Opracowanie: Maksymilian Sulima gr 3

**MOwNiT – Rozwiązywanie układów równań liniowych metodami iteracyjnymi**

1. Sprzęt

System operacyjny:

- Windows 10 19044.2604

Język:

- Python 3.10, numpy 1.24.3, matplotlib 3.7.1, jupyter

Procesor:

- AMD Ryzen 7 4700U

1. Wstęp

Zadany układ równań postaci rozwiązano metodą Jacobiego, która została zaimplementowana korzystając ze wzoru:

Gdzie:

– rozwiązanie obliczone w i-tej iteracji,

, macierz poddiagonalna,

, macierz naddiagonalna,

macierz diagonalna,

,

,

przyjmuje się odgórnie.

Normę z wektora liczono za pomocą następującego wzoru:

Kryteria stopu:

* rezydualne
* przyrostowe

Eksperymenty numeryczne zostały wykonanie na typie float64 z biblioteki NumPy. Jako maksymalna liczbę iteracji przyjęto 10 000.

Do obliczenia błędu obliczeń posłużono się następującą metryką:

,

gdzie:

– i-ta współrzędna zadanego wektora x,

– i-ta współrzędna wyznaczonego wektora x.

1. Treść zadania

Dany został układ równań liniowych **.** Macierz została określona wzorem:

|  |  |
| --- | --- |
| Obraz zawierający tekst, pismo odręczne, Czcionka, numer  Opis wygenerowany automatycznie | gdzie . |

Za wektor przyjęto dowolną n-elementowa permutacje zbioru . Na podstawie wektora wyznaczono wartość .

* 1. Zadanie 1

Korzystając z metody Jacobiego należy rozwiązać zadany układ równań dla obu warunków stopu i różnych wartości , i wektora początkowego . Wyznaczyć liczbę iteracji, dokładność oraz czas obliczeń.

* 1. Zadanie 2

Korzystając z dowolnej metody znaleźć promień spektralny macierzy iteracji (w zależności od rozmiaru układu). Sprawdzić czy spełnia on założenia zbieżności metody Jacobiego.

1. Wykonanie eksperymentów
   1. Zadanie 1

Eksperymenty zostały wykonane dla oby kryteriów stopu oraz:

,

,

.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| n | kryt. rezydualne iteracje | kryt. przyrostowe iteracje | kryt. rezydualne czas[s] | kryt. przyrostowe czas[s] | kryt. rezydualne błąd | kryt. przyrostowe błąd |
| 5 | 9 | 8 | 0,001 | 0,000 | 6,55E-05 | 2,02E-04 |
| 20 | 8 | 6 | 0,005 | 0,002 | 1,15E-05 | 1,86E-04 |
| 35 | 9 | 8 | 0,020 | 0,011 | 6,61E-05 | 2,01E-04 |
| 50 | 8 | 7 | 0,031 | 0,018 | 1,46E-05 | 6,62E-05 |
| 65 | 9 | 8 | 0,055 | 0,034 | 6,57E-05 | 2,08E-04 |
| 80 | 9 | 8 | 0,234 | 0,054 | 6,95E-05 | 1,89E-04 |
| 95 | 9 | 8 | 0,125 | 0,091 | 6,87E-05 | 1,82E-04 |
| 110 | 9 | 8 | 0,169 | 0,113 | 6,51E-05 | 2,11E-04 |
| 125 | 9 | 8 | 0,218 | 0,125 | 7,08E-05 | 1,85E-04 |
| 140 | 9 | 8 | 0,398 | 0,160 | 7,06E-05 | 1,88E-04 |
| 155 | 9 | 8 | 0,332 | 0,193 | 6,82E-05 | 1,86E-04 |
| 170 | 8 | 7 | 0,351 | 0,200 | 1,81E-05 | 7,00E-05 |
| 185 | 9 | 8 | 0,462 | 0,277 | 6,82E-05 | 1,91E-04 |
| 200 | 9 | 8 | 0,543 | 0,315 | 6,93E-05 | 1,89E-04 |
| 215 | 9 | 7 | 0,639 | 0,321 | 3,76E-06 | 1,61E-04 |
| 230 | 9 | 7 | 0,713 | 0,383 | 6,41E-05 | 6,36E-04 |
| 245 | 8 | 7 | 0,894 | 0,431 | 1,49E-05 | 7,26E-05 |
| 260 | 7 | 6 | 0,687 | 0,405 | 2,69E-05 | 9,79E-05 |
| 275 | 9 | 8 | 1,013 | 0,589 | 7,06E-05 | 1,89E-04 |
| 290 | 9 | 8 | 1,118 | 0,650 | 7,22E-05 | 1,89E-04 |
| 305 | 9 | 7 | 1,223 | 0,640 | 7,02E-05 | 6,64E-04 |
| 320 | 9 | 8 | 1,355 | 0,807 | 6,52E-05 | 2,10E-04 |
| 335 | 8 | 7 | 1,304 | 0,769 | 2,61E-05 | 9,94E-05 |
| 350 | 9 | 8 | 1,643 | 0,973 | 6,70E-05 | 2,08E-04 |
| 365 | 9 | 8 | 1,763 | 1,036 | 6,66E-05 | 2,03E-04 |
| 380 | 9 | 8 | 1,944 | 1,125 | 7,12E-05 | 1,92E-04 |
| 395 | 8 | 7 | 1,866 | 1,083 | 1,60E-05 | 5,76E-05 |
| 410 | 9 | 8 | 2,259 | 1,295 | 6,44E-05 | 2,05E-04 |
| 425 | 8 | 7 | 2,130 | 1,241 | 1,33E-05 | 4,47E-05 |
| 440 | 9 | 8 | 2,554 | 1,516 | 6,96E-05 | 1,91E-04 |
| 455 | 9 | 8 | 2,711 | 1,640 | 7,03E-05 | 1,86E-04 |
| 470 | 8 | 7 | 2,596 | 1,506 | 2,18E-05 | 1,11E-04 |
| 485 | 8 | 7 | 2,730 | 1,619 | 1,67E-05 | 5,33E-05 |

Tabela 1. Przedstawia wyniki eksperymentu dla i .

W tabeli 1 możemy zaobserwować niezależność liczby iteracji od rozmiaru układu i kryterium stopu. Błąd wyniku przy użyciu kryterium przyrostowego jest co najwyżej tego samego rzędu wielkości jak błąd kryterium rezydualnego przy czym różnica wynosi zazwyczaj 1 rząd wielkości. Czas rozwiązania układu jest zależny od rozmiaru układu i rodzaju wybranego kryterium. Kryterium rezydualne jest obliczane w czasie kwadratowym w porównaniu do przyrostowego, które liczone jest liniowo. Różnica ta jest widoczna i zwiększa się wraz z wielkością układu.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| n | kryt. rezydualne iteracje | kryt. przyrostowe iteracje | kryt. rezydualne czas[s] | kryt. przyrostowe czas[s] | kryt. rezydualne błąd | kryt. przyrostowe błąd |
| 5 | 12 | 11 | 0,001 | 0,000 | 2,92E-05 | 1,33E-04 |
| 20 | 13 | 11 | 0,008 | 0,005 | 4,03E-06 | 1,38E-04 |
| 35 | 12 | 11 | 0,022 | 0,014 | 2,22E-05 | 1,24E-04 |
| 50 | 12 | 11 | 0,046 | 0,028 | 2,47E-05 | 1,26E-04 |
| 65 | 12 | 11 | 0,079 | 0,048 | 2,15E-05 | 1,23E-04 |
| 80 | 12 | 11 | 0,122 | 0,075 | 2,24E-05 | 1,27E-04 |
| 95 | 12 | 11 | 0,165 | 0,104 | 2,37E-05 | 1,16E-04 |
| 110 | 12 | 11 | 0,223 | 0,136 | 2,19E-05 | 1,26E-04 |
| 125 | 12 | 11 | 0,309 | 0,175 | 2,35E-05 | 1,15E-04 |
| 140 | 12 | 11 | 0,354 | 0,229 | 2,16E-05 | 1,25E-04 |
| 155 | 12 | 11 | 0,436 | 0,263 | 2,09E-05 | 1,22E-04 |
| 170 | 12 | 11 | 0,511 | 0,317 | 2,26E-05 | 1,20E-04 |
| 185 | 12 | 11 | 0,594 | 0,374 | 2,09E-05 | 1,22E-04 |
| 200 | 12 | 11 | 0,703 | 0,437 | 2,13E-05 | 1,24E-04 |
| 215 | 12 | 11 | 0,829 | 0,500 | 2,20E-05 | 1,18E-04 |
| 230 | 12 | 11 | 0,939 | 0,572 | 2,11E-05 | 1,23E-04 |
| 245 | 12 | 11 | 1,041 | 0,648 | 2,20E-05 | 1,18E-04 |
| 260 | 12 | 11 | 1,192 | 0,705 | 2,24E-05 | 1,20E-04 |
| 275 | 12 | 11 | 1,311 | 0,809 | 2,32E-05 | 1,15E-04 |
| 290 | 12 | 11 | 1,433 | 0,876 | 2,12E-05 | 1,24E-04 |
| 305 | 12 | 11 | 1,628 | 0,997 | 2,08E-05 | 1,22E-04 |
| 320 | 12 | 11 | 1,792 | 1,099 | 2,35E-05 | 1,16E-04 |
| 335 | 12 | 11 | 2,017 | 1,195 | 2,20E-05 | 1,18E-04 |
| 350 | 12 | 11 | 2,138 | 1,311 | 2,10E-05 | 1,23E-04 |
| 365 | 12 | 11 | 2,318 | 1,403 | 2,32E-05 | 1,15E-04 |
| 380 | 12 | 11 | 2,520 | 1,544 | 2,10E-05 | 1,23E-04 |
| 395 | 12 | 11 | 2,721 | 1,660 | 2,20E-05 | 1,18E-04 |
| 410 | 12 | 11 | 2,951 | 1,789 | 2,34E-05 | 1,16E-04 |
| 425 | 12 | 11 | 3,191 | 1,904 | 2,19E-05 | 1,18E-04 |
| 440 | 12 | 11 | 3,356 | 2,068 | 2,09E-05 | 1,23E-04 |
| 455 | 12 | 11 | 3,636 | 2,190 | 2,07E-05 | 1,22E-04 |
| 470 | 12 | 11 | 3,849 | 2,346 | 2,22E-05 | 1,19E-04 |
| 485 | 12 | 11 | 4,101 | 2,489 | 2,20E-05 | 1,19E-04 |

Tabela 2. Przedstawia wyniki eksperymentu dla i .

W tabeli 2 możemy zauważyć, że wykorzystanie wektora, który jest bardziej odległy od rozwiązania zwiększa liczbę iteracji. W porównaniu z wynikami przestawionymi w tabeli 1 można jeszcze zauważyć ustabilizowanie się liczby iteracji i wartości błędów, które nie podlegają już takim wahaniom. Błędy dla kryterium przyrostowego są o 1 rząd wielkości większe od tych uzyskanych dla kryterium rezydualnego.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| n | kryt. rezydualne iteracje | kryt. przyrostowe iteracje | kryt. rezydualne czas[s] | kryt. przyrostowe czas[s] | kryt. rezydualne błąd | kryt. przyrostowe błąd |
| 5 | 16 | 14 | 0,001 | 0,001 | 3,03E-08 | 2,73E-07 |
| 20 | 12 | 11 | 0,009 | 0,004 | 3,31E-08 | 1,27E-07 |
| 35 | 16 | 14 | 0,032 | 0,020 | 3,05E-08 | 2,75E-07 |
| 50 | 13 | 11 | 0,052 | 0,028 | 1,21E-08 | 1,69E-07 |
| 65 | 16 | 14 | 0,110 | 0,062 | 3,06E-08 | 2,74E-07 |
| 80 | 16 | 14 | 0,158 | 0,095 | 3,06E-08 | 2,77E-07 |
| 95 | 16 | 14 | 0,220 | 0,128 | 3,05E-08 | 2,78E-07 |
| 110 | 16 | 14 | 0,295 | 0,173 | 3,05E-08 | 2,73E-07 |
| 125 | 16 | 14 | 0,390 | 0,220 | 3,07E-08 | 2,78E-07 |
| 140 | 16 | 14 | 0,480 | 0,268 | 3,07E-08 | 2,77E-07 |
| 155 | 16 | 14 | 0,583 | 0,335 | 3,05E-08 | 2,77E-07 |
| 170 | 12 | 12 | 0,526 | 0,344 | 3,99E-08 | 3,99E-08 |
| 185 | 16 | 14 | 0,819 | 0,465 | 3,05E-08 | 2,76E-07 |
| 200 | 16 | 14 | 0,975 | 0,559 | 3,06E-08 | 2,77E-07 |
| 215 | 13 | 12 | 0,904 | 0,547 | 2,83E-08 | 1,17E-07 |
| 230 | 16 | 14 | 1,262 | 0,737 | 3,04E-08 | 2,74E-07 |
| 245 | 13 | 11 | 1,163 | 0,655 | 1,28E-08 | 1,84E-07 |
| 260 | 12 | 10 | 1,184 | 0,677 | 1,90E-08 | 2,29E-07 |
| 275 | 16 | 14 | 1,783 | 1,066 | 3,07E-08 | 2,77E-07 |
| 290 | 16 | 14 | 2,007 | 1,154 | 3,08E-08 | 2,78E-07 |
| 305 | 16 | 14 | 2,153 | 1,285 | 3,06E-08 | 2,78E-07 |
| 320 | 16 | 14 | 2,405 | 1,379 | 3,05E-08 | 2,73E-07 |
| 335 | 13 | 12 | 2,153 | 1,312 | 1,86E-08 | 6,12E-08 |
| 350 | 16 | 14 | 2,900 | 1,679 | 3,07E-08 | 2,74E-07 |
| 365 | 16 | 14 | 3,142 | 1,835 | 3,06E-08 | 2,75E-07 |
| 380 | 16 | 14 | 3,428 | 2,004 | 3,08E-08 | 2,77E-07 |
| 395 | 13 | 12 | 2,974 | 1,847 | 1,13E-08 | 3,16E-08 |
| 410 | 16 | 14 | 3,946 | 2,326 | 3,04E-08 | 2,74E-07 |
| 425 | 13 | 12 | 3,456 | 2,138 | 6,36E-09 | 5,38E-08 |
| 440 | 16 | 14 | 4,564 | 2,649 | 3,06E-08 | 2,77E-07 |
| 455 | 16 | 14 | 4,886 | 2,880 | 3,06E-08 | 2,78E-07 |
| 470 | 13 | 12 | 4,208 | 2,566 | 1,94E-08 | 7,88E-08 |
| 485 | 13 | 12 | 4,477 | 2,789 | 1,08E-08 | 2,55E-08 |

Tabela 3. Przedstawia wyniki eksperymentu dla i .

Wyniki przedstawione w tabeli 3 pokazują, że zmniejszenie wartości prowadzi do zwiększania dokładności kosztem czasu wykonania i liczby iteracji. Zależności między wartościami błędów są podobne jak w przypadku i zerowego wektora startowego.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| n | kryt. rezydualne iteracje | kryt. przyrostowe iteracje | kryt. rezydualne czas[s] | kryt. przyrostowe czas[s] | kryt. rezydualne błąd | kryt. przyrostowe błąd |
| 5 | 17 | 16 | 0,001 | 0,001 | 2,99E-08 | 9,66E-08 |
| 20 | 17 | 16 | 0,010 | 0,007 | 2,47E-08 | 9,37E-08 |
| 35 | 17 | 16 | 0,034 | 0,021 | 1,61E-08 | 1,02E-07 |
| 50 | 17 | 16 | 0,065 | 0,041 | 2,21E-08 | 9,06E-08 |
| 65 | 17 | 16 | 0,112 | 0,070 | 1,58E-08 | 1,02E-07 |
| 80 | 17 | 16 | 0,166 | 0,105 | 1,65E-08 | 1,05E-07 |
| 95 | 17 | 16 | 0,238 | 0,150 | 2,57E-08 | 8,02E-08 |
| 110 | 17 | 16 | 0,307 | 0,193 | 1,61E-08 | 1,04E-07 |
| 125 | 17 | 16 | 0,405 | 0,252 | 2,56E-08 | 7,97E-08 |
| 140 | 17 | 16 | 0,505 | 0,304 | 1,60E-08 | 1,04E-07 |
| 155 | 17 | 16 | 0,617 | 0,380 | 1,55E-08 | 1,03E-07 |
| 170 | 17 | 16 | 0,735 | 0,458 | 2,09E-08 | 8,84E-08 |
| 185 | 17 | 16 | 0,869 | 0,539 | 1,55E-08 | 1,03E-07 |
| 200 | 17 | 16 | 1,014 | 0,641 | 1,58E-08 | 1,04E-07 |
| 215 | 17 | 16 | 1,164 | 0,740 | 2,04E-08 | 8,74E-08 |
| 230 | 17 | 16 | 1,305 | 0,855 | 1,57E-08 | 1,03E-07 |
| 245 | 17 | 16 | 1,471 | 0,921 | 2,05E-08 | 8,75E-08 |
| 260 | 17 | 16 | 1,632 | 1,021 | 2,07E-08 | 8,82E-08 |
| 275 | 17 | 16 | 1,894 | 1,174 | 2,55E-08 | 7,91E-08 |
| 290 | 17 | 16 | 2,086 | 1,308 | 1,57E-08 | 1,04E-07 |
| 305 | 17 | 16 | 2,322 | 1,456 | 1,54E-08 | 1,03E-07 |
| 320 | 17 | 16 | 2,529 | 1,595 | 2,57E-08 | 7,98E-08 |
| 335 | 17 | 16 | 2,789 | 1,747 | 2,04E-08 | 8,73E-08 |
| 350 | 17 | 16 | 3,011 | 1,892 | 1,56E-08 | 1,03E-07 |
| 365 | 17 | 16 | 3,309 | 2,058 | 2,55E-08 | 7,91E-08 |
| 380 | 17 | 16 | 3,564 | 2,269 | 1,56E-08 | 1,03E-07 |
| 395 | 17 | 16 | 3,955 | 2,448 | 2,04E-08 | 8,74E-08 |
| 410 | 17 | 16 | 4,235 | 2,624 | 2,57E-08 | 7,97E-08 |
| 425 | 17 | 16 | 4,537 | 2,828 | 2,04E-08 | 8,73E-08 |
| 440 | 17 | 16 | 4,787 | 2,989 | 1,56E-08 | 1,03E-07 |
| 455 | 17 | 16 | 5,107 | 3,242 | 1,54E-08 | 1,03E-07 |
| 470 | 17 | 16 | 5,448 | 3,430 | 2,06E-08 | 8,80E-08 |
| 485 | 17 | 16 | 5,914 | 3,726 | 2,05E-08 | 8,78E-08 |

Tabela 4. Przedstawia wyniki eksperymentu dla i .

Zmniejszenie wartościdaje podobne rezultaty dla drugiego z rozważanych wektorów startowych. Wyniki zachowały się podobnie jak te z tabeli 2. Ponownie widać zwiększenie i ustabilizowanie się liczby iteracji i błędów.

* 1. Zadanie 2

Wartości własne macierzy zostały obliczone za pomocą funkcji linalg.eigvals z biblioteki Numpy, następnie korzystając z funkcji abs i max również z tej samej biblioteki obliczono promienie spektralne.

|  |  |
| --- | --- |
| n | Promień spektralny |
| 5 | 0,333333333 |
| 20 | 0,333333333 |
| 35 | 0,333333333 |
| 50 | 0,333333333 |
| 65 | 0,333333333 |
| 80 | 0,333333333 |
| 95 | 0,333333333 |
| 110 | 0,333333333 |
| 125 | 0,333333333 |
| 140 | 0,333333333 |
| 155 | 0,333333333 |
| 170 | 0,333333333 |
| 185 | 0,333333333 |
| 200 | 0,333333333 |
| 215 | 0,333333333 |
| 230 | 0,333333333 |
| 245 | 0,333333333 |
| 260 | 0,333333333 |
| 275 | 0,333333333 |
| 290 | 0,333333333 |
| 305 | 0,333333333 |
| 320 | 0,333333333 |
| 335 | 0,333333333 |
| 350 | 0,333333333 |
| 365 | 0,333333333 |
| 380 | 0,333333333 |
| 395 | 0,333333333 |
| 410 | 0,333333333 |
| 425 | 0,333333333 |
| 440 | 0,333333333 |
| 455 | 0,333333333 |
| 470 | 0,333333333 |
| 485 | 0,333333333 |

Tabela 5. Przedstawia wartości promieni spektralnych w zależności od wielkości macierzy iteracji.

Dla każdego rozmiaru układu dla, którego wykonane zostały eksperymenty numeryczne wartość promienia spektralnego mieście się w przedziale zatem zostały spełnione warunki zbieżności metody Jacobiego co jest zgodne z otrzymanymi wynikami.

1. Wnioski

* Wykorzystanie kryterium rezydualnego daje lepsze wyniki kosztem czasu wykonania.
* Liczba iteracji nie jest zależna od rozmiaru zadanego układu równań a od odległości wektora startowego od rozwiązania.