Übung 7

7.2 Löse die Anfangswertprobleme

(a) $y' + y\sin(x) = 4x^3 e^{\cos(x)}, y(\frac{\pi}{2}) = 2;$

$$\begin{array}{llrcl}
\text{(H)} & & y' + y\sin(x) & = & 0 \\
& \Rightarrow & y_{(H)}(x) & = & e^{\cos(x)} \\
\\
& & y & = & c \cdot y_{(H)} \\
\text{(I)} & \Rightarrow & y(x) & = & c(x)e^{\cos(x)} \qquad\qquad\qquad | \text{ ableiten} \\
\text{(II)} & \Rightarrow & y'(x) & = & c'(x)e^{\cos(x)} - c(x)e^{\cos(x)}\sin(x)
\end{array}$$

I und II in Ausgangsgleichung einsetzen:

$$\begin{array}{lrcl}
& c'(x) & = & 4x^3 \\
\Rightarrow & c(x) & = & x^4 + c
\end{array}$$

Einsetzen in I:

$$\Rightarrow \quad y(x) = (x^4 + c)e^{\cos(x)}$$

Bedingung $y(\frac{\pi}{2}) = 2:$

$$\begin{array}{lrcl}
\Leftrightarrow & c & = & 2 - (\frac{\pi}{2})^4 \\
\Rightarrow & y(x) & = & (x^4 + 2 - (\frac{\pi}{2})^4)e^{\cos(x)}
\end{array}$$

(b) $xy' + y + xe^x = 0, y(1) = 0.$

$$\begin{array}{llrcl}
\text{(H)} & & xy' + y & = & 0 \\
& \Rightarrow & y_{(H)}(x) & = & e^{-\ln(x)} = \frac{1}{x} \\
\\
& & y & = & c \cdot y_{(H)} \\
\text{(I)} & \Rightarrow & y(x) & = & c(x)\frac{1}{x} \qquad\qquad | \text{ ableiten} \\
\text{(II)} & \Rightarrow & y'(x) & = & c'(x)\frac{1}{x} - c(x)\frac{1}{x^2}
\end{array}$$

I und II in Ausgangsgleichung einsetzen:

$$c'(x) = -xe^x$$

partielle Integration mit $f(x) = x, g(x) = e^x$

$$\Rightarrow \quad c(x) = (1 - x)e^x + x$$

Einsetzen in I:

$$\Rightarrow \quad y(x) = \frac{1-x}{x}e^x + \frac{c}{x}$$

Bedingung $y(1) = 0:$

$$\begin{array}{lrcl}
\Leftrightarrow & c & = & 0 \\
\Rightarrow & y(x) & = & \frac{1-x}{x}e^x
\end{array}$$

7.3 Bestimme diejenigen Lösungen der Differentialgleichung

$$\dot{x} \cdot \sin(2t) = 2x + 2\cos(t),$$

die für $t \to \frac{\pi}{2}$ beschränkt ist.

7.4 Bestimme die Lösungen der Differentialgleichungen

$$y' = \frac{x+y}{x} \quad \text{und} \quad y' = 2\frac{y}{x}$$

(a) durch Betrachten als lineare Differentialgleichung 1. Ordnung.

(b) durch Substitution $z = \frac{y}{x}$

7.5 Bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Bernoulli'schen Differentialgleichungen:

(a) $(1 + x^2)y' + xy - xy^2 = 0$

(b) $y' + y + (\sin(x) + e^x)y^3 = 0$