3.3 (a) Bestimme die Polardarstellungen von $\frac{i\sqrt{3}-1}{2}$ und von $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^5$.

$$\frac{i\sqrt{3}-1}{2}$$
$$=\frac{(i\sqrt{3}-1)i\sqrt{3}}{2i\sqrt{3}}$$
$$=\frac{-3-i\sqrt{3}}{2i\sqrt{3}}$$
$$=\frac{-3}{2i\sqrt{3}}-\frac{i\sqrt{3}}{2i\sqrt{3}}$$
$$=-\frac{1}{2}-\frac{1.5}{i\sqrt{3}}$$

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$|z|=\sqrt{(-\frac{1.5}{\sqrt{3}})^2+(-\frac{1}{2})^2}$$
$$\Leftrightarrow |z|=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}$$
$$\Leftrightarrow |z|=1$$

$$\alpha=\pi-sin^{-1}\left(\left|\frac{-1.5}{\sqrt{3}}\right|\right)\wedge\alpha=\pi-cos^{-1}\left(\left|\frac{-1}{2}\right|\right)\wedge\alpha=\pi-tan^{-1}\left(\frac{\frac{-1.5}{\sqrt{3}}}{-0.5}\right)$$
$$\alpha=\frac{2}{3}\pi$$
$$z=cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)isin\left(\frac{2}{3}\pi\right)$$

(b) Bestimme alle Lösungen der Gleichung $z^3=-8$.

3.4 Berechne sämtliche möglichen Produkte aus den gegebenen Matrizen

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&0&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&1\\2&-1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}-2&t\\1&0\\1&-1\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&1&0\end{pmatrix},$$

wobei t ein reeler Parameter ist.

$A \times B \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ $A \times C \begin{pmatrix} 3 & t-3 \\ -3 & 2t-1 \end{pmatrix}$

$B^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ $B \times D \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$C \times A \begin{pmatrix} -2+2t & -4 & -6+t \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $C \times B \begin{pmatrix} 2t & -2-t \\ 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ $C \times D \begin{pmatrix} -2-t & -4+t & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$D \times C \begin{pmatrix} 1 & t-1 \\ 3 & -t \end{pmatrix}$

3.5 Berechne

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

für n = 1,2,3,4, stelle eine Vermutung für eine Formel für allgemeines $n \in \mathbb{N}$ und beweise diese Formel durch Induktion.

$n = 1, 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^1 & & &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^4 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^1 &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

IA: $n = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

IV:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

IS: $n \to n+1$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix}1 & n+1\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}^{n}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & n+1\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}1 & n\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & n+1\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}1 & n+1\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & n+1\\0 & 1\end{pmatrix}$$

3.6 Die *Pauli-Matrizen* sind definiert durch

$$\sigma_1 \coloneqq \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \sigma_2 \coloneqq \begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix}, \sigma_1 \coloneqq \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$

mit der imaginären Einheit i. Zeige für alle $j, k = 1, 2, 3$:

$$\sigma_j\sigma_k = \delta_{jk}E_2 + i\sum_{l=1}^{3}\epsilon_{jkl}\sigma_l,$$

wobei δ_{jk} das Kronecker-Delta ist und

$$\epsilon_{jkl}\begin{cases}0 & \text{falls mindestens 2 der Inizes } j,k,l \text{denselben Wert haben,}\\ 1 & \text{falls}(j,k,l) \in \{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\},\\ -1 & \text{falls}(j,k,l) \in \{(3,2,1),(2,1,3),(1,3,2)\},\end{cases}$$

das *Levi-Civita-Symbol*.

$$\sigma_j\sigma_k = \begin{cases}E_n & j = k\\ i\sigma_l & (j,k) \in \{(1,2),(2,3),(3,1)\} \text{ mit } l \neq j \neq k,\\ -i\sigma_l & (j,k) \in \{(3,2),(2,1),(1,3)\} \text{ mit } l \neq j \neq k\end{cases}$$

für $j = k$:

$$\sigma_1^2 = E_n \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \checkmark$$

$$\sigma_2^2 = E_n \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \checkmark$$

$$\sigma_3^2 = E_n \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \checkmark$$

für $(j,k) \in \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$ mit $l \neq j \neq k$:

$$\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3 \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \surd$$

$$\sigma_2\sigma_3 = i\sigma_1 \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \surd$$

$$\sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2 \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \surd$$

für $(j,k) \in \{(3,2),(2,1),(1,3)\}$ mit $l \neq j \neq k$:

$$\sigma_3\sigma_2 = -i\sigma_1 \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad \surd$$

$$\sigma_2\sigma_1 = -i\sigma_3 \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad \surd$$

$$\sigma_1\sigma_3 = -i\sigma_2 \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \surd$$