# Übung Präsenz 1

1.1 Berechne das Taylor-Polynom von $f = \exp$ vom Grad 3 um den Entwicklungspunkt $a = 2$

$$\text{Taylor-Polynom: } \sum_{n=0}^{g} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow g = 3, a = 2 : \sum_{n=0}^{3} \frac{e^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n \\
=& e^2 \sum_{n=0}^{3} \frac{(x-2)^n}{n!} \\
=& \frac{1}{6}e^2(x-2)^3 + \frac{1}{2}e^2(x-2)^2 + e^2(x-2)^1 + e^2
\end{aligned}$$

1.2 Eine Rakete soll ins Weltall fliegen! Hat die Rakete eine Ruhemasse $m_0$ und Geschwindigkeit $v$, so ist ihre *relativistische Energie* gegeben durch

$$E_{rel} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}},$$

wobei $c$ die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist. Mit $f : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}, f(x) := \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ gilt $E_{rel} = m_0 c^2 f((\frac{v}{c})^2)$.

(a) Berechne das Taylor-Polynom von $f$ vom Grad 1 um den Entwicklungspunkt $a = 0$. Welche Näherung für $E_{rel}$ erhält man daraus? Gib die physikalische Interpretation der auftretenden Terme an.

$$\text{Taylor-Polynom: } \sum_{n=0}^{g} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow g = 1, a = 0 : \sum_{n=0}^{1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\
=& \frac{1}{\sqrt{1-0}} + \frac{d}{da}\left(\frac{1}{\sqrt{1-a}}\right)x \\
=& 1 + \frac{-\frac{d}{da}\sqrt{1-a}}{1-0}x \\
=& 1 - \frac{1}{2}(1-0)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{da}(1-a)x \\
=& 1 + \frac{1}{2}x
\end{aligned}$$

$\Rightarrow E_{rel} \approx m_0 c^2(1 + \frac{1}{2}(\frac{v}{c})^2) \Rightarrow E_{rel0} \xrightarrow{v \to c} \frac{3}{2}E_{rel0} \Rightarrow$ Die maximale *relativistische Energie* beträgt in dieser Näherung 150% der Ruheenergie.

# Übung Präsenz 1

(b) Gib das Lagrange'sche Restglied $R_1(x)$ für den Entwicklungspunkt $a = 0$ an. Wie gut ist die Näherung aus Teil (a) im Fall $m_0 = 15000kg$ und $v = 11\frac{km}{s}$?

$$\text{Lagrange-Restglied: } R_g(x) = \frac{f^{(g+1)}(\xi)}{(g+1)!}(x-a)^{g+1}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow g = 1, a = 0 :& \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!} x^2; \xi \in (-\infty, 1] \\
=& \frac{\frac{d}{dx}\frac{-\frac{1}{2}(1-\xi)^{-\frac{1}{2}}}{1-\xi}}{2} x^2 \\
=& \frac{\frac{d}{dx} - \frac{(1-\xi)^{-\frac{1}{2}}}{2(1-\xi)}}{2} x^2 \\
=& \frac{\frac{d}{dx} - \frac{1}{2(1-\xi)^{\frac{3}{2}}}}{2} x^2 \\
=& \frac{\frac{\frac{d}{dx}2(1-\xi)^{\frac{3}{2}}}{4(1-\xi)^{\frac{6}{2}}}}{2} x^2 \\
=& \frac{\frac{3(1-\xi)^{\frac{1}{2}}}{4(1-\xi)^{\frac{6}{2}}}}{2} x^2 \\
=& \frac{3}{8(1-\xi)^{\frac{5}{2}}} x^2 \\
\Rightarrow R_1(x) =& \frac{1}{8}(1-\xi)^{-\frac{3}{2}} x^2
\end{aligned}$$

$$\max \frac{1}{8}(1-\xi)^{-\frac{3}{2}}x^2 = \frac{1}{8}x^2 \max\left(\frac{1}{\sqrt{1-\xi}}\right)^3 = \frac{1}{8}x^2 \max\left(\frac{1}{\sqrt{1-\xi}}\right)$$