Übung 11

11.3 (a) Gib Polardarstellungen der komplexen Zahlen $1+i$ und $\sqrt{3}-i$ an.

$$1+i=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\Leftarrow\arctan\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{\pi}{4}$$

$$\sqrt{3}-i=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\Leftarrow-\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{\pi}{6}$$

(b) Sei $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ und $x=\tan\varphi$. Zeige $\frac{1+ix}{1-ix}=\exp(2i\varphi)$.

$$x=\tan\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\frac{1+ix}{1-ix}\\
&=\frac{1+i\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}{1-i\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}\\
&=\frac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{\cos\varphi-i\sin\varphi}\\
&=\frac{(\cos\varphi+i\sin\varphi)(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}\\
&=\frac{e^{i\varphi}\cdot e^{i\varphi}}{1}=e^{2i\varphi}\\
&=\exp(2i\varphi)
\end{aligned}$$

11.4 Berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen (auf dem jeweils sinnvollen Definitionsbereich):

$$f_1(x)=\sin(\cos x)$$

Produktregel:

$$\frac{d}{dx}\sin(\cos x)=-\cos(\cos x)\cdot\sin x$$

$$f_2(x)=\frac{1-\sin x}{2+\sin x}$$

Quotientenregel:

$$\frac{d}{dx}\frac{1-\sin x}{2+\sin x}=\frac{-\cos(x)\cdot(2+\sin(x))-\cos(x)\cdot(1-\sin(x))}{(2+\sin(x))^2}=\frac{-3\cos(x)}{(2+\sin(x))^2}$$

$$f_3(x) = x \cdot |x|$$

$$\frac{d}{dx}|x| = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Produktregel:

$$\frac{d}{dx} x \cdot |x| = |x| + x \cdot \frac{d}{dx}|x| = |x| + |x| = 2|x|$$

$$f_4(x) = x^{x^x}$$

Produktregel, Kettenregel:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx} x^{x^x} \\
=&\frac{d}{dx} e^{x^x \cdot \ln(x)} \\
=&e^{x^x \cdot \ln(x)} \cdot \frac{d}{dx}\left(x^x \cdot \ln(x)\right) \\
=&e^{x^x \cdot \ln(x)} \cdot \left(x^x \cdot \frac{1}{x} + \left(\frac{d}{dx} e^{x \ln(x)}\right) \cdot \ln(x)\right) \\
=&e^{x^x \cdot \ln(x)} \cdot \left(x^x \cdot \frac{1}{x} + e^{x \ln(x)} \cdot \left(\frac{d}{dx} x \ln(x)\right) \cdot \ln(x)\right) \\
=&e^{x^x \cdot \ln(x)} \cdot \left(x^x \cdot \frac{1}{x} + e^{x \ln(x)} \cdot \left(\ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right) \cdot \ln(x)\right) \\
=&e^{x^x \cdot \ln(x)} \cdot \left(x^x \cdot \frac{1}{x} + e^{x \ln(x)} \cdot (\ln(x) + 1) \cdot \ln(x)\right) \\
=&x^{x^x} \cdot (x^{x-1} + x^x \cdot (\ln^2(x) + \ln(x))) \\
=&x^{x^x} \cdot (x^{x-1} + x^{x-1} x \cdot (\ln^2(x) + \ln(x))) \\
=&x^{x^x} \cdot x^{x-1}(1 + x \cdot (\ln^2(x) + \ln(x))) \\
=&x^{x^x + x - 1}(1 + x \ln^2(x) + x \ln(x)))
\end{aligned}$$

11.5 (a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sein in $a \in \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeige, dass dann der Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ existiert, und berechne ihn.

Da sich $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ für $h \to 0$ einem festen Wert annähert, muss $\frac{d}{dh}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = 0$ sein.

$$\Rightarrow \frac{d}{dh}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = 0 \qquad |\text{Quotientenreg.}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2h\left(\frac{d}{dh}f(a+h) - \frac{d}{dh}f(a-h)\right) - 2(f(a+h)-f(a-h))}{4h^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{d}{dh}f(a+h) - \frac{d}{dh}f(a-h)}{2h} - \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{d}{dh}f(a+h) - \frac{d}{dh}f(a-h)}{2h} = \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h^2} \qquad | \cdot 2h$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dh}f(a+h) - \frac{d}{dh}f(a-h) = \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \tfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} \tfrac{d}{dh}f(a+h) - \tfrac{d}{dh}f(a-h) = f'(a) - f'(a) = 0$$

(b) Folgt aus der Existenz des Grenzwertes in (a) die Differenzierbarkeit von f in a?

Nein. Die Existenz eines Grenzwertes lässt keinen Schluss über die Differenzierbarkeit in diesem Punkt zu. Beispiel:

$$\lim_{x\to 0+} |x| = \lim_{x\to 0-} |x| = 0$$

aber

$$\lim_{x\to 0+} \frac{d}{dx}|x| = 1 \neq -1 = \lim_{x\to 0-} \frac{d}{dx}|x|$$

11.6 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $n \in \mathbb{N}$. Seien $g, h : I \to \mathbb{R}$ Funktionen, die n-mal differenzierbar in $x \in I$ sind. Dann kann man durch vollständige Induktion die *Leibniz-Regel* zeigen.

$$(g \cdot h)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x) \cdot h^{(n-k)}(x)$$

(a) Berechne $f^{(1000)}(x)$ für $f(x) = x^2 \cdot e^x$

$$g(x) = x^2, h(x) = e^x, n = 1000$$

$$\Rightarrow f^{(1000)}(x) = \sum_{k=0}^{1} 000 \binom{1000}{k} (x^2)^{(k)}(x) \cdot (e^x)^{(1000-k)}(x)$$