Übung 1

1.5 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) \coloneqq \sin x$. Für $n \in \mathbb{N}$ bestimme das Taylor-Polynom von f vom Grad n um den Entwicklungspunkt $a = 0$. Zeige, dass die Taylor-Reihe von f auf ganz $\mathbb{R}$ gegen f konvergiert, d.h. für jedes (feste) $x \in \mathbb{R}$ gilt $R_n(x) \to 0$. Benutze dazu die Formel für das Lagrange-Restglied R_n aus HM1, Satz 21.1.

1.6 Sind die angegebenen Funktionen $\varphi_k : [0,2] \to \mathbb{R}(k = 1,2,3,4)$ Treppenfunktionen? Wenn ja, ist ihr Integral zu ermitteln.

(a) $\varphi_1(x) = \lfloor x \rfloor$

$$\varphi_1(x) = \lfloor x \rfloor = \begin{cases} \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \\ 2 & 2 \leq x < 3 \\ \vdots & \vdots \\ n & n \leq x < n+1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \varphi_1 \in T$ (φ_1 ist eine Treppenfunktion) mit Treppenpunkten $= \{\dots, 1, 2, 3, \dots, n\}$

$$\Rightarrow \int_a^b \varphi_1(x)dx = \int_0^b \varphi_1(x)dx - \int_0^a \varphi_1(x)dx$$

$$\text{mit } \int_0^c \varphi_1(x)dx = \sum_{k=1}^{\lfloor c \rfloor} k - 1 + (c - \lfloor c \rfloor)\lfloor c \rfloor$$

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor c \rfloor} k - \lfloor c \rfloor + (c - \lfloor c \rfloor)\lfloor c \rfloor$$

$$= \frac{\lfloor c \rfloor(\lfloor c \rfloor + 1)}{2} + (c - \lfloor c \rfloor - 1)\lfloor c \rfloor$$

$$\int_0^2 \varphi_1(x)dx = \frac{6}{2} - 2 - 0 = 1$$

(b) $\varphi_2(x) = \lfloor 2x \rfloor$

$$\varphi_2(x) = \varphi_1(2x)$$

$\Rightarrow \varphi_2 \in T$ da $\varphi_1 \in T$

$$\Rightarrow \int_a^b \varphi_2(x)dx = \int_a^b \varphi_1(2x)dx = \frac{\int_{2a}^{2b} \varphi_1(x)dx}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^2 \varphi_2(x)dx = \frac{\int_0^4 \varphi_1(x)}{d}x2 = \frac{\frac{20}{2} - 4 - 0}{2} = 3$$

(c) $\varphi_3(x) = 7\lfloor x \rfloor - 5\lfloor 2x \rfloor$

$$\varphi_3(x) = 7\varphi_1(x) - 5\varphi_2(x) = 7\varphi_1(x) - 5\varphi_1(2x)$$

$\Rightarrow \varphi_3 \in T$ da sie sie eine lineare Kombination aus den beiden Treppenfunktionen φ_1 und φ_2 ist. (Vektorraum)

$$\Rightarrow \int_a^b \varphi_3(x)dx = 7\int_a^b \varphi_1(x)dx - 5\int_a^b \varphi_1(2x)dx = 7\int_a^b \varphi_1(x)dx - \frac{5}{2}\int_{2a}^{2b} \varphi_1(x)dx$$

$$\Rightarrow 7\int_0^2 \varphi_1(x)dx - 5\int_0^2 \varphi_2(x)dx = 7 - 15 = -8$$

(d) $\varphi_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0, \\ \lfloor \frac{1}{x} \rfloor & \text{falls } x \neq 0. \end{cases}$

$$\int_0^2 \varphi_4(x)dx = \int_0^1 \varphi_4(x)dx + \int_1^2 \varphi_4(x)dx$$

$\forall x > 1 : \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow \forall x > 1 : \lfloor \frac{1}{x} \rfloor = 0$

$$\Rightarrow \int_1^2 \varphi_4(x)dx = 0 \Rightarrow \int_0^2 \varphi_4(x)dx = \int_0^1 \varphi_4(x)dx$$

$$a_n \coloneqq (\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n})$$

berechnen der Treppenfunktion (Fläche unter den letzten n Stufen):

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1})k = \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})k = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \varphi_4(x)dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} - 1 \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - 1
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ harmonische Reihe
$\Rightarrow$ divergiert
$\Rightarrow$ nicht Riemann integrierbar.

1.7 Die rationalen Zahlen im Intervall $[0, 2)$ seien als Folge $(r_n)_{k\in\mathbb{N}}$ geschrieben. Entscheide, ob die angegebenen Funktionen $f_n : [0, 2] \to \mathbb{R}(m = 1, 2, 3, 4)$ Riemann-integrierbar sind.

(a) $f_1(x) = \lfloor 2x \rfloor$;
(b) $f_2(x) = e^{-x^2}$;
(c) $f_3(x) = \sum\limits_{k:r_k<x} 2^{-k}$;
(d) $f_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0, \\ x^{-2} & \text{falls } x \neq 0. \end{cases}$

1.8 Sei $a > 1$. gehe ähnlich wie in Aufgabe 1.4 vor, um das Riemann-Integral $\int_1^a \frac{dx}{x}$ zu bestimmen.