

8.2 *Energiemethode* zur Lösung der Differentialgleichung  $y'' = f(y)$ : Man multipliziert die Gleichung mit  $2y'$  und benutzt  $(y'^2)' = 2y'y''$ .

Behandle das Anfangswertproblem  $y'' = 2e^y, y(0) = 0, y'(0) = -2$  auf diese Weise.

$$\begin{aligned} (y'^2)' &= 2y'y'' \\ \Leftrightarrow (y'^2)' &= 2y'2e^y & | \text{ integrieren} \\ \Leftrightarrow y'^2 &= 4 \int y'e^y dx \\ \Leftrightarrow y'^2 &= 4e^y + c \\ \Leftrightarrow y' &= \pm 2(e^y + c)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Bedingung  $y'(0) = -2, y(0) = 0$  einsetzen:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow c &= 1 - e^0 = 0 \\ \Rightarrow y' &= -2e^{\frac{1}{2}y} \end{aligned}$$

Substitution mit  $z = y'^{-1}$ :

$$\begin{aligned} \Rightarrow z' &= -y'^{-2}y'' \\ \Leftrightarrow z' &= -\frac{1}{4}e^{-y}2e^y \\ \Leftrightarrow z' &= -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow z &= -\left(\frac{1}{2}x + c\right) \end{aligned}$$

Rücksubstitution von  $z = y'^{-1}$ :

$$\Leftrightarrow y' = -\frac{1}{\frac{1}{2}x + c}$$

Bedingung  $y'(0) = -2$  einsetzen:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow -\frac{1}{0+c} &= -2 \\ \Leftrightarrow c &= \frac{1}{2} \\ \Rightarrow y'(x) &= -\frac{2}{(x+1)} & | \text{ integrieren} \\ \Leftrightarrow y(x) &= -2 \int \frac{1}{(x+1)} dx \end{aligned}$$

Substitution mit  $u = x + 1 \Rightarrow dx = 1du$ :

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow y(x) &= -2 \int \frac{1}{u} du \\ \Leftrightarrow y(x) &= -2(\ln(u) + c) \end{aligned}$$

Rücksubstitution von  $u = x + 1$ :

$$\Leftrightarrow y(x) = -2\ln(x+1) + c$$

Bedingung  $y(0) = 0$  einsetzen:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow -2\ln(x+1) + c &= 0 \\ \Leftrightarrow c &= 0 \\ \Rightarrow y(x) &= -2\ln(x+1) \end{aligned}$$

8.3 Auf Grund des Gravitationsgesetzes beschreibt das Anfangswertproblem

$$m\ddot{r} = -\gamma \frac{Mm}{r^2}, \quad r(0) = R, \quad \dot{r}(0) = v_0$$

Die Flugbahn eines Körpers der Masse  $m$  zur Erde hin bzw. von der Erde weg. Dabei ist  $r(t)$  der Abstand des Körpers vom Erdmittelpunkt zur Zeit  $t$ ,  $M$  die Erdmasse, und die Gravitationskonstante ist mit  $\gamma$  bezeichnet.

- (a) Forme geeignet um, und führe die Differentialgleichung in eine Differentialgleichung erster Ordnung über (vgl. Aufgabe 8.2); die entstehende Gleichung muss nicht gelöst werden. Berücksichtige die Anfangsbedingungen.

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{r} = -\gamma M r^{-2}$$

Energiemethode anwenden:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad 2\dot{r}\ddot{r} &= \dot{\dot{r}}^2 \\ \Leftrightarrow \quad -2\gamma M r^{-2}\dot{r} &= \dot{\dot{r}}^2 & | \text{ integrieren} \\ \Leftrightarrow \quad 2\gamma M \int -r^{-2}\dot{r} dt &= \dot{r}^2 \\ \Leftrightarrow \quad 2\gamma M(r^{-1} + c) &= \dot{r}^2 \end{aligned}$$

Bedingungen  $r(0) = R, \dot{r} = v_0$  einsetzen:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad 2\gamma M(R^{-1} + c) &= v_0^2 \\ \Leftrightarrow \quad c &= \frac{v_0^2}{2\gamma M} - \frac{1}{R} \end{aligned}$$

$c$  einsetzen:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad 2\gamma M\left(r^{-1} + \frac{v_0^2}{2\gamma M} - \frac{1}{R}\right) &= \dot{r}^2 \\ \Leftrightarrow \quad v_0^2 - \frac{2\gamma M}{R} &= \dot{r}^2 - \frac{2\gamma M}{r} \end{aligned}$$

- (b) Es soll die kleinste Geschwindigkeit  $v_0$  (Fluchtgeschwindigkeit von der Erde, zweite kosmische Geschwindigkeit) ermittelt werden, für die die Bewegung bis ins Unendliche reicht, also nicht umkehrt. Dem entsprechen die beiden Forderungen  $r(t) \rightarrow \infty$  und  $\dot{r}(t) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ .

$$(M = 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg}, \gamma = 6.673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}, R = 6.370 \cdot 10^6 \text{ m})$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad v_0^2 - \frac{2\gamma M}{R} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{r}^2 - \frac{2\gamma M}{r} \\ \Leftrightarrow \quad v_0^2 - \frac{2\gamma M}{R} &= 0 - 0 \\ \Leftrightarrow \quad v_0 &= \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} \end{aligned}$$

Werte einsetzen:

$$\Rightarrow \quad v_0 \approx 11183.8932 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1.1183 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- (c) Löse das Anfangswertproblem, falls  $v_0$  die zweite kosmische Geschwindigkeit ist.

$$\begin{aligned} a &= 2M\gamma \\ \Leftrightarrow \dot{r} &= \sqrt{ar^{-1} - \frac{a}{R} + v_0^2} \quad | \frac{a}{R}, v_0 \text{ Einsetzen} \\ \Leftrightarrow \dot{r} &= \sqrt{a}\sqrt{r^{-1}} \end{aligned}$$

Trennung der Veränderlichen:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \sqrt{r} dr &= \int \sqrt{a} dt + c \\ \Leftrightarrow \int \sqrt{r} dr &= \sqrt{at} + c \end{aligned}$$

Integration durch Substitution mit  $u = \sqrt{r}$ :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \varphi(u) &= u^2 \\ \Leftrightarrow \varphi(u)' &= 2u \\ \Leftrightarrow \int u 2u du &= \sqrt{at} + c \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3}u^3 &= \sqrt{at} + c \end{aligned}$$

Rücksubstitution:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{2}{3}r^{\frac{3}{2}} &= \sqrt{at} + c \\ \Leftrightarrow r &= \left(\frac{3t\sqrt{a}}{2} + c\right)^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

Bedingung  $r(0) = R$  einsetzen:

$$\begin{aligned} \Rightarrow R^{\frac{3}{2}} &= c \\ \Rightarrow r &= \left(\frac{3t\sqrt{a}}{2} + R^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

8.4 gegeben sei die Differentialgleichung

$$(*) \quad y' = \sqrt{y}$$

(a) Bestimme eine Lösung von (\*) zum Anfangswert  $y(2) = 1$ . Ist diese eindeutig?

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y^{\frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow \int \frac{1}{\sqrt{y}} dy &= \int 1 dx \\ \Leftrightarrow 2y^{\frac{1}{2}} + c &= x \\ (1) \Leftrightarrow y &= \frac{(x+c)^2}{4} \end{aligned}$$

Bedingung  $y(2) = 1$  einsetzen:

$$\begin{aligned} \Rightarrow 4 &= (2+c)^2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{4} - 2 &= c \end{aligned}$$

$$y_1 = 0, y_2 = -4$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow y_1 &= \frac{x^2}{4} \\ \Leftrightarrow y_2 &= \left(\frac{x}{2} - 2\right)^2 \end{aligned}$$

- (b) Finde mindestens drei Lösungen von (\*) zum Anfangswert  $y(0) = 0$ .

Triviale Lösung:

$$y_1 = 0$$

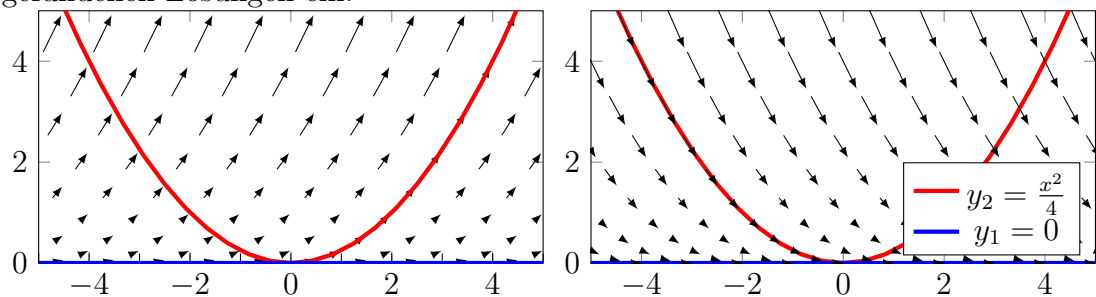
Bedingung  $y(0) = 0$  in (1) einsetzen:

$$\Rightarrow c = 0$$

$$\Rightarrow y_2 = \frac{x^2}{4}$$

$$\Rightarrow L = \left\{0, \frac{x^2}{4}\right\}$$

- (c) Skizziere das durch die Differentialgleichung gegebene Richtungsfeld und trage die gefundenen Lösungen ein.



- (d) Erfüllt die rechte Seite von (\*) eine Lipschitz-Bedingung?

$$L \geq 0$$

$$\begin{aligned} f(y) - f(z) &\leq L|y - z| \\ \sqrt{y} - \sqrt{z} &\leq L|y - z| \end{aligned}$$

ist immer Wahr für  $y < z$ , da linke Seite negativ wird

$$\begin{aligned} y > z : \quad \sqrt{y} - \sqrt{z} &\leq L(\sqrt{y} - \sqrt{z})(\sqrt{y} + \sqrt{z}) \\ y > z : \quad 1 &\leq L(\sqrt{y} + \sqrt{z}) \end{aligned}$$

Da  $\sqrt{y} + \sqrt{z}$  beliebig klein werden kann, gibt es  $y, z$  Werte für die die Lipschitz-Bedingung nicht erfüllt wird.

8.5 Bestimme die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems  $y' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} y$ .

Berechne die Lösung zum Anfangswert  $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Eigenwerte bestimmen:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow -4 - 3\lambda + \lambda^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1$$

Eigenvektoren bestimmen:

$$\begin{aligned} v_1 &: \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow v_1 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ v_2 &: \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow v_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lösungsansatz  $y = e^{t\lambda}v$ :

$$\Rightarrow y = c_1 e^{4t} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bedingung  $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  einsetzen:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{1}{5} \quad c_2 = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$