Übung 3

3.3 Berechne die folgenden Integrale:

(a) $\int_0^\pi \cos(x) \cdot e^{\sin(x)} dx$

Die Kettenregel rückwärts angewandt ergibt:

$$
\begin{aligned}
&= e^{\sin(x)} dx \Big|_0^\pi \\
&= 0 - 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

(b) $\int_{-1}^1 x^2 e^{4x} dx$

dreifache partielle Integration mit $f(x) = x^2, g(x) = e^{4x}$

$$
\begin{aligned}
&= x^2 \frac{1}{4} e^{4x} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 2x \frac{1}{4} e^{4x} dx \\
&= x^2 \frac{1}{4} e^{4x} \Big|_{-1}^1 - 2x \frac{1}{16} e^{4x} \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 2 \frac{1}{16} e^{4x} dx \\
&= x^2 \frac{1}{4} e^{4x} \Big|_{-1}^1 - 2x \frac{1}{16} e^{4x} \Big|_{-1}^1 + 2 \frac{1}{64} e^{4x} \Big|_{-1}^1 - 0 \\
&= \frac{e^4}{4} - \frac{1}{4e^4} - \frac{2e^4}{16} - \frac{2}{16e^4} + \frac{2e^4}{64} - \frac{2}{64e^4} \\
&= \frac{16e^8 - 16 - 8e^8 - 8 + 2e^8 - 2}{64e^4} \\
&= \frac{5e^4}{32} - \frac{13}{32e^4} \\
&\approx 8.5235
\end{aligned}
$$

(c) $\int_0^1 \ln(x) dx$

partielle Integration mit $f(x) = \ln(x), g(x) = 1$:

$$
\begin{aligned}
&= \ln(x) x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{x} x dx \\
&= \ln(x) x \Big|_0^1 - \int_0^1 1 dx \\
&= 0 - 0 - 1 \\
&= -1
\end{aligned}
$$

(d) $\int_0^\infty \frac{1}{4\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}dx$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{(4+x)\sqrt{x}}dx$$

Partialbruchzerlegung mit $A = \frac{1}{2i}, B = \frac{1}{4}$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{4\sqrt{x}} - i\frac{1}{8+2x}dx$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{i}{2}\frac{1}{8+2x}\Big|_0^\infty$$
$$= \lim_{x\to\infty}(\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{i}{2}\frac{1}{8+2x}) + \frac{i}{16}$$
$$= \frac{i}{16} + \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{i}{2}\frac{1}{8+2x}$$
$$= \frac{i}{16} + \lim_{x\to\infty}\frac{4x^{\frac{3}{2}} + 16x^{\frac{1}{2}} - 2i}{32+8x}$$

da $4x^{\frac{3}{2}} > 8x$ für $x > x_1 \in \mathbb{R}$:

$$\Rightarrow \infty$$

3.4 Nutze das Integralvergleichskriterium zur Entscheidung, ob die folgenden Reihen konvergieren:

(a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$

(b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^2}$

3.5 Berechne die folgenden Determinanten:

$$A := \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}, B := \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

A :

Laplace'scher Entwicklungssatz der $k = 3$. Spalte

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} \det(A_{jk})$$
$$= -\det(A_{23})$$
$$= -\det\left(\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}\right)$$

Regel von Sarrus:

$$
\begin{aligned}
&= -\,(4-18+5-30-3+4)\\
&=38
\end{aligned}
$$

B :

$$
\begin{aligned}
\det(B) =& 0\cdot\det(B_{11}) - 1\det(B_{12}) + 2\cdot\det(B_{13}) - 3\cdot\det(B_{14})\\
=& -\det\left(\begin{vmatrix}-1 & 1 & 2\\ -2 & 0 & 1\\ -3 & -1 & 0\end{vmatrix}\right) + 2\det\left(\begin{vmatrix}-1 & 0 & 2\\ -2 & -1 & 1\\ -3 & -2 & 0\end{vmatrix}\right) - 3\det\left(\begin{vmatrix}-1 & 0 & 1\\ -2 & -1 & 0\\ -3 & -2 & 1\end{vmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

Regel von Sarrus:

$$
\begin{aligned}
=&(-3+4-1)+2(8-6-2)-3(-1+4-3)\\
=&0
\end{aligned}
$$

3.6 Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt nilpotent, falls $A^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$ ist, und idempotent, falls $A^2 = A$ ist. Zeige:

(a) $\det(A^k) = (\det A)^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(b) A nilpotent $\Rightarrow \det(A) = 0$.

(c) A idempotent $\Rightarrow \det(A) \in \{0, 1\}$; A idempotent und $\det(A) = 1 \Leftrightarrow A = E_n$.