Übung 11

11.3 (a) Sei $D \coloneqq \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x \neq 0\}$. Bestimme den Gradienten Δf der Function $f : D \to \mathbb{R}, f(x,y,z) \coloneqq y\sin(xz^2) + \frac{x\cos(y)}{y}$.

$$\Delta f = \begin{pmatrix} y\cos(xz^2)z^2 + \frac{\cos(y)}{y} \\ \sin(xz^2) - x(\frac{\sin(y)}{y} + \frac{\cos(y)}{y^2}) \\ y\cos(2xz) \end{pmatrix}$$

(b) Entscheide, ob es partiell differenzierbare Funktionen auf R^2 bzw. R^3 gibt mit

$$\Delta f(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ -x+y \end{pmatrix} \quad \text{bzw. } \Delta f(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$$

Bestimme gegebenenfalls ein solches f.

$$\begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} + yx \\ -xy + \frac{y^2}{2} \end{pmatrix} \quad , f = \begin{pmatrix} xyz \\ xyz \\ xyz \end{pmatrix}$$

Für f im R^2 gibt es verschiedene Stamfunktionen die notwendig wären für die gegebenen Zeilen von Δf. Für f im R^3 gibt es eine Stamfunktion für die Δf den gegebenen Vektor animmt.

11.4 Sei $c > 0$, und $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien zweimal stetig differenzierbar. Zeige: Die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u(t,x) \coloneqq f(x+ct) + g(x-ct)$ ist eine Lösung der *Wellengleichung*

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,x) = c^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2}u &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}f(x+ct)c^2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2}g(x-ct)c^2 \\ c^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}u1 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x+ct) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}g(x-ct) \end{aligned}$$

11.5 Bestimme Lage und Art der lokalen Extrema folgender Funktionen:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) \coloneqq xy^2 - 4xy + x^4$

Kandidaten finden:

$$\begin{aligned} \nabla f &= \begin{pmatrix} y^2 + 4x + 4x^3 \\ 2xy - 4x \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad 0 &= 2xy - 4x \\ \Leftrightarrow \quad y &= 2 \\ 0 &= y^2 - 4x + 4x^3 \end{aligned}$$

$y = 2$ Einsetzen:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad x &= 1 \\ \text{Hess } f &= \begin{pmatrix} 2 & 2y-4 \\ 2y-4 & 2x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Kandidat Einsetzen:

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

Hess f ist positiv definit da $|\text{Hess } f| > 0$ ist und Hess $f_{11} > 0$, daraus folgt das der Kandidat $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein striktes lokales Minimum ist.

(b) $g : (0, \pi) \times (0, \pi) \to \mathbb{R}, g(x, y) \coloneqq \sin(x) + \sin(y) + \sin(x + y)$

Kandidaten finden:

$$\begin{aligned} && \nabla g &= \begin{pmatrix} \cos(x) + \cos(x+y) \\ \cos(y) + \cos(x+y) \end{pmatrix} \\ \text{(I)} & \Rightarrow & \cos(x) &= -\cos(x+y) \\ & \Rightarrow & \cos(y) &= -\cos(x+y) \\ & \Rightarrow & x &= y \end{aligned}$$

In (I) Einsetzen:

$$\begin{aligned} \Rightarrow && \cos(x) &= -\cos(2x) \\ \Leftrightarrow && \cos(x) &= -1(\cos(x)^2 - \sin(x)^2) && | +\cos(x)^2 \\ \Leftrightarrow && \cos(x) + 2\cos(x)^2 &= 1 && | \div 2 + \tfrac{1}{16} \\ \Leftrightarrow && \tfrac{1}{16} + \tfrac{\cos(x)}{2} + \cos(x)^2 &= \tfrac{9}{16} \\ \Leftrightarrow && (\tfrac{1}{4} + \cos(x))^2 &= \tfrac{9}{16} \\ \Rightarrow && x &= \tfrac{\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} && \text{Hess } f &= \begin{pmatrix} -\sin(x) - \sin 2x & -\sin(2x) \\ -\sin(2x) & -\sin(x) - \sin(x+y) \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow && \sin(x)^2 &= \begin{vmatrix} -\sin(x) & 0 \\ 0 & -\sin(x) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Kandidat Einsetzen:

$$\Rightarrow \quad \sin(\tfrac{\pi}{3}) > 0$$

$\Rightarrow$ Hess f ist negativ definit, daraus folgt das der Kandidat $\begin{pmatrix} \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$ ein strikes lokales Maximum ist.

11.6 (a) Berechne die Jacobi-Matrix der Abbildungen (Polar- bzw. Kugelkoordinaten)

i. $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, F(r, \varphi) \coloneqq (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))^T$

ii. $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, G(r, \theta, \varphi) \coloneqq (r\cos(\theta)\cos(\varphi), r\cos(\theta)\sin(\varphi), r\sin(\theta))^T$
Gib die partiellen Ableitungen von F_2 und G_3 an, wobei $F = (F_1, F_2)^T$ und

$G = (G_1, G_2, G_3)^T$.

(b) Bestimme, in welchen Punkten die Jacobi-Matrizen aus (a) invertierbar sind.