Höhere Mathematik 1

Präsenzaufgaben für die Übungen vom 9. bis 12. 11. 2021 (bitte vorbereiten und Aufgabenstellungen so weit wie möglich verstehen)

3.1. (a) Bestimme alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-1| + |z+1| = 2$. (Skizze!)
(b) Bestimme alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^3 = -2 + 2i$.

3.2. Berechne AB und BA für

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hausaufgaben (Abgabe bis 18. 11. 2021 **vor** der Vorlesung)

3.3. (a) Bestimme die Polardarstellungen von $\dfrac{i\sqrt{3}-1}{2}$ und von $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^5$.
Hinweis: $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
(b) Bestimme alle Lösungen der Gleichung $z^3 = -8$.

3.4. Berechne sämtliche möglichen Produkte aus den gegebenen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & t \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei t ein reeller Parameter ist.

3.5. Berechne

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

für $n = 1, 2, 3, 4$, stelle eine Vermutung für eine Formel für allgemeines $n \in \mathbb{N}$ auf, und beweise diese Formel durch Induktion.

3.6. Die *Pauli-Matrizen* sind definiert durch

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

mit der imaginären Einheit i. Zeige für alle $j, k = 1, \dots, 3$:

$$\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk} E_2 + i \sum_{\ell=1}^{3} \varepsilon_{jk\ell} \sigma_\ell \,,$$

wobei δ_{jk} das Kronecker-Delta ist und

$$\varepsilon_{jk\ell} := \begin{cases} 0 & \text{falls mindestens 2 der Indizes } j, k, \ell \text{ denselben Wert haben,} \\ 1 & \text{falls } (j,k,\ell) \in \{(1,2,3), (2,3,1), (3,1,2)\}, \\ -1 & \text{falls } (j,k,\ell) \in \{(3,2,1), (2,1,3), (1,3,2)\} \end{cases}$$

das *Levi-Civita-Symbol*.