Fachbereich 3 – Mathematik
PD Dr. H. Vogt

Übungsblatt 4
14. 11. 2021

Höhere Mathematik 1

Präsenzaufgaben für die Übungen vom 16. bis 19. 11. 2021 (bitte vorbereiten und Aufgabenstellungen so weit wie möglich verstehen)

4.1. Berechne den Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2t & t+1 & t & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4-t & 0 \\ 2 & 8 & 6 & t^2 & 10 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 5}$$

in Abhängigkeit des Parameters $t \in \mathbb{R}$.

4.2. Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= -5 \\ -8x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= -2 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 &= 5 \end{aligned}$$

Bitte wenden

Hausaufgaben (Abgabe bis 25. 11. 2021 **vor** der Vorlesung)

4.3. Berechne den Rang der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 7 & 2 & -6 & 4 \\ 2 & 1 & s & t \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -1 & -1 & 2 \\ -3 & 15 & -3 & 0 & 3 \\ -3 & 29 & -7 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Der Rang von A hängt dabei von den Parametern $s, t \in \mathbb{R}$ ab.

4.4. Bestimme alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 3x_2 - 5x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_1 - 3x_2 - x_4 &= -5 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\ -3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 8 \end{aligned}$$

4.5. Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + tx_3 &= 1 \\ -2tx_1 + tx_2 + 9x_3 &= 6 \end{aligned}$$

mit einem Parameter $t \in \mathbb{R}$.

(a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist das System eindeutig lösbar? Wie lautet die Lösung?

(b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ gibt es unendlich viele Lösungen? Gib alle Lösungen an.

(c) Für welche $t \in \mathbb{R}$ gibt es keine Lösung?

4.6. Sei $A = (a_{jk}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

(a) In jedem der folgenden fünf Fälle finde Matrizen x und/oder y mit folgender Eigenschaft: Eines der Produkte Ax, yA, yAx ist

(i) die j-te Zeile von A,

(ii) die k-te Spalte von A,

(iii) das Element a_{jk},

(iv) die Summe der Einträge der j-ten Zeile von A,

(v) die Summe der Einträge der k-ten Spalte von A.

(b) Sei $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ die Matrix, die aus A entsteht, wenn man

(i) die j-te und die k-te Spalte von A vertauscht,

(ii) die j-te und die k-te Zeile von A vertauscht,

(iii) das λ-Fache der j-ten Zeile zur k-ten Zeile von A addiert.

In jedem der drei Fälle finde eine Matrix C, so dass entweder $B = CA$ oder $B = AC$.