

7.3 Untersuche folgende rekursiv definierte Folgen auf Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz. berechne gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $a_1 := 1, a_{n+1} := \frac{1}{4}a_n - \frac{1}{2}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Durch Betrachtung der Folgenglieder:

$$\{1, -0.25, -0.5625, -0.640625, \dots\}$$

scheint es als würde diese Folge monoton fallen und bei $-\frac{2}{3}$ unten beschränkt sein.

Durch Betrachtung der Folgendefinition fällt auf das die Folge bei positiven und leicht negativen a_n immer fällt aber bei größeren negativen a_n steigt, der Wert bei dem sich das Verhalten ändert ist ungefähr $-\frac{2}{3}$.

Damit ist die letzte Möglichkeit für diese Folge zu divergieren wenn sie in eine stabile Oszillation verfällt.

Aber da $\frac{1}{4}a_{n+1} - \frac{1}{2} = a_n$
muss a konvergent sein.

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_n \rightarrow a, a_{n+1} \rightarrow a \\ \Rightarrow \frac{1}{4}a - \frac{1}{2} = a \quad \quad \quad | -\frac{1}{4}a \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow a(1 - \frac{1}{4}) = -\frac{1}{2} \quad \quad \quad | \div (1 - \frac{1}{4})$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{2}{3}$$

Also konvergiert a nach $-\frac{2}{3}$

(b) $a_1 := 2, a_{n+1} := \frac{1}{a_n}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Wenn man sich die Folgenglieder dieser Folge anschaut:

$$\{2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, \dots\}$$

sieht man, dass diese Folge zwischen den Werten 2 und $\frac{1}{2}$ oszilliert.

Damit ist klar das sie divergent ist und die folgenden maximal Werte hat

$$\begin{aligned} \max a &= 2 \\ \min a &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

7.4 Die Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch

$$a_1 := 1, a_{n+1} := \sqrt{1 + a_n}$$

Ist die Folge konvergent? Bestimme gegebenenfalls den Grenzwert a .

Damit die Folge konvergent ist, muss sie sowohl monoton sein, als auch eine obere bzw. untere Grenze besitzen. Da alle Elemente in der Folge positiv sind, muss es sich - wenn vorhanden - um eine obere Grenze handeln.
Angenommen die Folge erfüllt beide Kriterien:

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} a = \sqrt{1 + a} \\ a^2 = 1 + a \end{array} \quad \begin{array}{l} |^2 \\ | - 1 - a \end{array}$$

$$a_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} \Rightarrow a_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \vee a_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Da alle Elemente der Folge positiv sind ($a_n > 0$) folgt, dass unter den gegebenen Bedingungen der Grenzwert $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sein muss.

Induktion [Monotones Wachstum]:

IV: $a_{n+1} > a_n$

IA $n = 1$:

$$\begin{array}{l} \Leftrightarrow a_{1+1} > a_1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{1 + a_1} > a_1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{2} > 1 \end{array}$$

IS $n \rightarrow n + 1$:

$$\begin{array}{l} \Leftrightarrow a_{n+1+1} > a_{n+1} \\ \Leftrightarrow \sqrt{1 + a_{n+1}} > a_{n+1} \\ \Leftrightarrow \sqrt{1 + a_{n+1}} > \sqrt{1 + a_n} \quad |^2 \\ \Leftrightarrow 1 + a_{n+1} > 1 + a_n \quad | - 1 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} > a_n \end{array}$$

Überprüfen des Grenzwerts als obere Grenze um die Annahme zu bestätigen:

IV: $a_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

IA $n = 1$: $1 < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

IS $n \rightarrow n + 1$:

$$\begin{aligned}
 & a_{n+1} < \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\
 \Leftrightarrow & \sqrt{1 + a_n} < \frac{1 + \sqrt{5}}{2} & |^2 \\
 \Leftrightarrow & 1 + a_n < \frac{(1 + \sqrt{5})^2}{4} & | - 1 \\
 \Leftrightarrow & a_n < \frac{(1 + \sqrt{5})^2}{4} - 1 \\
 \Leftrightarrow & a_n < \frac{(1 + \sqrt{5})^2 - 4}{4} \\
 \Leftrightarrow & a_n < \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5 - 4}{4} \\
 \Leftrightarrow & a_n < \frac{2 + 2\sqrt{5}}{4} \\
 \Leftrightarrow & a_n < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}
 \end{aligned}$$

7.5 Bestimme jeweils die Folge der Partialsummen und den Grenzwert:

(a) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}$;

$$n = [2, \infty); (s_n)_n = \left(\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2-1} \right)_n$$

Partialbruchzerlegung

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} \frac{1}{k^2-1} &= \frac{A}{k-1} + \frac{B}{k+1} \\ 1 &= A(k+1) + B(k-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k \rightarrow 1 &\Rightarrow A = \frac{1}{2} \\ k \rightarrow -1 &\Rightarrow B = -\frac{1}{2} \\ \Rightarrow \frac{1}{k^2-1} &= \frac{1}{2(k-1)} - \frac{1}{2(k+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (s_n)_n &= \left(\sum_{k=2}^n \frac{1}{2(k-1)} - \frac{1}{2(k+1)} \right)_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n)_n &= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{2(n+1)+2} \end{aligned}$$

Teleskopsumme

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n+1)+2} &= 0 \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n)_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ \Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1} &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+i)^k}{2^k}.$

$$n = [1, \infty); (s_n)_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{(1+i)^k}{2^k} \right)_n$$

$$(s_n)_n = \left(\sum_{k=0}^n \frac{(1+i)^k}{2^k} \right)_n - s_0$$

$$z = \frac{1+i}{2}$$

$$|z| = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = 0$$

Geometrische Reihe :

$$|z| < 1 : \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n)_{n \geq 0} = \frac{2}{1-i} - 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n)_{n \geq 0} = \frac{2+2i}{(1-i)(1+i)} - 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n)_{n \geq 0} = i$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+i)^k}{2^k} = i$$

7.6 Untersuche folgende Reihen auf Konvergenz oder Divergenz:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n};$

Quotientenkriterium:

$$\left| \frac{(n+1)^2 2^n}{2^{(n+1)} n^2} \right|$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)^2}{n^2 \cdot 2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{\sqrt{2}n} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}n} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} < \infty$$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n;$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n} \binom{3n}{n};$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n} \binom{3n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n} \frac{(3n)!}{n!(2n)!}$$

Quotientenkriterium:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(3n+3)!}{7^{n+1}(n+1)!(2n+2)!} \frac{7^n n!(2n)!}{(3n)!} \right| \\ \Leftrightarrow & \left| \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)n!(2n)!(3n)!}{7(n+1)(2n+2)(2n+1)n!(2n)!(3n)!} \right| \\ \Leftrightarrow & \left| \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{7(n+1)(2n+2)(2n+1)} \right| \\ \Leftrightarrow & \left| \frac{21n^3 + 54n^2 + 33n + 6}{28n^3 + 70n^2 + 56n + 14} \right| \end{aligned}$$

$$\text{Da } 21n^3 + 54n^2 + 33n + 6 < 28n^3 + 70n^2 + 56n + 14 \Rightarrow \left| \frac{21n^3 + 54n^2 + 33n + 6}{28n^3 + 70n^2 + 56n + 14} \right| < 1$$

Aus dem Quotientenkriterium folgt somit, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n} \binom{3n}{n}$ konvergiert.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

Leipnitz-Kriterium für alternierende Reihen:

da $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ (monoton fallend) ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ ist konvergent}$$