4.2 Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine *schiefsymmetrische* Matrix, d.h. $A^T = -A$. Zeige, dass A nicht invertierbar ist. Gilt dies auch für gerade n? Gib einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

A invertierbar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ Für n ungerade:

$$\det(A) = \det(A^T) = \det(-A)$$

Aus jeder Zeile von $-A$ wird der Faktor -1 gezogen:

$$\det(A) = (-1)^n \det(A)$$

Für ungerade n folgt: $\det(A) = -\det(A)$.
$\Rightarrow \det(A) = 0$
$\Rightarrow A$ nicht invertierbar für ungerade n

Für n gerade (Gegenbeispiel):

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$\Rightarrow$ invertierbar.

4.3 (a) Berechne

$$A \coloneqq \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix}$$

$$C^{(m,n)} \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{m}{n} & \frac{m+1}{n} & \dots & \frac{n}{n} \end{pmatrix}, a \coloneqq n-m+1; a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}; C^{(m,n)} \in \mathbb{C}^{a \times a}$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} \cdot \det(C^{(1,n)}) \\ &= n! \cdot \det(C^{(1,n)}) \end{aligned}$$

Entwickeln der 1. Spalte von C ergibt:

$$\det(C^{(m,n)}) = (-1)^{n+1}\frac{m}{n} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \det(C^{(m+1,n)})$$

Entwickeln der 1. Zeile ergibt:

$$\begin{aligned} &= (-1)^{a+1}\frac{m}{n}(-1)^a \det(E_{a-2}) + \det(C^{(m+1,n)}) \\ &= -\frac{m}{n} + \det(C^{(m+1,n)}) \\ &= -\frac{m}{n} - \frac{m+1}{n} - \dots - \frac{n-1}{n} + \left|\tfrac{n}{n}\right| \\ &= -\frac{\sum\limits_{k=m}^{n-1} k}{n} + 1 \\ &= -\frac{n(n-1) - m(m-1)}{n} + 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \det(C^{(1,n)}) = \frac{3-n}{2}$$

$\Rightarrow \det(A) = n!\frac{3-n}{2}$

(b) Finde Matrizen A, B, so dass $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

$$
\begin{aligned}
A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, B &= \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \\
\det(A+B) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} &= 24 \\
\det(A) + \det(B) = 2 + 12 &= 14
\end{aligned}
$$

4.4 Berechne die *Vandermonde-Determinante*

$$
det(V^{(n,n)}) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}
$$

Subtraktion von jeder Spalte ab der zweiten, mit der vorherigen multipliziert mit x_n:

$$
\det(V^{(n,n)}) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 - x_n & x_1^2 - x_1 x_n & \dots & x_1^{n-1} - x_1^{n-2} x_n \\ 1 & x_2 - x_n & x_2^2 - x_2 x_n & \dots & x_2^{n-1} - x_2^{n-2} x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n - x_n & x_n^2 - x_n x_n & \dots & x_n^{n-1} - x_n^{n-2} x_n \end{vmatrix}
$$

Entwickeln nach n-ten Zeile:

$$
\Leftrightarrow \quad \det(V^{(n,n)}) = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} x_1 - x_n & (x_1 - x_n)x_1 & \dots & (x_1 - x_n)x_1^{n-2} \\ x_2 - x_n & (x_2 - x_n)x_2 & \dots & (x_2 - x_n)x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} - x_n & (x_{n-1} - x_n)x_{n-1} & \dots & (x_{n-1} - x_n)x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}
$$

$$
\Leftrightarrow \quad \det(V^{(n,n)}) = (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^{n-1} (x_i - x_n) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-2} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}
$$

$$
\Leftrightarrow \quad \det(V^{(n,n)}) = (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^{n-1} (x_i - x_n) \det(V^{(n-1,n-1)})
$$

mit $\det(V^{(1,1)}) = 1$

Übung 4

4.5 Berechne das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und Eigenvektoren von

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

A:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda E) \\ &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} + (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -2 + 2\lambda - 6 + (2-\lambda)((2-\lambda)(1-\lambda) - 6) + 4 - 2\lambda + 4 \\ &= -4\lambda + (-4-\lambda)(2 - 3\lambda + \lambda^2) \\ &= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 2\lambda - 8 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4$$

$$\mathrm{Eig}(A, \lambda) \coloneqq (A - \lambda E_n)x = 0$$

$\mathrm{Eig}(A, \lambda_1)$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Eig}(A, \lambda_2)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Eig}(A, \lambda_3)$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gauß-Algorithmus:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \Rightarrow \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \qquad \Rightarrow \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Eig}(A, \lambda) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

B:

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= \det(B - \lambda E) \\ &= \begin{vmatrix} -5-\lambda & 0 & 7 \\ 6 & 2-\lambda & -6 \\ -4 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda) \begin{vmatrix} -5-\lambda & 7 \\ -4 & 6-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-2)(-\lambda^2+\lambda+2) \\ \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 &= 2, \\ \lambda_3 &= -1 \end{aligned}$$

$$\mathrm{Eig}(B, \lambda) \coloneqq (B - \lambda E_n)x = 0$$

$\mathrm{Eig}(B, \lambda_1) = \mathrm{Eig}(B, \lambda_2)$:

$$\begin{pmatrix} -7 & 0 & 7 \\ 6 & 0 & -6 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\mathrm{Eig}(B, \lambda_3)$:

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & -6 \\ -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Eig}(B, \lambda) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$