Übung 2

2.5 Bestimme die reelen Lösungen der Gleichungen

(a) $\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} = \sqrt{2x-12}$

$$
\begin{aligned}
& & \sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} &= \sqrt{2x-12} & &|^2 \\
&\Leftrightarrow & (\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x})^2 &= 2x-12 & & \\
&\Leftrightarrow & (x+1) - 2\sqrt{x+1}\sqrt{9-x} + (9-x) &= 2x-12 & & \\
&\Leftrightarrow & x+1-x+9-2\sqrt{(x+1)(9-x)} &= 2x-12 & & \\
&\Leftrightarrow & 10-2\sqrt{(x+1)(9-x)} &= 2x-12 & &|/-2 \\
&\Leftrightarrow & -5+\sqrt{(x+1)(9-x)} &= -x+6 & &|+5 \\
&\Leftrightarrow & \sqrt{(x+1)(9-x)} &= -x+11 & &|^2 \\
&\Leftrightarrow & (x+1)(9-x) &= (-x+11)^2 & & \\
&\Leftrightarrow & -x^2+8x+9 &= 11^2-22x+x^2 & &|-x^2; +22x; -11^2 \\
&\Leftrightarrow & -2x^2+30x-112 &= 0 & &|/(-2) \\
&\Leftrightarrow & x^2-15x+56 &= 0 & &
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow x_{1/2} = -\frac{-15}{2} \pm \sqrt{(\frac{-15}{2})^2+56} = 7.5 \pm 0.5
$$

$$
\Rightarrow x_1 = 7 \wedge x_2 = 8
$$

(b) $|x-3| + |x+2| - |x-4| = 3$

Wenn man $|x-3|$, $|x+2|$ und $|x-4|$ als drei separate Abbildungen $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ begreift, so ergibt sich für:

$$f(x) = \begin{cases} x-3 & x \geq 3 \\ -x-3 & x < 3 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x+2 & x \geq -2 \\ -x-2 & x < -2 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x-4 & x \geq 4 \\ -x+4 & x < 4 \end{cases}$$

Wenn man $gh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, gh(x) \coloneqq g(x) - h(x)$ definiert, folgt:

$$gh(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 4 \\ 2x-7 & 3 < x < 4 \\ -1 & x \leq 3 \end{cases}$$

Definiert man weiter $fgh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, fgh(x) := gh(x) + f(x)$, folgt:

$$fgh(x) = \begin{cases} x+3 & x \geq 4 \\ 3x-5 & 3 < x < 4 \\ x+1 & -2 \leq x \leq 3 \\ -x-3 & x < -2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x+3 = 3 \Leftrightarrow x = 0, &\qquad 0 \ngeq 4|\times \\ 3x-5 = 3 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}, &\qquad \frac{8}{3} \ngeq 4|\times \\ x+1 = 3 \Leftrightarrow x = 2, &\qquad -2 \leq 2 \leq 3|\surd \\ -x-3 = 3 \Leftrightarrow x = -6, &\qquad -6 < -2|\surd \end{aligned}$$

$\Rightarrow x_1 = 2 \wedge x_2 = -6$

2.6 bestimme sämtliche reelen Lösungen der Ungleichungen

(a) $\frac{2}{x+1} < \frac{1}{x-3}$
Da $\frac{2}{x+1} > 0$ mit $x \in \mathbb{R}; x > -1$
Und $\frac{1}{x-3} < 0$ mit $x \in \mathbb{R}; x < 3$
Gibt gibt es keine reelen Lösungen in $x \in \mathbb{R}; -1 < x < 3$

Nullpunkt bestimmen:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{x+1} < \frac{1}{x-3} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{2x-6}{x+1} < 1 \qquad | * (x-3) \end{aligned}$$

Polynom Division:

$$\left(\quad 2x-6\right) \div \left(x+1\right) = 2 + \frac{-8}{x+1}$$
$$\underline{-\ 2x-2}$$
$$-\ 8$$

$$\begin{aligned} & 2 - \frac{8}{x+1} < 1 \\ \Leftrightarrow \quad & 1 < \frac{8}{x+1} \qquad | -1 + \tfrac{8}{x+1} \\ \Leftrightarrow \quad & x+1 < 8 \qquad |x+1 \\ \Leftrightarrow \quad & x < 7 \qquad | -1 \end{aligned}$$

Somit gilt $\forall x \in \mathbb{R}; (x < 7; x \notin \{-1 \leq x \leq 3\}) : \frac{2}{x+1} < \frac{1}{x-3}$

(b) $(x+2)(4-x)(x-2)^2 > 0$
da x^2 für $x \in \mathbb{R}$ immer ≥ 0, kann der Term nur negativ werden, wenn $(x+2)$ oder $(4-x)$ negativ sind.
Die Bedingung erfüllen alle Elemente von $M\{x \in \mathbb{R}; x \neq 2, (x+2)(4-x) > 0\}$

$$
\begin{aligned}
& & (x+2)(4-x) > 0 & \\
\Leftrightarrow & & -x^2 + 2x + 8 > 0 & \quad \mid *(-1) \\
\Leftrightarrow & & x^2 - 2x - 8 < 0 &
\end{aligned}
$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := x^2 - 2x - 8$ stellt eine nach oben geöffnete Parabel da. Somit müssen alle Werte zwischen den beiden Nullstellen < 0 sein.
Die Nullstellen lassen sich direkt aus der Parameterform oben ablesen.
$\Rightarrow x_1 = (-2) \wedge x_2 = 4$
Somit gilt $\forall x \in \mathbb{R}; (-2 < x < 4, x \neq 2) : ((x+2)(4-x)(x-2)^2 > 0)$

2.8 (a) Berechne $|5 + 12i|$

$$|5 + 12i| = \sqrt{(5^2 + 12^2)} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

(b) Berechne $\sum_{k=2}^{4} (2i)^k$

$$\sum_{k=2}^{4} (2i)^k = (2i)^2 + (2i)^3 + (2i)^4 = -4 - 6i + 16 = 12 - 6i$$

(c) Bestimme Real und Imaginärteil von $\dfrac{1 + i\sqrt{2}}{1 - i\sqrt{2}} + \dfrac{1 - i\sqrt{2}}{1 + i\sqrt{2}}$.
$z = 1 + i\sqrt{2}$,