

# **TESE**

**PROFESSOR TITULAR**

**ESCOLA DE ENGENHARIA**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE RIO GRANDE**

**MARÉ METEOROLÓGICA NA COSTA BRASILEIRA**

**Professor Eloi Melo Filho, Ph.D.**

**Engenharia Civil Costeira e Portuária**

**ABRIL / 2017**

Em sessão pública realizada na Escola de Engenharia da Universidade Federal de Rio Grande no dia 17 de novembro de 2016, essa tese foi apresentada e aprovada por banca examinadora composta pelos professores:

- Lauro Julio Calliari (presidente)
- Paolo Alfredini
- Paulo Cesar Colonna Rosman
- João Antonio Lorenzzetti

Devido a problemas de saúde do autor, a presente versão final ficou pronta em Abril de 2017

O presente documento deve se citado da seguinte forma:

Literatura em português:

- MELO Fº., E. **Maré Meteorológica na Costa Brasileira**, Tese Professor Titular, Escola de Engenharia, Universidade Federal de Rio Grande, 328 p, Abril 2017

Literatura em inglês:

- MELO, E. **Meteorological Tide at the Brazilian Coast**, Full Professor Thesis, School of Engineering, Federal University of Rio Grande, Brazil, 328 p, April 2017  
(in Portuguese)

## PREFÁCIO e AGRADECIMENTOS

Início esse prefácio relembrando uma conversa que tive com minha esposa, Henriette, no final do ano de 2014, quando tomei a decisão de escrever essa tese

- Henriette: *Quando é mesmo o teu interstício para a progressão para titular ?*
- Eloi: *É em março de 2015*
- Henriette: *Ah, ótimo ! Já começou a escrever o memorial ?*
- Eloi: *Hum... na verdade... não vou fazer memorial... resolvi fazer uma tese...*
- Henriette: *Tese ! Meu Deus ! sobre o que ?*
- Eloi: *Sobre a maré meteorológica*
- Henriette: *Ah, não acredito... você passou a vida estudando ondas e agora vai fazer uma tese sobre maré ?*
- Eloi: *Meteorológica, maré meteorológica. Pois é, é um assunto bem importante aqui no Brasil e que eu percebi, durante as disciplinas do curso, ainda precisa ser melhor entendido, então achei que seria uma boa oportunidade para dar uma contribuição.*
- Henriette: *Bem, você é que sabe... mas, olha... isso vai atrasar tua progressão e vai dar trabalho...*

Como normalmente acontece, ela tinha razão: minha opção pela tese atrasou em dois anos minha progressão e deu trabalho, *muito* trabalho, mas, valeu a pena !

Essa tese foi fruto de pouco mais de dois anos de trabalho intenso e solitário. Como disse à minha esposa, minha motivação principal ao optar pela tese era de dar uma contribuição ao entendimento do fenômeno da maré meteorológica no nosso país. Mas, junto a isso havia também uma preocupação minha em escrever um texto que pudesse ser útil aos alunos e essa ideia norteou toda a elaboração do presente trabalho. Isso explica a forma pouco usual que essa tese assumiu. A famosa frase “*... after some algebra, one gets...*” (...depois de alguma álgebra, chega-se a...), por exemplo, tão comum em trabalhos científicos, foi evitada ao máximo aqui. Todas as passagens algébricas foram efetuadas explicitamente ou no próprio texto ou em apêndices, justamente, para facilitar o estudo pelos alunos que se interessarem pelo assunto. Inúmeras questões básicas foram também abordadas em detalhe tornando o texto, em muitos trechos, mais parecido com notas de aula do que com uma tese, particularmente o Capítulo III. Peço desculpas antecipadas aos leitores pela desleigância do texto mas como justificativa o que posso dizer é que foi por uma boa causa.

A escolha de um tópico um tanto fora do tema que atraiu minha atenção durante grande parte da minha carreira – as ondas superficiais geradas pelo vento – foi um desafio extra que tive de enfrentar. Lidar com um assunto sobre o qual não se tem tanta familiaridade traz a desvantagem de não se conhecer bem a literatura sobre o tema. Tentei amenizar essa questão da melhor maneira possível, mas, mesmo assim, sempre fica a impressão de que trabalhos importantes passaram despercebidos. Espero não ter cometido nenhuma falha grave nessa questão, mas, se cometi, peço desculpas aos autores que foram, inadvertidamente, esquecidos.

Por outro lado, vi aí uma oportunidade de expandir um pouco meus conhecimentos sobre um assunto afeto a um tema que me fascinou desde o tempo do doutorado na UCSD (Universidade da California, San Diego) na década de oitenta: a dinâmica dos escoamentos geofísicos, um ramo da mecânica dos fluidos que trata de escoamentos diretamente afetados pela rotação da Terra e, portanto, com resultados muito diferentes dos escoamentos da mecânica dos fluidos usual, dos quais as ondas superficiais são parte. Desde a década de oitenta nutro grande simpatia pela força de Coriolis ! Curiosamente, ao longo do trabalho percebi que não iria me livrar totalmente das ondas, simplesmente teria de aumentar o período e o comprimento das ondas com que iria lidar.

Sim, foram dois anos de trabalho solitário, as vezes, dolorosamente solitário. Em muitas ocasiões sentia enorme necessidade de mostrar o que estava fazendo e de trocar ideias com colegas, mas isso era sempre difícil face aos compromissos do dia-a-dia de todos. Mesmo assim, em muitos casos, graças ao bendito correio eletrônico, pude desfrutar da ajuda de vários colegas, aos quais faço questão de agradecer, são eles: Albano Alves, Alberto Piola, Afonso Paiva, Beatriz Melo, Davide Franco, Eduardo Marone, Felipe Pimenta, Geraldo Silva, Guilherme Castelão, João Nicolodi, José Fontoura, Pablo Santoro e Ricardo Camargo.

Desejo registrar meus agradecimentos também ao Sr. Wilmar Silveira e sua equipe da RG Pilots, praticagem do Porto de Rio Grande, pela cessão dos dados maregráficos de Rio Grande os quais foram de fundamental importância para a realização desse estudo.

Agradecimentos especiais são devidos a Rodrigo Lisboa e Debora Machado pela ajuda na obtenção dos dados atmosféricos do NCEP/NOAA e da batimetriaETOPO. Rodrigo e Debora sempre atenderam a todos os meus, muitas vezes insistentes, pedidos com a maior boa-vontade e presteza e sou-lhes muito grato pela gentileza e atenção.

Além dessa ajuda com os dados, Debora Machado também teve uma participação crucial nessa tese ao assumir minhas disciplinas no curso de Engenharia Civil Costeira e Portuária durante os anos de 2015 e 2016. Sem essa ajuda, não tenho dúvida, teria sido *impossível* realizar o presente trabalho, portanto, quero deixar registrada minha gratidão a Debora por essa inestimável ajuda.

Agradecimentos especiais são também devidos aos colegas Lauro Calliari, Paolo Alfredini, Paulo Rosman e João Lorenzetti por terem aceitado fazer parte da banca examinadora dessa tese e por disponibilizar generosamente seu valioso tempo na revisão desse longo texto. As contribuições dos colegas foram muito apreciadas e de grande importância para o aperfeiçoamento do trabalho.

Finalmente, quero agradecer minha esposa, prof<sup>a</sup>. Henriette Lebre La Rovere, pelo seu amor e carinho, mas não apenas por isso... Na verdade, agradecimentos assim às esposas sempre aparecem em teses e livros, mas, no meu caso, a ajuda da esposa foi bem além. Mesmo sendo especialista em mecânica dos sólidos, Henriette (que também é engenheira civil e Ph.D. em Engenharia Estrutural pela UCSD) me ajudou *muito* nas inúmeras deduções matemáticas que fiz (fizemos) ao longo do trabalho. O desenvolvimento do método numérico que consta do Apêndice 7, por exemplo, teria sido bem mais difícil não fosse pela ajuda de Henriette. Na falta de colegas da área para trocar ideias e no afã de falar com alguém sobre o que eu estava fazendo... sobrou para ela... Henriette teve de escutar, pacientemente, minhas longas explanações sobre as várias nuances do fenômeno da maré meteorológica e, muitas vezes, fazendo comentários valiosos ! Bem, acho que sou um homem de sorte.

# CAPÍTULO I

## Introdução: Conceitos Básicos, Justificativa e Objetivos

### ÍNDICE

I.1 - Preâmbulo: Sobre o Uso da Palavra “Maré” no Presente Trabalho .....	6
I.2 - Maré Astronômica no Brasil .....	7
I.3 - Maré de Origem não-Astronômica e Maré Meteorológica na Costa Sul/Sudeste Brasileira.....	9
I.4 - Aspectos Físicos Básicos sobre as Variações de Nível do Mar induzidas pela Atmosfera na Banda Meteorológica .....	10
I.4.1 - Efeito da Pressão Atmosférica .....	10
I.4.2 - Efeito do Vento .....	
I.4.2.1 - Wind Set-up/Set-down .....	12
I.4.2.2 - Maré Meteorológica .....	14
I.4.2.3 - Maré de Tempestade (“Storm Surge”) .....	16
I.4.3 - Bônus: Wave Set-up .....	17
I.5 – Justificativa e Objetivos da Tese .....	20
I.6 – Estrutura do Trabalho .....	20

### I.1 - Preâmbulo: Sobre o Uso da Palavra “Maré” no Presente Trabalho

O dicionário Aurélio da língua portuguesa apresenta o seguinte significado (leigo) para o verbete *maré*: “*Aumento periódico do volume das águas do oceano*”. Do ponto de vista científico, o verbete ficaria um pouco mais satisfatório se a palavra “*aumento*” fosse trocada por “*variações*” e a palavra “*volume*” fosse substituída por “*nível*”. Assim uma definição alternativa caracterizaria a “*maré*” como “*Variações periódicas do nível das águas dos oceanos*”. Entretanto, mesmo essa definição melhorada não fornece informação sobre a faixa temporal da *periodicidade* e, consequentemente, da origem dessas variações.

Historicamente, a relação entre as fases da Lua e as variações de nível do mar é conhecida há séculos. Assim, é de se supor que as “*variações periódicas do nível do mar*” que subsidiaram a definição do dicionário devem ter sido aquelas que ocorrem em resposta à ação de forças de origem astronômica sobre os oceanos. Para um leigo, portanto, a palavra “*maré*” associa-se automaticamente às variações de nível de origem astronômica. Nesse contexto, uma definição um pouco menos imprecisa do verbete “*maré*” seria: *oscilações periódicas do nível das águas dos oceanos causadas pela ação da Lua e do Sol*. Essa conexão da palavra “*maré*” com a “*maré astronômica*” enquadraria bem termos como “*maré cheia*”, “*maré vazia*”, “*maré de sizígia*”, “*maré de quadratura*” e todas as expressões associadas à maré astronômica.

Todavia, o entendimento acima restringiria por demais o uso da palavra maré e, certamente, entraria em conflito com a designação do fenômeno que é o tema desse trabalho o qual é uma “*maré*” que não possui origem astronômica, mas que corresponde à resposta do mar à ação da atmosfera com flutuações numa determinada escala de tempo (a ser estabelecida).

Assim, com a devida vênia do dicionário, no presente trabalho a palavra “*maré*” será usada para identificar flutuações de nível do mar num contexto mais amplo, não necessariamente relacionado a forças de origem astronômica. Uma forma de evitar confusão seria passar a usar o substantivo “*maré*” sempre acompanhado de um adjetivo, de forma a acomodar todos os fenômenos que lhe possam ser associados. Nessa ótica, a palavra “*maré*” do dicionário passaria a ser “*maré astronômica*” abrindo a possibilidade para vários outros tipos de maré, como a “*maré meteorológica*”, da qual trata essa Tese, a “*maré de vento*”, a “*maré de tempestade*”, dentre outras.

## I.2 - Maré Astronômica no Brasil

Variações do nível do mar ocorrem numa vasta escala temporal cobrindo segundos, minutos, horas, semanas, meses, anos, décadas, séculos, milênios, etc. Certamente a mais conhecida é a maré astronômica: oscilações de caráter periódico, concentradas em períodos próximos a 12 e 24 horas, que resulta da resposta dos oceanos à ação das chamadas *Forças Geradoras de Maré* (FGM), originadas da ação gravitacional dos sistemas Terra-Lua e Terra-Sol sobre o oceano [ ver, por ex., Lisitzin (1974) ].

A origem astronômica das FGM faz com que essas forças tenham caráter regular e previsível resultando numa resposta – a maré astronômica – igualmente regular e, a princípio, previsível. Esse fato tem sido explorado desde o início do século passado para a previsão de maré (astronômica), a partir da análise harmônica de registros de nível *em um determinado local* [ Franco (1988) ]. A previsão, conhecida no Brasil como “*Tábuas de Mare*”, é, confirmadamente, bastante precisa em locais onde as flutuações de nível são dominadas pela maré de origem astronômica.

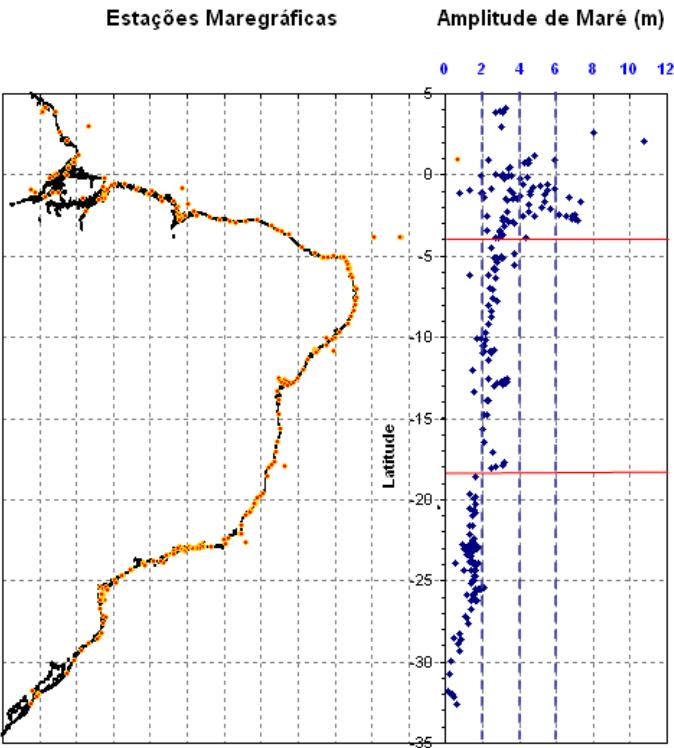
O sucesso na definição das FGM juntamente com uma ideia equivocada de que a resposta das águas dos oceanos a essas forças dá-se de forma *automática* originou a teoria da chamada *maré de equilíbrio* na qual a maré astronômica nos oceanos é interpretada como um reflexo direto do campo de forças geradoras de maré. A maré de equilíbrio desconsidera a inércia da água bem como possíveis perdas de energia do escoamento resultante. Ela prevê corretamente o tipo de variação temporal que pode ocorrer como resultado da FGM em um determinado local mas é inútil para prever a distribuição geográfica da maré nas bacias oceânicas.

A interpretação correta do fenômeno da maré astronômica foi esplendidamente sintetizada por Gill (1982), pag. 391, “*a resposta das águas dos oceanos às FGM é dada pela solução das equações de ondas longas forçadas na superfície de uma esfera em rotação com topografia de fundo e fronteiras laterais bastante complicadas*”. Trata-se, portanto, de um complicadíssimo problema de mecânica dos fluidos que envolve a existência de ondas que se propagam e se adequam à topografia e ao formato das bacias oceânicas. Devido à complexidade da geometria e à rotação da Terra, essas ondas tendem a desenvolver pontos – chamados *pontos anfídrônicos* – em torno dos quais a onda gira e onde a variação vertical do nível é nula.

Em termos simples, a amplitude da maré astronômica em um determinado local da *costa* depende da amplitude das ondas de maré astronômica oceânicas na borda da plataforma continental, a qual depende da distância até os respectivos pontos anfídrônicos, e também das características da própria plataforma.

A figura (I.1), extraída de Velloso e Alves (2006), com autorização dos autores, mostra o comportamento da *amplitude* da maré astronômica ao longo da costa brasileira. Os dados na figura são uma compilação das *amplitudes* das componentes da maré astronômica obtidas da análise harmônica para um conjunto de sítios costeiros (assinalados por pontos amarelos na figura). Para cada local, uma amplitude representativa ( $H$ ) foi calculada como duas vezes o nível de redução do ponto em questão. Observa-se que, de acordo com o jargão da área, a “*amplitude*” acima referida corresponde à diferença de níveis entre marés altas e baixas consecutivas, uma grandeza com mais afinidade com a “*altura*” de uma onda do que com a “*amplitude*” na matemática usual.

Como se pode perceber inspecionando a figura, a amplitude da maré astronômica no Brasil tende a aumentar de Sul para Norte ao longo da costa. Com efeito, usando o critério de Davies [Velloso e Alves (2006)], a maré astronômica na costa S/SE (até o Sul da Bahia) enquadra-se num regime de micro-maré ( $H < 2\text{ m}$ ), a costa Nordeste (até o Ceará) num regime de meso-maré ( $2 < H < 4\text{ m}$ ) e a costa Norte brasileira num regime de macro-maré ( $H > 4\text{ m}$ ). Em alguns locais no extremo norte do país, a maré astronômica atinge níveis de hiper-maré ( $H > 6\text{ m}$ ). Na figura (I.1), a linha pontilhada **azul** representa os limites de micro, meso e macro maré, e a linha **vermelha** contínua demarca as faixas de latitude onde ocorrem as principais mudanças.



**Figura I.1** – Amplitudes de Maré Astronômica na costa brasileira [Extraído de Velloso e Alves (2006)]

É importante ressaltar que em alguns sítios costeiros próximos à região amazônica, a combinação de marés astronômicas de grande amplitude, plataforma continental larga e rasa e a presença de estuários afunilados dão origem ao fenômeno da Pororoca (“*tidal bore*” em inglês), nos quais a onda de maré astronômica desenvolve uma variação abrupta assumindo a forma de um verdadeiro “rolo” de água móvel que avança estuário a dentro causando destruição nas margens dos rios e criando grande risco à navegação. No outro extremo do país, por outro lado, a maré astronômica é surpreendentemente pequena, com amplitudes que mal chegam a 0.5 metro.

A principal razão pela qual a maré astronômica comporta-se dessa maneira no Brasil relaciona-se à localização dos pontos anfidrômicos das componentes de maré no Atlântico Sul, os quais refletem, em última análise, o modo pelo qual as ondas de maré astronômica se ajustam dentro da bacia desse oceano. Por exemplo, a componente principal lunar (M2) da maré astronômica possui um ponto anfidrônico secundário logo ao largo da costa do Rio Grande do Sul, o qual faz com que a contribuição da Lua na maré astronômica seja bem pequena na região sul do país [ Schwiderski (1980) ]. Mais ao Norte, a distância ao ponto anfidrônico (principal) da M2 aumenta e com ela aumenta a amplitude da maré astronômica.

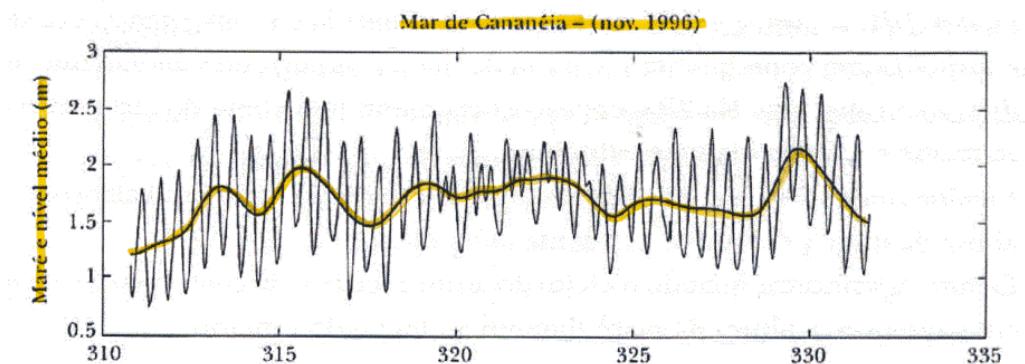
Mais perto do equador, a componente M2 desenvolve um cinturão de amplitudes elevadas que cruza a bacia atlântica, ligando a América do Sul à África, o qual deriva da combinação das ondas de maré dos oceanos Atlânticos Norte e Sul. Isso explica, em parte, o regime de macro-maré encontrado na costa Norte. A outra parte do motivo está na plataforma continental da região que é larga e rasa, fornecendo condições favoráveis para uma amplificação extra.

A maré astronômica no Brasil é predominantemente semi-diurna com duas marés altas e duas baixas por dia [Velloso e Alves (2006)]. Como em outras partes do planeta, a maré astronômica no Brasil é bem entendida e perfeitamente previsível. Informações sobre a maré astronômica (Tábuas de Maré) são fornecidas para vários locais ao longo da costa pela Marinha Brasileira e são usadas rotineiramente por todos que precisam dessa informação.

Entretanto, como será visto a seguir, a previsão dada pelas Tábuas de Maré para a costa S/SE brasileira é bastante imprecisa, frequentemente com erros da ordem de 100% em relação ao nível real do mar. Eis aí o primeiro sinal da presença importante de uma maré de origem não-astronômica nesse trecho da nossa costa.

### I.3 - Maré de Origem não-Astronômica e Maré Meteorológica na Costa Sul/Sudeste Brasileira

Certamente, desde que as primeiras medições de nível do mar começaram a ser feitas no Brasil, verificou-se que o comportamento da maré na costa S/SE do nosso país tinha algo diferente [ Franco (1988) ]. De fato, as variações regulares com duas subidas e duas descidas do nível ao longo do dia, tipicamente associadas à maré astronômica, apresentavam-se invariavelmente contaminadas por uma flutuação de período mais longo e de caráter irregular. A figura (I.2), um maregrama obtido em Cananéia, SP, pela equipe do Prof. Afranio Mesquita, ilustra essa característica da maré nesse trecho da costa brasileira.



**Figura I.2.** Maregrama obtido pela equipe do Prof. Mesquita no litoral de Cananéia, SP. Eixo x é em dias corridos. A linha preta é a maré astronômica, a linha grifada em amarelo corresponde a maré não-astronômica.

Adicionalmente, pela sua magnitude, essa maré de origem não-astronômica introduz erros significativos nas previsões das Tabuas de Maré para todos os sítios nesse trecho da costa brasileira, causando grande inconveniência e, em alguns casos, (como em Rio Grande, RS), tornando as Tábuas de Maré praticamente inúteis para uma previsão precisa do nível real do mar.

O termo “*maré meteorológica*” (abreviada “MM” daqui por diante) deve ter surgido de uma simples comparação dessas oscilações não-astronômicas do nível com o regime de ventos: certamente havia indícios de algum tipo de conexão entre esses dois fenômenos naturais. O autor desconhece quando exatamente essa terminologia foi introduzida no nosso país bem como uma definição precisa da faixa de períodos (ou banda de frequências) que caracteriza a MM. Por isso, o desvio do nível do mar em relação à maré astronômica será designado pelo termo mais abrangente de *maré não-astronômica* ou *nível não-astronômico* (doravante abreviado NnA). Dessa forma, o NnA deve incluir a MM mas não se restringe a ela.

Assim, para obter-se o NnA presente num certo maregrama basta subtrair-lhe a maré astronômica própria para o local, sendo o resíduo o NnA. No que concerne o efeito da atmosfera sobre o mar, essa definição do NnA inclui uma vasta gama de frequências pois a atmosfera pode induzir variações no nível do mar em escalas de tempo que vão desde minutos a anos [Para exemplos na costa brasileira, ver: Mesquita, Franco e Harari (1987) e Neves (2005)].

Ora, mesmo sem uma análise aprofundada (a ser feita em breve), o aspecto dos maregramas, juntamente com a associação do fenômeno à passagem de frentes frias sugere claramente que a faixa de períodos de interesse para a MM seria a própria escala de tempo dos sistemas atmosféricos sinóticos, algo entre alguns dias a poucas semanas.

Admitindo ser essa a periodicidade típica da MM, o próximo passo para o entendimento físico do fenômeno é analisar como a atmosfera pode induzir variações de nível do mar junto à costa nessa escala de tempo. O entendimento dessa questão demanda conhecimentos básicos sobre os mecanismos físicos que possibilitam a atmosfera a induzir variações de nível do mar junto à costa. Esse é o próximo assunto dessa introdução.

## I.4 - Aspectos Físicos Básicos sobre as Variações de Nível do Mar induzidas pela Atmosfera na Banda Meteorológica

Na faixa de frequência de interesse para o presente trabalho, a atmosfera pode induzir variações de nível no mar por meio de dois efeitos mecânicos:

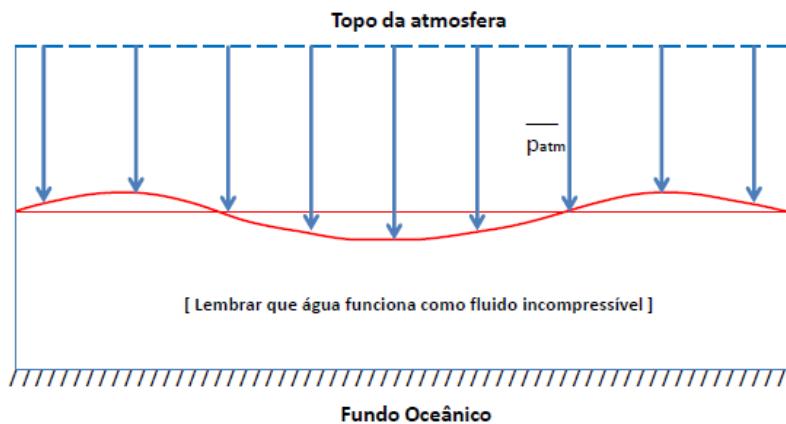
- (i) *pressão* (tensão normal) da atmosfera sobre o oceano e
- (ii) *arraste* (tensão tangencial) ocasionado pela tensão do vento na superfície do mar.

Na sequência dessa seção, conceitos físicos básicos sobre a ação desses dois agentes sobre o mar são discutidos e analisados.

### I.4.1 - Efeito da Pressão Atmosférica

O efeito mais conhecido da pressão atmosférica sobre as águas oceânicas é o chamado Barômetro Invertido (BI) que corresponde, essencialmente, a uma resposta *estática* do oceano ao peso da atmosfera. Esse é um tópico por demais complexo [ver, por ex., Wunsch e Stammer (1997) para uma análise aprofundada e para uma lista de referências] e aqui será feito apenas um brevíssimo resumo direcionado ao contexto do presente estudo.

Segundo Gill (1982), pág. 337, a ideia básica do BI é que o sistema atmosfera-oceano encontra-se em equilíbrio com relação à pressão atmosférica média sobre o oceano [ a pressão atmosférica *média* ao nível do mar varia com a latitude, a média *global* sobre o oceano é 1013.3 mb, Hoar e Wilson (1994) ]. Assim, se o equilíbrio for perturbado e houver um aumento/diminuição de pressão atmosférica (em relação à média) em um determinado local, o oceano vai responder rebaixando/aumentando o seu nível de forma a manter a pressão (total) sobre o fundo oceânico constante. A figura (I.3) ilustra *esquematicamente* o princípio do Barômetro Invertido.



**Figura I.3 – Ilustração esquemática do barômetro invertido.**

Em um raciocínio físico simples, considerando que a água se comporta como um fluido incompressível e considerando um oceano de profundidade finita e com fronteiras laterais, o princípio da conservação da massa requer que um aumento/rebaixamento de nível num dado local seja acompanhado por uma rebaixamento/aumento do nível em outro local. Assim, uma resposta tipo BI não pode consistir exclusivamente de movimentos verticais da água devendo, necessariamente, incluir deslocamentos horizontais do fluido (i.e. correntes e, eventualmente, ondas). Ora, esses deslocamentos precisam de uma força motriz para existir e essa força deve vir da ação da atmosfera. Portanto, uma *parcela* dos gradientes horizontais de pressão impostos pela atmosfera na superfície deve ser “usada” para movimentar a água horizontalmente, perturbando a resposta estática e instantânea (i.e., em fase) prevista pelo BI.

Todavia, se o movimento horizontal das águas for pequeno o suficiente, a perturbação pode ser desprezada e a resposta dada pelo BI deve dominar. [ A rigor, no caso de um oceano estratificado, é possível que a força motriz provenha apenas das variações das isopicnais, sem necessariamente haver variações de nível na superfície, Wunsch e Stammer (1997) ]. Em

essência, a menos que haja algum tipo de *ressonância* (discutida adiante) a teoria prevê ser esse o caso, principalmente no oceano profundo e, portanto, uma resposta tipo BI é normalmente aceita como sendo a *regra* da resposta do oceano à ação da pressão atmosférica. Assim, com o movimento reduzido a zero, a topografia da superfície em resposta à pressão atmosférica acompanharia aquela que surgiria dos registros invertidos de uma rede de barômetros espalhados pela superfície oceânica e a pressão no fundo oceânico manter-se-ia constante, pois o peso total por unidade de área da coluna de ar e água acima permaneceria a mesma em qualquer ponto.

Uma dedução da relação *nível × pressão* atmosférica do BI é apresentada, por exemplo, em Pugh (1982) pág. 194, admitindo a priori uma resposta estática (velocidade = 0) do oceano. Sem movimento, forças provenientes de gradientes horizontais de pressão atmosférica na superfície do oceano devem ser exatamente compensadas por inclinações do nível do mar, resultando na seguinte expressão,

$$\Delta\eta = -\frac{\Delta p_{atm}}{\rho g} \quad (\text{I.1})$$

onde  $\Delta\eta$  = desvio do nível em relação ao nível de repouso,  $\Delta p_{atm}$  = desvio da pressão em relação a  $p$  media,  $\rho$  = massa específica da água do mar e  $g$  = aceleração da gravidade.

Expressando  $\rho$  em  $kg/m^3$ ,  $g$  em  $m/s$ , a pressão em *milibares (mb)* e o nível em *cm*, tem-se:

$$\Delta\eta = -0.993 \Delta p_{atm} \quad (\text{I.2})$$

Portanto, o BI prevê que a um aumento/diminuição de  $p_{atm}$  de 1 mb corresponde uma diminuição/aumento de nível de (praticamente) 1 cm.

Um aspecto de interesse diz respeito à possibilidade de *ressonância* entre a forçante e a resposta, a qual implicaria numa amplificação do nível bem acima da resposta “estática”. De maneira geral, o fenômeno da ressonância ocorre quando a frequência da forçante se iguala à frequência própria de “vibração” do sistema físico em questão. No oceano, as frequências próprias de “vibração” correspondem às frequências de ondas livres (modos) possíveis de existir no contexto em questão, Wunsch e Stammer (1997).

No caso de campos de pressão móveis, a ressonância ocorre quando a velocidade de deslocamento da pressão atmosférica coincidir com a velocidade de propagação de uma onda livre no oceano. Essa questão é abordada em Pugh (1982), pag. 196 [citando Platzman (1953)], para um caso particular de um corpo d’água raso, de profundidade constante, desprezando efeitos de rotação e de estratificação, efeitos não lineares, e ainda desprezando o atrito da água com o fundo. O resultado final dessa análise é dado pela expressão que consta da pág. 197 de Pugh (1982):

$$\text{Resposta Dinâmica} = \frac{\text{Resposta Estática}}{(1 - C_A^2/gD)} \quad (\text{I.3})$$

onde  $C_A$  é a velocidade de propagação da perturbação de pressão atmosférica e  $\sqrt{gD}$  a velocidade de propagação de uma onda longa livre no mar.

Se o campo de pressão é estacionário,  $C_A = 0$  e a resposta estática é obtida. À medida que  $C_A$  aumenta, a resposta do nível é amplificada atingindo valor infinito quando  $C_A = \sqrt{gD}$ . Obviamente, essa ressonância teórica é limitada pela fricção.

Esse mecanismo de ressonância por pulsos móveis de pressão atmosférica tem sido utilizado para explicar a existência de ondas com períodos na faixa de minutos, chamadas de Tsunamis Meteorológicos, ou, abreviadamente, Meteo-Tsunamis, observadas em alguns locais [ Para referências no Brasil, ver Melo Fº et al. (2004) para uma aplicação à costa do RS e para uma lista de referências sobre o assunto e Melo Fº et al. (2010) para uma aplicação à costa de SC ].

Intuitivamente, o efeito BI deve ser válido para variações lentas da pressão atmosférica. Hoar e Wilson (1994) discutem essa e outras questões num contexto oceânico (i.e. longe da costa) no intuito de testar a hipótese do BI para uso em medições de nível do mar por altimetria via satélite. Segundo esses autores, “a aproximação do BI é razoável na maior parte dos oceanos, mas uma parte da variabilidade do nível do mar pode estar relacionada com a pressão atmosférica por meios outros que não o BI”.

Na costa, resultados sobre a validade do BI são menos conclusivos: em alguns locais parece haver evidências em suporte, porém em outros locais a relação entre nível e pressão atmosférica prevista pelo BI não é tão simplesmente confirmada. Chelton e Davis (1997) apontam a dificuldade em se separar a resposta do oceano ao carregamento da pressão atmosférica da resposta devido à ação do vento na superfície. O motivo é que vento e pressão são fenômenos correlacionados entre si e estudos estatísticos de correlação entre essas variáveis e o nível vão encontrar dificuldade em isolar o efeito da pressão do efeito do vento. Diversos autores [ e.g., Adams e Buchwald (1969) e Gill e Schumann (1974) ] indicam que, em regiões costeiras, o efeito da tensão do vento nas variações de nível tem ordem de magnitude uma a duas vezes maior que o efeito da pressão atmosférica.

O presente estudo adotará a abordagem usualmente utilizada [e.g. Castro e Lee (1995)] na qual o BI é admitido como válido para a região costeira. Assim, o efeito da pressão atmosférica é *automaticamente* levado em conta por meio de um simples ajuste das medições de nível subtraindo/somando 1 cm para cada mb de aumento/diminuição da pressão atmosférica local em relação à pressão média.

### I.4.2 - Efeito do Vento.

Além da pressão atmosférica o movimento horizontal do ar (vento) sobre a superfície das águas também perturba a condição de equilíbrio do oceano. A ação do vento sobre o mar é um tópico de grande complexidade e com vasta literatura [ ver, por exemplo, Phillips (1986) ] e o objetivo aqui é, novamente, apresentar um brevíssimo resumo com enfoque direcionado ao contexto do presente estudo.

De forma (extremamente) simplificada, o vento provoca dois efeitos dinâmicos na superfície do oceano: (i) gera ondas superficiais de gravidade e (ii) induz uma tensão de arraste. No presente estudo, apenas o segundo efeito será considerado e com foco no caso costeiro, ou seja, águas rasas em presença de uma fronteira.

A tensão (tangencial) de arraste do vento sobre a superfície do oceano é relacionada à velocidade do vento (por convenção, usa-se o vento a 10 m de altura) de forma parametrizada segundo a concepção de que tensões em escoamentos turbulentos variam com o quadrado da velocidade. A tensão aplicada na superfície é transmitida para o interior do fluido pelo efeito da viscosidade da água e, principalmente, pela turbulência do escoamento promovendo uma transmissão de momentum da atmosfera para o oceano que põe as águas em movimento. Se o movimento atingir o leito marinho (normalmente o caso em águas rasas), o fundo exercerá uma tensão (tangencial) de atrito que opor-se-á ao escoamento (i.e., terá sentido oposto ao da velocidade), a qual, da mesma forma que a tensão do vento, será transmitida ao interior da massa d'água pela viscosidade e, principalmente, pela ação da turbulência do escoamento. Usualmente, a tensão de atrito com o fundo, similarmente à tensão do vento na superfície, é representada de forma parametrizada em função do quadrado de alguma velocidade representativa do escoamento.

A questão central aqui é entender fisicamente como a tensão do vento pode afetar o nível do mar na costa.

#### I.4.2.1 - Wind Set-up/Set-down

O primeiro efeito a ser visto é conhecido em inglês como “*wind set-up/set-down*”. O termo em inglês será mantido por não haver uma tradução em português estabelecida para o fenômeno. Esse tópico é tratado por muitos autores, como, por exemplo, nos livros texto de Pugh (1986), pág. 198, e de Dean e Dalrymple (1991), pág. 157. Um aspecto fundamental na abordagem do *wind set-up/set-down* (muitas vezes esquecido em livros texto) é a *desconsideração do efeito da rotação da Terra* na dinâmica do fenômeno, o que reduz a validade do resultado, no caso de uma costa aberta, a escalas de tempo da ordem de algumas horas.

Com efeito, a condição que deve ser atendida para que o efeito da rotação da Terra no escoamento possa ser desprezado é que a escala de tempo do fenômeno seja menor do que o período inercial local ( $T_{in}$ , a ser apresentado formalmente no Capítulo III), o qual é dado pela expressão:

$$T_{in} = \frac{2\pi}{f} \quad (\text{I.4})$$

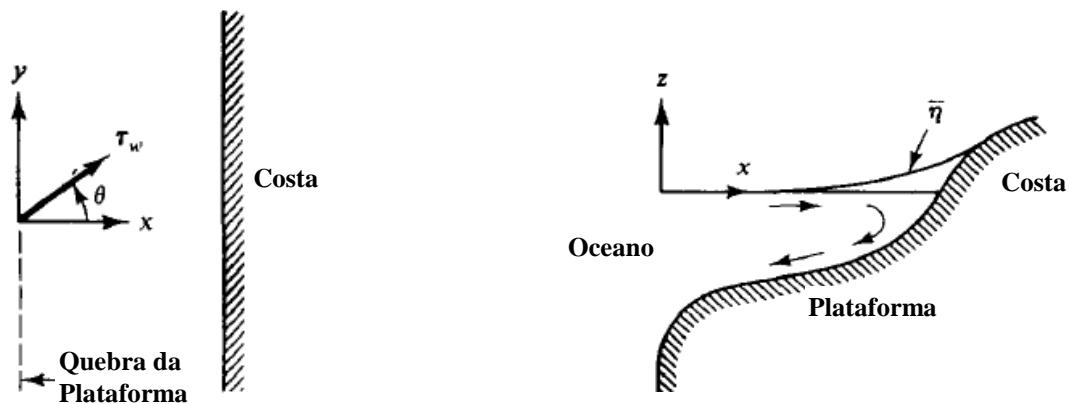
onde  $f$  é o parâmetro de Coriolis, definido por

$$f = 2\Omega \sin(\theta) \quad (\text{I. 5})$$

em que  $\Omega$  = velocidade angular de rotação da Terra e  $\theta$  = latitude local.

O período inercial, portanto, depende da latitude. Para o Rio de Janeiro (latitude =  $23^\circ$ ) é de  $30.7\text{ h}$ . Para o extremo sul brasileiro (latitude =  $33^\circ$ ) o valor é  $22.0\text{ h}$ .

Essencialmente, a física que opera no *wind set-up/set-down* consiste no seguinte: considere a situação de um vento soprando perpendicularmente a uma costa longa e retilínea, no sentido do mar para a terra (para efeito de raciocínio). Na ausência de rotação, a tensão de arraste induzida por esse vento sobre a superfície da água vai causar um escoamento na direção da terra. Devido à sua impermeabilidade, a linha de costa funciona como uma barreira à passagem da água. Após algum tempo a partir do início do vento, o escoamento deve atingir uma situação de equilíbrio na qual toda a água impelida pelo vento para a costa (preferencialmente pela parte superior da coluna d'água) deverá retornar ao mar (preferencialmente pela parte inferior da coluna d'água) de modo que o princípio da conservação da massa seja atendido. Ora, essa corrente de retorno requer uma força motriz para sua existência. Tal força advém do gradiente de pressão que se estabelece com a inclinação da superfície da água devido ao acúmulo de água na costa. A sobre-elevação do nível d'água na costa causada por esse acúmulo de água é o *wind set-up*. O retorno da água pelo fundo vai produzir uma força de atrito que, curiosamente, atua na mesma direção do vento. A figura (I.4) ilustra essa situação.



**Figura I.4** - ilustração esquemática do *wind set-up* [adaptada de Dean e Dalrymple (1991)]

Portanto, a conservação de momentum global (i.e. integrado na coluna d'água) na situação final vai demandar que a força do vento (do mar para a costa), a força de pressão devida à inclinação da superfície do mar (da costa para o mar) e a força de atrito do escoamento de retorno (do mar para a costa) estejam em equilíbrio. Se essas forças globais puderem ser determinadas de forma simplificada em função da velocidade do vento e da geometria e características do fundo, o balanço de forças acima descrito permitirá escrever uma equação simples para estimar o *wind set-up*.

Dean e Dalrymple (1991), pág. 159, apresentam uma solução analítica da equação resultante para o caso de uma plataforma plana com profundidade variando linearmente com a distância à costa. O resultado pode ser usado como uma primeira estimativa para o *wind set-up* em casos que atendam aproximadamente às premissas do problema.

Todo o raciocínio acima deve ser invertido para um vento perpendicular à costa soprando no sentido da terra para o mar, o qual induziria um rebaixamento do nível na costa: um *wind set-down*.

É importante observar que, segundo essa teoria, um vento *paralelo* à costa (em qualquer sentido) *não* induz variação de nível. De fato, no caso de uma costa longa e retilínea (sem cabos ou promontórios), a tensão de vento vai simplesmente acelerar as águas ao longo da costa a partir do instante inicial tendo como única resistência o atrito do escoamento com o fundo. Como esse último depende da velocidade do escoamento (ao quadrado), à medida que a velocidade da corrente aumenta, a resistência também aumenta e o processo progride até que uma velocidade “terminal” seja atingida. A partir desse momento, uma situação de equilíbrio dinâmico, com a força do vento igualando-se à força de atrito, se estabelece e o escoamento se mantém. A conservação da massa (ao longo da costa) é automaticamente satisfeita e o nível d'água não é alterado nesse caso. Esse cenário se aplica a situações nas quais os efeitos de rotação da Terra possam ser desconsiderados, conforme apontado acima.

#### I.4.2.2 Maré Meteorológica

O cenário muda completamente quando a escala de tempo de atuação do vento excede o período inercial, a situação de interesse para a *maré meteorológica*, pois nesse caso a rotação da Terra passa a ter participação crucial no fenômeno.

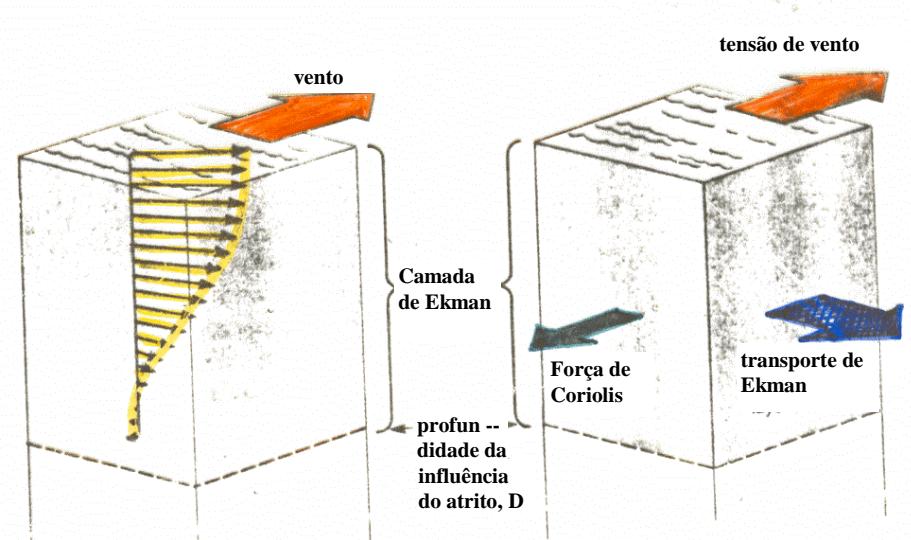
O mecanismo físico básico do efeito da rotação pode ser entendido da seguinte forma. Qualquer corpo (sólido ou fluido) que se move num referencial em rotação aparenta, para quem observa o movimento do próprio referencial, sofrer um desvio da sua trajetória. Na Terra, devido ao sentido de rotação do planeta de Oeste para Leste, o desvio é para a esquerda no hemisfério Sul e para a direita no hemisfério Norte.

Ora, um referencial em rotação não é um referencial inercial e a maneira de se adaptar às leis físicas dinâmicas (definidas usualmente para referenciais inerciais) para um referencial em rotação (a Terra) é atribuir esse desvio lateral à ação de uma força (força de Coriolis) que atua perpendicularmente ao movimento (logo provocando um desvio lateral), e cujo módulo é proporcional à velocidade de deslocamento e que depende também da latitude local. Uma apresentação concisa do formalismo matemático por trás desses conceitos físicos pode ser encontrada, por exemplo, em Kundu (2001), pág 94.

Essas ideias, quando aplicadas à corrente induzida pelo vento no mar, explicam porque o vento *paralelo* à costa é que deve induzir variações de nível no caso de um fenômeno com escala de tempo com frequência “*sub-inercial*” como a MM.

Segundo registra a história, Ekman foi o primeiro a resolver matematicamente o escoamento induzido pelo vento no mar num caso simplificado de um vento uniforme atuando num oceano profundo e sem fronteiras laterais e admitindo uma transmissão de momentum vertical idealizada. Simplificadamente, Ekman mostrou que a corrente resultante desenvolve um perfil em espiral (que ficou conhecida como Espiral de Ekman) e restrita a uma fina camada superficial (Camada de Ekman). Analisando o balanço global (i.e., integrado na vertical) de massa e de momentum, Ekman mostrou que o efeito líquido da tensão do vento é transportar as águas dessa camada superficial numa direção perpendicular à direção do vento (Transporte de Ekman) segundo um balanço de forças (global) no qual a tensão do vento é equilibrada pela força de Coriolis associada à velocidade média na camada (Balanço de Ekman). O equacionamento e solução do problema de Ekman é um clássico e pode ser encontrado em qualquer livro texto de Oceanografia Física. [ver, por exemplo, Kundu (2001), pag. 489]. Esse importante problema será revisitado no Capítulo III do presente trabalho.

A figura (I.5) abaixo ilustra graficamente a solução de Ekman para o hemisfério Norte.



**Figura I.5** - Ilustração esquemática do Problema de Ekman para o hemisfério Norte. [ Adaptada do livro “Ocean Circulation”, Open University Group ].

Uma aplicação desse conceito à costa S/SE brasileira vai indicar que ventos paralelos à costa devem induzir transporte global de água na direção da terra sendo que o sentido do vento vai definir a resposta do nível. Considerando um vento paralelo à costa, com a costa à sua esquerda, o transporte de Ekman dar-se-ia, no hemisfério Sul, no sentido do mar para a terra. Lembrando que a costa funciona como uma barreira impermeável, a água ali aportada vai acumular-se causando

sobre-elevação do nível, ou seja, uma MM positiva. De forma análoga, um vento paralelo, com a costa à sua direita, afastaria as águas da costa induzindo um rebaixamento do nível, ou seja, uma MM negativa.

A resposta do nível do mar a ventos *paralelos* à costa tem sido percebida há muito tempo. Gill (1982), pág. 400, apresenta uma citação do Reverendo W. Derham, datada de 1703, sobre um evento de sobre-elevação do nível do mar na costa inglesa do Mar do Norte causada, segundo o Reverendo, por ventos de Nordeste, direção esta paralela à costa (com a costa à direita do vento - caso do hemisfério Norte).

Na costa S/SE brasileira, a associação de variações de nível com ventos paralelos à costa tem sido confirmada por vários autores [ver, por exemplo, Neves Fº, (1992) e Marone e Camargo (1994)]. O trabalho de Truccolo, Franco e Schettini (2004), baseado em medições feitas em Santa Catarina, ilustra bem a questão. Dentre outras coisas, esses autores correlacionaram estatisticamente as variações do nível do mar de “baixa frequência” (periodicidade maior que 55 horas) com forçantes atmosféricas locais: ventos (intensidade e direção) e pressão, concluindo que “*o vento paralelo à costa foi o principal agente motriz com um retardo de 6 a 10 horas em relação ao nível*”.

Pela orientação geral da costa brasileira nesse trecho, ventos do quadrante Sul tendem a fazer o nível na costa se sobre-elevar e ventos do quadrante Norte tendem a rebaixar o nível na costa. A figura (I.6) ilustra graficamente esse mecanismo.

#### Esquema do Mecanismo Físico para geração da Maré Meteorológica local na Costa S/SE brasileira pelo Vento



**Figura I.6** - Mecanismo físico (esquemático) para geração *local* de MM na costa S/SE brasileira pelo vento (hemisfério Sul). Maré Meteorológica POSITIVA : Vento com a costa à sua esquerda induz transporte de água (transporte de Ekman) do mar para a terra provocando sobre-elevação do nível. Maré Meteorológica NEGATIVA: Vento com a costa à sua direita, o efeito é invertido e á água é afastada da costa provocando um rebaixamento do nível.

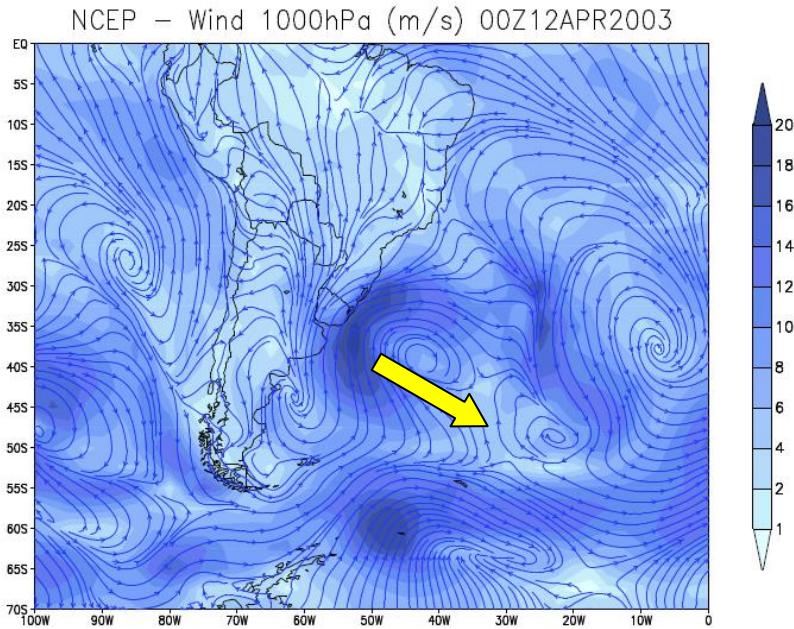
Apesar do mecanismo físico ilustrado acima estar essencialmente correto no que tange à geração *local* da MM, sua aplicação ao caso de um vento que *varia ao longo de uma costa longa e bordejada por uma plataforma continental larga* é fundamentalmente *incompleta*. O problema está no fato de que o mecanismo baseado exclusivamente no transporte de Ekman admite tacitamente que as variações de nível decorrentes vão manter-se estáticas. Como será demonstrado no presente estudo, essa hipótese é *incorrecta*.

Com efeito, um episódio vivenciado pelo autor em 2003 ilustra bem a questão. O episódio ocorreu durante a vigência do PIC-on-line, um programa de monitoramento de ondas em tempo real usando um ondógrafo Waverider fundeado ao largo da ilha de Santa Catarina, programa este conduzido pelo autor juntamente à equipe do Laboratório de Hidráulica Marítima da UFSC de 2001 a 2005. No dia 13 de Maio de 2003, o ondógrafo escapou do fundeio ficando a deriva. O episódio foi relatado por Melo Fº (2004), de onde o seguinte texto foi extraído:

“... as condições de mar estavam bastante severas devido à passagem de um ciclone extra-tropical na costa do Uruguai e do Sul do Brasil, o qual provocou ventos muito intensos sobre o mar naquela região. Além das ondas que bombardearam as praias que recebem a ondulação proveniente de Sul, o nível do mar na costa de Santa Catarina subiu bastante durante este evento. De acordo com as observações da velocidade de deriva da bóia (para o norte), a corrente que se desenvolveu

*na plataforma continental foi de uma intensidade muito forte, surpreendendo a todos. A velocidade estimada da deriva foi de cerca de 1.5 m/s”.*

Ressalta-se que o vento em SC não se intensificou, pois o Ciclone moveu-se para o mar a partir da costa do Uruguai/RS [ver fig. (I.7)], mesmo assim, o nível do mar sobre-elevou-se e as correntes se intensificaram conforme relatado.



**Figura I.7** - Campo de ventos ao nível do mar para 12/Abr/2003 mostrando a presença de um Ciclone Extra-Tropical ao largo Uruguai. Seta amarela indica o sentido de deslocamento do Ciclone [ Adaptado de Melo Fº (2004) ].

O episódio acima descrito é um bom exemplo de um evento de MM ocasionado pela passagem de uma *perturbação* de origem remota, isto é, causada por ventos que aconteceram em outro local em algum momento anterior. De fato, de acordo com o mecanismo de Ekman, ventos do quadrante Sul atuando mais ao Sul da ilha de Santa Catarina certamente geraram uma MM positiva que, aparentemente, se *propagou ao longo da costa* rumo ao norte. Esse episódio, portanto, alerta sobre a possibilidade da ocorrência de uma MM *sem* a presença de vento local.

Ao contrário do mecanismo de Ekman descrito acima, essa faceta remota da MM tem recebido menos atenção e é menos entendida no Brasil. Castro e Lee (1995) foram os primeiros a chamar a atenção para a importância da inclusão de MM's de origem remota no caso da costa brasileira. Mais recentemente, França (2013), usando resultados de modelo hidrodinâmico numérico, também identificou claramente a existência de eventos de MM que se propagam ao longo da costa. Essa é uma questão de extrema importância que será investigada a fundo no presente trabalho.

#### I.4.2.3 Maré de Tempestade (“Storm Surge”)

Um outro assunto importante diz respeito à chamada “maré de tempestade” (tradução usada por este autor para a expressão inglesa “*Storm Surge*”). Flather (2001) define o fenômeno como “*flutuações do nível do mar geradas por forçantes atmosféricas, especialmente pelo arraste do vento na superfície do mar e pela variação da pressão atmosférica na superfície, associadas a tempestades. Elas perduram por períodos indo desde poucas horas até 2 a 3 dias e tem escalas espaciais grandes comparadas à profundidade*”. Como se pode verificar, marés de tempestade são eventos que ocorrem numa escala de tempo intermediária entre o *wind set-up/set-down* e a maré meteorológica.

A maré de tempestade muitas vezes é erroneamente confundida com a maré meteorológica. A primeira diferença está na faixa de frequência (ou de periodicidade) do fenômeno: a maré de tempestade cobre uma faixa de frequência mais alta que a maré meteorológica. A outra grande diferença está relacionada com a anterior e tem a ver com a física do fenômeno. A despeito de uma interface inevitável na região da fronteira em frequência entre os dois fenômenos, a maré de tempestade é essencialmente um fenômeno *supra-inercial* o que faz com que a participação da rotação da Terra desempenhe um papel secundário. O “arraste do vento”, ao qual Flather se refere é, basicamente, a componente da tensão do vento *perpendicular*, à costa e não a paralela como no caso da MM.

Marés de tempestade são essenciais para o entendimento de variações de nível induzidas por furacões e tempestades tropicais. De fato, devido à velocidade de translação e às escalas espaciais que esse tipo de distúrbios atmosféricos tem, a passagem de um furacão por um trecho de costa ocorre numa escala de tempo da ordem de horas, não de dias [ Flather (1994) ]. Como não há furacões no Brasil, marés de tempestade de grande amplitude são incomuns no nosso país.

Todavia, mesmo não havendo furacões, é possível que, devido a uma conjugação de fatores, um vento relativamente forte com componente perpendicular à costa (soprando no sentido da costa) produza uma sobre-elevação de nível que pode, eventualmente, se superpor a algum episódio de MM pré-existente e a uma maré (astronômica) de sizígia ocasionando um evento extremo de sobre-elevação de nível de curta duração (escala de horas) que se assemelharia, quase, a um “*storm surge*” causado por um furacão. Essa combinação de fatores pode ser parte da explicação para a ocorrência de eventos extremos de sobre-elevação de nível no sul do Brasil como os reportados por Parise, Calliari e Krusche (2009) na praia do Cassino, Rio Grande, RS.

#### 1.4.3 - Bônus: Wave Set-up

Mesmo não fazendo parte do rol de variações de nível forçadas pela atmosfera na faixa de frequência próxima a faixa da MM, é oportuno incluir nessa introdução um outro fenômeno físico que pode provocar sobre-elevações de nível significativas em praias oceânicas sujeitas a ação de ondas: é o chamado “*Wave Set-up*”, uma sobre-elevação do nível “médio” causado *exclusivamente* pela arrebentação de ondas numa praia [Novamente o termo em inglês será mantido por falta de uma tradução adequada]. O termo “médio” nesse caso envolve promediações numa escala de tempo de vários períodos de onda, portanto, tem ordem de grandeza de *minutos*. Mantendo a abordagem adotada nessa introdução, o fenômeno será descrito apenas do ponto de vista físico, sem uso de equações.

Ao se aproximarem das águas rasas que formam a parte imersa de uma praia, as ondas incidentes do oceano passam por transformações radicais. Inicialmente, a diminuição progressiva da profundidade provoca alterações na esbeltez das ondas que tem sua altura aumentada e seu comprimento e velocidade de propagação diminuídos, mecanismo esse conhecido como *empinamento* (“*shoaling*”). A medida que as ondas penetram em águas cada vez mais rasas, a evolução desse processo associada a efeitos não-lineares provoca uma assimetria no perfil das ondas, com a crista movendo-se mais rapidamente que o cavado, tornando a face das ondas cada vez mais íngreme. A transformação evolui até atingir um ponto limite no qual a crista avança sobre a face da onda instabilizando o escoamento e fazendo com que a onda “arrebente”. Após a arrebentação, o escoamento altamente turbulento que se desenvolve entraña ar e a presença de pequenas bolhas de ar na água altera sua cor tornando a água esbranquiçada; água “branca”, portanto, delimita a fronteira da zona de arrebentação como ilustrado na figura (I.8).



**Figura I.8 – Imagem da zona de arrebentação na praia do Santinho, Florianópolis, SC**

Em praias com perfil regular no qual a profundidade diminui progressivamente (sem a presença de bancos de areia sucessivos, por exemplo) a onda arrebatada assume a forma de um “rolo” d’água móvel, conhecido como “macaréu” em Portugal, que avança pela zona de arrebentação dissipando a energia do escoamento e fazendo com que as ondas, ou os macaréus, percam altura rapidamente até evanescer completamente na beira da praia [ver figura (I.9) abaixo]. O *wave set-up* faz parte do complicado escoamento que se desenvolve na zona de arrebentação e sua dinâmica só começou a ser melhor compreendida a partir da introdução do conceito de *tensões de radiação* por Longuett-Higgins e Stewart (1964). Simplificadamente, a ideia consiste no seguinte.

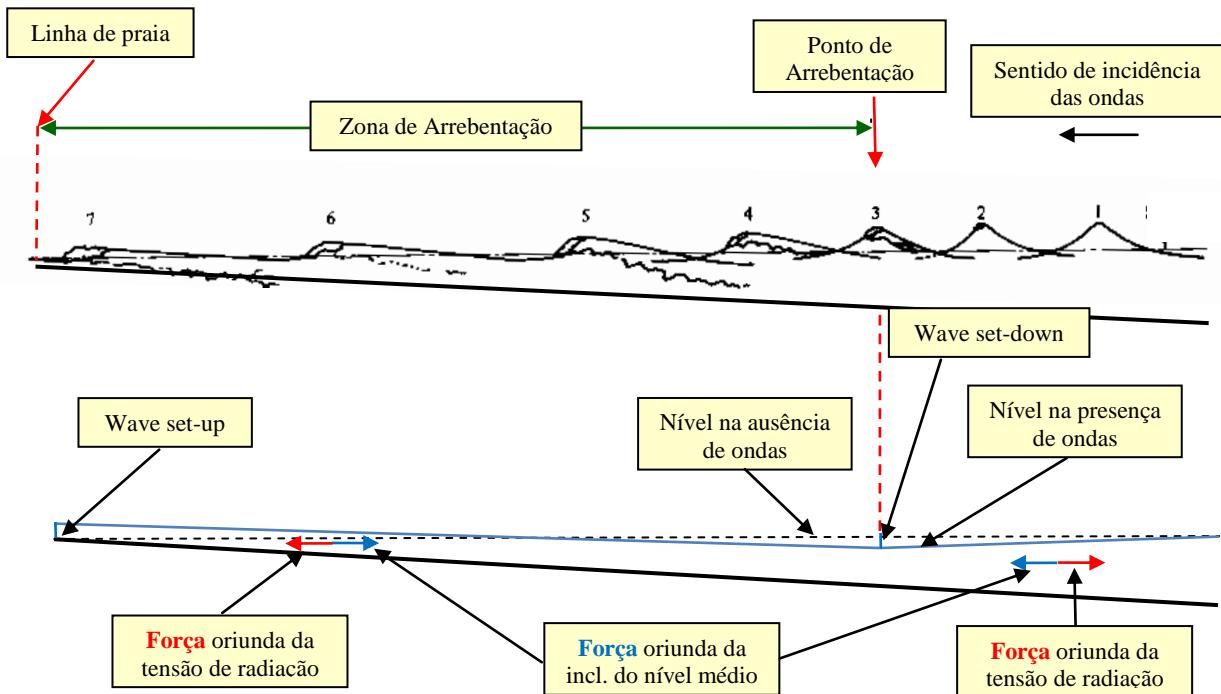
Além de energia, as ondas também transportam momentum. Longuett-Higgins e Stewart (1964) definiram *tensões de radiação* como o *excesso de fluxo de momentum (ao longo do período da onda) que surge na coluna d’água devido à presença da onda*. Como fluxos de momentum equivalem a tensões, os fluxos de momentum decorrentes da passagem de ondas podem ser interpretados como *tensões*. O termo “radiação”, segundo Longuett-Higgins e Stewart (1964), vem da analogia desse fenômeno com efeito similar que ocorre com a radiação eletromagnética que exerce uma pressão ao incidir num objeto.

Mesmo sendo uma grandeza de caráter não-linear (depende do quadrado da altura da onda), Longuett-Higgins & Stewart (1964) mostraram como calcular as componentes do *tensor* das tensões de radiação a partir dos campos de velocidade e pressão obtidos da solução linearizada do problema das ondas superficiais por meio de um artigo expediente para incluir variações de nível na superfície no processo de integração na coluna d’água. (O leitor interessado pode consultar o artigo original para os detalhes matemáticos).

O mecanismo físico pelo qual as ondas podem imprimir forças nas águas presentes no local por onde elas se propagam está relacionado às tensões de radiação do seguinte modo. Raciocinando em termos da coluna d’água acima mencionada, a mecânica dos fluidos ensina que a mesma ficará submetida a uma *força* sempre que o *fluxo líquido de momentum* através das faces da coluna for diferente de zero. Ora, para que isso ocorra é necessário que esses fluxos (ou tensões de radiação) possuam *gradientes* na área circunscrita pela coluna. Como as tensões de radiação dependem (fortemente) da altura das ondas, gradientes nas tensões de radiação estarão intimamente relacionados a gradientes na altura das ondas. Em outras palavras, águas localizadas em regiões onde a altura das ondas apresente variações espaciais intensas vão estar sujeitas ao efeito de forças induzidas pelas ondas e esse é exatamente o caso da zona de arrebentação e imediações.

Admitindo o caso de ondas incidindo perpendicularmente a uma praia plana, a altura das ondas, como discutido acima, cresce rapidamente a medida que o ponto de arrebentação se aproxima. Esse aumento de altura causa um gradiente nas tensões de radiação que produz uma força na coluna d’água a qual, nesse caso, aponta no sentido da costa para o largo. A partir daí, o efeito se inverte e a rápida diminuição na altura das ondas que ocorre dentro da zona de arrebentação induz uma força no sentido do largo para a costa [ver figura (I.9) abaixo].

Se considerarmos o caso idealizado de um trem de ondas monocromáticas, no qual todas as ondas (individuais) são iguais, uma situação de equilíbrio dinâmico permanente similar ao do *wind set-up* iria se estabelecer. Nessa condição, o campo de forças criado pelas tensões de radiação seria contrabalançado por forças de pressão que surgiriam de *inclinações* (mais precisamente, de gradientes) do nível “médio” da água, conforme ilustrado na figura (I.9). Essa situação de equilíbrio, portanto, resultaria num rebaixamento (*set-down*) do nível médio do largo até o ponto de arrebentação e um soerguimento (*set-up*) do nível médio a partir daí até a praia, ou seja, dentro da zona de arrebentação. O resultado final seria uma *sobre-elevação do nível médio na linha de costa* que nada mais é do que o *wave set-up*.



**Figura 1.9 – Ilustração esquemática da variação do nível médio induzida pelas ondas na zona de arrebentação**

No mundo “real”, onde as ondas são irregulares, esse mecanismo não tem como atingir um regime permanente e o *wave set-up* toma a forma de uma *pulsação* no nível “médio” que manifesta-se na beira da praia como uma flutuação de nível com escala de tempo igual ao período entre as séries de onda, ou seja, da ordem de minutos. Esse fenômeno, descrito pela ‘primeira vez por Munk (1949) e Tucker (1950) é o conhecido “*surf beat*” ou o batimento da arrebentação.

Introduzindo algumas hipóteses simplificadoras para as ondas na zona de arrebentação é possível estabelecer a ordem de grandeza esperada para o *wave set-up* em função da altura das ondas incidentes. Considerando que  $H_b$  corresponda a um valor representativo da altura de onda no início da arrebentação, a sobre-elevação esperada na linha de praia é da ordem de  $0.2 H_b$ , [ver Dean e Dalrymple (2004)] portanto, um valor bastante significativo para a segurança da costa em situações de ondas grandes.

Dean e Dalrymple (2004) classificam o *wave set-up* como uma *componente* do “*Storm Surge*” (ver seção 4.3.1 da ref.). Na opinião deste autor, entretanto, essa classificação é inconveniente uma vez que esse fenômeno é *exclusivamente* devido às ondas e, portanto, não tem relação com a existência ou não de vento. O *wave set-up* ocorreria da mesma maneira, por exemplo, no caso de uma praia sujeita ao ataque de uma ondulação numa condição de total calmaria. No caso de haver ondas juntamente com vento local, o *wave set-up* pode ser sobreposto aos outros efeitos uma vez que são fenômenos independentes.

## I.5 – Justificativa e Objetivos da Tese

A revisão de conceitos básicos feita acima indica que a Maré Meteorológica é de fato um fenômeno bastante complexo e que existem ainda aspectos não muito bem entendidos sobre o fenômeno no nosso país justificando-se, assim, o desenvolvimento de um estudo abrangente sobre o tema.

O autor detectou também uma carência de métodos simplificados que descrevam o fenômeno da MM de uma maneira conceitualmente correta e que, uma vez validados por medições de campo, possam ser usados para estimativas da MM ao longo da costa brasileira.

Assim sendo, a presente Tese tem como objetivo geral estudar o fenômeno da maré meteorológica do ponto de vista físico e matemático.

Os objetivos específicos do trabalho podem ser sintetizados como:

- Usar medições de campo para entender como o fenômeno se manifesta na natureza;
- Usar a hidrodinâmica para entender a fundo aspectos físicos do fenômeno;
- Desenvolver um modelo hidrodinâmico simples para estimar a MM na costa brasileira;
- Validar o modelo simplificado comparando seus resultados com medições de campo.

## I.6 – Estrutura do Trabalho

A presente tese foi organizada em cinco Capítulos.

Neste primeiro Capítulo, foram, inicialmente, explicados num contexto físico alguns conceitos básicos relativos ao tema, apresentando-se em seguida a justificativa e os objetivos do presente trabalho. No Capítulo II é feita uma investigação de como o fenômeno se manifesta na natureza através da análise de medições de campo realizadas nas costas brasileira e argentina. A maré meteorológica é estudada à luz da hidrodinâmica no Capítulo III. No Capítulo IV, os resultados teóricos do capítulo anterior são validados através da comparação com as medições. Modelos hidrodinâmicos simplificados para a maré meteorológica são também propostos e testados no Capítulo IV. Finalmente, no Capítulo V, são apresentadas algumas considerações importantes sobre o fenômeno no nosso país, juntamente com algumas recomendações para futuros estudos relacionados ao tema.

Todos os capítulos tem índices próprios mostrando a itemização das seções de modo a facilitar a localização dos tópicos tratados. Há ainda 10 apêndices que apresentam detalhes que não constam do texto principal.

## CAPÍTULO II

### O Fenômeno na Natureza

#### ÍNDICE

II.1 - Dados utilizados .....	21
II.2 - Remoção da Maré Astronômica: Nível não-Astronômico .....	23
II.2.1 - Exemplo do procedimento para obtenção do Nível não Astronômico para as medições de Rio Grande (dados GOOS) .....	24
II.3 - Maré Astronômica e Nível não-Astronômico ao longo da Costa Leste do Continente Sul-Americano: Avaliação Preliminar .....	28
II.4 - Espectro de Energia do Nível não-Astronômico .....	31
II.5 - Decomposição do Nível não-Astronômico: Definição da Maré Meteorológica .....	32
II.5.1 - Avaliação da Distribuição de Energia entre as Bandas que compõem o Nível não-Astronômico .....	33
II.5.2 - O Caso de Mar del Plata, Argentina .....	36
II.6 - Espectro da Maré Meteorológica .....	37
II.7 - Classificação da Maré Meteorológica .....	40
II.8 - Histogramas das Flutuações de Nível ocasionadas pela Maré Meteorológica .....	42
II.9 - Análise Espaço-Temporal da Maré Meteorológica	
II.9.1 - Conjunto de Dados #1 - Região S/SE Brasileira .....	45
II.9.2 - Conjunto de Dados #2 - Brasil / Argentina .....	47
II.9.3 - Análise de Correlação da Maré Meteorológica entre Sítios Vizinhos .....	50
II.9.4 - Determinação da Velocidade de Propagação do Sinal de Maré Meteorológica .....	54
II.9.5 - Rastreamento de “Cristas” e “Cavados” do Sinal de Maré Meteorológica na costa S/SE Brasileira .....	57
II.10 - Nota sobre as Flutuações de Nível na Banda Sazonal .....	59

Nesta primeira parte do trabalho, a maré meteorológica será analisada à luz de medições de campo no intuito de entender como o fenômeno se apresenta na natureza.

#### II.1 - Dados utilizados

Medições instrumentais de nível do mar foram obtidas, via internet, dos acervos do GOOS-Brasil e do GOOS mundial (Global Ocean Observation System). Em Rio Grande (RS), além dos dados do acervo GOOS, o autor teve acesso às observações realizadas para a Praticagem do Porto de Rio Grande pela RG Pilots, gentilmente cedidas pelo Sr. Wilmar Silveira. Os dados da RG Pilots foram coletados através de leituras visuais do nível do mar numa régua fixada ao cais da Praticagem. Todas as medições de nível utilizadas têm amostragem horária.

Apesar dos dados, de maneira geral, serem de boa qualidade, é inevitável haver falhas nas observações. Assim, uma primeira providência que teve de ser realizada em *todos* os registros foi uma varredura dos dados para eliminar (raros) dados espúrios e, principalmente, identificar períodos com falta de dados. Nesse caso, os períodos não observados foram transformados em espaços “vazios” (*NaN = Not a Number*, em ambiente MATLAB) de modo a manter a continuidade temporal dos registros.

A massa de dados de nível do mar foi minuciosamente analisada de modo a identificar períodos em que houvesse medições *simultâneas* nos diversos locais, com duração de pelo menos *1 ano* e com o mínimo possível de falhas. No intuito de evidenciar desvios do nível e também para facilitar a comparação entre locais diferentes, *o valor médio (anual) foi subtraído de todas as séries* que passaram a ter valores positivos e negativos. Dessa análise resultou o seguinte :

**Conjunto #1** - Dados horários *simultâneos* ao longo da costa S/SE brasileira cobrindo o ano de *2003* (*365 dias = 8760* dados horários) incluindo os seguintes locais:

- Rio Grande (RS)
- Imbituba (SC)
- Cananéia (SP)
- Rio de Janeiro (RJ)

Para Rio Grande, usou-se dados instrumentais do GOOS-Brasil.

**Conjunto #2** - Dados horários *simultâneos* ao longo da costa S/SE brasileira e da costa argentina cobrindo um período de *1 ano* (*365 dias = 8760* dados horários) compreendido entre *01/Abril/2010* e *31/Mar/2011*, incluindo os seguintes locais:

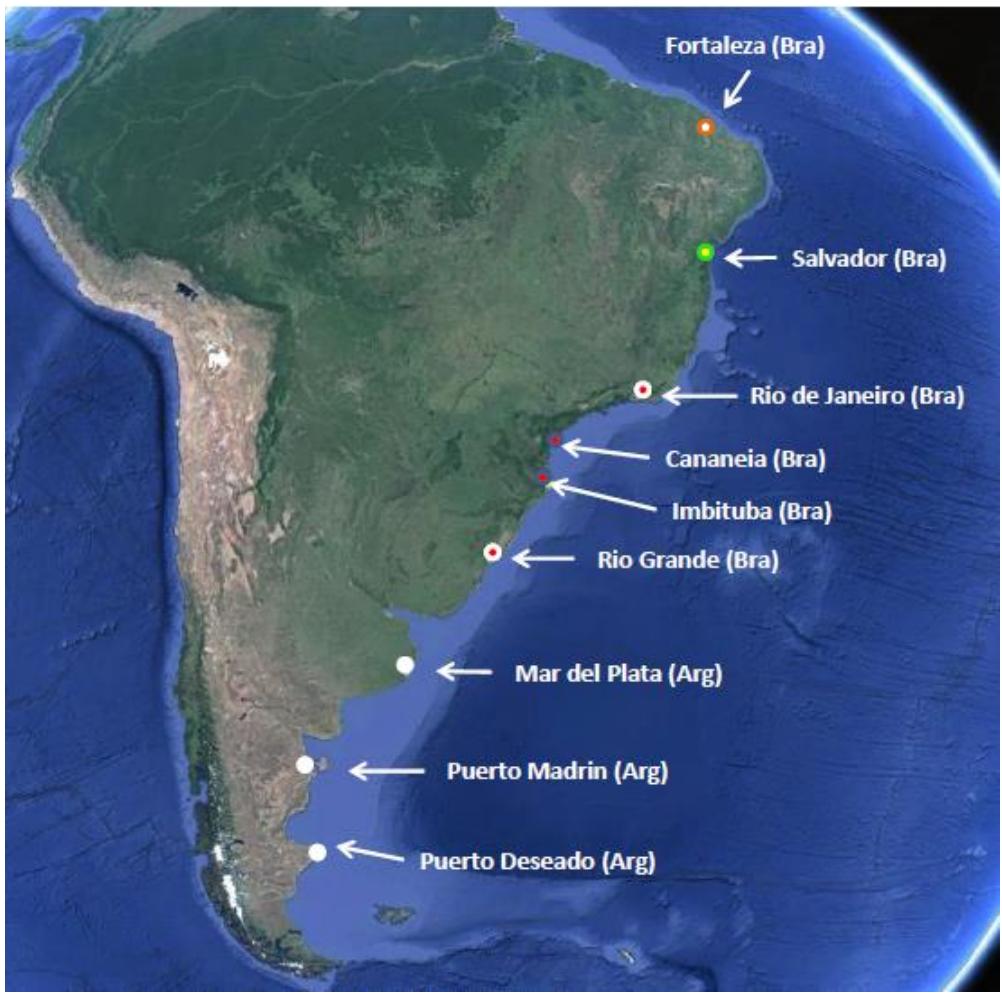
- Puerto Deseado (Arg)
- Puerto Madryn (Arg)
- Mar del Plata (Arg)
- Rio Grande (Bra) (\*)
- Rio de Janeiro (Bra)

O motivo para se incluir medições na Argentina ficará claro em breve. Esse conjunto de dados usou dados da RG Pilots para Rio Grande (\*) os quais serão comentados mais adiante. Para simplificar a notação, esse ano de medições será doravante referido abreviadamente como “ANO”.

Dados *não simultâneos* com duração de *1 ano* (*365 dias = 8760* dados horários) foram também coletados para os seguintes locais :

- Salvador (BA) - Ano de 2007
- Fortaleza (CE) - Ano de 2009

A figura II.1 mostra a localização de todos os sítios de medição.



**Figura II.1** - Localização dos sítios onde foram coletados dados de nível do mar. Conjunto #1 (dados simultâneos) estão assinalados por pontos vermelhos; Conjunto #2 (dados simultâneos) por pontos brancos; Dados para Salvador e Fortaleza não são simultâneos com nenhum outro.

De posse das medições de nível, o próximo passo foi a remoção da Maré Astronômica.

## II.2 - Remoção da Maré Astronômica: Nível não-Astronômico

A maré astronômica foi *removida* dos registros de nível (doravante referidos como “maré bruta”), em *todos* os locais, por meio do procedimento descrito nessa seção.

### Passo 1 – Determinação da Maré Astronômica com o T-Tide.

O *T-Tide* é um software em ambiente MATLAB para análise harmônica da maré astronômica de reconhecida qualidade, que tem sido amplamente utilizado pela comunidade científica internacional [Pawlowicz, Beardsley e Lentz (2002)] e que encontra-se acessível gratuitamente na internet. A série temporal de nível é fornecida como input ao programa que produz como saída uma tabela com informações sobre as constantes harmônicas e a série temporal da maré astronômica para o mesmo período dos dados de entrada. O *T-Tide* funciona mesmo em casos onde os dados de entrada apresentam (pequenas) lacunas.

## Passo 2 – Determinação do Nível não-Astronômico.

O nível não-astronômico (doravante referido abreviadamente como “NnA”) para cada local foi obtido simplesmente subtraindo a série temporal da maré astronômica da maré bruta observada. Como o valor médio (anual) foi subtraído, as séries de NnA também têm média (anual) nula assumindo valores positivos e negativos.

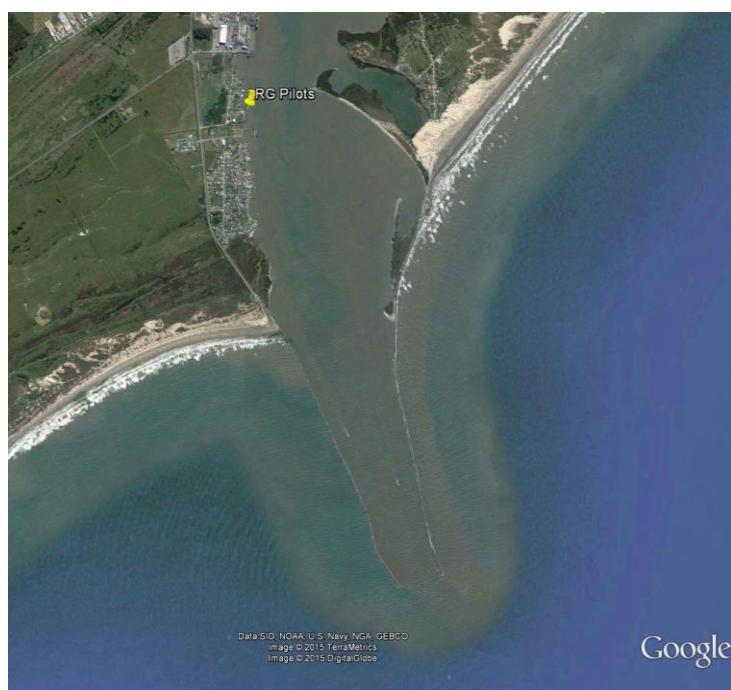
## Passo 3 – Avaliação da Qualidade da Remoção da Maré Astronômica

Uma avaliação da qualidade do procedimento de remoção da maré com o *T-Tide* foi realizado por meio da representação da série temporal no domínio da frequência, expressa pelo respectivo Espectro de Amplitudes Uni-lateral, também conhecido como Periodograma. O Apêndice 1 apresenta uma revisão da teoria envolvida no cálculo do Periodograma.

Os detalhes do procedimento são mostrados a seguir para observações feitas em Rio Grande (dados GOOS) no ano de 2003, parte do Conjunto #1.

### **II.2.1 - Exemplo do procedimento para obtenção do Nível não Astronômico para as medições de Rio Grande (dados GOOS)**

Antes de mais nada, é importante ressaltar que as medições em Rio Grande foram realizadas no cais da Praticagem do Porto, localizado no interior do canal de Rio Grande [figura (II.2)], fato este que confere uma dificuldade extra à questão. De fato, o ideal seria que as medições tivessem sido feitas diretamente na costa, porém as características do litoral gaúcho, desprovido de enseadas, baías, estuários ou qualquer local abrigado que permita a instalação de marégrafos, torna o próprio canal a única alternativa viável para medições de nível.



**Figura II.2 – Mapa do canal de Rio Grande mostrando a localização do cais da Praticagem do porto.**

Assim, existe uma questão de fundo nessas medições que diz respeito a *quão representativas elas são para a costa sul Brasileira*, ou, em outras palavras, *qual seria o nível de distorção que o canal e a Lagoa dos Patos impõem nesses dados de Rio Grande?* Uma análise aprofundada dessa questão requer estudos específicos que fogem ao escopo desse trabalho. Entretanto, como as flutuações da MM tem periodicidade relativamente longa, as medições foram consideradas válidas para a região externa ao canal. Estudos posteriores poderão esclarecer até que faixa de frequência essa hipótese é correta.

A tabela II.1 mostra a saída do *T-Tide* para o caso em tela. De acordo com a utilização padrão (“default”) do programa [ ver Pawlowicz, Beardsley e Lentz (2002) ], apenas as constantes harmônicas com relação sinal/ruído maior que 2 (coluna da tabela identificada por “*snr*” – “*signal to noise ratio*”), assinaladas com asterisco, são consideradas.

nobs = 8760, ngood = 8759, record length (days) = 365.00															
start time: 01-Jan-2003															
rayleigh criterion = 1.0															
Greenwich phase computed with nodal corrections applied to amplitude \n and phase relative to center time															
x0= 0.0262, x trend= 0															
var(x)= 595.6223 var(xp)= 145.3447 var(xres)= 450.0527															
percent var predicted/var original= 24.4 %															
tidal amplitude and phase with 95% CI estimates															
tide	freq	amp	amp_err	pha	pha_err	snr	tide	freq	amp	amp_err	pha	pha_err	snr		
SSA	0.0002282	5.5351	4.891	201.72	60.68	1.3	*M2	0.0805114	3.1064	0.319	317.90	5.59	95		
MSM	0.0013098	1.1150	4.299	150.94	183.56	0.067	MKS2	0.0807396	0.1837	0.239	222.65	84.10	0.59		
MM	0.0015122	0.9890	3.960	218.61	191.10	0.062	LDA2	0.0818212	0.0326	0.198	25.74	217.38	0.027		
MSF	0.0028219	0.3243	3.563	309.29	240.40	0.0083	L2	0.0820236	0.2408	0.240	337.25	78.05	1		
MF	0.0030501	3.2676	4.957	355.39	98.07	0.43	*S2	0.0833333	4.0832	0.303	132.30	4.43	1.8e+002		
ALP1	0.0343966	0.2148	0.435	34.88	133.43	0.24	*K2	0.0835615	1.7955	0.248	129.62	7.64	53		
ZQ1	0.0357064	0.6007	0.565	45.15	57.67	1.1	MSN2	0.0848455	0.1277	0.245	9.39	132.34	0.27		
SIG1	0.0359087	0.5011	0.481	36.93	67.54	1.1	ETA2	0.0850736	0.2802	0.212	146.48	45.48	1.8		
*Q1	0.0372185	3.0345	0.562	72.02	10.93	.29	*MO3	0.1192421	0.4817	0.187	99.29	19.32	6.6		
RHO1	0.0374209	0.3984	0.530	91.47	83.56	0.57	*M3	0.1207671	1.2078	0.186	295.83	8.57	42		
*O1	0.0387307	11.2979	0.586	114.07	2.51	3.7e+002	*S03	0.1220640	0.5185	0.136	131.05	16.55	15		
TAU1	0.0389588	0.3731	0.600	308.25	110.29	0.39	*MK3	0.1222921	0.4658	0.170	100.84	20.85	7.5		
BET1	0.04004040	0.3218	0.410	122.44	97.34	0.62	*SK3	0.1251141	0.5158	0.198	162.00	19.94	6.8		
NO1	0.0402686	0.6291	0.484	139.01	47.02	1.7	*M4	0.1595106	2.9712	0.506	254.71	8.97	35		
CHI1	0.0404710	0.2327	0.424	124.57	121.77	0.3	*M4	0.1610228	4.9549	0.479	294.68	6.33	1.1e+002		
*P1	0.0415526	1.6817	0.591	178.33	22.18	8.1	SM4	0.1623326	0.6140	0.470	346.26	40.63	1.7		
*K1	0.0417807	4.4624	0.615	184.23	8.17	.53	*MS4	0.1638447	1.6410	0.412	21.04	17.09	16		
PH1	0.0420089	0.8064	0.635	160.52	39.82	1.6	*MK4	0.1640729	0.6702	0.322	14.72	37.57	4.3		
THE1	0.0430905	0.2018	0.419	255.09	152.19	0.23	S4	0.1666667	0.4188	0.404	2.02	64.51	1.1		
J1	0.0432929	0.3026	0.425	114.89	116.99	0.51	SK4	0.1668948	0.2596	0.316	308.38	96.06	0.68		
SO1	0.0446027	0.2534	0.397	243.78	97.28	0.41	*2MK5	0.2028035	0.2787	0.177	215.89	36.10	2.5		
OO1	0.0448308	0.1944	0.329	259.42	120.24	0.35	ZSK5	0.2084474	0.1105	0.146	96.72	89.45	0.58		
UPS1	0.0463430	0.0801	0.287	106.62	211.03	0.078	*2MN6	0.2400221	0.3418	0.165	109.99	27.43	4.3		
OQ2	0.0759749	0.2121	0.293	204.81	69.84	0.52	*M6	0.2415342	0.5148	0.169	127.49	20.79	9.3		
EPS2	0.0761773	0.0790	0.197	140.46	156.80	0.16	*2MS6	0.2443561	0.6986	0.184	188.64	13.48	14		
*ZN2	0.0774871	1.1626	0.267	243.51	13.64	.19	*2MK6	0.2445843	0.3706	0.167	197.53	24.13	4.9		
*MU2	0.0776895	0.7706	0.274	212.25	24.09	7.9	*2SM6	0.2471781	0.2601	0.158	249.88	35.89	2.7		
*N2	0.0789992	4.6307	0.322	283.19	4.08	2.1e+002	MSK6	0.2474062	0.1138	0.130	268.43	69.04	0.77		
*NU2	0.0792016	0.9538	0.317	279.45	17.19	9	M8	0.3220456	0.1112	0.107	180.69	63.13	1.1		

**Tabela II.1** - Saída do T-Tide para Rio Grande com análise feita para o ano de 2003. Tabela mostra resultados das constantes harmônicas. Apenas aquelas com relação sinal/ruído (*snr*) maior que 2 [marcadas com (\*)] foram usadas na determinação da Maré Astronômica.

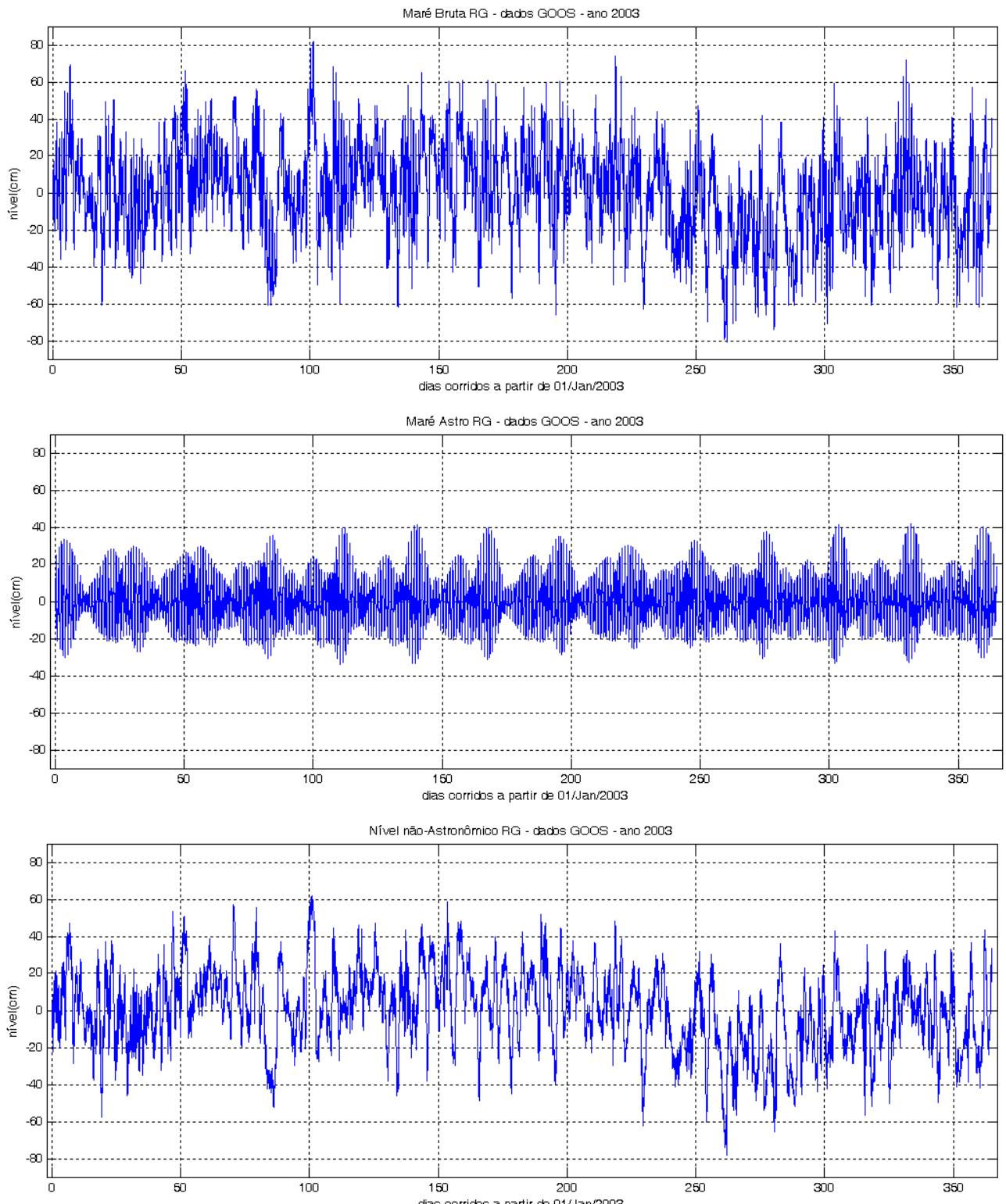
Merece destaque na tabela o fato da componente M2 ter amplitude menor que a da S2 em Rio Grande, atestando a existência do ponto anfídrômico da componente principal lunar nas proximidades dessa região da costa sul-americana mencionada no Capítulo I.

Um comentário se faz necessário sobre a detecção pelo T\_Tide das componentes de maré astronômica de período mais longo. Como se pode verificar na tabela, a componente SSA [período de 182.59 dias] e as componentes mensais [MSM – período de 31.81 dias, MM – período de 27.55 dias, MSF – período de 14.76 dias e MF – período de 13.66 dias] foram detectadas porém não foram incluída pelo T\_Tide como representativas na determinação da maré astronômica por apresentar valores abaixo do limite na relação sinal/ruído. Já a componente SA [período de 365.18 dias] não aparece na tabela. Curiosamente, num teste realizado (não apresentado) acrescentando mais 1 dia à série (perfazendo um total de 8784 horas), a componente SA passou a fazer parte da lista de componentes detectadas e com amplitude considerável, porém a relação sinal ruído ficou ainda abaixo do limiar necessário para inclusão na determinação da maré astronômica.

De acordo com a literatura [ver, por ex., Lisitzin (1974) e Pugh (1987)], há uma certa controvérsia se as oscilações de nível do mar nesses períodos tem origem puramente gravitacional ou se devem sua existência a fatores relacionados ao efeito da radiação solar (a chamada “maré radiacional”) e/ou ao efeito da atmosfera sobre o oceano. Assim, as flutuações de períodos mais longos da maré bruta foram todas debitadas na conta do nível não-astronômico. A validade ou não desse procedimento requereria uma análise específica a qual foge do foco do presente trabalho. Independentemente da origem, o fato é que a maré bruta em Rio Grande apresenta amplitude considerável nesses períodos longos.

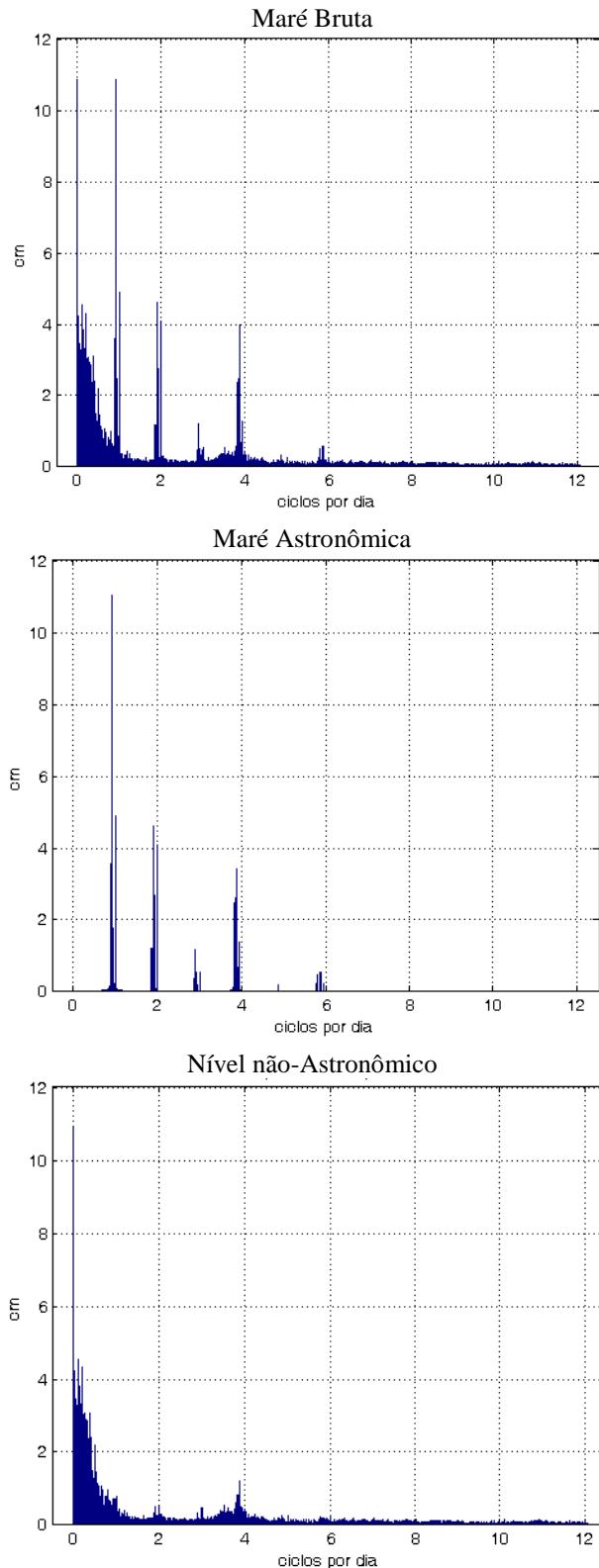
A figura (II.3) mostra os resultados das séries temporais da “maré bruta”, da maré astronômica e do nível não-astronômico (NnA). Uma rápida inspeção do segundo gráfico revela características típicas da Maré Astronômica: oscilação de nível com periodicidade bastante regular (2 vezes ao dia) e a modulação (quase) quinzenal da amplitude associadas com as fases da Lua (marés de sizígia e quadratura).

Uma inspeção visual do terceiro gráfico mostra que o NnA caracteriza-se por oscilações de natureza mais aleatória e de periodicidade predominantemente mais longa que a da maré astronômica. Adicionalmente, a figura revela que o NnA apresenta uma magnitude surpreendente em Rio Grande. Observa-se também uma clara tendência de rebaixamento de nível com duração de alguns meses no segundo semestre do ano de 2003 indicando que o NnA deve cobrir oscilações numa gama de períodos bastante ampla.



**Figura II.3** – Séries temporais para Rio Grande (dados GOOS), ano de 2003. Painel superior: Maré Bruta; painel do meio: Maré Astronômica obtida com o *T-Tide*; painel inferior: Nível não-Astronômico. Observar que todos os gráficos estão na mesma escala.

A representação das séries temporais no domínio da frequência através dos respectivos Periodogramas é mostrada na figura (II.4)



**Figura II.4** – Periodogramas (em escala linear) para maré bruta (superior), maré astronômica (centro) e nível não-astronômico (inferior) correspondentes à figura (II.3).

Fatos a observar:

- O Periodograma da maré bruta mostra claramente a “assinatura” da maré astronômica no nível do mar com a presença de picos nas frequências das componentes harmônicas indicadas na Tabela II.1.

- A comparação dos Periodogramas indica que o *T-Tide* atuou de forma incisiva no sentido de remover a parte astronômica do nível, havendo alguma dúvida quanto às componentes de longo período.
- O Periodograma do NnA mostra uma certa concentração de energia um pouco abaixo de 4 ciclos por dia ( período de 6 hs ). Admitindo que o procedimento com o *T-Tide* tenha sido capaz de remover eficientemente a maré astronômica, essa oscilação pode indicar a existência de uma leve ressonância do corpo d'água nessa faixa de frequência. Caso contrário, esse resultado pode indicar a presença de um resíduo de origem astronômica ainda presente no NnA.

### **II.3 - Maré Astronômica e Nível não-Astronômico ao longo da Costa Leste do Continente Sul-Americanoo: Avaliação Preliminar**

No intuito de avaliar a contribuição do NnA nas variações de nível nos sítios considerados, a análise acima foi aplicada a todo o conjunto de dados. O fato de nem todos os dados serem simultâneos não afeta a avaliação pois a informação que se deseja obter independe, em essência, do ano analisado.

A magnitude relativa de energia das flutuações de nível do mar contidas na forma de maré astronômica e do nível não-astronômico foi estimada através do cálculo da variância do sinal usando o fato de que a energia e a variância de um sinal são grandezas relacionadas, diferindo apenas por uma constante de proporcionalidade. Os resultados estão apresentados na tabela II.2.

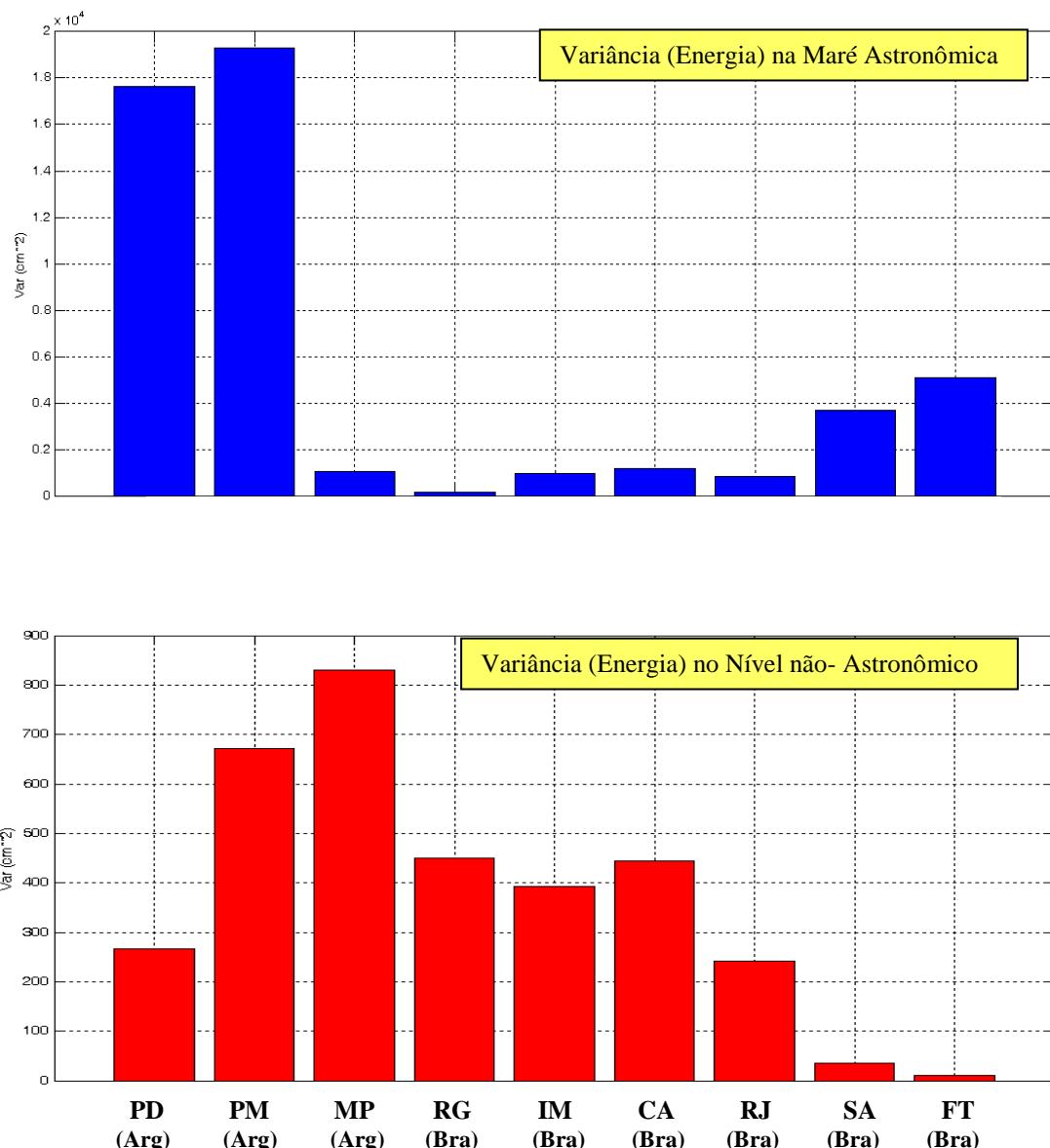
Local	Maré Bruta Var. (cm <sup>2</sup> )	Maré Astro. Var. (cm <sup>2</sup> )	NnA Var. (cm <sup>2</sup> )
<b>Puerto Deseado (Arg) - ANO</b>	<b>17 902</b> <b>(100%)</b>	<b>17 636</b> <b>(98.5%)</b>	<b>266</b> <b>(1.5%)</b>
<b>Puerto Madrin (Arg) - ANO</b>	<b>19 954</b> <b>(100%)</b>	<b>19 283</b> <b>(96.6%)</b>	<b>671</b> <b>(3.4%)</b>
<b>Mar del Plata (Arg) - ANO</b>	<b>1 870</b> <b>(100%)</b>	<b>1 039</b> <b>(55.5%)</b>	<b>831</b> <b>(44.5%)</b>
<b>Rio Grande (Bra) - 2003</b>	<b>595</b> <b>(100%)</b>	<b>145</b> <b>(24.4%)</b>	<b>450</b> <b>(75.6%)</b>
<b>Imbituba (Bra) - 2003</b>	<b>1 354</b> <b>(100%)</b>	<b>961</b> <b>(71.0%)</b>	<b>393</b> <b>(29.0%)</b>
<b>Cananéia (Bra) - 2003</b>	<b>1 631</b> <b>(100%)</b>	<b>1187</b> <b>(72.8%)</b>	<b>444</b> <b>(27.2%)</b>
<b>Rio de Janeiro (Bra) - 2003</b>	<b>1 054</b> <b>(100%)</b>	<b>813</b> <b>(77.1%)</b>	<b>241</b> <b>(22.9%)</b>
<b>Salvador (Bra) - 2007</b>	<b>3 695</b> <b>(100%)</b>	<b>3 660</b> <b>(99.1%)</b>	<b>35</b> <b>(0.9%)</b>
<b>Fortaleza (Bra) - 2009</b>	<b>5 081</b> <b>(100%)</b>	<b>5 070</b> <b>(99.8%)</b>	<b>11</b> <b>(0.2%)</b>

**Tabela II.2** - Variância da maré bruta, maré astronômica e nível não-astronômico para todos os sítios estudados (em preto). Percentual indicado em **vermelho**. Percentual pode ser interpretado como fração do conteúdo de energia.

Uma análise dos números na tabela, com foco na parte brasileira, revela vários aspectos interessantes. No que concerne a maré astronômica, o comportamento espacial mencionado no Capítulo I, com a amplitude aumentando em direção ao Norte na costa brasileira, fica bastante evidente. Já o NnA, tem presença marcante nos sítios mais a Sul mas diminui drasticamente nos locais mais a Norte.

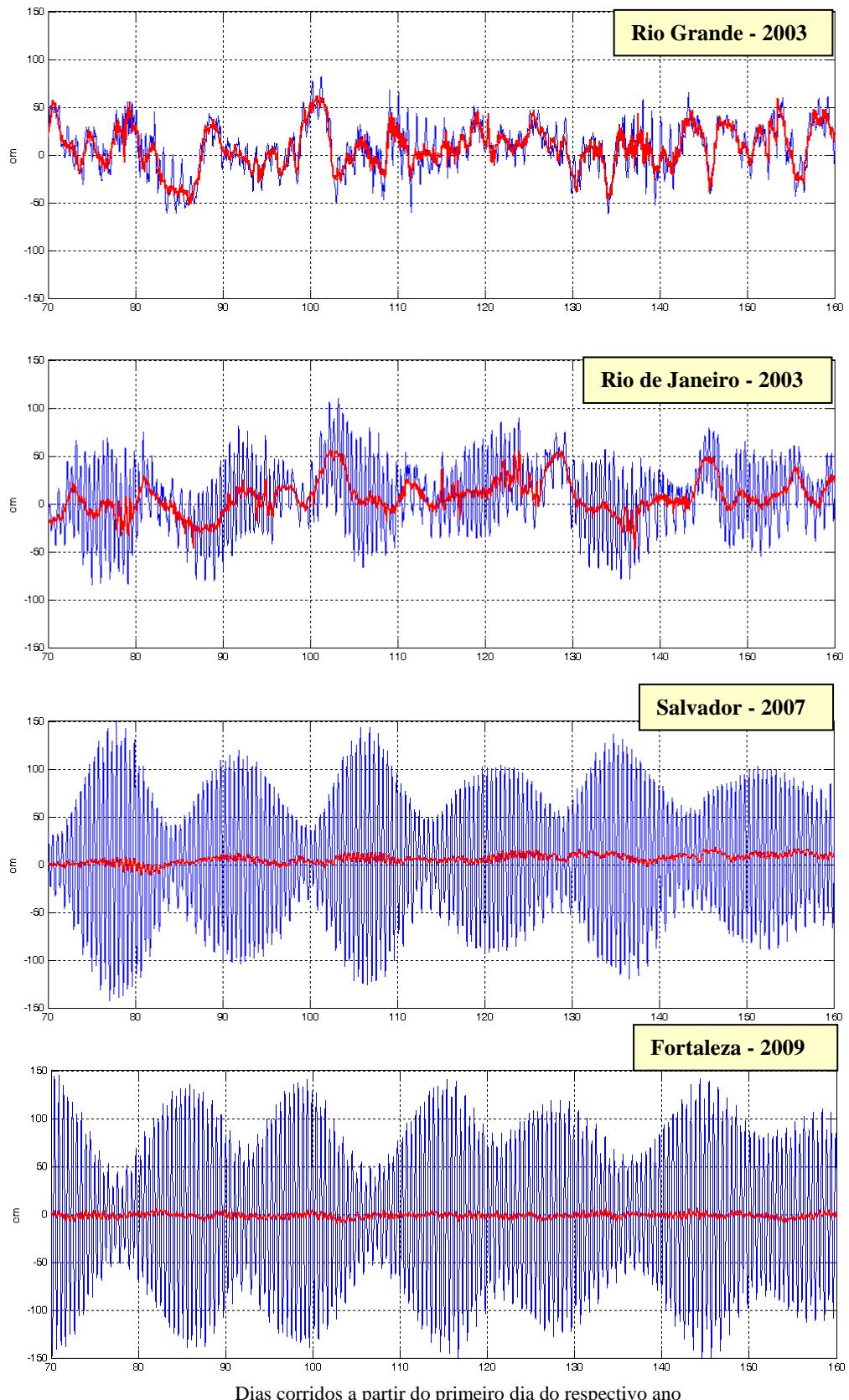
O resultado para Rio Grande realmente salta aos olhos, pois, ali, a maré astronômica é surpreendentemente pequena sendo o NnA responsável por cerca de ¾ da energia das flutuações de nível do mar. Nos outros sítios da costa S/SE brasileira, apesar do aumento da maré astronômica, a componente não-astronômica ainda desempenha papel importante na determinação do nível. Já em Salvador e, mais ainda, em Fortaleza, o nível do mar é totalmente dominado pela maré astronômica sendo esta responsável por 99.1% da energia das flutuações de nível em Salvador e 99.8% em Fortaleza. Os resultados para Fortaleza coincidem com os apresentados em Frota, Truccollo e Schettini (2016).

Para ilustrar de forma gráfica os resultados acima, os valores da tabela II.2 para a maré astronômica e para o nível não astronômico estão mostrados na forma de gráficos de barras na figura (II.5)



**Figura II.5** - Distribuição da variância (energia) das flutuações do nível do mar (Maré Bruta) entre Maré Astronômica (azul) e Nível não-Astronômico (vermelho) para : Puerto Deseado (PD), Puerto Madrin (PM), Mar del Plata (MP), Rio Grande (RG), Imbituba (IM), Cananéia (CA), Rio de Janeiro (RJ), Salvador (SA) e Fortaleza (FT). Observar diferença de escala entre os gráficos.

Como complemento, a figura (II.6) mostra trechos de séries temporais das componentes astronômica e não-astronômica para Rio Grande, Rio de Janeiro, Salvador e Fortaleza.



**Figura II.6** - Sériess temporais com 3 meses de duração para a Maré Sstronômica (linha azul) e o Nível não-Astronômico (linha vermelha) em 4 sítios ao longo da costa brasileira. Locais e ano de medição estão indicados na figura. Observar que todos os gráficos estão na mesma escala.

Os gráficos mostram de forma clara a contribuição da Maré Astronômica e do NnA na composição do nível do mar. Em particular confirma-se a dominância do NnA em Rio Grande e a drástica diminuição do NnA na metade norte da costa brasileira.

## II.4 - Espectro de Energia do Nível não-Astronômico

Dando mais um passo no sentido de melhor entender a natureza do NnA, a Densidade Espectral de Energia - doravante referida simplesmente como “Espectro” para aliviar a notação - do fenômeno foi calculado para o Rio de Janeiro. O Rio foi escolhido por dispor de medições de nível de excelente qualidade e com longa duração (vários anos ininterruptos).

A figura II.7 é um estimador do referido Espectro com 24 graus de liberdade, calculado como a média de 12 espectros “crus” (i.e. com 2 graus de liberdade) obtidos via FFT de partições consecutivas com 1 ano de duração cada (total de 12 anos de dados contínuos), onde cada partição teve a média anual subtraída. Para manter o conteúdo de energia do sinal inalterado, não se utilizou nenhuma janela espectral. Com um intervalo de amostragem do sinal de 1 hora, este estimador do Espectro fornece informação sobre a estrutura em frequência da distribuição de energia do nível não-astronômico numa banda que vai de meio ciclo por hora (12 ciclos por dia) a 1 ciclo por ano.

A definição do número de graus de liberdade permite estabelecer um intervalo de confiança para o estimador [Melo (1982)]. Usando um nível de confiança ( $\alpha$ ) de 0.10 (significando que há 90% de chances do valor real do Espectro estar dentro do intervalo inferido) e lembrando que esse tipo de estimador segue a distribuição amostral *chi-quadrada*, o intervalo de confiança do Espectro [  $E(f)$  ] é determinado a partir do estimador [  $\tilde{E}(f)$  ] por :

$$\frac{\tilde{E}(f)}{C_n^2; \alpha/2} < E(f) < \frac{\tilde{E}(f)}{C_n^2; 1 - \alpha/2} \quad (\text{II.1})$$

Onde  $C_n^2$  representa a variável *Chi-quadrada* com  $n$  graus de liberdade.

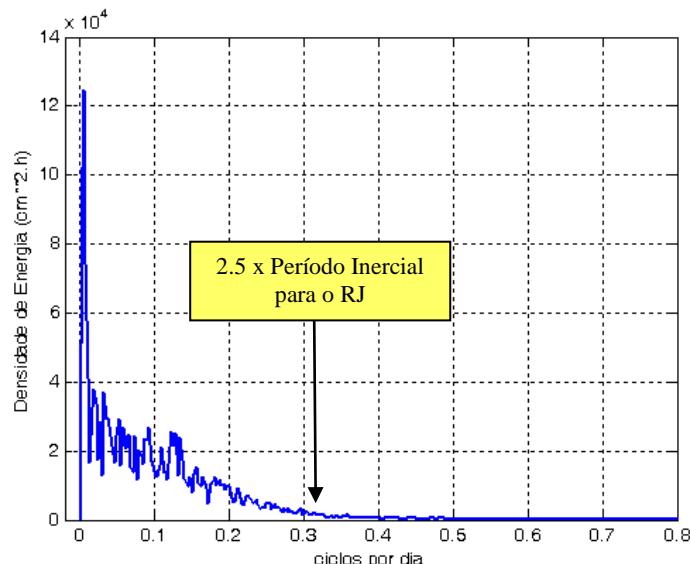
Para  $n = 24$  [ Wonnacott & Wonnacott (1980), pag 556 ], , tem-se :

$$\frac{\tilde{E}(f)}{1.38} < E(f) < \frac{\tilde{E}(f)}{0.652}$$

Ou seja,

$$0.72 \tilde{E}(f) < E(f) < 1.53 \tilde{E}(f) \quad (\text{II.2})$$

A figura (II.7) mostra o resultado do Espectro. O intervalo de confiança não foi traçado para não sobrecarregar a figura.



**Figura II.7** - Estimador da Densidade Espectral de Energia do nível não-astronomico obtido de 12 anos de medições no Rio de Janeiro. [ Observar que o eixo de freq. se estende até 12 c.p.d. e apenas o trecho de interesse foi mostrado ].

A menos da componente anual, o espectro do NnA no Rio de Janeiro apresenta características similares às de espectros obtidos a partir de medições em outros sítios costeiros do planeta. De fato, Pugh (1987), pag. 191, comentando um espectro obtido da análise de 61 anos de medições de nível “sub mareal” na costa da Inglaterra, afirma que “variações de nível (sub-mareal) tem um espectro uniforme com um aumento gradual de energia a medida que as frequências mais baixas se aproximam”

O pico pronunciado próximo à frequência zero que aparece na figura II.7 corresponde à componente anual do sinal. Como o *T\_Tide* não considerou essa flutuação anual do nível como de origem astronômica, a componente foi incluída no NnA.. De origem astronômica ou não, o fato é que a maré bruta possui uma oscilação anual significativa que deve ser considerada.

É importante observar que o “aumento gradual” de energia inicia, de forma significativa, a partir de uma frequência igual a aproximadamente duas vezes e meia o Período Inercial local. O Período Inercial ( $T_{in}$ ), já apresentado no Capítulo I e que pode ser entendido como a escala de tempo a partir da qual efeitos de rotação da Terra tornam-se importantes (a ser apresentado formalmente no Capítulo III), calculado pela eq.(I.1) para o Rio de Janeiro (latitude =  $23^\circ$ ) é de  $30.7\text{ h}$  que corresponde a  $0.78\text{ ciclos por dia (cpd)}$ . Duas vez e meia esse valor dá  $76\text{ horas e 45 minutos}$ , ou seja, um pouco mais de  $3\text{ dias}$  ( $0.033\text{ cpd}$ ) conforme indicado na figura.

## II.5 - Decomposição do Nível não-Astronômico: Definição da Maré Meteorológica

O próximo passo consistiu na decomposição do NnA em faixas de frequência pré-estabelecidas. A decomposição foi realizada por meio de um procedimento de filtragem no domínio da frequência utilizando a Transformada Rápida de Fourier (“*FFT Filtering*”) que realiza com grande precisão *filtragens passa-banda* da série temporal. Um detalhamento minucioso desse procedimento incluindo uma comparação com técnicas clássicas de filtragem é o assunto do Apêndice 2.

As bandas foram estabelecidas em função das relações entre as variações de nível e as forçantes, discutidas na introdução (a ser aprofundadas no Capítulo III) e estão indicadas na tabela II.3.

Identificação da Banda	Faixa de Períodos Cobertos	Banda de Frequências Correspondente
Sazonal	1 ano a 30 dias	0.0027 a 0.033 cpd.
Maré Meteorológica	30 a 3 dias	0.033 a 0.33 cpd.
Maré de Vento - inclui o “wind set-up/set-down” e o “Storm Surge”	3 dias a 2 horas	0.33 a 12 cpd.

**Tabela II.3** - Identificação das bandas de frequência nas quais o nível não-astronômico foi decomposto (filtrado).

A definição exata dos limites das bandas é um tanto arbitrária uma vez que deve existir uma transição gradual entre uma banda e outra. A *maré meteorológica* surge *formalmente* pela primeira vez no presente trabalho e é *definida* como *flutuações de nível do mar de origem não-astronômica com periodicidade compreendida entre 3 e 30 dias*.

O limite superior da MM (30 dias) foi escolhido por ser o valor normalmente usado em estudos de mais longo termo sobre o nível do mar os quais utilizam séries do valor médio *mensal* do nível como base de dados. Já o limite inferior foi escolhido por ser a frequência que marca o início do aumento de energia do espectro do NnA como mostrado na seção anterior e também por marcar o limite da maré de tempestade, segundo a definição de Flather (2001). A rigor, esse limite deveria ser definido localmente em função do Período Inercial local, porém para facilitar a comparação entre sítios em diferentes latitudes, optou-se por usar um valor único fixado em *3 dias*.

Vale ressaltar, mais uma vez, que o autor não encontrou na literatura uma definição precisa dos limites de frequência da MM. A maioria dos autores associa a MM a variações de nível com periodicidade sinótica, tipicamente, na faixa entre alguns dias a cerca de duas semanas. A definição proposta no presente trabalho certamente engloba esses valores.

Com essa definição para a MM, a banda *sazonal* cobre oscilações com periodicidades entre 30 dias a 1 ano, sendo que a limitação em 1 ano deve-se à duração dos registros analisados. Esse valor pode ser estendido se registros mais longos forem analisados. Flutuações de nível do mar nessa banda relacionam-se à variações : (i) da pressão atmosférica de grande escala, (ii) da densidade da água do oceano, (iii) das grandes correntes oceânicas, dentre outros fatores [ver, por ex.; Lizitzin (1974), Chelton e Davies (1982) e Saraceno, Simionato e Ruiz-Etcheverry (2014)].

A última banda (3 dias a 2 horas), batizada de “maré de vento” no presente trabalho, na verdade, inclui a faixa de variações do “Wind Set-up/set-down” e do “Storm Surge” discutidos no Capítulo I.

Com isso, *toda* a faixa de frequência coberta pelos dados (períodos entre 2 horas a 365 dias) foi preenchida *sem lacunas*.

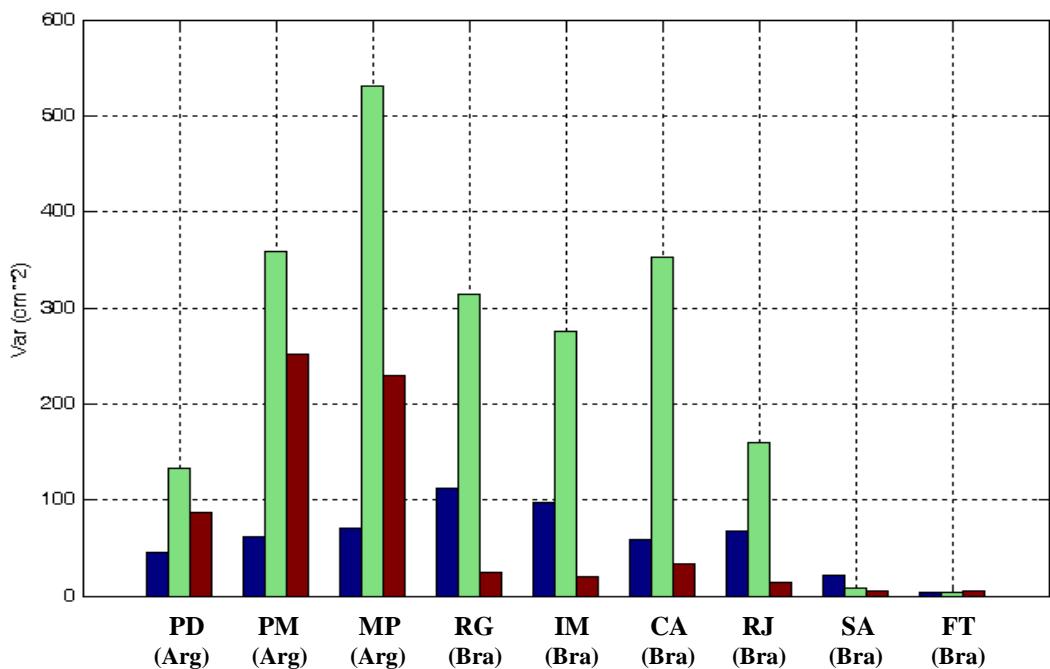
### **II.5.1 - Avaliação da Distribuição de Energia entre as Bandas que compõem o Nível não-Astronômico**

Uma vez definidas as bandas de frequência, é possível determinar como a energia contida no NnA se distribui entre as componentes sazonal, da maré meteorológica e da maré de vento usando, novamente, a relação entre energia e variância do processo físico. Essa avaliação, para todos os sítios, está mostrada na tabela II.4.

Local	NnA (cm <sup>2</sup> )	Banda Sazonal (cm <sup>2</sup> )	MM (cm <sup>2</sup> )	Maré de Vento (cm <sup>2</sup> )
<b>Puerto Deseado</b> ANO	<b>266</b> <b>(100%)</b>	<b>46</b> <b>(17.3%)</b>	<b>133</b> <b>(50.0%)</b>	<b>87</b> <b>(32.7%)</b>
<b>Puerto Madrin</b> ANO	<b>671</b> <b>(100%)</b>	<b>62</b> <b>(9.2%)</b>	<b>358</b> <b>(53.4%)</b>	<b>251</b> <b>(37.4%)</b>
<b>Mar del Plata</b> ANO	<b>831</b> <b>(100%)</b>	<b>71</b> <b>(8.5%)</b>	<b>531</b> <b>(63.9%)</b>	<b>229</b> <b>(27.6%)</b>
<b>Rio Grande</b> 2003	<b>450</b> <b>(100%)</b>	<b>112</b> <b>(24.8%)</b>	<b>314</b> <b>(70.0%)</b>	<b>24</b> <b>(5.2%)</b>
<b>Imbituba</b> 2003	<b>393</b> <b>(100%)</b>	<b>97</b> <b>(24.7%)</b>	<b>276</b> <b>(70.2%)</b>	<b>20</b> <b>(5.1%)</b>
<b>Cananéia</b> 2003	<b>444</b> <b>(100%)</b>	<b>58</b> <b>(13.1%)</b>	<b>353</b> <b>(79.5%)</b>	<b>33</b> <b>(7.4%)</b>
<b>Rio de Janeiro</b> 2003	<b>241</b> <b>(100%)</b>	<b>68</b> <b>(28.2%)</b>	<b>159</b> <b>(66.0%)</b>	<b>14</b> <b>(5.8%)</b>
<b>Salvador</b> 2007	<b>35</b> <b>(100%)</b>	<b>22</b> <b>(62.9%)</b>	<b>8</b> <b>(22.9%)</b>	<b>5</b> <b>(14.2%)</b>
<b>Fortaleza</b> 2009	<b>11</b> <b>(100%)</b>	<b>3</b> <b>(27.3%)</b>	<b>3</b> <b>(27.3%)</b>	<b>5</b> <b>(45.4%)</b>

**Tabela II.4** - Variâncias e percentagem de Energia nas diferentes bandas de frequência. Observar que nem todos os dados são simultâneos

Para uma melhor visualização, a figura (II.8) mostra os valores da tabela II.4 na forma de gráfico de barras.



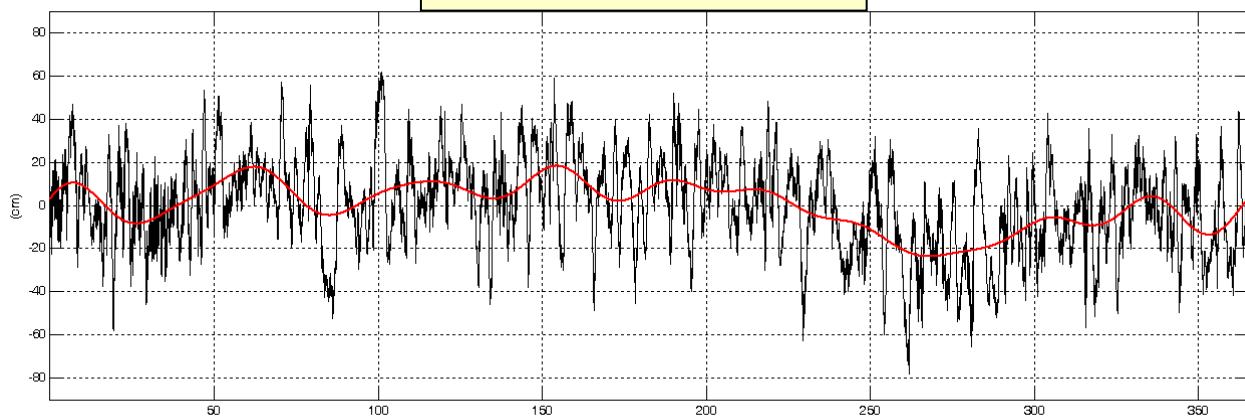
**Figura II.8** - Distribuição da variância (energia) contida no nível não-astronômico entre : Banda Sazonal (azul), Maré Meteorológica (verde) e Maré de Vento (marrom) para Puerto Deseado (PD), Puerto Madrin (PM), Mar del Plata (MP), Rio Grande (RG), Imbituba (IM), Cananéia (CA), Rio de Janeiro (RJ), Salvador (SA) e Fortaleza (FT).

O comportamento da MM é de especial interesse pois é nessa banda que a maior parte da energia contida no NnA se concentra. De fato, na costa S/SE brasileira no ano de 2003, o grosso ( 65 a 80 %) da energia de origem não-astronômica do nível do mar concentrou-se na banda da MM .

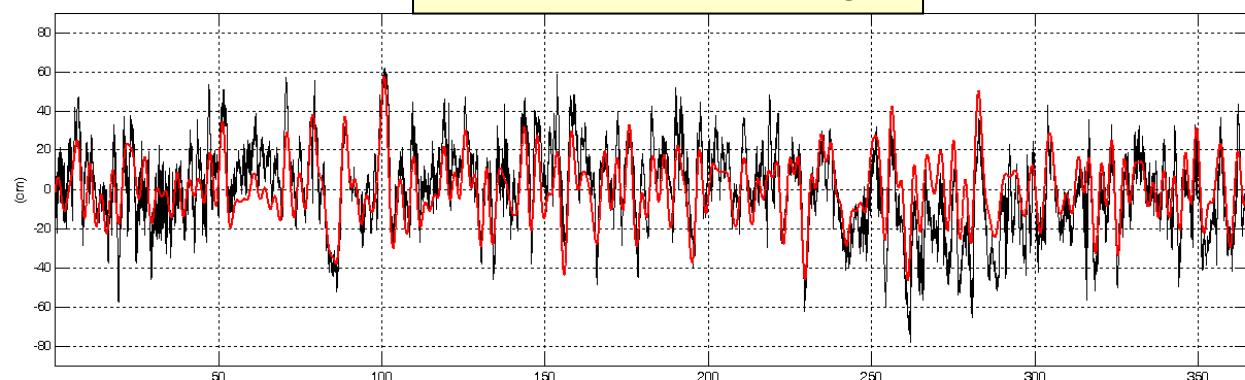
A ressaltar também a evolução espacial da MM desde o extremo sul da América do Sul (ver barras verdes no gráfico): a MM cresce ao longo da costa argentina entre Puerto Deseado e Mar del Plata, sítio este onde atinge valores surpreendentemente altos, para, a partir daí, decrescer em direção ao Norte. Curiosamente, a tendência de decréscimo é interrompida em Cananéia que possui, em média, uma MM maior que Imbituba e mesmo que Rio Grande.

Para ilustrar o efeito que as diferentes bandas causam no NnA, a figura (II.9) mostra séries temporais decompostas (filtradas via FFT) segundo as diferentes bandas para os dados de Rio Grande no ano de 2003.

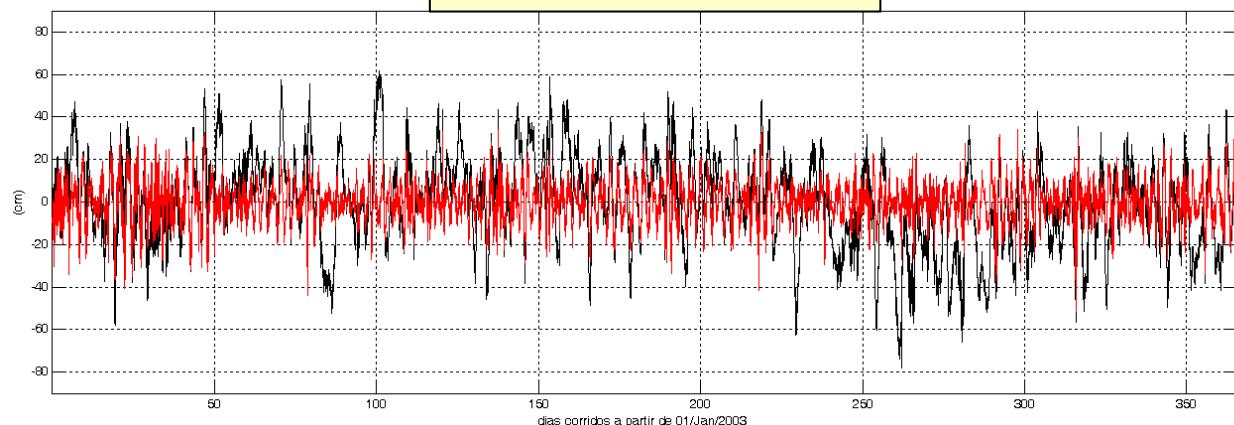
Rio Grande, 2003 - Banda Sazonal



Rio Grande, 2003 - Maré Meteorológica



Rio Grande, 2003 - Maré de Vento

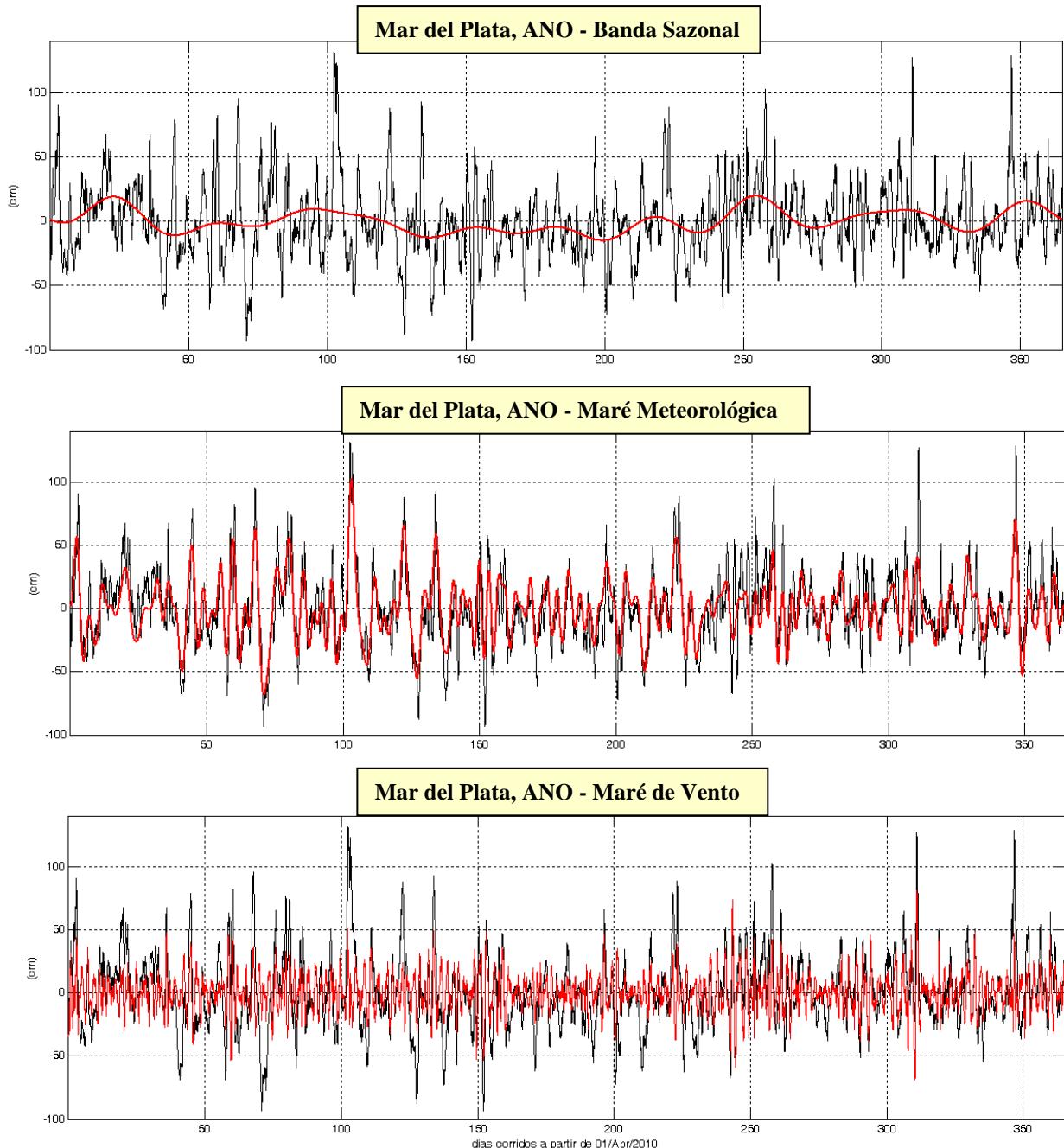


**Figura II.9** - Decomposição do Nível não-Astronômico (linha preta) para todo o ano de 2003 em Rio Grande nas Bandas indicadas nos gráficos (linhas vermelhas):

## II.5.2 - O Caso de Mar del Plata, Argentina

Mesmo não fazendo parte do território brasileiro, o comportamento do NnA e da MM em Mar del Plata, Argentina, merece destaque no presente trabalho por dois motivos. Primeiramente, pelo interesse científico em vista da magnitude extraordinária que as variações de nível de origem não-astronômica assumem nesse local – as maiores da costa Leste (e, certamente, da costa Oeste também) da América do Sul. Em segundo lugar, como será visto em breve, o que acontece em Mar del Plata é de importância vital para se entender a MM na costa brasileira. Vale ressaltar que a MM na região do estuário do Rio da Prata, incluindo Mar del Plata, tem sido estudada por colegas argentinos e uruguaios há bastante tempo [ Marone (1991) e para uma referência recente com lista de citações a respeito ver Santoro, Fossati e Piedra-Cueva (2013) ].

A figura (II.10), mostra a decomposição do NnA de Mar del Plata correspondente ao ANO segundo as bandas Sazonal, da MM e da maré de vento



**Figura II.10** - Decomposição do Nível não-Astronômico (linhas pretas) para o ANO em Mar del Plata nas bandas indicadas nos gráficos (linhas vermelhas):

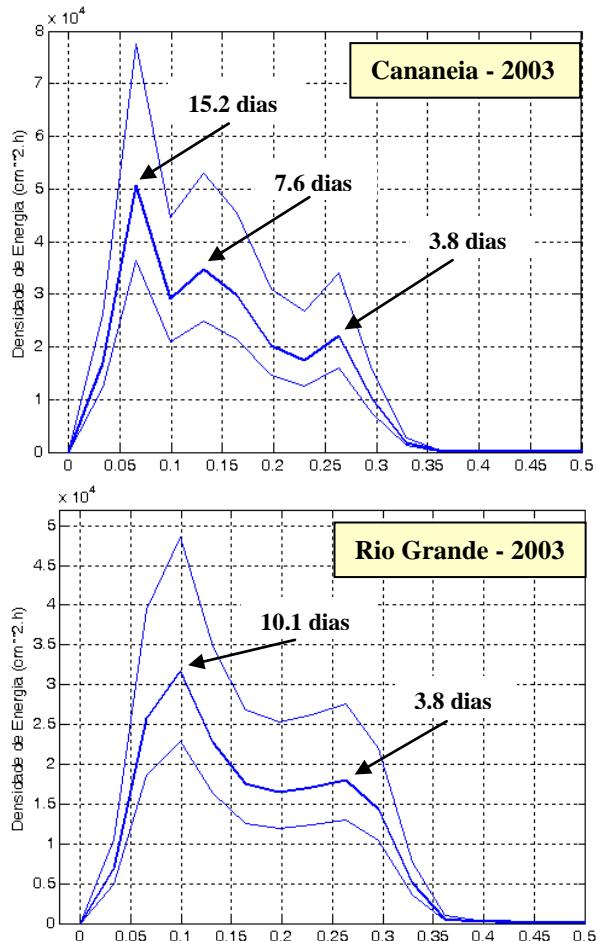
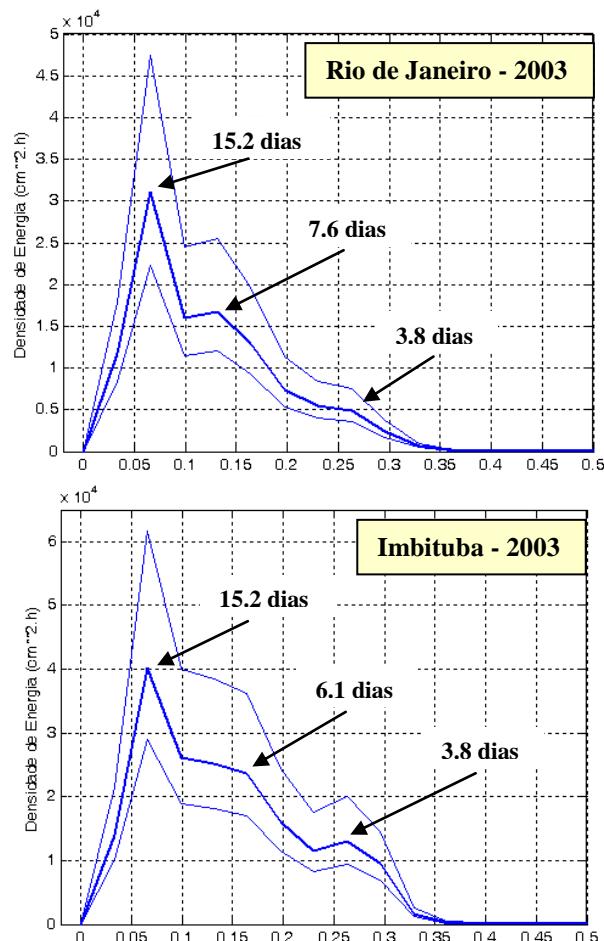
A magnitude das séries temporais pode ser apreciada nas figuras (observar mudança de escala em relação a Rio Grande).

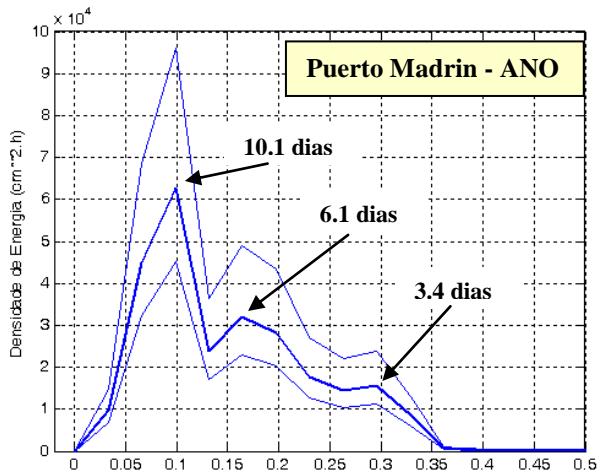
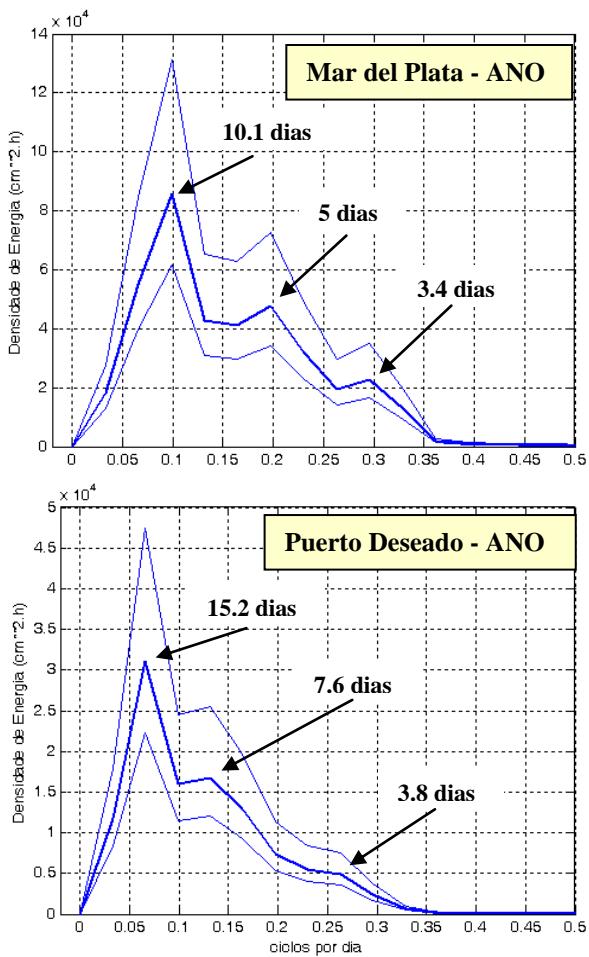
## II.6 - Espectro da Maré Meteorológica

Com a Maré Meteorológica definida, passamos a investigar o fenômeno. Pela pouca relevância da MM na metade norte da costa brasileira, a partir de agora medições em Salvador e Fortaleza não serão mais consideradas.

Inicialmente, estimadores do Espectro (Densidade Espectral de Energia) foram calculados para *todos* os sítios a sul do Rio de Janeiro (inclusive) de acordo com um procedimento similar ao utilizado para o NnA. A série temporal anual da MM (com 8760 pontos horários) foi particionada em 12 segmentos consecutivos de igual tamanho (730 pontos horários cada) sendo o Espectro “cru” (2 g.l.) calculado via FFT para cada segmento. A seguir, os 12 espectros “cru” foram promediados resultando num estimador com 24 graus de liberdade. A exemplo do que foi feito para o NnA, nenhuma janela foi aplicada.

Os resultados estão mostrados na figura (II.11) incluindo a faixa definida pelo intervalo de confiança do estimador. O número relativamente baixo de graus de liberdade e a resolução um tanto grosseira do estimador limitam um pouco uma definição detalhada do Espectro real. Observando atentamente os estimadores (e seus intervalos de confiança) vê-se que a energia que compõe a MM aumenta progressivamente na direção da baixa frequência, conforme já antecipado, sem apresentar picos muito pronunciados. Entretanto, há indícios de que a MM tende a desenvolver 3 regiões de concentração de energia com períodos, aproximadamente, nas faixas entre (i) 10 a 15 dias; (ii) 5 a 8 dias e (iii) 3 a 4 dias.





**Figura II.11** - Estimadores da Densidade Espectral de Energia da Maré Meteorológica com 24 graus de liberdade, com intervalos de confiança marcados. Os sítios, anos de medições e períodos correspondentes às regiões de concentração de energia estão indicados nos gráficos.

Um estimador do Espectro mais refinado foi calculado a partir dos dados do Rio de Janeiro, tomando partido da longa duração das observações nesse local. Usando 12 anos de dados, o estimador foi calculado segundo o seguinte procedimento:

- Série temporal da MM foi obtida da filtragem da série do NnA (12 anos de dados com 105 120 pontos horários)
- Divisão da série de 12 anos de MM em 12 segmentos “anuais” iguais (cada um com 8760 pontos horários). Observar que, para simplificar, todos os anos tem a mesma duração, portanto, anos bissextos não foram considerados.
- Sub divisão de cada segmento “anual” em 12 segmentos “mensais” iguais (cada um com 730 pontos horários). Observar que todos os “meses” tem a mesma duração para simplificar.
- Cálculo de um estimador do Espectro para cada “ano” (com 24 g.l. cada), promediando os estimadores do Espectro dos 12 segmentos mensais, como feito anteriormente.
- Cálculo de um estimador do Espectro para os 12 anos de dados, promediando os 12 estimadores “anuais” obtidos no passo anterior

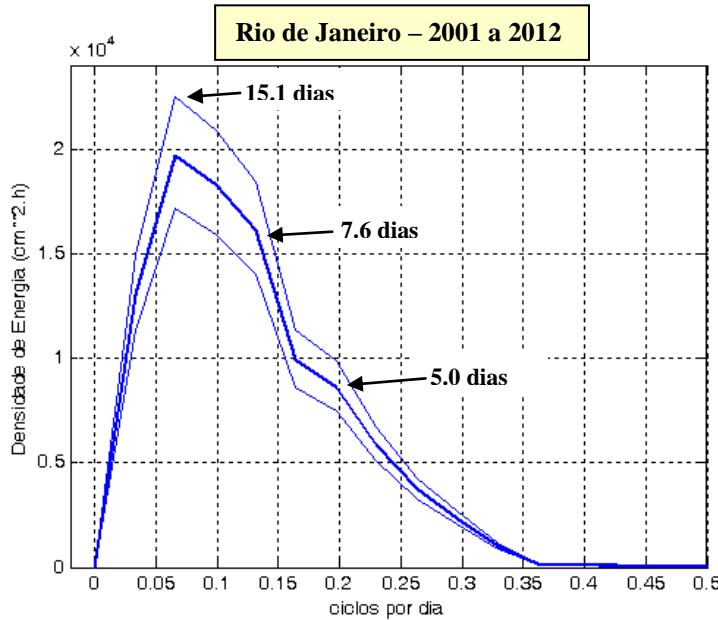
O estimador resultante, portanto, tem 288 ( $12 \times 24$ ) graus de liberdade, possibilitando boa precisão na caracterização do Espectro da MM no Rio de Janeiro. Usando agora um nível de confiança ( $\alpha$ ) de 0.005 (significando que há 99.5% de chances do valor real do espectro estar dentro do intervalo inferido) e tomando  $n = 288$ , tem-se :

$$\frac{\tilde{E}(f)}{1.144} < E(f) < \frac{\tilde{E}(f)}{0.874} \quad (\text{II. 3})$$

Ou seja,

$$0.870 \tilde{E}(f) < E(f) < 1.144 \tilde{E}(f) \quad (\text{II. 4})$$

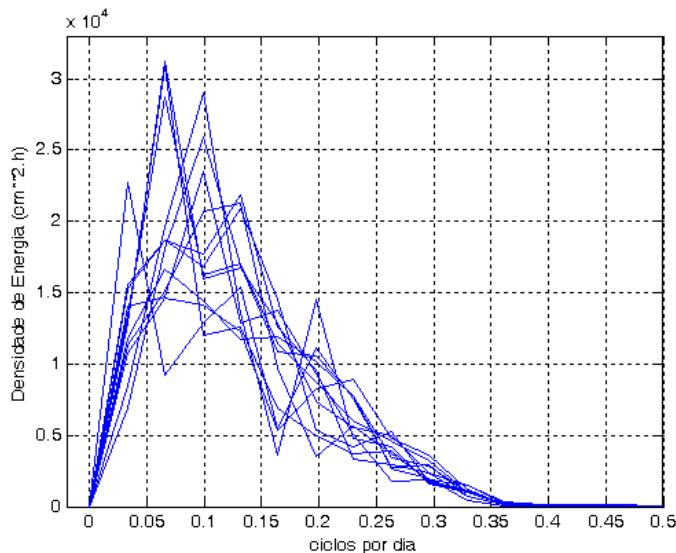
A figura (II.12) mostra os resultados para o Estimador com 288 graus de liberdade incluindo o intervalo de confiança calculado.



**Figura II.12** - Estimador da Densidade Espectral de Energia da Maré Meteorológica para o Rio de Janeiro com 288 graus de liberdade calculado a partir de 12 anos de observações.

Comparando esse Estimador (288 g.l.) com o obtido para o ano de 2003 (24 g.l.) percebe-se que o aumento de precisão do cálculo tornou o Espectro mais alisado amenizando ainda mais as regiões de concentração de energia. Mesmo assim, três frequências de concentração de energia ainda podem ser detectadas com períodos: (i) 15.1 dias; (ii) 7.6 dias e (iii) 5.0 dias.

A título de ilustração, a figura (II.13) apresenta os 12 estimadores anuais (com 24 g.l. cada) traçados no mesmo gráfico.



**Figura II.13** - Estimadores anuais da Densidade Espectral de Energia da Maré Meteorológica para o Rio de Janeiro com 24 graus de liberdade cada calculado para 12 anos de observações consecutivos entre 2001 e 2012.

Observando a figura pode-se perceber a variabilidade interanual natural do fenômeno da MM.

Não foi possível repetir o cálculo para os outros sítios pela inexistência de séries longas nesses locais, por isso não é possível afirmar, a princípio, que as características do Espectro da MM obtido para o Rio de Janeiro sejam válidas para os outros locais.

## II.7 - Classificação da Maré Meteorológica

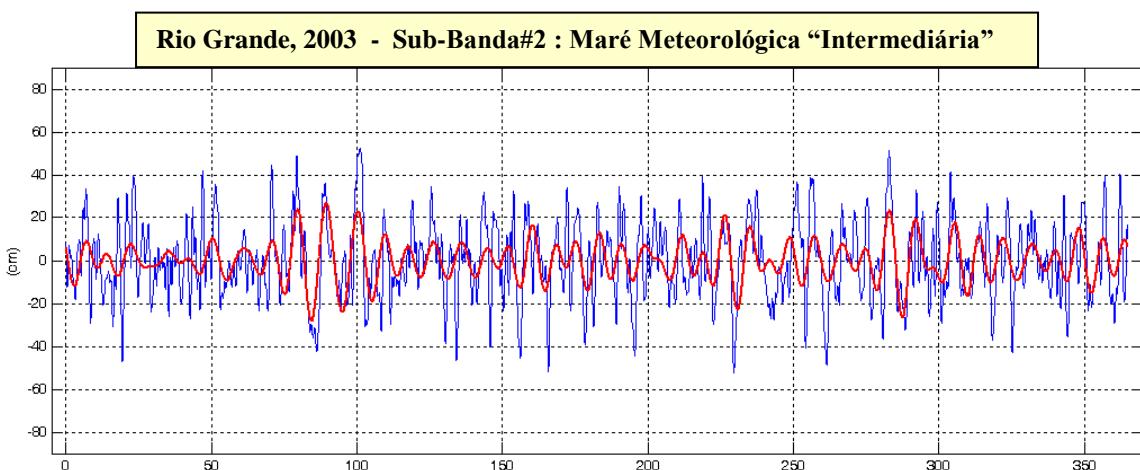
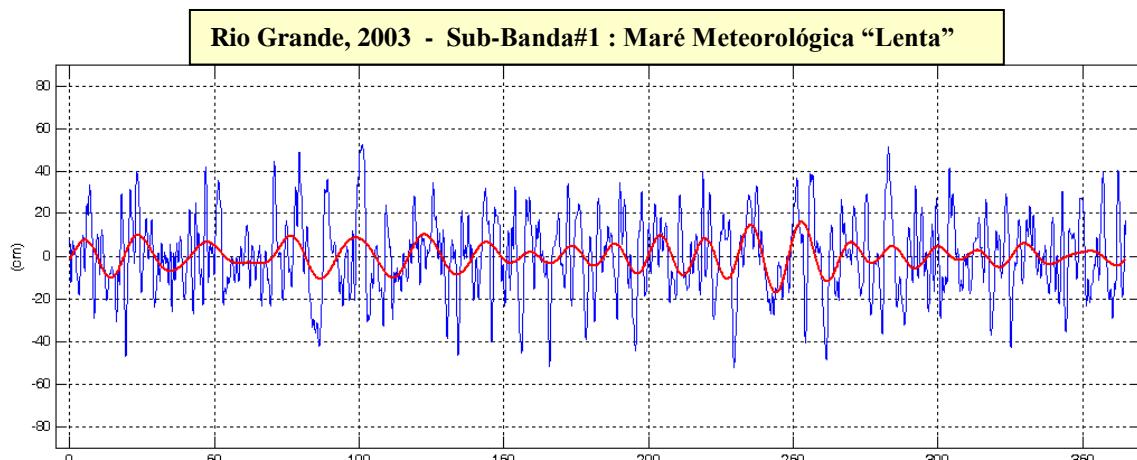
Sem entrar no mérito do porquê do resultado apresentado na seção anterior, o fenômeno da MM ao longo da costa E sul-americana parece ter uma tendência em desenvolver 3 escalas de tempo “internas”. Esse fato sugere a possibilidade de dividir a banda da Maré Meteorológica em 3 sub-bandas.

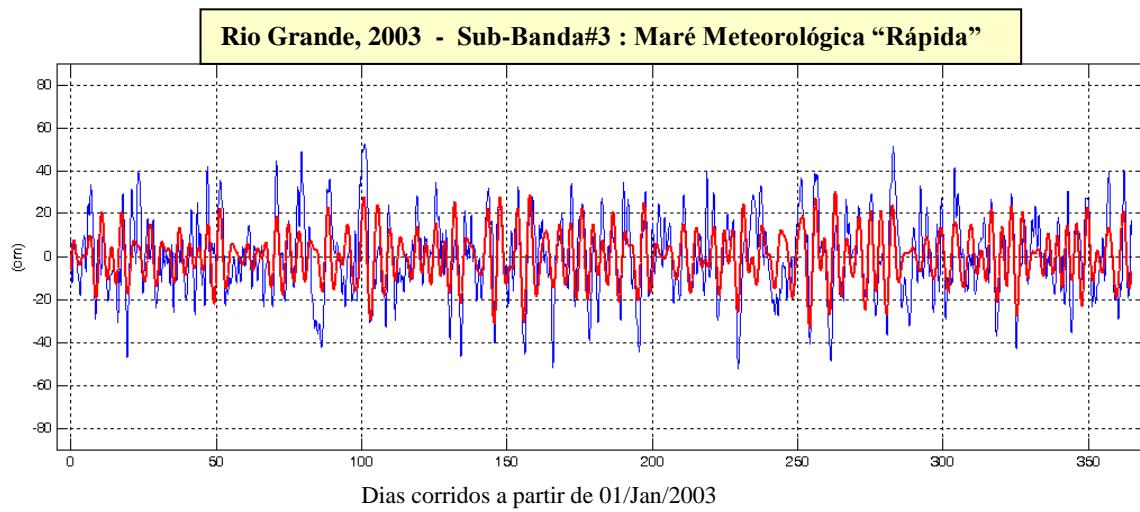
A facilidade da técnica de filtragem via FFT foi utilizada para decompor a banda da MM em 3 sub-bandas com periodicidades delimitadas da seguinte maneira:

- Sub-Banda#1 – faixa : *30 a 14 dias* → Maré Meteorológica “Lenta”
- Sub-Bandas#2 – faixa : *14 a 7 dias* → Maré Meteorológica “Intermediária”
- Sub-Banda#3 – Faixa : *7 a 3 dias* → Maré Meteorológica “Rápida”

Os limites das sub-bandas foram escolhidos de forma um tanto arbitrária mas mantiveram a ideia da divisão em 3 faixas internas.

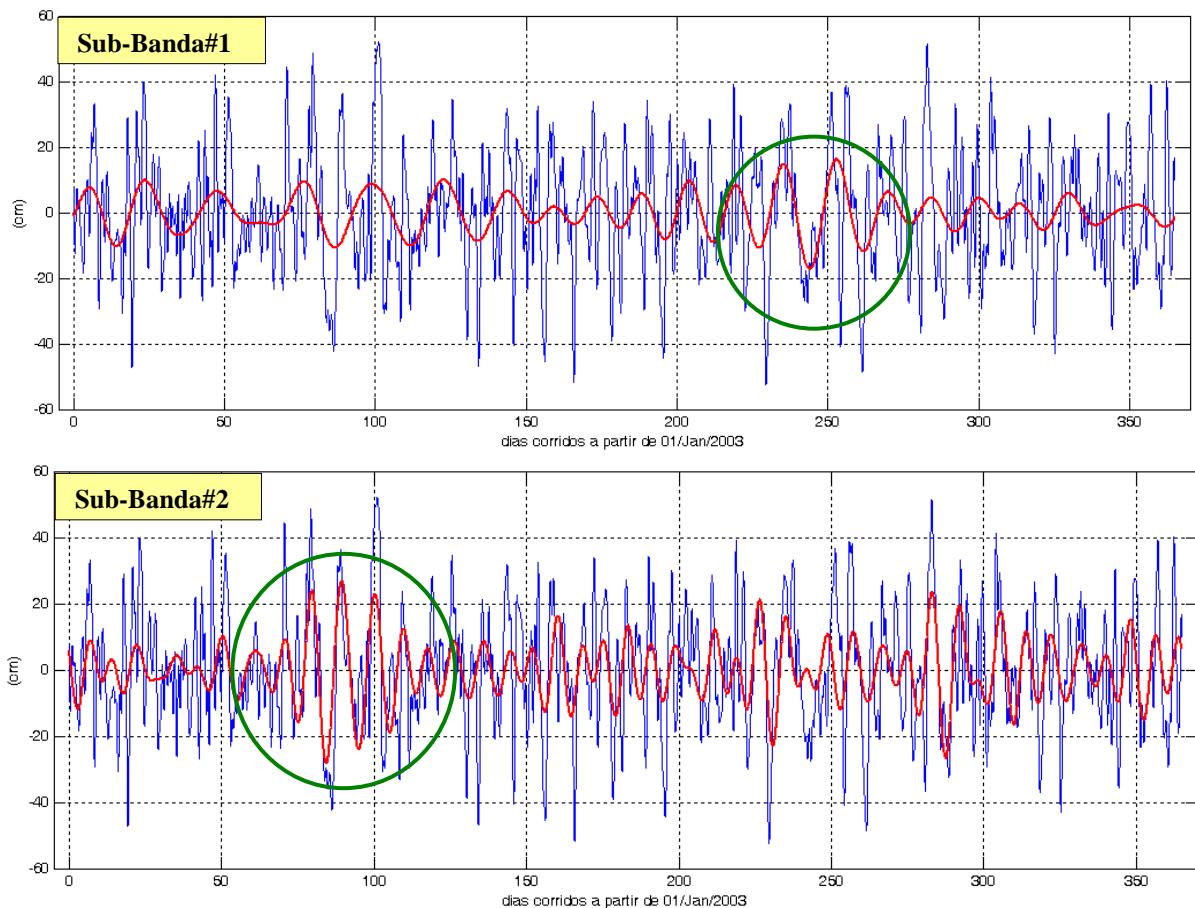
O efeito da decomposição da MM em 3 sub-bandas na série temporal da MM pode ser apreciado graficamente na figura (II.14) para os dados de Rio Grande no ano de 2003.

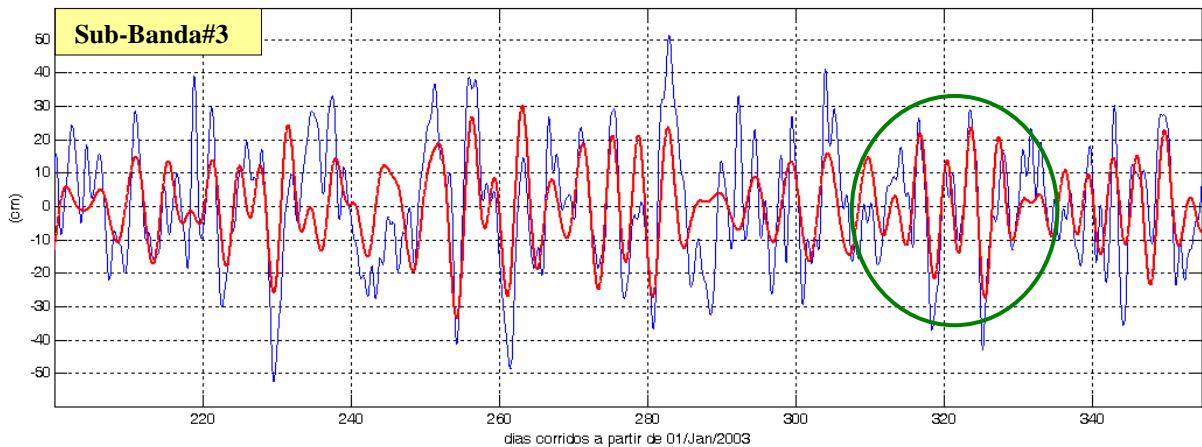




**Figura II.14** - Decomposição da Maré Meteorológica (linha azul) em 3 sub-bandas (linhas vermelhas) para Rio Grande no ano de 2003

Obviamente, a MM é *sempre* composta por contribuições das 3 sub-bandas. Entretanto, observando em detalhe as séries temporais correspondentes a cada tipo de MM, constata-se que alguns eventos de MM são dominados por diferentes sub-bandas. A figura (II.15) exemplifica alguns casos.





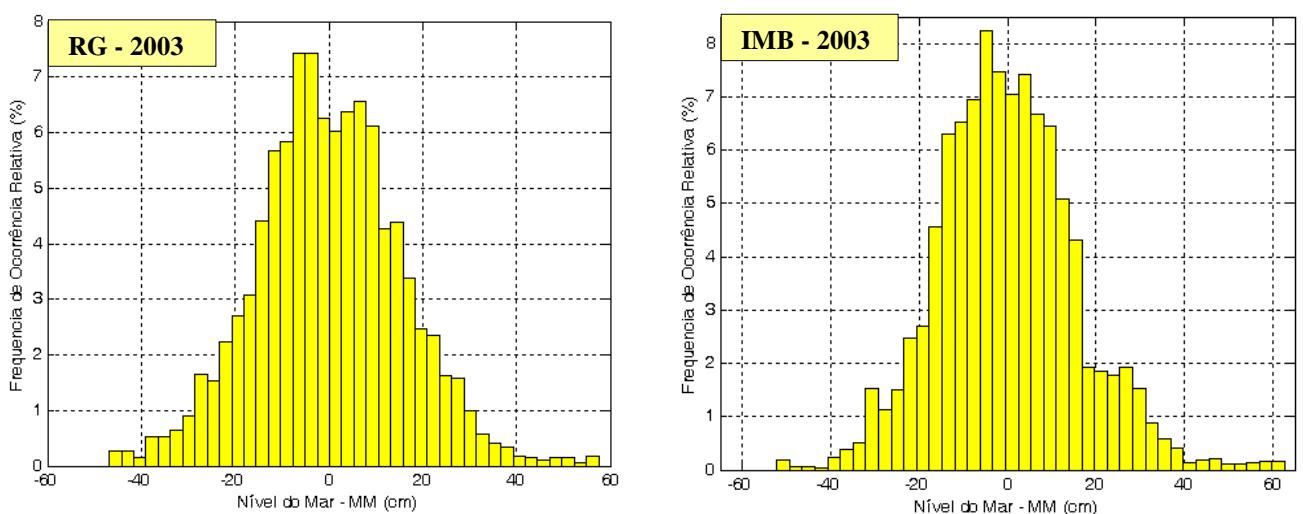
**Figura II.15** - Identificação de eventos de MM dominados pelas diferentes Sub-Bandas (indicadas nos gráficos). Observar mudança de escala temporal no último gráfico.

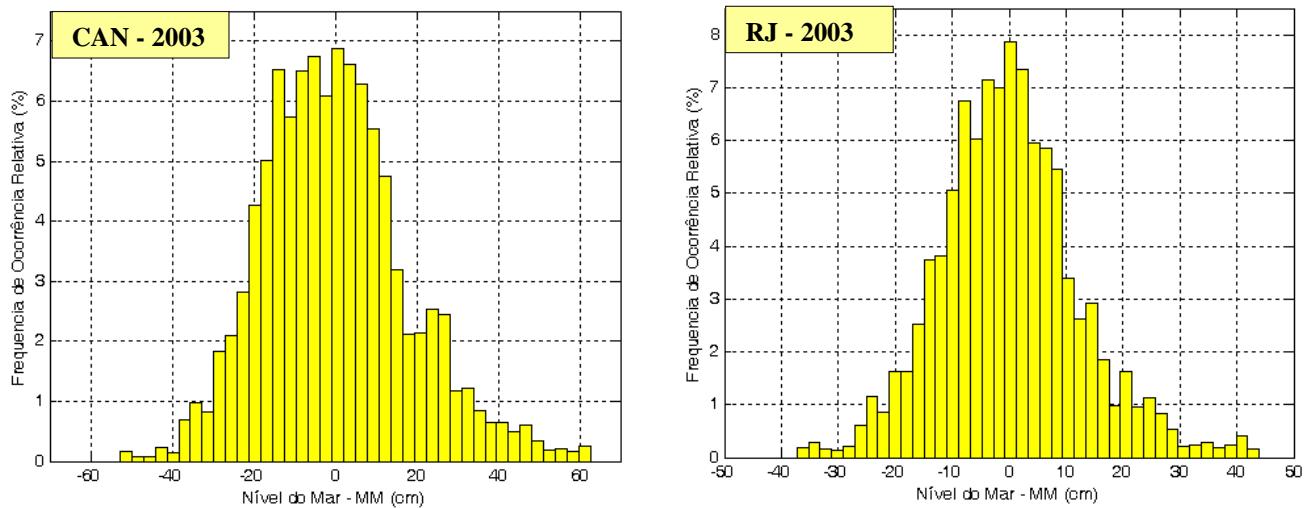
O resultado é útil para mostrar a importância da inclusão de todas as bandas do fenômeno em estudos sobre a MM. Certamente a não inclusão de alguma das bandas acarretará dificuldade em explicar alguns eventos.

O resultado também serve para realçar uma questão que recebe pouca atenção em estudos sobre a MM encontrados na literatura. Com efeito, é comum que a MM seja obtida por meio da aplicação de filtros passa-baixa “convencionais” (i.e., aplicados no domínio do tempo), nos quais apenas o limite superior da banda filtrada é controlado. O limite inferior da banda da MM é, usualmente, determinado pela duração do registro. Como resultado, o limite inferior da banda de frequência da MM nem sempre é o mesmo o que pode causar imprecisões na análise, conforme ilustrado na figura acima. Por exemplo, se um filtro com frequência de corte correspondente a 3 dias for aplicado (no domínio do tempo) a um série temporal do NnA (ou da maré bruta) com 6 meses de duração, o resultado será uma série temporal da MM contaminada por parte das componentes da Banda Sazonal, sem distinção. A filtragem via FFT aqui utilizada não tem esse tipo de problema uma vez que os dois limites da banda meteorológica são estabelecidos com precisão.

## II.8 - Histogramas das Flutuações de Nível ocasionadas pela Maré Meteorológica

O Conjunto de Dados#1 será agora utilizado para avaliar estatisticamente a ocorrência de eventos de MM’s positivas (sobre-elevação do nível) e de MM’s negativas (rebaixamento) na costa S/SE brasileira. Para tanto, histogramas das flutuações de nível em torno da média anual ocasionadas pela MM foram construídos para os 4 sítios da costa S/SE brasileira monitorados e estão mostrados na figura (II.15).

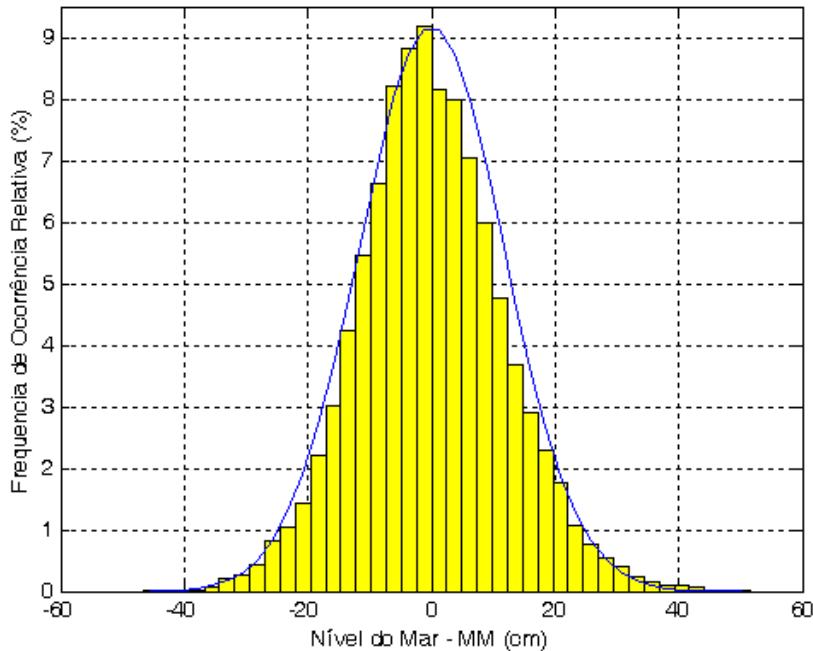




**Figura II.15** - Histogramas de frequência relativa de ocorrência para os locais e ano indicados.

Uma inspeção mais superficial dos histogramas sugere que eventos de MM positivas e negativas se equivalem, tanto em amplitude quanto em número de ocorrências. Uma inspeção mais cuidadosa, entretanto, indica a existência de uma leve assimetria em todos os histogramas com a cauda no flanco da MM positiva atingindo valores ligeiramente superiores que a cauda do flanco negativo.

Como visto no caso dos Espectros, o fenômeno da MM possui uma variabilidade inter anual natural significativa a qual pode influenciar a forma dos histogramas também, em outras palavras, da mesma maneira que o estimador do espectro, o histograma para o ano de 2003 pode diferir do histograma de um outro ano qualquer. Assim, para aprofundar a questão, vamos recorrer novamente aos dados do Rio de Janeiro e calcular histogramas da MM para a série de *12 anos* de duração (2001 – 2012) usada anteriormente. O resultado está mostrado na figura (II.16) na qual uma curva Gaussiana foi traçada para auxiliar a avaliação. A Gaussiana tem média nula e desvio padrão  $\sigma = 11.73 \text{ cm}$  obtido da série de MM e foi normalizada de modo a que o valor do pico coincidisse com o valor máximo do histograma (valor igual a 9.18%).



**Figura II.16** - Histograma da MM no Rio de Janeiro para 12 anos de dados (2001 – 2012). A linha azul corresponde a uma gaussiana de média nula e desvio padrão obtido dos dados

A figura mostra que o histograma se aproxima razoavelmente da curva porém confirma a existência de uma leve assimetria em relação ao zero. De fato, para valores da MM menores que  $\pm\sigma$  ( $\pm11.73\text{ cm}$ ) a frequência de ocorrência da MM positiva tende a ser levemente maior que a da MM negativa. Para valores da MM entre  $\pm\sigma$  e  $\pm3\sigma$  ( $\pm35.2\text{ cm}$ ), as duas se equivalem aproximadamente. Para a faixa de MM de amplitudes maiores que  $4\sigma$  ( $\pm47.0\text{ cm}$ ) que corresponde às caudas do histograma, onde se encontram os eventos extremos, há, realmente, uma tendência de predominância das MM positivas.

Esse é um assunto de importância prática e fonte de uma certa confusão que decorre do fato que eventos positivos são muito mais notados que eventos negativos em vista das consequências adversas que um nível do mar elevado ocasiona, tais como: inundação costeira e erosão de praias. Eventos de MM negativas são menos danosos e, usualmente, passam despercebidos do público, mas podem acarretar problemas também como, por exemplo, a diminuição do calado para a navegação em águas rasas. O que os resultados indicam, em síntese, é que, numa primeira aproximação, MM positivas e negativas se equivalem, porém, em eventos extremos, as MM positivas atingem valores maiores que as negativas.

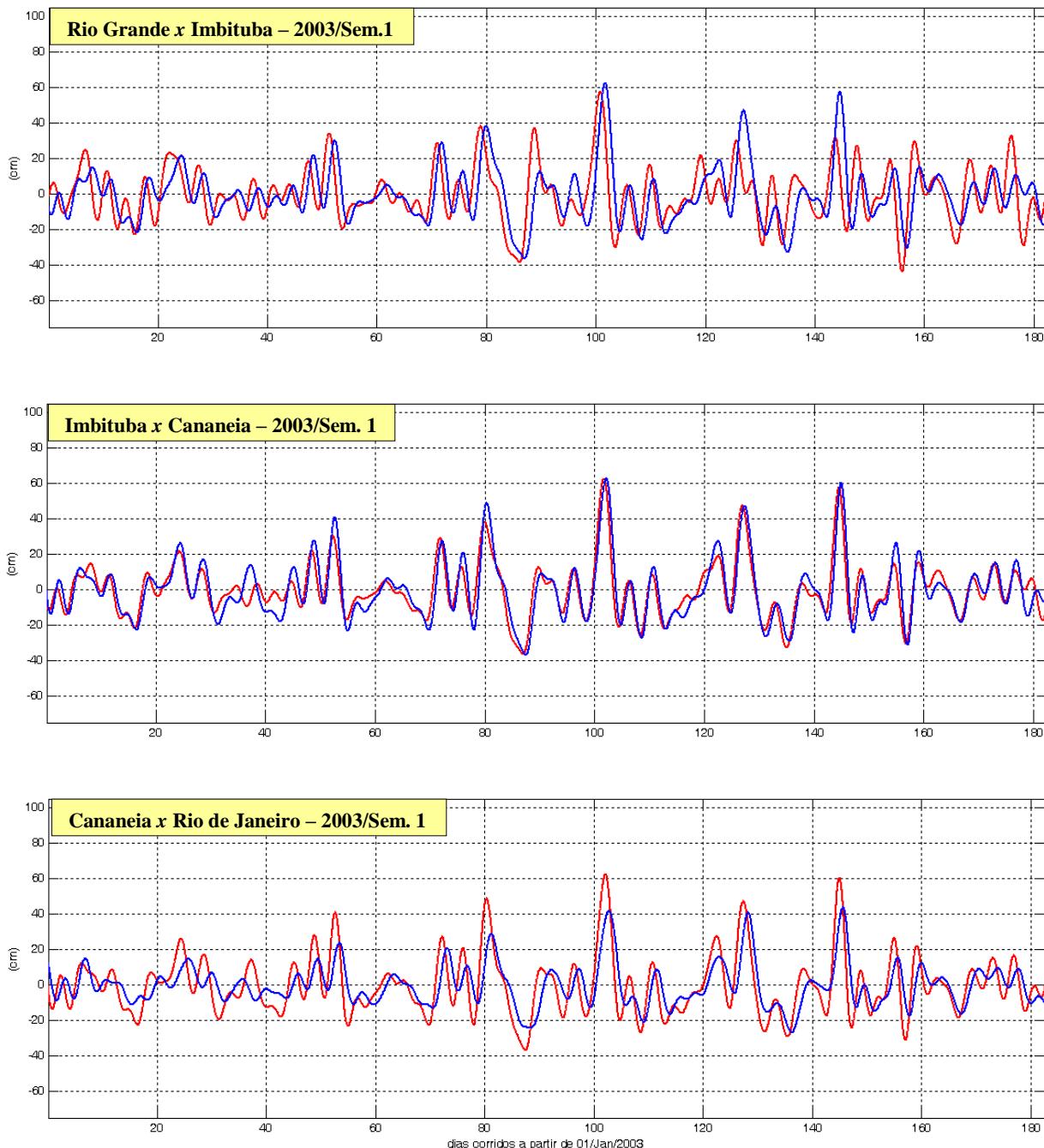
Os resultados acima, obviamente, aplicam-se à MM no Rio de Janeiro e não necessariamente representam o comportamento da MM nos sítios mais a Sul.

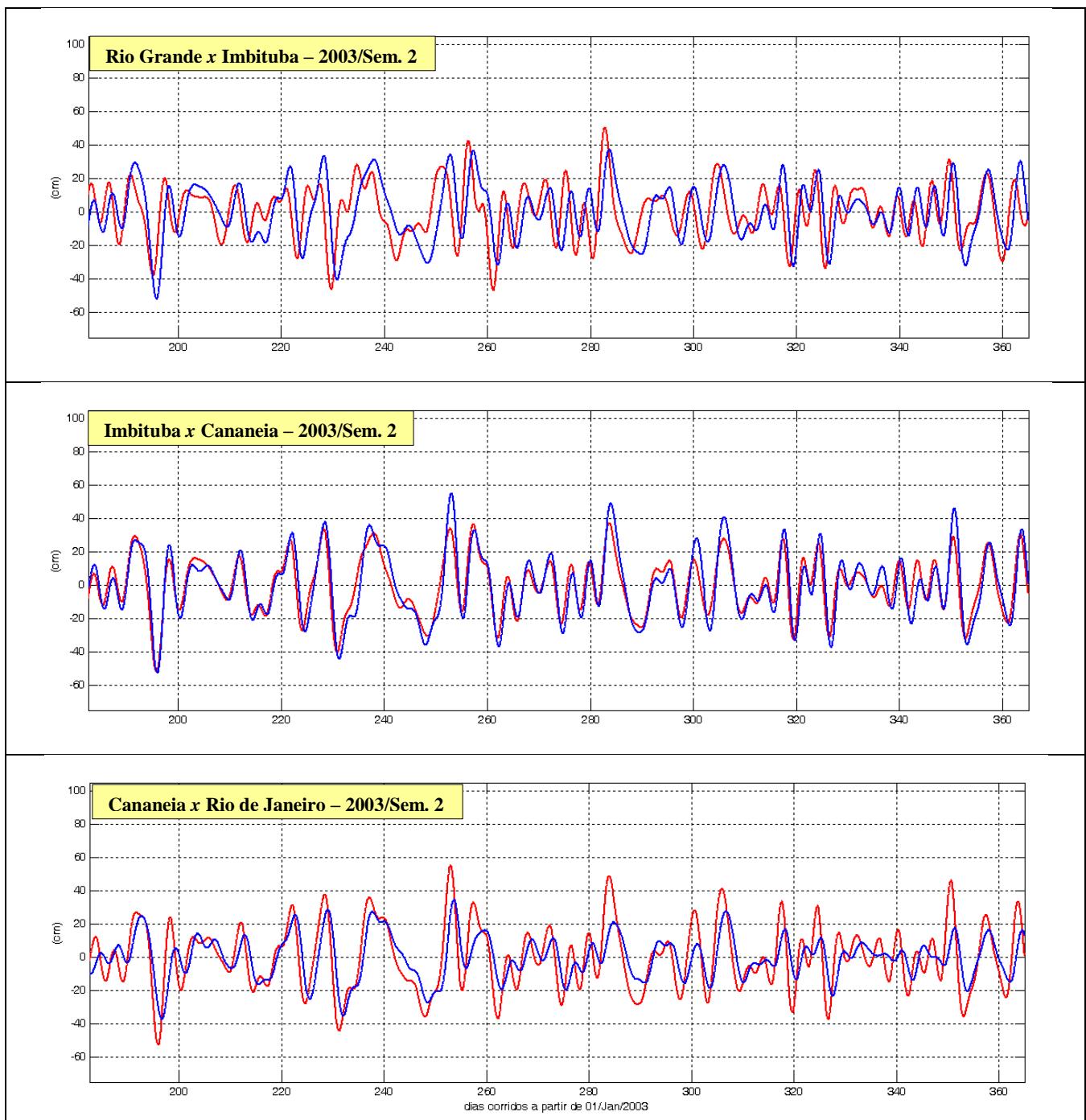
## II.9 - Análise Espaço-Temporal da Maré Meteorológica

Mantendo o foco no fenômeno da MM, aspectos espaço-temporais do fenômeno serão analisados a partir de agora tomando partido da *simultaneidade* das medições dos dois conjuntos de dados coletados.

### II.9.1 - Conjunto de Dados #1 - Região S/SE Brasileira

Iniciando a análise com o conjunto de dados (simultâneos) do ano de 2003 que cobrem a costa S/SE brasileira, a figura (II.17) mostra a MM (simultânea) entre pares de sítios vizinhos ao longo do ano de 2003, com o sitio mais a Sul sempre traçado em **vermelho**.





**Figura II.17** - Séries temporais semestrais de MM para pares de sítios vizinhos do Conjunto#1 indicados nos gráficos

Uma simples inspeção visual dos gráficos mostra nítida semelhança da MM observada em sítios vizinhos. De fato, a MM em Imbituba assemelha-se a de Rio Grande deslocada para a direita (defasado no tempo), ou, em outras palavras, as variações da MM em Rio Grande irão se repetir em Imbituba, com algumas modificações, algum tempo depois. O mesmo ocorre entre Imbituba e Cananéia e entre Cananéia e Rio de Janeiro, porém, com defasagens visivelmente diferentes.

Sem entrar ainda no mérito de *como* e *porque* (isso será feito adiante), esse fato sugere que a MM apresenta um padrão de propagação de Sul para Norte ao longo da costa S/SE brasileira. É possível ainda observar visualmente que a MM em Cananéia tende a ser ligeiramente maior que em Imbituba. Já no par Cananéia - Rio de Janeiro, percebe-se que a MM no Rio tende a ser sistematicamente menor do que em Cananéia. Ambas as observações confirmam o resultado encontrado anteriormente sobre a magnitude da MM ao longo da costa.

## **II.9.2 - Conjunto de Dados #2 - Brasil / Argentina**

Os resultados para os dados da região S/SE brasileira sobre a existência de um “sinal” que se propaga de *Sul* para *Norte* ao longo da costa na banda da MM suscitam questões fundamentais sobre o fenômeno da MM no Brasil. A questão óbvia que se coloca é *se a MM continua tendo o mesmo comportamento a sul de Rio Grande* e, caso isso se verifique, *onde se situa a origem do “sinal”?* Veio daí a necessidade de se obter dados fora das fronteiras do nosso país.

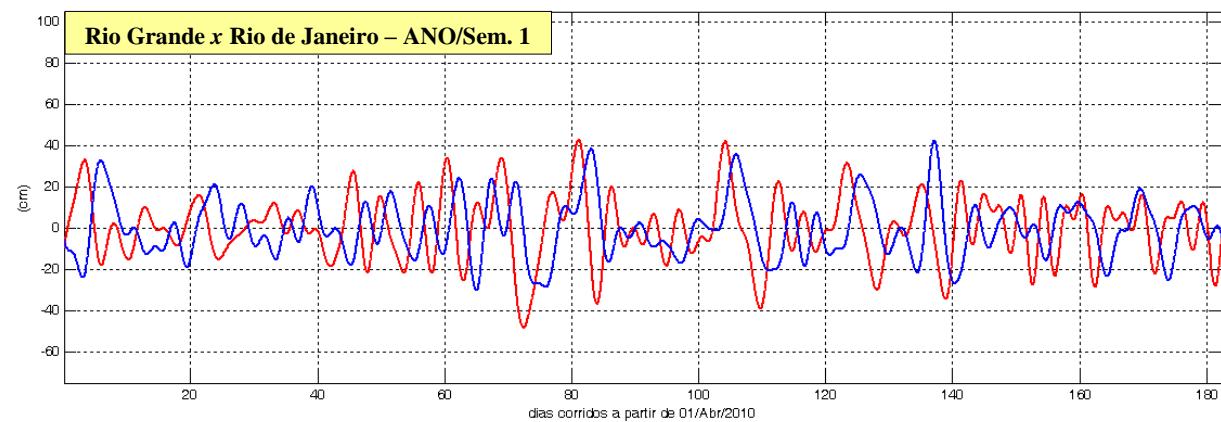
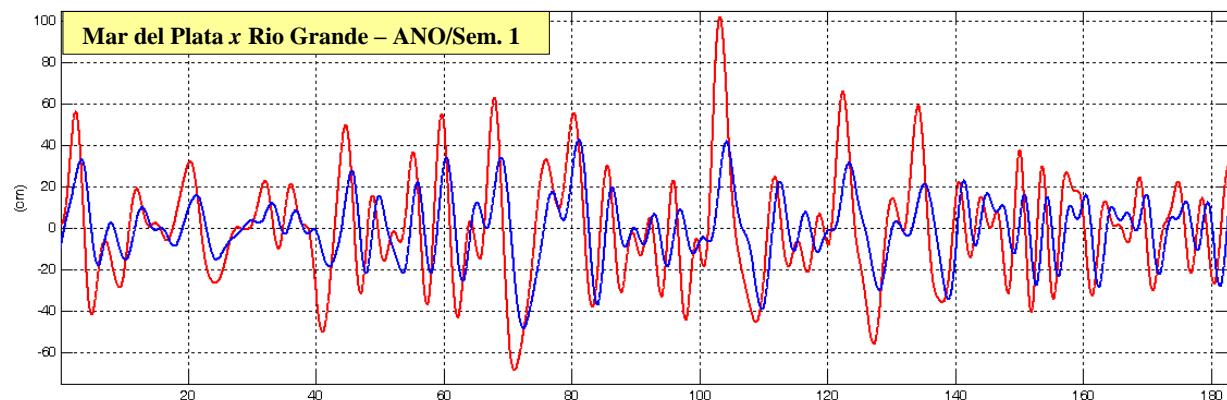
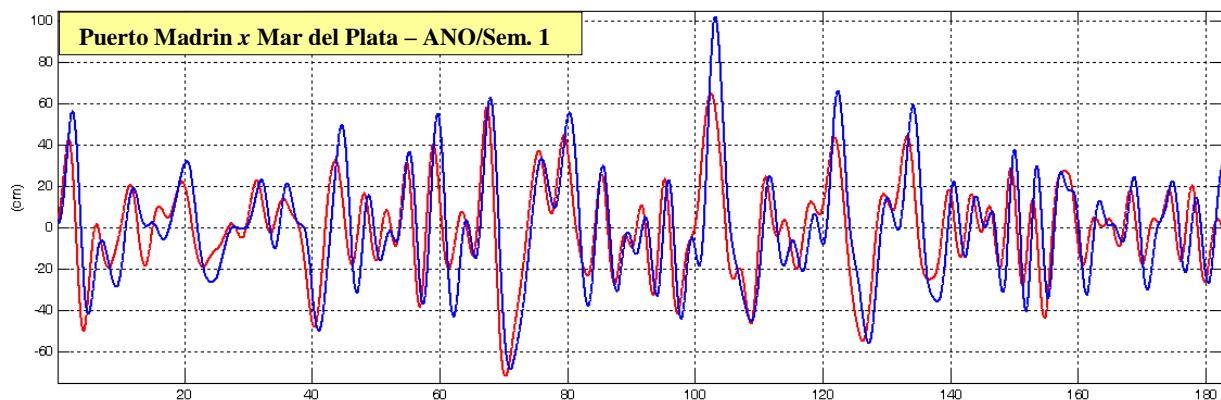
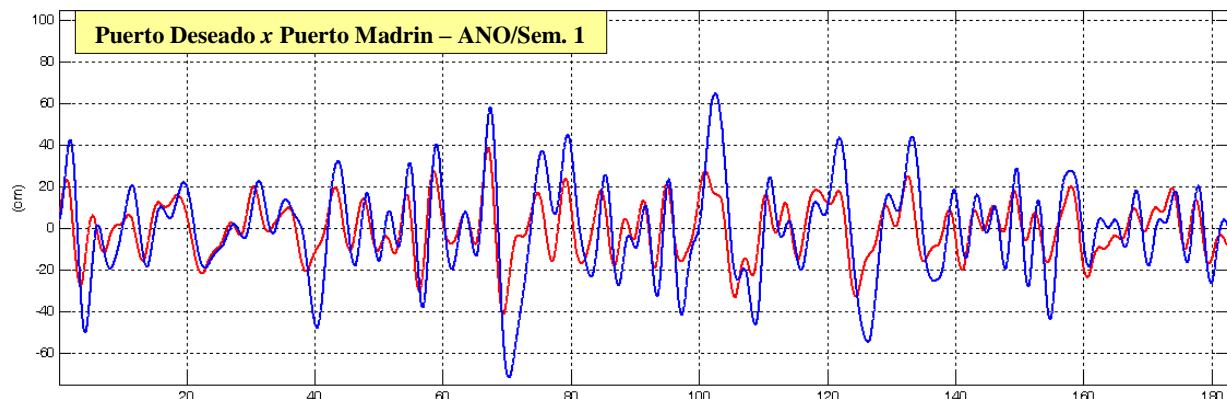
Fazendo um breve histórico, nessa altura do trabalho o autor fez uma pesquisa nos dados do GOOS em busca de medições *simultâneas* para Brasil, Uruguai e Argentina. No Uruguai, lamentavelmente, não se encontrou nada. Na Argentina, porém, estavam disponíveis dados (simultâneos) para Mar del Plata, Puerto Madrin e Puerto Deseado no período de 2010 a 2012, com lacunas em alguns trechos. No Brasil, nesse mesmo período, foram encontrados dados completos apenas para o Rio de Janeiro. Ocorre que a inexistência de dados do acervo GOOS nesse período em Rio Grande, um local chave no presente contexto, prejudicaria sobremaneira a análise que se almejava fazer. Para contornar a situação, o autor recorreu à equipe da RG Pilots que fornece dados à Praticagem do Porto de Rio Grande.

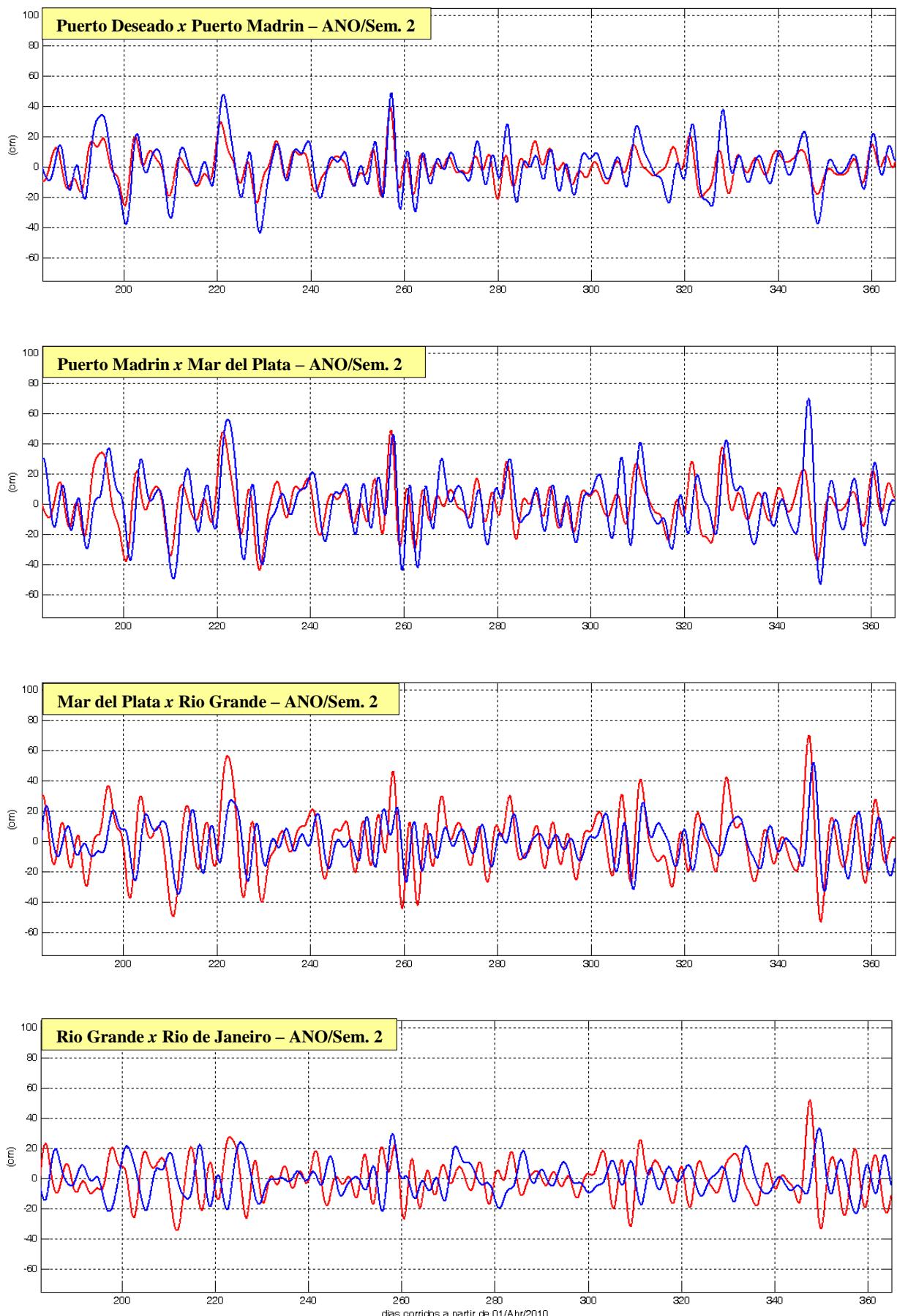
Como já adiantado, a RG Pilots mantém um serviço de monitoramento do nível do mar que consiste de leituras *visuais* horárias do nível do mar numa régua fixada ao cais da Praticagem, mesmo local onde os dados GOOS de 2003 foram coletados [ver figura (II.2)]. Como já mencionado, graças a gentil colaboração do Sr. Wilmar Silveira, o autor teve acesso às valiosas observações realizadas pela equipe da RG Pilots. Esses dados, apesar de não serem instrumentais, tiveram inestimável valor pois cobrem, surpreendentemente, com poucas lacunas, o período de 2002 a 2014, logo, incluindo o período de interesse (2010 a 2012) e, ainda, o ano de 2003 com medições simultâneas às dos dados GOOS usados no Conjunto #1. Salvo melhor juízo, essas observações constituem a mais longa medição de nível do mar já realizada no Estado do Rio Grande do Sul.

Como primeira providência, a qualidade dos dados da RG Pilots foi avaliada através da comparação com os dados (instrumentais) do acervo GOOS para Rio Grande no ano de 2003. De acordo com essa avaliação, apresentada no Apêndice 3, os dados da RG Pilots foram considerados *aceitáveis* para uso no presente estudo.

Feita a validação dos dados de Rio Grande, procedeu-se a uma minuciosa avaliação das lacunas existentes no conjunto de medições (na Argentina e no Brasil) para o período de superposição de dados. Essa avaliação permitiu encontrar um período com 1 ano (365 dias) de duração, indo de *01/Mar/2010* a *30/Abr/2011* (referido como ANO), com dados simultâneos, quase sem lacunas, para Puerto Deseado, Puerto Madrin, Mar del Plata, Rio Grande e Rio de Janeiro que constituem o Conjunto de Dados #2.

A figura (II.18) , análoga a figura (II.17), mostra a MM (simultânea) entre pares de sítios vizinhos ao longo do ANO, com o sitio mais a Sul sempre traçado em vermelho.





**Figura II.18** - Séries temporais semestrais de MM para pares de sítios vizinhos do Conjunto#2 indicados nos gráficos

Novamente, uma inspeção visual dos gráficos mostra nítida semelhança da MM entre sítios vizinhos com a MM do sitio mais a *Sul* tendendo a se repetir, com algumas modificações e defasada no tempo, no sitio mais a *Norte*. O fato de que a MM cresce em amplitude desde Puerto Deseado a Mar del Plata, decrescendo a partir daí no sentido *Norte*, apontado anteriormente na figura (II.5), também pode ser verificado visualmente nos gráficos (traçados na mesma escala).

As medições do Conjunto#2, portanto, indicam com clareza que o “sinal” de MM no Brasil provém da Argentina e que a origem do mesmo está no extremo *S* da América do Sul. Fica claro que o fenômeno da MM parece ter uma natureza *móvel* em toda a costa *E* do continente sul americano com sentido de propagação de *Sul* para *Norte*.

### II.9.3 - Análise de Correlação da Maré Meteorológica entre Sítios Vizinhos

Para aprofundar a análise desse aspecto fundamental do fenômeno, a correlação da MM entre sítios de medição foi investigada por meio da *Função Coeficiente de Correlação*, também conhecida como *Função de Covariância Cruzada Normalizada*,  $\rho_{xy}(\tau)$ , calculada, no domínio do tempo, entre pares de medições  $\eta_x$  (ponto a *Sul*) e  $\eta_y$  (ponto a *Norte*) em função da defasagem temporal  $\tau$  entre as séries. Para séries de média nula (o caso aqui), a Função  $\rho_{xy}$  é dada por [Bendat & Piersol (1999)] :

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{C_{xy}(\tau)}{\sigma_x \sigma_y} \quad (\text{II. 5})$$

onde,  $C_{xy}(\tau)$  é a função de *Covariância*, dada por:

$$C_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \eta_x(t) \eta_y(t - \tau) dt \quad (\text{II. 6a})$$

Ou, equivalentemente,

$$C_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \eta_x(t + \tau) \eta_y(t) dt \quad (\text{II. 6b})$$

A primeira opção usa a série  $\eta_y$  como referência enquanto a segunda opção usa  $\eta_x$ .

Os parâmetros  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  correspondem à raiz quadrada dos valores médios quadráticos (“root mean square values”) das séries temporais de nível nos 2 locais em questão, dados por:

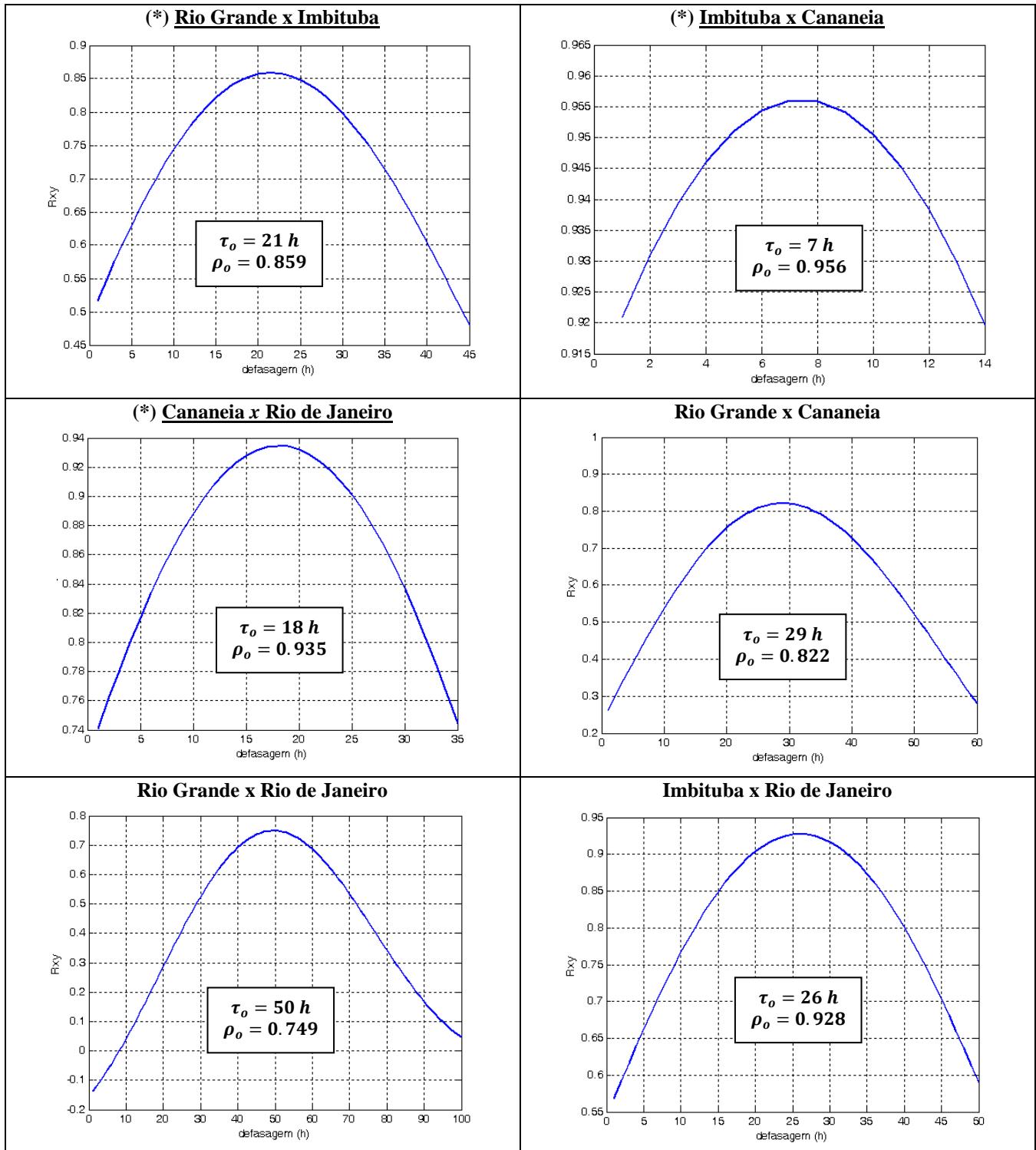
$$\sigma_x = \left[ \frac{1}{T} \int_0^T [\eta_x(t)]^2 dt \right]^{1/2} ; \quad \sigma_y = \left[ \frac{1}{T} \int_0^T [\eta_y(t)]^2 dt \right]^{1/2} \quad (\text{II. 7a - b})$$

Segundo Bendat & Piersol (2003), pg 116, a função  $\rho_{xy}$  mede o grau de dependência linear entre duas séries temporais para uma defasagem  $\tau$  entre elas. Trata-se, essencialmente, de uma generalização do conhecido coeficiente de correlação usado em estatística.

Antes de mostrar resultados, cabe uma breve nota sobre a relação do método descrito acima (no domínio do tempo) com um método análogo efetuado no domínio da frequência por meio dos espectros cruzados e funções de coerência de pares de medições. Ocorre que a técnica de filtragem do NnA via FFT utilizada para decompor as séries temporais na banda da Maré Meteorológica produz uma série temporal de MM que expressa de forma exata o fenômeno no domínio do tempo. O cálculo da variância no domínio do tempo e no da frequência, por exemplo, produz valores exatamente iguais. Portanto, o coeficiente de correlação calculado no domínio do tempo usando a série de MM extraída do sinal original, deve ser equivalente à coerência *média* em toda a banda de frequências da MM. Assim sendo, se o objetivo for encontrar a correlação *média* na banda da MM, não haveria nenhum ganho em se trabalhar no domínio da frequência. O método no domínio do tempo, além de muito mais simples, produz resultados mais úteis para o que se deseja investigar e por isso foi o método escolhido.

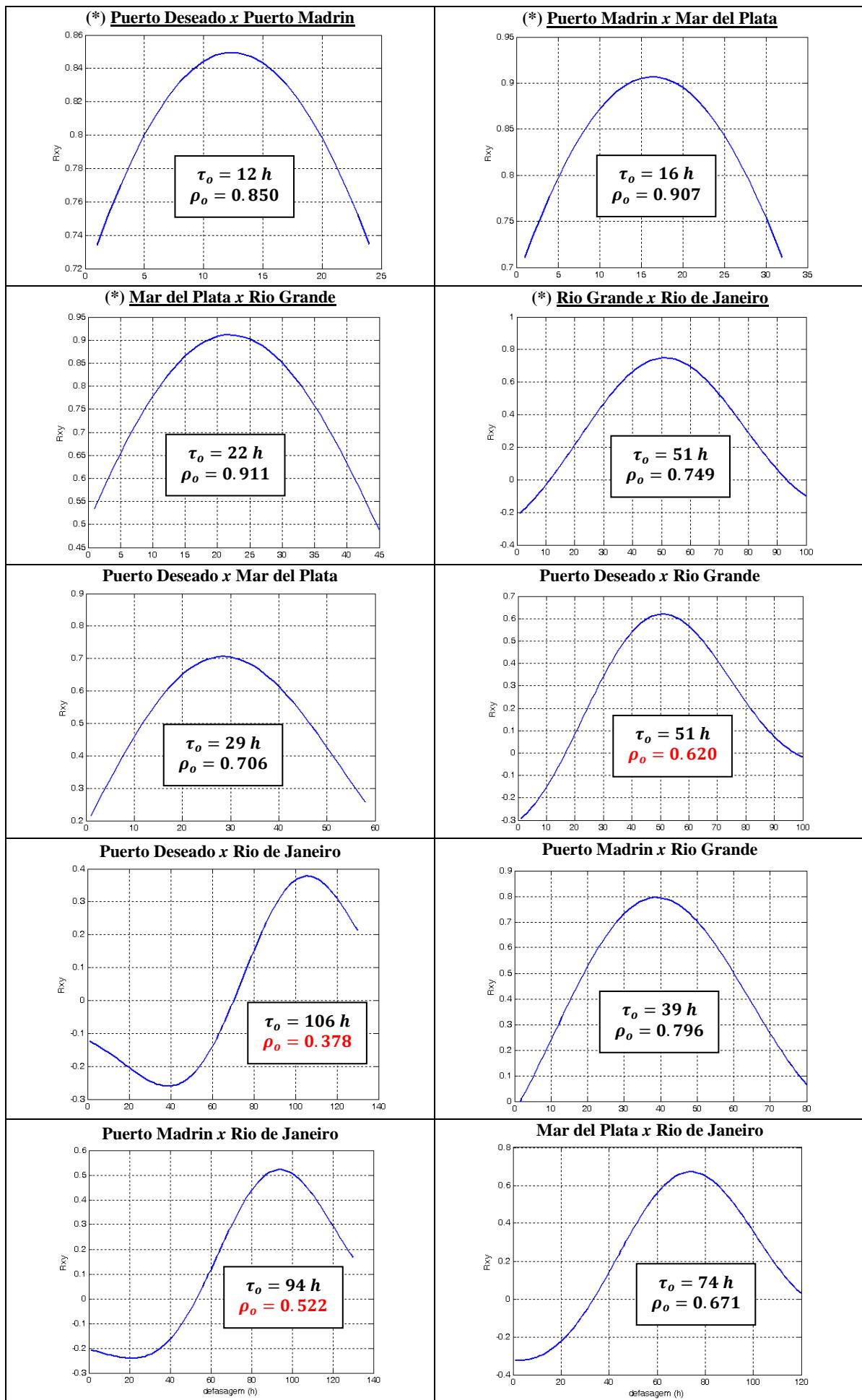
O cálculo da *Função Coeficiente de Correlação* entre as MM’s de pares de sítios foi levado a cabo para os 2 conjuntos de dados. Iniciando pelo Conjunto de dados #1, a figura (II.19) mostra o resultado da análise de correlação.

Conjunto de Dados #1 - (2003)



**Figura II.19** - Funções Coeficiente de Correlação para a MM entre pares de locais indicados nos gráficos em função da defasagem temporal (medida a partir do sítio mais a Sul) para o Conjunto #1. Sítios vizinhos estão assinalados com (\*) e sublinhados. Valores da defasagem  $\tau_o$  (picos das funções) que produzem a máxima correlação ( $\rho_{xy}(\tau_o) = \rho_o$ ) estão mostrados diretamente nos gráficos

Para o Conjunto de Dados #2, os resultados estão mostrados na figura (II.20):



**Figura II.20** - Idem para Conjunto #2.

Em ambos os conjuntos de dados, os valores dos coeficientes de correlação para pares de sítios vizinhos próximos a 90% confirmam que as MM's entre sítios vizinhos estão de fato significativamente correlacionadas, confirmando a existência de uma forte conexão no nível nessa banda ao longo da costa *E* da América do Sul onde o fenômeno é detectado significativamente. A existência de um padrão de propagação de Sul para Norte ao longo da costa, inferida visualmente nas séries temporais, também encontra suporte pelo sinal positivo (em relação ao sítio mais a Sul) da defasagem calculada.

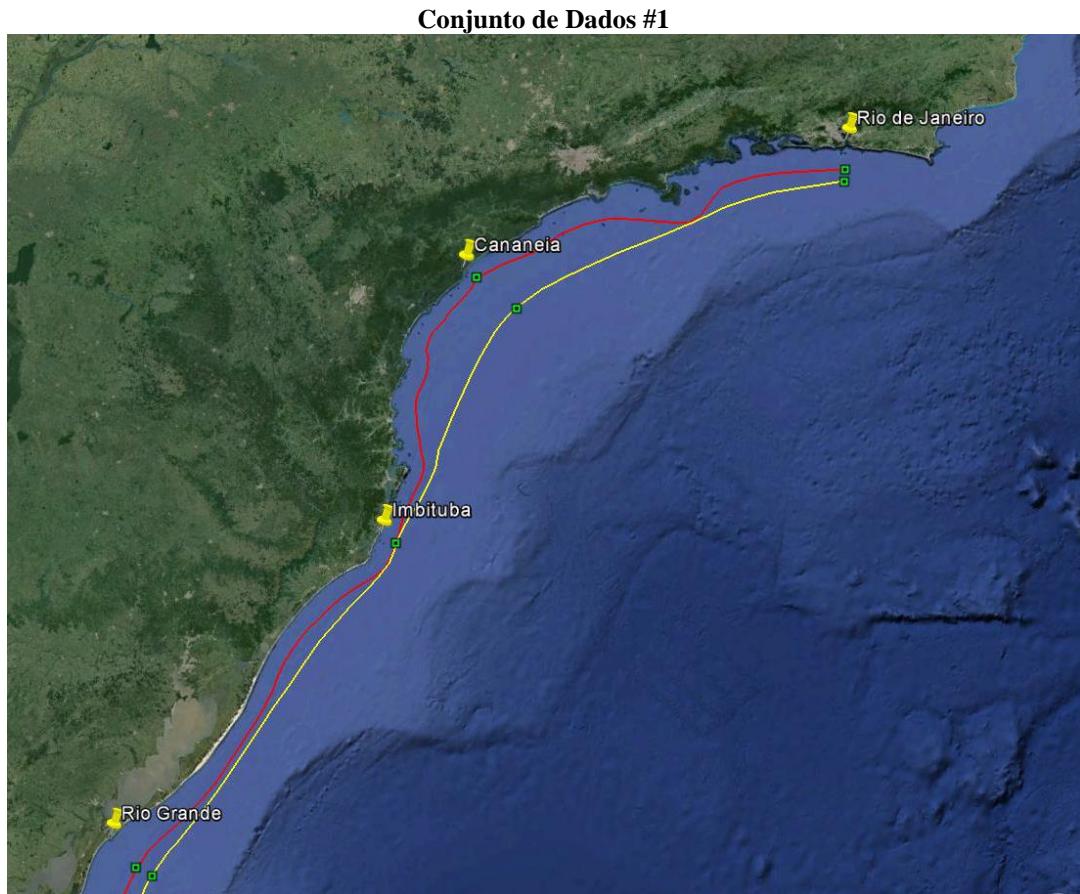
Como esperado, os valores do coeficiente de correlação para sítios não vizinhos caem em relação aos vizinhos, indicando que existem fatores ao longo da costa que afetam o “sinal”. Esse aspecto dos resultados pode ser melhor apreciado no Conjunto #2 o qual envolve distâncias bem grandes. Admitindo que  $\rho_o = 0.65$  seja o valor limite para indicar a existência de uma correlação estatisticamente significativa entre as séries temporais, uma inspeção da figura II.20 mostra que a MM no Rio de Janeiro estaria correlacionada com a MM em Mar del Plata e que a MM em Puerto Deseado estaria *quase* correlacionada com a MM em Rio Grande. Para distâncias muito grandes a correlação cai abaixo do limite. Mesmo assim, as MM's em Puerto Deseado e no Rio de Janeiro, por exemplo, ainda mostram alguma conexão. Esse aspecto manifesta-se de forma ainda mais expressiva (e surpreendente !) entre Puerto Madrin e Rio de Janeiro, apesar da grande distância entre os dois locais.

## II.9.4 - Determinação da Velocidade de Propagação do Sinal de Maré Meteorológica

Admitindo que  $\tau_o$  corresponda ao tempo *médio* de deslocamento do sinal entre sítios, é possível estimar a velocidade *média* de propagação da MM ( $C_m$ ) a partir da distância percorrida ( $L$ ) através da expressão:

$$C_m = \frac{L}{\tau_o} \quad (\text{II.8})$$

A determinação da distância entre os locais de medição envolve alguma incerteza pois não se sabe por onde exatamente o “sinal” percorre a plataforma continental. No presente estudo, a distância entre os sítios foi estimada considerando dois tipos de percurso: (i) usando o contorno (aproximado) da costa como referência e (ii) usando o contorno (aproximado) da borda da Plataforma Continental como referência, conforme mostrado nas figuras (II.21) e (II.22).



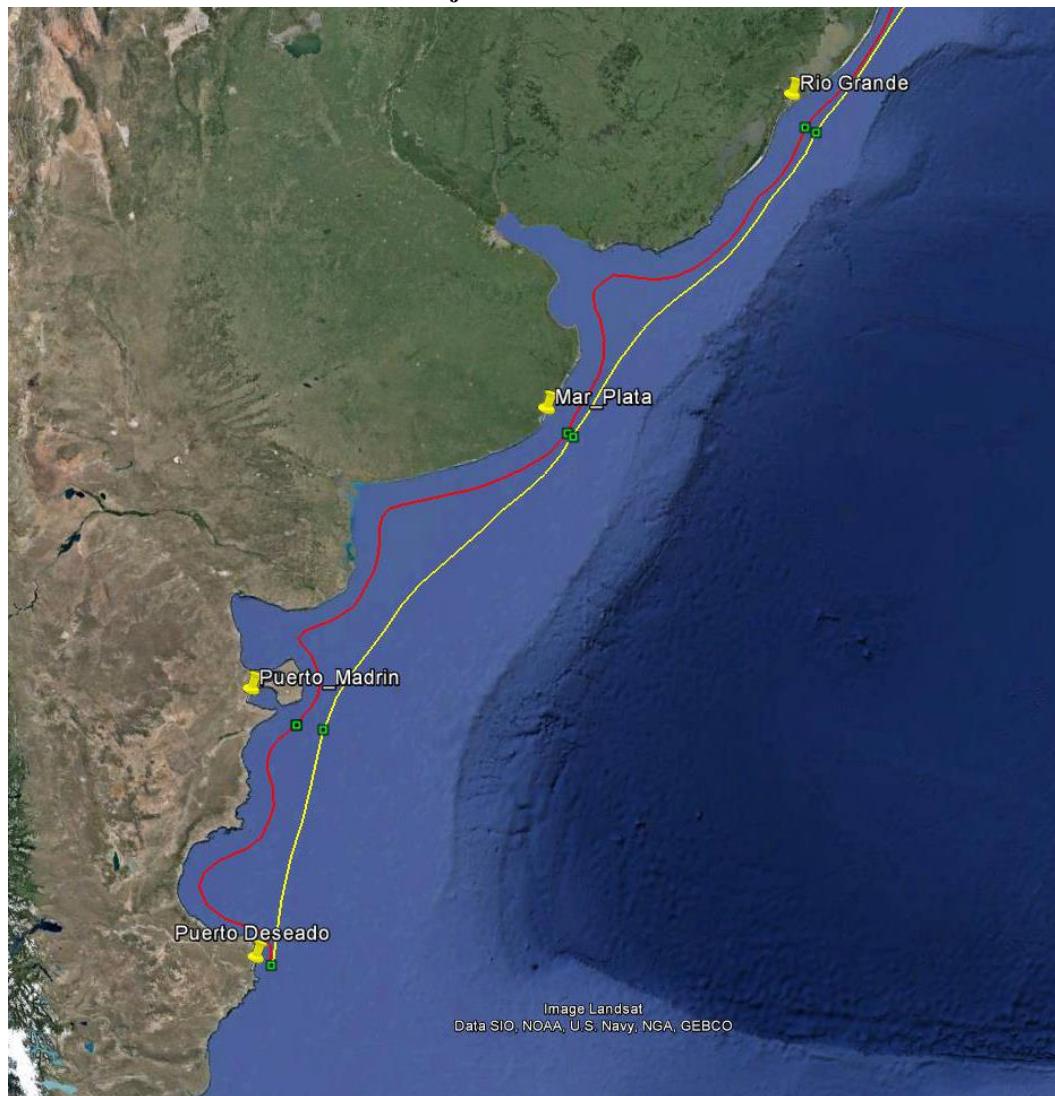
**Figura II.21** - Percursos utilizados para estimar a distância entre locais de medição. Linha **vermelha**: percurso com contorno da costa como referência; linha **amarela**: percurso com contorno da borda da Plataforma Continental como referência.

As distâncias segundo os dois percursos foram determinadas usando a ferramenta “régua” do Google Earth e o resultado está apresentado na tabela II.5 juntamente com a média entre as duas medidas.

Distâncias	Ao longo do contorno da costa	Ao longo do contorno da borda da P.C.	Média
Rio Grande a Imbituba	570 km	550 km	560 km
Imbituba a Cananéia	380 km	350 km	365 km
Cananéia a Rio de Janeiro	530 km	470 km	500 km

**Tabela II.5** – Estimativa da distância entre sítios no Conjunto#1

### Conjunto de Dados #2



**Figura II.21** – Similar a figura II.21 para a parte sul da América do Sul

As distâncias segundo os dois percursos foram determinadas pelo mesmo procedimento e o resultado está apresentado na tabela II.6.

Distâncias	Ao longo do contorno da costa	Ao longo do contorno da borda da P.C.	Média
P. Deseado a P. Madrin	700 km	500 km	600 km
P. Madrin a Mar del Plata	930 km	780 km	855 km
Mar del Plata a Rio Grande	800 km	900 km	850 km
Rio Grande ao Rio de Janeiro	1480 km	1370 km	1425 km

**Tabela II.6** – Estimativa da distância entre sítios no Conjunto#2

A velocidade média de propagação do “sinal” de MM entre sítios de medição nos dois conjuntos de dados pode agora ser estimada em função da distância e da defasagem *entre cada par de sítios*. Apenas pares de sítios cuja correlação exceda 0.65 foram considerados. Os resultados estão apresentados nas tabelas II.7 e II.8.

Conjunto #1 Maré Meteorológica	Distância	Defasagem ( $\tau_o$ )	Velocidade de Propagação ( $C_m$ )
(*) <u>Rio Grande - Imbituba</u>	560 km	21 h	7.5 m/s [ 640 km/dia ]
(*) <u>Imbituba - Cananéia</u>	365 km	7 h 10 h	15.1 m/s [ 1250 km/dia ] 10.1 m/s [ 876 km/dia ]
(*) <u>Cananéia - Rio de Janeiro</u>	500 km	18 h	8.2 m/s [ 667 km/dia ]
<b>Rio Grande - Cananeia</b>	<b>925 km</b>	<b>29 h</b>	<b>8.9 m/s</b> [ 766 km/dia ]
<b>Rio Grande - Rio de Janeiro</b>	<b>1425 km</b>	<b>50 h</b>	<b>7.5 m/s</b> [ 640 km/dia ]
<b>Imbituba - Rio de Janeiro</b>	<b>865 km</b>	<b>26 h</b>	<b>9.2 m/s</b> [ 798 km/dia ]

Tabela II.8 – Estimativa da velocidade de propagação do sinal de MM para o Conjunto#1

Conjunto #2 Maré Meteorológica	Distância	Defasagem ( $\tau_o$ )	Velocidade de Propagação ( $C_m$ )
(*) <u>P. Deseado - P. Madrin</u>	600 km	12 h	13.9 m/s [ 1200 km/dia ]
(*) <u>P. Madrin - Mar del Plata</u>	855 km	16 h	14.8 m/s [ 1283 km/dia ]
(*) <u>Mar del Plata - Rio Grande</u>	850 km	22 h	10.7 m/s [ 927 km/dia ]
(*) <u>Rio Grande - Rio de Janeiro</u>	<b>1 425 km</b>	<b>51 h</b>	<b>7.8 m/s</b> [ 670 km/dia ]
<b>P. Deseado – Mar del Plata</b>	<b>1 455 km</b>	<b>29 h</b>	<b>14.0 m/s</b> [ 1200 km/dia ]
<b>Mar del Plata – Rio de Janeiro</b>	<b>2 275 km</b>	<b>74 h</b>	<b>8.5 m/s</b> [ 738 km/dia ]

Tabela II.9 – Idem para o Conjunto#2

Lembrando que as medições são *completamente independentes*, há vários aspectos de grande importância a observar nos resultados acima.

Em primeiro lugar, os valores das correlações e das defasagens (logo, das velocidades de propagação) obtidos entre Rio Grande e Rio de Janeiro nos dois conjuntos de dados (grifados em **verde** nas tabelas) atestam a consistência da análise realizada. Com efeito, o Conjunto de Dados#1 (com dados de 2003) previu 50 horas de defasagem média do sinal de MM entre os dois sítios enquanto o Conjunto #2 (com dados do ANO) previu 51 horas, valores surpreendentemente próximos. Adicionalmente, os valores dos máximos do coeficiente de correlação obtidos nos dois conjuntos de dados foram exatamente iguais ( $\rho_o = 0.749$ ). Esses resultados mostram a consistência da análise uma vez que provieram de dois períodos de 1 ano completamente distintos.

Verificando as magnitudes das velocidades médias de propagação do Conjunto#1, o valor obtido para o par Imbituba-Cananéia (assinalados em **vermelho** na tabela) destoa um pouco dos outros resultados, sendo quase o dobro dos demais. A correlação entre as séries temporais de MM nos dois locais, entretanto, é bastante alta, sugerindo que, talvez, o problema esteja na contagem do tempo em Cananéia. O autor experimentou problema similar em Rio Grande com os dados da RG Pilots. Ocorre que todos os dados do GOOS devem ter o tempo referenciado ao horário do meridiano de Greenwich – o chamado horário Zulu – e nos dados coletados pela RG Pilots, segundo informação dos funcionários da empresa, a referência era o horário local. Isso introduziu uma defasagem de *3 horas* em relação às demais medições que teve de ser corrigida. Supondo ser esse o caso em Cananéia (infelizmente, não foi possível verificar), a defasagem em relação à Imbituba passaria a ser de **10 horas** e a velocidade **10.1 m/s (876 km/dia)**, um valor apenas um pouco superior aos demais, porém de magnitude ainda próxima da média. Castro e Lee (1995) calcularam teoricamente uma velocidade de *10.2 m/s* para o trecho de Cananéia (ver tabela 4 do artigo) suportando a hipótese do erro de horário nos dados.

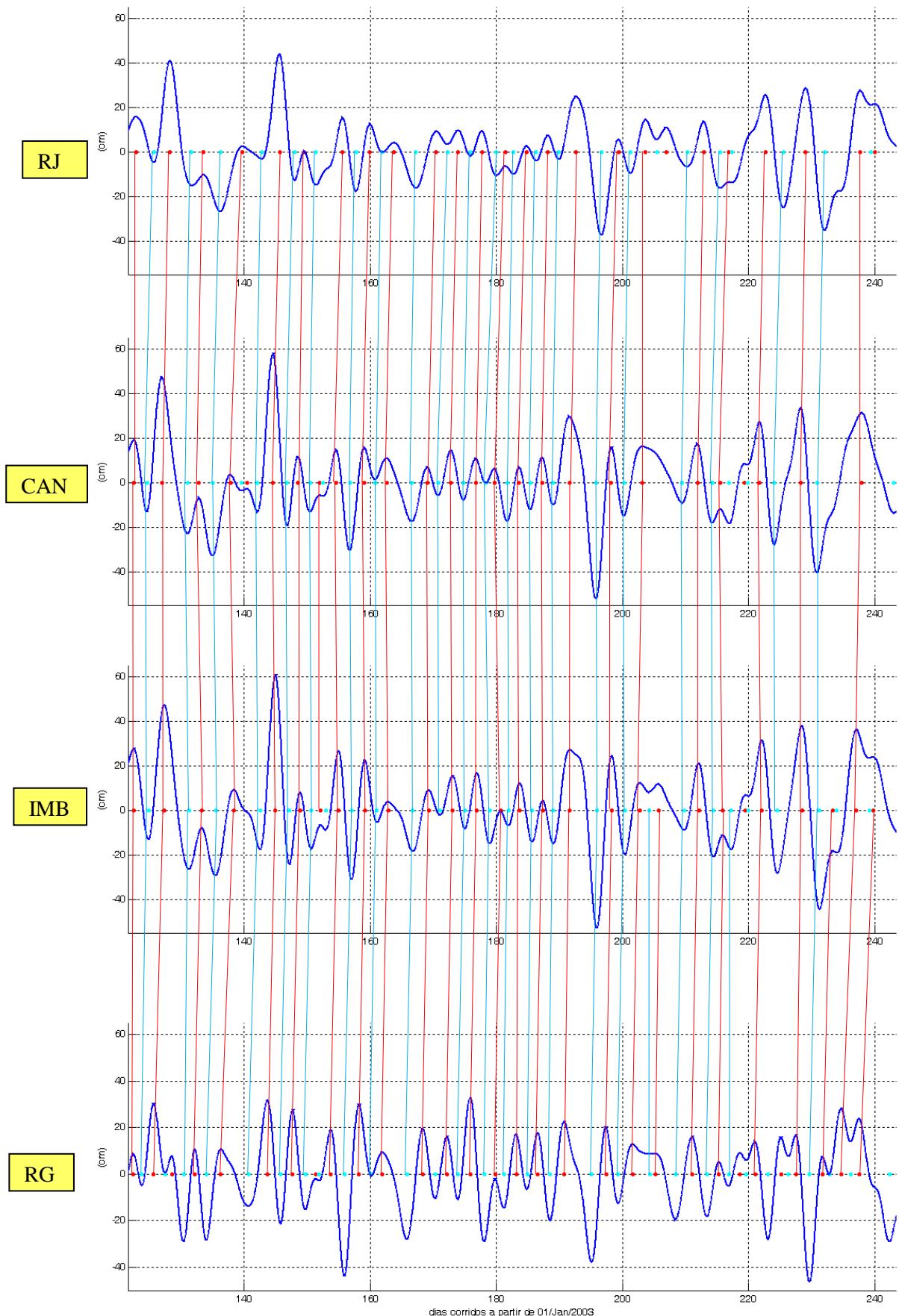
Incluindo o Conjunto#2 na discussão é possível observar uma tendência da velocidade de propagação do sinal de MM diminuir à medida que a latitude do local diminui. De fato, tomando, por exemplo, o trecho entre Puerto Deseado - Mar del Plata, a velocidade média de propagação foi de *14 m/s*, enquanto no trecho Rio Grande – Rio de Janeiro foi de *7.8 m/s*. Certamente outros fatores devem influenciar a determinação da velocidade, porém, o indicativo é de que esta varia diretamente com a latitude.

Com relação ao Conjunto#2, é curioso observar que a existência do estuário do Rio da Prata entre Mar del Plata e Rio Grande não impede a passagem do sinal de MM entre os dois sítios. Com efeito, mesmo havendo uma considerável descontinuidade física na linha de costa nesse trecho, é possível que a baixa profundidade da plataforma continental na foz do Rio da Prata garanta a passagem do sinal, ou, pelo menos, da maior parte dele uma vez que parte da energia transportada deve ser consumida no processo.

## **II.9.5 - Rastreamento de “Cristas” e “Cavados” do Sinal de Maré Meteorológica na costa S/SE Brasileira**

A existência de um padrão de propagação da MM de Sul para Norte ao longo da costa é um fato de extrema relevância e por isso merece um pouco mais de atenção. Aproveitando a disponibilidade de séries temporais simultâneas, essa questão será agora abordada sob a ótica de *eventos individuais*. Um evento individual de MM positiva ou negativa será definido como um pico/cavado na série temporal da MM.

A figura (II.22) mostra um diagrama espaço-temporal do nível (simultâneo) da MM para os 4 locais de medição do S/SE brasileiro com duração de um quadrimestre. Os gráficos apresentam, além das séries temporais da MM, os momentos em que eventos individuais de MM ocorreram através de pontos coloridos no eixo do tempo: eventos de MM positivas estão assinalados por pontos vermelhos e os de MM negativas por pontos em azul claro. Para acompanhar o deslocamento dos eventos entre os sítios de medição é necessário, primeiramente, selecionar eventos que mantenham sua identidade, ou, em outras palavras, que possam ser identificados e rastreados ao longo de todo o percurso (de RG ao RJ) e, a seguir, conectar as respectivas cristas ou cavas.



**Figura II.22** – Rastreamentos de eventos individuais positivos (**vermelho**) e negativos (**azul**) de MM entre Rio Grande e Rio de Janeiro no Conjunto#1

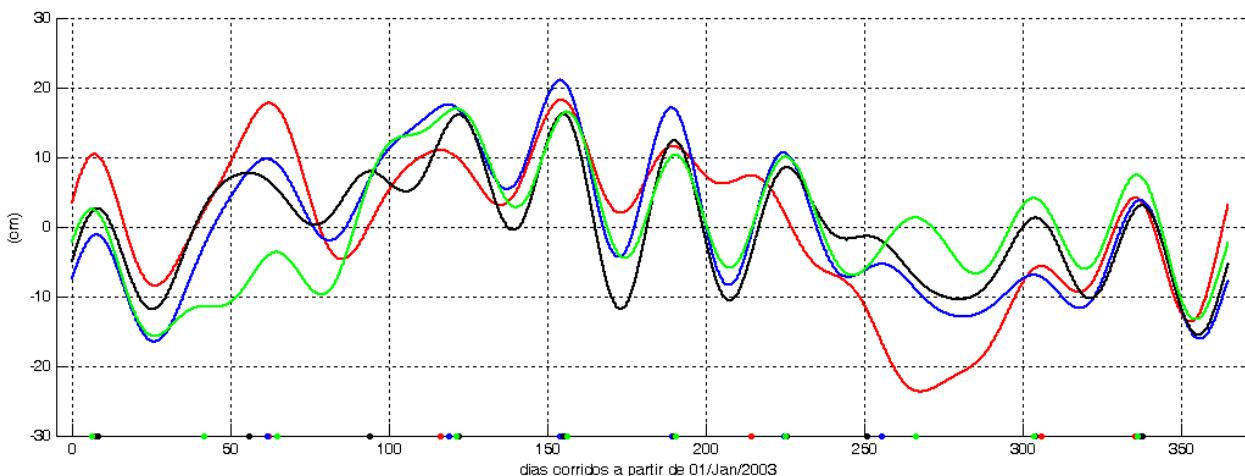
Uma simples observação visual das figuras dirime qualquer dúvida sobre a questão em foco. De fato, as figuras evidenciam de forma clara uma característica marcante (e impressionante) do fenômeno em estudo, qual seja, na banda da MM, as variações de nível apresentam nitidamente um padrão de propagação de Sul para Norte ao longo da costa com grande conexão em todo o trajeto como se pode verificar acompanhando as linhas na figura.

[ **OBS.** - Nesse ponto do trabalho, o autor considerou usar o rastreamento apresentado acima para determinar a velocidade de deslocamento de *eventos individuais* de MM nos trechos entre estações de medição. O conjunto de dados sobre as velocidades de propagação de eventos individuais permitiria avaliar a faixa de variação em torno da média da velocidade de propagação e também a existência de alguma correlação entre a velocidade e a altura de eventos (positivos e negativos) de MM, por exemplo. Todavia, por tratar-se de uma tarefa bastante laboriosa e avaliando o ganho que esse resultado traria para o restante do trabalho, a ideia foi postergada para um trabalho futuro uma vez que a grandeza que realmente interessa é a velocidade de propagação *média* já determinada através da correlação na seção II.9.4 ].

## II.10 - Nota sobre as Flutuações de Nível na Banda Sazonal

Mesmo não sendo o foco do presente trabalho, pela sua importância, essa seção apresenta uma breve análise sobre o comportamento das flutuações de nível na banda Sazonal para o Conjunto de Dados#1.

A figura (II.23) mostra a variação (simultânea) de nível nessa banda nos 4 locais de medição do Conjunto#1.



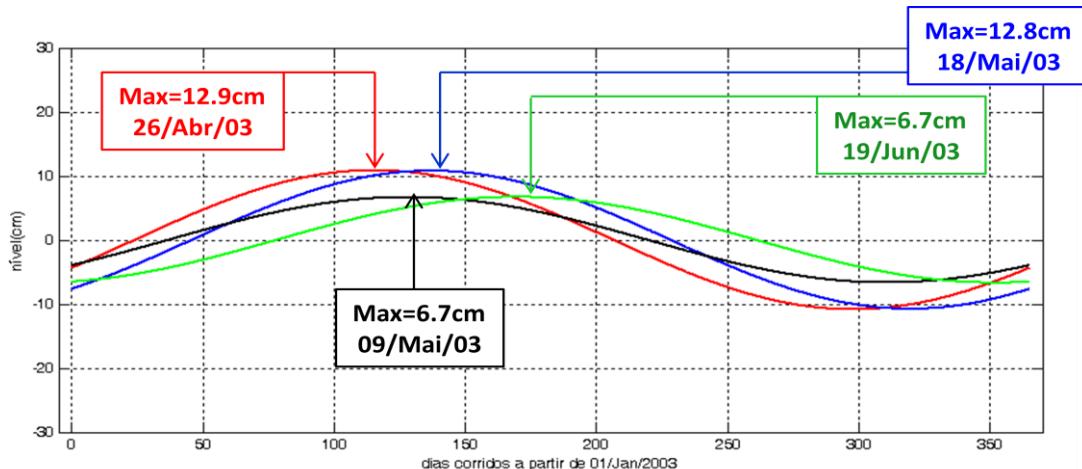
**Figura II.23** - Variação simultânea de nível na Banda Sazonal nos 4 sítios de observação: **Vermelho** = Rio Grande, **Azul** = Imbituba , **Preto** = Cananeia e **Verde** = Rio de Janeiro. Figura mostra também os momentos onde os picos ocorreram por meio de pontos (coloridos) ao longo do eixo do tempo.

Analizando a figura, a existência de um padrão que evolui de Sul para Norte não fica evidente. Os momentos onde os picos ocorrem, indicados na figura por meio de pontos coloridos ao longo do eixo do tempo, por exemplo, não segue um padrão definido: há situações em que o pico em Rio Grande precede os outros mas há também situações em que o oposto ocorre.

Verifica-se que a amplitude das variações sazonais de nível apresentaram valores significativos (máximo da ordem de 40 cm) em toda a costa S/SE brasileira em 2003. Essa fato reveste-se de grande importância pois as variações “lentas” (escala de meses) do nível do mar são controladas por essa banda. Por exemplo, a vulnerabilidade da costa a inundações e a erosão será afetada por tais variações sazonais de nível.

No ano de 2003, por exemplo, o nível manteve-se sobre-elevado (i.e. acima da média anual) no Outono e sub-elevado (abaixo da média anual) na Primavera, no caso de Rio Grande, Imbituba e Cananéia e, no caso do Rio de Janeiro, no Verão. O resultado para Cananeia concorda com a avaliação da variação do nível médio *mensal* para este sítio reportada em Neves (2005) cobrindo o período de 1955 a 1992 [ ver figura 2 da ref. ].

É interessante verificar como a *componente anual* do nível comportou-se no ano de 2003. Para tanto, essa componente foi isolada da Banda Sazonal – procedimento muito simples de ser feito no presente contexto – e o resultado está mostrado na figura (II.24).



**Figura II.24** - Séries temporais da Componente Anual nos 4 sítios de observação : **Vermelho** = Rio Grande, **Azul** = Imbituba, **Preto** = Cananeia e **Verde** = Rio de Janeiro. O momento de ocorrência dos valores máximos, juntamente com os valores atingidos, são também mostrados na figura.

As curvas sugerem um padrão de deslocamento de Sul para Norte entre Rio Grande, Imbituba e Rio de Janeiro, com o pico do nível ocorrendo sequencialmente nesses locais. Porém, o pico em Cananéia foge desse padrão, ocorrendo antes de Imbituba e Rio de Janeiro. Observar que um possível erro de horário de 3 horas em Cananéia teria efeito desprezível nesse resultado.

Outra questão de interesse refere-se à similaridade da componente anual entre Rio Grande e Imbituba. Por estar na foz de uma enorme Lagoa Costeira, (Lagoa do Patos), existe a possibilidade do nível em Rio Grande, (medido na Praticagem do porto) estar de alguma forma “contaminado” pela própria lagoa. A similaridade entre a componente *anual* nos dois sítios, entretanto, mostra claramente que, pelo menos para variações na escala anual, o nível do mar na Praticagem do Porto é controlado por fatores oceânicos e, portanto, *externos* à Lagoa dos Patos.

É curioso observar também que o período no qual o nível *Sazonal* manteve-se rebaixado em 2003 não coincide com o período chuvoso no sul do Brasil que, usualmente, acontece na Primavera [Andrade Neto et al. (2012), ver figura 8 da referência]. Assim, o período de máxima vazão fluvial na lagoa esteve fora de fase com a variação “lenta” do nível na foz no ano de 2003.

É oportuno mencionar na finalização dessa nota o importante trabalho de Saraceno, Smionato e Ruiz-Etcheverry (2014) sobre a variabilidade do nível do mar nas escalas sazonal e inter-anual na plataforma continental SE da América do Sul no qual os autores apresentam argumentos e evidências sobre a origem não-astronômica dessas flutuações. É interessante observar na figura 9 dessa referência, a similaridade entre as medições da componente anual do nível em Imbituba que lá aparece com o resultado apresentado na figura (II.24) acima.

# CAPÍTULO III

## O Fenômeno à Luz da Hidrodinâmica

### ÍNDICE

Introdução	
Objetivos Específicos do Capítulo	
III.1 – Equacionamento Hidrodinâmico: Equações de Águas Rasas para Fluido de Densidade Constante .....	65
III.1.1 - Simplificação das Equações Governantes - Equações Linearizadas e sem Fluxos Transversais de Momentum .....	67
III.1.2 - Equações expressas em Termo de Vazões .....	67
III.2 - Escoamento de Ekman Revisitado .....	68
III.3 - Maré Meteorológica Forçada Localmente	
III.3.1 - Problema “Clássico” .....	74
III.3.1.1 - Solução Analítica para Caso sem Atrito numa Plataforma “Larga” – Recapitação .....	75
III.3.1.1.1 - Solução para a Parte não-Transiente .....	76
III.3.1.1.2 - Nota sobre a Solução <i>Completa</i> para a Maré Meteorológica .....	83
III.3.2 Extensão da Solução Clássica para o Caso de Plataforma Estreita e Vento com Pista de Largura Finita	
III.3.2.1 - Estratégia adotada .....	85
III.3.2.2 - Equacionamento e Solução .....	86
III.3.2.3 - Exemplos de Aplicação	
III.3.2.3.1 - Extensão da Solução Clássica para incluir Vento com Pista de Largura Finita .....	88
III.3.2.3.2 - Caso de Plataforma Estreita e Vento com Pista de Largura Finita .....	91
III.3.2.3.3 - Caso de Plataforma Estreita e Vento com Pista de Largura Finita atuando Fora da Plataforma .....	95
III.3.3 Solução Aproximada para uma Plataforma Continental “Desconectada” .....	99
III.3.3.1 - Solução .....	101
III.3.3.2 - Ilustração e Comparação de Resultados .....	102
III.3.4 Extensão da Solução Local para Vento com Variação Temporal	
III.3.4.1 - Variação Temporal em Patamares .....	104
III.3.4.2 - Vento com Variação Temporal qualquer	
III.3.4.2.1 - Aproximação Geostrófica para a Corrente Paralela à Costa .....	107
III.3.4.2.2 - Equacionamento e Solução .....	108
III.3.4.2.3 - Tensão de Vento com Variação Temporal Senoidal .....	110
III.3.4.2.3.1 - Exemplo de Aplicação .....	111
III.3.5 Efeito do Atrito da Corrente com o Fundo no Problema Local	
III.3.5.1 - Caso de Vento Uniforme e Permanente .....	113
III.3.5.1.1 - Aproximação para a Região próximo à Costa .....	114
III.3.5.1.2 - Condição Limite .....	115
III.3.5.1.3 - Determinação do Tempo até o Equilíbrio .....	117
III.3.5.1.4 - Conceito do Tempo Friccional .....	118

III.3.5.1.5 - Determinação da Maré Meteorológica correspondente	
III.3.5.1.5.1 - Caso de uma Plataforma “Desconectada” .....	119
III.3.5.1.5.2 - Solução Clássica com Atrito .....	120
III.3.5.1.5.3 - Plataforma “Desconectada” Estreita .....	121
III.3.6 - Caso de Vento Uniforme e não-Permanente com Atrito .....	123
III.3.6.1 - Vento com Variação Temporal de Intensidade e/ou Sentido em Patamares atuando numa	
Plataforma “Desconectada” Estreita .....	124
III.3.6.1.1 - <u>Caso #1</u> - Vento cessa .....	125
III.3.6.1.2 - <u>Caso #2</u> - Vento mantém o Sentido mas aumenta de Intensidade .....	127
III.3.6.1.3 - <u>Caso #3</u> - Vento mantém o Sentido mas diminui de Intensidade .....	128
III.3.6.1.4 - <u>Caso #4</u> - Vento inverte o Sentido e atua contra a Corrente durante algum tempo .....	129
III.3.6.2 - Tensão de Vento com Variação Senoidal – Comparação entre as Soluções Analítica e Numérica .....	131
III.4 - Efeito de Vento com Pista de Comprimento Finito .....	135
III.4.1 - Equacionamento e Solução do Problema sem Atrito .....	136
III.4.2 - Solução pelo Método das Características – Recapitulação .....	141
III.4.3 - Aplicações – Casos sem Atrito	
III.4.3.1 - <u>Exemplo #1</u> - Vento Uniforme e Permanente com Pista Finita .....	143
III.4.3.1.1 - Solução para a Costa .....	144
III.4.3.1.2 - Representação Gráfica da Solução .....	145
III.4.3.1.3 - Interpretação Física do Resultado	
III.4.3.1.3.1 - Caso de uma Plataforma “Larga” .....	147
III.4.3.1.3.2 Caso de uma Plataforma “Estreita” .....	153
III.4.3.2 - <u>Exemplo #2</u> - Vento Uniforme com Pista e Duração Finitas .....	156
III.4.3.3 - <u>Exemplo #3</u> - Pulso de Vento com Tensão Uniforme Espacialmente e com Variação	
Temporal Senoidal .....	158
III.4.3.4 - <u>Exemplo #4</u> - Geração de Ondas Livres a partir de Vento Localizado .....	161
III.4.3.5 - <u>Exemplo #5</u> - Vento com Pista Móvel .....	165
III.4.4 - Inclusão do Atrito em Casos de Vento com Pista Finita .....	170
III.4.4.1 – Sobre a Velocidade Característica do Problema com Atrito .....	171
III.4.4.2 - Vento Uniforme e Permanente com Pista Finita Fixa e com Atrito .....	172
III.4.4.3 - Condição de Ressonância com Atrito .....	174
III.5 - Ondas Longas Livres numa Plataforma de Profundidade Constante	
III.5.1 - Plataforma de Largura “Infinita” – Revisão das Ondas de Kelvin “Clássicas” .....	176
III.5.2 - Plataforma “Desconectada” de Largura Finita – Ondas de Plataforma tipo Kelvin .....	178
III.5.2.1 - Relação de Dispersão .....	181
III.5.2.2 - Sentido de Propagação .....	182
III.5.2.3 - Onda de Kelvin “Clássica” recuperada .....	182
III.5.2.4 - Ilustração Gráfica da Solução .....	183
III.6 - Efeito da Forma (Declividade) da Plataforma Continental: Ondas Livres numa Plataforma com Fundo	
Inclinado Revisitadas	
III.6.1 – Equacionamento .....	185
III.6.2 - Solução para uma Plataforma Exponencial .....	187

III.6.2.1 - Relação de Dispersão .....	188
III.6.2.2 - Deslocamento da Superfície .....	189
III.6.2.3 - Campo de Velocidades .....	190
III.6.2.4 - Exemplo de Aplicação .....	191
III.6.3 - Propriedades das Ondas de Plataforma Continental .....	198
III.6.4 - Ondas de Plataforma Continental “Longas” ou de Baixa Frequência .....	199
III.7 - Vento de Pista Finita atuando numa Plataforma com Fundo Inclinado .....	202
III.7.1 - Solução Simplificada para a Maré Meteorológica numa Plataforma Exponencial usando apenas o Modo 1 .....	203
III.8 - Caso de uma Plataforma em Degrau “Desconectada” que Varia ao longo da Costa .....	205
III.9 - Nota sobre a Relação entre a Maré Meteorológica e a Corrente Costeira .....	207

## **Introdução**

O objetivo geral do Capítulo III do presente estudo é usar a hidrodinâmica para *entender* aspectos físicos fundamentais das variações de nível do mar na costa de origem não-astronômica com periodicidade na banda de 3 a 30 dias, a qual, de acordo com a definição proposta no Capítulo II é a “*Maré Meteorológica*” (MM).

A escolha de focar na MM apenas deu-se em função das limitações de tempo envolvidas e também ao fato da MM ser responsável pelo grosso da energia das variações do nível não-astronômico conforme visto no Capítulo II. Os aspectos físicos da banda Sazonal e da Maré de Vento também são importantes, mas um estudo aprofundado delas ficará postergado.

No que tange ao *entendimento* almejado, Csanady (1982) tece comentários no prefácio de seu livro “*Circulation in the Coastal Ocean*” que exprimem bem o modo como o presente autor vê a questão. Csanady inicia apontando a enorme complexidade do fenômeno e, ainda, a grande dificuldade em se relacionar o comportamento observado com princípios dinâmicos simples. Entretanto, prossegue Csanady, muitas vezes “é possível destilar da realidade características gerais do fenômeno que ocorrem repetidamente sob estímulos externos similares e que podem ser considerados como fenômenos específicos. Uma vez identificados, esses fenômenos podem ser dados como entendidos se forem quantitativamente reproduzidos por um modelo analítico drasticamente simplificado governado pela dinâmica Newtoniana”. Complementa aquele autor: “Modelos analíticos frequentemente têm costas retilíneas, profundidade constante e contêm fluido homogêneo e, ainda, geralmente têm um número mínimo de características físicas necessárias para reproduzir o fenômeno em questão. O essencial é a correspondência quantitativa entre modelo e observações dentro dos limites de erro normalmente associados à natureza simplificado do modelo”. Esse é o mote dessa parte do presente Estudo.

## **Objetivos Específicos do Capítulo**

A participação crucial do transporte de Ekman na indução da MM é algo bem conhecido, porém, há ainda muitas questões básicas que precisam ser melhor entendidas e, se possível, quantificadas de forma simples. Lembrando que, em muitas situações, diferentes aspectos podem funcionar conjuntamente, as questões que serão investigadas no presente capítulo incluirão:

Plataforma Continental:

- Influência da profundidade média
- Influência da largura
- Influência da forma do fundo

Vento:

- Influência da intensidade
- Influência da largura da pista
- Influência do comprimento da pista
- Influência da mobilidade da pista de vento
- Influência de ventos que atuam fora da Plataforma Continental

Correntes/Atrito:

- Influência do atrito das correntes com o fundo

Ainda:

- Influência do oceano adjacente
- Influência da latitude

O esclarecimento dessas questões à luz da hidrodinâmica será objeto do presente capítulo.

### III.1 Equacionamento Hidrodinâmico: Equações de Águas Rasas para Fluido de Densidade Constante

O aprofundamento do entendimento físico da MM almejado será feito com base nas equações de Águas Rasas considerando o caso particular de águas de densidade constante.

Antes de avançar, uma breve nota sobre o desrezo das variações de densidade da água é oportuna. Variações de densidade da água no oceano são causadas por diferenças de salinidade e temperatura. Devido à faixa de variação natural desses parâmetros, a variação de densidade encontrada nos oceanos é da ordem de 0.1%. Mesmo sendo diminutas, essas variações desempenham papel preponderante em muitos fenômenos oceânicos. O caso em estudo, entretanto, tem como foco variações de nível na costa numa escala de tempo entre dias a semanas e vem daí, exatamente, a justificativa para a aproximação usada: devido à pequena magnitude das diferenças de densidade esperadas, o efeito desse parâmetro na determinação da variação do nível na escala de tempo de interesse não justifica sua inclusão no equacionamento hidrodinâmico do problema. Por outro lado, se o foco do trabalho fosse as correntes na plataforma continental, a hipótese seria questionável uma vez que variações de densidade, mesmo não afetando significativamente o nível, podem influenciar bastante a estrutura das correntes. No jargão oceanográfico, foi feita uma opção por focar na resposta “barotrópica”.

Os escoamentos descritos pelas *Equações de Águas Rasas* têm como característica básica o fato da escala horizontal ser muito maior que a vertical, advindo daí a ideia de águas “rasas”. As *Equações de Águas Rasas* para um fluido de densidade ( $\rho$ ) constante, com o efeito da rotação da Terra incluído escritas para um plano tangente à superfície da Terra num sistema de coordenadas cartesiano são dadas por :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial x} - fV = -g \frac{\partial(\eta + p_a)}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{1}{\rho(h + \eta)} [\tau_x^W - \tau_x^B] \quad (\text{III. 1})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial x} + fU = -g \frac{\partial(\eta + p_a)}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{1}{\rho(h + \eta)} [\tau_y^W - \tau_y^B] \quad (\text{III. 2})$$

$$p = \rho g(\eta - z) + p_a \quad (\text{III. 3})$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \eta)U] + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \eta)V] = 0 \quad (\text{III. 4})$$

No sistema de coordenadas usado, os eixos ( $x, y, z$ ) são posicionados na superfície de repouso da água com  $z$  positivo para cima e com a disposição dos eixos horizontais obedecendo a regra da mão direita.

As equações são descritas a seguir.

Iniciando pela eq.(III.3), que representa a conservação do momentum vertical, constata-se que esta é a expressão da pressão hidrostática no fluido. A hipótese de que o campo de pressão nos escoamentos descritos por essas equações funciona hidrostaticamente é decorrência da diferença de escalas acima mencionada. Essa característica faz com que as acelerações verticais sejam desprezíveis tornando o campo de pressão hidrostático numa primeira aproximação.

As eqs. (III.1) e (III.2) expressam a conservação de momentum nas direções horizontais  $x$  e  $y$ , respectivamente. Observa-se que os termos que representam gradientes de pressão (termos logo a direita do sinal de igual) foram substituídos por gradientes de nível ( $\eta$ ) e de pressão atmosférica ( $p_a$ ) em função da hipótese hidrostática (no caso de pressão atmosférica uniforme, os termos que envolvem  $p_a$  desapareceriam). A eq.(III.4) representa a conservação da massa.

Todas essas equações originaram-se de uma integração (vertical) na coluna d'água das equações fundamentais da Mecânica dos Fluidos (Navier-Stokes e Continuidade) sujeitas às condições de contorno aplicáveis na superfície livre [ ver, por ex., Dean e Dalrymple (1991), seção 5.3 ].

As velocidades  $U$  e  $V$  correspondem às componentes  $x$  e  $y$ , respectivamente, das velocidades (horizontais) *médias* na coluna d'água, dadas por:

$$U = \frac{1}{h + \eta} \int_{-h}^{\eta} u \, dz \quad ; \quad V = \frac{1}{h + \eta} \int_{-h}^{\eta} v \, dz \quad (\text{III. } 5a \text{ e } b)$$

onde,  $u$  e  $v$  são os “perfis” de velocidade nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente,  $h$  é a profundidade (batimetria de fundo) e  $\eta$  o deslocamento do nível d’água medido a partir da posição de repouso da água.

$f$  é o parâmetro de Coriolis, dado por:

$$f = 2\Omega \cdot \sin \theta \quad (\text{III. } 6)$$

onde,  $\Omega$  é a velocidade de rotação da Terra e  $\theta$  o ângulo da latitude local, considerado positivo no Hemisfério Norte.

Observa-se que na presente versão das equações estamos usando a chamada aproximação do “Plano  $f$ ” na qual o parâmetro de Coriolis é considerado constante. Isso se justifica quando as escalas espaciais envolvidas forem da ordem de algumas centenas de quilômetros (como será o caso da presente aplicação).

As tensões  $\tau_{yx}$  e  $\tau_{xy}$  correspondem a fluxos transversais de momentum horizontal induzidos pela turbulência do escoamento, integrados na coluna d’água.

$\tau^W$  representa a tensão de arraste induzida pelo vento na superfície e  $\tau^B$  a tensão de atrito da água com o fundo. Ambas são expressas de forma parametrizada segundo a concepção de que tensões turbulentas variam com o quadrado da velocidade do escoamento. As seguintes parametrizações são normalmente usadas:

Para a tensão do vento:

$$\tau^W = \rho_{ar} C_D V_w |V_w| \quad (\text{III. } 7)$$

onde,  $\rho_{ar}$  é a massa específica do ar,  $V_w$  é o vetor velocidade do vento a 10 m de altura e  $C_D$  um fator de atrito adimensional (com ordem de grandeza de  $10^{-3}$ ). Dentre as várias parametrizações para  $C_D$  encontradas na literatura, citaremos a de Smith e Banke (1975), usada no presente trabalho, dada por:

$$C_D = (0.63 + 0.066|V_w|) \cdot 10^{-3} \quad \text{com } V_w \text{ em m/s} \quad (\text{III. } 8)$$

As componentes  $\tau_x^W$  e  $\tau_y^W$  são determinadas projetando  $\tau^W$  nas direções  $x$  e  $y$ .

Para a tensão no fundo também existem algumas variações na parametrização quadrática. A mais comum e conveniente usa a própria velocidade média na coluna d’água, fornecendo :

$$\tau_x^B = \rho_w C_f U |\mathbf{U}| \quad \text{e} \quad \tau_y^B = \rho_w C_f V |\mathbf{U}| \quad (\text{III. } 9a, b)$$

onde,  $\rho_w = \rho$  é a massa específica da água;  $C_f$  um outro fator de atrito (adimensional) baseado no coeficiente de Chezy, usado na hidráulica de canais e  $\mathbf{U}$  é o módulo do vetor velocidade dado por:

$$|\mathbf{U}| = \sqrt{U^2 + V^2}$$

Em aplicações oceanográficas, entretanto, versões linearizadas da tensão de atrito com o fundo têm sido usadas na literatura [ ver, por ex. Gill (1982) pgs. 329 e 398 ]. A justificativa por essa escolha envolve a presença simultânea de correntes com diferentes faixas de frequência como, por exemplo, correntes induzidas pelo vento superpostas a correntes de maré. Talvez o motivo principal dessa parametrização não seja de caráter físico, mas matemático devido à linearização do termo de tensão no fundo nas equações. Nessa versão linearizada, a tensão de atrito com o fundo é dada por:

$$\tau_x^B = \rho_w r U \quad \text{e} \quad \tau_y^B = \rho_w r V \quad (\text{III. } 10a, b)$$

Onde  $r$  é um coeficiente de atrito com unidade de velocidade. Essa versão linearizada não será utilizada no presente estudo.

### III.1.1 - Simplificação das Equações Governantes - Equações Linearizadas e sem Fluxos Transversais de Momentum

O primeiro passo na direção das soluções analíticas desejadas consiste na linearização das equações governantes. Começando pelas equações do momentum horizontal [eqs. (III.1) e (III.2)], os termos (não-lineares) da aceleração advectiva (segundo e terceiro termos do lado esquerdo das equações) são desprezados em vista da simplicidade geométrica dos problemas idealizados que vamos tratar. Essa hipótese se justifica em escoamentos que não possuam variações espaciais abruptas no campo de velocidade. Pelo mesmo motivo, os termos que representam fluxos transversais de momentum horizontal (segundo termo do lado direito das equações) também são desprezados.

Usaremos ainda o fato que as variações de nível ( $\eta$ ) esperadas serão muito menores que a profundidade ( $h$ ) de forma a aproximar:

$$(h + \eta) \approx h \quad (\text{III. 11})$$

Essa hipótese, além de simplificar todas as equações, lineariza a equação da Continuidade [Eq. (III.4)].

Invocando o princípio do Barômetro Invertido, discutido no Capítulo I, a pressão atmosférica é considerada *uniforme* na superfície. Com essa hipótese, as equações governantes para o efeito apenas do vento simplificam-se para:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - fV = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\tau_x^W - \tau_x^B}{\rho h} \quad (\text{III. 12})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + fU = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\tau_y^W - \tau_y^B}{\rho h} \quad (\text{III. 13})$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hU) + \frac{\partial}{\partial y}(hV) = 0 \quad (\text{III. 14})$$

O único efeito não-linear ainda presente nas equações está na tensão de atrito com o fundo. Eventuais iterações não lineares entre diferentes componentes de frequência do escoamento ficam restritas a esse termo. O uso da versão linearizada para  $\tau^B$  expressa em (III.10) eliminaria esse efeito.

Csanady (1974) usa equações com essas simplificações para estudar soluções analíticas de problemas de circulação costeira. Essas são também as equações (9.9.10) de Gill (1982), pag. 339, o qual chama atenção que essas são as equações usadas para computar numericamente “*Storm Surges*” em mares rasos como o Mar do Norte. As equações acima também formam a base para a teoria das Ondas de Plataforma Continental, vista mais adiante.

### III.1.2 - Equações expressas em Termo de Vazões

Conforme indicado no Capítulo I, espera-se que as variações de nível que originam a Maré Meteorológica sejam o resultado do afluxo de água à costa pela ação do vento. Assim, se o foco for o nível d'água, é interessante expressar as equações governantes diretamente em termos de vazões de água. Para tanto, as velocidades médias na coluna d'água podem ser combinadas com a profundidade para dar origem às novas variáveis  $Q$  e  $J$ , componentes da *vazão de água* nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, definidas, a luz da simplificação dada em (III.11), por:

$$Q = Uh \quad \text{e} \quad J = Vh \quad (\text{III. 15a, b})$$

Observando que a profundidade não depende do tempo e chamando:

$$C = \sqrt{gh} \quad (\text{III. 16})$$

onde, a grandeza  $C$  é positiva definida (i.e. não tem sinal).

As equações governantes assumem a seguinte forma alternativa:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} - fJ = -C^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\tau_x^W - \tau_x^B}{\rho} \quad (\text{III. 17})$$

$$\frac{\partial J}{\partial t} + fQ = -C^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\tau_y^W - \tau_y^B}{\rho} \quad (\text{III. 18})$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial J}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (\text{III. 19})$$

A grandeza  $C$  em (III.16) corresponde, fisicamente, à velocidade de propagação de ondas longas lineares.

## III.2 Escoamento de Ekman Revisitado

Como primeira aplicação da presente teoria, as equações desenvolvidas serão usadas para revisitar o Escoamento de Ekman mencionado no Capítulo I, lembrando que, no contexto das Equações de Águas Rasas, apenas as *velocidades médias* na coluna d'água são determinadas.

O problema resolvido por Ekman no início do século 20 tratava, essencialmente, da determinação do escoamento decorrente da ação do vento sobre um oceano suficientemente largo e profundo considerando o efeito da rotação da Terra. No intuito de incluir variações temporais ao problema, admitiremos que o escoamento se estabeleça a partir de uma condição *inicialmente estática* das águas e que o vento comece *impulsivamente* em  $t = 0$  e que, a partir daí, mantenha uma *velocidade constante no tempo e uniforme espacialmente*, com direção alinhada com a direção  $y$ , no sentido de  $y > 0$ .

Observando que a uniformidade espacial do campo de ventos e a ausência de fronteiras implicam num *escoamento resultante igualmente uniforme* (i.e.,  $U$  e  $V$  não dependem de  $x$  e  $y$ , apenas de  $t$ ), o problema acima pode ser equacionado usando as equações (III.12-14) da seguinte maneira:

$$\frac{dU(t)}{dt} - fV(t) = 0 \quad (\text{III. 20})$$

$$\frac{dV(t)}{dt} + fU(t) = \frac{\tau_y^W}{\rho h} \quad (\text{III. 21})$$

$$\frac{\partial \eta(t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [hU(t)] + \frac{\partial}{\partial y} [hV(t)] = 0 \quad (\text{III. 22})$$

Com condições iniciais:  $\tau_y^W = \text{constante}$  a partir de  $t = 0$  e escoamento inicialmente em repouso:

$$U(0) = V(0) = \eta(0) = 0 \quad (\text{III. 23})$$

A conservação da massa (eq. III.22) indica que  $\eta(t) = 0$ , ou seja, o nível do mar não é afetado pela ação do vento (nesse caso de um oceano sem fronteiras).

Gill (1982) pg. 322 resolve o problema acima multiplicando a eq. (III.21) por  $i$  e somando com a eq. (III.20) para obter:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{U} + if\mathbf{U} = i \frac{\tau_y^W}{\rho h} \quad (\text{III. 24})$$

onde  $\mathbf{U}$  é a velocidade complexa definida como:

$$\mathbf{U} = U + iV \quad (\text{III. 25})$$

A solução geral da equação diferencial acima é:

$$\mathbf{U} = Ae^{-ift} + \frac{\tau_y^W}{\rho fh} \quad (\text{III. 26})$$

A constante  $A$  é determinada de forma a atender à condição inicial de um oceano estático ,  $\mathbf{U}(0) = 0$  :

$$A = -\frac{\tau_y^W}{\rho f h} \quad (\text{III. 27})$$

A solução em termos das velocidades  $U$  e  $V$  é, portanto,

$$U_e(t) + iV_e(t) = \frac{\tau_y^W}{\rho f h} (1 - e^{-ift}) \quad (\text{III. 28})$$

onde  $U_e$  e  $V_e$  são as componentes do campo de velocidade média na coluna d'água no problema de Ekman obtidas separando as partes Real e Imaginária da solução acima:

$$U_e(t) = \frac{\tau_y^W}{\rho f h} [1 - \cos(ft)] \quad (\text{III. 29})$$

$$V_e(t) = \frac{\tau_y^W}{\rho f h} \sin(ft) \quad (\text{III. 30})$$

Uma análise desse resultado mostra que, no início, o movimento da água dá-se na direção do vento (dir-y, nesse caso), porém, a medida que o tempo passa, a rotação da Terra faz com que a corrente se desvie lateralmente. O resultado pode ser interpretado como uma superposição de uma parte *permanente* e outra *não-permanente* que oscila com frequência  $f$ . A parte permanente do campo de velocidades existe apenas na componente *perpendicular* ao vento e é dada por:

$$U_E = \frac{\tau_y^W}{\rho f h} \quad (\text{III. 31})$$

A parte oscilatória do campo de velocidades consiste de uma corrente rotatória, conhecida como *corrente inercial*, com período de rotação  $T_{in}$ , conhecido como *período inercial*, já mencionado anteriormente, dado por :

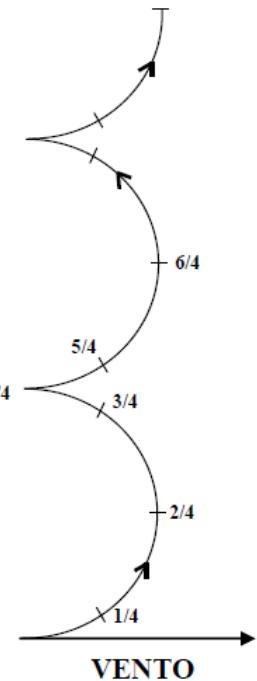
$$T_{in} = \frac{2\pi}{f} \quad (\text{III. 32})$$

Esse escoamento pode ser interpretado num contexto lagrangeano seguindo o movimento de uma coluna d'água imaginária que se desloca no campo de velocidades acima. Sendo  $x_c$ ,  $y_c$  as coordenadas da posição da coluna, tem-se que,

$$x_c(t) = \frac{\tau_y^W}{\rho f h} \left[ t - \frac{\sin(ft)}{f} \right] \quad (\text{III. 33})$$

$$y_c(t) = -\frac{\tau_y^W}{\rho f h} \left[ \frac{\cos(ft)}{f} \right] \quad (\text{III. 34})$$

O movimento da coluna d'água dado por (III.33 e 34) para o hemisfério Sul está apresentado de forma gráfica na figura (III.1) [similar a figura 9.2 de Gill (1982) pag. 323].



**Figura III.1** - Trajetória de uma coluna d'água imaginária que se desloca no campo de velocidades de Ekman no hemisfério Sul. Marcas indicam a evolução temporal da posição da coluna medida em termos de frações do período inercial

Medições de correntes feitas num ponto fixo na camada superior do oceano e o rastreamento de derivadores superficiais indicam, normalmente, a presença dessas correntes iniciais [Gill (1982), pag. 323]

Conforme indicado na introdução, espera-se que as variações de nível na costa sejam o resultado do aporte/retirada de água pela ação do vento. Assim, é interessante interpretar o problema de Ekman diretamente em termos de vazões. Sendo  $Q$  e  $J$  as vazões nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, definidas em (III.15) e usando o conceito do período inercial, a solução acima pode ser escrita em termo das vazões como:

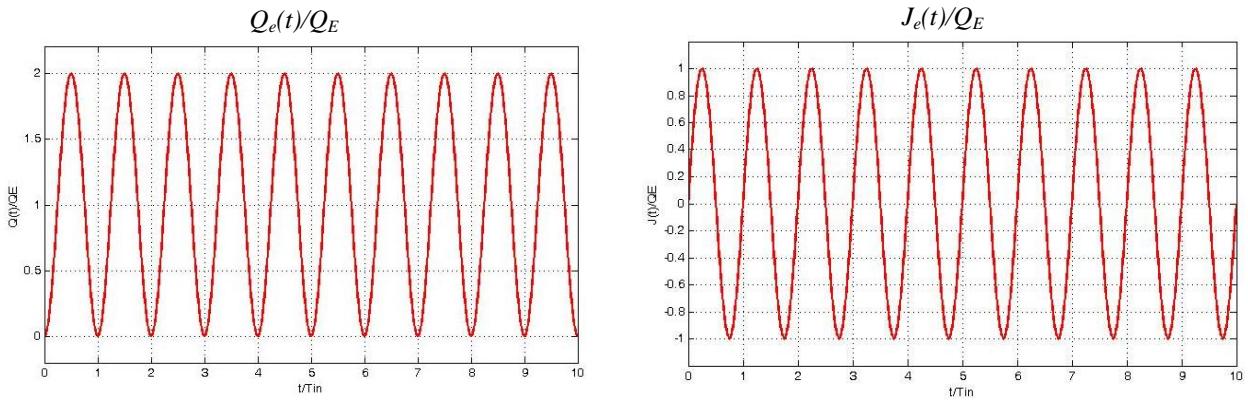
$$Q_e(t) = Q_E \left[ 1 - \cos \left( 2\pi \frac{t}{T_{in}} \right) \right] \quad (\text{III.35})$$

$$J_e(t) = Q_E \left[ \sin \left( 2\pi \frac{t}{T_{in}} \right) \right] \quad (\text{III.36})$$

Onde,  $Q_e(t)$  e  $J_e(t)$  são as vazões do problema de Ekman e  $Q_E$  o já mencionado *Transporte de Ekman*, a parte permanente da vazão na direção perpendicular ao vento, com módulo igual a :

$$Q_E = \frac{\tau_y^w}{\rho f} \quad (\text{III.37})$$

A figura (III.2) ilustra graficamente a solução para as componentes da vazão.



**Figura III.2–** Componentes da Vazão no Problema de Ekman adimensionalizadas por  $Q_E$ : Painel esquerdo: Vazão na direção perpendicular ao vento; Painel Direito : Vazão na direção do vento.

Chamando de  $\tau^W$  a tensão na direção do vento, as características da parte *permanente* do escoamento de Ekman (denotada pelo sub-índice  $E$ ) estão sumarizadas abaixo [ver, por ex., Pugh (1987) pg 201]:

- (i) Deslocamento da superfície  $\eta_E = 0$  para  $t \geq 0$
- (ii) Vazão perpendicular ao vento  $Q_E = \frac{\tau^W}{\rho_f}$  para  $t \geq 0$
- (iii) Vazão na direção do vento  $J_E = 0$  para  $t \geq 0$

O *sentido* do vetor  $Q_E$  (Transporte de Ekman) é determinado pelos sinais de  $\tau^W$  e  $f$ . No hemisfério Sul, onde  $f < 0$ ,  $\tau^W < 0$  produz  $Q_E > 0$  enquanto  $\tau^W > 0$  produz  $Q_E < 0$ . Considerando que a disposição dos eixos coordenados obedeça à regra da mão direita, verifica-se que o transporte de Ekman ocorre, no hemisfério sul, sempre a esquerda do vento, confirmando o esquema descrito no Capítulo I. O sentido se inverte no hemisfério Norte onde  $f > 0$ .

A título de complemento, os perfis de velocidades [  $u(z)$  e  $v(z)$  ] da solução de Ekman podem ser obtidos das equações originais (não integradas na vertical). O resultado é a famosa “Espiral de Ekman” na qual a velocidade da corrente decresce em módulo e gira lateralmente a partir da superfície para o fundo, ficando o efeito do vento restrito a uma fina camada superficial – conhecida como “Camada de Ekman”. A solução da espiral de Ekman para o caso laminar pode ser encontrada, por exemplo, em Gill (1982) pag. 331 ou em Kundu (1990) pag. 490.

As características da parte *permanente* do escoamento de Ekman apresentadas acima merecem uma reflexão.

Primeiramente, é importante observar que as condições (i) e (iii) atendem *automaticamente* as condições iniciais de um oceano em repouso [ i.e.,  $\eta(0) = 0$  e  $J(0) = 0$  ]. Já a condição (ii) admite tacitamente que o Transporte de Ekman se estabelece *instantaneamente* a partir do início do vento e, portanto, não atende à condição inicial de repouso [  $Q(0) = 0$  ]. De fato, a solução completa mostra que o atendimento a essa condição inicial requer *necessariamente* a participação da solução não permanente. Esse fato tem implicações em algumas situações da teoria que será desenvolvida no presente trabalho e por isso será analisado a seguir.

Num escoamento verdadeiramente permanente, a *vazão média* em qualquer intervalo de tempo é constante. Uma questão oportuna, portanto, é investigar como se comporta a *vazão média a partir do instante inicial* no caso do escoamento de Ekman.

Para tanto, vamos introduzir uma nova grandeza: a *vazão promediada* no intervalo de tempo  $T$ , com  $T$  medido a partir do início do vento, cujas componentes são dadas por :

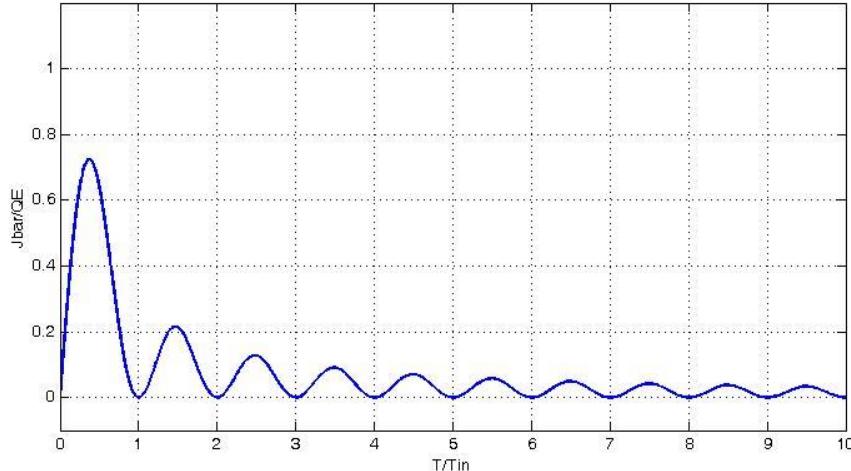
$$\bar{Q}_e(T) \equiv \frac{1}{T} \int_0^T Q_e(t) dt \quad \text{e} \quad \bar{J}_e(T) \equiv \frac{1}{T} \int_0^T J_e(t) dt \quad (\text{III.38a,b})$$

onde,  $\overline{Q_e}(T)$  e  $\overline{J_e}(T)$  correspondem às vazões médias no intervalo de tempo  $T$ , nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. Num escoamento verdadeiramente permanente,  $\overline{Q_e}(T)$  seria igual a  $Q_E$  e  $\overline{J_e}(T)$  seria igual a 0 para qualquer valor de  $T$ .

Iniciando com a direção do vento, tem-se:

$$\frac{\overline{J_e}(T)}{Q_E} = \frac{1}{T} \int_0^T \sin(ft) dt = \frac{1 - \cos(fT)}{fT} = \frac{1 - \cos(2\pi \frac{T}{T_{in}})}{2\pi \frac{T}{T_{in}}} \quad (\text{III.39})$$

A figura (III.3) mostra o comportamento dessa função em termos do tempo normalizado pelo período inercial.



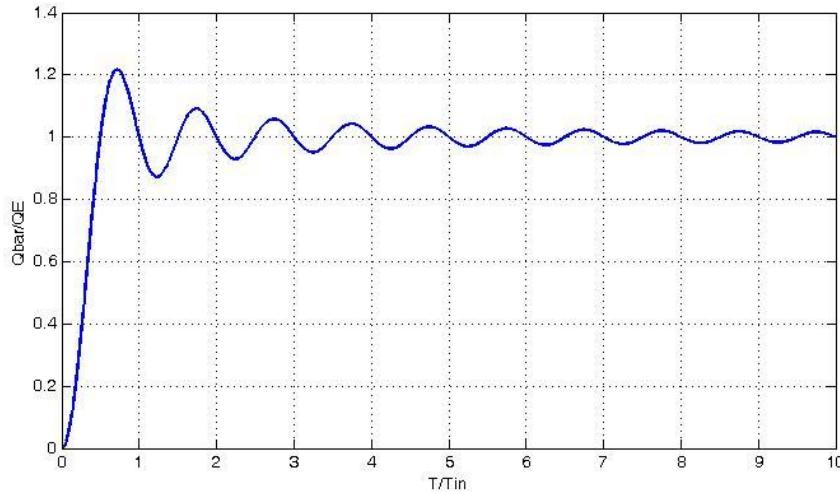
**Figura III.3** – Vazão na direção do vento promediada em  $T$  e normalizada pelo Transporte de Ekman

A figura mostra que a parte transitória da solução de Ekman provoca *pulsos* na vazão promediada com periodicidade dada por  $T_{in}$  os quais decaem em amplitude a medida que o tempo avança fazendo com que  $\overline{J_e}(T)$  tenda a zero numa escala de tempo de alguns períodos iniciais.

Na direção perpendicular ao vento, a vazão promediada em  $T$ , fica:

$$\frac{\overline{Q_e}(T)}{Q_E} = \frac{1}{T} \int_0^T [1 - \cos(ft)] dt = 1 - \frac{\sin(fT)}{fT} = 1 - \frac{\sin(2\pi \frac{T}{T_{in}})}{2\pi \frac{T}{T_{in}}} \quad (\text{III.40})$$

A solução, apresentada graficamente na figura (III.4), mostra claramente que, da mesma forma que no caso anterior, a parte não-permanente da solução ocasiona *pulsos* na vazão promediada com periodicidade  $T_{in}$  que terminam por se extinguir a medida que  $T$  aumenta fazendo com que  $\overline{Q_e}$  tenda, na escala de tempo do período inercial, a um valor constante igual a  $Q_E$ .



**Figura III.4** – Similar à figura (III.3) para a vazão perpendicular a direção do vento

Em particular, é importante observar o comportamento de  $\bar{Q}_e$  para o período inicial de atuação do vento. De fato,  $\bar{Q}_e$  parte de zero em  $t = 0$  atingindo o valor  $Q_E$  após um intervalo de tempo igual a cerca de  $0.5 T_{in}$ , a seguir, continua subindo, ultrapassando  $Q_E$  em cerca de 20%, retornando a esse valor quando  $t = T_{in}$ . Depois disso, segue oscilando em torno de  $Q_E$ . Assim, vê-se que o transporte de água na direção perpendicular ao vento *não* se estabelece instantaneamente após o início do vento como indica a condição (ii) apresentada acima. Dessa forma, o *volume total de água* transportado transversalmente ao vento no período inicial ficará superdimensionado se considerarmos a condição (ii) como instantaneamente válida a partir de  $t=0$ .

A implicação dessas diferenças entre a parte permanente da vazão  $Q_E$  (Transporte de Ekman) e a vazão promediada  $\bar{Q}_e$  para o presente estudo pode ser avaliada considerando o que aconteceria se uma barreira paralela à direção do vento fosse colocada em algum local desse oceano.

Num intervalo de tempo igual ao período inercial, o volume de água acumulado na fronteira e, por conseguinte, a elevação do nível d'água, seria maior do que o real se considerarmos que o Transporte de Ekman se estabelece instantaneamente. Além disso, as pulsações de vazão, ao encontrar a fronteira impermeável, devem dar origem a ondas com período igual ao período inercial que partirão da fronteira em direção ao largo levando a informação da existência da barreira. Mesmo com essa análise qualitativa simples, já é possível antecipar que a solução completa para o nível d'água no problema com fronteira lateral deve apresentar uma parte transitória que envolve ondas.

Essas questões são importantes para o entendimento completo do problema da MM que se segue.

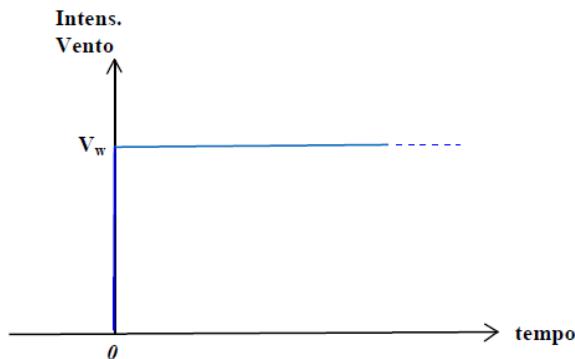
### III.3 - Maré Meteorológica Forçada Localmente

A partir de agora o foco será resolver problemas simplificados mas que contenham pontos essenciais do fenômeno da MM. A primeira aproximação possível considera o caso de uma MM forçada localmente isto é, sem a possibilidade de efeitos remotos. Para tanto, é necessário considerar um campo de vento com direção paralela à costa e *infinitamente uniforme* nessa direção. Essa aproximação limita o problema a *uma dimensão espacial*.

#### III.3.1 - Problema “Clássico”

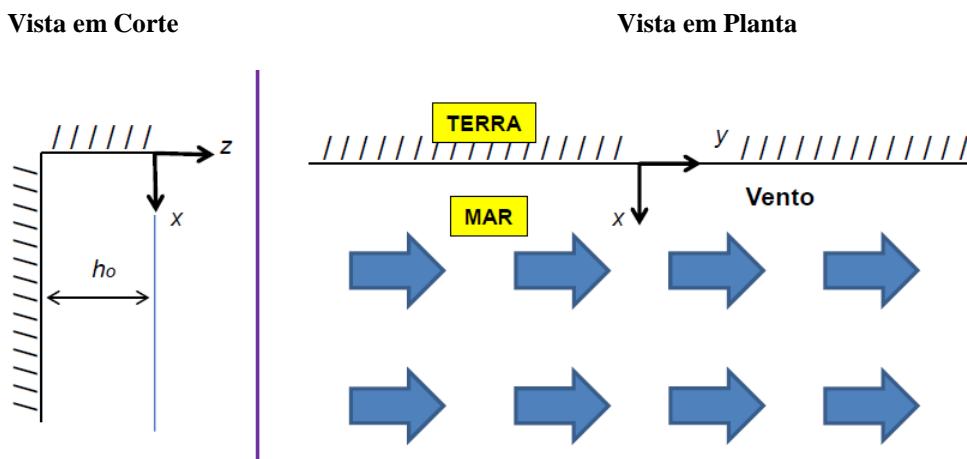
No intuito de manter apenas as características absolutamente essenciais, vamos considerar uma Plataforma Continental tipo “degrau”, isto é, com profundidade constante,  $h_o$ , e, inicialmente, de largura infinita. Adicionalmente, vamos considerar que a costa seja retilínea e infinitamente longa e que o vento seja uniforme também na direção perpendicular à costa com largura de pista infinita.

Adicionalmente, a exemplo do problema de Ekman, variações temporais serão incluídas considerando que o vento inicie impulsivamente em  $t = 0$  e que, a partir daí, se mantenha constante conforme ilustrado na figura (III.5).



**Figura III.5** - Variação temporal do vento

Admitindo que a costa esteja alinhada com a direção  $y$ , e que o eixo  $x$  aponte na direção do mar, a figura (III.6) mostra as características geométricas do problema a ser resolvido.



**Figura III.6** – Características do Problema a ser resolvido

Essa situação simplificada será, doravante, referida como o Problema “Clássico”.

As hipóteses acima serão agora utilizadas em busca de simplificações adicionais para as equações governantes.

Com a costa alinhada com a direção  $y$ , a uniformidade do problema na direção ao longo da costa implica numa solução que é função apenas da coordenada espacial  $x$ , tornando o problema espacialmente unidimensional.

Usando as equações expressas em termos da vazão (III.17 a 19), as hipóteses do problema simplificam as equações governantes para:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} - fJ = - C_o^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\tau_x^B}{\rho} \quad (\text{III. 41})$$

$$\frac{\partial J}{\partial t} + fQ = \frac{\tau_y^W - \tau_y^B}{\rho} \quad (\text{III. 42})$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = - \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (\text{III. 43})$$

Observar que a profundidade constante da plataforma continental tornou a velocidade  $C$  também uma constante (positiva definida), dada por :

$$C_o = \sqrt{gh_o} \quad (\text{III. 44})$$

Essas equações descrevem o problema da maré meteorológica forçada localmente da forma mais simples possível.

Para resolvê-las, condições de contorno devem ser atendidas na costa e ao largo. Na costa, a condição é que esta é impermeável e ao largo, isto é no extremo oposto da plataforma continental, o escoamento de Ekman deve ser recuperado. Há ainda a condição inicial de que em  $t=0$  as águas estão estáticas e o nível horizontal.

### **III.3.1.1 - Solução Analítica para Caso sem Atrito numa Plataforma “Larga” – Recapitulação.**

Essa sessão contém uma recapitulação detalhada da solução analítica “clássica” do problema da Maré Meteorológica forçada localmente, complementada com interpretações físicas dos resultados.

Nessa solução clássica, além dessas simplificações de ordem geométrica apresentadas acima, mais uma hipótese simplificadora de caráter dinâmico deve ser introduzida, qual seja, a *desconsideração* do efeito do *atrito* da água com o fundo. Essa hipótese terá consequências importantes, conforme será visto na sequência do estudo.

Segundo Gill (1982) pag. 398, a primeira solução desse problema “invíscido” foi apresentada por Nomitsu (1934) e por Charney (1955). Gill (1982), sessão 10.9, e Csanady (1982), apresentam e discutem alguns aspectos da solução.

Merece menção a solução analítica apresentada em Csanady (1974). O problema tratado por esse autor considerou uma plataforma de profundidade variável na direção perpendicular a costa (i.e.  $h = h(x)$  ) sendo, portanto, mais geral do que o problema “clássico”. Entretanto, a troca da plataforma “degrau” por uma plataforma inclinada aumenta significativamente a dificuldade matemática do problema e, além disso, introduz uma singularidade em  $x=0$  a qual impede a determinação do nível d’água na costa, o assunto principal do presente estudo. O autor julgou que o objetivo do presente trabalho estaria melhor atendido na abordagem mais simples da solução clássica. A influência da declividade do fundo da plataforma será abordada ao final desse capítulo.

Sem atrito, as equações (III.41 e 42) simplificam-se para:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} - fJ = - C_o^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (\text{III. 45})$$

$$\frac{\partial J}{\partial t} + fQ = \frac{\tau_y^W}{\rho} \quad (\text{III. 46})$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = - \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (\text{III. 43 – Bis})$$

O conjunto de equações acima permite estabelecer duas equações complementares envolvendo apenas uma variável. As manipulações matemáticas envolvidas no processo estão detalhadas no Apêndice 4. Essas equações sintetizam em uma única expressão a conservação do momentum e da massa para o problema em tela e são dadas por:

- Equação complementar para o deslocamento da superfície apenas:

$$\frac{1}{f^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - R^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \eta = 0 \quad (\text{III.47})$$

- Equação complementar para a vazão perpendicular à costa apenas:

$$\frac{1}{f^2} \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} - R^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + Q = Q_E \quad (\text{III.48})$$

onde ,

$$R \equiv \frac{C_o}{f} \quad (\text{III.49})$$

Observar que o parâmetro  $R$  assume valor positivo no hem. Norte (onde  $f > 0$ ) e negativo no hem. Sul (onde  $f < 0$ )

As equações que descrevem matematicamente as condições de contorno serão estabelecidas a seguir.

### III.3.1.1.1 - Solução para a Parte não-Transiente

O problema pode ser abordado usando qualquer das duas equações complementares acima. Csanady (1982) pg. 43 a 47, apresenta a solução a partir da eq. (III.47), Gill (1982) pág.396, chega à mesma solução usando a eq. (III.48). No presente estudo a abordagem de Gill será adotada.

Segundo Gill (1982), a solução completa da eq.(III.48) compõe-se de uma parte não-transiente e outra transiente formada por ondas, confirmando o que já havia sido antecipado na solução do problema de Ekman. A solução *completa* do problema clássico será abordada mais adiante, inicialmente, apenas a parte não-transiente da solução será tratada.

Com um vento constante no tempo e na ausência de atrito, a vazão na direção da costa não deve apresentar variação temporal, i.e.  $Q = Q(x)$ . Assim, a parte não-transiente da solução da eq.(III.48) deve atender a:

$$-R^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + Q = \frac{\tau_y^W}{\rho f} = Q_E \quad (\text{III.50})$$

Cuja solução geral é dada por:

$$Q(x) = A_1 e^{\frac{x}{R}} + A_2 e^{-\frac{x}{R}} + Q_E \quad (\text{III.51})$$

onde  $A_1$  e  $A_2$  são constantes a ser determinadas a partir das condições de contorno.

A condição de impermeabilidade da costa ( $x = 0$ ), requer:

$$Q(0) = 0 \quad (\text{III.52})$$

implicando que,

$$A_1 + A_2 = -Q_E \quad (\text{III.53})$$

Nesse ponto é necessário escolher o sistema de coordenadas e o hemisfério para os quais a solução será obtida. O sistema de coordenada adotado é o mostrado na figura (III.6), com o eixo  $x$  perpendicular à costa e apontando para o mar (i.e.  $x$  é sempre *positivo* no mar). O hemisfério de interesse é o Sul, portanto,  $f < 0$  e  $R < 0$ . Para evitar possível confusão quanto aos sinais, doravante usaremos que:

$$f \equiv -|f| \quad (a); \quad R \equiv -|R| \quad (b); \quad Q_E = -\frac{\tau_y^W}{\rho |f|} \quad (c) \quad (\text{III.54,a,b,c})$$

Expressões essas válidas para o hem. Sul e para o sistema de coordenadas usado.

A solução geral é reescrita como:

$$Q(x) = A_1 e^{-\frac{x}{|R|}} + A_2 e^{\frac{x}{|R|}} + Q_E \quad (\text{III.55})$$

Como a vazão deve ser finita longe da costa, apenas a exponencial com argumento *negativo* deve sobreviver e, assim, a constante  $A_2$  em (III.55) deve ser *nula*. A condição de impermeabilidade na costa [eq. (III.52)] requer que:

$$A_1 = -Q_E \quad (\text{III.56})$$

No extremo oposto da Plataforma Continental, é necessário garantir que o escoamento retorne à situação permanente do Problema de Ekman. Conforme indicado na seção III.2, isso acarreta três condições:

- (a) que a vazão perpendicular ao vento se iguale ao Transporte de Ekman
- (b) que a vazão na direção do vento se anule.
- (c) que o nível d'água retorne ao nível de repouso;

Portanto, a condição a ser atendida pela vazão  $Q$  é:

$$Q(\infty) = Q_E \quad (\text{III.57})$$

Com isso, chega-se a solução para  $Q(x)$ :

$$Q(x) = Q_E \left(1 - e^{-\frac{x}{|R|}}\right) = -\frac{\tau_y^W}{\rho|f|} \left(1 - e^{-\frac{x}{|R|}}\right) \quad (\text{III.58})$$

É interessante observar que a vazão  $Q$  retorna exponencialmente a  $Q_E$ , a partir da costa, atingindo 95% desse valor a uma distância de cerca de  $3|R|$ . Esse resultado fornece o significado físico para o (módulo do) parâmetro  $R$  como a *escala espacial da distância mar adentro até onde a presença da costa se faz sentir*.

A Vazão  $J$  pode ser obtida da eq. (III.46):

$$J(x, t) = \int \left( \frac{\tau_y^W}{\rho} - f Q(x) \right) dt = \left[ f Q_E - f Q_E \left(1 - e^{-\frac{x}{|R|}}\right) \right] \cdot t + K_1 \quad (\text{III.59})$$

A constante de integração  $K_1$  deve se anular em vista da condição (b) acima a qual requer que:

$$J(\infty, t) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \quad (\text{III.60})$$

A solução para  $J(x, t)$ , válida para o hem. Sul, é:

$$J(x, t) = -Q_E |f| e^{-\frac{x}{|R|}} \cdot t = \frac{\tau_y^W}{\rho} e^{-\frac{x}{|R|}} \cdot t \quad (\text{III.61})$$

que mostra uma dependência linear de  $J$  com o tempo. Observar ainda que  $J$  não cai a zero na costa e, portanto, a condição de não-deslizamento não é atendida nessa solução.

O fato da Vazão  $Q$  ser permanente traz uma implicação importantíssima ao problema. De fato, a eq (III.45) com  $Q=Q(x)$  fica:

$$J = \frac{C_o^2}{f} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (\text{III.62})$$

indicando que o escoamento obedece a um *equilíbrio geostrófico* de forças na direção  $x$  em todo o domínio. A equação acima permite determinar  $\eta$ :

$$\eta(x, t) = \int \left( \frac{f}{C_o^2} J \right) dx = \int \left( \frac{Q_E}{R^2} t \cdot e^{-\frac{x}{|R|}} \right) dx = -\frac{Q_E}{|R|} e^{-\frac{x}{|R|}} \cdot t + K_2 \quad (\text{III.63})$$

Novamente, a constante de integração  $K_2$  deve se anular em vista da condição (c) a qual requer:

$$\eta(\infty, t) = 0 \quad , \quad t \geq 0$$

A solução para o deslocamento da superfície, válida para o hem. Sul, é:

$$\eta(x, t) = -\frac{Q_E}{|R|} e^{-\frac{x}{|R|}} \cdot t = \frac{\tau_y^W}{|R| \rho |f|} e^{-\frac{x}{|R|}} \cdot t = \frac{\tau_y^W}{\rho C_o} e^{-\frac{x}{|R|}} \cdot t \quad (\text{III. 64})$$

A eq.(III.64) mostra que o nível do mar sobe / desce linearmente com o tempo dependendo do sentido do vento: no hem. Sul, e para o sistema de coordenadas usado, o nível sobe para  $\tau_y^W > 0$  (i.e. com a costa à esquerda do vento) e desce para  $\tau_y^W < 0$  (costa à direita do vento). Esse resultado confirma o modelo físico conceitual da Maré Meteorológica apresentado na introdução.

### Maré Meteorológica e Corrente Costeira

A MM é obtida da eq. (III.64) calculando  $\eta$  em  $x = 0$ .

$$\eta_o(t) = \eta(0, t) = -\frac{Q_E}{|R|} \cdot t = \frac{\tau_y^W}{\rho C_o} \cdot t \quad (\text{III. 65})$$

A velocidade da corrente costeira, na costa, é obtida de forma análoga da eq. (III.61) em  $x=0$ .

$$V_o(t) = V(0, t) = \frac{\tau_y^W}{\rho h_o} \cdot t \quad (\text{III. 66})$$

Observar que a MM e a corrente costeira na costa guardam uma relação entre si dada por:

$$V_o(t) = \frac{g}{C_o} \eta_o(t) \quad (\text{III. 67})$$

A tabela III.1 sumariza as equações encontradas na solução da parte não-transiente, observando que as velocidades médias na coluna d'água ( $U$  e  $V$ ) foram recuperadas das vazões usando as eqs. (III.15).

**Tabela III.1.** Sumário dos resultados da solução da parte não-transiente do problema clássico

Transporte de Ekman $Q_E = -\frac{\tau_y^W}{\rho  f }$	Velocidade de onda longa linear $C_o = \sqrt{gh_o}$	Raio de deformação $R = -\frac{C_o}{ f }$
<b>Deslocamento do nível d'água</b> $\eta(x, t) = -\frac{Q_E}{ R } e^{-\frac{x}{ R }} \cdot t = \frac{\tau_y^W}{\rho C_o} e^{-\frac{x}{ R }} \cdot t$		<b>Maré Meteorológica</b> $\eta_o(t) = \eta(0, t) = -\frac{Q_E}{ R } \cdot t = \frac{\tau_y^W}{\rho C_o} \cdot t$
<b>Corrente paralela à costa</b> $V(x, t) = -\frac{Q_E}{h_o}  f  e^{-\frac{x}{ R }} \cdot t = \frac{\tau_y^W}{\rho h_o} e^{-\frac{x}{ R }} t$		<b>Corrente costeira</b> $V_o(t) = -\frac{Q_E}{h_o}  f  \cdot t = \frac{\tau_y^W}{\rho h_o} \cdot t$
<b>Corrente normal à costa</b> $U(x) = \frac{Q_E}{h_o} \left(1 - e^{-\frac{x}{ R }}\right) = -\frac{\tau_y^W}{\rho h_o  f } \left(1 - e^{-\frac{x}{ R }}\right)$		<b>Corrente normal à costa, na costa</b> $U_o = U(0) = 0$
<b>OBS-</b> Sinais ajustados para o hemisfério Sul e para sistema de coordenadas com: eixo $x$ normal à costa e apontando para o mar; eixo $y$ ao longo da costa, com sentido dado pela regra da mão direita.		

A solução do problema clássico sumarizada acima corresponde à solução apresentada em Gill (1982) pg. 396.

## Ilustração Gráfica da Solução

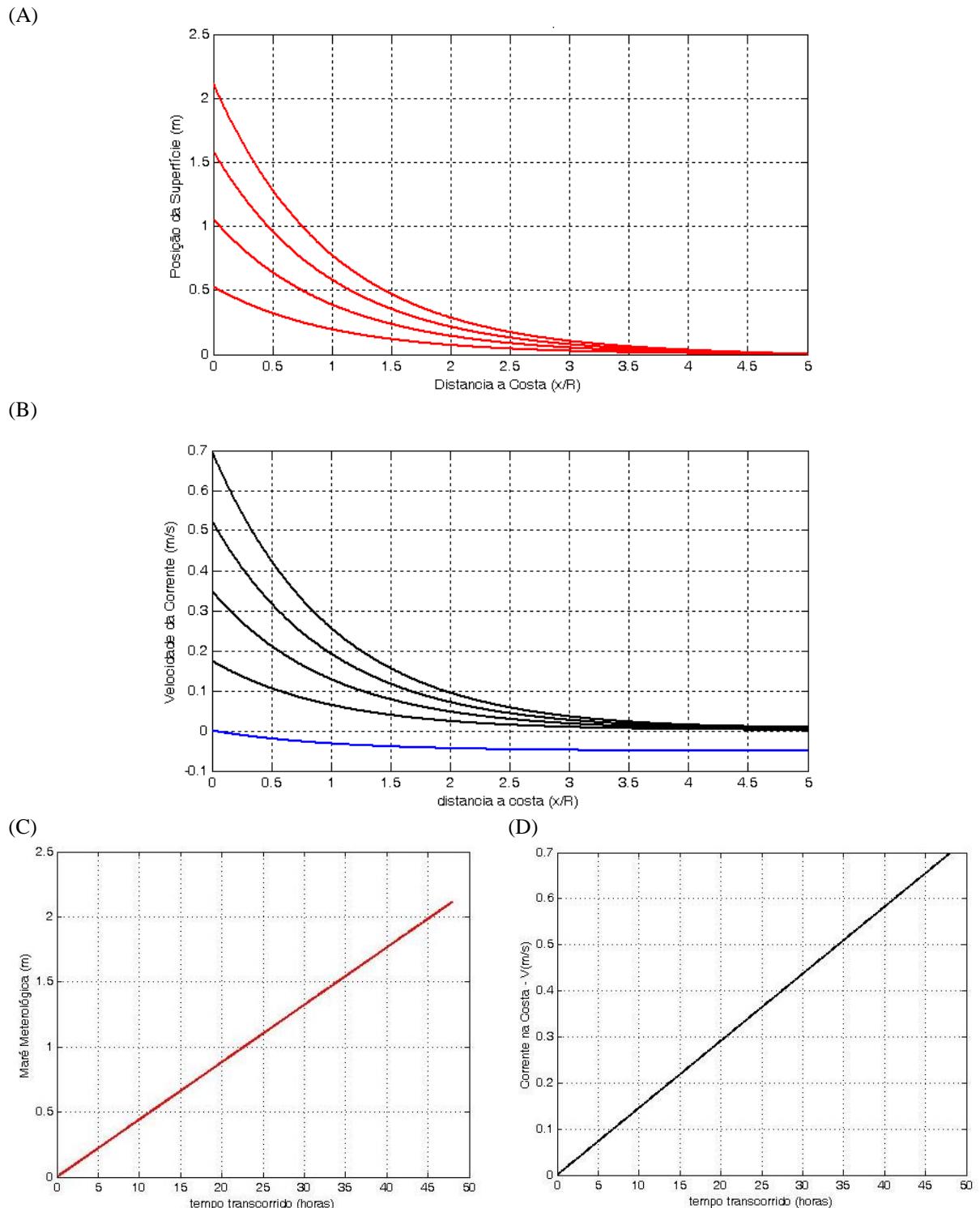
Os resultados da presente solução são apresentados de forma gráfica através de um exemplo nessa seção.

O exemplo considerado trata de uma MM positiva no hem. Sul (logo, causada por um vento uniforme atuando paralelamente à costa com a costa à esquerda do vento) com valores dos parâmetros chave inspirados nas condições do sul do Brasil: latitude  $33^\circ \text{ Sul}$  e uma plataforma continental com  $90 \text{ m}$  de profundidade. A velocidade do vento foi prescrita como  $50 \text{ km/h}$  e a solução foi computada para um período de tempo total de  $48 \text{ horas}$ . A tabela III.2 sumariza os dados e parâmetros do exemplo.

**Tabela III.2.** Resumo dos dados de entrada e dos parâmetros usados no exemplo de aplicação.

<b>DADOS DE ENTRADA:</b>	
Latitude	$\theta = 33^\circ \text{ S}$
Profundidade da Plataforma Continental	$h_o = 90 \text{ m}$
Velocidade do Vento	$V_w = 50 \text{ km/h} = 13.9 \text{ m/s}$
Tempo de Duração do Vento	$t = 48 \text{ horas}$
Massa Específica do Ar	$\rho_{ar} = 1.25 \text{ kg/m}^3$
Massa Específica da água	$\rho_{água} = 1025 \text{ kg/m}^3$
<b>PARÂMETROS CALCULADOS:</b>	
Parâmetro de Coriolis [eq.(III.6)]:	$ f  = 7.92 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$
Tensão do Vento : [eq.(III.7)]:	$\tau^w = 0.373 \text{ Pa}$
Transporte de Ekman [eq.(III.37)]:	$Q_E = -4.59 \text{ (m}^3/\text{s)\!/m}$
Veloc. de Onda Longa Linear [eq.(III.44)]:	$C_o = 29.7 \text{ m/s}$
Raio de Deformação [eq.(III.49)]:	$ R  = 375 \text{ km}$

A solução está apresentada graficamente na figura (III.7) abaixo.



**Figura III.7.** Exemplo dos resultados da solução clássica: Painel (A): Posição da superfície ( $\eta$ ) ; Painel (B): Corrente perpendicular ( $U$  em azul) e paralela à costa (  $V$  em preto) para  $t = 12, 24, 36$  e  $48$  h. Painel (C): Evolução temporal da Maré Meteorológica ( $\eta_o$ ) e, Painel (D), da Corrente na costa ( $V_o$ ).

Observando-se os gráficos dos painéis superiores, vê-se que o nível d'água e a corrente paralela à costa são amplificados (exponencialmente) a medida que a costa se aproxima. O nível d'água só se aproxima realmente do nível de repouso a uma distância de cerca de  $4/R = 1500$  km da costa ! A corrente na direção da costa, por sua vez, decresce (exponencialmente) do largo em direção à costa onde assume o valor zero.

Vê-se que a rotação da Terra estabeleceu uma escala de comprimento intrínseca, dada pelo raio de deformação ( $R$ ), que, como já visto, indica a dimensão da região costeira onde o fenômeno se manifesta. Assim, a hipótese de que a plataforma

seja *infinitamente* larga não é necessária, ela precisa ser apenas *suficientemente* larga, i.e., uma largura da ordem de  $5R$ , aproximadamente, já é suficiente.

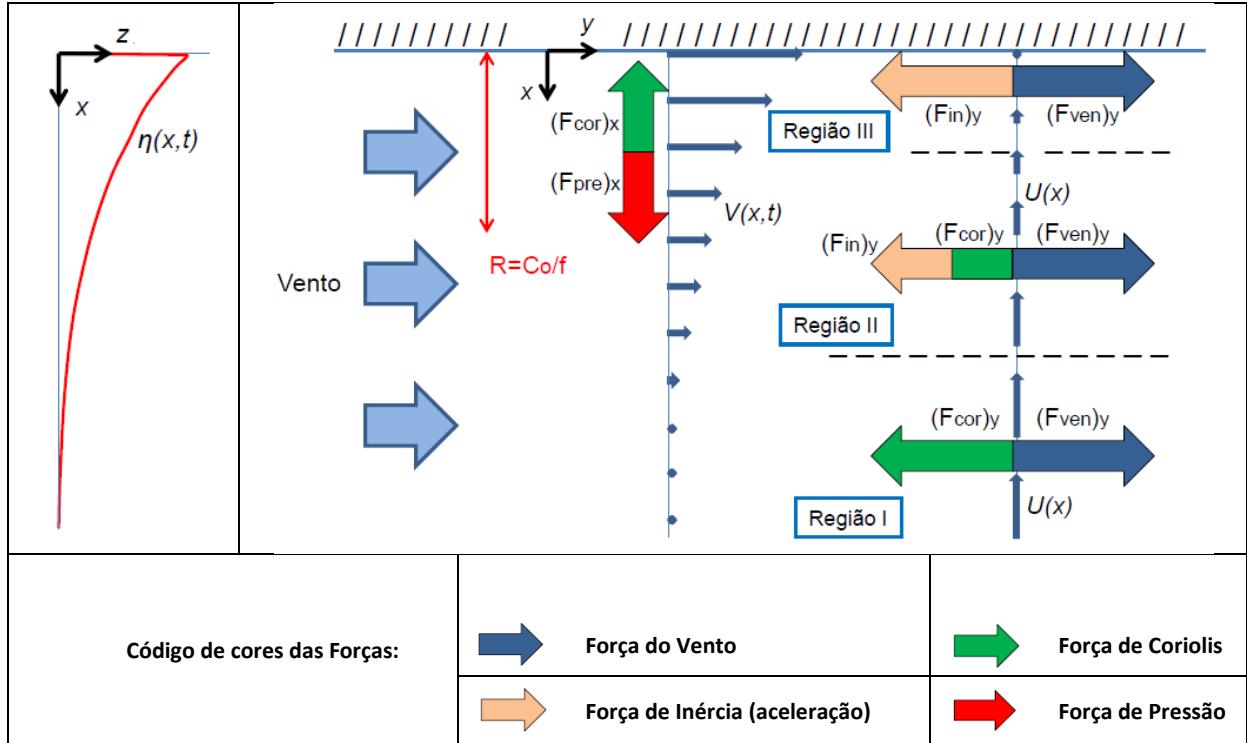
Observando a evolução temporal de  $\eta_o$  e de  $V_o$  na linha de costa (painéis inferiores), constata-se que ambos crescem linearmente a medida que o tempo passa. O nível d'água na costa  $\eta_o$  (que é a MM) para esse exemplo, atinge um valor de  $2.12\text{ m}$  ao final do período de atuação do vento ( $48\text{ h}$ ), o qual parece exagerado em vista do que se observou sobre o fenômeno na Parte I. Na verdade, isso é uma consequência do fato que, na presente teoria, a MM pode subir *sem limites* se o vento continuar soprando. Essa deficiência está relacionada à exclusão do atrito com o fundo, conforme discutido mais adiante.

## Interpretação Física

Nessa sessão, a solução para a parte não-transiente é explorada em busca de um entendimento físico mais completo do fenômeno.

## Aspectos Dinâmicos

A dinâmica que opera na MM gerada localmente, segundo a presente teoria, é ilustrada esquematicamente na figura (III.8) para o caso de uma MM positiva.



**Figura III.8.** Ilustração esquemática da dinâmica que opera na solução da Maré Meteorológica (válida para o Hemisfério Sul) para uma situação de sobre-elevação de nível na costa. Painel a esquerda: vista em corte. Painel a direita: vista em planta.

Para orientar o raciocínio, o domínio da solução foi dividido em 3 regiões e o balanço de forças nas direções  $x$  e  $y$  que opera em cada uma delas foi esquematicamente indicado na figura (III.8) (observar código de cores inserido na figura; fronteiras entre as regiões tem posição esquemática pois a transição é contínua).

- Região I – Localizada “longe” da costa ( $x/R \gg 1$ ), essa região caracteriza-se por apresentar o balanço clássico de Ekman no qual a força de arraste do vento (paralela à costa) é equilibrada pela força de Coriolis associada à velocidade média da corrente a qual ocorre perpendicularmente ao vento e no sentido da terra [ a esquerda do vento no Hemisfério Sul – ver figura (III.8) ].

- Região II – Região intermediária onde o efeito da costa já começa a se manifestar e onde o fluxo de água em direção a terra começa a diminuir. Com isso, a força de Coriolis associada à corrente perpendicular à costa também diminui afetando o equilíbrio de Ekman. O desequilíbrio de forças na direção  $y$  ocasiona uma aceleração da água nessa direção, representada pela *Força de Inércia* na figura (III.8). (OBS.: A interpretação de uma *aceleração* como uma força fictícia - “*força de inércia*” - ajuda a compreensão física do fenômeno).
- Região III – Nessa região vizinha à costa ( $x/R \ll 1$ ), a corrente em direção a terra (direção  $x$ ) cessa anulando a força de Coriolis na direção  $y$ . O balanço de forças na direção  $y$  que se estabelece, portanto, é entre a força do vento e a força de inércia o que produz uma *aceleração contínua* da água ao longo da costa.

A ação continuada do vento produz um fluxo de água em direção a terra, igualmente contínuo (corrente  $U$  não depende do tempo) que causa uma acumulação de água nas Regiões II e I (principalmente), a qual resulta numa sobre-elevação contínua do nível. De fato, a solução indica que tanto a posição da superfície ( $\eta$ ) quanto a corrente paralela à costa ( $V$ ) aumentam continuamente com o passar do tempo mostrando que esse problema não atinge uma situação de equilíbrio (na ausência de atrito). Em outras palavras, enquanto o vento estiver atuando, o nível sobe e a corrente costeira se intensifica conforme indicado pelo exemplo da sessão anterior.

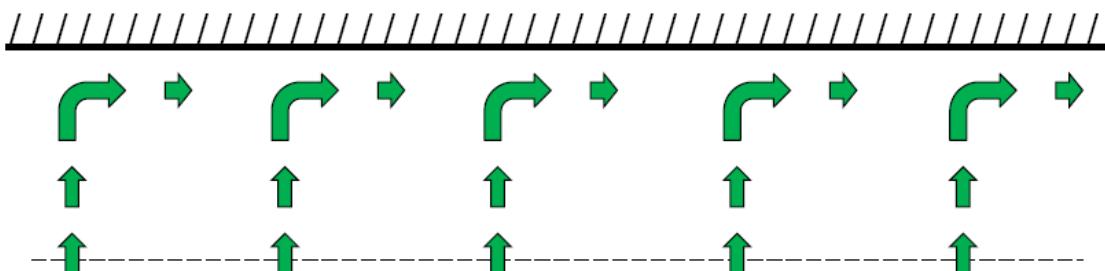
A dinâmica que opera na direção perpendicular à costa (direção  $x$ ) também é interessante. A sobre-elevação do nível na costa induz uma força de pressão no sentido do mar que é contrabalançada pela força de Coriolis associada à corrente paralela à costa [ ver figura (III.8) ]. A corrente paralela à costa, portanto, mesmo aumentando continuamente no tempo por ação do vento, obedece a um balanço *instantaneamente* geostrófico.

### Análise do Balanço de Massa.

O balanço de massa indicado pela presente solução também tem aspectos peculiares. Para analisar essa questão calculou-se o balanço de massa num volume de controle com a fronteira interna sendo a linha de costa, a fronteira externa posicionada numa distância arbitrária de escala dada por, digamos,  $5|R|$  e indo de  $-\infty$  a  $+\infty$  ao longo da costa [ver figs.(III.9) e (III.10)].

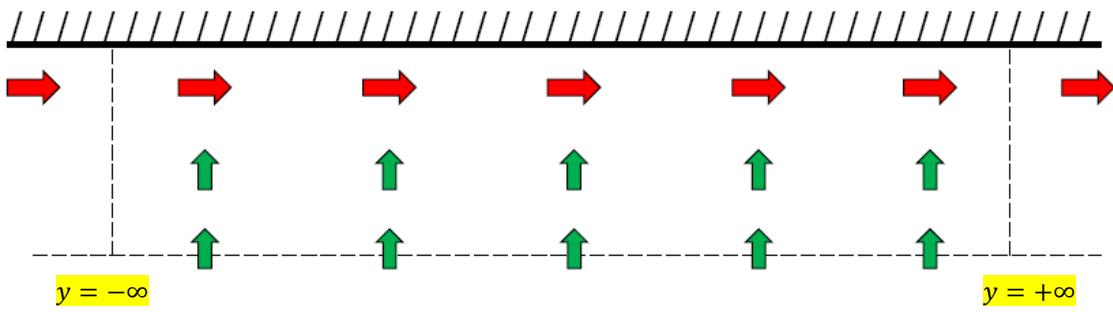
Na fronteira externa a vazão de água (transporte de Ekman) é constante e dá-se exclusivamente na direção da costa conforme expresso pela eq. (III.58). A pergunta é: *o que ocorre com esse volume d'água?* Duas opções se apresentam a primeira vista:

- (i) Uma *parte* desse volume de água é acumulado, provocando um aumento do nível, e o restante corre ao longo da costa dentro de uma faixa de largura com escala dada por  $|R|$ . A figura (III.9) mostra *esquematicamente* essa opção.



**Figura III.9** - Balanço de massa esquemático – primeira opção (incorreta)

- (ii) Todo o volume de água que entra pela fronteira externa é acumulado e a água que corre ao longo da costa entra/sai através das fronteiras laterais (que nesse caso estão localizadas em  $y = \pm\infty$ ). A figura (III.10) mostra *esquematicamente* essa outra opção.



**Figura III.10** - Balanço de massa esquemático – segunda opção (correto)

A solução encontrada é agora usada para elucidar essa questão. O volume total de água acumulado no volume de controle por unidade de comprimento (na dir. y) ao longo do tempo [  $Vol(t)$  ] é dado pela integral em x de  $\eta(x,t)$  :

$$Vol(t) = \int_0^\infty -\frac{Q_E}{|R|} t \cdot e^{-\frac{x}{|R|}} dx = Q_E t \quad (\text{III.68})$$

Comparando esse resultado com a vazão de água pela fronteira externa,  $Q_E$  [eq. (III.37)], verifica-se que a opção (ii) é a correta, ou seja, o transporte de Ekman serve, em sua *totalidade*, para sobre-elevar o nível e, portanto, a água que corre ao longo da costa simplesmente entra pela fronteira lateral a “montante” e sai pela fronteira a “jusante”. Esse resultado, na verdade, está de acordo com a bem conhecida teoria dos escoamentos (puramente) geostróficos a qual requer que os mesmos se processem ao longo das isóbaras (que no caso seriam isolinhas de nível d’água, todas paralelas à costa) e ajuda a entender porque o nível d’água *sobe continuamente* ao longo do tempo. Está de acordo também com a conservação da massa expressa em (III.43).

Ressalta-se nesse ponto que todo o esquema acima apresentado inverte-se-ia para um vento no sentido oposto. Nesse caso o nível do mar seria rebaixado resultando numa MM negativa.

### III.3.1.1.2 - Nota sobre a Solução *Completa* para a Maré Meteorológica

A solução analítica *completa* (i.e., incluindo a parte transitória) para o Problema Clássico foi obtida por Crepon (1967). Uma revisão do procedimento matemático envolvido transcende o escopo do presente trabalho e apenas o resultado que interessa – a MM – é apresentado de acordo com o que consta do livro de Csanady (1982), pg.44 a 47.

Segundo Csanady (1982), a evolução temporal do deslocamento da superfície na costa ( $x=0$ ) na solução *completa*, usando a notação e o sistema de coordenadas da seção anterior, pode ser escrita como [ver eq.(2.50) de Csanady (1982)] :

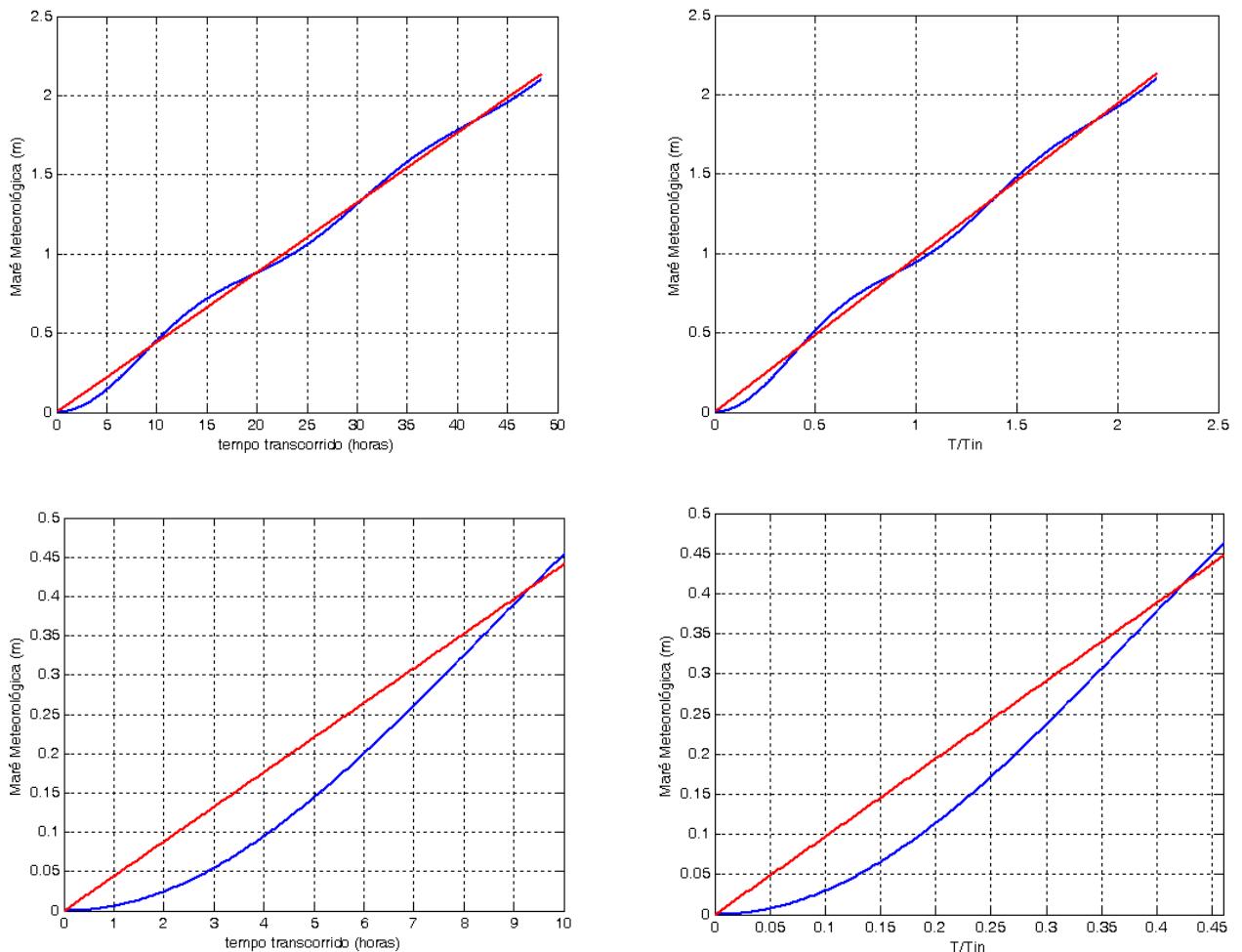
$$MM = \eta(0, t) = \frac{\tau_y^W}{\rho C_o} \int_0^t dt' \int_0^t J_0 \left( 2\pi \frac{t'}{T_{in}} \right) dt', \quad \text{para } t \geq 0 \quad (\text{III.69})$$

Onde,  $J_0$  corresponde a função de Bessel de ordem zero.

Uma solução da dupla integral de  $J_0$ , expressa na eq.(III.69), obtida numericamente por meio de rotinas MATLAB para o mesmo caso estudado na seção anterior, está mostrada na figura (III.11) abaixo com o tempo expresso de forma dimensional e normalizado pelo período inercial. A figura também mostra a solução para a parte não-transiente para facilitar a comparação.

Segundo Csanady(1982), o deslocamento da superfície “*consiste de oscilações inerciais com amplitudes que decaem lentamente juntamente com uma parte não-oscilatória confinada a uma banda costeira com largura de escala R a qual aumenta linearmente com o tempo*”.

A parte “oscilatória” (ou transitória) compõe-se, na verdade, de ondas que se propagam da costa para o largo com velocidade  $C_o$  as quais levam a informação da existência da barreira para o interior do fluido. Essas ondas são o reflexo dos pulsos de vazão inerentes ao problema de Ekman conforme adiantado na seção III.2.



**Figura III.11** – Solução para a evolução temporal da MM para o caso estudado na seção anterior (ver dados na Tabela III.2): linha **azul** - solução *completa* (incluindo a parte *transiente*); linha **vermelha** – solução para a parte *não-transiente* apenas. Coluna da esquerda: solução expressa com o tempo dimensional (*horas*); coluna da direita: idem para o tempo normalizado pelo período inercial local ( $T_{in} = 22$  horas)

O resultado mostrado na figura III.11 é particularmente útil para se entender a evolução temporal da MM no seu estágio inicial. Analisando os gráficos o que se percebe é que o nível *não* responde imediatamente a ação do vento. No caso estudado, por exemplo, a resposta da MM só começa a se pronunciar de maneira mais efetiva algumas (poucas) horas após o início do vento. Usando o período inercial como escala de tempo, a solução completa mostra que num intervalo de tempo correspondente a cerca de  $0.4 T_{in}$  a MM já se equipara ao valor dado pela solução não-transiente e, a partir daí, vai se aproximando gradualmente dessa última com pequenas oscilações.

A solução completa também esclarece de forma mais precisa o desenvolvimento *espacial* do deslocamento do nível dado pela solução não-transiente (ver figura III.7 – painel A). De fato, a solução mostrada na figura nos leva a acreditar que o nível responde *simultaneamente* em toda a extensão da plataforma. Ora, isso só poderia acontecer se as ondas que transmitem a informação de que a costa existe viajassem para o interior da PC a uma velocidade infinita ! Como as ondas viajam a velocidade  $C_o$ , o tempo de resposta ( $T$ ) do nível num ponto localizado a uma certa distância ( $X$ ) da costa será dado por  $T = X.C_o$ .

Para o exemplo em tela,  $C_o = 107 \text{ km/h}$ , uma velocidade bastante elevada indicando que a resposta do nível no interior da Plataforma Continental não será muito demorada. Por exemplo, o nível sobre a Plataforma num ponto localizado a  $2500 \text{ km}$  da costa só começaria a responder após um período de cerca de  $24$  horas depois do início do vento.

Essa visão detalhada do fenômeno permite interpretar o Raio de deformação como sendo a distância percorrida pelas ondas num intervalo de tempo dado por  $T_{in}/2\pi$ .

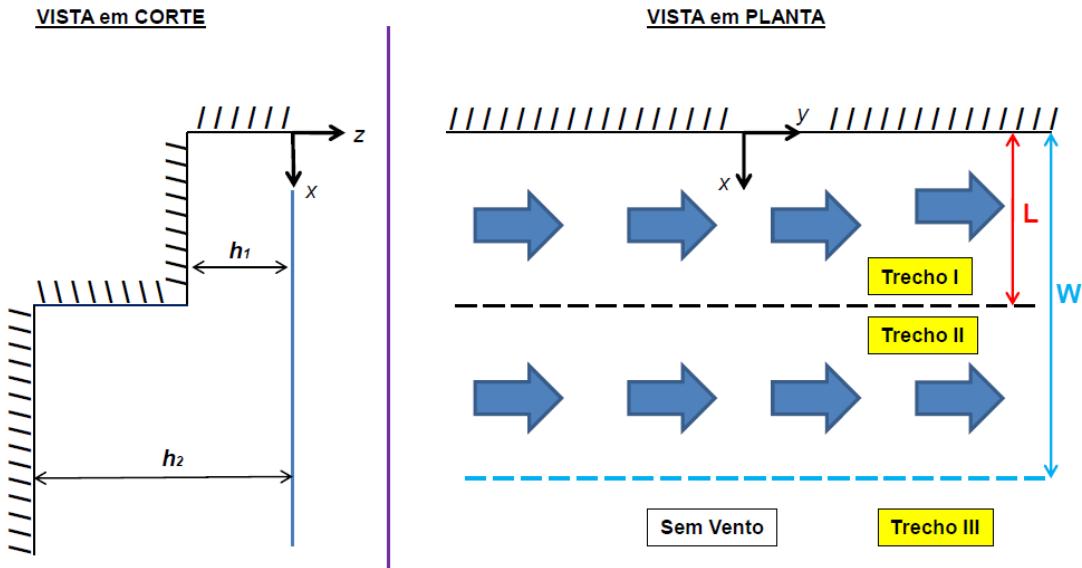
Em termos práticos, a resposta não-transiente é a parte relevante do problema da MM e, doravante, o foco recairá exclusivamente sobre essa parte da solução.

### III.3.2 - Extensão da Solução Clássica para o Caso de Plataforma Estreita e Vento com Pista de Largura Finita

A solução Clássica admite uma Plataforma Continental excessivamente larga sob o efeito de um vento com pista de largura ilimitada. Obviamente, essas hipóteses não são aproximações razoáveis para situações reais. Essas limitações motivaram o autor a ampliar a solução clássica de modo a incluir a largura da plataforma continental e a largura da pista do vento como parâmetros da solução. Essa extensão é feita nessa seção. É importante ressaltar que, por enquanto, o problema é mantido bi-dimensional ( $x, t$ ) admitindo-se que a costa e a pista de vento sejam *infinitamente* extensos na direção ao longo da costa.

A figura (III.12) mostra a geometria do problema que se deseja resolver. Observar que a largura da pista do vento ( $W$ ) foi considerada *maior* que a largura da Plataforma Continental ( $L$ ) em função das dimensões típicas desses parâmetros encontradas na natureza.

#### GEOMETRIA do PROBLEMA



**Figura III.12** - Plataforma Continental de largura  $L$  e profundidade  $h_1$  contígua a um oceano infinitamente largo com profundidade  $h_2$  sujeito a um vento uniforme paralelo a costa, com pista de Largura  $W$ , tal que  $W > L$ .

É importante observar também que o caso de uma plataforma continental estreita trouxe embutida a questão de como “conectar” a plataforma continental com o resto do oceano. Uma maneira simples de se realizar tal conexão é considerar o oceano como uma segunda plataforma de maior profundidade (constante) e de largura, essa sim, infinita, garantindo a continuidade da solução na interface entre as duas regiões. Esse foi o arranjo adotado no presente estudo.

#### III.3.2.1 - Estratégia adotada

Mantendo o foco na parte não-transiente da solução e tomando como base a solução clássica, vamos procurar soluções do tipo:  $Q = Q(x)$  e  $\eta(x, t) = X(x).t$  e  $J(x, t) = j(x).t$ . Com essas formas para as incógnitas, as equações governantes são escritas como:

- Equações “primitivas”

$$j(x) = \frac{C^2}{f} \frac{dX(x)}{dx} \quad (\text{III. 70})$$

$$j(x) = \frac{\tau_y^w}{\rho} - f Q(x) \quad (\text{III. 71})$$

$$X(x) = -\frac{dQ(x)}{dx} \quad (\text{III. 72})$$

- Equação para a vazão perpendicular à costa:

$$-R^2 \frac{d^2 Q(x)}{dx^2} + Q(x) = Q_E \quad (\text{III. 73})$$

onde,

$$R = \frac{\sqrt{gh}}{f} \quad (\text{III. 74})$$

e

$$Q_E = \frac{\tau_y^w}{\rho f} \quad (\text{III. 37 - Bis})$$

A estratégia de solução consiste em resolver as vazões normais a costa ( $Q$ ) em cada trecho usando a eq.(III.73), garantindo a continuidade do nível d'água ( $\eta$ ) e da vazão normal a costa ( $Q$ ) nas interfaces através de condições de compatibilidade. As condições de contorno continuam sendo necessárias nos contornos externos. Observar que, pela eq.(III.72), a continuidade em  $\eta$  implica na continuidade da derivada de  $Q$  (i.e.,  $dQ(x)/dx$ ).

Uma vez determinadas as vazões  $Q$ , as vazões  $J$  e os níveis  $\eta$  são determinados facilmente a partir das equações primitivas.

### III.3.2.2 - Equacionamento e Solução

A equação para a vazão normal à costa tem a seguinte solução geral:

$$Q(x) = (Cte)_1 e^{\frac{x}{R}} + (Cte)_2 e^{-\frac{x}{R}} + Q_E \quad (\text{III. 75})$$

O sistema de coordenadas continua sendo o usado na solução clássica, mostrado na figura (III.12), com o eixo  $x$  perpendicular à costa e apontando para o mar (i.e.,  $x$  é sempre *positivo* no mar). O hemisfério de interesse também continua sendo o Sul, portanto,  $f < 0$  e  $R < 0$ , e as relações das eqs. (III.54) serão usadas aqui também. A solução geral fica, então:

$$Q(x) = (Cte)_1 e^{-\frac{x}{|R|}} + (Cte)_2 e^{\frac{x}{|R|}} + Q_E \quad (\text{III. 76})$$

Adotando os índices *I*, *II* e *III* para identificar as incógnitas em cada trecho, observando que  $R$  depende da profundidade do trecho e rotulando as constantes em cada trecho com as letras *A*, *B* e *C*, respectivamente, tem-se:

Trecho I →  $x$  entre 0 e  $L$

Trecho de profundidade  $h_1$  com vento atuando → vazão de Ekman é *mantida* na equação

$$Q^I(x) = A_1 e^{-\frac{x}{|R_1|}} + A_2 e^{\frac{x}{|R_1|}} + Q_E \quad (\text{III. 77})$$

Trecho II →  $x$  entre  $L$  e  $W$

Trecho de profundidade  $h_2$  com vento atuando → vazão de Ekman é *mantida* na equação

$$Q^{II}(x) = B_1 e^{-\frac{x}{|R_2|}} + B_2 e^{\frac{x}{|R_2|}} + Q_E \quad (\text{III. 78})$$

Trecho III →  $x$  entre  $W$  e  $\infty$

Trecho de profundidade  $h_2$  sem vento atuando, → vazão de Ekman é *eliminada* da equação

$$Q^{III}(x) = C_1 e^{-\frac{x}{|R_2|}} + C_2 e^{\frac{x}{|R_2|}} \quad (\text{III. 79})$$

As seis constantes de integração ( $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1$  e  $C_2$ ) podem ser determinadas utilizando-se as seguintes condições, sendo duas de contorno e quatro de compatibilidade:

Condições de Contorno:

- Na costa, a vazão  $Q$  é nula :  $Q^I(0) = 0 \rightarrow A_1 + A_2 + Q_E = 0$  (III.80)
- No extremo oposto, sem vento, não há vazão:  $Q^{III}(\infty) = 0 \rightarrow C_1 e^{-\infty} + C_2 e^{\infty} = 0 \rightarrow C_2 = 0$

Condições de Compatibilidade:

- a) Interface entre Trecho I e Trecho II :

Continuidade de Vazão:

$$Q^I(L) = Q^{II}(L) \rightarrow A_1 e^{-\frac{L}{|R_1|}} + A_2 e^{\frac{L}{|R_1|}} + Q_E = B_1 e^{-\frac{L}{|R_2|}} + B_2 e^{\frac{L}{|R_2|}} + Q_E \quad (\text{III.81})$$

Continuidade de nível:

$$\frac{dQ^I}{dx}(L) = \frac{dQ^{II}}{dx}(L) \rightarrow -\frac{A_1}{|R_1|} e^{-\frac{L}{|R_1|}} + \frac{A_2}{|R_1|} e^{\frac{L}{|R_1|}} = -\frac{B_1}{|R_2|} e^{-\frac{L}{|R_2|}} + \frac{B_2}{|R_2|} e^{\frac{L}{|R_2|}} \quad (\text{III.82})$$

- b) Interface entre Trecho II e Trecho III:

Continuidade de Vazão:

$$Q^{II}(W) = Q^{III}(W) \rightarrow B_1 e^{-\frac{W}{|R_2|}} + B_2 e^{\frac{W}{|R_2|}} + Q_E = C_1 e^{-\frac{W}{|R_2|}} \quad (\text{III.83})$$

Continuidade de nível:

$$\frac{dQ^{II}}{dx}(W) = \frac{dQ^{III}}{dx}(W) \rightarrow -\frac{B_1}{|R_2|} e^{-\frac{W}{|R_2|}} + \frac{B_2}{|R_2|} e^{\frac{W}{|R_2|}} = -\frac{C_1}{|R_2|} e^{-\frac{W}{|R_2|}} \quad (\text{III.84})$$

Assim, tem-se um sistema de 5 equações *algébricas* envolvendo 5 incógnitas ( $A_1, A_2, B_1, B_2$  e  $C_1$ ) que pode ser resolvido para a determinação das constantes de integração. A solução é um tanto tediosa mas não envolve maiores dificuldades matemáticas. A álgebra está mostrada no Apêndice 5.

Introduzindo as constantes  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\delta$ , todas função de  $|R_1|$  e  $|R_2|$ :

(a) $\alpha = \frac{1}{ R_1 } - \frac{1}{ R_2 }$	(b) $\beta = \frac{1}{ R_1 } + \frac{1}{ R_2 }$	(c) $\gamma = 1 + \frac{ R_1 }{ R_2 }$	(d) $\delta = 1 - \frac{ R_1 }{ R_2 }$	(III.85)
--	---	--	--	----------

as constantes de integração são dadas por :

(a) $B_1 = -Q_E \frac{\left[ 2 - \frac{1}{2} (\gamma e^{-\alpha L} + \delta e^{\beta L}) e^{-\frac{W}{ R_2 }} \right]}{(\gamma e^{\alpha L} + \delta e^{-\beta L})}$	(b) $B_2 = -\frac{Q_E}{2} e^{-\frac{W}{ R_2 }}$	(III.86)
(c) $A_1 = \frac{1}{2} e^{\frac{L}{ R_1 }} \left[ B_1 \gamma e^{-\frac{L}{ R_2 }} + B_2 \delta e^{\frac{L}{ R_2 }} \right]$	(d) $A_2 = -Q_E - A_1$	(e) $C_1 = B_1 - B_2 e^{\frac{2W}{ R_2 }}$

A solução é obtida inserindo as respectivas constantes em:

Trecho I	Trecho II	Trecho III
(a) $Q^I(x) = A_1 e^{-\frac{x}{ R_1 }} + A_2 e^{\frac{x}{ R_1 }} + Q_E$	(b) $Q^{II}(x) = B_1 e^{-\frac{x}{ R_2 }} + B_2 e^{\frac{x}{ R_2 }} + Q_E$	(c) $Q^{III}(x) = C_1 e^{-\frac{x}{ R_2 }}$
(d) $\eta^I(x, t) = \left( \frac{A_1}{ R_1 } e^{-\frac{x}{ R_1 }} - \frac{A_2}{ R_1 } e^{\frac{x}{ R_1 }} \right) \cdot t$	(e) $\eta^{II}(x, t) = \left( \frac{B_1}{ R_2 } e^{-\frac{x}{ R_2 }} - \frac{B_2}{ R_2 } e^{\frac{x}{ R_2 }} \right) \cdot t$	(f) $\eta^{III}(x, t) = \frac{C_1}{ R_2 } e^{-\frac{x}{ R_2 }} \cdot t$
(g) $J^I(x, t) = \left[ \frac{\tau_y^W}{\rho} +  f  Q^I(x) \right] \cdot t$	(h) $J^{II}(x, t) = \left[ \frac{\tau_y^W}{\rho} +  f  Q^{II}(x) \right] \cdot t$	(i) $J^{III}(x, t) = Q^{III}(x)  f  \cdot t$

(III.87)

Na costa, a evolução temporal do nível d'água ( $\eta_o = \text{MM}$ ) e da velocidade  $V_o$  são dadas por:

(a) $\eta_o(t) = \eta^I(0, t) = \frac{A_1 - A_2}{ R_1 } \cdot t$	(b) $V_o(t) = \frac{\tau_y^W}{\rho h_1} \cdot t$
---	---

(III.88)

De acordo com a interpretação física vista na seção III.3.3.2.2 na costa, a velocidade da corrente costeira responde diretamente ao arraste do vento não sendo afetada pela geometria da plataforma e, portanto, é a mesma que na solução clássica. Já o nível d'água, e, por conseguinte a MM, responde ao aporte de água à costa o qual depende da geometria do problema.

As expressões acima podem ser programadas (em MATLAB ou FORTRAN, por ex.) sem maiores dificuldades para se obter valores numéricos das incógnitas.

### III.3.2.3 - Exemplos de Aplicação

Inicialmente, é interessante observar que a solução clássica é um caso particular da solução estendida acima. De fato, se eliminarmos o degrau e tornarmos a largura da pista de vento “grande”, a solução clássica é recuperada conforme se pode verificar fazendo  $h_1 = h_2$  e tomando  $W \gg R$  na solução apresentada acima.

#### III.3.2.3.1 - Extensão da Solução Clássica para incluir Vento com Pista de Largura Finita

Um caso particular interessante da solução estendida é um no qual o degrau é eliminado mas a largura da pista do vento é mantida com valor finito (porém maior que a largura do primeiro degrau – hipotético - da plataforma continental para atender o requisito da solução estendida). Com profundidade constante, o problema corresponderia a uma versão da solução clássica com um vento de largura de pista prescrita como ilustrado na figura (III.13).

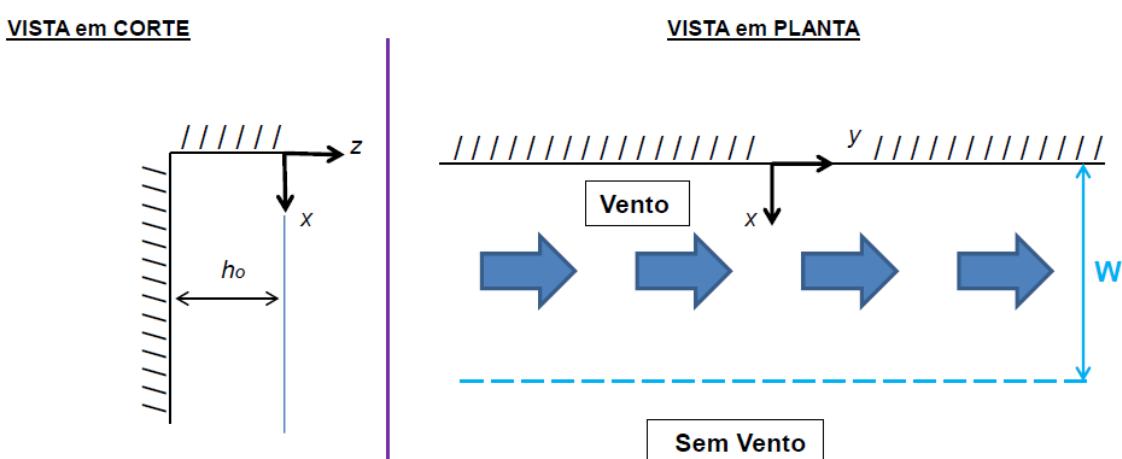


Figura III.13 - Solução clássica estendida para vento com largura de pista finita

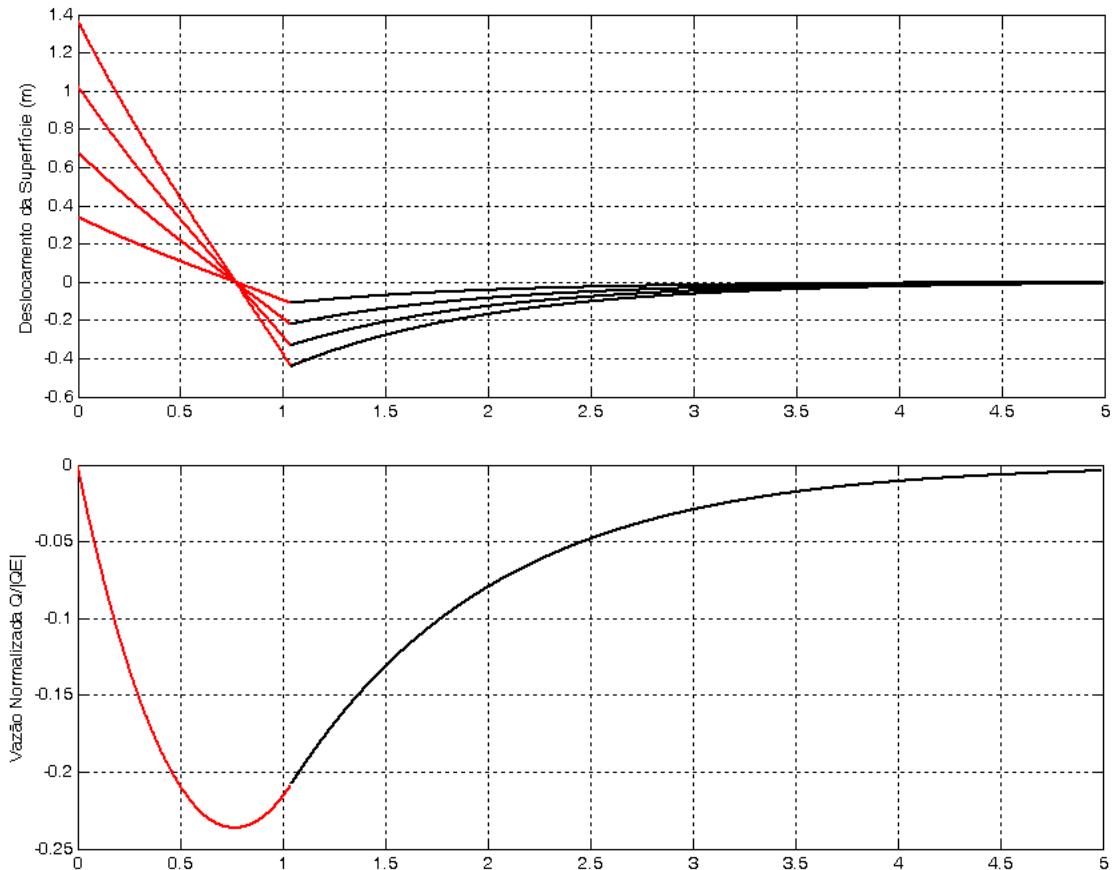
Uma solução analítica específica para esse caso pode ser extraída da solução estendida fazendo ( $h_1 = h_2$ ), considerando  $W$  da mesma ordem de grandeza de  $R$  e admitindo um  $L$  qualquer tal que  $L < W$ . Depois de alguma álgebra, a solução pode ser escrita para o trecho com vento (índice “ $V$ ”) e para o trecho sem vento (índice “ $C$ ” de “calmaria”) da seguinte forma :

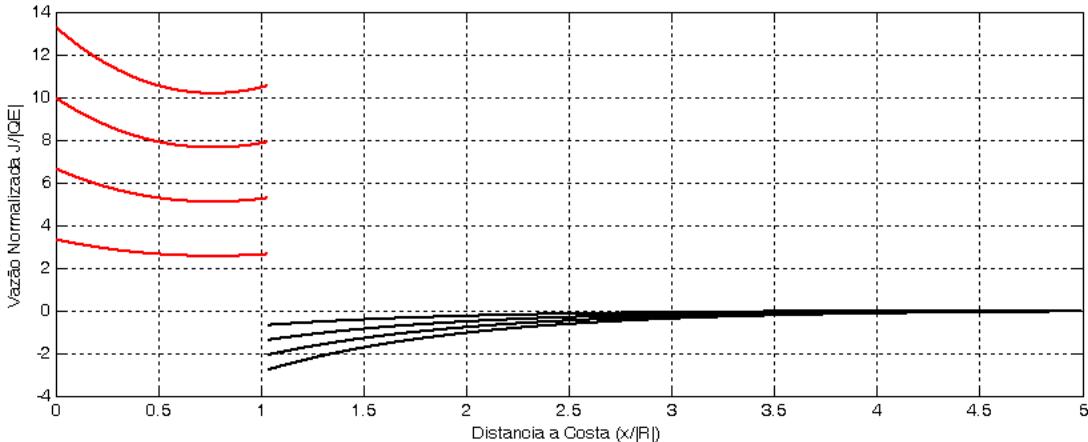
Trecho com Vento	Trecho sem Vento (Calmaria)	
(a) $\eta^V(x, t) = -\frac{Q_E}{ R } \left[ e^{-\frac{x}{ R }} - e^{-\frac{W}{ R }} \cosh\left(\frac{x}{ R }\right) \right] \cdot t$	(b) $\eta^C(x, t) = -\frac{Q_E}{ R } e^{-\frac{x}{ R }} \left[ 1 - \cosh\left(\frac{W}{ R }\right) \right] \cdot t$	
(c) $Q^V(x) = Q_E \left[ 1 - e^{-\frac{x}{ R }} - e^{-\frac{W}{ R }} \operatorname{senh}\left(\frac{x}{ R }\right) \right]$	(d) $Q^C(x) = -Q_E e^{-\frac{x}{ R }} \left[ 1 - \cosh\left(\frac{W}{ R }\right) \right]$	(III.89)
(e) $J^V(x, t) = - f [Q_E + Q^V(x)].t$	(f) $J^C(x, t) =  f Q^C(x).t$	

Na costa, a evolução temporal do nível d'água ( $\eta_o = \text{MM}$ ) e da velocidade  $V_o$  são dadas por:

(a) $\eta_o(t) = \eta^V(0, t) = \frac{Q_E}{ R } \left( 1 - e^{-\frac{W}{ R }} \right) \cdot t$	(b) $V_o(t) = \frac{\tau_y^W}{\rho h} \cdot t$	(III.90)
---	---	----------

Para ilustrar o resultado, a mesma situação do exemplo da seção III.3.3.2.1 será usada: Latitude  $33^\circ$ , profundidade da plataforma = 90m, Vento de 50 km/h atuando por 48h mas, agora, com largura de pista  $W = R$ . O resultado está mostrado na fig. (III.14).





**Figura III.14.** Resultados da solução clássica estendida para vento com pista de largura igual a  $R$  (ver dados do problema no texto): Painel Sup.: Evolução temporal da posição da superfície ( $\eta$ ) ; Painel do meio: Vazão perpendicular a costa ( $Q$ ) ; Painel inferior: Evolução temporal da vazão paralela a costa ( $J$ ). Vazões estão normalizadas por  $|Q_E|$ . Linhas sucessivas nos gráficos representam solução para tempos sucessivos com  $t = 12, 24, 36$  e  $48$  h. Código de cores: **vermelho** - trecho com vento; **preto** - trecho sem vento.

Os resultados apontam alguns aspectos interessantes do problema. Uma pista de vento de largura finita induz uma região de *divergência* na fronteira da pista que faz o nível ser *rebaixado* nesse local como mostrado no painel superior da figura. O nível d'água desenvolve um “bico” na fronteira da pista devido à descontinuidade abrupta do vento.

Como mostrado no painel central da Figura, a vazão  $Q$  é zero na costa, atinge um valor máximo no interior da pista e tende a zero na região fora da ação do vento numa distância de escala dada por  $R$ . O vento, portanto, (pela conservação da massa) “aspira” água da região de calmaria. Com a largura de pista usada no exemplo ( $W = R$ ),  $Q$  chega a apenas cerca de 23% de  $Q_E$  pois não há espaço suficiente (na escala de  $R$ ) para que o transporte de Ekman se desenvolva na sua plenitude. A existência desse máximo em  $Q$  numa certa posição faz com que o deslocamento do nível d'água se anule nesse local [ ver eq. (III.72) ] como se pode constatar comparando a posição do deslocamento nulo e da vazão  $Q$  máxima na figura (III.13). Esse ponto está localizado dentro da pista de vento e não na fronteira.

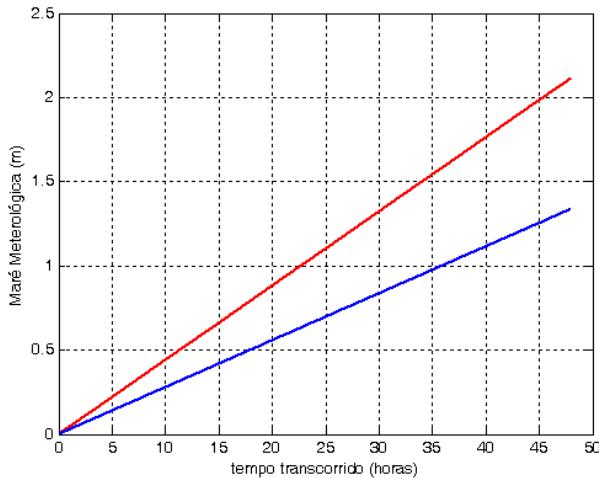
A vazão  $J$ , mostrada no painel inferior, sendo decorrente de uma corrente geostrófica, responde à inclinação do nível e por isso tem sentido inverso nas duas regiões. O vento, portanto, também movimenta a água na dir. y na região de calmaria, onde, aliás, a vazão é contrária ao sentido do vento. A descontinuidade na fronteira da pista é uma decorrência da diferença abrupta na inclinação da superfície que ali existe. Todavia, a descontinuidade em  $J$  ocorre na direção transversal (dir-x) e, portanto, não compromete a conservação da massa [ver eq.(III.72)]. Esse resultado é possível no presente contexto devido a desconsideração do transporte transversal de momentum (por efeito da turbulência do escoamento) feito na simplificação das equações do momentum. Na forma simplificada adotada, as equações de momentum permitem o deslizamento nas fronteiras (vazão  $J$  não vai a zero na costa) bem como a existência de descontinuidades como as desenvolvidas na vazão  $J$ .

## Maré Meteorológica

O resultado de maior interesse é a determinação da MM dado pela eq (III.90a) :

$$\eta_o(t) = -\frac{Q_E}{|R|} \left( 1 - e^{-\frac{W}{|R|}} \right) \cdot t \quad (\text{III.91})$$

A figura (III.15) mostra a evolução temporal da MM para a presente aplicação juntamente com o resultado da solução clássica para visualização da redução causada pela limitação da largura da pista.

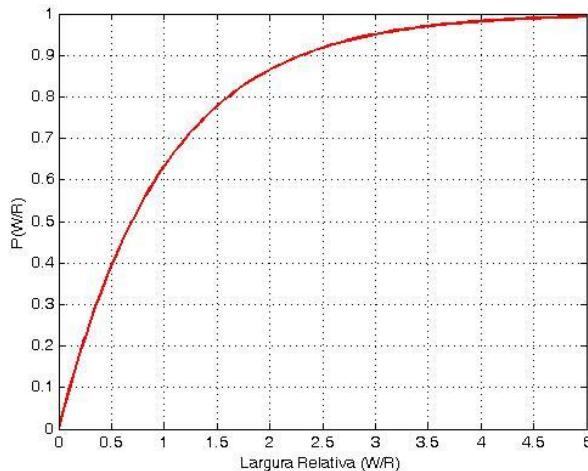


**Figura III.15** - Evolução temporal da MM : **Vermelho** = MM solução clássica; **azul** = MM para  $W=|R|=375 \text{ km}$ .

A redução da MM com respeito à solução clássica pode ser generalizada da seguinte forma. Chamando de  $\eta_o|_\infty$  a MM do caso clássico, (causada por um Vento com Pista infinitamente larga) e de  $\eta_o|_W$  o caso de uma MM causada por um Vento com Pista de largura  $W$ , é possível quantificar o efeito da largura da pista na amplitude da MM calculando a relação ( $P$ ) entre as duas soluções :

$$P\left(\frac{W}{|R|}\right) = \frac{\eta_o|_W}{\eta_o|_\infty} = 1 - e^{-\frac{W}{|R|}} \quad (\text{III.92})$$

O resultado é mostrado na figura (III.16):



**Figura III.16** - Efeito da largura da pista ( $W$ ) na amplitude da MM em relação á solução clássica (pista infinitamente larga). A largura da pista está normalizada por  $|R|$ .  $P=1$  significa resultado idêntico ao clássico.

A figura (III.16) mostra graficamente o efeito que a largura da pista do vento, medida na escala de  $|R|$ , tem na MM. Para a situação do exemplo, a limitação da largura da pista em  $W = |R|$  reduz a MM para 63% da MM do caso clássico. Todavia, um vento com largura de pista  $W = 3|R|$  já produz uma MM de cerca de 95% da do caso clássico.

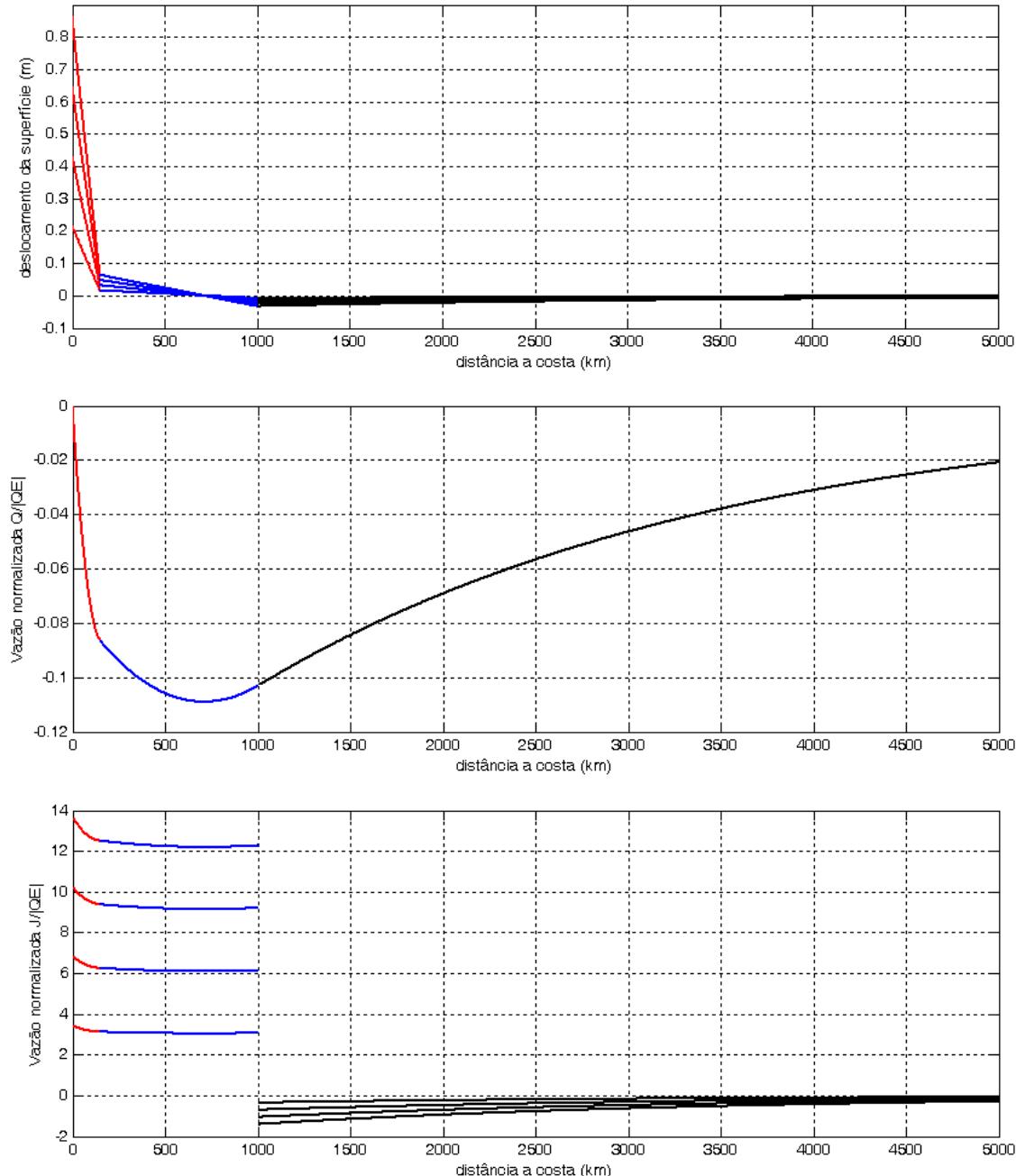
### III.3.2.3.2 - Caso de Plataforma Estreita e Vento com Pista de Largura Finita

Apesar de instrutivo, o caso particular visto na seção anterior é de pouca utilidade prática pois a largura da plataforma continental é ainda excessivamente grande. Nessa seção o caso de uma plataforma continental estreita atuada por um vento com pista de largura finita é analisado.

O intuito aqui é tratar uma situação o mais próximo possível de um caso real. Para tanto, a latitude será mantida em  $33^\circ$  sul, a plataforma terá 150 km de largura e 90 m de profundidade. A profundidade do oceano adjacente a plataforma será prescrita em 4000m usando como referência a profundidade média dos oceanos. O vento terá intensidade de 50 km/h, soprando por 48 h e a largura da pista do vento será tomada como 1000 km.

O primeiro aspecto a se observar é que, devido a existência de dois trechos com profundidades diferentes, o problema agora tem duas escalas de distância: uma para a plataforma continental ( $|R_1| = 375$  km), e outra, bem maior, para o oceano adjacente ( $|R_2| = 2\ 500$  km). Com isso, o efeito da rotação no oceano profundo se desenvolve em distâncias bem maiores do que na plataforma.

A figura (III.17) mostra graficamente a solução.

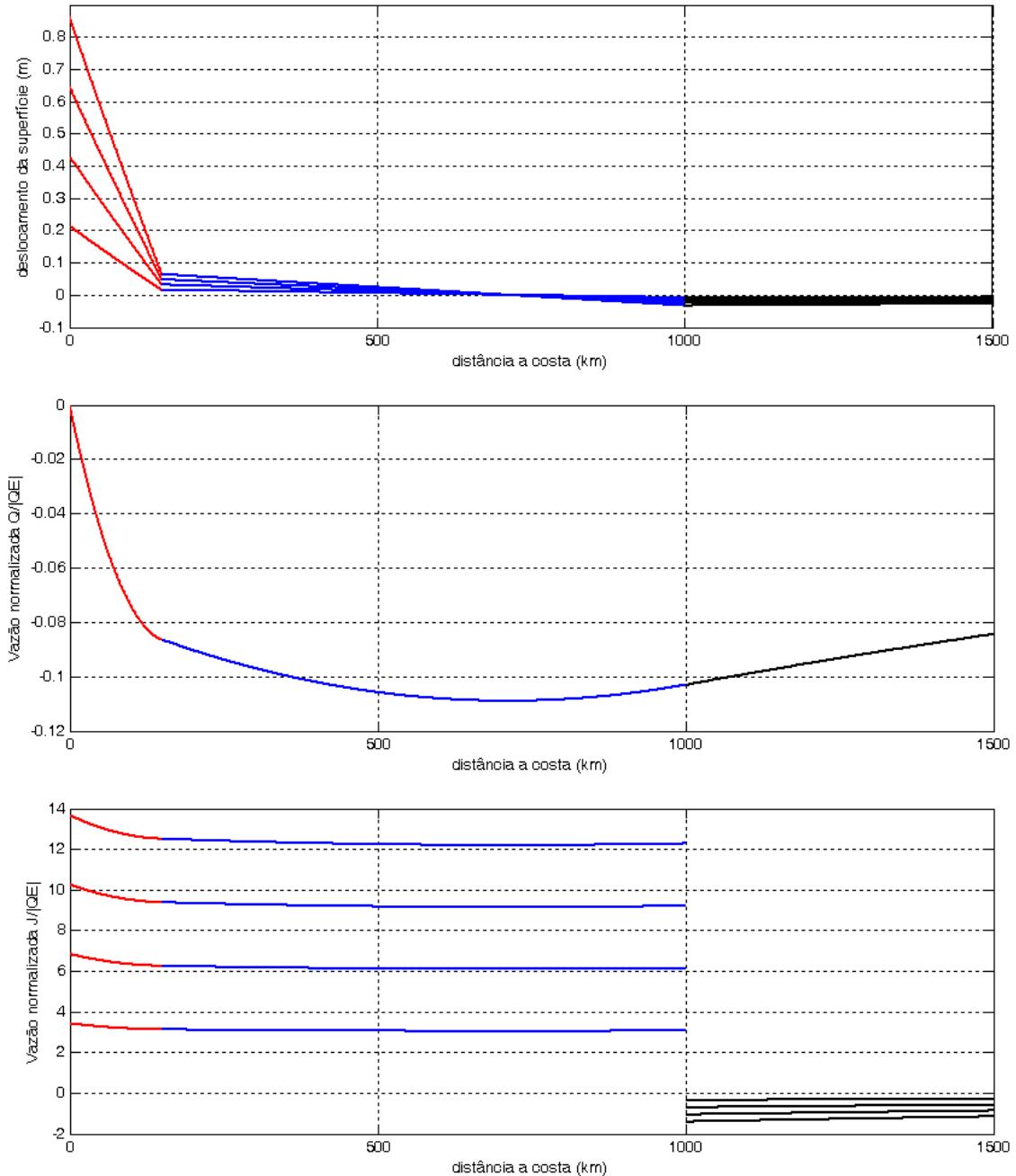


**Figura III.17** – Similar à figura (III.13) para situação com degrau (ver texto para detalhes)

A melhor maneira de se interpretar esse resultado é iniciar pelo trecho correspondente ao oceano profundo, representado nos gráficos pela cor azul, região entre a borda da plataforma continental e o final da pista do vento, e preta, região de

calmaria. Deixando o trecho sobre a plataforma continental, marcado em vermelho nos gráficos, temporariamente fora da discussão, o resultado para o oceano assemelha-se ao caso da solução clássica com vento de largura finita, visto na aplicação anterior. Quase todas as características vistas lá são reproduzidas aqui: rebaixamento do nível na borda da pista, Vazões  $Q$  e  $J$  com o mesmo tipo de estrutura espacial, tudo ocorrendo em escalas de distância medidas em termos de  $|R_2|$ . A diferença está na presença da plataforma continental.

A influência da plataforma fica mais visível ampliando as figuras no trecho mais próximo à costa, conforme mostrado na figura (III.18).



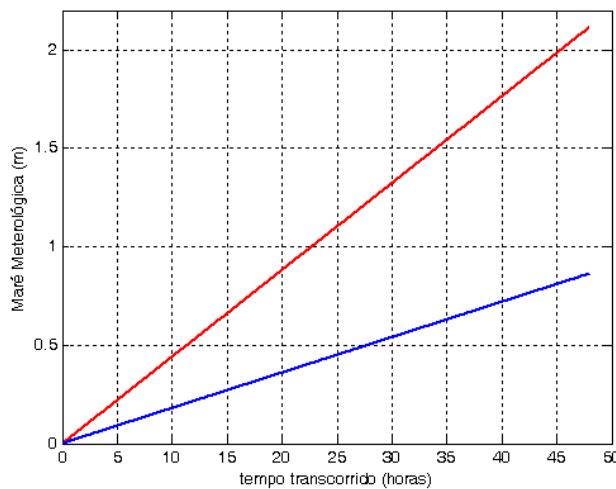
**Figura III.18** – Ampliação da figura (III.17) para região mais próxima à costa

A vazão  $Q$  (painel central) atinge um máximo de 15%  $Q_E$  a cerca de 700 km da costa, local onde também se localiza o ponto de deslocamento de nível nulo (painel superior). A vazão perpendicular só vai a zero na costa; na borda da PC, a solução mostra ainda haver um afluxo de água correspondendo a cerca de 8.5%  $Q_E$ . É essa vazão de água que penetra na PC que vai elevar o nível causando a MM. A elevação de nível sobre a plataforma é muito mais pronunciada do que no oceano profundo pois ocorre numa distância de escala  $|R_1| \ll |R_2|$ .

Analisando o nível na borda da plataforma continental, vê-se que o vento produz ali uma sobre-elevação da ordem de 10% da MM, em outras palavras, cerca de 10% da MM, nesse caso, tem origem oceânica, i.e., foi gerada fora da plataforma.

## Maré Meteorológica

Voltando a atenção para a MM, a evolução temporal do nível na costa foi calculada pela eq.(III. 88a) para o exemplo em questão e o resultado está mostrado na figura (III.19) juntamente com a solução clássica para comparação.

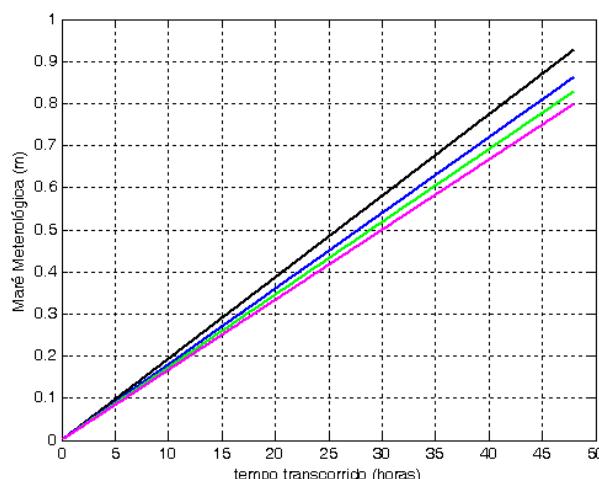


**Figura III.19** – Evolução temporal da MM para o exemplo da figura (III.17) (azul) e para o problema clássico (vermelho).

O resultado mostra valores cerca de 50% menores que os da solução clássica (obtida para uma plataforma de mesma profundidade e com vento da mesma intensidade). Os resultados desse exemplo também aparentam ter ordem de grandeza mais próxima da observada nas medições vistas no Capítulo II.

A possibilidade de se calcular a MM para qualquer combinação de parâmetros será agora explorada para investigar a resposta da MM a variações (i) na largura da plataforma e (ii) na largura da pista de vento.

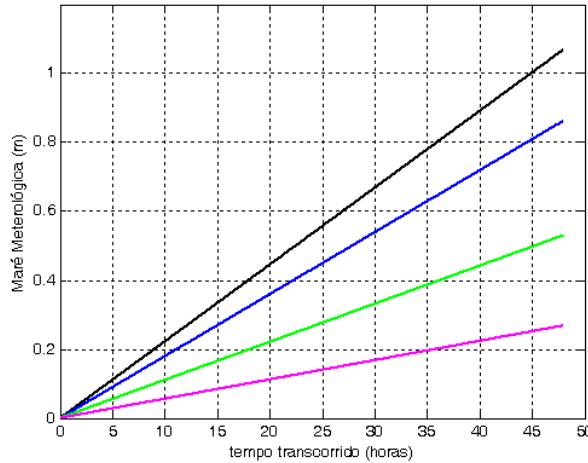
Iniciando pela largura da pista, a figura (III.20) mostra resultados da evolução temporal da MM para valores de  $W$  indo de  $300\text{ km}$  a  $2000\text{ km}$ . Nesse teste, todos os outros parâmetros foram mantidos iguais aos do exemplo (inclusive  $L$  que foi mantido em  $150\text{ km}$ ).



**Figura III.20** - Evolução temporal da MM para diferentes valores da largura de pista do vento. Código de cores: **preto** :  $W = 2000\text{ km}$ ; **azul** :  $W = 1000\text{ km}$ ; **verde** :  $W = 600\text{ km}$  e **magenta** :  $W = 300\text{ km}$ . ( $L = 150\text{ km}$ ).

A figura mostra que a largura da pista de vento não afetou significativamente a MM. Um aumento da largura da pista de  $600 \text{ km}$  para  $2000 \text{ km}$ , por exemplo, causa uma amplificação da MM, nesse caso, da ordem de 10%.

O mesmo procedimento foi usado para averiguar a resposta da MM a variações na largura da plataforma para valores de  $L$  indo de  $30 \text{ km}$  a  $200 \text{ km}$  e o resultado está mostrado na figura (III.21) (com  $W$  mantido em  $1000 \text{ km}$ ).

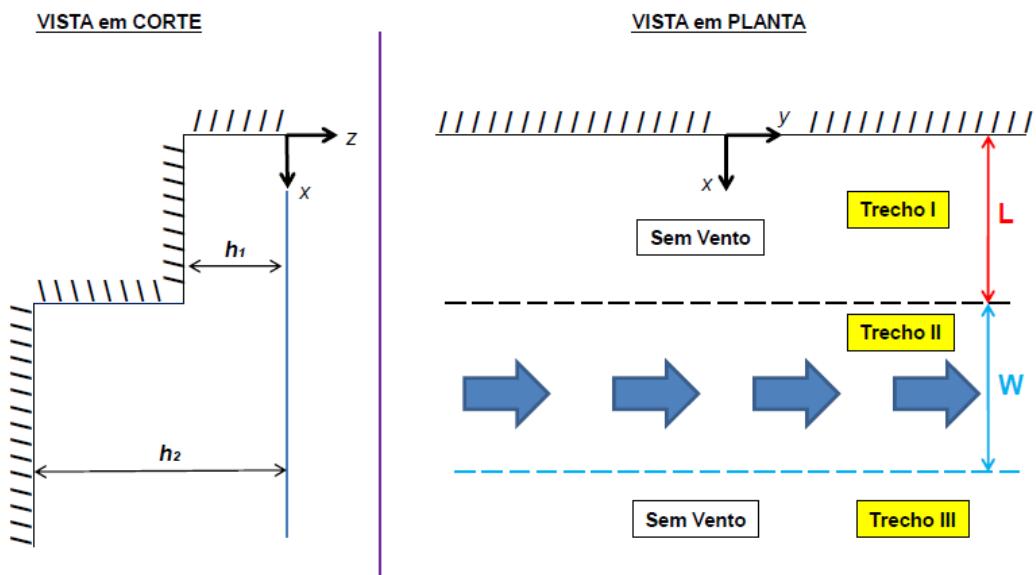


**Figura III.21** - Evolução temporal da MM para diferentes valores de largura da plataforma continental. Código de cores: **preto** –  $L = 200 \text{ km}$ ; **azul** –  $L = 150 \text{ km}$ ; **verde** –  $L = 80 \text{ km}$  e **magenta** –  $L = 30 \text{ km}$ . ( $W = 1000 \text{ km}$ )

Ao contrário da largura da pista de vento, os resultados mostram que a largura da plataforma tem forte efeito na MM. Com todos os outros parâmetros mantidos constantes, quanto mais larga for a plataforma, maior será a MM. Um aumento da largura da plataforma de  $80 \text{ km}$  para  $200 \text{ km}$ , por exemplo, causou uma amplificação da MM da ordem de 50% para o presente exemplo.

### III.3.2.3.3 - Caso de Plataforma Estreita e Vento com Pista de Largura Finita atuando *fora* da Plataforma

Nessa seção, a presente teoria é usada para avaliar a eficácia de um vento atuando *fora* da plataforma continental em gerar MM's. O caso a ser estudado considera que a fronteira interna da pista de vento coincide com a borda da plataforma conforme mostrado na figura (III.22).



**Figura III.22** - Plataforma continental de largura  $L$  e profundidade  $h_1$  contígua a um oceano infinitamente largo com profundidade  $h_2$  sujeito a um vento uniforme paralelo a costa, com pista de largura  $W$  atuando da borda da plataforma continental para o largo.

A abordagem desse problema é feita de forma absolutamente análoga a do caso estudado na seção III.3.2.3.2 no qual o vento atuava também sobre a plataforma continental. O sistema de equações a ser resolvido é:

Trecho I

$$Q^I(x) = A_1 e^{-\frac{x}{|R_1|}} + A_2 e^{\frac{x}{|R_1|}} \quad (\text{III.94})$$

Trecho II

$$Q^{II}(x) = B_1 e^{-\frac{x}{|R_2|}} + B_2 e^{\frac{x}{|R_2|}} + Q_E \quad (\text{III.95})$$

Trecho III

$$Q^{III}(x) = C_1 e^{-\frac{x}{|R_2|}} + C_2 e^{\frac{x}{|R_2|}} \quad (\text{III.96})$$

Os detalhes da solução do problema estão mostrados no Apêndice 5 – Parte 2 e apenas um resumo da solução será apresentada aqui. As constantes de integração são dadas por :

(a)	$B_1 = -\frac{Q_E \left[ 2 \cosh \left( \frac{L}{ R_1 } \right) - \frac{1}{2} (\gamma e^{-\alpha L} + \delta e^{\beta L}) e^{-\frac{L+W}{ R_2 }} \right]}{(\gamma e^{\alpha L} + \delta e^{-\beta L})}$	(b)	$B_2 = -\frac{Q_E}{2} e^{-\frac{L+W}{ R_2 }}$	
(c)	$A_1 = \frac{1}{2} e^{\frac{L}{ R_1 }} \left[ B_1 \gamma e^{-\frac{L}{ R_2 }} + B_2 \delta e^{\frac{L}{ R_2 }} + Q_E \right]$	(d)	$A_2 = -A_1$	(e) $C_1 = B_1 - B_2 e^{\frac{2(L+W)}{ R_2 }}$

(III.97)

A solução é obtida inserindo as respectivas constantes em:

Trecho I	Trecho II	Trecho III
(a) $Q^I(x) = A_1 e^{-\frac{x}{ R_1 }} + A_2 e^{\frac{x}{ R_1 }}$	(b) $Q^{II}(x) = B_1 e^{-\frac{x}{ R_2 }} + B_2 e^{\frac{x}{ R_2 }} + Q_E$	(c) $Q^{III}(x) = C_1 e^{-\frac{x}{ R_2 }}$
(d) $\eta^I(x, t) = \frac{A_1}{ R_1 } \left( e^{\frac{x}{ R_1 }} + e^{-\frac{x}{ R_1 }} \right) \cdot t$	(e) $\eta^{II}(x, t) = \left( \frac{B_1}{ R_2 } e^{-\frac{x}{ R_2 }} - \frac{B_2}{ R_2 } e^{\frac{x}{ R_2 }} \right) \cdot t$	(f) $\eta^{III}(x, t) = \frac{C_1}{ R_2 } e^{-\frac{x}{ R_2 }} \cdot t$
(g) $J^I(x, t) = Q^I(x) \cdot  f  \cdot t$	(h) $J^{II}(x, t) = \left[ \frac{\tau_y^W}{\rho} +  f  Q^{II}(x) \right] \cdot t$	(i) $J^{III}(x, t) = Q^{III}(x) \cdot  f  \cdot t$

(III.98)

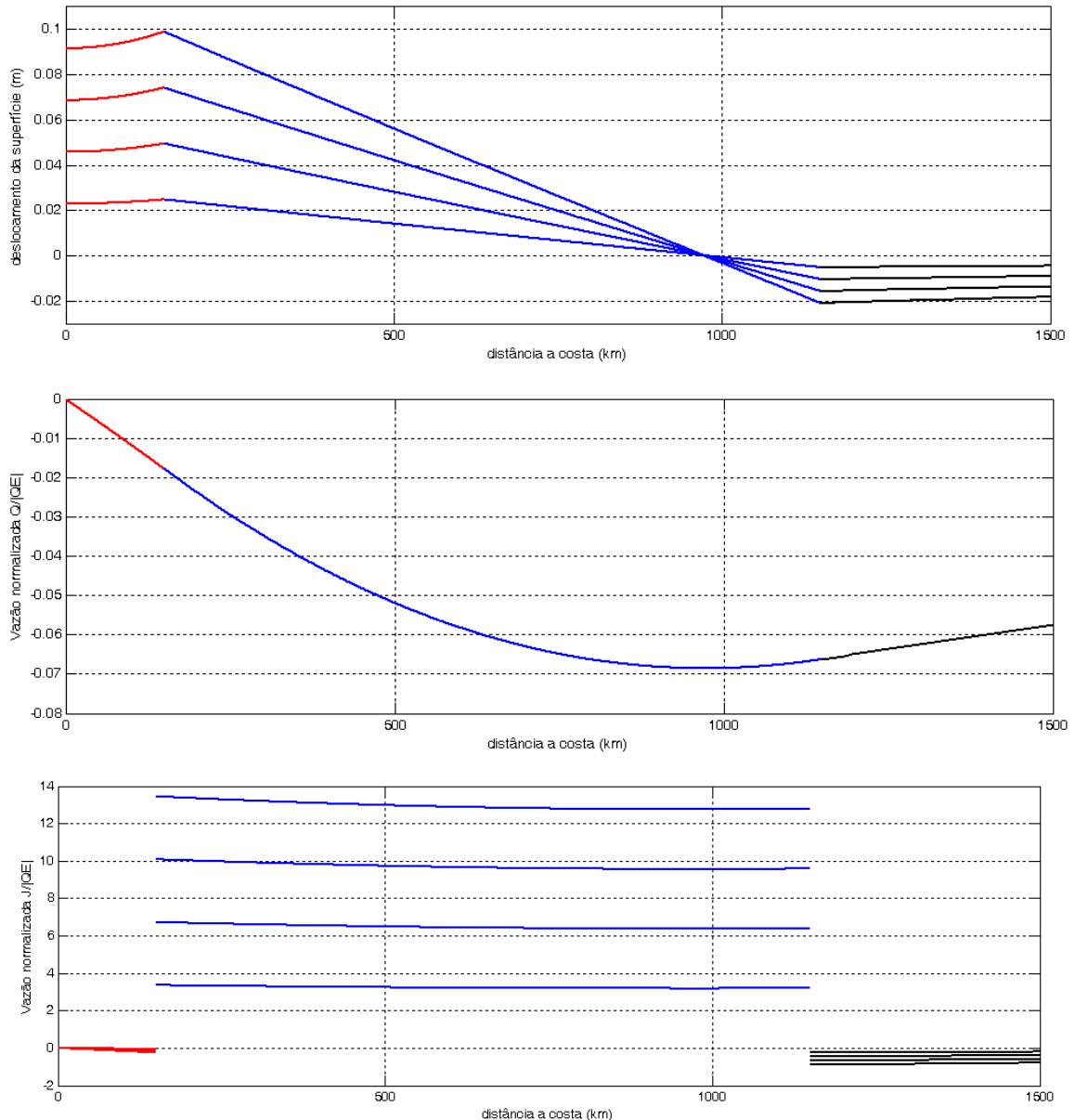
Na costa, a evolução temporal do nível d'água ( $\eta_o = \text{MM}$ ) e da velocidade  $V_o$  são dadas por:

(a) $\eta_o(t) = \eta^I(0, t) = \frac{2A_1}{ R_1 } \cdot t$	(b) $V_o(t) = 0$	
---	------------------	--

(III.99)

A solução está mostrada de forma gráfica na figura (III.23) para um caso com parâmetros de entrada similares ao caso estudado na seção III.3.2.3.2, ou seja: latitude de  $33^\circ S$ , plataforma continental com  $150 \text{ km}$  de largura e  $90 \text{ m}$  de profundidade, profundidade do oceano adjacente a plataforma de  $4000 \text{ m}$ , vento com intensidade de  $50 \text{ km/h}$ , soprando por  $48 \text{ h}$  e vento com largura da pista igual a  $1000 \text{ km}$ , atuando *fora* da plataforma.

Para facilitar a visualização, a solução é mostrada para um trecho de  $1500 \text{ km}$  de distância a partir da costa.



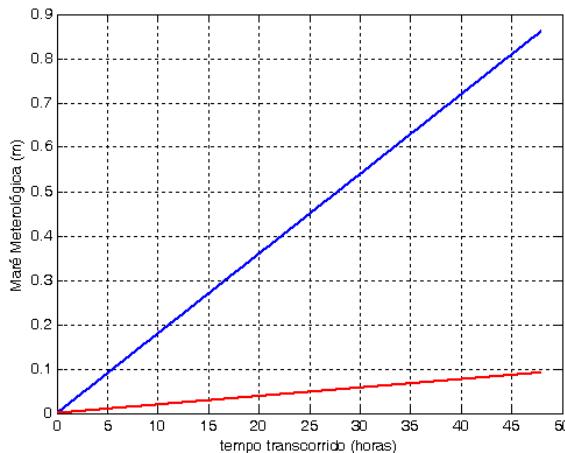
**Figura III.23** – Solução do problema para o caso indicado no texto. Código de cores: **vermelho** – trecho sobre a plataforma; **azul** - zona sob a atuação do vento e **preto** - zona oceânica fora da pista de vento. Painel superior: deslocamento da superfície, Painel central Vazão  $Q$  normalizada por  $Q_E$  e Painel inferior - vazão  $J$  normalizada por  $Q_E$

Iniciando a análise pelo flanco oceânico, verifica-se que os resultados nessa zona são similares ao do caso estudado na seção III.3.2.3.2 [ver figura (III.18)] apresentando o mesmo rebaixamento de nível e descontinuidade da corrente  $V$  na borda oceânica da pista devido a divergência de fluxo lá existente.

Os resultados para a plataforma continental, entretanto, diferem substancialmente do obtido no caso anterior. De fato, a solução indica que o nível d'água decai significativamente sobre a plataforma originando uma MM bastante reduzida na costa. As correntes paralelas à costa assumem valores também muito reduzidos e, curiosamente, com sentido oposto ao sentido do vento. A explicação para esse comportamento deriva da presença de uma região de convergência na borda interna da pista de vento (que coincide com a borda da plataforma). A convergência de água cria uma sobre-elevação no nível o qual decai para ambos os lados [ver painel superior na figura (III.23)]. O decaimento sobre a plataforma é mais intenso do que no oceano devido à baixa profundidade da primeira, a qual origina um raio de deformação ( $R_I$ ) muito menor do que no oceano ( $R_I$  determina a escala espacial de variações de nível).

O sentido invertido e a baixa intensidade das correntes sobre a plataforma continental, por sua vez, decorrem do fato que essas são correntes geostróficas e, portanto, respondem diretamente à inclinação da superfície. Em particular, observa-se que a ausência de vento sobre a plataforma induz uma corrente costeira ( $V_o$ ) nula na costa.

Apesar da geometria idealizada, esse caso tem implicações relevantes sobre uma questão de grande importância prática, qual seja, de que a MM é um fenômeno gerado, essencialmente, sobre a plataforma continental. Para ilustrar essa questão, a figura (III.24) compara a evolução da MM para os casos estudados nas duas últimas seções, ou seja, com um campo de vento com pista de 1000 km de largura posicionado de duas maneiras diferentes: (i) Vento atuando em parte sobre a plataforma (150 km) e em parte sobre a área oceânica contígua (850 km) – linha azul e (ii) Vento atuando da borda da plataforma para o largo (1000 km sobre a área oceânica contígua, portanto fora da PC) – linha vermelha.



**Figura III.24** – Evolução da MM correspondente aos casos estudados nas duas últimas seções (ver texto)

Para as situações estudadas, o simples deslocamento da pista de vento para fora da plataforma continental (mantendo a mesma largura de pista) provocou uma redução de cerca de 90 % na MM.

Esse comportamento do campo de vento, na verdade, guarda relação com o que ocorre no Sul do Brasil quando da passagem de ciclones extra-tropicais (CE-T's) por aquela região costeira uma vez que o deslocamento típico desse sistema atmosférico dá-se de Oeste para Leste [ver, por ex., Machado et al (2010)].

Obviamente, uma aplicação quantitativa dos resultados acima depende de quão bem o modelo simplificado de Plataforma + Fundo Oceânico adotado - tipo “degrau duplo” - representa a forma real da plataforma continental e do oceano adjacente. Ocorre que, como será visto mais adiante, a plataforma da costa Sul/Sudeste brasileira tem características geométricas que se aproximam dessa geometria idealizada validando qualitativamente a aplicabilidade dos resultados do modelo simplificado.

Portanto, admitindo a validade do modelo de plataforma, o que se deduz é que a geração de MM's por CE-T's no Sul do Brasil ocorre, essencialmente, durante a passagem dos ciclones sobre a plataforma continental. Adicionalmente, verifica-se que CE-T's que se desenvolvam no oceano não são capazes de induzir MM significativa.

### III.3.3 Solução Aproximada para uma Plataforma Continental “Desconectada”

As soluções analíticas das seções anteriores trouxeram à luz alguns aspectos que podem ser usados para se obter uma solução simplificada do problema da plataforma continental de largura finita.

O primeiro aspecto é a existência de um ponto de deslocamento nulo do nível d'água. A posição  $x_n$  desse ponto pode ser determinada usando a eq. (III.100) deduzida abaixo :

$$0 = \frac{B_1}{|R_2|} e^{\frac{-x_n}{|R_2|}} - \frac{B_2}{|R_2|} e^{\frac{x_n}{|R_2|}}$$

Resolvendo para  $x_n$ , tem-se:

$$x_n = \frac{|R_2|}{2} \ln \left( \frac{B_1}{B_2} \right) \quad (\text{III. 100})$$

Curiosamente essa posição independe da intensidade do vento ( $Q_E$  é cancelado na expressão), sendo função apenas dos parâmetros geométricos do problema (largura da pista inclusive). No exemplo da seção III.3.2.3.2 – o caso de maior interesse – o valor exato é  $x_n = 711 \text{ km}$ . Para um dado arranjo de parâmetros geométricos  $h_1, h_2$  e  $L$ , a posição  $x_n$  será controlada pela largura da pista de vento  $W$ , cuja influência na MM é pouco significativa de acordo com o que foi visto na referida seção.

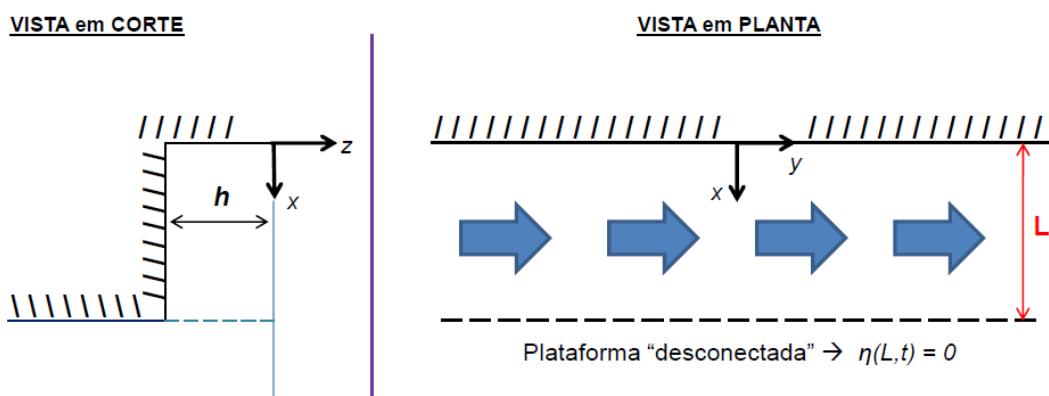
Ora, suponha que a largura  $W$  seja tal que  $x_n$  se localize *exatamente na borda da plataforma continental*, i.e.,  $x_n = L$ . Nesse caso,  $\eta(L, t) = 0$ . A idéia de simplificação consiste em usar essa condição de deslocamento nulo na borda da Plataforma como condição de contorno para determinar o deslocamento do nível sobre a plataforma e, a partir daí, determinar as respectivas vazões.

*Qual o valor de  $W$  que traz o ponto de deslocamento de nível nulo para a borda da plataforma continental?* Esse valor ( $W_n$ ) pode ser calculado substituindo  $x_n = L$  na eq. (III.100) acima e explicitando  $W$ . O resultado é:

$$W_n = |R_2| \left[ \ln \left( 0.25(\gamma e^{-\alpha L} + \delta e^{\beta L}) + 0.25(\gamma e^{\alpha L} + \delta e^{-\beta L}) e^{\frac{2L}{|R_2|}} \right) \right] \quad (\text{III. 101})$$

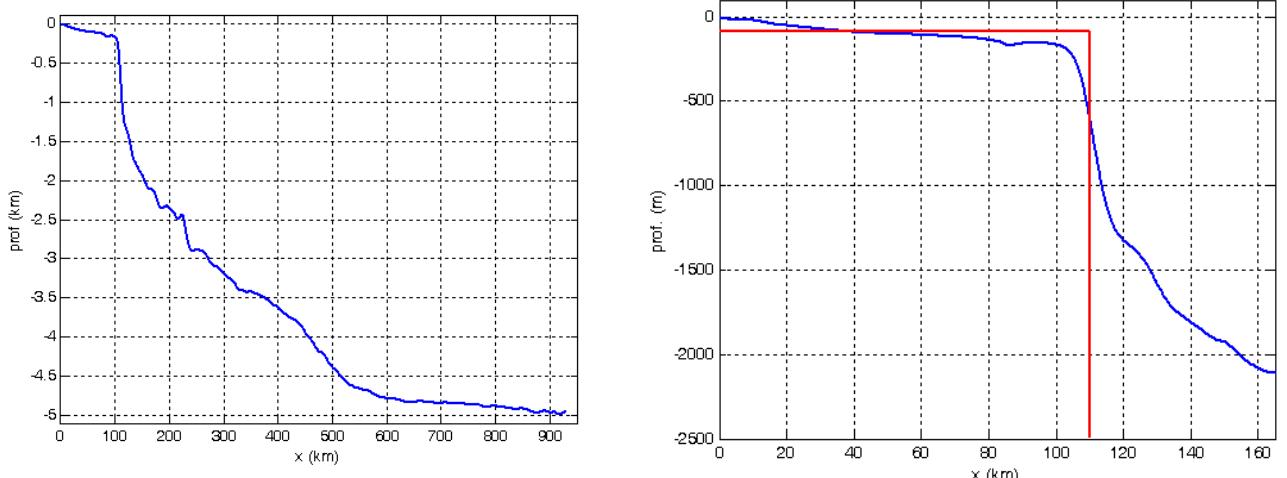
Para o caso citado, por exemplo,  $W_n = 344.8 \text{ km}$ , ou seja, se a pista de vento tiver largura de  $344.8 \text{ km}$  o deslocamento do nível será zero na borda da plataforma continental. Qualquer outro valor de  $W$  afastaria o ponto de deslocamento nulo da borda da plataforma. Porém, se a largura da pista não tiver um valor muito diferente de  $W_n$ , é razoável considerar que  $\eta(L, t) \approx 0$ . Conforme visto anteriormente, mesmo que a largura da pista seja bem maior que  $W_n$ , o impacto disso na MM seria da ordem de 10% para os parâmetros usados no exemplo. Fisicamente, essa hipótese equivale a desconsiderar a variação de nível na borda da plataforma causada pelo oceano adjacente. Com esse expediente a plataforma continental fica “desconectada” do oceano e o problema pode ser equacionado na plataforma de modo *independente*. [ OBS.: a desconexão no nível não é acompanhada pela vazão  $Q$  que *não* se anula na borda da plataforma pois é necessário que haja troca de água entre a plaraforma e o oceano para que a MM exista. Por esse motivo a palavra “desconectada” foi usada entre aspas ].

A figura (III.25) mostra a geometria do problema da plataforma continental “desconectada” com o vento atuando diretamente sobre a mesma.



**Figura III.25** – Geometria do problema para uma plataforma “desconectada”.

A representatividade dessa geometria aproximada pode ser pré-avaliada analisando um corte batimétrico da plataforma continental em Mostardas, RS, na região central da costa gaúcha. A figura (III.26) mostra detalhes do corte batimétrico e do ajuste do degrau, no qual  $h_o$  foi tomado como a profundidade média até a quebra da plataforma, a qual estabelece a largura  $L$ . Uma análise ampla da forma da plataforma continental S/SE brasileira será feita no Capítulo IV.



**Figura III.26** – Ilustração da aproximação da plataforma continental no Norte do Rio Grande do Sul por um “degrau”.

O problema postulado acima pode ser resolvido à luz das equações desenvolvidas.

O primeiro fato a observar é que o método de solução, através da eq. para  $Q$ , usado até agora, não pode ser utilizado nesse caso, pois a condição de contorno na borda da plataforma continental agora é dada em função do deslocamento do nível (que deve ser nulo), e não em termos da vazão perpendicular à costa (que é desconhecida a priori).

A alternativa é usar a equação complementar para  $\eta$  [eq. (III.47)]. Mantendo o foco na parte não-transiente da solução e, a exemplo do que já foi feito, admitindo soluções do tipo:  $Q = Q(x)$  e  $\eta(x, t) = X(x).t$  e  $J(x, t) = j(x).t$ , as equações governantes são reescritas abaixo :

- Equações “primitivas”:

$$j(x) = \frac{C_o^2}{f} \frac{dX(x)}{dx} \quad (\text{III. 102})$$

$$j(x) = \frac{\tau_y^W}{\rho} - fQ(x) \quad (\text{III. 103})$$

$$X(x) = -\frac{dQ(x)}{dx} \quad (\text{III. 104})$$

- Equação complementar para o deslocamento da superfície apenas:

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} - \frac{1}{R^2}X(x) = 0 \quad (\text{III. 105})$$

Na borda da plataforma a condição de nível nulo deve ser atendida.

Na costa, a condição de impermeabilidade [  $Q(0) = 0$  ] precisa ser escrita em termos da variável  $X$ . Essa passagem é realizada da seguinte forma. A eq.(III.103) para a costa garante que :

$$j(0) = \frac{\tau_y^W}{\rho} \quad (\text{III. 106})$$

Usando a eq.(III.(102) na equação acima, chega-se à condição desejada:

$$\frac{dX(0)}{dx} = \frac{\tau_y^W f}{\rho C_o^2} \quad (\text{III. 107})$$

### III.3.3.1 - Solução

Novamente considerando o sistema de coordenadas mostrado na figura III.24 (com  $x > 0$  no mar), a solução geral da eq.(III.105), válida para o hem. Sul, que atende à condição  $X(L) = 0$  é :

$$X(x) = D \sinh[(L - x)/|R|] \quad (\text{III. 108})$$

A constante  $D$  é obtida aplicando-se a condição de contorno dada pela eq.(III.107), que no hem. Sul, fica:

$$\frac{dX(0)}{dx} = -\frac{\tau_y^W |f|}{\rho C_o^2} = -\frac{\tau_y^W}{\rho C_o |R|} \quad (\text{III. 109})$$

Operando, tem-se:

$$D \frac{\cosh(L/|R|)}{|R|} = \frac{\tau_y^W}{\rho C_o |R|}$$

onde,

$$D = \frac{\tau_y^W}{\rho C_o} [\cosh(L/|R|)]^{-1} \quad (\text{III. 110})$$

A solução não-transiente para  $\eta(x, t)$ , portanto, é:

$$\eta(x, t) = \frac{\tau_y^W}{\rho C_o} \frac{\sinh[(L - x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} t = -\frac{Q_E}{|R|} \frac{\sinh[(L - x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} t \quad (\text{III. 111})$$

A vazão em  $y$  é obtida da eq.(III.102):

$$J(x, t) = \frac{\tau_y^W}{\rho} \frac{\cosh[(L - x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} t = -Q_E \frac{\cosh[(L - x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} |f| t \quad (\text{III. 112})$$

A vazão em  $x$  pode ser determinada da eq.(III.104):

$$-\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{Q_E}{|R|} \frac{\sinh[(L - x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} \quad (\text{III. 113})$$

A integração da eq. (III.113) acima atendendo a condição de impermeabilidade na costa fornece a expressão para a vazão  $Q$ :

$$Q(x) = Q_E \left( 1 - \frac{\cosh[(L - x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} \right) \quad (\text{III. 114})$$

Comparando essa solução com a solução clássica, verifica-se que a solução para a plataforma “desconectada” tende para a solução clássica a medida que a largura aumenta, i.e., conforme a relação  $L/|R|$  cresce, uma vez que :

$$\frac{\sinh[(L - x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} \quad \text{e} \quad \frac{\cosh[(L - x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} \quad \text{tendem a} \quad \rightarrow \quad e^{-\frac{x}{|R|}} , \quad \text{quando } L/|R| \gg 1$$

Obviamente, essa solução só cobre a plataforma continental.

## Maré Meteorológica e Corrente Costeira

A MM é obtida da equação acima calculando  $\eta$  em  $x = 0$ .

$$\eta_o(t) = \eta(0, t) = \frac{\tau_y^W}{\rho C_o} \tanh[L/|R|] \cdot t \quad (\text{III. 115})$$

A velocidade da corrente costeira é obtida de forma análoga usando a eq. (III.112) em  $x=0$  :

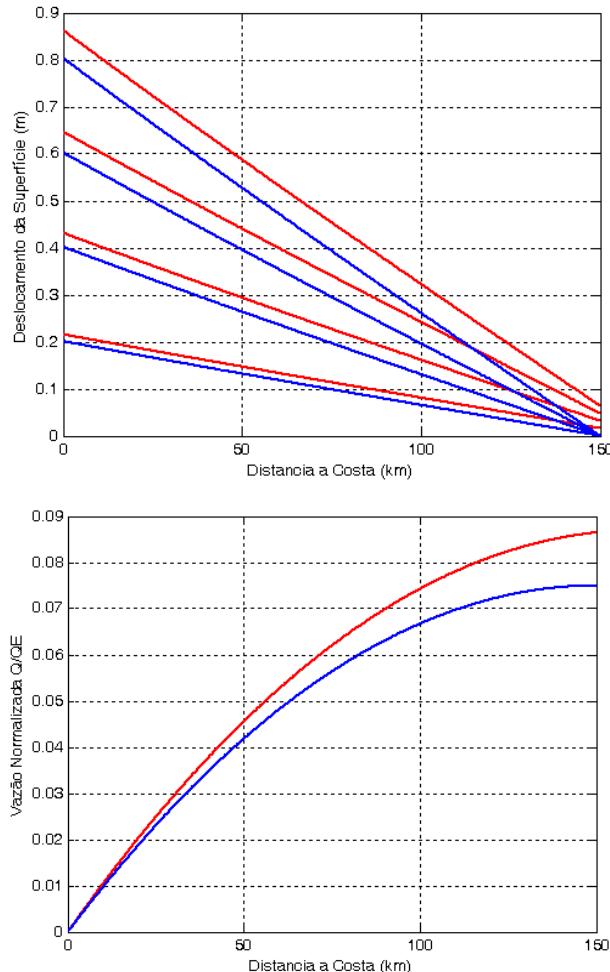
$$V_o(t) = V(0, t) = \frac{\tau_y^W}{\rho h_o} \cdot t \quad (\text{III. 116})$$

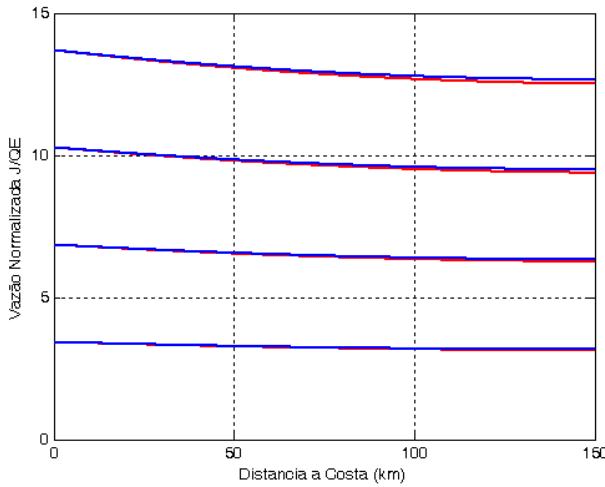
Observar que a MM e a corrente costeira guardam uma relação entre si dada por:

$$V_o(t) = \frac{g}{C_o \tanh[L/|R|]} \eta_o(t) \quad (\text{III. 117})$$

### III.3.3.2 - Ilustração e Comparação de Resultados

A solução da plataforma “desconectada” é agora ilustrada na figura (III.27) para a mesma situação do exemplo da seção III.3.2.3.2. A título de comparação, a solução “completa” do problema é também apresentada na figura.





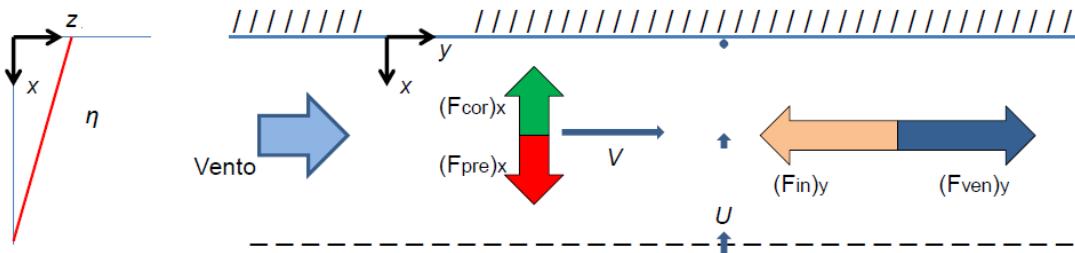
**Figura III.27** - Soluções para plataforma “desconectada” (azul) e para o problema “completo” (vermelho) apenas para o trecho da plataforma. Painel superior: deslocamento do nível; painel central: Vazão  $Q$ ; painel inferior: Vazão  $J$ . Vazões estão normalizadas por  $Q_E$ . Dados para a plataforma “desconectada”:  $h_1=90m$ ,  $L=150km$ , Vento=50km/h. Dados para o problema “completo”:  $h_1=90$ ,  $h_2=4000m$ ;  $L=150km$ , Vento=50km/h; Largura da Pista de Vento  $W=1000km$ .

As figuras acima ilustram graficamente o nível de aproximação envolvido na solução da plataforma “desconectada” para o exemplo que tem sido trabalhado. O resultado para a vazão  $Q$  (painel central) mostra diferença entre as soluções. Isso se deve ao fato de que a fixação do deslocamento do nível em zero na borda da plataforma continental “congela” a vazão de água que penetra na plataforma num valor dado por:

$$Q(L) = Q_E \left( 1 - \frac{1}{\cosh(L/|R|)} \right) \quad (\text{III.118})$$

que, no presente exemplo, vale 7.5%  $Q_E$ . Essa vazão na solução “completa” *não* é constante e depende da profundidade do oceano adjacente e da largura da pista de vento. A redução no volume de água que adentra a plataforma continental reflete-se no nível como se pode verificar no painel superior da figura. Próximo à costa, a vazão  $J$  (painel inferior) não é alterada na solução “desconectada”, havendo apenas uma pequena diferença em relação à solução “completa” na vizinhança da borda da plataforma. As soluções ficam idênticas, no exemplo em questão, se a largura da pista no problema “completo” tiver o valor de 344.8 km.

A figura (III.28) ilustra graficamente a dinâmica operante no caso de uma plataforma “desconectada” relativamente estreita, como no exemplo acima. Recuperando o que já foi feito para a solução clássica, a plataforma continental, nesse caso, contém toda a Região III na qual a força do Vento, na ausência de atrito, acelera continuamente a água na direção paralela à costa. A força de Coriolis associada à corrente  $U$  é pequena demais para ter participação relevante no balanço de forças.



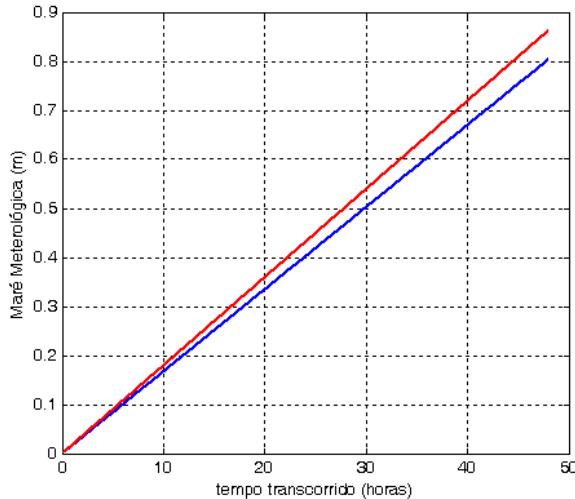
**Figura III.28** – Balanço de forças (esquemático) operante numa plataforma “desconectada”

O balanço de forças na direção perpendicular à costa é o mesmo balanço geostrófico do caso clássico, no qual a força de pressão oriunda da inclinação da superfície da água é equilibrada pela força de Coriolis associada à corrente costeira.

Quanto ao balanço de massa, é importante observar que a vazão de água que adentra a PC pela sua borda externa, mesmo sendo uma pequena fração do Transporte de Ekman, é a *única* responsável pela variação de nível prevista. Essa importante

questão realça o fato de que a plataforma continental é “desconectada” do oceano adjacente apenas no que se refere ao nível na borda, pois é o oceano que fornece a vazão de água que vai alterar o nível d’água na plataforma. A corrente costeira que se desenvolve, por sua vez, transporta água “sugada” da fronteira de “montante” para a fronteira de “jusante”, como na solução clássica.

A figura (III.29) compara a MM desse caso [eq.(III.115)] com a MM obtida da solução “completa”.



**Figura III.29** – Evolução temporal da MM para plataforma “desconectada” (azul) e solução “completa” (vermelho). Dados similares aos da figura (III.26).

O erro nesse caso é da ordem de 10%. A aproximação da plataforma continental “desconectada” pode ser uma opção interessante quando não se tiver informação sobre a largura da pista do vento ou quando se estiver disposto a desprezar a contribuição do oceano adjacente na MM. Somando-se a isso o fato de que a largura da plataforma continental na costa brasileira vai sempre se caracterizar como “estreita” (em relação ao raio de deformação), a aproximação da plataforma “desconectada” se apresenta como a mais atrativa para eventuais aplicações práticas.

### III.3.4 - Extensão da Solução Local para Vento com Variação Temporal

Um passo para aproximar mais um pouco a presente teoria de situações realistas será dado nessa seção considerando o caso de um vento paralelo à costa, uniforme espacialmente, mas sujeito a variações temporais.

#### III.3.4.1 - Variação Temporal em Patamares

Como primeiro caso, vamos considerar o caso em que o vento varia em patamares (“*step wise*”). Um caso particular desse tópico, qual seja, de um vento constante no tempo que *cessa* abruptamente após um certo período de tempo  $T$ , é tratado em Csanady (1982), pg 47.

Focando na parte não transitória da solução, Csanady (1982) menciona que, com a cessação do vento, a solução “*simplesmente para de se desenvolver em t = T, mas o campo de pressão (deslocamento da superfície) e a corrente costeira em equilíbrio geostrófico com ele, se mantém*”. Para o caso do problema “clássico”, por exemplo, Csanady (1982) indica como solução para  $t > T$  o seguinte:

$$\eta(x) = -\frac{Q_E}{|R|} e^{-\frac{x}{|R|}} \cdot T \quad (\text{III.119})$$

$$J(x) = -Q_E |f| e^{-\frac{x}{|R|}} \cdot T \quad (\text{III.120})$$

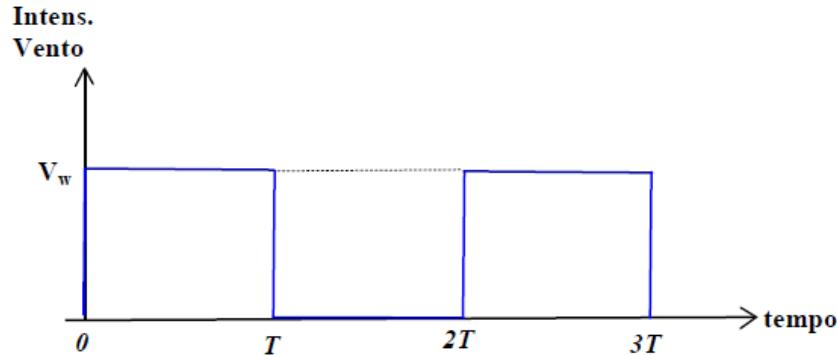
$$Q = 0 \quad (\text{III.121})$$

Com efeito, a solução mostra que a vazão  $Q$  cai imediatamente a zero com a cessação do vento. Sem aporte de água, o nível para de subir e a vazão costeira para de crescer, e ambos, na ausência de atrito, mantém o valor atingido em  $t = T$ . Na verdade, na ausência de atrito, o mesmo tipo de resposta aconteceria para qualquer situação geométrica. Esse comportamento é típico de escoamentos puramente geostróficos.

Imaginemos agora uma situação na qual o vento tenha a seguinte variação temporal:

$$\text{Vento} = \begin{cases} V_w, & 0 < t < T \\ 0, & T < t < 2T \\ V_w, & 2T < t < 3T \end{cases} \quad (\text{III. 122a, b, c})$$

Graficamente, teríamos:



**Figura III.30** – Representação gráfica da variação do vento dado pela eq.(III.122).

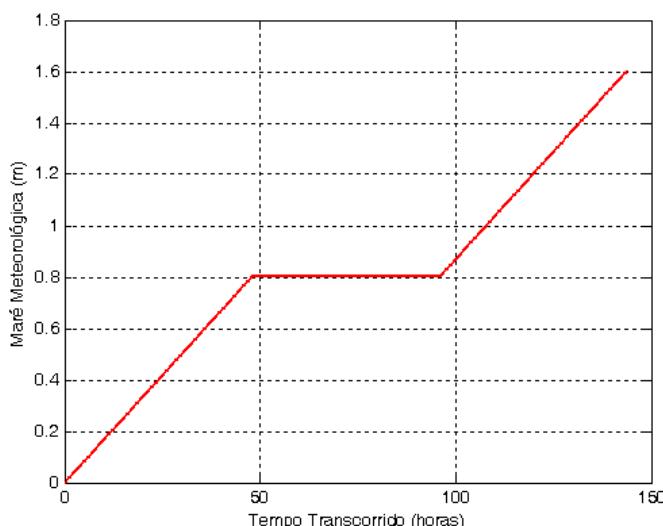
Tomando o caso da plataforma “desconectada”, a MM correspondente à situação acima teria o seguinte comportamento:

$$\eta_o(t) = -\frac{Q_E}{|R|} \tanh\left(\frac{L}{|R|}\right) \cdot t, \quad 0 < t < T \quad (\text{III. 123a})$$

$$\eta_o(T) = -\frac{Q_E}{|R|} \tanh\left(\frac{L}{|R|}\right) \cdot T, \quad T < t < 2T \quad (\text{III. 123b})$$

$$\eta_o(t) = \eta_o(T) + \frac{Q_E}{|R|} \tanh\left(\frac{L}{|R|}\right) \cdot (t - T), \quad 2T < t < 3T \quad (\text{III. 123c})$$

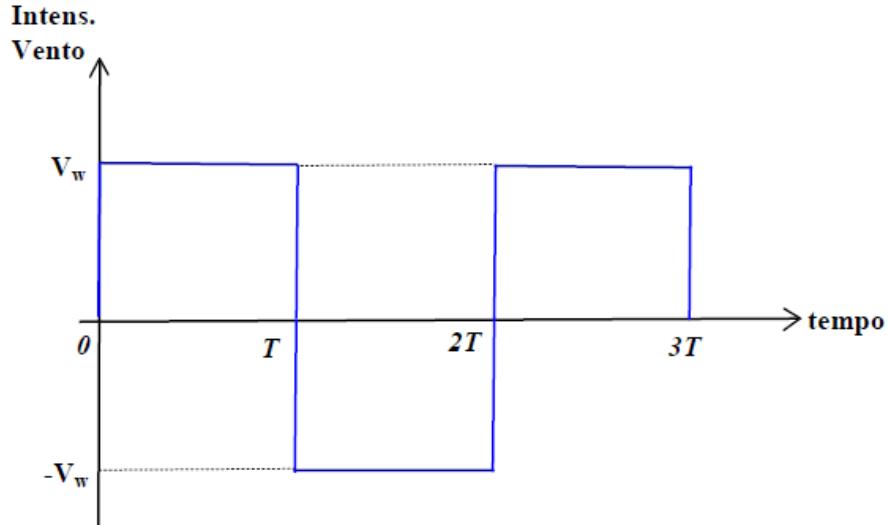
A figura (III.31) ilustra essa solução para a situação do exemplo tratado na sessão anterior, considerando  $T = 48 h$ .



**Figura III.31** – Evolução temporal da MM para o caso em estudo

Durante o primeiro ciclo, vê-se que o nível sobe enquanto o vento estiver soprando. No ciclo sem vento, o nível se mantém. Na retomada do vento, no terceiro ciclo, o nível continua sua escalada.

Para o caso em que haja uma inversão cíclica de sentido do vento (mantendo a mesma intensidade) no segundo ciclo, conforme mostrado na figura abaixo,



**Figura III.32** – Similar a figura III.30 mas com inversão de sentido no segundo ciclo.

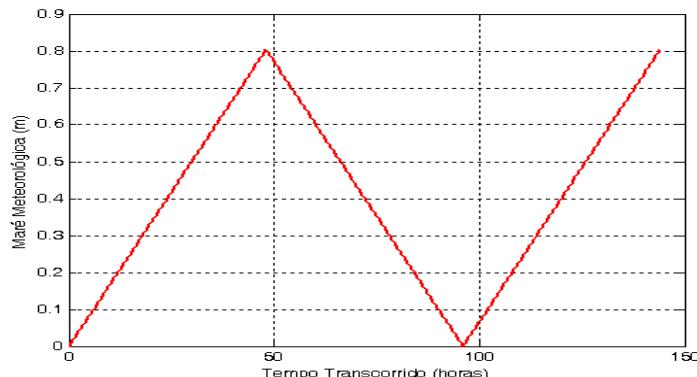
a solução seria dada por:

$$\eta_o(t) = -\frac{Q_E}{|R|} \tanh\left(\frac{L}{|R|}\right) \cdot t, \quad 0 < t < T \quad (\text{III. 124a})$$

$$\eta_o(t) = \eta_o(T) + \frac{Q_E}{|R|} \tanh\left(\frac{L}{|R|}\right) \cdot (t - T), \quad T < t < 2T \quad (\text{III. 124b})$$

$$\eta_o(t) = \eta_o(2T) - \frac{Q_E}{|R|} \tanh\left(\frac{L}{|R|}\right) \cdot (t - 2T), \quad 2T < t < 3T \quad (\text{III. 124c})$$

A figura (III.33) ilustra graficamente a solução para essa situação ainda considerando  $T = 48 \text{ h}$ .



**Figura III.33** – Evolução temporal da MM para o caso em estudo

O que se percebe é que a subida do nível ocorrida no primeiro ciclo é exatamente revertida no segundo e assim por diante.

### III.3.4.2 Vento com Variação Temporal qualquer

No caso de um vento paralelo à costa ainda espacialmente uniforme porém não permanente, i.e.,  $\tau_y^W = \tau_y^W(t)$ , o transporte de Ekman na direção da costa passa a ter variação temporal e, com isso, a velocidade  $U$ , que até agora era permanente, passa a ser função do tempo, ou seja,  $U = U(t)$ . O avanço a partir de agora requer que seja feita uma aproximação na equação de momentum na direção perpendicular à costa, cuja versão inviscida é reescrita abaixo:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - fV = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (\text{III.125})$$

A aproximação é discutida a seguir.

#### III.3.4.2.1 Aproximação Geostrófica para a Corrente Paralela à Costa

A aproximação consiste em admitir que a corrente paralela à costa ( $V$ ) *mantém-se aproximadamente geostrófica* mesmo no caso de um vento não permanente. Matematicamente, isso equivale a desprezar o termo  $\frac{\partial U}{\partial t}$  na equação acima, a qual simplificar-se-ia para um balanço puramente geostrófico de forças.

A justificativa para tal aproximação é obtida de maneira formal a partir de uma análise de ordem de grandeza dos termos envolvidos. Inspirado em Gill(1982) pag. 399, o primeiro passo consiste em atribuir escalas (ou ordens de grandeza) para as variáveis relevantes. Observando que existe uma diferença de escala entre as direções paralela ( $y$ ) e normal a costa ( $x$ ), as escalas para as variáveis fundamentais ( $x, y, t$ ) são estabelecidas como:

- Distâncias na dir.  $x$  escalam segundo o raio de deformação :  $x \rightarrow C_o/f$
- Distâncias na dir.  $y$  escalam segundo uma distância arbitrária  $L_y$  :  $y \rightarrow L_y$
- A escala de tempo é controlada pela distância  $L_y$  e pela velocidade  $C_o$ , de forma que :  $t \rightarrow L_y/C_o$

As escalas para as variáveis derivadas ( $U, V, \eta$ ) são estabelecidas a partir da solução do problema clássico:

- velocidade  $U$  escala segundo :  $U \rightarrow \tau/\rho h_o f$
- velocidade  $V$  escala segundo :  $V \rightarrow \tau L_y/\rho h_o C_o$
- deslocamento da superfície escala segundo :  $\eta \rightarrow \tau L_y/\rho C_o^2$

Com as escalas estabelecidas, é possível estimar o tamanho relativo de cada termo na eq. (III.125). O resultado está sumarizado na tabela III.3 abaixo:

**Tabela III.3 – Análise da ordem de grandeza dos termos na eq.(III.125)**

Termo :	$\frac{\partial U}{\partial t}$	$fV$	$g \frac{\partial \eta}{\partial x}$
Ordem de Grandeza :	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
	$\frac{\tau C_o}{\rho h_o f L_y}$	$\frac{f \tau L_y}{\rho h_o C_o}$	$\frac{\tau f L_y}{\rho h_o C_o}$
Tamanho Relativo :	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
	$\left(\frac{R}{L_y}\right)^2$	1	1

Essa análise deixa evidente que o segundo e o terceiro termos da eq. (III.125) têm a mesma ordem de grandeza enquanto o primeiro tem sua magnitude relativa determinada em função do quadrado da relação entre as escalas de comprimento nas

direções normal ( $R$ ) e longitudinal ( $L_y$ ) à costa. Ocorre que o fenômeno em estudo se caracteriza por ter  $L_y \gg R$  o que torna a ordem de grandeza do primeiro termo da equação muito menor do que a dos outros. A conclusão dessa análise, portanto, é que a participação do termo  $\frac{\partial U}{\partial t}$  na eq. (III.125) é efetivamente *desprezível*. [Observar que, no problema espacialmente unidimensional  $L_y = \infty$ ].

Com essa simplificação, as equações governantes ficam:

$$fJ = -C_o^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (\text{III. 126})$$

$$\frac{\partial J}{\partial t} + fQ = \frac{\tau_y^w}{\rho} \quad (\text{III. 127})$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \quad (\text{III. 128})$$

### III.3.4.2.2 Equacionamento e Solução

Para obter a solução de casos com vento com variação temporal qualquer, o primeiro passo é fazer :  $\frac{\partial}{\partial x}$  [eq.(III.120)], o que resulta em:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial J}{\partial x} \right) + f \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = 0 \quad (\text{III. 129})$$

A seguir, usando a eq.(III.128) para representar o segundo termo da equação acima, a eq.(III.129) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial J(x, t)}{\partial x} - f\eta(x, t) \right) = 0 \quad (\text{III. 130})$$

Tomando  $\frac{\partial}{\partial x}$  [eq. (III.126)], o primeiro termo da equação acima pode ser escrito como:

$$\frac{\partial J}{\partial x} = \frac{C_o^2}{f} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (\text{III. 131})$$

Substituindo a eq. (III.131) em (III.130), tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 \eta(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{R^2} \eta(x, t) \right) = 0 \quad (\text{III. 132})$$

Admitindo que a solução para  $\eta$  possa ser expressa por separação de variáveis tal que  $\eta(x, t) = A(t).X(x)$ , a equação acima fica:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ A(t) \left( \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} - \frac{1}{R^2} X(x) \right) \right] = 0 \quad (\text{III. 133})$$

Como o termo entre parênteses na equação acima depende apenas de  $x$ , tem-se:

$$\left( \frac{d^2 X(x)}{dx^2} - \frac{1}{R^2} X(x) \right) \frac{\partial}{\partial t} [A(t)] = 0 \quad (\text{III. 134})$$

A equação diferencial acima é satisfeita para qualquer função  $A(t)$  se:

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} - \frac{1}{R^2} X(x) = 0 \quad (\text{III. 135})$$

Analizando o resultado constata-se que a equação que governa a estrutura espacial de  $\eta$  é exatamente a mesma que se aplica ao problema com vento permanente e, assim, as soluções já obtidas para vento permanente podem ser usadas aqui também. Considerando o caso da plataforma “desconectada” e usando o sistema de coordenadas habitual, as seguintes condições de contorno têm de ser atendidas:

- Na borda da plataforma ( $x = L$ ):

$$\eta(L, t) = 0 \quad \rightarrow \quad A(t).X(L) = 0$$

Conforme visto na seção (III.3.3.1), a solução da eq.(III.135) que atende à condição  $X(L) = 0$ , no hem. Sul é:

$$X(x) = D \sinh[(L - x)/|R|] \quad (\text{III. 108}) - \text{bis}$$

- Na costa, a eq.(III.127) fornece :

$$\frac{\partial J(0, t)}{\partial t} + fQ(0, t) = -\frac{\tau_y^W(t)}{\rho} \quad (\text{III. 136})$$

A condição de impermeabilidade [ $Q(0, t) = 0$ ] anula o segundo termo da equação que se simplifica para:

$$\frac{\partial J(0, t)}{\partial t} = -\frac{\tau_y^W(t)}{\rho} \quad (\text{III. 137})$$

Essa equação permite determinar a constante  $D$  e a função  $A(t)$ . De fato, usando a eq. geostrófica (III.126), considerando o hem. Sul, tem-se:

$$J(0, t) = -\frac{C_o^2}{|f|} \frac{\partial \eta(0, t)}{\partial x} = -A(t) \frac{C_o^2}{|f|} \frac{\partial X(0)}{\partial x} \quad (\text{III. 138})$$

Substituindo a eq.(III.138) em (III.137), tem-se:

$$\frac{\partial X(0)}{\partial x} \cdot \frac{\partial A(t)}{\partial t} = \frac{|f|}{\rho C_o^2} \cdot \tau_y^W(t) \quad (\text{III. 139})$$

Integrando no tempo chega-se a:

$$\frac{\partial X(0)}{\partial x} A(t) = \frac{|f|}{\rho C_o^2} \int \tau_y^W(t) dt \quad (\text{III. 140})$$

Para que o lado esquerdo da equação acima se iguale ao direito é necessário que:

$$A(t) = \int \tau_y^W(t) dt$$

e

$$\frac{\partial X(0)}{\partial x} = \frac{|f|}{\rho C_o^2}$$

A constante  $D$  agora vale:

$$D = \frac{1}{\rho C_o} [\cosh(L/|R|)]^{-1} \quad (\text{III. 141})$$

Assim, a solução para o deslocamento da superfície é dada por:

$$\eta(x, t) = \frac{1}{\rho C_o} \frac{\sinh[(L - x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} \int \tau_y^W(t) dt \quad (\text{III. 142})$$

Usando a eq.(III.133), a solução para  $J$  é:

$$J(x, t) = \frac{1}{\rho} \frac{\cosh[(L - x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} \int \tau_y^W(t) dt \quad (\text{III. 143})$$

A vazão  $Q$  é obtida da eq.(III.128):

$$Q = \frac{\tau_y^W(t)}{\rho f} - \frac{1}{f} \frac{\partial J}{\partial t}$$

No hem. Sul, a solução é:

$$Q(x, t) = -\frac{\tau_y^W(t)}{\rho |f|} \left( 1 - \frac{\cosh[(L - x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} \right) \quad (\text{III. 144})$$

Observa-se que se o vento for constante no tempo a solução da seção III.3.3.1 é recuperada. Adicionalmente, observa-se que o problema clássico é um caso especial da solução acima, no qual, o vento é permanente e a plataforma é “larga”, isto é,  $L \gg |R|$ .

### III.3.4.2.3 Tensão de Vento com Variação Temporal Senoidal

Supondo uma *tensão* de vento com variação senoidal de amplitude  $\tau_o$  e frequência  $\omega$  dada por:

$$\tau_y^W(t) = \tau_o \sin(\omega t) \quad (\text{III. 145})$$

A função temporal  $A(t)$ , admitindo que o problema parta do repouso, é dada por:

$$A(t) = \tau_o \int_0^t \sin(\omega t') dt' = \frac{\tau_o}{\omega} [1 - \cos(\omega t)] \quad (\text{III. 146})$$

A solução no sistema de coordenadas habitual para o hem. Sul fica:

$$\eta(x, t) = \frac{\tau_o}{\rho C_o \omega} \frac{\sinh[(L - x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} [1 - \cos(\omega t)] \quad (\text{III. 147})$$

$$J(x, t) = \frac{\tau_o}{\rho \omega} \frac{\cosh[(L - x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} [1 - \cos(\omega t)] \quad (\text{III. 148})$$

$$Q(x, t) = \frac{\tau_o}{\rho f \omega} \left( 1 - \frac{\cosh[(L - x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} \right) \sin(\omega t) \quad (\text{III. 149})$$

Observa-se que a vazão de água na direção da costa ( $Q$ ) está em fase com a tensão do vento enquanto o deslocamento da superfície e a vazão paralela a costa estão defasadas de  $90^\circ$ .

### Maré Meteorológica e Corrente Costeira

O nível (MM) e a corrente costeira, nesse caso, são dados por:

$$\eta_o(t) = \frac{\tau_o}{\rho C_o \omega} \tanh[L/|R|] \cdot [1 - \cos(\omega t)] \quad (\text{III. 150})$$

$$V_o(t) = \frac{\tau_o}{\rho h_o \omega} [1 - \cos(\omega t)] \quad (\text{III. 151})$$

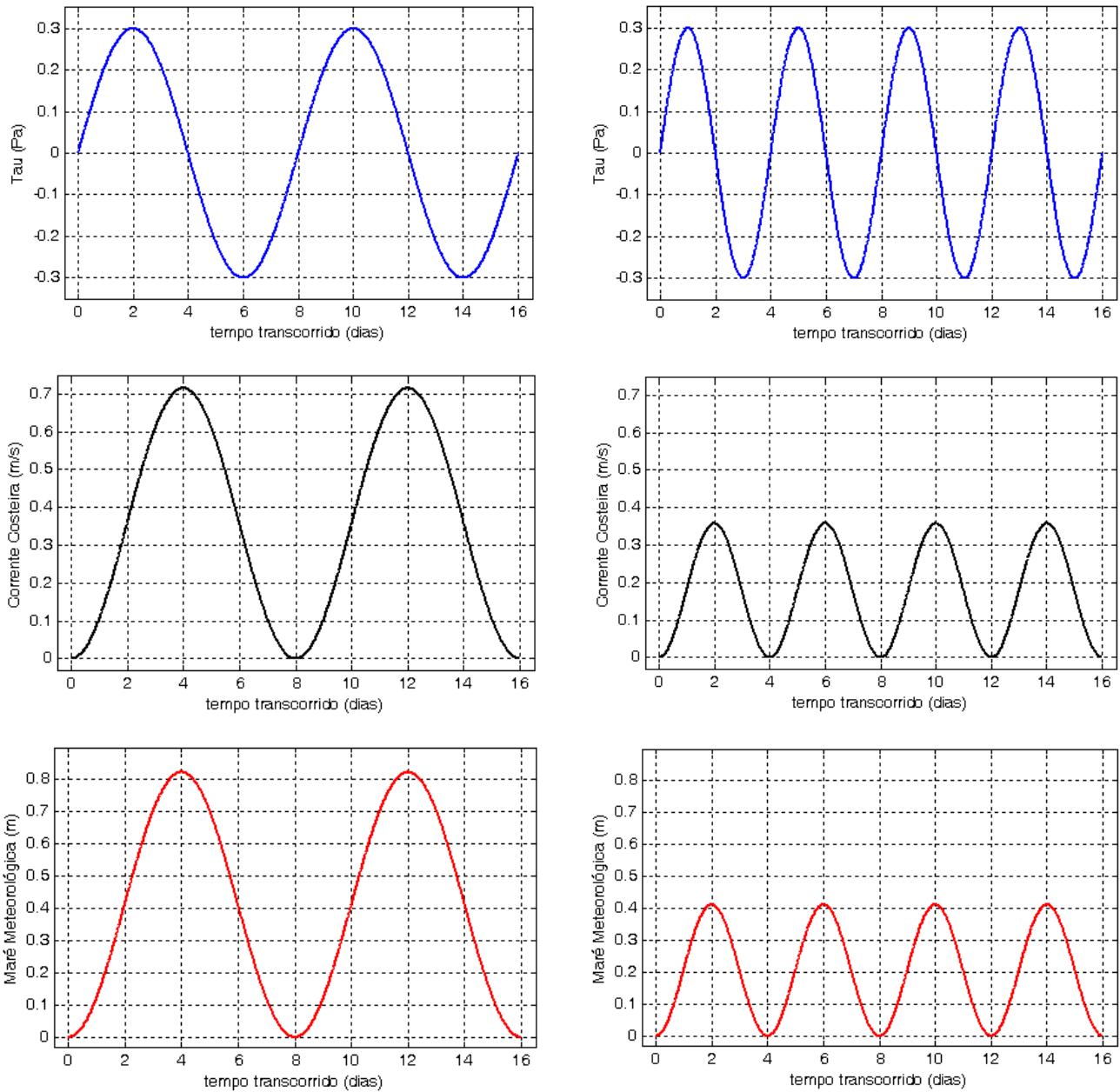
Observar que a MM e a corrente costeira guardam a mesma relação entre si encontrada anteriormente, dada por:

$$V_o(t) = \frac{g}{C_o \tanh[L/|R|]} \eta_o(t) \quad (\text{III. 152})$$

Os resultados são ilustrados graficamente no exemplo a seguir.

### III.3.4.2.3.1 Exemplo de Aplicação

A figura (III.34) abaixo ilustra o resultado para o caso de uma *tensão* de Vento senoidal de amplitude  $\tau_o = 0.3 \text{ Pa}$  com frequências:  $\omega = 0.0325 \text{ cpd}$  (periodicidade de 8 dias) e  $\omega = 0.065 \text{ cpd}$  (periodicidade de 4 dias). O sentido da tensão é tal que valores positivos correspondem a uma MM positiva.



**Figura III.34** – Solução para uma PC desconectada com  $L = 150 \text{ km}$ ,  $h_o = 90 \text{ m}$  e  $lat = 33^\circ\text{S}$ , com tensão de vento senoidal de amplitude  $0.3 \text{ Pa}$  e períodos: 8 dias (coluna esquerda) e 4 dias (coluna direita). Painéis superiores: tensão do vento, Painéis centrais: corrente costeira na costa; Painéis inferiores: Maré Meteorológica.

Vê-se que o nível d'água sobe enquanto o vento soprar no sentido positivo só *começando a descer quando o sentido do vento se inverte*. Após completar um ciclo o nível retorna ao valor inicial. A corrente costeira ( $V_o$ ) acompanha o nível sendo acelerada pelo vento enquanto este soprar no sentido positivo. Quando o vento inverte de sentido a corrente é

desacelerada retornando ao valor inicial após a conclusão do ciclo do vento. É curioso observar que nessa situação o nível e a corrente costeira *nunca ficam negativos*. Como esperado, os resultados mostram também que quanto mais longo o período da oscilação da tensão do vento, maior a MM resultante.

Observa-se, finalmente, que uma condição de tensão de vento com variação senoidal *não* advém de uma variação senoidal da velocidade do vento em função da relação quadrática entre a primeira e a segunda.

### III.3.5 Efeito do Atrito da Corrente com o Fundo no Problema Local

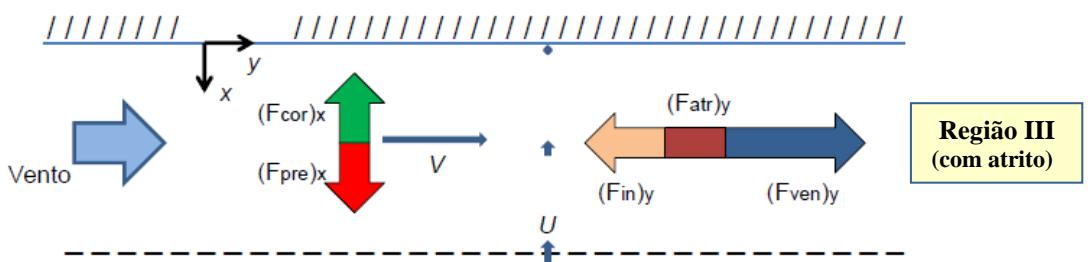
Todas as soluções obtidas até agora *excluíram* o efeito do atrito das correntes com o fundo e por isso produziram MM's que podem evoluir sem limite se o vento se mantiver soprando. A inclusão do atrito no fenômeno certamente deverá mudar esse cenário, impondo um limite para o crescimento da MM. Essa seção contém uma análise sobre a participação do atrito na solução do problema *local* pois, como será mostrado adiante, isso é suficiente para o entendimento da questão.

É importante ressaltar que, mesmo numa situação idealizada, a inclusão do atrito nas equações torna inviável a obtenção de uma solução analítica para o problema. Para poder avançar, portanto, faz-se necessário trilhar um caminho alternativo baseado em *aproximações* das equações feitas à luz da física do problema. A presente abordagem foi inspirada no trabalho de Sandstrom (1980).

#### III.3.5.1 Caso de Vento Uniforme e Permanente

Iniciando pelo caso mais simples, analisaremos *qualitativamente* o que esperar da participação das forças de atrito da água com o fundo nas três regiões de escoamento identificadas na interpretação física da solução *clássica* feita na seção III.3.3.2 [ver figura (III.8)].

- Região I – Localizada “longe” da costa ( $x/R \gg 1$ ). Essa é a região onde o escoamento de Ekman se processa. Independentemente da profundidade da plataforma, o movimento da água ocorre na direção da costa (direção x) e, preferencialmente, pela parte superficial da coluna d'água. Correntes fracas no fundo sustentam a ideia de que o efeito do atrito no escoamento possa ser desprezado nessa região.
- Região II – Região intermediária onde o efeito da costa já começa a se manifestar. O balanço de forças de Ekman já não se verifica integralmente, o fluxo de água em direção a terra começa a diminuir, o nível começa a subir e começa a haver aceleração da água na direção paralela a costa (direção y). Com correntes na direção y começando a se intensificar, as forças de atrito nessa direção começam a se fazer sentir mas seu efeito ainda é pequeno. Nessas condições ainda é aceitável desprezar a participação do atrito no escoamento.
- Região III – Região vizinha à costa ( $x/R \ll 1$ ). Correntes na direção x não são significativas comparadas com as da direção y e o escoamento se processa quase que totalmente na direção y. Sem atrito, a força induzida pelo vento aceleraria a água ao longo da costa. Como a força de atrito com o fundo depende do quadrado da velocidade da corrente, esse é o trecho onde a participação do atrito deve se tornar importante. Recuperando o balanço de forças dominante nessa região indicado pela solução sem atrito [ver figura (III.8)], vê-se que na direção x o balanço é geostrófico enquanto que na direção y o balanço dá-se entre a inércia e a força do vento. Como a componente  $U$  é bem pequena nesse trecho, a força de atrito com o fundo deve estar associada predominantemente à componente  $V$ . Assim, numa análise simplificada, o papel preponderante do atrito seria o de alterar o balanço de força na direção y que passaria a ser entre a força do vento, a inércia e o atrito da corrente  $V$  com o fundo, conforme ilustrado na figura abaixo.



**Figura III.35** - Esquema do balanço de forças dominante próximo à costa, com a presença do atrito, no problema clássico

Portanto, é na região mais próxima da costa que o efeito do atrito deve se manifestar de forma mais intensa.

### III. 3.5.1.1 - Aproximação para a Região próximo à Costa

Segundo Sandstrom (1980), o balanço de forças mostrado na figura (III.35) deve também operar na região próximo à costa num caso mais geral e não apenas no caso da solução clássica. As equações que governam o escoamento nessa zona podem ser escritas aproximadamente como:

$$fV' \approx -g \frac{\partial \eta'}{\partial x} \quad (\text{III. 153})$$

$$\frac{\partial V'}{\partial t} \approx \frac{1}{\rho h_o} [\tau_y^W - \tau_y^B] \quad (\text{III. 154})$$

A partir desse ponto, as incógnitas da solução *com atrito* serão denotadas com um apóstrofo (') a fim de diferenciá-la da solução inviscida.

No caso bi-dimensional, a conservação da massa continua sendo dada, exatamente, pela eq.(III.43):

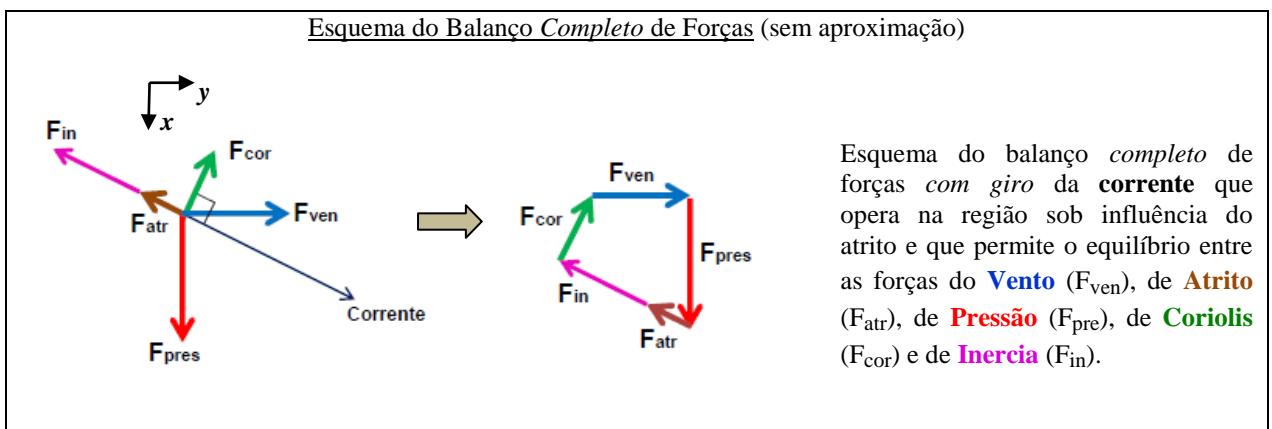
$$\frac{\partial \eta'}{\partial t} = -\frac{\partial Q'}{\partial x} \quad (\text{III. 43 - bis})$$

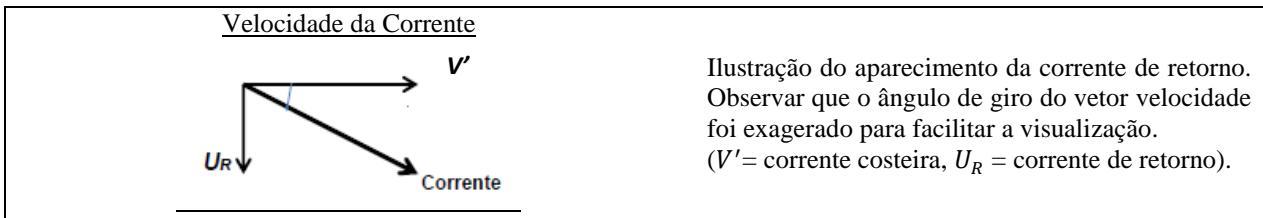
As aproximações embutidas nessas três equações requerem uma reflexão. Para efeito de raciocínio, vamos admitir uma situação indutora de MM positiva, i.e., vento soprando paralelamente à costa com a mesma à esquerda do vento no hem. Sul.

A força de atrito é uma força colinear e de sentido contrário à velocidade e, obviamente, vai atuar no sentido de *frear* a corrente o que causaria uma diminuição da força de Coriolis correspondente (que é proporcional a velocidade da corrente). O equilíbrio geostrófico dado por (III.153) requer que as forças de Coriolis e de pressão se contrabalancem, assim, se Coriolis diminuir, a força de pressão também teria de diminuir de modo a manter o balanço geostrófico. Ocorre que a força de pressão é controlada pelo nível d'água que, por sua vez, é controlado pelo afluxo de água à costa devido ao transporte de Ekman o qual não é afetado (diretamente) pelo atrito com o fundo uma vez que é um escoamento mais superficial na coluna d'água. Assim, a primeira vista, com a participação do atrito a força de Coriolis ficaria *menor* que a força de pressão e o escoamento deixaria de ser geostrófico, violando a aproximação dada ela eq. (III.153).

Ora, para que a força de pressão também diminua é preciso que a taxa de subida do nível d'água diminua. A equação da conservação da massa mostra que para que isso aconteça é necessário diminuir a vazão (total) de água vinda do mar. O que se percebe, portanto, é que o atrito *tem* que, de alguma maneira, criar um *escoamento de retorno* que mande a água trazida pelo transporte de Ekman de volta para o mar aberto. *Como isso é possível?*

Conforme explicado em Kundu (1990), pg 496, o efeito *completo* do atrito num escoamento afetado pela rotação da Terra envolve: (i) diminuição do módulo da corrente e (ii) rotação do vetor velocidade na direção da baixa pressão. Essa (pequena) rotação da corrente induz uma (pequena) componente de velocidade na direção *x* com sentido da costa para o mar ( corrente de retorno  $U_R$  ) a qual vai afetar o balanço de água na direção da costa [ $Q = (U_E - U_R)h_o$ ]. Esse mecanismo físico é ilustrado graficamente na figura (III.36)

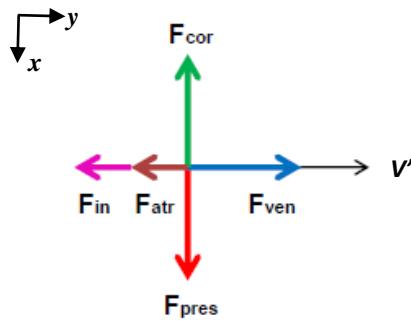




**Figura III.36** – Ilustração gráfica do balanço completo de forças (sem aproximações) com giro da corrente.

Pela eq.(III.43-bis), pode-se constatar que qualquer alteração da vazão líquida de água em direção à costa afeta imediatamente o crescimento do nível d'água que passaria a subir mais lentamente. Numa visão completa do fenômeno, portanto, o atrito afeta a conservação de momentum e a conservação de massa.

A aproximação implícita nas eqs.(III.153 e 154) despreza, na direção  $x$ , as componentes das forças de atrito e de inércia e, na direção  $y$ , a componente da força de Coriolis [ver figura (III.36)]. O esquema do balanço aproximado de forças é mostrado na figura (III.37).



**Figura III.37** – Ilustração do balanço de forças aproximado utilizado nas eqs.(III.153 e 154).

Fisicamente pode-se perceber que a aproximação expressa por (III.153 e 154) é razoável já que a componente da velocidade na direção  $y$  é muito maior que a componente na direção  $x$ , o que torna o ângulo de desvio da velocidade muito pequeno, porém mascara o surgimento da corrente de retorno necessário para que a aproximação se mantenha.

### III.3.5.1.2 - Condição Limite

Para um vento *constante no tempo*, a ação continuada do atrito com o fundo termina por levar o escoamento a uma situação de equilíbrio dinâmico. Nessa situação, tanto a *velocidade da corrente* quanto o *nível d'água* se *estabilizam*. A estabilização do nível só vai ocorrer quando a vazão correspondente à corrente de retorno ( $U_R$  no painel inferior da figura III.36) se igualar ao transporte de Ekman tornando a vazão total na direção  $x$  nula.

Na situação de equilíbrio, as equações governantes válidas para a vizinhança da costa assumiriam a forma:

$$fV_s \approx -g \frac{\partial \eta_s}{\partial x} \quad (\text{III. 155})$$

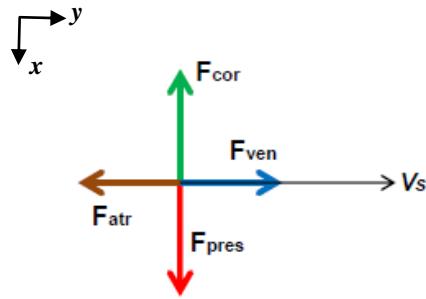
$$0 \approx \frac{1}{\rho h_o} [\tau_y^W - \tau_y^B] \quad (\text{III. 156})$$

$$Q = 0 \quad (\text{III. 157})$$

onde  $\eta_s$  e  $V_s$  representam o nível d'água e a velocidade da corrente na *situação de equilíbrio*. Na notação utilizada, portanto:

$$\eta_s \equiv (\eta'_o)_s \quad \text{e} \quad V_s \equiv (V'_o)_s \quad (\text{III. 158a, b})$$

O balanço de forças aproximado na condição limite está ilustrado na figura (III.38).



**Figura III.38** - Balanço de forças aproximado na condição limite

A eq. (III.156) mostra que, no equilíbrio, o efeito do vento é basicamente contrabalançado pelo efeito do atrito com o fundo. Esse balanço de forças impõe uma relação direta entre a velocidade da corrente e a velocidade do vento como mostrado (indiretamente) pela eq. (III.159) abaixo.

$$\tau_y^W = \tau_y^B \quad (\text{III. 159})$$

Num caso geral, a tensão de atrito da corrente com o fundo seria dada pela eq. (III.9):

$$\tau_y^B = \rho_w C_f V |V| \quad (\text{III. 9 - bis})$$

No caso de um vento permanente uniforme, não há inversão de corrente e a expressão simplifica-se para :

$$\tau_y^B = \rho_w C_f V^2 \quad (\text{III. 160})$$

Usando a eq.(III.7) para a tensão do vento, a condição de equilíbrio (III.159) fica:

$$\rho_a C_D V_w^2 = \rho_w C_f V_s^2$$

ou seja,

$$V_s = \sqrt{\frac{\tau_y^W}{\rho_w C_f}} = \sqrt{\frac{\rho_a C_D}{\rho_w C_f}} V_w \quad (\text{III. 161})$$

A quantificação da velocidade de equilíbrio da corrente envolve a quantificação dos coeficientes de atrito do vento com a superfície do mar e da corrente com o fundo,  $C_D$  e  $C_f$ , respectivamente. No que concerne o vento, existem parametrizações bem estabelecidas, como a mostrada na eq.(III.8). Para o atrito no fundo, a situação é mais complicada pois a determinação de  $C_f$  envolve o conhecimento, não apenas das características do material que compõe o fundo, mas também da existência de irregularidades geométricas no leito marinho (“bed forms”) que também afetam o escoamento. Na falta de valores precisos, resta recorrer a valores que expressem, pelo menos, a ordem de grandeza correta do coeficiente  $C_f$  à luz do conhecimento empírico das “coisas do mar”.

Sandstrom (1980) sugere como valor representativo para o coeficiente de atrito do vento  $C_D = 1.5 * 10^{-3}$ , o qual é compatível com o expresso pela eq.(III.8). Tomando  $\rho_{ar} \approx 1.25 \text{ kg/m}^3$  e  $\rho_{agua} \approx 1025 \text{ kg/m}^3$ , a relação entre massas específicas do ar e da água do mar tem ordem de grandeza  $\rho_{ar}/\rho_{agua} \approx 10^{-3}$ . Valores representativos para o coeficiente de atrito com o fundo encontrados na literatura [ver, por ex., Flather (2001)] tem ordem de grandeza  $C_f \approx 2 * 10^{-3}$ . Usando esses valores na eq.(III.161) obtém-se que  $\sqrt{\frac{\rho_{ar} C_D}{\rho_{agua} C_f}} \approx 0.03$  e, portanto, a relação entre a velocidade do vento e o valor máximo da corrente marinha esperada em águas rasas é:

$$V_s \approx 0.03 V_w \quad (\text{III. 162})$$

Conforme indicado em Sandstrom (1980), essa relação é compatível com a estimativa comumente aceita pela comunidade marinha de que a corrente máxima induzida pelo vento seja de cerca de 3% da velocidade do vento. A relação expressa por (III.162), portanto, pode ser considerada como indicativa da corrente costeira na situação de equilíbrio da MM.

Uma questão importante que se coloca é: *Quanto tempo deve transcorrer do início do vento até que o equilíbrio seja atingido?* Esse é o tema da próxima seção.

### III.3.5.1.3 - Determinação do Tempo até o Equilíbrio

Para determinar o tempo transcorrido até o equilíbrio é necessário determinar a evolução temporal da corrente costeira  $V'_o(t)$ . Na costa, o balanço de forças predominante na direção y é entre inércia, vento e atrito, conforme expresso pela eq.(III.154). Assim sendo, a corrente desejada sairá da solução dessa equação que é uma equação diferencial de primeira ordem não linear de coeficientes constantes (no caso de vento constante no tempo), reescrita da seguinte forma:

$$\frac{dV'_o(t)}{dt} = A - B[V'_o(t)]^2 \quad (\text{III. 163})$$

onde,

$$A = \frac{\tau_y^W}{\rho h_o} = \frac{\rho_{ar} C_D}{\rho_{agua} h_o} V_w^2 \quad (\text{III. 164})$$

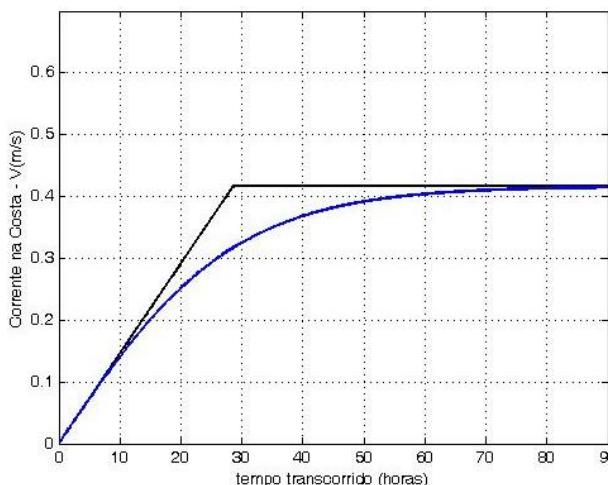
$$B = \frac{C_f}{h_o} \quad (\text{III. 165})$$

Observar que, nessa situação simplificada, o vento foi admitido como permanente, i.e.,  $V_w = \text{constante}$  e, por conseguinte,  $A = \text{constante}$ .

A solução da eq. (III.163), atendendo à condição de que o escoamento parte do repouso,  $V'_o(0) = 0$ , mostrada em detalhe no Apêndice 6, é dada por:

$$V'_o(t) = \sqrt{\frac{A}{B}} \tanh(\sqrt{AB} t) = V_s \tanh\left(\frac{V_s C_f}{h_o} t\right) \quad (\text{III. 166})$$

A solução para  $V'_o(t)$  é apresentada de forma gráfica, juntamente com a solução inviscida, na figura (III.39). Os valores foram calculados para a mesma situação do exemplo da seção III.3.3.2.1.



**Figura III.39.** Solução para a corrente na costa com atrito incluído (azul). Parâmetros usados são os mesmo do exemplo da seção III.3.3.2.1:  $h_o = 90 \text{ m}$ ;  $V_w = 13.9 \text{ m/s}$  ( $50 \text{ km/h}$ ), com  $C_f \approx 2 * 10^{-3}$ . A velocidade de equilíbrio  $V_s$  vale  $0.41 \text{ m/s}$ . A linha preta inclinada corresponde à solução inviscida. A linha horizontal foi traçada para  $V'_o = V_s$ .

Um fato curioso surge quando se analisa a eq. (III.166). Como o tempo que aparece no argumento da tangente hiperbólica está multiplicado por parâmetros, a solução do problema friccional funciona como se *o atrito introduzisse uma nova escala para o tempo*, a qual inclui uma combinação entre a velocidade de equilíbrio, a intensidade do atrito e a profundidade.

De fato, no início do processo, quando  $t \ll \frac{h_o}{V_s C_f}$ ,  $\tanh\left(\frac{V_s C_f}{h_o} t\right) \approx V_s \frac{C_f}{h_o} t$ , é possível aproximar a eq.(III.166), usando a eq.(III.161), por:

$$V'_o(t) \cong V_s^2 \frac{C_f}{h_o} t = \frac{\tau_y^w}{\rho h_o} t \quad (\text{III. 167})$$

Assim, como mostrado na figura (III.38), no estágio inicial, quando a velocidade é ainda pequena (em relação a  $\frac{h_o}{V_s C_f}$ ), a solução com atrito é *idêntica* à solução sem atrito, como era de se esperar. Após essa fase, o atrito vai se tornando cada vez mais forte e as duas soluções passam a divergir.

A abordagem acima guarda similaridade com estudos feitos por outros autores sobre assunto correlato. Sandstrom (1980), por exemplo, usa como escala de tempo de “ajuste friccional” ( $T_f$ ) a grandeza [ver eq.(6) da referência] :

$$T_f = h_o \sqrt{\frac{\rho_w}{C_f \tau^w}} = \frac{h_o}{V_s C_f} \quad (\text{III. 168})$$

Essa grandeza é exatamente o inverso do coeficiente que multiplica o tempo no argumento da tangente hiperbólica na eq.(III.166) e, portanto, corresponde à escala de tempo que mede a importância do atrito no presente fenômeno.

*Em quanto tempo a situação de equilíbrio vai se estabelecer?*

Uma análise da função tangente hiperbólica indica que o tempo até o equilíbrio é, rigorosamente, infinito! Considerando 0.996  $V_s$  como valor limite e sabendo que  $\tanh(\pi)=0.996$ , o tempo até o equilíbrio, ( $t_s$ ), pode ser tomado como  $t_s = \pi \frac{h_o}{V_s C_f}$ .

Esse resultado é similar ao obtido na solução da chamada “Maré de Tempestade Batistrófica” reportada em Dean e Dalrymple (1991), pág. 162.

Considerando 95%  $V_s$  como um valor limite aceitável em vista das aproximações feitas, teríamos:  $t_s = 0.6\pi \frac{h_o}{V_s C_f}$ .

Usando a eq.(III.162) e tomando  $C_f \approx 2 * 10^{-3}$ , o tempo até o equilíbrio (em seg.) para um vento constante pode ser estimado pela expressão:

$$t_s = \frac{0.6 \pi h_o}{0.03 V_w \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = \pi \cdot \frac{h_o}{V_w} 10^4 \quad (\text{III. 169})$$

De acordo com a expressão acima, o tempo até o equilíbrio para o exemplo em tela seria de 57.3 horas. Observar que, para uma dada profundidade,  $t_s$  é inversamente proporcional à intensidade do vento, ou seja, a corrente correspondente a um vento com o dobro da intensidade atingiria o equilíbrio na metade do tempo.

A ordem de grandeza de  $t_s$  ( $10^4$  s) coincide com a obtida por Csanady (1974).

### III.3.5.1.4 - Conceito do Tempo Friccional

Uma maneira interessante de se interpretar o resultado com atrito é apresentada nessa seção.

À luz do que foi visto na seção anterior, é possível conjecturar que a inclusão do atrito causa um *retardamento na evolução do tempo da solução inviscida*. Em outras palavras, o que ocorre na solução com atrito num certo tempo  $t$  ocorrerá na solução sem atrito num tempo  $t'$ , maior que  $t$ . A questão que se coloca, segundo essa ideia, é: *seria possível calcular a corrente costeira do problema com atrito a partir da solução inviscida usando um tempo (fictício) escalado fricionalmente ( $t'$ )?* Matematicamente, isso corresponderia a:

$$V'_o(t) = V_o(t') \quad (\text{III. 170})$$

Como no caso da solução invísida existe uma simples relação linear entre a corrente e o tempo, dada por :  $V_o(t) = A t$  , a validade da hipótese acima se traduz na seguinte expressão:

$$\sqrt{\frac{A}{B}} \tanh(\sqrt{AB} t) = At' \quad (\text{III. 171})$$

Calculando  $t'$ , obtém-se o *tempo friccional* como:

$$t' = \frac{\tanh(\sqrt{AB} t)}{\sqrt{AB}} = \frac{\tanh\left(V_s \frac{C_f}{h_o} t\right)}{V_s \frac{C_f}{h_o}} \quad (\text{III. 172})$$

Essa nova maneira de contar o tempo [com o tempo retardado de acordo com a eq. (III.172)] torna a solução do problema com atrito equivalente à solução do problema invísido *retardado*. A solução friccional na costa para a corrente  $V_o$  , portanto, pode ser obtida a partir da solução invísida simplesmente trocando  $t$  por  $t'$ :

$$V'_o(t) = V_o(t') = \frac{\tau_y^W}{\rho h_o} t' \quad (\text{III. 173})$$

Essa interpretação pode ser útil em aplicações como será visto a seguir.

O cálculo da corrente costeira com atrito é muito importante, porém a informação de maior interesse, a MM correspondente, ainda precisa ser encontrada. A determinação da MM associada à corrente com atrito, portanto, é o próximo passo a ser dado.

### III.3.5.1.5 Determinação da Maré Meteorológica correspondente

De acordo com a hipótese de que a corrente paralela à costa mantém-se aproximadamente geostrófica mesmo em presença do atrito, a eq.(III.153) pode, a princípio, ser usada para esse cálculo:

$$\frac{\partial \eta'(x, t)}{\partial x} = -\frac{f}{g} V'(x, t) \quad (\text{III. 153 – bis})$$

Ocorre que a eq.( III.153) relaciona o valor da velocidade da corrente com o *gradiente do nível* na direção  $x$ , *não* com o *nível* diretamente, portanto, a solução dessa equação para  $\eta'$  necessitaria o conhecimento da estrutura *espacial* da solução, uma informação que depende da resolução completa do problema com atrito, o que não é possível com a presente teoria.

Entretanto, como nosso interesse é apenas num ponto situado na costa, ( $x = 0$ ), é possível adotar um caminho alternativo.

#### III.3.5.1.5.1 Caso de uma Plataforma “Desconectada”

A ideia é usar a relação entre  $\eta_o$  e  $V_o$  estabelecida pela eq.(III.117), reescrita abaixo, para determinar a MM correspondente à corrente costeira, admitindo que a mesma continue válida em presença do atrito [ a validade dessa hipótese será discutida adiante, na seção III.4.4.1 ]:

$$\eta_o(t) = \frac{C_o \tanh[L/|R|]}{g} V_o(t) \quad (\text{III. 117 – bis})$$

Nesse caso teríamos:

$$\eta'_o(t) = \frac{C_o \tanh[L/|R|]}{g} V'_o(t) \quad (\text{III.174})$$

Assim, substituindo  $V'_o(t)$  pela eq.(III.173) na relação acima e incorporando o conceito do tempo friccional, tem-se:

$$\eta'_o(t) = \eta_o(t') = \frac{C_o \tanh[L/|R|]}{g} \frac{\tau_y^w}{\rho h_o} t'$$

Operando, chega-se a:

$$\eta'_o(t) = \eta_o(t') = \frac{\tau_y^w}{\rho C_o} \tanh[L/|R|] \cdot t' \quad (\text{III.175})$$

A expressão acima se aplica a plataformas de qualquer largura. Em particular, para uma plataforma continental desconectada “larga”, a eq.(III.175) determina a MM com atrito para a solução clássica como ilustrado a seguir.

### III.3.5.1.5.2 Solução Clássica com Atrito

Para o caso de uma plataforma larga, onde  $L \gg R$ , e  $\tanh[L/|R|] \cong 1$  a eq. (III.175) pode ser escrita como:

$$\eta'_o(t) = \eta_o(t') = \frac{\tau_y^w}{\rho C_o} t' = \frac{\tau_y^w}{\rho C_o} \frac{\tanh\left(\frac{V_s C_f}{h_o} t\right)}{\frac{V_s C_f}{h_o}} \quad (\text{III.176})$$

Observar que:

- Para  $t \ll \frac{h_o}{V_s C_f}$   $\rightarrow \tanh\left(\frac{V_s C_f}{h_o} t\right) \cong \frac{V_s C_f}{h_o} t$  - recupera-se a solução do problema invíscido.
- Para  $t \gg \frac{h_o}{V_s C_f}$   $\rightarrow \tanh\left(\frac{V_s C_f}{h_o} t\right) \cong 1$  - chega-se à situação de equilíbrio na qual o nível se estabiliza assumindo o valor limite  $\eta_s$ . Nesse caso, a equação acima fornece:

$$\eta_s = \frac{\tau_y^w}{\rho C_o} \frac{h_o}{V_s C_f} \quad (\text{III.177})$$

Lembrando que  $V_s = \sqrt{\frac{\tau_y^w}{\rho_{\text{água}} C_f}}$ , tem-se:

$$\eta_s = \sqrt{\frac{\tau_y^w}{\rho_{\text{água}} C_f}} \frac{h_o}{C_o} = V_s \sqrt{\frac{h_o}{g}} = 0.03 V_w \sqrt{\frac{h_o}{g}} \quad (\text{III.178})$$

A evolução temporal da MM com atrito, dada pela eq.(III.176), pode ser escrita, alternativamente, como:

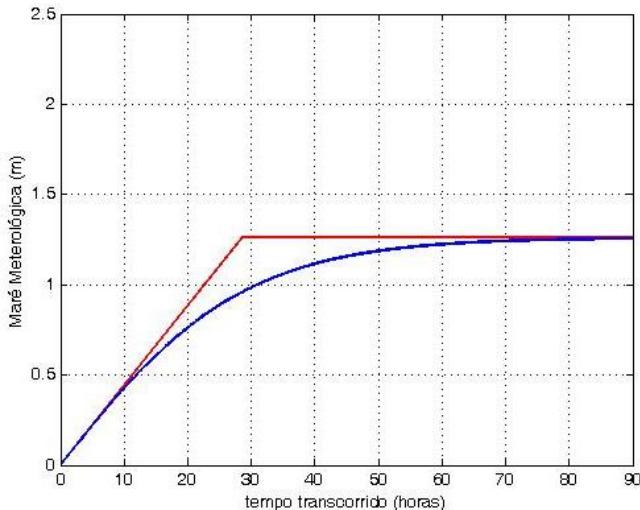
$$\eta_o(t') = \eta_s \tanh\left(V_s \frac{C_f}{h_o} t\right) = 0.03 V_w \sqrt{\frac{h_o}{g}} \cdot \tanh\left(0.03 V_w \frac{C_f}{h_o} t\right) \quad (\text{III.179})$$

A inclusão do atrito na solução clássica introduz alguns aspectos interessantes ao problema.

- Sem atrito, a MM cresce sem limite enquanto o vento estiver soprando, com atrito, este impõe um limite ao crescimento da MM. Para uma certa configuração geométrica, o valor limite é determinado ou pela intensidade ou pela duração do vento.
- Sem atrito, a MM é proporcional a  $V_w^2$  (através de  $\tau^w$ ) em todo o período de duração do vento. Com atrito, a MM inicia sendo proporcional a  $V_w^2$  e, a medida que o tempo avança, a proporcionalidade passa a ser com relação a  $V_w$ .

- Sem atrito, a MM é proporcional a  $h_o^{-1/2}$  em todo o período de duração do vento. Com atrito, a MM inicia sendo proporcional a  $h_o^{-1/2}$  e, a medida que o tempo avança, a proporcionalidade passa a ser com relação a  $h_o^{1/2}$ .

A solução dada pela eq.(166 ou 179) está mostrada de forma gráfica na figura (III.40), para a mesma situação da fig. (III.39).



**Figura III.40.** Solução para a MM (nível d'água na costa) *com atrito incluído* (azul) para a mesma situação da figura (III.39). Os parâmetros usados são os mesmo do exemplo da seção III.3.3.2.1:  $lat. 33^{\circ}S$ ;  $h_o = 90\text{ m}$ ;  $V_w = 50\text{ km/h}$ , com  $C_f \approx 2 * 10^{-3}$ . A MM limite,  $\eta_s$ , vale  $1.26\text{ m}$ . A linha vermelha inclinada corresponde à solução invíscida, a linha horizontal foi traçada para  $\eta'_o = \eta_s$

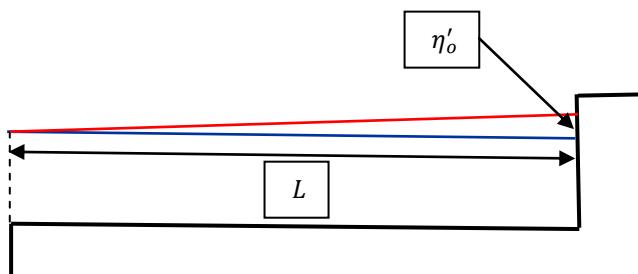
### III.3.5.1.5.3 - Plataforma “Desconectada” Estreita

A consistência dessa abordagem pode ser verificada para o caso de uma plataforma desconectada estreita, comparando com o resultado obtido por Sandstrom (1980).

#### Aproximação de Sandstrom

Sandstrom (1980) determinou a MM associada à corrente costeira  $V'_o$  de forma bastante simples considerando o caso de uma plataforma “desconectada” *estreita*, i.e., com  $L \ll R$ .

De fato, à luz da solução apresentada na seção III.3.3, numa plataforma desconectada *estreita* é razoável supor que a inclinação da superfície se aproxime de uma simples linha reta que corta o nível zero na borda da plataforma conforme ilustrado na figura (III.41).



**Figura III.41 – Esquema da aproximação usado por Sandstrom (1980)**

Nessa situação, a derivada que aparece na eq. (III.153) pode ser aproximada por:

$$\frac{\partial \eta'}{\partial x} \approx \frac{\eta'_o}{L}$$

e, assim, usando a eq. geostrófica, tem-se :

$$\frac{\eta'_o}{L} \approx -\frac{f}{g} V'_o$$

No hem. Sul, usando o sistema de coordenadas usual, a MM ( $\eta'_o$ ) associada à corrente  $V'_o$ , pode ser determinada por:

$$\eta'_o(t) \approx \frac{L|f|}{g} V'_o(t) = \frac{L|f|}{g} \cdot V_s \tanh\left(\frac{V_s C_f}{h_o} t\right) \quad (\text{III. 180})$$

A qual, na condição limite de equilíbrio, fornece [usando (III.162)]:

$$\eta_s \approx \frac{L|f|}{g} 0.03 V_w \quad (\text{III. 181})$$

Essa equação é a equação que consta da pag. 467 de Sandstrom (1980), usada pelo autor para estudar as “flutuações de nível subinerciais” forçadas localmente na plataforma da Nova Escócia no Canadá. A mesma equação foi usada por Paiva (1993) no Brasil para estudar variações de nível do mar em Arraial do Cabo, RJ.

Retomando a solução dada por (III.175):

$$\eta'_o(t) = \eta_o(t') = \frac{\tau_y^w}{\rho_w C_o} \tanh[L/|R|] \frac{\tanh\left(V_s \frac{C_f}{h_o} t\right)}{\frac{C_f}{V_s h_o}} = \frac{h_o}{C_o} \tanh[L/|R|] \cdot V_s \tanh\left(\frac{V_s C_f}{h_o} t\right) \quad (\text{III. 175 - bis})$$

No caso de uma plataforma desconectada estreita, teríamos:  $L \ll |R|$  e  $\tanh[L/|R|] \cong L/|R|$ , assim :

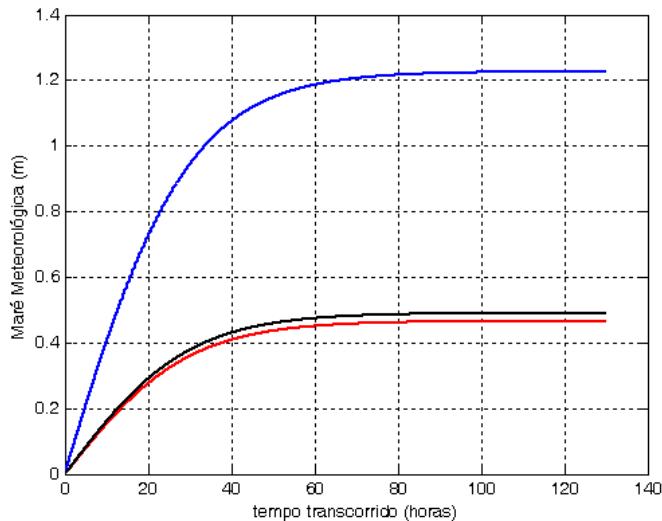
$$\eta_o(t') = \frac{h_o}{C_o |R|} V_s \tanh\left(\frac{V_s C_f}{h_o} t\right) = \frac{L|f|}{g} V_s \tanh\left(\frac{V_s C_f}{h_o} t\right) = 0.03 V_w \frac{L|f|}{g} \tanh\left(0.03 V_w \frac{C_f}{h_o} t\right) \quad (\text{III. 182})$$

Para  $t \ll \frac{h_o}{V_s C_f}$  recupera-se o modelo invíscido. Para  $t \gg \frac{h_o}{V_s C_f}$  chega-se a situação de equilíbrio e a MM limite simplifica-se para :

$$\eta_s = 0.03 V_w \frac{L|f|}{g} \quad (\text{III. 183})$$

A expressão (III.183) acima para uma plataforma desconectada *estreita* recupera o resultado de Sandstrom (1980) [eq.(III.181)] indicando que o procedimento proposto para determinar a MM deve também ser válido para plataformas de qualquer largura.

A figura (III.42) abaixo compara os resultados para a MM calculada para os mesmos parâmetros usados na seção III.3.3.2.1, porém incluindo o caso de uma plataforma desconectada com  $L = 150 \text{ km}$  usando as expressões (III.175) e (III.181).



**Figura III.42.** Solução para a MM com atrito incluído para a mesma situação da fig.III.34: linha **azul**: Plataforma Larga [similar a fig. III.34]; Plataforma Estreita ( $L=150\text{ km}$ ) - linhas **vermelha**: cálculo pela eq.(III.175) e **preta**: cálculo pela eq.(III.181).

Como o raio de deformação vale  $375\text{ km}$ , tem-se que  $L/R = 0.40$  e  $\tanh(L/R) = 0.38$  , e por isso os resultados das eqs.(III.181) e (III.175) são bastante próximos, mostrando a consistência da aproximação de plataforma desconectada *estreita*.

### III.3.6 - Caso de Vento Uniforme e não-Permanente com Atrito

No caso geral com vento uniforme, mas com variação temporal arbitrária, a equação governante para a velocidade costeira com atrito fica:

$$\frac{dV'_o(t)}{dt} = A(t) - B[V'_o(t).|V'_o(t)|] \quad (\text{III.184})$$

onde

$$A(t) = \frac{\tau_y^W(t)}{\rho h_o} = \frac{\rho_a C_D}{\rho h_o} V_w(t) |V_w(t)| \quad (\text{III.185})$$

$$B = \frac{C_f}{h_o} \quad (\text{constante}) \quad (\text{III.165 - bis})$$

Com,  $\rho_a = \rho_{ar}$  e  $\rho = \rho_{agua}$ , para aliviar e uniformizar a notação.

Ao contrário do caso anterior, a equação acima não admite solução analítica simples. Para  $A(t)$  dado por uma função senoidal, Sandstrom (1980) apresenta uma solução analítica um tanto complicada para esse caso a qual não será analisada no presente trabalho.

Como alternativa para avançar, duas opções se apresentam:

- (i) Obter soluções analíticas aproximadas considerando que o parâmetro A (tensão do vento) tenha uma variação em “patamares”.
- (ii) Recorrer a soluções numéricas

A solução em patamares consiste em considerar a variação temporal do vento como uma “escadaria” e encontrar a solução através de uma sucessão de soluções analíticas para  $A = \text{constante}$  conectadas entre si, conforme explicado na sequência.

A solução numérica adotada no presente trabalho, baseada no método de Galerkin, foi desenvolvida com auxílio da prof<sup>a</sup>. Henriette Lebre La Rovere e está detalhada no Apêndice 7. As duas opções serão utilizadas considerando a geometria simplificada de uma plataforma “desconectada” *estreita* .

### III.3.6.1 Vento com Variação Temporal de Intensidade e/ou Sentido em Patamares atuando numa Plataforma “Desconectada” Estreita

Essa seção analisa soluções analíticas para o caso de vento paralelo à costa, uniforme espacialmente, mas sujeito a variações temporais em “patamares” (“step wise”) atuando sobre uma plataforma “desconectada” estreita. Nesse caso, as seguintes situações podem ocorrer:

- (i) Vento tem o mesmo sentido da corrente, mas aumenta de intensidade
- (ii) Vento tem o mesmo sentido da corrente, mas diminui de intensidade
- (iii) Vento muda de sentido e atua contra a corrente
- (iv) Vento cessa

Para as soluções analíticas, a equação governante em todos os casos é mantida como as eqs.(III.163 – 165) reescritas abaixo por comodidade:

$$\frac{dV'_o(t)}{dt} = A - B[V'_o(t)]^2 \quad (\text{III. 163 – bis})$$

onde, A e B são constantes *positivas* definidas, dadas por:

$$A = \frac{|\tau_y^W|}{\rho h_o} = \frac{\rho_a C_D}{\rho h_o} V_w^2 \quad (\text{III. 164 – bis}) \quad (\text{constante em cada patamar})$$

$$B = \frac{C_f}{h_o} \quad (\text{III. 165 – bis}) \quad (\text{constante em cada patamar})$$

O sinal correto da velocidade deve ser determinado em função da análise da situação em estudo.

As soluções das equações que se aplicam a cada caso estão detalhadas no Apêndice 6 e são mostradas de forma sintética na tabela III.4 abaixo.

(i)	Solução válida para: $V^2 < A/B$ - Corresponde ao caso do vento com mesmo sentido da corrente, mas aumentando de intensidade :
	$V'_o(t) = \sqrt{\frac{A}{B}} \cdot \tanh \left[ \sqrt{AB} \cdot (t - T) + \operatorname{atanh} \left( V_T \sqrt{\frac{B}{A}} \right) \right] \quad (\text{III. 186})$
(ii)	Solução válida para: $V^2 > A/B$ - Corresponde ao caso do vento com mesmo sentido da corrente, mas diminuindo de intensidade
	$V'_o(t) = \sqrt{\frac{A}{B}} \cdot \operatorname{cotgh} \left[ \sqrt{AB} \cdot (t - T) + \operatorname{acotgh} \left( V_T \sqrt{\frac{B}{A}} \right) \right] \quad (\text{III. 187})$
(iii)	Solução válida para: $\tau_y^W/V < 0$ - Corresponde ao caso de um vento que muda de sentido e atua contra a corrente :
	$V'_o(t) = -\sqrt{\frac{A}{B}} \cdot \tan \left[ \sqrt{AB} \cdot (t - T) - \operatorname{atan} \left( V_T \sqrt{\frac{B}{A}} \right) \right] \quad (\text{III. 188})$
(iv)	Vento cessa (*):
	$V'_o(t) = \frac{1}{B(t - T) + \frac{1}{V_T}} \quad (\text{III. 189})$

**OBS.** - Todas as equações são válidas para  $t \geq T$ . A constante  $V_T$  corresponde à condição do escoamento no instante inicial,  $T$ , do patamar. Se o escoamento parte do repouso:  $T = 0$  e  $V_T = 0$ .

(\*) A condição do item (iv) pode ser considerada como um caso particular de qualquer das três soluções anteriores se a intensidade do vento tender a zero.

**Tabela III.4** – Soluções da eq.(III.163) para as diversas possibilidades (explicitadas no texto da tabela)

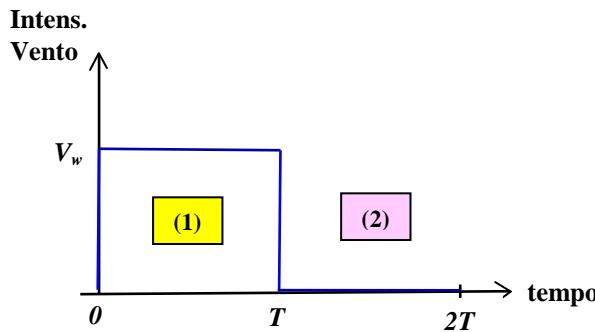
Cada uma dessas situações será analisada a seguir com a MM, em todos os casos, sendo determinada a partir da corrente  $V'_o(t)$  pela eq. (III.174), a qual é admitida válida também para a solução com atrito:

$$\eta'_o(t) = \frac{C_o \tanh[L/|R|]}{g} V'_o(t) \quad (\text{III.174 - bis})$$

A solução para o caso de uma tensão com variação em patamares pode ser obtida simplesmente usando as soluções analíticas mostradas acima em cada patamar respeitando a aplicabilidade de cada uma das três soluções e garantindo a conexão entre as soluções nas junções dos patamares. Os exemplos a seguir ilustram a técnica.

### III.3.6.1.1 - Caso #1 - Vento cessa

Nesse primeiro exemplo, o vento inicia tempestivamente em  $t = 0$ , sopra por um intervalo de tempo  $T$  e, a seguir, cessa completamente, definindo dois patamares distintos identificados por (1) e (2) conforme ilustrado na figura (III.43).



**Figura III.43** – Evolução temporal do vento em patamares para o caso de vento cessando no patamar 2.

Em cada patamar, a constante B mantém-se a mesma, já a constante A deve ser calculada a partir da intensidade do vento correspondente a cada período. As condições iniciais também serão diferentes nos dois patamares. No patamar inicial o escoamento parte do repouso, e, no seguinte, a corrente parte de uma velocidade inicial estabelecida pela solução anterior.

Patamar (1) (com vento) :  $0 \leq t \leq T$ ,

$$A_1 = \frac{\rho_a C_D}{\rho h_0} (V_{w1})^2; \text{ com a velocidade da corrente sujeita à condição inicial } V'_{o1}(0) = 0$$

A solução para a corrente costeira é a mesma encontrada na seção III.3.5.1.3, eq.(III.166), reescrita como:

$$V'_{o1}(t) = \sqrt{\frac{A_1}{B}} \tanh(\sqrt{A_1 B} t) \quad (\text{III.190})$$

A solução para a MM usando a eq.(III.174) é dada por:

$$\eta'_{o1}(t) = \frac{C_o \tanh[L/|R|]}{g} V'_{o1}(t) \quad (\text{III.191})$$

Patamar (2) (sem vento) :  $T < t \leq 2T$

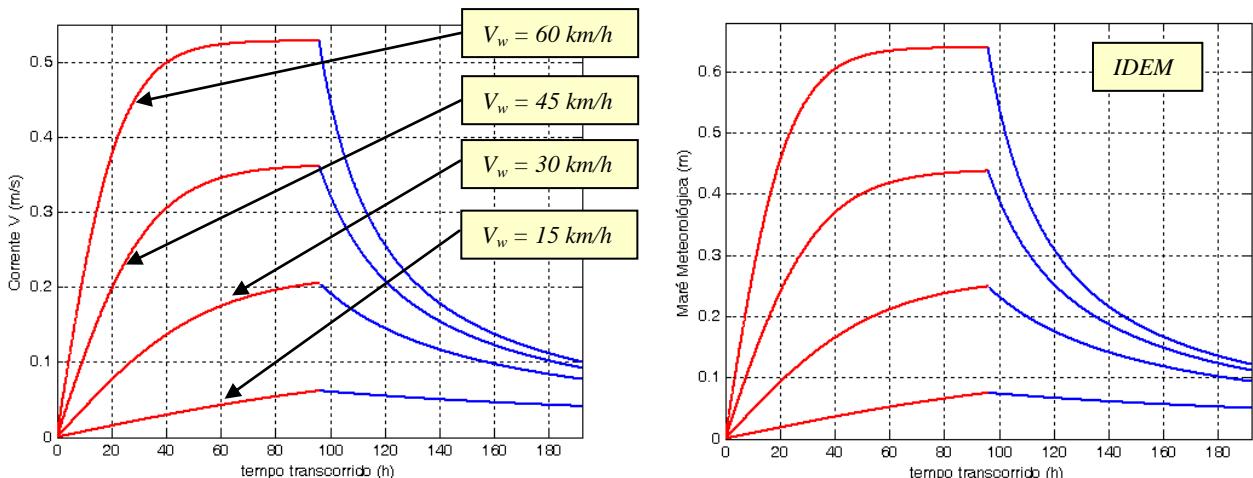
Para o período sem vento, a corrente  $V'_o$  pode ser calculada, diretamente, pela solução (iv) [eq.(III.189)] ou pelas outras soluções com um valor diminuto para a intensidade do vento. As duas opções levam exatamente ao mesmo resultado. Em qualquer caso,  $V'_{o2}(t - T) = V'_{o1}(T) = V_T$  corresponde à velocidade ao fim do período 1. Usando a eq.(III.189), tem-se:

$$V'_{o2}(t) = \frac{1}{B(t - T) + \frac{1}{V_T}} \quad (\text{III.189} - \text{bis})$$

A solução para a MM usando a eq.(III.174) é dada, nos dois patamares, por:

$$\eta'_{o1,2}(t) = \frac{C_o \tanh[L/|R|]}{g} V'_{o1,2}(t)$$

O resultado para quatro valores diferentes de intensidade do vento está mostrado na figura (III.44) em cuja legenda constam os dados usados nos cálculos.



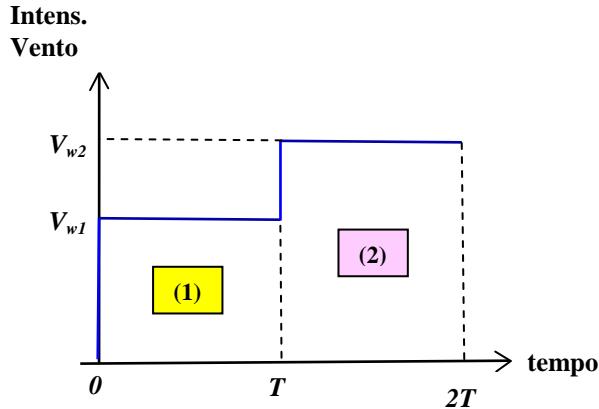
**Figura III.44** – Caso do vento que cessa abruptamente. Resultados da solução com atrito para 4 valores de intensidade do vento indicados diretamente nos gráficos. Demais parâmetros:  $T = 96$  horas;  $h_o = 90$  m;  $L = 150$  km; lat.=33° S;  $C_f = 0021$ . Painel esquerdo: corrente costeira. Painel direito: maré meteorológica.

Analisando os resultados, verifica-se que a inclusão do atrito com o fundo acarretou alterações *fundamentais* na solução invíscida. O primeiro aspecto a observar é que o comportamento geral da solução com atrito deixou de ser dado por duas linhas retas como na solução invíscida (uma, inclinada, no período com vento e outra, horizontal, no período sem vento). Além disso, o aspecto da solução com atrito agora é função da intensidade e da duração do vento. De fato, para ventos fracos e/ou para durações curtas, a solução com atrito lembra a solução invíscida (ver, por exemplo, caso do vento de 15 km/h na figura acima), enquanto que para ventos fortes a solução com atrito não apenas para de crescer a partir de um certo momento quanto decai rapidamente quando o vento cessa.

Adicionalmente, vê-se que o decaimento *não* leva o escoamento a zero, mesmo após decorrido um tempo relativamente longo. O motivo reside na dependência da força de atrito com a velocidade da corrente quando esta última começa a ficar pequena o efeito do atrito diminui e o escoamento começa a se comportar quase como um escoamento invíscido novamente.

### III.3.6.1.2 - Caso #2 - Vento mantém o Sentido mas aumenta de Intensidade

Uma situação esquemática desse caso está mostrada graficamente na figura (III.45) abaixo. Nessa situação, o vento, de sentido positivo, após um período inicial de duração  $T$ , tem sua intensidade aumentada impulsivamente de  $V_{w1}$  para  $V_{w2}$ , identificando dois patamares distintos.



**Figura III.45** – Evolução temporal do vento em patamares para o caso de vento aumentando no patamar 2.

Patamar (1):  $0 \leq t \leq T$ , - Idêntico ao anterior.

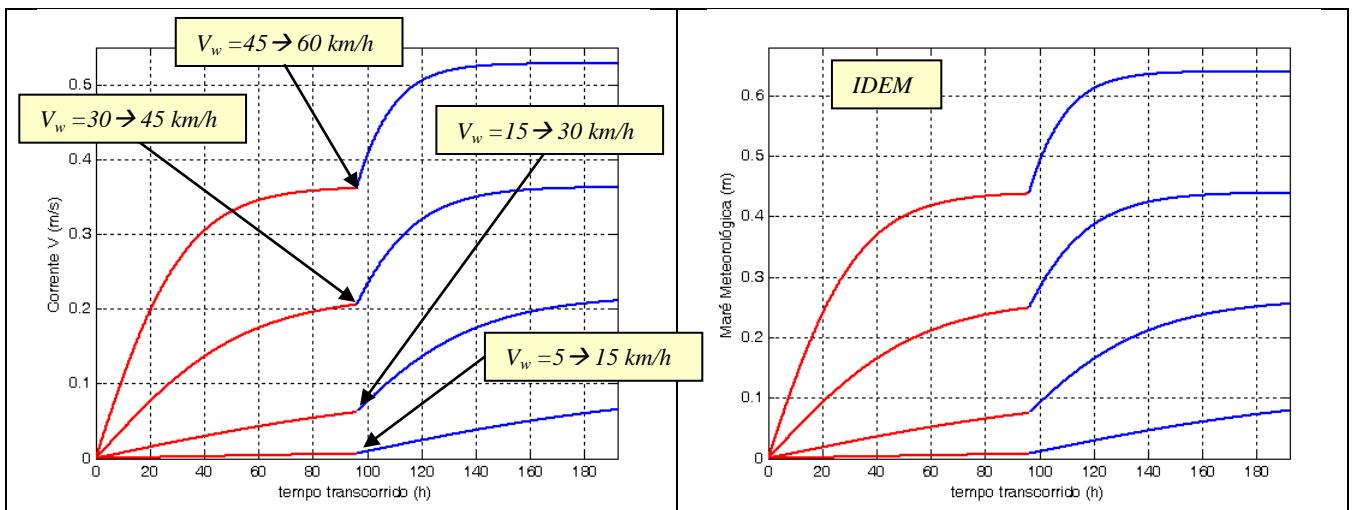
Patamar (2):  $T < t \leq 2T$

$$A_2 = \frac{\rho_a C_D}{\rho h_o} (V_{w2})^2 \quad \text{com a velocidade da corrente sujeita a condição inicial } V'_{o2}(t-T) = V'_{o1}(T) = V_T$$

Para esse trecho, a solução é a eq.(III.186), reescrita como:

$$V'_{o2}(t) = \sqrt{\frac{A_2}{B}} \cdot \tanh \left[ \sqrt{A_2 B} \cdot (t-T) + \operatorname{atanh} \left( V_T \sqrt{\frac{B}{A_2}} \right) \right] \quad (\text{III.186 - bis})$$

A solução está mostrada graficamente na figura (III.46), com a MM calculada pela mesma expressão usada antes, para quatro situações de velocidade do vento indicadas na própria figura.

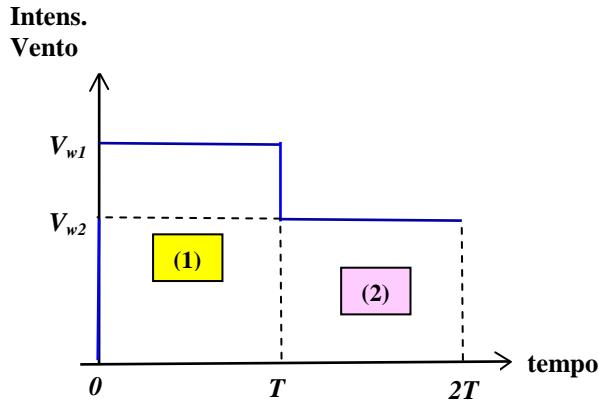


**Figura III.46** – Resultados da solução com atrito para quatro situações de aumento do vento indicados diretamente nos gráficos. Demais parâmetros usados nos cálculos são os mesmos do Caso #1

Observa-se que, com o aumento abrupto do vento, a solução no segundo período começa a crescer até atingir a situação de equilíbrio correspondente à segunda situação de vento. Novamente as soluções dependem da intensidade e da duração do vento. Notar que para ventos fracos, a solução lembra o caso invíscido.

### III.3.6.1.3 - Caso #3 - Vento mantém o Sentido mas diminui de Intensidade

Trata-se de uma situação similar a anterior porém com o vento diminuindo impulsivamente de intensidade de  $V_{w1}$  para  $V_{w2}$  no tempo  $t = T$ , identificando dois períodos distintos, conforme ilustrado na figura (III.47).



**Figura III.47** – Evolução temporal do vento em patamares para o caso de vento diminuindo no patamar 2.

Patamar (1):  $0 \leq t \leq T$  - Idêntico ao anterior.

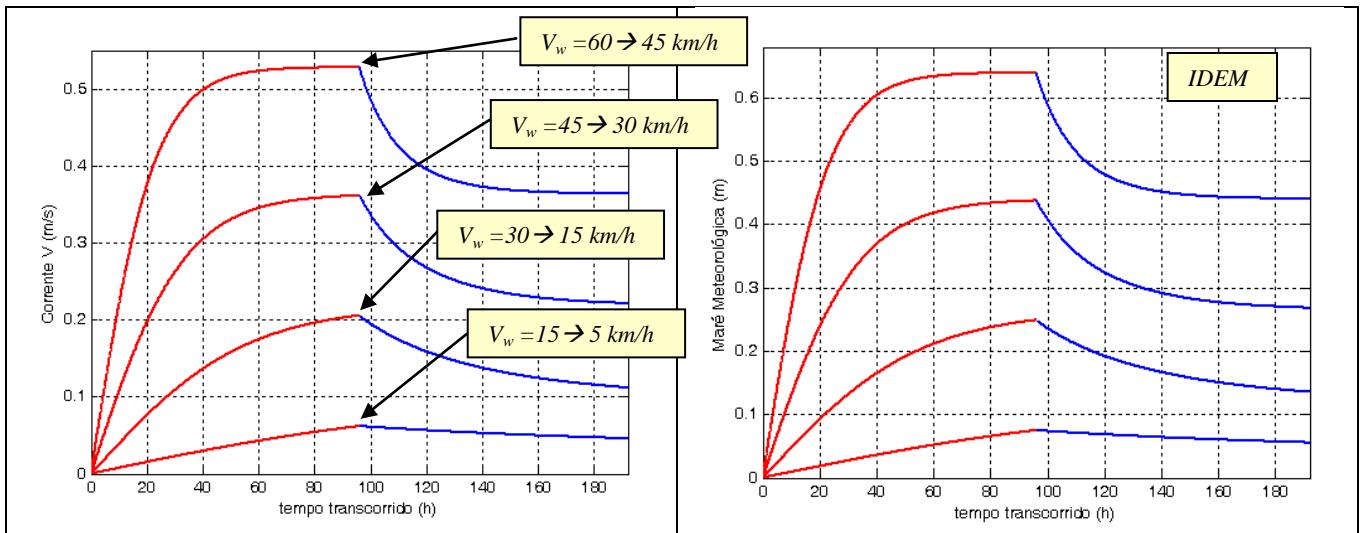
Patamar (2):  $T < t \leq 2T$

$$A_2 = \frac{\rho_a C_D}{\rho h_o} (V_{w2})^2 \quad \text{com a velocidade da corrente sujeita a condição inicial } V'_{o2}(t-T) = V'_{o1}(T) = V_T$$

Para esse período, a solução é dada pela eq.(III.187), reescrita como:

$$V'_{o2}(t) = \sqrt{\frac{A_2}{B}} \cdot \coth \left[ \sqrt{A_2 B} \cdot (t-T) + \operatorname{acoth} \left( V_T \sqrt{\frac{B}{A_2}} \right) \right] \quad (\text{III.187 - bis})$$

Os resultados são mostrados na figura (III.48) com cálculos feitos para os mesmos parâmetros do caso anterior.

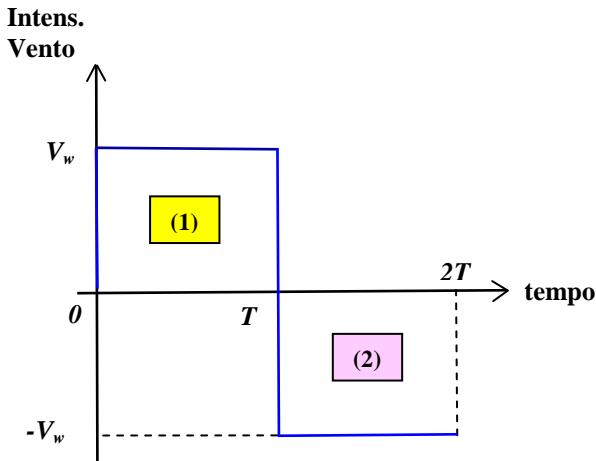


**Figura III.48** – Resultados da solução com atrito para quatro situações de diminuição do vento indicados diretamente nos gráficos. Demais parâmetros usados nos cálculos são os mesmos do Caso #1

Esse exemplo guarda similaridade com o exemplo do vento que cessa, sendo que a solução no segundo patamar se ajusta à corrente/MM correspondente ao vento que sopra no segundo período. Pode-se considerar que o primeiro exemplo é um caso particular desse se a velocidade do vento no segundo período for zero.

### III.3.6.1.4 - Caso #4 - Vento inverte o Sentido e atua contra a Corrente durante algum tempo

Um caso de interesse especial será analisado agora, qual seja, o de um vento que inverte o sentido como mostrado na figura (III.49). Por simplicidade vamos admitir que a intensidade do vento mantenha-se a mesma.



**Figura III.49** – Evolução temporal do vento em patamares para o caso de vento invertendo o sentido no patamar 2.

Patamar (1):  $0 \leq t \leq T$  – Já resolvido

Patamar (2):  $T < t \leq 2T$  – Na inversão do vento, o problema deve ser dividido em duas partes:

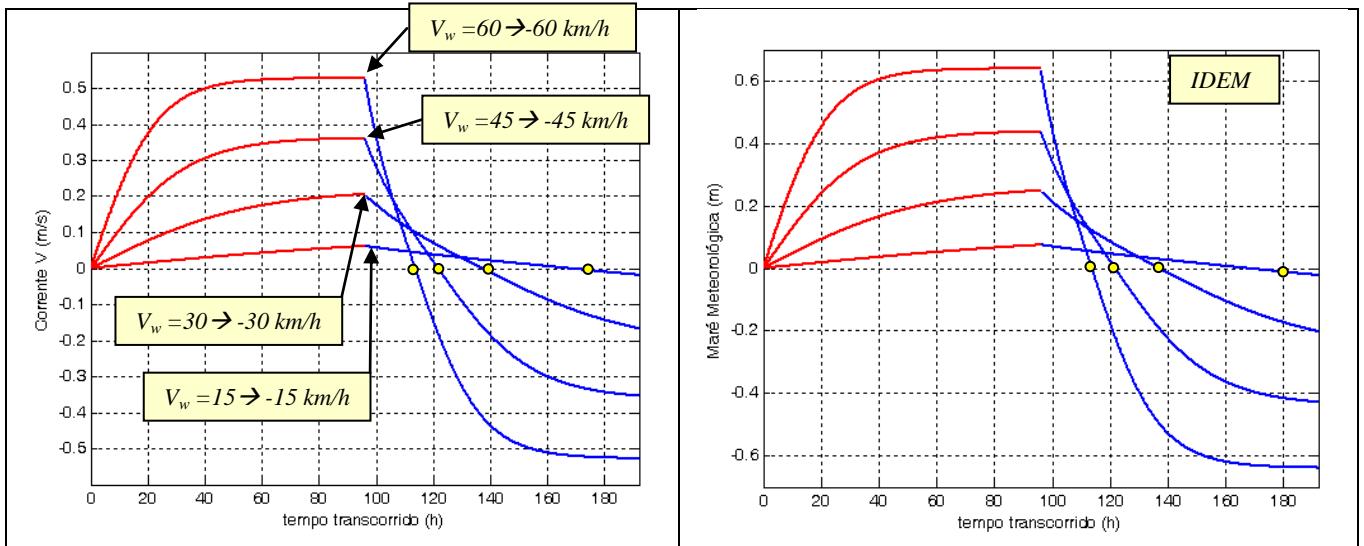
Parte(i) → Vento muda de sentido e atua *contra* a corrente por algum tempo. A solução, válida até que a velocidade da corrente atinja o valor zero no instante  $T_o$ , é dada pela eq.(III.188), reescrita como:

$$V'_{o2i}(t) = -\sqrt{\frac{A}{B}} \cdot \tan \left[ \sqrt{AB} \cdot (t - T) - \operatorname{atan} \left( V_T \sqrt{\frac{B}{A}} \right) \right] ; \quad \text{para: } T \leq t \leq T_o \quad (\text{III.188 - bis})$$

Parte(ii) → Vento volta a ter mesmo sentido da corrente com ambos assumindo valores negativos. Nesse caso, a solução volta a ser a eq.(III.166) com o início do tempo transferido para  $T_o$ , reescrita como :

$$V^*_{o2ii}(t) = -\sqrt{\frac{A}{B}} \cdot \tanh \left[ \sqrt{AB} \cdot (t - T_o) \right] ; \quad \text{para: } T_o \leq t \leq 2T \quad (\text{III.192})$$

Os resultados são mostrados na figura (III.50) com cálculos feitos para os mesmos parâmetros do caso anterior.



**Figura III.50** – Resultados da solução com atrito para 4 situações de inversão do vento indicadas diretamente nos gráficos.

Demais parâmetros usados nos cálculos são os mesmos do Caso #1. Posição do ponto  $t = T_0$  em cada situação está indicado por pontos amarelos no eixo do tempo. Painel esquerdo: Corrente costeira. Painel direito: MM

Essa situação causa, pela primeira vez, uma *inversão* do sentido da corrente e o consequente aparecimento de uma MM *negativa* que ocorre quando o vento começa a atuar *contra* a corrente. De fato a solução dada pelo caso (iii) da tabela varia segundo a função *tangente* (não mais *tangente hiperbólica*) o que leva a velocidade e o nível a decaírem até o valor zero. Após a troca de sinal (assinalada com um círculo amarelo na figura), a corrente e o vento passam a atuar no mesmo sentido e a solução passa a ser simplesmente a solução do período 1 invertida apresentando, inclusive, o mesmo valor de equilíbrio lá atingido, no caso dos ventos mais intensos (ver figura).

É interessante observar também que conforme a velocidade do vento aumenta, o momento de inversão de sentido da corrente vai se aproximando do momento da inversão de sentido da tensão do vento (ver círculos amarelos na figura). Para ventos muito fortes, o vento e a corrente/MM resultantes tendem a ficar quase em fase.

### **III.3.6.2 - Tensão de Vento com Variação Senoidal – Comparação entre as Soluções Analítica e Numérica**

Nessa seção, o exemplo invíscido resolvido na seção III.3.4.2.3.1 será reanalisado com a inclusão do atrito. Ambas as soluções, a solução em patamares e a solução numérica apresentada no Apêndice 7, serão usadas agora.

Para a solução em patamares, a variação (contínua) senoidal da Tensão do Vento foi transformada numa “escadaria” e a solução total foi obtida como uma sucessão de soluções analíticas devidamente conectadas entre um degrau e outro, similarmente ao que foi feito nos exemplos acima, respeitando sempre a aplicabilidade de cada uma das três soluções da tabela da seção III.3.6.1.

Já a solução numérica, usa a tensão de vento como ele se apresenta, havendo necessidade apenas de transformar a função continua numa função discreta. O intervalo de tempo usado na discretização foi de 1 hora.

A exemplo da solução invíscida apresentada na seção III.3.4.2.3.1, dois casos foram analisados:

#### **Teste (i) – Tensão de Vento com Período de 96 horas (4 dias)**

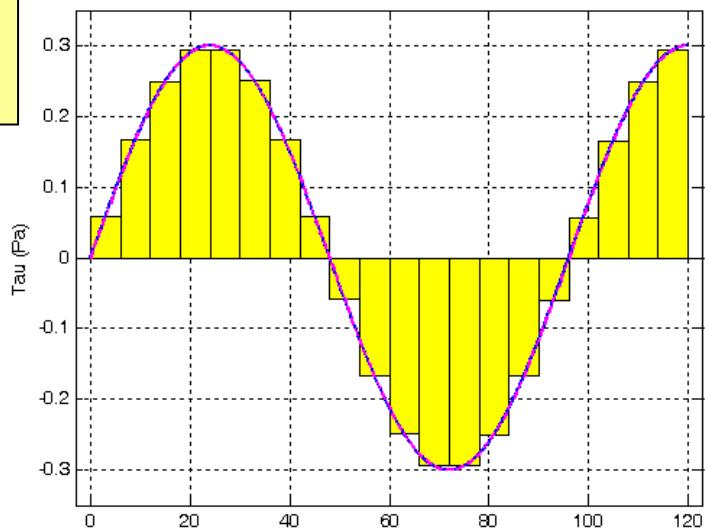
- Amplitude da oscilação senoidal = 0.3 Pa
- Período de integração considerado = 120 horas, que corresponde a 1.25 ciclos da tensão de vento.
- Solução analítica em patamares: período de integração foi dividido em 20 patamares de 6 horas cada.
- Solução numérica: foi adotado um  $\Delta t$  de 1 hora.

#### **Teste (ii) – Tensão de Vento com Período de 192 horas (8 dias)**

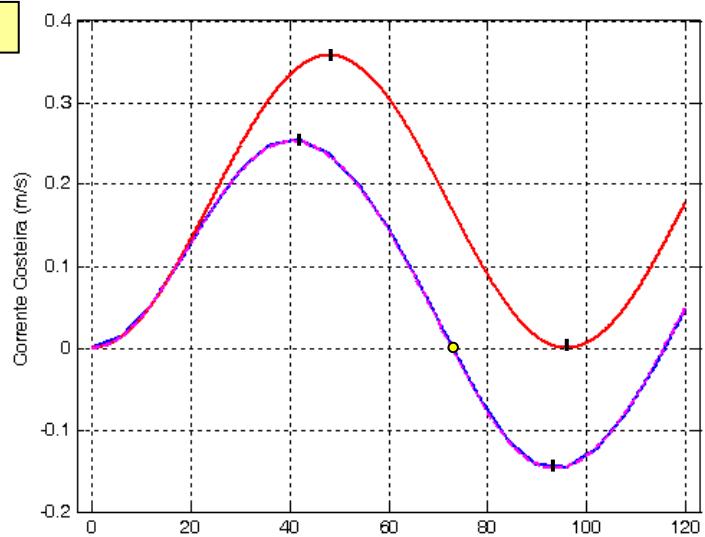
- Amplitude da oscilação senoidal = 0.3 Pa
- Período de integração considerado = 192 horas, que corresponde a 1 ciclo completo da tensão de vento.
- Solução analítica em patamares: o período de integração foi dividido em 12 patamares de 12 horas cada.
- Solução numérica: foi adotado um  $\Delta t$  de 1 hora.

Todas as soluções estão mostradas na figura (III.51) abaixo.

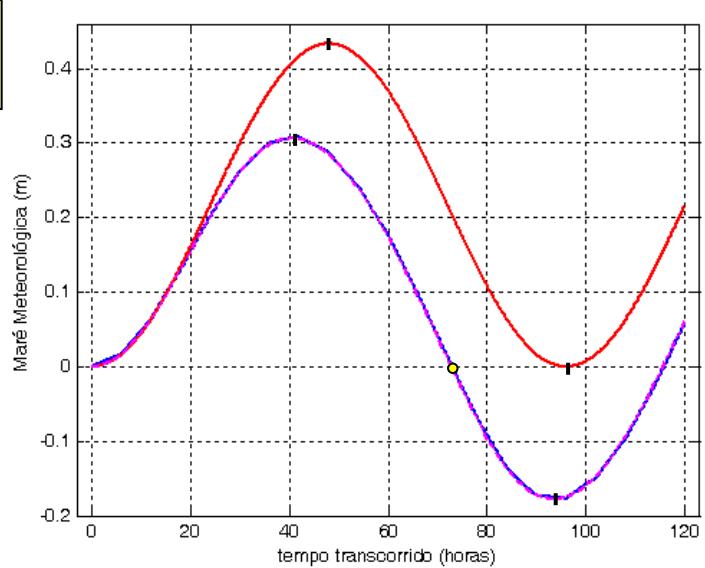
Tensão de Vento  
senoidal com:  
Amplitude =  $0.3 \text{ Pa}$   
Período =  $96 \text{ h (4 dias)}$



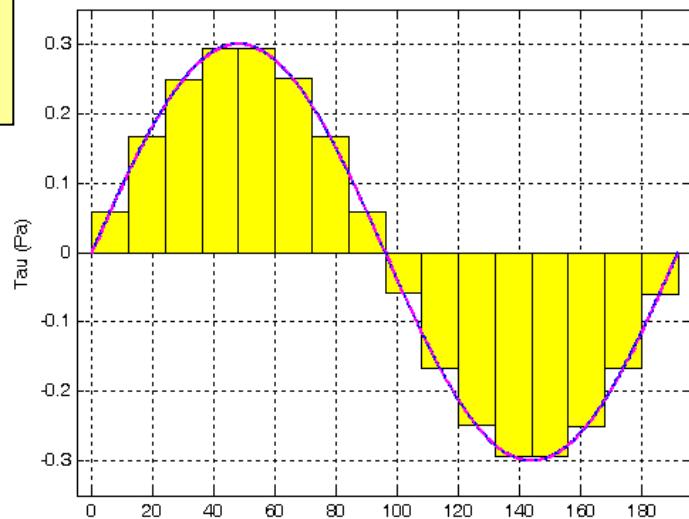
Corrente Costeira ( $V_o$ )



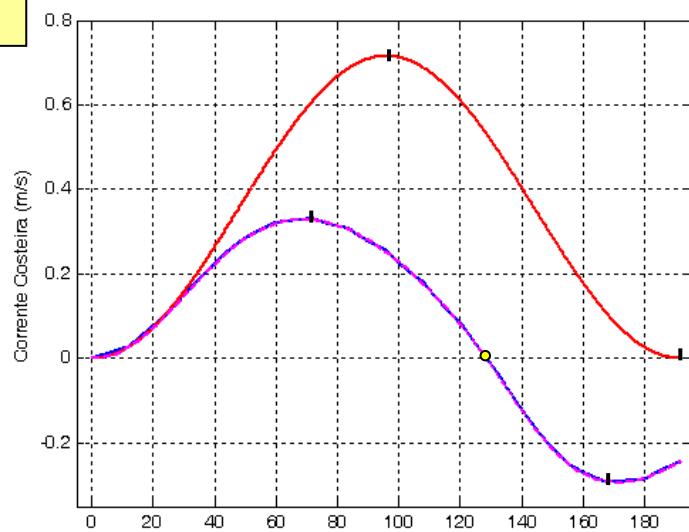
Maré Meteorológica  
(Plataforma Desconectada Estreita)



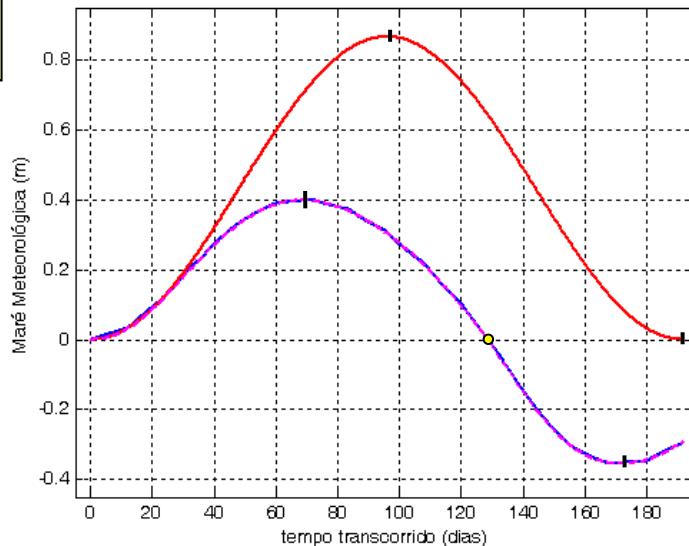
Tensão de Vento  
senoidal com:  
Amplitude =  $0.3 \text{ Pa}$   
Período =  $192 \text{ h (8 dias)}$



Corrente Costeira ( $V_o$ )



Maré Meteorológica  
(Plataforma Desconectada Estreita)



**Figura III.51** - Comparação entre as soluções: em patamares (linha magenta); numérica (linha azul) e invíscola (linha vermelha) para uma tensão de vento senoidal (painel superior). Parâmetros indicados diretamente na figura.

O primeiro fato a se constatar é a perfeita concordância entre a solução analítica em patamares e a solução numérica, certamente indicando que ambas convergem para a solução exata.

No caso de variação senoidal, o vento inverte de sentido de forma suave, não mais de forma abrupta como no exemplo do patamar duplo da seção III.3.6.1.4. Mesmo assim os dois casos guardam similaridades. Por exemplo, a solução com atrito, ao contrário da solução invíscida, apresenta inversão de sentido da corrente e o consequente aparecimento de MM negativa.

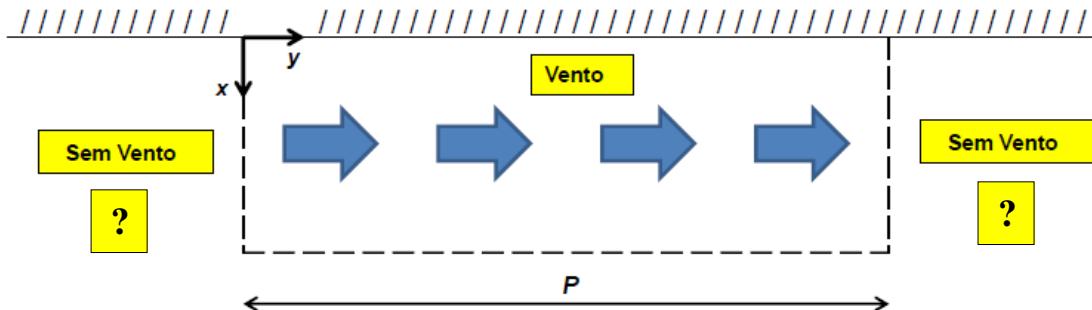
O valor máximo atingido pela MM, uma informação de grande importância prática, também se mostra sensível à maneira como o vento evolui no tempo. Observando que uma tensão de  $0.3 \text{ Pa}$  corresponde a um vento de cerca de  $45 \text{ km/h}$ , é possível comparar quantitativamente os caso de tensão de variação senoidal com período de  $192 \text{ horas}$  com o caso do duplo patamar [figura (III.44)] para verificar que a MM máxima no primeiro é cerca de 90 % da do segundo. Esse resultado tem implicações práticas relevantes pois mostra que a aplicação do vento em patamares mais longos não causa imprecisão significativas no resultado final.

Da mesma forma, mantidos constantes os demais parâmetros do problema, a diferença de fase entre a forçante (tensão do vento) e a resposta (corrente costeira ou MM) diminui a medida que a amplitude da oscilação da tensão do vento aumenta.

### III.4 - Efeito de Vento com Pista de Comprimento Finito

A largura da pista de vento teve pouca influência na MM no caso de plataformas relativamente estreitas. A partir de agora o efeito do *comprimento* da Pista do vento será considerado. Como será visto agora, o efeito de uma pista de vento de comprimento finito afeta *drasticamente* a maré meteorológica.

É importante observar que o ponto chave para a existência de MM's de origem remota reside na variação do vento na direção *longitudinal* a costa (dir-y), aspecto esse que até agora não foi considerado. A figura (III.52), inspirada no episódio do ciclone extra-tropical a sul de SC relatado no Capítulo I, ilustra uma situação com potencial para induzir MM's de origem remota.



**Figura III.52** – Geometria esquemática do problema do vento com pista de comprimento finito.

No caso hipotético acima, o Vento atua sobre uma extensão da plataforma de comprimento  $P$  durante um certo tempo, cessando a seguir. Para simplificar, vamos admitir também que a pista de vento seja fixa espacialmente, ou seja, que a “caixa de vento” não se move ao longo da costa.

Num raciocínio qualitativo, lembrando o que já foi visto nesse capítulo, é possível supor que o trecho de costa sob efeito do vento estaria sujeito a uma MM localizada, logo, de comprimento finito. As questões que se colocam são:

- (i) Ficaria a perturbação restrita a, simplesmente, dissipar-se *localmente* ?  
ou,
- (ii) Dispõe a natureza de algum mecanismo que possibilite a *transmissão* ao longo da PC de perturbações localizadas ?

A julgar pelo relato do fenômeno ocorrido em maio de 2003, apresentado no Capítulo I, a resposta correta deve ser a opção (ii). De fato, a existência de eventos de sobre-elevação de nível que se deslocam ao longo da costa é fato bem conhecido e documentado tanto na teoria quanto na prática [ Ver, por exemplo, Gill (1982), pag 398 e Eliot e Pattiaratchi (2010)].

O agente físico responsável pela transmissão de perturbações (na faixa de frequência da MM) ao longo da costa foi bem resumido por Csanady (1997): “ *A propagação espontânea ao longo da costa de variações de nível do mar e padrões associados ocorrem em função da existência de ondas conhecidas coletivamente como Ondas Costeiras Confinadas*”

A presente seção III.4 apresenta a solução do problema de vento com pista de comprimento finito numa plataforma de geometria simplificada com fundo horizontal e, inicialmente, considerando um escoamento invíscido. O efeito do atrito das correntes com o fundo será incluído ao final da seção.

### III.4.1 - Equacionamento e Solução do Problema sem Atrito

Desprezando o atrito das correntes com o fundo e considerando o caso de uma plataforma de profundidade constante, as equações governantes são as mesma da seção III.1.1 com a aproximação geostrófica para a corrente paralela à costa e forçada apenas pela tensão do vento também paralela a costa ( $\tau_y^W$ ):

$$J(x, y, t) = \frac{C_o^2}{f} \frac{\partial \eta(x, y, t)}{\partial x} \quad (\text{III. 193})$$

$$\frac{\partial J(x, y, t)}{\partial t} + f Q(x, y, t) = -C_o^2 \frac{\partial \eta(x, y, t)}{\partial y} + \frac{\tau_y^W(y, t)}{\rho} \quad (\text{III. 194})$$

$$\frac{\partial \eta(x, y, t)}{\partial t} = -\frac{\partial Q(x, y, t)}{\partial x} - \frac{\partial J(x, y, t)}{\partial y} \quad (\text{III. 195})$$

O equacionamento do problema é similar ao feito na seção III.3.3.2.1 para o caso bi-dimensional. O primeiro passo é fazer :  $\frac{\partial}{\partial x}$  (III.194), o que resulta em:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial J}{\partial x} \right) + f \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = -C_o^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}$$

A seguir, usando a eq.(III.195) para representar o segundo termo da equação acima, a mesma pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial J}{\partial x} \right) - f \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial y} \right) = -C_o^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}$$

Expressando o terceiro termo da equação em função da equação geostrófica (III.193), chega-se a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial J}{\partial x} \right) - f \frac{\partial \eta}{\partial t} - C_o^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} = -C_o^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}$$

Resultando na mesma eq.(III.130) obtida na seção III.3.4.2.2:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial J(x, y, t)}{\partial x} - f \eta(x, y, t) \right) = 0 \quad (\text{III. 196}) \quad \{ \text{similar a (III. 130)} \}$$

Tomando  $\frac{\partial}{\partial x}$  [eq.(III.193)], o primeiro termo da equação acima pode ser escrito como:

$$\frac{\partial J}{\partial x} = \frac{C_o^2}{f} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

O qual uma vez usado em (III.196), resulta numa equação governante para  $\eta$  também similar à obtida para o caso bi-dimensional :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 \eta(x, y, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{R^2} \eta(x, y, t) \right) = 0 \quad (\text{III. 197})$$

Admitindo que a solução para o deslocamento da superfície possa ser expressa por separação de variáveis tal que  $\eta(x, y, t) = A(y, t).X(x)$ , a equação acima fica:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ A(y, t) \left( \frac{d^2 X(x)}{dx^2} - \frac{1}{R^2} X(x) \right) \right] = 0 \quad (\text{III. 198})$$

Como o termo entre parênteses depende apenas de x, tem-se:

$$\left( \frac{d^2 X(x)}{dx^2} - \frac{1}{R^2} X(x) \right) \frac{\partial}{\partial t} [A(y, t)] = 0 \quad (\text{III. 199})$$

Como  $A(y, t)$  varia no tempo, para que a equação acima seja satisfeita é necessário que:

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} - \frac{1}{R^2} X(x) = 0 \quad (\text{III. 200})$$

Analizando o resultado acima, constata-se que a equação diferencial que governa a estrutura normal à costa de  $\eta$  é exatamente a mesma que se aplica ao problema bi-dimensional de vento com pista infinita e, portanto, qualquer das soluções já analisadas pode ser usada aqui. Considerando o caso da plataforma “desconectada”, e procurando uma solução válida apenas para a plataforma, as seguintes condições de contorno devem ser atendidas:

- Na borda da plataforma continental ( $x = L$ ):

$$\eta(L, y, t) = 0 \quad \rightarrow \quad A(y, t).X(L) = 0 \quad (\text{III. 201})$$

Conforme visto na seção (III.3.4.2.2), a solução da eq.(III.200) que atende a condição  $X(L) = 0$ , válida para o hem. Sul, é :

$$X(x) = D \sinh[(L - x)/|R|] \quad (\text{III. 108 - bis})$$

- Na costa, a eq. (III.194), fornece :

$$\frac{\partial J(0, y, t)}{\partial t} - |f|Q(0, y, t) = -C_o^2 \frac{\partial \eta(0, y, t)}{\partial y} + \frac{\tau_y^W(y, t)}{\rho}$$

A condição de impermeabilidade [ $Q(0, y, t) = 0$ ] anula o segundo termo da equação que se simplifica para:

$$\frac{\partial J(0, y, t)}{\partial t} + C_o^2 \frac{\partial \eta(0, y, t)}{\partial y} = \frac{\tau_y^W(y, t)}{\rho} \quad (\text{III. 202})$$

Essa equação permite determinar a constante  $D$  e a função  $A(y, t)$ . De fato, usando a eq. geostrófica [(III.193)] em  $x = 0$  tem-se:

$$J(0, y, t) = -\frac{C_o^2}{|f|} \frac{\partial \eta(0, y, t)}{\partial x} = -A(y, t) \frac{C_o^2}{|f|} \frac{dX(0)}{dx} \quad (\text{III. 203})$$

Substituindo na equação acima, tem-se:

$$-\frac{dX(0)}{dx} \cdot \frac{\partial A(y, t)}{\partial t} + |f|X(0) \frac{\partial A(y, t)}{\partial y} = \frac{|f|}{\rho C_o^2} \tau_y^W(y, t) \quad (\text{III. 204})$$

Como:

$$\frac{dX(0)}{dx} = -\frac{D}{|R|} \cosh\left(\frac{L}{|R|}\right)$$

Tem-se,

$$\frac{D}{|R|} \cosh\left(\frac{L}{|R|}\right) \cdot \frac{\partial A(y, t)}{\partial t} + |f|D \sinh\left(\frac{L}{|R|}\right) \frac{\partial A(y, t)}{\partial y} = \frac{|f|}{\rho C_o^2} \tau_y^W(y, t)$$

Como,  $|R| = \frac{C_o}{|f|}$ , tem-se:

$$\frac{|f|D}{C_o} \cosh\left(\frac{L}{|R|}\right) \cdot \frac{\partial A(y, t)}{\partial t} + |f|D \sinh\left(\frac{L}{|R|}\right) \frac{\partial A(y, t)}{\partial y} = \frac{|f|}{\rho C_o^2} \tau_y^W(y, t)$$

Multiplicando a equação acima por  $\frac{C_o}{|f| \cosh(L/|R|)}$  vem:

$$D \cdot \left[ \frac{\partial A(y, t)}{\partial t} + \tanh(L/|R|) C_o \frac{\partial A(y, t)}{\partial y} \right] = \frac{1}{\rho C_o \cosh(L/|R|)} \tau_y^w(y, t) \quad (\text{III. 205})$$

Para que o lado esquerdo da eq. (III.205) se iguale ao direito para valores arbitrários de  $y$  e  $t$ , é necessário que :

$$D = \frac{1}{\rho C_o \cosh(L/|R|)} \quad (\text{III. 206})$$

e que,

$$\frac{\partial A(y, t)}{\partial t} + C_* \frac{\partial A(y, t)}{\partial y} = \tau_y^w(y, t) \quad (\text{III. 207})$$

onde

$$C_* = \tanh(L/|R|) C_o \quad (\text{III. 208})$$

Observa-se que os parâmetros  $D$ ,  $A$  e  $C_*$  são todos dimensionais com dimensões:  $D \equiv \left[ \frac{L^2 T}{M} \right]$ ,  $A \equiv \left[ \frac{M}{L T} \right]$  e  $C_* \equiv \left[ \frac{L}{T} \right]$

A equação (III.207), chave para a solução do problema, é conhecida como a *equação de transporte* e pode ser resolvida pelo *Método das Características* conforme mostrado na sessão seguinte.

A estrutura perpendicular à costa fica:

$$X(x) = \frac{1}{\rho C_o} \frac{\sinh[(L-x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} \quad (\text{III. 209})$$

e a solução para  $\eta(x, y, t)$ , portanto, é dada por:

$$\eta(x, y, t) = \frac{1}{\rho C_o} \frac{\sinh[(L-x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} A(y, t) \quad (\text{III. 210})$$

A velocidade paralela a costa ( $V$ ) é dada por:

$$V(x, y, t) = -\frac{g}{|f|} \frac{\partial \eta(x, y, t)}{\partial x}$$

$$V(x, y, t) = \frac{1}{\rho h_o} \frac{\cosh[(L-x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} A(y, t) \quad (\text{III. 211})$$

A velocidade normal à costa ( $U$ ) pode ser obtida tanto da eq.(III.195) quanto da eq.(III.194). Escolhendo a segunda opção e considerando o hem. Sul, tem-se:

$$-|f|U(x, y, t) = -g \frac{\partial \eta(x, y, t)}{\partial y} - \frac{\partial V(x, y, t)}{\partial t} + \frac{\tau_y^w(y, t)}{\rho h_o}$$

Operando-se a álgebra, tem-se:

$$-|f|U = -\frac{g h_o}{\rho h_o C_o} \frac{\sinh[(L-x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} \frac{\partial A(y, t)}{\partial y} - \frac{1}{\rho h_o} \frac{\cosh[(L-x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} \frac{\partial A(y, t)}{\partial t} + \frac{\tau_y^w(y, t)}{\rho h_o} \quad \therefore$$

$$U = \frac{C_o}{\rho |f| h_o} \frac{\sinh[(L-x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} \frac{\partial A(y, t)}{\partial y} + \frac{1}{\rho |f| h_o} \frac{\cosh[(L-x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} \frac{\partial A(y, t)}{\partial t} - \frac{\tau_y^w(y, t)}{\rho |f| h_o}$$

Assim,

$$U(x, y, t) = -\frac{\tau_y^W(y, t)}{\rho|f|h_o} + \frac{1}{\rho|f|h_o} \left\{ \frac{\cosh[(L-x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} \frac{\partial A(y, t)}{\partial t} + C_o \frac{\sinh[(L-x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} \frac{\partial A(y, t)}{\partial y} \right\}$$

Rearranjando a equação acima:

$$U(x, y, t) = -\frac{\tau_y^W(y, t)}{\rho|f|h_o} + \frac{1}{\rho|f|h_o} \frac{\cosh[(L-x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} \left\{ \frac{\partial A(y, t)}{\partial t} + C_* \frac{\tanh[(L-x)/|R|]}{\tanh[L/|R|]} \frac{\partial A(y, t)}{\partial y} \right\}$$

Somando e subtraindo  $C_* \frac{\partial A(y, t)}{\partial y}$  ao termo entre chaves, tem-se:

$$U(x, y, t) = -\frac{\tau_y^W(y, t)}{\rho|f|h_o} + \frac{1}{\rho|f|h_o} \frac{\cosh[(L-x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} \left\{ \left[ \frac{\partial A(y, t)}{\partial t} + C_* \frac{\partial A(y, t)}{\partial y} \right] + \left[ \frac{\tanh[(L-x)/|R|]}{\tanh[L/|R|]} - 1 \right] C_* \frac{\partial A(y, t)}{\partial y} \right\}$$

Como, por (III.207), o termo dentro do primeiro colchete é igual a  $\tau_y^W(y, t)$ , a equação acima pode ser reescrita como:

$$U(x, y, t) = -\frac{\tau_y^W(y, t)}{\rho|f|h_o} + \frac{1}{\rho|f|h_o} \frac{\cosh[(L-x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} \left\{ \tau_y^W(y, t) + \left[ \frac{\tanh[(L-x)/|R|]}{\tanh[L/|R|]} - 1 \right] C_* \frac{\partial A(y, t)}{\partial y} \right\}$$

Donde,

$$U(x, y, t) = -\underbrace{\frac{\tau_y^W(y, t)}{\rho|f|h_o} \left[ 1 - \frac{\cosh[(L-x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} \right]}_{(I)} + \underbrace{\frac{1}{\rho|f|h_o} \left\{ \left[ \frac{\sinh[(L-x)/|R|]}{\sinh[L/|R|]} - \frac{\cosh[(L-x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} \right] C_* \frac{\partial A(y, t)}{\partial y} \right\}}_{(II)}$$
(III. 212)

Observar que  $U(0, y, t) = 0$ , conforme requer a condição de impermeabilidade na costa. Na borda da plataforma tem-se:

$$U(L, y, t) = -\underbrace{\frac{\tau_y^W(y, t)}{\rho|f|h_o} \left[ 1 - \frac{1}{\cosh(L/|R|)} \right]}_{(I)} - \underbrace{\frac{1}{\rho|f|h_o \cosh(L/|R|)} C_* \frac{\partial A(y, t)}{\partial y}}_{(II)}$$

É importante salientar que a velocidade normal à costa é composta de dois tipos de termo: um que depende da tensão do vento explicitamente, assinalado com o índice ( I ) na eq. acima, e outro, assinalado com o índice ( II ), que depende de variações da função  $A$  ao longo da costa. Esse segundo termo é *nulo* no caso de Plataformas “largas” e em plataformas “estreitas” só é diferente de zero quando o nível variar.

Esse curioso resultado deve-se, fisicamente, ao fato que, em plataformas estreitas, a condição de nível nulo na borda *não* acarreta velocidade normal a costa nula nessa posição, conforme visto na seção III.3.3.2. Ora, qualquer variação de nível, mesmo sem a ação do vento, requer a entrada/saída de água da plataforma vindo daí o motivo da existência dessa segunda parcela para  $U$ . Essa questão será abordada em detalhe mais adiante na seção (III.4.3).

## Resumo da Solução

$$\eta(x, y, t) = \frac{1}{\rho C_o} \frac{\sinh[(L-x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} \cdot A(y, t) \quad (\text{III. 210 - bis})$$

$$V(x, y, t) = \frac{1}{\rho h_o} \frac{\cosh[(L-x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} \cdot A(y, t) \quad (\text{III. 211 - bis})$$

$$U(x, y, t) = -\frac{\tau_y^W(y, t)}{\rho|f|h_o} \left[ 1 - \frac{\cosh[(L-x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} \right] + \frac{1}{\rho|f|h_o} \left\{ \left[ \frac{\sinh[(L-x)/|R|]}{\sinh[L/|R|]} - \frac{\cosh[(L-x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} \right] C_* \frac{\partial A(y, t)}{\partial y} \right\}$$
(III. 212 - bis)

A função  $A$  sai da solução da equação de transporte:

$$\frac{\partial A(y, t)}{\partial t} + C_* \frac{\partial A(y, t)}{\partial y} = \tau_y^w(y, t) \quad (\text{III. 207} - \text{bis})$$

onde

$$C_* = \tanh(L/|R|) C_o \quad (\text{III. 208} - \text{bis})$$

em que  $C_o = \sqrt{gh_o}$  e  $|R| = C_o/|f|$

A eq.(III.207) é análoga à eq. (10.10.14) pág. 400 de Gill (1982), o qual atesta que “*essa equação é a equação governante de marés de tempestade (“storm surges”)*”. A diferença do presente caso em relação ao caso tratado por Gill (1982) reside apenas na velocidade de transporte: para Gill a velocidade é  $\sqrt{gh_o}$ , enquanto no presente caso a velocidade é  $C_* = \sqrt{gh_o} \tanh(L/|R|)$ .

No contexto de marés de tempestade, Gill (1982) pág. 400 afirma que “*Em geral, soluções dessa equação podem ser interpretadas como Ondas de Kelvin que são modificadas pelo vento*”. Prossegue Gill (1982), “*De fato, a equação aponta que, para um observador viajando ao longo da costa com a velocidade da Onda de Kelvin, a taxa de variação do nível do mar na costa é igual a tensão do vento paralela à costa vista por esse observador. Isto se dá porque o transporte de Ekman para a costa (ou no sentido oposto) é determinado localmente e irá reforçar (ou reduzir) a onda de Kelvin dependendo dos sinais. Por exemplo, se o observador estiver numa crista da onda de Kelvin e a tensão do vento for positiva (i.e. transporte de Ekman na direção da costa) a amplitude da onda será amplificada. Se o observador estiver num cavado e o transporte de Ekman for para o largo, o cavado irá se aprofundar.*”

Como será demonstrado a seguir, a interpretação de Gill (1982) para a solução do problema pode ser perfeitamente estendida para o caso da maré meteorológica.

## Maré Meteorológica e Corrente Costeira

A MM e a corrente costeira são dadas por:

$$\eta(0, y, t) = \eta_o(y, t) = \frac{\tanh(L/|R|)}{\rho C_o} \cdot A(y, t) = \frac{C_*}{\rho g h_o} \cdot A(y, t) \quad (\text{III. 213})$$

$$V(0, y, t) = V_o(y, t) = \frac{1}{\rho h_o} \cdot A(y, t) \quad (\text{III. 214})$$

Observa-se que a MM e a corrente costeira, novamente, guardam uma relação entre si dada por:

$$V_o(y, t) = \frac{g}{C_*} \cdot \eta_o(y, t) \quad (\text{III. 215})$$

a qual coincide exatamente com a relação obtida para o caso bi-dimensional, eq.(III.152).

### III.4.2 - Solução pelo Método das Características - Recapitulação

A solução do problema da MM para um vento de pista finita depende da solução da equação:

$$\frac{\partial A(y, t)}{\partial t} + C_* \frac{\partial A(y, t)}{\partial y} = \tau_y^W(y, t) \quad (\text{III. 207 - bis})$$

Trata-se de uma equação diferencial parcial linear de primeira ordem conhecida como equação de transporte ou de advecção. Esse tipo de equação se presta à solução pelo Método das Características o qual será recapitulado nessa seção.

O objetivo essencial do Método das Características é transformar uma equação diferencial parcial num conjunto de equações diferenciais ordinárias ao longo de curvas apropriadas definidas no espaço  $(y, t)$ . Matematicamente, a idéia é transformar a equação acima em:

$$\frac{dA(y(s), t(s))}{ds} = F[\tau_y^W(y(s), t(s)), y(s), t(s)]$$

onde  $[y(s), t(s)]$  são as curvas características do problema.

A regra da cadeia garante que:

$$\frac{dA(y(s), t(s))}{ds} = \frac{\partial A}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial A}{\partial t} \frac{dt}{ds} \quad (\text{III. 216})$$

Fazendo

$$\frac{dy}{ds} = C_*$$

e,

$$\frac{dt}{ds} = 1$$

A eq.(III.213) é escrita como:

$$\frac{dA}{ds} = C_* \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial t} = \tau_y^W(y(s), t(s))$$

Portanto, ao longo das curvas (características) dadas por  $[y(s), t(s)]$  a equação diferencial parcial (III.216) torna-se a equação ordinária (III.217):

$$\frac{dA}{ds} = \tau_y^W(y(s), t(s)) \quad (\text{III. 217})$$

Em particular, se  $\tau_y^W = 0$ , a equação acima transforma-se na equação homogênea :

$$\frac{dA}{ds} = 0 \quad (\text{III. 218})$$

Para encontrar a solução, o primeiro passo é determinar as curvas características:

Fazendo  $t(0) = 0$ , tem-se:

$$\frac{dt}{ds} = 1 \rightarrow s = t$$

Fazendo  $y(0) = y_o$ , tem-se:

$$\frac{dy}{ds} = C_* \rightarrow y = C_* s + y_o \rightarrow y(t) = y_o + C_* t$$

Chamando  $\xi \equiv y(t)$  para facilitar a notação, tem-se que:

$$\xi = y_o + C_* t \quad (\text{III. 219})$$

Assim, no caso de  $C_*$  constante, as curvas características são linhas retas com inclinação dada por  $C_*$  e partindo da posição  $y_o$ .

Analizando a equação homogênea (III.218) primeiro, a solução, ao longo das características, é:

$$\frac{dA}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad A(t) = \text{constante}$$

A constante é determinada a partir da condição inicial do problema. Fazendo  $A(0) = f(y_o)$ , com  $f$  uma função arbitrária conhecida, tem-se que

$$A(\xi, t) = f(y_o)$$

Como  $y_o = \xi - C_* t$ , a solução é simplesmente

$$A(\xi, t) = f(\xi - C_* t)$$

Ou seja, a solução é, nada mais nada menos, que a condição inicial transportada (ou advectada) ao longo de  $y$  com velocidade  $C_*$ , sem qualquer mudança de forma.

Fisicamente, a solução pode ser interpretada da seguinte forma: um observador colocado num referencial móvel que se desloca ao longo de  $y$  com velocidade  $C_*$  acompanha o deslocamento da forma inicial de  $A$  sem observar nenhuma mudança.

Ideia similar aplica-se a equação não homogênea (III.217) reescrita usando a variável  $\xi$  como:

$$\frac{dA(\xi, t)}{dt} = \tau_y^W(\xi, t)$$

Supondo que o problema parte do zero, ou seja, que  $A(0,0) = 0$ , a solução é dada por :

$$A(\xi, t) = \int \tau_y^W(\xi, t) dt \quad (\text{III.220})$$

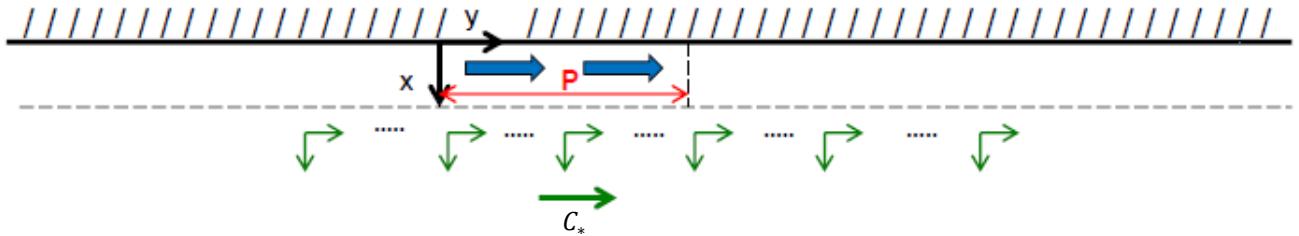
Fisicamente, um observador viajando com velocidade  $C_*$  ao longo de  $y$ , veria a função  $A$  evoluir no tempo de acordo com (III.220).

### III.4.3 - Aplicações – Casos sem Atrito

Finalmente estamos em condições de incluir o comprimento da pista do vento na análise da MM. Os exemplos a seguir ilustram a solução pelo Método das Características para situações de interesse. Em todos os exemplos, a plataforma é do tipo “desconectada” com largura  $L$ , profundidade constante  $h_o$  e de geometria uniforme na  $dir-y..$ .

#### III.4.3.1 - Exemplo #1 - Vento Uniforme e Permanente com Pista Finita

Vamos iniciar analisando o caso de um vento uniforme espacialmente dentro de uma pista de comprimento  $P$ , fixa no espaço, que inicia em  $t=0$  e se mantém constante a partir daí [figura (III.53)].



**Figura III.53** – Geometria do Exemplo#1

Prescrição da tensão do vento:

$$\tau_y^W(y) = \tau_o \quad \text{para: } 0 < y < P \quad e \quad t > 0 \quad (\text{III. 221})$$

Valendo zero fora dessas condições

A equação governante para a função  $A(y, t)$  é:

$$\frac{\partial A(y, t)}{\partial t} + C_* \frac{\partial A(y, t)}{\partial y} = \tau_y^W(y) \quad (\text{III. 222})$$

Onde,

$$C_* = \tanh(L/|R|) C_o \quad (\text{III. 208 – bis})$$

Ao longo da característica ou, alternativamente, no referencial móvel viajando com velocidade  $C_*$ , a equação é escrita:

$$\frac{dA(\xi, t)}{dt} = \tau_y^W(\xi) \quad (\text{III. 223})$$

onde

$$\xi = y_o + C_* t \quad (\text{III. 219 – bis})$$

Integrando (no tempo, ao longo de uma determinada característica) dentro da pista de vento, tem-se:

$$A(\xi, t) = \int_{t_o}^t \tau_y^W(\xi) dt' = \tau_o(t - t_o) \quad (\text{III. 224})$$

Portanto, dentro da Pista de Vento e ao longo de uma dada característica, a função  $A$  cresce linearmente com o tempo. Para concluir a solução é necessário expressar a tensão do vento em termos da variável  $\xi = y_o + C_* t$ .

O estabelecimento da função  $A$  determina a estrutura da solução para  $\eta$ ,  $V$  e  $U$  em termos de  $\xi$  e  $t$ , ou seja, ao longo das características. Como a estrutura em  $x$  já foi determinada, o problema está, a princípio, completamente resolvido, restando escrever a solução no referencial original, ou seja, em termos da variável  $y$ .

### III.4.3.1.1 - Solução para a Costa

Escolhendo uma característica tal que, em  $t = 0 \rightarrow y_o = 0$ , isto é, parte bem do início da pista, a tensão do vento ao longo dessa característica é escrita como:

$$\tau_y^W(\xi) = \tau_y^W(C_* t) = \tau_o ; \quad \text{para } 0 < t < T \quad (\text{III.225})$$

onde,

$$T = \frac{P}{C_*} \quad (\text{III.226})$$

e,

$$\tau_y^W(\xi) = \tau_y^W(C_* t) = 0 ; \quad \text{para } t \geq T \quad (\text{III.227})$$

A solução para a função  $A$  ao longo da característica escolhida é, portanto:

$$A(\xi, t) = \int_0^t \tau_y^W(\xi) dt' = \tau_o t ; \quad \text{para } 0 < t < T \quad (\text{III.228a})$$

e,

$$A(\xi, t) = \tau_o \cdot T \text{ (constante); para } t \geq T \quad (\text{III.228b})$$

De acordo com a eq.(III.213), a MM *ao longo dessa mesma característica* é dada por:

$$\eta_o(\xi, t) = \frac{\tanh(L/|R|)}{\rho C_o} \tau_o t ; \quad \text{para } 0 < t < T \quad (\text{III.229a})$$

e,

$$\eta_o(\xi, t) = (\eta_o)_{max} = \frac{\tanh(L/|R|)}{\rho C_o} \tau_o T \text{ (constante); para } t \geq T \quad (\text{III.229b})$$

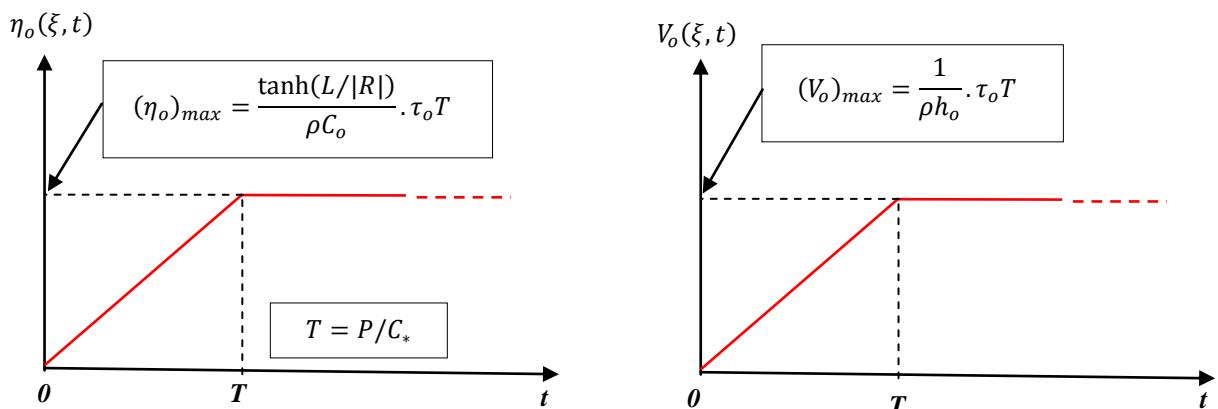
Da mesma forma, por (III.214) a corrente costeira  $V_o$  é dada por

$$V_o(\xi, t) = \frac{1}{\rho h_o} \tau_o t ; \quad \text{para } 0 < t < T \quad (\text{III.230a})$$

e,

$$V_o(\xi, t) = (V_o)_{max} = \frac{1}{\rho h_o} \tau_o T \text{ (constante); para } t \geq T \quad (\text{III.230b})$$

As duas soluções acima, válidas *ao longo da característica escolhida*, estão mostradas graficamente na figura (III.54) abaixo:



**Figura III.54 – Ilustração gráfica das solução do exemplo#1 ao longo da característica escolhida**

Substituindo o valor de  $T$ , é possível expressar  $(\eta_o)_{max}$  e  $(V_o)_{max}$  em função do comprimento da pista:

$$(\eta_o)_{max} = \frac{\tau_o}{\rho C_o^2} \cdot P \quad (\text{III.231})$$

e,

$$(V_o)_{max} = \frac{\tau_o}{\rho C_o h_o \tanh(L/|R|)} \cdot P \quad (\text{III.232})$$

É interessante observar que o valor máximo atingido pelo nível depende *apenas* do comprimento da pista e não depende da largura da plataforma.

A solução geral é obtida calculando-se a solução (III.223) no referencial móvel ao longo do conjunto de características, isto é para diferentes valores de  $y_o$ , e, em seguida, revertendo o resultado para o referencial original  $(y,t)$ .

### III.4.3.1.2 - Representação Gráfica da Solução

A melhor maneira de se visualizar e entender as soluções obtidas pelo método das características é através de um método gráfico o qual será empregado nesse e nos demais exemplos estudados.

Inicialmente, vale ressaltar que, como a MM é simplesmente a constante  $\tanh(L/|R|)/\rho C_o$  vezes  $A$  e a corrente costeira é a constante  $1/\rho h_o$  vezes  $A$ , é possível interpretar a função  $A$  diretamente ou como a MM ou como  $V_o$ , mediante uma simples mudança de escala. Esse expediente, fisicamente mais conveniente, será adotado doravante.

No método gráfico, mostrado na figura III.55, a evolução temporal da solução para a função  $A$  ao longo da costa (eixo horizontal) é mostrada em diferentes instantes de tempo, intervalados de  $\Delta t$ , como “fotografias instantâneas” sequenciais dispostas verticalmente de cima para baixo conforme indicado na figura. Nesse gráfico espaço-temporal  $(y,t)$ , as características são representadas por linhas inclinadas, indicadas por linhas tracejadas de cor verde na figura (III.55), e definidas por :

$$\xi = y(t) = y_o + C_* t \quad (\text{III.219 - bis})$$

Observa-se que a inclinação das linhas no plano  $(y, t)$  corresponde à velocidade  $C_*$ .

A característica usada na solução da seção anterior está assinalada na figura (III.55) com a cor preta e, portanto, a solução (temporal) apresentada na figura (III.54) aparece *ao longo* dessa linha e está também indicada na figura (III.55) pela linha vermelha pontilhada. O trecho onde o vento atua está indicado pela faixa de cor amarela a qual se mantém fixa no espaço (nesse exemplo).

Analizando o resultado, o primeiro fato a se constatar é que a MM resultante de um vento localizado *não* se restringe à região onde o vento atua. De fato, a MM que se desenvolve dentro da pista do vento *avança continuamente* ao longo da costa no sentido de  $y > 0$  com velocidade  $C_*$ . Dentro da pista do vento, a MM aumenta linearmente com o tempo até um valor limite  $(\eta_o)_{max}$  dado por (III.229b), alcançado ao final da pista, o qual mantém-se constante apesar do vento continuar soprando indefinidamente. Fora da pista, a MM avança progressivamente com uma frente de comprimento  $P$ , onde o nível sobe linearmente, seguida de uma sobre-elevação de altura constante igual a  $(\eta_o)_{max}$  [ver figura (III.55)]. Dessa forma, qualquer ponto da plataforma à direita da região onde o vento atua será afetada num intervalo de tempo determinado em função da distância e da velocidade  $C_*$ .

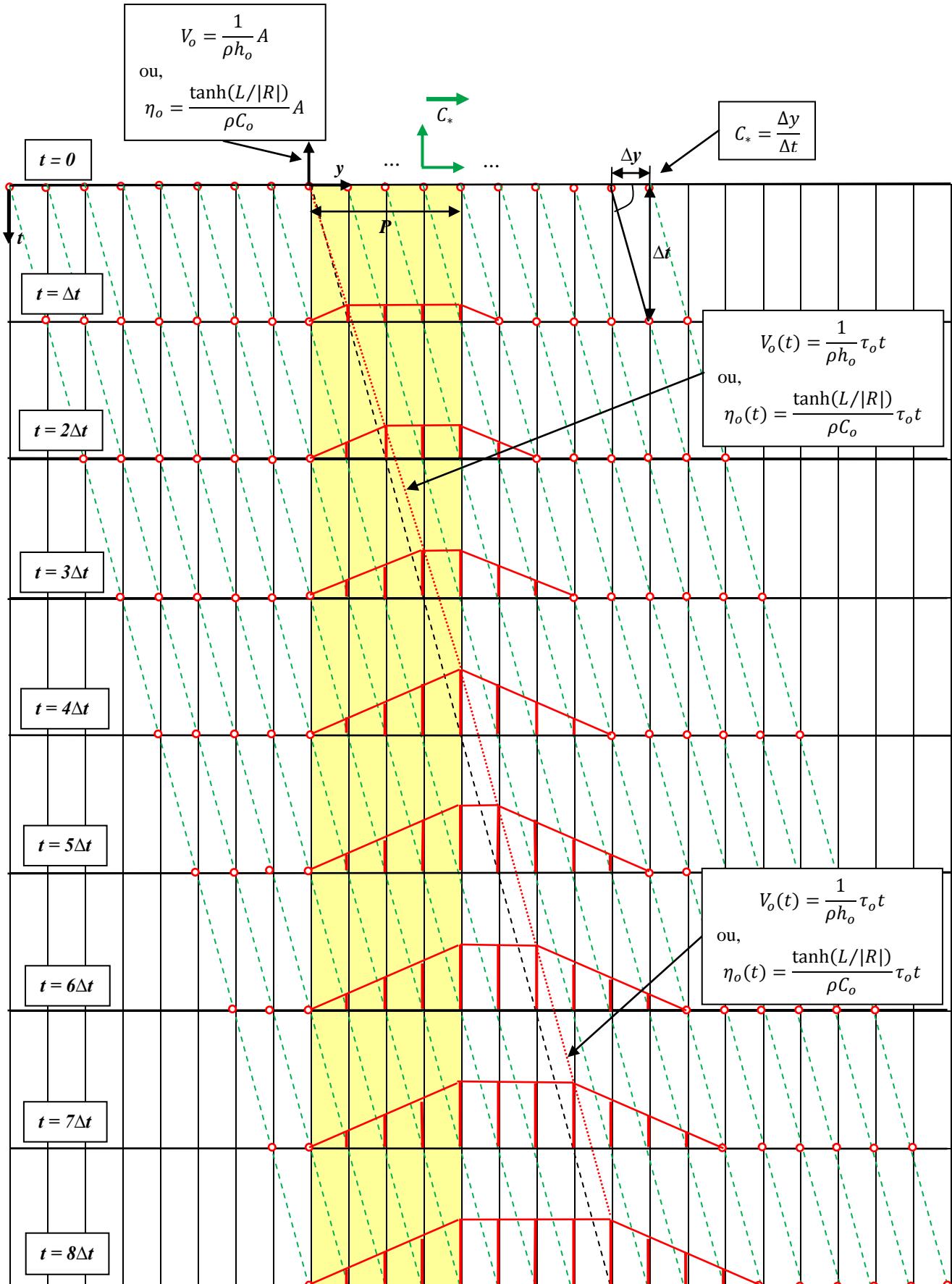


Figura III.55 – Solução para a corrente costeira e a MM do Exemplo#1 pelo método gráfico (ver texto para explicações)

### III.4.3.1.3 - Interpretação Física do Resultado

O resultado obtido acima é por demais importante e precisa ser entendido de forma mais aprofundada. Para tanto, analisaremos os aspectos físicos da solução primeiramente para uma plataforma “larga” e, a seguir, para uma plataforma “estreita”.

#### III.4.3.1.3.1 - Caso de uma Plataforma “Larga”

A interpretação física do resultado fica mais simples no caso particular de uma plataforma “larga” (onde  $L/R >> 1$ ). Para essa situação, a solução simplifica-se para:

$$\eta(x, \xi, t) = \frac{1}{\rho C_o} e^{-\frac{x}{|R|}} A(\xi, t) \quad (\text{III. 233})$$

$$V(x, \xi, t) = \frac{1}{\rho h_o} e^{-\frac{x}{|R|}} A(\xi, t) \quad (\text{III. 234})$$

$$U(x, \xi, t) = -\frac{\tau_y^W(\xi, t)}{\rho |f| h_o} \left[ 1 - e^{-\frac{x}{|R|}} \right] \quad (\text{III. 235})$$

$$C_* = C_o = \sqrt{gh_o} \quad (\text{III. 236})$$

Com,

$$A(\xi, t) = \int_{t_o}^t \tau_y^W(\xi) dt' \quad (\text{III. 237})$$

A figura (III.56) ilustra a solução completa para um instante de tempo  $T_s$  tal que  $T_s > T = P/C_o$ , cuja MM corresponderia à situação representada na figura (III.55) para o instante  $t = 8\Delta t$  (última linha da figura).

Nessa situação, o deslocamento da superfície *dentro* da pista de vento já atingiu uma condição permanente e, espacialmente, apresenta um crescimento linear ao longo da costa com valor máximo dado por:

$$(\eta_o)_{max} = \frac{\tau_o}{\rho C_o} \cdot T = \frac{\tau_o}{\rho C_o^2} \cdot P \quad (\text{III. 238})$$

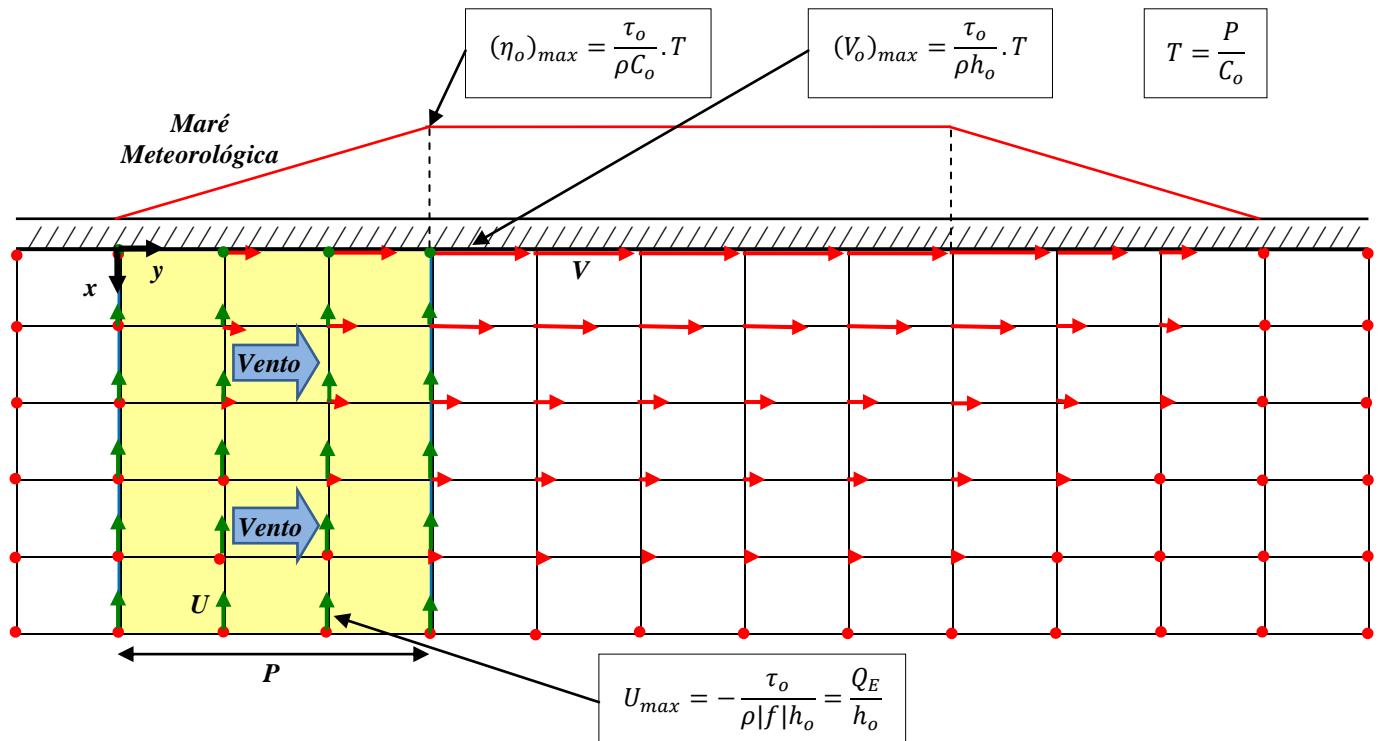
Na direção perpendicular à costa, o nível decai exponencialmente até zero a medida que  $x >> |R|$ .

Como já apontado, a solução é simétrica havendo, do lado oposto da pista, um trecho onde o deslocamento da superfície decresce linearmente, voltando a zero. Entre o trecho inicial e o final, o nível mantém-se constante. A “frente” da protuberância avança continuamente para a direita com velocidade  $C_o$  fazendo com que o trecho central vá se expandindo.

Como a função  $A(\xi, t)$  que aparece na solução para  $V$  é a mesma da solução para  $\eta$ , o campo de velocidade paralelo à costa ( $V$ ) tem a mesma estrutura do nível d’água (ver figura III.56), atingindo um valor máximo ao final da Pista dado por:

$$(V_o)_{max} = \frac{\tau_o}{\rho h_o} \cdot T = \frac{\tau_o}{\rho C_o h_o} \cdot P \quad (\text{III. 239})$$

O campo de velocidade perpendicular à costa ( $U$ ) existe apenas *dentro* da pista de vento indo de *zero* na costa até o transporte de Ekman longe da costa ( $x >> |R|$ ), conforme mostrado na figura (III.56).

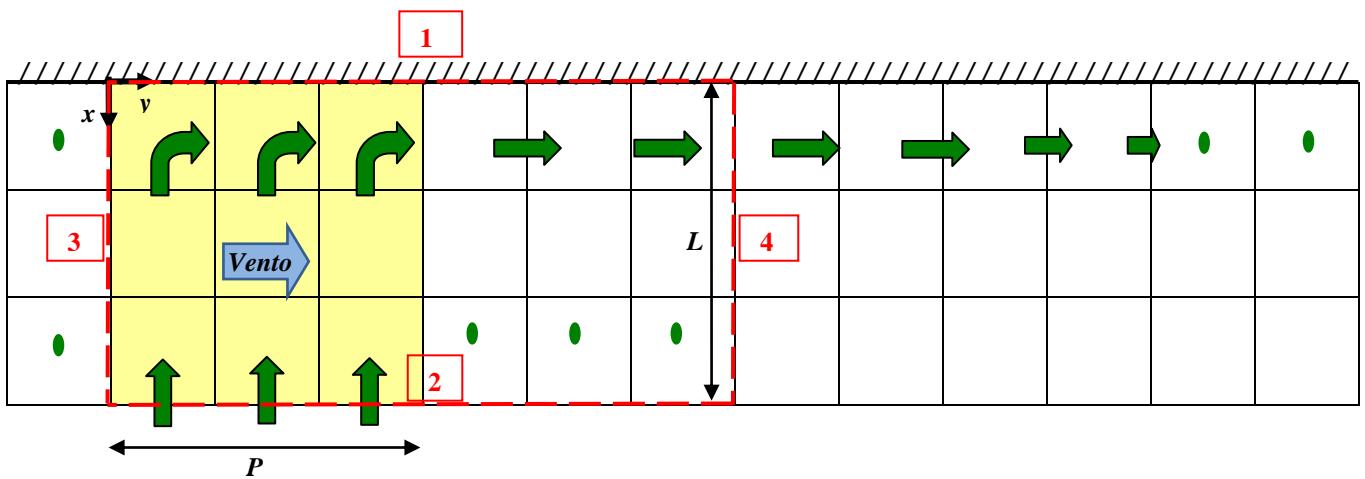


**Figura III.56** - Ilustração esquemática da solução para uma plataforma “larga” com vento no sentido positivo de  $y$ .

Algumas questões fundamentais sobre essa solução se apresentam:

- *Porque o nível d’água dentro da pista para de crescer se o vento continua atuando indefinidamente ?*

Essa questão é facilmente entendida analisando-se o balanço de massa no volume de controle (VC) assinalado pela linha vermelha tracejada na figura (III.57). O VC tem a forma de um retângulo com os lados “horizontais” sendo a costa (Seção 1) e o limite externo da plataforma (Seção 2); o lado “vertical” à esquerda é um corte perpendicular à costa bem no início da pista (Seção 3) e o lado “vertical” à direita um corte perpendicular à costa numa posição qualquer do trecho central da protuberância (Seção 4).



**Figura III.57** – Representação esquemática do balanço de massa correspondente a figura III.55

Como as velocidades nas Seções 1 e 3 são nulas, a ideia é simplesmente verificar se a vazão total que adentra o VC pela fronteira externa (Seção 2  $\rightarrow [Q_{tot}]_2$ ) se iguala à vazão total que sai do VC pela fronteira à direita (Seção 4  $\rightarrow [J_{tot}]_4$ ). Usando a solução, tem-se:

e,

$$[Q_{tot}]_2 = \int_0^P [Q_{x=-L}]_2 dy = -\frac{\tau_o}{\rho|f|} \left[ 1 - e^{-\frac{L}{|R|}} \right] \cdot \int_0^P dy = -\frac{\tau_o}{\rho|f|} P = Q_E \cdot P \quad (\text{III.240})$$

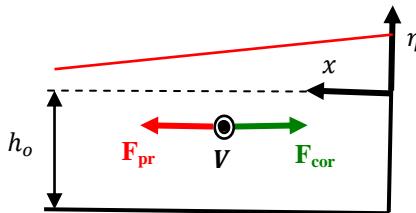
$$[J_{tot}]_4 = \int_0^P [J]_4 dx = \frac{\tau_o}{\rho C_o} P \cdot \int_0^L e^{-\frac{x}{|R|}} dx = -\frac{\tau_o}{\rho C_o} P \cdot |R| = -\frac{\tau_o}{\rho|f|} P = Q_E \cdot P \quad (\text{III.241})$$

Comparando-se os dois resultados, verifica-se que  $[Q_{tot}]_2 = [J_{tot}]_4$  atestando que o balanço de massa no VC está efetivamente equilibrado. Assim, o que se depreende dessa análise é que o nível para de crescer porque a água que é trazida continuamente para a costa pelo transporte de Ekman dentro da pista de vento não se acumula nesse trecho (nem retorna para o oceano na ausência de atrito), mas corre ao longo da costa abastecendo e expandindo a protuberância no sentido de  $y > 0$ . Assim, enquanto o vento soprar, a protuberância continuará a crescer e a se expandir ao longo da costa.

- Porque a Protuberância evolui no sentido de  $y > 0$  e não de  $y < 0$  ?

A resposta direta é que o sentido de evolução é controlado pelo sinal da velocidade  $C_*$  (ou  $C_o$  nesse exemplo) o qual, no hem. Sul e para o sistema de coordenadas adotado, é positivo.

Adicionalmente, vale observar que essa questão também está relacionada ao fato que a corrente paralela à costa é *geostrófica*; isso controla o sentido da corrente e, consequentemente, o sentido de avanço da protuberância em função do hemisfério em questão. De fato, o equilíbrio geostrófico no hem. Sul induz uma corrente (e um deslocamento da protuberância) no sentido de  $y > 0$  conforme mostrado na figura (III.58) abaixo:



**Figura III.58.** Corte esquemático perpendicular a costa válido para o Hem. Sul ilustrando o equilíbrio geostrófico. A linha vermelha é a posição da superfície,  $\mathbf{F}_{pr}$  é a força de pressão decorrente e  $\mathbf{F}_{cor}$  é a força de Coriolis associada a corrente  $V$  a qual, no hem. Sul, deve ficar a *esquerda* da velocidade. De acordo com a convenção oceanográfica, o ponto preto com o círculo em volta representa uma corrente perpendicular ao plano da folha no sentido saindo da folha, portanto, no sentido de  $y > 0$ .

No hem. Norte, o sentido da corrente geostrófica  $V$  e da velocidade  $C_o$  inverte-se-iam e a protuberância expandir-se-ia no sentido de  $y < 0$ .

- A velocidade de avanço da protuberância, dada por  $C_o = \sqrt{gh_o}$ , é compatível com o balanço de massa apresentado acima ?.

Para analisar essa questão é necessário retornar ao volume de controle mostrado na figura (III.57) e calcular o volume de água que adentra o VC pela fronteira externa (Seção 2) no intervalo de tempo  $dt$  ( $[Vol]_2$ ) em função da vazão induzida pelo vento. Usando a solução esse volume vale:

$$[Vol]_{dt} = [Q]_{x=L} \cdot dt = -\frac{\tau_o}{\rho|f|} P \cdot dt \quad (\text{III.242})$$

Como visto, o avanço da protuberância se deve ao acúmulo de água no VC. Chamando de  $dy$  a expansão da protuberância ocorrida durante o intervalo de tempo  $dt$ , o volume de água acumulado no VC durante o intervalo  $dt$  pode também ser calculado em função do nível d'água pela expressão:

$$[Vol]_{dt} = \left( \int_0^L \eta dx \right) \cdot dy = \left( \frac{\tau_o}{\rho C_o^2} P \int_0^L e^{-\frac{x}{|R|}} dx \right) \cdot dy = \left( -\frac{\tau_o}{\rho C_o^2} P |R| \right) \cdot dy = -\frac{\tau_o}{\rho|f|C_o} P \cdot dy \quad (\text{III.243})$$

Igualando-se os volumes, tem-se:

$$\frac{\tau_o}{\rho|f|} P \cdot dt = \frac{\tau_o}{\rho|f|C_o} P \cdot dy \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = C_o$$

Como a velocidade de avanço da protuberância é dada por  $dy/dt$ , confirma-se que a velocidade de propagação  $C_o$ , independentemente de argumentos dinâmicos, é a velocidade que garante a continuidade de massa no presente problema.

- *Como fica a solução se o sentido do vento for invertido?*

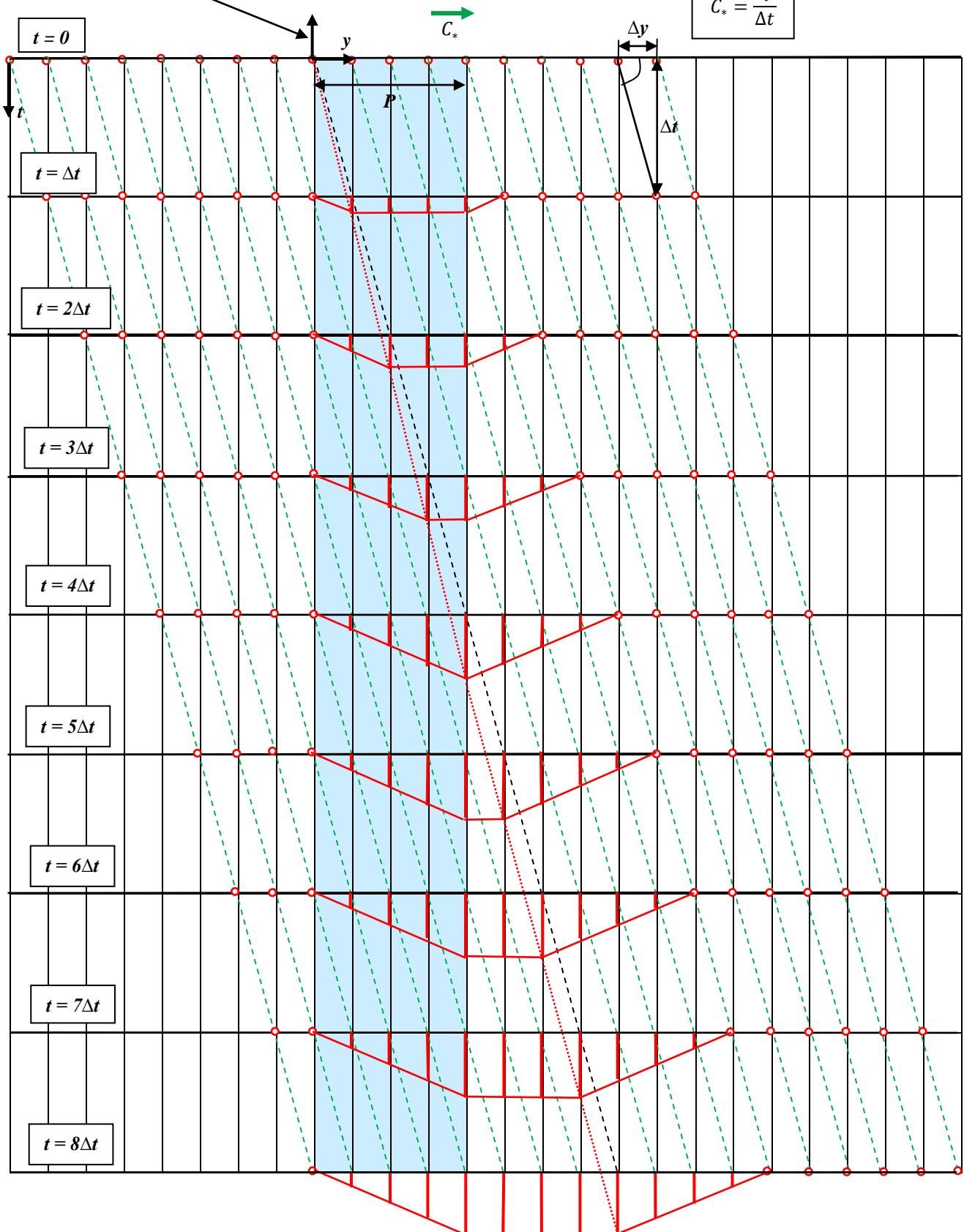
Uma inversão no sentido do vento torna a tensão negativa e, portanto,  $\tau_o$  deve ser substituído por  $-\tau_o$  nas equações acima. É importante salientar que o sinal de  $C_o$  só muda com a mudança de hemisfério e, portanto, a inclinação das características *não* é afetada pela inversão de sentido do vento. A figura III.59 apresenta a solução da MM para esse caso, onde a cor azul representa vento em sentido negativo. Um vento no sentido de  $y < 0$  vai causar um rebaixamento do nível na costa.

$$V_o = \frac{1}{\rho h_o} A$$

ou,

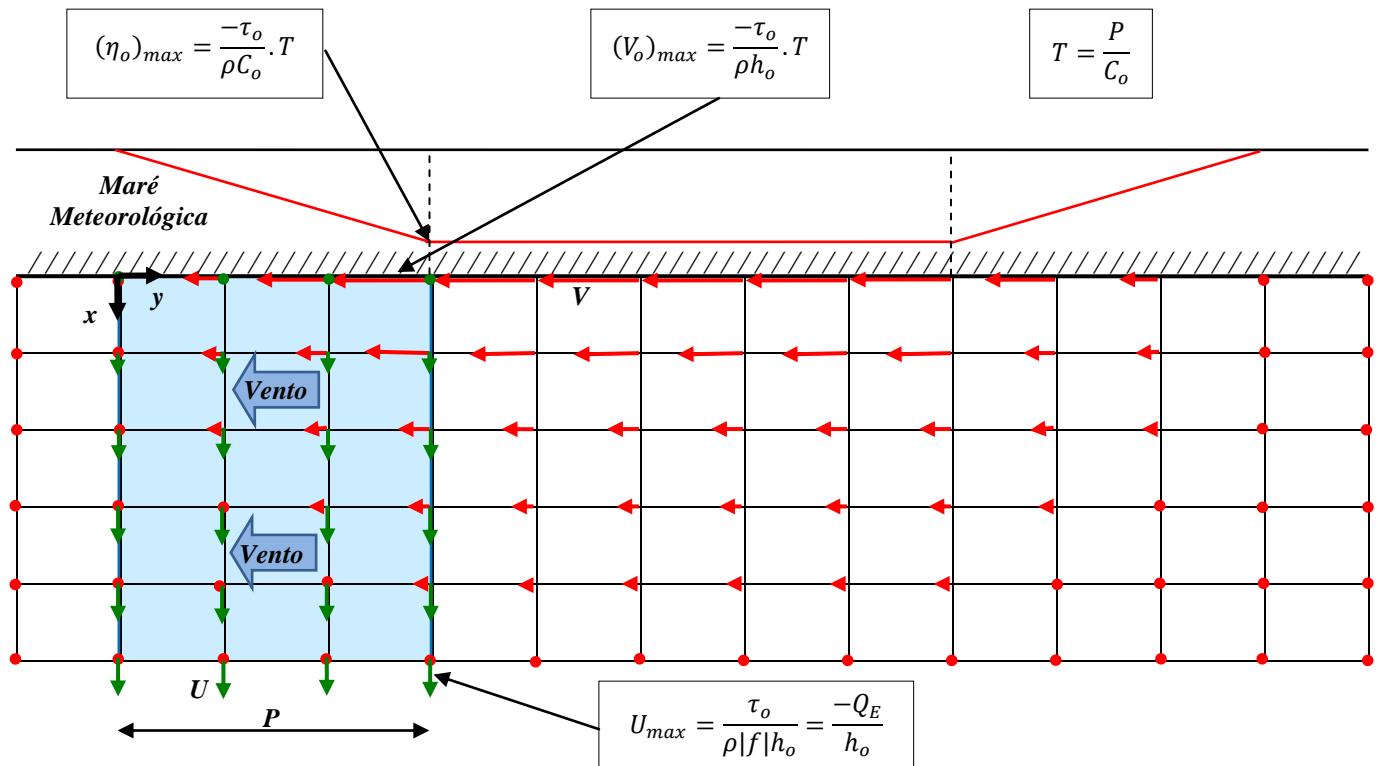
$$\eta_o = \frac{\tanh(L/|R|)}{\rho C_o} A$$

$$C_* = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$



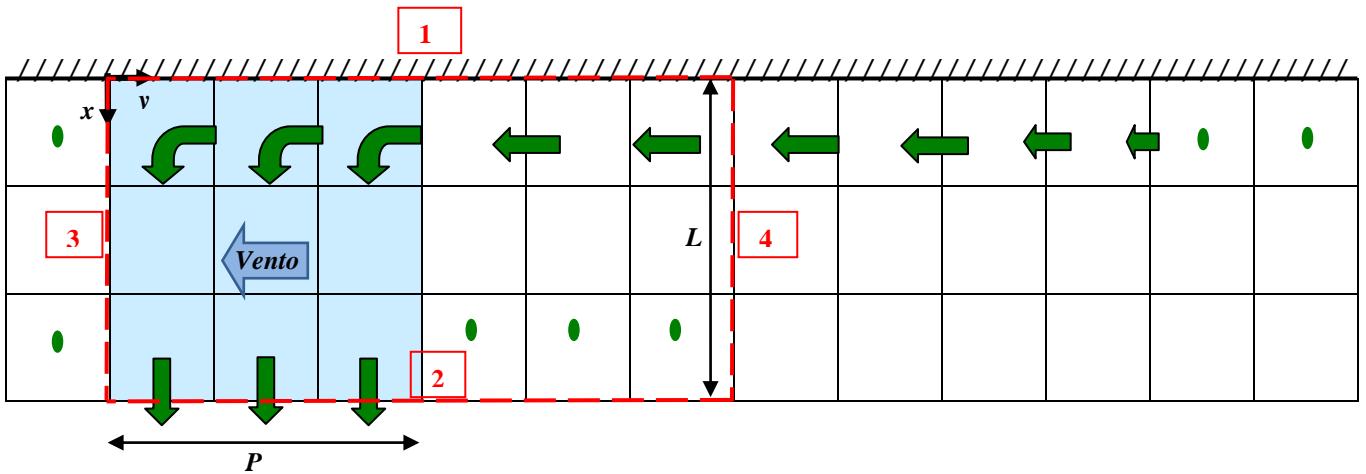
**Figura III.59** – Similar a figura (III.55) para um vento soprando no sentido negativo de  $y$

O campo de velocidades para um vento no sentido negativo de  $y$  está mostrado na figura (III.60).



**Figura III.60** - Ilustração esquemática da solução para uma plataforma “larga” com vento no sentido negativo de  $y$ .

A figura (III.61) mostra o balanço de massa para um vento soprando no sentido negativo de  $y$ .



**Figura III.61** - Similar a figura (III.56) para o caso de vento soprando no sentido negativo de  $y$ .

Do ponto de vista físico, observa-se que o vento agora atua no sentido de afastar a água da costa *dentro da pista* causando um rebaixamento de nível que avança progressivamente na direção de  $y > 0$ . Todas as considerações feitas para o caso de vento positivo continuam válidas nesse caso.

### III.4.3.1.3.2 - Caso de uma Plataforma “Estreita”

No caso de uma plataforma “estreita”, a solução é reescrita abaixo:

$$\eta(x, \xi, t) = \frac{1}{\rho C_o} \frac{\sinh[(L-x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} A(\xi, t) \quad (\text{III. 210 - bis})$$

$$V(x, \xi, t) = \frac{1}{\rho h_o} \frac{\cosh[(L-x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} A(\xi, t) \quad (\text{III. 211 - bis})$$

$$U(x, \xi, t) = -\frac{\tau_y^W(\xi, t)}{\rho |f| h_o} \left[ 1 - \frac{\cosh[(L-x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} \right] + \frac{1}{\rho |f| h_o} \left\{ \left[ \frac{\sinh[(L-x)/|R|]}{\sinh[L/|R|]} - \frac{\cosh[(L-x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} \right] C_* \frac{\partial A(\xi, t)}{\partial y} \right\}$$

(III. 212 - bis)

$$C_* = \tanh(L/|R|) C_o \quad (\text{III. 207 - bis})$$

Com,

$$A(\xi, t) = \int_{t_o}^t \tau_y^W(\xi) dt' = \tau_o(t - t_o) \quad (\text{III. 224 - bis})$$

Considerando o caso de um vento no sentido positivo de  $y$ , no hemisfério Sul, a solução para a *Maré Meteorológica* tem exatamente a mesma estrutura mostrada na figura III.54 com a única diferença sendo a inclinação das características, o que implica que a distância  $P$  nesse caso teria um valor numérico diferente do caso anterior. Por simplicidade, a figura (III.54) será mantida como representativa da solução para a plataforma “estreita” e não será repetida.

O valor máximo atingido (ao final da pista) continua sendo:

$$(\eta_o)_{max} = \frac{\tanh(L/|R|)}{\rho C_o} \tau_o T \quad (\text{III. 226b - bis})$$

onde,

$$T = \frac{P}{C_*}$$

Os campos de velocidade estão mostrados esquematicamente na figura (III.56). A velocidade  $V$  alcança seu valor máximo na costa e tem um valor finito na borda da plataforma. As magnitudes desses valores para o ponto final da pista são:

$$(V_{x=L})_{max} = \frac{\tau_o}{\rho h_o \cosh(L/|R|)} \cdot T \quad e \quad (V_o)_{max} = \frac{\tau_o}{\rho h_o} \cdot T \quad (\text{III. 244a, b})$$

A diferença mais importante em relação ao caso anterior ocorre na velocidade  $U$ . De fato, a corrente normal à costa agora é nula apenas no trecho central da solução onde a função  $A$  (logo,  $\eta_o$ ) é constante. Dentro da pista,  $U$  passa a ter duas parcelas, uma devido ao vento ( $U_I$ ) e outra ( $U_{II}$ ) oriunda de variações da função  $A$  na dir-y. O valor de  $U$  na borda da plataforma continental e *dentro* da pista de vento é dado por:

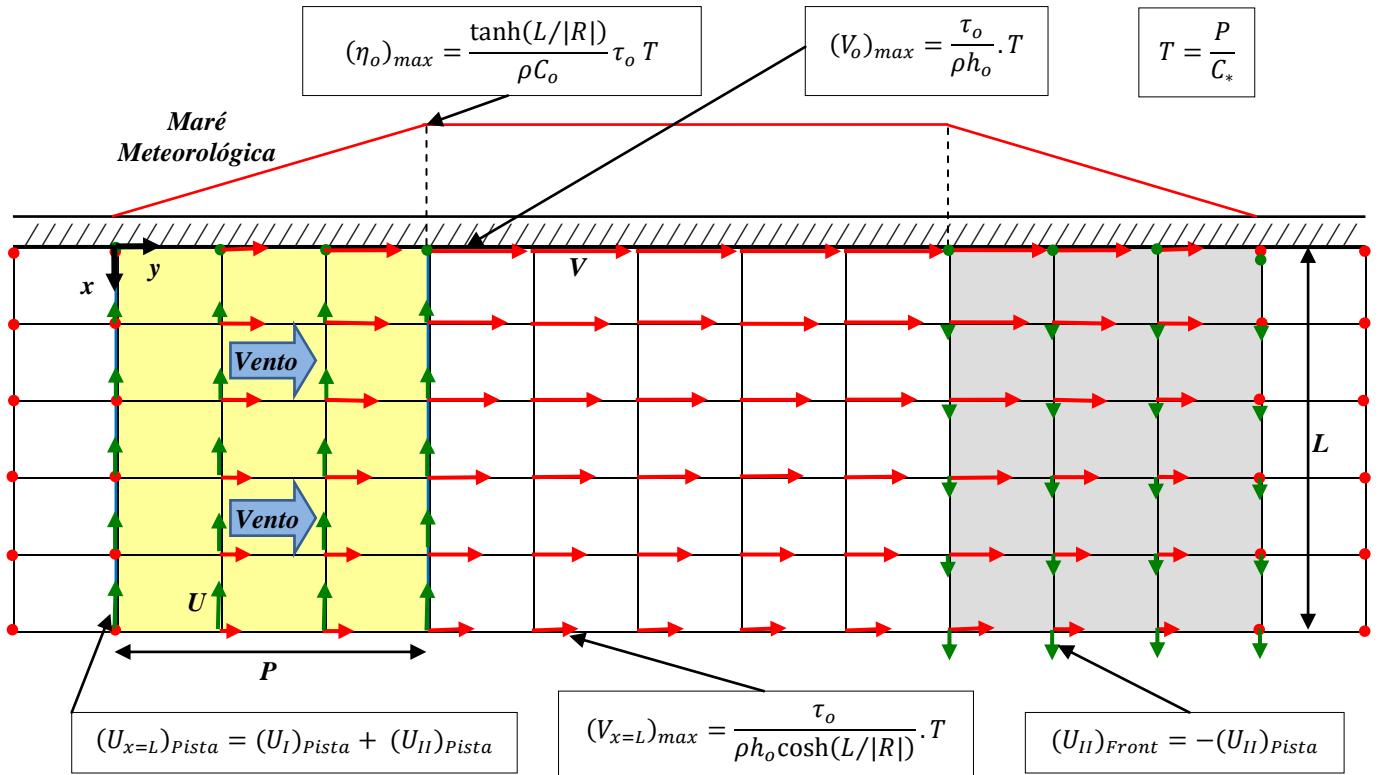
$$U(L, y, t) = -\underbrace{\frac{\tau_y^W(y, t)}{\rho |f| h_o} \left[ 1 - \frac{1}{\cosh(L/|R|)} \right]}_{(I)_{Pista}} - \underbrace{\frac{1}{\rho |f| h_o \cosh(L/|R|)} C_* \frac{\partial A(y, t)}{\partial y}}_{(II)_{Front}} \quad (\text{III. 245})$$

Na região do “front” da protuberância (sombreado pela cor cinza na figura), a velocidade  $U$  na borda da plataforma vale:

$$(U_{x=L})_{Front} = -\underbrace{\frac{1}{\rho |f| h_o \cosh(L/|R|)} C_* \frac{\partial A}{\partial y}}_{(U_{II})_{Front}} \quad (\text{III. 246})$$

Curiosamente, no “front” da protuberância, devido a simetria do problema, o comportamento da função  $A$  é o reflexo daquele do trecho inicial. Com isso, a derivada  $\frac{\partial A}{\partial y}$  vai ter o mesmo valor nos dois trechos, porém com sinais trocados, sendo no trecho do “front”  $\frac{\partial A}{\partial y} < 0$ . Assim, tem-se que  $(U_{II})_{Pista} = -(U_{II})_{Front}$ . Essa propriedade da solução produz um

resultado curioso: devido à estreiteza da plataforma, a subida de nível d'água na pista de vento aspira um volume extra de água do oceano o qual é expulso da plataforma e devolvido ao oceano no trecho do “front”. A figura (III.62) ilustra de forma esquemática as propriedades da solução.



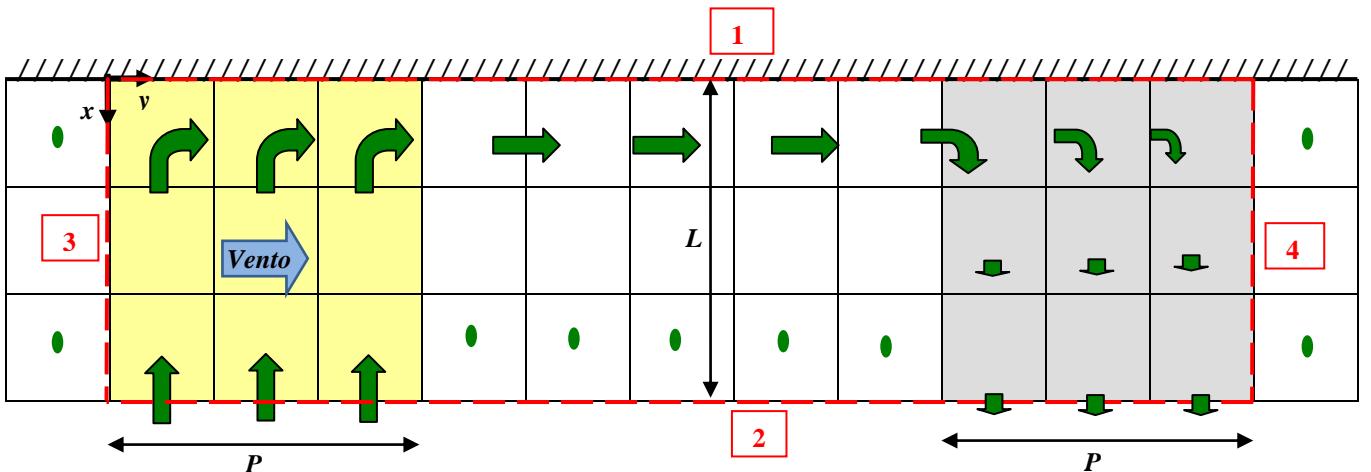
**Figura III.62** - Ilustração esquemática da solução para uma plataforma “estreita” com vento no sentido positivo de  $y$ .

De acordo com a teoria, a velocidade de avanço da protuberância nesse caso é dada por  $C_* = \tanh(L/|R|) C_o$ , portanto, a redução da largura da plataforma faz com que a protuberância avance mais lentamente em relação a velocidade  $C_o$ . Assim, novamente, a pergunta que se coloca é :

- *Essa redução na velocidade de avanço da protuberância no caso de uma plataforma estreita é compatível com o balanço de massa do problema ?*

A exemplo do que foi feito para a plataforma “larga”, vamos analisar o balanço de massa no volume de controle indicado na figura (III.63) pela linha vermelha tracejada e calcular o volume de água líquido que adentra o VC no intervalo de tempo  $dt$  ( $[Vol]_{dt}$ ) o qual ocorre pela fronteira externa ( Seção 2 ), tanto no trecho da pista de vento quanto no trecho do “front”. Observando o cancelamento da parcela  $U_{II}$  apontado acima, o volume líquido vale:

$$[Vol]_{dt} = [Q]_{x=L} \cdot dt = -\frac{\tau_o}{\rho |f|} \left(1 - \frac{1}{\cosh(L/|R|)}\right) P \cdot dt \quad (\text{III.247})$$



**Figura III.63** - Representação esquemática do balanço de massa correspondente a figura III.62

Como visto na seção anterior, o avanço da protuberância se deve ao acúmulo de água no VC. Chamando de  $dy$  a expansão da protuberância ocorrida durante o intervalo de tempo  $dt$ , o volume de água acumulado no VC durante esse intervalo pode também ser calculado em função do nível d'água pela expressão:

$$[Vol]_{dt} = \left( \int_0^L \eta \, dx \right) \cdot dy = \left( \frac{1}{\rho C_o} \int_0^L \frac{\sinh[(L-x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} \, dx \right) \tau_o T \cdot dy = -\frac{|R|}{\rho C_o} \left( 1 - \frac{1}{\cosh(L/|R|)} \right) \tau_o T \cdot dy$$

Como  $|R| = C_o/|f|$  e  $T = P/C_*$ , tem-se:

$$[Vol]_{dt} = -\frac{\tau_o}{\rho |f| C_*} P \left( 1 - \frac{1}{\cosh(L/|R|)} \right) \cdot dy \quad (\text{III. 248})$$

Igualando-se os volumes, tem-se:

$$\frac{\tau_o}{\rho |f|} \left( 1 - \frac{1}{\cosh(L/|R|)} \right) P \cdot dt = \frac{\tau_o}{\rho |f| C_*} \left( 1 - \frac{1}{\cosh(L/|R|)} \right) P \cdot dy \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = C_* \quad (\text{III. 249})$$

Da mesma forma que no caso da plataforma “larga”, como a velocidade de avanço da protuberância é dada por  $dy/dt$ , confirma-se que a velocidade de propagação dada por  $C_*$ , independentemente de argumentos dinâmicos, é a velocidade que garante a continuidade de massa no problema da plataforma “estreita”.

Fisicamente, a protuberância avança mais lentamente nesse caso porque o volume de água “bombeado” para a costa pelo vento diminui a medida que a plataforma se estreita. Assim, mantidos os demais parâmetros do problema, quanto mais estreita for a plataforma continental, mais lento será o avanço da perturbação ao longo da costa.

### III.4.3.2 - Exemplo #2 - Vento Uniforme com Pista e Duração Finitas

Essa sessão analisará uma variante da situação anterior na qual um vento uniforme com pista de largura  $P$  atua por um tempo finito ( $T_w$ ), mantendo intensidade *constante* no intervalo. Obviamente os valores de  $P$  e  $T_w$  são arbitrários. Para simplificar, sem perda de generalidade, vamos considerar que o tempo de atuação do vento ( $T_w$ ) coincida com o tempo necessário para que a perturbação cubra a distância  $P$ , ou seja que  $T_w = T \equiv P/C_*$ .

A prescrição da tensão do vento nesse caso é:

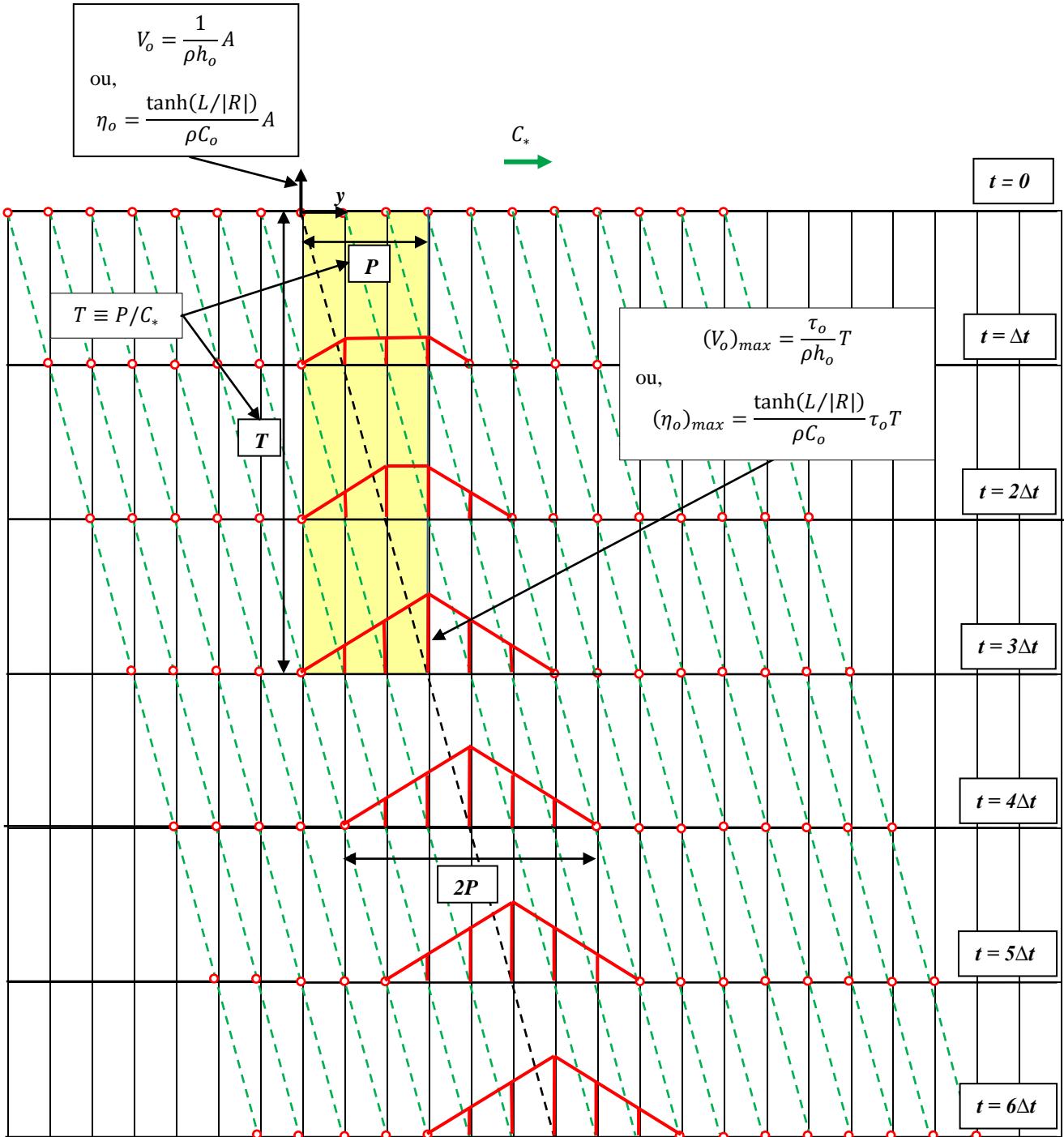
$$\tau_y^W(y, t) = \tau_o ; \quad \text{para } 0 < y < P \quad \text{e} \quad 0 < t < T$$

Valendo *zero* fora dessas condições

Com a tensão do vento constante e uniforme dentro da pista, a solução para a função  $A$  é similar a dos casos anteriores:

$$A(\xi, t) = \int_{t_o}^t \tau_y^W(\xi) dt' = \tau_o(t - t_o) \quad (\text{III.224 - bis})$$

A figura III.64 abaixo ilustra graficamente a solução para  $\Delta t = T/3$ . Essa solução é representativa para plataformas com qualquer largura, a única diferença sendo a velocidade das características e, consequentemente, a inclinação das linhas tracejadas verdes.



**Figura III.64** – Solução para a MM e a corrente costeira do Exemplo#2 pelo método gráfico (ver texto para explicações)

A solução mostra que o vento de duração finita cria um “pulso” móvel que se desloca com velocidade  $C_*$  ao longo da costa, no sentido positivo de  $y$ . É interessante observar que a largura do pulso corresponde ao dobro da pista de vento.

Os campos de velocidade associados podem ser obtidos de forma análoga à usada na seção anterior e não serão repetidos. A interpretação física da solução também não traz novidades em relação ao que foi visto anteriormente.

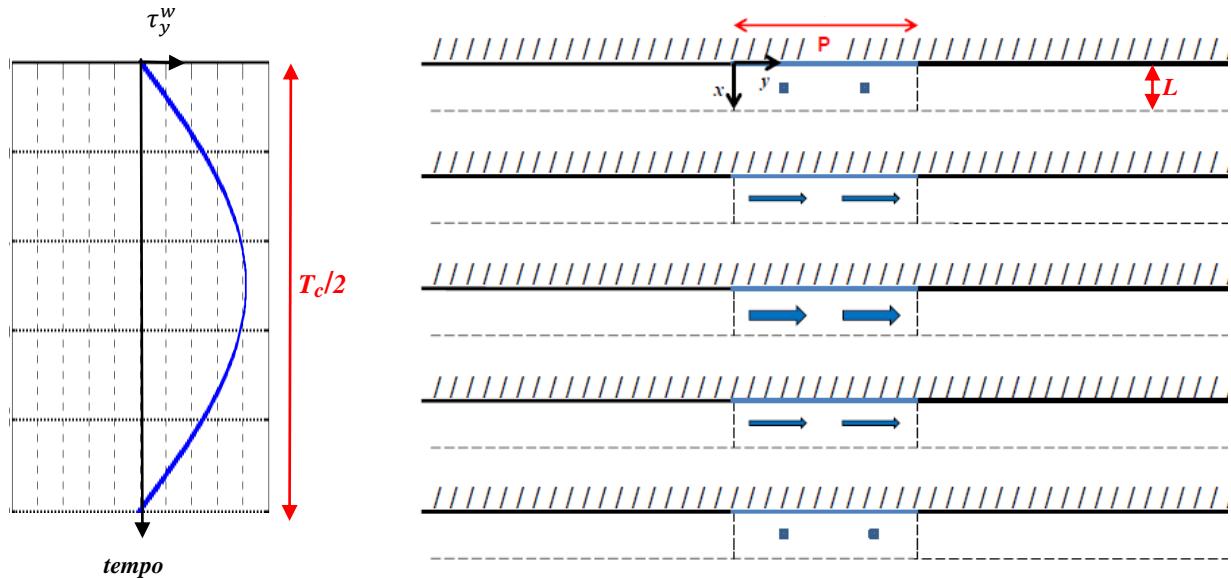
### III.4.3.3 - Exemplo #3 - Pulso de vento com Tensão Uniforme Espacialmente e com Variação Temporal Senoidal

Nessa aplicação, como na anterior, vamos supor uma tensão de vento uniforme espacialmente dentro de uma pista de comprimento  $P$  de duração finita  $T_w$ . Nesse exemplo, vamos supor que a tensão de vento *varie no tempo* segundo uma senóide de período  $T_c$ , porém com apenas meio ciclo de duração, i.e.,  $T_w \equiv T_c/2$ , de modo a criar um pulso de tensão de vento com variação suave. Nessa situação, a tensão de vento é prescrita por:

- Para  $0 < y < P$  (dentro da pista):  $\tau_y^w(t) = \tau_o \sin\left(\frac{\pi}{T_c}t\right)$  para  $0 < t < T_w$  e  $\tau_y^w = 0$  para  $t > T_w$
- Para  $y > P$ :  $\tau_y^w = 0$  e para  $t$  qualquer (Não há vento fora da Pista em momento algum)

Para facilitar o raciocínio, vamos considerar que  $P \equiv T_w C_* = T_c C_*/2$ . Fisicamente isso corresponde a considerar que a duração do vento equivale ao tempo que a perturbação demora para percorrer o comprimento da pista. Esse caso é similar ao tratado por Gill (1982).

A figura (III.65) ilustra graficamente o caso em estudo.



**Figura III.65** – Representação esquemática do pulso de tensão de vento do Exemplo#3

Ao longo da característica, a equação para a função  $A$  é escrita como:

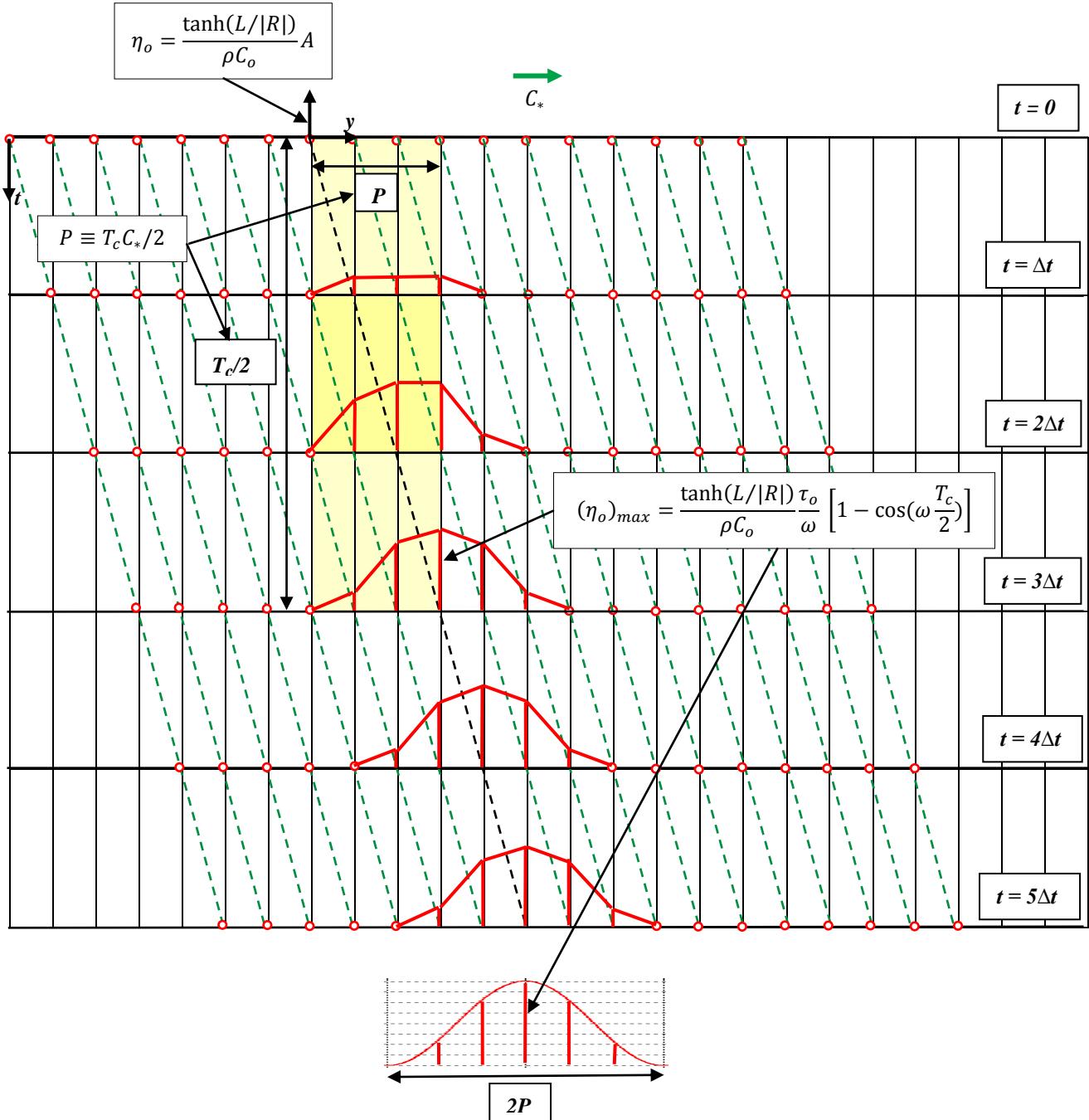
$$\frac{\partial A(\xi, t)}{\partial t} = \tau_y^w(\xi, t) = \tau_o \sin(\omega t) \quad (\text{III.250})$$

Onde,  $\tau_o$  = amplitude da oscilação da tensão do vento,  $\xi = y_o + C_* t$  e  $\omega = \frac{2\pi}{T_c}$

Integrando a partir de  $t = 0$ , tem-se:

$$A(\xi, t) = \tau_o \int_{t_o=0}^t \sin(\omega t') dt' = \frac{\tau_o}{\omega} [1 - \cos(\omega t)] \quad (\text{III.251})$$

A solução para a função  $A \sim \eta_o$  pelo método gráfico está mostrada na figura (III.66). No gráfico, a faixa colorida corresponde à região de atuação do vento e a intensidade da cor indica a magnitude da tensão. Para facilitar o traçado, a parte curva (cossenoide) foi substituída por segmentos retos.



**Figura III.66** – Solução para a MM do Exemplo#3 pelo método gráfico (ver texto para explicações)

A solução gráfica mostra que o resultado do pulso de tensão de vento dá origem a um pulso de sobre-elevação de nível móvel que se desloca no sentido  $y > 0$  com velocidade  $C_*$ . Após um período inicial de formação, que dura enquanto o vento sopra, o pulso assume uma forma fixa com as seguintes características:

- Amplitude máxima :

$$(\eta_o)_{\max} = \frac{\tanh(L/|R|) \tau_o}{\rho C_o} \underbrace{\left[ 1 - \cos\left(\omega \frac{T_c}{2}\right) \right]}_{=2} = \frac{\tanh(L/|R|) 2\tau_o}{\rho C_o} \frac{2}{\omega} \quad (\text{III. 252})$$

- Comprimento igual ao dobro da pista:  $L_y = 2P$
- Velocidade de deslocamento igual a  $C_*$ .

No sistema de coordenadas  $(y, t)$ , o pulso móvel resultante pode ser descrito pela seguinte expressão:

$$\eta_o(y, t) = \begin{cases} (\eta_o)_{max} \cdot [1 - \cos(\omega y)], & \text{para: } C_* t' \leq y \leq (2P + C_* t') \\ 0, & \text{para: } 0 < y < C_* t' \quad e \quad \text{para: } y > (2P + C_* t') \end{cases} \quad \begin{array}{l} (\text{III. 253a}) \\ (\text{III. 253b}) \end{array}$$

onde,

$$t' = 0.5T_c + t \quad (\text{III. 253c})$$

Como mencionado acima, um problema similar é tratado por Gill (1982), pag 401, e a presente solução pode ser comparada com a solução lá apresentada. Na fig. 10.12 (pag 402), Gill mostra a evolução temporal do pulso de nível desde o início do vento e uma comparação desses gráficos com os aqui apresentados indica a equivalência entre as duas soluções.

Na pag. 401, Gill apresenta expressões para a função  $A$  no espaço  $(x, t)$  [equivalente ao nosso  $(y, t)$ ] que descrevem a evolução do pulso desde o início, porém sem detalhar *como* as mesmas foram obtidas. Observando que Gill trata o problema de forma adimensional, a terceira das equações (10.10.21) daquele autor *deve* corresponder a equação (III.253) mostrada acima.

Vale salientar que Gill usa a presente solução para retratar de forma simplificada um evento de MM ocorrido na costa leste da Grã-Bretanha no mês de Fevereiro do ano de 1953 conforme mostrada na figura 10.10 daquele autor. Esse evento ocasionou a famosa inundação de áreas baixas na costa da Holanda com resultados dramáticos. [ Por coincidência, esse episódio ocorreu exatamente no dia do nascimento do autor do presente trabalho no Rio de Janeiro ].

Na finalização desse exemplo, vale ressaltar o que Gill tem a dizer sobre a solução analítica aproximada do problema: “*A despeito da sua simplicidade, o modelo guarda muitas características em comum com o pulso de sobre-elevação de nível (“surge”) observado*”.

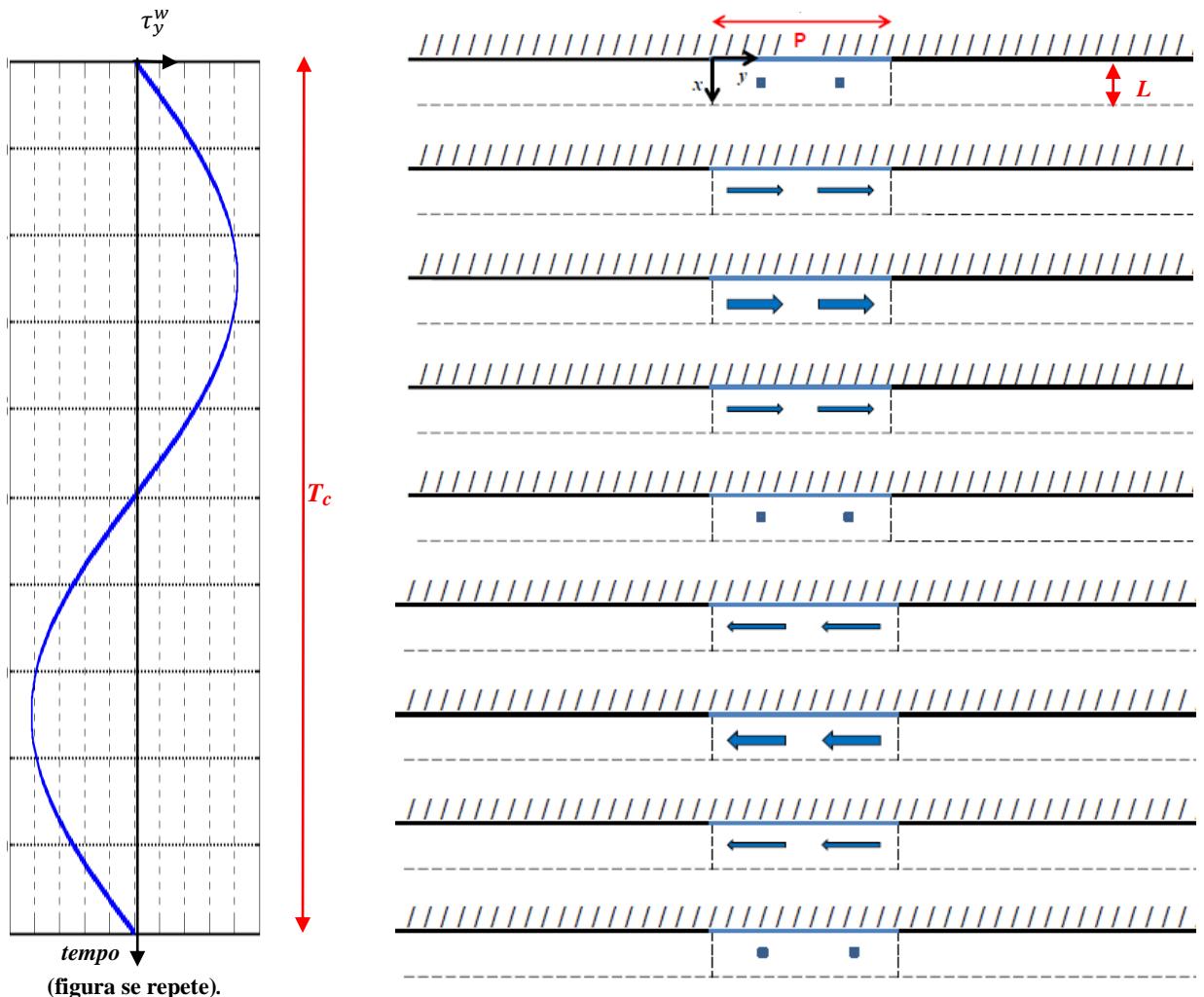
### III.4.3.4 - Exemplo #4 - Geração de Ondas Livres a partir de Vento Localizado

Supor Tensão de Vento uniforme espacialmente dentro da Pista de comprimento  $P$  e com uma variação temporal de variação senoidal com período  $T_c$ , tal que:

$$\text{Para } 0 < y < P \quad \text{e} \quad 0 < t < T_c \quad \rightarrow \quad \tau_y^w(t) = \tau_o \sin\left(\frac{2\pi}{T_c}t\right)$$

$$\text{Para } y > P \quad \text{e para } t \text{ qualquer} \quad \rightarrow \quad \tau_y^w = 0 \quad (\text{Não há vento fora da Pista em momento algum})$$

A figura (III.67) abaixo ilustra graficamente o caso em estudo.



**Figura III.67** - Representação esquemática do campo de tensão de vento senoidal localizado do Exemplo#4.

Ao longo da característica, a equação é escrita como:

$$\frac{\partial A(\xi, t)}{\partial t} = \tau_y^w(\xi, t) = \tau_o \sin(\omega t) \quad (\text{III. 254})$$

Onde,  $\tau_o$  = amplitude da oscilação da tensão do vento,  $\xi = y_o + C_* t$  e  $\omega = \frac{2\pi}{T_c}$

Integrando a partir de  $t = 0$ , tem-se:

$$A(\xi, t) = \tau_o \int_{t_o=0}^t \sin(\omega t') dt' = \frac{\tau_o}{\omega} [1 - \cos(\omega t)] \quad (\text{III.255})$$

A solução para a função  $A$ , apresentada na figura III.67, mostra a evolução da resposta do nível d'água sobre a plataforma continental para esse vento senoidal. A parte forçada da resposta restringe-se à zona da pista do vento, fora dessa região surge uma *onda livre*, de forma senoidal, que se propaga ao longo da costa no sentido de  $y > 0$  com velocidade  $C_*$  e amplitude  $a$ . A Maré Meteorológica induzida por essa onda pode ser descrita pela expressão:

$$\eta_o(y, t) = a \sin(\lambda y - \omega t) \quad (\text{III.256})$$

De acordo com a solução mostrada na figura III.68, a onda livre tem a mesma frequência da forçante ( $\omega = \frac{2\pi}{T_c}$ ), comprimento igual ao dobro da pista ( $L_y = 2P$  e  $\lambda = \frac{\pi}{P}$ ) e amplitude na costa dada por (III.255) com  $t = \frac{T_c}{2}$ :

$$a = \frac{\tanh(L/|R|)}{\rho C_o} \frac{\tau_o}{\omega} \underbrace{\left[1 - \cos\left(\omega \frac{T_c}{2}\right)\right]}_{=2} = \frac{2C_*}{\rho g h_o \omega} \tau_o$$

Desconsiderando o transiente inicial e a fase da onda, a MM ocasionada pela onda livre resultante pode ser escrita como:

$$\eta_o(y, t) = \frac{2C_*}{\rho g h_o \omega} \tau_o \sin(\lambda y - \omega t) \quad (\text{III.257})$$

com:

$$\omega = \frac{2\pi}{T_c} \quad (\text{III.258a})$$

e,

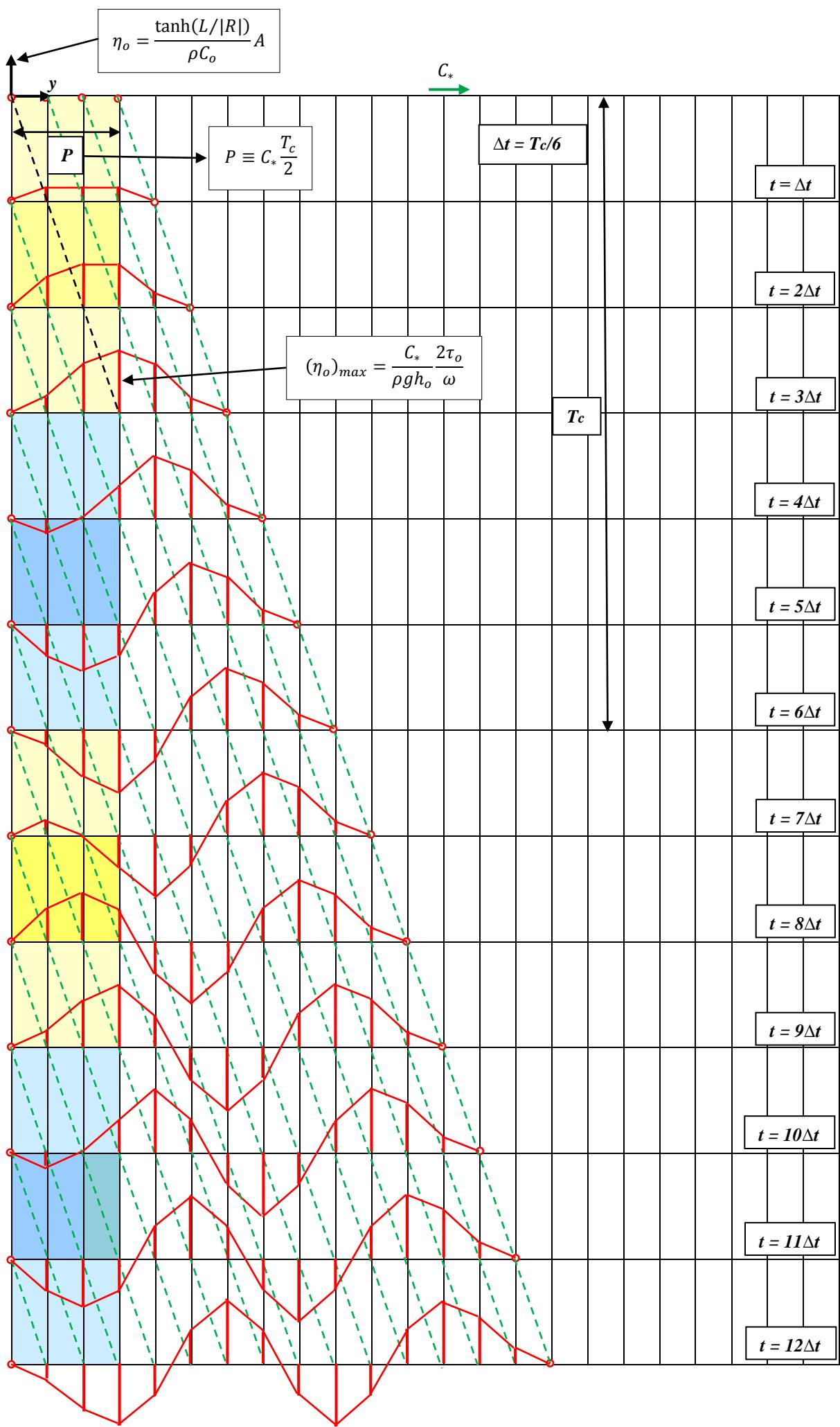
$$\lambda = \frac{\pi}{P} \quad (\text{III.258b})$$

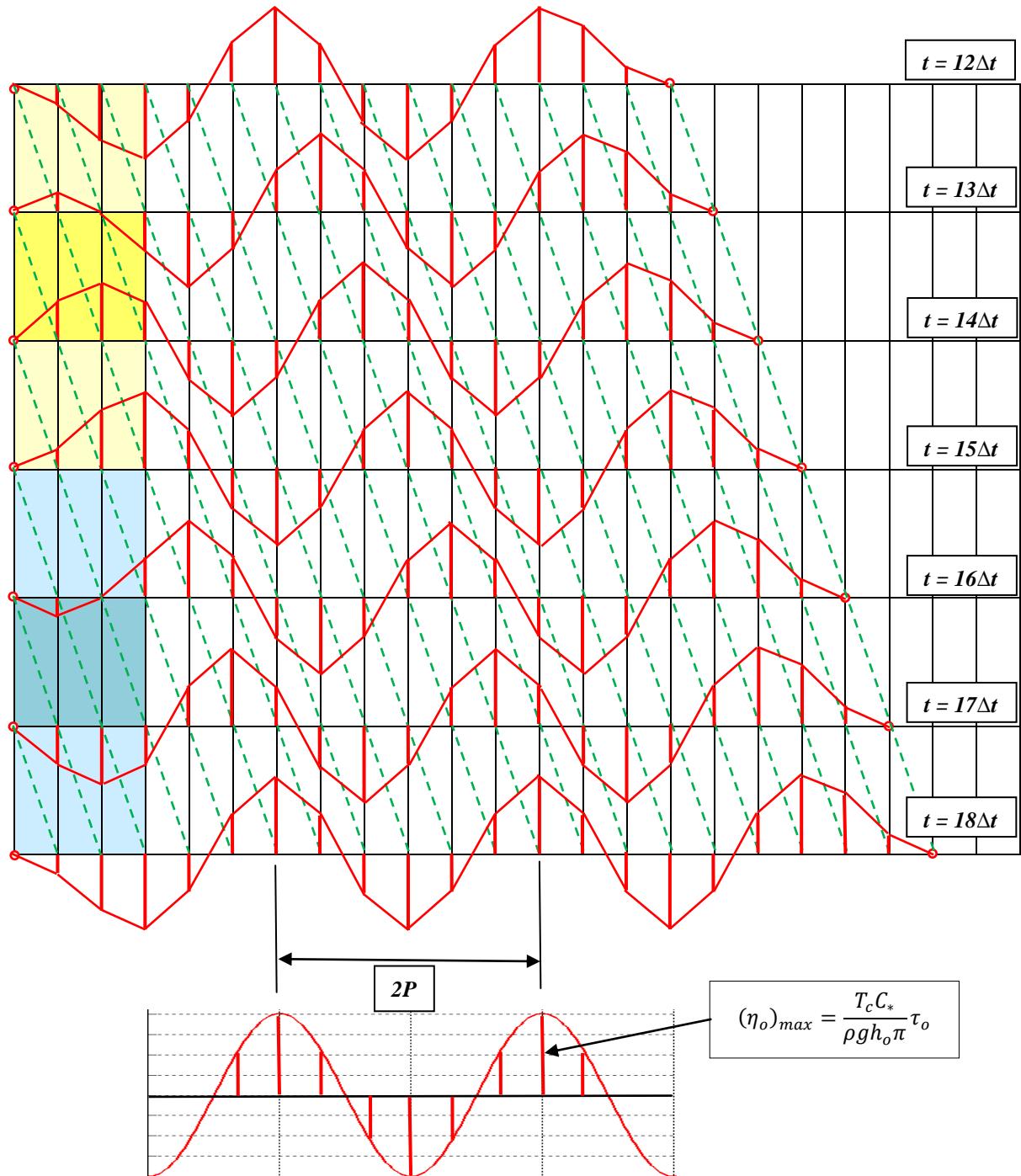
Confirmando, a velocidade de propagação da onda é:

$$C = \frac{2P}{T_c} = \frac{2}{T_c} \frac{C_* T_c}{2} = C_*$$

Alternativamente, a onda pode ser escrita diretamente em termos de  $T_c$  e  $P$  por :

$$\eta_o(y, t) = \frac{T_c C_*}{\rho g h_o \pi} \tau_o \sin\left(\frac{\pi}{P} y - \frac{2\pi}{T_c} t\right)$$





**Figura III.68** – Solução para a MM do Exemplo#4 pelo método gráfico (ver texto para explicações)

### III.4.3.5 - Exemplo #5 - Vento com Pista Móvel

Na natureza, o *sistema atmosférico* que produz o vento raramente permanece estacionário, o usual é que ele se mova com velocidade própria. Assim sendo, casos de vento com pista *móvel* constituem situações relevantes que serão analisadas nessa seção.

O primeiro aspecto a observar é que o problema agora possui *duas* velocidades fundamentais: a velocidade de propagação da perturbação ao longo da plataforma continental ( $C_*$ ) e a velocidade de deslocamento sobre a plataforma continental da componente paralela à costa da pista do vento ( $C_w$ ). A relação entre essas velocidades, como será demonstrado, é uma questão de fundamental importância para o problema.

Com relação ao sentido das velocidades  $C_*$  e  $C_w$ , duas situações podem acontecer: (a)  $C_*$  e  $C_w$  têm mesmo sentido e (b)  $C_*$  e  $C_w$  tem sentidos opostos. Como visto, no hem. Sul,  $C_*$  tem sentido tal que a costa fica a esquerda da velocidade e, portanto, na costa Leste da América do Sul, o sentido de  $C_*$  é de S para N enquanto o oposto ocorre na costa Oeste do nosso continente. Como os sistemas atmosféricos relevantes para o fenômeno em tela também tendem a se deslocar de S para N no hem. Sul, a situação (a) é a de maior interesse no presente estudo enquanto a situação (b) seria importante na costa do Chile e do Peru. Adicionalmente, no caso de  $C_*$  e  $C_w$  terem o mesmo sentido, uma questão importante a ser investigada é o que acontece quando  $C_* = C_w$ .

No intuito de entender, de forma simples, as implicações de um vento com pista móvel, a presente seção analisará situações envolvendo um campo de vento idealizado composto por dois trechos com vento de magnitude constante em cada trecho porém de sentidos opostos. O código de cores usado anteriormente será mantido aqui com amarelo correspondendo a um vento no sentido de  $y > 0$  (mesmo sentido de  $C_*$ ) e azul no sentido de  $y < 0$ . O campo de vento, como um todo, move-se com velocidade  $C_w$ .

Em cada trecho, como a tensão do vento mantém-se constante e uniforme ( $\tau_o$ ), a solução para a função  $A$  ao longo das características é simplesmente:

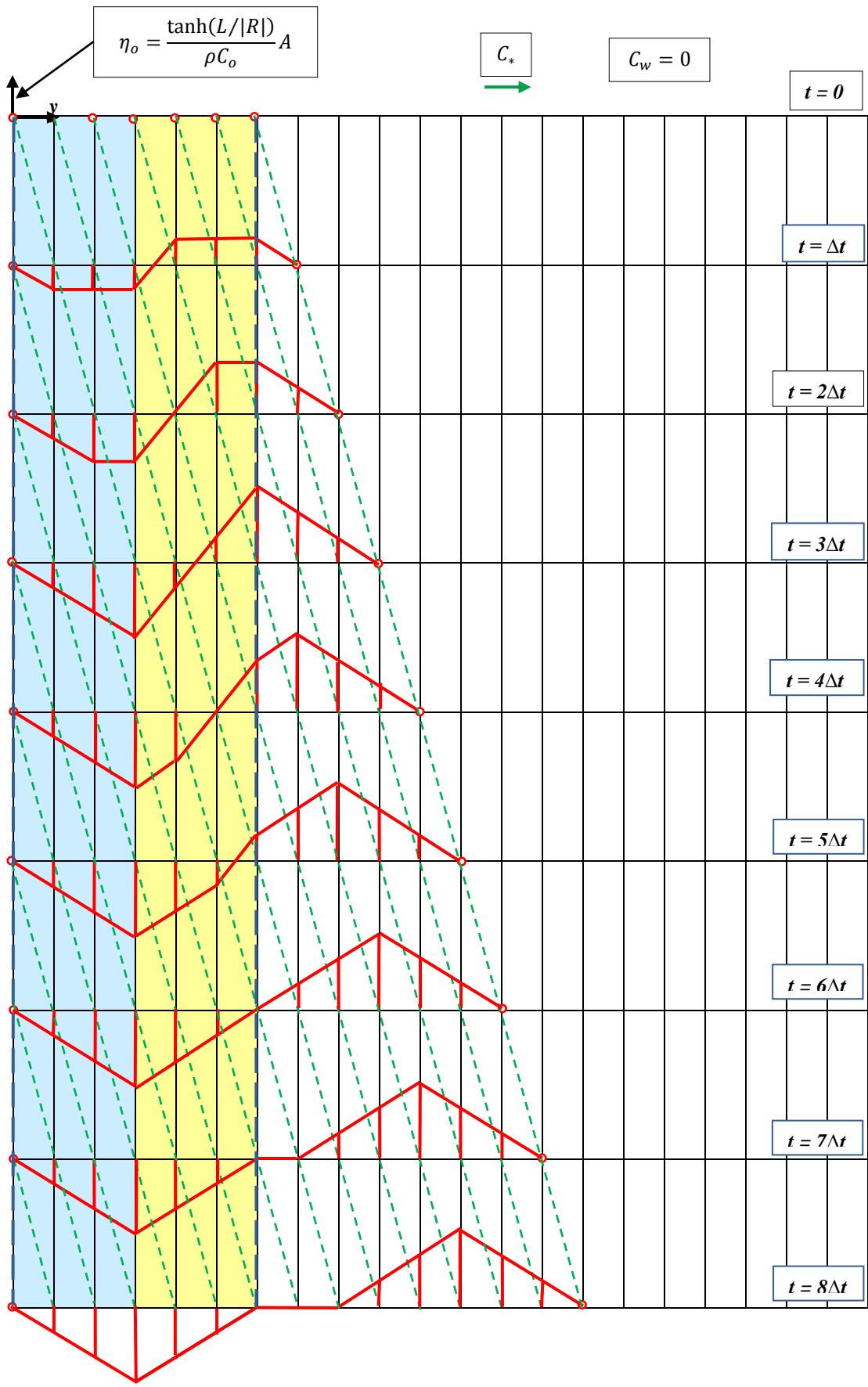
$$A(\xi, t) = \int_{t_o}^t \tau_y^W(\xi) dt' = \tau_o(t - t_o) \quad (\text{III.224 - bis})$$

Ou seja, um aumento/decaimento linear em relação ao tempo.

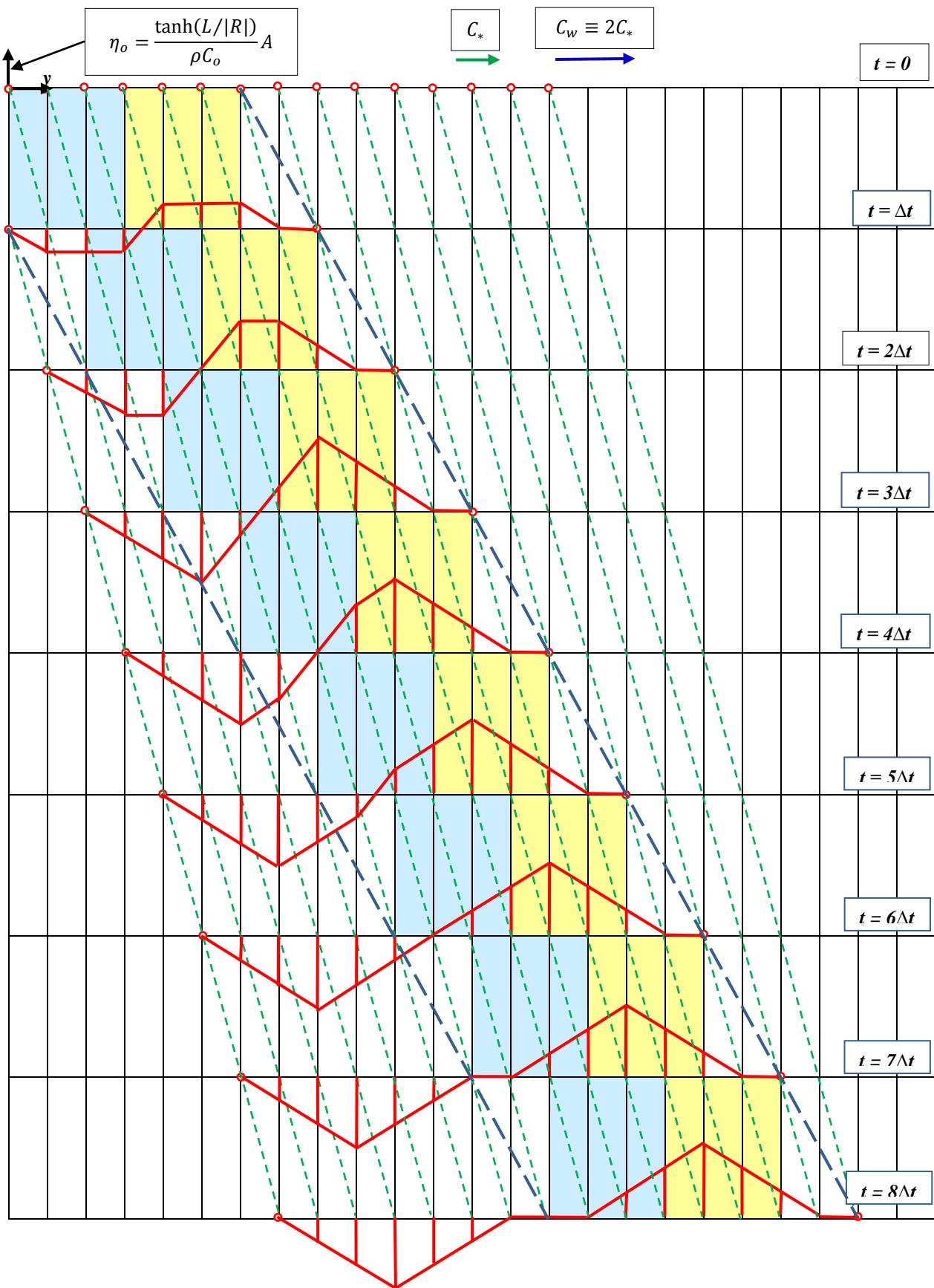
Para servir de referência, o primeiro caso estudado, mostrado na figura III. 69, tem um campo de vento estático, i.e., com  $C_w = 0$ . A solução mostra que, após um período inicial, a resposta das águas a esse campo de vento hipotético evolui para um pulso positivo móvel de forma triangular que se destaca da pista de vento e que se desloca no sentido de  $y > 0$  com velocidade  $C_*$  e uma depressão, também de forma triangular, que fica “presa” à pista de vento a qual (nesse caso) mantém-se fixa na posição inicial.

A figura (III.70) mostra a solução para o caso de um campo de vento *móvel* com velocidade ( $C_w$ ) deslocando-se no mesmo sentido de  $C_*$  e com magnitude igual ao dobro dessa velocidade, i.e.,  $C_w = 2C_*$ . A solução mostra característica similar a do caso anterior com uma parte da solução que acompanha o campo de vento e outra que termina por se destacar do vento e se propaga com a velocidade  $C_*$ .

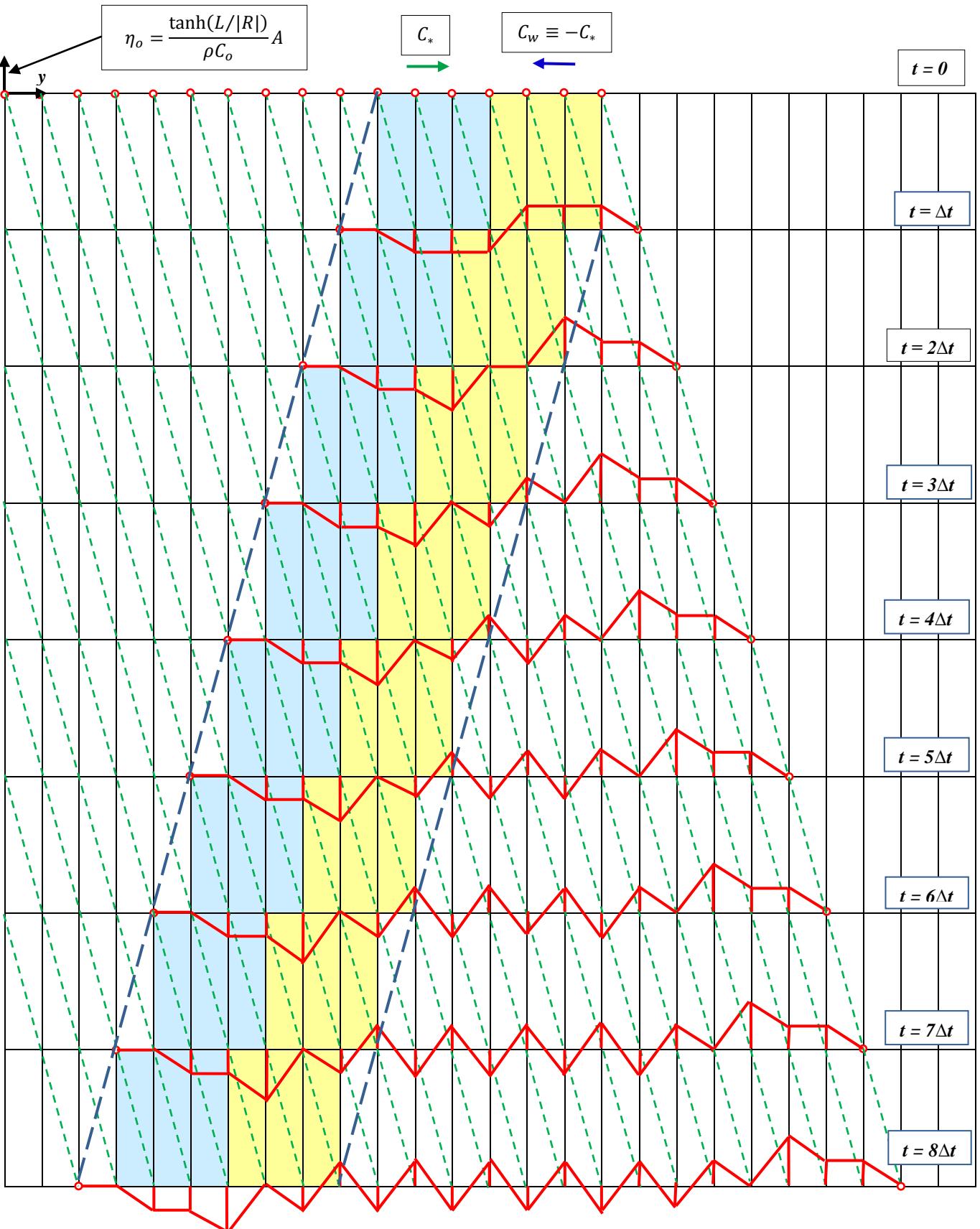
A figura (III.71) mostra a solução para o caso no qual o campo de vento desloca-se no sentido oposto a  $C_*$  com  $C_w = -C_*$ . O resultado é um tanto curioso apresentando um padrão menos organizado com perturbações curtas que emanam do campo de vento e se deslocam em sentido oposto ao movimento da pista. A observar também o fato de que a amplitude da MM é sempre menor que no caso do vento que se desloca no mesmo sentido de  $C_*$ .



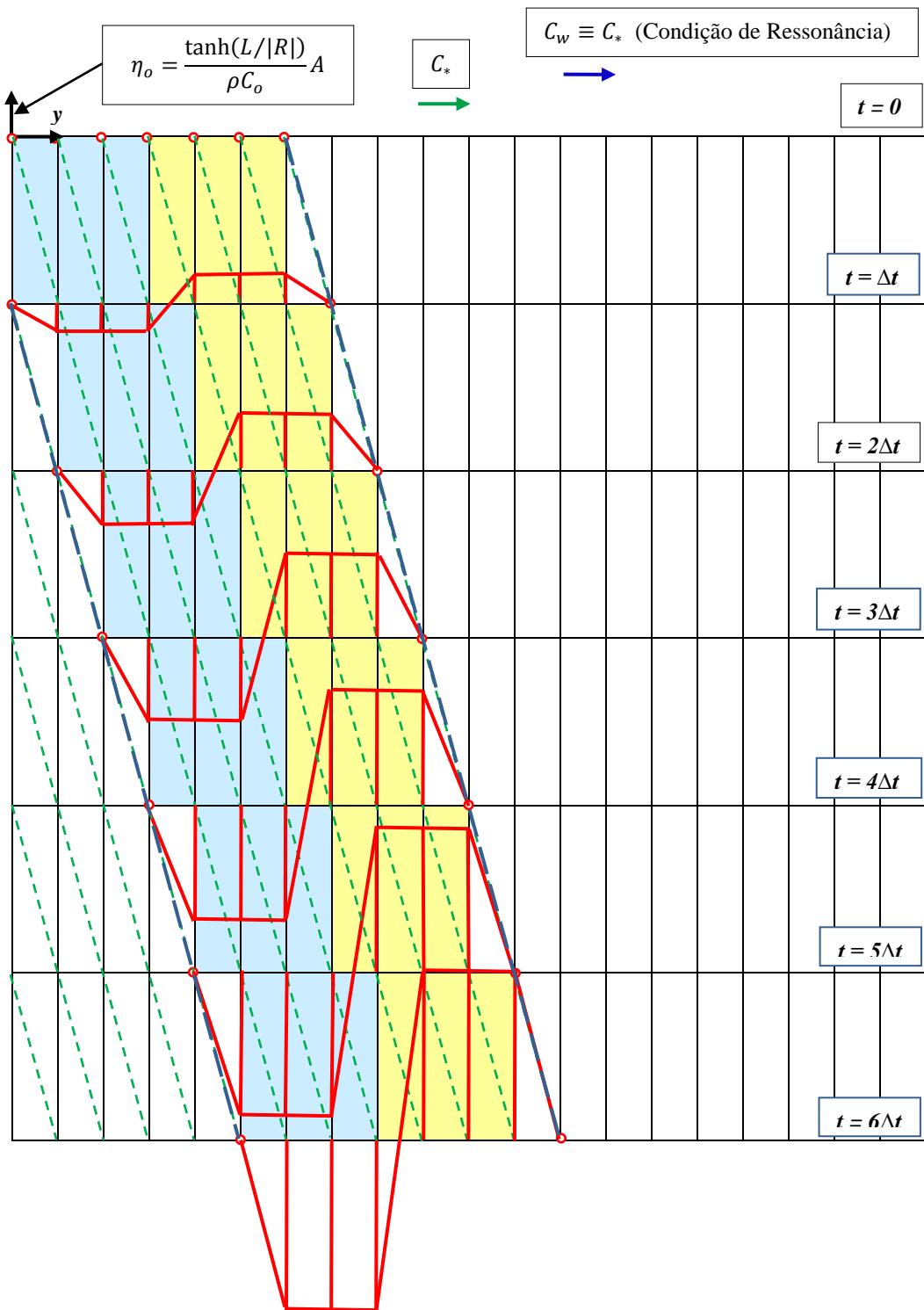
**Figura III. 69** - Solução pelo método gráfico para a MM do Exemplo#5 com vento com pista fixa



**Figura III.70** - Solução pelo método gráfico para a MM do Exemplo#5 com vento de pista móvel com velocidade de deslocamento  $C_w$  igual a  $2C_*$ .



**Figura III.71** - Solução pelo método gráfico para a MM do Exemplo#5 com vento de pista móvel com velocidade de deslocamento  $C_w$  igual a  $-C_*$ .



**Figura III.72** - Solução pelo método gráfico para a MM do Exemplo#5 com vento de pista móvel com velocidade de deslocamento  $C_w$  igual a  $C_*$ . Esse caso corresponde a condição de ressonância.

A figura (III.72) acima mostra a solução para o caso de um campo de vento *móvel* com velocidade  $C_w$  deslocando-se no mesmo sentido de  $C_*$  e com a mesma magnitude, i.e.,  $C_w = C_*$ . Essa situação corresponde à condição de *ressonância* na qual, na ausência de atrito, a amplitude da MM dentro da pista de vento cresce sem limites, como mostrado na figura. Nesse caso, nenhum sinal se desprende da zona de vento.

### III.4.4 - Inclusão do Atrito em Casos de Vento com Pista Finita

Como no caso do problema de vento com pista infinita, a inclusão do atrito no caso de pista finita só pode ser feita através de *aproximações*. A abordagem adotada para a solução aproximada mostrada nessa seção admite que:

- (i) a característica móvel da MM se mantém em presença do atrito
- (ii) o atrito atua no sentido de atenuar a MM (efeito principal) e de modificar sua velocidade de propagação (efeito secundário).

Iniciando pela ideia (ii), o primeiro aspecto a observar é que um vento com pista *finita* introduz uma força na direção ao longo da costa oriunda do gradiente de pressão na direção  $y$ , a qual não existia no caso de pista infinita tratado na seção III.3.5.1.1. Para facilitar o raciocínio, a equação de momentum  $y$  [ eq.(III.13) ] é reescrita abaixo, onde o terceiro termo corresponde a força supra-citada.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + fU = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\tau_y^W - \tau_y^B}{\rho h} \quad (\text{III. 13 - bis})$$

A primeira hipótese simplificadora consiste em admitir que o balanço de forças dominante na direção  $y$  na região próximo à costa no caso de vento com pista finita é o mesmo que opera no caso da pista infinita, o qual é dado pela eq. (III.154), reescrita abaixo por comodidade:

$$\frac{\partial V'_o}{\partial t} \approx \frac{1}{\rho h} [\tau_y^W - \tau_y^B] \quad (\text{III. 154 - bis})$$

onde,  $V'_o$  corresponde a corrente costeira na presença de atrito. [Observar que, agora, todas as variáveis são função de  $y$  e  $t$ ].

Em outras palavras, a contribuição do gradiente de pressão na dir.  $y$ , a exemplo da força de Coriolis associada a componente  $U$ , é considerada desprezível frente às forças de inércia, do vento e do atrito com o fundo. Assim, a ideia é que a eq. (III.154) acima *continue determinando a corrente costeira na presença de atrito mesmo no caso de vento com pista finita*.

O restante da solução aproximada para a MM *com* atrito considera que a física da solução invíscida para MM's móveis continue válida. Com isso, o balanço geostrófico na direção normal à costa se mantém e toda a metodologia de solução via método das características, usada na solução do caso de vento com pista finita *invíscido*, continua sendo aplicável ao caso *com* atrito. Admitindo que o atrito afete também a velocidade de propagação da MM, a velocidade característica *sem* atrito,  $C_*$  do método das características deve dar lugar à correspondente *com* atrito, a qual, segundo a nomenclatura usada na seção III.3.5.1.1 será identificada por  $C'_*$ . A determinação de  $C'_*$  e sua relação com  $C_*$  serão discutidas na seção seguinte, por enquanto, vamos admitir que  $C'_*$ , a exemplo de  $C_*$ , assuma um valor aproximadamente constante.

Assim, se a velocidade  $C'_*$  for conhecida, a *inclusão do atrito* no problema da MM causado por um vento de pista *finita* pode ser feita de forma surpreendentemente simples bastando trocar a eq. (III.228a) (inviscida) pela eq. (III.154) para a determinação da corrente costeira com atrito ao longo das linhas características  $\xi = y - C'_*t$ . Assim, a eq.(III.228a) toma a forma:

$$V'_o(\xi) = \frac{1}{\rho h_o} \int_0^t [\tau_y^W(\xi) - \tau_y^B(\xi)] dt ; \text{ para } 0 < t < T' \quad (\text{III. 228a - bis})$$

onde, o limite superior de integração é dado por  $T' \equiv P/C'_*$ , com  $P$  = comprimento da pista.

Como no caso invíscido, uma vez determinada a corrente costeira com atrito ( $V'_o$ ), o nível d'água na costa com atrito ( $\eta'_o$ ) pode ser calculado pela versão com atrito da expressão (III.215), dada por:

$$\eta'_o = \frac{C'_*}{g} V'_o \quad (\text{III. 215 - bis})$$

### **III.4.4.1 – Sobre a Velocidade Característica do Problema com Atrito**

O conhecimento da velocidade característica considerando o efeito do atrito das correntes com o leito marinho,  $C'_*$ , é um ponto importante para o fechamento da presente teoria.

O primeiro aspecto a se observar é que o caráter não-linear das tensões turbulentas introduz dificuldade extra para se tentar soluções analíticas do problema e, usualmente, a primeira providência é a linearização da tensão de atrito com o fundo. Brink e Allen (1978) e Brink (1981), por exemplo, usam desse expediente para conseguir soluções *completas* do problema no contexto de ondas de plataforma continental, porém a metodologia usada por esses autores é excessiva e desnecessariamente complicada se o objetivo for simplesmente determinar as variações de nível na costa.

Na ausência de rotação e usando uma versão linearizada da tensão de atrito, Dean e Dalrymple (1991), seção 5.6.2, apresentam uma solução analítica simples para o caso unidimensional de ondas longas progressivas sujeitas ao efeito da fricção com o fundo. A solução de Dean e Dalrymple (1991) e as de Brink e Allen (1978) e Brink (1981), mostram que o atrito afeta a onda de duas maneiras: (i) produz uma atenuação da sua amplitude e (ii) causa uma diminuição do seu comprimento. Como, para um dado período, a velocidade de propagação da onda é dada pela relação entre o comprimento e o período, uma diminuição no comprimento induz uma diminuição na velocidade de propagação da onda.

Segundo a solução de Dean e Dalrymple (1991) [ver figura 5.9 da referência], a diminuição da velocidade de propagação varia inversamente com a relação entre o coeficiente usado na parametrização do atrito e a frequência da onda, ou seja, para uma mesma intensidade de atrito, ondas de baixa frequência são menos afetadas que ondas de alta frequência.

Num raciocínio *qualitativo*, admitindo que o comportamento acima se mantenha no caso de ondas com rotação e lembrando que o escoamento induzido pela MM tem frequências relativamente baixas, é razoável esperar que  $C'_*$  não seja significativamente menor que  $C_*$  no caso da MM.

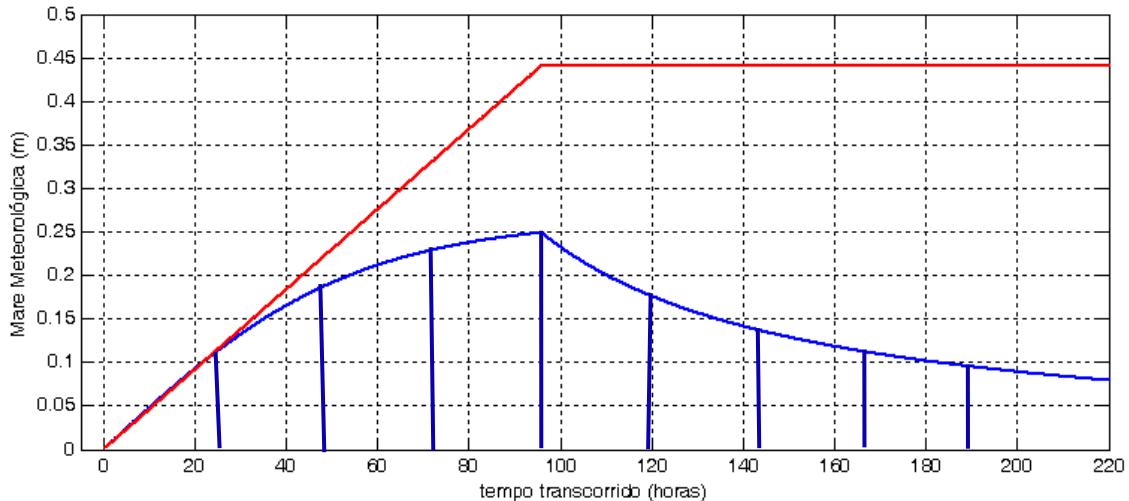
No presente estudo, todavia, essa espinhosa questão será *contornada* por meio do uso da velocidade de propagação da MM medida diretamente na natureza ( $C_m$ ). Assim, nas aplicações da teoria feitas no Capítulo IV, a velocidade  $C'_*$  a ser usada na solução será *determinada diretamente a partir dos dados de campo*. A proximidade entre a velocidade medida ( $C_m$ ) e aquela calculada pela solução invíscida ( $C_*$ ) será também investigada no Capítulo IV.

Para ilustrar o método de solução, será feita uma aplicação ao caso simples de vento uniforme e permanente com pista (fixa) de comprimento finito visto na seção III.4.3.1 - Exemplo #1. Como trata-se de um caso hipotético, vamos considerar que  $C'_* = C_*$ .

### III.4.4.2 - Vento Uniforme e Permanente com Pista Finita Fixa e com Atrito

Antes de mais nada, é necessário relembrar que a solução com atrito só pode ser calculada ao longo da costa, portanto, não é possível afirmar nada sobre a solução na plataforma continental. Para o cálculo da MM, entretanto, essa limitação não causa problema.

A solução para a MM com atrito, afeta ao presente exemplo, é aquela do vento que cessa abruptamente estudada na seção III.3.6.1.1, mostrada novamente na figura (III.73) [linha **azul** - extraída da figura (III.44)]. A solução é função do tempo e é válida ao longo de alguma característica do problema.



**Figura III.73** - Solução com atrito (linha **azul**) para vento de 30 km/h atuando por um período de 96 horas e depois cessando completamente. Linha **vermelha**: solução sem atrito. Demais dados são os mesmo usados na figura III.44.

As barras verticais foram traçadas na figura espaçadas de  $\Delta t$  de modo a auxiliar a execução da solução gráfica mostrada na figura (III.74). O valor de  $\Delta t$  é obtido em função do comprimento da pista ( $P$ ) e da velocidade característica do caso com atrito ( $C'_*$ ). Para a situação mostrada na figura (III.74), tem-se:

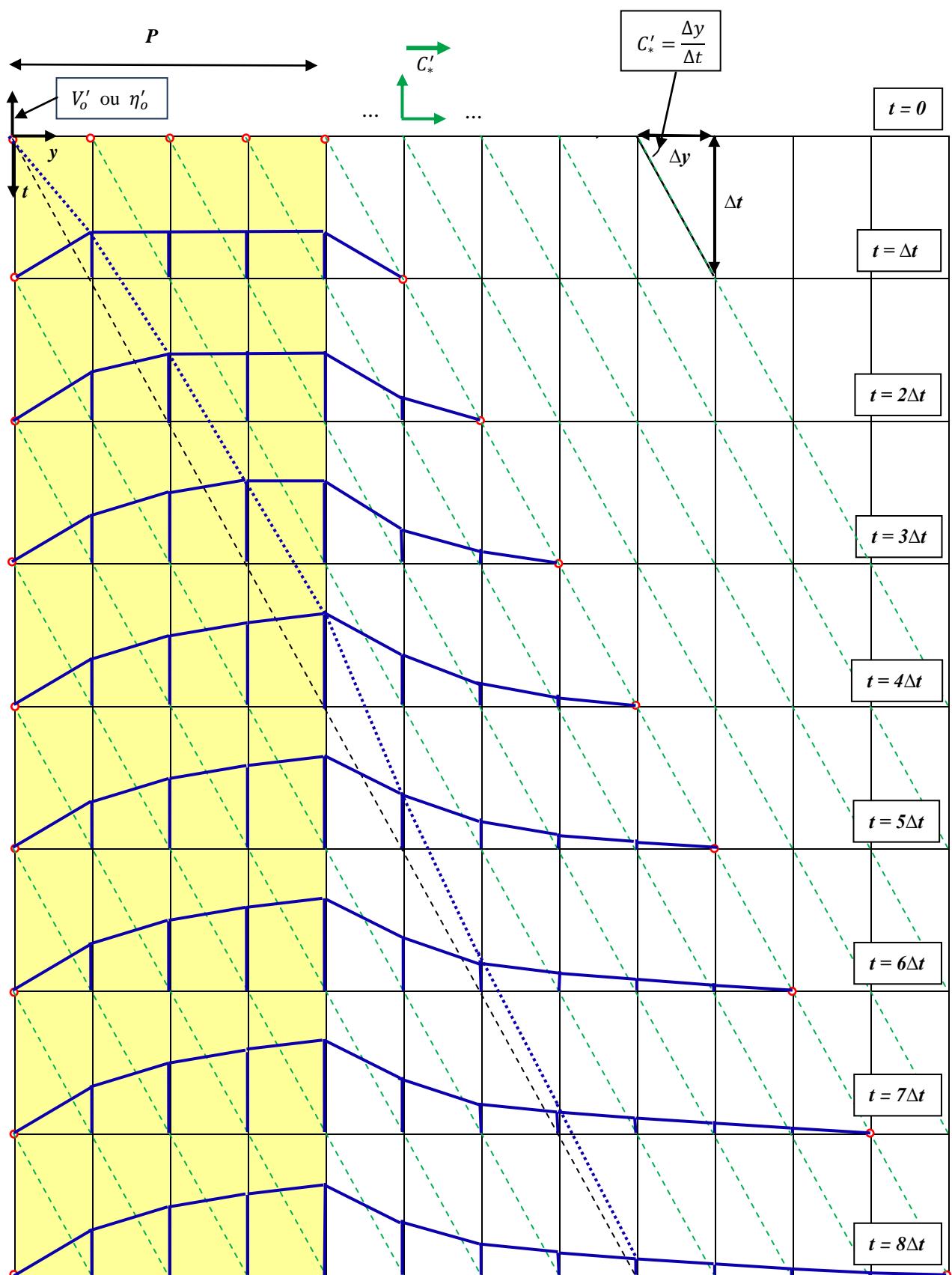
$$\Delta t = \frac{P}{4C'_*}$$

Onde  $P$  e  $C'_*$  são parâmetros conhecidos do problema. Para efeito de cálculo,  $T' \equiv P/C'_*$  foi tomado igual a 96 horas nesse caso hipotético.

#### Representação Gráfica da Solução

Como antes, o trecho onde o vento atua está indicado pela faixa de cor amarela a qual se mantém fixa no espaço (nesse exemplo). A primeira característica para a qual a solução mostrada na figura (III.73) se aplica está assinalada na figura (III.74) com a cor preta e, portanto, a solução (temporal) apresentada no gráfico acima aparece *ao longo* dessa linha e está indicada na figura (III.74) pela linha azul *pontilhada*. Todas as características seguintes tem a mesma solução como se pode ver no gráfico.

Comparando esse resultado com o equivalente invíscido também mostrado na figura (III.73), verifica-se que o atrito atua modificando a amplitude da MM ao longo da característica, afetando a MM tanto dentro da pista quanto fora. De fato, fora da pista a MM ainda sofre atenuação perdendo altura continuamente ao longo da propagação como mostrado na figura (III.74).

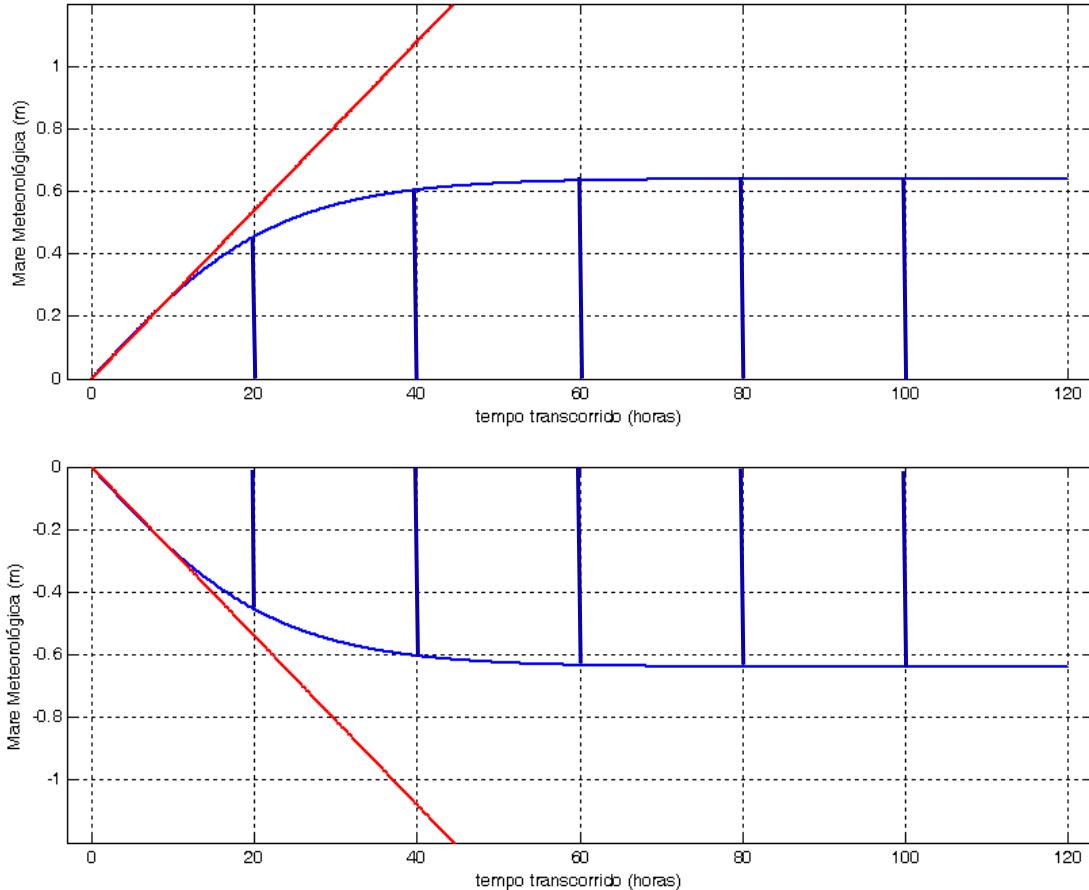


**Figura III.74** - Solução da MM com atrito pelo método gráfico para o caso de vento uniforme e permanente com pista finita fixa e com atrito.

### III.4.4.3 - Condição de Ressonância com Atrito

Como segundo exemplo, será analisada a situação de vento com pista móvel, deslocando-se com a mesma velocidade da característica, estudada no último exemplo da seção III.4.3.5, e que configura um caso de *Ressonância*, no qual, na ausência de atrito, a MM aumenta sem limite.

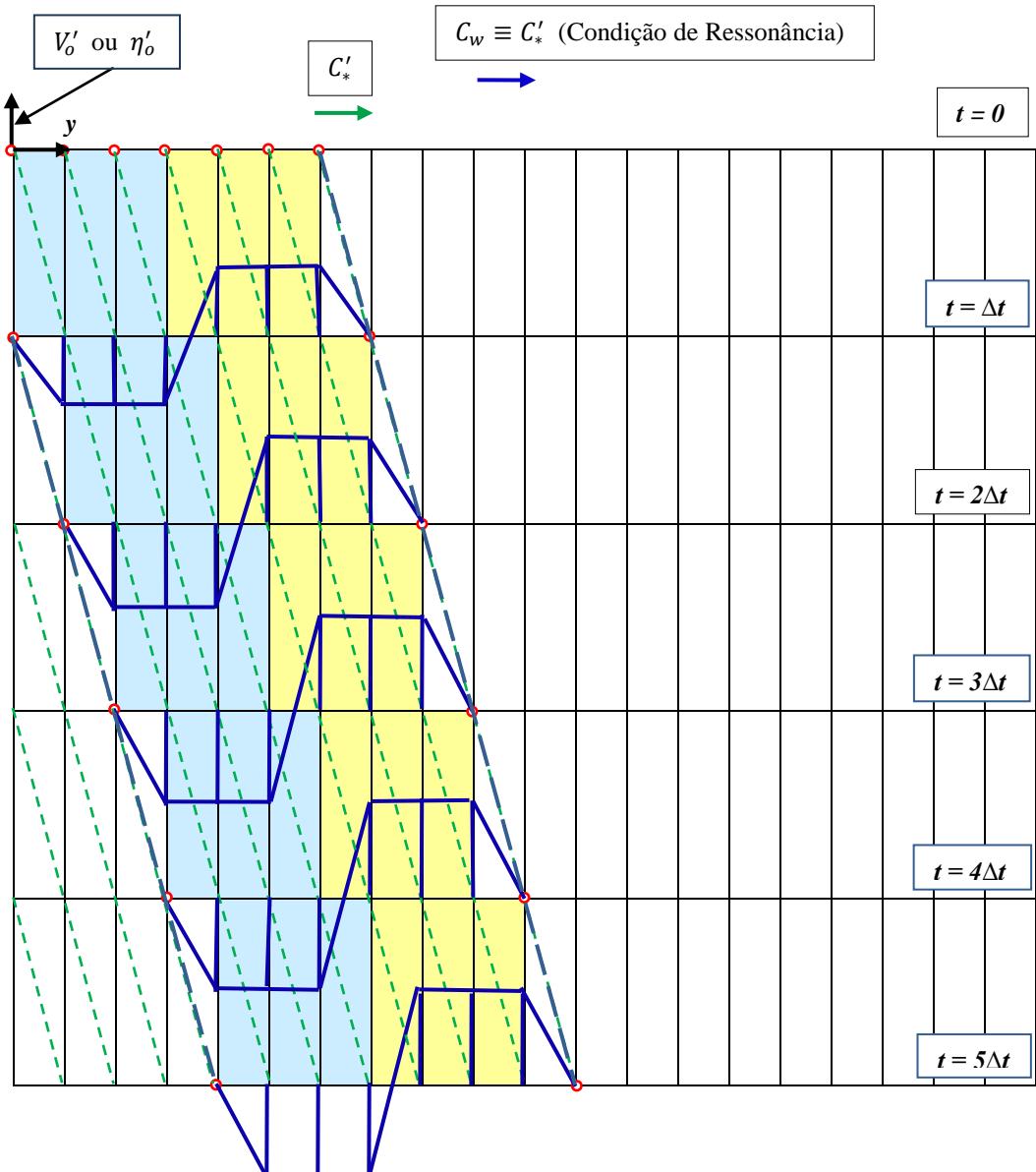
As soluções com atrito que se aplicam ao exemplo estudado estão mostradas na figura (III.75).



**Figura III.75** - Solução com atrito (linha azul) para vento de 60 km/h atuando em Ressonância com a MM. Linha vermelha: solução sem atrito. Demais dados são os mesmo usados na figura III.36 que são:  $h_o = 90\text{ m}$ ;  $L = 150\text{ km}$ ;  $\text{lat.} = 33^\circ$ ;  $C_f = 0021..$

Observar que na condição de ressonância as soluções acima são válidas ao longo de todas as características dentro da pista de vento.

A solução do problema pelo método gráfico está apresentada na figura (III.76).



**Figura III.76** – Solução pelo método gráfico para o caso de vento uniforme e permanente com pista finita móvel e com atrito para a condição de ressonância  $C_w \equiv C'_*$ .

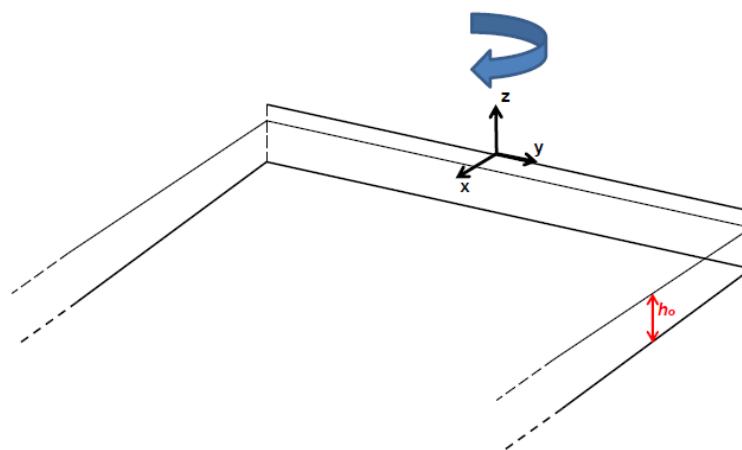
A solução mostra que, após uma subida rápida, a MM se *estabiliza* no valor limite correspondente à intensidade do vento em questão. O exemplo mostra, portanto, que a MM em condição de ressonância *com* atrito atinge um valor máximo finito, o qual é controlado exclusivamente pela intensidade do vento.

### III.5 - Ondas Longas Livres numa Plataforma de Profundidade Constante

As soluções obtidas na seção III.4 mostraram que a MM resultante da solução do problema ocasionado por ventos com pista finita numa costa longa é móvel e, portanto, envolve necessariamente a presença de ondas. Assim, no intuito de melhor entender as propriedades do tipo de onda em questão, a presente seção analisa especificamente o assunto de *ondas livres* em presença de rotação numa plataforma de profundidade constante ladeada por uma fronteira lateral. A plataforma é considerada longa o suficiente (na direção paralela à costa) para que efeitos decorrentes de fronteiras laterais possam ser desconsiderados.

#### III.5.1 - Plataforma de Largura “Infinita” – Revisão das Ondas de Kelvin “Clássicas”

A análise inicia-se considerando o caso hipotético de uma plataforma continental de profundidade constante e de largura “infinita”. A solução para esse caso é a conhecida *Onda de Kelvin* que será revista nessa seção. A figura (III.77) ilustra a geometria do problema e o sistema de coordenadas utilizado.



**Figura III.77** – Geometria do problema para Ondas de Kelvin clássicas no hem. Sul.

Com a rotação da Terra incluída, as equações governantes para escoamentos *invíscidos* num corpo d'água de profundidade constante são dadas pelas eqs.(III.12) a (III.14), com  $\tau^w$  e  $\tau^B$  nulas, reescritas abaixo por comodidade:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - fV = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (\text{III. 259})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + fU = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (\text{III. 260})$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h_o \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) = 0 \quad (\text{III. 261})$$

A Onda de Kelvin pode ser entendida como uma onda de gravidade afetada pela rotação da Terra que se propaga sobre um fundo de profundidade constante paralelamente a uma fronteira lateral (vertical) e que induz escoamento apenas na direção de propagação da onda (dir-y), ou seja com  $V \neq 0$  e  $U = 0$ . Para que o escoamento ocorra dessa maneira em presença de rotação, a onda *não* pode ser plana, mas deve possuir uma inclinação *transversal* da superfície  $\left[ \frac{\partial \eta}{\partial x} \right]$  tal que o gradiente de pressão por ela criado  $\left[ -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \right]$  seja equilibrado exatamente pela força de Coriolis associada à velocida  $V$  [  $fV$  ]. A corrente longitudinal (  $V$  ), portanto, é *geostrófica*. Com o escoamento ocorrendo apenas na direção paralela à fronteira, a condição de impermeabilidade fica automaticamente satisfeita.

As equações governantes da Onda de Kelvin, portanto, são:

$$fV = g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (\text{III. 262})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (\text{III. 263})$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h_o \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (\text{III. 264})$$

De acordo com o princípio de Fourier, qualquer perturbação arbitrária pode ser decomposta em componentes senoidais de diferentes comprimentos/periódos e amplitudes. Assim, é interessante analisar a questão sob a ótica de ondas periódicas. Para tanto, vamos admitir que a solução possa ser expressa como ondas senoidais que se propagam ao longo da fronteira e procurar uma solução tal que  $\eta(x, y, t)$  e  $V(x, y, t)$  sejam dados, inicialmente, por ondas que se propagam apenas no sentido de  $y > 0$ :

$$\eta(x, y, t) = \tilde{\eta}(x) \cdot e^{i(\lambda y - \sigma t)} \quad (\text{III. 265})$$

$$V(x, y, t) = \tilde{V}(x) \cdot e^{i(\lambda y - \sigma t)} \quad (\text{III. 266})$$

Onde  $\lambda = 2\pi/L_y$  corresponde ao número de onda na dir-y, sendo  $L_y$  o comprimento de onda ao longo da fronteira.

Substituindo (III.265 - 266) em (III.262 - 264), tem-se:

$$f\tilde{V} = g \frac{d\tilde{\eta}}{dx} \quad (\text{III. 267})$$

$$-i \sigma \tilde{V} = -i g \lambda \tilde{\eta} \quad (\text{III. 268})$$

$$-i \sigma \tilde{\eta} + i h_o \lambda \tilde{V} = 0 \quad (\text{III. 269})$$

Eliminando  $V'$  entre (III.266) e (III.267), tem-se:

$$\tilde{\eta}(x)[\sigma^2 - gh_o \lambda^2] = 0$$

Uma solução não trivial é possível apenas se:

$$\sigma = \sqrt{gh_o} \lambda \quad (\text{III. 270})$$

Portanto, a relação de dispersão da onda de Kelvin é a mesma da de ondas longas de gravidade lineares.

A estrutura transversal é obtida eliminando  $\tilde{V}$  entre (III.267) e (III.268):

$$\frac{d\tilde{\eta}}{dx} - \frac{f}{\sqrt{gh_o}} \tilde{\eta} = 0$$

Cuja solução é:

$$\tilde{\eta}(x) = \eta_o e^{\frac{f}{\sqrt{gh_o}} x} \quad (\text{III. 271})$$

Onde,  $\eta_o$  é a amplitude da onda na costa.

A solução deve satisfazer a condição de contorno:

$$\tilde{\eta}(x) \rightarrow 0 \quad \text{para} \quad x \rightarrow \infty$$

Considerando uma solução válida para o hem. Sul, o parâmetro de Coriolis e o raio de deformação são substituídos por  $f = -|f|$  e  $|R| = -\frac{|f|}{\sqrt{gh_o}}$

A solução válida para o hem. Sul, portanto, fica:

$$\tilde{\eta}(x) = \eta_o e^{-\frac{x}{|R|}}$$

O parâmetro  $R$  é o já conhecido raio de deformação que estabelece a escala de comprimento da região do escoamento sob influência da rotação da Terra.

Usando a eq.(III.268),  $\tilde{V}$  é dado por:

$$\tilde{V} = \frac{g\lambda}{\sigma} \tilde{\eta}$$

Lembrando que variáveis físicas devem ser expressas em termos de números reais, a solução completa válida para o hemisfério Sul é dada por:

$$\eta(x, y, t) = \eta_o e^{-\frac{x}{|R|}} \cdot \cos(\lambda y - \sigma t) \quad (\text{III. 272})$$

$$V(x, y, t) = \eta_o \frac{g}{C_o} \cdot e^{-\frac{x}{|R|}} \cdot \cos(\lambda y - \sigma t) \quad (\text{III. 273})$$

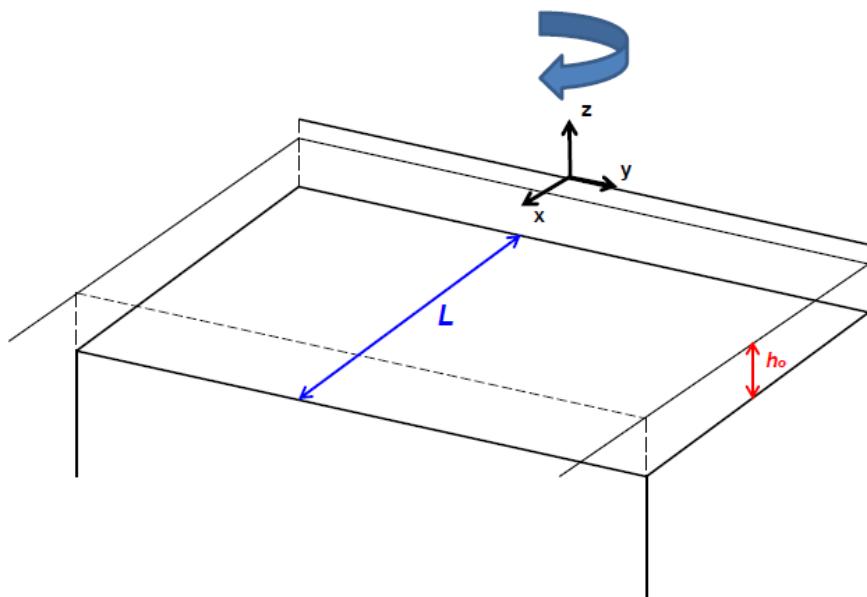
$$U = 0 \quad (\text{III. 274})$$

O sinal negativo no argumento do cosseno indica que, no hem. Sul, a onda se propaga no sentido de  $y > 0$ , ou seja, com a costa à esquerda.

A Onda de Kelvin é bem conhecida e por isso a revisão se encerra aqui.

### III.5.2 - Plataforma “Desconectada” de Largura Finita – Ondas de Plataforma tipo Kelvin

Como visto acima, na onda de Kelvin “clássica”, a plataforma vizinha à fronteira é *infinitamente* larga. Nessa seção é apresentada uma extensão da solução “clássica” válida para plataformas de largura *finita* conforme ilustrado na figura (III.78) abaixo.



**Figura III.78** – Geometria do problema para ondas de plataforma tipo Kelvin no hem. Sul.

A solução é baseada na hipótese de que a corrente paralela à costa *mantém-se aproximadamente geostrófica* e, por conseguinte, usa equações similares às da seção III.4.1, porém, *sem* considerar a ação do vento uma vez que queremos investigar a possibilidade de ondas *livres* e também desprezando as tensões de atrito com o fundo.

As equações governantes são exatamente as mesmas da seção III.4.1, eqs.(III.193 a 195) com  $\tau^w$  e  $\tau^B$  nulas, reescritas abaixo por comodidade:

$$V(x, y, t) = \frac{g}{f} \frac{\partial \eta(x, y, t)}{\partial x} \quad (\text{III. 193 - bis})$$

$$\frac{\partial V(x, y, t)}{\partial t} + fU(x, y, t) = -g \frac{\partial \eta(x, y, t)}{\partial y} \quad (\text{III. 194 - bis})$$

$$\frac{\partial \eta(x, y, t)}{\partial t} = -h_o \left( \frac{\partial U(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial V(x, y, t)}{\partial y} \right) \quad (\text{III. 195 - bis})$$

Fazendo exatamente as mesmas manipulações nas equações feitas na seção III.4.1 chega-se a eq.(III.194) envolvendo apenas o deslocamento do nível :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 \eta(x, y, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{R^2} \eta(x, y, t) \right) = 0 \quad (\text{III. 197 - bis})$$

Admitindo que a solução para o deslocamento da superfície possa ser expressa por separação de variáveis tal que  $\eta(x, y, t) = A(y, t).X(x)$ , a equação acima é satisfeita para qualquer função  $A(y, t)$  se:

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} - \frac{1}{R^2} X(x) = 0 \quad (\text{III. 200 - bis})$$

Como aconteceu no caso com vento na seção III.4.1, a equação que governa a estrutura normal à costa de  $\eta$  para ondas livres é exatamente a mesma que se aplica ao problema com vento uniforme e constante no tempo e, portanto, pode ser usada em qualquer das situações geométricas já analisadas.

Considerando o caso da plataforma “desconectada” no hem. Sul e usando o sistema de coordenadas habitual, as seguintes condições de contorno têm de ser atendidas:

- Na borda da plataforma continental ( $x = L$ ), duas condições são requeridas:

- (i) Que o deslocamento da superfície vá a zero:

$$\eta(L, y, t) = 0 \rightarrow A(y, t).X(L) = 0 \quad (\text{III. 275})$$

- (ii) Que a função  $X(x)$  tenda a uma exponencial para plataformas “largas”:

$$X(x) \rightarrow e^{-\frac{x}{|R|}} \text{ para } \frac{L}{|R|} \gg 1 \quad (\text{III. 276})$$

Aproveitando o que foi aprendido da solução com vento na seção III.4.1, a solução da eq.(III.200) que atende a essas duas condições é tomada como:

$$X(x) = E_0 \frac{\sinh[(L-x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} \quad (\text{III. 277})$$

Onde,  $E_0$  é uma constante arbitrária relacionada à amplitude da onda na costa que será especificada ao final da dedução.

- Na costa, a eq.(III.194), fornece :

$$\frac{\partial V(0, y, t)}{\partial t} + fU(0, y, t) = -g \frac{\partial \eta(0, y, t)}{\partial y} \quad (\text{III. 278})$$

A condição de impermeabilidade [  $Q(0, y, t) = 0$  ] anula o segundo termo da equação a qual simplifica-se para:

$$\frac{\partial V(0, y, t)}{\partial t} + g \frac{\partial \eta(0, y, t)}{\partial y} = 0 \quad (\text{III. 279})$$

Essa equação permite determinar a função  $A(y, t)$ . De fato, usando a eq. geostrófica (III.193) em  $x=0$ , tem-se :

$$V(0, y, t) = -\frac{g}{|f|} \frac{\partial \eta(0, y, t)}{\partial x} = -A(y, t) \frac{g}{|f|} \frac{dX(0)}{dx}$$

Substituindo em (III.279), tem-se:

$$-\frac{dX(0)}{dx} \cdot \frac{1}{|f|} \frac{\partial A(y, t)}{\partial t} + X(0) \frac{\partial A(y, t)}{\partial y} = 0$$

Como:

$$\frac{dX(0)}{dx} = -\frac{E_o}{|R|} \quad \text{e} \quad X(0) = \tanh(L/|R|)$$

tem-se:

$$E_o \left[ \frac{1}{|R||f|} \cdot \frac{\partial A(y, t)}{\partial t} + \tanh(L/|R|) \frac{\partial A(y, t)}{\partial y} \right] = 0$$

Como,  $|R| = \frac{C_o}{|f|}$ , chega-se a :

$$\frac{\partial A(y, t)}{\partial t} + \tanh(L/|R|) C_o \frac{\partial A(y, t)}{\partial y} = 0 \quad (\text{III. 280})$$

Trata-se da forma *homogênea* da mesma equação de transporte (III.207), cuja solução pelo método das características, conforme já visto anteriormente, é dada simplesmente por :

$$A(y, t) = A(y - C_* t),$$

onde,  $A$  é uma função *arbitrária* qualquer e  $C_*$  é a velocidade definida pela eq.(III.208) da seção III.4.1:

$$C_* = \tanh(L/|R|) \sqrt{gh_o} \quad (\text{III. 208 - bis})$$

Para uma função *senoidal*, tem-se:

$$A(y - C_* t) = \sin \lambda (y - C_* t)$$

onde,  $\lambda$  é o número de onda na dir.  $y$ .

A solução para  $\eta$  fica:

$$\eta(x, y, t) = E_o \frac{\sinh[(L-x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} \cdot \sin \lambda (y - C_* t) \quad (\text{III. 281})$$

A velocidade paralela à costa (  $V$  ) é obtida da equação geostrófica (III.193) :

$$V(x, y, t) = -\frac{g}{|f|} \frac{\partial \eta(x, y, t)}{\partial x}$$

Donde,

$$V(x, y, t) = E_o \frac{g}{C_o} \frac{\cosh[(L-x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} \cdot \sin \lambda (y - C_* t) \quad (\text{III. 282})$$

A velocidade normal a costa (  $U$  ) pode ser determinada pela eq.(III.194) :

$$\begin{aligned}
-|f|U(x, y, t) &= -g \frac{\partial \eta(x, y, t)}{\partial y} - \frac{\partial V(x, y, t)}{\partial t} \\
-|f|U(x, y, t) &= -E_o g \lambda \frac{\sinh[(L-x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} \cdot \cos \lambda(y - C_* t) + E_o \lambda C_* \frac{g}{C_o} \frac{\cosh[(L-x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} \cdot \cos \lambda(y - C_* t) \\
U(x, y, t) &= -E_o \frac{g \lambda}{|f|} \left[ \tanh(L/|R|) \frac{\cosh[(L-x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} - \frac{\sinh[(L-x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} \right] \cdot \cos \lambda(y - C_* t) \\
U(x, y, t) &= -E_o \frac{g \lambda}{|f|} \tanh(L/|R|) \left[ \frac{\cosh[(L-x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} - \frac{\sinh[(L-x)/|R|]}{\sinh(L/|R|)} \right] \cdot \cos \lambda(y - C_* t) \\
U(x, y, t) &= -E_o \frac{g}{C_o} \frac{\sigma}{|f|} \left[ \frac{\cosh[(L-x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} - \frac{\sinh[(L-x)/|R|]}{\sinh(L/|R|)} \right] \cdot \cos \lambda(y - C_* t) \quad (\text{III. 283})
\end{aligned}$$

É interessante notar que, no caso de uma plataforma de largura *finita*, a velocidade normal à costa *não* é uniformemente nula como na onda de Kelvin “clássica”. Conferindo, tem-se, para a costa :

$$U(0, y, t) = -E_o \frac{g}{C_o} \frac{\sigma}{|f|} [1 - 1] \cdot \cos \lambda(y - C_* t) = 0$$

Portanto, na costa a condição de impermeabilidade é atendida. Porém, na borda da plataforma, a velocidade *U* vale:

$$U(L, y, t) = -E_o \frac{g}{C_o} \frac{\sigma}{|f| \cosh(L/|R|)} \cos \lambda(y - C_* t) \quad (\text{III. 284})$$

Portanto, a largura finita da plataforma *induz troca de água entre esta e o oceano*. A velocidade *U* varia entre 0 e um valor máximo na borda da plataforma continental, dado pela expressão (III.284).

Finalmente, a constante *E<sub>o</sub>* é determinada em função da amplitude *a* (em metros) especificada para a onda na costa (em *x* = 0 ) por (III.281):

$$a = E_o \tanh[L/|R|]$$

Donde,

$$E_o = \frac{a}{\tanh[L/|R|]} \quad (\text{III. 285})$$

### III.5.2.1 - Relação de Dispersão

A relação de dispersão é obtida observando que  $\sigma = \lambda C_*$  , portanto:

$$\sigma = \tanh(L/|R|) \sqrt{gh_o} \cdot \lambda \quad (\text{III. 286})$$

A relação de dispersão acima garante que as velocidades de fase  $C = \frac{\sigma}{\lambda}$  e de grupo  $C_g = \frac{d\sigma}{d\lambda}$  são equivalentes e que valem:

$$C_g = C = C_* = \tanh \left( \frac{L|f|}{\sqrt{gh_o}} \right) \sqrt{gh_o} \quad (\text{III. 287})$$

É importante notar que a velocidade das ondas depende, além da profundidade, da largura da plataforma e da latitude. Essa é uma diferença importante com relação às ondas de Kelvin “clássicas” (i.e., para plataformas “largas”)

Da mesma forma que na onda de Kelvin “clássica”, a velocidade das ondas da presente solução independe do período e, portanto, essas ondas são *não-dispersivas*.

### III.5.2.2 - Sentido de Propagação

O sinal negativo no argumento da função seno [  $\sin(\lambda y - \sigma t)$  ] indica que, no hem. Sul e para o sistema de coordenadas adotado, a forma de onda em questão propaga-se no sentido positivo de  $y$ . De fato o sentido de propagação não poderia ser outro, pois de acordo com (III.282), a velocidade da corrente paralela à costa induzida pela onda é no sentido positivo de  $y$  sob a crista e no negativo sob o cavado. Como essa corrente é geostrófica e o nível d'água inclina-se a partir da costa para o largo, a corrente só pode se processar dessa maneira se o parâmetro de Coriolis for negativo ( $f < 0$ ), ou seja, se a plataforma estiver no hemisfério Sul.

#### Resumo da Solução

Em termos da amplitude da onda na costa ( $a$ ), a solução é escrita como:

$$\eta(x, y, t) = a \frac{\sinh[(L-x)/|R|]}{\sinh(L/|R|)} \cdot \sin(\lambda y - \sigma t) \quad (\text{III. 288})$$

$$V(x, y, t) = a \frac{g}{C_*} \frac{\cosh[(L-x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} \cdot \sin(\lambda y - \sigma t) \quad (\text{III. 289})$$

$$U(x, y, t) = -a \frac{g}{C_* |f|} \left[ \frac{\cosh[(L-x)/|R|]}{\cosh(L/|R|)} - \frac{\sinh[(L-x)/|R|]}{\sinh(L/|R|)} \right] \cdot \cos(\lambda y - \sigma t) \quad (\text{III. 290})$$

Relação de Dispersão:

$$\sigma = C_* \lambda \quad (\text{III. 286 - bis})$$

onde,  $C_* = \sqrt{gh_o} \tanh(L/|R|)$  e  $|R| = \sqrt{gh_o/f}$

### III.5.2.3 - Onda de Kelvin “Clássica” recuperada

A solução para a onda de Kelvin “clássica” deve ser recuperada no caso particular de uma plataforma “larga”, ou seja, quando  $L/|R| \gg 1$ . De fato, para essa condição tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\sinh[(L-x)/|R|]}{\sinh(L/|R|)} &\rightarrow \exp\left(-\frac{x}{|R|}\right) \\ \tanh(L/|R|) &\rightarrow 1 \quad \text{e} \quad C_* = C_o \end{aligned}$$

Portanto, a solução para uma plataforma “larga” é:

$$\eta(x, y, t) = a e^{-\frac{x}{|R|}} \cdot \sin(\lambda y - \sigma t) \quad (\text{III. 272 - bis})$$

$$V(x, y, t) = a \frac{g}{C_o} e^{-\frac{x}{|R|}} \cdot \sin(\lambda y - \sigma t) \quad (\text{III. 273 - bis})$$

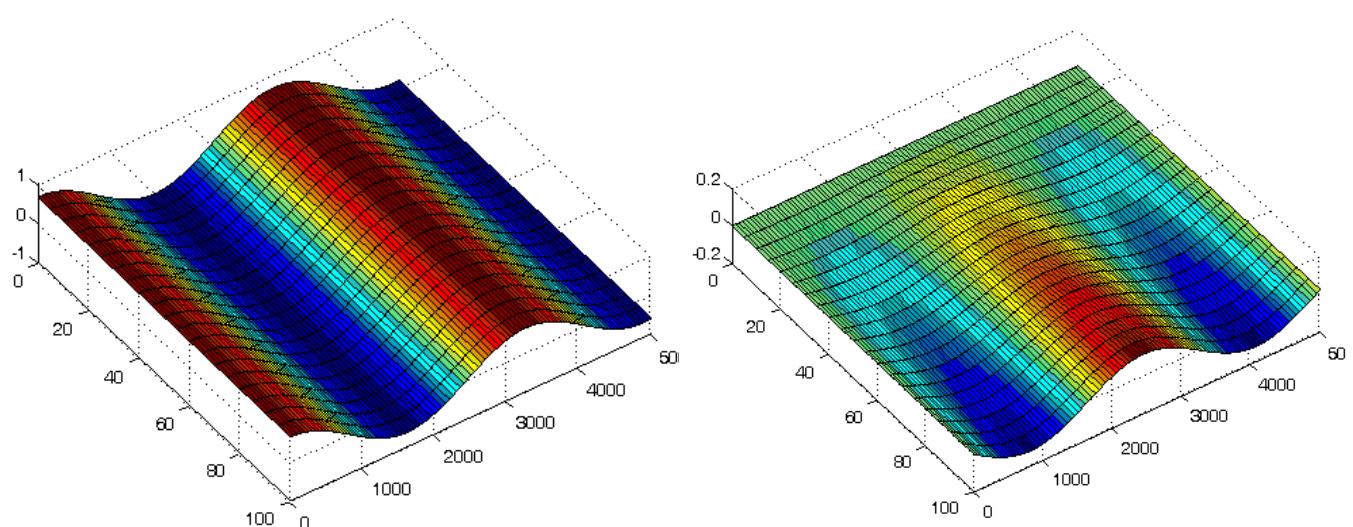
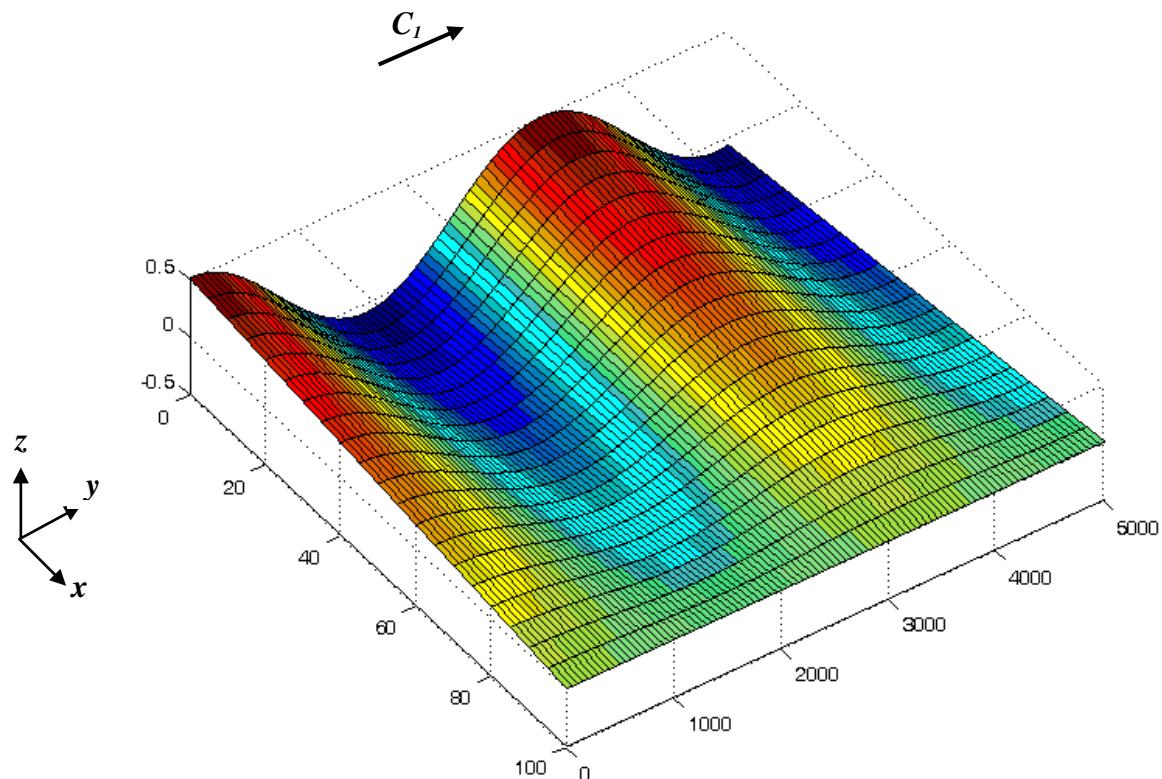
$$U(x, y, t) = 0 \quad (\text{III. 274 - bis})$$

$$\sigma = \sqrt{gh_o} \cdot \lambda \quad (\text{III. 270 - bis})$$

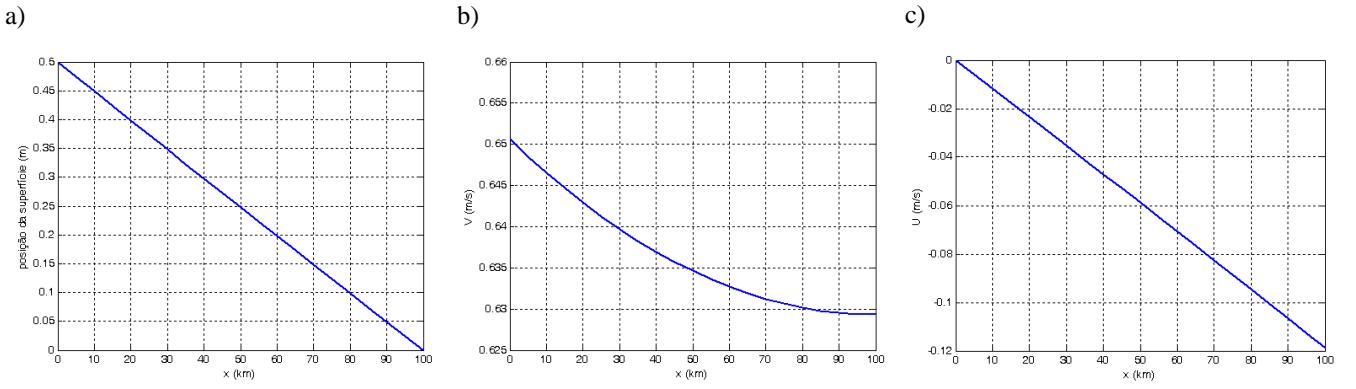
confirmando que a onda de Kelvin “clássica” é um caso particular da presente solução.

### III.5.2.4 - Ilustração Gráfica da Solução

No intuito de ilustrar graficamente a solução dada pelas equações (III.288 a 290) as figuras (III.79) e (III.80) apresentam um exemplo de solução para uma situação típica da costa sul brasileira (dados informados na legenda da figura).



**Figura III.79** - Vista em perspectiva da solução para uma Onda de Plataforma Continental tipo Kelvin sobre uma plataforma “desconectada” de largura = 100 km, profundidade = 90 m, numa latitude de 32° S (Hem. Sul). Características da onda: período = 5 dias, comprimento = 3 256 900 m, velocidade de propagação = 7.54 m/s (651.4 km/dia) (sentido indicado na figura). Painel superior: deslocamento da superfície ( $\eta$ ) em metros. Painel inferior esquerdo: velocidade paralela à costa ( $V$ ) em m/s. Painel inferior direito: velocidade da corrente normal a costa ( $U$ ) em m/s. Observar distorção de escalas entre distâncias horizontais e verticais.



**Figura III.80** - Cortes perpendiculares à costa sob a crista da onda para:  $\eta$  (a);  $V$ (b) e  $U$  (c).

É importante ressaltar mais uma vez que a velocidade de propagação desse tipo de onda é o próprio  $C_*$ , portanto, função da gravidade, da latitude, da largura e da profundidade da plataforma. O período da onda não influí na velocidade, uma vez que as ondas são não-dispersivas. Para os dados do problema ( $L = 100 \text{ km}$ ,  $h_o = 90 \text{ m}$  e  $lat = 32^\circ$ ), a velocidade de propagação foi de  $7.54 \text{ m/s}$  ou seja,  $651.4 \text{ km/dia}$ , valor da mesma ordem de grandeza das velocidades observadas nas medições.

### Maré Meteorológica e Corrente Costeira

A maré meteorológica e a corrente costeira induzida pela onda são dadas por:

$$\eta(0, y, t) = \eta_o(y, t) = a \cdot \sin(\lambda y - \sigma t) \quad (\text{III. 291})$$

$$V(0, y, t) = V_o(y, t) = a \frac{g}{C_*} \cdot \sin(\lambda y - \sigma t) \quad (\text{III. 292})$$

Como esperado, face a eq.(III.268), a MM e a corrente costeira guardam uma relação entre si dada por:

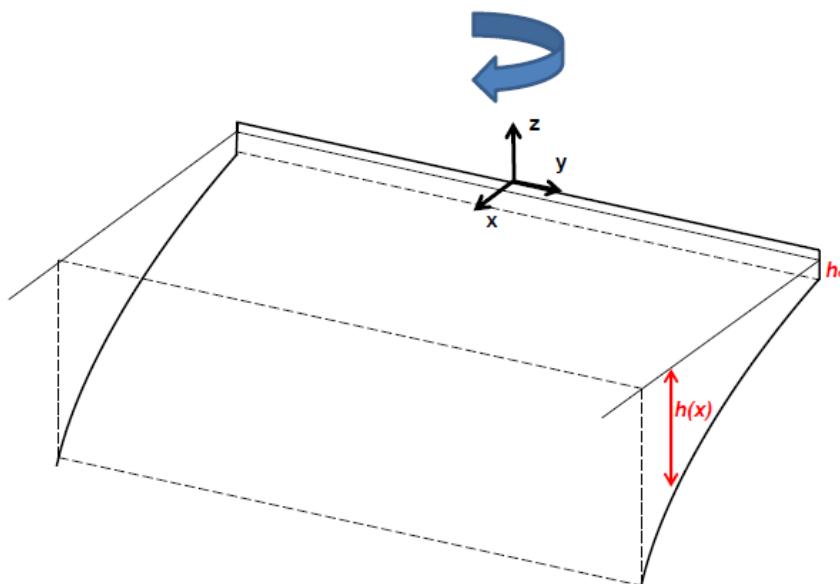
$$V_o(y, t) = \frac{g}{C_*} \cdot \eta_o(y, t) \quad (\text{III. 293})$$

exatamente a mesma relação obtida anteriormente para outras situações.

### III.6 - Efeito da Forma (Declividade) da Plataforma Continental: Ondas Livres numa Plataforma com Fundo Inclinado Revisitadas

Finalmente, o efeito da forma da plataforma continental, fator ainda não analisado, será tratado nesse capítulo. Mesmo considerando uma plataforma de geometria simplificada, a introdução de um fundo não horizontal introduz grande complexidade matemática ao problema. No intuito de melhor encaminhar a questão, desta feita iniciaremos estudando as características de ondas livres para depois analisar o problema da maré meteorológica.

Escoamentos na forma de ondas livres sobre uma plataforma com fundo inclinado em presença de rotação e para fluido de densidade constante constituem-se nas conhecidas Ondas de Plataforma Continental (“Continental Shelf Waves”) que serão revisitadas minuciosamente nessa seção. A geometria do problema e o sistema de coordenadas utilizado estão mostrados esquematicamente na figura (III. 81) abaixo.



**Figura III. 81 – Geometria do problema para ondas de plataforma sobre fundo inclinado no hem. Sul.**

Conforme ilustrado na figura, para simplificar (um pouco) a análise, a geometria adotada considera uma plataforma continental com profundidade variável na direção perpendicular a costa mas de característica uniforme ao longo da mesma, tal que  $h = h(x)$ .

#### III.6.1 - Equacionamento

A presente revisão da teoria de Ondas de Plataforma Continental (OPC) baseia-se em Gill (1982), seção 10.12, Buchwald e Adams (1968) e Gill e Schumann (1974).

Nessa abordagem a aproximação geostrófica para a corrente costeira não é usada. Esse fato não restringe o resultado para ondas longas apenas. Para ondas livres, não há vento e as equações governantes do problema são:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - fV = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (\text{III. 294})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + fU = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (\text{III. 295})$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hU) + \frac{\partial}{\partial y}(hV) = 0 \quad (\text{III. 296})$$

Segundo Gill (1982), pg. 409, algumas hipóteses preliminares se fazem necessárias. Admitindo que a escala das variações de profundidade seja pequena comparada ao raio de deformação  $R$ , a chamada aproximação do tampo rígido (“*rigid lid*”) se aplica. Nessa aproximação, o termo que envolve a posição da superfície em (III.296) pode ser *desprezado* e, portanto, a equação simplifica-se para:

$$\frac{\partial}{\partial x}(hU) + \frac{\partial}{\partial y}(hV) = 0 \quad (\text{III.297})$$

O primeiro passo é eliminar  $\eta$  entre as duas primeiras equações fazendo:  $-\frac{\partial\eta}{\partial y}$  (III.294) +  $\frac{\partial\eta}{\partial x}$  (III.295):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) + f\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) = 0 \quad (\text{III.298})$$

A seguir, a eq.(III.297) é escrita como:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{h}\left(U\frac{\partial h}{\partial x} + V\frac{\partial h}{\partial y}\right) \quad (\text{III.299})$$

e substituída na eq.(III.298), para obter:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) - \frac{f}{h}\left(U\frac{\partial h}{\partial x} + V\frac{\partial h}{\partial y}\right) = 0 \quad (\text{III.300})$$

A eq.(III.297) permite introduzir a função de corrente  $\psi(x, y, t)$ , tal que:

$$U = \frac{1}{h}\frac{\partial\psi}{\partial y} \quad \text{e} \quad V = -\frac{1}{h}\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (\text{III.301a,b})$$

Substituindo  $U$  e  $V$  na eq.(III.300) pelas expressões acima chega-se a:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{h}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{h}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\right] + \frac{f}{h^2}\left(-\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 0 \quad (\text{III.302})$$

Como próximo passo, a hipótese que o fundo varie apenas na direção perpendicular à costa [  $h = h(x)$  ] é usada para simplificar a equação acima para:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{h}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \frac{1}{h}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right] - \frac{f}{h^2}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.303})$$

### Condições de Contorno:

Condições de contorno devem ser estabelecidas nas duas fronteiras do domínio: na costa e na fronteira externa. Na costa, a condição de impermeabilidade é garantida colocando-se uma linha de corrente em  $x=0$ :

$$\psi = 0 \quad \text{em} \quad x = 0 \quad (\text{III.304})$$

Na fronteira externa, a situação é mais complicada.

Buchwald e Adams (1968) usaram uma condição que combina a solução na plataforma com a solução do oceano profundo. Para ondas de plataforma longas, Gill e Schumann (1974) usaram como condição na fronteira externa da plataforma ( $x = B$ ) a imposição de que a velocidade  $V$  se anule:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \quad \text{em} \quad x = B \quad (\text{III.305})$$

Essa condição, mais simples que a de Buchwald e Adams (1968), é análoga a considerar uma plataforma “desconectada”, na qual o efeito do oceano profundo na plataforma é desprezado. Essa será a condição adotada na presente revisão.

Usando o fato que a solução procurada consiste de ondas que se propagam ao longo da costa (dir-y), vamos admitir, inicialmente, uma solução  $\psi$  na forma de uma onda que se propaga com velocidade de fase no sentido positivo de y [ Gill (1982), pag. 409 ]:

$$\psi(x, y, t) = \sqrt{h(x)} \cdot \phi(x) e^{i(\lambda y - \sigma t)} \quad (\text{III. 306})$$

Onde  $\lambda$  = número de onda (ao longo da costa),  $\sigma$  = frequência (angular) da onda. A estrutura da solução na dir-x é considerada proporcional a  $\sqrt{h(x)}$  de forma a facilitar a solução analítica, como mostrado a seguir.

A ideia é substituir (III.306) em (III.303) e obter uma equação para  $\phi(x)$ . De acordo com a álgebra mostrada no Apêndice 8, o primeiro termo dentro do colchete na equação (III.303) pode ser escrito como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{h} \frac{d}{dx} (h^{1/2} \cdot \phi) \right] e^{i(\lambda y - \sigma t)} = h^{-1/2} \left\{ \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2h} \frac{dh}{dx} \right) - \left( \frac{1}{2h} \frac{dh}{dx} \right)^2 \right] \phi \right\} e^{i(\lambda y - \sigma t)}$$

Fazendo a substituição, a eq.(III.303) fica:

$$-i\sigma h^{-1/2} \left\{ \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2h} \frac{dh}{dx} \right) - \left( \frac{1}{2h} \frac{dh}{dx} \right)^2 \right] \phi \right\} + i\sigma \frac{\lambda^2}{h} \sqrt{h} \phi - i \frac{\lambda f}{h^2} \frac{\partial h}{\partial x} \sqrt{h} \phi = 0$$

Dividindo por  $-i\sigma h^{-1/2}$  chega-se finalmente a:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2h} \frac{dh}{dx} \right) - \left( \frac{1}{2h} \frac{dh}{dx} \right)^2 - \lambda^2 + \frac{\lambda f}{\sigma} \frac{1}{h} \frac{dh}{dx} \right] \phi = 0 \quad (\text{III. 307})$$

Nesse ponto é muito importante ressaltar que as OPC's não tem uma solução "universal", a solução depende da batimetria do fundo em questão. Portanto, dependendo do tipo de batimetria considerado, obtêm-se soluções diferentes.

### III.6.2 - Solução para uma Plataforma Exponencial

Uma batimetria idealizada muito conveniente para representar essa plataforma continental uniforme, introduzida por Buchwald & Adams (1968), tem variação exponencial a partir da costa e inclui um "batente" (de profundidade  $h_o$ ) na linha de costa:

$$h(x) = h_o e^{2kx} \quad (\text{III. 308})$$

onde  $k^{-1}$  corresponde a escala de comprimento da plataforma desde a costa até o fim do talude continental e será pormenorizado mais adiante.

[ OBS.: Mesmo não tendo sido utilizado no presente estudo, nesse ponto cabe mencionar o recente trabalho de Zavala-Sansón (2012), o qual apresenta soluções analíticas da eq.(III.307) para uma plataforma com forma de fundo expressa por  $h(x) = h_o(\lambda x)^s$ , onde  $s > 0$  controla a forma da PC e  $h_o$  e  $\lambda^{-1}$  correspondem a escalas horizontais e verticais do problema, respectivamente ].

Substituindo em (III.307):

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2h} 2kh \right) - \left( \frac{1}{2h} 2kh \right)^2 - \lambda^2 + \frac{\lambda f}{\sigma} \frac{1}{h} 2kh \right] \phi = 0$$

Donde,

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + \left( \frac{2k\lambda f}{\sigma} - k^2 - \lambda^2 \right) \phi = 0 \quad (\text{III. 309})$$

Observa-se que todos os parâmetros que compõem o termo entre parênteses são constantes. Introduzindo o parâmetro  $\beta$  tal que:

$$\beta^2 = \frac{2k\lambda f}{\sigma} - k^2 - \lambda^2 \quad (\text{III. 310})$$

A equação a ser resolvida é:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \beta^2\phi = 0 \quad (\text{III. 311})$$

Fisicamente,  $\beta^{-1}$  representa uma escala de comprimento na direção normal à costa própria da solução.

A condição de impermeabilidade da costa  $\psi(0) = 0$  requer que  $\phi(0) = 0$ . A solução que atende a essa condição é

$$\phi(x) = A \sin(\beta x) \quad (\text{III. 312})$$

Onde,  $A$  = constante *dimensional* arbitrária, relacionada à amplitude da onda.

A dimensão de  $A$  é determinada observando que a função  $\psi$ , como foi definida [ver eq.(III.301)], tem dimensão  $[L^3 T^{-1}]$ . Pela eq.(III.306), a função  $\phi$  e, consequentemente,  $A$ , devem ter dimensão  $[L^{2.5} T^{-1}]$ .

Usando o resultado acima e substituindo a definição de  $h(x)$  (III.308),  $\psi$  toma a forma:

$$\psi(x, y, t) = A\sqrt{h_o} \cdot e^{kx} \sin(\beta x) e^{i(\lambda y - \sigma t)} \quad (\text{III. 313})$$

A determinação da única incógnita remanescente, o parâmetro  $\beta$ , vem da aplicação da condição de contorno na borda da plataforma continental (III.303).

$$\frac{d\psi}{dx} = 0 \quad \text{em } x = B \quad \rightarrow \quad k \sin(\beta B) + \beta \cos(\beta B) = 0 \quad (\text{III. 314})$$

A equação algébrica transcendental para  $\beta$  (III.314) possibilita determinar  $\beta$  e pode ser reescrita como:

$$\tan(\beta_n B) + \frac{\beta_n B}{kB} = 0 \quad (\text{III. 315})$$

Para valores de  $k$  e  $B$  especificados pela geometria da plataforma em questão, a solução da equação acima não é única, existindo vários valores de  $\beta$  que atendem a condição ali expressa. Chamando de  $\beta_n$ , com  $n=1$  representando o maior valor dos  $\beta$ 's e assim sucessivamente, a equação fornecerá como raízes,  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ , etc. A exemplo do que ocorre com as Ondas de Borda (“Edge Waves”), as Ondas de Plataforma podem ter diferentes *modos* para uma mesma frequência ( $\sigma$ ). Cada modo terá seus respectivos comprimento de onda ( $\lambda_n$ ), velocidade ( $C_n$ ) e amplitude ( $A_n$ ). [ É interessante observar que uma plataforma de fundo horizontal admite apenas um “modo” ].

### III.6.2.1 - Relação de Dispersão

A relação de dispersão das ondas para essa plataforma exponencial idealizada é determinada a partir da eq.(III.310), reescrita como:

$$\sigma = \left[ \frac{2\lambda_n}{k^2 + \beta_n^2 + \lambda_n^2} \right] kf \quad (\text{III. 316})$$

A velocidade de fase correspondente é dada por:

$$C_n = \frac{\sigma}{\lambda_n} = \left[ \frac{2}{k^2 + \beta_n^2 + \lambda_n^2} \right] kf \quad (\text{III. 317})$$

Para que as ondas se propaguem no sentido  $y > 0$ , como estabelecido no início da dedução, o argumento da função oscilatória deve ser  $e^{i(\lambda y - \sigma t)} = e^{i\lambda(y - Ct)}$ , portanto,  $C$  deve resultar negativo na eq.(III.317) o que implica que  $f < 0$ , ou seja, que a onda esteja no hemisfério Sul. Portanto, a presente solução aplica-se ao hemisfério Sul.

A solução válida para o hemisfério Norte é obtida usando o argumento  $e^{i(\lambda y + \sigma t)} = e^{i\lambda(y + Ct)}$  o que resulta em:

$$C_n = \frac{\sigma}{\lambda_n} = \left[ \frac{-2}{k^2 + \beta_n^2 + \lambda_n^2} \right] kf \quad (\text{III. 318})$$

Usando a mesma argumentação acima, veríamos que, nesse caso,  $f > 0$  para que  $C$  seja positivo.

Portanto, vê-se que o tipo de onda em questão comporta-se da mesma maneira que as ondas tipo Kelvin no que se refere ao sentido de propagação: ambas tem um único sentido possível de propagação o qual depende do hemisfério. Usando o que já foi visto para as Ondas tipo Kelvin, Ondas de Plataforma Continental devem propagar-se com a costa à esquerda no hem. Sul e com a costa à direita no hem. Norte.

A Relação de Dispersão também permite determinar outra grandeza importante das ondas de plataforma: sua velocidade de grupo  $(C_g)_n$ , dada por :

$$(C_g)_n = \frac{d\sigma}{d\lambda_n} = \left[ \frac{2(k^2 + \beta_n^2 - \lambda_n^2)}{(k^2 + \beta_n^2 + \lambda_n^2)^2} \right] kf \quad (\text{III. 319})$$

Para resolver a relação de dispersão é necessário escolher os parâmetros da função exponencial (III.308) que promovam o melhor ajuste a batimetria da plataforma real. O exemplo de aplicação apresentado adiante ilustrará essa questão.

### III.6.2.2 - Deslocamento da Superfície

A determinação do deslocamento da superfície ocasionado pela onda no contexto da presente teoria envolve algumas sutilezas. De fato, analisando as equações originais [eq.(294 a 296)] verifica-se que todas as três relacionam  $\eta$  a  $U$  e  $V$  ou, equivalentemente, a  $\psi$ .

Começando pela conservação da massa, a hipótese de não divergência, que é o ponto de partida da solução, fornece :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$$

Ou seja, o nível permanece *estático* todo o tempo. Esse estranho resultado é fruto da aproximação do “tampo rígido” e, obviamente, não é útil para determinar  $\eta$ .

As duas equações de conservação do momentum, podem a princípio, ser usadas para determinar  $\eta$ . Expressando  $U$  e  $V$  em termos de  $\psi$ , as eqs. (III.294) e (III.295) tomam a forma :

- Momentum normal à costa (III.294):

$$-gh\eta = f\psi + \int \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} dx \quad \therefore \quad -gh\eta = f\psi + \sigma\lambda \int \psi dx \quad (\text{III. 320})$$

- Momentum paralelo à costa (III.295):

$$-gh\eta = f\psi - \int \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x} dy \quad \therefore \quad -gh\eta = f\psi - \frac{\sigma}{\lambda} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{III. 321})$$

Portanto, para que ambas as equações deem o mesmo resultado para  $\eta$ , é necessário que os últimos termos das equações acima sejam equivalentes. Operando os termos, tem-se:

$$\sigma\lambda \int \psi dx = \frac{\sigma\lambda_n A_n \sqrt{h_o}}{k^2 + \beta_n^2} e^{kx} [k \sin(\beta_n x) - \beta_n \cos(\beta_n x)] e^{i(\lambda_n y - \sigma t)}$$

$$-\frac{\sigma}{\lambda} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\sigma A_n \sqrt{h_o}}{\lambda_n} e^{kx} [k \sin(\beta_n x) + \beta_n \cos(\beta_n x)] e^{i(\lambda_n y - \sigma t)}$$

Verifica-se que os termos resultam em funções *diferentes*.

Ocorre que na abordagem não-divergente adotada, o parâmetro deslocamento do nível só pode ser determinado de forma aproximada. Segundo Gill (1982) (pg. 411, eq. 10.12.15), a equação de momentum *paralelo* a costa é a que deve ser utilizada para determinar  $\eta$ . Assim, usando a eq.(III.321) e lembrando que variáveis físicas devem ser expressas em termos de números reais, chega-se a:

$$\eta_n(x, y, t) = A_n \frac{C_n \beta_n}{g \sqrt{h_o}} e^{-kx} \left[ \cos(\beta_n x) + \left( \frac{k}{\beta_n} - \frac{f \lambda_n}{\sigma \beta_n} \right) \sin(\beta_n x) \right] \cdot \cos(\lambda_n y - \sigma t) \quad (\text{III. 322})$$

Finalmente, a constante (dimensional)  $A_n$  é determinada em função da amplitude  $a_n$  (em metros) especificada para cada modo da onda na costa ( $x = 0$ ) por :

$$A_n \frac{C_n \beta_n}{g \sqrt{h_o}} = a_n$$

Donde,

$$A_n = \frac{g \sqrt{h_o}}{C_n \beta_n} a_n \quad (\text{III. 323})$$

Substituindo em (III.322), tem-se:

$$\eta_n(x, y, t) = a_n e^{-kx} \left[ \cos(\beta_n x) + \left( \frac{k}{\beta_n} - \frac{f}{C_n \beta_n} \right) \sin(\beta_n x) \right] \cdot \cos(\lambda_n y - \sigma t) \quad (\text{III. 324})$$

### III.6.2.3 - Campo de Velocidades

Usando a definição de  $\psi$  (III.301) e, novamente, lembrando que variáveis físicas devem ser expressas em termos de números reais, chega-se ao campo de velocidade associado a cada modo da onda:

$$U_n(x, y, t) = -\frac{A_n}{\sqrt{h_o}} \lambda_n e^{-kx} \sin(\beta_n x) \cdot \sin(\lambda_n y - \sigma t) \quad (\text{III. 325})$$

e,

$$V_n(x, y, t) = \frac{A_n}{\sqrt{h_o}} \beta_n e^{-kx} \left[ \cos(\beta_n x) + \frac{k}{\beta_n} \sin(\beta_n x) \right] \cdot \cos(\lambda_n y - \sigma t) \quad (\text{III. 326})$$

Expressando a constante  $A_n$  em termos da amplitude dos modos de onda na costa  $a_n$ , (III.323), tem-se:

$$U_n(x, y, t) = -a_n \frac{g}{C_n} \frac{\lambda_n}{\beta_n} e^{-kx} \sin(\beta_n x) \cdot \sin(\lambda_n y - \sigma t) \quad (\text{III. 327})$$

$$V_n(x, y, t) = a_n \frac{g}{C_n} e^{-kx} \left[ \cos(\beta_n x) + \frac{k}{\beta_n} \sin(\beta_n x) \right] \cdot \cos(\lambda_n y - \sigma t) \quad (\text{III. 328})$$

Como era de se esperar, para ondas progressivas,  $\eta$  e  $V$  estão em fase, ou seja, a velocidade máxima ao longo da costa ocorre durante a passagem da crista da onda. Da mesma forma, a água move-se na direção da costa a medida que a crista da onda se aproxima.

### Maré Meteorológica e Corrente Costeira

As condições na costa ( $x = 0$ ) determinam a Maré Meteorológica e a corrente costeira ocasionada por uma Onda de Plataforma. Usando as expressões obtidas, tem-se:

$$\eta_n(0, y, t) = a_n \sin(\lambda_n y - \sigma t) \quad (\text{III. 329})$$

$$V_n(0, y, t) = a_n \frac{g}{C_n} \sin(\lambda_n y - \sigma t) \quad (\text{III.330})$$

Aqui também, verifica-se que a MM e a corrente costeira associada a *cada modo* guardam o mesmo tipo de relação encontrado anteriormente, qual seja:

$$V_n(0, y, t) = \frac{g}{C_n} \eta_n(0, y, t) \quad (\text{III.331})$$

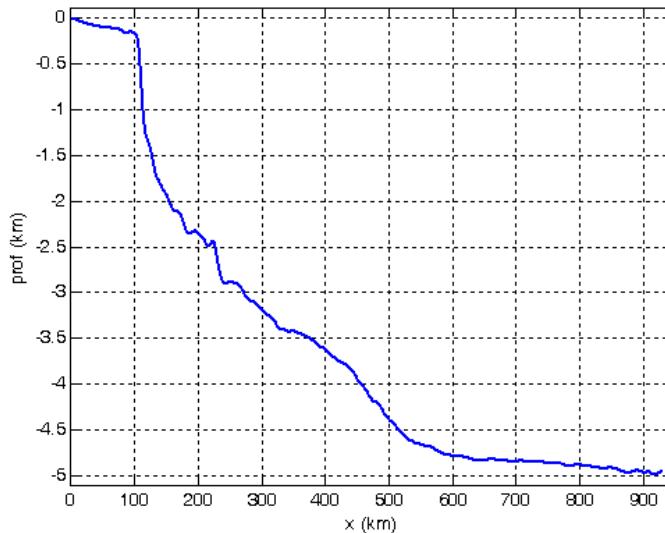
O que muda é a velocidade  $C_n$ , que agora é a velocidade do modo da Onda de Plataforma considerada.

### III.6.2.4 - Exemplo de Aplicação

A título de exemplo, vamos considerar uma aplicação da presente teoria para uma plataforma exponencial hipotética (i.e. uniforme na direção ao longo da costa) ajustada ao trecho central da plataforma gaúcha de latitude  $32^\circ$  Sul. Suponhamos que se deseja a solução para o *modo 1* de uma onda de plataforma de período 5 dias e amplitude 0.5 m. A aplicação será feita passo a passo.

#### Passo #1 - Ajuste da Batimetria

A figura (III. 82) abaixo mostra um corte perpendicular à costa próximo a localidade de Mostardas cobrindo a plataforma continental, o talude continental e um trecho do fundo abissal obtida da batimetria ETOPO.



**Figura III.82 – Corte batimétrico no litoral norte do Rio Grande do Sul**

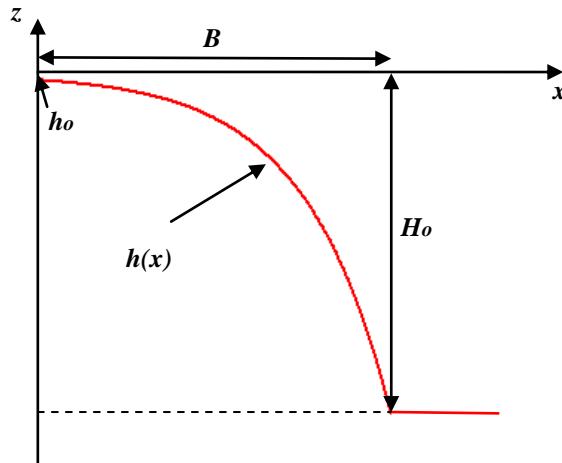
A figura (III. 83) mostra os parâmetros envolvidos na definição da função exponencial :

$$h(x) = h_o e^{2kx} \quad (\text{III.308 - bis})$$

- (i)  $h_o$  = Profundidade do batente na costa
- (ii)  $B$  = Distância da costa ao fundo abissal
- (iii)  $H_o$  = Profundidade na fronteira da plataforma

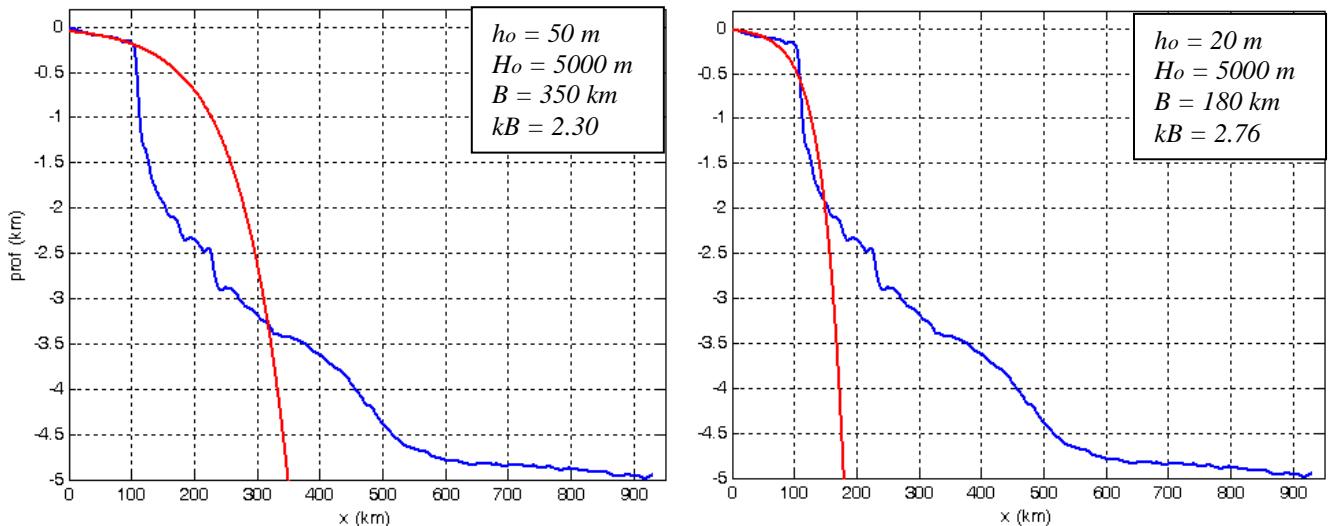
O parâmetro  $k$  é determinado a partir dos parâmetros, observando que  $h(B) = H_o$ , e é dado por:

$$k = \frac{1}{2B} \ln\left(\frac{H_o}{h_o}\right) \quad (\text{III.332})$$



**Figura III.83** - Parâmetros que definem a forma exponencial da batimetria idealizada

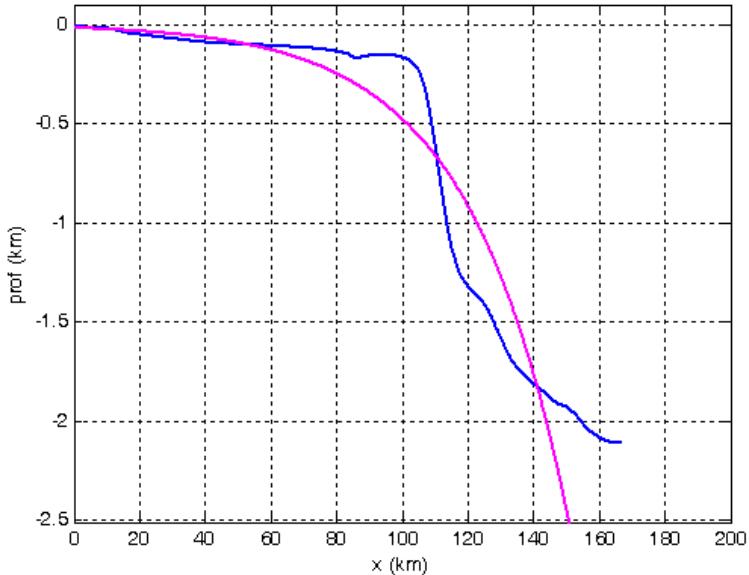
Assim, de posse do corte, o próximo passo é escolher os parâmetros da função exponencial que propiciem o melhor ajuste à batimetria. A primeira questão a observar é que a forma geral do conjunto plataforma + talude continental na região não se aproxima muito de um simples decaimento exponencial, mas apresenta um platô, seguido de um talude côncavo. Esse fato dificulta o ajuste de *todo* o perfil, i.e. da costa até o fundo abissal, como ilustrado na figura (III.84).



**Figura III.84** - Ilustração das possibilidades de ajuste da batimetria exponencial para a plataforma central gaúcha

A situação do gráfico à esquerda mostra um bom ajuste para o trecho contido na plataforma, entretanto, a parte do talude fica mal representada. A situação do gráfico à direita, ao contrário, consegue capturar aproximadamente a parte íngreme do trecho superior do talude mas perde precisão no trecho da plataforma.

Após algumas tentativas, a seguinte configuração foi adotada: :  $h_o = 18 \text{ m}$ ;  $B = 165 \text{ km}$  e  $kB = 2.7$ . O resultado está mostrado na figura (III.85):



**Figura III.85** - Ajuste para :  $h_o = 18 \text{ m}$ ;  $B = 165 \text{ km}$  e  $kB = 2.7$

Para essa configuração, o valor do parâmetro  $k$  fica igual a  $1.63 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-1}$ .

### Passo #2 - Determinação dos Parâmetros $\beta_n$

Os parâmetro  $\beta_n$  são determinados a partir da equação algébrica transcendental eq (III.315) reescrita abaixo :

$$\tan(\beta_n B) + \frac{\beta_n B}{kB} = 0 \quad (\text{III.315 - bis})$$

Para  $kB = 2.7$ , as soluções para os três primeiros modos são:

$$\begin{aligned} \text{Modo 1} - \beta_1 B &= 2.43 \rightarrow \beta_1 = 1.47 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-1} \\ \text{Modo 2} - \beta_2 B &= 5.16 \rightarrow \beta_2 = 3.13 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-1} \\ \text{Modo 3} - \beta_3 B &= 8.17 \rightarrow \beta_3 = 4.95 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-1} \end{aligned}$$

### Passo #3 - Solução da Relação de Dispersão

A relação de dispersão, eq.(III.316), fornece, para o número de onda da onda (na direção paralela a costa)  $\lambda_n$ , o seguinte:

$$\lambda_n^2 - \frac{2kf}{\sigma} \lambda_n + (k^2 + \beta_n^2) = 0 \quad (\text{III.333})$$

Para uma dada frequência  $\sigma$ , as raízes  $\lambda_n$ , para cada modo  $n$ , são obtidas de:

$$\lambda_n = \frac{kf}{\sigma} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{2kf}{\sigma}\right)^2 - 4(k^2 + \beta_n^2)} \quad (\text{III.334})$$

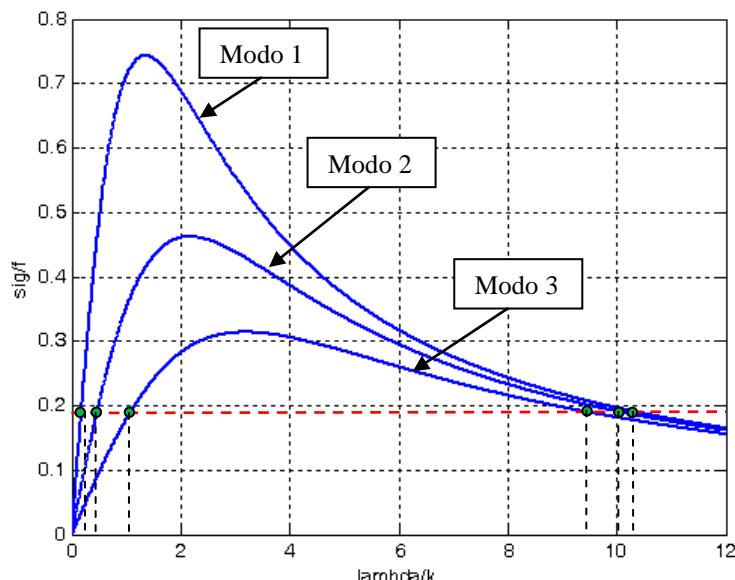
Considerando apenas os três primeiros modos, a eq.(III.316) será utilizada para calcular as características possíveis para uma onda com período de 5 dias em  $32^\circ$  de latitude Sul nessa plataforma exponencial com  $kB = 2.70$ . O parâmetro de Coriolis (módulo) para a latitude  $32^\circ$  é  $f = 7.71 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ . A frequência (angular) correspondente a 5 dias é  $\sigma = 1.45 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ . Observando que a eq.(III.315) possui 2 raízes (identificadas por  $^+$  e  $-$ ), obtém-se os seguintes resultados:

**Tabela III.5** – Resultado da solução da Relação de Dispersão para os 3 primeiros modos para o caso de  $B=165\text{ km}$  e  $kB = 2.7$ , para uma onda de período 5 dias

$\sigma = 1.45 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$	Modo 1	Modo 2	Modo 3
$\beta_n B$	2.43	5.16	8.17
$\lambda_n^+ (\text{m}^{-1})$	$1.71 \times 10^{-4}$	$1.66 \times 10^{-4}$	$1.56 \times 10^{-4}$
$L_n^+ (\text{km})$	36.8	37.9	40.3
$C_n^+ (\text{m/s})$	0.085	0.088	0.093
$\lambda_n^- (\text{m}^{-1})$	$2.84 \times 10^{-6}$	$7.51 \times 10^{-6}$	$1.74 \times 10^{-5}$
$L_n^- (\text{km})$	2 211.5	836.8	360.4
$C_n^- (\text{m/s})$	5.12	1.92	0.8

É importante notar que a velocidade de propagação varia inversamente com a numeração dos modos, isto é, quanto mais alto for o modo mais lentamente ele se propaga.

A figura (III.86) abaixo ilustra graficamente a solução acima.

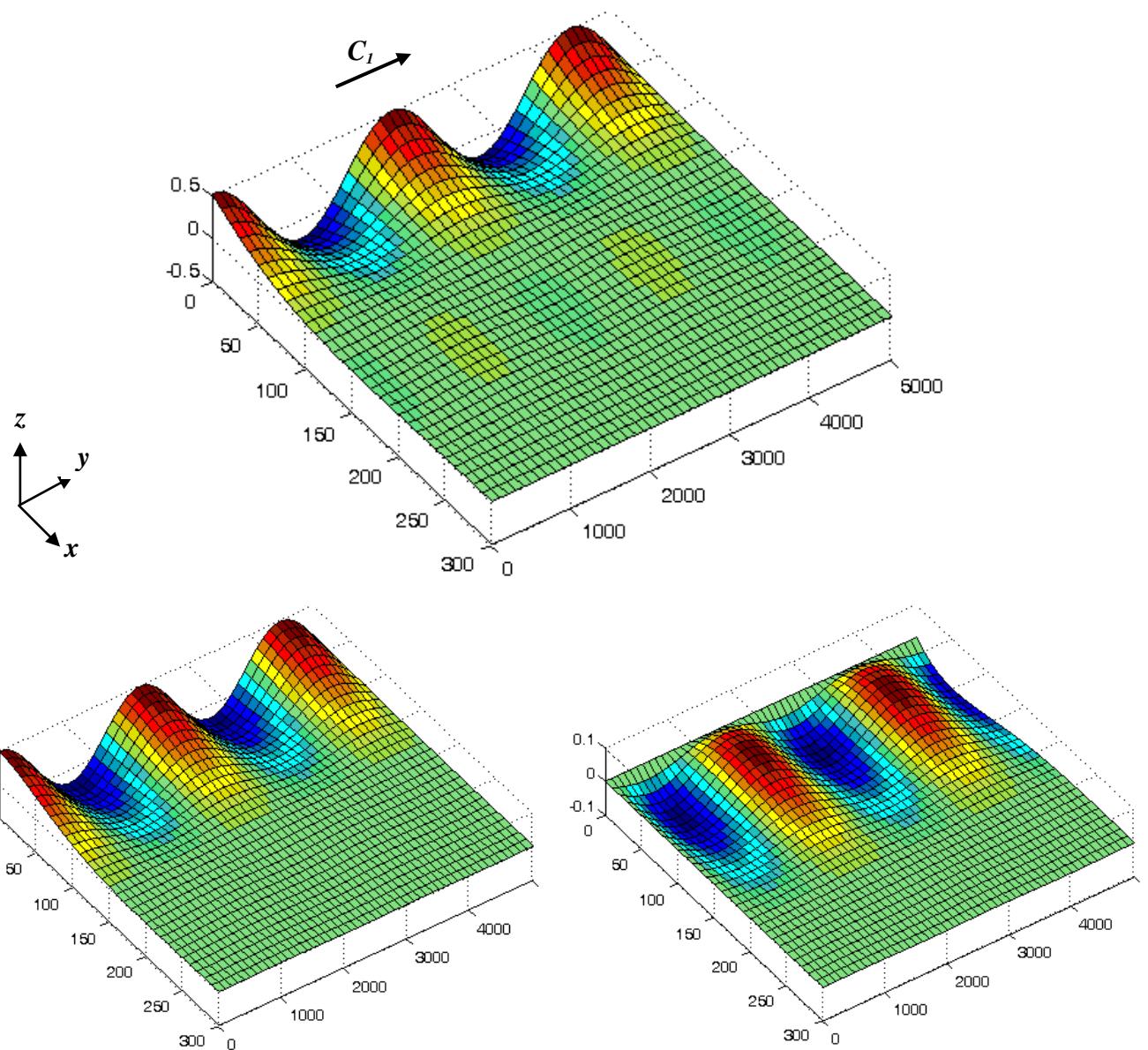


**Figura III.86** – Relação de dispersão para os 3 primeiros modos para o caso de  $kB = 2.7$

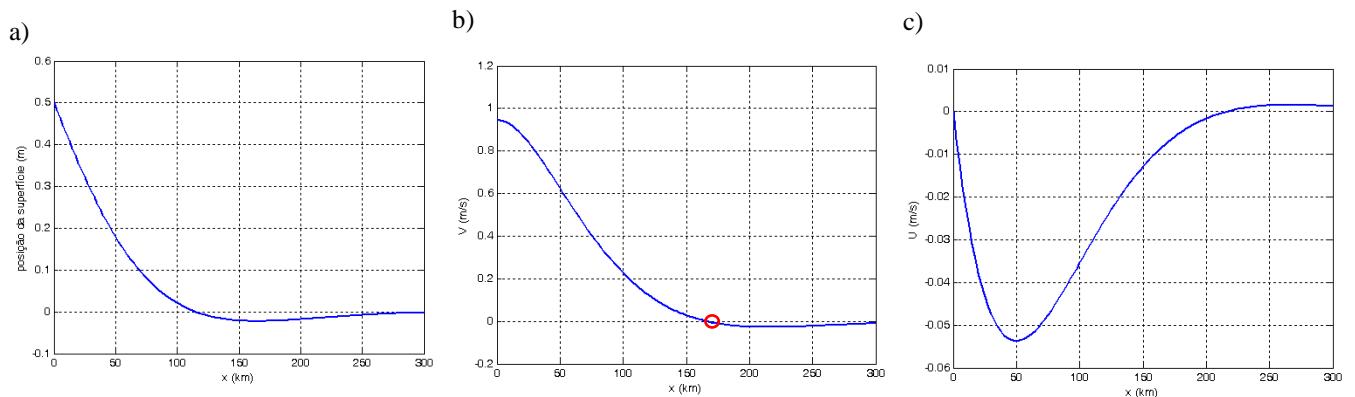
A princípio, existe a possibilidade de haver duas respostas para cada modo: uma resposta na forma de ondas “longas” e outra na forma de ondas “curtas”. Segundo os inúmeros estudos sobre o assunto, em aplicações práticas dessa teoria, a solução é normalmente dominada pela resposta na forma de ondas longas do primeiro modo, a qual, no presente exemplo encontra-se sombreada de amarelo na tabela III.5. Assim sendo, doravante, quando o *Modo 1* for mencionado fica subentendido tratar-se da solução na forma de ondas longas.

#### Passo# 4 - Cálculo do Deslocamento da Superfície e do Campo de Velocidades

O deslocamento da superfície e as velocidades são determinados pelas eqs.(III.324, 327 e 328) . Iniciando com a resposta do modo 1, a solução é ilustrada graficamente nas figuras (III.87) e (III.88) abaixo.



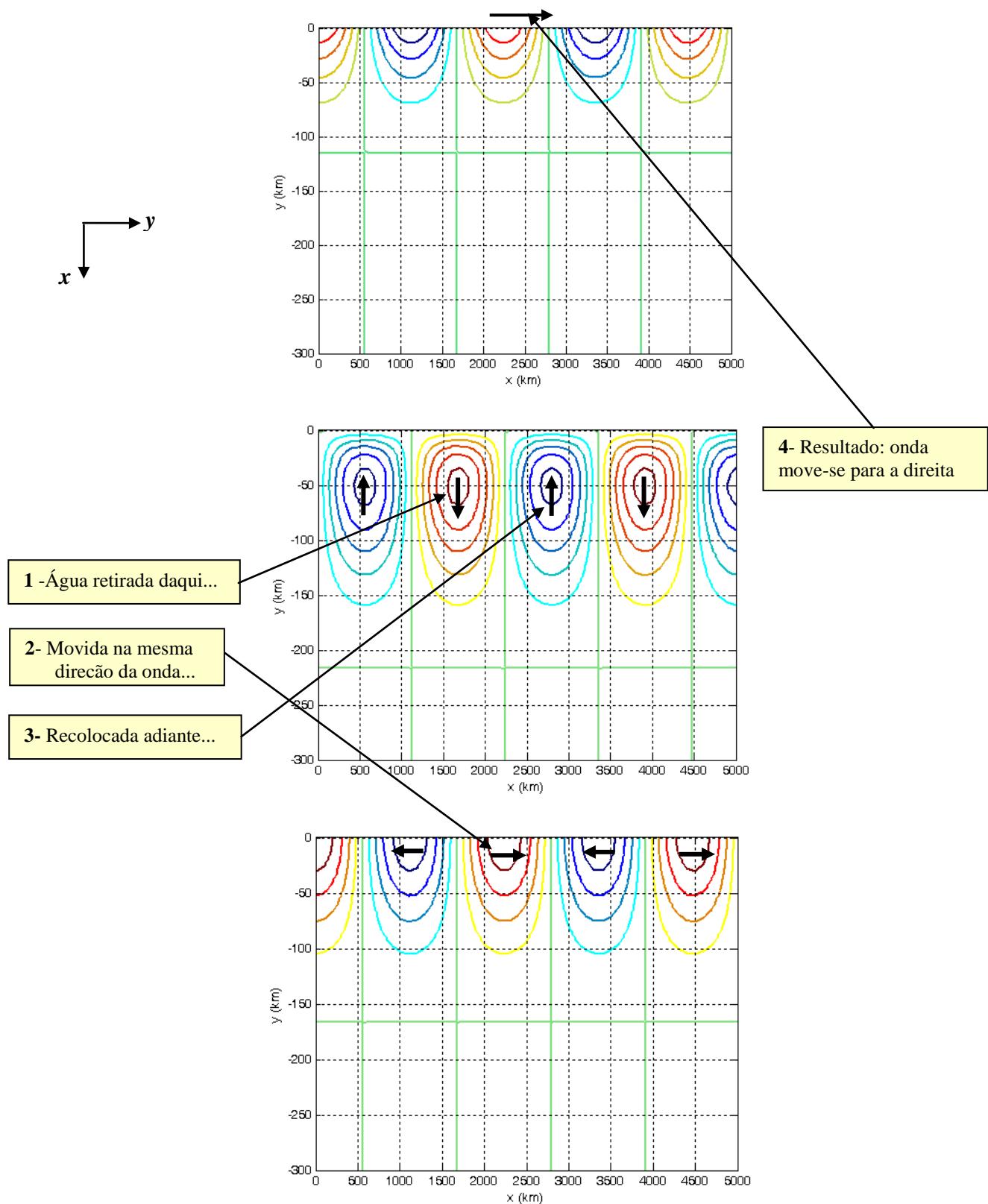
**Figura III.87** - Vista em perspectiva da solução para o *Modo 1* de uma Onda de Plataforma Continental sobre a plataforma exponencial idealizada dada por (III.308) numa latitude de  $32^\circ$  S (hem. Sul). Características da onda: período = 5 dias, Comprimento = 2 211.5 km, velocidade de propagação = 5.12 m/s (442.4 km/dia) (sentido indicado na figura). Painel superior: deslocamento da superfície ( $\eta_1$ ) em metros. Painel inferior esquerdo: velocidade paralela a costa ( $V_1$ ) em m/s. Painel inferior direito: velocidade da corrente normal a costa ( $U_1$ ) em m/s. Observar distorção de escalas entre distâncias horizontais e verticais.



**Figura III.88** - Cortes perpendiculares à costa para:  $\eta_1$  (a);  $V_1$  (b) e  $U_1$  (c).

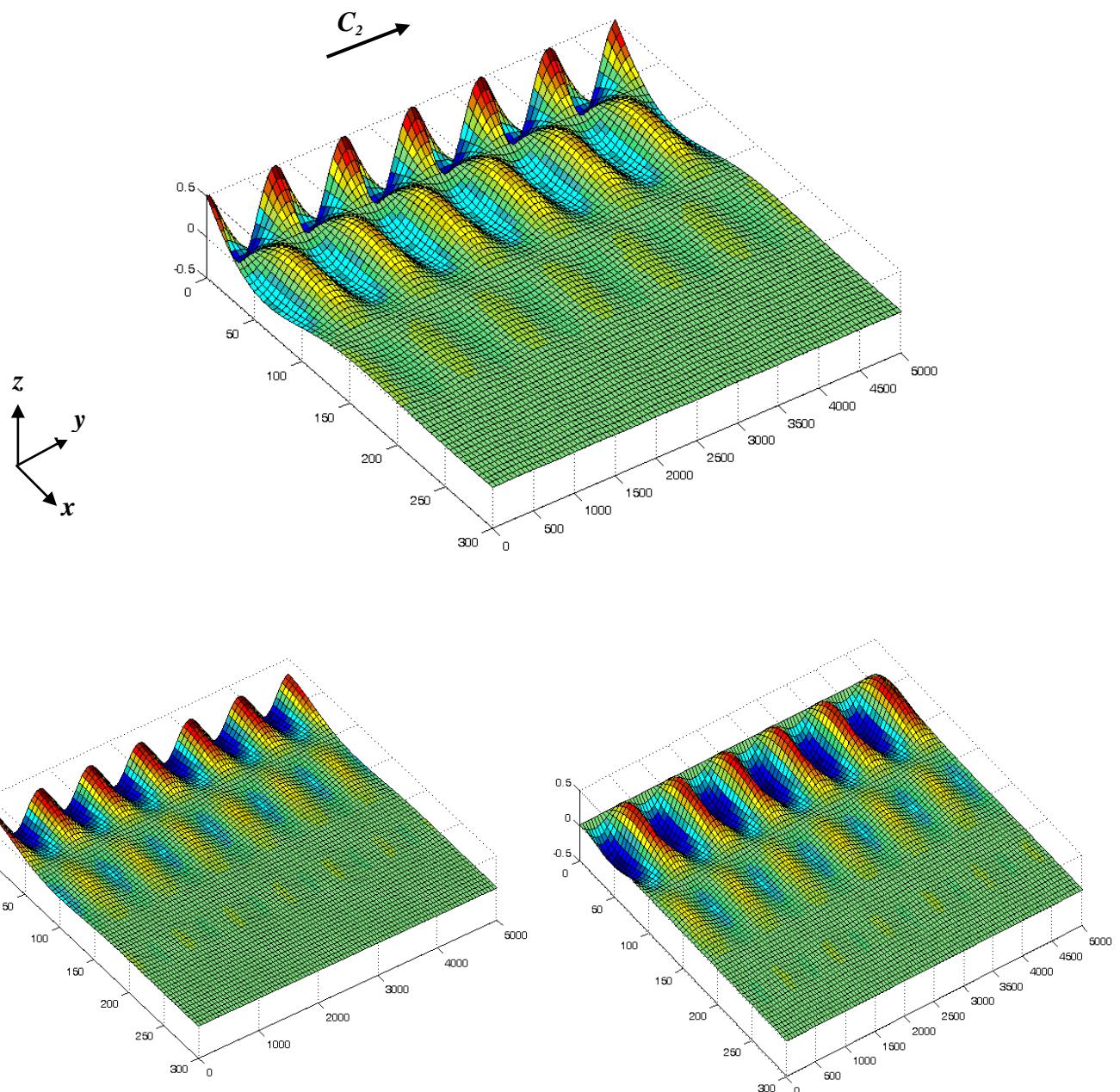
É interessante observar no corte da velocidade  $V$ , que a velocidade vai a zero para  $x = 165 \text{ km}$ , em atendimento a condição de contorno usada. Curiosamente, porém, a onda não se extingue a partir desse ponto, havendo ainda um resíduo que penetra no oceano.

Explorando um pouco mais a solução, a figura (III.89) mostra gráficos de curvas de contorno da posição da superfície e das velocidades refrentes ao modo 1. A figura apresenta uma análise da composição das velocidades com o nível d'água que mostra a compatibilidade do resultado com o sentido de propagação da onda [ver texto diretamente na figura (III. 89)].

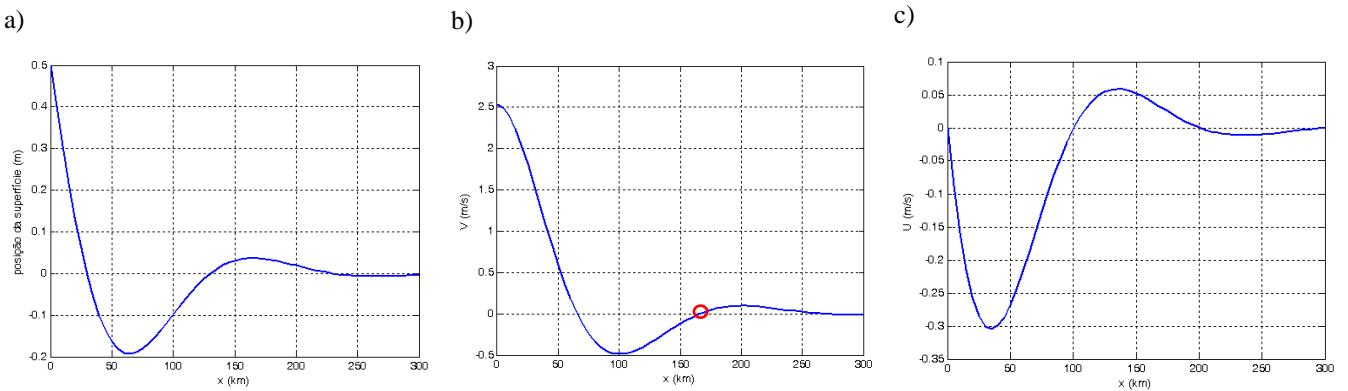


**Figura III.89** - Curvas de nível (“contour plots”) correspondentes a figura (III. 87). Painel superior: deslocamento da superfície ( $\eta_1$ ). Painel central : velocidade normal a costa ( $U_1$ ). Painel inferior: velocidade paralela à costa ( $V_1$ ). Código de cores: **vermelho** = valor positivo da grandeza, **azul** valor negativo. Sentido de movimento (+) ou (-) indicado por setas. Observar distorção de escalas entre distâncias horizontais..

As figuras (III.90) e (III.91) ilustram a solução para o modo 2



**Figura III.90** - Vista em perspectiva da solução para o *Modo 2* para as mesmas condições da figura anterior: Onda de Plataforma Continental sobre a plataforma exponencial idealizada dada por (III.308) numa latitude de  $32^\circ S$  (hem. Sul). Características da onda: período = 5 dias, comprimento = 836.8 km, velocidade de propagação = 1.92 m/s (165.9 km/dia) (sentido indicado na figura). Painel superior: deslocamento da superfície ( $\eta_2$ ) em metros. Painel inferior esquerdo: velocidade paralela a costa ( $V_2$ ) em m/s. Painel inferior direito: velocidade da corrente normal a costa ( $U$ ) em m/s. Observar distorção de escalas entre distâncias horizontais.



**Figura III.91** - Cortes perpendiculares à costa para:  $\eta_2$  (a);  $V_2$  (b) e  $U_2$  (c).

Observar que, como esperado, a superfície da água no modo 2 corta o nível zero em 2 pontos e que a velocidade corta o nível zero em  $x = 165 \text{ km}$  de forma a atender a condição de contorno. Notar também que a velocidade de propagação do modo 2 é 2.7 vezes menor que a do modo 1.

### III.6.3 Propriedades das Ondas de Plataforma Continental

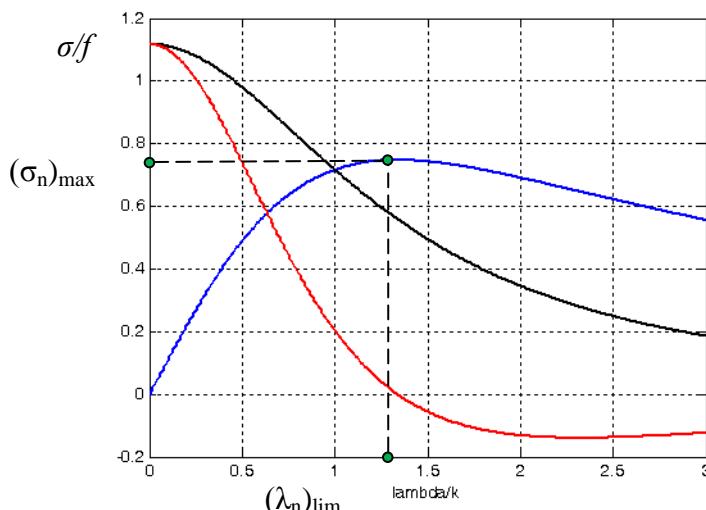
Para melhor explorar as propriedades físicas das Ondas de Plataforma é conveniente expressar as eqs.(III.316, 317 e 318) de maneira adimensional usando a largura da plataforma  $k^{-1}$  como unidade de distância. Adotando, para os parâmetros adimensionais a nomenclatura:  $\sigma' = \frac{\sigma}{f}$ ;  $C'_n = \frac{k}{f} C_n$ ;  $(C_g)'_n = \frac{k}{f} (C_g)_n$ ;  $\beta'_n = \frac{\beta_n}{k}$  e  $\lambda'_n = \frac{\lambda_n}{k}$ , tem-se:

$$\sigma' = \frac{2\lambda'_n}{1 + (\beta'_n)^2 + (\lambda'_n)^2} \quad (\text{III.335})$$

$$C'_n = \left\{ \frac{2}{1 + (\beta'_n)^2 + (\lambda'_n)^2} \right\} \quad (\text{III.336})$$

$$(C_g)'_n = \left\{ \frac{2[1 + (\beta'_n)^2 - (\lambda'_n)^2]}{[1 + (\beta'_n)^2 + (\lambda'_n)^2]^2} \right\} \quad (\text{III.337})$$

Para simplificar, apenas o *modo 1* foi considerado na ilustração a seguir uma vez que os outros modos tem comportamento similar. A figura (III.92) ilustra o comportamento das funções acima para  $\beta'_1 = \frac{\beta_1}{k} = 0.89$ , um valor típico desse parâmetro.



**Figura III.92** - Linha **azul** :  $\sigma' = \frac{\sigma}{f}$ ; ( eq. III.335 ) : linha **azul** ; linha **preta** :  $C'_1 = \frac{k}{f} C_1$  e linha **vermelha** :  $(C_g)'_1 = \frac{k}{f} (C_g)_1$ . Funções calculadas apenas para o Modo 1 com  $\beta'_1 = \frac{\beta_1}{k} = 0.89$ .

Observando que  $k^{-1} = B$ , onde  $B$  = largura da Plataforma, e que  $C_n = C'_n \cdot fB$ , vê-se que a função  $C'_n$  fornece o número pelo qual o parâmetro  $fB$  deverá ser multiplicado para se obter a velocidade de fase da onda. Por exemplo, se  $C'_n = 1$ , a velocidade de fase é obtida simplesmente multiplicando o parâmetro de Coriolis pela largura da plataforma.

É importante constatar que a velocidade de fase das ondas é diretamente proporcional a  $f$  e à largura da plataforma, portanto, mantidas as demais características, OPC's propagar-se-ão mais rapidamente em altas latitudes e em plataformas largas. Vê-se também que a velocidade de fase é sempre positiva no gráfico, ou seja, as cristas das ondas propagam-se no mesmo sentido que ondas tipo Kelvin, independentemente da sua frequência.

O resultado também indica que essas ondas não podem existir em toda a faixa de frequências, havendo, para cada modo, um valor máximo [  $(\sigma_n)_{max}$  ] a partir do qual não há mais ondas. Essa frequência limite separa o sentido de propagação da energia ( dado pelo sinal de  $(C_g)_n$  ) de tal forma que, para cada modo, ondas “longas”, i.e., com  $\lambda_n < (\lambda_n)_{lim}$ ,  $(C_g)_n > 0$  e a energia propaga-se no mesmo sentido da fase (cristas); para ondas “curtas”  $\lambda_n > (\lambda_n)_{lim}$ ,  $(C_g)_n < 0$  e a energia propaga-se em sentido contrário às fases.

O valor de  $(\sigma_n)_{max}$  pode ser facilmente determinado observando sua correspondência com o ponto onde a velocidade de grupo se anula. O valor de  $\lambda'_n$  que produz  $(C_g)_n = 0$  é  $\lambda'_n = \sqrt{1 + (\beta'_n)^2}$ . Inserindo esse valor na eq.(III.335) chega-se a:

$$(\sigma_n)_{max} = \frac{f}{\sqrt{1 + (\beta'_n)^2}} \quad (III.338)$$

Portanto, a frequencia máxima será sempre menor que  $f$ . Para o exemplo da figura,  $(\lambda_1)_{lim} = 1.34 k$  e  $(\sigma_1)_{max} = 0.75 f$ .

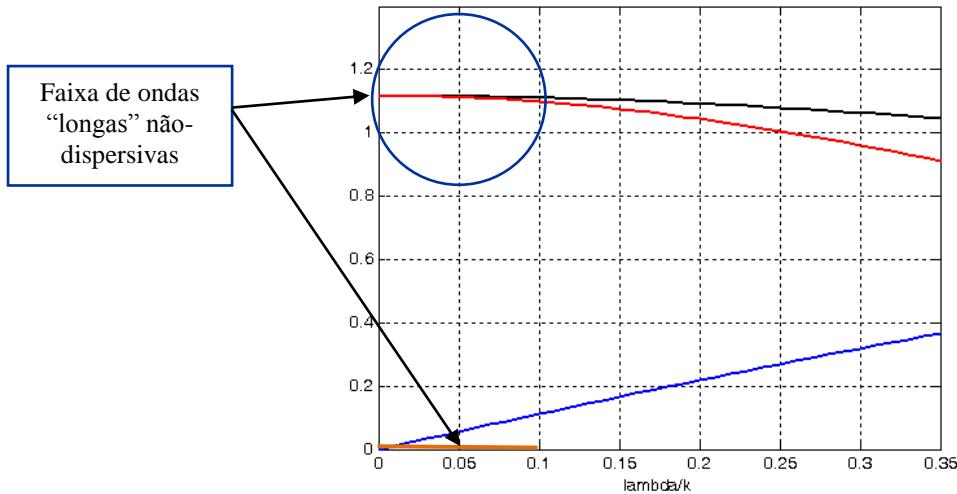
Finalmente, a solução acima também indica que, de maneira geral, as ondas de plataforma são dispersivas, ou seja, a velocidade de propagação depende do comprimento/periódo da onda, exceto se as ondas forem longas ou de baixa frequência.

### III.6.4 - Ondas de Plataforma Continental “Longas” ou de Baixa Frequência

O fenômeno da Maré Meteorológica, como definido no presente estudo, enquadra-se numa faixa de períodos entre 3 a 30 dias, portanto a banda de frequências de interesse aqui se situa em Ondas de Plataforma Continental “longas” ou de baixa frequência. Assim, nessa sessão serão analisadas as propriedades de ondas cujas frequências ( $\sigma$ ) sejam significativamente menores que  $f$  ou seja, com  $\sigma \ll f$ , ou, equivalentemente, que tenham  $\lambda \ll \beta$ , isto é, ondas cuja escala de comprimento de onda ao longo da costa ( $\sim \lambda^{-1}$ ) seja significativamente maior que a escala de comprimento de onda perpendicular a costa ( $\sim \beta^{-1}$ ) a qual é da mesma ordem de grandeza da escala de largura da plataforma continental ( $k^{-1}$ ). Para esse tipo de OPC, as velocidades de fase e de grupo podem ser aproximadas por uma única expressão dada por:

$$C_n = \left( \frac{2k}{k^2 + \beta_n^2} \right) f \quad (III.339)$$

A figura (III.93) ilustra graficamente essa solução. Os gráficos mostrados são uma versão ampliada das curvas da figura (III.92) para a região próxima ao zero.



**Figura III.93** – Ampliação da figura III.91 para a região mais próximo ao zero da figura

O que se pode depreender desse resultado, lembrando que  $k^{-1} = B$ , é que OPC's “longas”, digamos com  $\lambda_n > 10 B$ , são *não-dispersivas* pois suas velocidades de fase e de grupo são constantes, logo independem do período. Em outras palavras: OPC's longas, de qualquer período, viajam com a *mesma* velocidade, dada por:

$$C_n = \left[ \frac{2}{1 + \left( \frac{\beta_n B}{kB} \right)^2} \right] fB \quad (\text{III. 340})$$

Considerando apenas o modo 1 do exemplo em estudo, teríamos:

$$\beta_1 B = 2.43 \quad \text{e} \quad kB = 2.7 \quad \rightarrow \quad \left( \frac{\beta_1 B}{kB} \right)^2 = 0.81$$

Portanto, a velocidade do modo 1 vale:

$$C_1 = 1.10 * fB \approx fB$$

Traçando um paralelo com as ondas de plataforma tipo Kelvin estudadas na seção anterior, a velocidade de propagação daquele tipo de onda para o caso de ondas longas (ou, equivalentemente, para plataformas estreitas) é:

$$C_* = \tanh((L/|R|) \sqrt{gh_o}) \approx |f| L$$

Portanto, se  $L$  não diferir muito de  $B$ , as velocidades dos dois tipos de onda terão valores próximos.

A solução geral para o nível para o modo 1, é dada por (III.324):

$$\eta_1(x, y, t) = a_1 e^{-kx} \left[ \cos(\beta_1 x) + \left( \frac{k}{\beta_1} - \frac{f}{C_n \beta_n} \right) \sin(\beta_1 x) \right] \cdot \sin(\lambda_1 y - \sigma t) \quad (\text{III. 324 - bis})$$

Para ondas longas, a expressão simplifica-se para:

$$\eta_1(x, y, t) = a_1 e^{-kx} \left[ \cos(\beta_1 x) + \frac{k}{\beta_1} \sin(\beta_1 x) \right] \cdot \sin(\lambda_1 y - \sigma t) \quad (\text{III. 341})$$

As velocidades  $V$  e  $U$  continuam inalteradas:

$$V_1(x, y, t) = a_1 \frac{g}{C_1} e^{-kx} \left[ \cos(\beta_1 x) + \frac{k}{\beta_1} \sin(\beta_1 x) \right] \cdot \sin(\lambda_1 y - \sigma t) \quad (\text{III. 342})$$

$$U_1(x, y, t) = -a_1 \frac{g}{C_1} \frac{\lambda_1}{\beta_1} \cdot e^{-kx} \sin(\beta_1 x) \cdot \cos(\lambda_1 y - \sigma t) \quad (\text{III. 343})$$

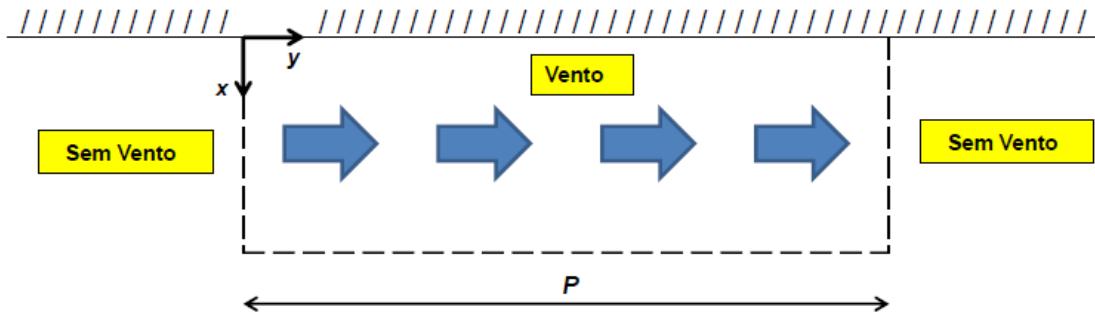
Sumarizando os resultados pode-se afirmar que a inclinação, ou mais precisamente, a forma do fundo:

- Afeta a estrutura espacial do deslocamento de nível e do campo de velocidades sobre a plataforma continental
- Abre a possibilidade de haver vários “modos” de propagação (algo que não existia na plataforma de prof. constante), com cada “modo” tendo velocidade de propagação própria.

Com isso encerra-se a revisão da teoria de Ondas de Plataforma Continental.

### III.7 - Vento de Pista Finita atuando numa Plataforma com Fundo Inclinado.

A figura (III.94) ilustra a vista em planta do caso em estudo. A vista em corte é similar a figura (III.81).



**Figura III.94** – Ilustração esquemática do caso em estudo (vista em planta)

Observar que a tensão do vento varia apenas na direção ao longo da costa (direção  $y$ ) , ou seja:  $\tau_y^W(y, t)$

As equações governantes são escritas abaixo:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - fV = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (\text{III.344})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + fU = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\tau_y^W}{\rho h} \quad (\text{III.345})$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hU) + \frac{\partial}{\partial y}(hV) = 0 \quad (\text{III.346})$$

Primeiro passo é eliminar  $\eta$  entre as duas primeiras equações fazendo:  $-\frac{\partial \eta}{\partial y}$  (III.344) +  $\frac{\partial \eta}{\partial x}$  (III.345):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) + f \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) = - \frac{\tau_y^W}{\rho h^2} \frac{dh}{dx} \quad (\text{III.347})$$

A eq.(III.346) é substituída em (III.347), para obter:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) - \frac{f}{h} \left( U \frac{\partial h}{\partial x} + V \frac{\partial h}{\partial y} \right) = - \frac{\tau_y^W}{\rho h^2} \frac{dh}{dx} \quad (\text{III.348})$$

Introduzindo a função de corrente  $\psi(x, y, t)$  definida de acordo com (III.301), chega-se a :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right] + \frac{f}{h^2} \left( - \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = - \frac{\tau_y^W}{\rho h^2} \frac{dh}{dx} \quad (\text{III.349})$$

Admitindo que o fundo varie apenas na direção perpendicular à costa [  $h = h(x)$  ], a equação acima simplifica-se para:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{1}{h} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right] - \frac{f}{h^2} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} = - \frac{\tau_y^W}{\rho h^2} \frac{dh}{dx} \quad (\text{III.350})$$

Segundo Gill (1982), pg 413, a solução do problema com vento pode ser expressa por uma combinação de ondas de plataforma da forma:

$$\psi(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(y, t) \sqrt{h_o} \cdot e^{kx} \sin(\beta x) \quad (\text{III. 351})$$

As funções  $A_n(y, t)$  agora respondem a ação do vento e devem ser determinadas por equações específicas. Gill e Schumann (1974) apresentam uma técnica de solução para o caso geral o qual inclui a participação de *todos* os modos possíveis.

No presente trabalho, uma forma simplificada de solução focada na determinação da Maré Meteorológica será adotada. A simplificação é baseada em hipóteses fundamentadas nas observações do fenômeno conforme apresentado a seguir.

### **III.7.1 - Solução Simplificada para a Maré Meteorológica sem Atrito numa Plataforma Exponencial usando o Modo 1.**

A hipótese simplificadora admite que na faixa de frequência da MM, apenas a forma de ondas longas do modo 1 é excitada. Ao contrário da solução geral de Gill e Schumann (1974), essa hipótese faz com que cada frequência de onda possível tenha apenas uma única resposta, ou um único “modo”, tornando o problema similar, em essência, ao caso de ondas tipo Kelvin numa plataforma de profundidade constante.

Adicionalmente, uma segunda característica das Ondas de Plataforma longas, qual seja, que, nessa banda de frequência, as ondas são não-dispersivas (i.e. propagam-se com a mesma velocidade independentemente do período), garante a analogia com as ondas tipo Kelvin.

Considerando o caso da plataforma continental *exponencial* definida na seção III.6.2, a solução para o modo 1 de  $\eta$  e  $V$ , no caso de ondas longas livres, como visto na seção III.6.4.1, é dada por:

$$\eta_1(x, y, t) = a_1 e^{-kx} \left[ \cos(\beta_1 x) + \frac{k}{\beta_1} \sin(\beta_1 x) \right] \cdot \sin(\lambda_1 y - \sigma t) \quad (\text{III. 352})$$

$$V_1(x, y, t) = a_1 \frac{g}{C_1} e^{-kx} \left[ \cos(\beta_1 x) + \frac{k}{\beta_1} \sin(\beta_1 x) \right] \cdot \sin(\lambda_1 y - \sigma t) = \frac{g}{C_1} \eta_1(x, y, t) \quad (\text{III. 353})$$

A ideia desse método simplificado é que a estrutura perpendicular à costa da solução com vento seja idêntica a da solução de ondas livres de forma que a resposta possa ser escrita na forma:

$$V_1(x, y, t) = A_1(y, t) \cdot F(x) \quad (\text{III. 354})$$

$$\eta_1(x, y, t) = \frac{C_1}{g} A_1(y, t) \cdot F(x) \quad (\text{III. 355})$$

com a função  $F(x)$  dada por:

$$F(x) = e^{-kx} \left[ \cos(\beta_1 x) + \frac{k}{\beta_1} \sin(\beta_1 x) \right] \quad (\text{III. 356})$$

E onde  $A_1(y, t)$  é a própria corrente paralela à costa ( $V$ ).

Como feito anteriormente, a determinação de  $A_1(y, t)$  vem da aplicação da eq. de momentum paralelo a costa (III.345) ao longo da linha de costa. De fato, ao longo da costa ( i.e., em  $x = 0$  onde  $U = 0$  e  $h = h_o$ ), a eq. de momentum na direção y fica:

$$\frac{\partial V_1(0, y, t)}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta_1(0, y, t)}{\partial y} + \frac{\tau_y^W(y, t)}{\rho h_o} \quad (\text{III. 357})$$

Substituindo  $\eta_1$  e  $V_1$ , dados pelas expressões (III.354) e (III.355), em (III.357), tem-se:

$$\left( \frac{\partial A_1(y, t)}{\partial t} + C_1 \frac{\partial A_1(y, t)}{\partial y} \right) F(0) = \frac{\tau_y^W(y, t)}{\rho h_o}$$

Observando que  $F(0) = 1$ , tem-se:

$$\frac{\partial A_1(y, t)}{\partial t} + C_1 \frac{\partial A_1(y, t)}{\partial y} = \frac{\tau_y^W(y, t)}{\rho h_o} \quad (\text{III. 358})$$

A equação acima tem a forma de uma equação de transporte para  $A_1$ , idêntica a que surgiu no caso da plataforma tipo degrau com a diferença de que *a velocidade de transporte agora corresponde à velocidade de propagação do modo 1 da Onda de Plataforma para fundo exponencial.*

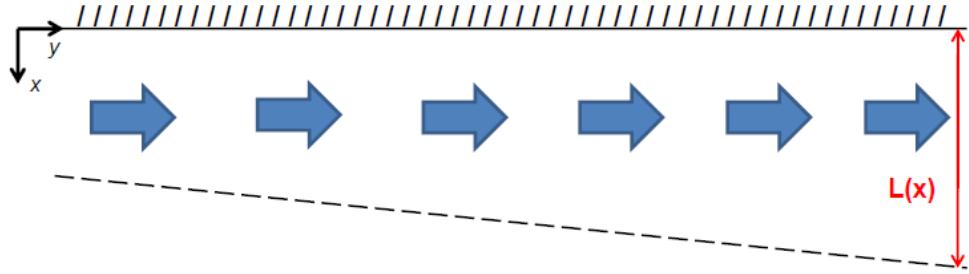
A solução de (III.358) para a determinação de  $A_1$  é feita pelo Método das Características de forma *idêntica* à usada para o caso da plataforma tipo degrau e, a partir desse ponto, os dois casos tornam-se iguais.

### III.8 - Caso de uma Plataforma em Degrau “Desconectada” que Varia ao longo da Costa

Até o momento a plataforma continental foi considerada como uniforme ao longo da costa e o efeito de variações da geometria da plataforma nessa direção ainda precisa ser analisado para completar a presente análise.

Por simplicidade, a análise vai se restringir ao caso da plataforma degrau desconectada. Nessa plataforma idealizada, dois parâmetros controlam o perfil: a largura e a profundidade da plataforma.

A figura (III.95) ilustra a situação em questão.



**Figura III.95 – Ilustração de plataforma degrau desconectada de largura variável**

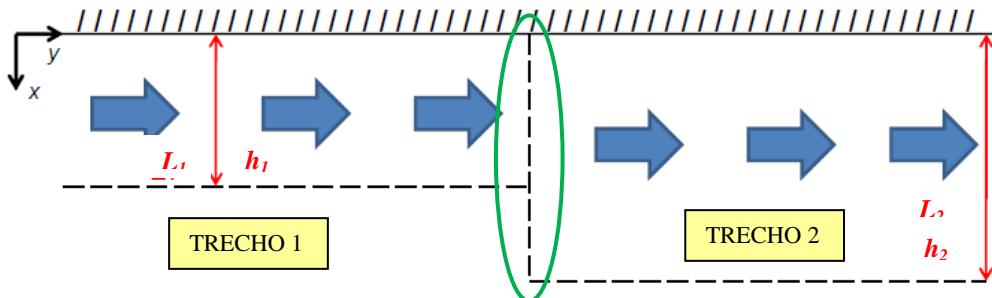
Interpretando o problema sob a ótica de ondas de plataforma, esse tópico relaciona-se com um problema de propagação de ondas num meio *não uniforme*, assunto bastante complexo e que não se presta a uma solução analítica minimamente simples. Uma versão do assunto foi tratada por Grimshaw (1977) num artigo bastante denso onde o autor analisou não apenas variações na geometria da plataforma mas também mudanças na curvatura da costa e na latitude.

No que tange o presente trabalho, é de interesse ressaltar uma das conclusões a que Grimshaw (1977) chegou com relação ao caso de uma plataforma que sofra um alargamento mantidas as outras características constantes. Para essa situação, aquele autor concluiu que a amplitude da onda deve *aumentar com um aumento da largura* da plataforma.

Mantendo a abordagem simplificada que permeou o presente trabalho, esse tópico será analisado de forma aproximada usando, mais uma vez, o artifício de substituir a variação contínua por variações em patamares conforme mostrado a seguir.

#### III.8.1.1 - Plataforma com Profundidade e Largura com variação em Patamares ao longo da Costa

A figura (III.96) ilustra esquematicamente a aproximação proposta.



**Figura III.96 - Aproximação em patamares para plataformas de largura variável**

A solução para plataformas de largura constante é conhecida e a ideia nessa aproximação é usar essas soluções de forma integrada usando condições de compatibilidade na interface [assinalada na figura (III.96)] que garantam a continuidade dos

parâmetros físicos relevantes. A questão da compatibilização será resolvida no presente estudo de uma forma ad-hoc usando uma abordagem física do problema.

Para o trecho de largura constante, a solução para a MM e a corrente costeira associada, no problema com vento e com atrito foi apresentada na seção III.4.4 e consiste basicamente do seguinte:

A amplitude da MM é controlada pela corrente costeira ( $V'_o$ ) associada a ela, a qual, por sua vez, resulta do balanço entre a tensão do vento, que tenta acelerar/desacelerar a água (força de inércia), e o atrito com o fundo, que funciona como um freio para a corrente. Como visto, o resultado desse balanço é expresso pela solução da equação (III.154) cuja solução, pelo método das características, possibilita determinar a corrente costeira ( $V'_o$ ) para a situação de vento existente.

$$\frac{\partial V'_o}{\partial t} \approx \frac{1}{\rho h} [\tau_y^W - \tau_y^B] \quad (\text{III. 154 - bis})$$

Uma vez calculada essa corrente, a MM correspondente é determinada pela relação (III.215):

$$\eta'_o = \frac{C'_*}{g} V'_o \quad (\text{III. 215 - bis})$$

a qual depende diretamente da velocidade de propagação afetada pelo atrito  $C'_*$ . Admitindo que  $C'_*$  tenha valores próximos a  $C_*$ , teríamos:

$$C'_* \approx \sqrt{gh_o} \tanh\left(\frac{Lf}{\sqrt{gh_o}}\right) \quad (\text{III. 208 - bis})$$

o seguinte raciocínio pode ser feito.

Ora, suponha que a ação do vento induza uma corrente costeira no Trecho I, como visto nas soluções obtidas nas seções III.3.2.2, a corrente costeira depende apenas da profundidade da plataforma e *não* da sua largura. Como visto também, a largura da plataforma é o parâmetro chave na determinação da velocidade de propagação. Assim, focando na corrente costeira, a conservação da massa estaria sendo garantida na interface se a profundidade for a mesma nos dois trechos. Se não for esse o caso, sugere-se usar uma profundidade na interface igual à média das profundidades dos trechos vizinhos de modo a amenizar a diferença entre as soluções adjacentes.

Em qualquer situação, a mudança de largura iria afetar a amplitude da MM correspondente uma vez que a velocidade de propagação responde diretamente a variações de  $L$  de acordo com a definição de  $C_*$ .

Portanto, mantidos constantes os outros parâmetros ( $h_o$  e  $f$ ), um aumento na largura da plataforma causa um aumento na velocidade de propagação da MM. Como para um mesmo valor de  $V_o$ ,  $\eta_o$  será tão maior quanto maior for  $C_*$ , a MM terá a tendência de se *amplificar* em trechos de plataforma onde a MM se propaga mais rapidamente. Esse simples resultado está de acordo com a conclusão de Grimshaw (1977).

A solução para a MM e a corrente costeira no Trecho 2 [figura (III.96)] seria conduzida usando a corrente costeira ao final do Trecho 1 como condição inicial na eq.(III.154) a qual permitiria calcular a evolução temporal de  $V_o$  ao longo do Trecho 2 em função do vento lá existente. A determinação da MM correspondente à corrente costeira nesse novo trecho seria feita novamente usando a eq.(III.215).

### III.9 – Nota sobre a Relação entre a Maré Meteorológica e a Corrente Costeira

Um resultado um tanto curioso surgiu nos inúmeros casos analisados nesse capítulo quando a MM ( $\eta_o$ ) foi contrastada com a corrente costeira associada ( $V_o$ ). De fato, em *todas* as soluções obtidas, a razão entre esses dois parâmetros resultou na expressão:

$$\eta_o = \frac{C_*}{g} V_o \quad (\text{III. 215 - bis})$$

onde,  $C_*$  é a velocidade característica e  $g$  a aceleração da gravidade. Como visto, a velocidade  $C_*$ , no caso de uma plataforma tipo degrau desconectada, é dada por:

$$C_* = \sqrt{gh_o} \tanh\left(\frac{Lf}{\sqrt{gh_o}}\right) \quad (\text{III. 208 - bis})$$

em que  $L$  é a largura da plataforma,  $h_o$  sua profundidade e  $f$  o parâmetro de Coriolis.

A questão que se coloca é se *o aparecimento dessa relação foi apenas uma coincidência ou se existe algum motivo para isso (?)*

Para entender essa questão, suponhamos que o problema tenha sido resolvido e que a resposta possa ser expressa na forma de ondas que se propagam na direção  $y$ , tal que:

$$\eta(0, y, t) = \hat{\eta}_o e^{i(\lambda y - \sigma t)} \quad (\text{III. 359})$$

e,

$$V(0, y, t) = \hat{V}_o e^{i(\lambda y - \sigma t)} \quad (\text{III. 340})$$

Onde,  $\lambda$  e  $\sigma$  são o número de onda e a frequência da onda, respectivamente, e  $\hat{\eta}_o$  e  $\hat{V}_o$  as amplitudes das oscilações de nível e de velocidade em  $x=0$ .

Suponhamos que o balanço de forças dominante na direção  $y$  seja entre a inércia e a força de pressão :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (\text{III. 341})$$

Substituindo e operando chega-se a:

$$-\sigma \hat{V}_o e^{i(\lambda y - \sigma t)} = -g \lambda \hat{\eta}_o e^{i(\lambda y - \sigma t)}$$

Ou seja,

$$\hat{\eta}_o = \frac{C}{g} \hat{V}_o \quad (\text{III. 342})$$

onde,

$$C = \frac{\sigma}{\lambda} \quad (\text{III. 343})$$

Como em todos os problemas que envolvem ondas, a relação entre a frequência ( $\sigma$ ) e o número de onda ( $\lambda$ ), conhecida como *relação de dispersão*, determina a velocidade de propagação da onda ( $C$ ). Aliás, uma relação do tipo (III.342) também surgiu na revisão das ondas de plataforma tanto no caso da plataforma degrau quanto no caso da plataforma exponencial, feita nas seções III.5 e III.6.

Ora, comparando (III.215) com (III.342), constata-se a igualdade das expressões. Portanto, o que se pode concluir dessa análise é que a relação entre a MM e a corrente costeira expressa pela eq.(III.215) não é uma coincidência mas decorre do fato que esse problema envolve a presença de ondas e que essa é a relação usualmente existente entre o nível e a velocidade em problemas ondulatórios.

A relação de dispersão é, normalmente, um dos resultados mais importantes da solução de problemas com ondas pois ela sintetiza a física operante no fenômeno. A presença de atrito, por exemplo, entraria na solução do problema através da

relação de dispersão que, nesse caso, passaria a ter a participação de algum parâmetro ligado ao atrito. Como resultado, a relação de dispersão para ondas *com* atrito forneceria um número de onda *complexo*, digamos,  $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ , o qual, quando substituído na solução, daria :

$$\eta'(0, y, t) = \hat{\eta}_o e^{-\lambda_i y} \cdot e^{i(\lambda_r y - \sigma t)}$$

$$V'(0, y, t) = \hat{V}_o e^{-\lambda_i y} \cdot e^{i(\lambda_r y - \sigma t)}$$

A solução acima corresponde a uma onda cuja amplitude *decai* a medida que a onda se propaga, sendo a intensidade do decaimento controlado pela parte imaginária do número de onda complexo. A velocidade de propagação agora é dada por  $C' = \frac{\sigma}{\lambda_r}$  e, portanto, verifica-se que o atrito também afeta a velocidade de propagação através da parte real do número de onda complexo.

É curioso verificar que mesmo nos casos espacialmente uni-dimensionais, nos quais *aparentemente* não existem ondas, a relação (III.215) também apareceu. Uma explicação é que, mesmo nesse caso, as *ondas estão presentes* porém não são percebidas por conta da hipótese de que a plataforma e a pista do vento são infinitamente longas. Nessa ótica, MM puramente “locais” não tem como existir.

A análise desse último aspecto conclui o estudo do fenômeno que se pretendia fazer à luz da Hidrodinâmica.

Os resultados obtidos nesse capítulo fornecerão a base para modelos analíticos simplificados para determinação da MM a partir das forças atmosféricas os quais serão apresentados e aplicados no capítulo seguinte.

# CAPÍTULO IV

## Aplicações

### ÍNDICE

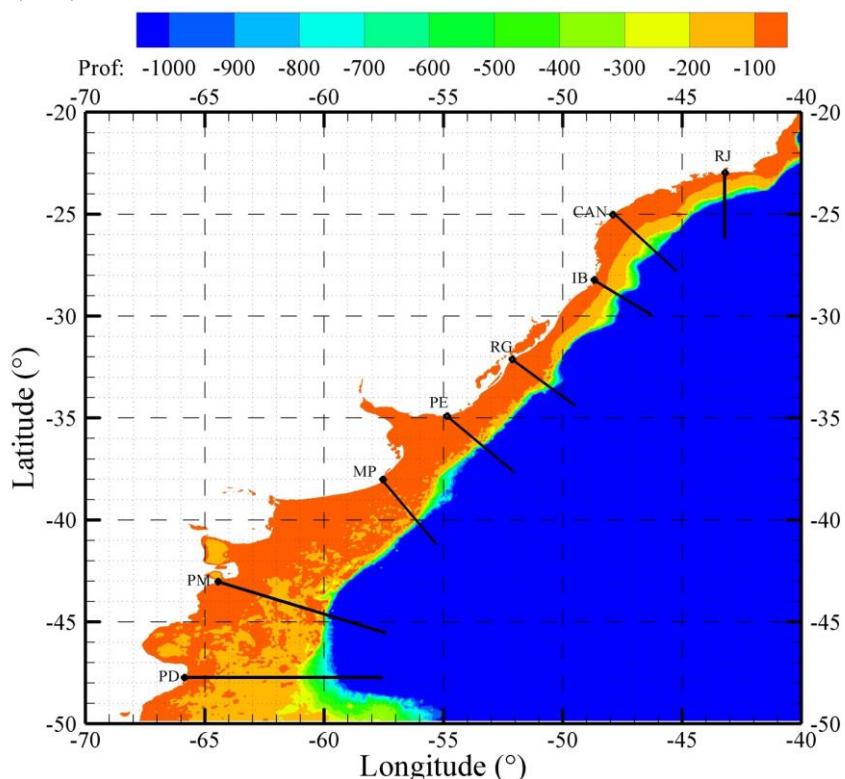
IV.1 Panorama da Plataforma Continental da Costa Sudeste Sul-Americana .....	210
IV.2 Teste dos Resultados Teóricos : Velocidade de Propagação da MM .....	213
IV.3 Dados Atmosféricos .....	217
IV.3.1 - Forçantes Atmosféricas: Panorama Geral .....	218
IV.3.2 - Análise da Mobilidade dos Sistemas Atmosféricos indutores da Maré Meteorológica ao longo da Costa S/SE Brasileira .....	220
IV.4 - Modelos Simplificados para a Maré Meteorológica no Brasil	
IV.4.1 - <u>Modelo Tipo 1</u> : Maré Meteorológica <i>Estática</i> com Equilíbrio Dinâmico Instantâneo entre Vento e Atrito .....	224
IV.4.1.1 - Resultados para Rio Grande .....	225
IV.4.1.2 - Resultados para o Rio de Janeiro .....	230
IV.4.1.3 - Resultados para Imbituba e Cananéia para 2003 (Síntese) .....	232
IV.4.1.4 - Análise dos Resultados .....	232
IV.4.2 - <u>Modelo Tipo 2</u> : Maré Meteorológica Móvel, <i>sem</i> Efeitos Remotos e com Equilíbrio Dinâmico entre Inércia, Vento e Atrito .....	235
IV.4.2.1 – Aplicação a Rio Grande .....	236
IV.4.2.2 – Aplicação ao Rio de Janeiro .....	242
IV.4.3 – <u>Modelo Tipo 3</u> : Maré Meteorológica Móvel, <i>com</i> Efeitos Remotos e com Equilíbrio Dinâmico entre Inércia, Vento e Atrito .....	246
IV.4.3.1 – Aplicação a Rio Grande <i>com</i> efeitos remotos prescritos em Mar del Plata .....	247
IV.4.3.2 – Aplicação ao Rio de Janeiro <i>com</i> Efeitos Remotos prescritos em Imbituba .....	252
IV.4.4 – <u>Modelo Tipo 4</u> : MM tipo “Ondulação” com Taxa de Transformação Constante .....	257
IV.4.4.1 - Determinação da Maré Meteorológica no Rio de Janeiro a partir exclusivamente de Medições em Imbituba .....	258
IV.4.4.2 - Determinação da Maré Meteorológica em Rio Grande a partir exclusivamente de Medições em Mar del Plata .....	260
IV.4.4.3 - Discussão dos Resultados .....	262
IV.4.4.4 - Nota sobre a Ampliação do Tempo de Antecedência da Previsão .....	262
IV.5 - Explorando a Teoria .....	265

Resultados das soluções analíticas desenvolvidas no Capítulo III são agora comparados com as observações do fenômeno da MM na natureza apresentados no Capítulo II. Obviamente, as soluções consideraram situações idealizadas que devem ser contrapostas ao mundo real da melhor maneira possível nas comparações almejadas. O presente capítulo apresenta e discute as aplicações da teoria.

## IV.1 Panorama da Plataforma Continental da Costa Sudeste Sul-Americana

A principal idealização usada nas soluções analíticas diz respeito à geometria da plataforma continental. A maior parte das soluções obtidas foi para uma plataforma continental tipo “degrau”, com largura e profundidade constantes. No caso da plataforma com fundo inclinado, a forma do fundo foi tomada como uma exponencial com um “batente” na linha de costa. Em ambos os casos, a geometria foi admitida como *uniforme* ao longo da costa.

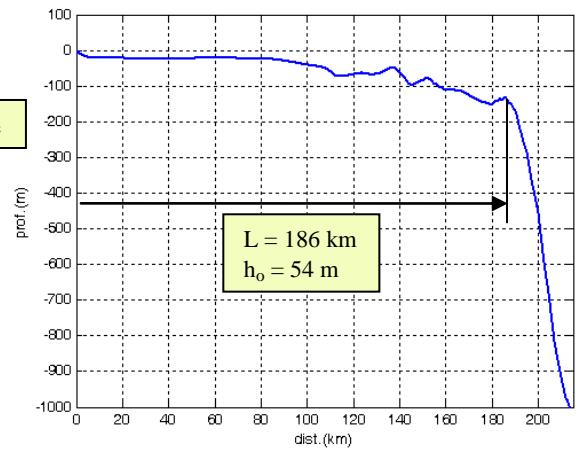
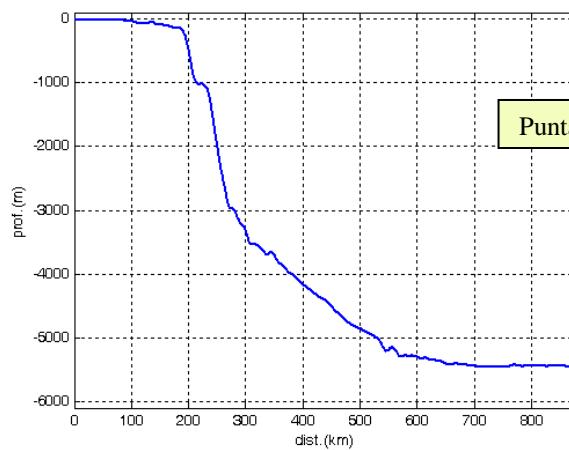
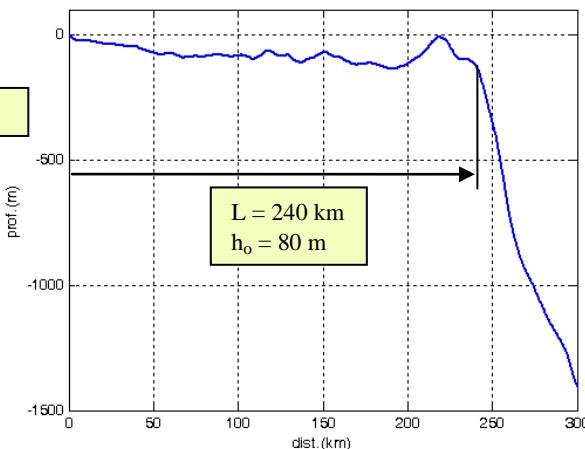
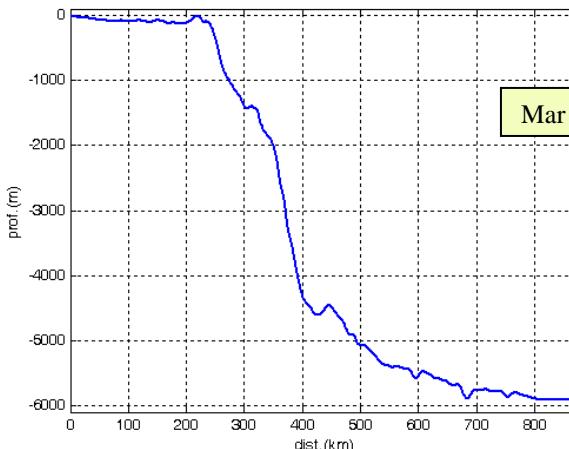
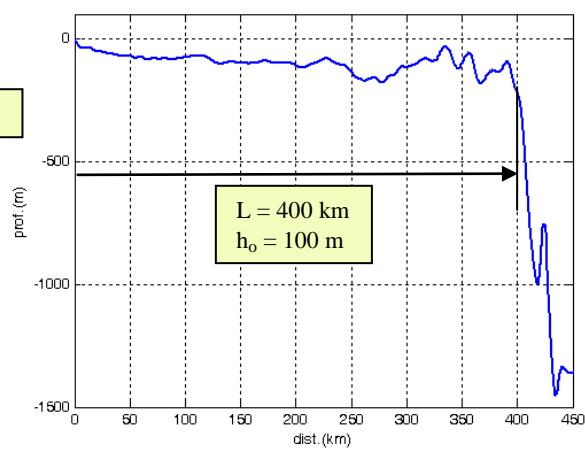
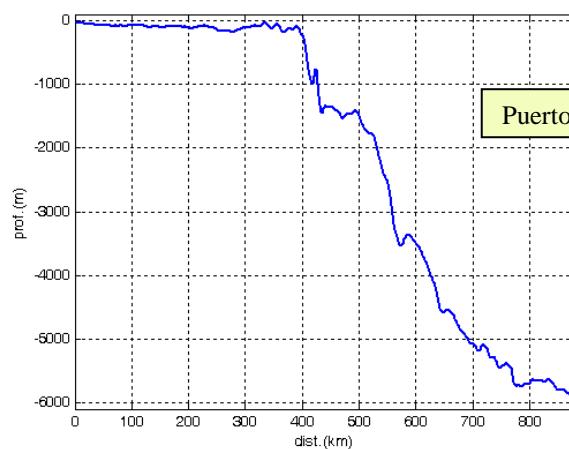
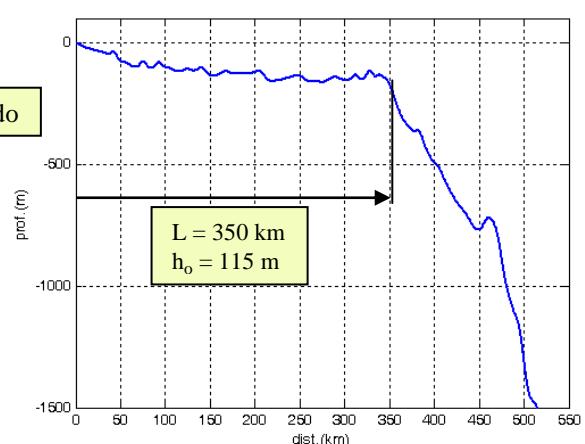
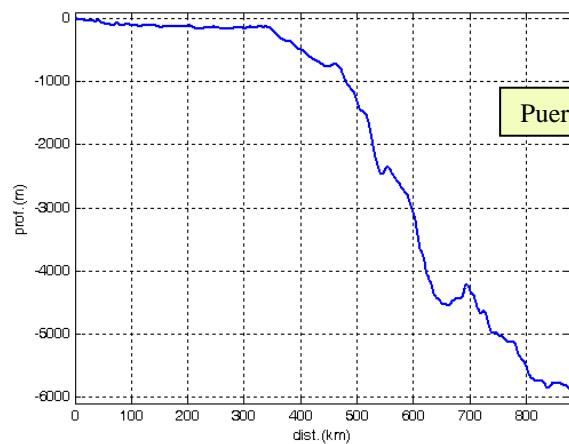
A figura (IV.1) mostra o relevo da plataforma continental do trecho SE da América do Sul obtida da batimetria ETOPO. Para melhor avaliar a geometria foram feitos cortes perpendiculares à costa em locais estratégicos, os quais estão apresentados na figura (IV.2).

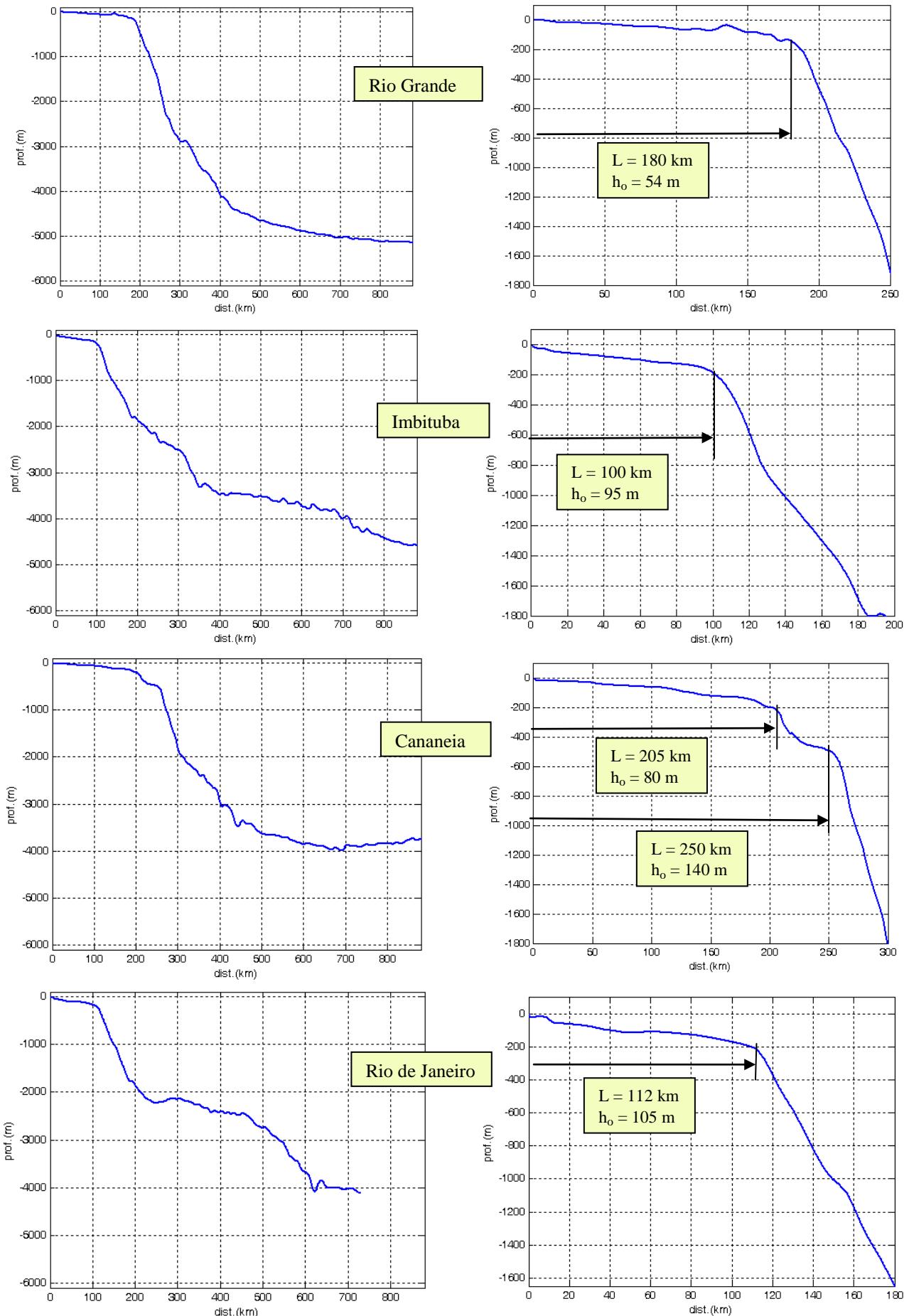


**Figura IV.1** – Batimetria da plataforma continental do SE da América do Sul. Identificação dos cortes (de Sul para Norte):  
PD = Puerto Deseado, PM = Puerto Madrin, MP = Mar del Plata, PE = Punta del Este, RG = Rio Grande,  
IB = Imbituba, CAN = Cananéia, RJ = Rio de Janeiro. Fonte: ETOPO

Em cada corte batimétrico foram determinadas uma “largura” ( $L$ ) e uma profundidade “média” ( $h_o$ ) representativas da plataforma continental. A largura foi estimada como a distância da costa até a quebra da plataforma cuja localização foi escolhida a sentimento à luz do corte batimétrico. A profundidade “média” corresponde à média das profundidades ao longo da largura  $L$ .

Nos cortes brasileiros, o caso de Cananéia destoa um pouco dos demais por apresentar um segundo “degrau” após a quebra da plataforma, por esse motivo, o corte em Cananéia tem duas larguras e duas profundidades médias.





**Figura IV.2** – Cortes perpendiculares à costa indicados na figura IV.1. Esquerda: corte incluindo o fundo abissal; direita: detalhe da plataforma. Largura e profundidade médias aproximadas da plataforma continental estão indicadas nos gráficos.

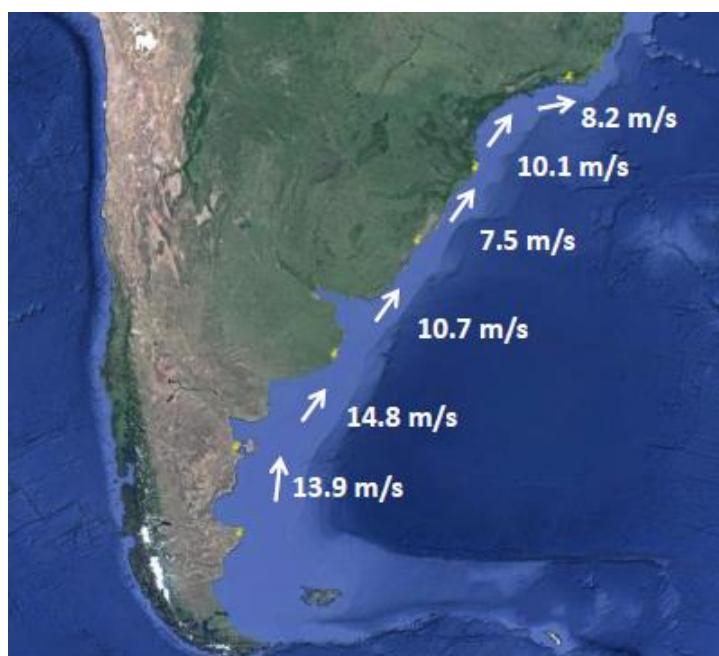
As figuras mostram de forma eloquente que a plataforma continental real tem relevo bastante complexo, não deixando dúvidas que as simplificações usadas nas soluções analíticas vão impor limites à comparação dos resultados teóricos com as observações da natureza. Mesmo assim, características particulares do fenômeno observadas podem ser comparadas com as previsões da teoria no contexto parafraseado de Csanady (1982) na introdução do Capítulo III.

## IV.2 Teste dos Resultados Teóricos : Velocidade de Propagação da MM

A primeira característica fundamental da MM que ficou patente tanto nos dados quanto nos resultados teóricos diz respeito ao caráter *móvel* do fenômeno. Assim, uma primeira validação possível consiste em comparar as velocidades de propagação da MM obtidas a partir dos dados com as fornecidas pela teoria.

Entretanto, é preciso ter em mente que a teoria desenvolvida para determinar a velocidade de propagação da MM ( $C_*$ ), além de aproximar a geometria real da plataforma continental por perfis idealizados, desprezou o efeito do atrito das correntes com o fundo. Já a velocidade de propagação obtida a partir das medições ( $C_m$ ) refere-se ao mundo real, ou seja, é válida para uma plataforma de geometria irregular na qual o atrito desempenha função primordial. Mesmo assim, se a teoria conseguir capturar os pontos *chave* do fenômeno, é possível que os valores das duas velocidades sejam próximos. A comparação elucidará essa questão.

A figura (IV.3) ilustra graficamente as velocidades médias de propagação da MM obtidas das medições.



**Figura IV.3** – Ilustração gráfica das velocidades médias de propagação da MM obtidas das medições na natureza.

Para a velocidade teórica, as soluções analíticas estão disponíveis para (a) plataforma com fundo horizontal e (b) plataforma com fundo exponencial ambos sem considerar o atrito. Nos dois casos, a aplicação das soluções necessita de parâmetros que devem ser extraídos da plataforma real. A teoria desenvolvida no Capítulo III forneceu:

(a) Plataforma com fundo horizontal	(b) Plataforma com fundo exponencial (modo 1)
$C_* = \sqrt{gh_o} \tanh\left(\frac{fL}{\sqrt{gh_o}}\right)$ (IV. 1)	$C_1 = \left[ \frac{2}{1 + \left(\frac{\beta_1 B}{kB}\right)^2} \right] fB$ (IV. 2)

Comparando as duas expressões verifica-se que em ambas a velocidade depende diretamente do parâmetro de Coriolis (logo da latitude) e de um parâmetro indicativo da largura da plataforma: no caso (a)  $L$  é a própria “largura” da plataforma e no caso (b),  $B$  é a distância da costa até o fim do talude continental, portanto,  $B$  deve ser maior que  $L$ .

O caso (a) usa ainda a profundidade do “degrau” ( $h_o$ ) e o (b) usa uma relação entre os parâmetros  $\beta$  e  $k$  definidos no Capítulo III. No exemplo lá estudado, a relação teve valor numérico  $\left(\frac{\beta_1 B}{k B}\right)^2 = 0.81$  e  $C_1 = 1.10 \cdot f B$

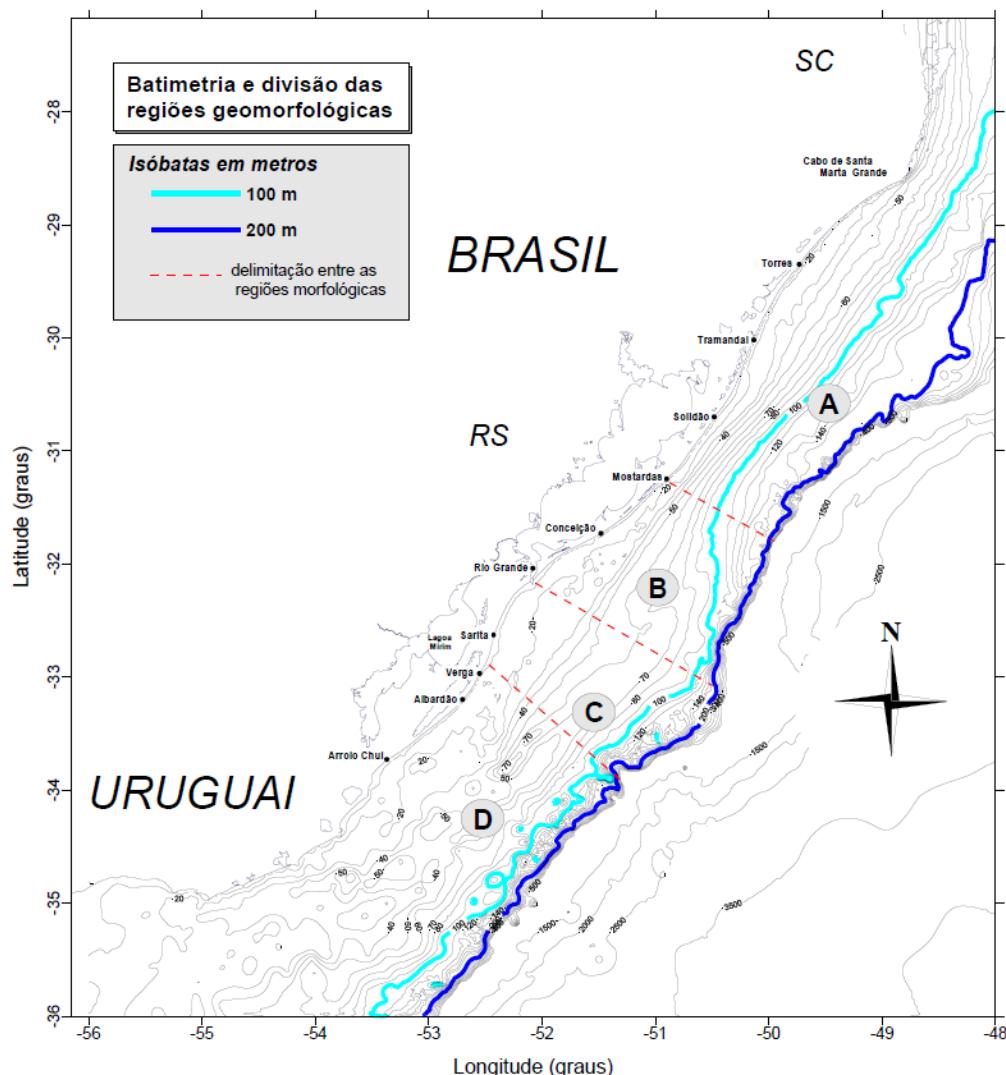
Antes de mais nada, cabe ressaltar que ambas as soluções indicam o sentido de propagação da MM, no hem. Sul, como sendo o sentido que mantém a costa à esquerda da velocidade (de Sul para Norte na nossa costa), concordando com o sentido observado na natureza.

Em segundo lugar, vê-se que ambas as velocidades aumentam com a latitude e com a largura da plataforma, uma característica do fenômeno que também pode ser verificada qualitativamente nas observações [ver figura (IV.3)].

Para comparações *quantitativas* da magnitude da velocidade é necessário estimar os parâmetros usados nas fórmulas.

Analizando os cortes batimétricos da figura (IV.2) observa-se que a plataforma continental no trecho brasileiro tem um talude bastante íngreme indicando que a forma idealizada da solução (a) tem chance de ser uma aproximação razoável e por isso a comparação na parte brasileira será feita apenas com a solução para a plataforma em degrau.

Tomando o trecho entre Rio Grande e Imbituba, a figura (IV.4), extraída de Pimenta (1999), mostra com um pouco mais de detalhe a plataforma continental sul brasileira.

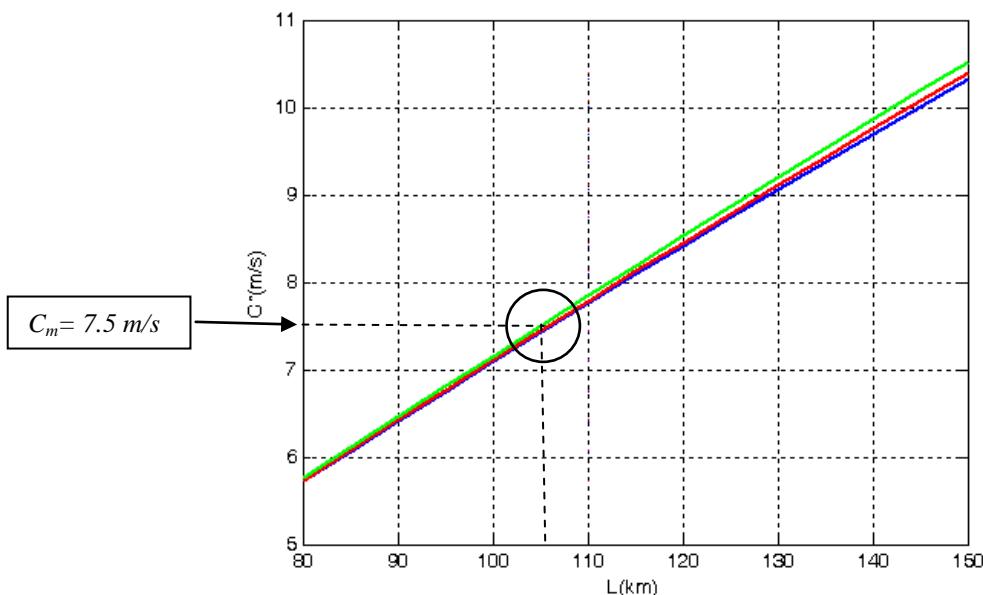


**Figura IV.4** – Detalhe da batimetria da plataforma continental sul brasileira e uruguai. Fonte: Pimenta (1999)

Observando os cortes nos dois sítios [ver figura (IV.2)], verifica-se que a plataforma em RG é mais larga e rasa ( $L = 180 \text{ km}$ ,  $h_o=54 \text{ m}$ ) do que em Imbituba ( $L = 100 \text{ km}$ ,  $h_o=95 \text{ m}$ ). Todavia, focando na batimétrica de 100 m, a largura da plataforma entre os dois locais não é uniforme havendo um trecho com um certo estreitamento ao norte do Estado do Rio Grande do Sul. Uma possibilidade seria calcular uma largura e uma profundidade “médias” usando algum método de interpolação, porém, optou-se por usar um procedimento mais simples no qual a plataforma foi dividida em segmentos de características aproximadamente regulares para os quais valores aproximados de  $L$  e  $h_o$  foram estimados. A seguir, valores representativos de  $L$  e  $h_o$  para *todo* o trecho foram calculados como uma média, ponderada pelo comprimento de cada trecho. Esses valores foram usados como base para uma análise de sensibilidade do resultado.

Assim, para o trecho entre Rio Grande e Imbituba, usando a latitude (média) de  $30^\circ S$ , uma profundidade de 70 m e uma largura de 110 km na expressão que define a velocidade no caso da plataforma em degrau (eq. IV.1), obteve-se  $C_* = 7.8 \text{ m/s}$  bastante próxima da velocidade observada na natureza que foi de  $C_m = 7.5 \text{ m/s}$ .

Mantendo a latitude em  $30^\circ S$ , a sensibilidade de  $C_*$  a variações de  $L$  e  $h_o$  é avaliada na figura (IV.5).



**Figura IV.5** – Velocidade  $C_*$  calculada para a lat.  $30^\circ$  em função da largura da plataforma ( $L$ ) para:  $h_o=70 \text{ m}$  (azul);  $h_o=90 \text{ m}$  (vermelha) e  $h_o=110 \text{ m}$  (verde). A velocidade observada (7.5 m/s) está indicada no gráfico.

A figura mostra que, fixada a latitude, o parâmetro mais influente na determinação da velocidade  $C_*$  é a largura da plataforma continental, ficando a profundidade em segundo plano. Ainda, a largura que mais aproxima  $C_*$  da velocidade observada para a faixa de profundidades esperada é de cerca de 106 km, um valor bastante compatível com a estimativa feita. Esse resultado, além de validar o cálculo da velocidade teórica mostra também que:

- (i) a *largura da plataforma* é o parâmetro chave na determinação da velocidade de propagação da MM no caso da solução (a) e
- (ii) o efeito do atrito na velocidade de propagação não é muito significativo, confirmando a hipótese adiantada na seção III.4.4.1.

A propriedade (i) pode explicar o aumento de velocidade observada no trecho em torno de Cananéia. De fato, neste sítio, a plataforma continental, além de apresentar uma quebra “dupla”, sofre um alargamento considerável em relação à plataforma a Sul e a Norte. Para o trecho em torno de Cananéia, usando a latitude (média) de  $25^\circ S$ , uma profundidade de 80 m e uma largura de 180 km na mesma expressão usada acima obtém-se uma velocidade  $C_* = 10.5 \text{ m/s}$  valor bem próximo à velocidade observada na natureza.

O trecho que engloba a plataforma argentina, principalmente na parte sul, é mais complexo. A plataforma próxima a Patagonia, por exemplo, além de mais larga e acidentada, tem um talude continental mais suave indicando que talvez a aproximação da solução (b) seja mais adequada. Sendo esse o caso, nada garante que a solução simplificada usando apenas

o modo 1 seja suficiente para representar o fenômeno em estudo. O cenário pode se complicar ainda mais se lebrarmos que essa é uma região de macro-maré astronômica com correntes fortíssimas [Glorioso e Flather (1995)]. A interação da maré astronômica com a meteorológica tem sido tacitamente negligenciada no presente trabalho. Na costa sul brasileira essa hipótese é razoável pois a maré astronômica é pequena mas na plataforma sul argentina é possível que a hipótese não se justifique.

Uma tentativa de usar a solução (a) na Patagonia ilustra essa dificuldade. Com efeito, usando a latitude de  $45^\circ$ , com  $h_o=100\text{ m}$  e  $L = 375\text{ km}$  na expressão para  $C_*$  resulta numa velocidade de  $26.4\text{ m/s}$  quase o dobro da observada na natureza. Esse resultado reforça o fato de que a *forma* da plataforma continental também influencia o resultado. Entretanto, como esse trecho está fora da área de interesse do presente trabalho a costa sul argentina foi deixada de lado.

Mais a Norte, os cortes batimétricos indicam que as plataformas argentina e uruguaias assumem um formato mais simples com talude íngreme, mais parecido com a plataforma brasileira. Entre Mar del Plata e Punta del Este, entretanto, a presença da foz do Rio da Prata introduz uma complicação extra ao problema. Admitindo que o estuário do Prata não afete significativamente a velocidade de propagação da MM, a velocidade de propagação da solução (i) foi calculada para as condições de Punta del Este: latitude  $35^\circ$ ;  $h_o=54\text{ m}$  e  $L = 186\text{ km}$  resultando em  $C_* = 13.5\text{ m/s}$ , um pouco maior que o observado ( $10.5\text{ m/s}$ ) mas da mesma ordem de grandeza. Entretanto, se a largura for diminuída para  $136\text{ km}$  a velocidade medida é obtida.

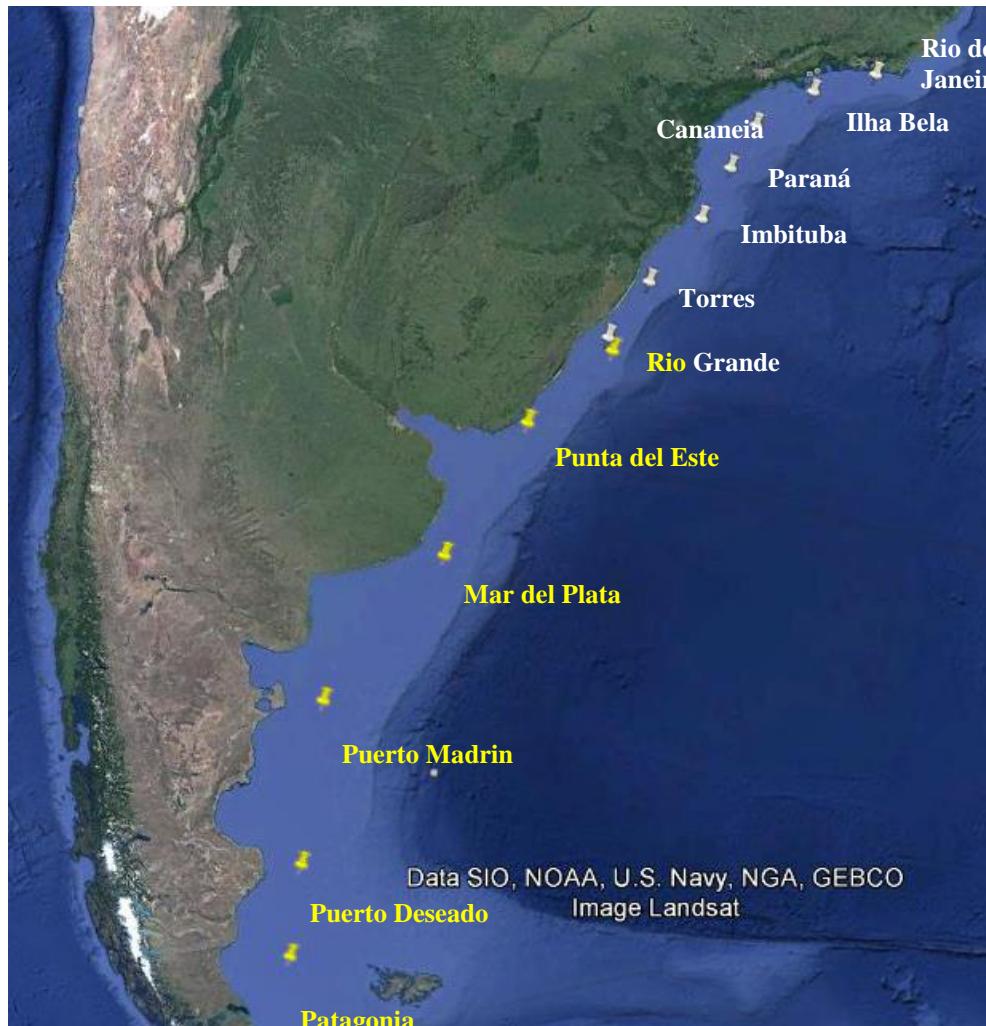
Todos esses resultados apontam no sentido de validar a estimativa da velocidade de propagação da solução analítica para os casos em que a forma da plataforma continental se aproxime da geometria idealizada usada.

### IV.3 Dados Atmosféricos

Qualquer aplicação quantitativa da teoria desenvolvida necessitará de informações sobre as forçantes atmosféricas: vento e pressão atmosférica. O ideal seria dispor de medições na natureza desses parâmetros concomitantes com os dados de nível e cobrindo a área de interesse do presente estudo. Lamentavelmente, o autor não encontrou dados de campo que atendessem a esses requisitos e a alternativa foi recorrer a dados “sintéticos”, ou seja, dados oriundos de modelos atmosféricos.

Os dados usados são provenientes da reanalise do NCEP/NOAA, de livre acesso via internet, os quais combinam resultados de modelos com medições de campo e que constituem uma das melhores bases de dados de parâmetros atmosféricos possíveis de se encontrar.

Séries temporais de pressão atmosférica e das componentes da velocidade do vento, ambos ao nível do mar, foram coletados do site da NOAA para os locais mostrados na figura (IV.6) cobrindo os dois períodos de interesse: o ano de 2003 (Conjunto#1) e o período de Abril/2010 a Março/2011 (denominado ANO, Conjunto#2). De acordo com a análise feita na seção III.3.2.3.3, a geração da MM pelo vento ocorre diretamente sobre a plataforma continental, por isso os pontos de coleta de dados da NOAA situam-se aproximadamente na posição média da plataforma continental. O intervalo de amostragem desses dados é de 6 horas.



**Figura IV.6** – Localização dos pontos de coleta de dados atmosféricos sintéticos para o ano de 2003 (pontos em branco) e para o período denominado ANO (pontos em amarelo).

No que concerne o vento, as séries temporais (componentes N/S e E/W) foram trabalhadas da seguinte maneira.

- Vetor velocidade do vento (módulo e direção) foi determinado a partir das componentes
- Vetor tensão do vento foi calculado de acordo com a eq.(III.7)
- Vetor tensão do vento foi projetado na direção paralela à costa, segundo ângulo estimado visualmente, sendo considerado sentido positivo o que mantém a costa à esquerda (aproximadamente de SW para NE)
- Procedimento análogo foi implementado para a série de velocidade do vento

Desse processo resultaram séries temporais das componentes paralelas à costa da tensão e da velocidade do vento.

A seguir, as séries temporais de velocidade e tensão do vento *paralelas* à costa e também as de pressão atmosférica foram decompostas via filtragem FFT segundo procedimento exatamente igual ao usado para as séries de nível do mar sendo que apenas a banda correspondente a MM (3 a 30 dias) foi mantida. Dessa forma, os dados atmosféricos foram transformados em séries temporais dos parâmetros de interesse filtrados exatamente na banda da Maré Meteorológica. Essa é a base de dados atmosféricos que foi usada na sequência do trabalho.

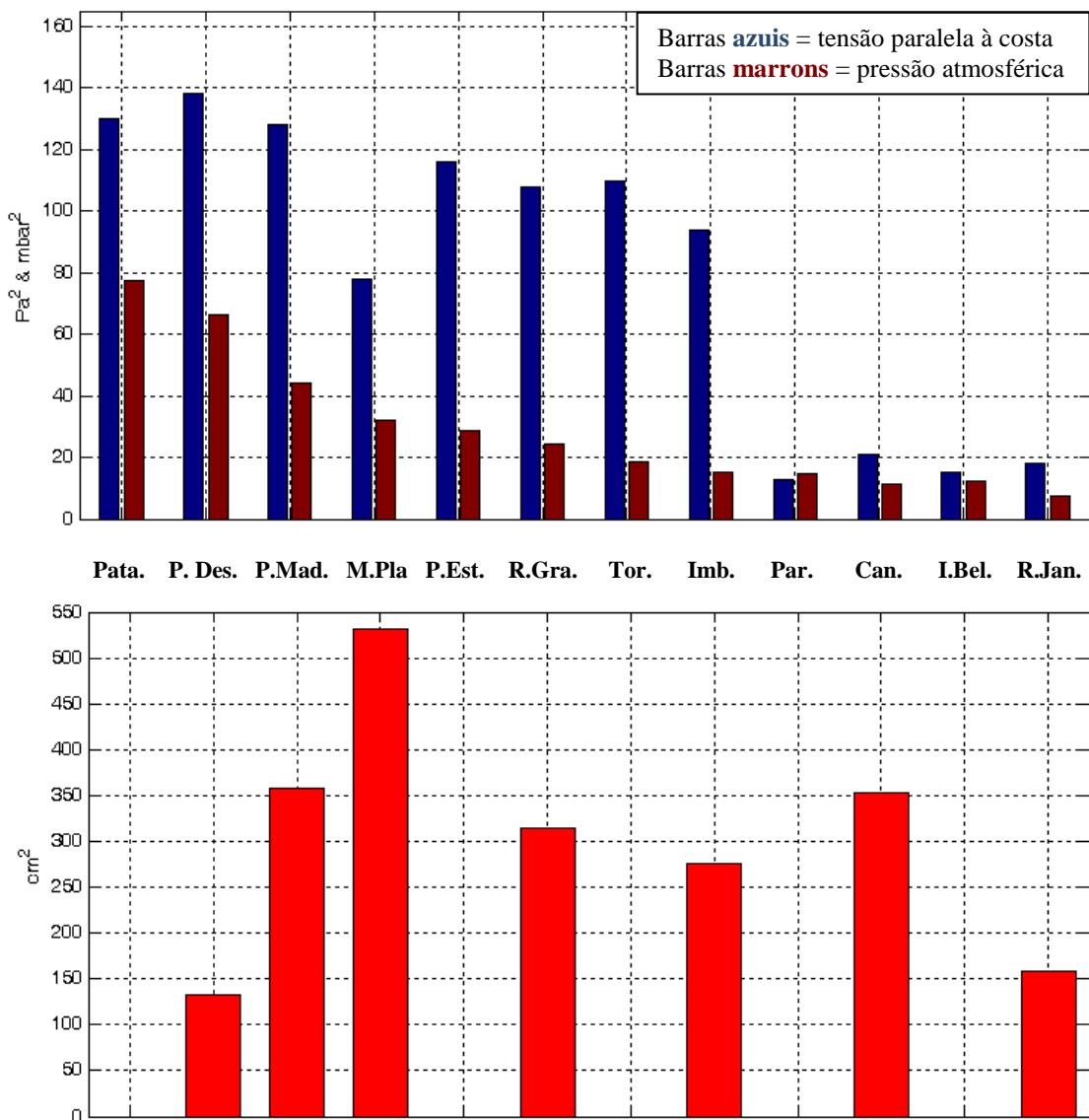
#### IV.3.1 - Forçantes Atmosféricas: Panorama Geral

Como primeiro passo para ter uma ideia da *intensidade geral* do vento em cada sítio, foi calculada a média (anual) do módulo da tensão “total” do vento, isto é, sem qualquer filtragem ( $\overline{|\tau_{tot}|}$ ). A capacidade do vento em induzir *localmente* a MM foi avaliada calculando-se a variância da componente da tensão do vento na direção *paralela à costa*, filtrada na banda da MM ( $\langle \tau_{p\_MM} \rangle$ ). Finalmente, a influência da pressão atmosférica na MM (através do Barômetro Invertido) foi estimada calculando-se a variância das flutuações de pressão em torno da média anual, filtrada na banda da MM ( $\langle p_{atm\_MM} \rangle$ ). Os resultados para os sítios indicados na figura (IV.6) estão mostrados na tabela IV.1.

Conjunto#2 (ANO)	Conjunto#1 (2003)	$ \tau_{tot} $ Pa	$\langle \tau_{p\_MM} \rangle$ Pa <sup>2</sup>	$\langle p_{atm\_MM} \rangle$ mbar <sup>2</sup>
Patagonia (51° S)	-	0.162	0.0130	77.3
Puerto Deseado (48° S)	-	0.144	0.0138	66.2
Puerto Madrin (43° S)	-	0.137	0.0128	44.2
Mar del Plata ((38.5° S))	-	0.098	0.0078	32.3
Punta del Este (35° S)	-	0.110	0.116	28.7
Rio Grande (32.5° S)	-	0.108	0.0104	23.5
-	Rio Grande	0.105	0.0112	25.4
-	Torres (30.75° S)	0.100	0.0110	18.6
-	Imbituba (28.75° S)	0.088	0.0094	15.2
-	Paraná (27.12° S)	0.039	0.0013	14.9
-	Cananéia (25.7° S)	0.057	0.0021	11.2
-	Ilha Bela (24.4° S)	0.058	0.0015	12.3
-	Rio de Janeiro (23.5° S)	0.075	0.0018	7.3

**Tabela IV.1** – Avaliação da intensidade da força meteorológica ao longo da costa S/SE sul-americana

Os resultados da tabela para as duas últimas colunas, juntamente com a variância da MM nos sítios onde havia medição de nível [mostrados na figura (II.8)] estão apresentados em forma de gráficos de barras na figura (IV.7).



**Figuras IV.7** – Painel superior: variância (energia) da componente da tensão do vento paralela à costa = barras **azuis** e variância (energia) da pressão atmosférica = barras **marrons**, ambas filtradas na banda da MM. Painel inferior: variância (energia) da Maré Meteorológica. Sítios estão indicados na figura.

Fatos a observar:

- O aumento de  $\langle p_{atm\_MM} \rangle$  com o aumento da latitude indica que a pressão atmosférica pode desempenhar papel importante na geração da MM na plataforma continental sul argentina.
- A variância (energia) de  $\tau_{p\_MM}$  e de  $p_{atm\_MM}$  em Mar del Plata está abaixo do padrão, tanto a Sul quanto a Norte deste local. Mesmo assim, Mar del Plata possui a maior MM observada em toda a plataforma continental do Leste da América do Sul.
- Os valores de  $|\tau_{tot}|$  e de  $\langle \tau_{p\_MM} \rangle$  apresentam forte diminuição nos 4 sítios a Norte de Imbituba indicando que esse trecho da costa brasileira está submetido a condições atmosféricas *locais* comparativamente amenas. Mesmo assim esse trecho possui MM de magnitude considerável.
- As condições atmosféricas em Cananéia são muito mais amenas que em Puerto Madrin, mesmo assim a MM nos dois sítios assumem valores da mesma ordem de magnitude
- Comportamento similar é observado entre Rio de Janeiro e Puerto Deseado.

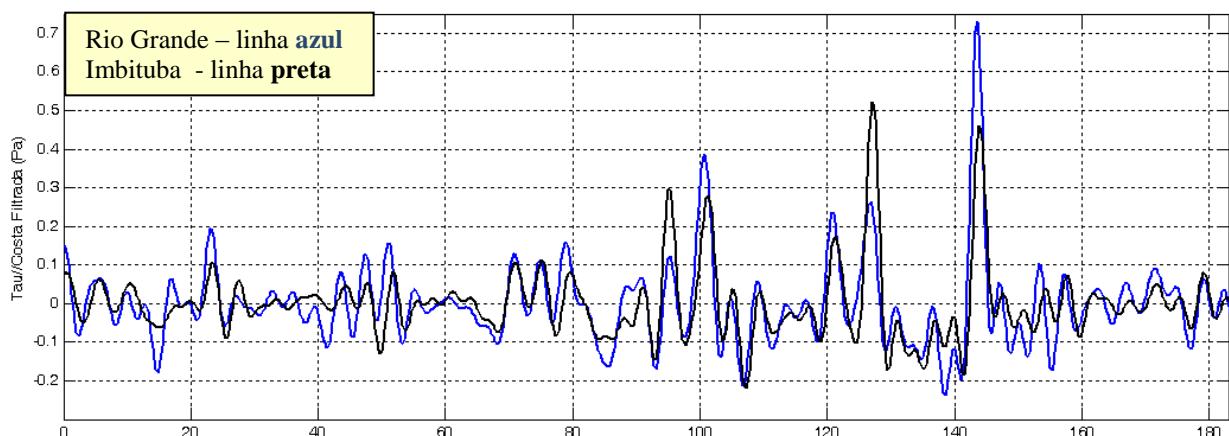
As observações acima permitem inferir aspectos importantes sobre o fenômeno da MM nas costas argentina e brasileira:

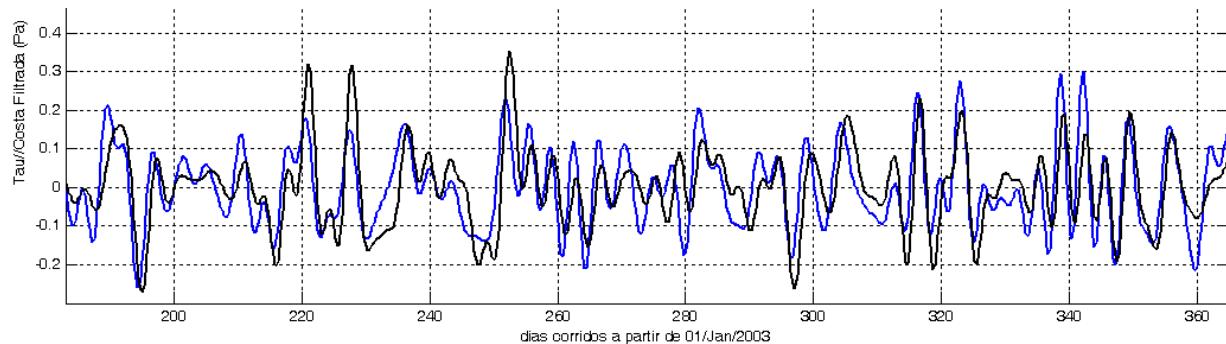
- A magnitude das forçantes atmosféricas ao longo da plataforma continental argentina indica que o trecho desde a Patagonia até Mar del Plata funciona como *zona de geração* para a MM a qual inicia no extremo sul do continente e atinge seu ápice em Mar del Plata. Nessa região o input atmosférico se sobrepõe à perda de energia da MM causada pelo atrito.
- A Norte de Mar del Plata, a situação é de uma MM de grande magnitude propagando-se num trecho onde as forçantes atmosféricas começam a diminuir de intensidade. Como o atrito aumenta com o aumento da amplitude da MM (logo, com o aumento da corrente costeira associada), o resultado é que a perda de energia sofrida pela MM começa a se sobrepor ao input da atmosfera causando uma *diminuição progressiva* da MM. É possível que o estuário do Prata tenha participação importante no início desse decaimento.
- A Norte de Imbituba, o decaimento das forçantes atmosféricas sugere que a MM nesse trecho da costa brasileira tenha um caráter significativamente *remoto*. Fazendo uma analogia com as ondas superficiais de gravidade, a MM a Norte de Imbituba assemelha-se a um “swell” no qual a forçante local desempenha papel secundário no fenômeno. Esse fato explicaria, em parte, porque Cananeia tem uma MM da mesma ordem de magnitude que Puerto Madryn mesmo submetida a forçantes atmosféricas muito mais amenas, o mesmo ocorrendo com Rio de Janeiro e Puerto Deseado.

#### IV.3.2 - Análise da Mobilidade dos Sistemas Atmosféricos indutores da Maré Meteorológica ao longo da Costa S/SE Brasileira

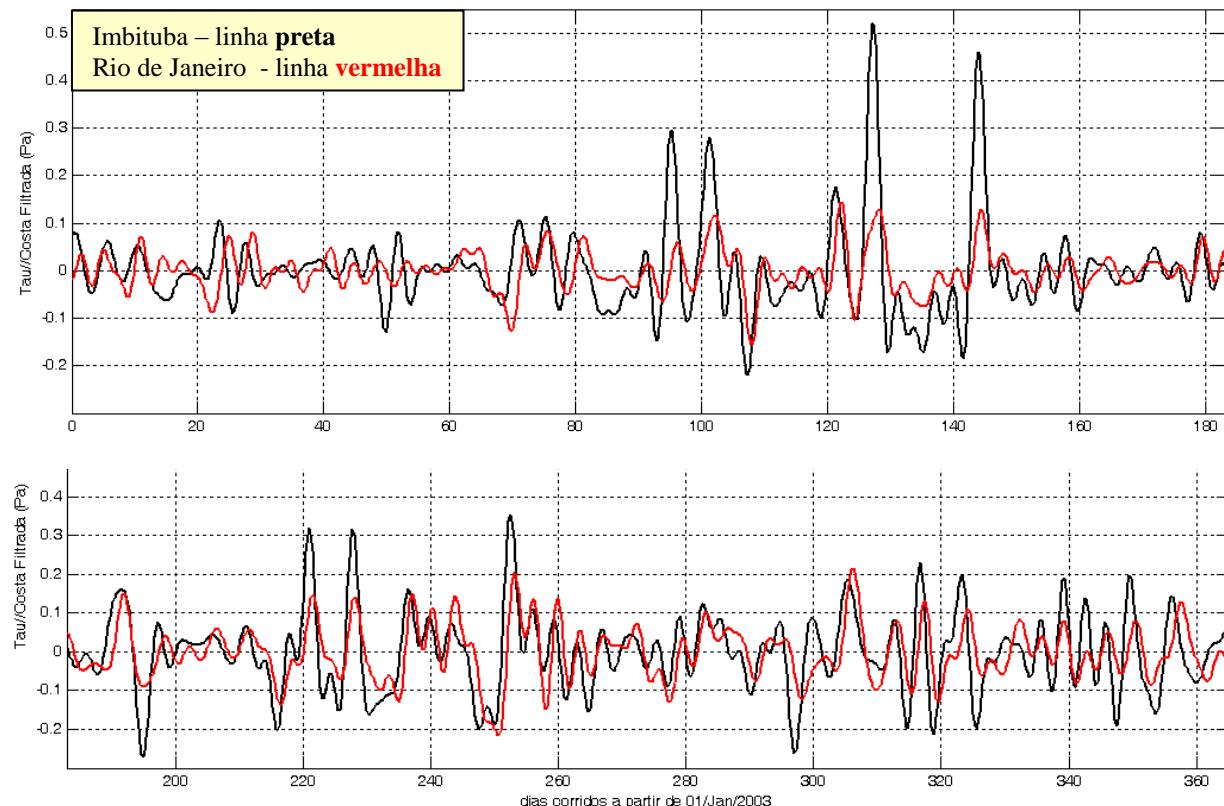
A teoria desenvolvida na seção III.4.3.5 mostrou que a mobilidade do campo de ventos pode desempenhar um papel importante na geração da MM. Com efeito, a solução analítica lá obtida indicou que a MM causada por ventos com pista móvel é composta por dois tipos de resposta: uma parte que se desloca com a velocidade intrínseca do fenômeno e outra que acompanha o deslocamento da pista de vento. O estudo mostrou, por exemplo, que a relação entre a velocidade de deslocamento ao longo da costa do sistema atmosférico indutor dos ventos ( $C_w$ ) e a velocidade de propagação da MM ( $C_m$ ) pode criar situações peculiares para a MM resultante, havendo, inclusive, a possibilidade de uma resposta ressonante da MM quando  $C_w = C_m$ . A presente seção analisa a questão da mobilidade do campo de ventos a partir dos dados sintéticos do NCEP/NOAA. Por simplicidade, a análise ficará restrita apenas ao vento na plataforma continental S/SE brasileira.

As figuras (IV.8) e (IV.9) apresentam séries temporais simultâneas da componente da Tensão do Vento na direção paralela à costa, filtrada na banda da MM ( $\tau_{p,MM}$ ) para o ano de 2003 em Rio Grande e em Imbituba e em Imbituba e Rio de Janeiro, respectivamente.



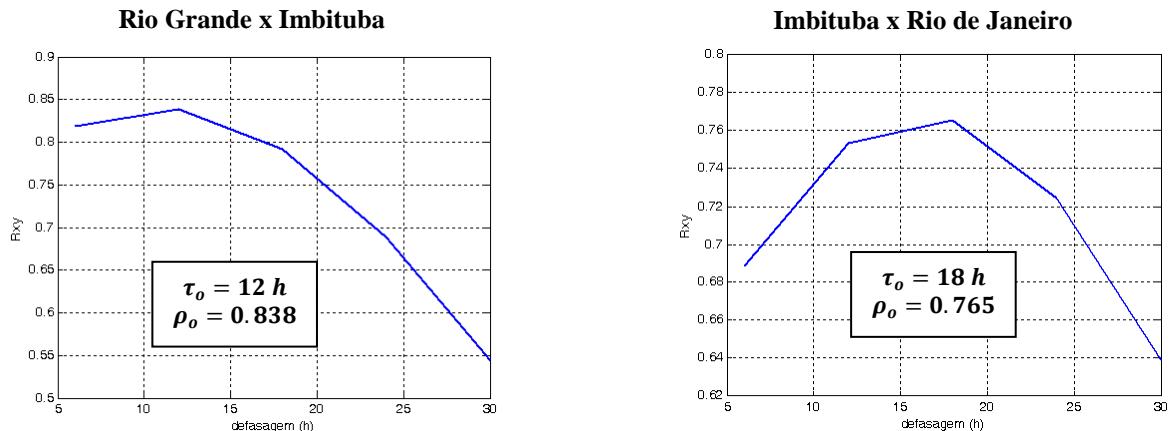


**Figura IV.8** - Componente da *Tensão do Vento* na direção *paralela à costa* filtrada na banda da MM para o ano de 2003 em Rio Grande (linha **azul**) e Imbituba (linha **preta**). Sentido para tensão positiva : costa a esquerda do vento.



**Figura IV.9** - Componente da *Tensão do Vento* na direção *paralela à costa*, filtrada na banda da MM para o ano de 2003 em Imbituba (linha **preta**) e Rio de Janeiro (linha **vermelha**).

Uma inspeção dos gráficos mostra que, a exemplo da MM, o campo de ventos sobre a plataforma continental também apresenta um padrão de deslocamento de Sul para Norte bastante coerente ao longo da costa. Para melhor quantificar essa questão, uma análise de correlação similar a efetuada na seção II.8.3 foi realizada estando o resultado mostrado na figura (IV.10).



**Figura IV.10** - Funções Coeficiente de Correlação para componente da Tensão do Vento na direção paralela à costa filtrada na banda da MM entre pares de locais indicados nos gráficos em função da defasagem temporal (medida a partir do sítio mais a Sul). Valores da defasagem  $\tau_o$  (picos das funções) que produzem a máxima correlação ( $\rho_{xy}(\tau_o) = \rho_o$ ) estão mostrados diretamente nos gráficos. [OBS.: lembrar que as séries temporais tem intervalo de amostragem de 6 horas].

Os valores dos coeficientes de correlação no entorno de 80% confirmam que a tensão do vento na direção paralela à costa filtrada na banda da MM mantém-se significativamente coerente numa escala espacial da ordem de 500 a 800 km. A existência de um padrão de propagação de Sul para Norte ao longo da costa, inferida visualmente nas séries temporais, também encontra suporte pelo sinal positivo (em relação ao sítio mais a Sul) da defasagem calculada.

A velocidade média de deslocamento do campo de vento na banda da MM ao longo da costa pode ser facilmente estimada a partir das distâncias entre os sítios conforme feito para a MM na seção III.8.4. Os resultados estão mostrados na tabela IV.2 juntamente com os valores da velocidade de propagação da própria MM calculadas no Capítulo II.

Sítios considerados	Distância	Defasagem ( $\tau_o$ )	Vel. de Desl. do Campo de Vento ao longo da Costa ( $C_w$ )	Velocidade de Propagação da MM medida ( $C_m$ )
Rio Grande - Imbituba	560 km	12 h	13.0 m/s [ 1100 km/dia ]	7.5 m/s [ 640 km/dia ]
Imbituba – Rio de Janeiro	865 km	18 h	13.3 m/s [ 1140 km/dia ]	9.2 m/s [ 798 km/dia ]

**Tabela IV.2** – Velocidades de deslocamento do campo de vento na banda da MM ao longo da costa

A título de comparação, Castro e Lee (1995), usando medições de campo num trecho de costa entre Santa Catarina e Rio de Janeiro, analisaram a velocidade de avanço ao longo da costa de *perturbações* do campo de vento chegando a seguinte conclusão: “*Perturbações na faixa entre 9 a 12 dias propagaram-se de São Sebastião (SP) a Cabo Frio (RJ) com velocidade média de 12 m/s. Perturbações na faixa de 6 a 7 dias propagaram-se no sentido Nordeste com velocidade média de 15 m/s entre Arvoredo (SC) e São Sebastião (SP)*”. Considerando que a periodicidade acima cobre a banda da MM, o que se pode constatar é que a magnitude do valor obtido com a presente metodologia usando dados sintéticos se coaduna bem com os valores obtidos por Castro e Lee (1995) a partir de medições de campo para a região estudada.

A velocidade de deslocamento ao longo da costa dos sistemas atmosféricos indutores de ventos na faixa da MM muitas vezes é associada à velocidade de avanço de frentes frias gerando um pouco de confusão. Stech e Lorenzetti (1992), por exemplo, num estudo da circulação induzida pela passagem de frentes frias na plataforma SE brasileira, estimaram uma velocidade de avanço para as frentes de 500 km/dia, cerca de metade do valor acima. Na opinião deste autor, a associação acima mencionada deve ser feita com cautela pois as velocidades supra citadas não necessariamente correspondem ao mesmo fenômeno físico.

Uma análise da magnitude relativa entre as velocidades de deslocamento do campo de vento na banda da MM ao longo da costa ( $C_w$ ) e da velocidade de propagação da MM medida ( $C_m$ ) mostra que a situação da costa S/SE brasileira enquadra-se no caso de um campo de ventos que se desloca no *mesmo sentido* da MM com velocidade (módulo) *1.5 a 2 vezes superior*. Com relação aos casos teóricos estudados seção III.4.3.5, trata-se, portanto, do caso em que  $C_w > C_m$ , uma condição *não* ressonante. Entretanto, o fato de ambos deslocarem-se no mesmo sentido favorece a transferência de energia entre a atmosfera e o oceano.

Usando ainda os resultados teóricos da seção III.4.3.5, a MM *gerada* na plataforma continental S/SE brasileira deve, a princípio, compor-se de uma parcela que se propaga com velocidade média  $C_m$  superposta a outra que acompanha o deslocamento do campo de ventos com velocidade média  $C_w$ . A pergunta que se coloca é: *porque as medições de campo da MM na costa brasileira indicam a predominância do sinal que se propaga com velocidade  $C_m$ ?*

A primeira questão a ser considerada está na própria estrutura que a MM desenvolve ao longo da plataforma continental S/SE da América do Sul. Como visto no Capítulo II, a MM atinge valores extremos em Mar del Plata para em seguida penetrar na costa do Rio Grande do Sul. Portanto, ao adentrar a plataforma sul brasileira, o fenômeno traz uma grande quantidade de energia de origem remota que se propaga na forma de Ondas de Plataforma Continental com velocidade  $C_m$ .

Conforme mostrado na seção anterior, ao longo das plataformas S e, principalmente, SE brasileiras, o regime de ventos começa a decair em intensidade. Ora, a geração da MM pelo vento em território brasileiro estará submetida a uma forte componente que já vem se propagando do Sul e, portanto, o vento local terá dupla função: (i) atuar no sentido de alterar a MM que já está passando sobre a plataforma continental e (ii) gerar uma componente que se move em fase com o deslocamento da pista. Pela fraca intensidade dos ventos locais e pela grande amplitude da componente remota, o primeiro efeito aparentemente se sobrepõe ao segundo.

## IV.4 - Modelos Simplificados para a Maré Meteorológica no Brasil

A capacidade da teoria desenvolvida em reproduzir a MM (amplitude e fase) observada na natureza é agora testada. Por simplicidade e usando o fato da plataforma continental na região de interesse apresentar um platô seguido de um talude íngreme, a geometria da plataforma será aproximada por um “degrau” de profundidade constante.

Com base na teoria apresentada no Cap. III, quatro modelos simplificados serão apresentados e testados na presente seção.

### IV.4.1 – Modelo Tipo 1 : Maré Meteorológica Estática com Equilíbrio Dinâmico Instantâneo entre Vento e Atrito

Trata-se de um modelo espacialmente uni-dimensional extremamente simples. O modelo tem como hipóteses preliminares:

- (i) Desconsideração do caráter móvel da MM
- (ii) Desconsideração de MM's de origem remota

A MM, portanto, é admitida como um fenômeno essencialmente *estático* sendo resultado, exclusivamente, da ação do vento *local*. Nessa ótica, a possibilidade de MM's de origem remota está automaticamente descartada.

A parcela da MM devido à pressão atmosférica,  $(\eta_o)_p$ , é determinada admitindo a validade do Barômetro Invertido (BI) para regiões costeiras conforme visto na seção I.4.1:

$$(\eta_o)_p = -\frac{1}{\rho g} p_{atm} \quad (\text{IV. 3})$$

onde,  $\rho$  é a massa específica da água,  $g$  é a aceleração da gravidade e  $p_{atm}$  corresponde a *flutuações* da pressão em torno de um valor *médio* (no caso, *anual*) as quais, portanto, assumem valores positivos e negativos, determinadas para o ponto onde se vai calcular a MM.

No que concerne a ação do vento, a hipótese dinâmica básica do modelo supõe a existência de um equilíbrio friccional *instantâneo* e *permanente* entre a tensão do vento paralela à costa ( $\tau_y^W$ ) e a tensão decorrente do atrito da corrente costeira com o leito marinho ( $\tau_y^B$ ):

$$\tau_y^W = \tau_y^B \quad (\text{IV. 4})$$

A teoria que suporta essa ideia foi estudada na seção III.3.5.1.5.3 e será brevemente resumida a seguir (ver a referida seção para definição dos parâmetros). Usando a parametrização usual para as tensões, a corrente costeira relaciona-se à velocidade do vento por:

$$\rho_a C_D V_w^2 = \rho C_f V_s^2 \quad \rightarrow \quad V_s = \sqrt{\frac{\rho_a C_D}{\rho C_f}} V_w \quad (\text{IV. 5})$$

Considerando que a corrente costeira seja geostrófica, admitindo uma plataforma tipo degrau “desconectada” do oceano adjacente (i.e. desprezando-se o efeito do oceano na MM) e admitindo a validade da eq.(III.208) para relacionar a corrente costeira e o nível na presença de atrito, a parcela da MM,  $(\eta_o)'_w$ , associada à corrente  $V_s$ , e, por conseguinte, à ação do vento, é determinada por:

$$(\eta_o)'_w = \frac{C_o}{g} \tanh[L/|R|] \cdot V_s \quad (\text{IV. 6})$$

Usando valores representativos para os coeficientes dentro da raiz quadrada na eq.(IV.5), conforme detalhado na seção III.3.5.1.2, tem-se:

$$\sqrt{\frac{\rho_a C_D}{\rho C_f}} \approx 0.03 \quad \rightarrow \quad V_s \approx 0.03 V_w \quad (\text{IV. 7})$$

Substituindo (IV.7) em (IV.6) chega-se a :

$$(\eta_o)'_w = 0.03 V_w \frac{C_o}{g} \tanh[L/|R|] \quad (\text{IV.8})$$

onde,  $V_w$  corresponde à velocidade do vento filtrada na banda da MM.

A expressão acima aplica-se a plataformas “desconectadas” tipo “degrau” de *qualquer largura*. Para plataformas estreitas (i.e. com  $L \ll R$ ), a expressão pode ser aproximada por [Sandstrom (1982)]:

$$(\eta_o)'_w = 0.03V_w \frac{L|f|}{g} \quad (\text{IV.9})$$

A equação acima fornece uma relação extremamente simples e direta entre a parcela da MM devida a ação do vento e a velocidade do vento local, filtrada na banda da MM.

A MM completa é obtida somando as contribuições da pressão atmosférica e do vento:

$$MM = (\eta_o)_p + (\eta_o)'_w \quad (\text{IV.10})$$

À luz do que foi visto no Capítulo III, a desconsideração da mobilidade da MM, a eliminação de efeitos remotos juntamente com a ideia da existência de um equilíbrio instantâneo e permanente entre as tensões supracitadas constituem hipóteses bastante *drásticas* para retratar o fenômeno da MM. Mesmo assim, esse tipo de modelo tem um apelo forte pela sua simplicidade e pode ser um bom indicativo do papel da geração local na MM encontrada numa certa região costeira.

O modelo foi aplicado a sítios da costa S/SE brasileira, usando dados sintéticos de vento com resultados mostrados a seguir (observar que as séries tiveram de ser reamostrada para um  $\Delta t = 6 h$ , num total de 1460 pontos anuais).

#### IV.4.1.1 - Resultados para Rio Grande

Usando os parâmetros da plataforma continental fornecidos pelo corte batimétrico:  $h_o = 54 m$  e  $L = 180 km$ , numa latitude de  $32^\circ$  Sul, os resultados do modelo para Rio Grande *com* o efeito do Barometro Invertido incluído durante o ANO e durante 2003, estão mostrados nas figuras (IV.11) e (IV.12), respectivamente.

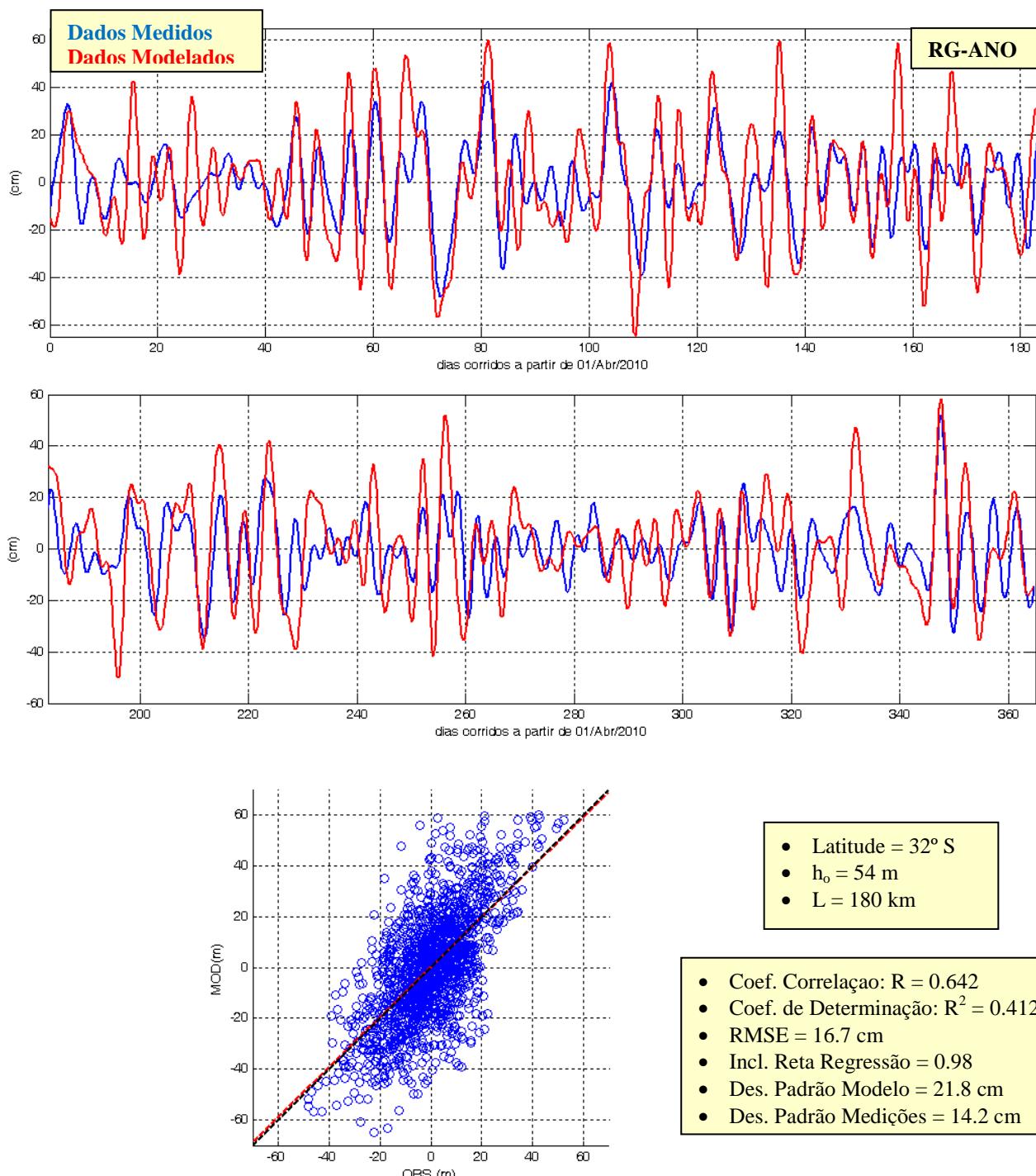
Cada figura é acompanhada pelos resultados de uma avaliação estatística simples do modelo *versus* medições de campo, a qual consiste do cálculo dos coeficientes de correlação ( $R$ ) e de determinação ( $R^2$ ), da raiz do erro médio quadrático (RMSE), da inclinação da reta de regressão, medida pela tangente do ângulo (i.e.  $1.00 = 45^\circ$ ), e dos desvios padrão dos resultados do modelo e das medições. Para auxiliar na avaliação, a tabela IV.3 indica o que seria a situação ideal, i.e., um *ajuste perfeito* dos resultados do modelo às medições:

**Tabela IV.3** - Situação de ajuste perfeito entre resultados do modelo e medições de campo:

- Coef. Correlação:  $R = 1.000$
- Coef. de Determinação:  $R^2 = 1.000$
- RMSE = 0.0 cm
- Incl. Reta Regressão ( $\tan \alpha$ ) = 1.00
- Des. Padrão Modelo = Des. Padrão Medições

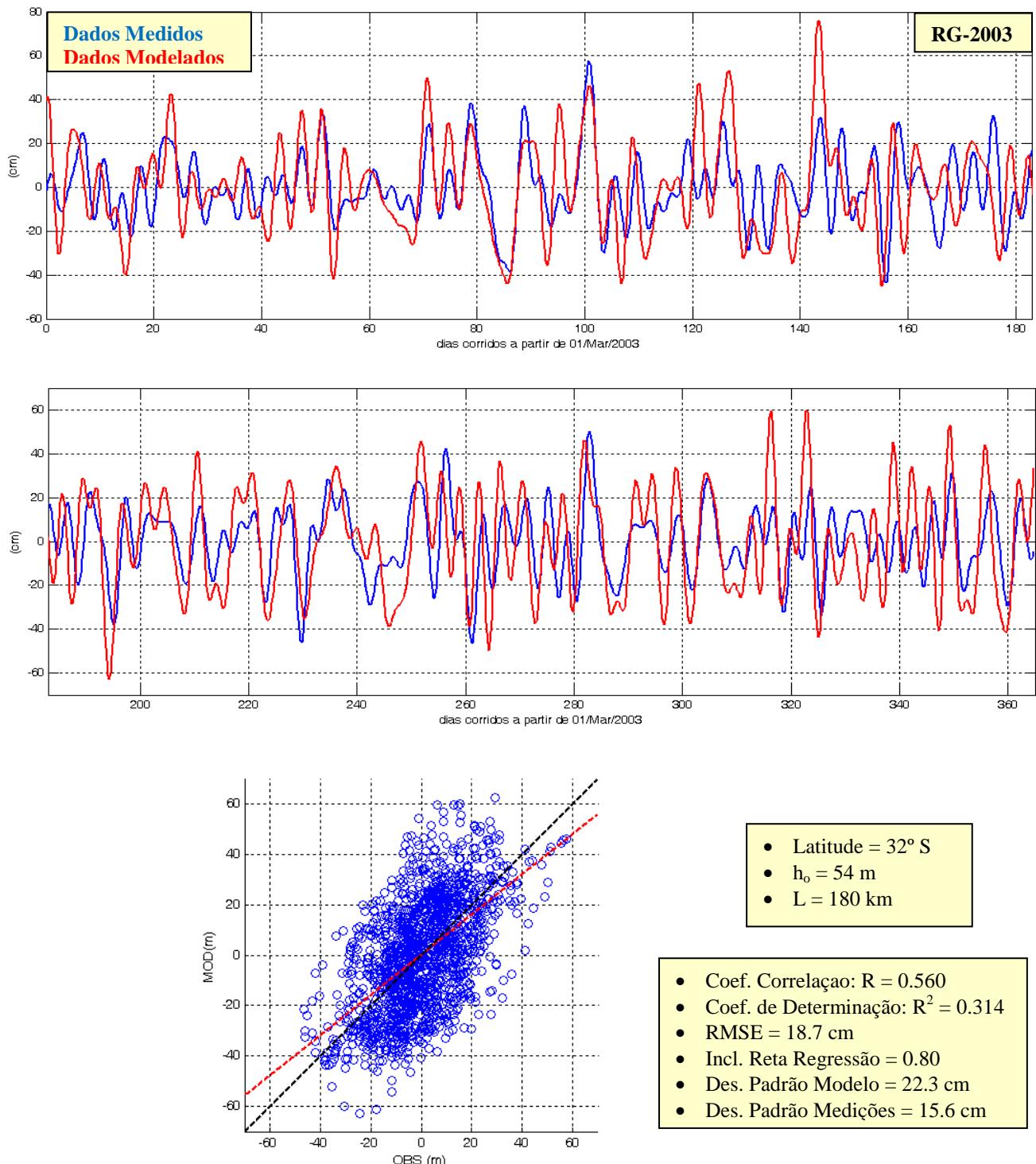
É importante lembrar que esses parâmetros são oriundos de uma análise *anual* dos resultados e não apenas de eventos isolados.

### Com Barometro Invertido



**Figura IV.11** - Resultados do modelo Tipo 1 para **Rio Grande** durante o **ANO** com o efeito do Barometro Invertido. Dados da Plataforma:  $h_o = 54$  m;  $L = 180$  km; lat.  $32^\circ$  S. Painéis superiores: séries temporais da MM – Linha azul: medições; Linha vermelha: resultado do modelo. Painel inferior: diagrama de dispersão - Linha vermelha: reta de regressão; Linha preta : reta  $45^\circ$ , ajuste perfeito; MOD=modelo, OBS=medições.

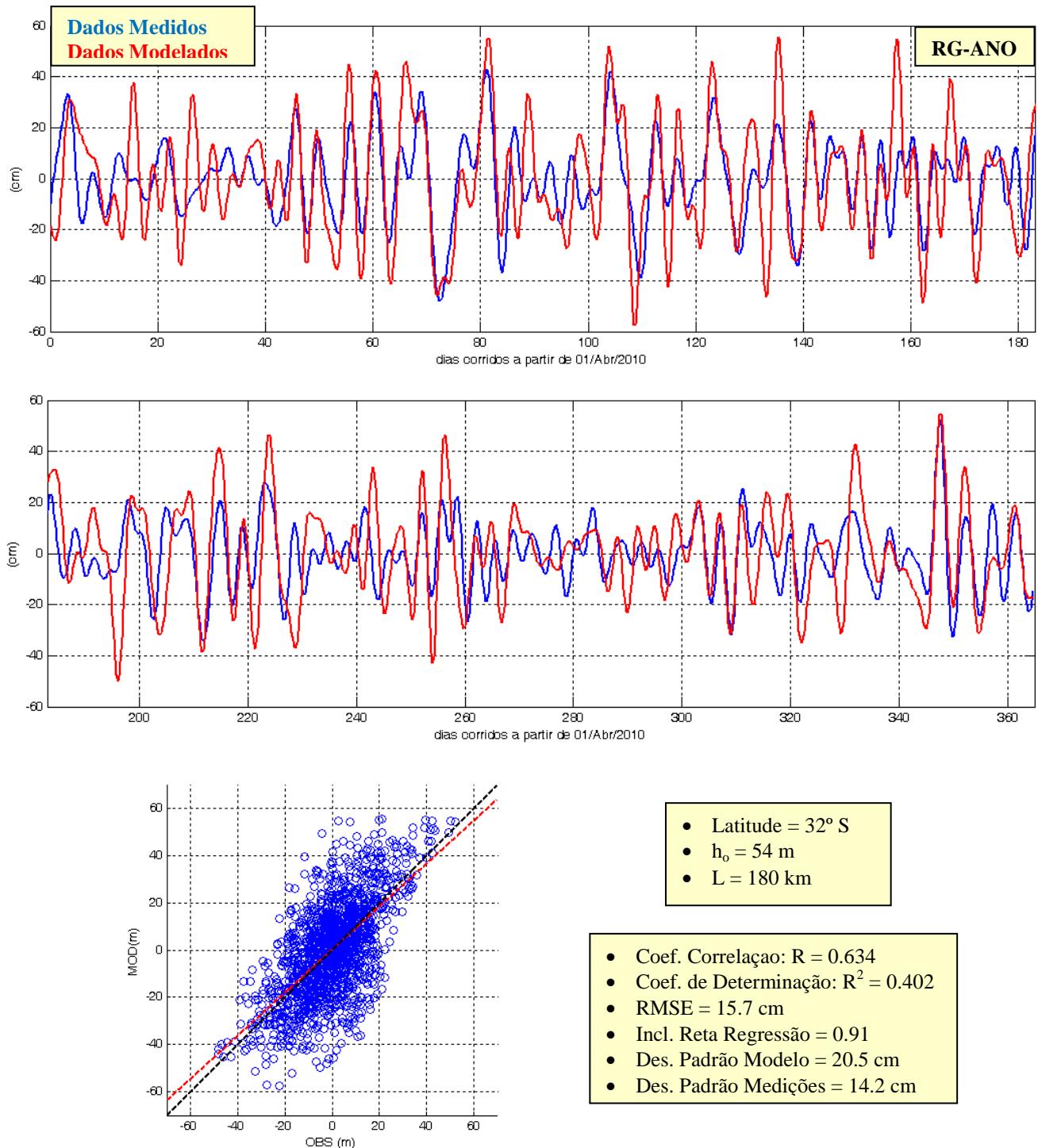
### Com Barometro Invertido



**Figura IV.12** - Resultados do modelo Tipo 1 para **Rio Grande** durante **2003** com o efeito do Barometro Invertido. Demais dados são similares aos da figura anterior.

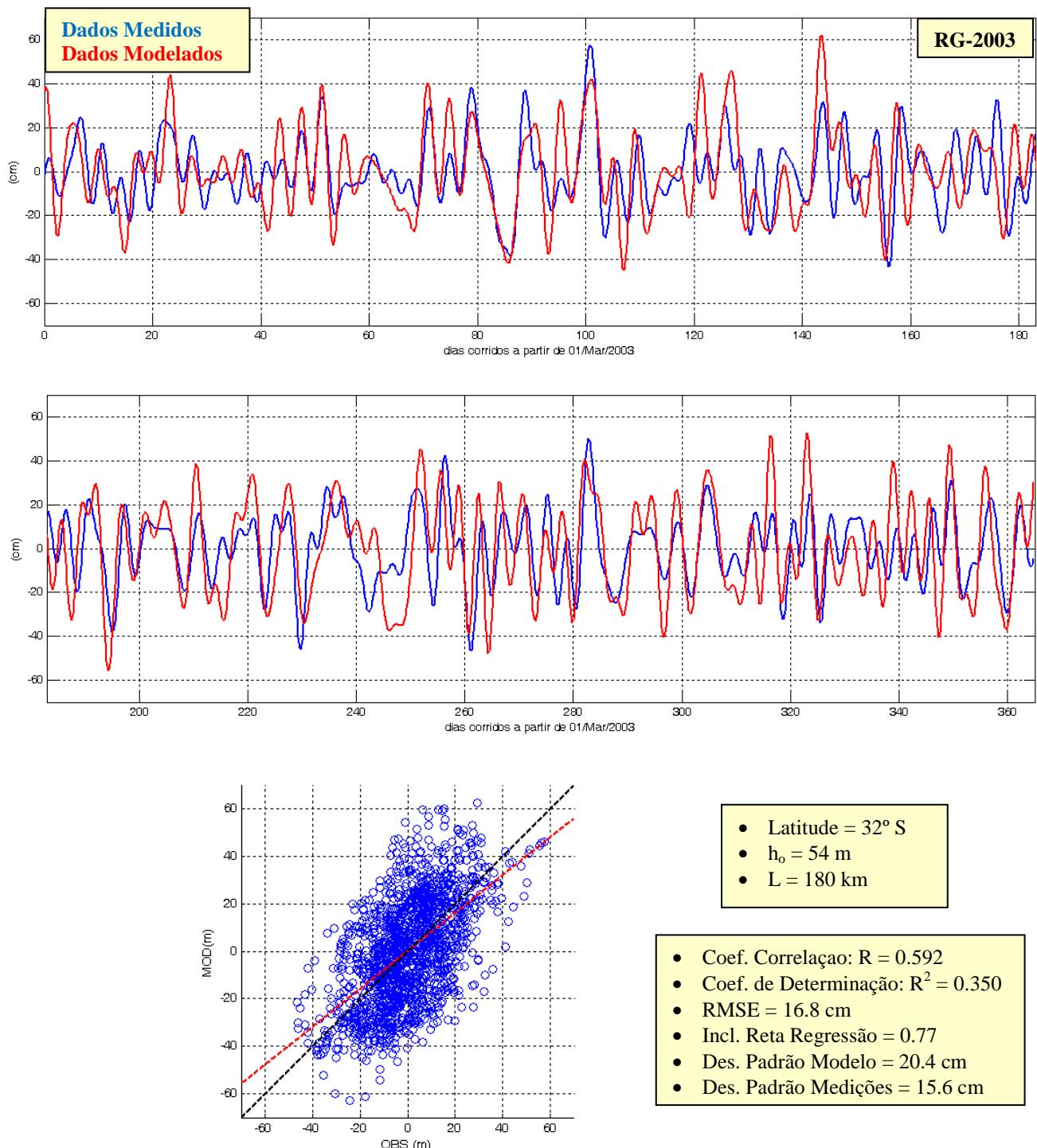
A importância da pressão atmosférica, segundo o efeito do Barômetro Invertido (BI), pode ser avaliada refazendo os cálculos *sem* a inclusão do BI. Os resultados estão mostrados nas figuras (IV.13) e (IV.14) abaixo.

### Sem Barometro Invertido



**Figura IV.13** - Similar a figura (IV.11), *sem* incluir o efeito do Barometro Invertido.

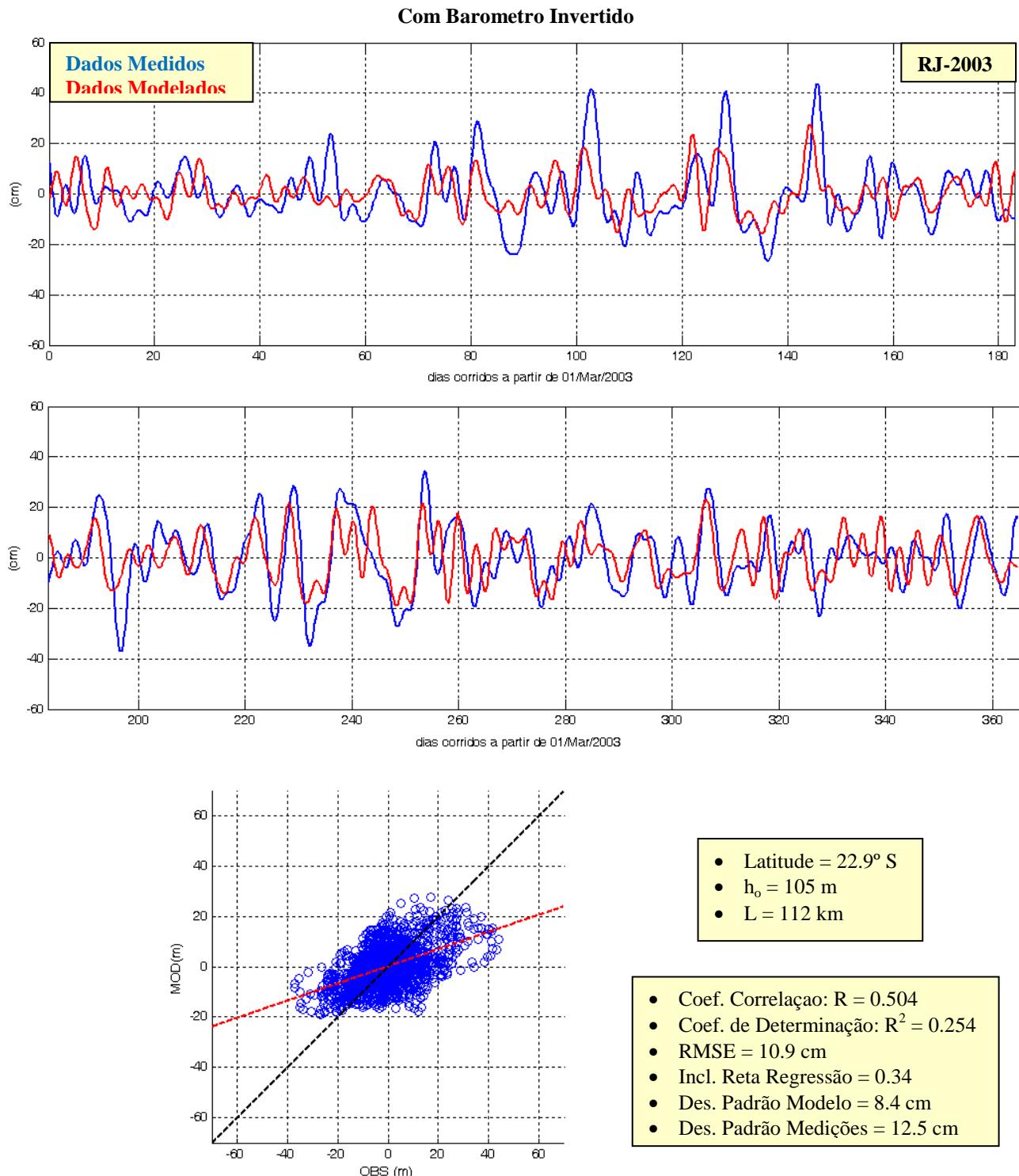
### Sem Barometro Invertido



**Figura IV.14** - Similar a figura (IV.12), *sem* incluir o efeito do Barometro Invertido

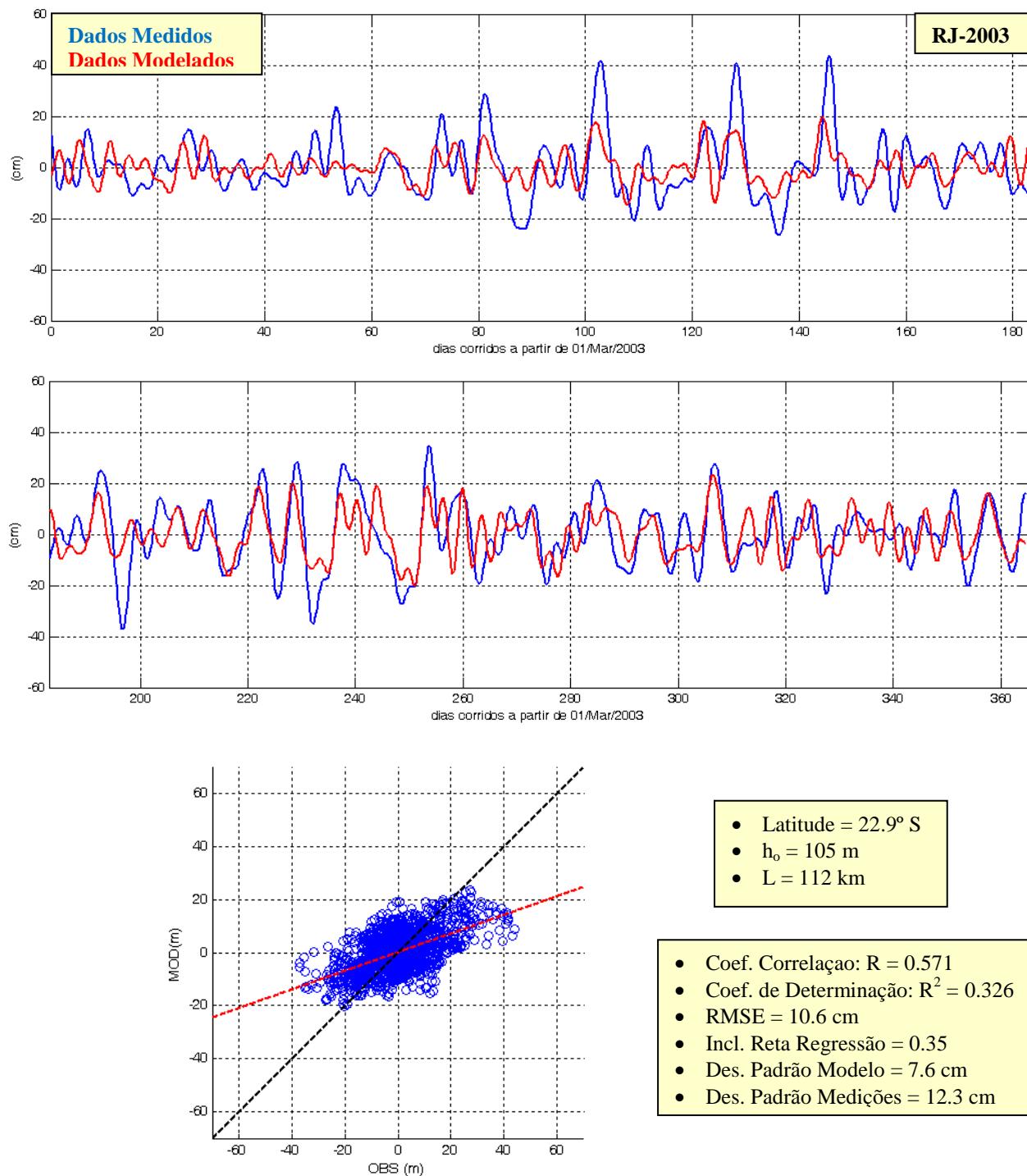
#### IV.4.1.2 - Resultados para o Rio de Janeiro

O modelo foi aplicado para o Rio de Janeiro apenas para o ano de 2003. Os parâmetros, obtidos dos cortes batimétricos, usados no cálculo foram:  $h_o = 105 \text{ m}$  e  $L = 112 \text{ km}$  numa latitude de  $22.9^\circ \text{ Sul}$ . O resultado está mostrado na figura (IV.15) com o efeito do BI incluído e na figura (IV.16) sem esse efeito.



**Figura IV.15** - Resultados do modelo Tipo 1 para Rio de Janeiro durante o 2003 com o efeito do Barometro Invertido. Dados da plataforma:  $h_o = 105 \text{ m}$ ;  $L = 112 \text{ km}$ ; lat.  $22.9^\circ \text{ S}$ . Painéis superiores: séries temporais da MM – Linha azul: medições; Linha vermelha: resultado do modelo. Painel inferior: diagrama de dispersão - Linha vermelha: reta de regressão; Linha preta : reta  $45^\circ$ , ajuste perfeito .

### Sem Barometro Invertido



**Figura IV.16** - Similar a figura (IV.15), sem incluir o efeito do Barometro Invertido.

#### IV.4.1.3 - Resultados para Imbituba e Cananéia para 2003 (Síntese)

Como complemento, o modelo “local” Tipo 1 foi também aplicado em Imbituba e Cananéia. Por comodidade, apenas os parâmetros estatísticos dos resultados para a situação que produziu o melhor coeficiente de determinação são apresentados. Os parâmetros referentes à plataforma continental foram extraídos dos cortes batimétricos.

##### Imbituba 2003 – sem BI:

- Latitude = 28.5° S
- $h_o = 95$  m
- $L = 100$  km

- Coef. Correlaçao:  $R = 0.628$
- Coef. de Determinação:  $R^2 = 0.395$
- RMSE = 12.3 cm
- Incl. Reta Regressão = 0.42
- Des. Padrão Modelo = 10.6 cm
- Des. Padrão Medições = 15. 8 cm

##### Cananeia 2003 – sem BI:

- Latitude = 25.7° S
- $h_o = 80$  m
- $L = 205$  km

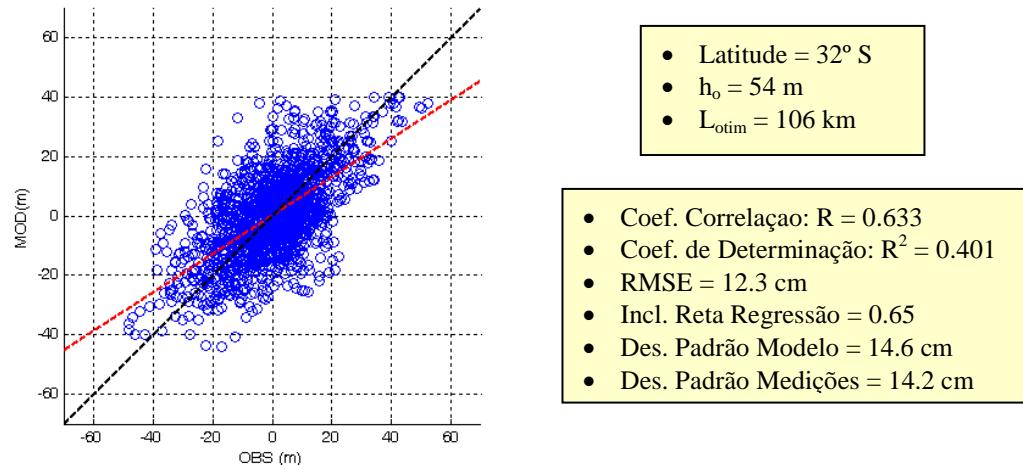
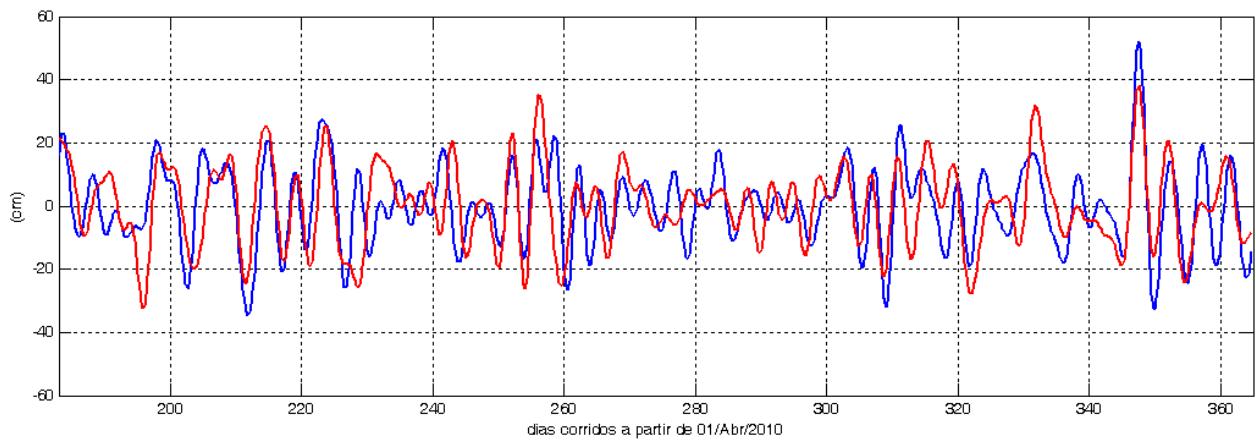
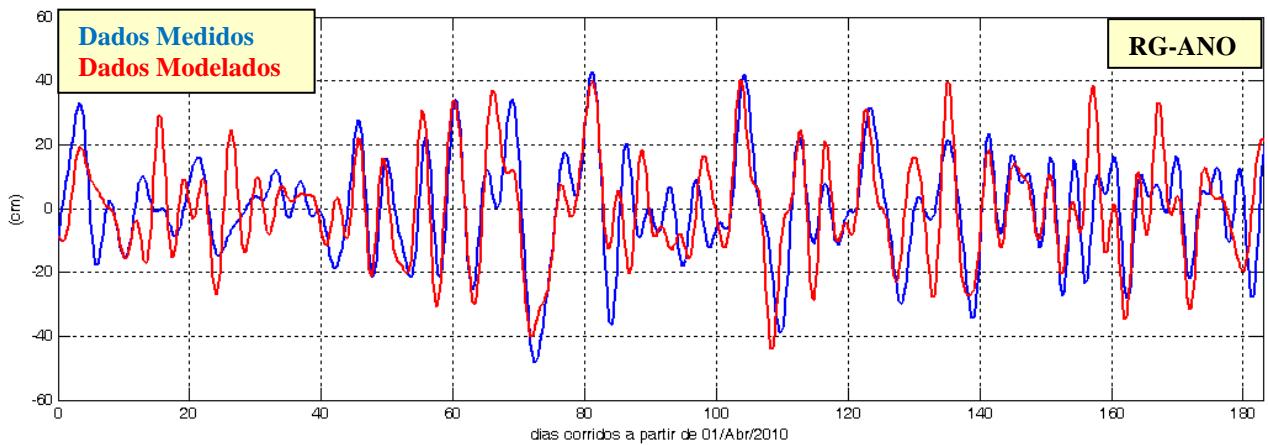
- Coef. Correlaçao:  $R = 0.578$
- Coef. de Determinação:  $R^2 = 0.334$
- RMSE = 14.9 cm
- Incl. Reta Regressão = 0.414
- Des. Padrão Modelo = 12.9 cm
- Des. Padrão Medições = 18.0 cm

#### IV.4.1.4 – Análise dos Resultados

Analizando os resultados, vê-se, em todos os locais, que o modelo conseguiu aproximar razoavelmente bem a MM medida em algumas situações enquanto, em outras, os resultados modelados divergem das medições. Todavia, a capacidade previsiva do modelo num compo anual avaliada sob a ótica dos coeficientes de correlação e, principalmente, de determinação, deixam a desejar. De fato, os coeficientes de correlação entre a MM modelada e a efetivamente medida ficaram na faixa de 0.50 a 0.64, o que resulta num coeficiente de determinação da ordem de 0.25 a 0.40, ambos considerados baixos. Comparando os resultados *com* e *sem* o BI, constata-se que o efeito da pressão atmosférica não afeta significativamente a MM. Em RG, a inclusão do BI aumentou levemente a correlação durante o ANO e diminuiu durante 2003 enquanto no RJ durante 2003 a correlação ficou melhor sem o BI. O erro médio quadrático (RMSE) também não foi significativamente afetado e seguiu a mesma tendência da correlação, indicando que, localmente, o vento deve ser o principal agente gerador da MM (pelo menos na costa brasileira).

Quanto ao efeito do vento, pode-se imaginar, a primeira vista, que o problema possa estar na imprecisão do valor da largura da plataforma continental ( $L$ ) usado nos cálculos. Para avaliar essa questão e considerando o caso de Rio Grande durante o ANO, o modelo foi executado com diferentes valores de  $L$ . O que se verificou foi que mudanças em  $L$  não alteraram o coeficiente de correlação afetando, apenas, os outros parâmetros estatísticos da modelagem. O fato da correlação não ser afetada pode parecer estranho, mas decorre da maneira como o coeficiente de correlação foi definido (ver seção II.8.3). Com efeito, devido a normalização que é feita, a correlação que é efetivamente calculada é entre a componente da velocidade do vento paralela à costa e a MM independentemente do coeficiente que multiplica a primeira (o qual é cancelado no cálculo da correlação normalizada).

No caso de Rio Grande durante o ANO, usando como largura da plataforma continental o valor que fornece a velocidade de propagação da MM medida na natureza (ver seção IV.2), qual seja,  $L = 106$  km , e incluindo o efeito do BI, o RMSE diminuiu de 15.7 cm para 12.3 cm e os desvios padrão da modelagem (dpMOD) e das medições (dpOBS ) ficaram bem próximos: dpMOD = 14.6 cm e dpOBS= 14.2 cm . Esse fato ocasionou uma melhoria nos resultados do modelo nos picos (máximos e mínimos) da MM como se pode verificar visualmente na figura (IV.17) e indica uma alternativa interessante para a definição da largura ótima da plataforma para efeito de cálculo.



**Figura IV.17** - Resultados do modelo Tipo I para **Rio Grande** durante o **ANO** com o efeito do Barometro Invertido e com largura da plataforma *otimizada* (igual a 106 km). Demais dados, similares a figura (IV.11).

Outro candidato usualmente apontado para explicar o baixo rendimento desse tipo de modelo é a não inclusão de uma possível *defasagem* temporal entre o vento e a MM. De fato, esse tipo de modelo considera que a resposta da MM a ação do vento dá-se *instantaneamente* (sem defasagem). Conforme visto na seção III.3.1.1.2, a parte *transiente* da solução provoca uma defasagem de algumas horas na fase inicial da ação de um vento que começa tempestivamente a partir do instante zero, porém, após esse período inicial, a resposta total se aproxima da resposta não-transiente usada no presente modelo. Como o vento varia continuamente e a MM é um fenômeno com escala de tempo de dias, a defasagem oriunda de efeitos transientes não deve ser responsável pelo efeito aventado acima.

Entretanto, como visto na seção III.3.6.1.4, defasagens significativas entre um vento que varia ciclicamente e a MM correspondente ocorrem em função da *inércia* das águas e do *atrito* da corrente (costeira) com o fundo. Simplificadamente, para ventos (e correntes costeiras) fracos, o papel do atrito é minorado e a defasagem (angular) entre a MM e o vento se aproxima de 90°, que seria a resposta invíscida conforme se pode ver na seção III.3.4.2.3, figura (III.34). A medida que o

vento (e a corrente costeira) aumenta de intensidade, a defasagem começa a diminuir, aproximando-se de zero (resposta instantânea) para ventos (e correntes costeiras) fortes. Portanto, defasagens entre o vento e a MM correspondente são realmente esperadas, porém *não* com valor *fixo*, mas com valores que dependem da intensidade do vento. A incorporação de uma defasagem com essa característica no modelo Tipo 1 seria de difícil implementação pelo modo como o modelo foi concebido.

Essa dificuldade aliada a não inclusão de MM's de origem remota indicam que modelos do Tipo 1 têm possibilidade de êxito limitado para uma plataforma continental como a da costa S/SE brasileira e levam a concepção de um modelo fisicamente mais completo como mostrado a seguir.

#### IV.4.2 – Modelo Tipo 2 : Maré Meteorológica Móvel, sem Efeitos Remotos e com Equilíbrio Dinâmico entre Inércia, Vento e Atrito

A contribuição da pressão atmosférica na MM nesse modelo continua sendo dada pelo Barômetro Invertido e, portanto, a mesma metodologia usada no modelo Tipo 1 é utilizada aqui.

Para a ação do vento, a hipótese dinâmica básica desse modelo difere da do modelo anterior pela inclusão da força de inércia no balanço de forças na direção paralela à costa. Como visto na seção III.4.4, a equação que representa essa dinâmica é dada por :

$$\frac{dV'_o(\xi)}{dt} = \frac{1}{\rho h_o} [\tau_y^W(\xi) - \tau_y^B(\xi)] \quad (\text{IV. 11})$$

onde,  $V'_o$  corresponde à corrente costeira na presença de atrito,  $h_o$  é a profundidade da plataforma continental,  $\tau_y^W$  é a tensão do vento e  $\tau_y^B$  a tensão de atrito da água com o fundo, parametrizada em função do quadrado da velocidade da corrente.

A incorporação do caráter *móvel* da MM torna o problema espacialmente bi-dimensional e é feita através do uso do *método das características* na solução da equação acima conforme apresentado na seção III.4.4. Segundo essa técnica, a equação é resolvida ao longo das chamadas linhas características e, portanto, tanto a corrente costeira quanto a tensão do vento são expressas em função de uma coordenada ( $\xi$ ) que combina o espaço e o tempo, dada por:

$$\xi = y - C_m t \quad (\text{IV. 12})$$

onde,  $C_m$  corresponde à velocidade característica do problema *com* atrito determinada a partir das medições, a qual passa a substituir o valor inviscido,  $C_*$ , obtido da teoria, conforme discutido na seção III.4.4.1..

A desconsideração de efeitos remotos entra na presente teoria através da condição inicial do problema que, no caso sem MM remota, é tomada como:

$$V'_o(y = 0, t) = 0 \quad (\text{IV. 13})$$

válida para todas as características em jogo.

A técnica de solução através de diagramas espaço-temporais, apresentada no capítulo III, é muito útil para visualizar e entender o problema e será utilizada aqui.

Da mesma forma que no modelo anterior, o presente modelo considera que a corrente costeira seja geostrófica e que a plataforma continental na região de interesse possa ser aproximada por uma plataforma tipo degrau “desconectada” do oceano adjacente (na qual se despreza o efeito do oceano na MM). Como visto na seção III.4.4., nessa situação, uma vez determinada a corrente costeira ( $V'_o$ ), a parcela da MM devida a ação do vento com o efeito do atrito incluído [  $(\eta_o)'_w$  ] é obtida pela expressão:

$$(\eta_o)'_w = \frac{C_m}{g} V'_o \quad (\text{IV. 14})$$

O caráter bi-dimensional do problema, entretanto, requer informações sobre a variação da largura do “degrau” *ao longo* de todo o tramo de plataforma considerado. No presente modelo simplificado, essa largura é tomada como *constante* em todo o comprimento (ao longo da costa) considerado.

Os detalhes do modelo serão descritos através de aplicações conforme mostrado a seguir.

#### IV.4.2.1 – Aplicação a Rio Grande

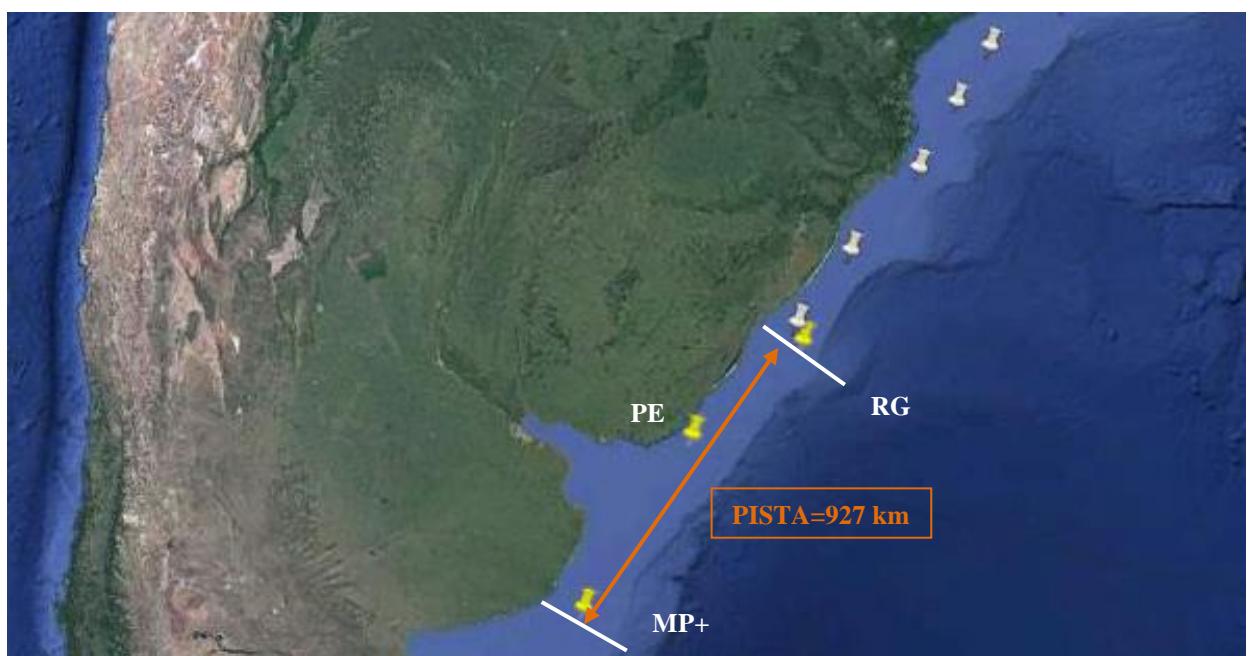
Para aplicações, uma questão que deve ser estabelecida a priori diz respeito à definição do *comprimento* do trecho de plataforma a “montante” (no caso em questão, a Sul) do ponto onde se deseja calcular a MM, o qual corresponderá ao *comprimento da pista* de vento que vai participar da geração da MM. No presente exemplo, o trecho a ser considerado foi (arbitrariamente) escolhido como indo de Mar del Plata a Rio Grande, cuja distância, de acordo com a seção II.9.4 é de cerca de 850 km, conforme ilustrado na figura (IV.18).

De acordo com a análise das medições de campo feita na mesma seção II.9.4, a velocidade característica para o trecho de plataforma em questão é de 927 km/dia (10.7 m/s). Com essa velocidade a MM cobre a distância entre Mar del Plata e Rio Grande em 22 horas. No intuito de facilitar a manipulação dos dados de vento (que têm intervalo de amostragem de 6 horas), a pista foi ampliada, na direção Sul, em 77 km (que corresponde à distância percorrida pela característica em 2 horas) de modo que o tempo de propagação entre o início e o fim da pista ficasse em exatamente 24 horas. Com isso a pista estendida ficou com 927 km.

Atendendo às simplificações do modelo e usando os cortes batimétricos apresentados na seção IV.1, o trecho de plataforma entre os dois sítios foi substituído por um “degrau” de profundidade (constante) de 54 m e comprimento 927 km. Apesar de não ser necessária, a título de complemento, a largura (constante) *otimizada* da plataforma foi determinada usando a eq. (III.208), numa latitude de 35° S e a velocidade característica obtida dos dados ( $C_m=10.7 \text{ m/s}$ ), correspondendo a 139 km. Adicionalmente, a existência do Estuário do Prata foi ignorada.

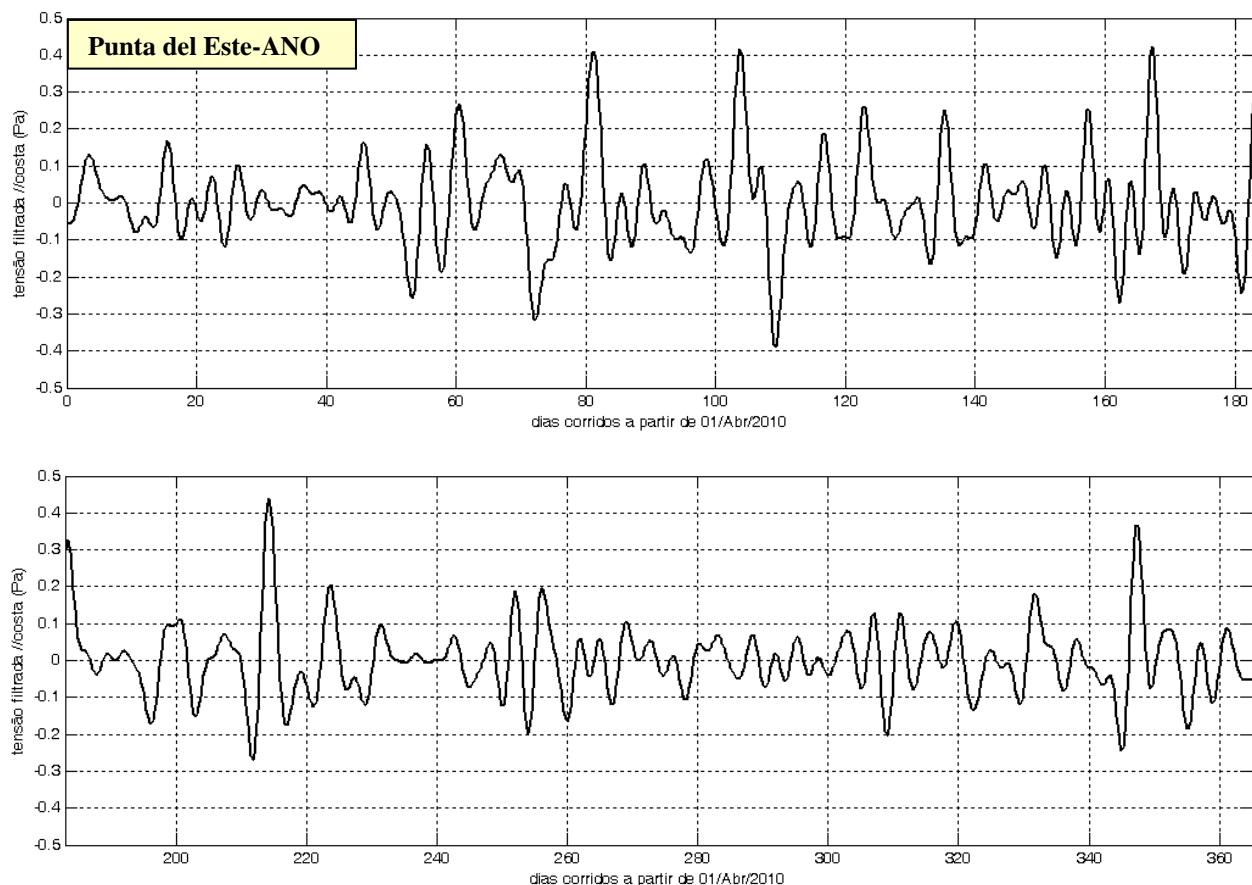
Definida a geometria, a evolução espaço-temporal, ao longo da pista, do campo de tensão do vento na direção paralela à costa, filtrada na banda da MM, deve ser prescrita. Isso pode ser feito com diferentes graus de detalhamento tanto no espaço quanto no tempo. Para simplificar, vamos admitir que o campo de vento na banda da MM entre Mar del Plata e Rio Grande seja espacialmente uniforme e que possa ser representado pelas condições que atuaram no ponto central da pista que, no caso, corresponde, aproximadamente, à localidade de Punta del Este [ver figura (IV.18)].

É importante ressaltar que essa uniformização da estrutura espacial da tensão do vento elimina a informação sobre a velocidade de avanço ao longo da costa dos sistemas atmosféricos indutores dos ventos e, por conseguinte, impossibilita a determinação da parcela da resposta que se move junto com esse sistema. Entretanto, vale também salientar que tal simplificação *não* é requisito do modelo, mas foi implementada apenas por simplicidade. Como justificativa em suporte dessa simplificação está o fato de que as medições de campo não acusaram a presença de uma MM que se move com a velocidade de avanço dos sistemas atmosféricos.



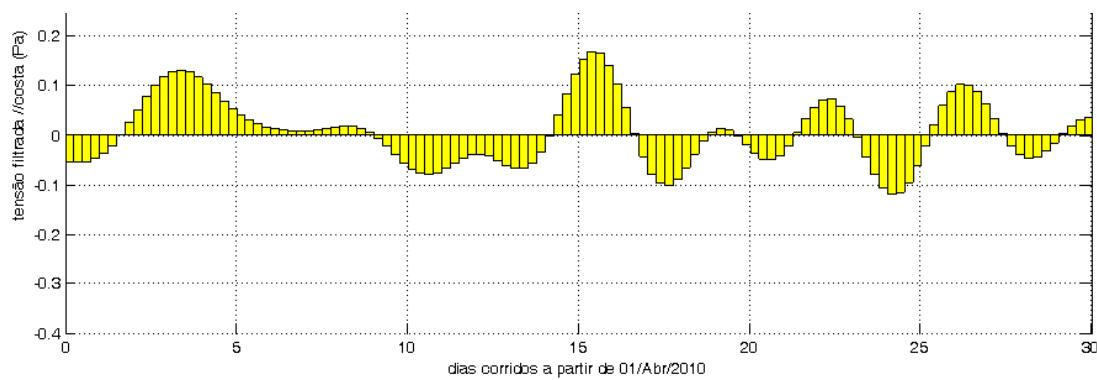
**Figura IV.18** – Trecho de Plataforma Continental usado para aplicação do modelo. MP = Mar del Plata, PE = Punta del Este, RG = Rio Grande. Características do trecho: comprimento 927 km,  $h_o=54 \text{ m}$  e  $L_{optm}=139 \text{ km}$  com  $C_m=10.7 \text{ m/s}$

A figura (IV.19) apresenta a série temporal da componente da tensão do vento paralela à costa filtrada na banda da MM para um ponto localizado a meia plataforma continental em frente a Punta del Este durante o ANO, obtida a partir dos dados sintéticos do NCEP/NOAA.



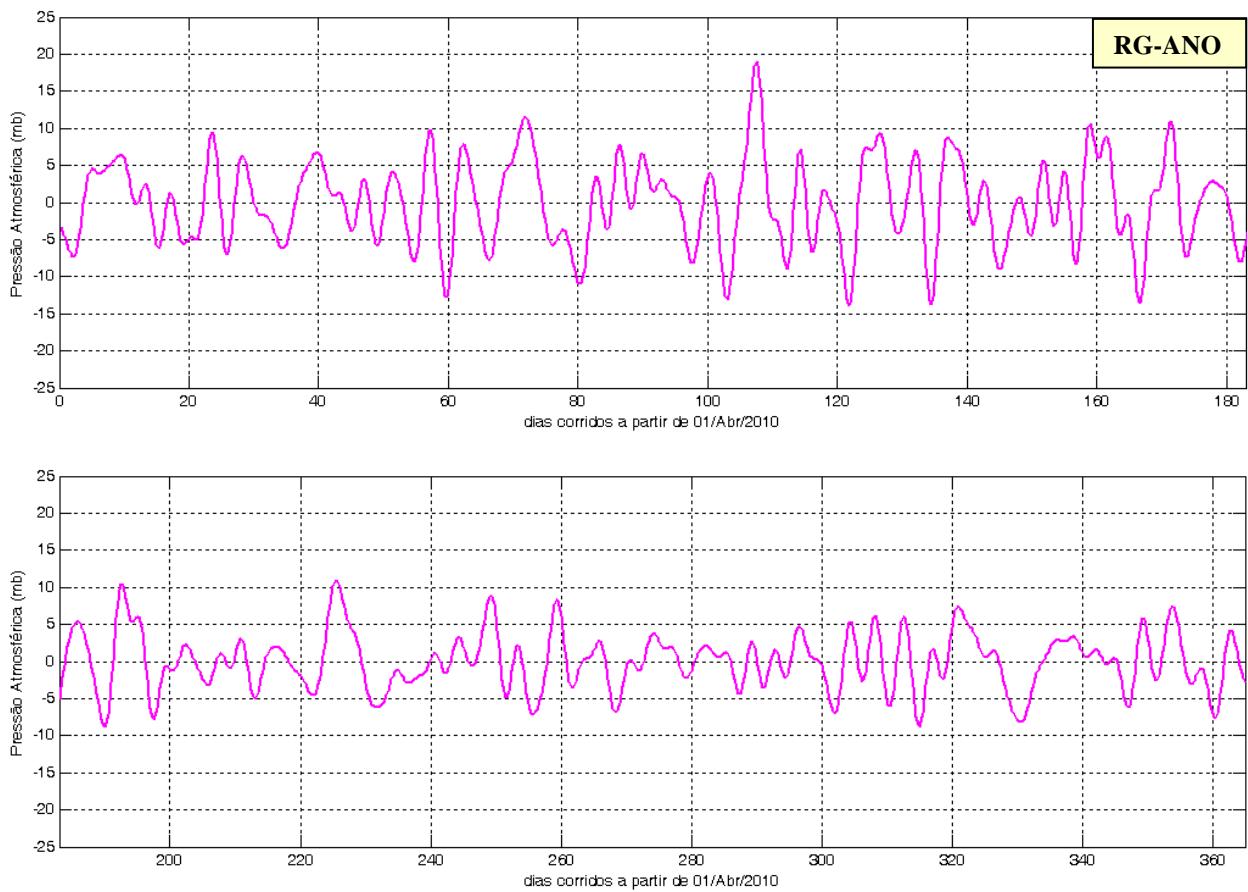
**Figura IV.19** - Série temporal da componente da tensão do vento paralela à costa filtrada na banda da MM para um local no meio da plataforma continental em frente a Punta del Este durante o ANO. Tensões positivas mantém a costa a esquerda.

No intuito de enfatizar o intervalo de amostragem usado, a série temporal da tensão do vento acima foi montada, na figura (IV.20), na forma de diagrama de barras com largura de 6 horas para os primeiros 30 dias da série.



**Figura IV.20** - Trecho inicial da série mostrada na figura anterior apresentada na forma de diagrama de barras com largura de 6 horas.

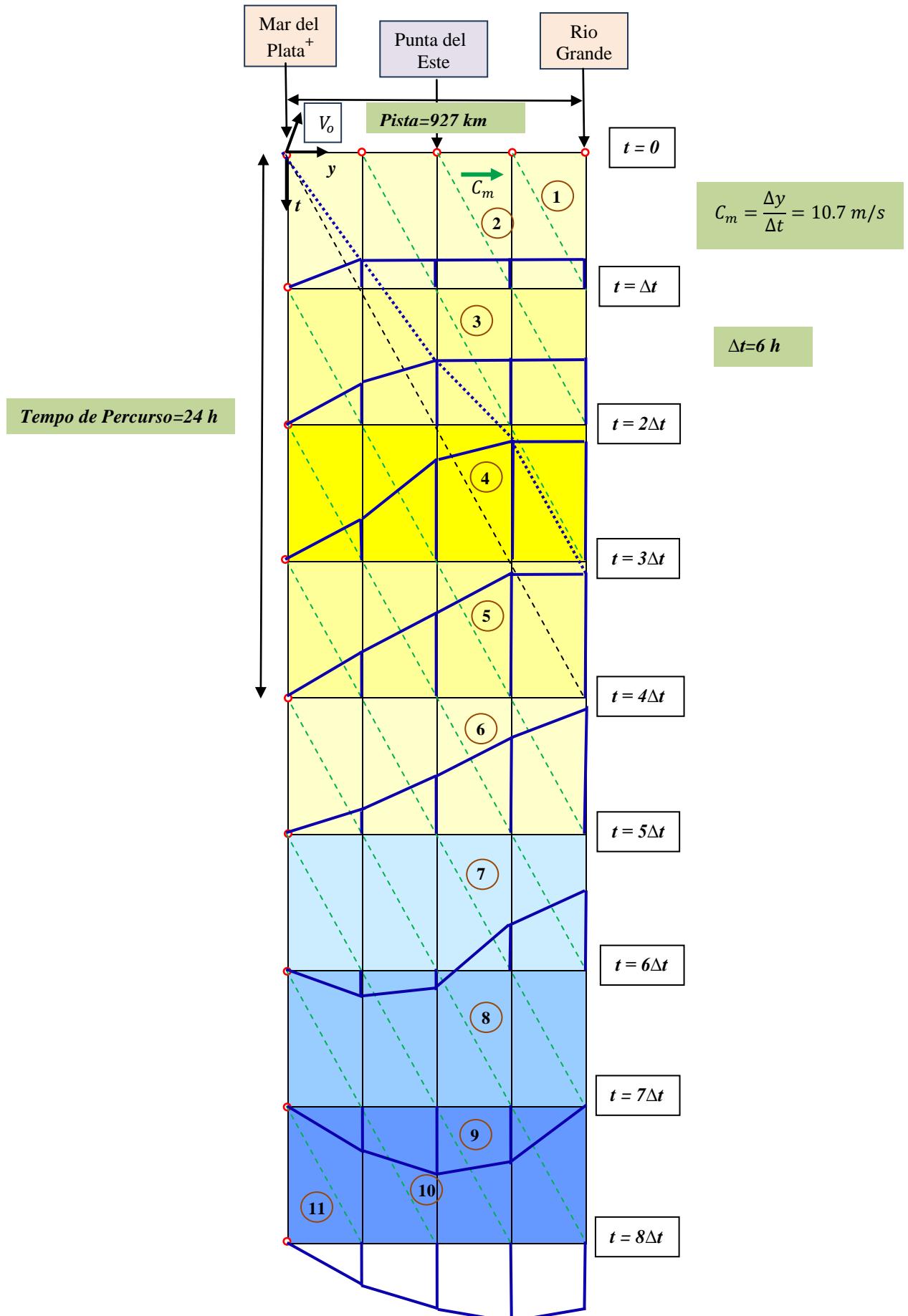
A figura (IV.21) abaixo mostra a série temporal das flutuações em torno da média anual da pressão atmosférica filtrada na banda da MM para Rio Grande obtida da reanálise da NCEP/NOAA, usada no cálculo do Barômetro Invertido.



**Figura IV.21** - Flutuações em torno da média anual da pressão atmosférica filtrada na banda da MM (mb) para Rio Grande durante o ANO

A figura (IV.22) mostra esquematicamente o diagrama espaço-temporal a ser usado na solução desse exemplo. Observar que a série temporal da MM devida ao vento em Rio Grande é obtida do diagrama a partir dos valores da corrente costeira ao longo da linha (temporal) vertical na posição Rio Grande.

É importante notar que, nesse tipo de modelo, a corrente costeira (e a MM correspondente) no começo da pista *inicia sempre no valor zero* de acordo com a condição de contorno dada pela eq.(IV.13) [ver valores ao longo da linha (temporal) vertical na posição Mar del Plata no gráfico]. Essa condição inicial *elimina* MM's de origem remota da solução.



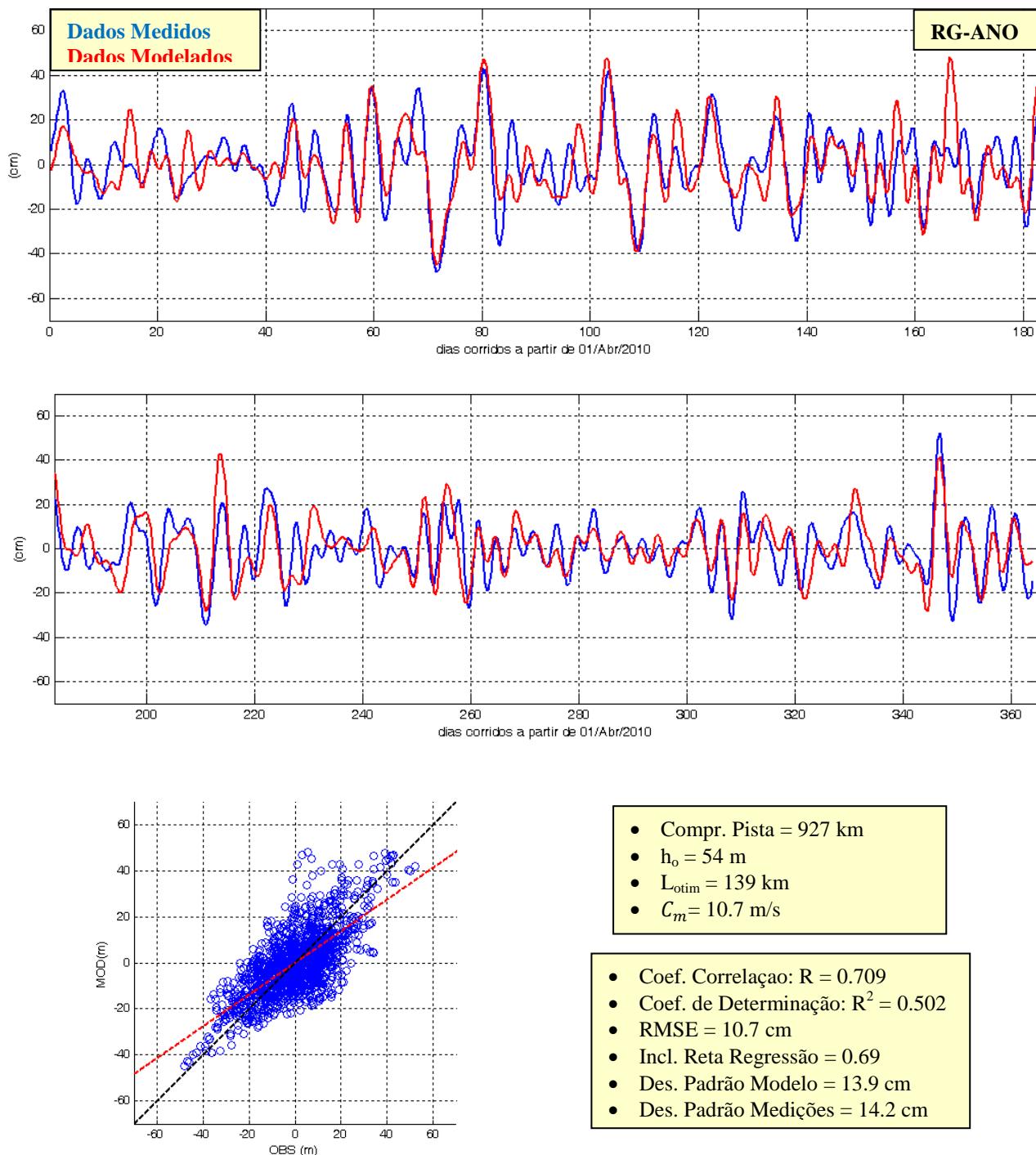
**Figura IV.22 – Diagrama Espaço-Temporal esquemático para solução pelo método das características.** Observar que a tensão de vento paralela a costa varia no tempo mas é considerada espacialmente uniforme dentro da pista. Tons de amarelo correspondem a uma tensão de vento com a costa à esquerda (indutora de MM positiva), tons de azul

correspondem a tensão de vento com a costa a direita (MM negativa). As características, indicadas pelas linhas transversais tracejadas, estão numeradas sequencialmente e a numeração está indicada por círculos.

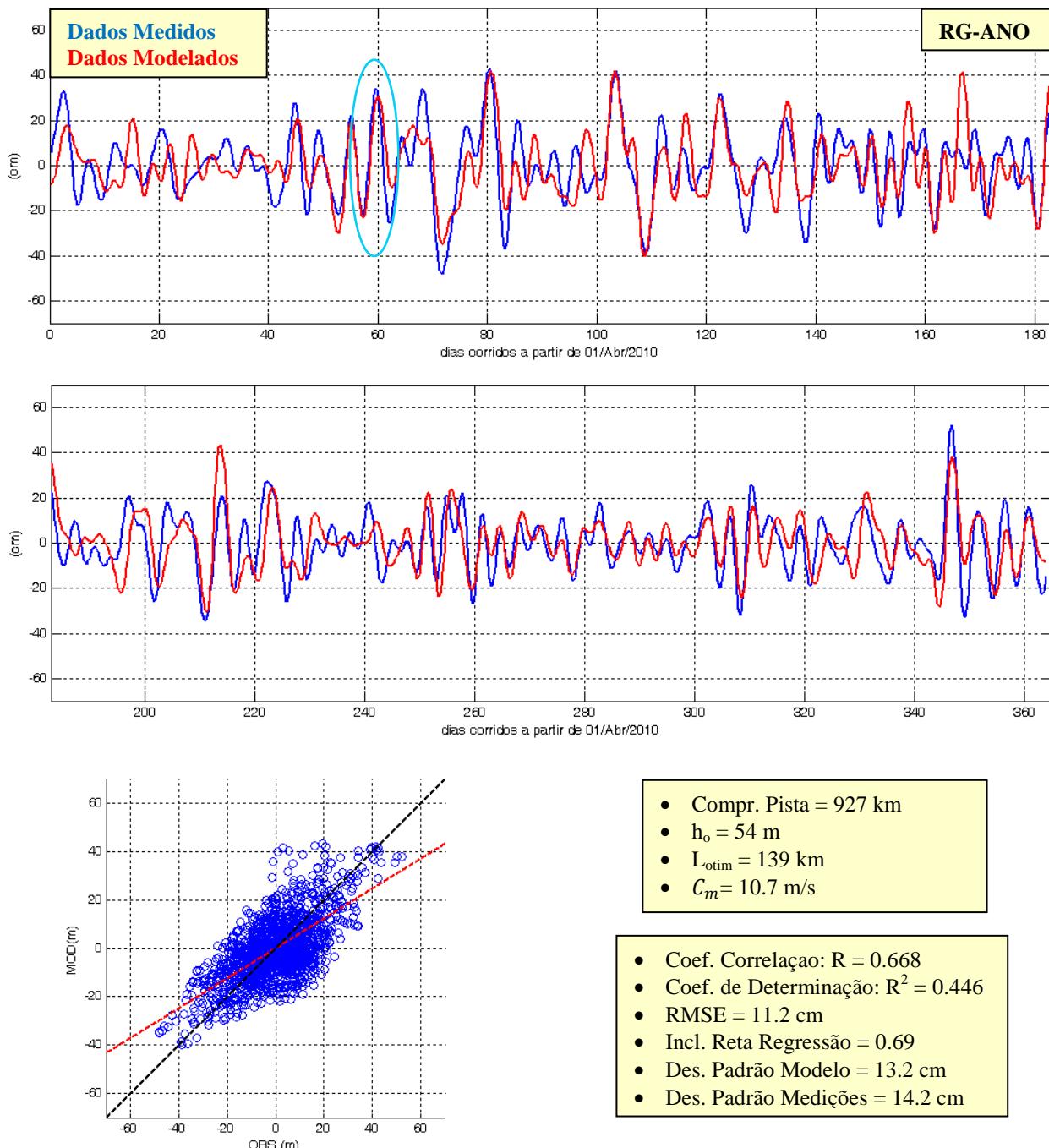
Portanto, a corrente costeira (e a MM correspondente) em Rio Grande é determinada integrando a eq.(IV.11) ao longo de cada uma das características mostradas esquematicamente na figura (IV.22), submetida à condição inicial de velocidade nula, eq.(IV.13). A integração pode ser feita com o método numérico apresentado na Apêndice 7 ou através das soluções analíticas descritas na seção III.3.6.1 [ver tabela (III.4)] e no Apêndice 6.

Reportando à figura (IV.22), as três primeiras características não cobrem toda a pista e serão descartadas. A integração, portanto, iniciar-se-á na característica número 4, indo até a de número 1456 (ver figura). Com isso, o primeiro dia de medições não será resolvido. Cada uma das 1456 integrações envolverá 4 valores de tensão do vento de acordo com o esquema indicado na figura (IV.22). Os resultados da MM, com e sem o Barometro Invertido, estão mostrados na figura (IV.23).

### Com Barometro Invertido



### Sem Barometro Invertido



**Figura IV.23** – Resultados do modelo Tipo 2 para Rio Grande (ver figura para detalhes)

Iniciando pela participação da pressão atmosférica no fenômeno, o que se vê comparando os resultados acima é que, nesse caso, a inclusão do efeito do BI melhorou a qualidade da previsão do modelo.

Uma avaliação comparativa do desempenho dos dois modelos por meio dos coeficientes estatísticos mostra uma leve melhora dos resultados do presente modelo em relação ao modelo Tipo I. De fato, considerando o caso otimizado do modelo Tipo 1 para Rio Grande, o RMSE, a inclinação da reta de regressão e os desvios padrão apresentaram melhorias. No que tange o coeficiente de determinação, este passou de 0.40 (Tipo 1) para 0.50 (Tipo 2), ou seja, uma melhora de 25%.

Mesmo assim, considerando a simplicidade do modelo Tipo 1, a comparação põe em dúvida a vantagem de se optar pelo modelo Tipo 2 face a sua maior complexidade. Todavia, como será visto em breve, a real vantagem do Modelo Tipo 2 reside na possibilidade de se incluir efeitos remotos no cálculo, algo impossível de se fazer no modelo Tipo 1.

#### IV.4.2.2 – Aplicação ao Rio de Janeiro

Para a aplicação do modelo Tipo 2 ao Rio de Janeiro arbitrou-se que a pista de vento responsável pela MM neste sítio se estende por  $800\text{ km}$  na direção Sul ao longo da costa, o que põe o limite sul da pista a  $65\text{ km}$  de Imbituba, como mostrado na figura (IV.24) (OBS.: distância entre Imbituba e Rio de Janeiro é de  $865\text{ km}$ ).

De acordo com a análise das medições de campo feita na seção II.9.4, a velocidade característica para o trecho de plataforma em questão é de  $800\text{ km/dia}$  ( $9.2\text{ m/s}$ ). Com essa velocidade a MM cobre a pista em exatas *24 horas*, facilitando a manipulação dos dados de vento como ocorreu no caso de Rio Grande.

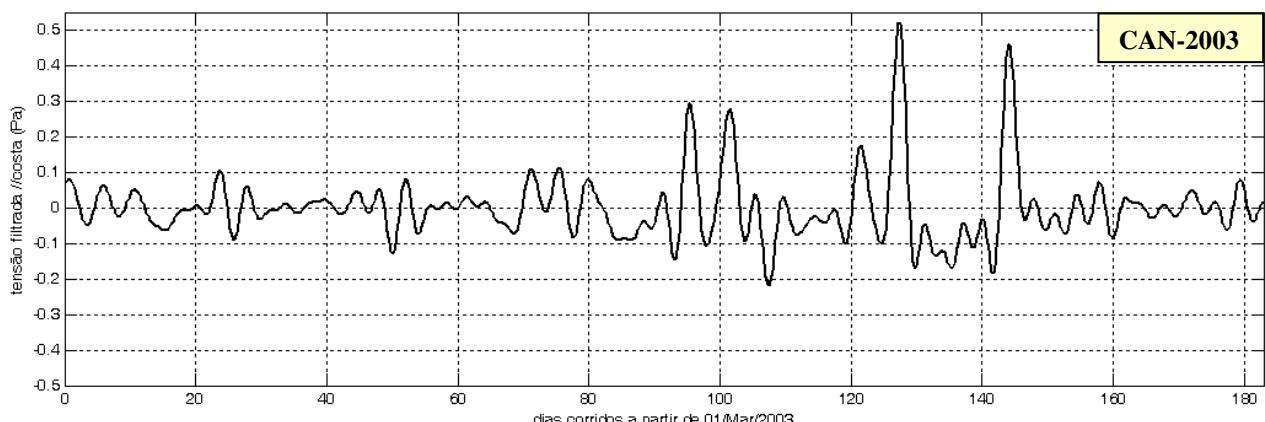


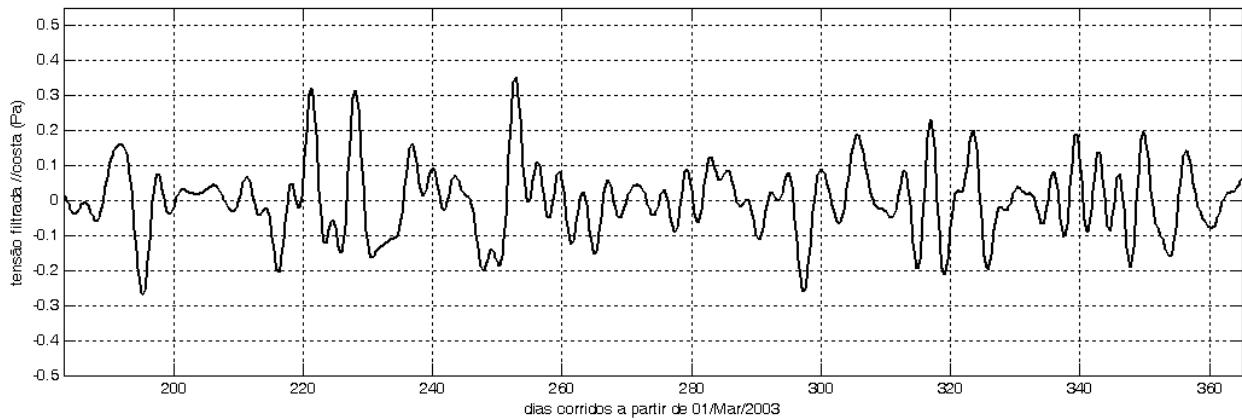
**Figura IV.24** – Trecho de Plataforma Continental usado para aplicação do modelo. IMB = Imbituba, CAN = Cananeia, RJ = Rio de Janeiro. Características do trecho: comprimento  $800\text{ km}$ ,  $h_o = 90\text{ m}$  e  $L_{otim} = 155\text{ km}$ , com  $C_m = 9.2\text{ m/s}$

Atendendo às simplificações do modelo e usando os cortes batimétricos apresentados na seção IV.1, o trecho de plataforma entre os dois sítios foi substituído por um “degrau” de profundidade (constante) de  $90\text{ m}$  e comprimento  $800\text{ km}$ . Tomando uma latitude de  $25^\circ\text{ S}$  como referência, a largura otimizada do “degrau”, determinada usando a eq.(III.208) e a velocidade característica obtida dos dados ( $C_m = 9.2\text{ m/s}$ ), foi de  $155\text{ km}$ .

Quanto a evolução espaço-temporal, ao longo da pista, da tensão do vento na direção paralela à costa, filtrada na banda da MM, a mesma simplificação usada em Rio Grande foi adotada aqui. Para tanto, vamos admitir que o campo de vento na banda da MM entre Imbituba e Rio de Janeiro seja espacialmente uniforme e que possa ser representado pelas condições que atuaram no ponto central da pista que, no caso, corresponde, aproximadamente, à localidade de Cananéia (ver figura).

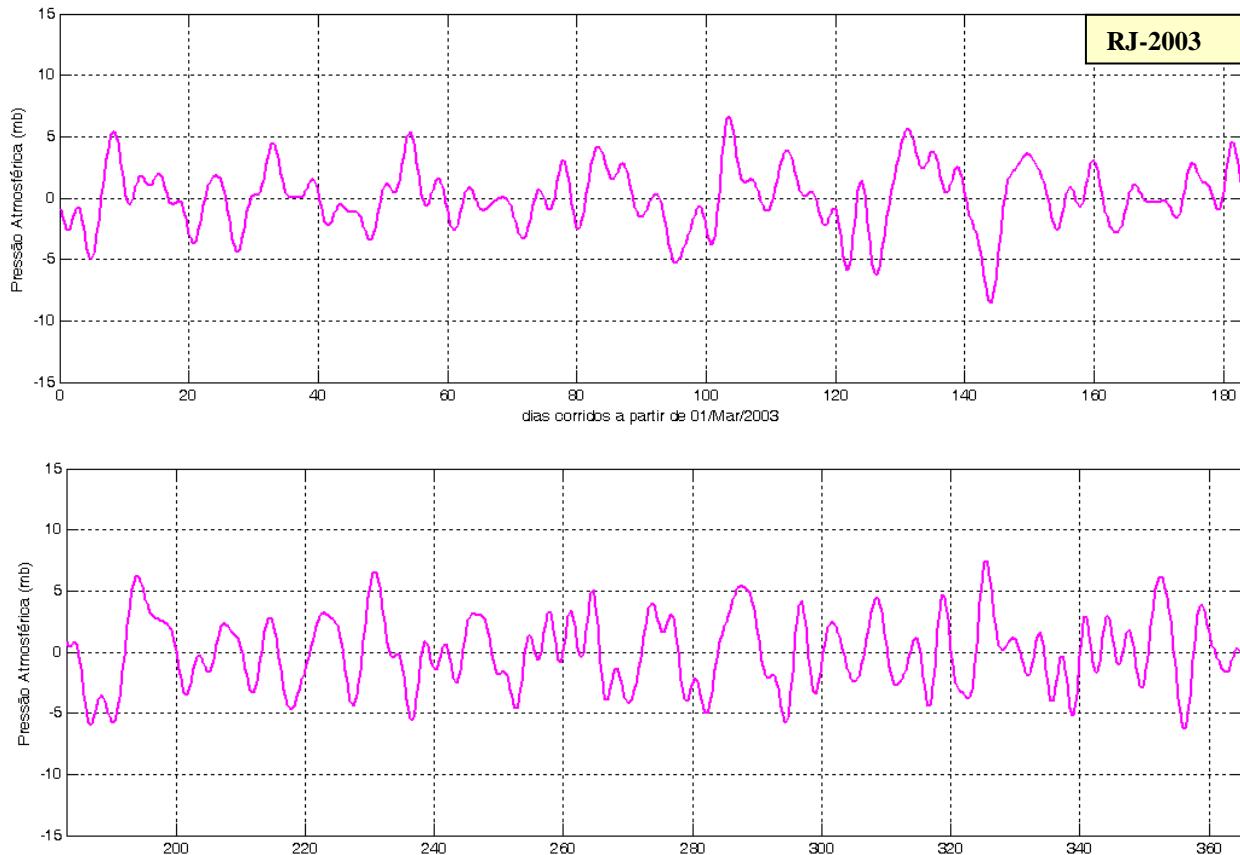
A figura (IV.25) apresenta a série temporal da componente da tensão do vento paralela à costa filtrada na banda da MM para um ponto localizado a meia plataforma continental em frente a Cananeia durante o ano de 2003, obtida dos dados sintéticos do NCEP/NOAA.





**Figura IV.25** - Série temporal da componente da tensão do vento paralela à costa filtrada na banda da MM para um local no meio da plataforma continental em frente a Cananeia durante 2003. Tensões positivas mantém a costa à esquerda.

A figura (IV.26) abaixo mostra a série temporal das flutuações em torno da média anual da pressão atmosférica filtrada na banda da MM para o Rio de Janeiro obtida da reanálise da NCEP/NOAA, a ser usada no cálculo do Barômetro Invertido.



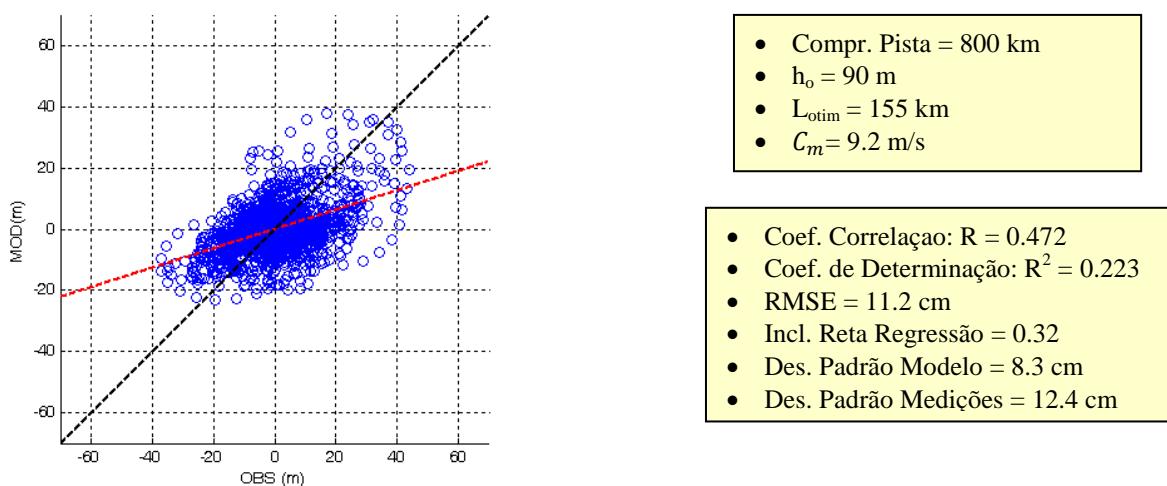
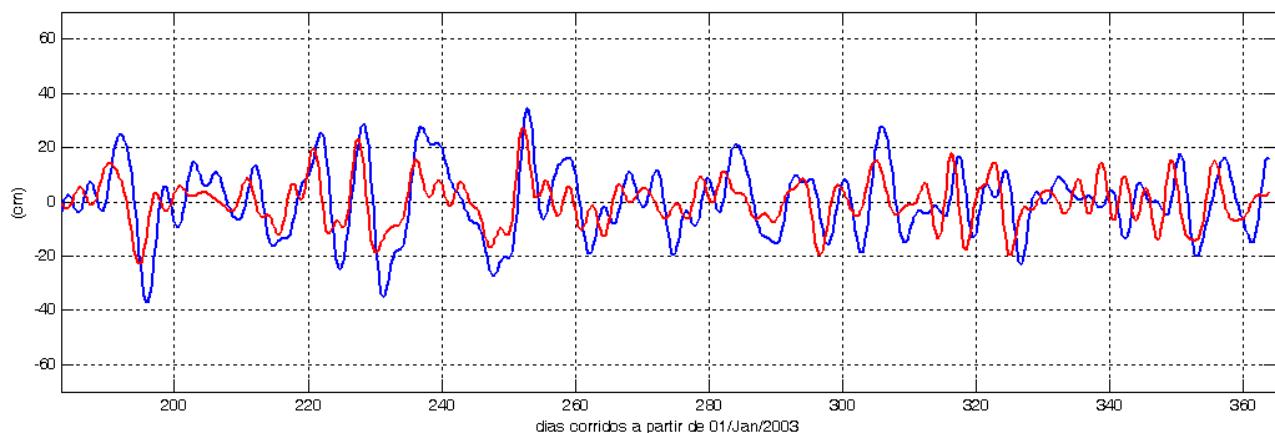
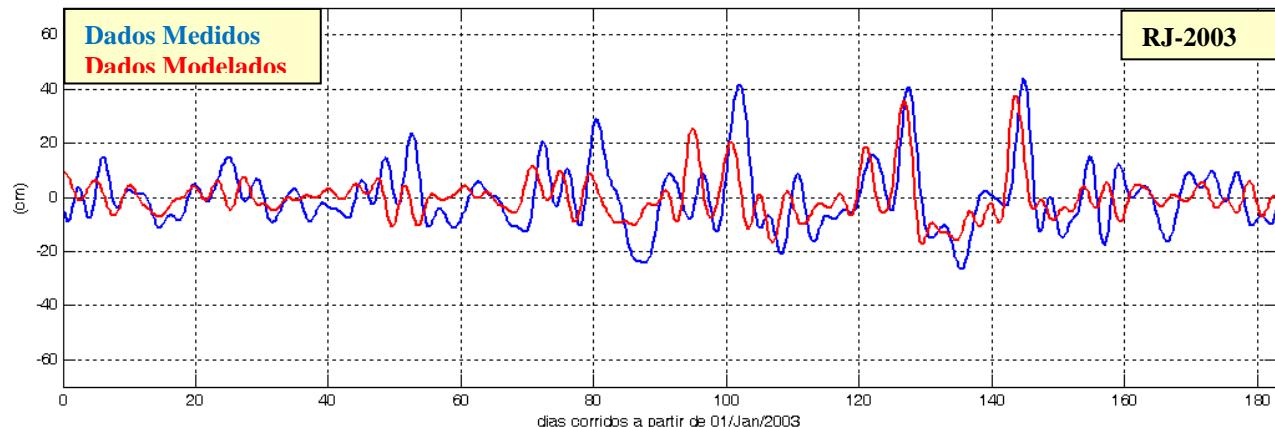
**Figura IV.26** - Flutuações em torno da média anual da pressão atmosférica filtrada na banda da MM (mb) para o Rio de Janeiro durante 2003

Com o arranjo adotado, o diagrama espaço-temporal a ser usado na solução pelo método das características no caso do Rio de Janeiro é análogo ao usado em Rio Grande, a figura (IV.22) pode ser usada diretamente simplesmente trocando os nomes dos sítios e atualizando os valores das distâncias e velocidades. Por simplificação a figura não será repetida.

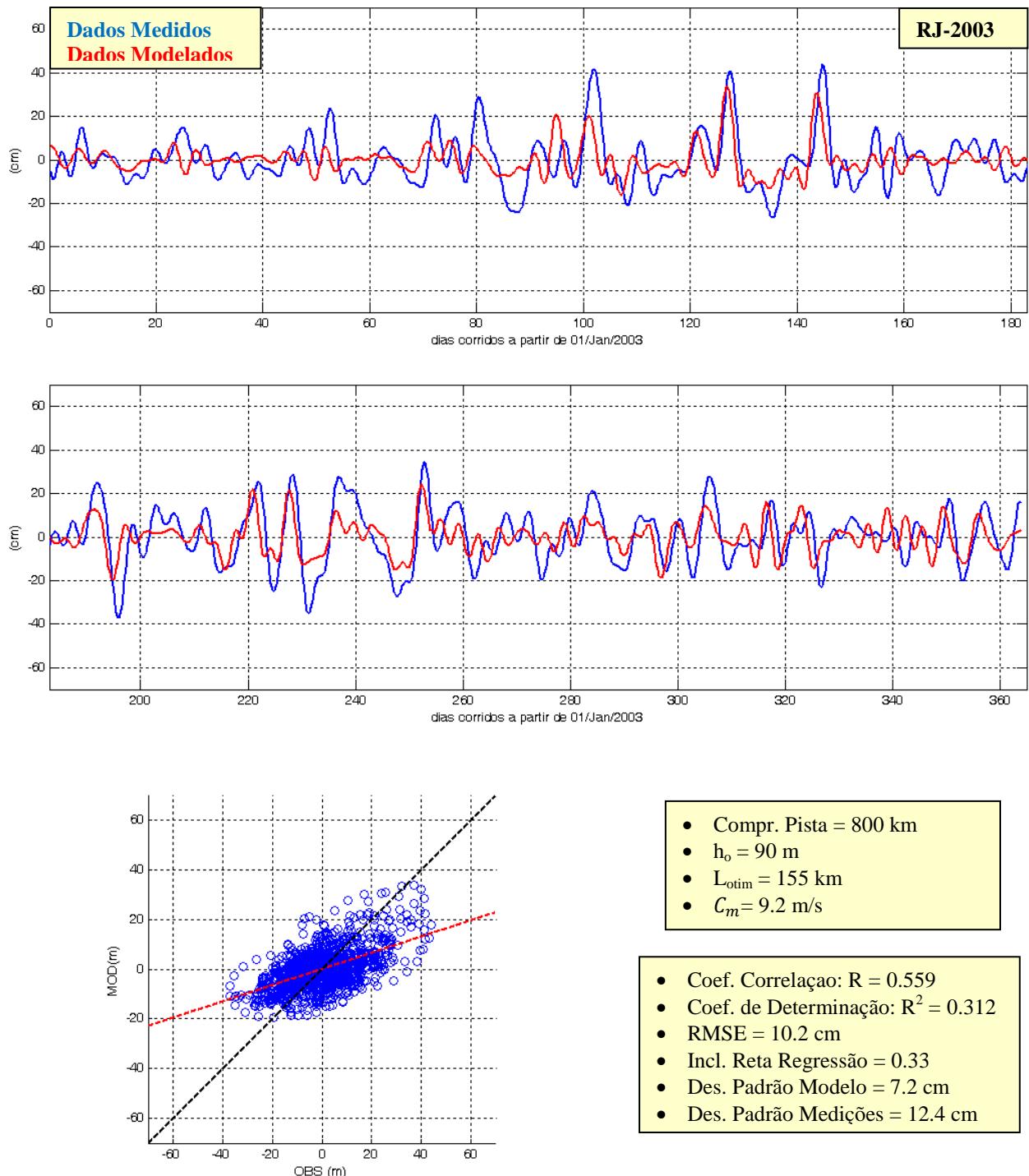
Da mesma forma que no caso de Rio Grande, a integração da eq.(IV.11) iniciar-se-á na característica número 4, indo até a de número 1456 [ver figura (IV.22)]. Com isso, o primeiro dia de medições não será resolvido. Cada uma das 1456 integrações envolverá 4 valores de tensão do vento de acordo com o esquema indicado na figura (IV.22).

Os resultados para a MM, com e sem o Barometro Invertido, estão mostrados na figura (IV.27).

### Com Barometro Invertido



### Sem Barometro Invertido



**Figura IV.27** - Resultados do modelo Tipo 2 para Rio de Janeiro (ver figura para detalhes)

Analizando os resultados é curioso observar, inicialmente, que no caso do Rio de Janeiro, ao contrário de Rio Grande, a inclusão do BI causou uma leve deterioração dos resultados, mormente no que diz respeito ao coeficiente de determinação.

Quanto ao desempenho do modelo, os melhores resultados forneceram: coeficiente de determinação na faixa de 30%, inclinação da reta de regressão (0.33), bem longe do valor ideal (1.00), e desvio padrão do modelo de 7.2 cm, que corresponde à metade do valor observado (12.4 cm).

É curioso notar que o mesmo modelo Tipo 2 aplicado de forma similar (i.e. com comprimento de pista da mesma ordem de grandeza) a Rio Grande forneceu resultados melhores naquele sítio do que no Rio de Janeiro. Em ambos os casos, todavia, a deficiência de desempenho observada deve ser produto de algum ponto falho do modelo, mas qual?

Na verdade, a pendência que ainda permanece no modelo Tipo 2 jaz na exclusão de efeitos remotos na MM. Por tudo que foi apresentado até aqui, a participação de MM's de origem remota pode, sim, ser um fator de grande relevância na composição da MM existente na costa brasileira, particularmente no caso do Rio de Janeiro, e sua exclusão pode ser o motivo das imprecisões observadas. A inclusão de efeitos remotos é o mote do próximo modelo conforme mostrado a seguir.

#### **IV.4.3 – Modelo Tipo 3 : Maré Meteorológica Móvel, com Efeitos Remotos e com Equilíbrio Dinâmico entre Inércia, Vento e Atrito**

O modelo Tipo 3 é similar ao Tipo 2 em quase todos os aspectos. Para a ação do vento, a hipótese dinâmica básica do modelo continua sendo um balanço de forças na direção paralela à costa dado pela inércia, o atrito do vento ( $\tau_y^W$ ) e o atrito da corrente costeira com o fundo ( $\tau_y^B$ ) :

$$\frac{dV_o'(\xi)}{dt} = \frac{1}{\rho h_o} [\tau_y^W(\xi) - \tau_y^B(\xi)] \quad (\text{IV.11} - \text{bis})$$

A incorporação do caráter *móvel* da MM continua sendo feita através do uso do método das características na solução da equação acima conforme apresentado no modelo Tipo 2.

A diferença entre o modelo anterior e o presente reside exatamente na inclusão de efeitos remotos que é realizada através de uma mudança na *condição inicial* que deve ser usada na solução da equação acima para todas as características em jogo, a qual passa a ser :

$$V'_o(y = 0, t) = V_{ini}(0, t) \quad (\text{IV.15})$$

onde,  $V_{ini}$  corresponde a intensidade da *corrente costeira associada a MM existente no ponto inicial* ( $y = 0$ ) da pista. Como essa informação não é conhecida a priori,  $V_{ini}$  deve ser determinada a partir da MM medida no ponto inicial como mostrado abaixo.

Primeiramente, lembrando que a MM observada possui sempre uma parcela forçada pela pressão atmosférica  $[(\eta_o)_p]$  e outra causada pelo vento (incluindo o efeito do atrito)  $[(\eta_o)'_w]$ , o primeiro passo consiste na separação da parcela devida exclusivamente ao vento :

$$(\eta_o)'_w = MM - (\eta_o)_p \quad (\text{IV.16})$$

Como a parcela devida a pressão atmosférica é sempre determinada pelo Barômetro Invertido, tem-se:

$$[(\eta_o)'_w]_{ini} = MM_{ini} + \frac{1}{\rho_w g} (p_{atm})_{ini} \quad (\text{IV.17})$$

onde,  $(p_{atm})_{ini}$  é a (série temporal da) flutuação de pressão atmosférica em torno da média no ponto inicial.

Como segundo passo, a variação de nível oriunda da ação do vento é transformada em corrente (costeira) por:

$$V_{ini} = \frac{g}{C_m} [(\eta_o)'_w]_{ini} \quad (\text{IV.18})$$

A velocidade característica ( $C_m$ ), na verdade, pode ser determinada pelo valor obtido diretamente das medições de campo, ou pela expressão obtida da teoria [eq.(III.20)], pois, pelos valores de profundidade e largura (otimizada) adotados, o mesmo valor é obtido.

A partir daí, a solução da eq.(IV.15) pelo método das características segue de forma similar ao que foi feito no modelo anterior.

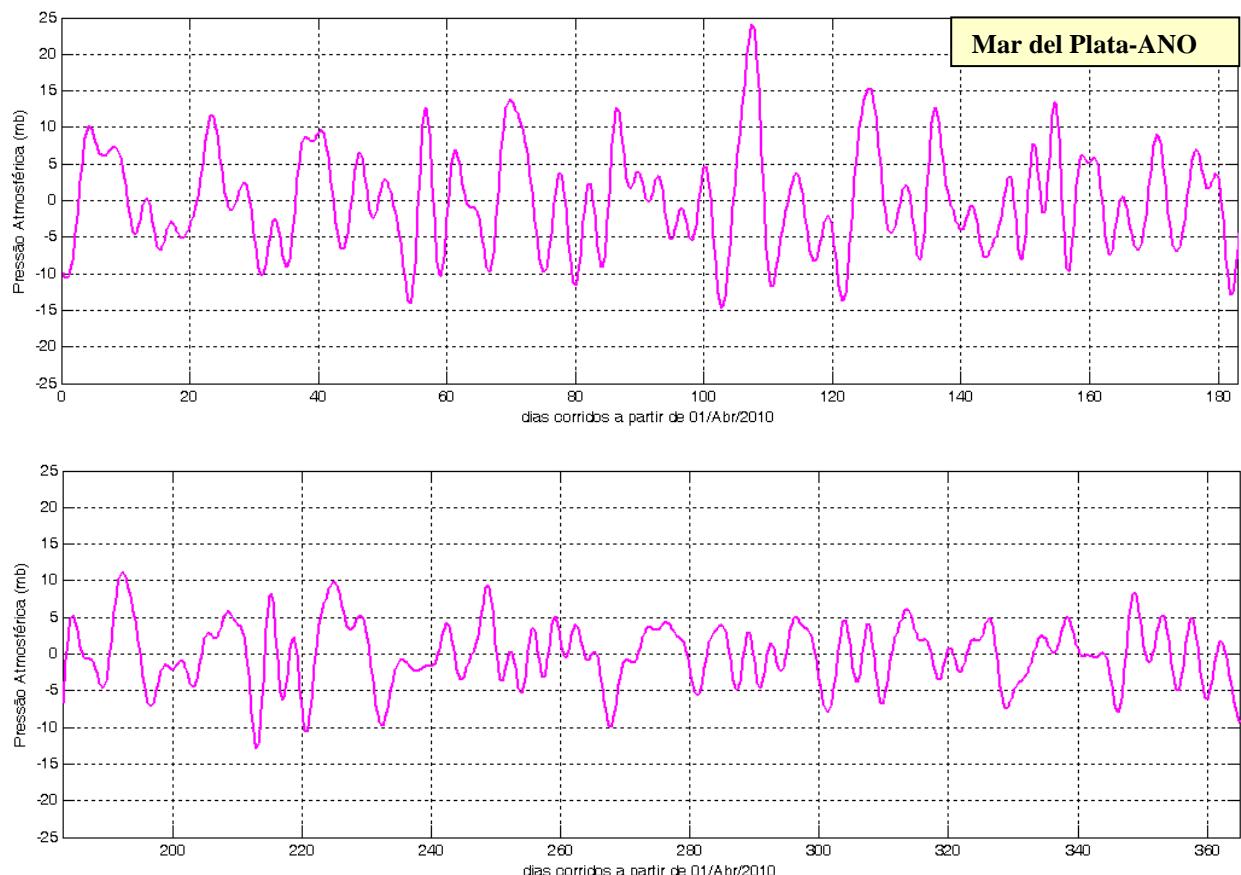
O modelo Tipo 3 é agora aplicado aos mesmos casos estudados com o modelo Tipo 2.

#### IV.4.3.1 – Aplicação a Rio Grande *com* efeitos remotos prescritos em Mar del Plata

A aplicação do modelo Tipo 3 a Rio Grande durante o ANO usa todo o esquema já utilizado na aplicação feita com o Modelo Tipo 2, a única diferença sendo a prescrição da corrente costeira associada a MM em Mar del Plata como condição inicial para solução da eq.(IV.15).

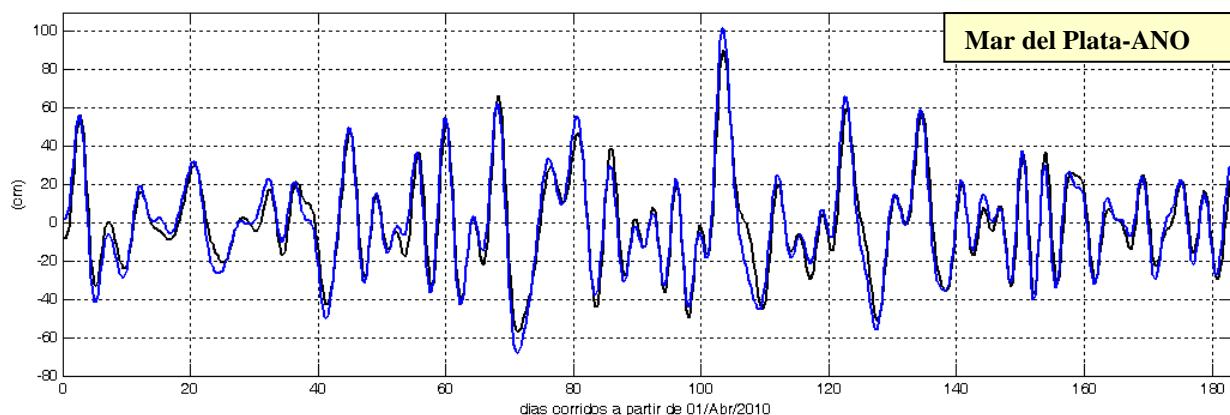
As informações complementares necessárias a presente aplicação são apresentadas a seguir.

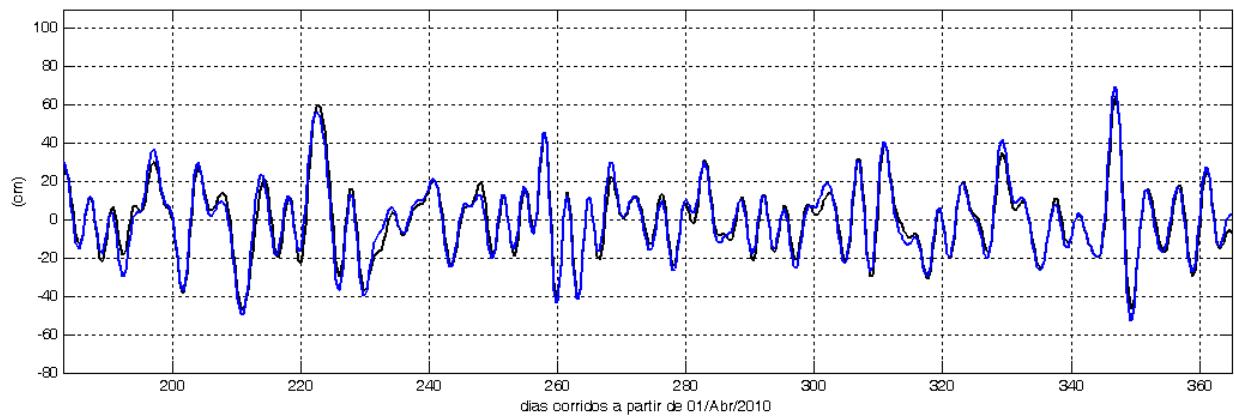
A figura (IV.28) mostra as flutuações de pressão atmosférica em relação a média anual para Mar del Plata durante o ANO obtida do banco de dados do NCEP/NOAA.



**Figura IV.28** - Flutuações em torno da média anual da pressão atmosférica filtrada na banda da MM (mb) para Mar del Plata durante o ANO

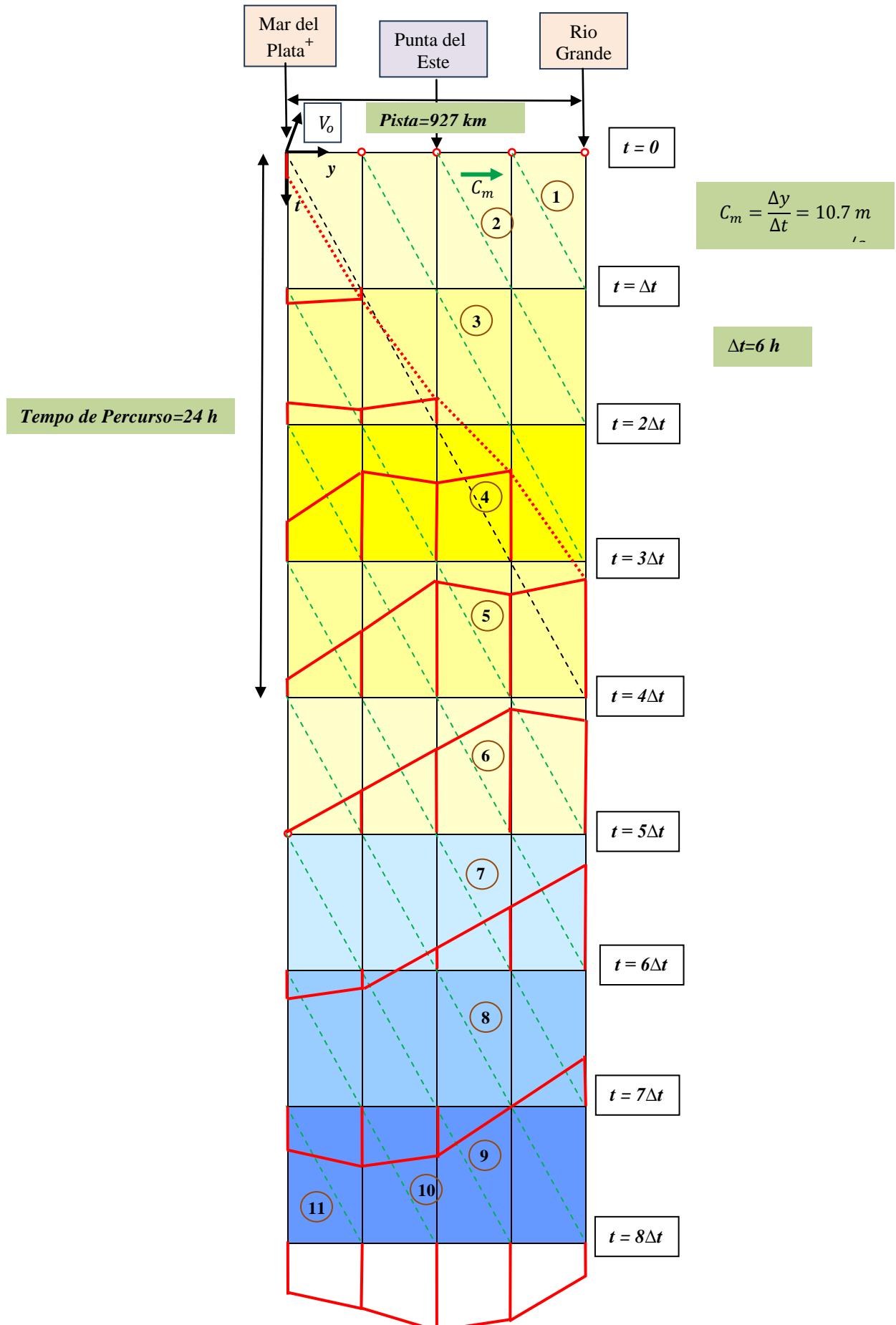
A figura (IV.29) abaixo mostra a MM medida em Mar del Plata durante o ANO, juntamente com a parcela devida exclusivamente a ação do vento.





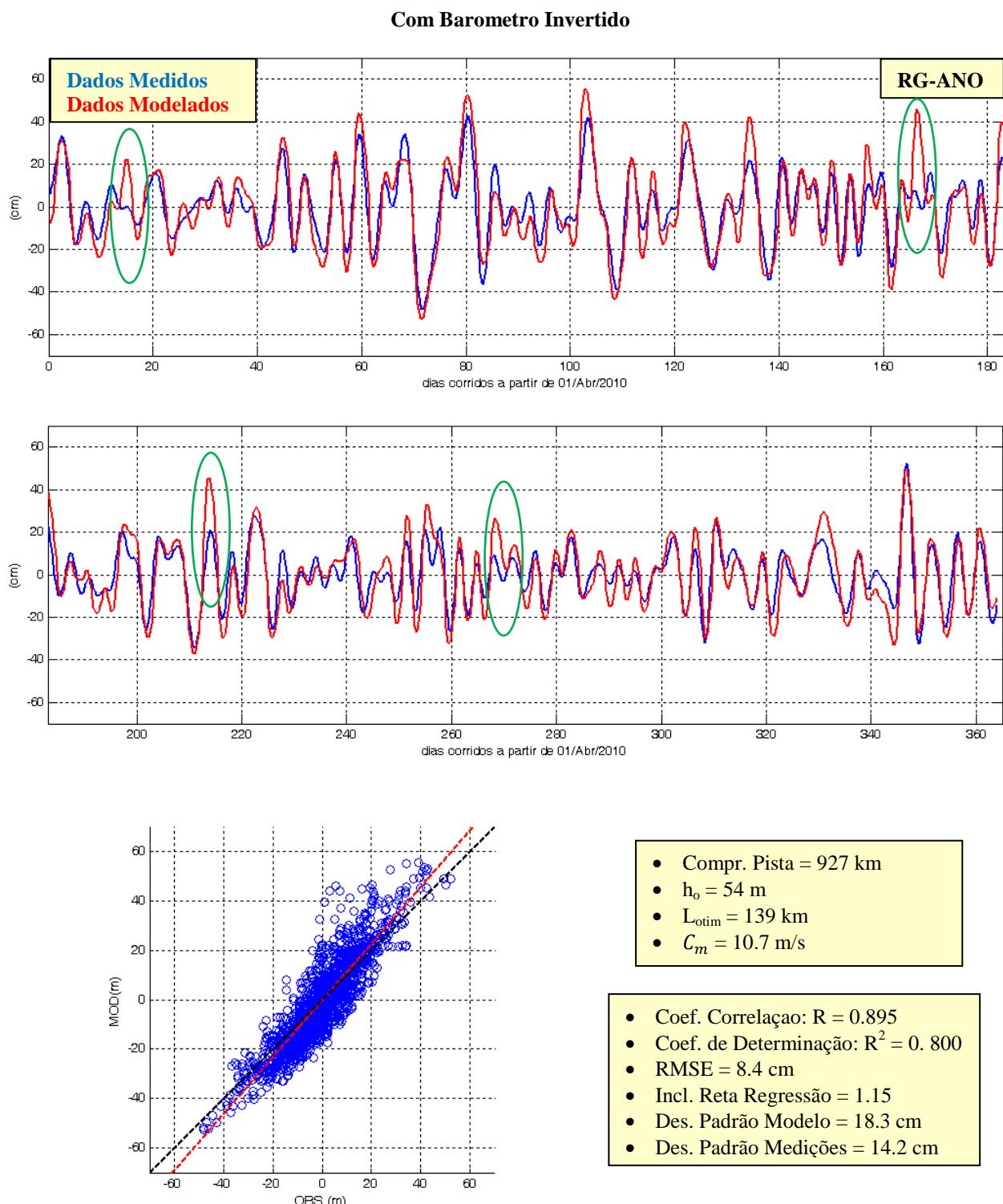
**Figura IV.29** - MM (total) medida em Mar del Plata durante o ANO (linha azul). Linha preta: parcela da MM devida exclusivamente a ação do vento

A figura (IV.30) é a versão do diagrama espaço-temporal que se aplica ao presente caso, a qual difere da mostrada na figura (IV.22) pela prescrição de uma condição inicial *não-nula* no começo da pista.

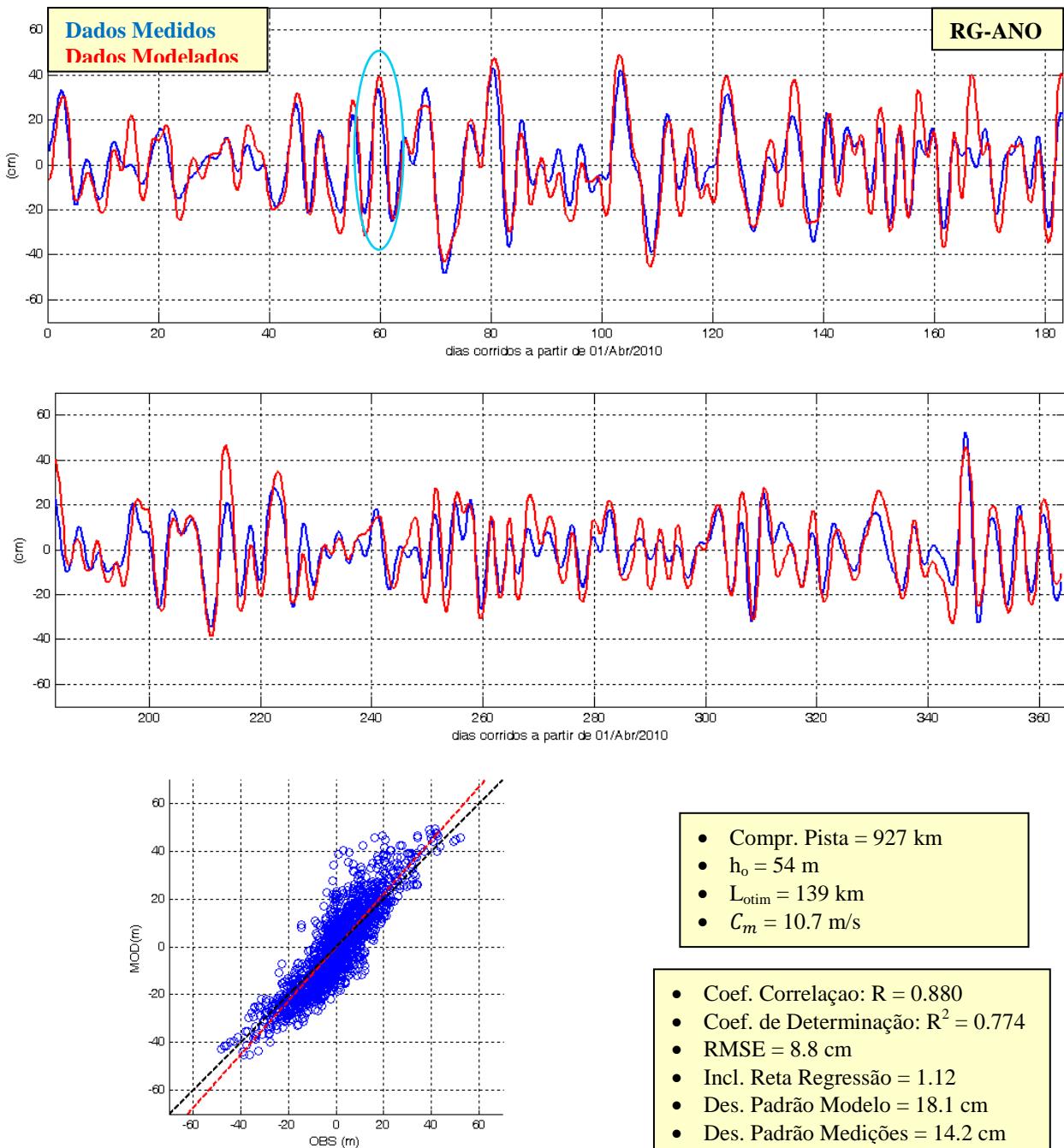


**Figura IV.30 – Diagrama Espaço-Temporal esquemático para solução pelo método das características no Modelo Tipo 3.**  
 Diagrama difere do da figura (IV.22) apenas na condição inicial que nesse caso é prescrita (não-nula).

Os resultados, com e sem a utilização do Barômetro Invertido, são mostrados na figura IV.31.



### Sem Barometro Invertido



**Figura IV.31** - Resultados do modelo Tipo 3 para Rio Grande (ver figura para detalhes)

Analizando inicialmente a participação da pressão atmosférica nos resultados, verifica-se que, novamente, a inclusão do BI causou uma leve melhoria no desempenho do modelo.

Comparando agora os resultados dos dois modelos e observando que o campo de vento utilizado (entre Mar del Plata e Rio Grande) foi o *mesmo*, vê-se que o modelo Tipo 3 logrou resultados significativamente *superiores* aos do modelo Tipo 2. De fato, o coeficiente de determinação passou de 0.5 (Tipo 2) para 0.8 (Tipo 3), um valor indicativo de uma capacidade de previsão já satisfatória. O RMSE diminuiu de 10.7 cm (Tipo 2) para 8.4 cm (Tipo 3) e a inclinação da reta de regressão aproximou-se mais do valor ideal, passando de 0.7 (Tipo 2) para 1.15 (Tipo 3). O desvio padrão, entretanto, passou de 13.9 cm para 18.3 cm, sofrendo uma piora e ultrapassando o valor esperado (14.2 cm). Esse curioso resultado pode estar relacionado com a completa exclusão do estuário do Prata da modelagem. É razoável supor que a presença desse imenso estuário seja capaz de consumir parte da energia da MM que se propaga na sua foz o que causaria uma diminuição da

amplitude da MM que por ali se propaga. Como o modelo não incluiu tal efeito, o resultado foi uma MM superestimada em Rio Grande.

Uma fonte de erro que ficou embutida nessa aplicação refere-se ao alongamento da pista que teve de ser feito. A rigor, a condição inicial deveria ter sido fornecida para uma posição 77 km a Sul de Mar del Plata. Contudo, como só havia medições em Mar del Plata, os dados coletados nesse local tiveram de ser utilizados. O erro incorporado, portanto, é diretamente proporcional a variação de amplitude que a MM sofreu nessa distância.

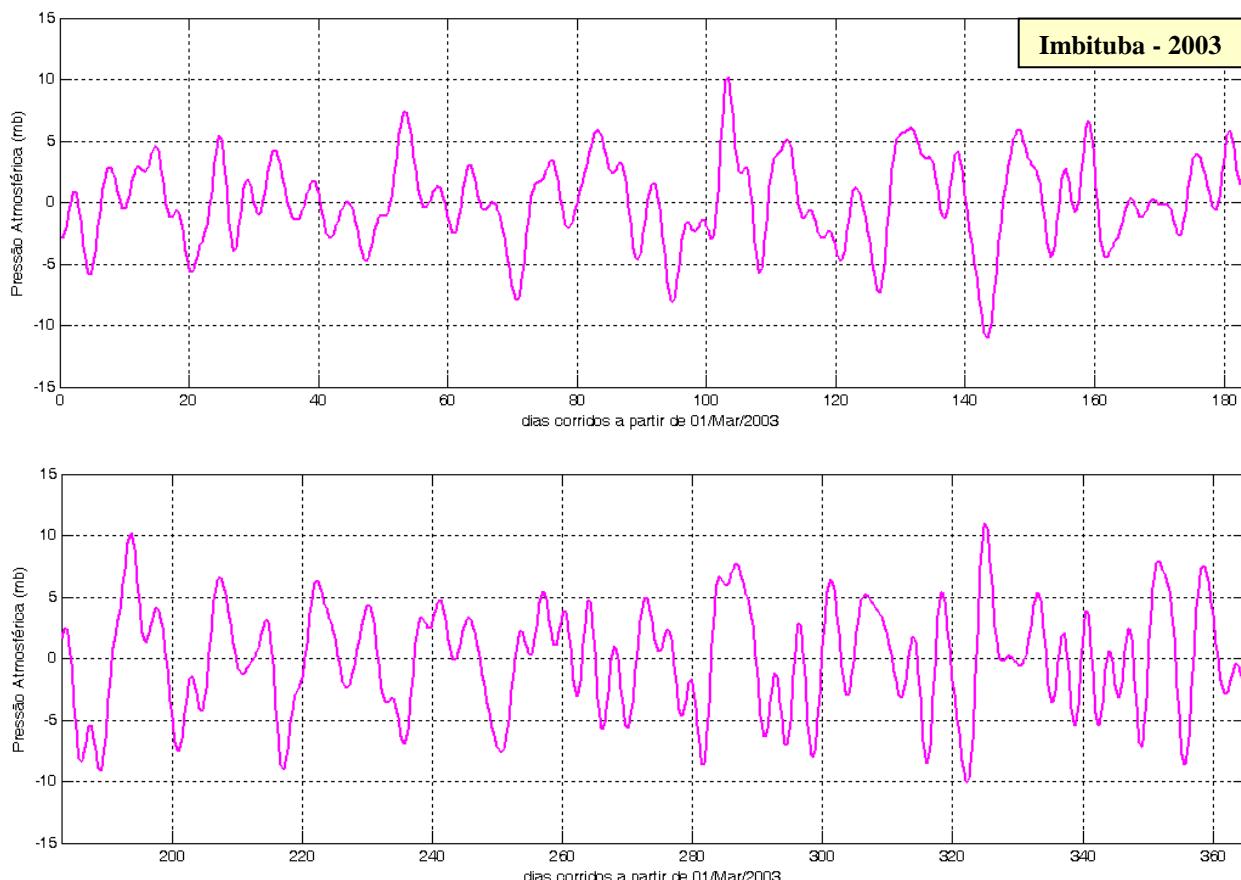
Finalmente, outra questão que não pode ser esquecida diz respeito a prováveis imprecisões na prescrição dos campos de pressão atmosférica e, principalmente, de vento usado no modelo. De fato, apesar da qualidade *geral* dos dados da reanálise do NCEP/NOAA ser bastante evidente, face aos resultados obtidos, é possível que as forçantes atmosféricas, em alguns *eventos particulares*, tenham sido retratadas de forma imprecisa. Isso explicaria, por exemplo, as falhas grosseiras que o modelo produziu em algumas situações, como as indicadas por elipses verdes na figura &. Mesmo com o vento prescrito corretamente, há ainda a questão da projeção na direção paralela à costa da tensão do vento a qual foi feita de forma simplificada em função da orientação geral da costa. Esse aspecto também pode ser aperfeiçoado em futuras aplicações.

#### IV.4.3.2 – Aplicação ao Rio de Janeiro *com Efeitos Remotos prescritos em Imbituba*

A exemplo do que ocorreu em Rio Grande, a aplicação do modelo Tipo 3 ao Rio de Janeiro usa todo o esquema já utilizado na aplicação feita com o modelo Tipo 2 nesse sítio, a única diferença sendo a prescrição da corrente costeira associada a MM em Imbituba como condição inicial para solução da eq.(IV.15).

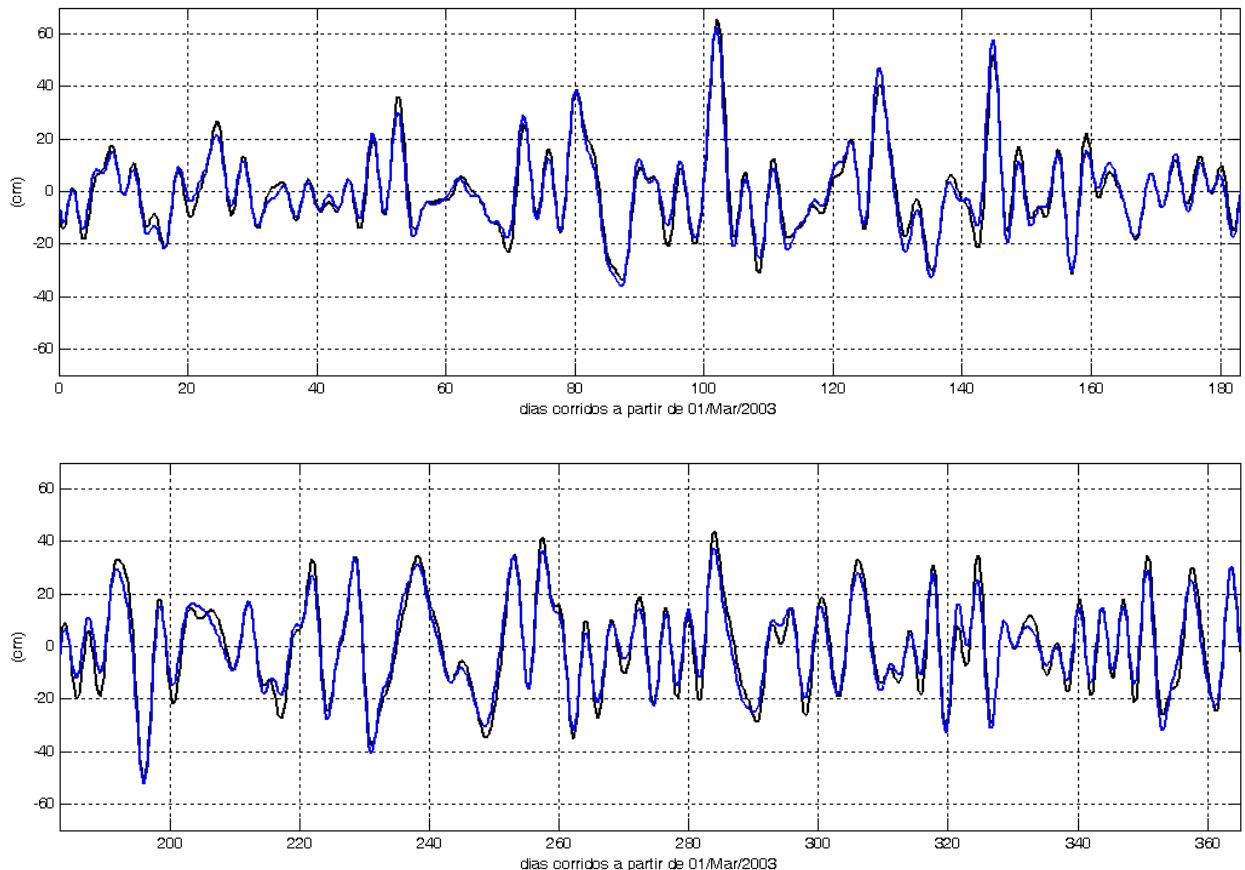
As informações complementares necessárias a presente aplicação são apresentadas a seguir.

A figura (IV.32) mostra as flutuações de pressão atmosférica em relação à média anual para Imbituba durante o ano de 2003 obtida do banco de dados do NCEP/NOAA.



**Figura IV.32** - Flutuações em torno da média anual da pressão atmosférica filtrada na banda da MM (mb) para Imbituba durante o ano de 2003.

A figura (IV.33) abaixo mostra a MM medida em Imbituba durante o ano de 2003, juntamente com a parcela devida exclusivamente a ação do vento.

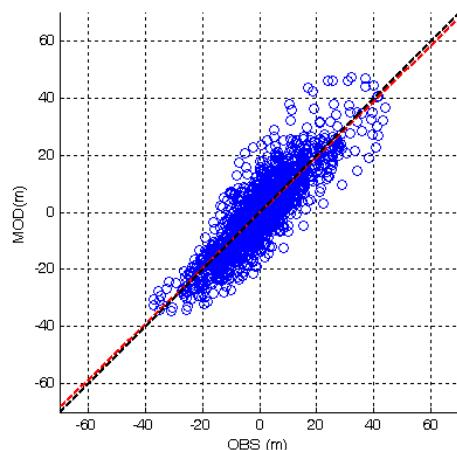
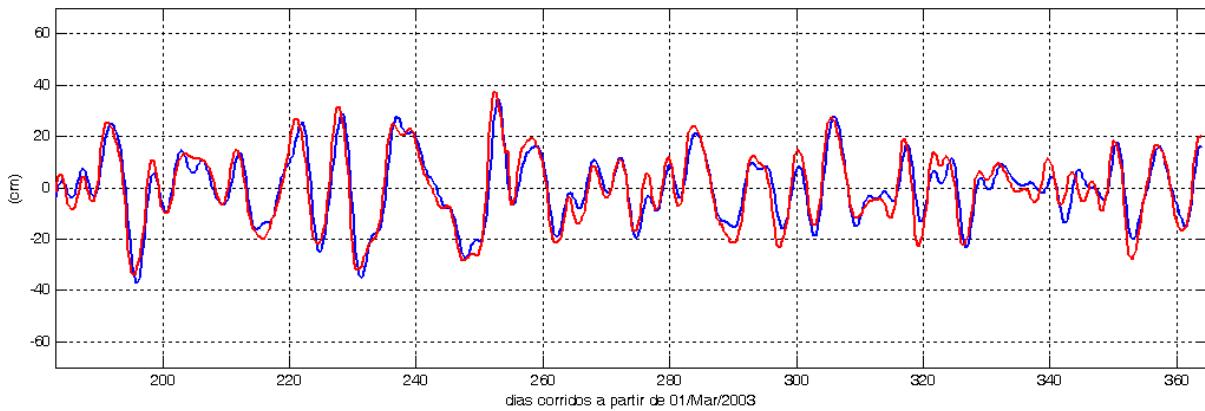
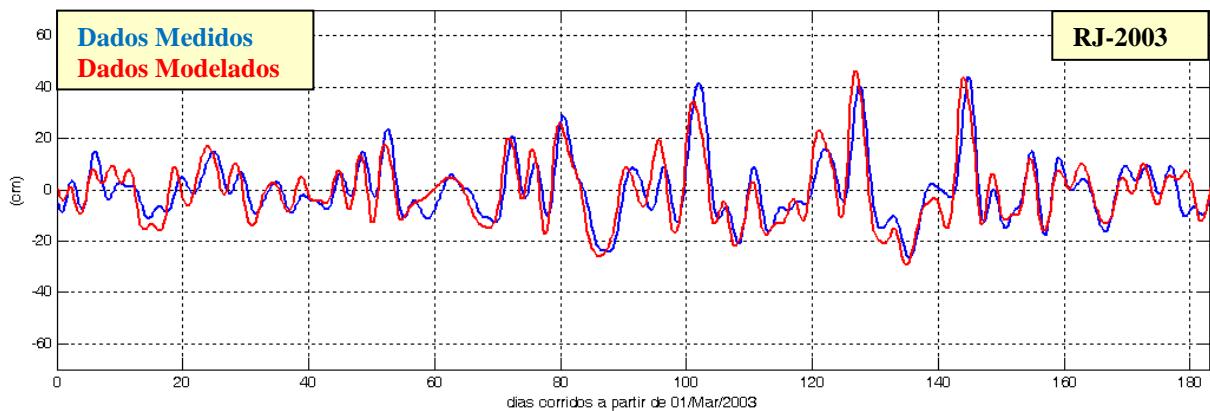


**Figura IV.33** - MM (total) medida em Imbituba durante o ANO (linha azul). Linha preta: parcela da MM devida exclusivamente a ação do vento

Com o arranjo adotado, o diagrama espaço-temporal a ser usado na solução pelo método das características no caso do Rio de Janeiro é análogo ao usado em Rio Grande e a figura (IV.30) pode ser usada diretamente simplesmente trocando os nomes dos sítios e atualizando os valores das distâncias e velocidades. Por simplificação a figura não será repetida.

Os resultados, com e sem a utilização do Barômetro Invertido, são mostrados na figura (IV.34) abaixo.

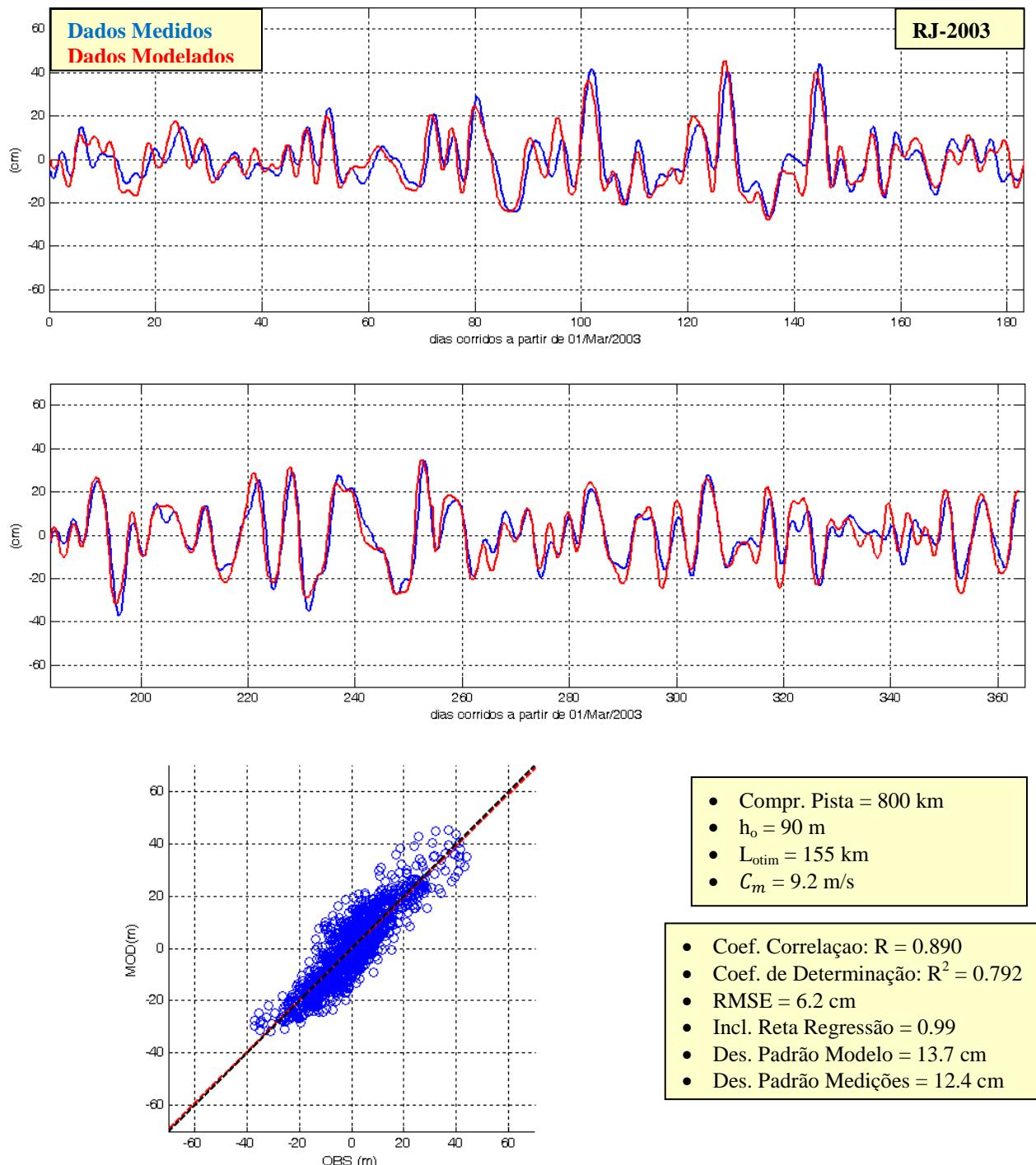
### Com Barometro Invertido



- Compr. Pista = 800 km
- $h_o = 90$  m
- $L_{\text{otim}} = 155$  km
- $C_m = 9.2$  m/s

- Coef. Correlação:  $R = 0.897$
- Coef. de Determinação:  $R^2 = 0.805$
- RMSE = 6.0 cm
- Incl. Reta Regressão = 0.99
- Des. Padrão Modelo = 13.6 cm
- Des. Padrão Medições = 12.4 cm

### Sem Barometro Invertido



**Figura IV.34** - Resultados do modelo Tipo 3 para Rio de Janeiro (ver figura para detalhes)

Analizando os resultados, verifica-se que, mesmo padecendo do mesmo tipo de imprecisões que afligiram Rio Grande, quais sejam, condição inicial prescrita a partir de medições feitas (65 km) fora de posição e possíveis erros na prescrição do campo de ventos pelo NCEP/NOAA, o desempenho do modelo Tipo 3 no caso do Rio de Janeiro foi extraordinariamente melhor do que o conseguido com o modelo Tipo 2, para o *mesmo* campo de ventos.

Com efeito, houve uma melhora generalizada em todos os parâmetros estatísticos da modelação. Para o caso *com BI*, o coeficiente de determinação passou da faixa de 30% (Tipo 2) para a faixa de 80% (Tipo 3); o RMSE diminuiu de 10.2 cm (Tipo 2) para 6.2 cm (Tipo 3), a inclinação da reta de regressão passou de 0.33 (Tipo 2) para 0.99 (Tipo 3), praticamente atingindo o valor exato (1.00), o desvio padrão passou de 7.2 cm (Tipo 2) para 13.7 cm (Tipo 3), mais próximo do valor medido (12.4 cm).

Essa aplicação para o Rio de Janeiro demonstrou de forma *cristalina* a importância da MM de origem remota na composição da MM existente nesse trecho da costa brasileira, confirmando quantitativamente o que já havia sido antecipado na análise de ordem de grandeza das forçantes atmosféricas feita na seção IV.4.3.1.

Na verdade, se o coeficiente de determinação for interpretado como uma medida da parcela do fenômeno efetivamente explicada pelo modelo, é possível inferir que a MM no Rio de Janeiro, possui, em *média*, a seguinte composição aproximada:

- 30% é gerada entre Imbituba e Rio de Janeiro – dentro do chamado “South Brazilian Bight” (SBB).
- 50% tem origem remota, i.e., foi gerada a Sul do SBB.
- 20% não teve sua origem explicada pelo modelo (possivelmente pelas simplificações adotadas e/ou por imprecisões na definição das forçantes atmosféricas).

A mesma ideia aplicada a Rio Grande possibilita inferir que a MM nesse sítio tem a seguinte composição *média*:

- 50% é gerada entre Rio Grande e Mar del Plata.
- 30% tem origem remota, i.e., foi gerada a Sul de Mar del Plata
- 20% não teve sua origem explicada pelo modelo (idem).

É importante salientar que os percentuais acima correspondem a valores médios anuais portanto, é perfeitamente possível (e esperado) que eventos *individuais* tenham composições diferentes da média.

A título de complemento, o Apêndice 9 apresenta algumas considerações sobre a possibilidade dos modelos Tipo 2 e Tipo 3 darem resultados próximos em alguns eventos específicos. O Apêndice 9 é útil também para ilustrar o método de integração usado.

Em retrospectiva, é interessante observar que o modelo Tipo 2 padece de uma escolha *arbitrária* no que concerne o comprimento da pista de vento que vai efetivamente participar na geração da MM a “montante” de um determinado ponto da costa brasileira. Já o modelo Tipo 3 *não* sofre desse problema pois a inclusão da MM no início da pista (de qualquer comprimento) como condição inicial funciona equivalentemente a um prolongamento “infinito” da pista. Adicionalmente, como essa informação provém de medições de campo, a MM remota assim introduzida corresponde *exatamente* à parcela que foi gerada fora da pista. Nessa ótica, o modelo Tipo 3 pode ser interpretado como um modelo Tipo 2 com pista “infinita”, otimizado.

As aplicações feitas deixaram claro o potencial que o modelo Tipo 3 tem para previsões operacionais precisas da MM na costa brasileira. O ganho de precisão, entretanto, requer que se disponha de medições de nível do mar em tempo real em pontos estratégicos da nossa costa, uma providência que pode ser conseguida aproveitando a infraestrutura da rede maregráfica já existente.

Supondo que tais medições estejam disponíveis uma última questão se coloca: seria possível conceber uma forma simplificada do modelo Tipo 3 que permitisse uma estimativa da MM num ponto a “montante” do local de medição *sem* utilizar explicitamente as forçantes atmosféricas ? Esse é o tema do modelo Tipo 4 apresentado a seguir.

#### IV.4.4 – Modelo Tipo 4 : MM tipo “Ondulação” com Taxa de Transformação Constante

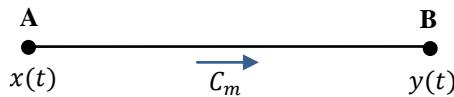
Os resultados apresentados na seção anterior indicaram que a MM existente num determinado local da costa brasileira é significativamente afetada por efeitos remotos e, ainda, que o vento “local” atua muito mais no sentido de alterar a MM que já está se propagando pela plataforma continental do que em gerar uma componente que se move em fase com o deslocamento da pista. O modelo apresentado nessa seção fundamenta-se nessas ideias e considera que a MM na nossa costa tem um comportamento similar ao de uma ondulação (“swell”) que é transformada pelo vento “local” por ocasião de sua passagem.

Assim, o modelo considera que a MM na costa S/SE brasileira pode ser prevista num determinado local a partir do conhecimento da amplitude da MM num sítio mais a Sul e da velocidade (média) de propagação da mesma entre os dois pontos. Adicionalmente, o modelo admite que a MM vai ser transformada durante a propagação e, ainda, que a taxa de transformação vai se manter *constante*, independentemente das condições locais de vento e pressão atmosférica.

Esse tipo de modelo é totalmente baseado em medições de campo e não envolve (explicitamente) teorias hidrodinâmicas. O modelo, obviamente, requer informações sobre a componente remota da MM obtida de medições num sítio a Sul do ponto de interesse e, também, de medições da MM prévias (e simultâneas às do sítio a Sul) feitas no próprio local as quais serão usadas para a determinação da velocidade de propagação e da taxa de transformação.

O método é bastante simples e será descrito a seguir.

Consideremos dois pontos **A** e **B** localizados num determinado trecho de costa sujeito a uma MM que se move sobre a plataforma continental adjacente com velocidade  $C_m$  no sentido de **A** para **B**, conforme ilustrado na figura abaixo.



Os funções  $x(t)$  e  $y(t)$ , indicadas na figura, correspondem às MM’s observadas nos pontos **A** e **B**, respectivamente.

Partindo da ideia que fundamenta o modelo, é possível interpretar a MM no ponto **B** [ $y(t)$ ] como sendo uma versão defasada e (linearmente) modificada da MM no ponto **A** [ $x(t)$ ]. Com isso, a seguinte relação entre as MM’s nos dois sítios pode ser estabelecida:

$$y(t) = \alpha x(t - \tau_o) \quad (\text{IV. 19})$$

onde  $\alpha$  é um coeficiente (*constante*) global de transformação (a princípio, de atenuação ou amplificação) e  $\tau_o$  é a defasagem que maximiza a correlação entre os sinais, ambos a ser determinados a partir dos dados,

De acordo com Bendat e Piersol (2003) pg 117, o coeficiente de transformação entre os dois “sinais” é dado por:

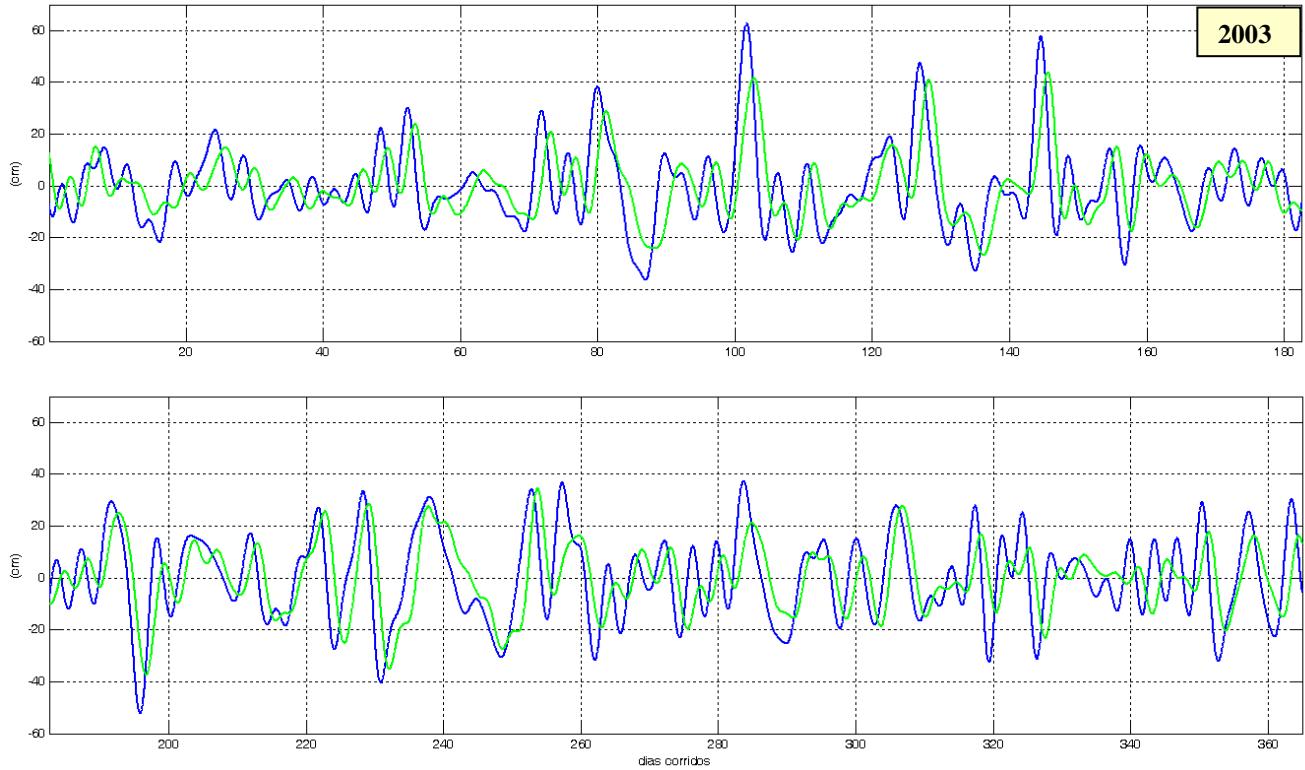
$$\alpha = \rho_{xy}(\tau_o) \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \quad (\text{IV. 20})$$

Onde,  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  correspondem a raiz quadrada do valor médio quadrático de  $x$  e  $y$ , respectivamente, e  $\rho_{xy}$  é a função de covariância cruzada normalizada entre os dois sinais.

O modelo é aplicado, inicialmente, ao Rio de Janeiro, onde o modelo tem mais chances de funcionar bem, e, a seguir, a Rio Grande.

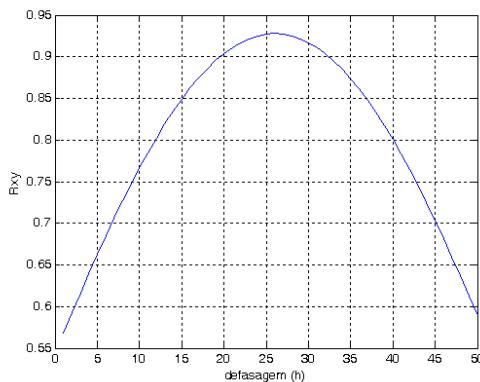
#### IV.4.4.1 - Determinação da Maré Meteorológica no Rio de Janeiro a partir exclusivamente de Medições em Imbituba

Para melhor ilustrar o método, iniciamos mostrando, na figura (IV.35), as séries temporais das MM's nos 2 locais, Imbituba e Rio de Janeiro, para o ano de 2003.



**Figura IV.35** – Séries temporais simultâneas para Imbituba (azul) e Rio de Janeiro (verde) para o ano de 2003

Como visto no Capítulo II, seção II.8.3, a determinação de  $\tau_o$  advém do cálculo da Covariância Cruzada Normalizada entre as MM's dos 2 locais, já realizado na referida seção [ver figura (II.19)] e reapresentado na figura (IV.36) por comodidade.

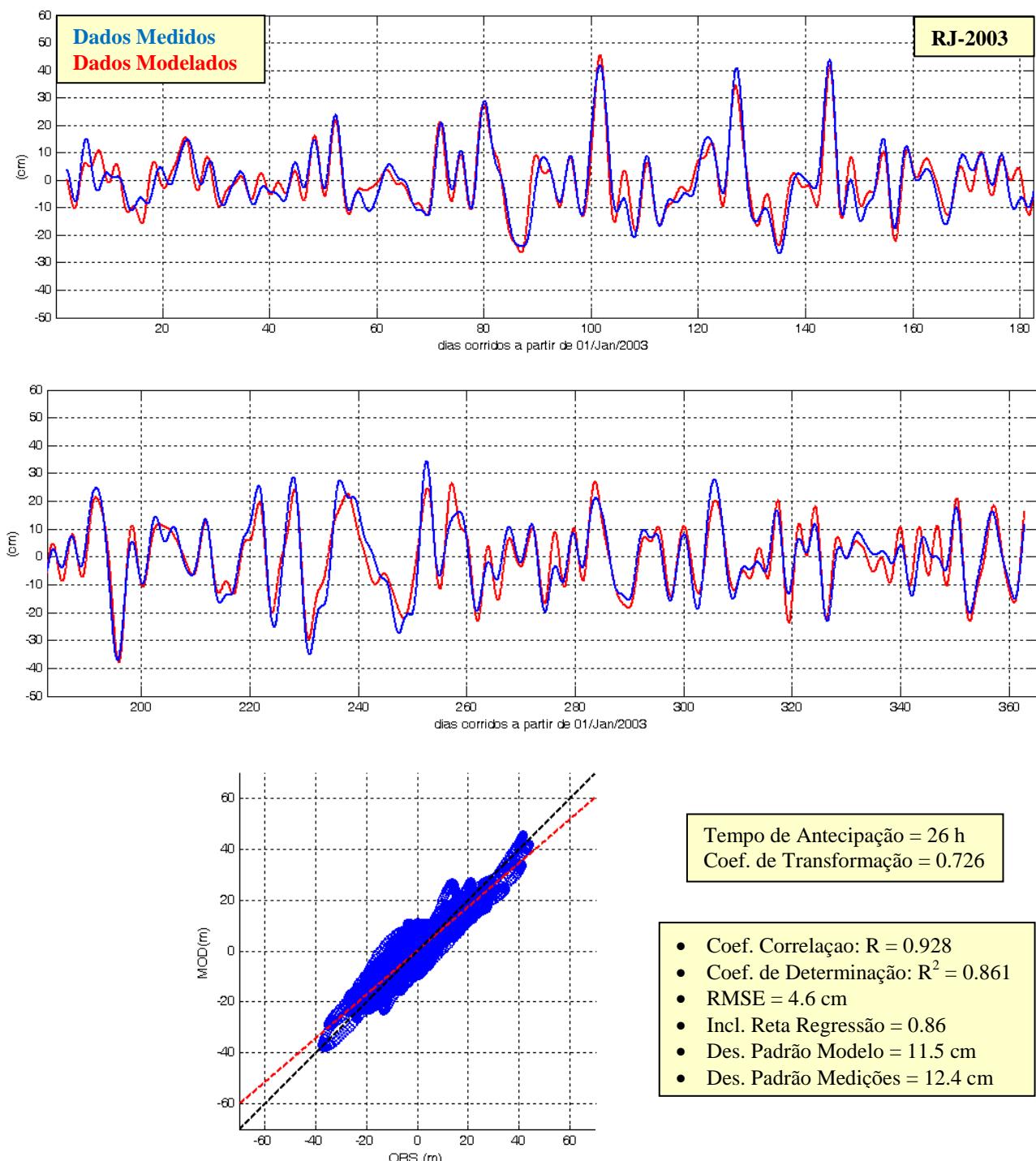


**Figura IV.36** – Função de covariância cruzada normalizada entre as MM's em Imbituba e Rio de Janeiro

Conforme já visto, o pico da função ocorre para uma defasagem  $\tau_o$  de 26 horas com uma correlação de 0.928. Resta determinar o coeficiente de transformação  $\alpha$  pela eq.(IV.20).

Para os valores relativos ao presente caso obtém-se  $\alpha = 0.7259$  (OBS.:  $\alpha < 1$  implica em atenuação).

Com  $\tau_o$  e  $\alpha$  conhecidos, a determinação da MM no Rio de Janeiro a partir da de Imbituba através da eq.(IV.19) é imediata e o resultado para o ano de 2003 é comparado com as medições na figura (IV.37).



**Figura IV.37** - Comparação dos resultados do modelo Tipo 4 (vermelho) com as observações (azul) para o Rio de Janeiro no ano de 2003. Diagrama de dispersão: Modelo Tipo 4 (MOD) x Medições (OBS).

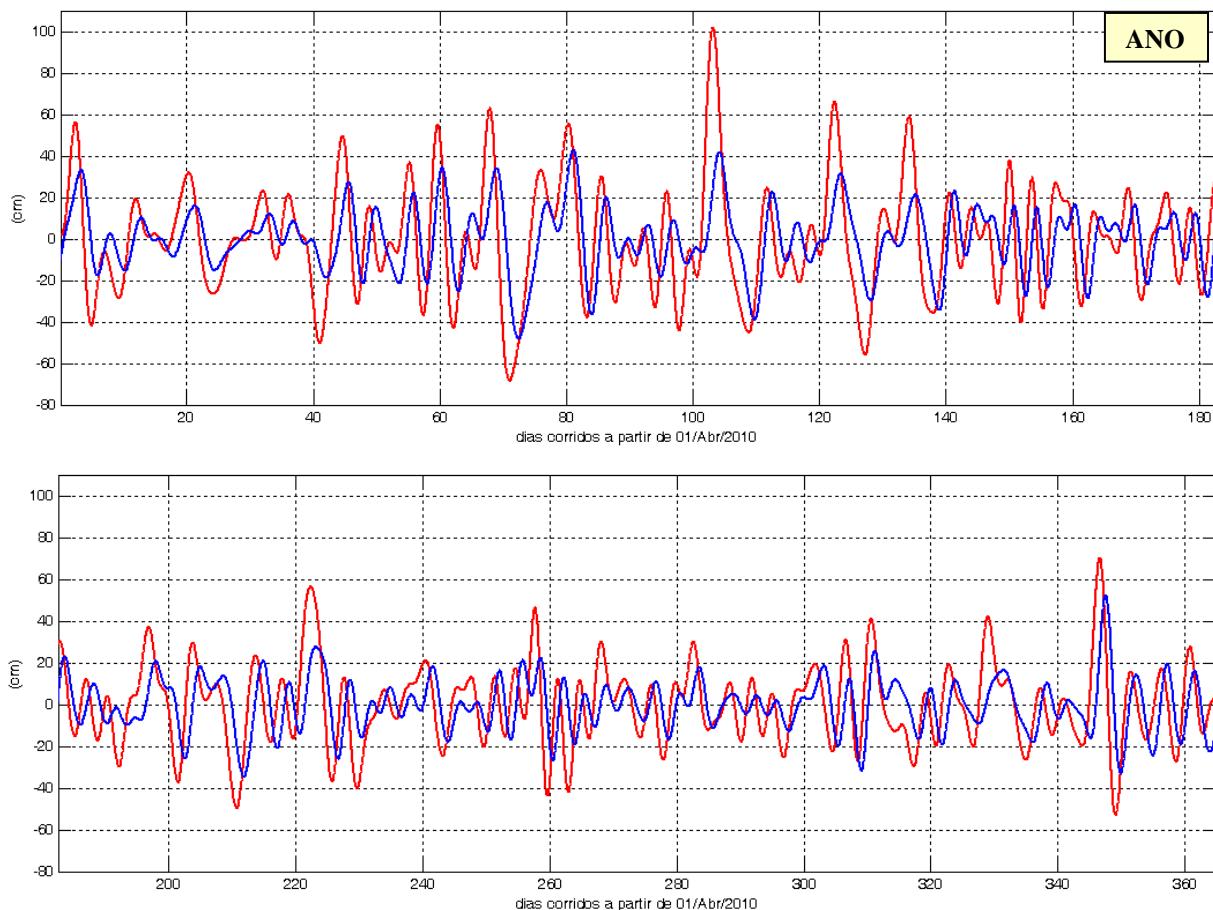
Os resultados indicam que o modelo Tipo 4 deu resultados surpreendentemente satisfatórios. Comparando com o modelo Tipo 3, o coef. de determinação no Tipo 4 chegou a 86% enquanto o Tipo 3 alcançou 81%. Nos demais parâmetros, o RMSE sofreu uma leve redução - 6.0 cm (Tipo 3) para 4.6 cm (Tipo 4), a incl. da reta de regressão piorou, caindo de 0.99 (Tipo 3) para 0.86 (Tipo 4) e o desvio padrão ficou em 11.5 cm (Tipo 4) enquanto o Tipo 3 forneceu 13.6 cm.

Admitindo que o comportamento da MM durante o ano de 2003 possa ser *extrapolado* para outros períodos, um método desse tipo poderia ser implementado de forma simples para se fazer uma previsão operacional expedita da MM no Rio de Janeiro com antecipação da ordem de 1 dia se medições de nível em tempo real estiverem disponíveis em Imbituba.

#### IV.4.4.2 - Determinação da Maré Meteorológica em Rio Grande a partir exclusivamente de Medições em Mar del Plata

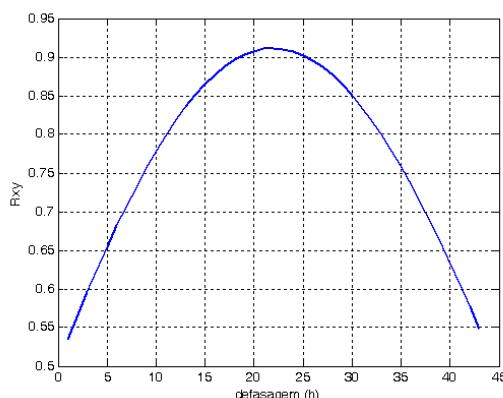
Os resultados obtidos entre Rio de Janeiro e Imbituba são encorajadores para se tentar usar o modelo em locais onde a força local não seja tão pequena, como é o caso da costa Sul do Brasil. Essa seção apresenta o resultado da determinação da MM em Rio Grande a partir da MM em Mar del Plata pelo modelo Tipo 4.

Iniciamos, novamente, mostrando, na figura (IV.38) as séries temporais (simultâneas) das MM's nos 2 locais: Mar del Plata e Rio Grande para o ANO.



**Figura IV.38** – Séries temporais simultâneas para Mar del Plata (vermelho) e Rio Grande (azul) para o ANO

O resultado do cálculo da covariância cruzada normalizada entre as MM's nos dois locais foi também feito na seção II.8.3 e está reapresentado na figura (IV.39) por comodidade.



**Figura IV.39** – Função de covariância cruzada normalizada entre as MM's em Mar del Plata e em Rio Grande

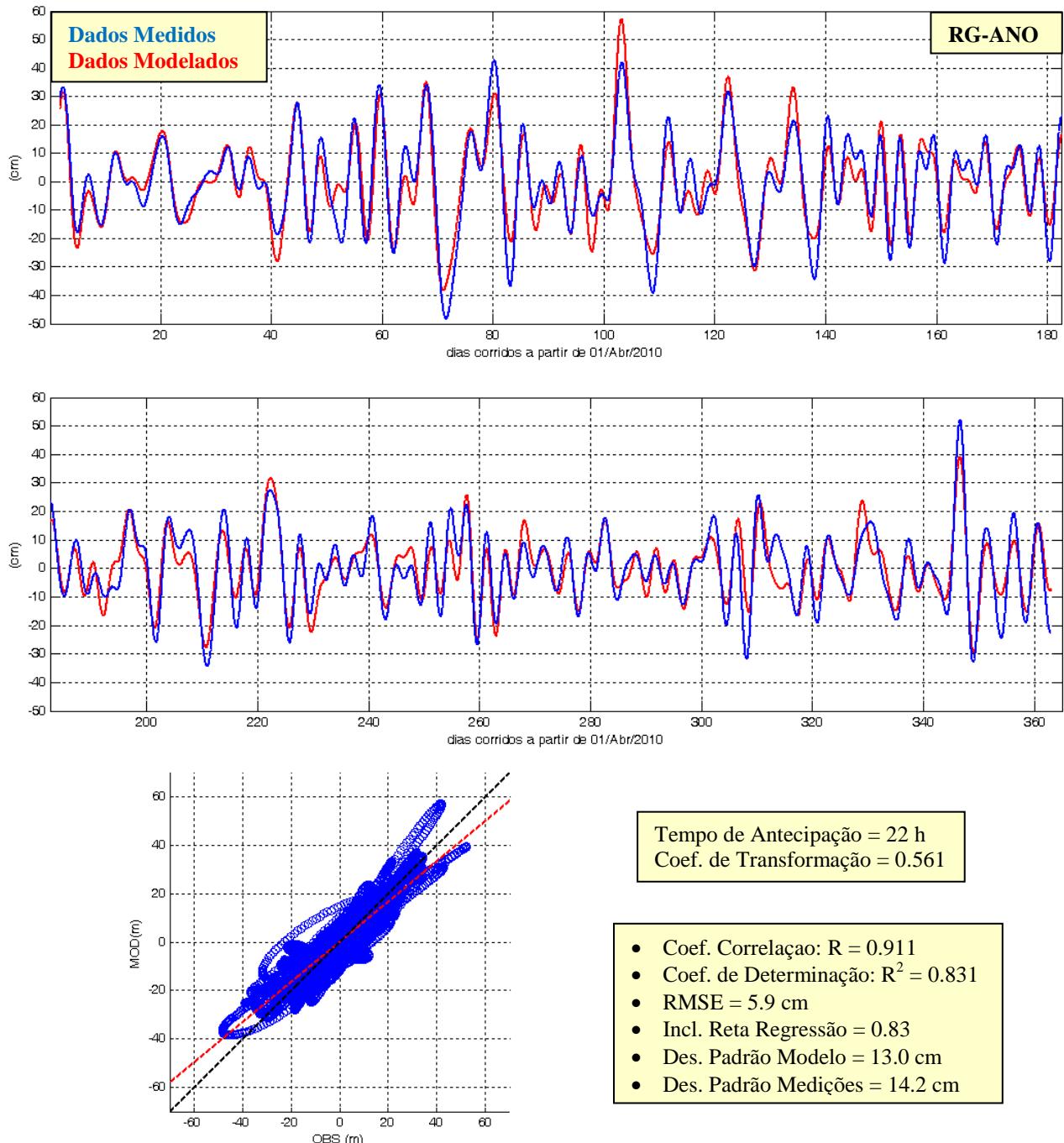
O pico da função ocorre para uma defasagem  $\tau_o$  de 22 horas com uma correlação de 0.9114, conforme já visto no capítulo II, figura II.19.

Admitindo novamente que a MM em Rio Grande [y(t)] seja uma versão defasada e (linearmente) modificada da MM em Mar del Plata [x(t)], o modelo Tipo 4 estabelece que:

$$y(t) = \alpha x(t - \tau_o) \quad (\text{IV. 19 - bis})$$

Usando o mesmo procedimento da seção anterior para determinar o coeficiente de transformação obtem-se  $\alpha = 0.5606$ .

A determinação da MM em Rio Grande a partir de Mar del Plata pelo modelo é comparada com as medições na figura (IV.40).



**Figura IV.40** – Similar a figura (IV.37) para Rio Grande.

Os resultados são ainda muito satisfatórios uma vez que o modelo alcançou uma capacidade previsiva com coeficiente de determinação de 83%. Comparando com o modelo Tipo 3, o coef. de determinação lá alcançou o valor de 80%. Nos demais parâmetros, o RMSE sofreu uma leve redução: 8.4 cm (Tipo 3) para 5.9 cm (Tipo 4), a incl. da reta de regressão passou de 1.15 (Tipo 3) para 0.83 (Tipo 4) e o desvio padrão ficou em 13.0 cm (Tipo 4) enquanto o Tipo 3 forneceu 18.3 cm

Admitindo que o comportamento da MM durante o ANO possa ser *extrapolado* para outros períodos, um método desse tipo poderia ser implementado para prever a MM de forma expedita em Rio Grande com antecipação da ordem de 1 dia se medições de nível em tempo real estiverem disponíveis em Mar del Plata.

#### **IV.4.4.3 - Discussão dos Resultados**

O primeiro aspecto a se considerar é que o modelo Tipo 4 é, em essência, semelhante ao modelo Tipo 3 pois, como neste último, a MM no ponto inicial é propagada com velocidade  $C_m$  até o ponto final. A diferença jaz no fato de que o modelo Tipo 4 admite uma taxa de transformação da MM *constante* ao passo que no Tipo 3 essa taxa é variável e determinada em função das forçantes atmosféricas e do atrito ao longo da pista. Os resultados levemente superiores do modelo Tipo 4 em relação ao Tipo 3 podem ser explicados pelo seguinte:

Primeiramente, como as medições de MM são horárias, o modelo Tipo 4 tem resolução igualmente horária. Essa característica permite definir a MM no ponto inicial da pista no modelo Tipo 4 de maneira mais precisa do que no modelo Tipo 3, pois, como visto, a resolução do campo de vento de 6 horas do NCEP/NOAA forçou uma adaptação do comprimento da pista o qual introduziu um pequeno erro na prescrição da MM no ponto inicial no modelo Tipo 3.

Em segundo lugar, como o modelo Tipo 4 não usa nenhuma informação sobre os ventos ao longo da pista, o modelo fica imune a eventuais imprecisões nesse importante parâmetro. Aparentemente, o que poderia ser uma deficiência parece ter se transformado numa vantagem. Isso pode ser explicado pelo comportamento geral do vento de tornar-se mais ameno a medida que se adentra em território brasileiro. O uso de uma taxa de atenuação constante obtida dos dados parece capturar essa atenuação geral do vento de forma surpreendentemente precisa vindo daí a qualidade da previsão obtida.

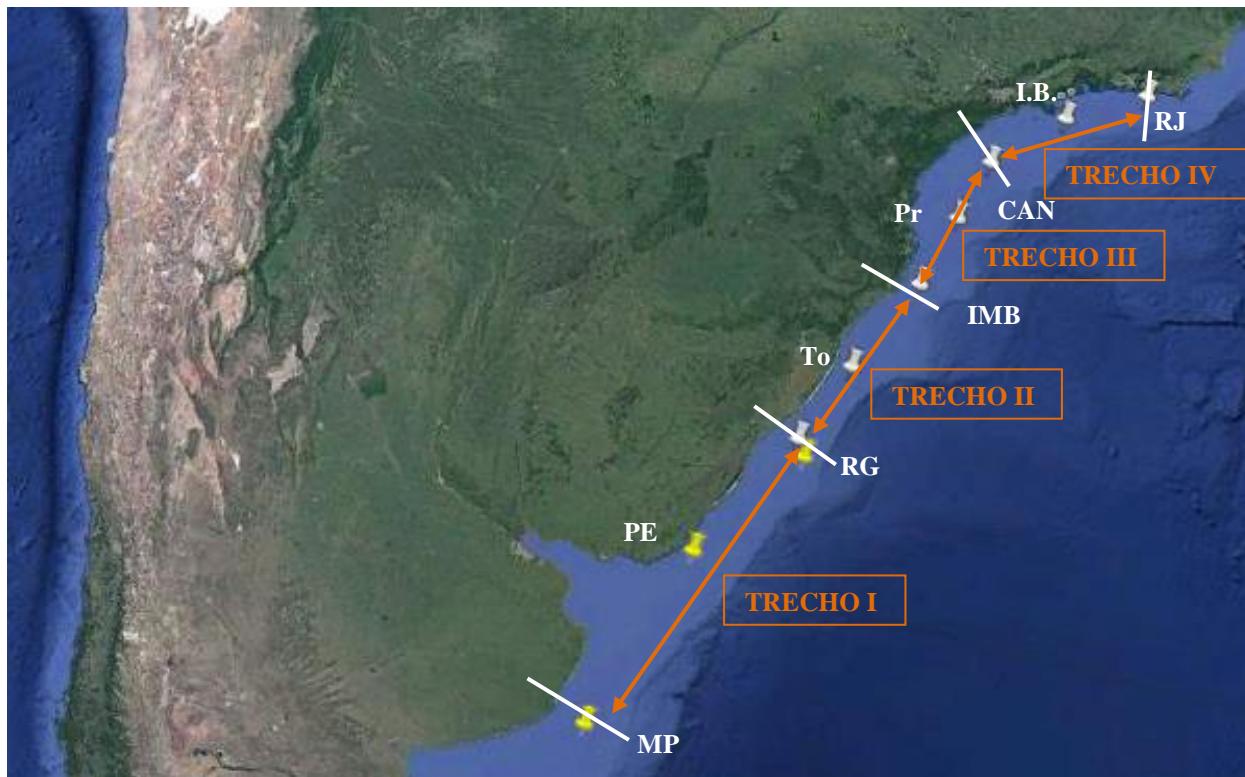
Entretanto, observando atentamente os resultados do modelo Tipo 4, verifica-se que em várias situações ainda há erros residuais que, certamente, tem relação com a hipótese de uma MM com transformação com taxa constante entre os dois sítios, uma questão que não tem como ser aperfeiçoada. É opinião desse autor que uma melhora na prescrição do campo de vento (incluindo um aumento de resolução temporal) tornaria o modelo Tipo 3 mais preciso do que o Tipo 4.

Uma precaução que deve ser tomada no uso do modelo Tipo 4, importante para aplicações práticas, está no fato de que o coeficiente de transformação obtido para o ano de 2003 pode não ser válido para outros períodos. De fato, a variabilidade anual intrínseca do fenômeno da MM, já verificada na seção II.6, sugere que o coeficiente de transformação pode ter variação significativa de ano para ano. Esse aspecto, entretanto, poderia ser contornado em aplicações práticas através de uma atualização do cálculo do coeficiente de transformação a medida que novos dados forem sendo coletados.

#### **IV.4.4.4 - Nota sobre a Ampliação do Tempo de Antecedência da Previsão**

Um aspecto um tanto frustrante do método de previsão da MM usando modelos hidrodinâmicos simplificados é o pouco tempo de antecedência da previsão que se consegue (da ordem de 1 dia). De modo geral, esse tempo de antecedência poderia ser ampliado por meio do uso de pistas mais longas no modelo Tipo 3.

No caso da costa brasileira, uma possibilidade seria usar os locais estudados no presente trabalho para delimitar trechos da costa onde o modelo poderia ser implementado de forma *acoplada* conforme sugerido na seção III. 8. A figura (IV.41) ilustra graficamente a divisão da costa S/SE brasileira em quatro trechos.



**Figura IV.41** - Divisão da costa S/SE brasileira em trechos para aplicação do modelo Tipo 3 de forma acoplada.

Os trechos estão resumidos na tabela IV.4 abaixo

**Tabela IV.4** - Trechos que poderiam ser usados de forma acoplada para a previsão da MM pelo modelo Tipo 3

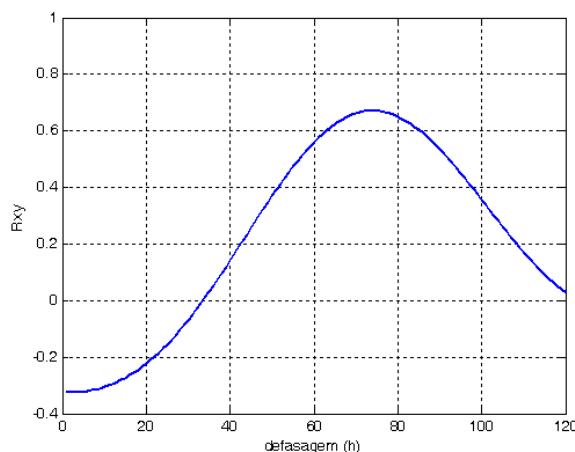
Trecho	Fronteiras	Ponto intermediário
I	Mar del Plata - Rio Grande	Punta del Este
II	Rio Grande - Imbituba	Torres
III	Imbituba - Cananeia	Paranaguá
IV	Cananeia - Rio de Janeiro	Ilha Bela

Assim, medições da MM em Mar del Plata forneceriam a informação inicial sobre a MM de origem remota e a aplicação do modelo Tipo 3 em cada trecho de forma acoplada encarregar-se-ia de incluir o efeito atmosférico *local*.

Como visto, os dados de Mar del Plata são essenciais para a previsão em Rio Grande e, no caso desse sítio gaúcho não haveria como ampliar o tempo de previsão com esse esquema, porém, para os outros locais mais a Norte um aumento de antecipação seria viável. Em particular, a previsão da MM no Rio de Janeiro poderia se beneficiar dessa extensão da pista. Obviamente, a precisão dos resultados da previsão de MM para pistas mais longas e maior tempo de antecedência vai depender da qualidade da previsão das forçantes atmosférica que for usada.

O método acima não foi tentado no presente trabalho. Em lugar disso, optou-se por avaliar a viabilidade da ideia através do uso do modelo Tipo 4 fazendo a determinação da MM no Rio de Janeiro a partir exclusivamente de medições em Mar del Plata, conforme mostrada na sequência dessa seção.

Usando dados para o ANO, o resultado do cálculo da covariância cruzada normalizada entre as MM's dos dois locais, também feito na seção II.8.3, está reapresentado na figura (IV.42) por comodidade.

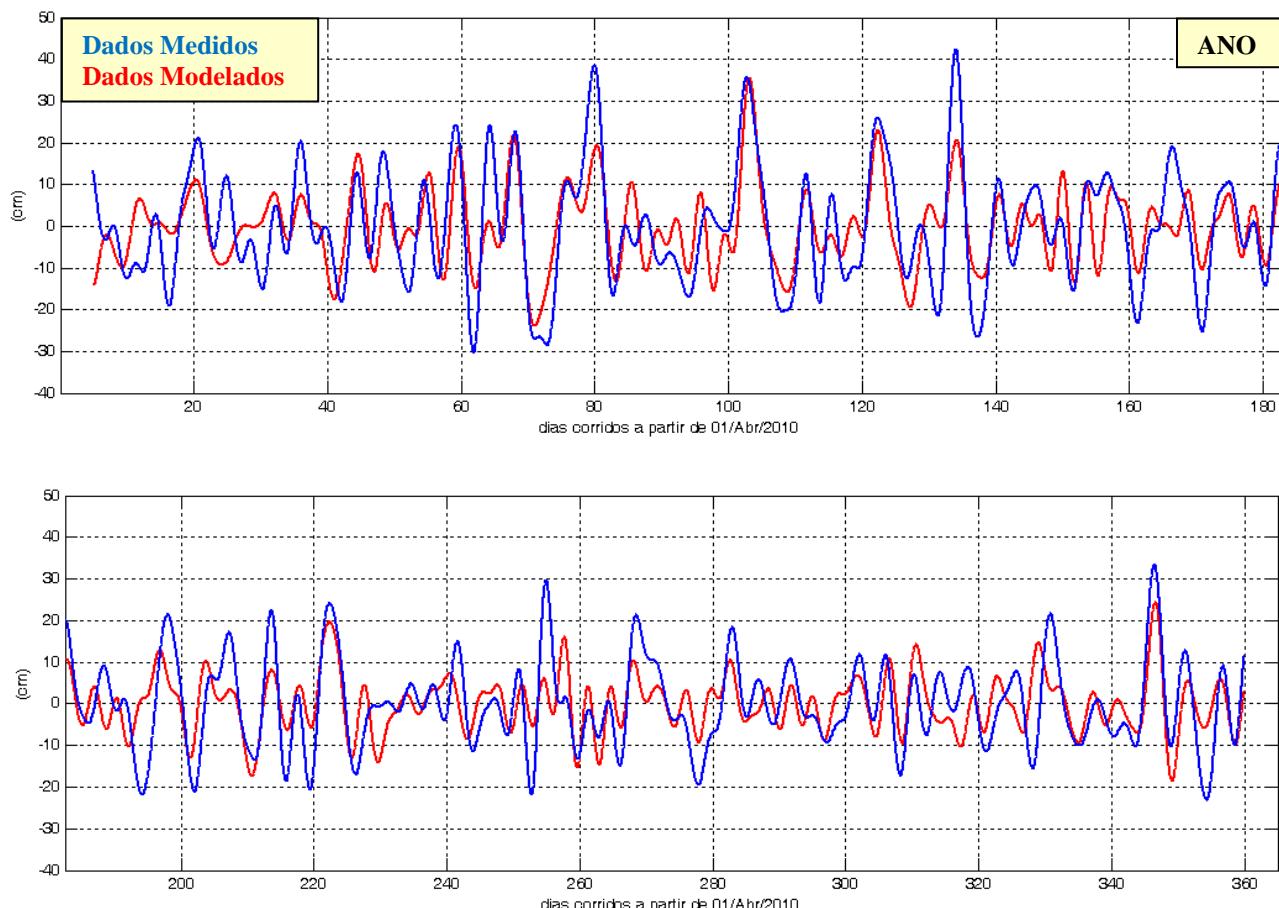


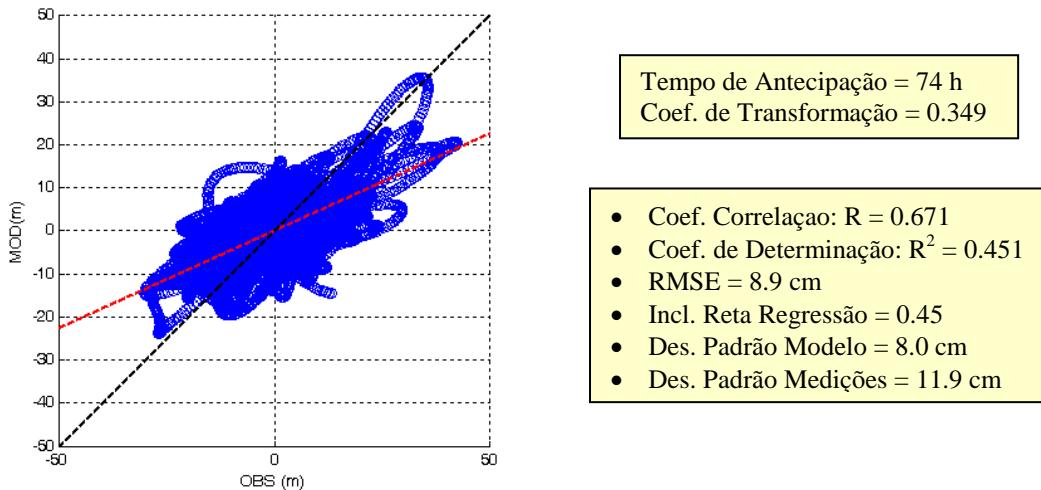
**Figura IV.42** - Função de covariância cruzada normalizada entre as MM's em Mar del Plata e Rio de Janeiro

O pico da função ocorre para uma defasagem  $\tau_o$  de 74 horas com uma correlação de 0.6714, conforme já visto no capítulo II, figura II.19.

O mesmo procedimento utilizado na seção IV.4.4 foi usado para a determinação do coeficiente de proporcionalidade do modelo resultando em  $\alpha = 0.3490$ .

A determinação da MM no Rio de Janeiro a partir de Mar del Plata pelo modelo é comparada com as medições na figura IV.43.





**Figura IV.43** - Comparação dos resultados do modelo Tipo 4 (**vermelho**) com as observações (**azul**) para o Rio de Janeiro. Painéis superiores: séries temporais. Painel inferior: diagrama de dispersão entre os resultados do modelo (MOD) e as medições (OBS).

Analizando o resultado verifica-se que o aumento da distância entre os dois sítios realmente aumentou o tempo de antecipação do modelo, que passou de 26 horas (usando Imbituba como ponto inicial) para 74 horas, mas impactou negativamente a qualidade dos resultados causando uma perda de precisão em relação às outras aplicações. Mesmo assim, o coeficiente de determinação (compto anual) nesse caso ficou em 0.45, resultado comparável ao melhor valor obtido com o modelo Tipo 1 para o Rio de Janeiro.

O que se pode concluir dessa análise é que o aumento do tempo de previsão, apesar de possível, vai necessariamente trazer uma perda significativa na precisão. Talvez o melhor procedimento seria fazer uma combinação das duas previsões e usar a previsão de longo alcance (ordem de 3 dias, nesse caso) como uma primeira estimativa indicando a faixa de erro esperada e, a seguir, usar a previsão de duração mais curta (1 dia) como correção, com faixa de erro muito menor.

## IV.5 - Explorando a Teoria

As modelos simplificados para a MM são agora utilizados de forma qualitativa para entender algumas questões importantes que as medições na natureza explicitaram.

Uma primeira questão diz respeito à *amplificação* da MM em Cananeia. O primeiro aspecto a se observar é o papel crucial que a velocidade de propagação da MM ( $C_m$ ) desempenha na determinação da *amplitude* da MM.

De forma simples, a amplitude da MM é controlada pela Corrente Costeira ( $V_o'$ ) associada a ela, a qual, por sua vez, resulta do balanço entre a tensão do vento, que tenta acelerar a água, e o atrito com o fundo, que funciona como um freio para a corrente. O resultado desse balanço é expresso pela solução da eq.(IV.11) que possibilita determinar a Corrente Costeira para a situação de vento existente. Uma vez calculada essa corrente, a MM correspondente é determinada pela relação :

$$(\eta'_o)_w = \frac{C'_*}{g} V_o'$$

a qual depende diretamente da velocidade de propagação  $C'_*$ , ou seja, para um mesmo valor de  $V_o'$  a MM será tão maior quanto maior for  $C_m$ . Portanto, a MM terá a tendência de se amplificar em trechos de plataforma onde a MM se propaga mais rapidamente, o caso em Cananeia, como já adiantado no Cap.III.

*Porque a MM move-se mais rapidamente em Cananeia ?* Ora, como visto na seção IV.2, no caso de plataformas que se assemelhem a um “degrau”, o parâmetro chave no controle da velocidade de propagação da MM é a *largura* da plataforma continental. Como se pode verificar nos cortes batimétricos da figura IV.2, a plataforma continental em Cananeia sofre um alargamento considerável em relação a locais a Sul e a Norte. Considerando que a variação de latitude é pequena na região,

o *alargamento* da plataforma pode ser entendido como o agente responsável pela aceleração e, consequentemente, pela amplificação de amplitude da MM observada na região.

Uma segunda questão diz respeito à *diminuição drástica da MM na costa NE/N brasileira* observada nas medições. Como explicar tal comportamento? A resposta a essa questão pode ser também extraída dos resultados teóricos apresentados. Na verdade, a questão se desdobra em duas: *porque tanto MM's de origem remota quanto aquelas oriundas da forçante local ficam tão diminutas mais a Norte na costa brasileira?*

Iniciando pela MM de origem remota, o motivo, novamente, reside na largura da plataforma. Com efeito, é fato notório que a plataforma continental brasileira sofre um enorme estreitamento a Norte da região sul da Bahia, assumindo uma largura da ordem de apenas 30 km em toda a região NE brasileira. [ Esse aspecto fica ainda mais evidente se lembrarmos que a largura que efetivamente conta deve ser medida, não em km, mas como fração do raio de deformação local o qual aumenta com a diminuição de latitude ]. Ora, ao contrário do caso de Cananeia, uma plataforma excessivamente estreita vai diminuir a velocidade e a amplitude da onda de plataforma tornando a MM remota bastante tênue. Uma plataforma estreita também inibirá o desenvolvimento da MM de origem local.

Além da estreiteza da plataforma, existe ainda a questão da latitude. De fato, como fartamente demonstrado nesse trabalho, o fenômeno da MM deve sua existência à rotação da Terra. Como em baixas latitudes a força de Coriolis decresce de magnitude o efeito da rotação torna-se mais e mais tênue à medida que nos aproximamos do equador. Esse é o fator que explica a inexistência de MM na costa Norte brasileira.

O caso da costa do Ceará é particularmente interessante pois ali a plataforma continental tem uma largura razoável (em km) e o regime de ventos (Alíseos) existente tende a produzir ventos com direção predominantemente paralela à costa. Mesmo assim, não há sinal de MM no Ceará, conforme se viu nos dados de Fortaleza, *porque?* Ora, Fortaleza está a 4° de latitude e, portanto, o ingrediente principal do fenômeno, a força de Coriolis, é por demais fraca para que qualquer MM se desenvolva.

Outra questão que chamou a atenção é: *Porque a MM em Mar del Plata é tão grande?* Mesmo estando fora do escopo do presente trabalho, o autor se debruçou rapidamente sobre essa questão.

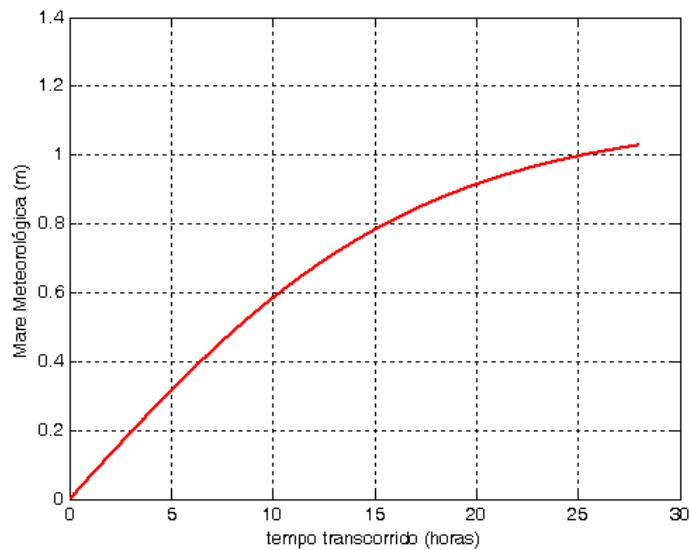
Pelo que foi visto no Capítulo III, a teoria prevê a possibilidade de MM's de grande amplitude no caso de um vento móvel no qual a componente da velocidade de deslocamento do campo de vento ao longo da linha de costa seja igual à velocidade de propagação da MM. Essa é a condição de ressonância vista na seção III.3.4.3.5.

Nessa ótica, não se pode descartar que a resposta à questão acima tenha relação com a possibilidade da MM estar numa condição próxima a condição de ressonância em Mar del Plata. Uma análise desse assunto requereria um estudo específico mas uma análise qualitativa simplificada das condições na costa sul argentina sugere que essa condição de ressonância possa estar acontecendo em Mar del Plata.

O primeiro argumento está na existência de uma plataforma continental larga e extensa a sul de Mar del Plata a qual possibilita o desenvolvimento da MM desde a Patagônia. Em segundo lugar, é fato bem sabido que a velocidade de deslocamento dos sistemas atmosféricos na região tem componente de S para N e, portanto, o quesito de que o campo de vento e a MM tenham o mesmo sentido de deslocamento é atendido. Restaria verificar se o módulo da componente da velocidade de deslocamento do campo de vento *ao longo da linha de costa* é igual (ou próxima) à velocidade de propagação da MM – essa é a condição de ressonância.

Ora, a ordem de grandeza da velocidade de propagação da MM desde a Patagonia até Mar del Plata é de 10 a 15 m/s, se essa velocidade for próxima ao valor da *componente ao longo da costa* da velocidade de avanço dos sistemas atmosféricos os ingredientes favoráveis à ressonância estariam presentes no caso da costa argentina.

A ordem de grandeza da amplitude máxima esperada no caso de ressonância pode ser também estimada a partir da teoria desenvolvida no Capítulo III. Como visto na seção III.4.4.2, o tempo de duração do vento será o fator limitador da MM. Esse tempo deve corresponder ao tempo necessário para a MM se propagar desde o sul da Argentina até Mar del Plata, que, pelo visto no Capítulo I é de 28 horas (a partir de Puerto Deseado). Para estimar a ordem de grandeza, vamos considerar uma plataforma situada em 40° de latitude com profundidade de 100 m e largura de 150 km, sujeita a um vento (paralelo à costa) de 80 km/h atuando por 28 horas e calcular a evolução temporal da MM de acordo com a teoria apresentada na seção III.3.5.1.5.3. O resultado está mostrado na figura (IV.44) abaixo.



**Figura IV.44** – Avaliação da ordem de grandeza da MM para uma situação extrema na costa argentina (ver texto)

A *ordem de grandeza* da amplitude da MM para essa condição seria de 1 m valor compatível com as maiores MM's observadas em Mar del Plata.

# CAPÍTULO V

## Considerações Finais

### ÍNDICE

V.1 – Entendimento Físico do Fenômeno	
V.1.1 - Porque a MM é Móvel ? .....	268
V.1.2 - Explicação Alternativa sob a Ótica da Vorticidade do Escoamento .....	269
V.2 - Ampliando os Horizontes	
V.2.1 - Abrindo Mão da Ideia de uma Maré Meteorológica de Origem puramente Local na Costa Brasileira .....	271
V.2.2 - Maré Meteorológica e Ondas de Plataforma Continental: uma Associação Inevitável .....	272
V.3 - Nota sobre a Previsão da Maré Meteorológica no Brasil	
V.3.1 - Modelos Estatísticos .....	273
V.3.2 - Modelos Hidrodinâmicos Numéricos .....	273
V.3.3 - Modelos Hidrodinâmicos Simplificados .....	275
V.3.4 - Maré Meteorológica <i>versus</i> Nível do Mar .....	275
V.4 - Sugestão de Temas para Pesquisa .....	276
V.5 - Nota sobre o Uso da Palavra “Ressaca” no Brasil .....	277

### V. 1 - Entendimento Físico do Fenômeno

A maré meteorológica foi definida no presente trabalho como flutuações de nível do mar na costa com periodicidade entre 3 e 30 dias (banda de frequências entre 0.3 e 0.03 ciclos por dia) induzidas pela ação da pressão atmosférica e, principalmente, da tensão do vento sobre as águas da plataforma continental.

Pela faixa de frequências coberta, trata-se de um fenômeno de caráter *sub-inercial* o que torna de fundamental importância a participação da rotação da Terra (manifestada através da força de Coriolis) na dinâmica do processo. Esse fato introduz aspectos particulares ao fenômeno que precisam ser bem compreendidos.

O primeiro deles diz respeito ao fato de que a componente da tensão do vento responsável por induzir variações de nível na banda da MM é a *paralela* à costa, através do transporte de Ekman, e não a perpendicular. Esse aspecto é bem compreendido e dele advém o entendimento do mecanismo físico sobre a indução da MM pelo vento, também descrito no Capítulo I, com ventos do quadrante Sul tendendo a sobre-elevar o nível e os do quadrante N tendendo a rebaixar, ver figura (I.6). Todavia, apesar de correto em essência, uma outra questão crucial do fenômeno, menos conhecida, torna esse mecanismo fundamentalmente *incompleto* conforme antecipado no Capítulo I.

Como demonstrado no presente trabalho, tanto as observações na natureza quanto os resultados hidrodinâmicos mostram que, a medida que a MM (tanto positiva quanto negativa) se desenvolve, ela se desloca ao longo da costa – no caso brasileiro, de S para N. Portanto, a idéia de uma MM *estática* embutida no conceito acima está *equivocada*: a MM é *móvel* !

#### V.1.1 - Porque a MM é Móvel ?

Esse é um ponto crucial que precisa ser bem compreendido.

O primeiro passo para o entendimento almejado é perceber que existem, necessariamente, *correntes* associadas às variações de nível impostas pela MM. A componente normal à costa dessas correntes (da qual o transporte de Ekman é a principal parte), apesar de muito menor que a componente paralela, é essencial para deslocar o nível do mar da sua posição de repouso. A componente paralela à costa, por outro lado, é fundamental para controlar e limitar as variações de nível através da ação do atrito da água com o leito marinho.

A seguir, é necessário perceber que a corrente paralela à costa (ou, corrente costeira) criada pela MM é uma corrente *geostrófica* e, portanto, influenciada pela rotação da Terra. Correntes geostróficas dão-se num único sentido dependendo do hemisfério. No hemisfério Sul, correntes costeiras associadas a uma *sobre-elevação do nível* (MM positiva) dar-se-ão de forma tal que a costa esteja *sempre a sua esquerda* (na nossa costa, seria uma corrente com componente de S para N), enquanto correntes costeiras associadas a um *rebaixamento de nível* na costa (MM negativa), no hemisfério Sul, tem o sentido inverso, isto é, mantém a costa sempre a sua *direita* (na nossa costa, seria uma corrente com componente de N para S).

Considerando primeiramente o caso de uma MM positiva na costa brasileira, a medida que o nível se eleva em resposta ao aporte de água do transporte de Ekman, as correntes costeiras (geostróficas) de S para N associadas começam a retirar a água acumulada sob a protuberância e transferí-la para o Norte. Esse processo dá origem a uma “frente” de elevação móvel que se desloca ao longo da costa no mesmo sentido da corrente, ou seja, de S para N, mas com velocidade diferente. A velocidade de deslocamento, ou propagação, da protuberância é função das características da plataforma continental e da latitude local.

Para uma MM negativa, a medida que o nível é rebaixado e a água é expelida da costa para o mar aberto pelo transporte de Ekman, a corrente costeira, agora de N para S, começa a “sugar” a água que está a N originando uma frente de rebaixamento de nível que se desloca para o N ao longo da costa, com velocidade diferente da velocidade da corrente. A velocidade de propagação dessa frente é a mesma do caso anterior. Assim, tanto no caso de uma MM positiva quanto de uma negativa, a “perturbação” de nível ocasionada pela MM não se matém estática mas desloca-se obrigatoriamente para o Norte. Esse mecanismo foi estudado detalhadamente à luz da hidrodinâmica na seção III.4.3.1.3.

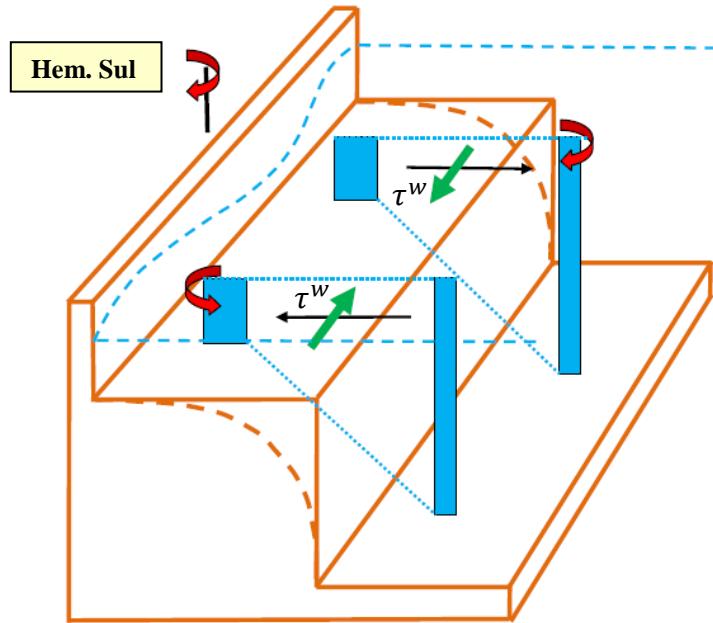
### V.1.2 - Explicação Alternativa sob a Ótica da Vorticidade do Escoamento

Uma maneira alternativa, um pouco mais envolvida, também pode ser usada para explicar porque a MM deve ser móvel. O mecanismo físico chave envolve o princípio da conservação de momentum angular, sempre muito útil para o entendimento físico do escoamento de fluidos em presença de rotação, e será explicado de forma simplificada a seguir [ inspirado em Gill (1982), pg 410 e 411, e Tomczak (2000) ].

Na ausência de atrito, a conservação de momentum angular – mais precisamente, de vorticidade potencial – aplicada ao escoamento associado à MM requer que colunas (imaginárias) de água sobre a plataforma continental mantenham seu *momentum angular* ou sua “*quantidade de rotação*” constante. A “*quantidade de rotação*” da coluna envolve duas parcelas: (a) uma relacionada à vorticidade do escoamento (que, por sua vez, relaciona-se a variações transversais do campo de velocidade) e outra (b) relacionada à rotação da Terra (ou, mais precisamente, à projeção do vetor rotação da Terra em relação à vertical local a qual depende da latitude do ponto).

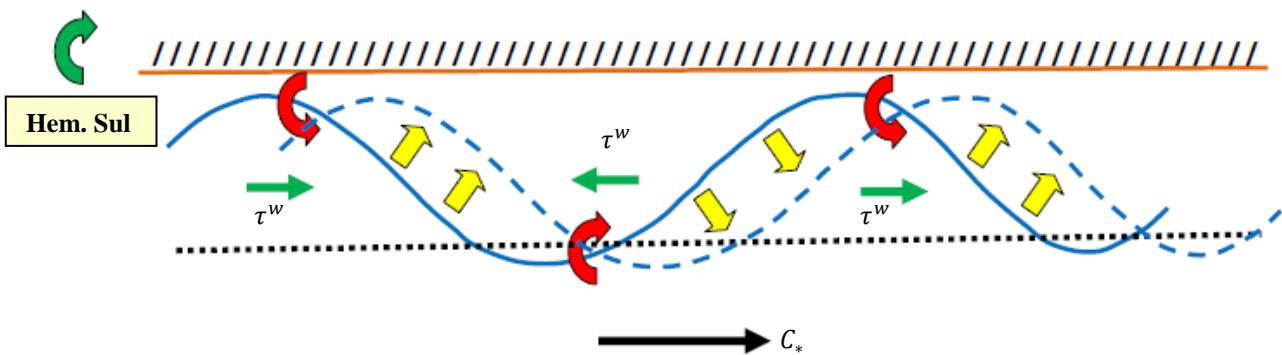
Ora, supondo que antes do vento iniciar a água esteja parada, as colunas possuem apenas a quantidade de rotação tipo (b) associada à rotação da Terra. Com um vento não uniforme atuando ao longo da costa, o transporte de Ekman vai mover a água perpendicularmente à costa alterando a forma das colunas d’água de modo a “esticar” e “estreitar” colunas que se movem em direção ao mar (MM negativa) e “achatando” e “alargando” colunas que se movem em direção à costa (MM positiva), conforme ilustrado na figura (V.1). Ocorre que uma modificação na *forma* da coluna d’água afeta seu momentum angular tipo (a), relacionado à vorticidade do escoamento, devido à redistribuição de massa que toma lugar. É interessante observar que o processo acima descrito independe da forma da plataforma continental ocorrendo tanto numa plataforma de fundo inclinado quanto numa plataforma tipo “degrau”.

Uma analogia com uma patinadora no gelo é útil para entender esse mecanismo. Inicialmente, a patinadora põe-se a girar com os braços abertos. A seguir, ela aproxima os braços e os ergue de modo a tomar uma forma mais alongada na qual sua distribuição de massa se aproxima do eixo de rotação. O resultado desse procedimento é surpreendente: ao aproximar e erguer os braços a velocidade de rotação da patinadora aumenta! Esse ganho de rotação vem da conservação do momentum angular que é definido como o produto da velocidade angular de rotação do corpo com seu momento de inércia, o qual, fisicamente, representa o modo como a massa está distribuída em relação ao eixo de rotação. Ao aproximar os braços e se “alongar”, a bailarina diminui seu momento de inércia e para conservar o momentum angular sua velocidade de rotação aumenta ao passo que ao abrir os braços e se “alargar” o oposto ocorre e sua velocidade de rotação diminui.



**Figura V.1** – Esquema das variações de vorticidade em colunas d’água imaginárias que compõem a MM movendo-se perpendicularmente à costa sobre a plataforma continental no hemisfério Sul

Voltando ao caso das colunas d’água, para conservar o momentum angular, as colunas que são esticadas devem ter sua velocidade de rotação aumentada em relação à situação inicial enquanto que as que são achatadas devem ter sua velocidade de rotação diminuída em relação a essa situação. No hemisfério Sul, o vetor rotação da Terra e suas projeções na vertical local tem sinal negativo, portanto a “quantidade de rotação” na condição inicial não-perturbada é negativa (sentido anti-horário, pela regra da mão direita) conforme indicado no parte superior da figura V.1. Colunas que se alongam devem aumentar sua velocidade de rotação, portanto, ganhar vorticidade negativa (sentido anti-horário) enquanto colunas que se achatam devem ganhar vorticidade positiva (sentido horário). Esse efeito está também representado graficamente na figura (V.1).



**Figura V.2** – Ilustração esquemática do movimento da água (setas amarelas) induzido pelas variações de vorticidade mostradas na figura V.1 . Válido para o hemisfério Sul.

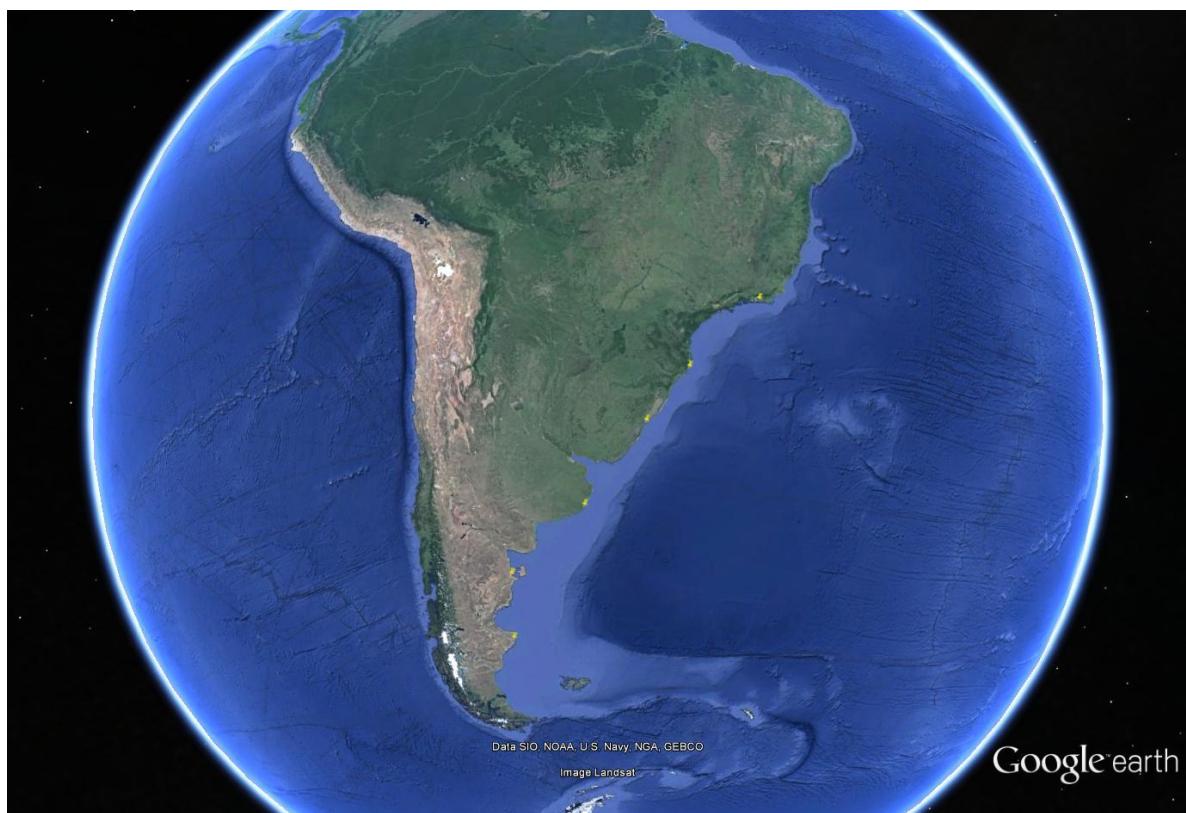
A figura (V.2) mostra o campo de vorticidade associado à MM juntamente com o movimento da água induzido, indicado pelas setas amarelas na figura. Com esse tipo de movimentação de água, a linha de colunas d’água perturbadas (linha azul contínua) deve se *move*r para o lado direito da figura assumindo a posição dada pela linha azul tracejada. Admitindo que a costa seja a costa brasileira, o sentido de deslocamento da perturbação deve manter a costa a sua esquerda, portanto, no sentido de S para N ao longo da costa. A velocidade de deslocamento, ou propagação,  $C_m$ , é, obviamente, exatamente a mesma mencionada na seção anterior a qual depende das características da plataforma continental e da latitude local.

## V.2 - Ampliando os Horizontes

Essa faceta móvel da MM nos força a ampliar nossa compreensão do fenômeno. Por exemplo, a possibilidade de MM's de origem remota, sem necessidade de vento local, torna-se algo perfeitamente possível. De fato se a perda de energia causada inexoravelmente pelo atrito da corrente com o fundo não for muito intensa, MM's geradas num certo ponto distante podem se propagar ao longo da plataforma continental (no sentido de S para N no nosso caso) atingindo locais onde o vento não atuou.

### V.2.1 - Abrindo Mão da Idéia de uma Maré Meteorológica de Origem puramente Local na Costa Brasileira

A costa brasileira faz parte da costa Leste do continente sul-americano a qual possui uma plataforma continental relativamente larga e rasa que se estende, ininterruptamente, desde o sul da Bahia até a Patagonia [ver figura (V.3)], numa faixa de latitudes intermediárias que garante a importância do efeito da rotação da Terra. Os sistemas meteorológicos que produzem os ventos, por sua vez, tem componente no mesmo sentido geral de deslocamento da MM (de S para N) adicionando mais um ingrediente favorável à equação. Assim, as condições básicas para que a MM se desenvolva e se propague por longas distâncias estão postas de uma maneira, talvez, não encontrada em nenhum outro local da Terra.



**Figura V.3 – Ilustração da extensão e da largura da plataforma continental na costa Leste da América do Sul. Observar grande estreitamento na costa Nordeste do Brasil**

Os dados apresentados no Capítulo II, na verdade, deixam poucas dúvidas sobre esse assunto: como visto, eventos de MM iniciados no sul da Argentina podem ser rastreados até o Sudeste do Brasil. De fato, tanto as observações na natureza quanto a modelação teórica feita mostram claramente que a MM em Rio Grande, por exemplo, é uma versão retardada e atenuada da MM em Mar del Plata. Da mesma forma, a MM no Rio de Janeiro guarda o mesmo tipo de relação com a MM em Imbituba, e assim por diante. Há indícios consistentes de que a MM em qualquer sítio da costa brasileira seja significativamente afetada por efeitos de origem remota provenientes do Sul. No Brasil, o vento local parece ter papel secundário no que concerne à geração da MM atuando mais no sentido de modificar “sinais” que já estão passando pela plataforma continental.

Essas constatações apontam no sentido de que o fenômeno da MM no Brasil não pode ser mais visto como um efeito puramente local. Nessa ótica, qualquer tentativa de relacionar a MM exclusivamente às forçantes atmosféricas locais estará fadada a ter sucesso limitado.

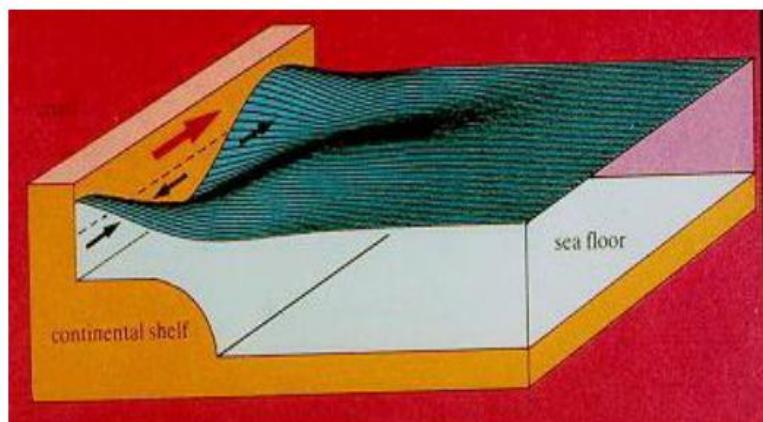
## V.2.2 - Maré Meteorológica e Ondas de Plataforma Continental: uma Associação Inevitável

As perturbações *móveis* que compõem a MM podem (devem) ser interpretada como *ondas* que se movem *ao longo* da plataforma continental e que obecem à mesma física descrita nas seções anteriores [ver figura (V.4) para uma ilustração esquemática do fenômeno]. Segundo Gill (1982) pag 409, essas ondas podem ser classificadas em 3 categorias:

- (i) Ondas de Kelvin – no caso de plataforma de profundidade constante, largura infinita e ladeada por uma parede vertical.
- (ii) Ondas de Plataforma Continental (“*Continental Shelf Waves*”) – no caso de plataforma com fundo inclinado e com águas homogêneas, e
- (iii) Ondas Costeiras Confinadas (“*Coastally Trapped Waves*”) – no caso de plataforma com fundo inclinado e com águas estratificadas.

Nesse ponto vale salientar que o presente trabalho permitiu ampliar um pouco essa classificação pois mostrou que plataformas de profundidade constante mas de *largura finita* suportam uma forma híbrida de onda que se assemelha à Onda tipo Kelvin, com um único modo possível, mas com velocidade normal à costa não nula e cuja velocidade de propagação é afetada pela rotação da Terra, como em Ondas de Plataforma Continental.

Existe uma *vasta* literatura sobre as ondas supracitadas, abordando tanto aspectos teóricos quanto observacionais [ver Mysak (1980) e Brink (1991) para revisões sobre o assunto e lista de referências]. Variações de nível e de correntes de caráter sub-inercial na plataforma continental, associadas a ondas desse tipo tem sido detectadas em várias regiões, como na costa da Austrália [Freeland et. al. (1986) e Church et. al. (1986a e b)], África do Sul [ Schumann e Brink (1990), Cuevas, Brundrit e Shipley (1986) ], costa oeste das Américas [Brink (1982), Enfield e Allen (1983)], dentre outras.



**Figura V.4** – Desenho *esquemático* de uma onda de plataforma continental. Fonte: Tomczak (2000)

Como antecipado no Capítulo I, no Brasil, Castro e Lee (1995) mostraram, pela primeira vez, evidências desse tipo de onda na composição da MM num trecho da costa brasileira analisando dados de nível entre SC e RJ (RS não fez parte do estudo) e sugerindo que MM's de origem remota pudessem ter participação importante no fenômeno no trecho de costa estudado. Mais recentemente, França (2013), usando resultados de modelo hidrodinâmico numérico, também identificou claramente a existência de eventos de MM que se propagam ao longo da costa desde a plataforma argentina. O presente trabalho confirmou essa hipótese para toda a costa S/SE brasileira.

Como se pode verificar na breve revisão da teoria sobre Ondas de Plataforma Continental feita no Capítulo III, a complexidade matemática envolvida no trato dessas ondas deixou o assunto um tanto fora do alcance de engenheiros costeiros e oceanógrafos iniciantes. O presente trabalho procurou apresentar uma versão simplificada, porém conceitualmente correta, do fenômeno que, espera-se, possa auxiliar na sua incorporação ao dia-a-dia dos que estudam processos costeiros em geral no Brasil.

## V.3 - Nota sobre a Previsão da Maré Meteorológica no Brasil

Pela natureza do fenômeno, a previsão da MM depende diretamente da previsão das forçantes atmosféricas: pressão atmosférica e, principalmente, ventos (ao nível do mar). O aperfeiçoamento dos modelos de circulação atmosférica possibilitam, hoje em dia, previsões atmosféricas de boa qualidade para um horizonte de tempo de alguns (poucos) dias. Esse fato limita a previsibilidade da MM para esse mesmo horizonte de tempo.

De maneira geral, é possível agrupar os modelos de previsão da MM em 2 tipos: (i) modelos estatísticos e (ii) modelos hidrodinâmicos.

### V.3.1 - Modelos Estatísticos

De maneira geral, modelos estatísticos procuram relacionar a resposta do sistema em estudo (variável dependente) às forçantes (variáveis independentes, supostamente conhecidas) através de métodos estatísticos. Não sendo baseados em princípios físicos fundamentais, como no caso dos modelos hidrodinâmicos, modelos estatísticos necessitam de algum conhecimento prévio sobre o funcionamento do sistema de modo a garantir que o conjunto de parâmetros escolhidos como forçantes inclua todos os aspectos relevantes. Adicionalmente, é necessário dispor de dados que, após tratados estatisticamente, permitirão estabelecer as desejadas relações entre a resposta e as forçantes. Com as relações estabelecidas, o modelo pode ser usado para fazer previsões.

No caso da MM no Brasil, duas contribuições importantes se destacam. Na primeira, usando dados coletados em São Francisco do Sul, SC, Truccollo (1998) e Truccollo, Franco e Schettini (2006) desenvolveu um modelo estatístico para previsão da MM a partir da pressão atmosférica e da tensão do vento por meio de uma combinação da técnica da correlação cruzada defasada com modelos de regressão linear múltipla aplicados no domínio do tempo e da frequência.

A segunda contribuição advém dos trabalhos de Oliveira<sup>(1)</sup> (2004) e Oliveira<sup>(2)</sup> (2009) [ ver também: Oliveira et al. (2006) e (2007)] que desenvolveu modelos estatísticos para a MM a partir da aplicação da técnica de Redes Neurais Artificiais ao problema. O método foi aplicado às regiões de Paranaguá, PR<sup>(1)</sup>, Cananéia, SP e Ponta da Armação, RJ<sup>(2)</sup>.

Uma revisão dos métodos estatísticos supra citados está fora do escopo do presente trabalho e o leitor interessado pode consultar as referências para detalhes. Em ambos os casos, os modelos tiveram bom desempenho previsivo, segundo os autores.

Este autor não tem conhecimento sobre o uso desses modelos para previsões *operacionais* da MM no Brasil. Mesmo assim, modelos estatísticos são uma alternativa interessante para a previsão do fenômeno no nosso país.

A importância de efeitos remotos na MM existente na costa brasileira, apontada no presente trabalho, sugere que a qualidade das previsões feitas com modelos estatísticos pode ser melhorada se dados atmosféricos coletados a Sul do local das medições de nível forem incorporados. Da mesma maneira, a inclusão de medições de nível obtidas a Sul do local de interesse como forçante também deve contribuir para melhorar a capacidade previsiva desse tipo de modelo.

### V.3.2 - Modelos Hidrodinâmicos Numéricos

A ideia nesse tipo de abordagem é resolver *numericamente* as equações hidrodinâmicas que governam o fenômeno para determinar a resposta das águas costeiras às forçantes atmosféricas. A solução advinda desses modelos inclui o campo de correntes (em alguns deles, o campo tridimensional) e as variações do nível, portanto, a princípio, esses modelos podem ser usados na previsão da MM.

Existem diferentes opções de modelos numéricos de circulação oceânica/costeira que podem ser usados para cumprir essa tarefa. Historicamente, no Brasil o primeiro esforço nesse sentido foi o trabalho pioneiro de Stech e Lorenzetti (1992) usando um modelo numérico desenvolvido pelos próprios autores.

No início do século atual, o prof. Ricardo Camargo e colaboradores [Camargo et al. (2000) e Camargo et al (2002)] tomaram uma iniciativa importante para desenvolver um sistema de previsão operacional da MM usando o modelo Princeton Ocean Model (POM). Apesar de produzir resultados interessantes o sistema de previsão não foi continuado.

Em sua dissertação de mestrado sob a orientação do prof. Afonso Paiva, Bruna França [ver França (2013)] deu um contribuição importante para demonstrar a existência de Ondas de Plataforma Continental na costa SE da América do Sul usando o modelo Hybrid Coordinate Ocean Model (HYCOM). Apesar do trabalho não estar focado na determinação das variações de nível na costa (logo na MM), os resultados obtidos pela autora mostraram o potencial de uso do modelo HYCOM para previsões da MM no Brasil.

Esforços similares já foram também realizados por colegas Argentinos e Uruguaios com foco no estuário do Prata com o modelo MOHID (Santoro et. al. 2011).

Uma revisão dos tipos de modelo disponíveis foge ao escopo do presente trabalho e apenas algumas sugestões que podem ser úteis para a implementação dos modelos serão apresentadas nessa seção.

O primeiro fato a se notar é que qualquer modelo numérico, por melhor que seja, fornecerá respostas ruins se forçado de forma incorreta. Mesmo supondo que as forças atmosféricas sejam de boa qualidade, um dos desafios a vencer reside em como lidar com as fronteiras do modelo – tanto nas fronteiras externas (plataforma continental x oceano) quanto nas fronteiras laterais. Na verdade, esse mesmo tipo de dificuldade teve de ser enfrentado nas soluções analíticas simplificadas obtidas no presente trabalho e a experiência adquirida pode ser útil para sugerir alguns cuidados, como discutido a seguir.

- **Cuidados com a fronteira externa**

Nos modelos que oferecem a possibilidade de aninhamento da plataforma continental com o oceano adjacente, o problema com a fronteira externa é minimizado. Nos modelos sem aninhamento a dificuldade é maior. Em qualquer caso, é importante observar que, mesmo sendo o grosso das variações de nível da MM resultado da ação da tensão do vento diretamente sobre as águas da plataforma continental, a subida/descida do nível na costa requer a entrada/saída de água pela borda da plataforma. Portanto, a concepção do modelo hidrodinâmico deve garantir, da melhor maneira possível, a troca de água entre a plataforma e o oceano adjacente de forma a não restringir o fluxo (transporte de Ekman) na direção da costa.

- **Cuidados com as fronteiras laterais**

O estabelecimento das fronteiras laterais do modelo também merece atenção, particularmente a fronteira Sul. De fato, como visto nas soluções analíticas, o desenvolvimento da MM também envolve de forma marcante o fluxo de água ao longo da costa, portanto, a concepção do modelo deve garantir também a troca de água entre os eventuais setores de costa que serão modelados.

A atenção especial com o limite da fronteira Sul da grade do modelo advém da necessidade de se garantir a entrada, na área de interesse, de MM's de origem remota geradas a Sul da área modelada. Na fronteira norte, é necessário usar alguma condição de contorno que permita a livre entrada/saída de água proveniente do interior da grade. Para a costa Sul brasileira, em particular, é necessário garantir que a MM na região de Mar del Plata seja bem determinada pelo modelo hidrodinâmico.

- **Cuidados com o objetivo da modelação.**

A escolha e o arranjo operacional do modelo, seja ele qual for, devem levar em conta que o foco da modelação, na presente situação, é o nível na costa e não uma previsão detalhada do campo de correntes na plataforma continental. Nível e correntes estão associados, é claro, porém, é possível que modelos hidrodinâmicos mais simples, por exemplo, que desconsiderem variações de densidade da água (barotrópicos), sejam mais eficazes na previsão do nível na costa do que modelos mais completos que aproximem melhor as correntes do que o nível. Essa questão deve ser avaliada caso a caso dependendo do tipo de modelo a ser usado.

- **Cuidados com a correta avaliação do atrito com o fundo**

As soluções analíticas mostraram de forma clara a importância que o atrito das correntes com o fundo tem no controle do fenômeno da MM, em particular, na região (rasa) mais próxima à costa. Como visto nas soluções analíticas simplificadas aqui obtidas, a avaliação das forças de atrito envolve o estabelecimento de parâmetros empíricos de quantificação um tanto imprecisa. Assim, para uma utilização otimizada do modelo é possível que haja necessidade de algum tipo de calibração dos coeficientes de atrito usados através de comparação de resultados sintéticos com dados medidos.

### **V.3.3 - Modelos Hidrodinâmicos Simplificados.**

Mesmo com as limitações inerentes, os resultados obtidos com modelos hidrodinâmicos simplificados no presente trabalho são encorajadores para se tentar uma previsão rápida da MM sem o uso de modelos numéricos sofisticados e de difícil implantação.

No Brasil, o único trabalho nessa linha do qual o autor tem conhecimento foi realizado por Paiva (1993) para a região de Arraial do Cabo, RJ. O modelo usado é semelhante ao modelo Tipo 1, descrito na seção IV.4.1, com a hipótese extra de uma plataforma continental “estreita”, o qual é o mesmo modelo proposto por Sandstrom (1980) para descrever as variações de nível do mar induzidas pelo vento na plataforma da Nova Escócia, Canadá.

Como visto na referida seção, modelos Tipo 1 não são a melhor opção no caso brasileiro. Com efeito, conforme demonstrado, modelos Tipo 3, ou sua versão simplificada, modelo Tipo 4, têm maior capacidade previsiva que os Tipo 1 e Tipo 2, e devem ser priorizados para a previsão da MM no Brasil, na opinião deste autor. Entretanto, para uma implantação correta, esses modelos simplificados requerem medições de nível com disponibilização de dados em tempo real em alguns locais estratégicos as quais podem ser arranjadas caso seja de interesse implantar um sistema operacional de previsão da MM.

A previsão de nível para o Porto de Rio Grande com antecedência de um dia, em particular, tem chance de funcionar bem a partir de medições de nível em Mar del Plata e com o uso de previsões meteorológicas para Punta del Este. Da mesma forma, previsões para o Rio de Janeiro com antecedência de um dia podem ser obtidas, com grandes chances de êxito, a partir de medições de nível em Imbituba e de previsões meteorológicas em Cananéia ou Santos. Providencias similares para outros sítios da costa SE brasileira podem também ser implementadas aproveitando a infraestrutura da rede maregráfica já existente.

### **V.3.4 – Maré Meteorológica versus Nível do Mar.**

Do ponto de vista prático, o objetivo final de qualquer tipo de modelo (hidrodinâmico ou estatístico) é a previsão do *nível do mar* e não exclusivamente do nível oriundo da MM. Como mostrado no Capítulo II, na costa brasileira existem variações de nível bastante significativas e que não podem ser esquecidas: são as variações da *banda sazonal*. A inclusão dessas variações mais lentas num programa de previsão operacional não seria problema caso se dispusesse de medições de nível em tempo real no local da previsão uma vez que no horizonte temporal da previsão (alguns dias) o nível da componente sazonal poderia ser facilmente extrapolado a partir das observações na natureza. Obviamente, a previsão teria de ser complementada com a parte astronômica através da inclusão dos resultados das Tábuas de Maré.

Finalmente, a inclusão de flutuações de nível “rápidas”, típicas da *banda da maré de vento*, requereriam estudos específicos feitos para os locais de interesse e cobrindo escalas espaciais e temporais reduzidas.

## V.4 - Sugestão de Temas para Pesquisa

O presente estudo evidenciou alguns tópicos relacionados à MM que merecem investigação e que serão apresentados nessa seção.

- **Importância do estuário do Prata na MM em território brasileiro**

Medições de campo e resultados teóricos indicam que a MM é capaz de propagar-se entre Mar del Plata e Rio Grande, portanto, passando pela foz do Rio da Prata. Como discutido no texto, trata-se de um estuário de dimensões consideráveis no qual, certamente, a MM deve penetrar perdendo parte da sua energia no processo. A questão que se coloca é exatamente estimar a quantidade de energia consumida e modelos numéricos hidrodinâmicos poderiam ser utilizados para responder essa questão.

Para tanto, o autor vislumbra um experimento no qual o modelo seria executado, usando forçantes atmosféricas idênticas, para a geometria real e para um caso hipotético no qual o Estuário do Prata seria “apagado” e substituído por um trecho de costa impermeável similar ao restante da costa., a MM resultante em Rio Grande seria computada e comparada com a obtida para a situação real e a diferença de valores poderia ser usada para estimar a quantidade de energia dissipada pelo estuário e a influência do estuário na MM em território brasileiro.

- **Possibilidade de efeitos remotos desempenharem papel importante na circulação sobre a Plataforma Continental no “South Brazilian Bight”**

Os resultados do presente trabalho indicaram que a MM no chamado “South Brazilian Bight” (SBB) – trecho de costa entre o Cabo de Santa Marta, SC, e o Cabo Frio, RJ – tem uma componente remota considerável. Ora, a questão que naturalmente se coloca é se esse comportamento se estende também à circulação das águas (na banda da MM) sobre a plataforma continental nessa região da costa brasileira (?).

Esse é um assunto complexo mas que poderia ser analisado de forma preliminar por meio de modelos hidrodinâmicos numéricos. Por exemplo, uma implementação regional do modelo poderia ser forçada (i) com a inclusão dos ventos sobre o SBB e (ii) com o vento “desligado” nessa região. Uma comparação entre as duas rodadas forneceria um indicativo da parcela de origem remota que se deseja avaliar.

- **Possibilidade de efeitos remotos afetarem a ressurgência em Cabo Frio.**

Seguindo na mesma linha, outro tópico de interesse diz respeito à possibilidade de efeitos remotos afetarem de alguma maneira o fenômeno da ressurgência em Cabo Frio. A ressurgência em Cabo Frio é um assunto bastante estudado por especialistas e seu mecanismo, no que concerne a forçante local, é bem compreendido desde os tempos do Almirante Paulo Moreira.

Mesmo não havendo medições em Cabo Frio é seguro conjecturar, pela escala espacial do fenômeno, que o comportamento da MM no Rio de Janeiro possa ser extrapolado para Cabo Frio. O presente estudo mostrou que as flutuações de nível na costa no RJ na banda da MM tem parcela significativa associada a efeitos remotos, flutuações essas que incluem MM’s positivas e *negativas*. Admitindo que o fenômeno da ressurgência abrange movimentos na banda da MM e atentando para o fato de que episódios de ressurgência devem coincidir com eventos de MM’s *negativas*, a possibilidade de efeitos remotos contribuírem para o fenômeno não pode ser descartada.

Uma ideia simples para se avaliar essa questão seria investigar, através da base de dados de nível e temperatura da água existente na região, a ocorrência de episódios de ressurgência em Cabo Frio sem indícios claros de forçante local.

- **Sobre o destino das Ondas de Plataforma Continental após o estreitamento da plataforma no sul da Bahia.**

Esse tópico surge naturalmente quando se considera que a nossa MM nada mais é do que a manifestação das variações de nível na costa associadas à passagem de Ondas de Plataforma Continental ( OPC’s) pela plataforma continental brasileira.

Admitindo que as OPC's que compõem a MM cheguem até o sul da Bahia, onde a plataforma continental sofre um drástico estreitamento e lembrando que essas ondas, como qualquer outro tipo de onda, transportam energia, a questão que se coloca é qual o destino das OPC's quando elas atingirem o ponto de estreitamento da PC ?

Ora, é fato bem conhecido que mudanças bruscas no meio de propagação de qualquer tipo de onda são capazes de induzir reflexão. Ocorre que as OPC's *não podem refletir* pois, pela sua dependência da rotação da Terra, esse tipo de onda tem um sentido único de propagação. Portanto, como a energia não pode desaparecer, a descontinuidade brusca na plataforma continental existente no sul da Bahia vai, de alguma maneira, forçar algum tipo de vazamento da energia transportada pelas OPC's para o oceano adjacente.

Curiosamente, essa região oceânica é conhecida por induzir instabilidades (com a geração de vórtices) na Corrente do Brasil que flui nas vizinhanças do talude continental. É fato que existem feições batimétricas nesse trecho que parecem favorecer tais instabilidades, porém é possível *especular* que a energia vazada das OPC's nessa região também possa contribuir para instabilizar essa grande corrente oceânica. Essa é uma questão em aberto que merece atenção dos especialistas.

## V.5 - Nota sobre o Uso da Palavra “Ressaca” no Brasil

Finalmente, uma nota se faz necessária quanto ao uso da palavra “*Ressaca*” no Brasil.

O significado que consta do dicionário Caldas Aulete para o verbete “*ressaca*” na língua portuguesa é: *Forte movimento das ondas do mar ao se chocarem contra o litoral*. Mesmo com a menção explícita das *ondas* na definição do dicionário, a palavra *ressaca* no nosso país tem sido usada, tanto pelo público em geral quanto na literatura técnica, para representar *qualquer* condição de mar fora do normal dando margem a alguma confusão.

É opinião deste autor que a vinculação da palavra *ressaca* a ação das ondas do mar na costa, conforme consta do dicionário, deveria ser mantida. Numa ótica mais técnica, a palavra *ressaca* deve ser usada *exclusivamente* para identificar *eventos de ondas “grandes” na costa*. O limiar que separa ondas “grandes” de ondas “pequenas” deve ser definido usando a altura significativa ( $H_s$ ) como parâmetro de medida de acordo com o clima de ondas do sítio em questão.

Com essa definição, a palavra *ressaca* passaria a se referir apenas às condições de onda não tendo relação com mau tempo, tempestades e, principalmente, com variações de nível do mar de qualquer tipo, astronômicas ou não-astronômicas. O motivo para tal proposta advém do que foi apresentado no presente estudo e evitaria uma mistura de fenômenos de natureza diferentes. Tomando o caso do Rio de Janeiro como exemplo, é fato bem conhecido que episódios de ondas “grandes” na costa nesse trecho do litoral brasileiro ocorrem, frequentemente, em condições de bom tempo e ventos (locais) brandos. Isso se deve ao fato de que o clima de ondas no Rio de Janeiro é dominado por ondulações [ Melo et al. (2016) ] cuja zona de geração, em muitos casos, encontra-se à grande distância da costa.

Adicionalmente, uma *ressaca*, entendida como *um evento de ondas grandes na costa*, pode perfeitamente acontecer com nível do mar (de origem astronômica ou não) elevado ou rebaixado. Do mesmo modo, condições de nível do mar fora do padrão podem ocorrer com ou sem a presença de ondas grandes uma vez que os dois fenômenos respondem a forçantes diferentes.

## REFERÊNCIAS

- ADAMS, J. K.; BUCHWALD, V. T. The Generation of Continental Shelf Waves. **Journal of Fluid Mechanics**, V. 35, p. 815-826, 1969.
- BENDAT, J. S.; PIERSOL, A. G. **Measurement and Analysis of Random Data**. Ed. Wiley, 390 p., 1999.
- BUCHWALD, V. T; ADAMS, J. K. The Propagation of Continental Shelf Waves. **Proceeding of the Royal Society of London**. Serie A 305, p. 235-250, 1968.
- BRINK, K.H. The Effect of Bottom Friction on Low-Frequency Coastal Trapped Waves. **Journal of Physical Oceanography**, V. 12, p. 127-133, February, 1982.
- BRINK, K.H. A Comparison of Long Coastal Trapped Waves with Observations off Peru. **Journal of Physical Oceanography**, V. 12, p. 897-913, August, 1982.
- BRINK, K.H. Coastal-Trapped Waves and Wind-Driven Currents over the Continental Shelf. **Annual Review of Fluid Mechanics**. V. 23, p. 389-412, 1991
- BRINK, K. H; ALLEN, J. S. On the Effect of Bottom Friction on Barotropic Motion over the Continental Shelf. **Journal of Physical Oceanography**, V. 8, p. 919-922, 1978.
- CAMARGO, R.; HARARI, J.; LOPES, R.; CARUZZO, A.; ZACHARIAS, D. C. Implementação de Sistema de Previsão de Marés Meteorológicas no Atlântico Sudoeste. In: **XI Congresso Brasileiro de Meteorologia**, Rio de Janeiro. Anais, p 2646-2654, 2000
- CAMARGO, R.; HARARI, J.; BISCARO, T. S.; BIAZET, B. Avaliação das Previsões de Maré Meteorológica realizadas com o Princeton Ocean Model no Laboratório Master/IAG/USP. **XII Congresso Brasileiro de Meteorologia**, Foz de Iguaçu-PR, Anais, p. 2022-2028, 2002
- CASTRO, B. M.; LEE, T. N. Wind-forced Sea Level Variability on the Southeast Brazilian Shelf. **Journal of Geophysical Research**, V. 100, C8, p. 16045-16056, 1995.
- CHELTON, D. B.; DAVIS, R. E. Monthly Mean Sea-level Variability along the West Coast of North America. **Journal of Physical Oceanography**, V. 12, p. 757-784, August, 1982.
- CHURCH, J.A.; FREELAND, H.J.; SMITH, R.L.. Coastal-Trapped Waves on the East Australian Continental Shelf, Part I: Propagation of Modes. **Journal of Physical Oceanography**, V. 16, p. 1229-1943, 1986.
- CHURCH, J.A.; WHITE, N.J.; CLARKE, A.J.; FREELAND, H.J.; SMITH, R.L. Coastal-Trapped Waves on the East Australian Continental Shelf, Part II: Model Verification. **Journal of Physical Oceanography**, V. 16, p. 1245-1957, 1986.
- CSANADY, G. T. Barotropic Currents over the Continental Shelf. **Journal of Physical Oceanography**, V. 4, p. 357-371, July, 1974.
- CSANADY, G. T. **Circulation in the Coastal Ocean**. D. Reydel Publishing. Co., 279 p., 1982.
- CSANADY, G. T. On the Theories that Underlie Our Understanding of Continental Shelf Circulation, **Journal of Oceanography**, Vol. 53, p. 207-229, 1997
- CUEVAS, B.A.; BRUNDRIT, G.B.; SHIPLEY, A.M. Low-Frequency Sea-level Fluctuations along the Coasts of Namibia and South Africa. **Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society**. V.87, p. 33-42, 1986.
- DEAN, R. G.; DALRYMPLE, R. A. **Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists**. World Scientific, Vol. 2, 353 p., 1991.
- DEAN, R. G.; DALRYMPLE, R. A. **Coastal Processes with Engineering Applications** . Cambridge University Press, 475 p., 2004.

ENFIELD, D.B.; ALLEN, J.S. The Generation and Propagation of Sea Level Variability Along the Pacific Coast of Mexico. **Journal of Physical Oceanography**, V. 13, p. 1012-1033, June, 1983.

ELIOT, M.; PATTIARATCHI, C. Remote Forcing of Water Levels by Tropical Cyclones in Southwest Australia. **Continental Shelf Research**, V. 30, p. 1549-1561, 2010.

FLATHER, R. A. A Storm Surge Prediction Model for the Northern Bay of Bengal with Application to the Cyclone Disaster in April 1991, **Journal of Physical Oceanography**, V. 24, p. 172-190, 1994.

FLATHER, R. A. Storm Surges. **In Encyclopedia of Ocean Sciences**. Edited by Steele, J. H.; Turekian, K. K.; Thorpe, S.A., p. 2882-2892, 2001.

FRANCO, A. S. **Tides: Fundamentals, Analysis and Prediction**. Fundação Centro-Tecnológico de Hidráulica, São Paulo, Brasil, 249 p., 1988.

FRANÇA, B. R. L. **Ondas Costeiras Confinadas na Plataforma Continental Sul-Sudeste do Brasil**. Dissertação (Mestrado), Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 77 p., 2013.

FREELAND, H.J.; BOLAND, F.M.; CHURCH, J.A.; CLARKE A.J.; FORBES, A.M.G.; HUYER, A.; THOMPSON, R.O.R.Y.; WHITE, H.J. The Australian Coastal Experiment: A Search for Coastal-Trapped Waves. **Journal of Physical Oceanography**, V. 16, p. 1230-1249, 1986.

FROTA, F. F., TRUCCOLO, E. C. , SCHETTINI, C.A.F. . Tidal and Sub-tidal Sea Level Variability at the Northern Shelf of the Brazilian Northeast Region. **Anais da Academia Brasileira de Ciências** (Online), p. 1371-1386, n. 2016.

GILL, A. E. **Atmosphere-Ocean Dynamics**. International Geophysics Series, Academic Press, 662 p., 1982.

GILL, A. E.; SCHUMANN, E. H. The Generation of Long Shelf Waves by the Wind. **Journal of Physical Oceanography**, V. 4, p. 83-90, 1974.

GRIMSHAW, R. The Effect of a Variable Coriolis Parameter, Coastline Curvature and Variable Bottom Topography on Continental Shelf Waves. **Journal of Physical Oceanography**, V.7, p. 547-554, July 1977.

HOAR, T. J.; WILSON, C. R. Geosat Observations of Sea-level Response to Barometric Pressure Forcing. **Geophysical Research Letters**, V. 21 Issue 23, p. 2515-2518, 1994.

KUNDU, K. P. **Fluid Mechanics**. Academic Press, San Diego, USA, 638 p., 1990.

LONGUETT-HIGGINS, M.; STEWART, R. S. Radiation Stress in Water Waves; a Physical Discussion with Application. **Deep-Sea Research**, Vol. 11, pp 529-562, 1964

LISITZIN, E. **Sea-level Changes**. Ed. Elsevier, Amsterdam, 1974.

MACHADO, A. A.; CALLIARI, L. J.; MELO E.; KLEIN, A. H. F. Historical Assessment of Extreme Coastal Sea State Conditions in Southern Brazil and their Relation to Erosion Episodes. **Pan-American Journal of Aquatic Sciences**, 5(2): 105-114, 2010

MARONE, E. **Processamento e Análise de Dados de Maré: Discurso dos Métodos**. Tese (Doutorado), Programa de Pós-Graduação em Oceanografia, Universidade de São Paulo, Brasil, 1991.

MARONE, E.; CAMARGO, R. Marés Meteorológicas no Litoral do Estado do Paraná: O Evento de 18 de Agosto de 1993. **Nerítica**. Ed. UFPR. Curitiba, Paraná, Brasil. V. 8, p. 73 – 85, 1994.

MELO F<sup>o</sup>, E. **Investigações sobre a Análise da Agitação Marítima**. Dissertação (Mestrado), Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 138 p., 1982.

MELO Fº, E. Programa de Informação Costeira on-line: Um Balanço dos Primeiros Dois Anos de Funcionamento. In: **Anais do 1º Seminário e Workshop em Engenharia Oceânica (I SEMENGO)**, FURG, Rio Grande, 2004.

MELO Fº, E.; CALLIARI, L. J.; FRANCO, D.; STRAUCH, J. C. S. Indícios da Ocorrência de um Tsunami Meteorológico na Praia do Cassino, RS. In: **Anais do 1º Seminário e Workshop em Engenharia Oceânica (I SEMENGO)**, Rio Grande. CD-ROM, 2004. V. 1. p. 1-11. 2004.

MELO Fº, E.; OLIVEIRA, U. R.; ROMEU, M. A. R.; SCHMIDT, A.D.; PEREIRA, N. Sobre a Ocorrência de um Tsunami Meteorológico na Ilha de Santa Catarina. In: **Anais do 4º Seminário e Workshop em Engenharia Oceânica (IV SEMENGO)**, FURG, Rio Grande, RS, 2010.

MELO, E.; MACHADO, D. M., LISBOA, R. C.; ROMEU, M.A.R. Overview of Tide, Wind and Wave Conditions along the Brazilian Coast for Coastal Engineering Practice. In: **Proc. of Coastal and Port Engineering in Developing Countries (COPEDEC IX)**, Paper ID 201510261, Rio de Janeiro, 18 p, 2016.

MESQUITA, A. R.; FRANCO, A.; HARARI, J. On Mean Sea-level along the Brazilian Coast. **Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society**. V. 87, p. 67-77, 1986.

MUNK, W. Surf Beats **Eos, Transactions American Geophysical Union**, December 1949.

MYSAK, L.A. Topographically Trapped Waves. **Annual Review of Fluid Mechanics**. V.12, p. 45-76, 1980.

NEVES Fº, S. C. **Variação da Maré Meteorológica no Litoral Sudeste do Brasil: 1965-1986**. Dissertação (Mestrado), Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 113 p., 1992.

NEVES, C. F. O Nível Médio do Mar: uma Realidade Física ou um Critério de Engenharia ?. **Revista Vetor**, Universidade Federal de Rio Grande, V.15(2), p 19-33, 2005.

OLIVEIRA, M. M. F. de, **Redes Neurais Artificiais na Predição da Maré Meteorológica em Paranaguá - PR**, Dissertação (Mestrado), Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 149 p., 2004

OLIVEIRA, M. M. F. de, **Análise Estatística de Dados Ambientais com Aplicação da Teoria de Valores Extremos e Predição do Nível do Mar utilizando Redes Neurais Artificiais**, Tese (Doutorado), Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 253 p., 2009

OLIVEIRA, M. M. F. de; EBECKEN, N. F. F.; SANTOS, I. de A. NEVES, C. F.; CALOBA, L. P.; OLIVEIRA, J. L. F. de, Modelagem da Maré Meteorológica utilizando Redes Neurais Artificiais: uma Aplicação para a Baía de Paranaguá – PR, Parte 1: Dados Meteorológicos da Estação de Superfície, **Revista Brasileira de Meteorologia**, v. 21, n. 2, pp. 220-231, 2006.

OLIVEIRA, M. M. F. de; EBECKEN, N. F. F.; SANTOS, I. de A. NEVES, C. F.; CALOBA, L. P.; OLIVEIRA, J. L. F. de, Modelagem da Maré Meteorológica utilizando Redes Neurais Artificiais: uma Aplicação para a Baía de Paranaguá – PR, Parte 2: Dados de Reanálise do NCEP/NCAR, **Revista Brasileira de Meteorologia**, v. 23, n. 1, pp. 53-62, 2007.

PAIVA, A.M. , **Estudo das Variações de Nível Médio do Mar em Arraial do Cabo – RJ**. Relatório de Pesquisa de bolsa de pré-doutorado da Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ), 1993.

PHILLIPS, O. M. **The Dynamics of the Upper Ocean**. Cambridge University Press, 261 p., 1986.

PARISE, C. K.; CALLIARI, L. J.; KRUSCHE, N.. Extreme Storm Surges in the South of Brazil: Atmospheric Conditions and Shore Erosion. **Brazilian Journal of Oceanography**, V. 57 (3), p. 175-188, 2009.

PAWLOWICZ, R.; BEARDSLEY, B.; LENTZ, S. Classical Tidal Harmonic Analysis Including Error Estimates in MATLAB using T\_TIDE., **Journal of Computers and Geosciences**. V. 28, p. 929-937, 2002.

PUGH, D. T. **Tides, Surges and Mean Sea Level**. Ed. Jonh Wiley & Sons, Chichester, U.K., 472 p., 1987.

SANDSTROM, H. On the Wind-induced Sea-level Changes on the Scotian Shelf. **Journal of Geophysical Research**. V. 85 No. C1, p. 461-468, 1980.

SANTORO, P. E.; FOSSATI, M.; PIEDRA-CUEVA, I. Study of the Meteorological Tide in the Rio de La Plata. **Continental Shelf Research**, V. 60, p. 51-63, 2013.

SANTORO, P.; FERNÁNDEZ, M.; FOSSATI, M.; CAZES, G.; TERRA R., PIEDRA-CUEVA, I. Pre-operational Forecasting of Sea Level Height for the Río de la Plata. **Applied Mathematical Modelling** 35, p. 2462–2478. 2011

SARACENO, M.; SIMIONATO, C.G.; RUIZ-ETCHEVERRY, L.A. Sea Surface Height Trend and Variability at Seasonal and Interannual Time Scales in the Southeastern South American Continental Shelf between 27°S and 40°S. **Continental Shelf Research**, V. 91, p. 82-94, 2014.

SCHUMANN, E.H.; BRINK, K.H. Coastal-Trapped Waves off the Coast of South Africa: Generation, Propagation and Current Structures. **Journal of Physical Oceanography**. V.20, p.1206-1218, August 1990.

SCHWIDERSKI, E. W. On Charting Global Ocean Tides. **Reviews of Geophysics and Space Physics**. V. 18, p.243-268, 1980.

SMITH, S. D.; BANKE, E. G. Variation of the Sea Surface Drag Coefficient with Wind Speed. **Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society**, V. 101, p. 665-673, 1975.

STECH, J.A.; LORENZZETTI, J.A. The Response of the South Brazil Bight to Wintertime Cold Fronts. **Journal of Geophysical Research**, V. 97, No. C6, p. 9507-9520, June 15, 1992

TOMCZAK, M. Matthias Tomczak Oceanography Website, 2000.

TRUCCOLO, E.C., **Maré Meteorológica e Forçantes Atmosféricas Locais em São Francisco do Sul - SC**. Dissertação (Mestrado), Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental, Universidade Federal de Santa Catarina, SC, Brasil, 1998.

TRUCCOLO, E.C., FRANCO, D.; SCHETTINI, C.A.F. The Low Frequency Sea Level Oscillations in the Northern Coast of Santa Catarina, Brazil. **Journal of Coastal Research**, SI 39, p. 547-552, ICS 2004 (Proceedings), 2004.

TUCKER, M. J. Surf Beats: Sea Waves of 1 to 5 min. Period. **Proceedings of the Royal Society A**, 22, Volume 202, issue 1071, August 1950

VELLOSO, T. G.; ALVES, A. R. Características Gerais do Fenômeno da Maré no Brasil. In **Anais Hidrográficos da Diretoria De Hidrografia E Navegação**, Tomo LXI, 8 p., 2006.

WONNACOTT, T.H.; WONNACOTT, R.J. **Introdução à Estatística**. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 589 p. 1980.

WUNSCH, C.; STAMMER, D. Atmospheric Loading and the Oceanic “Inverted Barometer” Effect. **Reviews of Geophysics**, V. 35 (1), p. 79-107, 1997.

# APÊNDICES

## ÍNDICE

APÊNDICE 1 - Revisão da Teoria para Representação no Domínio da Frequência .....	283
APÊNDICE 2 - Filtragem (Decomposição) via Transformada Rápida de Fourier .....	287
APÊNDICE 3 - Comparação entre os dados da RG Pilots e do acervo GOOS .....	295
APÊNDICE 4 - Estabelecimento de Equações Complementares para o Problema Clássico .....	307
APÊNDICE 5 – PARTE 1 - Solução para Plataforma com Degrau de Largura L e com Vento soprando numa Faixa de Largura W, em que $W > L$ .....	309
APÊNDICE 5 – PARTE 2 - Solução para Plataforma com Degrau de Largura L e com Vento soprando da Borda para o Largo da Plataforma numa Faixa de Largura Finita .....	312
APÊNDICE 6 - Solução da Equação com Atrito .....	315
APÊNDICE 7 - Solução Numérica por Método de Integração Direta .....	319
APÊNDICE 8 - Álgebra do Termo da Equação de Ondas de Plataforma Continental com Fundo Inclinado .....	322
APÊNDICE 9 - Nota sobre a Possibilidade dos Modelos Tipo 2 e Tipo 3 darem Resultados Próximos em alguns Eventos Específicos .....	324
APÊNDICE 10 - Aplicação do Modelo Tipo 4 a outros Sítios da Costa Brasileira .....	326

# APÊNDICE 1

## Revisão da Teoria para Representação no Domínio da Frequência

Um processo físico pode ser descrito no domínio do tempo através dos valores de um certo parâmetro, geralmente real,  $x$ , (e.g. nível do mar) em função do tempo:  $x(t)$ , ou, alternativamente, no domínio da frequência, onde o processo é especificado por uma função  $X$  (geralmente complexa) expressa em função da frequência  $f$ :  $X(f)$ . As funções  $x(t)$  e  $X(f)$  devem ser interpretadas como representações diferentes do *mesmo* processo físico.

Nessa seção é feito um resumo dos resultados teóricos relevantes para a aplicação em questão. Os detalhes podem ser encontrados na literatura sobre o assunto como, por exemplo, Bendat e Piersol (1999).

### Transformada de Fourier

Consideremos uma função continua do tempo  $x(t)$  conhecida entre  $-\infty < t < \infty$ . De maneira geral, a função  $x$  pode ser real ou complexa. De acordo com a teoria de Fourier,  $x(t)$  pode ser expressa no domínio da frequência por uma função complexa  $X(f)$ , com  $f \equiv 1/t$ , com valores entre  $-\infty < f < \infty$ . Se  $t$  for medido em segundos, a frequencia  $f$  terá unidade de ciclos por segundo, ou Hertz; se  $t$  é medido em horas,  $f$  terá unidade de ciclos por hora e assim por diante.

As funções  $x(t)$  e  $X(f)$  estão relacionadas pelo par de Transformadas de Fourier:

$$\text{Transformada direta: } X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2\pi ift} dt \quad (\text{A1 - 1})$$

$$\text{Transformada Inversa: } x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{2\pi ift} df \quad (\text{A1 - 2})$$

Se  $x(t)$  for uma função real, a função  $X(f)$  terá a seguinte propriedade de simetria:

$$x(t) \text{ Real} \rightarrow X(-f) = X(f)^* \quad (\text{A1 - 3})$$

onde  $X(-f)^*$  representa a função complexa conjugada de  $X(f)$ . Essa propriedade mostra que a parte real de  $X$  para frequências negativas e positivas são idênticas, enquanto a parte imaginária de  $X$  tem valores iguais, porém com sinal trocado para frequências negativas e positivas, ou seja:

$$\text{Real} [ X(-f) ] = \text{Real} [ X(f) ] \quad (\text{A1 - 4})$$

$$\text{Imag} [ X(-f) ] = -\text{Imag} [ X(f) ] \quad (\text{A1 - 5})$$

A teoria de Fourier também mostra que a variância ou energia total contida no processo físico pode ser calculada tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência. Esse resultado é conhecido como Teorema de Parseval :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \quad (\text{A1 - 6})$$

### Transformada Discreta de Fourier

As funções  $x(t)$  e  $X(f)$  devem ser interpretadas como representações diferentes do *mesmo* processo físico.

No presente estudo, a função  $x(t)$  (nível do mar) é descrita no domínio do tempo por uma série temporal *real*  $x_n$  *discreta e finita*.

A duração finita ( $T$ ) da série temporal pode ser incorporada na definição da Transformada de Fourier se admitirmos que o processo se repete exatamente a cada intervalo  $T$ . Essa hipótese implica que o registro finito é transformado em infinito simplesmente juntando cópias do mesmo ao final de cada trecho.

Já a transformação de um registro continuo em uma série discreta com  $N$  pontos amostrados a intervalos de tempo  $\Delta t$ , logo com duração  $T = N \Delta t$ , é feita da seguinte maneira :

$$x_n = x(t_n) = x(n\Delta t) ; \text{ com } n = -\frac{N}{2} \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \frac{N}{2} \quad (\text{A1 - 7})$$

A forma discretizada da correspondente descrição no domínio da frequencia,  $X_k$ , onde  $X_k$  são números *complexos*, terá também  $N$  pontos espaçados de  $\Delta f$ :

$$X_k = X(f_k) = X(k\Delta f) \quad ; \text{ com } k = -\frac{N}{2} \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \frac{N}{2} \quad (\text{A1 - 8})$$

onde,

$$\Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{N\Delta t} \quad (\text{A1 - 9})$$

e

$$f_{\pm\frac{N}{2}} = \pm f_c = \pm \frac{1}{2\Delta t} \quad \text{Freq. de Nyquist} \quad (\text{A1 - 10}).$$

As série  $x_n$  e  $X_k$  estão relacionadas pelas chamadas Transformadas Discretas de Fourier ( DFT ) dadas por:

- Transformada direta:

$$X_k = \sum_{n=-N/2}^{N/2} x_n e^{-2\pi i kn/N} \quad (\text{A1 - 11})$$

- Transformada Inversa :

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2} X_k e^{2\pi i kn/N} \quad (\text{A1 - 12})$$

Fisicamente, a representação no domínio da frequênci expressa a função temporal como uma superposição de senos e cossenos com ciclos *completos* no tempo de duração  $T$ . O par de equações acima possibilita ir e voltar de uma representação para outra.

A versão discreta e finita do Teorema de Parseval, para  $x_n$  real, é escrita como:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2} (x_n)^2 = \sum_{k=-N/2}^{N/2} \frac{|X_k|^2}{N} \quad (\text{A1 - 13})$$

onde, o lado esquerdo da equação representa o valor médio quadrático [  $\overline{(x^2)}$  ] da série temporal.

É importante observar que ambas as descrições contém a mesma quantidade de informação : no domínio do tempo, a série temporal *real*  $x_n$  contem  $N$  pontos ; no domínio da frequênci, a série *complexa*  $X_k$  , pela simetria mencionada acima, contém  $N/2$  pontos não-redundantes na sua parte real e  $N/2$  pontos não-redundantes na sua parte imaginária, num total de  $N$  pontos.

### **Transformada Rápida de Fourier ( FFT )**

A Transformada Discreta (Direta) de Fourier pode ser calculada de forma rápida e eficiente por meio de algoritmos especiais chamados de Transformadas Rápidas de Fourier (“Fast Fourier Transform” ou FFT ). No presente trabalho usou-se a FFT do MATLAB.

A rotina FFT do MATLAB, não apresenta resultados para frequências negativas. Os valores de  $X_k$  para frequências negativas são colocados na sequência das frequências positivas. Dessa forma, o índice  $k$  corre de 1 a  $N$  , sendo o ponto  $N/2$  a referência para a simetria dos valores de *Real* [  $X_k$  ] e da anti-simetria de *Imag* [  $X_k$  ].

O MATLAB dispõe também de uma rotina semelhante para cálculo da Transformada Discreta Inversa de Fourier ( IFFT ), que será utilizada mais adiante.

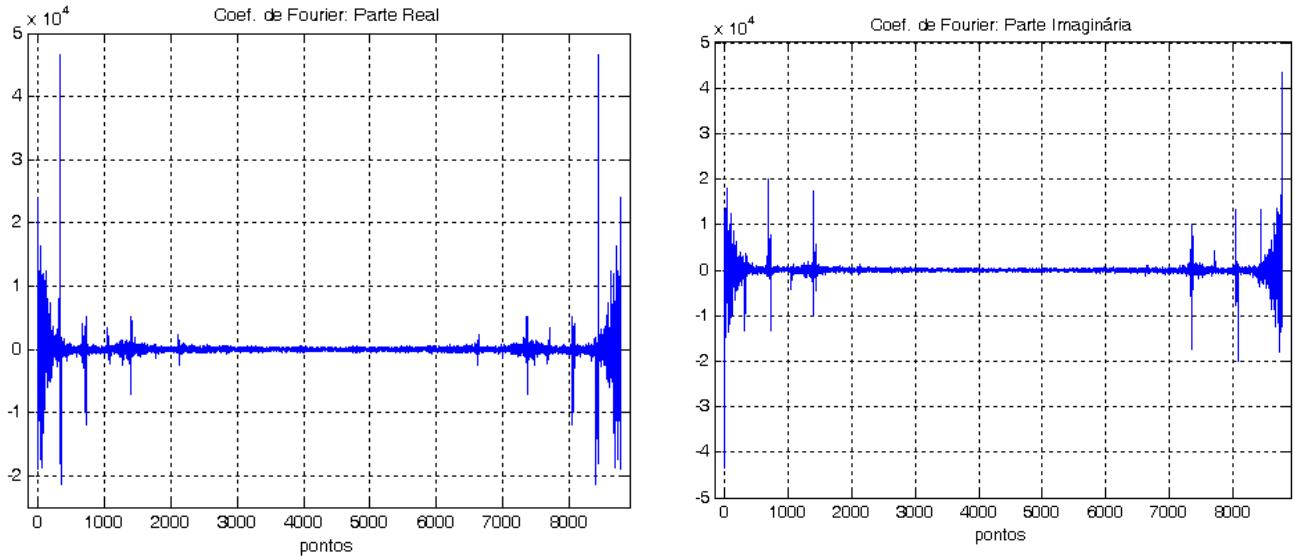
Observa-se que a rotina FFT do MATLAB não tem qualquer restrição quanto ao número de pontos a transformar (FFT's mais antigas demandavam que o número de pontos fosse igual a uma potênci de 2).

## Exemplo de Aplicação

Como exemplo de aplicação, a representação no domínio da frequência da série de dados da Maré Bruta para Rio Grande (GOOS) será detalhada a seguir :

A série  $x_n$  de dados temporais horários ( $\Delta t = 1 h$ ) com  $N$  pontos ( $N = 365 * 24 = 8760$  pts.), com média nula, foi usada como input da FFT resultando numa série de  $N$  números complexos ( $X_k$  - doravante referidos como *Coeficientes de Fourier*) com primeiro valor nulo (por conta da média zero da série temporal) e demais valores simétricos em relação ao ponto central ( $N/2$ ).

O resultado é apresentado na figura (A1-1) a qual mostra as partes Real ( $X_k^{real}$ ) e Imaginária ( $X_k^{imag}$ ) de  $X_k$ .



**Figura A1-1** – Representação no domínio da frequência ( $X$ ) da Maré Bruta. Painel esq.: parte Real de  $X$ ; Painel dir.: Parte Imaginária. Ambos os gráficos têm  $N = 8760$  pts.

Observar na figura a simetria/anti-simetria em relação ao ponto central da(s) parte(s) Real/Imaginária conforme previsto pela teoria.

Apesar de  $X_k^{real}$  e  $X_k^{imag}$  constituírem a essência da representação do domínio da frequência, é costume usar formas alternativas de representação conhecidas como “Espectros”. No presente trabalho usaremos o Espectro Uni-Lateral de Amplitude – também conhecido como Periodograma - e a Densidade Espectral de Energia (também uni-lateral). Em ambos, em vista da simetria, apenas a metade do total de pontos é usado.

O Espectro Uni-lateral de Amplitude – Periodograma - é definido como:

$$S_k = \frac{2}{N} |X_k|^2 \quad k = 1, 2, \dots, N/2 \quad (\text{A1 - 14})$$

A Densidade Espectral Uni-lateral de Energia (ou variancia) é definido por:

$$E_k = \frac{2}{N\Delta f} |X_k|^2 \quad k = 1, 2, \dots, N/2 \quad (\text{A1 - 15})$$

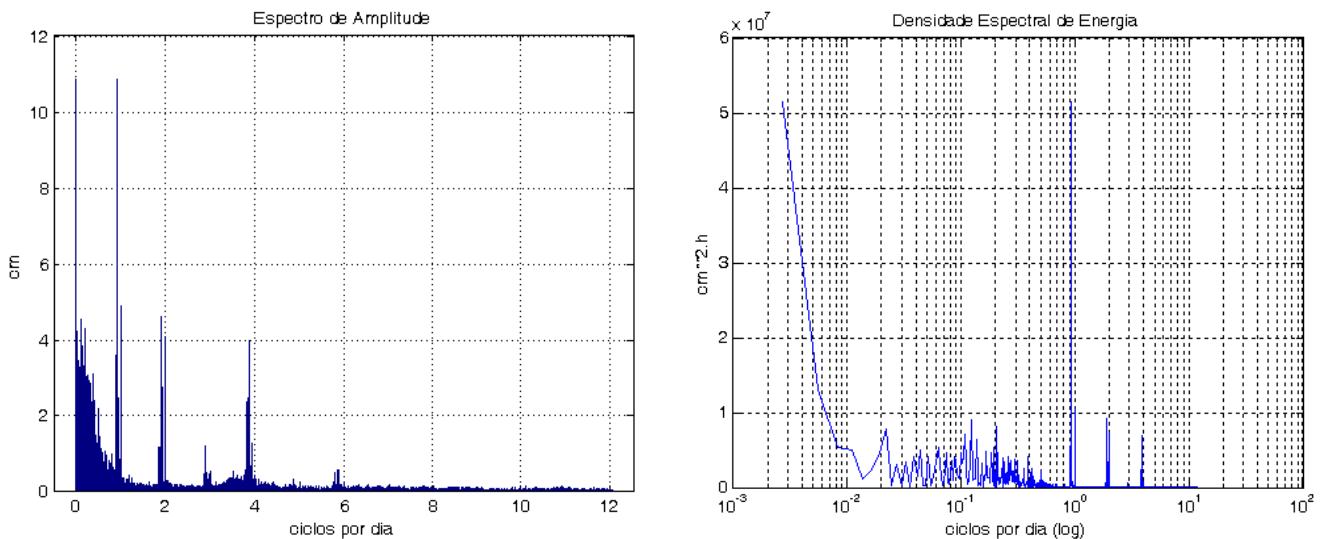
Para simplificar a notação, a palavra “Uni-lateral” ficará implícita.

Os Espectros foram montados segundo o seguinte procedimento:

- (i) Os *módulos* dos primeiros  $N/2$  coeficientes de Fourier foram calculados para compor os Espectros de Amplitude e de Energia de acordo com as eqs (A1-14) e (A1-15). Observa-se que nessas representações a informação sobre as *fases* das componentes de Fourier não são explicitadas.
- (ii) O eixo-x de ambos os Espectros foram montados com valores espaçados de  $\Delta f = 1/(N\Delta t)$  [  $\Delta f = 1/8760 h^{-1}$  onde  $h^{-1}$  = ciclos por hora c.p.h. ], sendo o valor máximo de frequência  $f_{max} = 1/(2\Delta t)$  [  $f_{max} = 1/2 h^{-1}$  freq. de Nyquist ].

- (iii) Para facilitar o entendimento, o eixo das frequências foi re-escalado multiplicando-se as frequências por 24 de forma a indicar frequências em ciclos por dia (*c.p.d.*).

O resultado para o caso em tela está mostrado na Figura (A1-2).



**Figura A1-2** – Representação no domínio da Frequência – Espectros de Amplitude em escala linear (esq.) e de Densidade de Energia em escala semi-logarítmica (dir.) para Maré Bruta de Rio Grande (GOOS) para o ano de 2003.

O teorema de Parseval [eq. (A1-13)] foi usado para verificação da metodologia. Para tanto, o valor médio quadrático da série temporal e a média dos módulos dos Coef. de Fourier ao quadrado foram calculado e os valores obtidos foram precisamente iguais.

É importante ressaltar que a Densidade Espectral de Energia obtida acima *não* pode ser usada para representar o “Espectro de Energia” do *processo* físico que originou a série temporal pelo fato desta série ter duração finita. Nesse ponto, a representação no domínio da frequência precisa ser abordada num contexto *estatístico*, sendo a Densidade Espectral de Energia acima considerada como um simples *estimador* do Espectro de Energia do *processo* físico. Para que o estimador se aproxime do valor real é necessário utilizar técnicas de *alisamento* (“smoothing”) as quais vão melhorar a precisão do estimador. Tais técnicas fogem do escopo dessa simples revisão mas podem ser encontradas na literatura sobre o assunto como, por exemplo, no já citado livro de Bendat e Piersol (1999). Esse assunto foi também tratado de forma simples em Melo Fº (1982).

## REFERÊNCIAS:

BENDAT, J. S.; PIERSOL, A. G. **Measurement and Analysis of Random Data**. Ed. Wiley, 390 p., 1999.

MELO Fº, E. **Investigações sobre a Análise da Agitação Marítima**. Dissertação (Mestrado), Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 138 p., 1982.

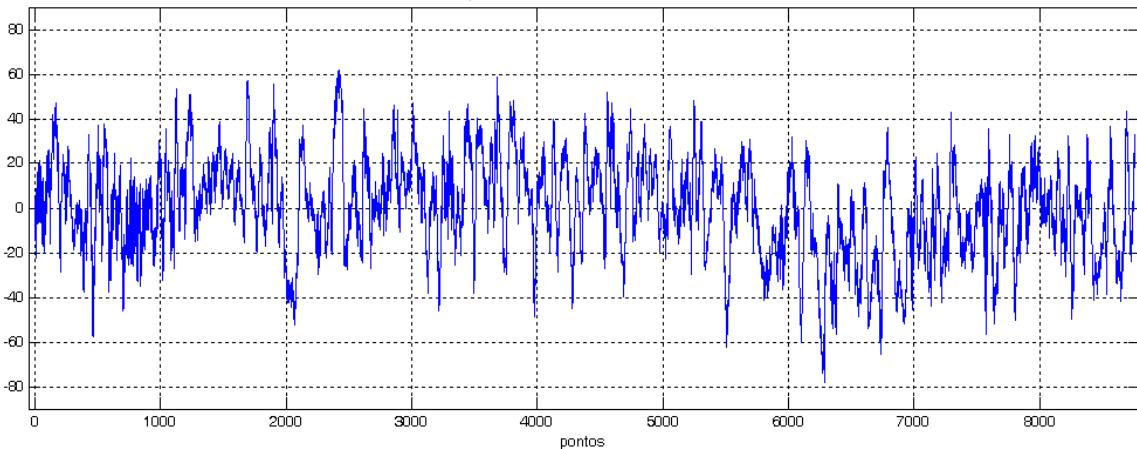
## APÊNDICE 2

### Filtragem (Decomposição) via Transformada Rápida de Fourier

Um passo de importância fundamental no presente trabalho foi a possibilidade de identificar e *decompor/filtrar* a série temporal dos parâmetros relevantes segundo as diferentes bandas de frequência.

A filtragem usada no presente trabalho é realizada no domínio da frequência via par de transformadas rápidas de Fourier: transformada direta (FFT) e inversa (IFFT). A presente sessão é dedicada à descrição detalhada dessa técnica de filtragem de séries temporais, feita através de uma aplicação.

O ponto de partida é a série temporal a ser filtrada. A série a ser trabalhada nesse exemplo será o Nível não-Astronômico em Rio Grande (dados GOOS) com  $N=8670$  pts, *sem* falhas [figura (A2-1)]. Para que essa técnica seja possível, a série não pode apresentar *nenhuma* lacuna.

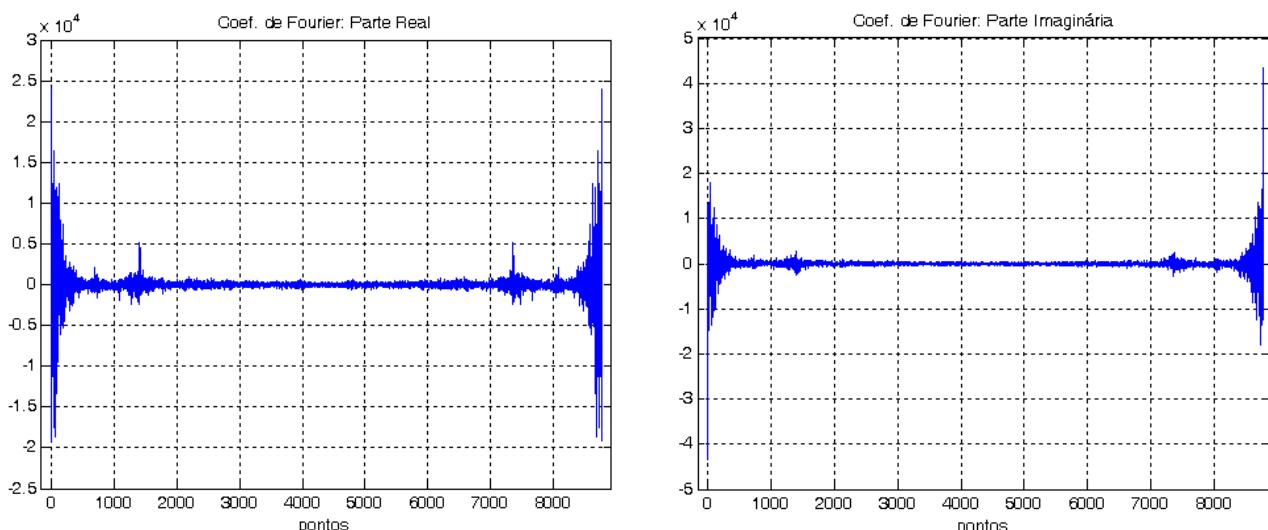


**Figura A2-1** – Série temporal de nível não-astronômico medida em Rio Grande para o ano de 2003

#### Teste Preliminar

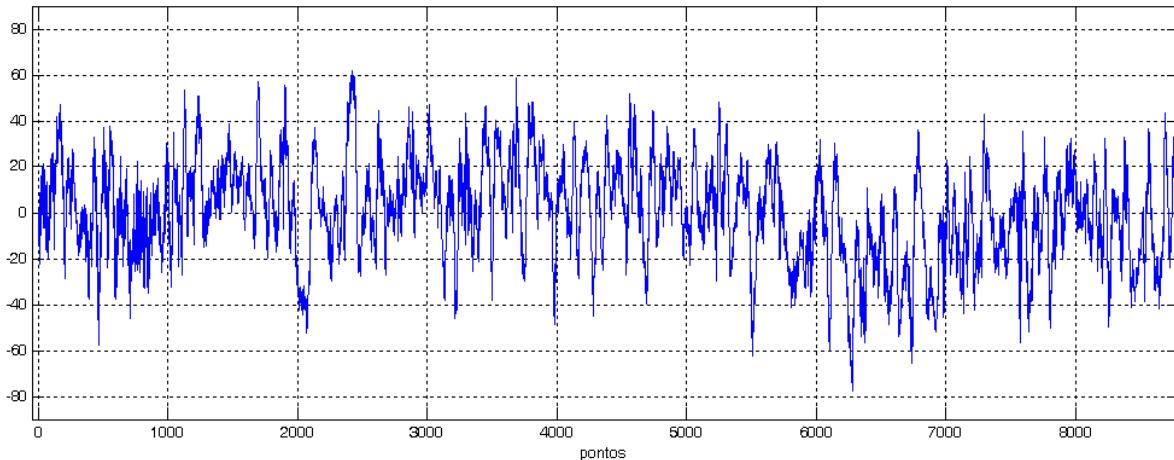
No intuito de avaliar a precisão das funções FFT e IFFT do MATLAB, foi realizado um teste no qual a série temporal original foi transformada para o domínio da frequencia via FFT e depois reconstituída no domínio do tempo via IFFT. O teste é apresentado a seguir.

- A FFT da série temporal resulta em  $N$  Componentes (complexos) de Fourier cujas partes Real e Imaginária são mostrados na figura (A2-2).



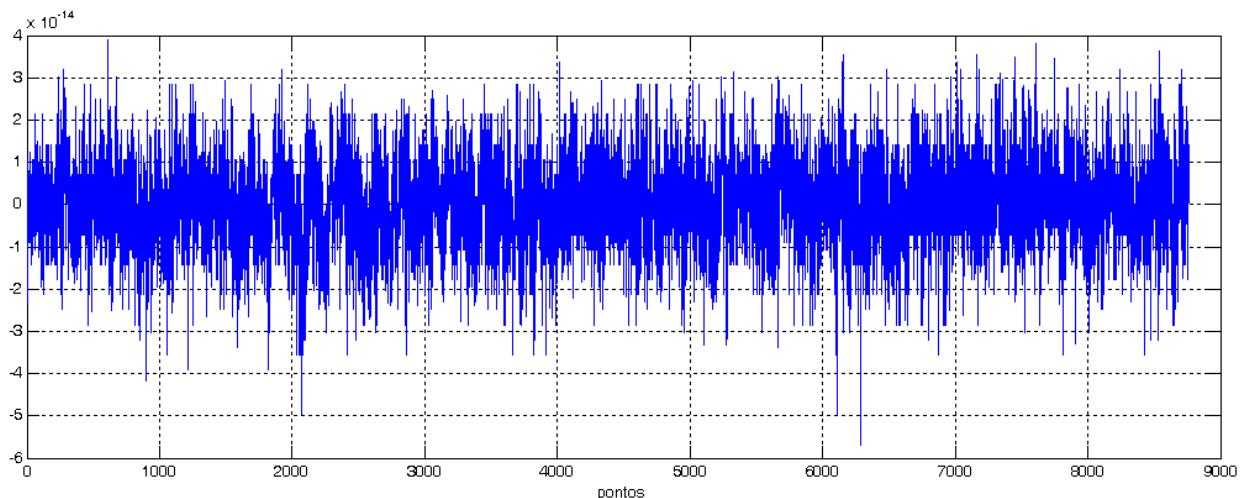
**Figura A2-2** – Partes Real e Imaginária do resultado da FFT da série temporal de nível não-astronômico. Ambos os gráficos têm  $N = 8760$  pts.

- Reconstituição da Série Temporal por meio da Transformada Rápida Inversa de Fourier (IFFT). Para tanto, os  $N$  Coeficientes (complexos) de Fourier foram usados como input da função IFFT do MATLAB resultando em  $N$  valores reais. A série temporal ( $N$  pts) *reconstituída* corresponde à parte Real da saída da IFFT. O resultado está mostrado na figura (A2-3).



**Figura A2-3** – Série temporal de nível não-astronômico em Rio Grande para o ano de 2003 *reconstituída* a partir da Transformada Rápida Inversa de Fourier (IFFT)

Visualmente é impossível detectar qualquer diferença entre a série reconstituída e a original. Para confirmar que as duas séries são efetivamente idênticas, a figura (A2-4) mostra a diferença entre as séries.

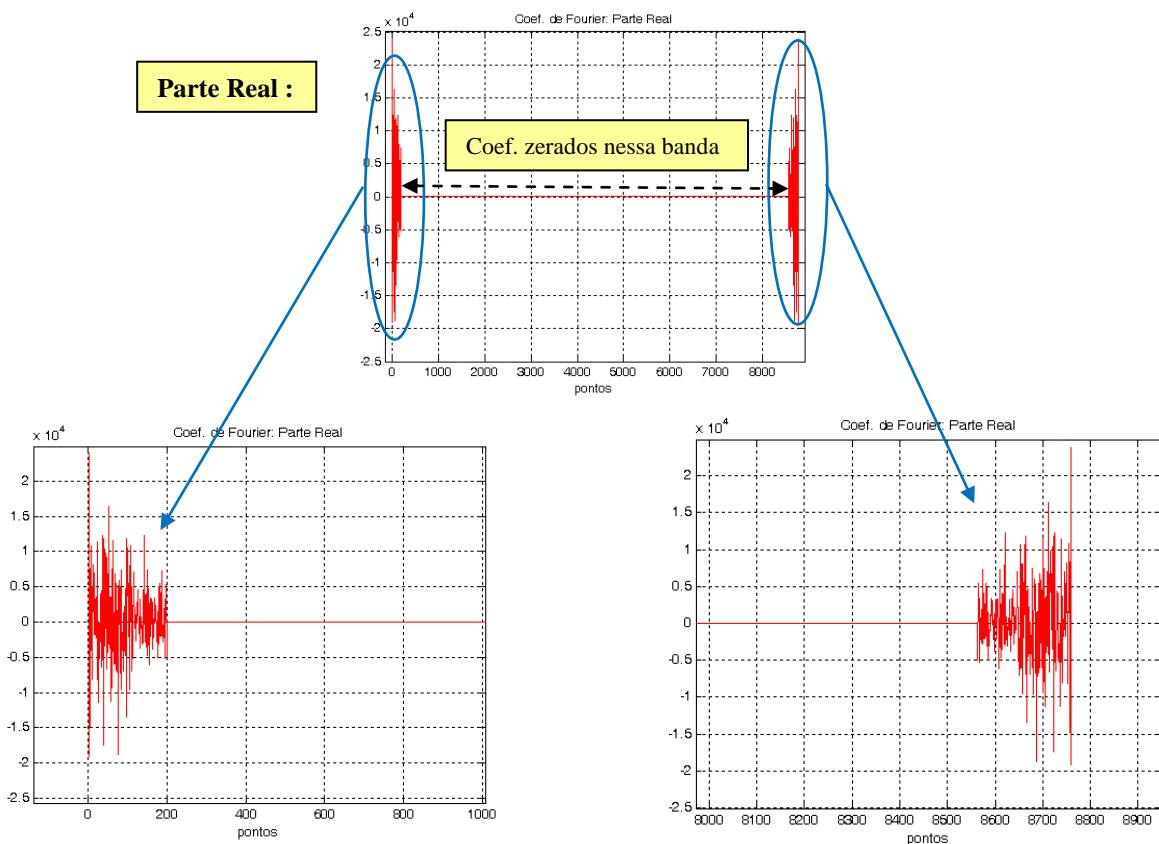


**Figura A2-4** – Diferença entre a série original e a reconstituída. Observar escala do eixo vertical ( $\times 10^{-14}$ )

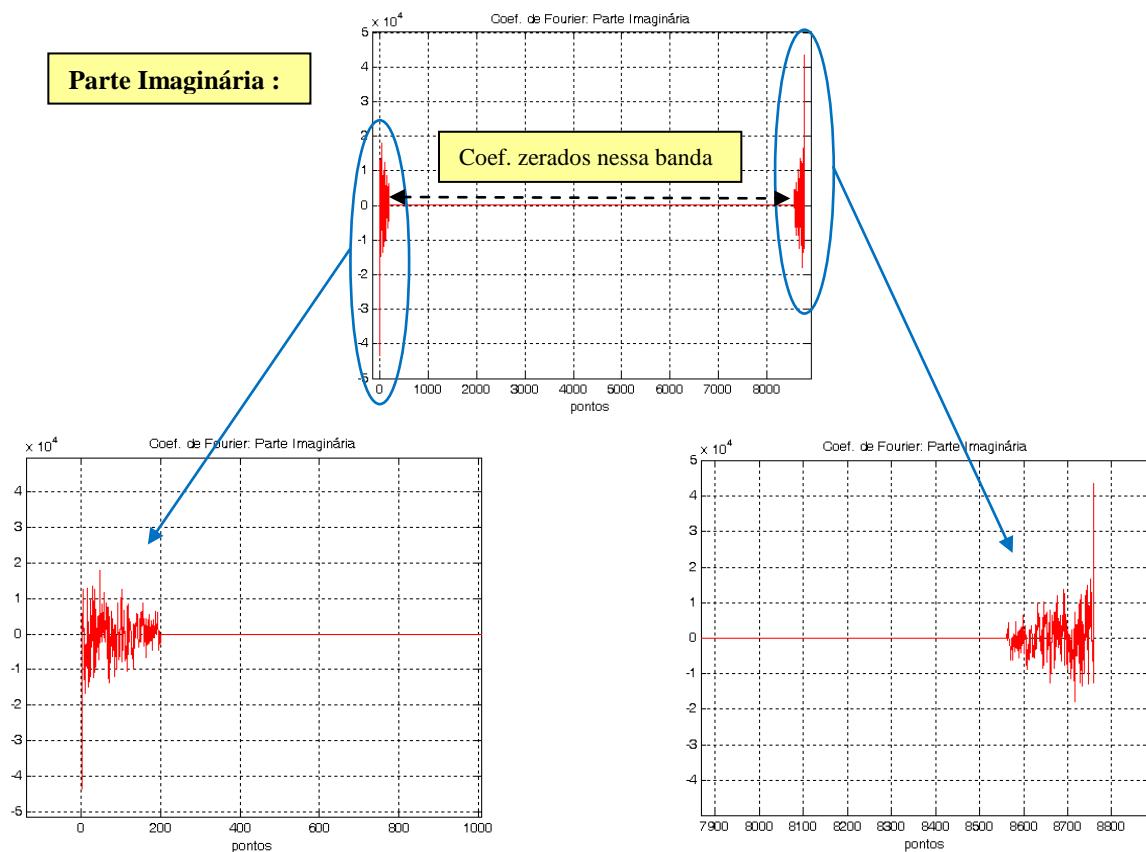
O “erro” tem ordem de grandeza de  $10^{-14}$  cm (ver unidade no eixo vertical do gráfico) confirmando que a IFFT logrou reconstituir exatamente a série original dentro do limite de precisão do computador usado.

### Filtragem via Transformada Rápida de Fourier (“FFT Filtering” )

Para explicar a técnica da filtragem via Transformada de Fourier, continuarei usando o exemplo acima. Suponhamos que se deseje realizar uma *filtragem passa-baixa* da série temporal anual mantendo frequências abaixo de  $1/44.2 h^{-1} = 0.54 c.p.d.$ . O primeiro passo do processo de filtragem consiste simplesmente em *zerar* os Coef. de Fourier (Partes Real e Imaginária) *fora* da banda de frequência de interesse levando em conta a simetria/anti-simetria dos coeficientes em relação ao ponto central. Em outras palavras, após a filtragem os Coef. de Fourier devem sempre ter a metade direita como o reflexo num espelho da metade esquerda (excetuando o primeiro ponto) para a parte Real e o reflexo invertido para a parte Imaginária. As figuras (A2-5) e (A2-6) ilustram o procedimento.

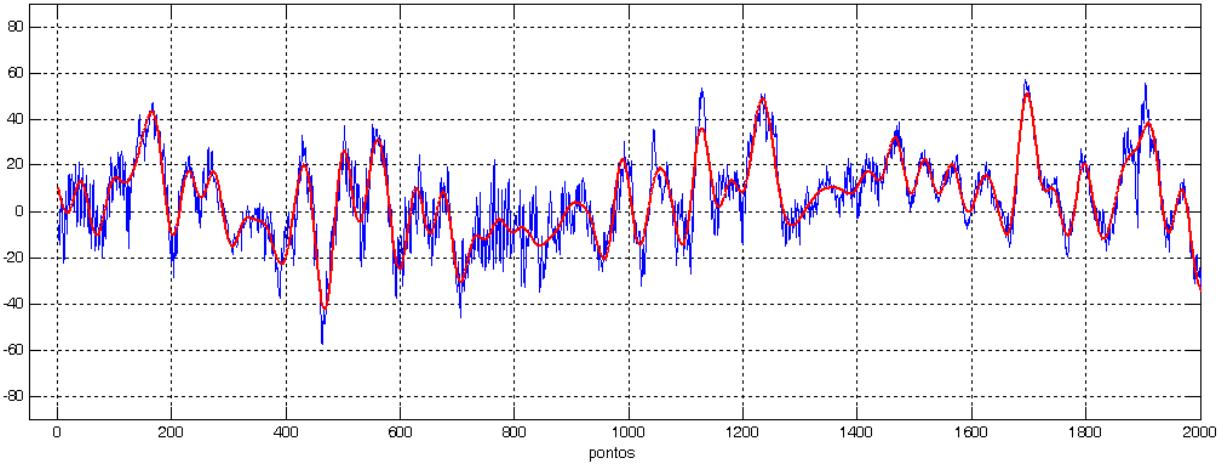


**Figura A2-5 – Parte Real dos Coef. de Fourier aps filtragem. Painel superior: srie completa. Painéis inferiores: amplaoo das partes esquerda e direita (observar simetria).**



**Figura A2-6 – Parte Imaginária dos Coef. de Fourier aps filtragem. Painel superior: srie completa. Painéis inferiores: amplaoo da parte esquerda e direita (observar anti-simetria).**

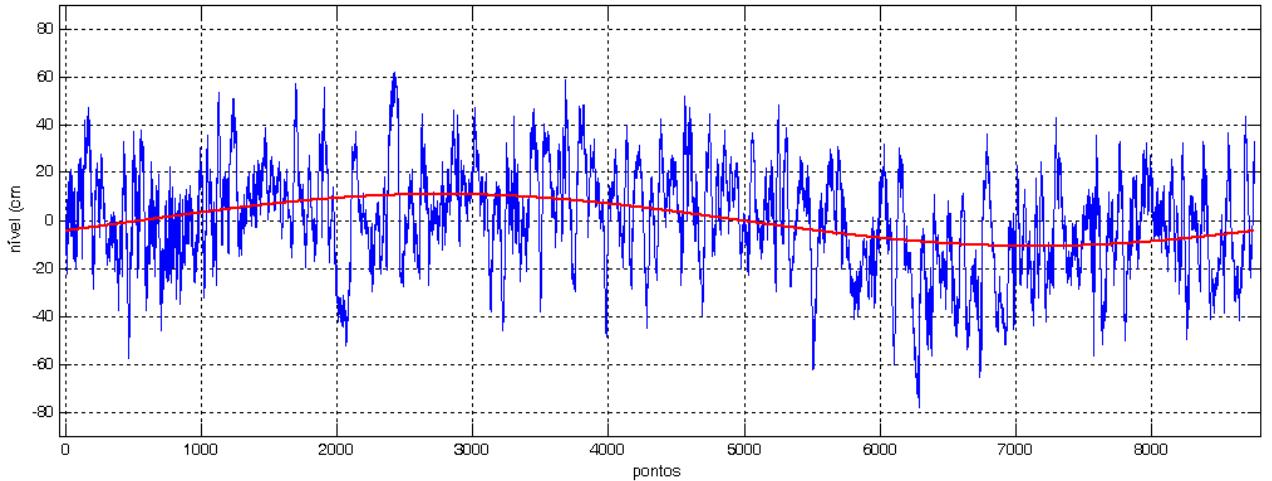
Para obter a série temporal filtrada, basta usar os Coef. de Fourier filtrados (N pts.) como input na Transformada Rápida Inversa de Fourier (IFFT). Como no teste mostrado anteriormente, a série temporal correspondente é dada pela parte Real do resultado. A figura (A2-7) ilustra o resultado para o exemplo em questão.



**Figura A2-7** – Em **vermelho**: trecho (com 2000 pts.) da série temporal filtrada via FFT com filtro *passa-baixa* com frequência de corte ajustada para  $f_c = 1/44.2 \text{ h}^{-1} = 0.0226 \text{ c.p.d.}$ . A série filtrada resulta da IFFT feita usando os coef. de Fourier com parte zerada, mostrados nas figuras A2-5 e A2-6

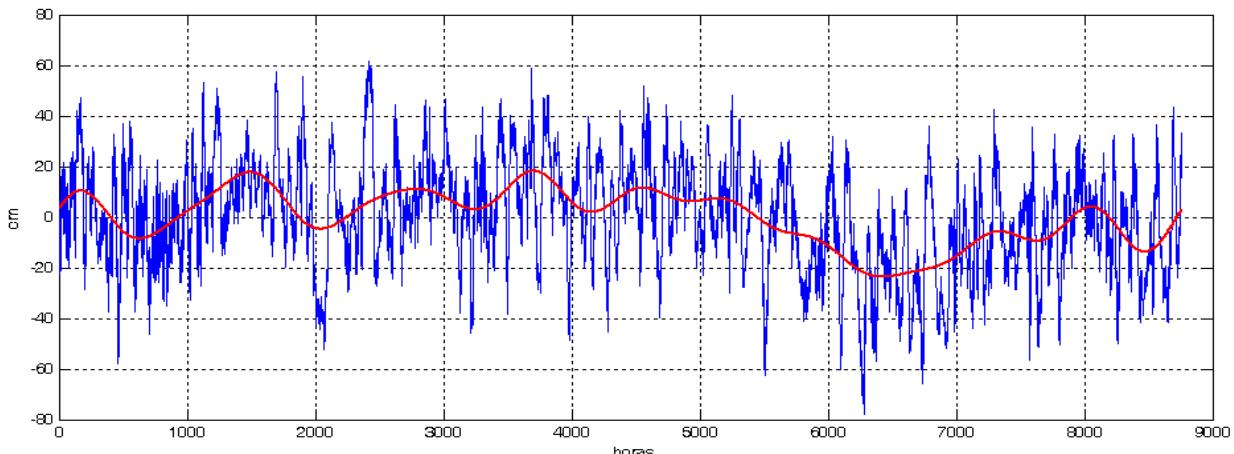
O procedimento acima possibilita *total* flexibilidade quanto às filtragens que se pode realizar. De fato, para efetuar uma filtragem *passa-alta*, por exemplo, basta zerar os Coef. de Fourier *até* o ponto correspondente à frequência de corte, atentando sempre para a simetria em relação ao ponto central, e depois retornar ao domínio do tempo com a função IFFT para obter a série filtrada.

O procedimento pode ser usado para fazer filtragens *passa banda* sem *qualquer* restrição quanto à largura da banda. Para tanto, tem-se apenas que zerar as faixas de frequência *fora* da banda de interesse e repetir o passo acima. Para ilustrar essa característica, a figura (A2-8) mostra o resultado de uma filtragem passa-banda na qual a banda filtrada contém apenas a componente de periodicidade anual.



**Figura A2-8** - Filtragem FFT da componente anual do NnA (linha **vermelha**)

Como outra ilustração, a figura (A2-9) mostra a série temporal do NnA filtrado via FFT com filtro *passa-baixa* com frequência de corte ajustada para  $f_c = 1/(30*24) h^{-1} = 0.0333 c.p.d$ . Essa filtragem contempla flutuações com períodos compreendidos entre 1 ano e 30 dias.



**Figura A2-9** - Série temporal do NnA (linha azul) e a série filtrada via FFT (linha vermelha) com filtro *passa-baixa* com frequência de corte ajustada para  $f_c = 1/(30*24) h^{-1} = 0.0333 c.p.d$ .

### Filtragem no domínio do Tempo

Mesmo não tendo sido usada, a filtragem no domínio do tempo merecerá atenção no presente trabalho por ser uma técnica simples, de fácil aplicação e, por isso, bastante utilizada para filtragens de registros de maré. A equivalência das duas técnicas de filtragem também será analisada ao final dessa seção.

O princípio básico da técnica de filtragem no domínio do tempo consiste na convolução da série temporal com a função filtro correspondente ao filtro em questão. A operação de convolução nada mais é do que a aplicação de uma média móvel ponderada à série temporal. O número de pontos e os pesos usados estabelecem a resposta do filtro. Dentre os vários filtros disponíveis (Lanczos, Godin, etc), escolheu-se o filtro passa baixa de Thompson face aos bons resultados obtidos por Kalil (1999) e Uaissone (2004).

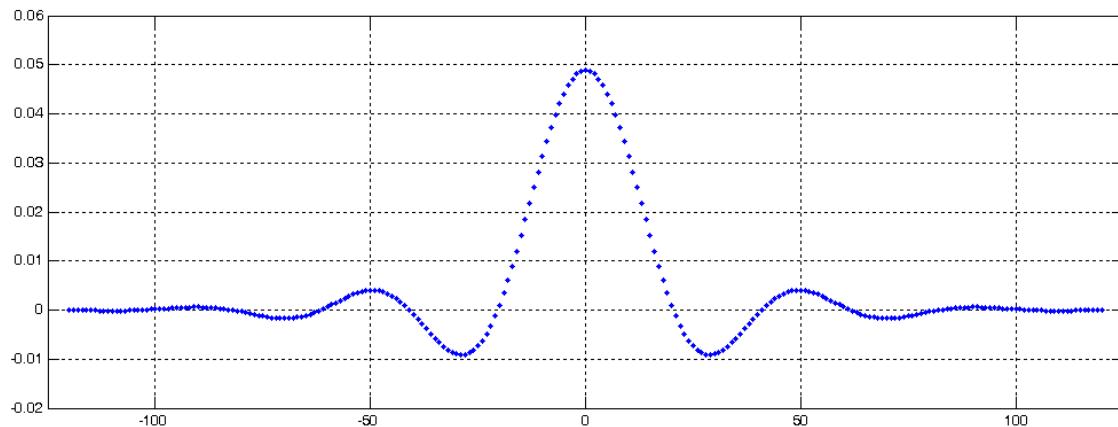
O filtro de Thompson utilizado na presente ilustração é idêntico ao usado pelos autores supra citados e tem as seguintes características:

- Número de pontos : 241, com valores apresentados na Tabela A2-1 e, de forma gráfica, na figura A2-10.

Tabela 2 – Pesos do Filtro de Thompson utilizado. (mostrados 120 pts., os outros 120 pts. são simétricos)

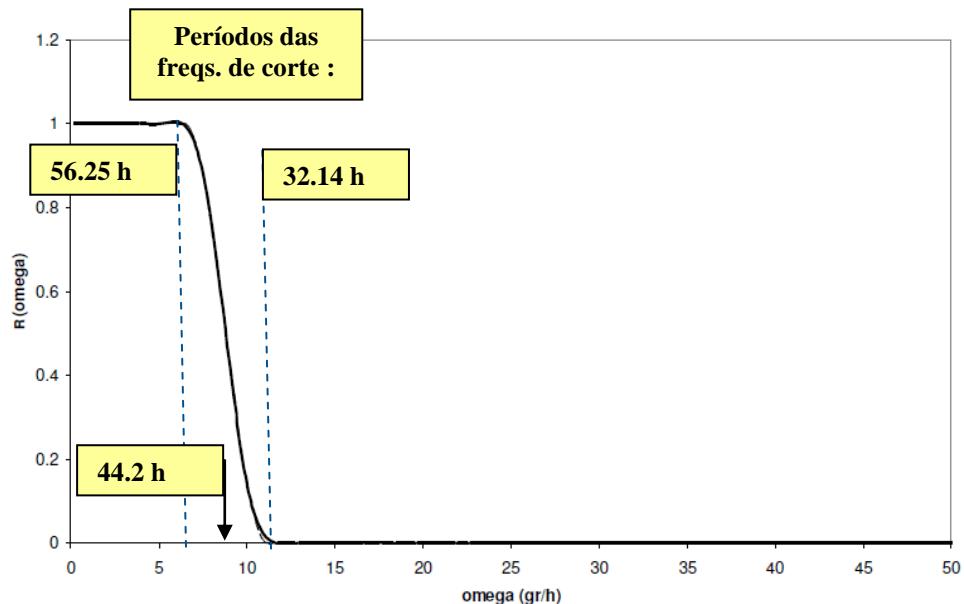
Pto.	Peso	Pto.	Peso	Pto.	Peso
0	0.048892				
1	0.048695	41	0.000057	81	-0.00019
2	0.048105	42	0.000897	82	-0.000041
3	0.047127	43	0.00165	83	0.000098
4	0.045776	44	0.002308	84	0.000226
5	0.044069	45	0.002863	85	0.000338
6	0.042035	46	0.003311	86	0.000431
7	0.039705	47	0.003647	87	0.000501
8	0.037115	48	0.003871	88	0.000549
9	0.034302	49	0.003982	89	0.000578
10	0.031306	50	0.003988	90	0.000592
11	0.028169	51	0.003898	91	0.000589
12	0.024937	52	0.003723	92	0.000571
13	0.021657	53	0.003474	93	0.000537
14	0.018374	54	0.003161	94	0.000491

15	0.015136	55	0.002795	95	0.00044
16	0.011984	56	0.002388	96	0.000388
17	0.008959	57	0.001954	97	0.000337
18	0.006096	58	0.001506	98	0.000286
19	0.003428	59	0.001055	99	0.000233
20	0.000982	60	0.000614	100	0.000177
21	-0.00122	61	0.000191	101	0.000121
22	-0.00317	62	-0.0002	102	0.0000685
23	-0.00484	63	-0.00056	103	0.0000199
24	-0.00624	64	-0.00088	104	-0.000025
25	-0.00736	65	-0.00114	105	-0.000066
26	-0.0082	66	-0.00136	106	-0.0001
27	-0.00877	67	-0.00152	107	-0.00013
28	-0.00909	68	-0.00163	108	-0.00015
29	-0.00916	69	-0.0017	109	-0.00015
30	-0.009	70	-0.00172	110	-0.00015
31	-0.00865	71	-0.00169	111	-0.00014
32	-0.00812	72	-0.00163	112	-0.00013
33	-0.00744	73	-0.00153	113	-0.00012
34	-0.00664	74	-0.0014	114	-0.00011
35	-0.00575	75	-0.00125	115	-0.000098
36	-0.00481	76	-0.00108	116	-0.000082
37	-0.00382	77	-0.0009	117	-0.000064
38	-0.00281	78	-0.00071	118	-0.000041
39	-0.00182	79	-0.00052	119	-0.0000093
40	-0.00085	80	-0.00035	120	0.0000355



**Figura A2-10 – Gráfico dos pesos do filtro de Thompson utilizado**

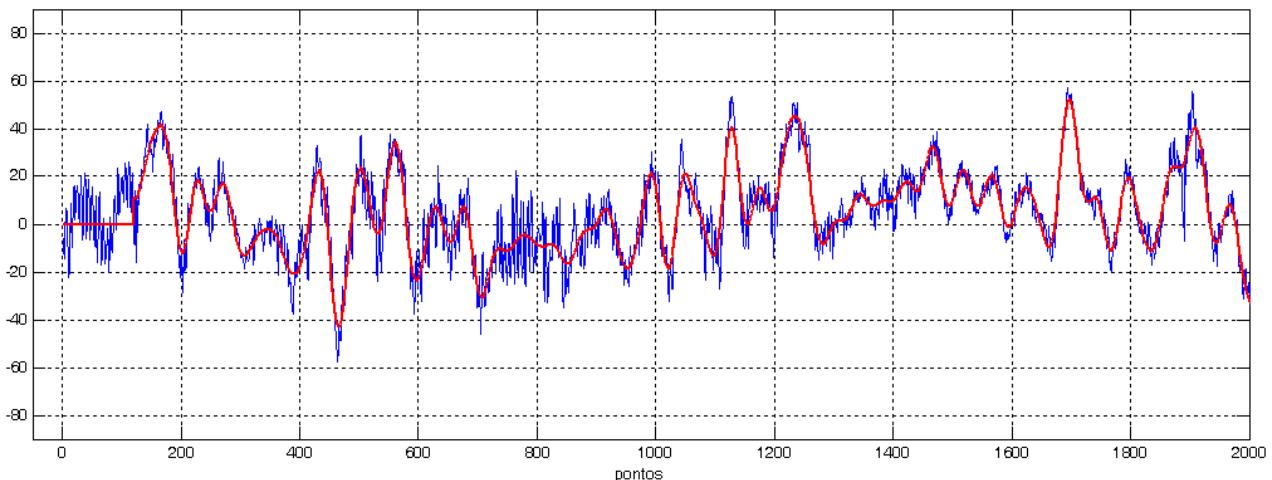
A curva de resposta do filtro no domínio da frequência está mostrada na figura (A2-11), juntamente com os dois limites das frequências de corte [ fonte: Uaissone (2004) ].



**Figura A2-11** - Curva de Resposta do filtro de Thompson [ extraída de Uaissone (2004) ].

A frequência de corte média do filtro corresponde ao período de 44.2 h, que foi o período usado para definir a frequência de corte do filtro FFT no exemplo acima, de forma a facilitar a comparação.

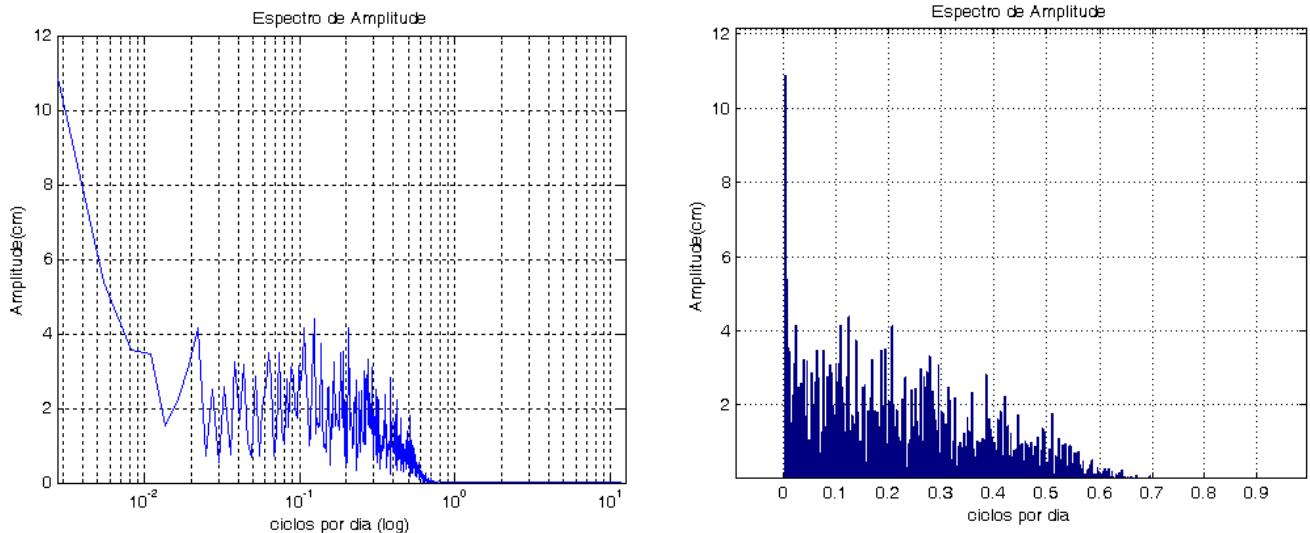
A figura (A2-12) mostra um trecho (com 2000 pts.) da série temporal resultante da filtragem do NnA com o filtro de Thompson.



**Figura A2-12** – Linha vermelha: trecho (com 2000 pts.) da série temporal do NnA filtrada com o filtro de Thompson.

Observar a perda de 120 pontos de dados (120 hs) no início do gráfico devido à implementação da média móvel. É possível “driblar” essa perda inserindo dados fictícios (120 pts, no caso) antes do ínicio (e depois do fim) da série, porém tal prática introduz elementos arbitrários que comprometem a confiança do resultado e por isso não foi adotada.

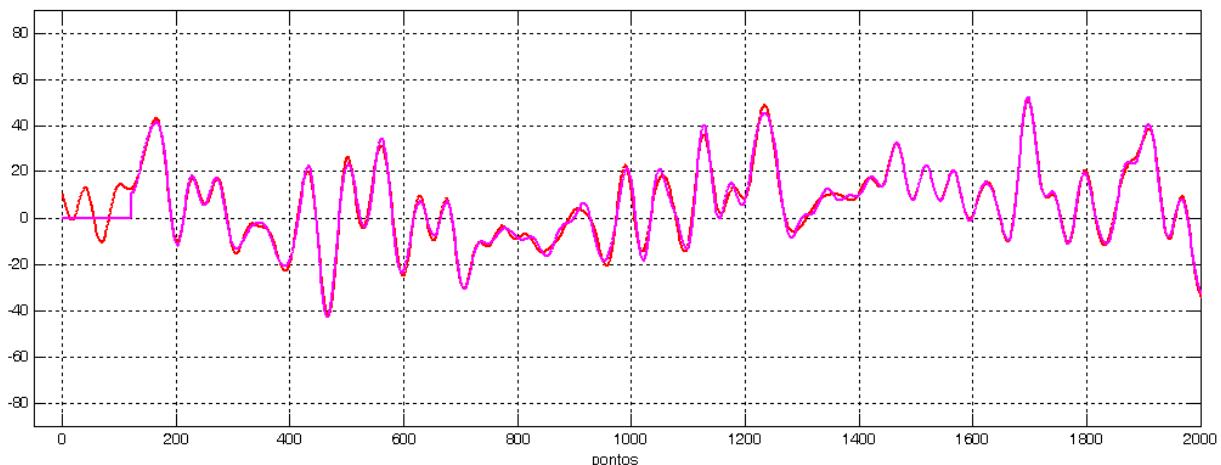
Como se pode observar no Espectro mostrado na figura (A2-13), a aplicação do filtro realmente elimina as componentes com frequências maiores que a frequência de corte.



**Figura A2-13** - Espectros de Amplitude da série filtrada com filtro de Thompson: gráfico semi-log (painel esq.) e trecho inicial do gráfico linear (painel dir.)

#### Equivalência entre a filtragem no domínio do tempo com filtro de Thompson e a filtragem via FFT

A equivalência entre as duas técnicas de filtragem pode ser avaliada comparando as séries filtradas pelas duas maneiras na figura (A2-14). A filtragem via Transformada de Fourier foi feita com frequência de corte ajustada para  $f_c = 1/44.2 \text{ h} = 0.0226 \text{ c.p.d.}$



**Figura A2-14** – Séries temporais de NnA filtradas via FFT (linha **vermelha**) e com filtro de Thompson (linha **magenta**).

A equivalência entre as duas técnicas de filtragem é evidente na figura.

#### REFERÊNCIAS

KALIL, A.F.D. **Contribuições ao Estudo do Nível Médio do Mar no Estado do Rio de Janeiro**. Dissertação (Mestrado), Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 88 p., 1999.

UAISSONE, A.J.R. **Influência das Forçantes Atmosféricas em Mesoescala sobre o Nível Médio do Mar em Piraquara, RJ**. Dissertação (Mestrado), Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 138 p., 2004.

## APÊNDICE 3

### Comparação entre os dados da RG Pilots e do acervo GOOS

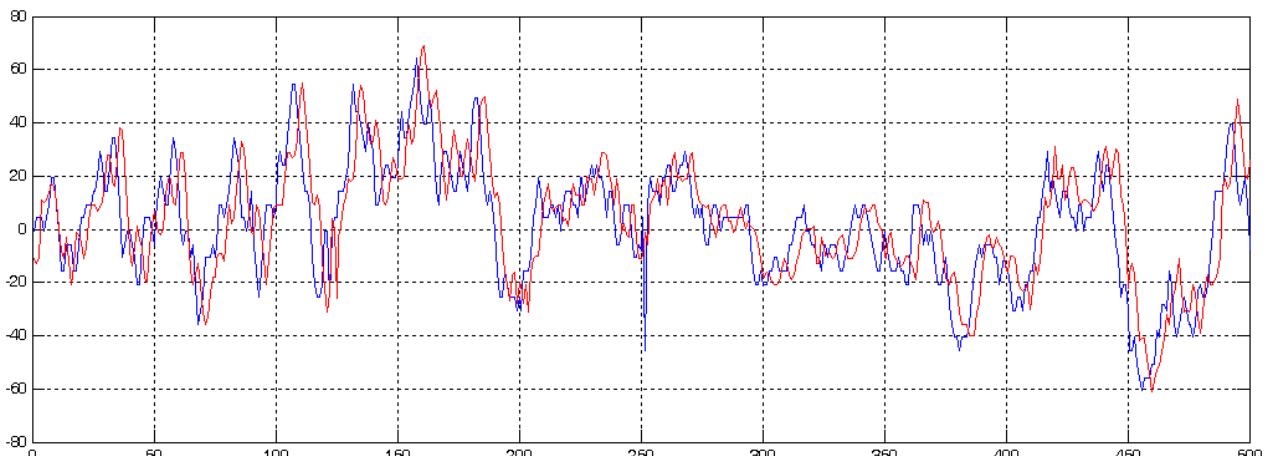
O ano de 2003 foi escolhido para a comparação porque nesse período há medições simultâneas do GOOS-Brasil e do RG Pilots ambas coletadas no mesmo local: o cais da praticagem do Porto de Rio Grande, cuja localização está mostrada na figura II.2 do Capítulo II. Como todos os dados do acervo GOOS, os dados de Rio Grande são medições horárias *instrumentais*. Já as observações da RG Pilots são fruto de leitura visual horária de uma régua instalada no cais. A resolução da observação (visual) da RG Pilots, foi de 2.5 cm em algumas situações e, na maior parte do tempo, de 5 cm. Não há informação sobre o controle do momento da observação a qual, a princípio, ocorre na hora cheia.

Para o ano de 2003, os dados do GOOS encontram-se 100% completos, não apresentando qualquer ponto discrepante ou falha de observação (série de 365 dias com 8760 observações horárias). Os dados do RG Pilots apresentam um total de 25 horas (9+4+7+5 pts) sem observação que puderam ser preenchidas a “sentimento” sem maiores dificuldades.

Dois aspectos chamaram a atenção do autor na comparação dos dados.

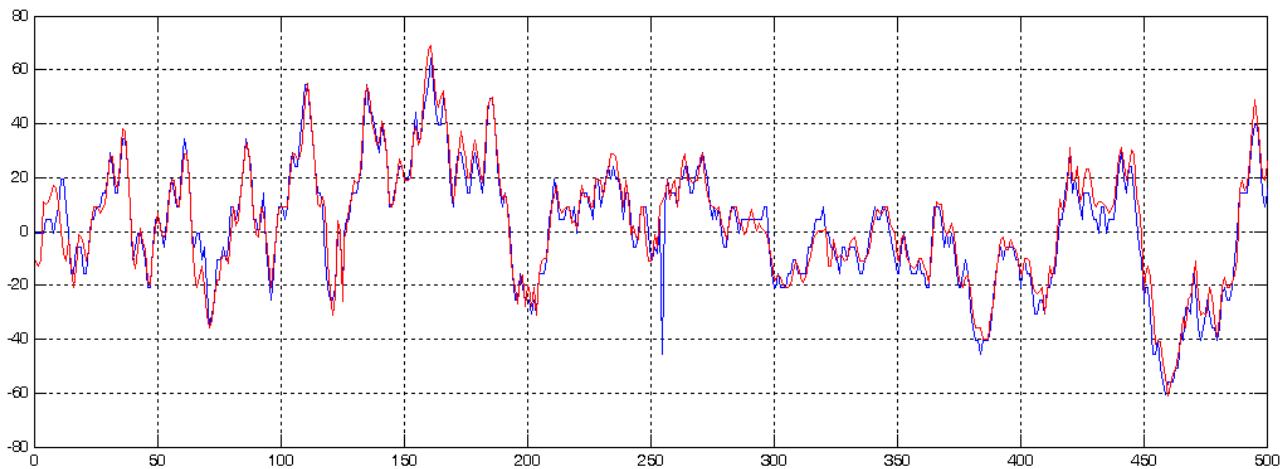
O primeiro diz respeito aos valores absolutos das medições que, idealmente, deveriam estar niveladas ou “reduzidas” a algum referencial de nível do sistema altimétrico nacional. Lamentavelmente, não foi possível encontrar informações sobre a redução das medições do GOOS. O nivelamento da régua da RG Pilots também não ficou devidamente esclarecido. Entretanto, como o presente estudo trata apenas das variações de nível (e não dos seus valores absolutos) o problema foi contornado simplesmente referenciando ambas as medições ao nível médio anual de cada uma. Com isso passou-se a ter valores positivos (acima da média) e negativos (abaixo da média) em ambas as séries.

O segundo aspecto diz respeito a uma defasagem de 3 horas que foi detectada entre as duas séries, conforme ilustra a figura (A3-1).



**Figura A3.1** - Trecho das séries temporais com 500 horas de duração. Dados GOOS – linha vermelha; Dados RG Pilots originais – linha azul.

Pela falta de informação, o autor suspeita que a origem dessa defasagem possa estar numa diferença na referência do tempo usada em cada medição. Admitindo que os dados GOOS estejam referidos a hora GMT e que os dados RG Pilots usem a hora local, a diferença seria de 3 horas. Para resolver o problema, o seguinte procedimento foi adotado: os 3 pontos iniciais da série RG Pilots foram simplesmente repetidos e os 3 últimos pontos foram excluídos de modo a manter a duração total da série em 8760 pontos. Esse procedimento eliminou a defasagem conforme mostra a figura (A3-2).



**Figura A3-2** - Trecho das séries temporais com 500 horas de duração. Dados GOOS – linha **vermelha**; Dados RG Pilots defasados de 3 horas – linha **azul**.

A série defasada de 3 horas passou a ser considerada como a medição “oficial” da RG Pilots.

Como primeiro passo, o T\_Tide foi usado para determinação da Maré Astronômica para Rio Grande a partir dos dados da RG Pilots. A saída do T-Tide mostrando as constantes harmônicas está apresentada na tabela A3-1.

```

nobs = 8760, ngood = 8759, record length (days) = 365.00
start time: 01-Jan-2003
rayleigh criterion = 1.0
Greenwich phase computed with nodal corrections applied to amplitude \n and phase
relative to center time

x0= 0.00454, x trend= 0

var(x)= 551.7387 var(xp)= 139.0103 var(xres)= 412.7964
percent var predicted/var original= 25.2 %

      tidal amplitude and phase with 95% CI estimates

```

tide	freq	amp	amp_err	pha	pha_err	snr	tide	freq	amp	amp_err	pha	pha_err	snr
SSA	0.0002282	4.5530	4.578	186.59	66.82	0.99	*M2	0.0805114	2.8942	0.358	322.92	7.47	65
MSM	0.0013098	0.2655	3.526	155.04	225.64	0.0057	*MKS2	0.0807396	0.4089	0.275	195.53	44.74	2.2
MM	0.0015122	0.6206	4.095	225.94	225.35	0.023	LDA2	0.0818212	0.2198	0.302	87.18	94.34	0.53
MSF	0.0028219	0.8484	3.889	339.32	182.86	0.048	L2	0.0820236	0.3429	0.311	305.33	60.96	1.2
MF	0.0030501	2.4929	4.148	358.18	121.62	0.36	*S2	0.0833333	3.8890	0.347	141.13	5.97	1.3e+002
ALP1	0.0343966	0.1088	0.416	343.50	201.13	0.069	*K2	0.0835615	1.5531	0.289	121.09	12.47	29
2Q1	0.0357064	0.5173	0.611	68.72	69.09	0.72	MSN2	0.0848455	0.2039	0.268	284.75	110.51	0.58
SIG1	0.0359087	0.4678	0.624	68.68	78.90	0.56	ETA2	0.0850736	0.3169	0.240	197.74	46.81	1.7
*Q1	0.0372185	3.0629	0.640	75.31	10.26	23	*M03	0.1192421	0.4724	0.245	131.57	32.62	3.7
RHO1	0.0374209	0.4760	0.505	107.11	70.03	0.89	*M3	0.1207671	1.1098	0.261	310.38	14.45	18
*O1	0.0387307	11.3584	0.630	116.74	3.05	3.3e+002	*S03	0.1220640	0.4862	0.238	144.30	28.35	4.2
TAU1	0.0389588	0.3188	0.602	177.92	137.70	0.28	*MK3	0.1222921	0.5954	0.241	121.49	25.94	6.1
BET1	0.0400404	0.4442	0.555	127.46	79.94	0.64	*SK3	0.1251141	0.5717	0.254	156.60	27.69	5.1
*NO1	0.0402686	0.7169	0.479	143.03	49.79	2.2	*MN4	0.1595106	2.3558	0.495	263.82	9.94	23
CHI1	0.0404710	0.3129	0.502	69.85	101.64	0.39	*M4	0.1610228	4.1814	0.515	302.84	6.08	66
*P1	0.0415526	1.8873	0.675	180.48	22.07	7.8	SN4	0.1623326	0.4941	0.448	344.61	57.59	1.2
*K1	0.0417807	4.4672	0.638	186.39	7.84	49	*MS4	0.1638447	1.5012	0.474	24.99	17.36	10
PHI1	0.0420089	0.7047	0.634	134.90	54.73	1.2	MK4	0.1640729	0.2590	0.353	333.08	84.67	0.54
THE1	0.0430905	0.2685	0.492	282.26	128.19	0.3	S4	0.1666667	0.3991	0.407	9.60	71.97	0.96
J1	0.0432929	0.4268	0.499	119.80	93.62	0.73	SK4	0.1668948	0.2440	0.334	297.36	79.49	0.54
SO1	0.0446027	0.4239	0.518	244.98	78.56	0.67	*2MKS	0.2028035	0.4011	0.215	239.69	31.79	3.5
OO1	0.0448308	0.1957	0.364	275.58	139.31	0.29	2SK5	0.2084474	0.1137	0.162	123.83	102.99	0.49
UPS1	0.0463430	0.0838	0.320	185.59	212.58	0.068	*M6	0.2415342	0.3455	0.208	126.13	32.43	2.7
OQ2	0.0759749	0.0856	0.251	249.29	174.26	0.12	*2MS6	0.2443561	0.5687	0.182	208.00	17.29	9.8
EPS2	0.07611773	0.3041	0.327	323.54	67.31	0.86	2MK6	0.2445843	0.1431	0.172	171.29	66.15	0.69
*2N2	0.0774871	0.9728	0.348	257.40	20.34	7.8	2SM6	0.2471781	0.1710	0.192	281.76	69.15	0.8
*MU2	0.0776895	0.6620	0.325	243.57	30.97	4.1	*MSK6	0.2474062	0.2035	0.144	247.14	44.00	2
*N2	0.0789992	4.6286	0.375	289.27	4.52	1.5e+002	3MK7	0.2833149	0.0950	0.156	158.92	97.71	0.37
*NU2	0.0792016	0.6231	0.352	331.18	33.98	3.1	M8	0.3220456	0.0943	0.112	151.11	89.64	0.71

**Tabela A3-1** – Componentes harmônicas resultantes do T\_Tide para os dados da RG Pilots para o ano de 2003

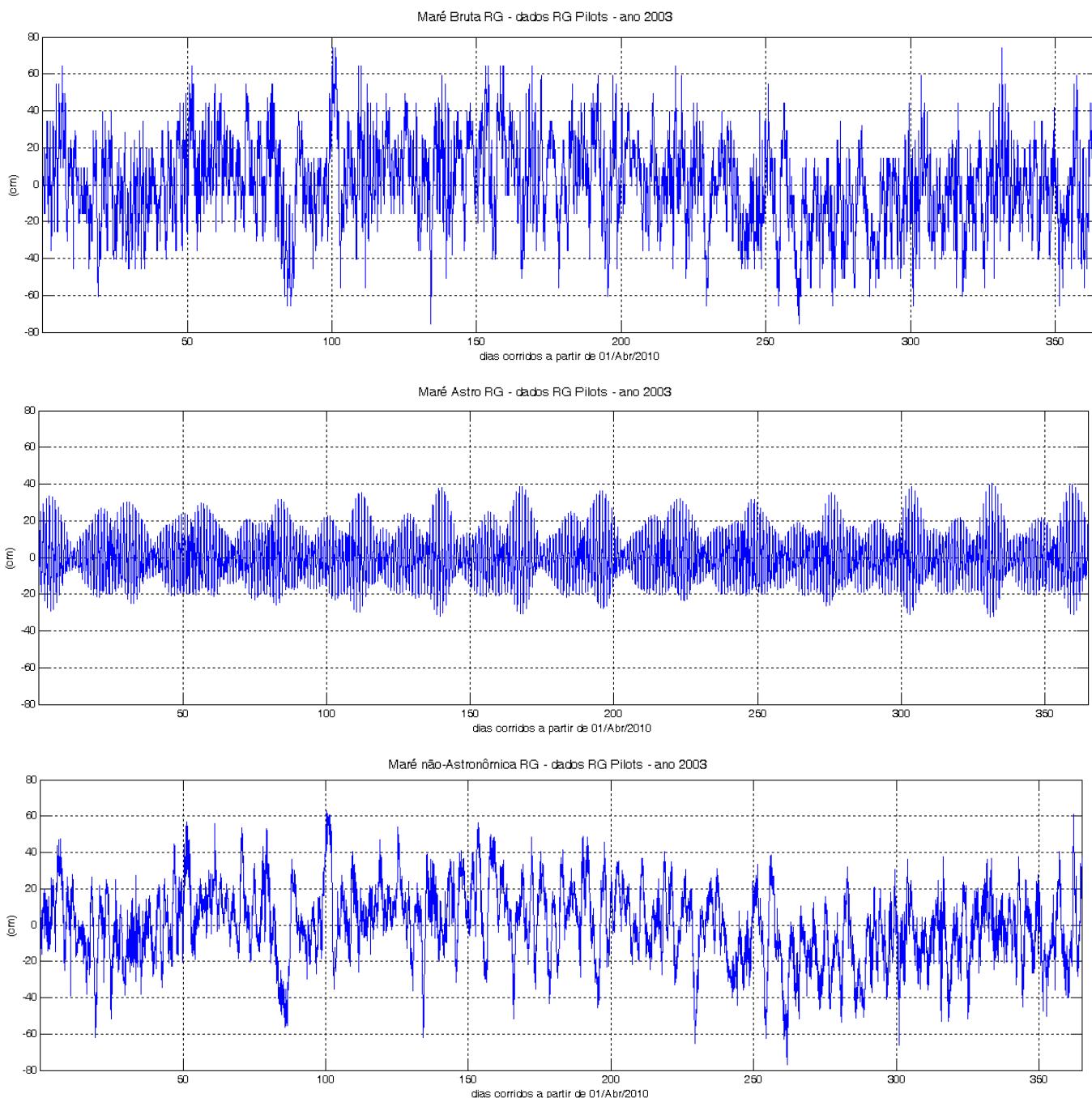
Comparando-se esse resultado com resultado similar feito com dados GOOS (mostrada na tabela A3-2 e repetida abaixo por conveniência), verifica-se uma pequena diferença no valor (das amplitudes e fases) das constantes harmônicas selecionadas (marcadas com \*).

nobs = 8760, ngood = 8759, record length (days) = 365.00															
start time: 01-Jan-2003															
rayleigh criterion = 1.0															
Greenwich phase computed with nodal corrections applied to amplitude \n and phase															
relative to center time															
x0= 0.0262, x trend= 0															
var(x)= 595.6223 var(xp)= 145.3447 var(xres)= 450.0527															
percent var predicted/var original= 24.4 %															
tidal amplitude and phase with 95% CI estimates															
tide	freq	amp	amp_err	pha	pha_err	snr	tide	freq	amp	amp_err	pha	pha_err	snr		
SSA	0.0002282	5.5351	4.891	201.72	60.68	1.3	*M2	0.0805114	3.1064	0.319	317.90	5.59	95		
MSM	0.0013098	1.1150	4.299	150.94	183.56	0.67	MKS2	0.0807396	0.1837	0.239	222.65	84.10	0.59		
MM	0.0015122	0.9890	3.960	218.61	191.10	0.062	LDA2	0.0818212	0.0326	0.198	25.74	217.38	0.027		
MSF	0.0028219	0.3243	3.563	309.29	240.40	0.0083	L2	0.0820236	0.2408	0.240	337.25	78.05	1		
MF	0.0030501	3.2676	4.957	355.39	98.07	0.43	*S2	0.0833333	4.0832	0.303	132.30	4.43	1.8e+002		
ALP1	0.0343966	0.2148	0.435	34.88	133.43	0.24	*K2	0.0835615	1.7955	0.248	129.62	7.64	53		
ZQ1	0.0357064	0.6007	0.565	45.15	57.67	1.1	MSN2	0.0848455	0.1277	0.245	9.39	132.34	0.27		
SIG1	0.0359087	0.5011	0.481	36.93	67.54	1.1	ETA2	0.0850736	0.2802	0.212	146.48	45.48	1.8		
*Q1	0.0372185	3.0345	0.562	72.02	10.93	29	*MO3	0.1192421	0.4817	0.187	99.29	19.32	6.6		
RHO1	0.0374209	0.3984	0.530	91.47	83.56	0.57	*M3	0.1207671	1.2078	0.186	295.83	8.57	42		
*O1	0.0387307	11.2979	0.586	114.07	2.51 3.7e+002		*SO3	0.1220640	0.5185	0.136	131.05	16.55	15		
TAU1	0.0389588	0.3731	0.600	308.25	110.29	0.39	*MK3	0.1222921	0.4658	0.170	100.84	20.85	7.5		
BET1	0.0400404	0.3218	0.410	122.44	97.34	0.62	*SK3	0.1251141	0.5158	0.198	162.00	19.94	6.8		
NO1	0.0402686	0.6291	0.484	139.01	47.02	1.7	*MN4	0.1595106	2.9712	0.506	254.71	8.97	35		
CHI1	0.0404710	0.2327	0.424	124.57	121.77	0.3	*M4	0.1610228	4.9549	0.479	294.68	6.33	1.1e+002		
*P1	0.0415526	1.6817	0.591	178.33	22.18	8.1	SM4	0.1623326	0.6140	0.470	346.26	40.63	1.7		
*K1	0.0417807	4.4624	0.615	184.23	8.17	53	*MS4	0.1638447	1.6410	0.412	21.04	17.09	16		
PHI1	0.0420089	0.8064	0.635	160.52	39.82	1.6	*MK4	0.1640729	0.6702	0.322	14.72	37.57	4.3		
THE1	0.0430905	0.2018	0.419	255.09	152.19	0.23	S4	0.1666667	0.4188	0.404	2.02	64.51	1.1		
J1	0.0432929	0.3026	0.425	114.89	116.99	0.51	SK4	0.1668948	0.2596	0.316	308.38	96.06	0.68		
SO1	0.0446027	0.2534	0.397	243.78	97.28	0.41	*2MK5	0.2028035	0.2787	0.177	215.89	36.10	2.5		
OO1	0.0448308	0.1944	0.329	259.42	120.24	0.35	2SK5	0.2084474	0.1105	0.146	96.72	89.45	0.58		
UES1	0.0463430	0.0801	0.287	106.62	211.03	0.078	*2MN6	0.2400221	0.3418	0.165	109.99	27.43	4.3		
OQ2	0.0759749	0.2121	0.293	204.81	69.84	0.52	*M6	0.2415342	0.5148	0.169	127.49	20.79	9.3		
EPS2	0.0761773	0.0790	0.197	140.46	156.80	0.16	*2MS6	0.2443561	0.6986	0.184	188.64	13.48	14		
*2N2	0.0774871	1.1626	0.267	243.51	13.64	19	*2MK6	0.2445843	0.3706	0.167	197.53	24.13	4.9		
*MU2	0.0776895	0.7706	0.274	212.25	24.09	7.9	*2SM6	0.2471781	0.2601	0.158	249.88	35.89	2.7		
*N2	0.0789992	4.6307	0.322	283.19	4.08 2.1e+002		MSK6	0.2474062	0.1138	0.130	268.43	69.04	0.77		
*NU2	0.0792016	0.9538	0.317	279.45	17.19	9	3MK7	0.2833149	0.0835	0.109	178.30	100.97	0.59		
							M8	0.3220456	0.1112	0.107	180.69	63.13	1.1		

**Tabela A3-2 – Componentes harmônicas resultantes do T\_Tide para os dados GOOS para o ano de 2003**

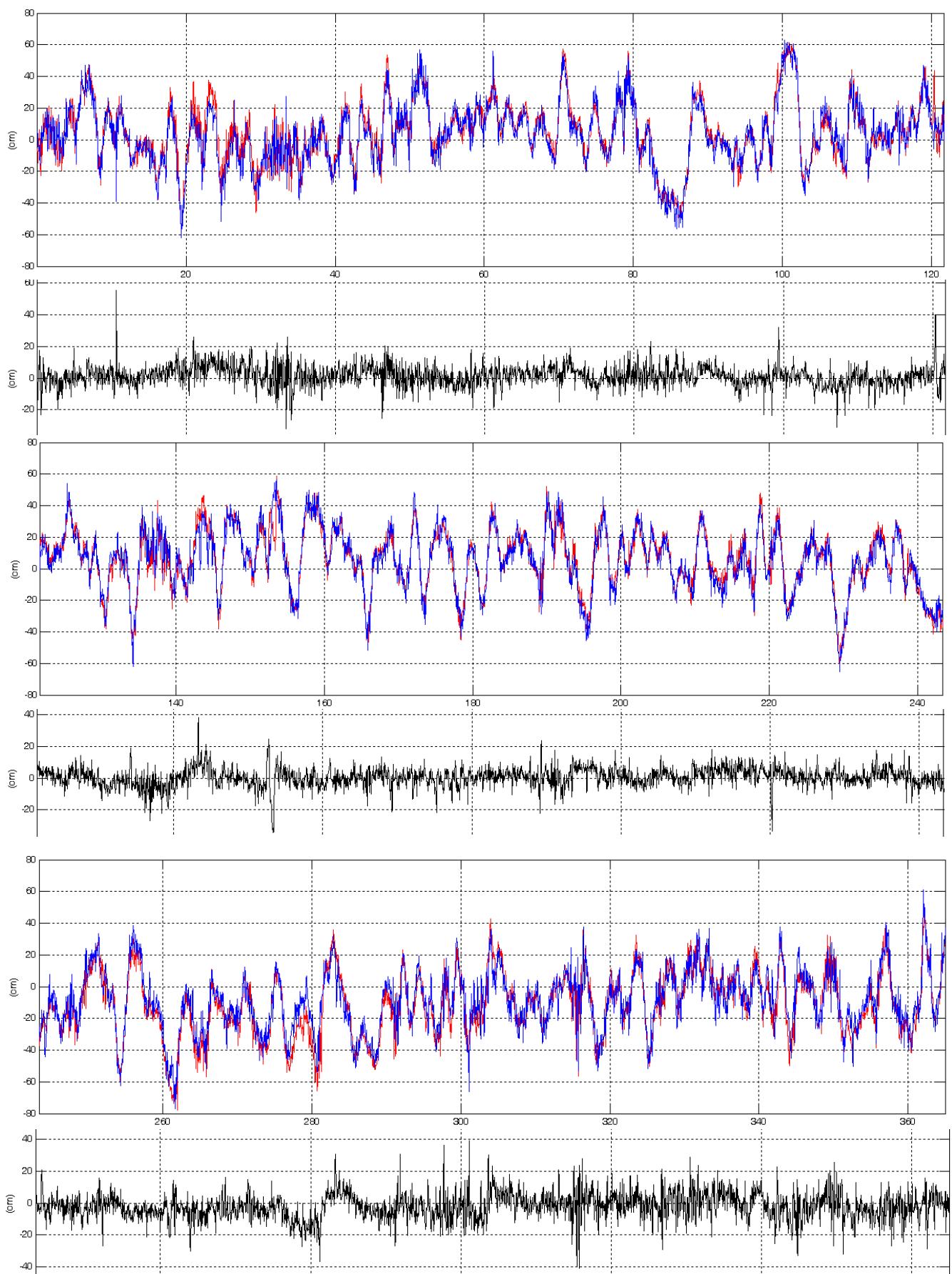
Essas diferenças têm ordem de grandeza compatível com a diferença de resolução entre as medições. Entretanto, como o interesse do presente estudo jaz no Nível não-Astronômico, essa questão não será aprofundada.

O Nível não-Astronômico pode ser calculado fazendo-se a diferença entre a Maré Bruta e a Maré Astronômica (série temporal). As 3 séries temporais são apresentadas na figura (A3-3).



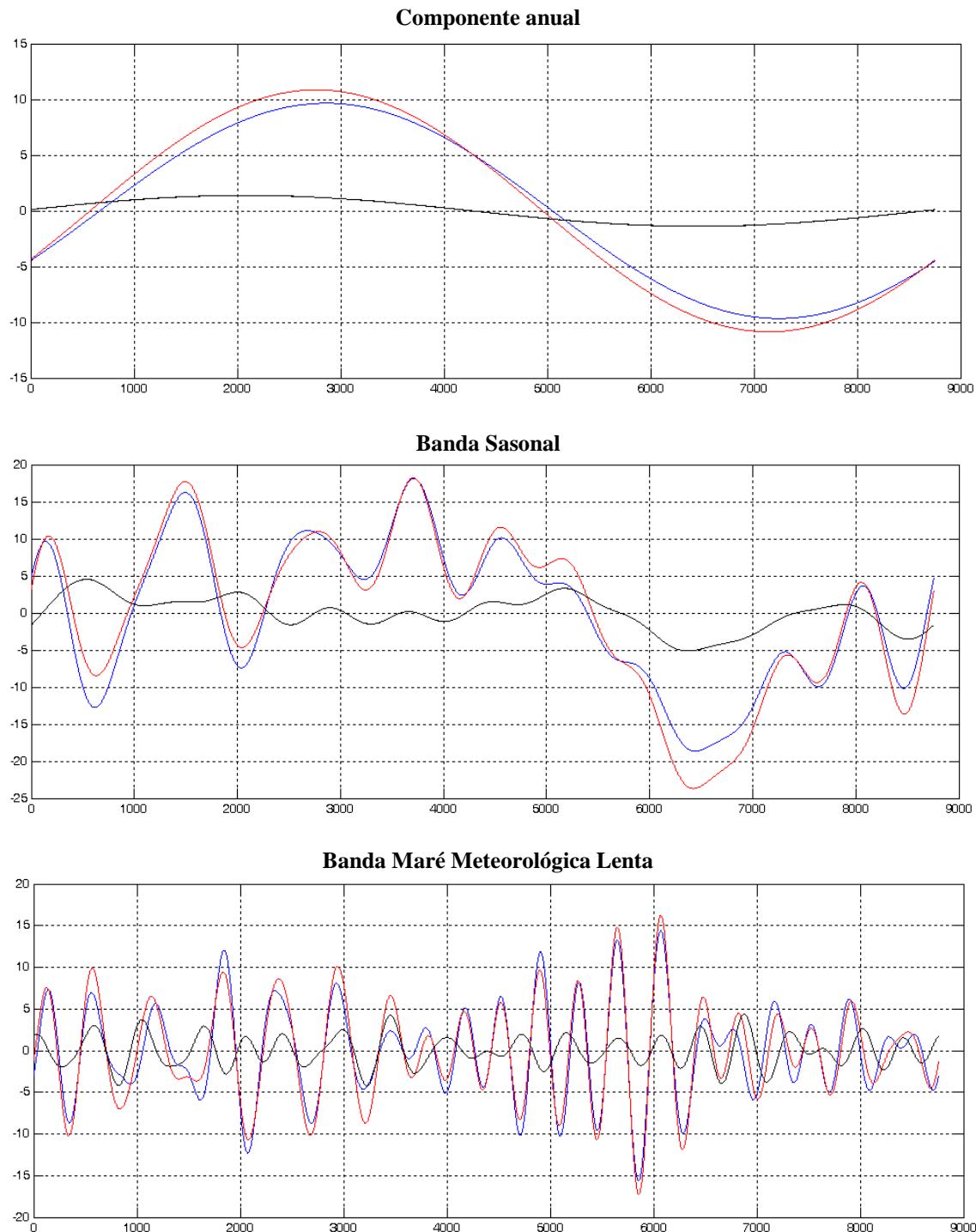
**Figura A3-3 – Séries temporais para dados da RG Pilots**

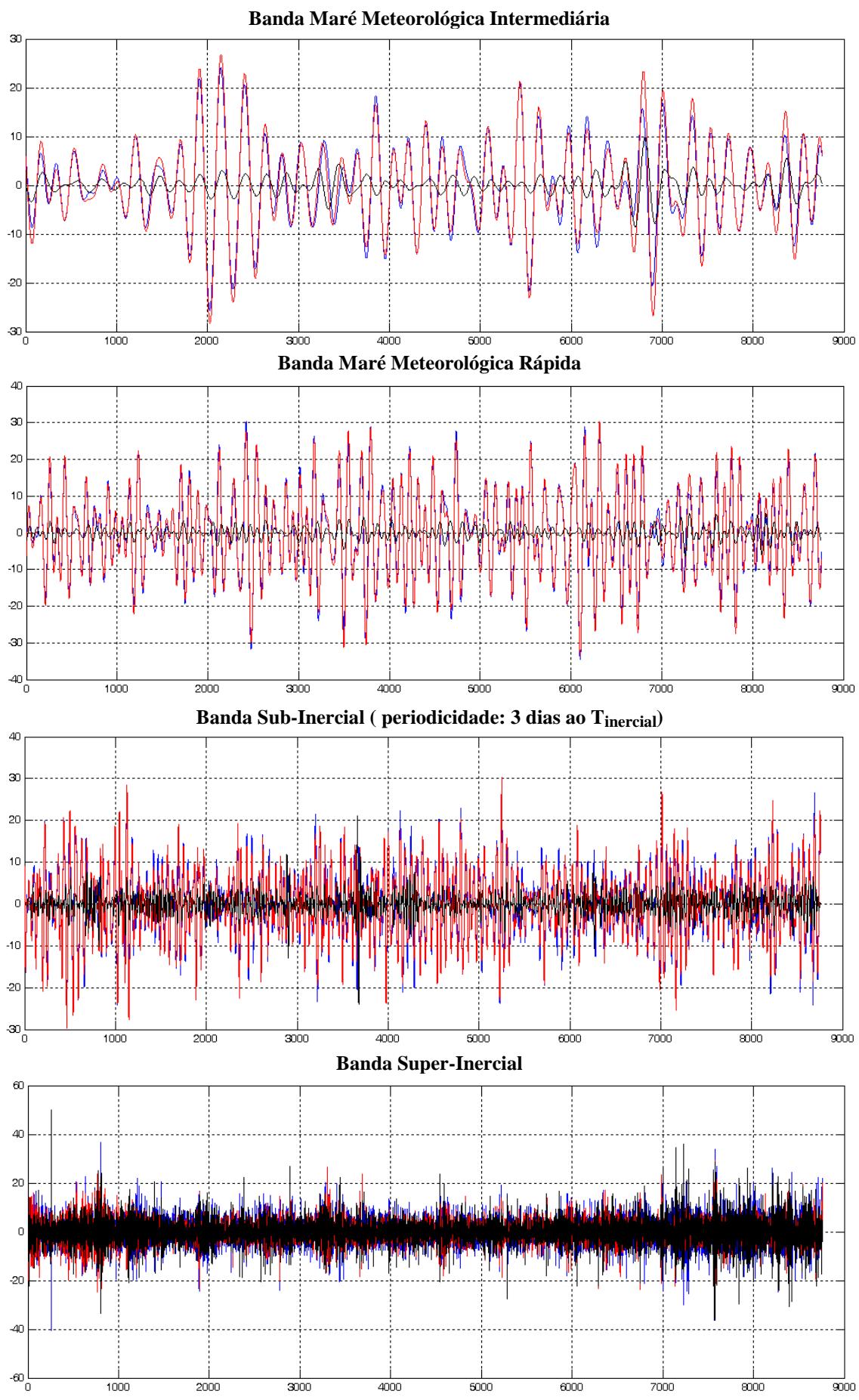
A questão fundamental, claro, é o quanto o NnA de uma medição difere em relação ao da outra. A figura (A3-4) mostra graficamente tal comparação para os 3 quadrimestres de 2003. A figura contém séries temporais simultâneas do GOOS e do RG Pilots bem como séries temporais das diferenças entre esses dados.



**Figura A3-4** - Comparação entre Nível não-Astronômico dos dados GOOS (linha **vermelha**) e RG Pilots (linha **azul**) para os 3 quadrimestres de 2003. Gráficos com linhas **pretas** correspondem à diferença dos dados GOOS e RG Pilots.

Uma análise visual dos gráficos indica uma concordância geral razoável entre os dados porém com a presença de um persistente “ruído” nos valores instantâneos. Para aprofundar a análise, os dados da RG Pilots foram submetidos a decomposição FFT de modo a verificar como o erro afeta as diferentes bandas de frequencia individualmente. O resultado está apresentados na figura (A3-5).





**Figura A3-5** - Comparação entre bandas de freq. dos dados GOOS (linha **vermelha**) e RG Pilots (linha **azul**) para o ano de 2003. Linhas **pretas** correspondem à diferença entre dados GOOS e RG Pilots. Escala horiz. em horas e vertical em cm.

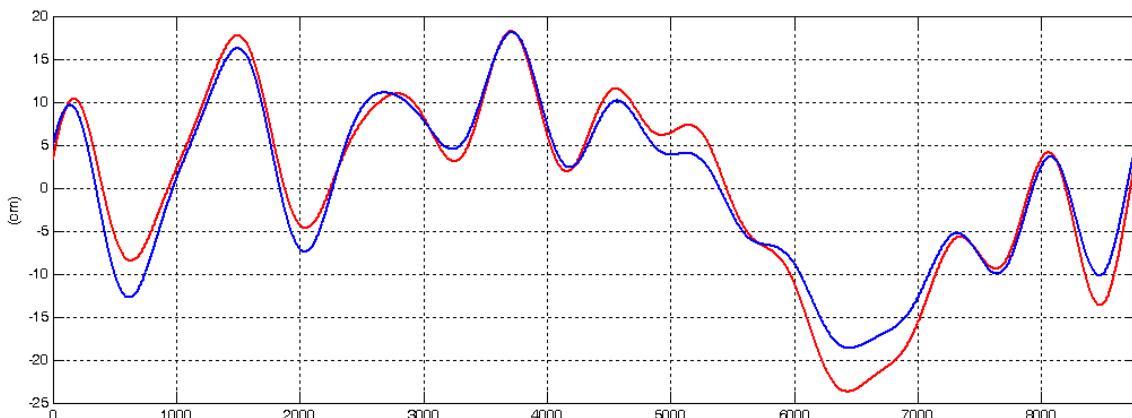
Além de possíveis erros de leitura, o limite de resolução de 5 cm da régua introduz erros no nível que permeiam todas as bandas como se pode verificar visualmente em todos os gráficos acima. Uma quantificação do erro pode ser feita calculando-se a relação entre as variâncias do “Sinal” e do “erro”, definido como a diferença entre os dados GOOS e RG Pilots. A tabela A3-3 mostra esse resultado em termo das bandas de frequencia que constituem o Nível não-Astronômico.

Banda	Variância ( $\text{cm}^2$ )		
	Sinal (RG Pilots)	Erro	Sinal / Erro
Sazonal	<b>89.9</b>	<b>5.1</b>	<b>17.7</b>
MM lenta	<b>29.3</b>	<b>3.2</b>	<b>9.0</b>
MM internediária	<b>68.6</b>	<b>4.1</b>	<b>16.9</b>
MM rápida	<b>122.5</b>	<b>2.8</b>	<b>44.2</b>
Sub-Inercial	<b>70.0</b>	<b>7.1</b>	<b>9.8</b>
Supra-Inercial	<b>32.9</b>	<b>29.8</b>	<b>1.1</b>

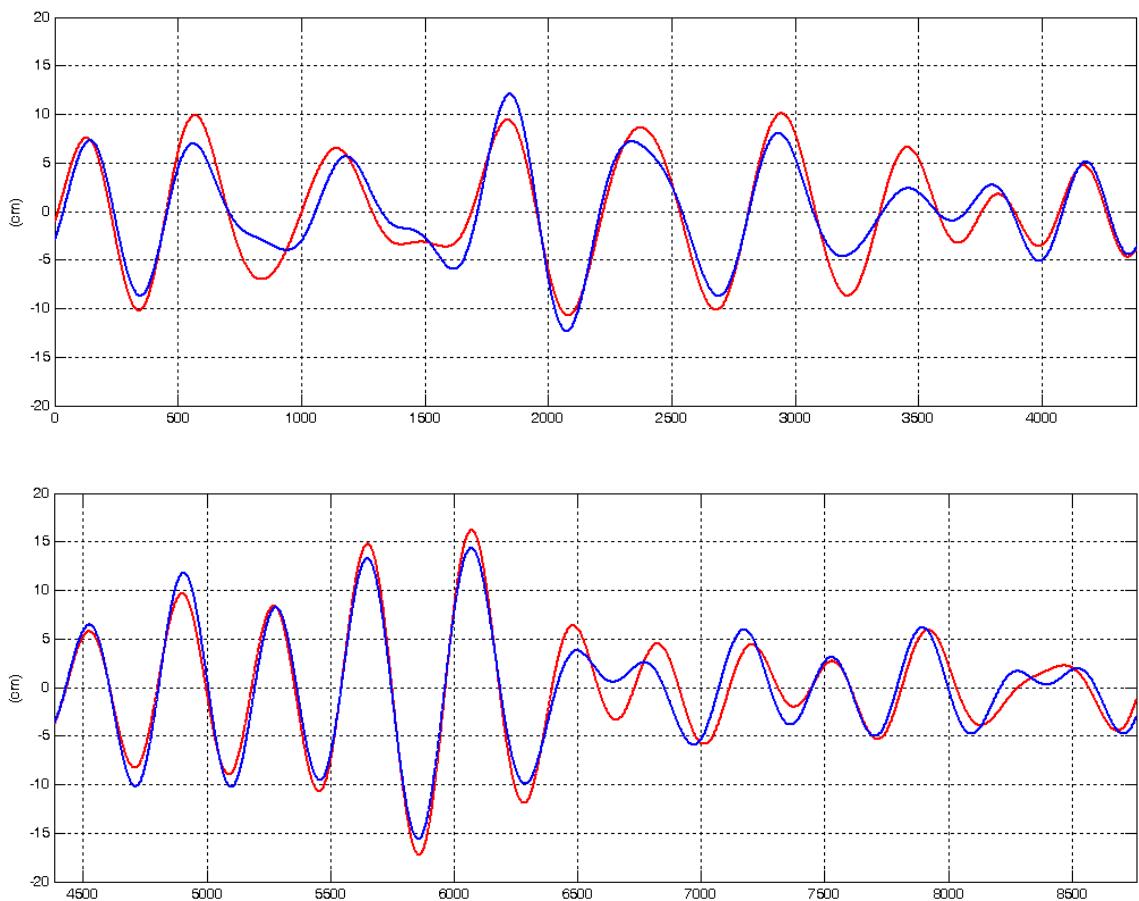
**Tabela A3-3** - Relação Sinal/Ruído em termo das Bandas que compõem o Nível não-Astronômico

Analizando a tabela, vê-se que a Banda Supra-Inercial fica inviabilizada nos dados da RG Pilots por ter variações da mesma ordem de grandeza do erro. Quanto as outras bandas, a relação Sinal/Ruído é satisfatória com valores acima de 9. Chama a atenção a Banda da MM rápida que tem Sinal 44 vezes mais intenso que o ruído.

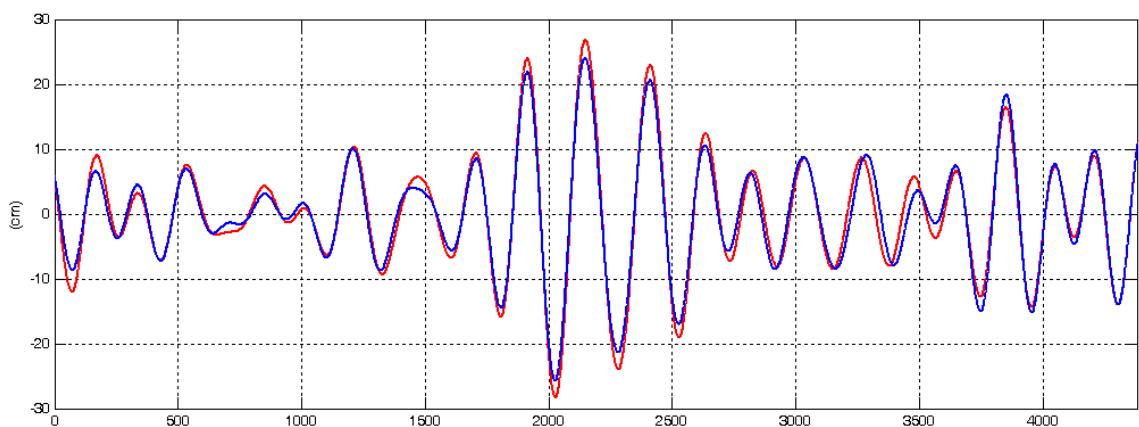
Quanto às fases, além dos erros de leitura, possíveis imprecisões no momento da leitura também parecem ter reflexos introduzindo erros de fase nas medições. Essa questão é investigada de forma simplificada a seguir através da análise das séries temporais das bandas mostradas nas figuras (A3-6) a (A3-10) nas quais a linha vermelha corresponde aos dados GOOS e a linha azul aos dados RG Pilots.

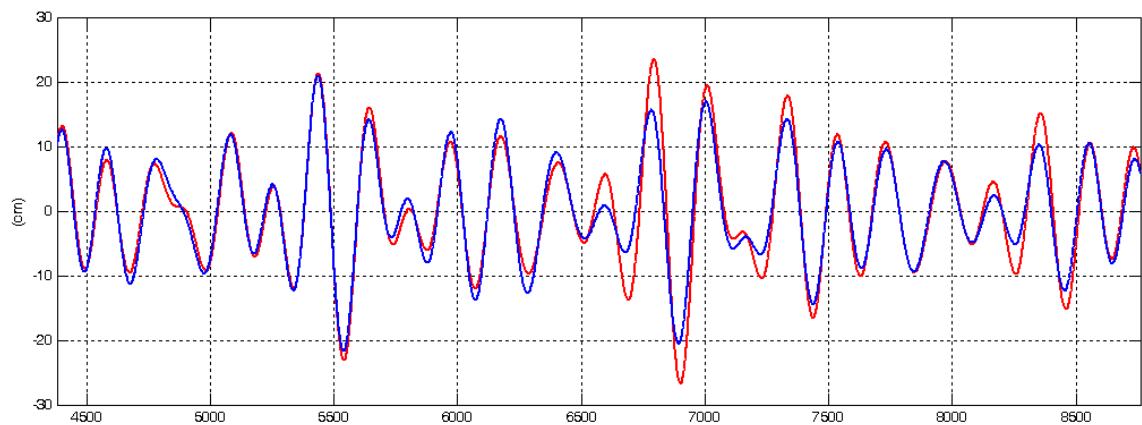


**Figura A3-6** - Séries temporais para a Banda Sazonal

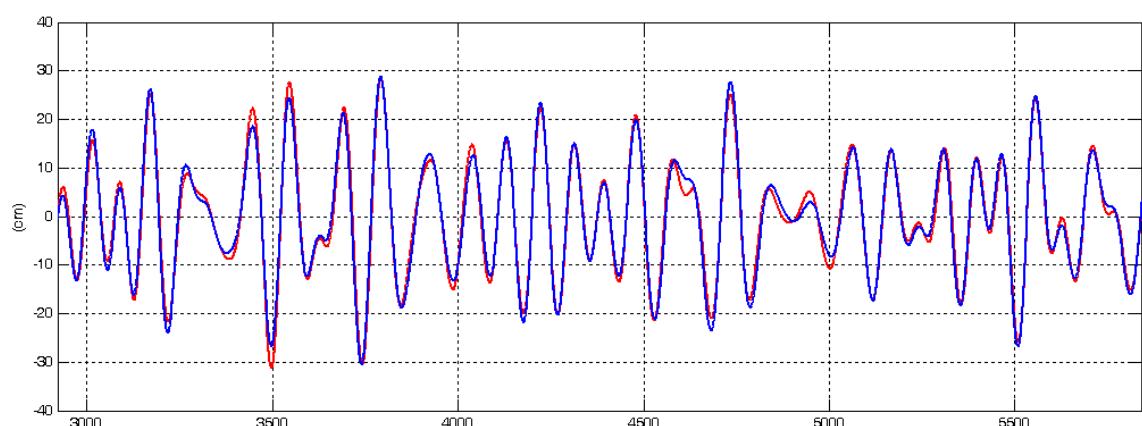
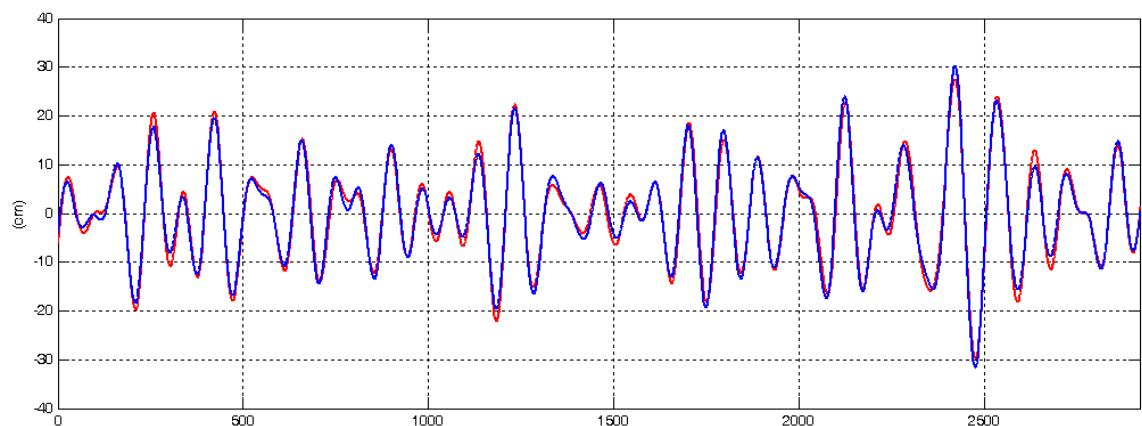


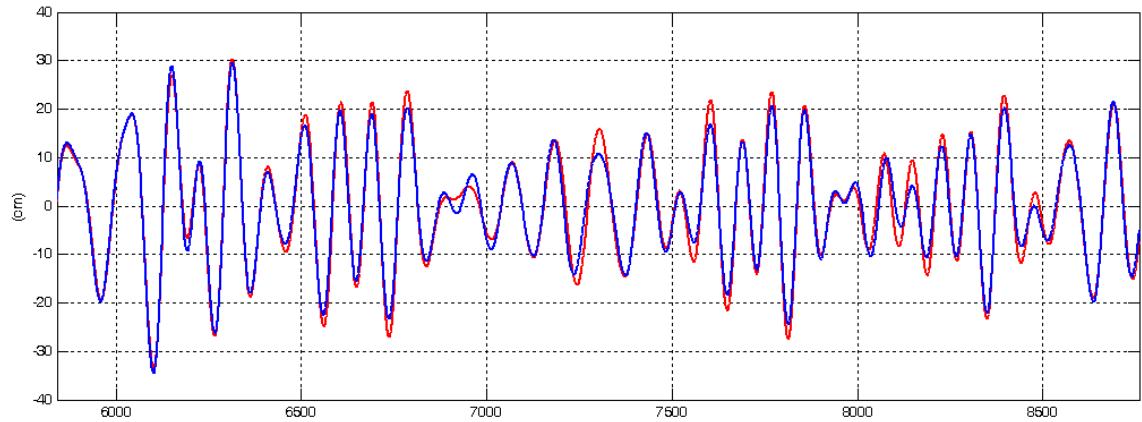
**Figura A3-7** - Sériess temporais para a Banda MM lenta. Painel superior: 1º semestre; Painel Inferior: 2º semestre.



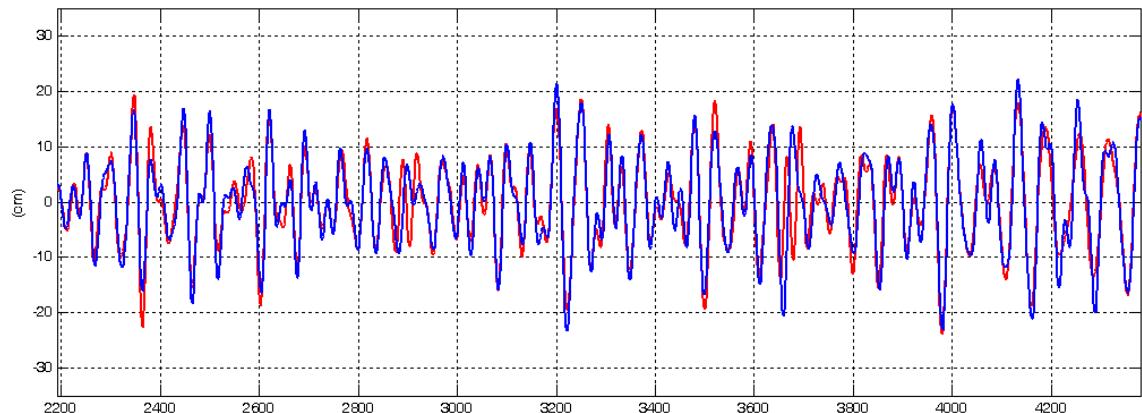
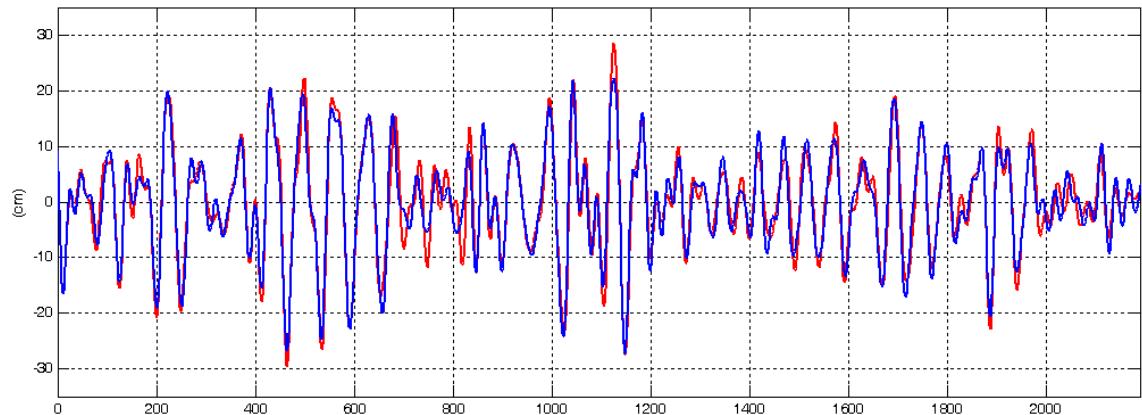


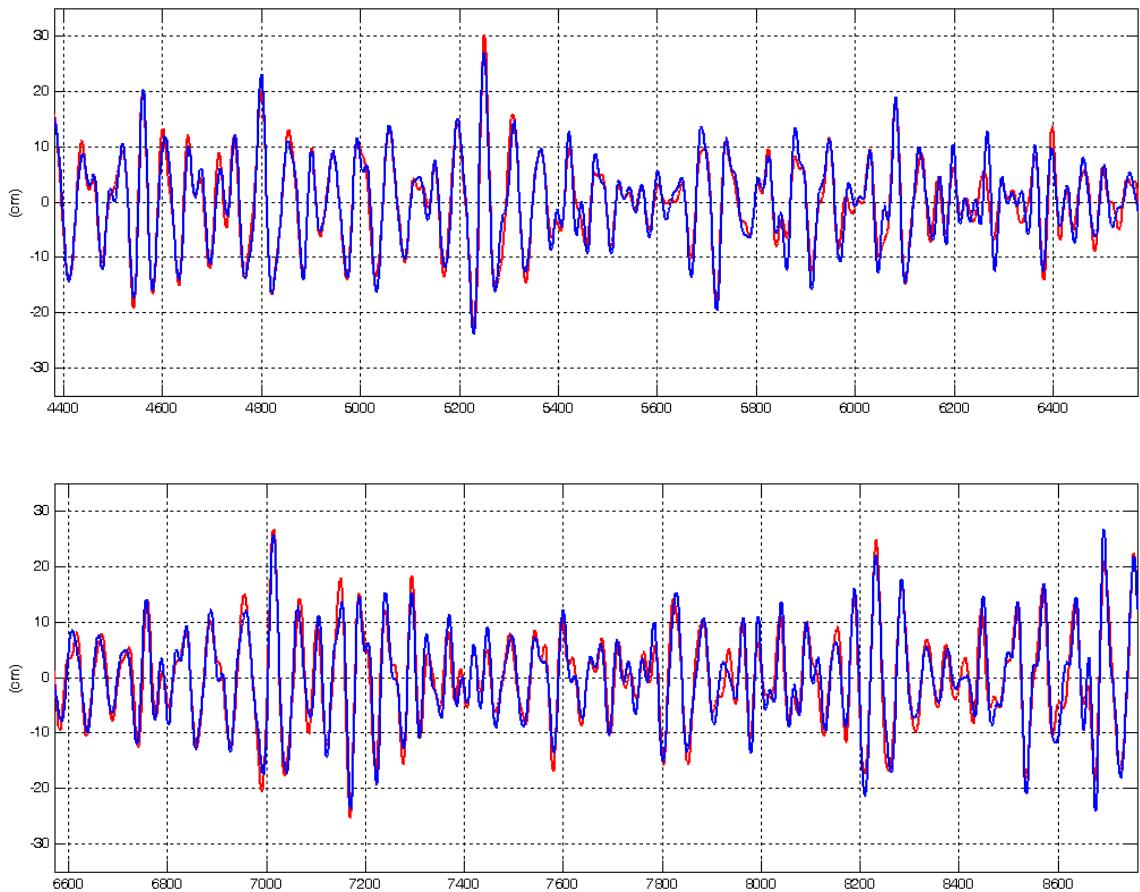
**Figura A3-8** - Séries temporais para a Banda MM internediária. Painel superior: 1º semestre; Painel Inferior: 2º semestre.





**Figura A3-9** - Séries temporais para a Banda MM rápida. Painel superior: 1º quadrimestre; Painel Central: 2º quadrimestre; Painel Inferior: 3º quadrimestre.





**Figura A3-10** - Series temporais para a Banda Sub-Inercial. Painel superior: 1º trimestre; Painel Central sup.: 2º trimestre; Painel Central inf.: 3º trimestre ; Painel Inferior: 4º trimestre.

Observações visuais minuciosas das figuras mostra que as imprecisões nas fases - materializadas por diferenças na posição relativa de picos e cavas - são bem menos pronunciadas do que no nível.. A componente Anual foi a que apresentou maior distorção. Os máximos das duas séries ocorreram nas horas 2769 no GOOS e 2863 na RG Pilots enquanto os mínimos ocorreram nas horas 7149 no GOOS e 7243 no RG Pilots (erros de 94 h)., Mesmo assim, a Banda Sazonal (que inclui a componente anual) não mostrou erro significativo nas posições de picos e vales [ver figura (A3-6)].

Deixando a Banda Supra-Inercial (que já foi descartada) fora da análise, uma observação minuciosa das figuras acima permite afirmar que as fases em todas as bandas estão razoavelmente bem reproduzidas nos dados da RG Pilots. Em particular, as fases das Bandas da MM intermediária e rápida e da Banda Sub-Inercial mostram-se surpreendentemente bem reproduzidas nos dados da RG Pilots.

Em resumo, a análise da qualidade dos dados da RG Pilots para a determinação do Nível não-Astronômico indicou que:

- (i) Há um problema na referência de tempo dos dados, sendo necessário atrasar as observações da RG Pilots para torná-las compatíveis com os dados GOOS.
- (ii) A Banda Supra-Inercial não deve ser utilizada pois apresenta valores de nível da mesma ordem de grandeza do erro.
- (iii) As outras bandas contém erros de nível que não comprometem seu uso uma vez que possuem relação sinal/Ruído da ordem de 10 (i.e. variância do sinal é 10 vezes maior que a variância do erro).
- (iv) As fases de todas as bandas - materializadas pela posição relativa de picos e cavas nas séries temporais correspondentes - estão bem reproduzidas.
- (v) Em particular, as fases das MM's intermediária e rápida e da banda sub-inercial mostram-se surpreendentemente bem reproduzidas nos dados da RG Pilots

Assim sendo, com exceção da Banda Supra-Inercial, os dados da RG Pilots podem ser considerados válidos para uso no presente estudo.

## APÊNDICE 4

### Estabelecimento de Equações Complementares para o Problema Clássico

Sem atrito, as equações governantes simplificam-se, respectivamente, para:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} - fJ = - C_o^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (\text{III. 45})$$

$$\frac{\partial J}{\partial t} + fQ = \frac{\tau_y^w}{\rho} \quad (\text{III. 46})$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = - \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (\text{III. 43 - bis})$$

#### Equação para o deslocamento da superfície

Para chegar a equação em termos apenas de  $\eta$ , o primeiro passo é fazer:  $\frac{\partial}{\partial x}$  (III.46), o que resulta em:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial J}{\partial x} \right) + f \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = 0 \quad (\text{A4 - 1})$$

A seguir, usando a eq.(III.43-bis) para representar o segundo termo da equação acima, a eq.(A4-1) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial J}{\partial x} - f\eta \right) = 0 \quad (\text{A4 - 2})$$

Essa equação pode ser interpretada fisicamente como uma representação de conservação de vorticidade, onde o primeiro termo dentro do parêntesis é a vorticidade (relativa) induzida pelo (rotacional do) escoamento e o segundo termo, uma vorticidade que a coluna d'água adquire quando se desvia da posição estática ( $h_o$ ) e que deve sua existência ao fato de que a Terra gira; seria uma vorticidade de origem *planetária*, portanto.

A eq.(A4-2) é atendida se a vorticidade do escoamento for contrabalançada pela vorticidade de origem planetária:

$$\frac{\partial J}{\partial x} = f\eta \quad (\text{A4 - 3})$$

A seguinte operação é feita a seguir:  $\frac{\partial}{\partial x}$  (III-45) obtendo-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \right) - f \frac{\partial J}{\partial x} = - C_o^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (\text{A4 - 4})$$

A quantidade entre parêntesis no primeiro termo da equação acima é o divergente da vazão de água que, pela Continuidade [eq.(III.43-bis)], pode ser escrita em função de  $\eta$ . Usando a eq.(A4-2) para representar a quantidade dentro do segundo parêntesis (vorticidade do escoamento), chega-se a uma equação diferencial parcial de segunda ordem cuja única incógnita é a posição da superfície ( $\eta$ ):

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - C_o^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + f^2 \eta = 0 \quad (\text{A4 - 5})$$

A eq.(A4-5) é uma versão uni-dimensional da equação (2.11), pag 30, do livro de Csanady (1982).

Introduzindo o parâmetro  $\frac{C_o^2}{f^2} = R^2$  definido na eq. (III.49), do capítulo III, chega-se a :

$$\frac{1}{f^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - R^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \eta = 0 \quad (A4 - 6)$$

A eq.(A4-6) é a eq. (III.47) e sintetiza a conservação da massa e do momentum para o problema em questão.

Uma segunda equação de interesse é deduzida a seguir.

### **Equação para a Vazão normal à costa com Vento paralelo**

A particularidade de um vento paralelo à costa, possibilita o estabelecimento de uma equação apenas para a componente perpendicular à costa da vazão ( $Q$ ).

Utilizando o sistema de coordenadas mostrado na figura (III.6) (com a costa localizada em  $x=0$  e com o vento soprando na *dir-y* ), a nova equação diferencial é obtida realizando as operações nas equações governantes indicadas brevemente abaixo:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{III.45}) + f (\text{III.46}) - C_o^2 \frac{\partial}{\partial x} (\text{III.43}),$$

As operações levam a:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} - f \frac{\partial J}{\partial t} + C_o^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial t} + f \frac{\partial J}{\partial t} + f^2 Q - f \frac{\tau_y^W}{\rho} - C_o^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial t} - C_o^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 0 \quad (A4 - 7)$$

Fazendo-se as simplificações devidas, chega-se a:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} - C_o^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + f^2 Q = f \frac{\tau_y^W}{\rho} \quad (A4 - 8)$$

Essa equação equivale à equação (10.9.4), pg 396, de Gill (1982) [ exceto que Gill tem a costa em  $y = 0$  ]. Dividindo por  $f^2$ , tem-se:

$$\frac{1}{f^2} \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} - R^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + Q = \frac{\tau_y^W}{\rho f} = Q_E \quad (A4 - 9)$$

Essa equação corresponde a eq. (III.48) também sintetiza a conservação da massa e do momentum para o problema simplificado em questão.

# APÊNDICE 5

## PARTE 1

### **Solução para Plataforma com Degrau de Largura L e com Vento soprando numa Faixa de Largura W, em que W > L**

A solução será obtida para o sistema de coordenadas mostrado na figura III.11, com o eixo x perpendicular a costa e apontando para o mar (i.e. x é sempre *positivo* no mar). O hemisfério de interesse é o Sul, portanto,  $f < 0$  e  $R < 0$  e as relações expressas pelas eqs. (III.54) serão usadas aqui também. Assim, o sistema de equações a ser resolvido é:

#### Trecho I

$$Q^I(x) = A_1 e^{-\frac{x}{|R_1|}} + A_2 e^{\frac{x}{|R_1|}} + Q_E \quad (\text{III. 75})$$

#### Trecho II

$$Q^{II}(x) = B_1 e^{-\frac{x}{|R_2|}} + B_2 e^{\frac{x}{|R_2|}} + Q_E \quad (\text{III. 76})$$

#### Trecho III

$$Q^{III}(x) = C_1 e^{-\frac{x}{|R_2|}} + C_2 e^{\frac{x}{|R_2|}} \quad (\text{III. 77})$$

As constantes de integração podem ser determinadas utilizando-se as seguintes condições, sendo duas de contorno e quatro de compatibilidade:

#### Condições de Contorno e Compatibilidade:

- Condições de Contorno:

$$(i) \quad Q^I(0) = 0 \rightarrow A_1 + A_2 + Q_E = 0 \therefore A_1 + A_2 = -Q_E \quad (\text{A5.1 - 1})$$

$$(ii) \quad Q^{III}(\infty) = 0 \rightarrow C_1 e^{-\infty} + C_2 e^{\infty} = 0 \therefore C_2 = 0 \quad (\text{A5.1 - 2})$$

- Condições de Compatibilidade:

- Interface  $x = L$

Continuidade de Vazão:

$$(iii) \quad Q^I(L) = Q^{II}(L) \rightarrow A_1 e^{-\frac{L}{|R_1|}} + A_2 e^{\frac{L}{|R_1|}} + Q_E = B_1 e^{-\frac{L}{|R_2|}} + B_2 e^{\frac{L}{|R_2|}} + Q_E \therefore \\ A_1 e^{-\frac{L}{|R_1|}} + A_2 e^{\frac{L}{|R_1|}} = B_1 e^{-\frac{L}{|R_2|}} + B_2 e^{\frac{L}{|R_2|}} \quad (\text{A5.1 - 3})$$

Continuidade de nível:

$$(iv) \quad \frac{dQ^I}{dx}(L) = \frac{dQ^{II}}{dx}(L) \rightarrow -\frac{A_1}{|R_1|} e^{-\frac{L}{|R_1|}} + \frac{A_2}{|R_1|} e^{\frac{L}{|R_1|}} = -\frac{B_1}{|R_2|} e^{-\frac{L}{|R_2|}} + \frac{B_2}{|R_2|} e^{\frac{L}{|R_2|}} \quad (\text{A5.1 - 4})$$

- Interface  $x = W$

Continuidade de Vazão:

$$(v) \quad Q^{II}(W) = Q^{III}(W) \rightarrow B_1 e^{-\frac{W}{|R_2|}} + B_2 e^{\frac{W}{|R_2|}} + Q_E = C_1 e^{-\frac{W}{|R_2|}} \quad (\text{A5.1 - 5})$$

Continuidade de nível:

$$(vi) \quad \frac{dQ^{II}}{dx}(W) = \frac{dQ^{III}}{dx}(W) \rightarrow -\frac{B_1}{|R_2|} e^{-\frac{W}{|R_2|}} + \frac{B_2}{|R_2|} e^{\frac{W}{|R_2|}} = -\frac{C_1}{|R_2|} e^{-\frac{W}{|R_2|}} \therefore$$

$$B_1 e^{-\frac{W}{|R_2|}} - B_2 e^{\frac{W}{|R_2|}} = C_1 e^{-\frac{W}{|R_2|}} \quad (\text{A5.1-6})$$

Fazendo-se (A5.1-5) – (A5.1-6) tem-se que:

$$2B_2 e^{\frac{W}{|R_2|}} + Q_E = 0 \quad \therefore$$

$$\boxed{B_2 = -\frac{Q_E}{2} e^{-\frac{W}{|R_2|}}} \quad (\text{A5.1-7})$$

Multiplicando-se a equação (A5.1-4) por ( $-|R_1|$ ):

$$A_1 e^{-\frac{L}{|R_1|}} - A_2 e^{\frac{L}{|R_1|}} = B_1 \frac{|R_1|}{|R_2|} e^{-\frac{L}{|R_2|}} - B_2 \frac{|R_1|}{|R_2|} e^{\frac{L}{|R_2|}} \quad (\text{A5.1-8})$$

e em seguida somando-se esta equação (A5.1-8), com a equação (A5.1-3), vem:

$$\begin{aligned} 2A_1 e^{-\frac{L}{|R_1|}} &= B_1 \left(1 + \frac{|R_1|}{|R_2|}\right) e^{-\frac{L}{|R_2|}} + B_2 \left(1 - \frac{|R_1|}{|R_2|}\right) e^{\frac{L}{|R_2|}} \quad \therefore \\ A_1 &= \frac{1}{2} e^{\frac{L}{|R_1|}} \left[ B_1 \left(1 + \frac{|R_1|}{|R_2|}\right) e^{-\frac{L}{|R_2|}} + B_2 \left(1 - \frac{|R_1|}{|R_2|}\right) e^{\frac{L}{|R_2|}} \right] \end{aligned} \quad (\text{A5.1-9})$$

Fazendo-se também a diferença dessas equações, (A5.1-3)- (A5.1-8), obtém-se:

$$\begin{aligned} 2A_2 e^{\frac{L}{|R_1|}} &= B_1 \left(1 - \frac{|R_1|}{|R_2|}\right) e^{-\frac{L}{|R_2|}} + B_2 \left(1 + \frac{|R_1|}{|R_2|}\right) e^{\frac{L}{|R_2|}} \quad \therefore \\ A_2 &= \frac{1}{2} e^{-\frac{L}{|R_1|}} \left[ B_1 \left(1 - \frac{|R_1|}{|R_2|}\right) e^{-\frac{L}{|R_2|}} + B_2 \left(1 + \frac{|R_1|}{|R_2|}\right) e^{\frac{L}{|R_2|}} \right] \end{aligned} \quad (\text{A5.1-10})$$

Agora somam-se as equações (A5.1-9) e (A5.1-10) substituindo-se o resultado na equação (A5.1-1):

$$\begin{aligned} -Q_E &= \frac{1}{2} B_1 \left(1 + \frac{|R_1|}{|R_2|}\right) e^{L(\frac{1}{|R_1|} - \frac{1}{|R_2|})} + \frac{1}{2} B_1 \left(1 - \frac{|R_1|}{|R_2|}\right) e^{-L(\frac{1}{|R_1|} + \frac{1}{|R_2|})} + \\ &\quad \frac{1}{2} B_2 \left(1 - \frac{|R_1|}{|R_2|}\right) e^{L(\frac{1}{|R_1|} + \frac{1}{|R_2|})} + \frac{1}{2} B_2 \left(1 + \frac{|R_1|}{|R_2|}\right) e^{-L(\frac{1}{|R_1|} - \frac{1}{|R_2|})} \end{aligned} \quad (\text{A5.1-11})$$

Introduzindo-se na equação acima a seguinte notação:

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{|R_1|} - \frac{1}{|R_2|} \quad e \quad \beta = \frac{1}{|R_1|} + \frac{1}{|R_2|}}$$

e em seguida manipulando-se, obtém-se:

$$-2Q_E = B_1 \left[ \left(1 + \frac{|R_1|}{|R_2|}\right) e^{\alpha L} + \left(1 - \frac{|R_1|}{|R_2|}\right) e^{-\beta L} \right] + B_2 \left[ \left(1 + \frac{|R_1|}{|R_2|}\right) e^{-\alpha L} + \left(1 - \frac{|R_1|}{|R_2|}\right) e^{\beta L} \right] \quad (\text{A5.1-12})$$

Inserindo-se agora na equação acima, (A5.12), a expressão de  $B_2$  dada pela equação (A5.1-7), tem-se:

$$-2Q_E = B_1 \left[ \left(1 + \frac{|R_1|}{|R_2|}\right) e^{\alpha L} + \left(1 - \frac{|R_1|}{|R_2|}\right) e^{-\beta L} \right] - \frac{Q_E}{2} e^{-\frac{W}{|R_2|}} \left[ \left(1 + \frac{|R_1|}{|R_2|}\right) e^{-\alpha L} + \left(1 - \frac{|R_1|}{|R_2|}\right) e^{\beta L} \right] \quad (\text{A5.1-13})$$

Introduzindo-se na equação (A5.13) outra notação para facilitar os cálculos:

$$\boxed{\gamma = 1 + \frac{|R_1|}{|R_2|} \quad e \quad \delta = 1 - \frac{|R_1|}{|R_2|}}$$

E, colocando-se em evidência a constante  $B_1$ , vem:

$$B_1 (\gamma e^{\alpha L} + \delta e^{-\beta L}) = -2Q_E + \frac{Q_E}{2} (\gamma e^{-\alpha L} + \delta e^{\beta L}) e^{-\frac{W}{|R_2|}} \quad \therefore$$

$$B_1 = - \frac{Q_E \left[ 2 - \frac{1}{2} (\gamma e^{-\alpha L} + \delta e^{\beta L}) e^{-\frac{W}{|R_2|}} \right]}{(\gamma e^{\alpha L} + \delta e^{-\beta L})} \quad (\text{A5.1 - 14})$$

Explicitando-se  $C_1$  na equação (A5.1-6):

$$B_1 e^{-\frac{W}{|R_2|}} - B_2 e^{\frac{W}{|R_2|}} = C_1 e^{-\frac{W}{|R_2|}} \rightarrow C_1 = B_1 - B_2 e^{\frac{2W}{|R_2|}} \quad (\text{A5.1 - 15})$$

Substituindo-se as expressões (A5.1-14) e (A5.1-7) que definem  $B_1$  e  $B_2$  na equação (A5.1-15) acima, obtém-se a constante  $C_1$ :

$$C_1 = - \frac{Q_E \left[ 2 - \frac{1}{2} (\gamma e^{-\alpha L} + \delta e^{\beta L}) e^{-\frac{W}{|R_2|}} \right]}{(\gamma e^{\alpha L} + \delta e^{-\beta L})} + \frac{Q_E}{2} e^{\frac{W}{|R_2|}} \quad (\text{A5.1 - 16})$$

Reescrevendo-se a equação (A5.1-9) com a notação definida anteriormente ( $\gamma$  e  $\delta$ ):

$$A_1 = \frac{1}{2} e^{\frac{L}{|R_1|}} \left[ B_1 \gamma e^{-\frac{L}{|R_2|}} + B_2 \delta e^{\frac{L}{|R_2|}} \right] \quad (\text{A5.1 - 17})$$

e introduzindo-se as expressões (A5.1-14) e (A5.1-7) que definem  $B_1$  e  $B_2$  na equação (A5.1-17) acima, obtém-se a constante  $A_1$ :

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} e^{\frac{L}{|R_1|}} \left\{ - \frac{Q_E \left[ 2 - \frac{1}{2} (\gamma e^{-\alpha L} + \delta e^{\beta L}) e^{-\frac{W}{|R_2|}} \right]}{(\gamma e^{\alpha L} + \delta e^{-\beta L})} \gamma e^{-\frac{L}{|R_2|}} - \frac{Q_E}{2} e^{-\frac{W}{|R_2|}} \delta e^{\frac{L}{|R_2|}} \right\} \quad \therefore \\ A_1 &= - \frac{Q_E}{2} \left\{ \frac{\left[ 2 - \frac{1}{2} (\gamma e^{-\alpha L} + \delta e^{\beta L}) e^{-\frac{W}{|R_2|}} \right]}{(\gamma e^{\alpha L} + \delta e^{-\beta L})} \gamma e^{L \left( \frac{1}{|R_1|} - \frac{1}{|R_2|} \right)} + \frac{1}{2} e^{-\frac{W}{|R_2|}} \delta e^{L \left( \frac{1}{|R_1|} + \frac{1}{|R_2|} \right)} \right\} \end{aligned}$$

e inserindo-se novamente a notação usada para  $\alpha$  e  $\beta$ , vem:

$$A_1 = - \frac{Q_E}{2} \left\{ \frac{\left[ 2 - \frac{1}{2} (\gamma e^{-\alpha L} + \delta e^{\beta L}) e^{-\frac{W}{|R_2|}} \right]}{(\gamma e^{\alpha L} + \delta e^{-\beta L})} \gamma e^{\alpha L} + \frac{1}{2} e^{-\frac{W}{|R_2|}} \delta e^{\beta L} \right\} \quad (\text{A5.1 - 18})$$

Finalmente, substituindo-se a equação acima que define  $A_1$  na eq. (A5.1-1), obtém-se a constante  $A_2$ :

$$\begin{aligned} A_2 &= -Q_E - A_1 \quad \therefore \\ A_2 &= -Q_E + \frac{Q_E}{2} \left\{ \frac{\left[ 2 - \frac{1}{2} (\gamma e^{-\alpha L} + \delta e^{\beta L}) e^{-\frac{W}{|R_2|}} \right]}{(\gamma e^{\alpha L} + \delta e^{-\beta L})} \gamma e^{\alpha L} + \frac{1}{2} e^{-\frac{W}{|R_2|}} \delta e^{\beta L} \right\} \quad (\text{A5.1 - 19}) \end{aligned}$$

## PARTE 2

### Solução para Plataforma com Degrau de Largura L e com Vento soprando da Borda para o Largo da Plataforma numa Faixa de Largura Finita

A solução será obtida para o sistema de coordenadas mostrado na figura III.21, com o eixo x perpendicular a costa e apontando para o mar (i.e. x é sempre *positivo* no mar). O hemisfério de interesse é o Sul, portanto,  $f < 0$  e  $R < 0$  e as relações expressas pelas eqs. (III.54) serão usadas aqui também. Assim, o sistema de equações a ser resolvido é:

#### Trecho I

$$Q^I(x) = A_1 e^{-\frac{x}{|R_1|}} + A_2 e^{\frac{x}{|R_1|}}$$

#### Trecho II

$$Q^{II}(x) = B_1 e^{-\frac{x}{|R_2|}} + B_2 e^{\frac{x}{|R_2|}} + Q_E$$

#### Trecho III

$$Q^{III}(x) = C_1 e^{-\frac{x}{|R_2|}} + C_2 e^{\frac{x}{|R_2|}}$$

As constantes de integração podem ser determinadas utilizando-se as seguintes condições, sendo duas de contorno e quatro de compatibilidade:

#### Condições de Contorno e Compatibilidade:

- Condições de Contorno:

$$(vii) \quad Q^I(0) = 0 \rightarrow A_1 + A_2 = 0 \therefore A_2 = -A_1 \quad (\text{A5.2 - 1})$$

$$(viii) \quad Q^{III}(\infty) = 0 \rightarrow C_1 e^{-\infty} + C_2 e^{\infty} = 0 \therefore C_2 = 0 \quad (\text{A5.2 - 2})$$

- Condições de Compatibilidade:

- Interface  $x = L$

Continuidade de Vazão:

$$(ix) \quad Q^I(L) = Q^{II}(L) \rightarrow A_1 e^{-\frac{L}{|R_1|}} + A_2 e^{\frac{L}{|R_1|}} = B_1 e^{-\frac{L}{|R_2|}} + B_2 e^{\frac{L}{|R_2|}} + Q_E \quad (\text{A5.2 - 3}) \therefore$$

Continuidade de nível:

$$\begin{aligned} (x) \quad \frac{dQ^I}{dx}(L) &= \frac{dQ^{II}}{dx}(L) \rightarrow -\frac{A_1}{|R_1|} e^{-\frac{L}{|R_1|}} + \frac{A_2}{|R_1|} e^{\frac{L}{|R_1|}} = -\frac{B_1}{|R_2|} e^{-\frac{L}{|R_2|}} + \frac{B_2}{|R_2|} e^{\frac{L}{|R_2|}} \\ \therefore A_1 e^{-\frac{L}{|R_1|}} - A_2 e^{\frac{L}{|R_1|}} &= B_1 \frac{|R_1|}{|R_2|} e^{-\frac{L}{|R_2|}} - B_2 \frac{|R_1|}{|R_2|} e^{\frac{L}{|R_2|}} \end{aligned} \quad (\text{A5.2 - 4})$$

- Interface  $x = W' = L + W$

Continuidade de Vazão:

$$(xi) \quad Q^{II}(W') = Q^{III}(W') \rightarrow B_1 e^{-\frac{W'}{|R_2|}} + B_2 e^{\frac{W'}{|R_2|}} + Q_E = C_1 e^{-\frac{W'}{|R_2|}} \quad (\text{A5.2 - 5})$$

Continuidade de nível:

$$(xii) \quad \frac{dQ^{II}}{dx}(W') = \frac{dQ^{III}}{dx}(W') \rightarrow -\frac{B_1}{|R_2|} e^{-\frac{W'}{|R_2|}} + \frac{B_2}{|R_2|} e^{\frac{W'}{|R_2|}} = -\frac{C_1}{|R_2|} e^{-\frac{W'}{|R_2|}}$$

$$\therefore B_1 e^{-\frac{W'}{|R_2|}} - B_2 e^{\frac{W'}{|R_2|}} = C_1 e^{-\frac{W'}{|R_2|}} \quad (\text{A5.2-6})$$

Fazendo-se (A5.2-5) – (A5.2-6) tem-se que:

$$2B_2 e^{\frac{W'}{|R_2|}} + Q_E = 0 \quad \therefore$$

$$B_2 = -\frac{Q_E}{2} e^{-\frac{W'}{|R_2|}} \quad (\text{A5.2-7})$$

Fazendo (A5.2-3) + (A5.2-4), tem-se:

$$2A_1 e^{-\frac{L}{|R_1|}} = B_1 \left(1 + \frac{|R_1|}{|R_2|}\right) e^{-\frac{L}{|R_2|}} + B_2 \left(1 - \frac{|R_1|}{|R_2|}\right) e^{\frac{L}{|R_2|}} + Q_E$$

Usando a notação:

$$\gamma = 1 + \frac{|R_1|}{|R_2|} \quad e \quad \delta = 1 - \frac{|R_1|}{|R_2|}$$

Tem-se:

$$A_1 = \frac{1}{2} e^{\frac{L}{|R_1|}} \left[ B_1 \gamma e^{-\frac{L}{|R_2|}} + B_2 \delta e^{\frac{L}{|R_2|}} + Q_E \right] \quad (\text{A5.2-8})$$

Fazendo-se também a diferença dessas equações, isto é, (A5.3)- (A5.4), obtém-se:

$$2A_2 e^{\frac{L}{|R_1|}} = B_1 \left(1 - \frac{|R_1|}{|R_2|}\right) e^{-\frac{L}{|R_2|}} + B_2 \left(1 + \frac{|R_1|}{|R_2|}\right) e^{\frac{L}{|R_2|}} + Q_E$$

$$\therefore A_2 = \frac{1}{2} e^{-\frac{L}{|R_1|}} \left[ B_1 \delta e^{-\frac{L}{|R_2|}} + B_2 \gamma e^{\frac{L}{|R_2|}} + Q_E \right] \quad (\text{A5.2-9})$$

Somando agora as equações (A5.2-8) e (A5.2-9) e usando o resultado dado pela equação (A5.2-1):

$$A_1 + A_2 = 0 = \frac{1}{2} e^{\frac{L}{|R_1|}} \left[ B_1 \gamma e^{-\frac{L}{|R_2|}} + B_2 \delta e^{\frac{L}{|R_2|}} + Q_E \right] + \frac{1}{2} e^{-\frac{L}{|R_1|}} \left[ B_1 \delta e^{-\frac{L}{|R_2|}} + B_2 \gamma e^{\frac{L}{|R_2|}} + Q_E \right]$$

$$\therefore 0 = \frac{1}{2} B_1 \gamma e^{L(\frac{1}{|R_1|} - \frac{1}{|R_2|})} + \frac{1}{2} B_1 \delta e^{-L(\frac{1}{|R_1|} + \frac{1}{|R_2|})} +$$

$$+ \frac{1}{2} B_2 \delta e^{L(\frac{1}{|R_1|} + \frac{1}{|R_2|})} + \frac{1}{2} B_2 \gamma e^{-L(\frac{1}{|R_1|} - \frac{1}{|R_2|})} + \frac{Q_E}{2} \left( e^{\frac{L}{|R_1|}} + e^{-\frac{L}{|R_1|}} \right) \quad (\text{A5.2-10})$$

Introduzindo na equação acima a notação:

$$\alpha = \frac{1}{|R_1|} - \frac{1}{|R_2|} \quad e \quad \beta = \frac{1}{|R_1|} + \frac{1}{|R_2|}$$

obtém-se:

$$-Q_E \left( e^{\frac{L}{|R_1|}} + e^{-\frac{L}{|R_1|}} \right) = B_1 [\gamma e^{\alpha L} + \delta e^{-\beta L}] + B_2 [\gamma e^{-\alpha L} + \delta e^{\beta L}] \quad (\text{A5.2-11})$$

e utilizando a expressão de  $B_2$  dada pela equação (A5.2-7), tem-se:

$$-Q_E 2 \cosh \left( \frac{L}{|R_1|} \right) = B_1 [\gamma e^{\alpha L} + \delta e^{-\beta L}] - \frac{Q_E}{2} e^{-\frac{W'}{|R_2|}} [\gamma e^{-\alpha L} + \delta e^{\beta L}] \quad (\text{A5.2-12})$$

Colocando a constante  $B_1$  em evidência, vem:

$$B_1 (\gamma e^{\alpha L} + \delta e^{-\beta L}) = -Q_E 2 \cosh \left( \frac{L}{|R_1|} \right) + Q_E \frac{1}{2} (\gamma e^{-\alpha L} + \delta e^{\beta L}) e^{-\frac{W'}{|R_2|}}$$

$$\therefore B_1 = - \frac{Q_E \left[ 2 \cosh \left( \frac{L}{|R_1|} \right) - \frac{1}{2} (\gamma e^{-\alpha L} + \delta e^{\beta L}) e^{-\frac{W'}{|R_2|}} \right]}{(\gamma e^{\alpha L} + \delta e^{-\beta L})} \quad (A5.2 - 13)$$

Explicitando-se  $C_1$  na equação (A5.2-6):

$$B_1 e^{-\frac{W'}{|R_2|}} - B_2 e^{\frac{W'}{|R_2|}} = C_1 e^{-\frac{W'}{|R_2|}}$$

Portanto,

$$C_1 = B_1 - B_2 e^{\frac{2W'}{|R_2|}} \quad (A5.2 - 14)$$

Usando-se as expressões (A5.2-13) e (A5.2-7) que definem  $B_1$  e  $B_2$  na equação (A5.2-14) acima, obtém-se a constante  $C_1$ :

Reescrevendo-se a equação (A5.2-8) com a notação definida anteriormente ( $\gamma$  e  $\delta$ ), tem-se:

$$A_1 = \frac{1}{2} e^{\frac{L}{|R_1|}} \left[ B_1 \gamma e^{-\frac{L}{|R_2|}} + B_2 \delta e^{\frac{L}{|R_2|}} + Q_E \right] \quad (A5.2 - 15)$$

Da mesma forma, usando-se as expressões (A5.2-13) e (A5.2-7) que definem  $B_1$  e  $B_2$  na equação (A5.2-15) acima, obtém-se a constante  $A_1$

Finalmente, substituindo-se a equação acima que define  $A_1$  na equação (A5.2-1), obtém-se a constante  $A_2$ :

$$A_2 = -A_1$$

## APÊNDICE 6

### Solução da Equação com Atrito

Nesse Apêndice, soluções analíticas da equação:

$$\frac{dV}{dt} = A - B[V \cdot |V|] \quad (\text{III. 156})$$

São apresentadas em função das diferentes situações descritas na seção III.3.5.1.3.

Observa-se que, nas soluções analíticas, a constante  $A$  deve ser sempre positiva, portanto:

$$A = \frac{|\tau_y^W|}{\rho h_o} = \frac{\rho_a C_D}{\rho h_o} V^2$$

O sinal correto da velocidade deve ser determinado em função de uma análise da situação específica.

\*\*\*\*\*

#### VENTO ATUANDO NO MESMO SENTIDO DA CORRENTE

Nesse caso, a constante  $A$  (módulo da tensão do vento) e a corrente  $V$  tem o mesmo sinal e a equação governante toma a forma:

$$\frac{dV}{dt} = A - BV^2 \quad (\text{A6 - 1})$$

onde,  $A$  e  $B$  são constantes positivas definidas (conhecidas)

$$-\frac{1}{B} \frac{dV}{dt} = V^2 - \frac{A}{B} \quad (\text{A6 - 2})$$

Como primeiro passo, a equação é escrita na forma:

$$-\frac{dV}{V^2 - a^2} = B dt \quad (\text{A6 - 3})$$

onde,

$$a^2 = \frac{A}{B} \quad (\text{A6 - 4})$$

Integrando a equação, tem-se:

$$\int \frac{dV}{V^2 - a^2} = - \int B dt \quad (\text{A6 - 5})$$

\*\*\*\*\*

**Solução #1** -  $V^2 < a^2$  - Corrente com velocidade inferior à velocidade limite  $\rightarrow$  Corresponde ao caso do vento aumentando de intensidade.

Para  $V^2 < a^2$ , a integral do lado esquerdo de (A6-5) é dada por:

$$\int \frac{dV}{V^2 - a^2} = -\frac{1}{a} \operatorname{arc tanh} \left( \frac{V}{a} \right) \quad (\text{A6 - 6})$$

Portanto,

$$\operatorname{tanh}^{-1} \left( \frac{V}{a} \right) = a(B \cdot t + K) \quad (\text{A6 - 7})$$

onde,  $K$  = constante de integração, determinada a partir da condição inicial

A solução completa da equação é:

$$V(t) = a \cdot \tanh(aB \cdot t + aK) \quad (\text{A6 - 8})$$

Como condição inicial, basta estabelecer que o escoamento parte de uma velocidade conhecida no tempo  $T$ , dada por  $V(T) = V_T$ . Assim, tem-se:

$$V(T) = V_T = a \cdot \tanh(aB \cdot T + aK) \quad (\text{A6 - 9})$$

onde,

$$\operatorname{arc tanh}\left(\frac{V_T}{a}\right) = aB \cdot T + aK \quad (\text{A6 - 10})$$

e,

$$K = \frac{1}{a} \operatorname{arc tanh}\left(\frac{V_T}{a}\right) - BT \quad (\text{A6 - 11})$$

Em termos das constantes originais, a solução para  $t > T$  é dada por:

$$V(t) = \sqrt{\frac{A}{B}} \cdot \tanh\left[\sqrt{AB} \cdot (t - T) + \operatorname{arc tanh}\left(V_T \sqrt{\frac{B}{A}}\right)\right] \quad (\text{A6.12})$$

Para um escoamento que parte do repouso no instante inicial,  $V_T = V(0) = 0$ , por (A6-9), obtém-se  $K = 0$  e a solução válida para  $t > 0$  simplifica-se para :

$$V(t) = \sqrt{\frac{A}{B}} \cdot \tanh(\sqrt{AB} \cdot t) \quad (\text{A6 - 13})$$

\*\*\*\*\*

**Solução #2 - {  $V^2 > a^2$  e  $\tau_y^W/V > 0$  } - Caso de corrente com velocidade superior à velocidade limite & atuando no Corresponde ao caso do vento diminuindo de intensidade**

Para  $V^2 > a^2$ , a solução da integral do lado esquerdo de (A6-5) é dada por:

$$\int \frac{dV}{V^2 - a^2} = -\frac{1}{a} \operatorname{arc cotgh}\left(\frac{V}{a}\right) \quad (\text{A6 - 14})$$

Portanto,

$$\operatorname{arc cotgh}\left(\frac{V}{a}\right) = a(B \cdot t + K) \quad (\text{A6 - 15})$$

onde,  $K$  = constante de integração, determinada a partir da condição inicial

A solução completa da equação é:

$$V(t) = a \cdot \operatorname{cotgh}(aB \cdot t + aK) \quad (\text{A6 - 16})$$

Como condição inicial, tem-se  $V(T) = V_T$ . Assim:

$$V(T) = V_T = a \cdot \operatorname{cotgh}(aB \cdot T + aK) \quad (\text{A6 - 17})$$

onde,

$$\operatorname{arc cotgh}\left(\frac{V_T}{a}\right) = aB \cdot T + aK \quad (\text{A6 - 18})$$

e,

$$K = \frac{1}{a} \operatorname{arc cotgh} \left( \frac{V_T}{a} \right) - BT \quad (\text{A6 - 19})$$

Em termos das constantes originais, a solução para  $t > T$  é dada por:

$$V(t) = \sqrt{\frac{A}{B}} \cdot \operatorname{cotgh} \left[ \sqrt{AB} \cdot (t - T) + \operatorname{arc cotgh} \left( V_T \sqrt{\frac{B}{A}} \right) \right] \quad (\text{A6 - 20})$$

\*\*\*\*\*

### VENTO ATUANDO EM SENTIDO CONTRÁRIO A CORRENTE

#### **Solução #3 - $\tau_y^W/V < 0$ - Caso de Vento atuando em sentido contrário à corrente. Válida até $V = 0$**

Nesse caso, a constante  $A$  (módulo da tensão do vento) e a corrente  $V_o^*$  tem sinais contrários e a equação governante toma a forma:

$$\frac{dV}{dt} = -A - BV^2 \quad (\text{A6 - 21})$$

onde,  $A$  e  $B$  são constantes positivas definidas (conhecidas). Usando a constante  $a$  definida em (A6-4), tem-se:

$$-\frac{1}{B} \frac{dV}{dt} = V^2 + a^2 \quad (\text{A6 - 22})$$

Como primeiro passo, a equação é escrita na forma:

$$-\frac{dV}{V^2 + a^2} = B dt \quad (\text{A6 - 23})$$

Integrando, tem-se:

$$-\int \frac{dV}{V^2 + a^2} = \int B dt \quad (\text{A6 - 23})$$

A integral a esquerda é:

$$-\int \frac{dV}{V^2 + a^2} = -\frac{1}{a} \operatorname{arc tan} \left( \frac{V}{a} \right) \quad (\text{A6 - 25})$$

Portanto,

$$\operatorname{arc tan} \left( \frac{V}{a} \right) = -a(B.t + K) \quad (\text{A6 - 26})$$

onde,  $K$  = constante de integração, determinada a partir da condição inicial

A solução completa da equação é:

$$V(t) = -a \cdot \tan(aB.t + aK) \quad (\text{A6 - 27})$$

Como condição inicial, basta estabelecer que o escoamento parte de uma velocidade conhecida no tempo  $T$ , dada por  $V(T) = V_T$ . Assim, tem-se:

$$V(T) = V_T = -a \cdot \tan(aB.T + aK) \quad (\text{A6 - 28})$$

onde,

$$\operatorname{arc tan} \left( \frac{V_T}{a} \right) = -aB.T - aK \quad (\text{A6 - 29})$$

e,

$$K = -\frac{1}{a} \operatorname{arc tan} \left( \frac{V_T}{a} \right) - BT \quad (\text{A6} - 30)$$

Em termos das constantes originais, a solução para  $t > T$  é dada por:

$$V(t) = -\sqrt{\frac{A}{B}} \cdot \tan \left[ \sqrt{AB} \cdot (t - T) - \operatorname{arc tan} \left( V_T \sqrt{\frac{B}{A}} \right) \right] \quad (\text{A6} - 31)$$

\*\*\*\*\*

### VENTO QUE CESSA ABRUPTAMENTE

Sem vento, a equação governante simplifica-se para :

$$\frac{dV}{dt} = -BV^2 \quad (\text{A6} - 32)$$

Reescrevendo,

$$\frac{dV}{V^2} = -B dt \quad (\text{A6} - 33)$$

Integrando, tem-se:

$$\int V^{-2} dV = - \int B dt \quad (\text{A6} - 34)$$

A solução é dada por:

$$-\frac{1}{V} = -Bt + K$$

Ou,

$$V(t) = \frac{1}{Bt - K} \quad (\text{A6} - 35)$$

A constante de integração  $K$  é determinada pela condição inicial, dada em função da velocidade existente no instante  $T$ ,  $V_T$

$$V(T) = V_T = \frac{1}{BT - K}$$

Donde,

$$K = BT - \frac{1}{V_T}$$

Solução válida para  $t > T$

$$V(t) = \frac{1}{B(t - T) + \frac{1}{V_T}} \quad (\text{A6} - 36)$$

## APÊNDICE 7

### Solução Numérica por Método de Integração Direta

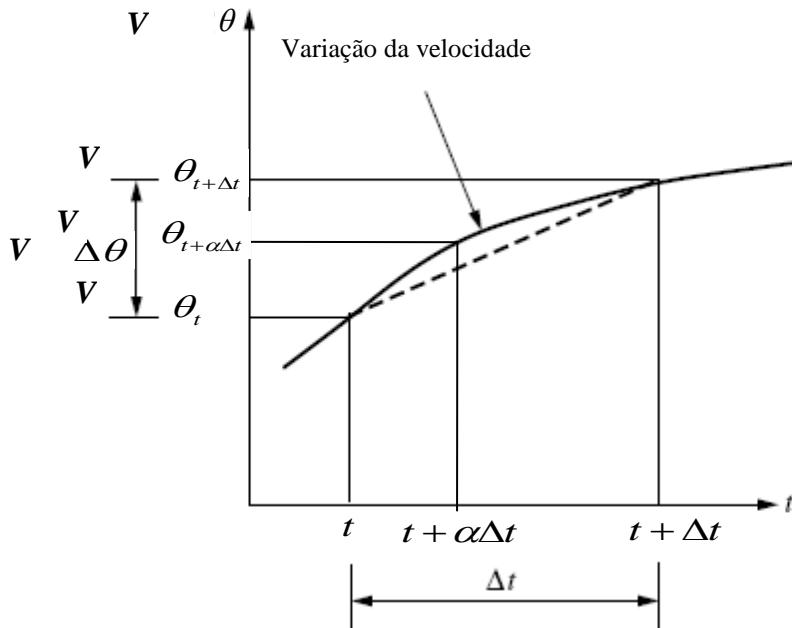
#### Método de Galerkin - $\alpha=2/3$

A equação a resolver pode ser escrita na seguinte forma:

$$\dot{V} + BV |V| = F(t) \quad (\text{A7.1})$$

onde  $V$  é a velocidade da água;  $\dot{V}$  a primeira derivada de  $V$  em relação ao tempo;  $F$  é a força aplicada que varia ao longo do tempo e  $B$  é uma constante (do atrito).

A equação (A7.1) representa uma equação diferencial ordinária dependente do tempo. A integração desta equação pode ser realizada por meio dos Métodos de Integração Direta, tais como os Métodos de Resíduos Ponderados (Métodos  $\alpha$ ) (Zienkiewicz e Taylor (2000), Pierin (2015) e Bathe (1996)), cuja principal característica é a discretização da resposta no tempo em intervalos regulares, como mostra a figura (A7.1).



**Figura A7.1:** Métodos dos resíduos ponderados de integração direta no tempo.

A eq. (A7.1) deve ser satisfeita a cada instante discreto, sendo usualmente escrita no instante  $t + \alpha\Delta t$ :

$$\dot{V}_{t+\alpha\Delta t} + BV_{t+\alpha\Delta t} |V_{t+\alpha\Delta t}| = F_{t+\alpha\Delta t} \quad (\text{A7.2})$$

Negligenciando os termos de ordem superiores, a primeira derivada da velocidade em relação ao tempo é dada pela equação:

$$\dot{V}_{t+\alpha\Delta t} = \frac{\partial V_{t+\alpha\Delta t}}{\partial t} \cong \frac{V_{t+\Delta t} - V_t}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (\text{A7.3})$$

Utilizando os Métodos- $\alpha$  (Bathe, 1996), a velocidade no instante  $t + \alpha\Delta t$  é obtida pela equação:

$$V_{t+\alpha\Delta t} = (1 - \alpha)V_t + \alpha V_{t+\Delta t} \quad (\text{A7.4})$$

Analogamente, pode-se escrever a força no instante  $t + \alpha\Delta t$ ,

$$F_{t+\alpha\Delta t} = (1 - \alpha)F_t + \alpha F_{t+\Delta t} \quad (\text{A7.5})$$

Substituindo-se as equações (A7.3), (A7.4) e (A7.5) na equação (A7.2), e considerando-se desprezível o termo  $O(\Delta t)$ , vem:

$$\frac{1}{\Delta t}(V_{t+\Delta t} - V_t) + B[(1-\alpha)V_t + \alpha V_{t+\Delta t}] \cdot |(1-\alpha)V_t + \alpha V_{t+\Delta t}| = (1-\alpha)F_t + \alpha F_{t+\Delta t} \quad (\text{A7.6})$$

Devem-se analisar duas possibilidades:

i)  $V_{t+\alpha\Delta t}$  é positiva, a equação (1.6) fica:

$$\frac{1}{\Delta t}(V_{t+\Delta t} - V_t) + B[(1-\alpha)V_t + \alpha V_{t+\Delta t}]^2 = (1-\alpha)F_t + \alpha F_{t+\Delta t}$$

da qual, efetuando-se o termo entre colchetes ao quadrado e após algumas manipulações algébricas, obtém-se a equação:

$$B\alpha^2 V_{t+\Delta t}^2 + \left[ \frac{1}{\Delta t} + 2B(\alpha - \alpha^2)V_t \right] V_{t+\Delta t} - \frac{V_t}{\Delta t} + B(1-\alpha)^2 V_t^2 - (1-\alpha)F_t - \alpha F_{t+\Delta t} = 0$$

a qual pode ser reescrita na forma:

$$A^* V_{t+\Delta t}^2 + B^* V_{t+\Delta t} + C^* = 0 \quad (\text{A7.7})$$

onde:

$$A^* = B\alpha^2; \quad B^* = \left[ \frac{1}{\Delta t} + 2B(\alpha - \alpha^2)V_t \right]; \quad C^* = -\frac{V_t}{\Delta t} + B(1-\alpha)^2 V_t^2 - (1-\alpha)F_t - \alpha F_{t+\Delta t}$$

A eq. (A7.7) é uma equação algébrica do segundo grau, cuja solução fornece o valor da incógnita  $V_{t+\Delta t}$ . Verifica-se se o valor encontrado para  $V_{t+\alpha\Delta t}$  usando-se a eq. (A7.4) é positivo, se for a condição foi atendida e  $V_{t+\Delta t}$  é a solução procurada, caso contrário examina-se a segunda condição:

ii)  $V_{t+\alpha\Delta t}$  é negativa, a equação (A7.6) fica:

$$\frac{1}{\Delta t}(V_{t+\Delta t} - V_t) - B[(1-\alpha)V_t + \alpha V_{t+\Delta t}]^2 = (1-\alpha)F_t + \alpha F_{t+\Delta t}$$

da qual, efetuando-se o termo entre colchetes ao quadrado e após algumas manipulações algébricas, obtém-se a equação:

$$-B\alpha^2 V_{t+\Delta t}^2 + \left[ \frac{1}{\Delta t} - 2B(\alpha - \alpha^2)V_t \right] V_{t+\Delta t} - \frac{V_t}{\Delta t} - B(1-\alpha)^2 V_t^2 - (1-\alpha)F_t - \alpha F_{t+\Delta t} = 0$$

a qual pode ser reescrita na forma:

$$A^{**} V_{t+\Delta t}^2 + B^{**} V_{t+\Delta t} + C^{**} = 0 \quad (\text{A7.8})$$

onde:

$$A^{**} = -B\alpha^2; \quad B^{**} = \left[ \frac{1}{\Delta t} - 2B(\alpha - \alpha^2)V_t \right]; \quad C^{**} = -\frac{V_t}{\Delta t} - B(1-\alpha)^2 V_t^2 - (1-\alpha)F_t - \alpha F_{t+\Delta t}$$

A equação (1.8) é uma equação algébrica do segundo grau, cuja solução fornece o valor da incógnita  $V_{t+\Delta t}$ . Verifica-se se o valor encontrado para  $V_{t+\alpha\Delta t}$  usando-se a equação (1.4) é negativo, se for a condição foi atendida e  $V_{t+\Delta t}$  é a solução procurada.

O método alfa recebe uma denominação diferente de acordo com o valor de  $\alpha$ , conforme mostra a Tabela A.7.1 abaixo, Pierin (2011).

**Tabela A.7.1:** Esquemas de integração no tempo

$\alpha$	Método de	Comentários
0,0	Euler	Método de solução implícito
0,5	Crank-Nicolson	Método de solução semi-implícito
0,6667	Galerkin	Método de solução semi-implícito
1,0	Euler-Backward	Método de solução explícito

Segundo a estabilidade, os métodos de integração direta são classificados em: (i) incondicionalmente estável – quando a solução não crescer indefinidamente para quaisquer condições iniciais, isto é, quando for limitada para qualquer intervalo de tempo, ou (ii) condicionalmente estável - quando a solução for limitada apenas para intervalos de tempo menor do que um certo valor chamado limite de estabilidade. Nos Métodos- $\alpha$ , os que apresentam  $\alpha \geq 0,5$  são incondicionalmente estáveis.

Os métodos incondicionalmente estáveis podem utilizar intervalos de tempo maiores em relação aos métodos implícitos, reduzindo o tempo computacional com pouca perda de precisão. Todavia, para maximizar a precisão, o intervalo de tempo deve ser suficientemente pequeno para garantir que os resultados sejam independentes das demais reduções nesses valores.

Segundo Zienkiewicz e Taylor (1991), o método de Crank-Nicolson apresenta a melhor precisão dentre os métodos semi-implícitos, pois são eliminados os termos quadráticos e o erro de truncamento é na ordem de  $O(\Delta t)^3$ . Entretanto, todos os métodos semi-implícitos são suscetíveis a efeitos oscilatórios na solução quando aumenta o intervalo de tempo, sendo esse efeito mais acentuado no método de Crank-Nicolson. Deste modo, recomenda-se a utilização do método de Galerkin ( $\alpha = 2/3$ ), pois é mais preciso que o método de Euler-Backward e menos suscetível a efeitos de oscilação da solução do que o método de Crank-Nicolson [Pierin (2011)].

## REFERÊNCIAS:

- BATHE, K-J. **Finite Element Procedures**. Prentice-Hall, Inc. Upper Saddle River, New Jersey, 1996.
- PIERIN, I.; SILVA, V. P.; ROVERE, H. L. La. Thermal analysis of two-dimensional structures in fire. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, V. 8 (1), p. 25-49, February 2015.
- PIERIN, I. **A Instabilidade de Perfis formados a Frio em Situação de Incêndio**. Tese de Doutorado em Engenharia de Estruturas – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, 2011.
- ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L. **The Finite Element Method**, 4<sup>th</sup> ed London, Vol. 2, McGraw-Hill, 1991.

## APÊNDICE 8

### **Álgebra do Termo da Equação de Ondas de Plataforma Continental com Fundo Inclinado**

O ponto chave está na álgebra envolvida no primeiro termo de (III.301), a qual será detalhada a seguir:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{h} \frac{d}{dx} (h^{1/2} \cdot \phi) \right] e^{i(\lambda y - \sigma t)}$$

Operando a derivada em  $x$ :

$$\frac{1}{h} \frac{d}{dx} (h^{1/2} \cdot \phi) = h^{-1/2} \frac{d\phi}{dx} + \frac{1}{2} h^{-3/2} \frac{dh}{dx} \phi$$

Assim,

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{h} \frac{d}{dx} (h^{1/2} \cdot \phi) \right] = \frac{d}{dx} \left( h^{-1/2} \frac{d\phi}{dx} \right) + \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} h^{-3/2} \frac{dh}{dx} \cdot \phi \right)$$

Operando a primeira parcela:

$$\frac{d}{dx} \left( h^{-1/2} \frac{d\phi}{dx} \right) = h^{-1/2} \frac{d^2\phi}{dx^2} - \left( \frac{1}{2} h^{-3/2} \frac{dh}{dx} \right) \frac{d\phi}{dx}$$

Operando a segunda parcela:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} h^{-3/2} \frac{dh}{dx} \phi \right) = - \frac{d}{dx} \left[ \frac{d(h^{-1/2})}{dx} \phi \right] = - \frac{d(h^{-1/2})}{dx} \frac{d\phi}{dx} - \frac{d^2(h^{-1/2})}{dx^2} \phi = \left( \frac{1}{2} h^{-3/2} \frac{dh}{dx} \right) \frac{d\phi}{dx} - \frac{d^2(h^{-1/2})}{dx^2} \phi$$

Somando as duas parcelas os termos envolvendo  $\frac{d\phi}{dx}$  cancelam-se e o resultado é:

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{h} \frac{d}{dx} (h^{1/2} \cdot \phi) \right] = h^{-1/2} \frac{d^2\phi}{dx^2} - \frac{d^2(h^{-1/2})}{dx^2} \phi$$

Operando o último termo da equação acima:

$$\frac{d^2(h^{-1/2})}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left[ \frac{d(h^{-1/2})}{dx} \right] = - \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{2} h^{-3/2} \frac{dh}{dx} \right] = \frac{3}{4} h^{-5/2} \left( \frac{dh}{dx} \right)^2 - \frac{1}{2} h^{-3/2} \frac{d^2h}{dx^2}$$

Com isso, tem-se que:

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{h} \frac{d}{dx} (h^{1/2} \phi) \right] = h^{-1/2} \frac{d^2\phi}{dx^2} - \frac{3}{4} h^{-5/2} \left( \frac{dh}{dx} \right)^2 \cdot \phi + \frac{1}{2} h^{-3/2} \frac{d^2h}{dx^2} \cdot \phi = h^{-1/2} \left( \frac{d^2\phi}{dx^2} - \frac{3}{4} \left( \frac{1}{h} \frac{dh}{dx} \right)^2 \cdot \phi + \frac{1}{2} h^{-3/2} \frac{d^2h}{dx^2} \cdot \phi \right)$$

A equação acima pode ser reescrita observando que:

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{2h} \frac{dh}{dx} \right] = \frac{1}{2h} \frac{d^2h}{dx^2} + \frac{1}{2} \frac{dh}{dx} \frac{dh^{-1}}{dx} = \frac{1}{2h} \frac{d^2h}{dx^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{h} \frac{dh}{dx} \right)^2 \quad (*)$$

Portanto,

$$\frac{1}{2h} \frac{d^2h}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2h} \frac{dh}{dx} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{h} \frac{dh}{dx} \right)^2$$

Substituindo o primeiro termo à direita do sinal de igual em (\*) pela expressão acima, chega-se a:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{h} \frac{d}{dx} (h^{1/2} \phi) \right] &= h^{-1/2} \left[ \frac{d^2 \phi}{dx^2} - \frac{3}{4} \left( \frac{1}{h} \frac{dh}{dx} \right)^2 \cdot \phi + \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2h} \frac{dh}{dx} \right) \cdot \phi + \frac{2}{4} \left( \frac{1}{h} \frac{dh}{dx} \right)^2 \cdot \phi \right] = \\ &= h^{-1/2} \left[ \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2h} \frac{dh}{dx} \right) \cdot \phi - \left( \frac{1}{2h} \frac{dh}{dx} \right)^2 \cdot \phi \right] \end{aligned}$$

O termo da eq. (III.301), portanto, pode ser escrito como:

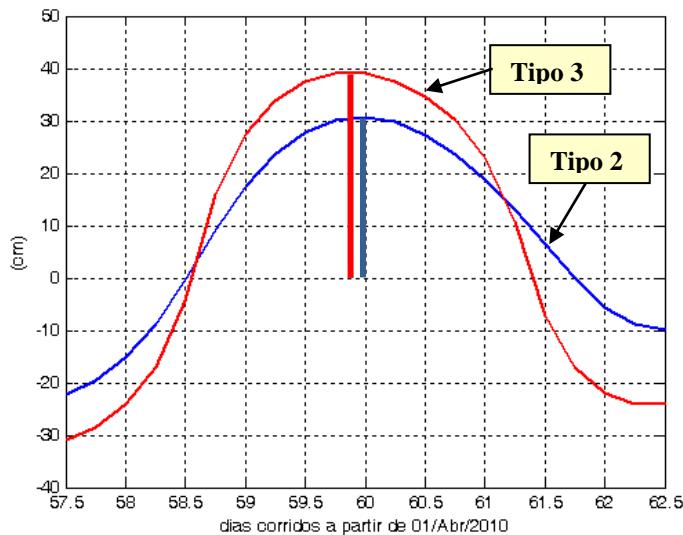
$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{h} \frac{d}{dx} (h^{1/2} \cdot \phi) \right] e^{i(\lambda y - \sigma t)} = h^{-1/2} \left\{ \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2h} \frac{dh}{dx} \right) - \left( \frac{1}{2h} \frac{dh}{dx} \right)^2 \right] \phi \right\} e^{i(\lambda y - \sigma t)}$$

## APÊNDICE 9

### Nota sobre a Possibilidade dos Modelos Tipo 2 e Tipo 3 darem Resultados próximos em alguns Eventos Específicos

A possibilidade dos modelos Tipo 2 e Tipo 3 darem resultados próximos em alguns eventos específicos é analisada usando o evento ocorrido em Rio Grande durante o ANO, próximo ao dia corrido 60, marcado com elipses azuis nas figuras (IV.22) e (IV.30) como caso de estudo. As soluções sem barômetro invertido foram escolhidas para evidenciar o efeito exclusivo do vento.

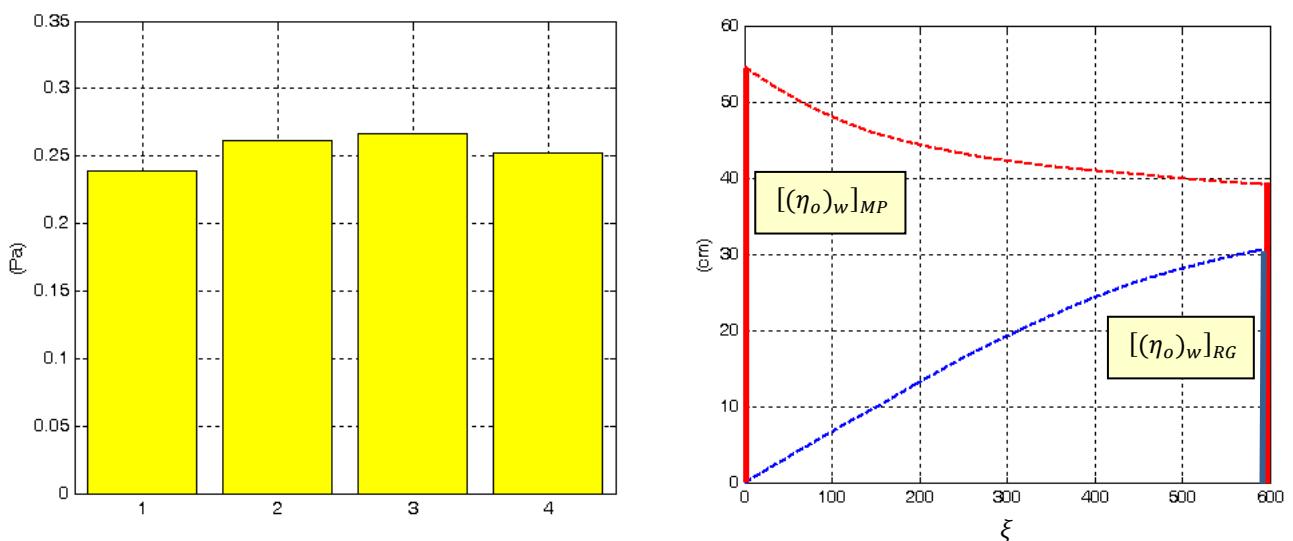
Para facilitar, a figura (A9.1) mostra em detalhe as soluções fornecidas pelos dois modelos para o evento selecionado.



**Figura A9.1** – Reconstituição de evento de MM mostrados nas figuras (IV.22) e (IV.30).

Como se pode verificar, a figura mostra que os modelos Tipo 2 e Tipo 3 produziram resultados mais ou menos próximos para o valor máximo da MM induzida pelo vento em Rio Grande no evento de MM positiva estudado.

A melhor maneira de entender como isso foi possível é recuperar as soluções fornecidas pelas características que reproduziram o ápice do evento (que, no caso, é a de número 240). O resultado da solução para os dois modelos está mostrada na figura (A9.2), juntamente com os quatro valores da tensão do vento usados a integração (que são os mesmos em ambos os modelos).



**Figura A9.2** – Tensão de vento e detalhe da solução ao longo da característica usadas para determinar o pico da MM mostrado na figura (A9.1)

As soluções foram obtidas pelo método analítico aplicado em patamares descrito na seção III.3.6.1 com discretização temporal de 150 pontos em cada patamar, o que explica o fato de  $\xi$  chegar ao valor 600 na figura (A9.2).

Observando, inicialmente, a solução dada pelo modelo Tipo 3 (linha vermelha nas figuras), verifica-se que o máximo de MM observado em Rio Grande foi oriundo de um pico de MM ocorrido em Mar del Plata 24 horas antes, o qual propagou-se pela plataforma continental entre os dois sítios *perdendo* altura no percurso.

Já a solução dada pelo modelo Tipo 2 (linha azul na figura), inicia com uma MM *nula* em Mar del Plata a qual vai *ganhando* altura a medida que se propaga pela plataforma até Rio Grande em resposta a ação da tensão do vento ao longo da pista.

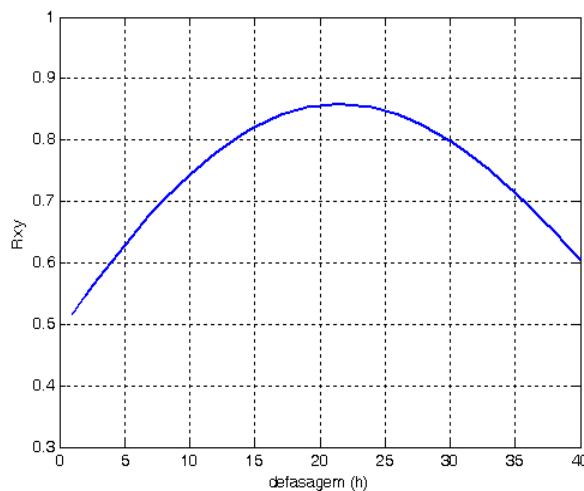
Apesar dos resultados finais para a MM em Rio Grande terem resultado próximos, a evolução da MM ao longo da pista previsto pelos dois modelos é bem diferente. O exemplo deixa evidente que a hipótese usada pelo modelo Tipo 2 de que a MM em Mar del Plata é sempre nula se mostra inconsistente com a ideia de uma MM móvel. O exemplo ilustra também o impacto que a MM no ponto inicial tem na MM a “jusante”

## APÊNDICE 10

### Aplicação do Modelo Tipo 4 a outros Sítios da Costa Brasileira

#### A10.1 - Determinação da Maré Meteorológica em Imbituba para 2003 a partir exclusivamente de Medições em Rio Grande

O modelo agora é usado para prever a MM em Imbituba a partir de medições em Rio Grande. O resultado do cálculo da Covariância Cruzada Normalizada entre as MM's nos dois locais foi também feito na seção II.8.3 e está reapresentado na figura (A10-1) por comodidade.

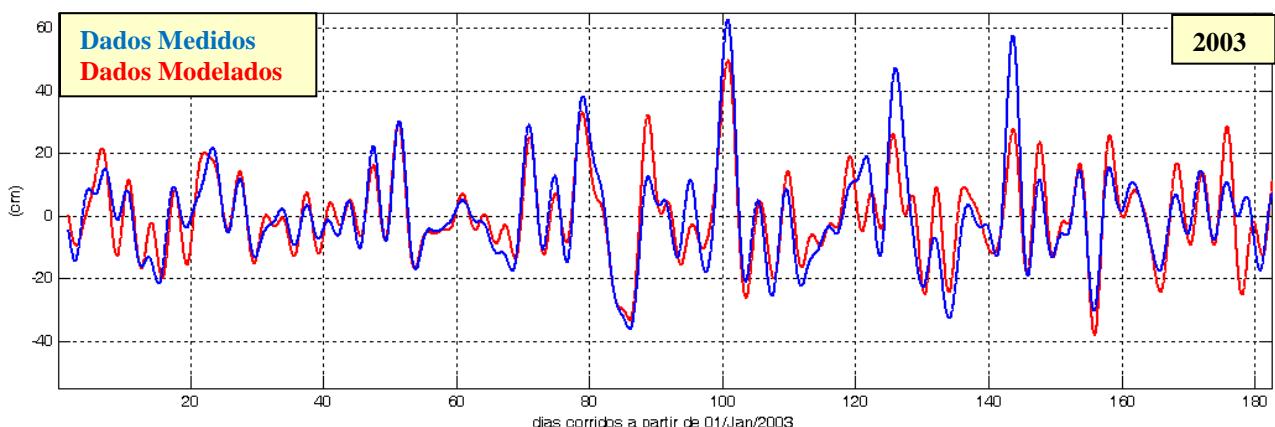


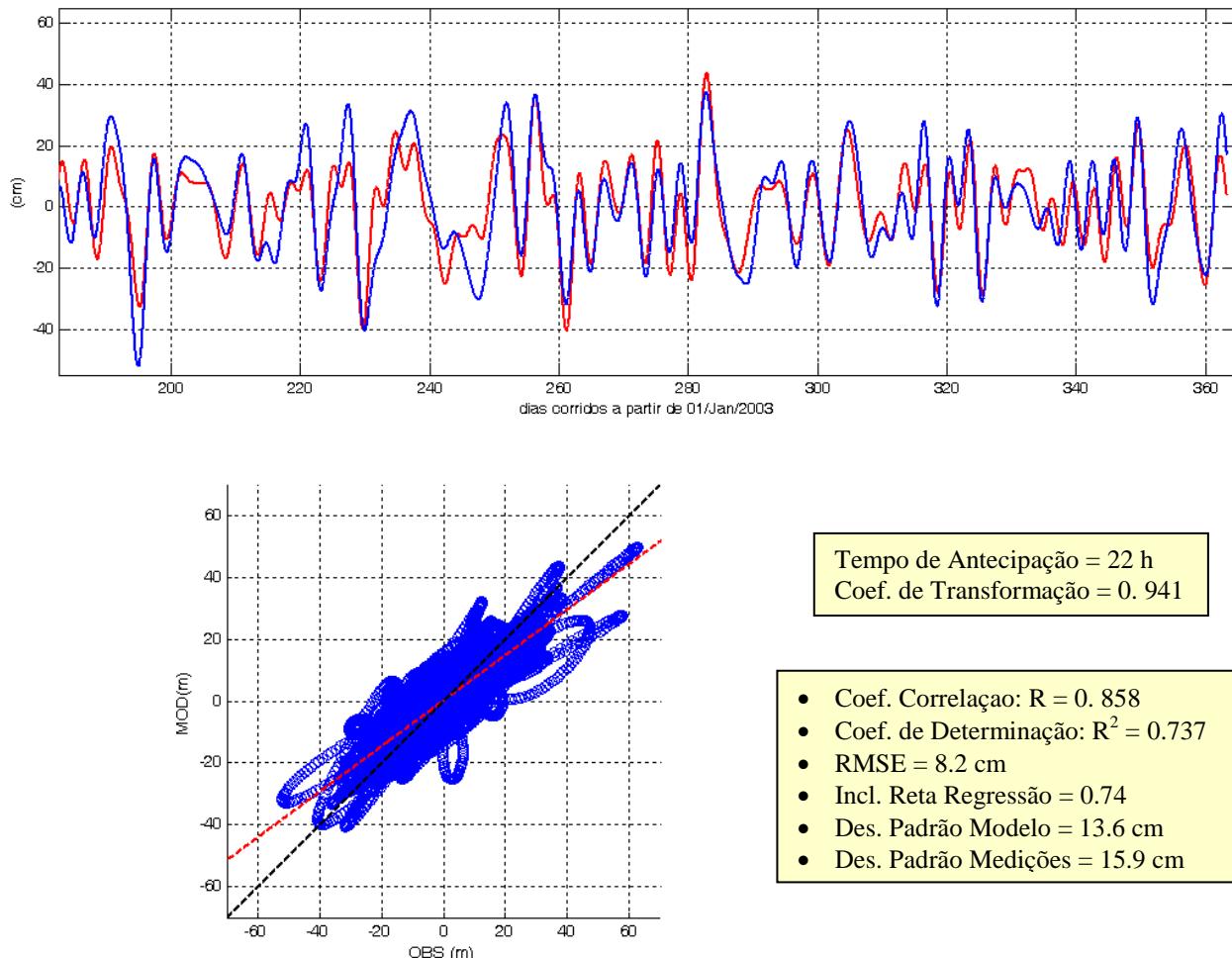
**Figura A10-1** – Função de covariância cruzada normalizada entre as MM's em Rio Grande e em Imbituba

O pico da função ocorre para uma defasagem  $\tau_o$  de 22 horas com uma correlação de 0.8583, conforme já visto no capítulo II, figura (II.19).

O mesmo procedimento utilizado nas seção IV.4.4 foi usado para a determinação do coeficiente de transformação resultando em  $\alpha = 0.8679$ .

A determinação da MM em Imbituba a partir de Rio Grande pelo modelo é comparada com as medições na figura (A10-2).

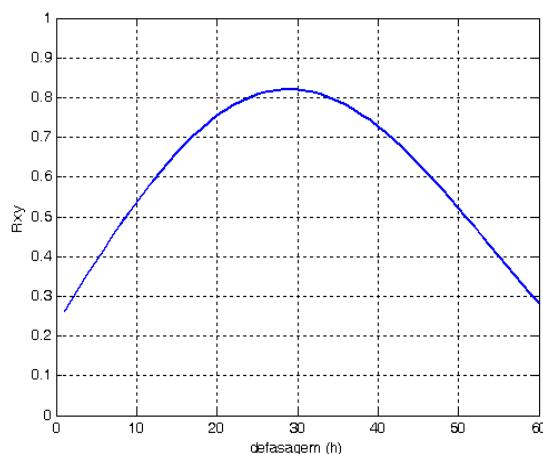




**Figura A10-2** - Comparação dos resultados do modelo Tipo 4 (**vermelho**) com as observações (**azul**) para Imbituba. Painéis superiores: séries temporais. Painel inferior: diagrama de dispersão entre os resultados do modelo (MOD) e as medições (OBS) juntamente com os parâmetros estatísticos da modelagem

#### A10.2 - Determinação da Maré Meteorológica em Cananéia a partir exclusivamente de Medições em Rio Grande

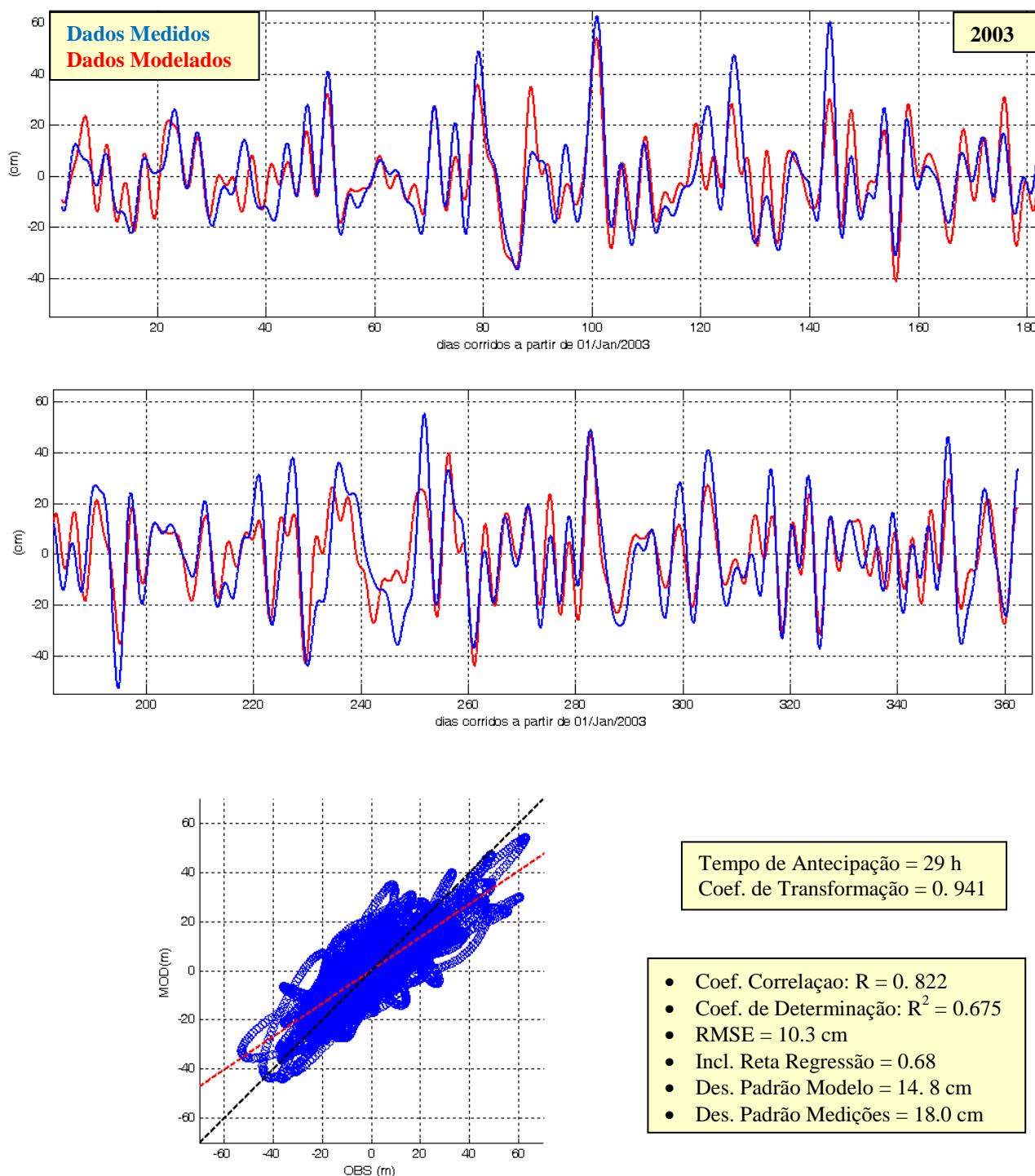
O modelo agora é usado para prever a MM em Cananeia a partir de medições em Rio Grande. O resultado do cálculo da covariância cruzada normalizada entre as MM's nos dois locais foi também feito na seção II.8.3 e está reapresentado na figura (A10-3) por comodidade.



O pico da função ocorre para uma defasagem  $\tau_o$  de 29 horas com uma correlação de 0.8216, conforme já visto no capítulo II, figura II.19.

O mesmo procedimento utilizado na seção IV.4.4 foi usado para a determinação do coeficiente de transformação resultando em  $\alpha = 0.9411$ .

A determinação da MM em Cananéia a partir de Rio Grande pelo modelo é comparada com as medições na figura (A10-4).



**Figura A10-4** - Comparação dos resultados do modelo tipo ondulação (vermelho) com as observações (azul) para Cananéia. Painéis superiores: séries temporais. Painel inferior: diagrama de dispersão entre os resultados do modelo (MOD) e as medições (OBS) juntamente com os parâmetros estatísticos da modelagem