Übung 8

8.3 Untersuche die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ auf Konvergenz und absolute Konvergenz, wobei

(a) $a_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$;

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+i}{2}\right)^n - 1$$

Geometrische Reihe mit $|\frac{1+i}{2}| = \frac{|1+i|}{|2|} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$:
$\Rightarrow$ konvergent.

Überprüfen absoluter Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(\frac{1+i}{2}\right)^n\right|$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1+i}{2}\right|^n$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n - 1$$

Aus der geometrischen Reihe mit $|\frac{\sqrt{2}}{2}| < 1$ folgt $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\left(\frac{1+i}{2}\right)^n\right|$ konvergiert.
$\Rightarrow$ absolut konvergent

(b) $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$;
Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{(-1)^n\sqrt[3]{n+1}}{(-1)^n\sqrt[3]{n}}\right|$$
$$=\left|\frac{-1\cdot\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[3]{n}}\right|$$
$$=\left|\frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[3]{n}}\right|$$

Aus $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ für $a > b$ folgt $\left|\frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[3]{n}}\right| > 1$.
$\Rightarrow$ divergent $\Rightarrow$ nicht absolut konvergent.

(c) $a_n = (-1)^n \frac{n+2}{2n}$.
Quotientenkriterium:

$$\begin{aligned} &\left|(-1)^{n+1}\frac{n+3}{2(n+1)}\frac{1}{(-1)^n}\frac{2n}{n+2}\right| \\ =&\left|(-1)\frac{(n+3)(2n)}{(2n+2)(n+2)}\right| \\ =&\left|\frac{2n^2+6n}{2n^2+6n+4}\right| < 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ konvergent.

Überprüfen absoluter Konvergenz:

$$\begin{aligned} &\left|\frac{\left|(-1)^{n+1}\frac{n+3}{2(n+1)}\right|}{\left|(-1)^n\frac{n+2}{2n}\right|}\right| \\ =&\left|\frac{(n+3)(2n)}{2(n+1)(n+2)}\right| \\ =&\left|\frac{2n^2+6n}{2n^2+6n+4}\right| < 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ absolut konvergent.

8.4 Sei $s_n := \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ und $e = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ die Euler'sche Zahl.

(a) Zeige die Ungleichungen $0 < e - s_n < \frac{1}{n*n!}$ für $n \in \mathbb{N}$, mit Hilfe einer geeigneten geometrischen Reihe.

(b) Bestimme mit Hilfe von (a) eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, für die $|e - s_N| \leq 0.5 \cdot 10^{-4}$ gilt, und gib den Wert von s_N an.

(c) Zeige, dass die Euler'sche Zahl e irrational ist.

8.5 (a) Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}-1} + \frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)$?

(b) Berechne $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$.

(c) Für welche $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(1+z)^n}$?
Bestimme den Grenzwert, falls er existiert.

8.6 Ermittle (durch Probieren) das kleinste $n \in \mathbb{N}$, für dass $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > 3$ ist. benutze einen Computer, um herauszufinden, wie groß man n wählen muss, damit die Summe > 6 bzw. > 9 wird.