Übung 8

8.3 Untersuche die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auf Konvergenz und absolute Konvergenz, wobei

(a) $a_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+i}{2}\right)^n - 1$$

Geometrische Reihe mit $|\frac{1+i}{2}| = \frac{|1+i|}{|2|} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$:
$\Rightarrow$ konvergent.

Überprüfen absoluter Konvergenz:

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \left|\left(\frac{1+i}{2}\right)^n\right|$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1+i}{2}\right|^n$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n - 1$$

Aus der geometrischen Reihe mit $|\frac{\sqrt{2}}{2}| < 1$ folgt $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\left(\frac{1+i}{2}\right)^n\right|$ konvergiert.
$\Rightarrow$ absolut konvergent

(b) $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}} = (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$;

Nach dem Leipniz-Kriterium, konvergiert eine Reihe, wenn die Folge $(b_n) := \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Es gilt: $a > b \Rightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}$.
$\Rightarrow \sqrt[3]{n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (monoton fallend)
$\Rightarrow$ konvergent.

Absolute Konvergenz:

$$\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}\right| = \frac{|(-1)^n|}{|\sqrt[3]{n}|} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \left(\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}\right)^n = \left(\frac{1}{\sqrt[3n]{n}}\right)^n$$

Geometrische Reihe mit $\frac{1}{\sqrt[3]{n}} < 1$:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt[3n]{n}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt[3n]{n}-1}{\sqrt[3n]{n}}} = \frac{\sqrt[3n]{n}}{\sqrt[3n]{n}-1}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[3n]{n} &\xrightarrow{n\to\infty} 1 \\ \Rightarrow \sqrt[3n]{n}-1 &\xrightarrow{n\to\infty} 0 \\ \Rightarrow \frac{\sqrt[3n]{n}}{\sqrt[3n]{n}-1} &\xrightarrow{n\to\infty} \infty \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ divergent $\Rightarrow$ nicht absolut konvergent.
(Umrechnungen von $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ zu $\sum\limits_{n=0}^{\infty}$ mit $n+1$ wurden weggelassen, weil sie durch den allgemeineren Fall von n gezeigt wurden).

(c) $a_n = (-1)^n \frac{n+2}{2n}$.

Nach dem Leipniz-Kriterium, konvergiert eine Reihe, wenn die Folge $(b_n) \coloneqq \frac{n+2}{2n}$ für $n \geq 1$ eine monoton fallende Nullfolge ist.

$$
\begin{aligned}
& & \frac{n+2}{2n} > \frac{n+3}{2n+2} & \qquad \mid \cdot (2n+2) \\
&\Leftrightarrow & \frac{(n+2)(2n+2)}{2n} > n+3 & \\
&\Leftrightarrow & \frac{2n^2+6n+4}{2n} > n+3 & \qquad \mid -(n+3) \\
&\Leftrightarrow & \frac{2n^2+6n+4}{2n} - \frac{2n(n+3)}{2n} > 0 & \\
&\Leftrightarrow & \frac{2n^2+6n+4}{2n} - \frac{2n^2+6n}{2n} > 0 & \\
&\Leftrightarrow & \frac{4}{2n} = \frac{2}{n} > 0 & \qquad \mid \surd \text{ für alle } n \geq 1
\end{aligned}
$$

Die Folge ist für alle Elemente, die in der Reihe vertreten sind ($n \geq 1$) monoton fallend.

Grenzwert *(siehe Umformung Ungleichung zu $\frac{2}{n} > 0$)*:

$$a_n = a_{n+1} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2} > 0 \Rightarrow$ keine Nullfolge.
$\Rightarrow$ nicht konvergent $\Rightarrow$ nicht absolut konvergent
$\Rightarrow$ divergent.

8.4 Sei $s_n := \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ und $e = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ die Euler'sche Zahl.

(a) Zeige die Ungleichungen $0 < e - s_n < \frac{1}{n*n!}$ für $n \in \mathbb{N}$, mit Hilfe einer geeigneten geometrischen Reihe.

$$e - s_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

$$0 < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Da alle Summanden > 0, muss $e - s_n > 0$ sein.
$e - s_n$ wird größer, je kleinere Werte s_n annimmt. Da es sich bei s_n um eine Summe mit rein positiven Summanden handelt, ist s_n am kleinsten, wenn es die wenigstens möglichen Summanden besitzt ($n = 1$).

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n \cdot n!}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots\right) < \frac{1}{n \cdot n!}$$

$$\frac{1}{n \cdot n!} = \frac{n+1}{n} \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{n \cdot n!} = \frac{1}{\frac{n}{n+1}} \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{n \cdot n!} = \frac{1}{\frac{1+n}{1+n} - \frac{1}{n+1}} \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{n \cdot n!} = 1 - \frac{1}{n+1} \frac{1}{(n+1)!}$$

mit Geometrischer Reihe

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{n \cdot n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right)^k \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\frac{1}{(n+1)!}(1+\frac{1}{(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots)<(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots)\frac{1}{(n+1)!}$$
$$\Leftrightarrow \qquad 1+\frac{1}{(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots<1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots$$
$$\Rightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}<\frac{1}{n\cdot n!}$$

(b) Bestimme mit Hilfe von (a) eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, für die $|e - s_N| \leq 0.5 \cdot 10^{-4}$ gilt, und gib den Wert von s_N an.

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}-0.5\cdot 10^{-4}<\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}-0.5\cdot 10^{-4}\leq 0$$
$$\Leftrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}-0.5\cdot 10^{-4}\leq 0$$
$$\Leftrightarrow \qquad 2-0.5\cdot 10^{-4}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\leq 0$$
$$\Leftrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\geq 2-0.5\cdot 10^{-4}$$

$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots = 2 \Rightarrow$ an der k-ten Stelle fehlt der Reihe bis zum Grenzwert 2 noch $\frac{1}{2^k}$.

$$\Rightarrow \frac{1}{2^k}\leq 0.5\cdot 10^{-4}$$
$$\Leftrightarrow \qquad \frac{1}{2^k}\geq\frac{1}{2\cdot 10^4} \qquad |\log_2$$
$$\Leftrightarrow \qquad k\geq\log_2(2\cdot 10^4)$$
$$\Leftrightarrow \qquad k\gtrsim 14.2877$$

$\Rightarrow n \geq 15.$
$s_{15} = \sum_{k=0}^{15}\frac{1}{k!} \approx 2.71828128$

(c) Zeige, dass die Euler'sche Zahl e irrational ist.
$p, q \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} & \frac{p}{q} = e && \mid \cdot q! \\ \Leftrightarrow \quad & (q-1)! \cdot p = e \cdot q! \\ \Leftrightarrow \quad & (q-1)! \cdot p = q! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \\ \Leftrightarrow \quad & (q-1)! \cdot p = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q!}{k!} \end{aligned}$$

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{q!}{k!} = \frac{q!}{0!} + \frac{q!}{1!} + \cdots + \frac{q!}{q!} + \cdots + \frac{q!}{k!}$
Spaltet man die Reihe in 2 Teile x und y auf, wobei $x = \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!}$ und $y = \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!}$, fällt auf, weil $a, b \in \mathbb{N}, a \geq b \Rightarrow \frac{a!}{b!} \in \mathbb{N}$, dass jeder Summand x_k in x ein Element von $\mathbb{N}$ sein muss. Somit folgt: $x \in \mathbb{N}$.
Für y gilt: $\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!} < \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!}$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \\ = & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} \\ = & e - 2 < 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow y \notin \mathbb{N} \Rightarrow x + y \notin \mathbb{N}$
Aus

$$(q-1)! \cdot p = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q!}{k!} \Leftrightarrow (q-1)! \cdot p = x + y$$

mit $(q-1)! \cdot p \in \mathbb{N}$ und $x + y \notin \mathbb{N}$ ergibt sich ein Widerspruch. $\Rightarrow e \notin \mathbb{Q}$

8.5 (a) Konvergiert die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}-1}+\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)$?

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{n}-1}+\frac{1}{\sqrt{n}+1}\\ \Leftrightarrow&\frac{2\sqrt{n}}{n-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{2\sqrt{n}}{n-1} >&\frac{1}{n-1} > \frac{1}{n}\\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n} =&\infty\\ \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}&\left(\frac{1}{\sqrt{n}-1}+\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)=\infty\end{aligned}$$

(b) Berechne $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n!}$.

$$\begin{aligned}&& A &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n!}\\ \Leftrightarrow && A &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n!}-\frac{1}{n!}\right)\\ && \frac{n}{n!} &= \frac{1}{(n-1)!}\\ && \Rightarrow A &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}\right)\\ \Leftrightarrow && A &= 1-1+1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots-\frac{1}{n!}\\ \Leftrightarrow && A &= 1-\frac{1}{n!}\\ && \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!} &= 0\\ && \Rightarrow A &= 1\end{aligned}$$

(c) Für welche $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(1+z)^n}$?
Bestimme den Grenzwert, falls er existiert.

Quotientenkriterium:

$$\left| \frac{z^n(1+z)^n}{(1+z)^{n+1}z^{n-1}} \right|$$
$$\Leftrightarrow \left| \frac{z}{1+z} \right|$$

Da $|z| < |1+z|$ muss $\frac{|z|}{|1+z|} < 1$ und damit wissen wir dass: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(1+z)^n}$ für all z konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(1+z)^n}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{1+z} \right)^n$$

da wir schon wissen dass $\left| \frac{z}{1+z} \right| < 1$

können wir die geometrische Reihe verwenden

$$\frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{1+z} \right)^n = \frac{1}{z} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1+z} \right)^n - 1 \right)$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{1+z} \right)^n = \frac{1}{z} \left(\frac{1}{1 - \frac{z}{1+z}} - 1 \right)$$
$$\Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(1+z)^n} = 1$$

8.6 Ermittle (durch Probieren) das kleinste $n \in \mathbb{N}$, für dass $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > 3$ ist. benutze einen Computer, um herauszufinden, wie groß man n wählen muss, damit die Summe > 6 bzw. > 9 wird.

```python
sum = 0
three = 0
six = 0
nine = 0
for i in range(1,1000000):
    sum += 1/i
    if sum > 3 and three == 0:
        three = i
        print(sum, i)
    if sum > 6 and six == 0:
        six = i
        print(sum, i)
    if sum > 9 and nine == 0:
        nine = i
        print(sum, i)
        break;
```

$$\sum_{k=1}^{11} = 3.0198773448773446$$

$$\sum_{k=1}^{227} = 6.004366708345567$$

$$\sum_{k=1}^{4550} = 9.000208062931115$$

$$\mathbb{L} = \{11, 227, 4550\}$$