2.5 Bestimme die reellen Lösungen der Gleichungen

(a) $\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} = \sqrt{2x-12}$

$$
\begin{aligned}
& & \sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} &= \sqrt{2x-12} & &|^2 \\
&\Leftrightarrow & (\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x})^2 &= 2x-12 \\
&\Leftrightarrow & (x+1) - 2\sqrt{x+1}\sqrt{9-x} + (9-x) &= 2x-12 \\
&\Leftrightarrow & x+1-x+9-2\sqrt{(x+1)(9-x)} &= 2x-12 \\
&\Leftrightarrow & 10 - 2\sqrt{(x+1)(9-x)} &= 2x-12 & &|/-2 \\
&\Leftrightarrow & -5 + \sqrt{(x+1)(9-x)} &= -x+6 & &|+5 \\
&\Leftrightarrow & \sqrt{(x+1)(9-x)} &= -x+11 & &|^2 \\
&\Leftrightarrow & (x+1)(9-x) &= (-x+11)^2 \\
&\Leftrightarrow & -x^2+8x+9 &= 11^2 - 22x + x^2 & &|-x^2;+22x;-11^2 \\
&\Leftrightarrow & -2x^2+30x-112 &= 0 & &|/(-2) \\
&\Leftrightarrow & x^2-15x+56 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow x_{1/2} = -\frac{-15}{2} \pm \sqrt{(\frac{-15}{2})^2 + 56} = 7.5 \pm 0.5
$$

$$
\Rightarrow x_1 = 7 \wedge x_2 = 8
$$

(b) $|x-3| + |x+2| - |x-4| = 3$
Wenn man $|x-3|$, $|x+2|$ und $|x-4|$ als drei separate Abbildungen $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ begreift, so ergibt sich für:

$$
f(x) = \begin{cases} x-3 & x \geq 3 \\ -x-3 & x < 3 \end{cases}
$$

$$
g(x) = \begin{cases} x+2 & x \geq -2 \\ -x-2 & x < -2 \end{cases}
$$

$$
h(x) = \begin{cases} x-4 & x \geq 4 \\ -x+4 & x < 4 \end{cases}
$$

Wenn man $gh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, gh(x) \coloneqq g(x) - h(x)$ definiert, folgt:

$$
gh(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 4 \\ 2x-7 & 3 < x < 4 \\ -1 & x \leq 3 \end{cases}
$$

Definiert man weiter $fgh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, fgh(x) := gh(x) + f(x)$, folgt:

$$fgh(x) = \begin{cases} x+3 & x \geq 4 \\ 3x-5 & 3 < x < 4 \\ x+1 & -2 \leq x \leq 3 \\ -x-3 & x < -2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x+3 = 3 \Leftrightarrow x = 0, & \qquad 0 \ngeq 4|\times \\ 3x-5 = 3 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}, & \qquad 3 \nless \frac{8}{3} < 4|\times \\ x+1 = 3 \Leftrightarrow x = 2, & \qquad -2 \leq 2 \leq 3|\surd \\ -x-3 = 3 \Leftrightarrow x = -6, & \qquad -6 < -2|\surd \end{aligned}$$

$\Rightarrow x_1 = 2 \land x_2 = -6$

2.6 bestimme sämtliche reellen Lösungen der Ungleichungen

(a) $\dfrac{2}{x+1} < \dfrac{1}{x-3}$

Es gilt für $a, b \in \mathbb{R}_{x>0}$:
$\frac{1}{a} < \frac{1}{b} \Leftrightarrow a > b$
$-\frac{1}{a} < -\frac{1}{b} \Leftrightarrow -a > -b$
Damit $\frac{2}{x+1}$ und $\frac{1}{x-3}$ beide entweder positiv oder negativ sind,
muss $x > -1 \land x > 3 \Leftrightarrow x > 3$ bzw. $x < -1 \land x < 3 \Leftrightarrow x < -1$ sein.
Daraus ergibt sich für $x < -1 \lor x > 3$:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{x+1} < \frac{1}{x-3} & \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{x+1}{2} > \frac{x-3}{1} & \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} > x - 3 & \quad | -\tfrac{1}{2}x; +3 \\ \Leftrightarrow \quad & 3.5 > 0.5x & \quad | * 2 \\ \Leftrightarrow \quad & 7 > x & \\ \Leftrightarrow \quad & x < 7 & \end{aligned}$$

Innerhalb des restlichen Intervalls $(-1, 3)$ nimmt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := \frac{2}{x+1}$ alle Werte zwischen $(\frac{1}{2}, \infty)$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) := \frac{1}{x-3}$ alle Werte zwischen $(-\frac{1}{4}, -\infty)$ an.
Somit gilt: $\forall x \in \mathbb{R}_{-1<x<3} : (f(x) \nless h(x))$.

Insgesamt gilt: $\forall x \in \mathbb{R}_{x<7} \setminus \{-1 \leq x \leq 3\} : (\frac{2}{x+1} < \frac{1}{x-3})$

(a) ORIGINAL - MORITZ
Da $\frac{2}{x+1} > 0$ mit $x \in \mathbb{R}; x > -1$
Und $\frac{1}{x-3} < 0$ mit $x \in \mathbb{R}; x < 3$
Gibt gibt es keine reellen Lösungen in $x \in \mathbb{R}; -1 < x < 3$

Nullpunkt bestimmen:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{x+1} < \frac{1}{x-3} & \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{2x-6}{x+1} < 1 & \mid * (x-3) \end{aligned}$$

Polynom Division:

$$\begin{array}{l} \big(\quad 2x - 6\big) \div \big(x+1\big) = 2 + \dfrac{-8}{x+1} \\ \underline{-\,2x - 2} \\ \qquad -\,8 \end{array}$$

$$\begin{aligned} & 2 - \frac{8}{x+1} < 1 & \\ \Leftrightarrow \quad & 1 < \frac{8}{x+1} & \mid -1 + \tfrac{8}{x+1} \\ \Leftrightarrow \quad & x+1 < 8 & \mid x+1 \\ \Leftrightarrow \quad & x < 7 & \mid -1 \end{aligned}$$

Somit gilt $\forall x \in \mathbb{R}; (x < 7; x \notin \{-1 \leq x \leq 3\}) : \frac{2}{x+1} < \frac{1}{x-3}$

(b) $(x+2)\,(4-x)\,(x-2)^2 > 0$
da $x^2$ für $x \in \mathbb{R}$ immer $\geq 0$, kann der Term nur negativ werden, wenn $(x+2)$ oder $(4-x)$ negativ sind.
Die Bedingung erfüllen alle Elemente von $M\{x \in \mathbb{R}; x \neq 2, (x+2)(4-x) > 0\}$

$$\begin{aligned} & (x+2)(4-x) > 0 & \\ \Leftrightarrow \quad & -x^2 + 2x + 8 > 0 & \mid * (-1) \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - 2x - 8 < 0 & \end{aligned}$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) \coloneqq x^2 - 2x - 8$ stellt eine nach oben geöffnete Parabel da. Somit müssen alle Werte zwischen den beiden Nullstellen $< 0$ sein.
Die Nullstellen lassen sich direkt aus der Parameterform oben ablesen.
$\Rightarrow x_1 = (-2) \land x_2 = 4$
Somit gilt $\forall x \in \mathbb{R}; (-2 < x < 4, x \neq 2) : ((x+2)\,(4-x)\,(x-2)^2 > 0)$

2.7 Beweise durch Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(a) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.

IA: n=1 $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$

IV: $n \to n+1$ Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$

IS:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k + (n+1)\right)^2$$

IV: einsetzen

$$\Leftrightarrow \quad \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + (n+1)^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k + (n+1)\right)^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2}(n+1)\text{: einsetzen}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (\frac{n}{2}(n+1))^2 + (n+1)^3 = (\frac{n}{2}(n+1) + (n+1))^2 \\
&\Leftrightarrow (\frac{n}{2}(n+1))^2 + (n+1)^3 = (\frac{n}{2}(n+1))^2 + (n+1)^2 + n(n+1)^2 \qquad | - (\tfrac{n}{2}(n+1)^2) \\
&\Leftrightarrow \qquad (n+1)^3 = (n+1)^2 + n(n+1)^2 \qquad |(n+1)^2 \\
&\Leftrightarrow \qquad n+1 = n+1
\end{aligned}$$

(b) $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (wobei $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$).

IA: n=1

$$\sum_{k=0}^{1} q^k = \frac{1-q^{1+1}}{1-q}$$

$$\sum_{k=0}^{1} q^k = q^0 + q^1 = 1 + q$$

Polynom Division:

$$\frac{1-q^2}{1-q} = (1-q^2) \div (1-q) = q+1$$

IV: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (wobei $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$)

IS:

$$\begin{aligned}
& & \sum_{k=0}^{n+1} q^k &= \frac{1-q^{n+1+1}}{1-q} & \\
&\Leftrightarrow & \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} &= \frac{1-q^{n+1+1}}{1-q} & \\
& & \text{IV einsetzen:} & & \\
&\Leftrightarrow & \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} &= \frac{1-q^{n+1+1}}{1-q} & \quad | * (1-q) \\
&\Leftrightarrow & 1 - q^{n+1} + (1-q) * q^{n+1} &= 1 - q^{n+1} * q & \quad |/(q^{n+1}); -1 \\
&\Leftrightarrow & q &= q &
\end{aligned}$$

(c) $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ ist durch 11 teilbar.
IA mit $n = 1$:

$$\begin{aligned}
& & 6^{2*1-2} + 3^{1+1} + 3^{1-1} &\pmod{11} = 0 & \\
&\Leftrightarrow & 6^0 + 3^2 + 3^0 &\pmod{11} = 0 & \\
&\Leftrightarrow & 1 + 9 + 1 = 11 &\pmod{11} = 0 & \quad \checkmark
\end{aligned}$$

IS $n \to n+1$:

$$\begin{aligned}
&6^{2(n+1)-2} + 3^{n+1+1} + 3^{n+1-1} \\
=&6^{2n} + 3^{n+2} + 3^{n} \\
=&6^2 * 6^{2n-2} + 3 * 3^{n+1} + 3 * 3^{n-1} \\
=&3 * 12 * 6^{2n-2} + 3 * 3^{n+1} + 3 * 3^{n-1} \\
=&3 * (11 * 6^{2n-2} + 6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}) \\
=&3 * 11 * 6^{2n-2} + 3 * (6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1})
\end{aligned}$$

Da $3 * 11 * 6^{2n-2}$ und wie im Induktionsanfang gezeigt $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ und somit auch $3 * (6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1})$ Vielfache von 11 sind, muss die Gesamtsumme ebenfalls für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 11 teilbar sein.

2.8 (a) Berechne $|5+12i|$
$|5+12i| = \sqrt{(5^2+12^2)} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$

(b) Berechne $\sum_{k=2}^{4} (2i)^k$

$\sum_{k=2}^{4} (2i)^k = (2i)^2 + (2i)^3 + (2i)^4 = -4 - 6i + 16 = 12 - 6i$

(c) Bestimme Real und Imaginärteil von $\dfrac{1+i\sqrt{2}}{1-i\sqrt{2}} + \dfrac{1-i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{2}}$.

$z = 1 + i\sqrt{2} = a + ib$,
$\bar{z} = 1 - i\sqrt{2} = a - ib$

$$\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} = \frac{z^2 + \bar{z}^2}{z\bar{z}} = \frac{a^2 + 2iab - b^2 + a^2 - 2iab - b^2}{a^2+b^2} = \frac{2a^2 - 2b^2}{a^2+b^2} = \frac{2(a^2-b^2)}{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2(1^2 - \sqrt{2}^2)}{1^2 + \sqrt{2}^2} = \frac{2-4}{1+2} = -\frac{2}{3}$$

Re: $-\frac{2}{3}$,
Im: 0

(d) Bestimme Real und Imaginärteil von $\dfrac{1+i^{15}}{2-i^{21}}$.

$$\frac{1+i^{15}}{2-i^{21}} = \frac{1+(-1)^{7.5}}{2-(-1)^{10.5}} = \frac{1+(-1)^7 * (-1)^{\frac{1}{2}}}{2-(-1)^{10} * (-1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1+(-1) * \sqrt{-1}}{2-(1) * \sqrt{-1}} = \frac{1-i}{2-i}$$

$$= \frac{(1-i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2-i}{5} = 0.4 + 0.2i$$

Re: 0.4,
Im: 0.2