

# Przybliżanie funkcji

Podsumowanie

Opracowanie: Maksymilian Sulima

# Informacje techniczne

System operacyjny:

- Windows 10 19044.2604

Technologie:

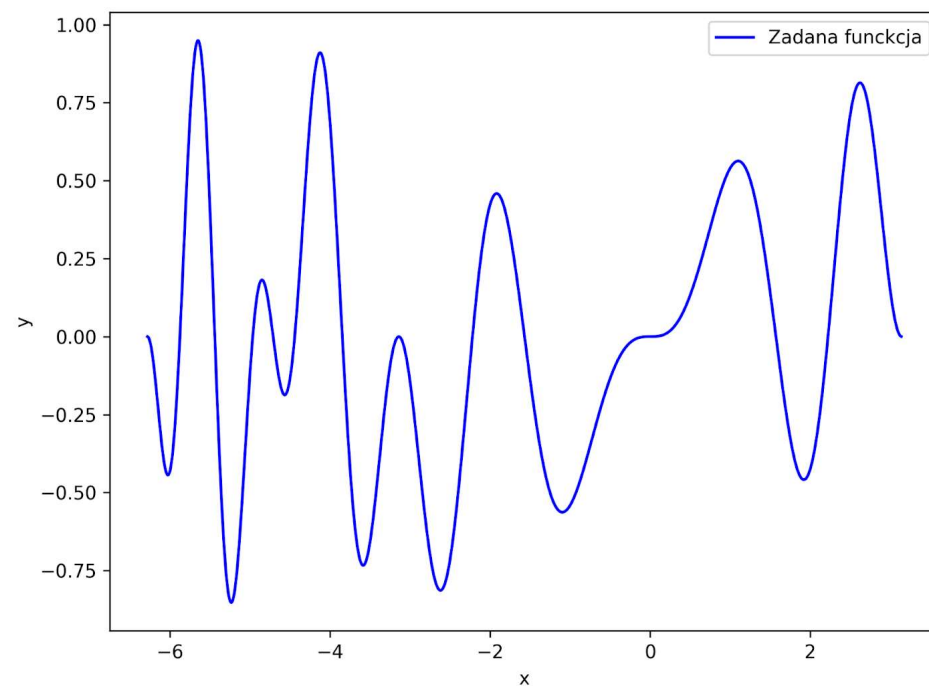
- Python 3.10
- numpy 1.24.2
- matplotlib 3.7.1
- jupyter

Procesor:

- AMD Ryzen 7 4700U

# Funkcja zadana

$$f(x) = \sin(2x) * \sin(2x^2/\pi), x \in <-2\pi, \pi>$$



# Rozważone podejścia do przybliżenia

- Interpolacja
  - Zagadnienie Lagrange'a
    - Wzór Lagrange'a
    - Wzór Newtona
  - Zagadnienie Hermite'a
    - Wzór Newtona
  - Funkcjami sklejanymi
    - Drugiego stopnia
    - Trzeciego stopnia
- Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami:
  - Algebraicznymi
  - Trygonometrycznymi

# Najważniejsze założenia teoretyczne

- Wartości błędów liczone dla 1000 równoodległych punktów
- Dla zagadnienia Hermite'a użyto wzoru Newtona i wagi dla każdego węzła 2
- Warunki brzegowe dla funkcji sklejanych
  - Kwadratowych
    - Clamped boundary  $s'_1(x_1) = f'(x_1)$
    - Natural quadratic  $s''_1(x_1) = 0$
  - Sześciennych
    - Cubic function  $s'''_1(x_1) = C'''_1(x_1)$  i  $s'''_1(x_1) = C'''_n(x_n)$ ,  $C_1, C_n$  – f/ sześciennie przechodzące przez pierwsze/ostatnie 4 pkt
    - Natural  $s''_1(x_1) = s''_n(x_1) = 0$

# Wyniki

- Dokładność obliczeń zmierzono za pomocą 2 metryk:

- Błędu maksymalnego

$$\forall i \in \langle 1, p \rangle \max |f(x_i) - F(x_i)|$$

- Błędu średniokwadratowego

$$\frac{1}{p} \sqrt{\sum_{i=0}^p (f(x_i) - F(x_i))^2}$$

P – liczba punktów pomiaru

$x_i$  - i-ty pkt pomiaru

# Najlepsze wyniki, błąd maksymalny

Nazwa	Dane	Błąd maksymalny
Lagrange węzły Czebyszewa	n=70	4,339E-14
Hermite węzły Czebyszewa	n=21	1,223E-03
Newton węzły Czebyszewa	n=39	1,887E-03
Kwadratowy spline clamped	n=70	1,404E-02
Aproksymacja $\sin$ , trygo,	n=70 m=30	2,059E-02
Sześcienny spline cubic	n=70	2,853E-02
Sześcienny spline natural	n=70	3,903E-02
Kwadratowy spline natural	n=70	7,027E-02
Lagrange węzły Równoodległe	n=61	4,354E-01
Aproksymacja $\sin$ , alg,	n=60 m=20	5,474E-01
Newton węzły równoodległe	n=4	9,494E-01
Hermite węzły równoodległe	n=4	9,494E-01

# Najlepsze wyniki, błąd średniokwadratowy

Nazwa	Dane	Błąd średniokwadratowy
Lagrange węzły Czebyszewa	n=70	4,228E-16
Hermite węzły Czebyszewa	n=21	1,000E-05
Newton węzły Czebyszewa	n=42	1,201E-05
Sześcienny spline cubic	n=70	8,921E-05
Kwadratowy spline clamped	n=70	1,059E-04
Sześcienny spline natural	n=70	1,247E-04
Aproksymacja śrd, trygo,	n=70 m=30	2,166E-04
Lagrange węzły równoodległe	n=61	7,898E-04
Kwadratowy spline natural	n=39	1,294E-03
Aproksymacja śrd, alg,	n=65 m=20	7,175E-03
Newton węzły równoodległe	n=4	1,422E-02
Hermite węzły równoodległe	n=4	1,422E-02



# Najlepsze wyniki, oba błędy

Nazwa	Dane	Błąd średniokwadratowy	Dane	Błąd maksymalny
Lagrange węzły Czebyszewa	n=70	4,228E-16	n=70	4,339E-14
Lagrange węzły równoodległe	n=61	7,898E-04	n=61	4,354E-01
Newton węzły Czebyszewa	n=42	1,201E-05	n=39	1,887E-03
Newton węzły równoodległe	n=4	1,422E-02	n=4	9,494E-01
Hermite węzły Czebyszewa	n=21	1,000E-05	n=21	1,223E-03
Hermite węzły równoodległe	n=4	1,422E-02	n=4	9,494E-01
Kwadratowy spline natural	n=39	1,294E-03	n=70	7,027E-02
Kwadratowy spline clamped	n=70	1,059E-04	n=70	1,404E-02
Sześcienny spline natural	n=70	1,247E-04	n=70	3,903E-02
Sześcienny spine cubic	n=70	8,921E-05	n=70	2,853E-02
Aproksymacja śrd, alg,	n=65 m=20	7,175E-03	n=60 m=20	5,474E-01
Aproksymacja śrd, trygo,	n=70 m=30	2,166E-04	n=70 m=30	2,059E-02

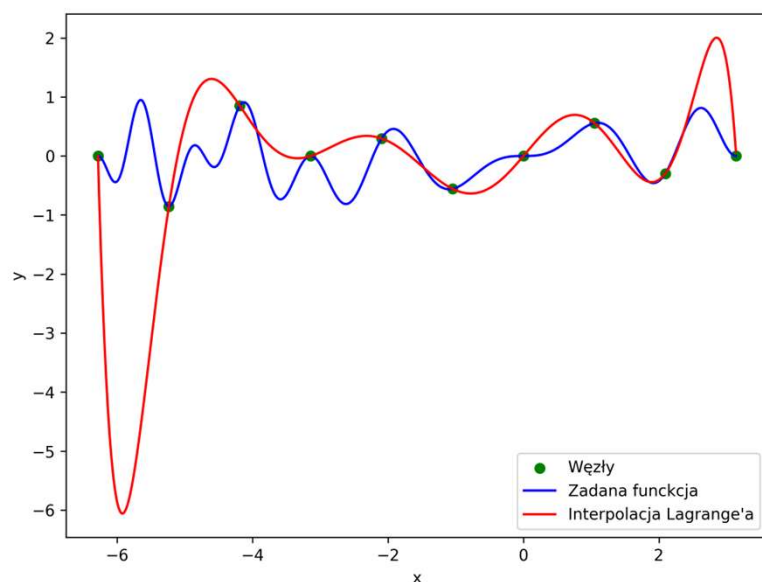
# Najlepsze wyniki, porównanie rankingu błędów

Błąd średniokwadratowy	Błąd maksymalny
Lagrange węzły Czebyszewa	Lagrange węzły Czebyszewa
Hermite węzły Czebyszewa	Hermite węzły Czebyszewa
Newton węzły Czebyszewa	Newton węzły Czebyszewa
Sześcienny spline cubic	Kwadratowy spline clamped
Kwadratowy spline clamped	Aproksymacja $\sin$ , trygonometryczna
Sześcienny spline natural	Sześcienny spline cubic
Aproksymacja $\sin$ , trygonometryczna	Sześcienny spline natural
Lagrange węzły równoodległe	Kwadratowy spline natural
Kwadratowy spline natural	Lagrange węzły Równoodległe
Aproksymacja $\sin$ , algorytm	Aproksymacja $\sin$ , algorytm
Newton węzły równoodległe	Newton węzły równoodległe
Hermite węzły równoodległe	Hermite węzły równoodległe

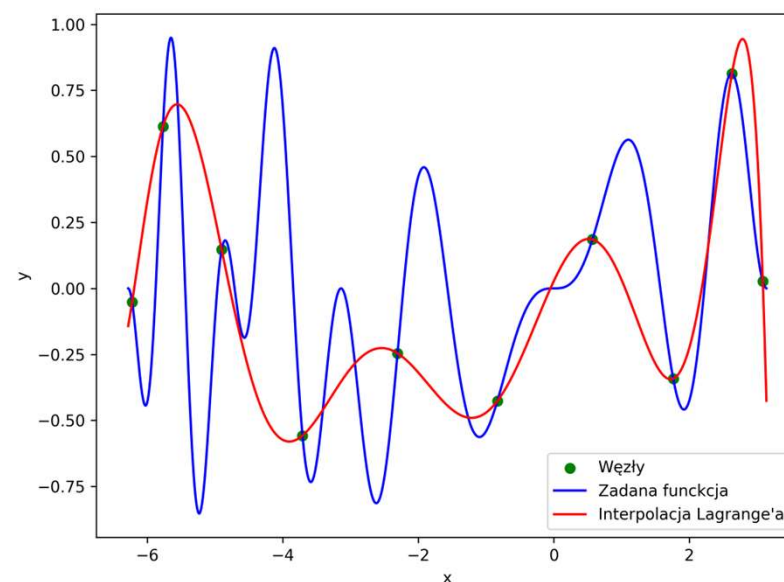
Podatności na efekt Rungego

# Zagadnienie Lagrange'a wzór Lagrange'a

**N=10 węzły równoodległe**

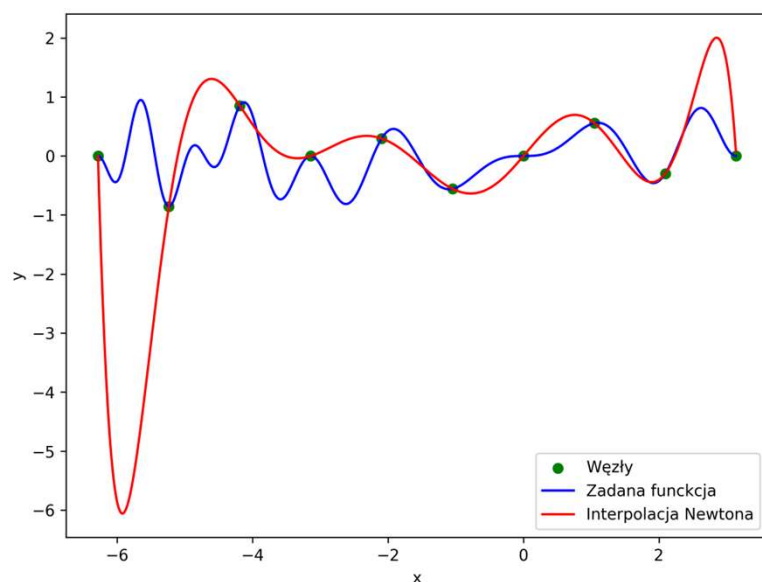


**N=10 węzły Czebyszewa**

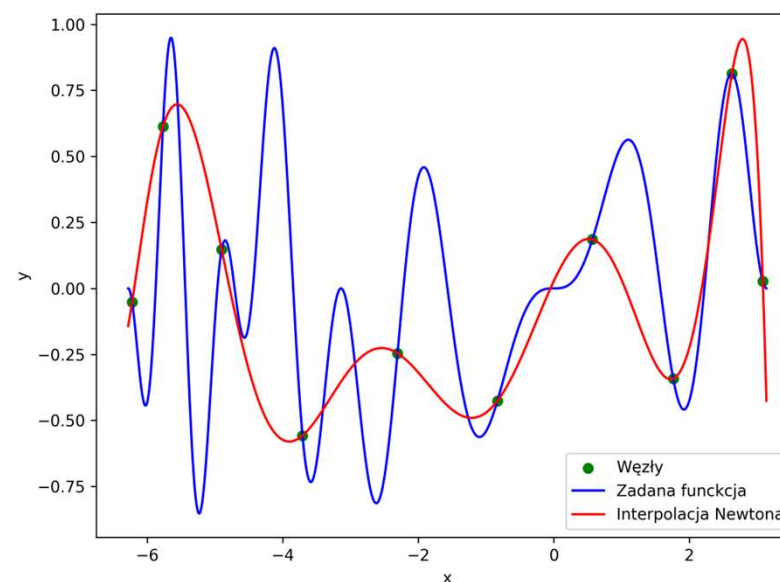


# Zagadnienie Lagrange'a wzór Newtona

**N=10 węzły równoodległe**

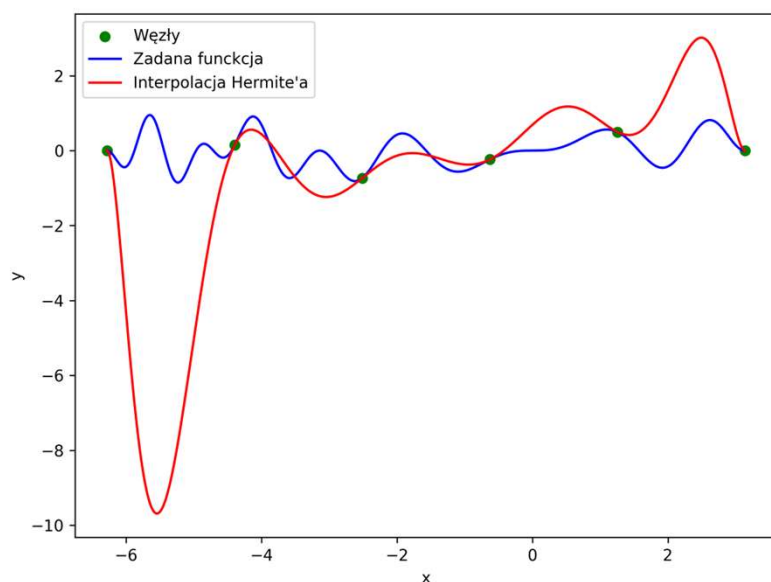


**N=10 węzły Czebyszewa**

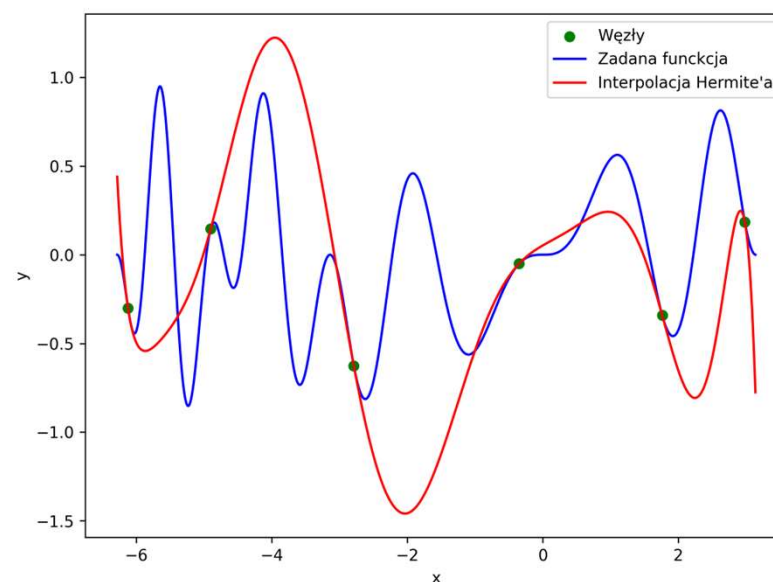


# Zagadnienie Hermite'a wzór Newtona

**N=6 węzły równoodległe**



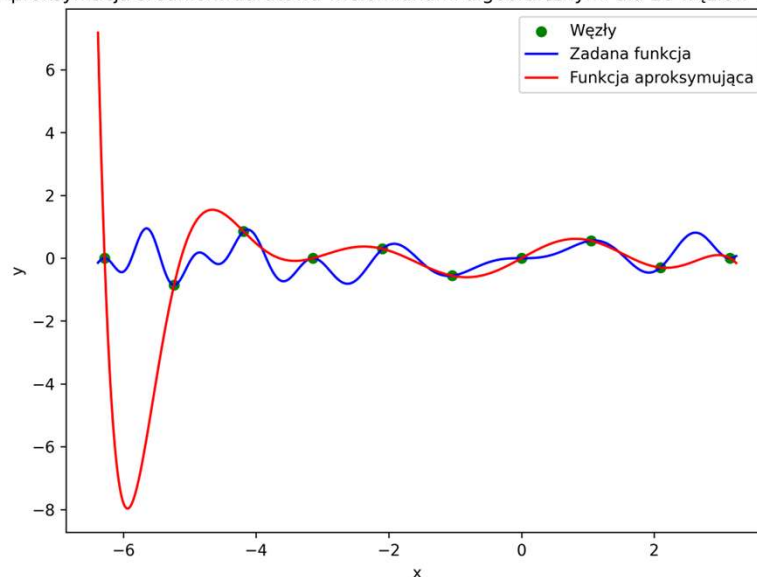
**N=6 węzły Czebyszewa**



# Aproksymacja średniokwadratowa wielomianem algebraicznym

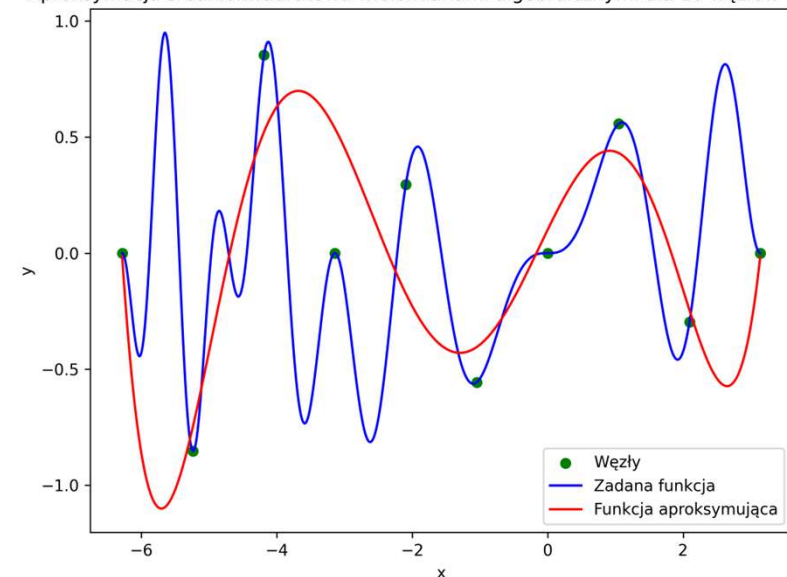
**N=10 M=10 węzły równoodległe**

Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami algebraicznymi dla 10 węzłów i  $m = 10$



**N=10 M=6 węzły równoodległe**

Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami algebraicznymi dla 10 węzłów i  $m = 6$

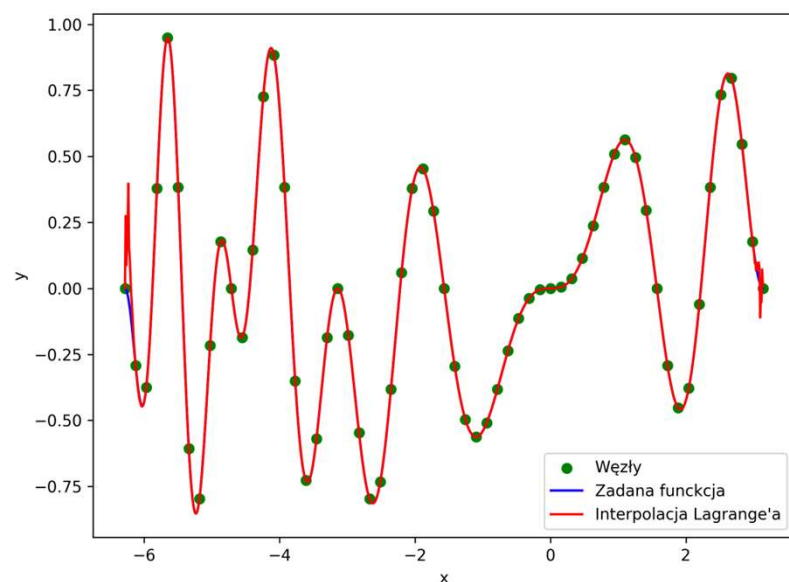


Błędy w arytmetyce

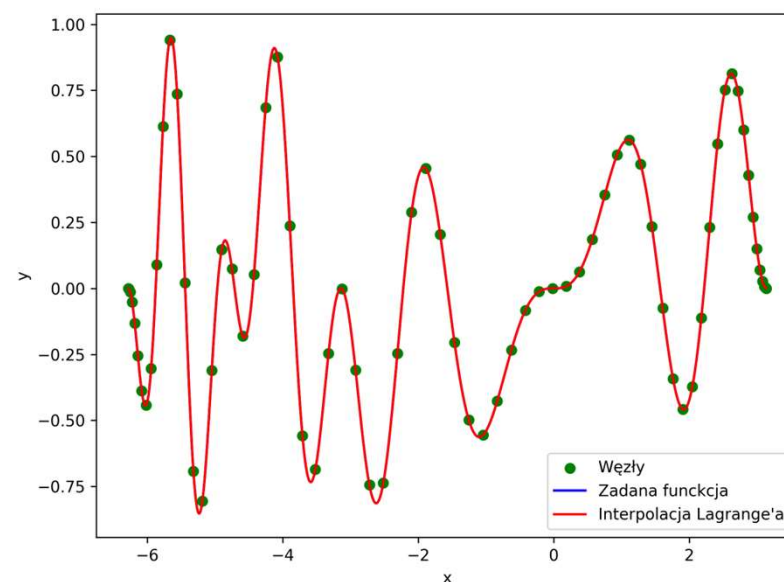


# Zagadnienie Lagrange'a wzór Lagrange'a

**N=61 węzły równoodległe**

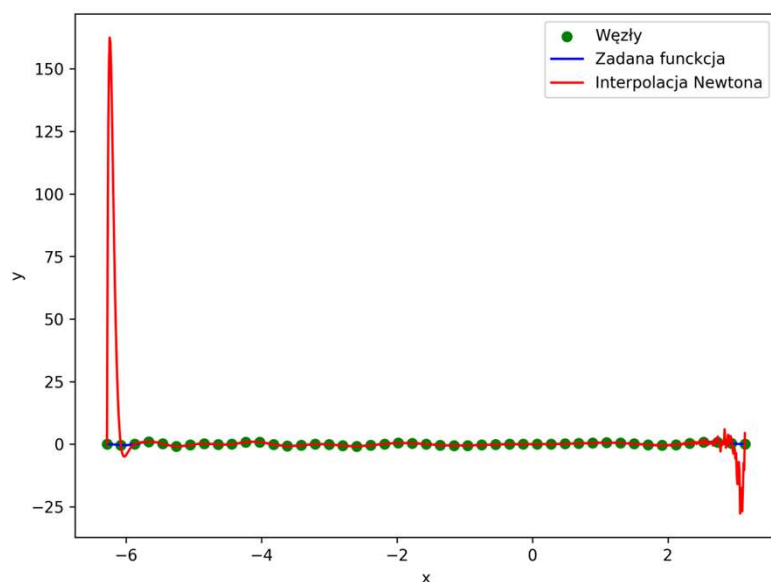


**N=70 węzły Czebyszewa**

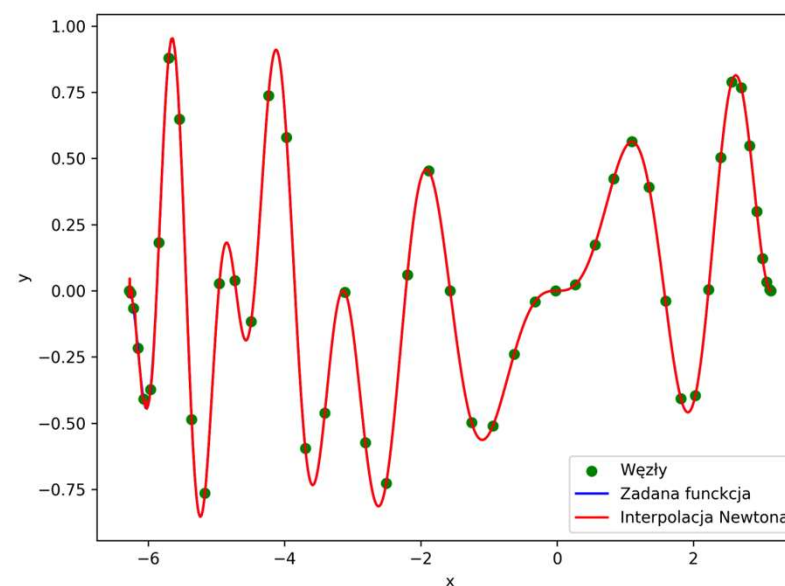


# Zagadnienie Lagrange'a wzór Newtona

**N=47 węzły równoodległe**

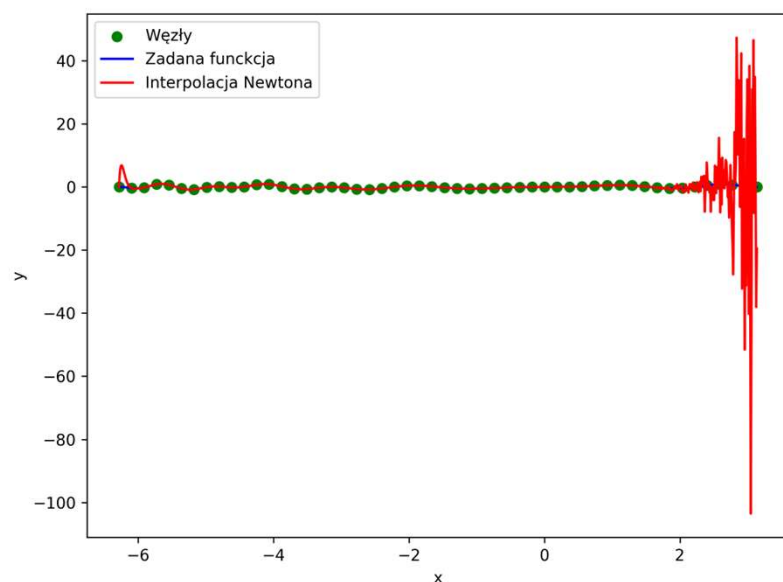


**N=47 węzły Czebyszewa**

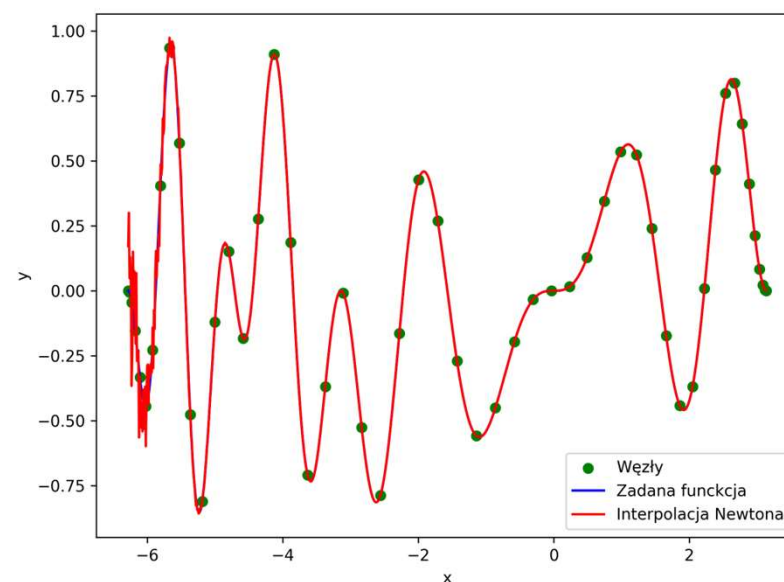


# Zagadnienie Lagrange'a wzór Newtona

**N=52 węzły równoodległe**

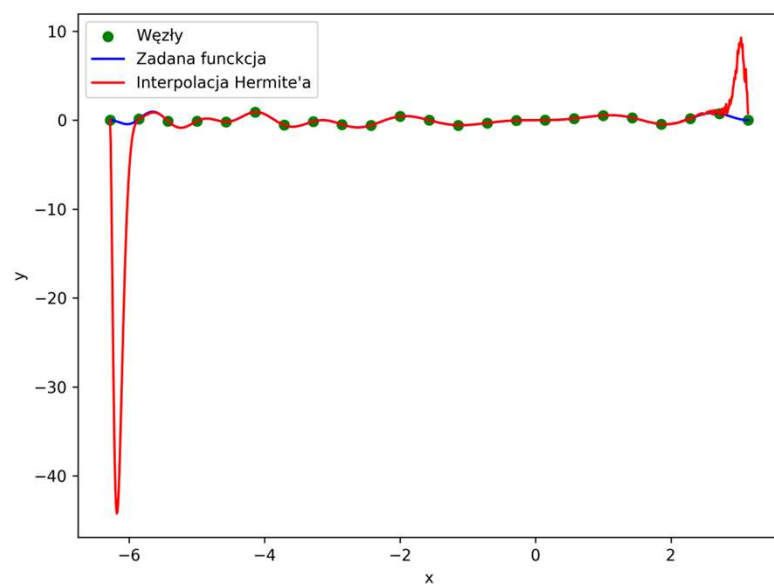


**N=52 węzły Czebyszewa**

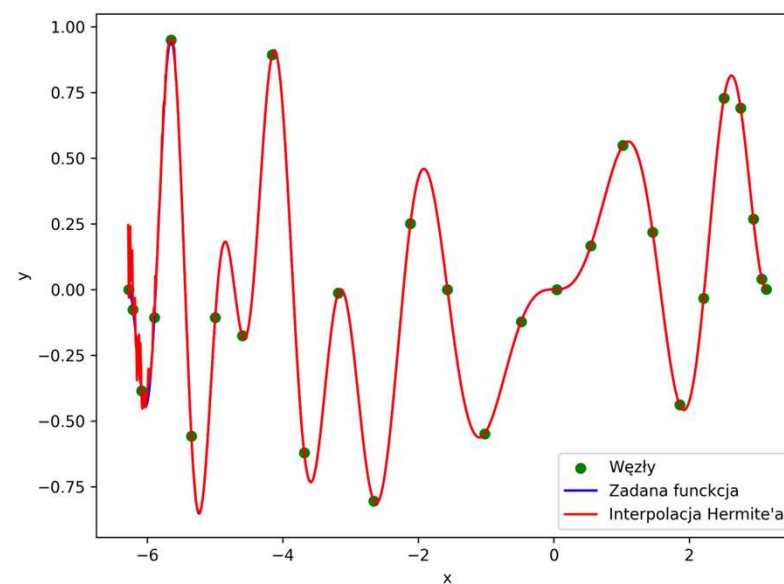


# Zagadnienie Hermite'a wzór Newtona

**N=23 węzły równoodległe**



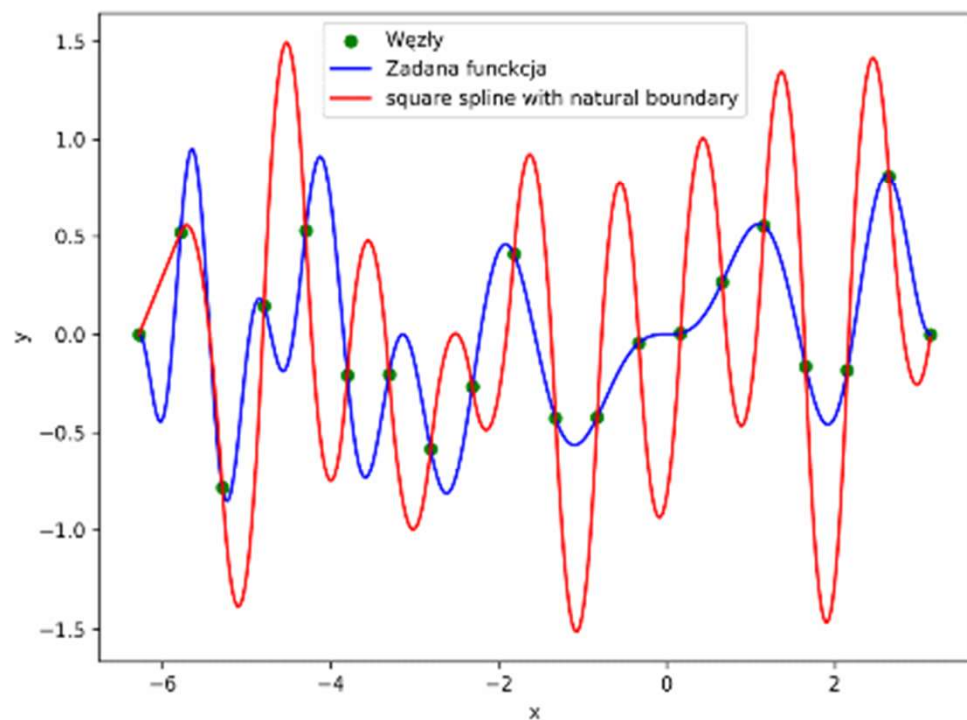
**N=27 węzły Czebyszewa**



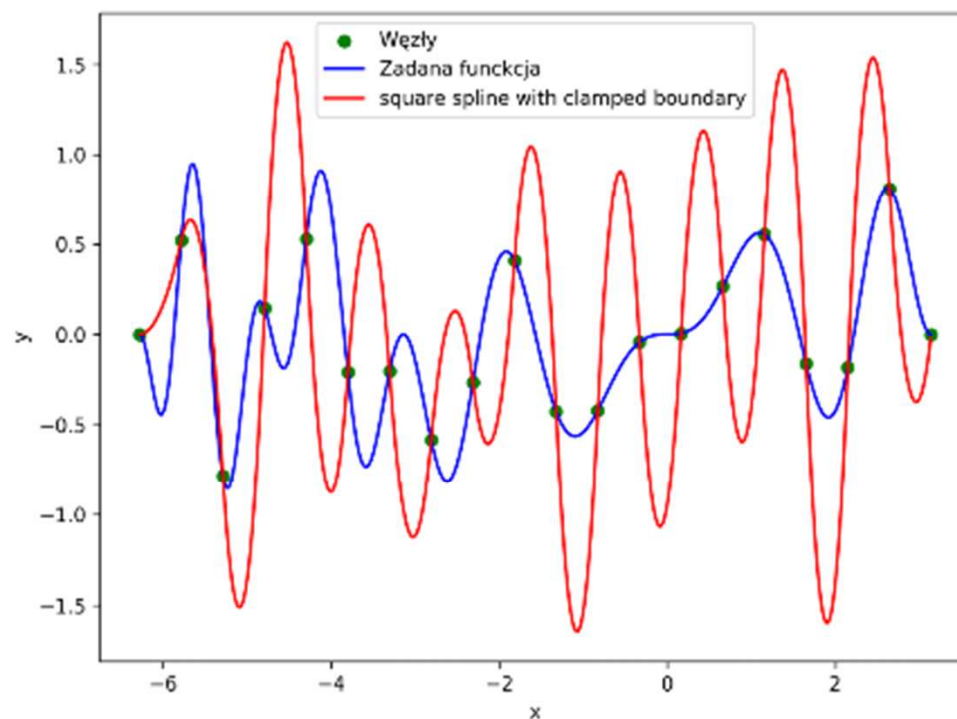
Oscylacje

# Kwadratowe funkcje sklejane $n = 20, 40, 60$

- Natural



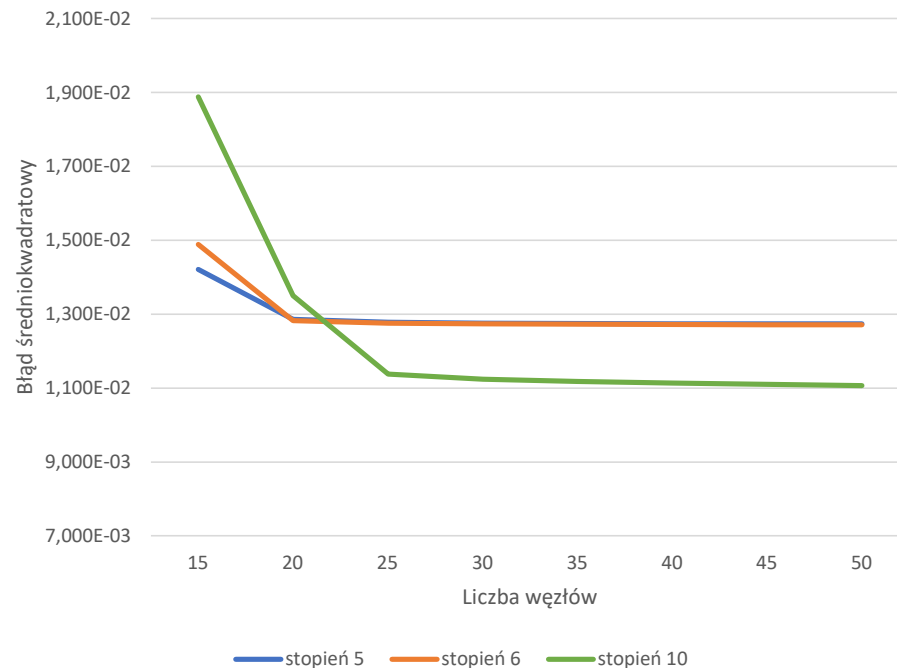
- Clamped



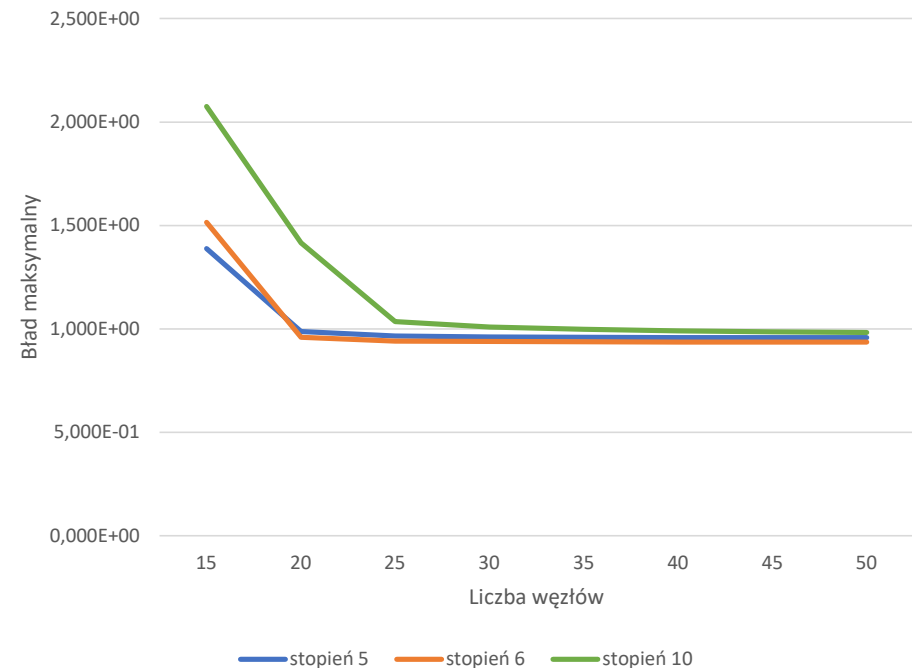
Zależności między zmiennymi w  
aproksymacji

# Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami algebraicznymi

Zależność błędu średniokwadratowego dla danego stopnia wielomianu w zależności od liczby węzłów



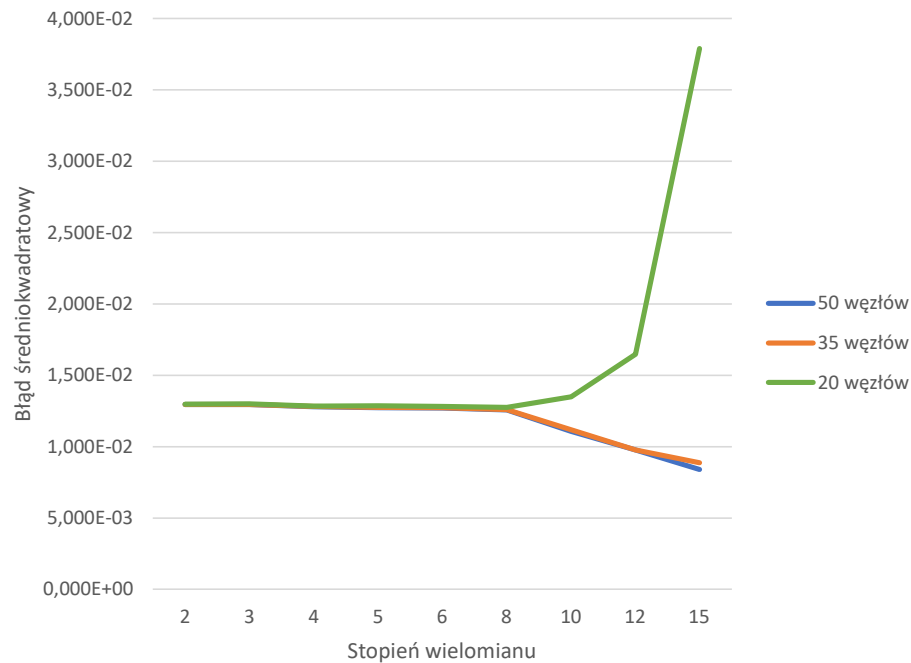
Zależność błędu maksymalnego dla danego stopnia wielomianu w zależności od liczby węzłów



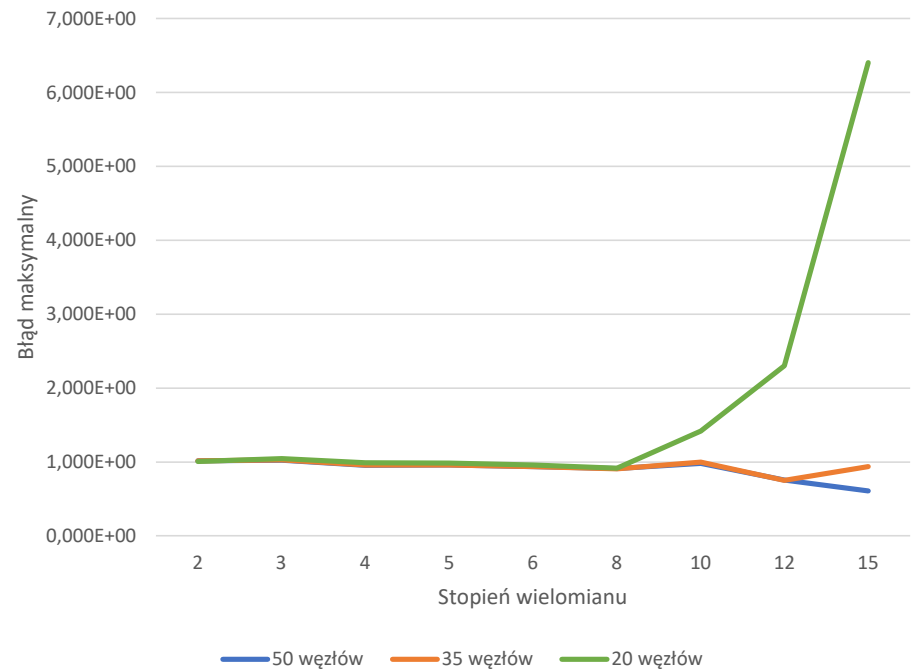


# Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami algebraicznymi

Zależność błędu średniokwadratowego dla danej liczby węzłów w zależności od stopnia wielomianu



Zależność błędu maksymalnego dla danej liczby węzłów w zależności od stopnia wielomianu



# Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami trygonometrycznymi, błąd maksymalny

poprzednia- następna wartość n\m	2	3	4	5	6	8	10	12	15
"5-7"	18,35%								
"7-10"	-45,38%	-45,38%							
"10-15"	8,03%	-6,27%	21,23%						
"15-20"	24,34%	34,87%	17,76%	11,96%	11,58%				
"20-25"	1,45%	0,48%	3,13%	7,04%	10,84%	12,83%			
"25-30"	0,16%	-0,55%	0,82%	1,55%	2,41%	5,29%	18,93%	46,23%	
"30-25"	0,03%	-0,21%	0,20%	0,37%	0,51%	1,02%	-0,45%	1,32%	
"35-40"	0,01%	-0,10%	0,06%	0,12%	0,17%	0,35%	0,05%	0,75%	10,56%
"40-45"	0,00%	-0,06%	0,02%	0,05%	0,07%	0,16%	0,12%	-0,54%	3,55%
"45-50"	0,00%	-0,04%	0,00%	0,02%	0,03%	0,10%	0,12%	-0,62%	1,46%
"50-55"	0,00%	-0,03%	0,00%	0,01%	0,01%	0,06%	0,11%	-0,34%	0,64%
"55-60"	0,00%	-0,02%	-0,01%	0,00%	0,00%	0,04%	0,10%	-0,21%	0,28%
"60-65"	0,00%	-0,02%	-0,01%	0,00%	0,00%	0,03%	0,08%	-0,14%	0,10%
"65-70"	0,00%	-0,01%	-0,01%	0,00%	0,00%	0,03%	0,07%	-0,09%	0,02%

# Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami trygonometrycznymi, błąd średniokwadratowy

poprzednia-następna wartość\m	2	3	4	5	6	8	10	12	15
"5-7"	12,06%								
"7-10"	-20,41%	-20,41%							
"10-15"	16,61%	14,26%	17,53%						
"15-20"	7,19%	9,92%	15,71%	15,37%	18,95%				
"20-25"	0,05%	0,20%	0,48%	1,48%	4,02%	21,46%			
"25-30"	0,00%	0,01%	0,01%	0,04%	0,08%	1,15%	7,16%	38,74%	
"30-25"	0,00%	0,00%	0,01%	0,01%	0,01%	0,07%	0,29%	1,91%	
"35-40"	0,00%	0,00%	0,00%	0,01%	0,01%	0,03%	0,06%	0,19%	5,65%
"40-45"	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,02%	0,03%	0,09%	1,29%
"45-50"	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,01%	0,02%	0,06%	0,68%
"50-55"	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,01%	0,02%	0,05%	0,47%
"55-60"	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,01%	0,01%	0,04%	0,36%
"60-65"	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,01%	0,01%	0,03%	0,28%
"65-70"	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,01%	0,01%	0,02%	0,22%

# Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami trygonometrycznymi, błąd maksymalny

n\poprzednia- następna wartość m	"2-3"	"3-4"	"4-5"	"5-6"	"6-8"	"8-10"	"10-12"	"12-15"
5								
7	0,00%							
10	0,00%	-21,46%						
15	-15,56%	9,97%	3,47%	-5,84%				
20	0,54%	-13,68%	-3,34%	-6,30%	29,23%			
25	-0,44%	-10,65%	0,82%	-1,95%	30,80%	4,82%	11,35%	
30	-1,16%	-9,14%	1,55%	-1,05%	32,85%	18,53%	41,20%	
35	-1,40%	-8,69%	1,71%	-0,91%	33,19%	17,32%	42,23%	49,43%
40	-1,51%	-8,51%	1,77%	-0,86%	33,31%	17,07%	42,64%	54,43%
45	-1,57%	-8,43%	1,79%	-0,84%	33,37%	17,04%	42,25%	56,28%
50	-1,61%	-8,38%	1,81%	-0,83%	33,42%	17,06%	41,82%	57,19%
55	-1,63%	-8,35%	1,82%	-0,82%	33,45%	17,10%	41,56%	57,61%
60	-1,65%	-8,33%	1,82%	-0,82%	33,48%	17,14%	41,38%	57,81%
65	-1,66%	-8,32%	1,83%	-0,81%	33,50%	17,18%	41,25%	57,92%
70	-1,68%	-8,31%	1,83%	-0,81%	33,52%	17,22%	41,16%	57,96%

# Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami trygonometrycznymi, błąd średniokwadratowy

n\poprzednia-następna wartość	"2-3"	"3-4"	"4-5"	"5-6"	"6-8"	"8-10"	"10-12"	"12-15"
5								
7	0,00%							
10	0,00%	4,93%						
15	-2,82%	8,55%	0,42%	-2,73%				
20	0,20%	14,43%	0,01%	1,62%	19,61%			
25	0,35%	14,67%	1,02%	4,16%	34,21%	9,46%	9,43%	
30	0,36%	14,68%	1,05%	4,20%	34,92%	14,97%	40,23%	
35	0,36%	14,68%	1,05%	4,20%	34,96%	15,16%	41,20%	62,52%
40	0,36%	14,68%	1,05%	4,20%	34,97%	15,19%	41,28%	64,57%
45	0,36%	14,68%	1,05%	4,20%	34,98%	15,20%	41,31%	65,00%
50	0,36%	14,69%	1,05%	4,20%	34,99%	15,21%	41,34%	65,22%
55	0,36%	14,69%	1,05%	4,20%	34,99%	15,21%	41,36%	65,36%
60	0,36%	14,69%	1,05%	4,20%	35,00%	15,22%	41,37%	65,48%
65	0,36%	14,69%	1,05%	4,20%	35,00%	15,22%	41,38%	65,56%
70	0,36%	14,69%	1,05%	4,20%	35,00%	15,22%	41,39%	65,63%

# KONIEC

- Dziękuję za uwagę