Übung 7

7.3 Untersuche folgende rekursiv definierte Folgen auf Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz. berechne gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $a_1 := 1, a_{n+1} := \frac{1}{4}a_n - \frac{1}{2}$ für $n \in \mathbb{N}$.
Durch Betrachtung der Folgenglieder:

$$\{1, -0.25, -0.5625, -0.640625, \dots\}$$

scheint es als würde diese Folge monoton fallen und bei $\frac{-2}{3}$ unten beschränkt sein.

Durch Betrachtung der Folgendefinition fällt auf das die Folge bei positiven und leicht negativen a_n immer fällt aber bei größeren negativen a_n steigt, der Wert bei dem sich das verhalten ändert ist ungefähr $\frac{-2}{3}$.

Damit ist die letzte Möglichkeit für diese Folge zu divergieren wenn sie in eine stabile Oszillation verfällt.
Aber da $\frac{1}{4}a_{n+1} - \frac{1}{2} = a_n$
muss a konvergent sein.

$$\Rightarrow a_n \to a, a_{n+1} \to a$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}a - \frac{1}{2} = a \qquad | - \tfrac{1}{4}a$$

$$\Leftrightarrow \qquad a(1 - \frac{1}{4}) = -\frac{1}{2} \qquad | \div (1 - \tfrac{1}{4})$$

$$\Leftrightarrow \qquad a = -\frac{2}{3}$$

Also konvergiert a nach $-\frac{2}{3}$

(b) $a_1 := 2, a_{n+1} := \frac{1}{a_n}$ für $n \in \mathbb{N}$.
Wenn man sich die Folgenglieder dieser Folge anschaut:

$$\{2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, \dots\}$$

sieht man, dass diese Folge zwischen den Werten 2 und $\frac{1}{2}$ oszilliert.
Damit ist klar das sie divergent ist und die folgenden maximal Werte hat

$$\max a = 2$$
$$\min a = \frac{1}{2}$$

7.4 Die Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch

$$a_1 := 1, a_{n+1} := \sqrt{1 + a_n}$$

.
Ist die Folge konvergent? Bestimme gegebenenfalls den Grenzwert a.

Damit die Folge konvergent ist, muss sie sowohl monoton sein, als auch eine obere bzw. untere Grenze besitzen. Da alle Elemente in der Folge positiv sind, muss es sich - wenn vorhanden - um eine obere Grenze handeln.
Angenommen die Folge erfüllt beide Kriterien:

$$\begin{aligned} & a = \sqrt{1+a} && |^2 \\ \Leftrightarrow\quad & a^2 = 1 + a && | - 1 - a \end{aligned}$$

$$a_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} \Rightarrow a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vee a_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Da alle Elemente der Folge positiv sind ($a_n > 0$) folgt, dass unter den gegebenen Bedingungen der Grenzwert $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sein muss.
Induktion [Monotones Wachstum]:
IV: $a_{n+1} > a_n$
IA $n = 1$:

$$\begin{aligned} & a_{1+1} > a_1 \\ \Leftrightarrow\quad & \sqrt{1 + a_1} > a_1 \\ \Leftrightarrow\quad & \sqrt{2} > 1 \end{aligned}$$

IS $n \to n + 1$:

$$\begin{aligned} & a_{n+1+1} > a_{n+1} \\ \Leftrightarrow\quad & \sqrt{1 + a_{n+1}} > a_{n+1} \\ \Leftrightarrow\quad & \sqrt{1 + a_{n+1}} > \sqrt{1 + a_n} && |^2 \\ \Leftrightarrow\quad & 1 + a_{n+1} > 1 + a_n && | - 1 \\ \Leftrightarrow\quad & a_{n+1} > a_n \end{aligned}$$

Überprüfen des Grenzwerts als obere Grenze um die Annahme zu bestätigen:

IV: $a_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
IA $n = 1$: $1 < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
IS $n \to n+1$:

$$\begin{aligned}
& & a_{n+1} &< \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \\
\Leftrightarrow & & \sqrt{1+a_n} &< \frac{1+\sqrt{5}}{2} & |^2 \\
\Leftrightarrow & & 1+a_n &< \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4} & |-1 \\
\Leftrightarrow & & a_n &< \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4} - 1 & \\
\Leftrightarrow & & a_n &< \frac{(1+\sqrt{5})^2 - 4}{4} & \\
\Leftrightarrow & & a_n &< \frac{1+2\sqrt{5}+5-4}{4} & \\
\Leftrightarrow & & a_n &< \frac{2+2\sqrt{5}}{4} & \\
\Leftrightarrow & & a_n &< \frac{1+\sqrt{5}}{2} &
\end{aligned}$$

7.5 Bestimme jeweils die Folge der Partialsummen und den Grenzwert:

(a) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}$;

$$n = [2, \infty); (s_n)_n = \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} \right)_n$$

Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{k^2-1} = \frac{A}{k-1} + \frac{B}{k+1}$$
$$\Leftrightarrow \quad 1 = A(k+1) + B(k-1)$$

$$k \to 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$
$$k \to -1 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2(k-1)} - \frac{1}{2(k+1)}$$

$$\Rightarrow (s_n)_n = \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2(k-1)} - \frac{1}{2(k+1)}\right)_n$$
$$\lim_{n\to\infty} (s_n)_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{2(n+1)+2}$$

Teleskopsumme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2(n+1)+2} = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (s_n)_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$
$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1} = \frac{3}{4}$$

(b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(1+i)^k}{2^k}$.

$$n = [1, \infty); (s_n)_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(1+i)^k}{2^k}\right)_n$$

$$(s_n)_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(1+i)^k}{2^k} \right)_n - s_0$$
$$z = \frac{1+i}{2}$$
$$|z| = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = 0$$

Geometrische Reihe :

$$|z| < 1 : \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (s_n)_{n\geq 0} = \frac{2}{1-i} - 1$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (s_n)_{n\geq 0} = \frac{2+2i}{(1-i)(1+i)} - 1$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (s_n)_{n\geq 0} = i$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+i)^k}{2^k} = i$$

7.6 Untersuche folgende Reihen auf Konvergenz oder Divergenz:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$;
Quotientenkriterium:

$$\left| \frac{(n+1)^2}{2^(n+1)} \frac{2^n}{n^2} \right|$$
$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)^2}{n^2 \cdot 2}$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{\sqrt{2}n} \right)^2$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}n} \right)^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n}$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} < \infty$$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n^2})^n$;
Da

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1^n = \infty, \sum_{n=0}^{\infty} 1^n < \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n^2})^n$$

folgt aus Majorantenkriterium:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n^2})^n = \infty$$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n} \binom{3n}{n}$;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n} \binom{3n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n} \frac{(3n)!}{n!(2n)!}$$

Quotientenkriterium:

$$\begin{aligned} &\left| \frac{(3n+3)!}{7^{n+1}(n+1)!(2n+2)!} \frac{7^n n!(2n)!}{(3n)!} \right| \\ \Leftrightarrow &\left| \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)n!(2n)!(3n)!}{7(n+1)(2n+2)(2n+1)n!(2n)!(3n)!} \right| \\ \Leftrightarrow &\left| \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{7(n+1)(2n+2)(2n+1)} \right| \\ \Leftrightarrow &\left| \frac{27n^3 + 54n^2 + 33n + 6}{28n^3 + 70n^2 + 56n + 14} \right| \end{aligned}$$

Da $21n^3 + 54n^2 + 33n + 6 < 28n^3 + 70n^2 + 56n + 14 \Rightarrow \left| \frac{21n^3+54n^2+33n+6}{28n^3+70n^2+56n+14} \right| < 1$
Aus dem Quotientenkriterium folgt somit, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n} \binom{3n}{n}$ konvergiert.

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
Leipnitz-Kriterium für alternierende Reihen:
da $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ (momoton fallend) ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ ist kovergent}$$