Übung 5

5.2 Entscheide (mit Begründung!), ob die folgenden 4 Abbildungen linear sind:

(a) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+1 \\ 2y \\ x+y \end{pmatrix}$;

(b) $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{k=1}^n |x_k|$;

(c) $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{k=1}^n x_k$

(d) $\varphi\colon V \to \mathbb{R}, f \mapsto f(x_0)$, wobei V der Vektorraum aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist, und $x_0 \in \mathbb{R}$.

5.3 Begründe jeweils, warum V kein Vektorraum ist:

(a) $V := \mathbb{R}^2$ mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix}$ und $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

(b) $V := \mathbb{R}^2$ mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1+y_2 \\ x_2+y_1 \end{pmatrix}$ und $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$.

(c) $V := \mathbb{R}^2$ mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix}$ und $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(d) $V := \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2; x = y^2\}$ mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix}$ und $\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$.

5.4 Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit

$$\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

. Durch welche Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ist die Abbildung φ gegeben? Berechne $\varphi \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \end{pmatrix}$.

5.5 Sei V ein Vektorraum, und v^1, v^2, v^3, v^4 seien linear unabhängige Vektoren in V. Ermittle in jedem der folgenden 3 Fälle, ob die gegebenen Vektoren linear unabhängig sind:

(a) $v^1, v^1+v^2, v^1+v^2+v^3, v^1+v^2+v^3+v^4$,

(b) $v^1-v^2, v^2+v^3, v^3-v^4, v^4+v^1$,

(c) $v^1+v^2, v^2+v^3, v^3+v^4, v^4-v^1$.