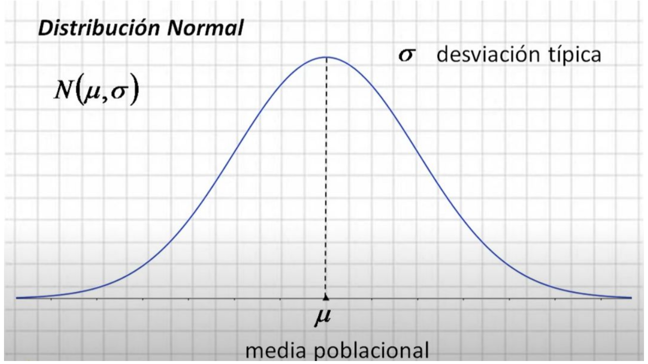
Distribución Normal

La distribución normal ayuda a modelar y predecir fenómenos naturales y sociales, facilitando el análisis de datos y la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre.

QUÉ ES LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

- La distribución normal es una distribución de probabilidad continua que representa cómo los valores se distribuyen de manera simétrica alrededor de la media.



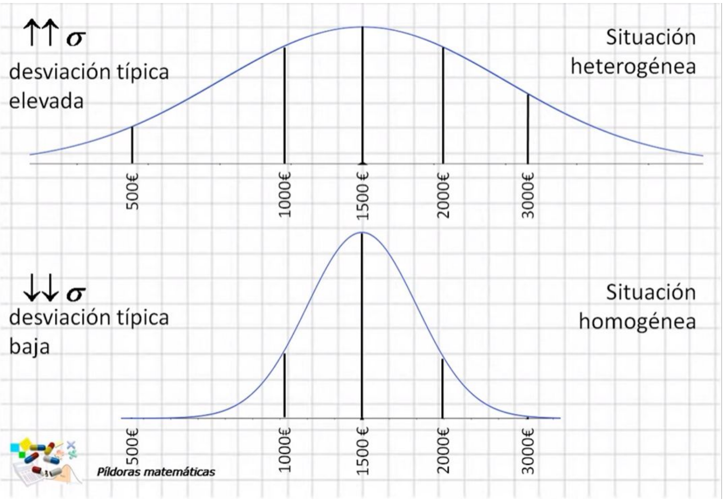
- Es conocida como la curva en forma de campana debido a su apariencia, también llamada Campana de Gauss en honor al matemático Carl Friedrich Gauss.

Fórmula de la Distribución Normal

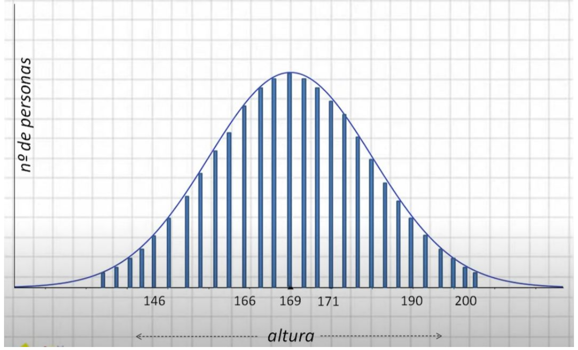
- La fórmula de la distribución normal es la siguiente:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx=1$$

- Donde:
  - μ: Media de la distribución
  - σ: Desviación estándar
- Considerando:
  - Es simetrica
  - Tiene una asintota horizontal
  - El área entre la función y el eje horizontal es igual a 1.



- Esta fórmula define la probabilidad de que una variable aleatoria continua caiga dentro de un rango específico de valores.



Ejemplo Demostrativo

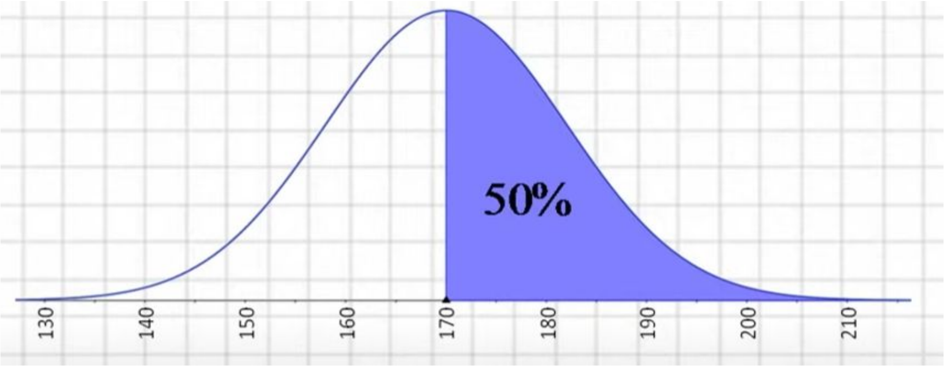
Supongamos que en un determinado país la estatura de la población adulta sigue una distribución normal de media 170 cm y desviación típica igual a 12 cm

- ¿Qué porcentaje de esa población mide más de 170 cm?

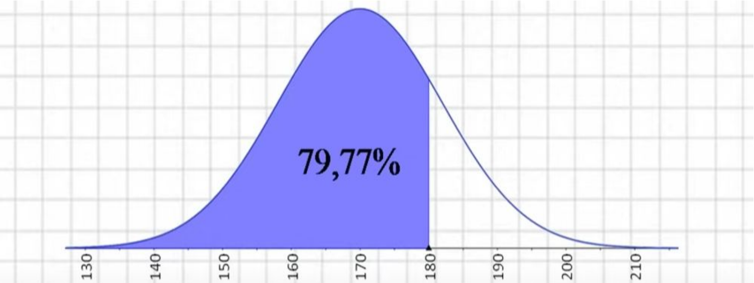
$$\mu = 170 \qquad \sigma = 12 \qquad N(170{,}12)$$

$$f(x) = \frac{1}{12\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-170}{12}\right)^2}$$

$$\int_{170}^{\infty} \frac{1}{12\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-170}{12}\right)^2} dx = 0{,}5$$

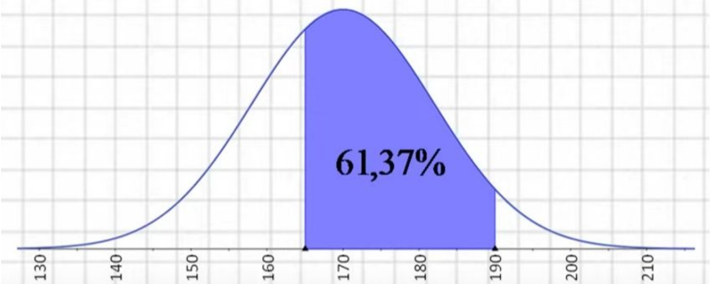


- ¿Qué porcentaje de esa población mide menos de 180 cm?



$$\int_{-\infty}^{180} \frac{1}{12\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-170}{12}\right)^2} dx = 0{,}7977$$

- ¿Qué porcentaje de esa población mide entre 165 y 190 cm?



$$\int_{165}^{190} \frac{1}{12\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-170}{12}\right)^2} dx = 0{,}6137$$

Distribución Normal Estándar N(0,1)

- La distribución normal estándar es una forma especial de la distribución normal donde la media es 0 y la desviación estándar es 1.

$$N(\mu,\sigma)$$

$$N(0,1)$$

$$\mu = 0 \qquad \sigma = 1$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

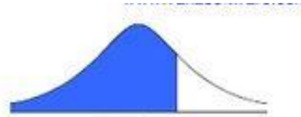
Hoja de Probabilidad Acumulada Inferior Para Distribución Normal N(0,1)

μ = Media

σ = Desviación típica

$$P(z \le z_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_0} e^{\frac{-z^2}{2}} dz$$

Tipificación: $z_0 = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$



z_0	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z_0
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	**0,0**
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	**0,1**
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	**0,2**
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	**0,3**
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	**0,4**
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	**0,5**
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	**0,6**
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	**0,7**
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	**0,8**
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	**0,9**
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	**1,0**
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	**1,1**
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	**1,2**
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	**1,3**
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	**1,4**
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	**1,5**
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	**1,6**
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	**1,7**
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	**1,8**
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	**1,9**
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	**2,0**
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	**2,1**
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	**2,2**
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	**2,3**
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	**2,4**
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	**2,5**
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	**2,6**
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	**2,7**
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	**2,8**
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	**2,9**
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900	**3,0**
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929	**3,1**
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950	**3,2**
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965	**3,3**
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976	**3,4**
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983	**3,5**
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989	**3,6**
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992	**3,7**
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995	**3,8**
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997	**3,9**

$1-\alpha$	90%	92%	94%	95%	96%	97%	98%	99%
α	10%	8%	6%	5%	4%	3%	2%	1%
$z_{\alpha/2}$	1,645	1,751	1,881	1,960	2,054	2,170	2,326	2,576
z_α	1,282	1,405	1,555	1,645	1,751	1,881	2,054	2,326

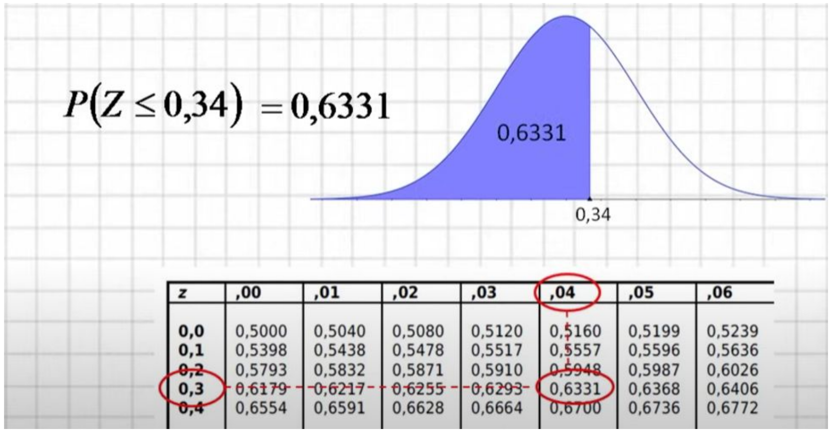
Siendo:

$1-\alpha$ = Nivel de confianza

α = Nivel de significación

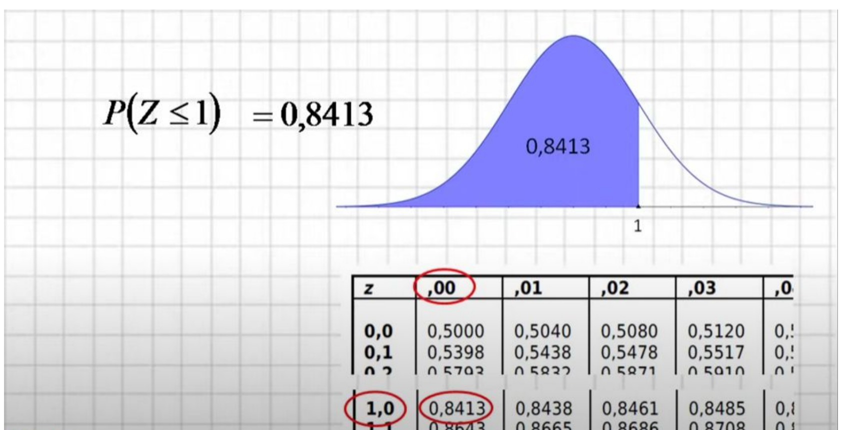
Ejercicios Demostrativo de Distribución Normal Estándar

- ¿Qué área queda por debajo del valor 0,34?



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772

- ¿Qué área queda por debajo del valor 1?

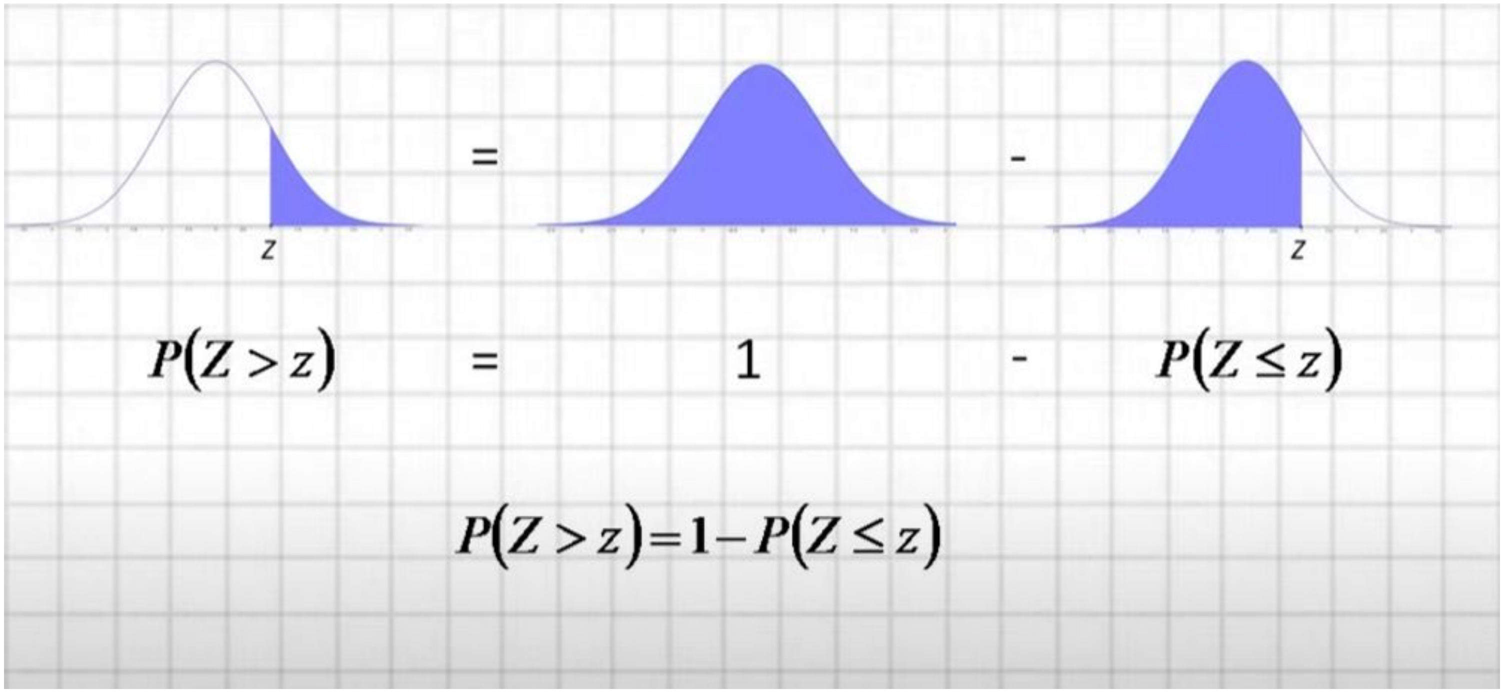


z	,00	,01	,02	,03	,0
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	[illegible]
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	[illegible]
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	[illegible]
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	[illegible]
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	[illegible]

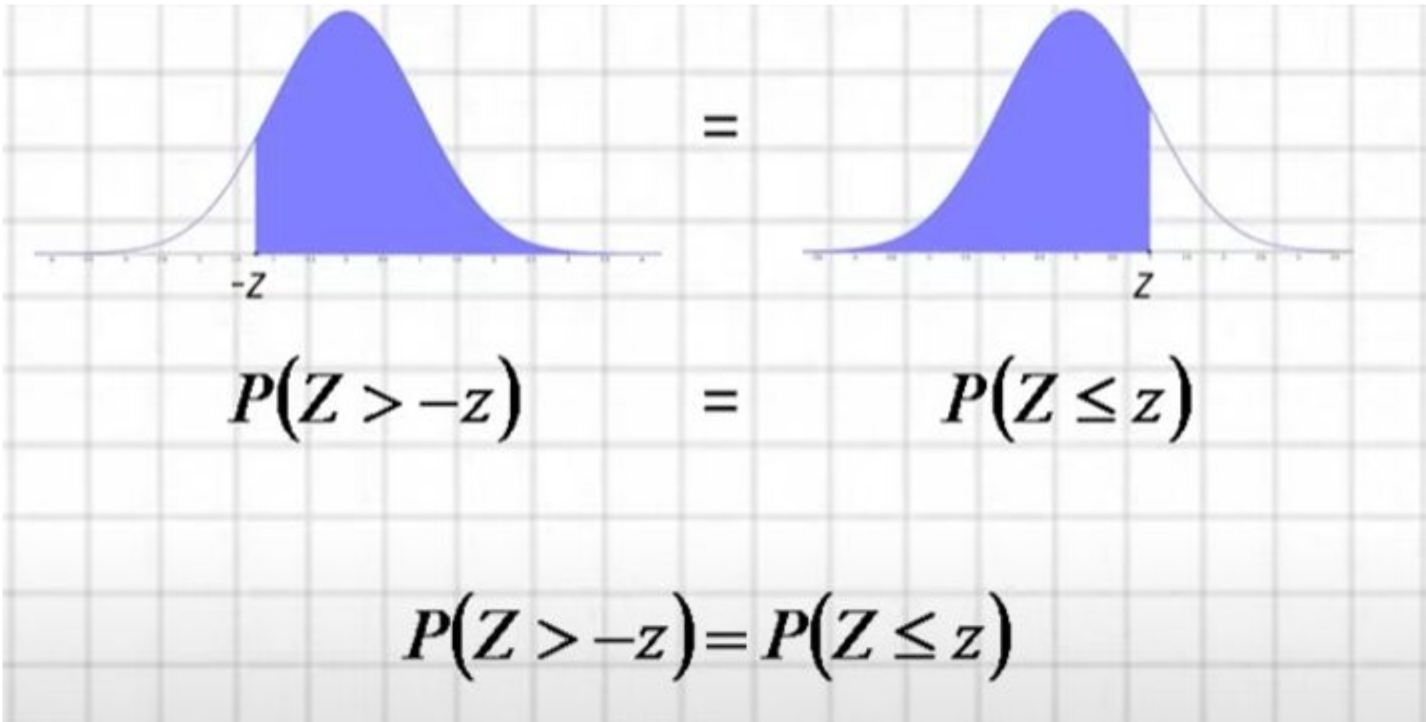
Casos Especiales de Distribución Normal Estándar

- ¿Cómo calculo el área que queda por encima de un determinado valor?
- ¿Y si el valor es negativo?

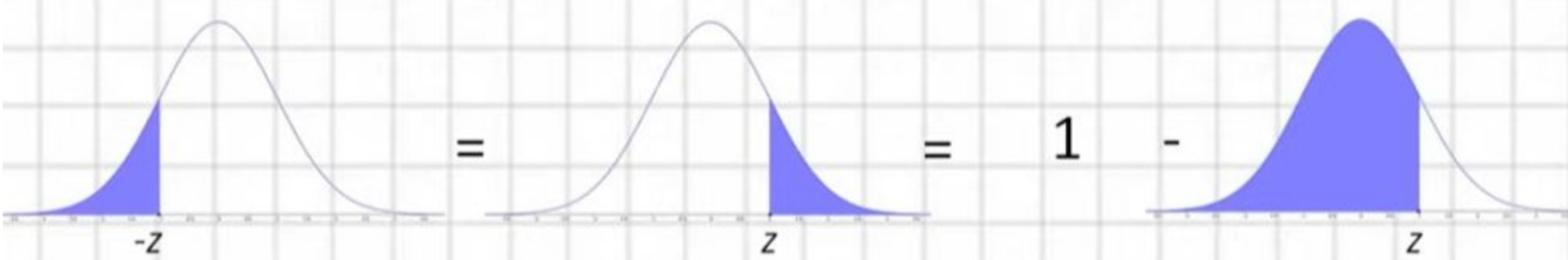
Área por encima de un valor positivo



Área por encima de un valor Negativo



Área por Debajo de un Valor Negativo

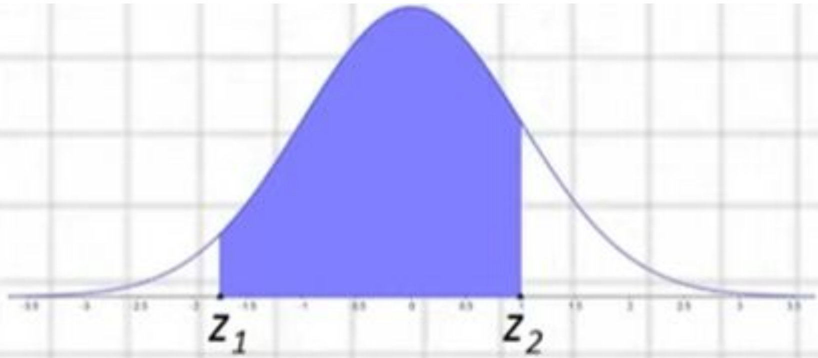


$$P(Z \leq -z) \quad = \quad P(Z > z) \quad = \quad 1 \quad - \quad P(Z \leq z)$$

$$P(Z \leq -z) = P(Z > z) = 1 - P(Z \leq z)$$

Área Entre Dos Valores

$$P(z_1 < Z \leq z_2)$$



$$P(z_1 < Z \leq z_2) = P(Z \leq z_2) - P(Z \leq z_1)$$

TIPIFICAR

Tipificar consiste en transformar la variable de nuestro ejercicio en su equivalente en una distribución N(0,1), para poder usar la tabla.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

- Donde:
  - μ: Media de la distribución
  - σ: Desviación estándar
  - X: valor del ejercicio a buscar
  - z: valor que se busca en la tabla

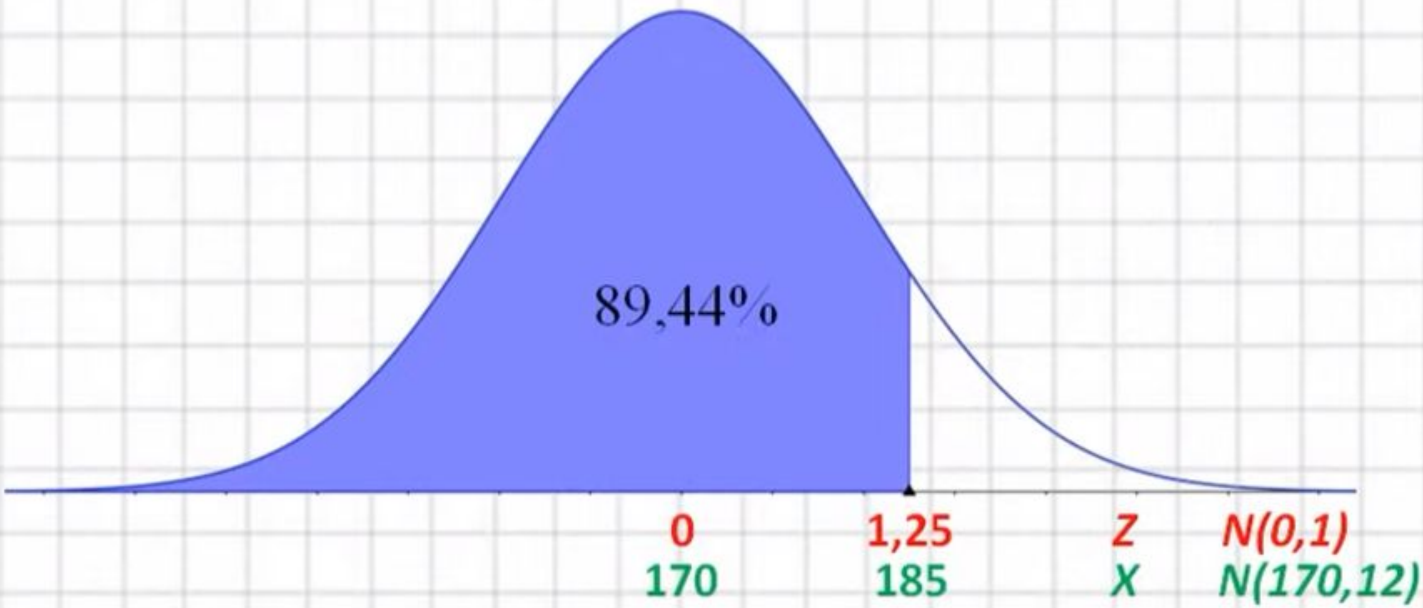
EJEMPLO DE TIPIFICAR

$N(170,12)$

$¿P(X \leq 185)?$

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \qquad z = \frac{185-170}{12} \qquad z = 1{,}25$$

$$P(X \leq 185) = P(Z \leq 1{,}25) \overset{\text{TABLA}}{=} 0{,}8944$$



Píldoras matemáticas

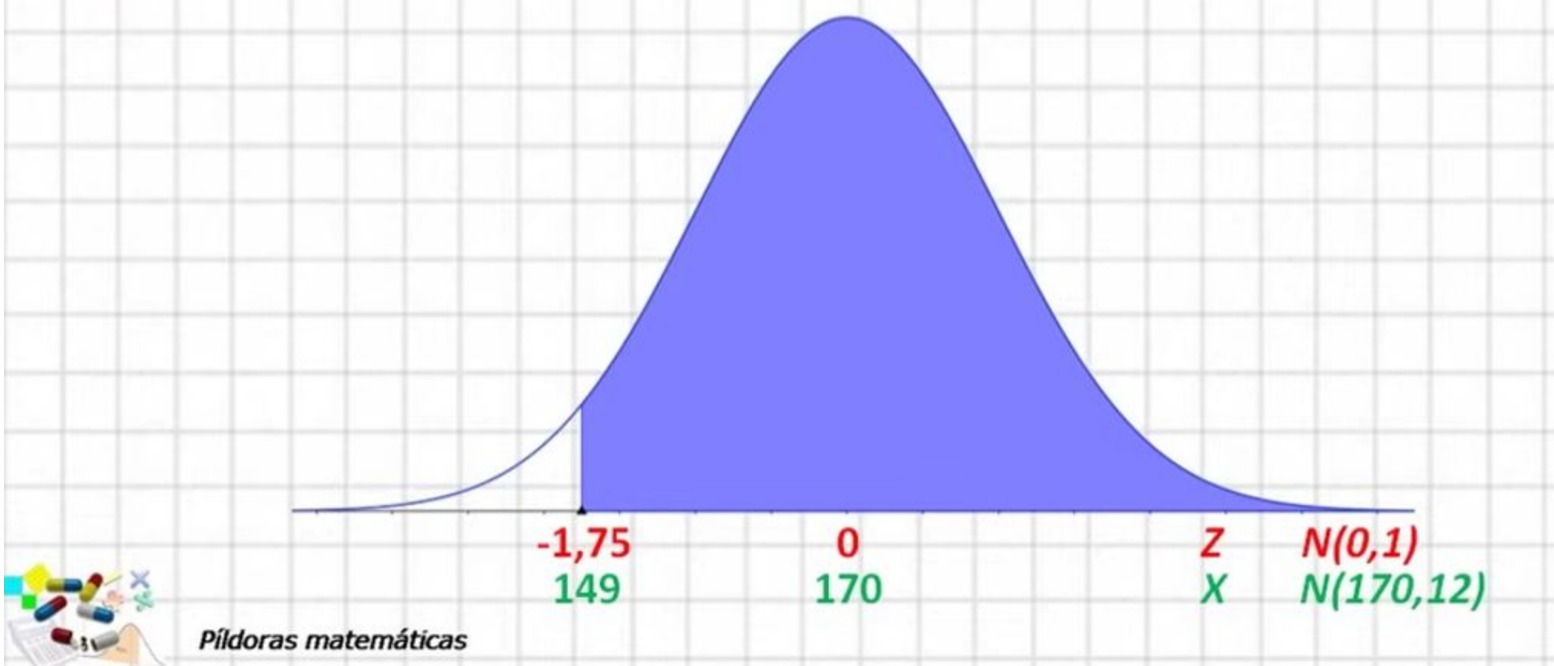
EJEMPLO DE TIPIFICAR

¿Y qué porcentaje de esa población mide más de 149 cm?

$$¿P(X > 149)? \qquad z = \frac{x - \mu}{\sigma} \qquad z = \frac{149 - 170}{12} \qquad z = -1{,}75$$

TABLA

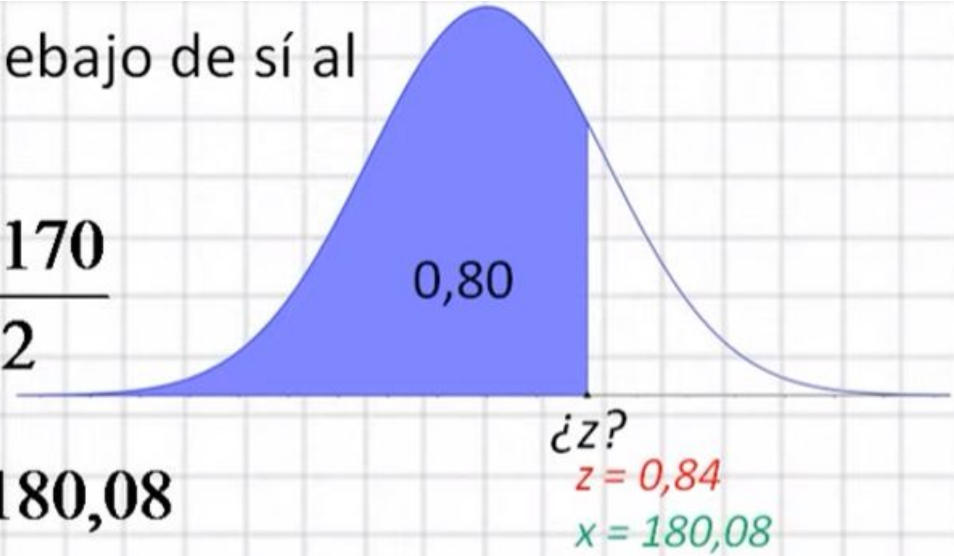
$$P(X > 149) = P(Z > -1{,}75) = P(Z \leq 1{,}75) = 0{,}9599$$



EJEMPLO DE TIPIFICAR

¿Y qué estatura deja por debajo de sí al 80% de la población?

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \qquad 0{,}84 = \frac{x - 170}{12}$$



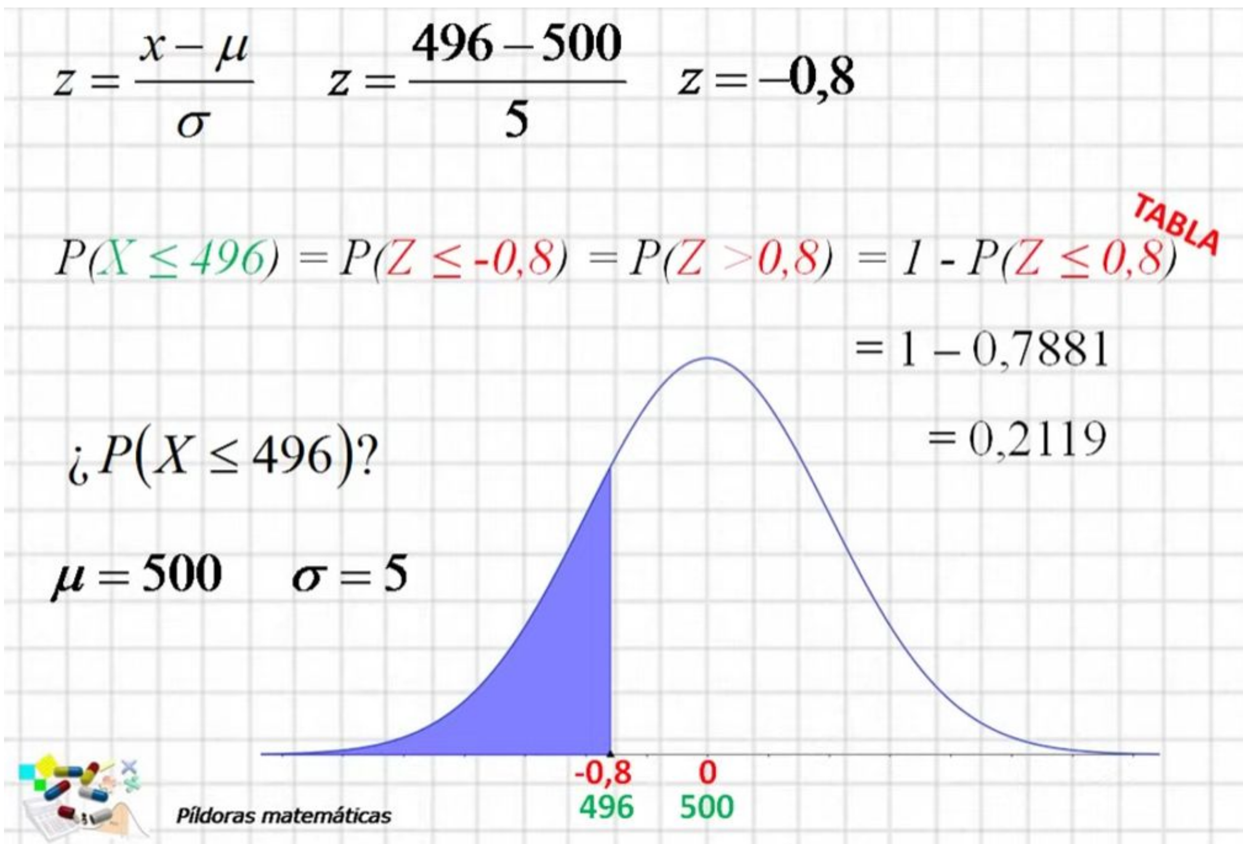
$$0{,}84 \cdot 12 + 170 = x \qquad x = 180{,}08$$

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389

EJEMPLO DE TIPIFICAR

El peso en gramos de las cajas de cereales de cierta marca sigue una distribución N(500,5)

Calcula la probabilidad de encontrar una caja que pese menos de 496 g



EJEMPLO DE TIPIFICAR

¿Y qué porcentaje de cajas pesa entre 505 y 510 gramos?

$$\mu = 500 \qquad \sigma = 5$$

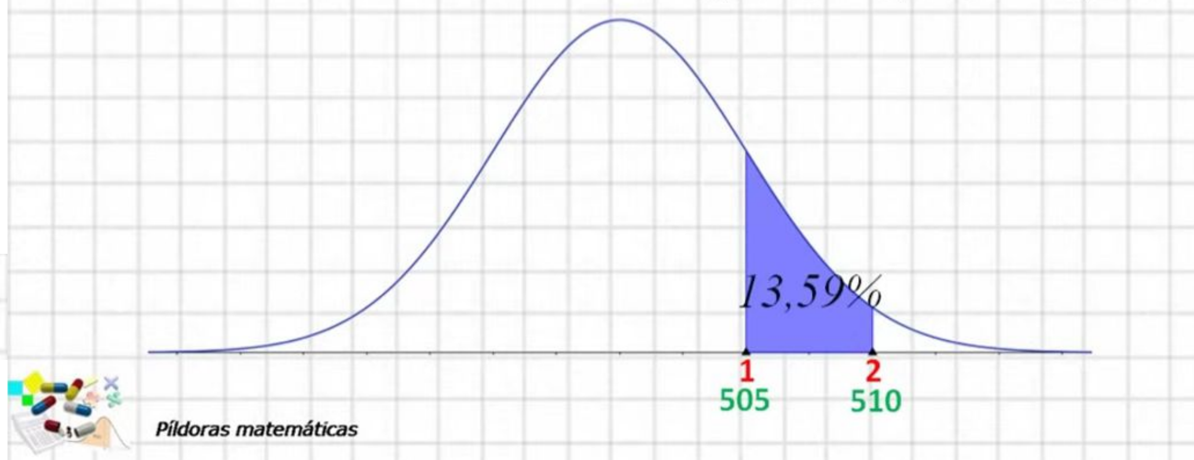
$$z_{505} = \frac{505 - 500}{5} = 1$$

$$z_{510} = \frac{510 - 500}{5} = 2$$

$$¿P(505 < X \leq 510)?$$

$$P(505 < X \leq 510) = P(1 < Z \leq 2) = \underbrace{P(Z \leq 2)}_{\text{TABLA}} - \underbrace{P(Z \leq 1)}_{\text{TABLA}}$$

$$= 0{,}9772 - 0{,}8413 = 0{,}1359$$



FIN DE LA EXPOSICION
Y COMO DIJO MI EX HASTA AQUÍ LLEGAMOS! MUCHAS GRACIAS
UwU