Übung 4

4.2 Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine *schiefsymmetrische* Matrix, d.h. $A^T = -A$. Zeige, dass A nicht invertierbar ist. Gilt dies auch für gerade n? Gib einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

A invertierbar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ Für n ungerade:

$$\det(A) = \det(A^T) = \det(-A)$$

Aus jeder Zeile von $-A$ wird der Faktor -1 gezogen:

$$\det(A) = (-1)^n \det(A)$$

Für ungerade n folgt: $\det(A) = -\det(A)$.
$\Rightarrow \det(A) = 0$
$\Rightarrow A$ nicht invertierbar für ungerade n

Für n gerade (Gegenbeispiel):

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$\Rightarrow$ invertierbar.

4.3 (a) Berechne

$$A := \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix}$$

$$C^{(m,n)} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{m}{n} & \frac{m+1}{n} & \dots & \frac{n}{n} \end{pmatrix}, a := n-m+1; a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}; C^{(m,n)} \in \mathbb{C}^{a \times a}$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} \cdot \det(C^{(1,n)}) \\ &= n! \cdot \det(C^{(1,n)}) \end{aligned}$$

Entwickeln der 1. Spalte von C ergibt:

$$\det(C^{(m,n)}) = (-1)^{n+1} \frac{m}{n} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \det(C^{(m+1,n)})$$

Entwickeln der 1. Zeile ergibt:

$$\begin{aligned} &= (-1)^{a+1} \frac{m}{n} (-1)^a \det(E_{a-2}) + \det(C^{(m+1,n)}) \\ &= -\frac{m}{n} + \det(C^{(m+1,n)}) \\ &= -\frac{m}{n} - \frac{m+1}{n} - \dots - \frac{n-1}{n} + \left|\tfrac{n}{n}\right| \\ &= -\frac{\sum_{k=m}^{n-1} k}{n} + 1 \\ &= -\frac{n(n-1) - m(m-1)}{n} + 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \det(C^{(1,n)}) = \frac{3-n}{2}$$

$$\Rightarrow \det(A) = n! \tfrac{3-n}{2}$$

(b) Finde Matrizen A, B, so dass $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$$
$$\det(A+B) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 24$$
$$\det(A) + \det(B) = 2 + 12 = 14$$

4.4 Berechne die *Vandermonde-Determinante*

$$det(V^{(n,n)}) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

für $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$.

$$V^{(m,n)} := \begin{vmatrix} 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^{n-m} \\ 1 & x_{m+1} & x_{m+1}^2 & \dots & x_{m+1}^{n-m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-m} \end{vmatrix} \text{ mit } m < n; m \in \mathbb{N}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & v_1 & v_2 & \dots & v_{n-1}) \end{pmatrix}$$

beginnend bei v_{n-1} wird $v_a - x_m v_{a-1}$ subtrahiert:

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & v_1 - x_m \cdot 1 & v_2 - x_m \cdot v_1 & \dots & v_{n-m} - x_m \cdot v_{n-(m+1)} \end{pmatrix}$$

$$x_a^{n-b} - x_m \cdot x_a^{n-b-1} = x_a^{n-b-1}(x_a - x_m)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_{m+1} - x_m & x_{m+1}(x_{m+1} - x_m) & \dots & x_{m+1}^{n-(m+1)}(x_{m+1} - x_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n - x_m & x_n(x_n - x_m) & \dots & x_n^{n-(m+1)}(x_n - x_m) \end{vmatrix}$$

Entwickeln der ersten Zeile:

$$= \begin{vmatrix} x_{m+1}-x_m & x_{m+1}(x_{m+2}-x_m) & \dots & x_{m+1}^{n-(m+1)}(x_{m+1}-x_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - x_m & x_n(x_n-x_m) & \dots & x_n^{n-(m+1)}(x_n-x_m) \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{k=m+1}^{n}(x_k-x_m) \begin{vmatrix} 1 & x_{m+1} & \dots & x_{m+1}^{n-(m+1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-(m+1)} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{k=m+1}^{n}(x_k-x_m)V^{(m+1,n)}$$

$$= \prod_{k_1=m+1}^{n}\left(\prod_{k_2=k_1}^{n}(x_k-x_m)\right)$$

4.5 Berechne das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und Eigenvektoren von

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

A:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A-\lambda E) \\ &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} + (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -2+2\lambda-6+(2-\lambda)((2-\lambda)(1-\lambda)-6)+4-2\lambda+4 \\ &= -4\lambda+(-4-\lambda)(2-3\lambda+\lambda^2) \\ &= -\lambda^3+5\lambda^2-2\lambda-8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda_1 &= -1, \\ \lambda_2 &= 2, \\ \lambda_3 &= 4 \end{aligned}$$

$$\mathrm{Eig}(A,\lambda) \coloneqq (A-\lambda E_n)x = 0$$

$\mathrm{Eig}(A,\lambda_1)$:

$$\begin{pmatrix}3 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 1\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix} x = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\mathrm{Eig}(A,\lambda_2)$:

$$\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix} x = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\mathrm{Eig}(A,\lambda_3)$:

$$\begin{pmatrix}-2 & 2 & 3\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & -2 & -3\end{pmatrix} x = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Gauß-Algorithmus:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}3 & 2 & 3\\ 0 & 7 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \begin{pmatrix}2 & -2 & -1\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \begin{pmatrix}-2 & 2 & 3\\ 0 & -2 & 5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\} \qquad \Rightarrow \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}-2\\-3\\2\end{pmatrix}\right\} \qquad \Rightarrow \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}8\\5\\2\end{pmatrix}\right\}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Eig}(A,\lambda) = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8\\5\\2\end{pmatrix}\right\}$$

B:

$$
\begin{aligned}
p_B(\lambda) &= \det(B - \lambda E) \\
&= \begin{vmatrix} -5-\lambda & 0 & 7 \\ 6 & 2-\lambda & -6 \\ -4 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} \\
&=(2-\lambda) \begin{vmatrix} -5-\lambda & 7 \\ -4 & 6-\lambda \end{vmatrix} \\
&=(\lambda-2)(-\lambda^2+\lambda+2) \\
\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 &=2, \\
\lambda_3 &= -1
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{Eig}(B, \lambda) \coloneqq (B - \lambda E_n)x = 0
$$

$\mathrm{Eig}(B, \lambda_1) = \mathrm{Eig}(B, \lambda_2)$:

$$
\begin{pmatrix} -7 & 0 & 7 \\ 6 & 0 & -6 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\Rightarrow \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}
$$

$\mathrm{Eig}(B, \lambda_3)$:

$$
\begin{pmatrix} -4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & -6 \\ -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\Rightarrow \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}
$$

$$
\Rightarrow \mathrm{Eig}(B, \lambda) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}
$$