Übung 8

8.2 *Energiemethode* zur Lösung der Differentialgleichung $y'' = f(y)$: Man multipliziert die Gleichung mit $2y'$ und benutzt $(y'^2)' = 2y'y''$.
Behandle das Anfangswertproblem $y'' = 2e^y, y(0) = 0, y'(0) = -2$ auf diese Weise.

$$\begin{array}{rrcll}
 & (y'^2)' & = & 2y'y'' & \\
\Leftrightarrow & (y'^2)' & = & 2y'2e^y & \mid \text{integrieren} \\
\Leftrightarrow & y'^2 & = & 4\int y'e^y dx & \\
\Leftrightarrow & y'^2 & = & 4e^y & \\
\Leftrightarrow & y' & = & 2e^{\frac{1}{2}y} &
\end{array}$$

Substitution mit $z = y'^{-1}$:

$$\begin{array}{rrcl}
\Rightarrow & z' & = & -y'^{-2}y'' \\
\Leftrightarrow & z' & = & -2e^{-y}2e^y \\
\Leftrightarrow & z' & = & -4 \\
\Leftrightarrow & z & = & -(4x+c)
\end{array}$$

Rücksubstitution von $z = y'^{-1}$:

$$\begin{array}{rrcl}
\Leftrightarrow & y' & = & -\frac{1}{4x+c}
\end{array}$$

Bedingung $y'(0) = -2$ einsetzen:

$$\begin{array}{rrcll}
\Leftrightarrow & -\frac{1}{0+c} & = & -2 & \\
\Leftrightarrow & c & = & \frac{1}{2} & \\
\Rightarrow & y'(x) & = & -\frac{1}{4x+\frac{1}{2}} & \mid \text{integrieren} \\
\Leftrightarrow & y(x) & = & -\int \frac{1}{4x+\frac{1}{2}} dx &
\end{array}$$

Substitution mit $u = 4x + \frac{1}{2} \Rightarrow dx = \frac{1}{4}udu$:

$$\begin{array}{rrcl}
\Leftrightarrow & y(x) & = & -\frac{1}{4}\int \frac{1}{u} du \\
\Leftrightarrow & y(x) & = & -\frac{1}{4}(\ln(u) + c)
\end{array}$$

Rücksubstitution von $u = 4x + \frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{4}c \to c$:

$$\begin{array}{rrcl}
\Leftrightarrow & y(x) & = & -\frac{1}{4}\ln(4x+\frac{1}{2}) + c
\end{array}$$

Bedingung $y(0) = 0$ einsetzen:

$$\begin{array}{rrcl}
\Leftrightarrow & -\frac{1}{4}\ln(\frac{1}{2}) + c & = & 0 \\
\Leftrightarrow & c & = & -\frac{1}{4}\ln(2) \\
\Rightarrow & y(x) & = & -\frac{1}{4}(\ln(4x+\frac{1}{2}) + \ln(2)) \\
\Leftrightarrow & y(x) & = & -\frac{1}{4}\ln(8x+1)
\end{array}$$

8.3 Auf Grund des Gravitationsgesetzes beschreibt das Anfangswertproblem

$$m\ddot{r} = -\gamma\frac{Mm}{r^2}, \quad r(0) = R, \quad \dot{r}(0) = v_0$$

Die Flugbahn eines Körpers der Masse m zur Erde hin bzw. von der Erde weg. Dabei ist $r(t)$ der Abstand des Körpers vom Erdmittelpunkt zur Zeit t, M die Erdmasse, und die Gravitationskonstante ist mit γ bezeichnet.

(a) Forme geeignet um, und führe die Differentialgleichung in eine Differentialgleichung erster Ordnung über (vgl. Aufgabe 8.2); die entstehende Gleichung muss nicht gelöst werden. Berücksichtige die Anfangsbedingungen.

(b) Es soll die kleinste Geschwindigkeit v_0 (Fluchtgeschwindigkeit von der Erde, zweite kosmische Geschwindigkeit) ermittelt werden, für die die Bewegung bis ins Unendliche reicht, also nicht umkehrt. Dem entsprechen die beiden Forderungen $r(t) \to \infty$ und $\dot{r}(t) \to 0$ für $t \to \infty$.
$(M = 5.97 \cdot 10^{24} kg, \gamma = 6.673 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}, R = 6.370 \cdot 10^6 m)$

(c) Löse das Anfangswertproblem, falls v_0 die zweite kosmische Geschwindigkeit ist.

8.4 gegeben sei die Differentialgleichung

$$(*) \quad y' = \sqrt{y}$$

(a) Bestimme eine Lösung von (*) zum Anfangswert $y(2) = 1$. Ist diese eindeutig?

(b) Finde mindestens drei Lösungen von (*) zum Anfangswert $y(0) = 0$.

(c) Skizziere das durch die Differentialgleichung gegebene Richtungsfeld und trage die gefundenen Lösungen ein.

(d) Erfüllt die rechte Seite von (*) eine Lipschitz-Bedingung?

8.5 Bestimme die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems $y' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} y$.

Berechne die Lösung zum Anfangswert $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$