Opracowanie: Maksymilian Sulima gr 3

MOwNiT - aproksymacja wielomianami algebraicznymi

1. Sprzęt

System operacyjny:

- Windows 10 19044.2604

Język:

- Python 3.10, numpy 1.24.2, matplotlib 3.7.1, jupyter

Procesor:

- AMD Ryzen 7 4700U

2. Treść zadania

Dla funkcji:

$$F(x) = sin(2x) * sin(2x^2/\pi), x < -2\pi, \pi >$$

obliczyć wartości funkcji f(x) dla n punktów. Następnie opierając się na wyliczonych wartościach przybliżyć zadaną funkcję za pomocą aproksymacji średniokwadratowej wielomianami algebraicznymi.

Należy przeprowadzić serię eksperymentów numerycznych, w których zostaną użyte różne liczby punktów dyskretyzacji oraz zestawy funkcji bazowych z różną liczbą funkcji. Następnie trzeba oszacować błędy wynikające z przybliżenia i przedstawić graficznie ciekawe przypadki.

3. Informacje wstępne

Została użyta funkcja aproksymująca postaci:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j$$

Współczynniki a zostały wyznaczone przy pomocy układu równań:

$$\sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{j=0}^{m}\left(\sum_{i=0}^{n} w(x_i)x_i^{j+k}\right)\right) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} w(x_i)F(x_i)x_i^k$$

Gdzie:

$n+1$ – liczba węzłów

$w(x)$ – funkcja wagowa (w eksperymentach numerycznych użyto $w(x) = 1$)

$F(x)$ – funkcja aproksymowana

x_i – punkty dyskretyzacji

Układ równań został rozwiązany przy użyciu funkcji linalg.solve z biblioteki numpy.

4. Wykonanie ćwiczenia

Aproksymacja została wykonana dla:

$$\forall(n,m): n \in \{3,5,7,10,15,20,25,30,35,40,45,49,50,51\} \land m \in \{2,3,4,5,6,8,10,12,15\}$$

Liczba punktów dla których liczone były wartości to 1000.

Dokładność została zmierzona przy pomocy 2 metryk:

- błędu maksymalnego

$$\forall i \in < i, p > \max |f(x_i) - F(x_i)|$$

- błędu średniokwadratowego

$$\frac{1}{p}\sqrt{\sum_{i=0}^{p}\left(f(x_i) - (Fx_i)\right)^2}$$

Gdzie p oznacza liczbę punktów, dla których przeprowadzono pomiar.

n\m	2	3	4	5	6	8	10	12	15
5	1,577E-02	1,577E-02	1,610E-02	1,656E-02	1,559E-02	1,943E-02	1,745E-02	1,621E-02	1,656E-02
7	1,381E-02	1,381E-02	1,381E-02	1,381E-02	1,381E-02	1,381E-02	1,381E-02	1,381E-02	1,381E-02
10	1,435E-02	1,448E-02	1,431E-02	1,537E-02	2,074E-02	3,098E-02	6,228E-02	9,112E-02	2,760E-01
15	1,352E-02	1,348E-02	1,382E-02	1,421E-02	1,488E-02	1,494E-02	1,888E-02	5,257E-02	8,553E+00
20	1,297E-02	1,300E-02	1,285E-02	1,286E-02	1,283E-02	1,274E-02	1,351E-02	1,647E-02	3,788E-02
25	1,296E-02	1,297E-02	1,282E-02	1,278E-02	1,276E-02	1,262E-02	1,138E-02	9,822E-03	1,026E-02
30	1,296E-02	1,296E-02	1,281E-02	1,276E-02	1,274E-02	1,260E-02	1,124E-02	9,800E-03	9,814E-03
35	1,295E-02	1,296E-02	1,281E-02	1,275E-02	1,273E-02	1,259E-02	1,118E-02	9,779E-03	8,859E-03
40	1,295E-02	1,295E-02	1,281E-02	1,274E-02	1,272E-02	1,258E-02	1,114E-02	9,769E-03	8,543E-03
45	1,295E-02	1,295E-02	1,281E-02	1,274E-02	1,271E-02	1,258E-02	1,110E-02	9,763E-03	8,435E-03
49	1,295E-02	1,295E-02	1,281E-02	1,273E-02	1,271E-02	1,258E-02	1,107E-02	9,761E-03	8,398E-03
50	1,295E-02	1,295E-02	1,281E-02	1,273E-02	1,271E-02	1,258E-02	1,107E-02	9,760E-03	8,392E-03
51	1,295E-02	1,295E-02	1,281E-02	1,273E-02	1,271E-02	1,258E-02	1,106E-02	9,760E-03	8,386E-03

Tabela 1. Przedstawia wartość błędu średniokwadratowego w zależności od
n – liczby węzłów i m – stopnia wielomianu aproksymującego.

n\m	2	3	4	5	6	8	10	12	15
5	1,065E+00	1,065E+00	1,341E+00	1,514E+00	1,119E+00	1,977E+00	1,664E+00	1,427E+00	1,547E+00
7	9,495E-01	9,495E-01	9,495E-01	9,495E-01	9,495E-01	9,495E-01	9,495E-01	9,495E-01	9,495E-01
10	1,056E+00	1,062E+00	1,046E+00	1,279E+00	2,044E+00	3,087E+00	7,844E+00	1,190E+01	3,916E+01
15	1,059E+00	1,043E+00	1,225E+00	1,388E+00	1,514E+00	1,475E+00	2,075E+00	7,545E+00	1,217E+03
20	1,006E+00	1,047E+00	9,878E-01	9,872E-01	9,605E-01	9,146E-01	1,416E+00	2,301E+00	6,400E+00
25	1,012E+00	1,034E+00	9,636E-01	9,656E-01	9,415E-01	9,273E-01	1,035E+00	8,436E-01	1,094E+00
30	1,013E+00	1,030E+00	9,586E-01	9,610E-01	9,398E-01	9,048E-01	1,010E+00	7,593E-01	1,360E+00
35	1,014E+00	1,028E+00	9,571E-01	9,595E-01	9,385E-01	9,065E-01	9,982E-01	7,512E-01	9,370E-01
40	1,014E+00	1,026E+00	9,565E-01	9,587E-01	9,373E-01	9,091E-01	9,914E-01	7,522E-01	7,154E-01
45	1,014E+00	1,025E+00	9,561E-01	9,582E-01	9,363E-01	9,108E-01	9,866E-01	7,539E-01	6,095E-01
49	1,014E+00	1,025E+00	9,560E-01	9,579E-01	9,356E-01	9,119E-01	9,835E-01	7,551E-01	6,089E-01
50	1,014E+00	1,024E+00	9,560E-01	9,578E-01	9,354E-01	9,121E-01	9,828E-01	7,553E-01	6,089E-01
51	1,015E+00	1,024E+00	9,559E-01	9,577E-01	9,353E-01	9,124E-01	9,821E-01	7,555E-01	6,087E-01

Tabela 2. Przedstawia wartość błędu maksymalnego w zależności od
n – liczby węzłów i m – stopnia wielomianu aproksymującego.

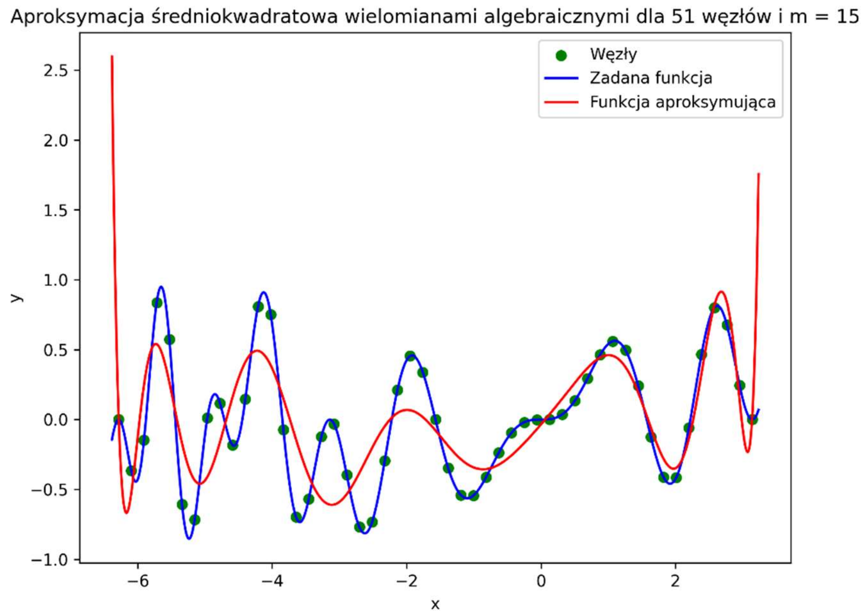
W tabelach 1 i 2 na szaro zaznaczono komórki dla których $n \leq m$, czyli wartości współczynników dla których wychodzimy poza zagadnienie aproksymacji.

Najlepsze przybliżenie uzyskano dla $n = 51$ i $m = 15$, odpowiednio $6{,}087E - 01$ i

$8{,}386E - 03$ dla błędu maksymalnego i błędu średniokwadratowego.
Natomiast najgorsze dla $n = 15$ i $m = 15$, $1{,}217E + 03$ dla błędu maksymalnego i $8{,}553E + 00$ dla błędu średniokwadratowego.
Dla wartości parametrów, które pozostają w obrębie zagadnienia aproksymacji najgorszy wynik uzyskano dla $n = 15$ i $m = 12$, $7{,}545E + 00$ dla błędu maksymalnego i $5{,}257E - 02$ dla błędu średniokwadratowego.

Odchyły na przy końcach wykresów, występują ze względu na to że dziedzina rysowania wykresu jest o 0.01 większa przy każdym końcu, błędy zostały obliczone bez uwzględnienia tego rozszerzenia.

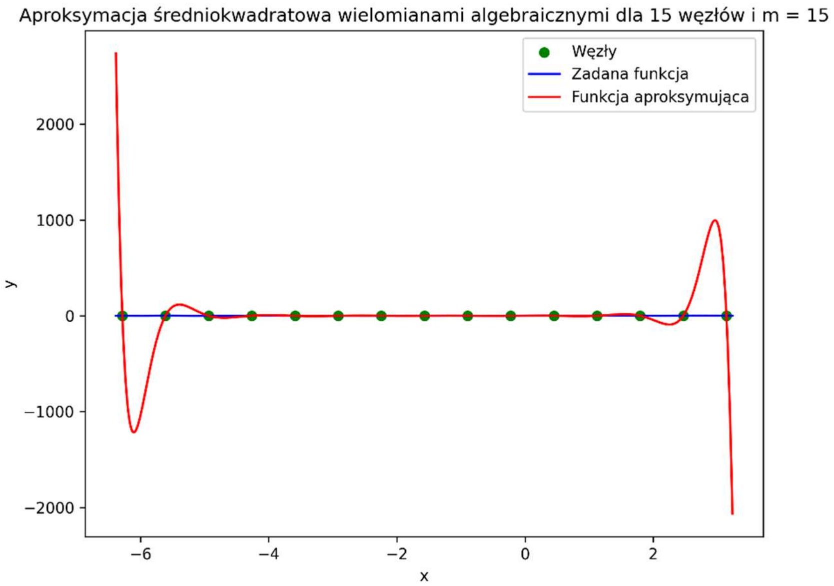
Najlepszy rezultat dla aproksymacji wielomianami algebraicznymi



Wykres 1. Rezultat aproksymacji średniokwadratowej wielomianami algebraicznymi dla 51 węzłów i stopnia wielomianu 15.

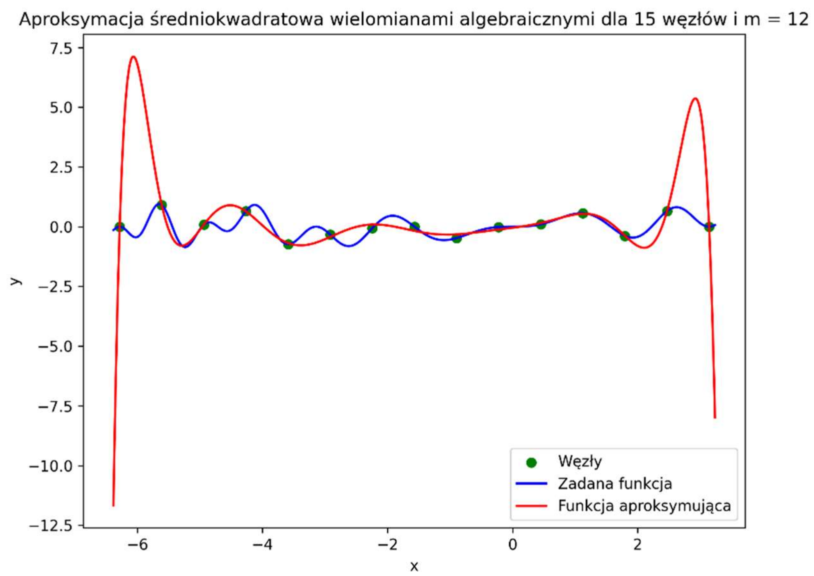
Aproksymacja dość dobrze potrafi przybliżyć przebieg funkcji, widoczna jest korelacja monotoniczności funkcji aproksymującej i aproksymowanej, jednocześnie będąc mniej kosztowną w porównaniu do interpolacji, ponieważ korzysta ona najczęściej z wielomianu aproksymacyjnego o stopniu znacznie mniejszym niż liczba węzłów, natomiast w interpolacji stopień wielomianu wynosi 1 mniej niż liczba węzłów.

Najgorszy rezultat dla aproksymacji wielomianami algebraicznymi



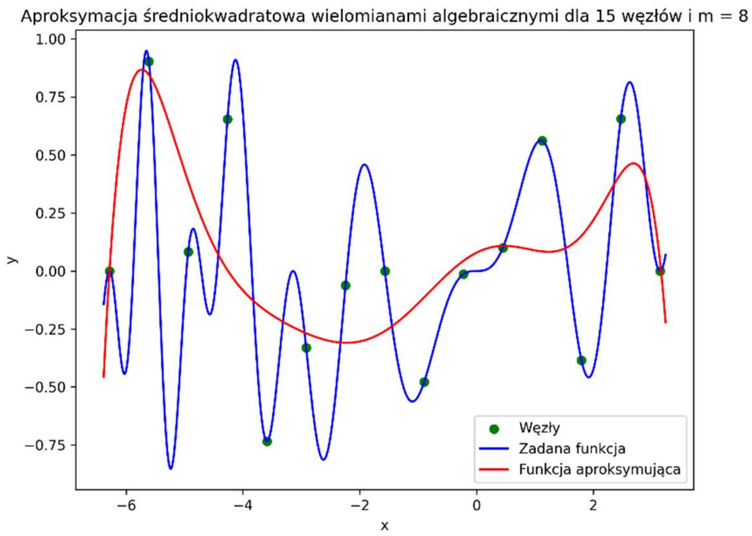
Wykres 2. Rezultat aproksymacji średniokwadratowej wielomianami algebraicznymi dla 15 węzłów i stopnia wielomianu 15

Jeżeli $n = m$ wówczas zagadnienie aproksymacji przechodzi w interpolację. Na wykresie 2 można, zauważyć efekt Rungego. Efekt ten może się pojawić wraz ze wzrostem liczby węzłów. Intuicyjnie zwiększeni liczby węzłów powinno prowadzić do zmniejszenia błędu interpolacji jednak jeżeli ten efekt wystąpi to przy dalszym wzroście n nastąpi zwiększenia błędu, szczególnie jest to widoczne przy końcach przedziału.



Wykres 3. Rezultat aproksymacji średniokwadratowej wielomianami algebraicznymi dla 15 węzłów i stopnia wielomianu 12.

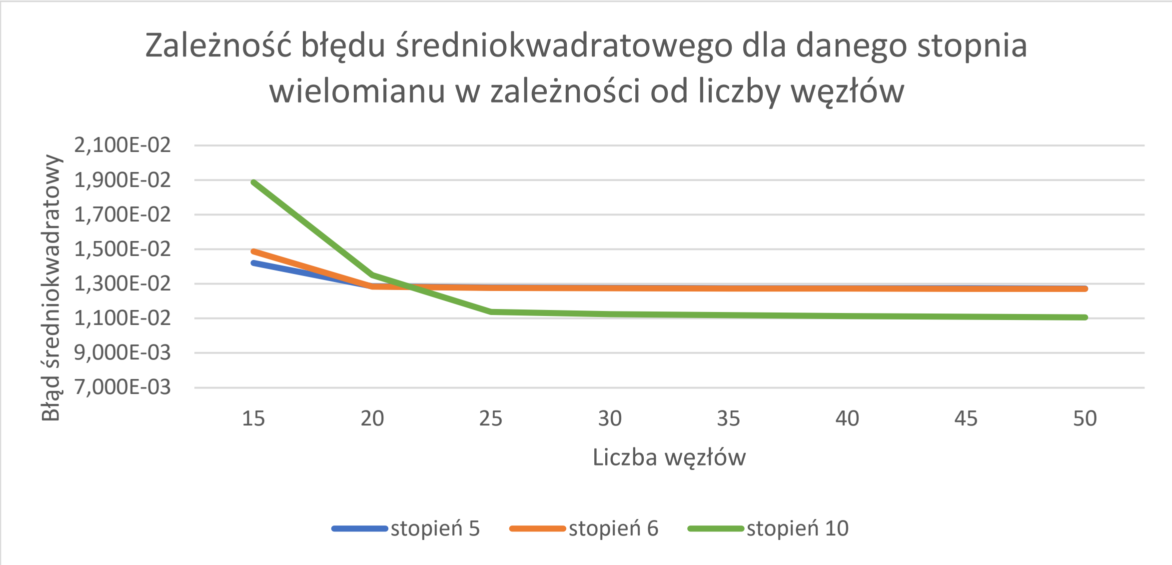
Na wykresie 3 możemy zauważyć, że występuje efekt podobny do efektu Rungego mimo, że nadal pozostajemy w zagadnieniu aproksymacji.



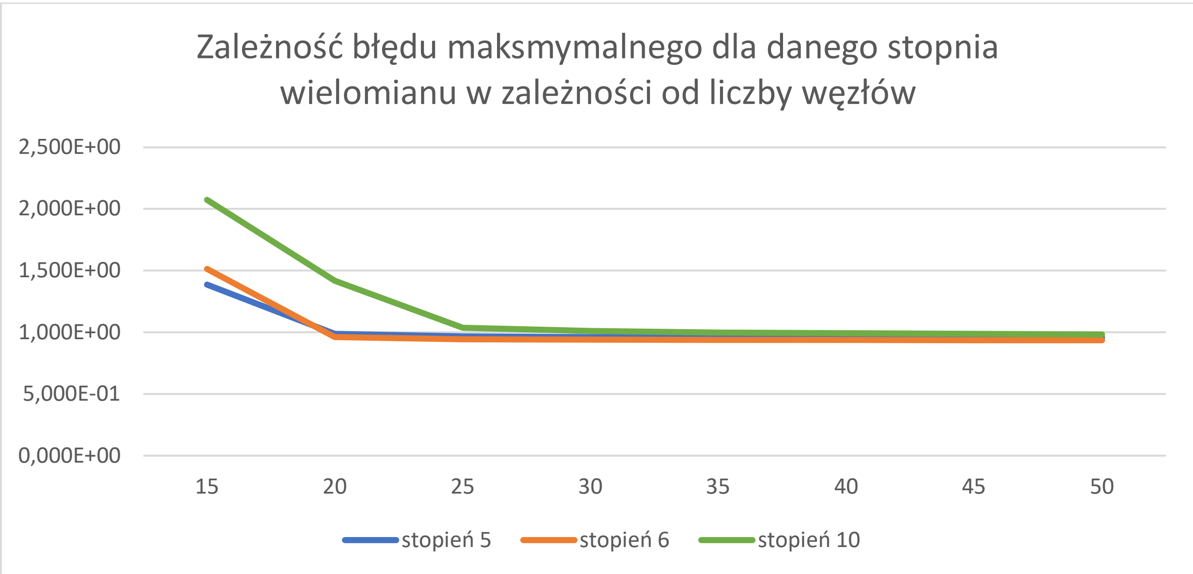
Wykres 4. Rezultat aproksymacji średniokwadratowej wielomianami algebraicznymi dla 15 węzłów i stopnia wielomianu 8

Na wykresie 4 można zaobserwować eliminację (wykres 4) efektu Rungego dla tej samej liczby węzłów uzyskaną dzięki zmniejszeniu stopnia wielomianu aproksymującego. Pojawienie się tego efektu w zagadnieniu aproksymacji pokazuje, że należy uważnie dobierać parametry aproksymacji, powinna zachodzić zależność $m \ll n$.

Dokładność aproksymacji w zależności od liczby węzłów



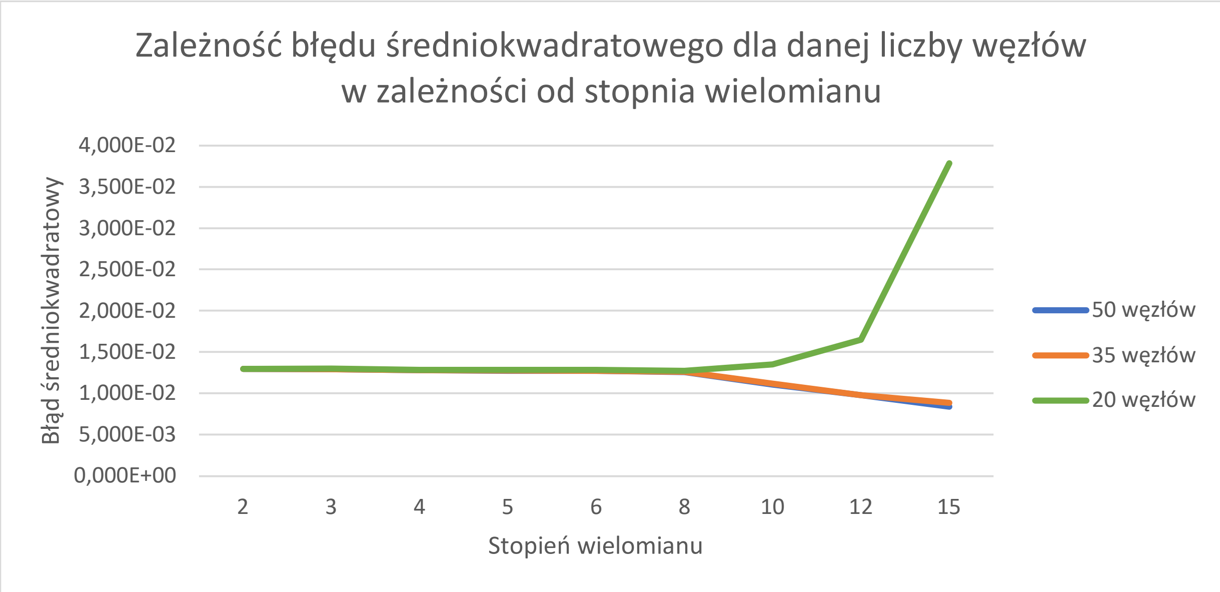
Wykres 5. Przedstawia zależność błędu średniokwadratowego dla danego stopnia wielomianu aproksymującego w zależności od liczby węzłów.



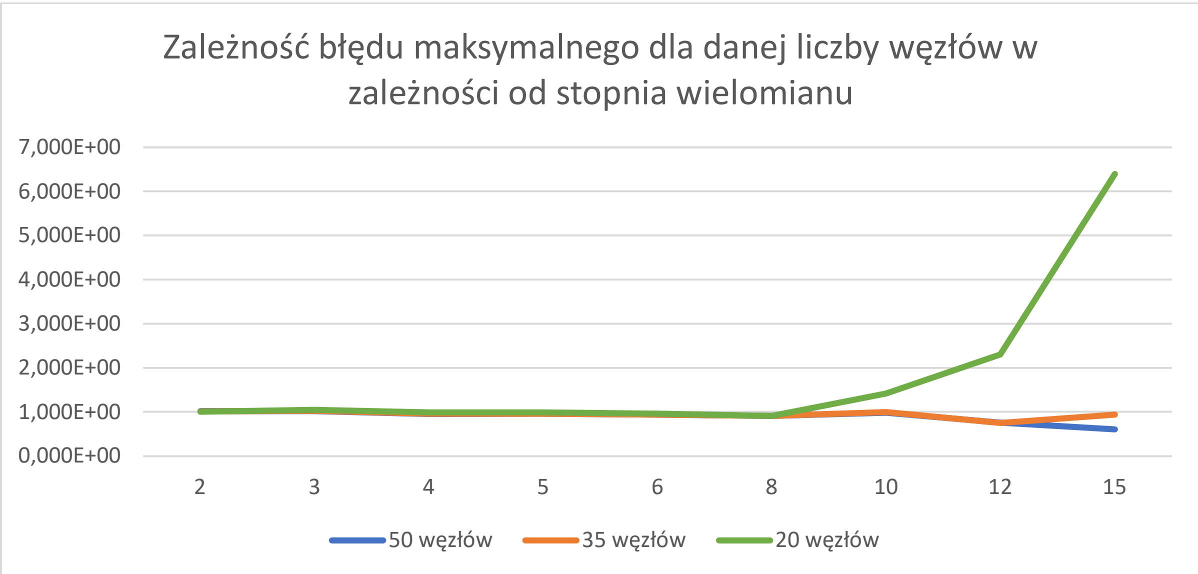
Wykres 6. Przedstawia zależność błędu maksymalnego dla danego stopnia wielomianu aproksymującego w zależności od liczby węzłów.

Wykresy 5 i 6 wyraźnie pokazują, że wraz ze wzrostem liczby węzłów dokładność aproksymacji nie poprawi się jeżeli stopień wielomianu aproksymującego pozostanie niezmieniony.

Dokładność aproksymacji w zależności od stopnia wielomianu



Wykres 7. Przedstawia zależność błędu średniokwadratowego dla danej liczby węzłów w zależności od stopnia wielomianu.



Wykres 8. Przedstawia zależność błędu maksymalnego dla danej liczby węzłów w zależności od stopnia wielomianu.

Wykresy 7 i 8 pokazują, że wartość współczynnika m odgrywa większe znaczenie dla dokładności aproksymacji. Dodatkowo należy zauważyć, że zwiększanie m nie zawsze da dobry efekt. Dla 20 węzłów wraz ze wzrostem wartości m powyżej 8 mamy do czynienia ze wzrostem wartości obu błędów. Podkreśla to kluczową dla aproksymacji wielkość różnicy między liczbą węzłów, a stopniem wielomianu aproksymującego.

5. Wnioski

- Wykres 1 pokazuje, że aproksymacja jest w stanie dobrze przybliżyć przebieg funkcji mimo mniejszego stopnia wielomianu w porównaniu do interpolacji.
- Kluczowym czynnikiem decydującym o dokładności aproksymacji jest stopień wielomianu aproksymującego i jego stosunek do liczby użytych węzłów.
  - Powinna zostać, zachowana zależność $m \ll n$, ponieważ jeżeli różnica między tymi parametrami stanie się zbyt mała może dojść do zmniejszenia dokładności aproksymacji
  - Dla $m = n$, zagadnienie aproksymacji przechodzi w interpolację i można uzyskać efekt Rungego.
  - Dla m bliskiego n może zajść efekt podobny do efektu Rungego
- Liczba węzłów bezpośrednio nie wpływa na dokładność aproksymacji