{aligned}$$

- 11.4 Sei $c > 0$, und $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seien zweimal stetig differenzierbar. Zeige: Die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, u(t, x) := f(x + ct) + g(x - ct)$ ist eine Lösung der *Wellengleichung*

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) = c^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x)$$

$$(I) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} (f(x+ct)) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} (g(x-ct)) \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} u &= c \left(\frac{\partial}{\partial t} (f'(x+ct)) + \frac{\partial}{\partial t} (g'(x-ct)) \right) \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} u &= c^2 (f''(x+ct) + g''(x-ct)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} (f(x+ct)) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (g(x-ct)) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} u &= \frac{\partial}{\partial x} (f'(x+ct)) + \frac{\partial}{\partial x} (g'(x-ct)) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} u &= f''(x+ct) + g''(x-ct) \end{aligned}$$

In (I) Einsetzen:

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} u = c^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} u$$

11.5 Bestimme Lage und Art der lokalen Extrema folgender Funktionen:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) := xy^2 - 4xy + x^4$

Kandidaten finden:

$$\begin{aligned} \nabla f &= \begin{pmatrix} y^2 + 4y + 4x^3 \\ 2xy - 4x \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad 0 &= 2xy - 4x \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= x(2y - 4) \\ \Rightarrow \quad y_1 &= 2 \\ \Rightarrow \quad x_2 &= 0 \\ 0 &= y^2 - 4y + 4x^3 \end{aligned}$$

$y_1 = 2$ Einsetzen:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 4 &= 4x^3 \\ \Rightarrow \quad x_1 &= 1 \end{aligned}$$

$x_2 = 0$ Einsetzen:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 0 &= y^2 - 4y \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= y(y - 4) \\ \Rightarrow \quad y_2 &= 0 \\ \Rightarrow \quad y_3 &= 4 \end{aligned}$$

$$\text{Hess } f = \begin{pmatrix} 12x^2 & 2y - 4 \\ 2y - 4 & 2x \end{pmatrix}$$

Kandidat $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Einsetzen:

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16$$

\Rightarrow indefinite Hesse matrix, also ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Sattelpunkt.

Kandidat $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ Einsetzen:

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16$$

\Rightarrow indefinite Hesse matrix, also ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ ein Sattelpunkt.

Kandidat $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Einsetzen:

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 24$$

\Rightarrow positiv definite Hesse matrix, also ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ lokales striktes Minimum.

(b) $g : (0, \pi) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, g(x, y) := \sin(x) + \sin(y) + \sin(x + y)$

Kandidaten finden:

$$\begin{aligned} \nabla g &= \begin{pmatrix} \cos(x) + \cos(x + y) \\ \cos(y) + \cos(x + y) \end{pmatrix} \\ \text{(I)} \Rightarrow \cos(x) &= -\cos(x + y) \\ \Rightarrow \cos(y) &= -\cos(x + y) \\ \Rightarrow x &= y \end{aligned}$$

In (I) Einsetzen:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \cos(x) &= -\cos(2x) \\ \Leftrightarrow \cos(x) &= -1(\cos(x)^2 - \sin(x)^2) & | + \cos(x)^2 \\ \Leftrightarrow \cos(x) + 2\cos(x)^2 &= 1 & | \div 2 + \frac{1}{16} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{16} + \frac{\cos(x)}{2} + \cos(x)^2 &= \frac{9}{16} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4} + \cos(x)\right)^2 &= \frac{9}{16} \\ \Rightarrow x &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Hess } f &= \begin{pmatrix} -\sin(x) - \sin 2x & -\sin(2x) \\ -\sin(2x) & -\sin(x) - \sin(x + y) \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \sin(x)^2 &= \begin{vmatrix} -\sin(x) & 0 \\ 0 & -\sin(x) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Kandidat Einsetzen:

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) > 0$$

\Rightarrow Hess f ist negativ definit, daraus folgt das der Kandidat $\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ein striktes lokales Maximum ist.

11.6 (a) Berechne die Jacobi-Matrix der Abbildungen (Polar- bzw. Kugelkoordinaten)

i. $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, F(r, \varphi) := (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))^T$

$$J_f(r, \varphi) \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\nabla F_2 = \begin{pmatrix} r \sin(\varphi) \\ r \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

- ii. $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, G(r, \theta, \varphi) := (r \cos(\theta) \cos(\varphi), r \cos(\theta) \sin(\varphi), r \sin(\theta))^T$
 Gib die partiellen Ableitungen von F_2 und G_3 an, wobei $F = (F_1, F_2)^T$ und $G = (G_1, G_2, G_3)^T$.

$$J_G(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\varphi) & -r \sin(\theta) \cos(\varphi) & -r \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \sin(\varphi) & -r \sin(\theta) \sin(\varphi) & r \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla G_3 = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (b) Bestimme, in welchen Punkten die Jacobi-Matrizen aus (a) invertierbar sind.

$$\begin{vmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{vmatrix} = r(\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2) = r$$

\Rightarrow die Determinante ist 0 bei $r = 0$, daraus folgt das J_f invertierbar ist für alle $r \neq 0$

$$d := |\text{Hess } f|$$

$$d = \begin{vmatrix} \cos(\theta) \cos(\varphi) & -r \sin(\theta) \cos(\varphi) & -r \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \sin(\varphi) & -r \sin(\theta) \sin(\varphi) & r \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow d = \sin(\theta)(-r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \cos(\varphi)^2 - r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \sin(\varphi)^2) - r \cos(\theta)(r \cos(\theta)^2 \cos(\varphi)^2) + r \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2$$

$$\Leftrightarrow d = -r^2 \sin(\theta)^2 \cos(\theta)(\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2) - r^2 \cos(\theta)^2 \cos(\theta)(\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2)$$

$$\Leftrightarrow d = r^2 \cos(\theta)(-\sin(\theta)^2(\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2) - \cos(\theta)^2(\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2))$$

$$\Leftrightarrow d = -r^2 \cos(\theta)$$

$\Rightarrow J_G$ ist invertierbar für $r \neq 0$ und $\theta \neq \frac{(1+2n)\pi}{2}, n \in \mathbb{N}$