Übung 7

7.2 Löse die Anfangswertprobleme

(a) $y' + y\sin(x) = 4x^3 e^{\cos(x)}, y(\frac{\pi}{2}) = 2;$

$$\begin{array}{llrcll}
\text{(H)} & & y' + y\sin(x) & = & 0 & \\
 & \Rightarrow & y_{(H)}(x) & = & e^{\cos(x)} & \\
 & & & & & \\
 & & y & = & c \cdot y_{(H)} & \\
\text{(I)} & \Rightarrow & y(x) & = & c(x)e^{\cos(x)} & \mid \text{ableiten} \\
\text{(II)} & \Rightarrow & y'(x) & = & c'(x)e^{\cos(x)} - c(x)e^{\cos(x)}\sin(x) &
\end{array}$$

I und II in Ausgangsgleichung einsetzen:

$$\begin{array}{lrcl}
 & c'(x) & = & 4x^3 \\
\Rightarrow & c(x) & = & x^4 + c
\end{array}$$

Einsetzen in I:

$$\Rightarrow \quad y(x) = (x^4 + c)e^{\cos(x)}$$

Bedingung $y(\frac{\pi}{2}) = 2:$

$$\begin{array}{lrcl}
\Leftrightarrow & c & = & 2 - (\frac{\pi}{2})^4 \\
\Rightarrow & y(x) & = & (x^4 + 2 - (\frac{\pi}{2})^4)e^{\cos(x)}
\end{array}$$

(b) $xy' + y + xe^x = 0, y(1) = 0.$

$$\begin{array}{llrcll}
\text{(H)} & & xy' + y & = & 0 & \\
 & \Rightarrow & y_{(H)}(x) & = & e^{-\ln(x)} = \frac{1}{x} & \\
 & & & & & \\
 & & y & = & c \cdot y_{(H)} & \\
\text{(I)} & \Rightarrow & y(x) & = & c(x)\frac{1}{x} & \mid \text{ableiten} \\
\text{(II)} & \Rightarrow & y'(x) & = & c'(x)\frac{1}{x} - c(x)\frac{1}{x^2} &
\end{array}$$

I und II in Ausgangsgleichung einsetzen:

$$c'(x) = -xe^x$$

partielle Integration mit $f(x) = x, g(x) = e^x$

$$\Rightarrow \quad c(x) = (1-x)e^x + x$$

Einsetzen in I:

$$\Rightarrow \quad y(x) = \frac{1-x}{x}e^x + \frac{c}{x}$$

Bedingung $y(1) = 0:$

$$\begin{array}{lrcl}
\Leftrightarrow & c & = & 0 \\
\Rightarrow & y(x) & = & \frac{1-x}{x}e^x
\end{array}$$

7.3 Bestimme diejenigen Lösungen der Differentialgleichung

$$\dot{x} \cdot \sin(2t) = 2x + 2\cos(t),$$

die für $t \to \frac{\pi}{2}$ beschränkt ist.

$$\begin{array}{lrcl} \text{(H)} & \dot{x}\sin(2t) - 2x & = & 0 \\ \Rightarrow & x_{(H)}(t) & = & e^{\int \frac{2}{\sin(2t)}dt} = \tan(t) \end{array}$$

Nachweis über Ableitung (Quotientenregel):

$$\frac{d}{dt}\tan(t) = \frac{\cos^2(t)+\sin^2(t)}{\cos^2(t)} = 1 + \tan^2(t)$$

$$\begin{array}{lrcll} & x & = & c \cdot x_{(H)} & \\ \text{(I)} \Rightarrow & x(t) & = & c(t)\tan(t) & \mid \text{ableiten} \\ \text{(II)} \Rightarrow & \dot{x}(t) & = & c'(t)\tan(t) + c(t)(1+\tan^2(t)) & \end{array}$$

I und II in Ausgangsgleichung einsetzen:

$$\begin{array}{lrcl} & c'(t) & = & \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)} \\ \Rightarrow & c(t) & = & -\frac{1}{\sin^2(t)} + c \end{array}$$

Nachweis über Ableitung (Quotientenregel):

$$\frac{d}{dx}\frac{-1}{\sin(x)} + c = \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$$

Einsetzen in I:

$$\Rightarrow \quad x(t) = (-\frac{1}{\sin(t)} + c)\tan(t)$$

Da $\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} x(t) = (-1+c)\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\tan(t)$ und $\tan(t) \xrightarrow{t\to\frac{\pi}{2}} \infty$, ist x nur dann für $t \to \frac{\pi}{2}$ beschränkt, wenn $-1 + c = 0 \Leftrightarrow c = 1$.
$\Rightarrow$ Menge aller Lösungen der Differentialgleichung für $t \to \frac{\pi}{2}$ beschränkt
$= \{(-\frac{1}{\sin(t)} + 1)\tan(t)\}$

7.4 Bestimme die Lösungen der Differentialgleichungen

$$y' = \frac{x+y}{x} \quad \text{und} \quad y' = 2\frac{y}{x}$$

(a) durch Betrachten als lineare Differentialgleichung 1. Ordnung.
$y' = \frac{x+y}{x}$:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{(H)} & y' - \frac{1}{x}y & = & 0 \\
\Rightarrow & y_{(H)}(x) & = & e^{\int \frac{1}{x}dx} = x
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcll}
 & y & = & c \cdot y_{(H)} & \\
\text{(I)} \quad \Rightarrow & y(x) & = & c(x)x & \mid \text{ableiten} \\
\text{(II)} \quad \Rightarrow & y(x) & = & c'(x)x + c(x) &
\end{array}$$

I und II in Ausgangsgleichung einsetzen:

$$\begin{array}{lrcl}
 & c'(x) & = & \frac{1}{x} \\
\Rightarrow & c(x) & = & \ln(x) + c
\end{array}$$

Einsetzen in I:

$$\Rightarrow \quad y(x) = \ln(x)x + cx$$

$y' = 2\frac{y}{x}$:

$$\begin{array}{lrcl}
\Leftrightarrow & y' & = & \frac{2}{x}y \\
\Rightarrow & y(x) & = & e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2(\ln(x)+c)} = e^{\ln(x)^2} = x^2 \cdot c_2
\end{array}$$

(b) durch Substitution $z = \frac{y}{x}$
$y' = \frac{x+y}{x}$:

$$\begin{array}{lrcl}
\Leftrightarrow & y' & = & 1 + \frac{y}{x} \\
\Leftrightarrow & y' & = & 1 + z
\end{array}$$

$z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = zx \Rightarrow y' = z'x + z$:

$$\begin{array}{lrcl}
\Leftrightarrow & z'x + z & = & 1 + z \\
\Leftrightarrow & z' & = & \frac{1}{x} \\
\Rightarrow & z & = & \ln(x) + c
\end{array}$$

Rücksubstitution mit $z = \frac{y}{x}$

$$\Leftrightarrow \quad y = \ln(x)x + cx$$

$y' = 2\frac{y}{x}$:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad y' &= 2z \end{aligned}$$

$z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = zx \Rightarrow y' = z'x + z$:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad z'x + z &= 2z \\ \Leftrightarrow \quad z'x - z &= 0 \\ \Rightarrow \quad z &= x \cdot c \end{aligned}$$

Rücksubstitution mit $z = \frac{y}{x}$

$$\Leftrightarrow \quad y = x^2 \cdot c$$

7.5 Bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Bernoulli'schen Differentialgleichungen:

(a) $(1 + x^2)y' + xy - xy^2 = 0$

(b) $y' + y + (\sin(x) + e^x)y^3 = 0$