Opracowanie: Maksymilian Sulima gr 3

MOwNiT - Interpolacja

1. Sprzęt

System operacyjny:

- Manjaro linux 22.0.4

Język:

- Python 3.10, numpy 1.24, matplotlib 3.7.1, jupyter

Procesor:

- AMD Ryzen 7 4700U

2. Treść zadania

Dla funkcji:

$$f(x) \;=\; sin(2x) * sin(2x^2/\pi),\; x \in <-\,2\pi, \pi>$$

Wyznacz dla zagadnienia Lagrange'a wielomian interpolujący w postaci Lagrange'a i Newtona. Interpolację przeprowadź dla różnej liczby węzłów (np. n = 3, 4, 5, 7, 10, 15, 20).

- Dla każdego przypadku interpolacji porównaj wyniki otrzymane dla różnego rozmieszczenia węzłów: równoodległe oraz Czebyszewa.
- Oceń dokładność, z jaką wielomian przybliża zadaną funkcję.
- Poszukaj wielomianu, który najlepiej przybliża zadaną funkcję.
- Wyszukaj stopień wielomianu, dla którego można zauważyć efekt Runge'go (dla równomiernego rozmieszczenia węzłów). Porównaj z wyznaczonym wielomianem dla węzłów Czebyszewa.

Uwaga: Zalecane jest rysowanie wykresów funkcji, wielomianów interpolujących, ... , czyli graficzne ilustrowanie przeprowadzonych eksperymentów numerycznych. W sprawozdaniu należy zamieścić wykresy jedynie dla wybranych przypadków!

3. Wykonanie ćwiczenia

Interpolacja została wykonana dla liczby węzłów: 3, 4, 5, 7, 10, 15, 20, 25, 50. Wartości liczone były dla 1000 punktów.

Metodą Lagrange'a

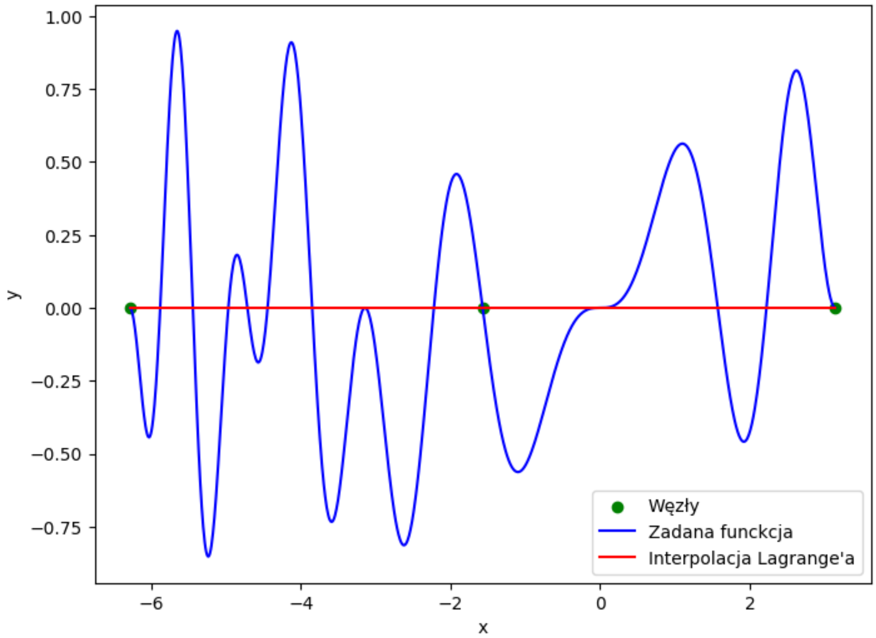
Liczba węzłów	Równoodległe, błąd maksymalny,	Równoodległe, błąd kwadratowy	Czebyszew, błąd maksymalny	Czebyszew, błąd kwadratowy
3	9.494E-01	1.422E-02	1.630E+00	2.012E-02
4	9.494E-01	1.422E-02	1.275E+00	1.490E-02
5	1.341E+00	1.658E-02	1.084E+00	1.644E-02
7	9.494E-01	1.422E-02	1.772E+00	2.058E-02
10	6.135E+00	5.126E-02	1.457E+00	1.570E-02
15	4.085E+01	3.226E-01	1.017E+00	1.149E-02
20	3.966E+02	2.570E+00	9.912E-01	1.019E-02
25	2.235E+03	9.379E+00	8.724E-01	8.382E-03
50	5.556E+01	1.513E-01	1.836E-06	2.035E-08
Maksimum	2.235E+03	9.379E+00	1.772E+00	2.058E-02
Minimum	9.494E-01	1.422E-02	1.836E-06	2.035E-08

Tabela 1. Przedstawia błędy interpolacji metodą Lagrange'a

Według błędów liczonych wg. wzorów podanych na laboratorium metoda Lagrange'a dla węzłów równoodległych dała najlepsze rezultaty dla liczby węzłów wynoszącej 3,4 i 7 natomiast najgorsze dla 25.

Natomiast dla węzłów w miejscach zer Czebyszewa najgorszy wynik w obu metrykach uzyskano dla 7 węzłów, a najlpeszy dla 50.

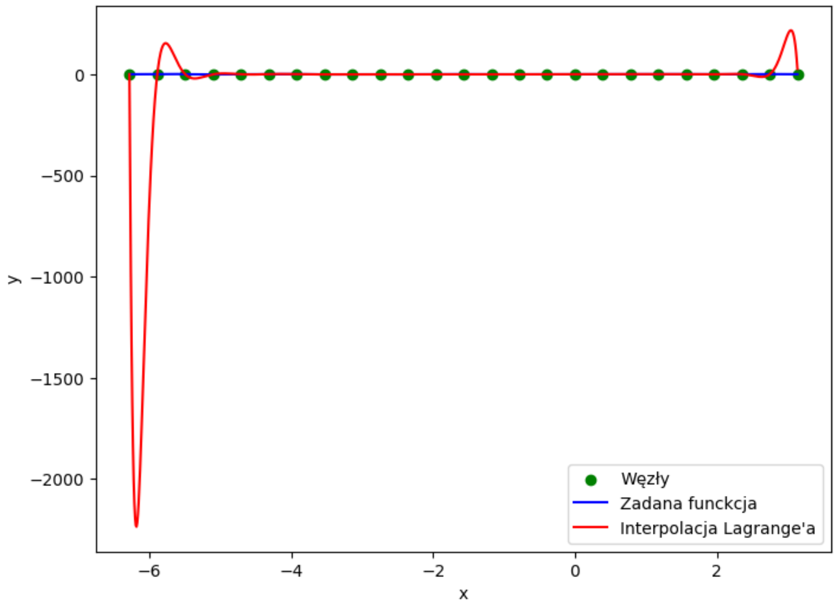
Najlpeszy rezultat uzyskany metodą Lagrange'a dla węzłów równooodległych.



Wykres 1. Przedstawia efekt interpolacji dla metodą Lagrange'a dla 3 równoodległych węzłów.

Wykresy dla 4 i 7 węzłów wyglądają identycznie. Wynikiem interpolacji jest prosta, taki wielomian interpolacyjny nie nadaje się do zastosowań praktycznych.

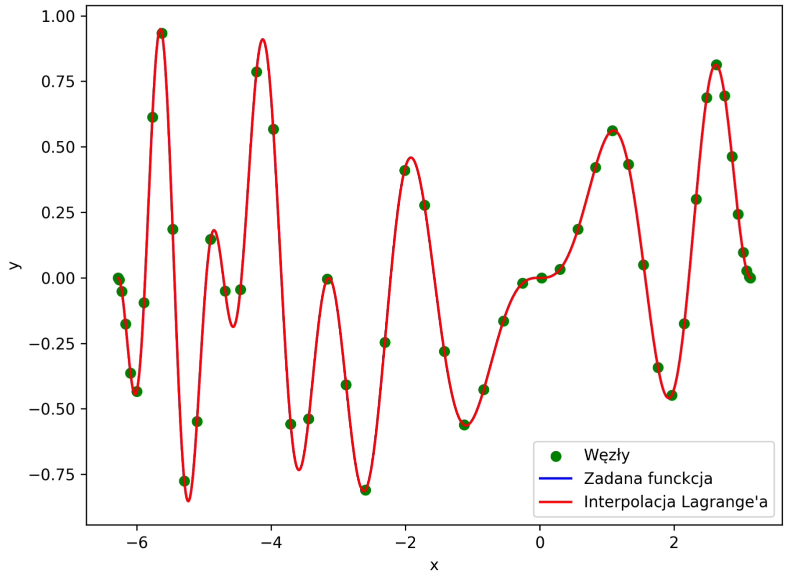
Najgorszy rezultat uzyskany metodą Lagrange'a dla węzłów równoodległych.



Wykres 2. Przedstawia efekt interpolacji dla metodą Lagrange'a dla 25 równoodległych węzłów.

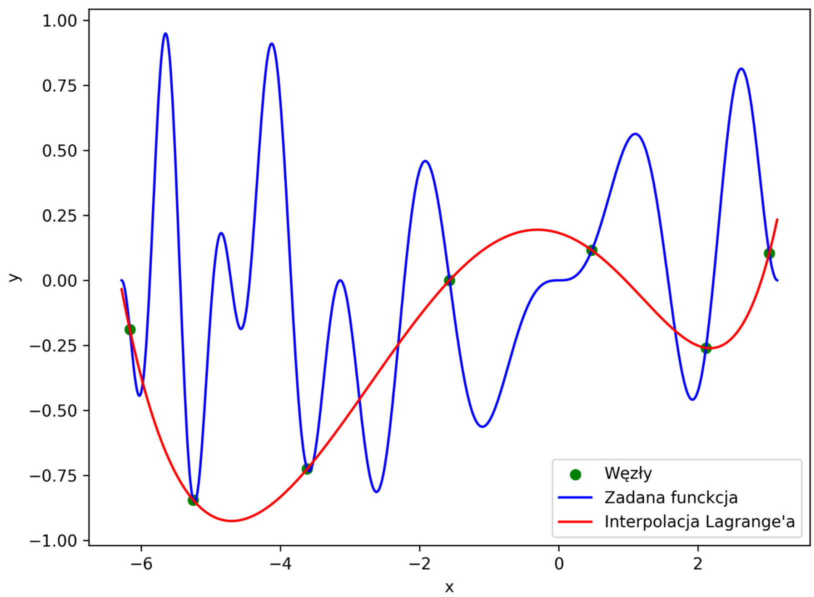
Można zauważyć widoczny efekt Rungego, który wprowadza duże zaburzenia w interpolacji przy końcach przedziału na którym dokonano interpolacji.

Najlepszy rezultat uzyskany metodą Lagrange'a dla węzłów Czebyszewa.



Wykres 3. Przedstawia efekt interpolacji dla metodą Lagrange'a dla 50 węzłów Czebyszewa WIelomian interpolacyjny w zasadzie pokrywa się z funkcją interpolowaną wg. tabeli 1 największy odchył od funkcji jest rzędu 10^-6.

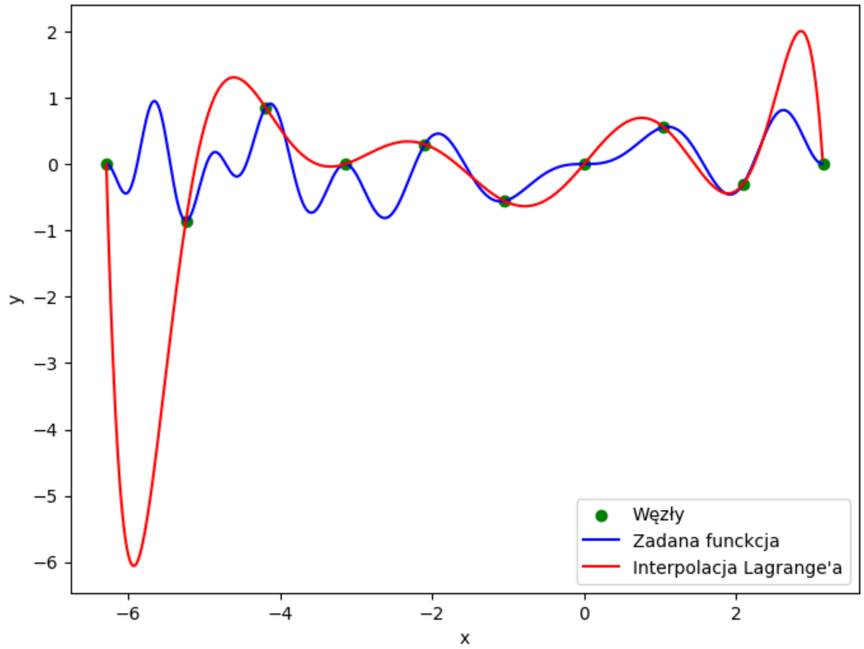
Najgorszy rezultat uzyskany metodą Lagrange'a dla węzłów Czebyszewa.



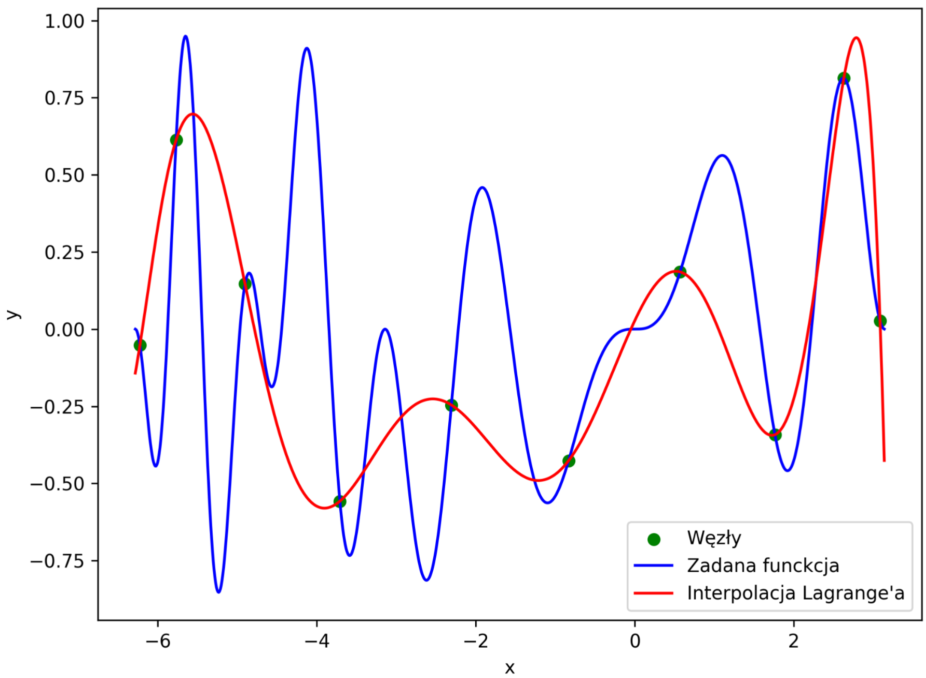
Wykres 4. Przedstawia efekt interpolacji dla metodą Lagrange'a dla 7 węzłów Czebyszewa. Węzły zostały rozmieszone w takich miejscach, że wielomian często przyjmuje wartości niemal przeciwne w stosunku do funkcji interpolowanej.

Efekt Rungego

Najmniejszą liczbą węzłów dla której zaobserwowano efekt Rungego wyniosła 10.



Wykres 5. Przedstawia efekt interpolacji dla metodą Lagrange'a dla 10 równoodległych węzłów.



Wykres 6. Przedstawia efekt interpolacji dla metodą Lagrange'a dla 10 węzłów Czebyszewa. Zastosowanie węzłów interpolacji w miejscach zer wielomianu Czebyszewa w eliminuje efekt Rungego.

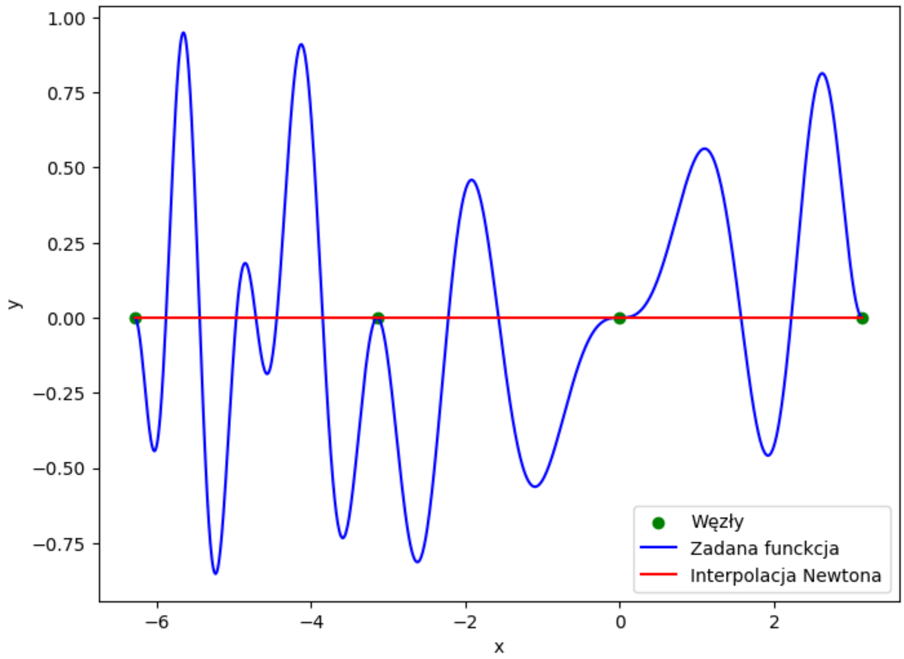
Metodą Newtona

Liczba węzłów	Równoodległe, błąd maksymalny,	Równoodległe, błąd kwadratowy	Czebyszew, błąd maksymalny	Czebyszew, błąd kwadratowy
3	9.494E-01	1.422E-02	1.630E+00	2.012E-02
4	9.494E-01	1.422E-02	1.275E+00	1.490E-02
5	1.341E+00	1.658E-02	1.084E+00	1.644E-02
7	9.494E-01	1.422E-02	1.772E+00	2.058E-02
10	6.135E+00	5.126E-02	1.457E+00	1.570E-02
15	4.085E+01	3.226E-01	1.017E+00	1.149E-02
20	3.966E+02	2.570E+00	9.912E-01	1.019E-02
25	2.235E+03	9.379E+00	8.724E-01	8.382E-03
50	5.556E+01	1.940E-01	1.384E-01	3.901E-04
Maksimum	2.235E+03	9.379E+00	1.772E+00	2.058E-02
Minimum	9.494E-01	1.422E-02	1.384E-01	3.901E-04

Tabela 2. Przedstawia błędy interpolacji metodą Newtona

Ekstrema błędów interpolacji metodą Newtona są takie same jak w przypadku metody Lagrange'a (tabela 1).
Jednak mimo tego podobieństwa należy zauważyć, że najlepszy wynik metody Lagrange'a jest nieporównanie lepszy od tego uzyskanego metodą Newtona.
Dla błędu maksymalnego metoda Lagrange'a uzyskała wynik lepszy o 5 rzędów wielkości natomiast dla błędu kwadratowego o 4 rzędy wielkości dla węzłów Czebyszewa, w przypadku zastosowania węzłów równoodległych pojawia się efekt Rungego, który sprawia, że uzyskane wyniki nie nadają się do użytku.
Błędy maksymalne są identyczne dla obu metod.

Najlpeszy rezultat uzyskany metodą Newtona dla węzłów równooodległych.

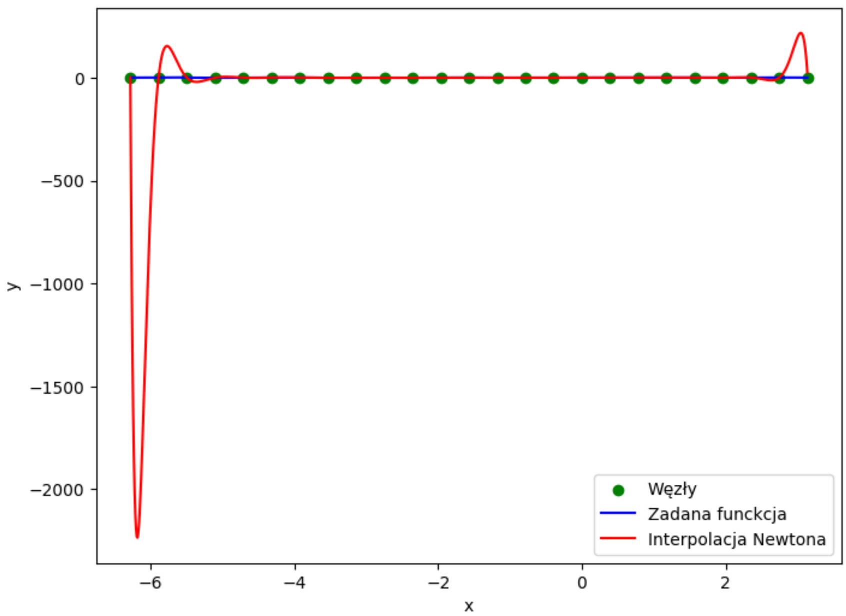


Wykres 7. Przedstawia efekt interpolacji dla metodą Newtona dla 4 równoodległych węzłów.

Wykresy dla 3 i 7 węzłów wyglądają identycznie.

Ponownie uzyskano prostą tak jak na wykresie 1.

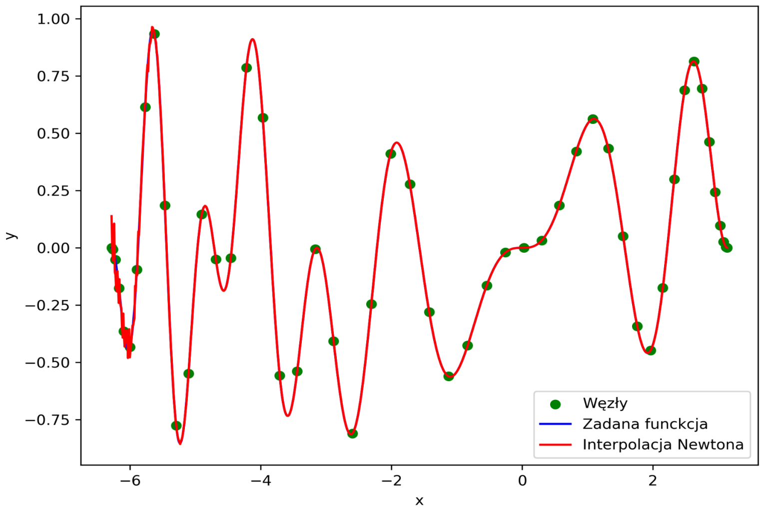
Najgorszy rezultat uzyskany metodą Newtona dla węzłów równoodległych.



Wykres 8. Przedstawia efekt interpolacji dla metodą Newtona dla 25 równoodległych węzłów.

Tak samo jak w metodzie Lagrange'a odpowiedzialny za zły wynik jest efekt Rungego. Wielomian interpolujący przyjmuje wartości rzędu 2000 podczas gdy dana funkcja nie przekracza 1.

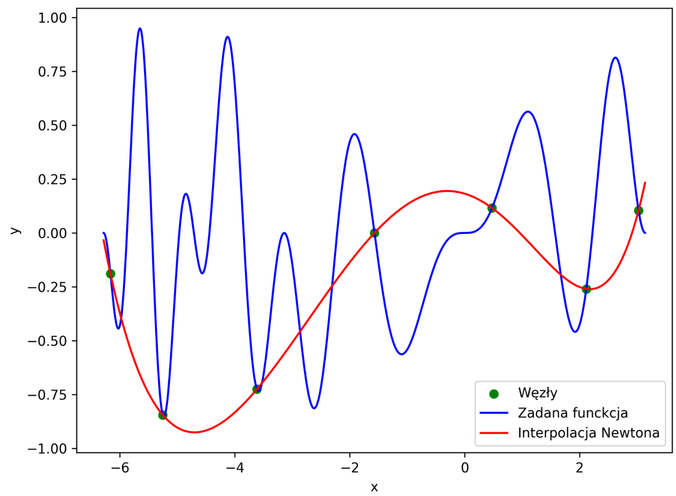
Najlepszy rezultat uzyskany metodą Newtona dla węzłów Czebyszewa.



Wykres 9. Przedstawia efekt interpolacji dla metodą Newtona dla 50 węzłów Czebyszewa

Wynik dość podobny jak w przypadku metody Lagrange'a jednak przy lewym końcu przedziału wielomian interpolacyjny nie jest tak gładki najpewniej jest to spowodowane arytmetyką ponieważ w metodzie Newtona wykonywane jest więcej obliczeń.

Najgorszy rezultat uzyskany metodą Newtona dla węzłów Czebyszewa.

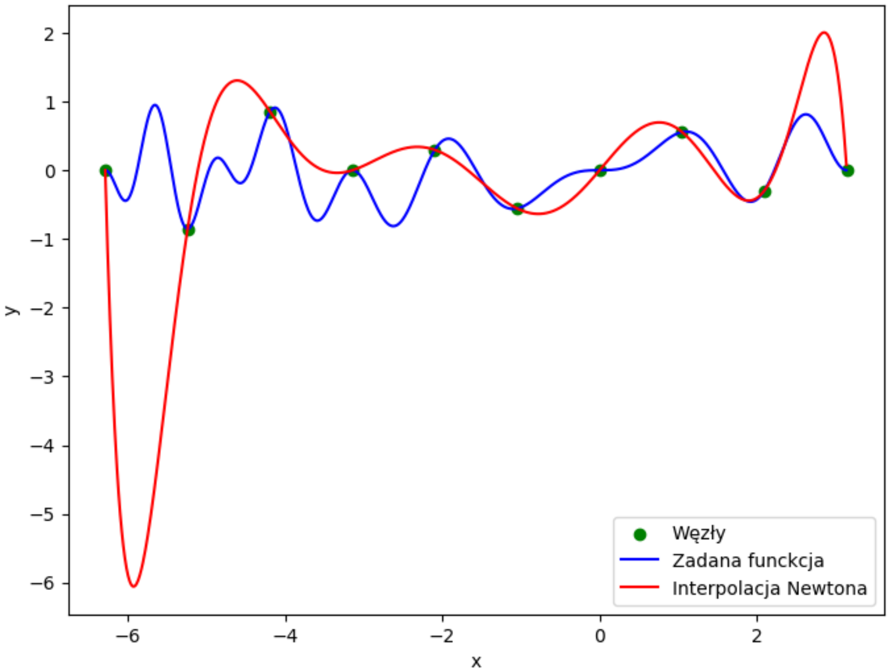


Wykres 10. Przedstawia efekt interpolacji dla metodą Newtona dla 7 węzłów Czebyszewa.

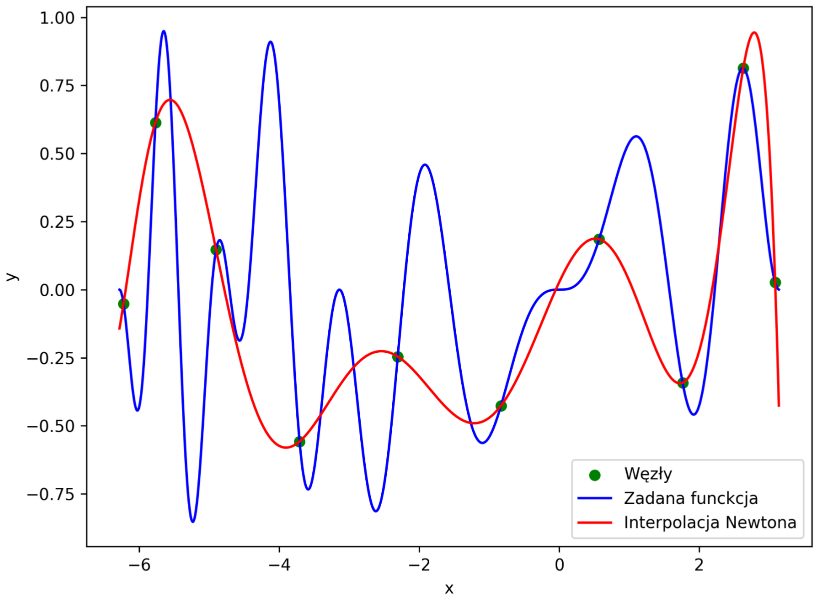
Ponownie jak na wykresie 4 zły efekt, zwłaszcza po lewej stronie przedziału, jest rezultatem umieszczenia węzłów w ekstremach funkcji.

Efekt Rungego

Najmniejszą liczbą węzłów dla której zaobserwowano efekt Rungego wyniosła 10.



Wykres 11. Przedstawia efekt interpolacji dla metodą Newtona dla 10 równoodległych węzłów.



Wykres 12. Przedstawia efekt interpolacji dla metodą Newtona dla 10 węzłów Czebyszewa. Ponownie tak jak na wykresach 5 i 6 widać, że zastosowanie węzłów Czebyszewa praktycznie eliminuje zaburzenia.

4. Wnioski

- Węzły interpolacji rozmieszone równoodległe dają dużo gorsze efekty interpolacji i dodatkowo są podatne na efekt Rungego. Węzły rozmieszczone zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa pozwalają wyeliminować te wady.
- Analizując tabele 1 i 2 wielomian, który najlepiej przybliżył daną funkcję został otrzymany metodą Lagrange'a z 50 węzłami Czebyszewa.
- Minimalny liczba węzłów dla których widoczny jest efekt Rungego to 10, dla obu metod.
- Metoda Newtona początkowo daje te same wyniki lecz wraz ze wzrostem liczby węzłów pojawia się różnica rzędów wielkości. Dodatkowo jak widać na wykresie 9 jest bardziej podatna na błędy arytmetyki.