Fachbereich 3 – Mathematik | Übungsblatt 5
PD Dr. H. Vogt | 21. 11. 2021

Höhere Mathematik 1

Präsenzaufgaben für die Übungen vom 23. bis 26. 11. 2021 (bitte vorbereiten und Aufgabenstellungen so weit wie möglich verstehen)

5.1. (a) Seien

$$v^1 := \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad v^2 := \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \quad v^3 := \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}, \quad v := \begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix}.$$

Zeige, dass v^1, v^2, v^3 linear unabhängig sind, und stelle den Vektor v als Linearkombination von v^1, v^2, v^3 dar.

(b) Zeige, dass

$$U := \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_5\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5;\ x_1 = 3x_2,\ x_3 = 7x_4 \right\}$$

ein Unterraum des $\mathbb{R}^5$ ist, und finde eine Basis von U.

Hausaufgaben (Abgabe bis 2. 12. 2021 **vor** der Vorlesung)

5.2. Entscheide (mit Begründung!), ob die folgenden 4 Abbildungen linear sind:

(a) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x+1\\2y\\x+y\end{pmatrix}$;

(b) $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \mapsto \sum_{k=1}^n |x_k|$;

(c) $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \mapsto \sum_{k=1}^n x_k$;

(d) $\varphi\colon V \to \mathbb{R},\ f \mapsto f(x_0)$, wobei V der Vektorraum aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist, und $x_0 \in \mathbb{R}$.

Bitte wenden

5.3. Begründe jeweils, warum V *kein* Vektorraum ist:

(a) $V := \mathbb{R}^2$ mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$ und $\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

(b) $V := \mathbb{R}^2$ mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_2 \\ x_2 + y_1 \end{pmatrix}$ und $\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$.

(c) $V := \mathbb{R}^2$ mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$ und $\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(d) $V := \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2;\, x = y^2 \right\}$ mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$ und $\lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$.

Hinweis: Es ist jeweils mindestens eine der 8 Rechenregeln in einem Vektorraum nicht erfüllt, bzw. die Grundvoraussetzungen an die Operationen $+$ und $\cdot$ sind nicht erfüllt.

5.4. Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Durch welche Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist die Abbildung φ gegeben? Berechne $\varphi\begin{pmatrix} 7 \\ 12 \end{pmatrix}$.

5.5. Sei V ein Vektorraum, und v^1, v^2, v^3, v^4 seien linear unabhängige Vektoren in V. Ermittle in jedem der folgenden 3 Fälle, ob die gegebenen Vektoren linear unabhängig sind:

(a) v^1, $v^1 + v^2$, $v^1 + v^2 + v^3$, $v^1 + v^2 + v^3 + v^4$,

(b) $v^1 - v^2$, $v^2 + v^3$, $v^3 - v^4$, $v^4 + v^1$,

(c) $v^1 + v^2$, $v^2 + v^3$, $v^3 + v^4$, $v^4 - v^1$.

Beispiel: Die beiden Vektoren v^1, $v^1 + v^2$ sind linear unabhängig, denn für $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lambda_1 v^1 + \lambda_2(v^1 + v^2) = 0 \implies (\lambda_1 + \lambda_2)v^1 + \lambda_2 v^2 = 0 \implies \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_2 = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

da v^1, v^2 linear unabhängig sind.