Übung 8

8.2 *Energiemethode* zur Lösung der Differentialgleichung $y'' = f(y)$: Man multipliziert die Gleichung mit $2y'$ und benutzt $(y'^2) = 2y'y''$.
Behandle das Anfangswertproblem $y'' = 2e^y, y(0) = 0, y'(0) = -2$ auf diese Weise.

8.3 Auf Grund des Gravitationsgesetzes beschreibt das Anfangswertproblem

$$m\ddot{r} = -\gamma \frac{Mm}{r^2}, \quad r(0) = R, \quad \dot{r}(0) = v_0$$

Die Flugbahn eines Körpers der Masse m zur Erde hin bzw. von der Erde weg. Dabei ist $r(t)$ der Abstand des Körpers vom Erdmittelpunkt zur Zeit t, M die Erdmasse, und die Gravitationskonstante ist mit γ bezeichnet.

(a) Forme geeignet um, und führe die Differentialgleichung in eine Differentialgleichung erster Ordnung über (vgl. Aufgabe 8.2); die entstehende Gleichung muss nicht gelöst werden. Berücksichtige die Anfangsbedingungen.

(b) Es soll die kleinste Geschwindigkeit v_0 (Fluchtgeschwindigkeit von der Erde, zweite kosmische Geschwindigkeit) ermittelt werden, für die die Bewegung bis ins Unendliche reicht, also nicht umkehrt. Dem entsprechen die beiden Forderungen $r(t) \to \infty$ und $\dot{r}(t) \to 0$ für $t \to \infty$.
($M = 5.97 \cdot 10^{24} kg, \gamma = 6.673 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}, R = 6.370 \cdot 10^6 m$)

(c) Löse das Anfangswertproblem, falls v_0 die zweite kosmische Geschwindigkeit ist.

8.4 gegeben sei die Differentialgleichung

$$(*) \quad y' = \sqrt{y}$$

(a) Bestimme eine Lösung von (*) zum Anfangswert $y(2) = 1$. Ist diese eindeutig?

(b) Finde mindestens drei Lösungen von (*) zum Anfangswert $y(0) = 0$.

(c) Skizziere das durch die Differentialgleichung gegebene Richtungsfeld und trage die gefundenen Lösungen ein.

(d) Erfüllt die rechte Seite von (*) eine Lipschitz-Bedingung?

8.5 Bestimme die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems $y' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} y$.

Berechne die Lösung zum Anfangswert $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$