Fachbereich 3 – Mathematik
PD Dr. H. Vogt

Übungsblatt 5
20. 5. 2022

Höhere Mathematik 2

Präsenzaufgaben für die Übungen vom 23. bis 25. 5. 2022 (bitte vorbereiten und Aufgabenstellungen so weit wie möglich verstehen)

5.1. Seien $a = \left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Bestimme eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass $Ax = a \times x$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$. Bestimme die Eigenwerte von A und Eigenvektoren zu den reellen Eigenwerten. Ist A diagonalisierbar?

Hausaufgaben (Abgabe bis 2. 6. 2022 **vor** der Vorlesung)

5.2. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} -1-3i & 2+i & -1-2i \\ 0 & 2 & 0 \\ 2+4i & -2-i & 2+3i \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Eigenwerte von A samt ihrer algebraischen und geometrischen Vielfachheiten, sowie die zugehörigen Eigenräume.

5.3. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $v \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ.

(a) Zeige, dass v auch Eigenvektor von A^2 ist. Zu welchem Eigenwert?

(b) Zeige, dass v Eigenvektor von A^{-1} ist, wenn A invertierbar ist. Zu welchem Eigenwert?

(c) Wenn $A^2 = E_n$ ist, wieso ist dann mindestens eine der Zahlen ± 1 Eigenwert von A? Wieso gibt es keine anderen Eigenwerte?

(d) Haben A und A^T dieselben Eigenwerte?

5.4. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechne die Eigenwerte von A samt ihrer algebraischen und geometrischen Vielfachheiten. Ist die Matrix A diagonalisierbar?

Bitte wenden

5.5. *Die Fibonacci-Folge.* Leonardo von Pisa (12./13. Jh.) – genannt Fibonacci – stellt in seinem Buch „Liber Abaci“ aus dem Jahr 1202 die folgende „Kaninchenaufgabe“:

Jemand brachte ein Kaninchenpaar in einen gewissen, allseits von Wänden umgebenen Ort, um herauszufinden, wieviel [Paare] aus diesem Paar in einem neuen Jahr entstehen würden. Es sei die Natur der Kaninchen, pro Monat ein neues Paar hervorzubringen und im zweiten Monat nach der Geburt [erstmals] zu gebären. [Todesfälle mögen nicht eintreten.]

Die Anzahl der Kaninchenpaare im n-ten Monat ist somit durch die rekursiv definierte Folge

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

mit den Startwerten $x_0 = 1$ und $x_1 = 1$, gegeben. Diese Folge wird *Fibonacci-Folge* genannt.

(a) Gib eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ an, so dass

$$A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ ist.}$$

(b) Zeige, dass A diagonalisierbar ist und bestimme eine invertierbare Matrix T mit $T^{-1}AT = D$, wobei D eine Diagonalmatrix ist.

(c) Finde eine explizite (d. h. nicht rekursive) Formel für das Folgenglied x_n, für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.
Hinweis: $A^n = T(T^{-1}AT)^n T^{-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.