Fachbereich 3 – Mathematik
PD Dr. H. Vogt

Übungsblatt 2
31. 10. 2021

Höhere Mathematik 1

Präsenzaufgaben für die Übungen vom 2. bis 5. 11. 2021 (bitte vorbereiten und Aufgabenstellungen so weit wie möglich verstehen)

2.1. Bestimme die reellen Lösungen der Gleichung

$$|x^2 + 3x - 4| = 2x + 2.$$

2.2. Bestimme sämtliche reellen Lösungen der Ungleichungen

(a) $\sqrt{x-1} > 2x - 5$,

(b) $\dfrac{x+4}{x-2} < \dfrac{2}{x+1}$.

2.3. Zeige durch vollständige Induktion:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ durch 133 teilbar.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 4$ gilt $n^2 \leqslant 2^n$.

2.4. Ermittle jeweils Real- und Imaginärteil sowie Betrag der folgenden komplexen Zahlen:

(a) $\dfrac{2}{1-\sqrt{3}i}$, (b) $(1-i)^4$, (c) $\dfrac{1}{1+i} + \dfrac{2}{1-i}$.

Bitte wenden

Hausaufgaben (Abgabe bis 11. 11. 2021 **vor** der Vorlesung)

2.5. Bestimme die reellen Lösungen der Gleichungen

(a) $\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} = \sqrt{2x-12}\,,$

(b) $|x-3| + |x+2| - |x-4| = 3.$

2.6. Bestimme sämtliche reellen Lösungen der Ungleichungen

(a) $\frac{2}{x+1} < \frac{1}{x-3}\,,$

(b) $(x+2)(4-x)(x-2)^2 > 0.$

2.7. Beweise durch Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2.$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (wobei $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$).

(c) $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ ist durch 11 teilbar.

2.8. (a) Berechne $|5+12i|$.

(b) Berechne $\sum_{k=2}^{4} (2i)^k$.

(c) Bestimme Real- und Imaginärteil von $\dfrac{1+i\sqrt{2}}{1-i\sqrt{2}} + \dfrac{1-i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{2}}\,.$

(d) Bestimme Real- und Imaginärteil von $\dfrac{1+i^{15}}{2-i^{21}}\,.$