CONCEPTOS, DEFINICIONES Y MÉTODOS - ÁLGEBRA II

Sistemas de ecuaciones lineales

- Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de dos o más ecuaciones lineales que se resuelven simultáneamente. Cada ecuación lineal en el sistema involucra variables lineales y constantes, y se representa en forma algebraica. El objetivo es encontrar los valores de las variables que satisfacen todas las ecuaciones simultáneamente.

- Formas de resolver un sistema lineal :
    1. Método de eliminación : consiste en aplicar una serie de operaciones elementales a las ecuaciones del sistema para eliminar las variables de manera sistemática. Estas operaciones incluyen sumar o restar ecuaciones entre sí, multiplicar una ecuación por una constante y cambiar el orden de las mismas.
    2. Método de sustitución : se despeja una de las variables en una ecuación y se sustituye en las demás ecuaciones. Se repite este proceso hasta obtener un sistema con una sola variable, que se puede resolver fácilmente.
    3. Método matricial : Se construye una matriz aumentada que combina los coeficientes y términos constantes del sistema. Luego, se aplican operaciones elementales de matriz para reducir la matriz a una forma escalonada o reducida por filas.

- Soluciones de un sistema lineal :
    1. No tiene solución : Un sistema de ecuaciones lineales no tiene solución cuando las ecuaciones son inconsistentes y no hay un conjunto común de valores que satisfaga todas las ecuaciones simultáneamente.
    2. Única solución : Un sistema de ecuaciones lineales tiene una única solución cuando las ecuaciones son consistentes y existe un conjunto único de valores que satisface todas las ecuaciones simultáneamente.
    3. Infinitas soluciones : Un sistema de ecuaciones lineales tiene infinitas soluciones cuando las ecuaciones son consistentes y hay múltiples conjuntos de valores que satisfacen todas las ecuaciones simultáneamente.

Matrices

- Una matriz es una estructura organizada de números dispuestos en filas y columnas. Se puede pensar en una matriz como una tabla bidimensional o una cuadrícula rectangular. Cada número en la matriz se denomina elemento y se ubica en una posición específica, identificada por su fila y columna.

- Tipos de matrices :
    1. Matriz cuadrada : matriz en la que el número de filas es igual al número de columnas.
    2. Matriz MERF : es una forma especial de organizar una matriz donde se cumplen dos propiedades clave. Primero, todos los elementos debajo de un pivote (el primer elemento no nulo en cada fila) son cero, y cada pivote se encuentra a la derecha del pivote en la fila anterior. Segundo, los elementos

de cada pivote son igual a 1, y los elementos no nulos en la misma columna que un pivote se convierten en ceros. Las filas nulas deben estar al final de la matriz.

3. Matriz identidad : La matriz identidad, denotada por I o I_n, es una matriz cuadrada especial en la que todos los elementos en la diagonal principal son igual a 1 y los demás elementos son igual a 0.
4. Matriz diagonal : Una matriz diagonal es una matriz cuadrada en la que todos los elementos fuera de la diagonal principal son cero.
5. Matriz transpuesta : La matriz transpuesta de una matriz dada es una nueva matriz obtenida al intercambiar sus filas por columnas. Es decir, los elementos de la fila i en la matriz original se convierten en los elementos de la columna i en la matriz transpuesta.
6. Matriz inversa : operación matricial que se aplica a una matriz cuadrada y permite encontrar una matriz que, cuando se multiplica por la matriz original, produce la matriz identidad.
7. Matriz equivalente : matriz que se obtiene al aplicar una serie de operaciones elementales de fila a una matriz original.

- Operaciones aritméticas con matrices :
    1. Suma/Resta de matrices : para sumar/restar dos matrices del mismo tamaño, se suman/restan los elementos correspondientes en las mismas posiciones.
    2. Producto de una matriz con un escalar : la multiplicación de una matriz por un escalar implica multiplicar cada elemento de la matriz por ese escalar.
    3. Producto entre matrices: el producto de dos matrices se realiza multiplicando cada elemento de la primera matriz por los elementos correspondientes de la segunda matriz y sumando los resultados. Para que la multiplicación sea posible, el número de columnas de la primera matriz debe ser igual al número de filas de la segunda matriz.

- Rango de una matriz : es el número máximo de columnas que no se pueden expresar como una combinación lineal de las demás columnas de la matriz.

- Traza de una matriz (Tr(A)) : suma de los elementos en la diagonal principal.

- Las matrices son muy útiles para plantear sistemas de ecuaciones lineales Ax = b y resolverlos, para ello contamos con dos formas :
    1. Eliminación Gaussiana : A es una matriz de coeficientes, x es el vector de incógnitas y b es el vector de términos independientes. Se plantea la matriz aumentada [A | b] y mediante operaciones elementales se transforma a A en una matriz triangular superior para la resolución del sistema.
    2. Factorización LU : primeramente, se descompone la matriz A tal que A = LU, donde L es una matriz triangular inferior y U es triangular superior. Luego debemos resolver dos sistemas, Ly = b utilizando sustitución hacia adelante y luego Ux = y utilizando sustitución hacia atrás.

- Formas de analizar las posibles soluciones del sistema Ax = b :

    Mediante la matriz aumentada : si durante el proceso de eliminación gaussiana se llega a una fila en la forma [0 0 0 ... 0 | c] y la matriz aumentada

ya no tiene más filas, entonces el sistema no tiene solución. Si al aplicar la eliminación gaussiana, no se encuentra ninguna fila en la forma anterior y todas las filas tienen al menos un elemento distinto de cero en la columna de los términos independientes, entonces el sistema tiene una única solución.
Si al aplicar la eliminación gaussiana, no se encuentra ninguna fila en la forma anterior y hay una o más variables libres, entonces el sistema tiene infinitas soluciones.

Determinante de una matriz

- El determinante de una matriz cuadrada es una medida numérica que se calcula a partir de los elementos de la matriz. El determinante proporciona información importante sobre las propiedades y el comportamiento de la matriz. Se denota comúnmente como "det(A)".

- Para calcular el determinante la matriz, dependerá de las dimensiones de la misma :
  - ➔ Matriz 1x1 : el determinante es el único elemento de la matriz.
  - ➔ Matriz 2x2 : el determinante es igual al producto de la diagonal principal restado con la diagonal secundaria.
  - ➔ Matriz 3x3 : se aplica la regla de Sarrus.
  - ➔ Matriz 4x4 en adelante : se aplican operaciones elementales hasta tener una matriz triangular superior, donde el determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal.

- Propiedades importantes del determinante :
  1. | A | = | At |
  2. | A^-1 | = 1 / | A |
  3. | A^n | = | A | * | A | … n veces
  4. Sea detA el determinante de una matriz y c un escalar, c * Fn → 1/c * detA será el nuevo determinante de A luego de aplicarle la operación elemental.
  5. Intercambiar filas en una matriz no altera al determinante.

- El determinante define si una matriz es invertible o no, si el determinante de la matriz cuadrada A es distinto de cero implica que la matriz es invertible, de lo contrario, A no es invertible.

<u>Cómo calcular la inversa de una matriz</u>

- Notar que el concepto de matriz inversa, sólo tiene sentido si es una matriz cuadrada. Luego, la forma de obtener la misma, dependerá de las dimensiones de la matriz.
  1. Matriz 2x2 : sean a, b, c y d los coeficientes de la matriz. Para obtener la matriz inversa intercambiamos de lugar a con d y b con c pero a estos últimos dos les cambiamos el signo, luego dividimos la matriz por el determinante.
  2. Matriz 3x3 en adelante : utilizamos el método de la matriz de cofactores, que tiene la siguiente definición, A^-1 = Adj(At) / | A |

Espacios vectoriales

- Un espacio vectorial (sobre K) o un K-espacio vectorial es un conjunto V que tiene dos operaciones que satisfacen ciertos axiomas. Llamaremos vectores a los elementos de V .
    1. Suma de vectores: Dados v, w $\in$ V los podemos sumar obteniendo un nuevo vector v + w $\in$ V. Es conmutativa, asociativa, existe neutro y opuesto.
    2. Producto por escalares: Dado v $\in$ V y λ $\in$ K podemos multiplicar a v por λ obteniendo nuevo vector $\lambda \cdot v$ $\in$ V. Es asociativa, distributiva y tiene neutro.

- Para probar que el conjunto S es un espacio vectorial, debemos de ver que se cumplan las siguientes propiedades, para la suma y producto por escalar :
    1. S es cerrado por la suma.
    2. La suma entre los elementos de S es asociativa.
    3. En S existe el elemento neutro aditivo.
    4. En S existe el inverso aditivo.
    5. La suma entre los elementos de S es conmutativa.
    6. S es cerrado por el producto con escalares.
    7. La suma distribuye con respecto al producto escalar.
    8. El producto con escalares se distribuye con respecto a la suma.
    9. El producto con escalares es asociativo.
    10. En S existe el neutro del producto escalar.

<u>Subespacios Vectoriales</u>

- Sea V un K-espacio vectorial. Un subconjunto W $\subset$ V se dice que es un K-subespacio de V si
    1. W /= $\varnothing$
    2. W es cerrado por la suma → Si v, w $\in$ W, entonces v + w $\in$ W
    3. W es cerrado por la multiplicación por escalares → Si v $\in$ W, λ $\in$ K entonces $\lambda \cdot v$ $\in$ W

    Es un conjunto de vectores dentro de un espacio vectorial más grande que satisface ciertas propiedades específicas y hereda las propiedades del espacio vectorial.

- Si W es un subespacio vectorial de V , entonces 0 $\in$ W.
- Sea V un espacio vectorial y W un subconjunto. Si 0 $\in$/ W, entonces W no es un subespacio vectorial.
- Si W es un subespacio vectorial de V y w $\in$ W, entonces el opuesto de w pertenece al subespacio, es decir −w $\in$ W.
- Todos los resultados que probemos para espacios vectoriales valen para subespacios vectoriales.

<u>Generadores</u>

- Sean V un espacio vectorial y $v1, ..., vn$ vectores en V .Un vector $v \in V$ se dice que es combinación lineal de los $\{v1, ..., vn\}$ si existen escalares $\lambda1, ..., \lambda2 \in K$ tales que $v = \lambda1 \cdot v1 + \cdots + \lambda n \cdot vn$.
- La expresión $\lambda1 \cdot v1 + \cdots + \lambda n \cdot vn$ se llama combinación lineal.

- Al subconjunto $W \subseteq V$ formado por todas las combinaciones lineales de los vectores v1, ..., vk lo llamaremos el subespacio generado por v1, ..., vk. Lo denotamos como W = hv1, ..., vki. El conjunto $S = \{v1, ..., vk\}$ se llama conjunto de generadores de W.
  - ➔ Son un conjunto de vectores que, combinados mediante sumas y multiplicaciones escalares, pueden generar todos los vectores en un espacio vectorial determinado.

<u>El conjunto suma</u>

- Sea V un espacio vectorial y S1, ..., Sk subconjunto de V . El conjunto suma es $S1 + \cdots + Sk = \{s1 + \cdots + sk \mid s1 \in S1, ..., sk \in Sk\}$,en palabras, es el conjunto formado por todas las sumas que podemos hacer entre vectores de los conjuntos S1, ..., Sk.

- Sea V un espacio vectorial y W1, ..., Wk subespacios de V . Entonces $W1 + \cdots + Wk$ es un subespacio de V .

<u>Independencia lineal</u>

- Sea V un espacio vectorial. Un subconjunto $S \subset V$ se dice linealmente dependiente o LD si existen vectores $v1, ..., vn \in S$ y escalares $\lambda1, ..., \lambda n \in K$ no todos nulos tales que $\lambda1v1 + \cdots + \lambda nvn = 0$.
  - ➔ Si existe al menos un conjunto de coeficientes diferentes de cero que hace que la ecuación de combinación lineal sea igual a cero, entonces el conjunto de vectores se considera linealmente dependiente.
  - ➔ Sea V un espacio vectorial y $v1, ..., vn \in V$. Entonces v1, ..., vn son LD si y sólo si alguno de ellos es combinación lineal de los otros.
  - ➔ La propiedad de ser LD se hereda hacia arriba, es decir, todo conjunto que contiene un subconjunto LD es LD.

- Sea V un espacio vectorial. Un subconjunto $S \subset V$ que no es linealmente dependiente se dice linealmente independiente o LI.
  - ➔ Se dice que un conjunto de vectores es linealmente independiente si ninguno de los vectores en el conjunto puede ser expresado como una combinación lineal de los demás vectores.
  - ➔ La propiedad de ser LI se hereda hacia abajo, es decir, todo subconjunto de un conjunto LI es LI.

<u>Bases</u>

- Sea V un espacio vectorial. Una base de V es un subconjunto $B \subset V$ que satisface las siguientes condiciones :

- ➔ B genera a V
- ➔ B es LI

- Dado i ∈ {1, ..., n}, se denota ei al vector de Kn cuyas coordenadas son todas ceros excepto la coordenada i que es un 1, ei = (0, ..., 1, ..., 0) .El conjunto C = {e1, ..., en} es una base de Kn y se llama base canónica.
  - ➔ En K3 los vectores son e1 = (1, 0, 0), e2 = (0, 1, 0), e3 = (0, 0, 1).
  - ➔ El conjunto B = {x^i | i ∈ N0} es una base del espacio de polinomios K[x].
  - ➔ La base canónica del espacio de matrices Km×n es el conjunto {Eij | 1 ≤ i, j ≤ j} donde Eij es la matriz con todas sus entradas nulas excepto la entrada i, j que es 1.

- Si queremos saber si ciertos vectores v1, ..., vn forman una base de Kn armamos la matriz con los mismos y verificamos si es invertible o no.

- Si queremos saber si {v1, ..., vk} ∈ Kn es LI o LD, armamos la matriz con los mismos y verificamos lo siguiente:
  - ➔ Si el sistema AX = 0 tiene soluciones no triviales, entonces los vectores v1, ..., vk son LD.
  - ➔ Si 0 es la única solución de AX = 0, entonces los vectores v1, ..., vk son LI.

- Sea V un espacio vectorial no nulo y S ⊂ V un subconjunto finito tal que V = < S >. Entonces existe un subconjunto B ⊂ S que es base de V .

- Sea V un espacio vectorial de dimensión n y S = {v1, ..., vm} ⊂ V un subconjunto LI. Entonces existen vectores w1, ..., wt tales que B = {v1, ..., vm, w1..., wt} es una base de V .

- Sea A ∈ Km×n una matriz. El espacio fila de A es el subespacio de Kn generado por las filas de A.
  - ➔ Sean A y B dos matrices equivalentes por filas. Entonces los espacios fila de A y B son iguales.
  - ➔ Las filas no nulas de una MERF son LI.
  - ➔ Las filas no nulas de una MERF forman una base del subespacio W = < v1, ..., vm >.

- Sea v1, ..., vm ∈ Rn y A ∈ Rm×n la matriz cuyas filas son los vectores v1, ..., vm. Sea R una MRF equivalente por filas a A que se obtiene sin permutar filas.
  Si las filas no nulas de R son las i1, ..., i, entonces los vectores vi1, ..., vi forman una base de < v1, ..., vk >.

- Sea A ∈ Kn×n. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
  - ➔ A es invertible.
  - ➔ Las filas de A son una base de Kn
  - ➔ Las columnas de A son una base de Kn.

- Sea V un espacio vectorial. Si V es generado por m vectores y w1, ..., wn son vectores LI de V . Entonces n ≤ m.

- Sea V un espacio vectorial generado por m vectores. Si w1, ..., wn con n > m, entonces w1, ..., wn son LD.

- Sea V un espacio vectorial. Si B = {v1, ..., vm} y B' = {w1, ..., wn} son bases de V , entonces n = m.

Coordenadas de un vector respecto a una base

- Tenemos una base B = {v1, v2, …, vn} y queremos conocer las coordenadas de un vector V = {v1, v2, …, vn}, lo que hacemos es V = a(v1) + b(v2) + … + c(vn) y encontramos los coeficientes {a, b, …, c} y serán las coordenadas.

Dimensiones

- Un espacio vectorial V se dice que es de dimensión finita si tiene una base finita.
  - ➔ Sea V un K-espacio vectorial y B = {v1, ..., vn} una base de V .Entonces diremos que la dimensión de V es n y denotaremos dimK V = n. Además, se define que la dimensión del espacio nulo es 0.
  - ➔ En particular, si V es un espacio vectorial de dimensión finita entonces es generado por una cantidad finita de vectores.
  - ➔ La dimensión de V es la mínima cantidad de vectores con la cual podemos generar a V .
  - ➔ La dimensión de V es la máxima cantidad de vectores LI que puede contener V .
  - ➔ En la gran mayoría de los resultados anteriores y los que siguen se asume que los espacios vectoriales son de dimensión finita. Esto es así porque en la dimensión infinita hay cosas que no valen.

- Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Si W ⊂ V es un subespacio con W 6= V , entonces W es de dimensión finita y dim W < dim V .

- Sea V un espacio vectorial no nulo y S ⊂ V un subconjunto finito tal que V = < S >. Si |S| = dim V , entonces S es una base de V . En otras palabras V no puede ser generado por un conjunto con menos de dim V elementos.

- Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Si S ⊂ V es un subconjunto LI y |S| = dim V , entonces S es una base de V. Sea A ∈ Km×n, R la MERF equivalente a A y r la cantidad de 1's principales de R. En particular, la cantidad de variables libres es n − r.Entonces la dimensión del espacio de soluciones del sistema homogéneo AX = 0 es n − r.

- Sea {u1, ..., un} una base ortonormal de Rn y v ∈ Rn. Entonces v = <v, u1> * u1 + · · · + < v, un > * un
  - ➔ Este Teorema nos da una propiedad muy importante de las bases ortogonales. Permite expresar explícitamente cualquier vector como combinación lineal de los elementos de la base. En general hay que resolver

un sistema de ecuaciones pero en este caso la solución se obtiene realizando un producto escalar.

- Si B = {u1, ..., un} una base ortogonal de Rn, entonces B es una base de R, es decir es LI y genera a Rn.

Transformaciones Lineales

- Una transformación lineal entre dos espacios vectoriales V y W es una función T : V → W tal que :
  - ➔ Preserva la suma : T(v + v') = T(v) + T(v') ∀ v, v0 ∈ V
  - ➔ Preserva el producto por escalares : T(λv) = λT(v) ∀ v ∈ V, λ ∈ R

- Observación : T es transformación lineal ←→ T(λv + v') = λT(v) + T(v') ∀ v, v0 ∈ V, λ ∈ R. Además, sea T : V → W una transformación lineal. Entonces T(0) = 0.

- Sea T : V → W una transformación lineal.
  - ➔ La imagen de T es el subconjunto de W Im(T) = {T(v) | v ∈ V } = {w ∈ W | w = T(v) para algún v ∈ V }
  - ➔ El núcleo de T es el subconjunto de V, Nu(T) = {v ∈ V | T(v) = 0}

- Teorema : Sea T : V → W una transformación lineal. Entonces
  - ➔ Im(T) es un subespacio vectorial de W.
  - ➔ Nu(T) es un subespacio vectorial de V.

- Sea T : V → W una transformación lineal con V de dimensión finita. Entonces Nu(T) es de dimensión finita.

- Sea T : V → W una transformación lineal con V de dimensión finita. Sea {v1, ..., vk} una base de V . Entonces {T(v1), ..., T(vk)} genera a Im(T) y por lo tanto Im(T) es de dimensión finita.

- Sea T : V → W una transformación lineal y supongamos que V es de dimensión finita. Entonces :
  - ➔ El rango de T es la dimensión de Im(T).
  - ➔ La nulidad de T es la dimensión de Nu(T).

- Sea T : V → W una transformación lineal y supongamos que V es de dimensión finita. Entonces dim V = dim Nu(T) + dim Im(T).

- Sea T : V → W una transformación lineal. Se dice que
  - ➔ T es un monomorfismo si es inyectiva.
  - ➔ T es un epimorfismo si es suryectiva.
  - ➔ T es un isomorfismo si es biyectiva (inyectiva y suryectiva).
  - ➔ Si existe un isomorfismo de V sobre W se dice que V es isomorfo
  - ➔ a W y se denota V ~= W.

- Sea T : V −→ W una transformación lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes :
  - ➔ T es un monomorfismo
  - ➔ Nu(T) = 0
  - ➔ dim Nu(T) = 0
  - ➔ La imagen de un conjunto LI es LI.

- Sea T : V → W una transformación lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes :
  - ➔ T es un epimorfismo.
  - ➔ Im(T) = W.
  - ➔ Si V es de dimensión finita entonces dim Im(T) = dim W.
  - ➔ W es generado por la imagen de cualquier conjunto de
  - ➔ generadores de V .

- Sea T : V → W una transformación lineal. Entonces T es un isomorfismo si y sólo si la imagen de una base es una base.

- La matriz de cambio de base de la base B’ a la base B es la matriz en la cual, las columnas de P son las coordenadas de los vectores de B’ en la base B.
  - ➔ La matriz P de cambio de base es invertible y la inversa es la matriz de cambio de base “al revés”.
  - ➔ P (desde base canónica a una base B) = colocamos los vectores como columnas de una matriz, y hallamos su inversa.
  - ➔ P (desde una base B a una base canónica) = colocamos los vectores como columnas.

Autovalores y autovectores

- Un autovalor, es una constante (puede ser real, o compleja) tal que :
  - ➔ En transformaciones lineales → T(v) = λv.
  - ➔ En una matriz A → det (A - (λ*In)) = 0.
  - ➔ A “det (A - (λ*In))” se lo denomina polinomio característico de A.

- Un autovector es un vector no nulo que, cuando se multiplica por una matriz, solo cambia en escala, es decir, se transforma en un múltiplo de sí mismo. Formalmente, dado un operador lineal representado por una matriz A y un vector no nulo v, el autovector v cumple con la siguiente propiedad:
  - ➔ Av = λv.

- Un autoespacio, es el conjunto de todos los autovectores asociados a un cierto autovalor.

Aclaración : el concepto de autovalores y autovectores solo tiene sentido en matrices cuadradas.

- Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y T : V → V una transformación lineal. Se dice que T es diagonalizable si V tiene una base formada por autovectores.

- Un operador lineal se dice que es diagonalizable si existe una base de vectores en la cual la matriz que representa al operador tiene una forma diagonal.Por otro lado, si un operador lineal no es diagonalizable, esto significa que no es posible encontrar una base de vectores en la cual la matriz asociada al operador tenga una forma diagonal.
  - ➔ La diagonalización de operadores lineales está estrechamente relacionada con los valores propios y los vectores propios. Un operador lineal es diagonalizable si y sólo si tiene un conjunto completo de vectores propios linealmente independientes.