Übung 11

11.3 (a) Sei $D \coloneqq \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x \neq 0\}$. Bestimme den Gradienten Δf der Funktion $f : D \to \mathbb{R}, f(x,y,z) \coloneqq y\sin(xz^2) + \frac{x\cos(y)}{y}$.

$$\Delta f = \begin{pmatrix} y\cos(xz^2)z^2 + \frac{\cos(y)}{y} \\ \sin(xz^2) - x(\frac{\sin(y)}{y} + \frac{\cos(y)}{y^2}) \\ y\cos(2xz) \end{pmatrix}$$

(b) Entscheide, ob es partiell differenzierbare Funktionen auf R^2 bzw. R^3 gibt mit

$$\Delta f(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ -x+y \end{pmatrix} \quad \text{bzw. } \Delta f(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$$

Bestimme gegebenenfalls ein solches f.

$$\begin{array}{rrcl} & \Delta f(x,y) & = & \begin{pmatrix} x+y \\ -x+y \end{pmatrix} \\ \Rightarrow & f(x,y) & = & \int x + ydx \\ \Leftrightarrow & f(x,y) & = & \int -x + ydy \\ \Rightarrow & \int x + ydx & = & \int -x + ydy \\ \Leftrightarrow & \frac{x^2}{2} + yx & = & \frac{y^2}{2} - yx \end{array}$$

$\Rightarrow$ Es existiert keine partiell differenzierbare Funktion $f \in \mathbb{R}^2$
mit $\Delta f(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ -x+y \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rrcl} & \Delta f(x,y,z) & = & \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \\ \Rightarrow & f(x,y,z) & = & \int yzdx \\ & & = & \int xzdy \\ & & = & \int xydz \\ \Rightarrow & f(x,y,z) & = & xyz \end{array}$$

11.4 Sei $c > 0$, und $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien zweimal stetig differenzierbar. Zeige: Die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u(t,x) \coloneqq f(x+ct) + g(x-ct)$ ist eine Lösung der *Wellengleichung*

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,x) = c^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x)$$

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2}u &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}(f(x+ct)) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}(g(x-ct)) \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}u &= c(\frac{\partial}{\partial t}(f'(x+ct)) + \frac{\partial}{\partial t}(g'(x-ct))) \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}u &= c^2(f''(x+ct) + g''(x-ct)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2}u &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(f(x+ct)) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(g(x-ct)) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}u &= \frac{\partial}{\partial x}(f'(x+ct)) + \frac{\partial}{\partial x}(g'(x-ct)) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}u &= f''(x+ct) + g''(x-ct) \end{aligned}$$

In (I) Einsetzen:

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}u = c^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}u$$

11.5 Bestimme Lage und Art der lokalen Extrema folgender Funktionen:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) \coloneqq xy^2 - 4xy + x^4$

Kandidaten finden:

$$\begin{aligned} \nabla f &= \begin{pmatrix} y^2 + 4x + 4x^3 \\ 2xy - 4x \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad 0 &= 2xy - 4x \\ \Leftrightarrow \quad y &= 2 \\ 0 &= y^2 - 4x + 4x^3 \end{aligned}$$

$y = 2$ Einsetzen:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad x &= 1 \\ \text{Hess } f &= \begin{pmatrix} 2 & 2y-4 \\ 2y-4 & 2x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Kandidat Einsetzen:

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

Hess f ist positiv definit da $|\text{Hess } f| > 0$ ist und Hess $f_{11} > 0$, daraus folgt das der Kandidat $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein striktes lokales Minimum ist.

(b) $g : (0,\pi) \times (0,\pi) \to \mathbb{R}, g(x,y) \coloneqq \sin(x) + \sin(y) + \sin(x+y)$

Kandidaten finden:

$$\begin{aligned} \nabla g &= \begin{pmatrix} \cos(x) + \cos(x+y) \\ \cos(y) + \cos(x+y) \end{pmatrix} \\ (\mathrm{I}) \quad \Rightarrow \quad \cos(x) &= -\cos(x+y) \\ \Rightarrow \quad \cos(y) &= -\cos(x+y) \\ \Rightarrow \quad x &= y \end{aligned}$$

In (I) Einsetzen:

$$\begin{array}{lrcll}
\Rightarrow & \cos(x) & = & -\cos(2x) & \\
\Leftrightarrow & \cos(x) & = & -1(\cos(x)^2 - \sin(x)^2) & \mid +\cos(x)^2 \\
\Leftrightarrow & \cos(x) + 2\cos(x)^2 & = & 1 & \mid \div 2 + \frac{1}{16} \\
\Leftrightarrow & \frac{1}{16} + \frac{\cos(x)}{2} + \cos(x)^2 & = & \frac{9}{16} & \\
\Leftrightarrow & (\frac{1}{4} + \cos(x))^2 & = & \frac{9}{16} & \\
\Rightarrow & x & = & \frac{\pi}{3} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl}
 & \text{Hess } f & = & \begin{pmatrix} -\sin(x) - \sin 2x & -\sin(2x) \\ -\sin(2x) & -\sin(x) - \sin(x+y) \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow & \sin(x)^2 & = & \begin{vmatrix} -\sin(x) & 0 \\ 0 & -\sin(x) \end{vmatrix}
\end{array}$$

Kandidat Einsetzen:

$$\Rightarrow \quad \sin(\tfrac{\pi}{3}) > 0$$

$\Rightarrow$ Hess f ist negativ definit, daraus folgt das der Kandidat $\binom{\frac{\pi}{3}}{}$ ein strikes lokales Maximum ist.

11.6 (a) Berechne die Jacobi-Matrix der Abbildungen (Polar- bzw. Kugelkoordinaten)

i. $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, F(r, \varphi) := (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))^T$

$$J_f(r, \varphi) \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\nabla F_2 = \begin{pmatrix} r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

ii. $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, G(r, \theta, \varphi) := (r\cos(\theta)\cos(\varphi), r\cos(\theta)\sin(\varphi), r\sin(\theta))^T$
Gib die partiellen Ableitungen von F_2 und G_3 an, wobei $F = (F_1, F_2)^T$ und $G = (G_1, G_2, G_3)^T$.

$$J_G(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\cos(\varphi) & -r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\theta)\sin(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) & r\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla G_3 = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ r\cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimme, in welchen Punkten die Jacobi-Matrizen aus (a) invertierbar sind.

$$\begin{vmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{vmatrix} = r(\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi))$$

$\Rightarrow$ die Determinante ist 0 bei $r = 0$, daraus Folgt das J_f invertierbar ist für alle $r \neq 0$

$$\begin{aligned} d &:= |\text{Hess } f| \\ d &= \begin{vmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\cos(\varphi) & -r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\theta)\sin(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) & r\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad d &= \sin(\theta)(-r^2\sin(\theta)\cos(\theta)\cos(\varphi)^2 - r^2\sin(\theta)\cos(\theta)\sin(\varphi)^2) \end{aligned}$$

$-r\cos(\theta)(r\cos(\theta)^2\cos(\varphi)^2) + r\cos(\theta)^2\sin(\theta)^2$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad d &= -r^2\sin(\theta)^2\cos(\theta)(\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2) - r^2\cos(\theta)^2\cos(\theta)(\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2) \\ \Leftrightarrow \quad d &= r^2\cos(\theta)(-\sin(\theta)^2(\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2) - \cos(\theta)^2(\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2)) \\ \Leftrightarrow \quad d &= -r^2\cos(\theta) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ J_G ist invertierbar für $r \neq 0$ und $\theta \neq \frac{(1+2n)\pi}{2}$