

## 7.2 Löse die Anfangswertprobleme

$$(a) \quad y' + y \sin(x) = 4x^3 e^{\cos(x)}, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2;$$

$$(H) \quad \begin{aligned} y' + y \sin(x) &= 0 \\ \Rightarrow y_{(H)}(x) &= e^{\cos(x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (I) \quad &\Rightarrow \quad \begin{aligned} y &= c \cdot y_{(H)} \\ y(x) &= c(x) e^{\cos(x)} \end{aligned} \quad | \text{ ableiten} \\ (II) \quad &\Rightarrow \quad y'(x) = c'(x) e^{\cos(x)} - c(x) e^{\cos(x)} \sin(x) \end{aligned}$$

I und II in Ausgangsgleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} c'(x) &= 4x^3 \\ \Rightarrow c(x) &= x^4 + c \end{aligned}$$

Einsetzen in I:

$$\Rightarrow y(x) = (x^4 + c) e^{\cos(x)}$$

Bedingung  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ :

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow c &= 2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \\ \Rightarrow y(x) &= (x^4 + 2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^4) e^{\cos(x)} \end{aligned}$$

$$(b) \quad xy' + y + xe^x = 0, y(1) = 0.$$

$$(H) \quad \begin{aligned} xy' + y &= 0 \\ \Rightarrow y_{(H)}(x) &= e^{-\ln(x)} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (I) \quad &\Rightarrow \quad \begin{aligned} y &= c \cdot y_{(H)} \\ y(x) &= c(x) \frac{1}{x} \end{aligned} \quad | \text{ ableiten} \\ (II) \quad &\Rightarrow \quad y'(x) = c'(x) \frac{1}{x} - c(x) \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

I und II in Ausgangsgleichung einsetzen:

$$c'(x) = -xe^x$$

partielle Integration mit  $f(x) = x, g(x) = e^x$

$$\Rightarrow c(x) = (1 - x)e^x + x$$

Einsetzen in I:

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1-x}{x} e^x + \frac{c}{x}$$

Bedingung  $y(1) = 0$ :

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow c &= 0 \\ \Rightarrow y(x) &= \frac{1-x}{x} e^x \end{aligned}$$

## 7.3 Bestimme diejenigen Lösungen der Differentialgleichung

$$\dot{x} \cdot \sin(2t) = 2x + 2 \cos(t),$$

die für  $t \rightarrow \frac{\pi}{2}$  beschränkt ist.

$$\begin{aligned} \text{(H)} \quad \dot{x} \sin(2t) - 2x &= 0 \\ \Rightarrow x_{(H)}(t) &= e^{\int \frac{2}{\sin(2t)} dt} = \tan(t) \end{aligned}$$

Nachweis über Ableitung (Quotientenregel):

$$\frac{d}{dt} \tan(t) = \frac{\cos^2(t) + \sin^2(t)}{\cos^2(t)} = 1 + \tan^2(t)$$

$$\begin{aligned} x &= c \cdot x_{(H)} \\ \text{(I)} \Rightarrow x(t) &= c(t) \tan(t) && | \text{ ableiten} \\ \text{(II)} \Rightarrow \dot{x}(t) &= c'(t) \tan(t) + c(t)(1 + \tan^2(t)) \end{aligned}$$

I und II in Ausgangsgleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} c'(t) &= \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)} \\ \Rightarrow c(t) &= -\frac{1}{\sin^2(t)} + c \end{aligned}$$

Nachweis über Ableitung (Quotientenregel):

$$\frac{d}{dx} \frac{-1}{\sin(x)} + c = \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$$

Einsetzen in I:

$$\Rightarrow x(t) = \left(-\frac{1}{\sin(t)} + c\right) \tan(t)$$

Da  $\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} x(t) = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} (-1 + c) \tan(t)$ , folgt aus l'Hospital, dass  $x$  nur dann für  $t \rightarrow \frac{\pi}{2}$  beschränkt ist, wenn  $-1 + c = 0 \Leftrightarrow c = 1$ .

$\Rightarrow$  Menge aller Lösungen der Differentialgleichung für  $t \rightarrow \frac{\pi}{2}$  beschränkt  
 $= \left\{ \left(-\frac{1}{\sin(t)} + 1\right) \tan(t) \right\}$

## 7.4 Bestimme die Lösungen der Differentialgleichungen

$$y' = \frac{x+y}{x} \quad \text{und} \quad y' = 2\frac{y}{x}$$

(a) durch Betrachten als lineare Differentialgleichung 1. Ordnung.

$$y' = \frac{x+y}{x} :$$

$$\begin{aligned} \text{(H)} \quad y' - \frac{1}{x}y &= 0 \\ \Rightarrow y_{(H)}(x) &= e^{\int \frac{1}{x} dx} = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & y = c \cdot y_{(H)} \\ \Rightarrow y(x) &= c(x)x \quad | \text{ ableiten} \\ \text{(II)} \quad & y(x) = c'(x)x + c(x) \end{aligned}$$

I und II in Ausgangsgleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} c'(x) &= \frac{1}{x} \\ \Rightarrow c(x) &= \ln(x) + c \end{aligned}$$

Einsetzen in I:

$$\Rightarrow y(x) = \ln(x)x + cx$$

$$y' = 2\frac{y}{x} :$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow y' &= \frac{2}{x}y \\ \Rightarrow y(x) &= e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2(\ln(x)+c)} = e^{\ln(x)^2} = x^2 \cdot c_2 \end{aligned}$$

(b) durch Substitution  $z = \frac{y}{x}$   
 $y' = \frac{x+y}{x} :$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow y' &= 1 + \frac{y}{x} \\ \Leftrightarrow y' &= 1 + z \end{aligned}$$

$$z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = zx \Rightarrow y' = z'x + z:$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow z'x + z &= 1 + z \\ \Leftrightarrow z' &= \frac{1}{x} \\ \Rightarrow z &= \ln(x) + c \end{aligned}$$

Rücksubstitution mit  $z = \frac{y}{x}$

$$\Leftrightarrow y = \ln(x)x + cx$$

$$y' = 2\frac{y}{x} :$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \quad y' &= 2z \\ z = \frac{y}{x} \Rightarrow y &= zx \Rightarrow y' = z'x + z: \\ \Leftrightarrow \quad z'x + z &= 2z \\ \Leftrightarrow \quad z'x - z &= 0 \\ \Rightarrow \quad z &= x \cdot c\end{aligned}$$

Rücksubstitution mit  $z = \frac{y}{x}$

$$\Leftrightarrow \quad y = x^2 \cdot c$$

7.5 Bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Bernoulli'schen Differentialgleichungen:

(a)  $(1 + x^2)y' + xy - xy^2 = 0$

(b)  $y' + y + (\sin(x) + e^x)y^3 = 0$