

9.2 In den vier Ecken einer quadratischen Schachtel der Seitenlänge 2 sitzen vier Ameisen, von denen jede in die jeweils im Gegen-Uhrzeigersinn nächste verliebt ist, und daher zu ihr gelangen möchte. Die Ameisen laufen gleichzeitig mit konstanter Geschwindigkeit los, und zwar jeweils auf die von ihr Geliebte zu.

- (a) Stelle ein lineares System von Differentialgleichungen für die Bahn der Ameisen auf.

Position der Ameise 1:

$$A_1 = (x_{11}, x_{12})$$

Geschwindigkeit der Ameise 1:

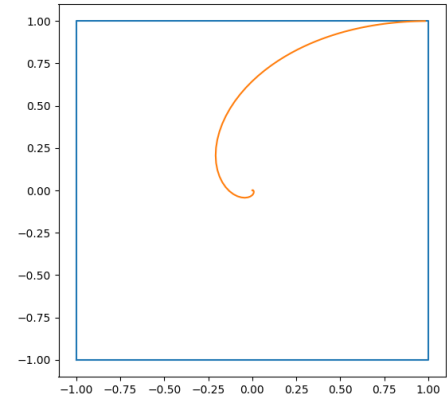
$$\begin{aligned} v_1 &= A_2 - A_1 \\ \Leftrightarrow v_1 &= \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} \\ A_2 = A_1 \text{ um } 90^\circ \text{ rotiert} &\Rightarrow \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_{12} \\ x_{11} \end{pmatrix} : \\ \Rightarrow v_1 &= \begin{pmatrix} -x_{11} - x_{12} \\ x_{11} - x_{12} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow y &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} y \end{aligned}$$

- (b) Bestimme die Bahnkurve der bei  $(1, 1)$  startenden Ameise.

Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow P_\lambda(A) &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1-\lambda)^2 + 1 \\ \Leftrightarrow \lambda &= \pm i - 1 \\ \Rightarrow \lambda_1 &= -1 - i, \\ \lambda_2 &= -1 + i \\ v_1 \Leftarrow 0 &= \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix}_+^i \\ \Leftrightarrow 0 &= \begin{pmatrix} i & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow v_1 &= \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \\ v_2 \Leftarrow 0 &= \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix}_+^{(-i)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad 0 &= \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \quad v_2 &= \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \quad y^1 &= e^{-(1+i)t} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, \\
y^2 &= e^{(-1+i)t} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \quad y &= y^1 c_1 + y^2 c_2
\end{aligned}$$



Anfangswert  $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  einsetzen:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} c_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix} c &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix} (-i) \\
\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -i & i \\ 0 & 2 \end{pmatrix} c &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \quad c_2 &= \frac{1}{2}(1-i) \\
\Rightarrow \quad c_1 &= \frac{1}{2}(1+i) \\
\Rightarrow \quad y &= \frac{1}{2} \left( (1+i)e^{-(1+i)t} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} + (1-i)e^{(-1+i)t} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

### 9.3 Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 3y_1 + 8y_2, & y_1(0) = 6, \\ \dot{y}_2 = y_1 + y_2 + 4e^t, & y_2(0) = 2. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{y} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} y + e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Das homogene System lösen:

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} y$$

Eigenwerte und Eigenvektoren von  $A$  berechnen:

$$P_\lambda(A) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 8 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow &= (3 - \lambda)(1 - \lambda) - 8 \\ \Leftrightarrow &0 = \lambda^2 - 4\lambda + 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow &\lambda = 2 \pm 3 \\ \Rightarrow &\lambda_1 = -1, \\ &\lambda_2 = 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_1 \Leftarrow &0 = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \cdot (-\frac{1}{2}) \\ \leftarrow + \end{array} \\ \Leftrightarrow &0 = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow &v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_2 \Leftarrow &0 = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \cdot \frac{1}{2} \\ \leftarrow + \end{array} \\ \Leftrightarrow &0 = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow &v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Lösungsbasis der homogenen Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}\Rightarrow &y^1(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \Leftrightarrow &y^2(t) = e^{5t} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Eine spezielle Lösung finden:

$$\begin{aligned}\text{(I)} &y(t) = e^t w && | \text{ ableiten} \\ \Rightarrow &\dot{y}(t) = e^t w \\ \Rightarrow &e^t w \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} y + e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

I einsetzen und kürzen:

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow &w = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} && | - \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} w \\ \Leftrightarrow &\begin{pmatrix} -2 & -8 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} w = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow &w = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow y^3 = e^t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y = y^1 c_1 + y^2 c_2 + y^3$$

Bedingung  $y(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$  einsetzen:

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow c = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y(t) = -e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2e^{5t} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

9.4 Bestimme eine Lösungsbasis der *Bessel'schen Differentialgleichung der Ordnung*  $p = \frac{1}{2}$ ,

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)y = 0$$

,  
durch die Substitution  $z = y \cdot \sqrt{x}$ .

$$\Leftrightarrow y = zx^{-\frac{1}{2}}$$
$$\Leftrightarrow y' = z'x^{-\frac{1}{2}} - \frac{z}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$
$$\Leftrightarrow y'' = z''x^{-\frac{1}{2}} - z'x^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}zx^{-\frac{5}{2}}$$

Einsetzen in (1)

$$\Rightarrow z''x^{-\frac{1}{2}} - z'x^{-\frac{3}{2}} + z'x^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}zx^{-\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}zx^{-\frac{5}{2}} - \frac{1}{4}zx^{-\frac{5}{2}} + zx^{-\frac{1}{2}} = 0$$
$$\Leftrightarrow z'' + z = 0$$

$$\Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0$$
$$\Rightarrow \lambda = \pm i$$
$$\Rightarrow z = c_1 \cos + c_2 \sin$$
$$\Rightarrow y = \frac{c_1 \cos + c_2 \sin}{\sqrt{x}}$$

9.5 Betrachtet wird die Differentialgleichung

$$(1): y''' - 3y' + 2y = 9e^x$$

- (a) Bestimme eine Lösungsbasis für die zugehörige homogene Differentialgleichung.

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^3 - 3\lambda + 2 \\ \Rightarrow 0 &= (\lambda - 1)^2(\lambda + 2) \end{aligned}$$

Lösung raten mit Hilfe vom Satz über rationale Nullstellen

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda_1 &= 1 \\ \Leftrightarrow 0 &= \lambda^3 - 3\lambda + 2 \quad | (\lambda - 1) \\ \Leftrightarrow 0 &= \lambda^2 + \lambda - 2 \\ \Leftrightarrow 0 &= (\lambda - 1)(\lambda + 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda_1 &= 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2 \\ \Rightarrow y_H &= c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{-2} \end{aligned}$$

- (b) Finde eine spezielle Lösung durch den Ansatz
- $y(x) = cx^2 e^x$
- .

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_p &= cx^2 e^x \\ \Rightarrow y_p' &= ce^x(2x + x^2) \\ \Rightarrow y_p'' &= ce^x(x^2 + 4x + 2) \\ \Rightarrow y_p''' &= ce^x(x^2 + 6x + 6) \\ \Rightarrow y_p &= ce^x(x^2 + 6x + 6 - 6x - 3x^2 + 2x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow y_p &= 6ce^x \stackrel{!}{=} 9e^x \\ \Rightarrow c &= \frac{3}{2} \\ \Rightarrow y_p &= \frac{3}{2}x^2 e^x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{-2} + \frac{3}{2}x^2 e^x$$

- (c) Löse das Anfangswertproblem zum Anfangswert

$$y(0) = -1, \quad y'(0) = -8, \quad y''(0) = 6$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y(0) &= c_1 + c_3 = -1 \\ \Rightarrow y'(0) &= c_1 + c_2 - 2c_3 = -8 \\ \Rightarrow y''(0) &= c_1 + 2c_2 + 4c_3 = 3 \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} c &= \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} c &= \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow y &= e^x(-3 - x + \frac{3}{2}x^2) + 2e^{-2x} \end{aligned}$$