Übung 10

10.2 Eine (idealisiert homogene) Kette der Länge l liegt auf einem horizontalen, reibungsfreien Tisch, wobei ein Stück Kette der Länge a über den Rand hängt. Wie lange dauert es, bis die kette vom Tisch geglitten ist?

Hinweis: Bezeichne die Gesamtmasse der Kette mit m und die Länge des überhängenden Stücks zur Zeit t mit $y(t)$. Berechne die Masse $m_{\ddot{u}}(t)$ des überhängenden Stücks zur Zeit t. Die Gravitationskraft $m_{\ddot{u}}(t)g$ muss dann gleich $F = m\ddot{y}(t)$ sein.

10.3 Löse die folgenden Anfangswertaufgaben:

(a) $\ddot{y} + 2\dot{y} - 3y = e^{2t}, y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1.$

(b) $\ddot{y} + y = t + 2\cos(t), y(\pi) = 2\pi, \dot{y}(\pi) = \pi.$

10.4 (a) Stelle eine homogene lineare Differentialgleichung 3.Ordnung auf, so dass eine Lösungsbasis gegeben ist durch $y_1(t) = 1, y_2(t) = t, y_3(t) = e^t$.

(b) Finde eine homogene lineare Differentialgleichung, so dass $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y_1(t) = t$ und $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y_2(t) = \sin(t)$ Lösungen sind.

(c) Warum ist es in (b) unmöglich, eine homogene lineare Differentialgleichung 2.Ordnung aufzustellen, selbst wenn man zeitabhängige Koeffizienten zulässt, d.h. wenn man eine Differentialgleichung der Form

$$\ddot{y} + a_1(t)\dot{y} + a_0(t)y = 0$$

sucht, mit $a_0, 1_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

(d) Warum ist es in (b) auch nicht möglich, eine homogene lineare Differentialgleichung 3.Ordnung aufzustellen, selbst wenn man zeitabhängige Koeffizienten zulässt?

Hinweis zu (c) und (d): Wronski-Determinante, Satz 10.1, n Lösungen $y_1, \ldots, y_n$ einer homogenen linearen Differentialgleichung n.Ordnung sind genau dann linear unabhängig, wenn

$$\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \ldots & y_n(t) \\ \dot{y}_1(t) & \dot{y}_2(t) & \ldots & \dot{y}_n(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \neq 0$$

für alle t. Was passiert hier für $t = 0$?

10.5 Eine gedämpfte Schwingung ohne Anregung sei modelliert durch

$$\ddots\, y + a\dot{y} + 4y = 0, \quad y(0) = 5, \quad \dot{y}(0) = -1$$

Bestimme den Parameter $a > 0$ so, dass gerade der aperiodische Grenzfall eintritt, und berechne die Lösung für diesen Fall. Stelle den zeitlichen Verlauf der Schwingungen graphisch dar.