$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 4\pi G\rho(x) \qquad \Omega = (0,3)$$

$$\phi(0)=5 \wedge \phi(3)=4$$

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & x \in \langle 0,1 \rangle \\ 1 & x \in (1,2\rangle \\ 0 & x \in (2,3\rangle \end{cases}$$

Wyprowadzenie sformułowania wariacyjnego:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 4\pi G\rho(x) \quad / \cdot v \text{ – testowa i } \int_\Omega$$

$$\int_0^3 \frac{d^2\phi}{dx^2}dx = \int_0^3 4\pi G\rho(x)v(x)dx$$

$$L: \int_0^3 \frac{d^2\phi}{dx^2}dx \overset{\text{przez}}{\underset{\text{części}}{=}} \left[\phi'(x)v(x)\right]_0^3 - \int_0^3 \phi(x)v'(x)dx$$

Otrzymamy warunek Dirichleta $\Rightarrow v(0)=0 \wedge v(3)=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\phi'(x)v(x)\right]_0^3 = 0$$

$$-\int_0^3 \phi'(x)v'(x)dx = 4\pi G\int_0^3 \rho(x)v(x)dx = 4\pi G\int_1^2 v(x)dx$$

i. $B(\phi,v) = -\int_0^3 \phi(x)v(x)dx \qquad L(v) = 4\pi G\int_1^2 v(x)dx$

niech: $\phi = w + \bar{u} \wedge w(0)=0 \wedge w(3)=0 \wedge \bar{u}(0)=5 \wedge$

$\wedge\, \bar{u}(3)=4 \quad , \quad \bar{u} = 5 - \frac{x}{3}$

Wówczas (z liniowości $B(\phi, v)$)

$$B(\phi, v) = B(\underset{v}{w + \overline{u}}) = B(w, v) + B(\overline{u}, v) = L(v)$$

$$B(w, v) = L(v) - B(\overline{u}, v) = \tilde{L}(v)$$

Z uwagi na warunki Dirichleta elementy brzegowe mogą zostać pominięte:

Rozważmy $V_h = \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$ n – liczba przedziałów

niech $e_i = \begin{cases} \frac{x}{h} - i + 1 & x \in \langle h(i-1), hi \rangle \\ -\frac{x}{h} + i + 1 & x \in \langle hi, h(i+1) \rangle \\ 0 & \text{w.p.p.} \end{cases}$

Wówczas otrzymamy układ równań reprezentowany macierzą:

$$\begin{bmatrix} B(e_1, e_1) & B(e_2, e_1) & \dots & B(e_{n-1}, e_1) \\ \vdots & & & \\ B(e_1, e_{n-1}) & \dots & & B(e_{n-1}, e_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{L}(e_1) \\ \vdots \\ \tilde{L}(e_{n-1}) \end{bmatrix}$$

Dodatkowo zauważmy iż:

$\forall_{i,j \in \{1, \dots, n\}} B(e_i, e_j) = B(e_j, e_i)$ $\wedge$ $\forall_{|i-j|>1} B(e_i, e_j) = 0$

$e_i' = \begin{cases} \frac{1}{h} & x \in \langle h(i-1), hi \rangle \\ -\frac{1}{h} & x \in \langle hi, h(i+1) \rangle \\ 0 & \text{w.p.p.} \end{cases}$ $\quad \overline{u}' = -\frac{1}{3} \quad x \in \langle 0, 3 \rangle$