Übung 4

4.2 Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine *schiefsymmetrische* Matrix, d.h. $A^T = -A$. Zeige, dass A nicht invertierbar ist. Gilt dies auch für gerade n? Gib einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

$$A^T = -A$$

$$\Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & -a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow a_{jk} = -a_{kj}$
$\Rightarrow (m \in \mathbb{N}; m \leq n) : a_{mm} = -a_{mm} \Rightarrow a_{mm} = 0$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{n1} \\ -a_{12} & 0 & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Für n ungerade:

Für n gerade (Gegenbeispiel):

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

4.3 (a) Berechne

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix}$$

(b) Finde Matrizen A, B, so dass $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

4.4 Berechne die *Vandermonde-Determinante*

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

für $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$.

4.5 Berechne das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und Eigenvektoren von

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

A:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) =& \det(A - \lambda E) \\ =& \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ =& - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} + (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} =& -2 + 2\lambda - 6 + (2-\lambda)((2-\lambda)(1-\lambda) - 6) + 4 - 2\lambda + 4 \\ =& -4\lambda + (-4-\lambda)(2 - 3\lambda + \lambda^2) \\ =& -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 2\lambda - 8 \\ \Rightarrow \lambda_1 =& -1, \\ \lambda_2 =& 2, \\ \lambda_3 =& 4 \end{aligned}$$

$$\operatorname{Eig}(A, \lambda_1) := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gauß-Algorithmus:

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \operatorname{Eig}(A, \lambda_1) =& \operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\operatorname{Eig}(A, \lambda_2) := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gauß-Algorithmus:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Eig}(A, \lambda_1) = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Eig}(A, \lambda_3) \coloneqq \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gauß-Algorithmus:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Eig}(A, \lambda_1) = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \text{Eig}(A, \lambda) = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$