4.2 Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine *schiefsymmetrische* Matrix, d.h. $A^T = -A$. Zeige, dass A nicht invertierbar ist. Gilt dies auch für gerade n? Gib einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

A invertierbar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

$$A^T = -A$$

$$\Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & -a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow a_{jk} = -a_{kj}$
$\Rightarrow (m \in \mathbb{N}; m \leq n) : a_{mm} = -a_{mm} \Rightarrow a_{mm} = 0$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{n1} \\ -a_{12} & 0 & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Für n ungerade:

Für n gerade (Gegenbeispiel - siehe Abgabe 3.5):

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ nicht invertierbar.

4.3 (a) Berechne

$$A := \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} \cdot \det(C^{(1,n)})$$
$$= n! \cdot \det(C^{(1,n)})$$

$$C^{(m,n)} \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{m}{n} & \frac{m+1}{n} & \dots & \frac{n}{n} \end{pmatrix}, a \coloneqq n - m + 1; a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}; C^{(m,n)} \in \mathbb{C}^{(a)\times(a)}$$

Entwickeln der 1. Spalte von C ergibt:

$$\det(C^{(m,n)}) = (-1)^{n+1}\frac{m}{n} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \det(C^{(m+1,n)})$$

Entwickeln der 1. Zeile ergibt:

$$= (-1)^{a+1}\frac{m}{n}(-1)^a \det(E_{a-2}) + C^{(m+1,n)}$$
$$= -\frac{m}{n} + \det(C^{(m+1,n)})$$
$$= -\frac{m}{n} - \frac{m+1}{n} - \dots - \frac{n-1}{n} + \left|\tfrac{n}{n}\right|$$
$$= -\frac{\sum\limits_{k=m}^{n-1} k}{n} + 1$$
$$= -\frac{n(n-1) - m(m-1)}{n} + 1$$
$$\Rightarrow \det(C^{(1,n)}) = \frac{3-n}{2}$$

$\Rightarrow \det(A) = n!\frac{3-n}{2}$

(b) Finde Matrizen A, B, so dass $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} B = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$$
$$\det(A+B) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 24$$
$$\det(A) + \det(B) = 2 + 12 = 14$$

4.4 Berechne die *Vandermonde-Determinante*

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

für $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$.

4.5 Berechne das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und Eigenvektoren von

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

A:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda E) \\ &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} + (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -2 + 2\lambda - 6 + (2-\lambda)((2-\lambda)(1-\lambda) - 6) + 4 - 2\lambda + 4 \\ &= -4\lambda + (-4-\lambda)(2 - 3\lambda + \lambda^2) \\ &= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 2\lambda - 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda_1 &= -1, \\ \lambda_2 &= 2, \\ \lambda_3 &= 4 \end{aligned}$$

$$\text{Eig}(A,\lambda) \coloneqq (A-\lambda E_n)x = 0$$

Eig(A, λ_1):

$$\begin{pmatrix}3 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 1\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix} x = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Eig(A, λ_2):

$$\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix} x = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Eig(A, λ_3):

$$\begin{pmatrix}-2 & 2 & 3\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & -2 & -3\end{pmatrix} x = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Gauß-Algorithmus:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}3 & 2 & 3\\ 0 & 7 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \begin{pmatrix}2 & -2 & -1\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \begin{pmatrix}-2 & 2 & 3\\ 0 & -2 & 5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\} \qquad \Rightarrow \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}-2\\-3\\2\end{pmatrix}\right\} \qquad \Rightarrow \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}8\\5\\2\end{pmatrix}\right\}$$

$$\Rightarrow \text{Eig}(A,\lambda) = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8\\5\\2\end{pmatrix}\right\}$$

B:

$$\begin{aligned}
p_B(\lambda) &= \det(B-\lambda E)\\
&= \begin{vmatrix}-5-\lambda & 0 & 7\\ 6 & 2-\lambda & -6\\ -4 & 0 & 6-\lambda\end{vmatrix}\\
&=(2-\lambda)\begin{vmatrix}-5-\lambda & 7\\ -4 & 6-\lambda\end{vmatrix}\\
&=(\lambda-2)(-\lambda^2+\lambda+2)\\
\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 &=2,\\
\lambda_3 &= -1
\end{aligned}$$

$$\text{Eig}(B,\lambda) \coloneqq (B-\lambda E_n)x = 0$$

$\mathrm{Eig}(B, \lambda_1) = \mathrm{Eig}(B, \lambda_2)$:

$$\begin{pmatrix} -7 & 0 & 7 \\ 6 & 0 & -6 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\mathrm{Eig}(B, \lambda_3)$:

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & -6 \\ -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Eig}(B, \lambda) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$