3) Encontrar la primitiva F de $f(x) = x + \cos(x)$ que pasa por el punto $(0, 4)$.

$* \int x + \cos(x) \doteq \int x\,dx + \int \cos(x)\,dx \doteq \boxed{x^2/2 + \operatorname{sen}(x) + C} \longrightarrow 0^2/2 + \operatorname{sen}(0) + C \doteq 4 \longrightarrow \boxed{C = 4}$

4) Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = (33 - 2x)^{\frac{4}{3}}$
b) $f(x) = e^{2x}$
c) $f(x) = 2^x$
d) $f(x) = \ln(7 - x)$
e) $f(x) = \ln(x^2 + 3x + 4)$
f) $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$
g) $f(x) = \ln(\cos(x) + \operatorname{sen}(x))$
h) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$

$* f(x) = (33 - 2x)^{4/3} \doteq \frac{4}{3}(33 - 2x)^{1/3} \cdot (0 - 2) = -\frac{8}{3}(33 - 2x)^{1/3} = \frac{-8\sqrt[3]{(33-2x)}}{3}$

$* f(x) = e^{2x} \doteq f(x)^{g(x)} = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}$

$* 2^x \doteq 2^x \cdot \ln(2)$

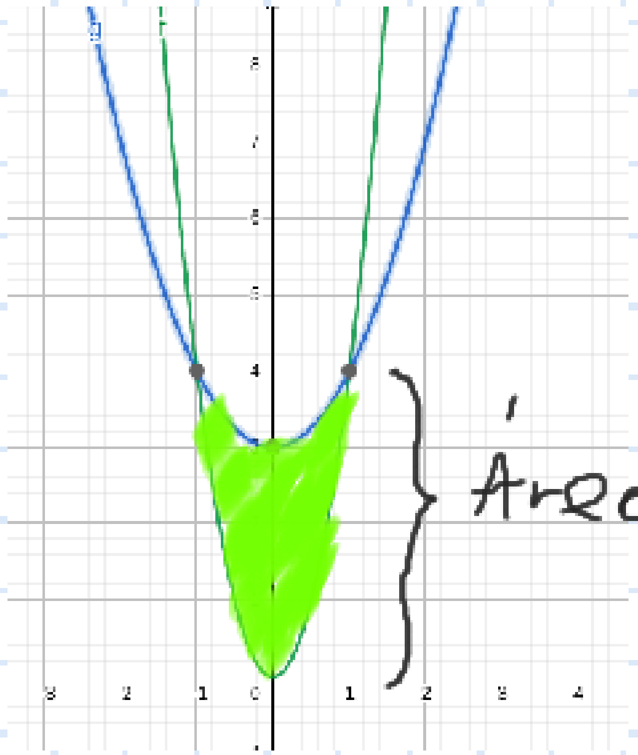
$* \ln(7 - x) \doteq \frac{1}{7 - x} \cdot (0 - 1) \doteq -\frac{1}{7 - x}$

$* f(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} \xrightarrow{r.t} \boxed{\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}} \Longrightarrow \cot(x)' \doteq \boxed{-\operatorname{cosec}(x^2)}$

$\longrightarrow \frac{\cos(x)' \cdot \operatorname{sen}(x) - \cos(x) \cdot \operatorname{sen}(x)'}{\operatorname{sen}(x)^2} \doteq \frac{-\operatorname{sen}(x)^2 - \cos(x)^2}{\operatorname{sen}(x)^2} \doteq \boxed{\frac{-(1)}{\operatorname{sen}(x)^2}}$

a) $y = 4x^2$, $y = x^2 + 3$
b) $y = \cos(x)$, $y = \text{sen}(x)$, $x = 0$, $x = \pi/2$
c) $y = |x|$, $y = (x+1)^2 - 7$, $x = -4$
d) $y = 1/x$, $y = 1/x^2$, $x = 1$, $x = 2$
e) $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = -2$, $x = 1$
f) $y = x + 6$, $y = x^3$, $x = -2$, $2y + x = 0$

a)



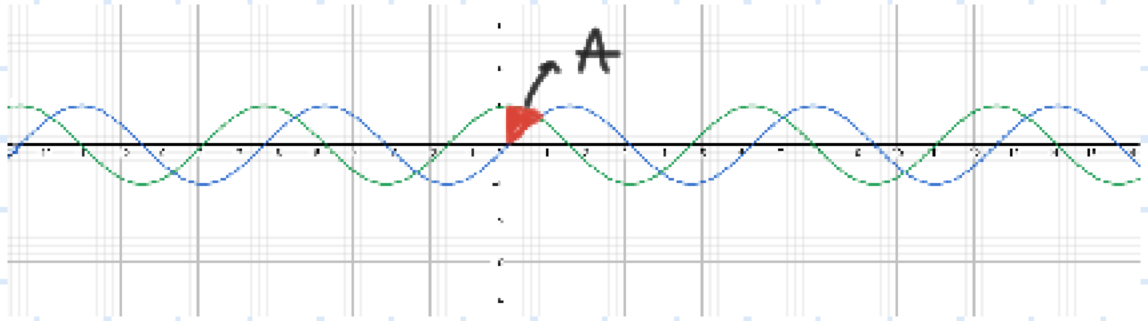
Área

$$* \int_{-1}^{1} (x^2+3) - (4x^2)\,dx \doteq \int_{-1}^{1} x^2 + 3\,dx - \int_{-1}^{1} 4x^2 \doteq \left(\int_{-1}^{1} x^2\,dx + \int_{-1}^{1} 3\,dx\right) - 4\int_{-1}^{1} x^2\,dx$$

$$\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} + 3x\Big|_{-1}^{1} - \frac{4x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} \doteq \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{(-1)}{3}\right) + 3(1-(-1)) - 4\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{(-1)}{3}\right)$$

$$\doteq 2/3 + 6 - 8/3 \doteq 20/3 - 8/3 = \boxed{12/3\ u_2}$$

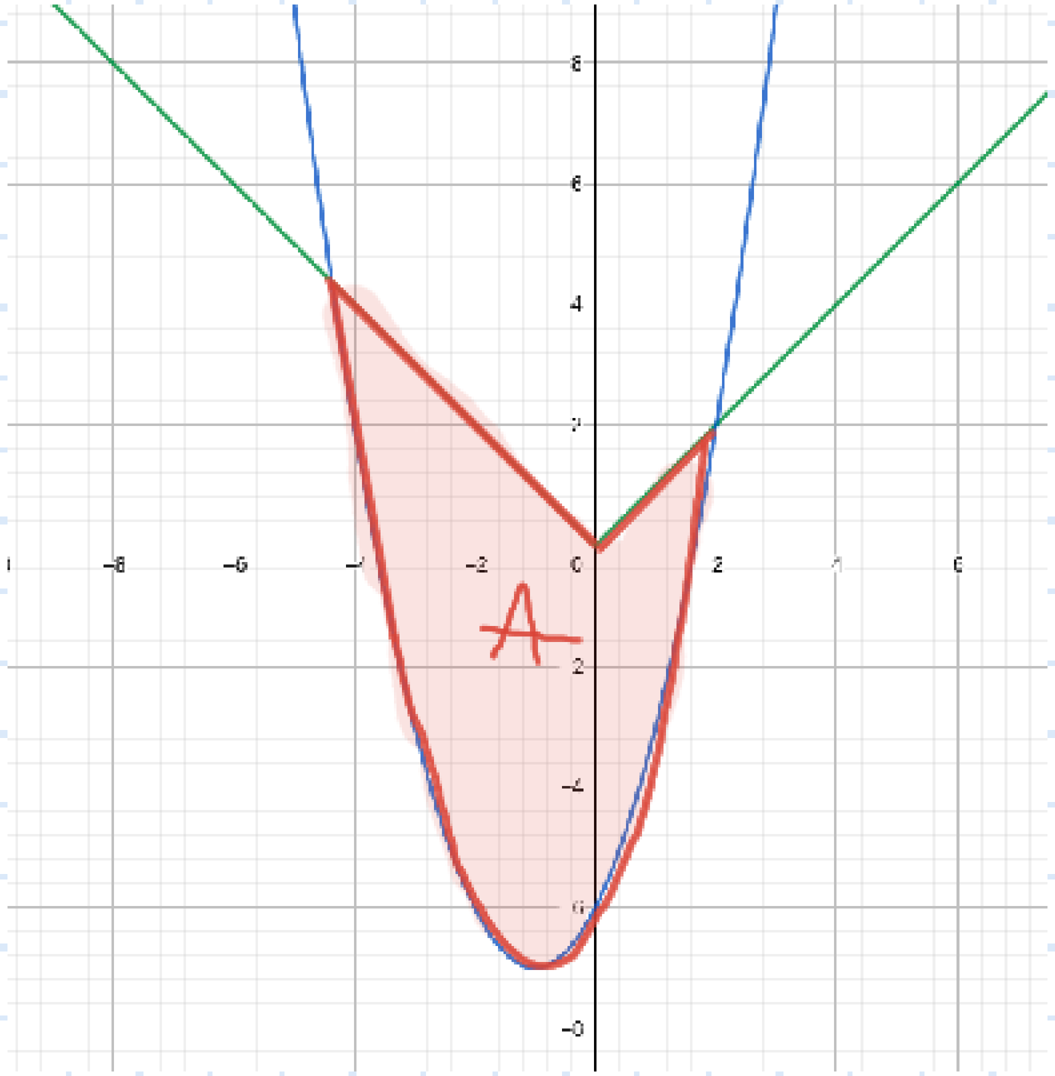
b)



$$\int_0^{\pi/2} \cos(x) - \text{sen}(x)\,dx \doteq \int_0^{\pi/2} \cos(x)\,dx - \int_0^{\pi/2} \text{sen}(x)\,dx \doteq \text{sen}(x)\Big|_0^{\pi/2} + \cos\Big|_0^{\pi/2}$$

$$\doteq \left(\text{sen}(\pi/2) - 0\right) + \left(\cos(\pi/2) - 1\right) \doteq \text{sen}(\pi/2) - 1 \doteq 1 - 1 \doteq \boxed{0\ u_2}$$

c)



$$* \int_{-4}^{2} |x| - (x+1)^2 + 7 \, dx \quad \begin{cases} \int_{-4}^{0} -x - (x+1)^2 + 7 \, dx & (1) \\ \int_{0}^{2} x - (x+1)^2 + 7 \, dx & (2) \end{cases}$$

$$(1) \int_{-4}^{0} -x \, dx - \int_{-4}^{0} (x+1)^2 dx + \int_{-4}^{0} 7 \, dx = -\int_{-4}^{0} x \, dx - \int_{-4}^{0} (x+1)^2 dx + 7\int_{-4}^{0} dx \quad (*)$$

$$(*) \; -\left(x^2/2 \Big|_{-4}^{0}\right) - \left(\int_{-4}^{0} x \, dx + \int_{-4}^{0} 2x + \int_{-4}^{0} dx\right) + 7\left(x \Big|_{-4}^{0}\right) =$$

$$-(-8) - \left(x^2/2 \Big|_{-4}^{0} + 2\left(x^2/2 \Big|_{-4}^{0}\right) + x \Big|_{-4}^{0}\right) + 7(4) =$$

$$8 - \left((0 - (-4)^2/2) + 2(0 - (-4)^2/2)\right) + 4 + 28 =$$

$$8 - (-8 + (-8) + 4) + 28 = 8 - 12 + 28 = \boxed{24 \ u_2}$$

$$(2) \int_{0}^{2} x - (x+1)^2 + 7 \, dx = \int_{0}^{2} x \, dx - \int_{0}^{2} (x+1)^2 + 7\int_{0}^{2} dx$$

$$= x^2/2 \Big|_{0}^{2} - \left(\int_{0}^{2} x^2 dx + 2\int_{0}^{2} x \, dx + \int_{0}^{2} dx\right) + 7(2)$$

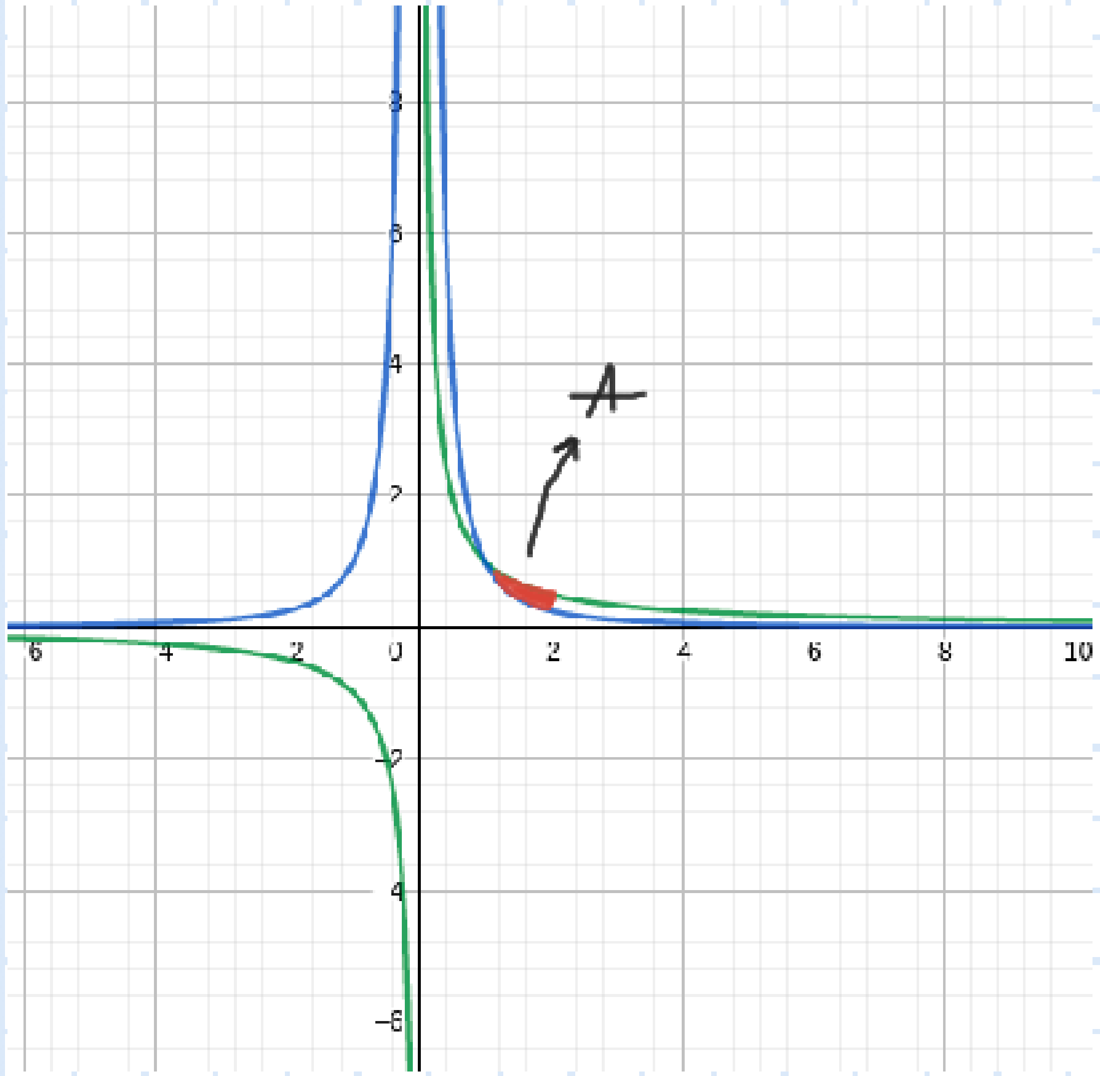
$$= 2 - \left(x^3/3 \Big|_{0}^{2} + 2\left(x^2/2 \Big|_{0}^{2}\right) + x \Big|_{0}^{2}\right) + 14$$

$$= 2 - \left((8/3) + 2(2) + 2\right) + 14 = 2 - (32/3) + 14 = \boxed{16/3 \ u_2}$$

Rta $= (1) + (2) = 24 + \frac{16}{3} =$

$$\boxed{88/3 \ u_2}$$

d)



$$* A \doteq \int_1^2 1/x - 1/x^2 \, dx \doteq \int_1^2 1/x \, dx - \int_1^2 1/x^2 \, dx \doteq \ln(x)\Big|_1^2 - \int_1^2 1/x^2 \, dx \quad *$$

$$* \int_1^2 1/x^2 \, dx \doteq \int_1^2 x^{-2} \, dx \doteq x^{-1}/{-1}\Big|_1^2 \doteq -\frac{1}{x}\Big|_1^2 \doteq \left(-\frac{1}{2}+1\right) \doteq \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\ln(2) - 1/2 \ u_2}$$

12) Usar el cálculo integral para calcular el área de los triángulos con vértices:

a) (0,0); (1,8); (4,3).   b) (-2,5); (0,-3); (5,2).

(Analogo)

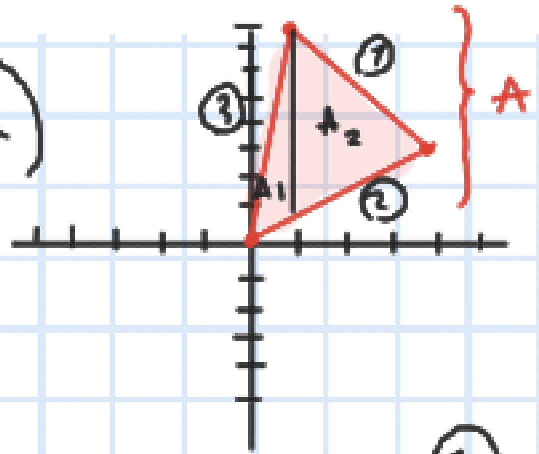
$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

$$\boxed{m = \frac{y - y_1}{x - x_1}}$$

$*$ Rta: $T = A_1 + A_2$

$\longrightarrow T = 21/8 + 15/8 = \boxed{36/8 \ u_2}$ //

a)



$T = A_1 + A_2$

① $m_1 = \frac{8-3}{1-4} = -\frac{5}{3}$

$-\frac{5}{3} = \frac{y-3}{x-4} = -5(x-4) = 3(y-3) = -5x+20 = 3y-9 = \boxed{\frac{-5x+20}{3} = y}$ // ①

② $m_2 = \frac{3-0}{4-0} = \frac{3}{4}$

$\frac{3}{4} = \frac{y-0}{x-0} = 3(x-0) = 4(y-0) = 3x = 4y = \boxed{\frac{3x}{4} = y}$ // ②

③ $m_3 = \frac{8-0}{1-0} = \frac{8}{1}$

$8 = \frac{y-0}{x-0} = 8(x-0) = y = \boxed{8x = y}$ // ③

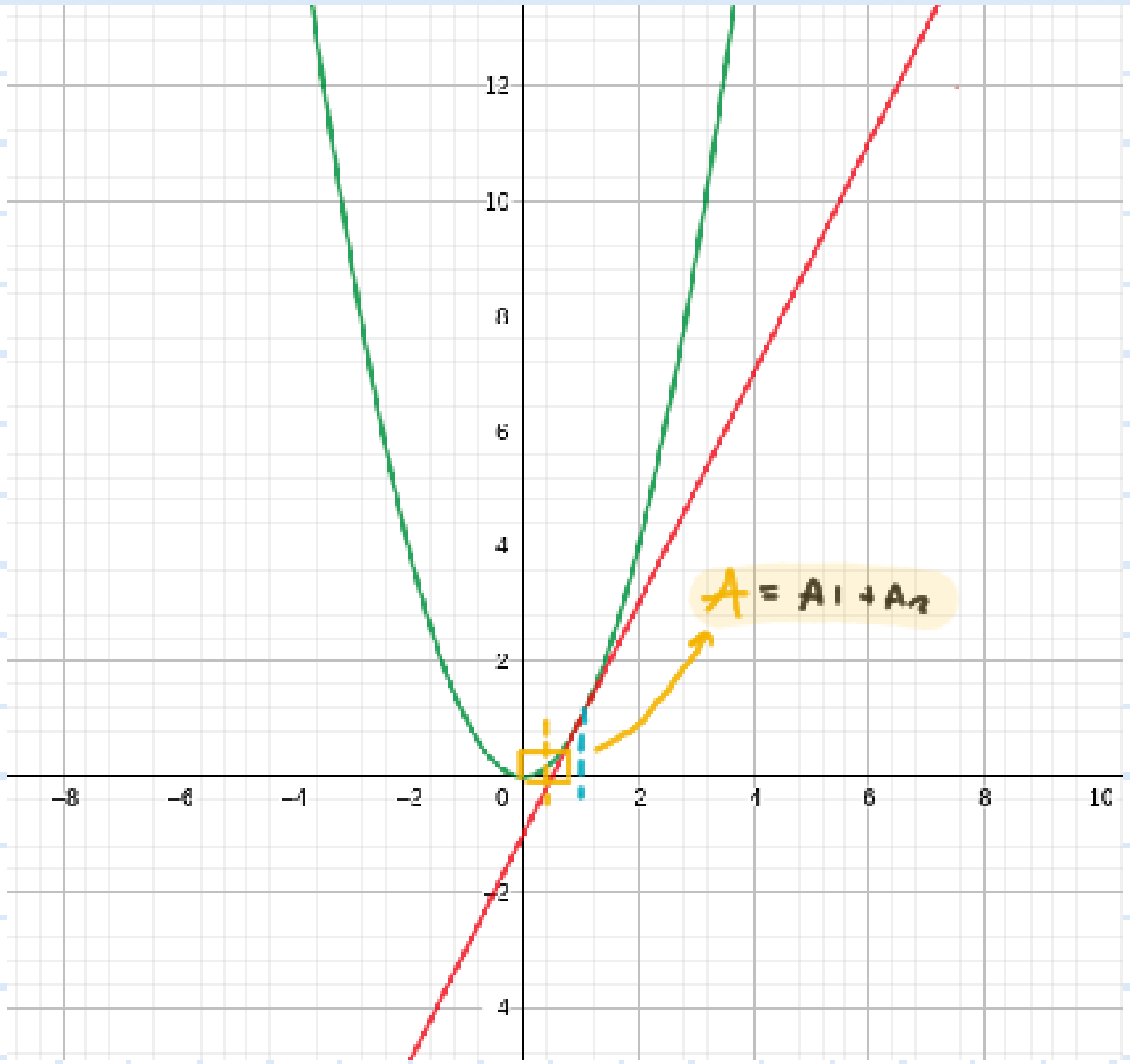
$$* A_1 = \int_0^1 \left(8x - 3x/4\right) dx = \int_0^1 8x\,dx - \int_0^1 3x/4\,dx = 8\left(x^2/2 \Big|_0^1\right) - 3/4\left(x^2/2 \Big|_0^1\right) = 8\left(\tfrac{1}{2}\right) - 3/4\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$= 4 - 3/8 = \boxed{21/8} \text{ // } (A_1)$$

$$* A_2 = \int_1^4 \left(\frac{-5x+20}{3} - 3x/4\right) dx = \frac{1}{3}\int_1^4 (-5x+20)\,dx - \frac{3}{4}\left(x^2/2 \Big|_1^4\right) = \frac{1}{3}\left(-5\int_1^4 x\,dx + 20\int_1^4 dx\right) - 3/4\left(16/2 - 1/2\right) = \frac{1}{3}\left(-5\left(x^2/2\Big|_1^4\right)\right.$$

$$\left. + 20(x)\Big|_1^4\right) - 3/4 \cdot (15/2) = 1/3(-75/2 + 60) - 3/4 \cdot 15/2 = 15/2 - 45/8 = \boxed{15/8} \text{ // } (A_2)$$

13) Calcular el área de la región limitada por la parábola $y = x^2$, la tangente a ella en el punto (1,1) y el eje x.



* Rta = $A = A_1 + A_2 = \boxed{1/12\ u_2}$

pendiente

* tangente en $(1,1) \doteq f(x)' \longrightarrow f(x) = x^2 \doteq f(x)' = 2x$

pendiente en $(1,1) \doteq f(1) = 2 \longrightarrow \boxed{m = 2}$

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Recta tangente en (1,1)

* $y - 1 = 2(x - 1) \doteq y - 1 = 2x - 2 \doteq \boxed{y = 2x - 1}$

$$\int_{1/2}^{1} x^2 - (2x - 1)\,dx = \int_{1/2}^{1} x^2 - 2x + 1\,dx \doteq \int_{1/2}^{1} x^2\,dx - 2\int_{1/2}^{1} x + \int_{1/2}^{1} dx$$

$$\doteq \left.\frac{x^3}{3}\right|_{1/2}^{1} - 2\left(\left.\frac{x^2}{2}\right|_{1/2}^{1}\right) + \left.x\right|_{1/2}^{1} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1/8}{3}\right) - 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1/4}{2}\right)$$

$$+ \left(1 - \frac{1}{2}\right) \doteq 7/24 - 3/4 + 1/2 \doteq \boxed{1/24}\ A_1$$

$$\int_0^{1/2} x^2 - 0\,dx \doteq \int_0^{1/2} x^2\,dx - \cancel{\int_0^{1/2} 0\,dx} \doteq \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{1/2} \doteq \frac{(1/2)^3}{3} - \cancel{\frac{0^3}{3}} = \boxed{1/24}\ A_2$$

14) Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_2^4 \frac{x^2+4x+24}{x^2-4x+8}\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4}\,dx$ c) $\displaystyle\int_2^4 \frac{x}{x^3-3x+2}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx$ d) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2+3x+2}\,dx$ f) $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^2+1)^3}\,dx$

Ayuda: en el inciso (f) sustituya $u = x^2+1$.

④ $\dfrac{4 \pm \sqrt{(4)^2-4(1)8}}{2}$ } No tiene r reales. Caso #4

a) $\displaystyle\int_2^4 \frac{x^2+4x+24}{x^2-4x+8}\,dx \doteq$

$$\begin{array}{r|l} x^2+4x+24 & x^2-4x+8 \\ \hline -x^2+4x+8 & 1 \\ \hline 0+8x+16 & \end{array}$$

$\doteq P(x)/q(x) \doteq \dfrac{x^2-4x+8 + 8x+16}{x^2-4x+8} \doteq \displaystyle\int_2^4 \frac{x^2-4x+8+8x+16}{x^2-4x+8} =$

$\displaystyle\cancel{\int_2^4 \frac{x^2-4x+8}{x^2-4x+8}}\,dx$ 1 $+ \displaystyle\int_2^4 \frac{8x+16}{x^2-4x+8}\,dx \doteq \int_2^4 dx + \int_2^4 \frac{8x+16}{x^2-4x+8}\,dx$ ▲

▲ $\dfrac{8x+16}{x^2-4x+8} \doteq \dfrac{Bx+C}{x^2-4x+8} \doteq \dfrac{4(2x-4)+32}{x^2-4x+8} \doteq \dfrac{4(2x-4)}{x^2-4x+8} + \dfrac{32}{x^2-4x+8}$ ⊛

⊛ $\displaystyle\int \frac{4(2x-4)}{x^2-4x+8}\,dx + \int \frac{32}{x^2-4x+8}\,dx \doteq 4\int \frac{2x-4}{x^2-4x+8}\,dx + 32\int \frac{1}{x^2-4x+8}\,dx \doteq \int \frac{2x-4}{x^2-4x+8} + 32\int \frac{1}{u}\,\frac{du}{2x-4}$

b) $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx \doteq \underbrace{\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx}_{*} + \underbrace{\int \frac{1}{x^2+1}\,dx}_{\text{arctag}(x)} \doteq * \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx \doteq \begin{array}{l} u = x^2+1 \\ du = 2x\,dx \end{array} \doteq \int \frac{\cancel{2x}}{u}\,\frac{du}{\cancel{2x}} = \int \frac{1}{u}\,du = \ln(|u|) \doteq$

$\boxed{\ln(|x^2+1|) + \text{arctang}(x)}$

c) $\int \frac{x-1}{x^2+4}\,dx \doteq \int \frac{x}{x^2+4}\,dx - \int \frac{1}{x^2+4}\,dx \doteq \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx - \int \frac{1}{x^2-4} \doteq \frac{1}{2}\int \frac{\cancel{2x}}{u}\,\frac{du}{\cancel{2x}} \doteq \boxed{\frac{1}{2}\cdot\ln(u) + \frac{\text{arctan}(x/2)}{2}}$ $+ C$

• Caso 1: Busco $A_1, \dots, A_k$ por cada polinomio de grado 1. Ej: $\int \frac{7x-1}{x^2-x-6}\,dx = \int \frac{7x-6}{(x-3)\cdot(x+2)}\,dx \doteq \int \frac{A_1}{(x-3)}\,dx + \int \frac{A_2}{(x+2)}\,dx \doteq \int \frac{A_1(x+2)+A_2(x-3)}{(x+2)(x-3)}\,dx$

$\doteq \int \frac{A_1(x)+2A_1+A_2(x)-3A_2}{(x-2)(x+3)}\,dx \doteq \int \frac{x(A_1+A_2)+(2A_1-3A_2)}{(x-2)(x+3)}\,dx \doteq \boxed{x(A_1+A_2)+(2A_1-3A_2) \doteq 7x-1} \doteq$

$* \; A_1+A_2 = 7 \longrightarrow A_1 \doteq 7-A_2 \longrightarrow A_1 = 7-3 = \boxed{4}$

$* \; 2A_1-3A_2 = -1 \longrightarrow 2(7-A_2)-3A_2 = -1 = 14-2A_2-3A_2 = -1$

$\doteq 14-5A_2 = -1 \doteq -5A_2 = -15 \doteq A_2 = {}^{-15}/_{-5} = \boxed{3}$

$* \int \frac{4}{(x-3)}\,dx + \int \frac{3}{(x+2)}\,dx \doteq \boxed{4\cdot\ln(|x-3|) + 3\ln(|x+2|) + C}$

• Caso 2: ∃ producto de polin. todos iguales, de nuevo buscamos $A_1, \dots, A_k$. Ej: $\int \frac{1-2x}{(x+2)^3}\,dx = \int \frac{1-2x}{(x+2)(x+2)(x+2)}\,dx$ *

* $\int \frac{A_1}{(x+2)}\,dx + \int \frac{A_2}{(x+2)^2} + \int \frac{A_3}{(x+2)^3}\,dx \doteq \int \frac{A_1(x+2)^2+A_2(x+2)+A_3}{(x+2)^3}\,dx \doteq \int \frac{A_1(x^2+4x+4)+A_2(x)+2A_2+A_3}{(x+2)^3}\,dx \doteq \int \frac{A_1(x^2)+A_1 4x+A_1+A_2(x)+2A_2+A_3}{(x+2)^3}\,dx$

$\doteq \int \frac{x(4A_1+A_2)+A_1+2A_2+A_3+A_1(x^2)}{(x+2)^3}\,dx \doteq$

$* \; \boxed{A_1 = 0}$

$* \; 4A_1+A_2 = -2 \doteq \boxed{A_2 \doteq -2}$

$* \; A_1+2A_2+A_3 = 1 \doteq 0+2(-2)+A_3 = 1 \doteq \boxed{A_3 = 5}$

$\doteq \cancel{\int \frac{0}{(x+2)}\,dx} + \int \frac{-2}{(x+2)^2} + \int \frac{5}{(x+2)^3}\,dx$ ▲

▲ $-2\int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx + 5\int \frac{1}{(x+2)^3} \doteq -2\int \frac{1}{u^2}\,du + 5\int \frac{1}{u^3}\,du \doteq -2\left(-\frac{1}{u}\right) + 5\left(-\frac{1}{2u^2}\right) \doteq -2\left(-\frac{1}{x+2}\right) + 5\left(-\frac{1}{2(x+2)^2}\right) \doteq$

$\boxed{{}^{2}/_{x+2} + {}^{5}/_{2(x+2)^2} + C}$

17) Determinar si las siguientes integrales impropias convergen y en tal caso calcularlas.

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{s+1}}\, ds$

b) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{1}{(1-y)^{2/3}}\, dy$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\, e^{-x^2}\, dx$

d) $\displaystyle\int_{-1}^{7} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

f) $\displaystyle\int_0^{1} \ln(x)\, dx$

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{s+1}} \doteq \lim_{t\to\infty}\left(\int_0^{t} \frac{1}{\sqrt{s+1}}ds\right) \doteq \begin{matrix} u = s+1 \\ du = 1\,ds \end{matrix} \doteq \int_0^{t} \frac{1}{\sqrt{u}}\, du = 2\cdot\sqrt{u} \doteq 2\sqrt{s+1}\,\Big|_0^{t} \doteq 2\sqrt{t+1} - 2\sqrt{0+1} = 2\sqrt{t+1} - 2$

$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left(2\sqrt{\infty+1} - 2\right) \doteq$ Diverge //

$\displaystyle\int x^2 e^{-x^2} dx = \int x\, e^{u}\, du$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x e^{-x^2} dx \doteq \lim_{t\to-\infty}\left(\int_t^{0} x\cdot e^{-x^2} dx\right) \doteq \begin{matrix} u = -x^2 \\ du = -2x\,dx \end{matrix} \doteq \int_t^{\cdot} \cancel{x}\cdot e^{u}\,\frac{du}{\cancel{-2x}} \doteq -\frac{1}{2}\int_t^{0} e^{u}\, du \doteq -\frac{1}{2}\left(e^{u}\Big|_t^{0}\right)$ ⊛

⊛ $\displaystyle -\frac{1}{2}\left(e^{-x^2}\Big|_t^{0}\right) \doteq -\frac{1}{2}\left(e^{0} - e^{-t^2}\right) \doteq -\frac{1}{2}\left(1 - e^{-t^2}\right) \doteq -\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\left(1 - e^{-t^2}\right) \doteq -\frac{1}{2} + \lim_{t\to-\infty} e^{-t^2}$

$\displaystyle\lim_{t\to-\infty} e^{-t^2}$ ⊛ $\displaystyle -\frac{1}{2} + \lim_{t\to-\infty}\frac{1}{e^{t^2}} \doteq \frac{1}{\infty} = 0 \to \boxed{-\frac{1}{2}}$ // $\to$ Converge

(1) Determinar si cada una de las siguientes sucesiones es convergente o no. Si la sucesión converge, calcular su límite.

(a) $a_n = \dfrac{5-2n}{3n-7}$

(b) $a_n = \dfrac{n}{\ln(n+1)}$

(c) $a_n = n - \sqrt{n^2-4n}$

(d) $a_n = 20\,(-1)^{n+1}$

(e) $a_n = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$

(f) $a_n = n^3\,e^{-n}$

(g) $a_n = \cos(n\pi)$

(h) $a_n = n\,\mathrm{sen}(6/n)$

(i) $a_n = \left(1-\dfrac{5}{n}\right)^n$

(j) $a_n = \pi/4 - \arctan(n)$

(k) $a_n = \dfrac{\mathrm{sen}^2(n)}{4^n}$

a) $a_n \doteq \dfrac{5-2n}{3n-7} \doteq \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5-2n}{3n-7}\right) \doteq \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\cancel{n}(5/n-2)}{\cancel{n}(3-7/n)}\right)$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\cancel{5/\infty}-2}{3-\cancel{7/\infty}}\right) \doteq \lim\limits_{n\to\infty} -\dfrac{2}{3} = \boxed{-2/3}$ Converge

b) $a_n \doteq \dfrac{n}{\ln(n+1)} \doteq \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{\ln(n+1)}\right) \doteq \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\frac{1}{n+1}}\right)$

$\doteq \dfrac{n+1}{1} \doteq \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{1} \doteq \dfrac{\infty+1}{1} = \boxed{\infty}$ Diverge

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-4n}\right) \doteq \lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-4n}\cdot\dfrac{n+\sqrt{n^2-4n}}{n+\sqrt{n^2-4n}}\right)$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\left(n-\sqrt{n^2-4n}\right)^2}{n+\sqrt{n^2-4n}}\right) \doteq \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-\left(\sqrt{n^2-4n}\right)^2}{n+\sqrt{n^2-4n}}\right) \doteq$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\cancel{n^2}-\cancel{n^2}+4n}{n+\sqrt{n^2-4n}}\right) \doteq \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n}{n+\sqrt{n^2-4n}}\right) \doteq$

$4\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+\left(\sqrt{n^2(1-4/n)}\right)}\right) \doteq 4\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+\cancel{\sqrt{n^2}}\left(\sqrt{1-4/n}\right)}\right)$

$4\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\cancel{n}}{2\cancel{n}\left(\sqrt{1-4/n}\right)}\right) \doteq 4\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2\left(\sqrt{1-4/n}\right)}\right)$

$4/2\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\left(\sqrt{1-\cancel{4/n}}\right)}\right) = 4/2\cdot 1 \doteq \boxed{2}$ Converge

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(20\cdot(-1)^{n+1}\right) \doteq \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}(20)}_{\text{Converge}}\cdot\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\left((-1)^{n+1}\right)}_{\text{Serie alternante (Diverge)}}$

$\doteq$ Diverge

(2) Determinar si cada una de las siguientes sucesiones es: (i) acotada superior y/o inferiormente; (ii) positiva o negativa (a partir de cierto n_0); (iii) creciente, decreciente o alternante; (iv) convergente, divergente, divergente a ∞ o $-\infty$.

(a) $a_n = \dfrac{2n}{n^2+1}$ (d) $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$ (g) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$

(b) $a_n = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ (e) $a_n = \ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)$ (h) $a_n = \dfrac{\ln(n+3)}{n+3}$

(c) $a_n = \dfrac{(-1)^n n}{e^n}$ (f) $a_n = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}$ (i) $\sqrt{3}, \sqrt{\sqrt{3}}, \sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}, \ldots$

c) $a_n = \dfrac{(-1)^n n}{e^n} \doteq a_n < 0$ (Acotada sup)

$\longrightarrow$ Es decreciente $a_n \geq a_{n+1}$

$* \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{(-1)^n \cdot n}{e^n}\right) \doteq \lim\limits_{n\to\infty}\left((-1)^n \cdot \dfrac{n}{e^n}\right) \doteq \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n}_{\text{Diverge}}$

$\boxed{a_n \text{ Diverge}}$ $\longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{e^n}$

a) $a_n = \dfrac{2n}{n^2+1} \doteq 1 \leq a_n$ (Acotada inf.)

$\longrightarrow$ Es decreciente

$* \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n}{n^2+1}\right) \doteq 2\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n/n^2}{n^2/n^2+1/n}\right) \doteq 2\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1/n}{1+1/n}\right)$

$* \ 2 \cdot \left(\dfrac{1/\infty}{1+1/\infty}\right) \doteq 2\left(0/1\right) \doteq \boxed{0}$ Converge

b) $a_n = \operatorname{sen}(1/n) \doteq \operatorname{sen}(1) \leq a_n \leq 1$ (Acotada inf y sup.)

$\longrightarrow$ Es oscilante

$* \lim\limits_{n\to\infty}\left(\operatorname{sen}(1/n)\right) \doteq \operatorname{sen}(1/\infty) \doteq \operatorname{sen}(0) = \boxed{0}$

Converge

(3) Dadas las siguientes series, calcular su suma o demostrar que divergen.

(a) $4+\frac{8}{5}+\frac{16}{25}+\frac{32}{125}+\dots$

(b) $\frac{2}{3}-\frac{2}{9}+\frac{2}{27}-\frac{2}{81}+\dots$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{10^{3n}}$

(e) $\sum_{j=1}^{\infty} \pi^{j/2}\cos(j\pi)$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

(g) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-5)^n}{8^{2n}}$

(h) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{k+3}}{e^{k-3}}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+7n+12}$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{4^n}$

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} (10^{-n}+9^{-n})$

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+3}+3^n}{6^n}$

Definición: dado $r \in \mathbb{R}$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1+r+r^2+\dots$ se llama serie geométrica

Teorema:
(i) Si $|r|<1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ es convergente y además $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$
(ii) Si $|r|\geq 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ es divergente.

a) $4+\frac{8}{5}+\frac{16}{25}+\frac{32}{125} \doteq 2^2+\frac{2^3}{5}+\frac{2^4}{25}+\frac{2^5}{125} = \frac{2^{1+n}}{5^{n-1}}+\frac{2^{n+1}}{5^{n-1}}+\frac{2^{n+1}}{5^{n-1}}+\frac{2^5}{5^{n-1}} \doteq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+2}}{5^n}$

$* \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\cdot 2^1}{5^n} \doteq 2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{5^n} \doteq 2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

$* r = 2/5 \longrightarrow |2/5|<1$

$\boxed{\text{Converge a } \frac{1}{1-2/5}}$

b) $\frac{2}{3}-\frac{2}{9}+\frac{2}{27}-\frac{2}{81} \doteq \frac{2}{3^{n+1}}-\frac{2}{9^{n+1}}+\frac{2}{3^{n+1}}-\frac{2}{3^{n+1}}$ (*)

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2}{3^{n+1}}$

Teorema (Criterio para series alternantes). Si $a_n \geq a_{n+1} > 0\ \forall n$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge (y por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ también converge)

$* 2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}} \doteq (-1)^n\cdot a_n \longrightarrow a_n = 1/3^{n+1}\ (a_n \geq a_{n+1})$

y $\lim_{n\to\infty} a_n \doteq \lim_{n\to\infty} 1/3^{n+1} \doteq 1/\infty \doteq 0$ (*) Por teorema, la serie converge.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \doteq 3\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{-1} \doteq \frac{1}{-1/4} \doteq -4 \doteq 3\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{4}\right)^{n}\cdot -4 \doteq -12\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n}$

* Por teorema de serie geometrica: $r=-1/4 \longrightarrow |-1/4|<1 \longrightarrow$ $\boxed{\text{Converge a } 1/1+1/4}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \doteq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2+\cancel{2n}-\cancel{2n}-1} \doteq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2-1} \doteq$

Teorema (Criterio de la divergencia). Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
Equivalentemente, si $\lim a_n \neq 0$ o $\lim a_n \nexists$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

$\lim_{n\to\infty} a_n \doteq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n^2-1}\right) \doteq \frac{\lim_{n\to\infty}(1)}{\lim_{n\to\infty}(2n^2-1)} \doteq \frac{1}{\infty} \doteq \boxed{0}$

* Como $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, mi serie converge

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)} \doteq \lim_{n\to\infty} a_n \doteq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n(n+2)}\right) \doteq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+2}\right) \doteq \frac{1}{\infty+2} \doteq$ converge a 0.

* Teorema (Criterio de la integral para series)
Sea f una función continua, positiva y decreciente en $[1,\infty)$. Si $a_n = f(n)$, entonces $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge}}_{C_1} \iff \underbrace{\int_1^{\infty} f(x)\,dx}_{C_2}$ converge.

* $a \doteq \frac{1}{n(n+2)} \overset{f(x)}{\doteq} f(x) = \frac{1}{x(x+2)}$ ⊛

$\longrightarrow \lim_{t\to\infty}\int_1^{t}\frac{1}{x(x+2)}\,dx \doteq \lim_{t\to\infty}\int_1^{t}\frac{1}{x^2+2x}$ ⊛

⊛ $\int\frac{1}{2x}dx - \int\frac{1}{2(x+2)}dx \doteq \frac{1}{2}\int\frac{1}{x}dx - \frac{1}{2}\int\frac{1}{x+2}dx$

$\left(\frac{1}{2}\cdot\ln(|x|) - \frac{1}{2}\ln(|x+2|)\right)\Big|_1^t \doteq \left(1/2\cdot\ln(t) - 1/2\ln(t+2) - \left(\frac{1}{2}\ln(1) - \frac{1}{2}\ln(3)\right.\right.$

* $\frac{1}{2}\cdot\ln(t) - \frac{1}{2}\cdot\ln(t+2) - \cancel{1/2\cdot\ln(1)} + 1/2\ln(3) \doteq 1/2\ln(t) - 1/2\ln(t+2) + \ln(3)$

$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\ln(\infty)}{2} - \frac{\ln(\infty+2)}{2} + 1/2\ln(3)\right) \doteq 1/2\ln(3)$

(5) Usar los tests de convergencia para determinar si las siguientes series convergen o divergen.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4-2}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n!}$ (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+n+1}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}$ (j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{2n+1}}{n^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=8}^{\infty} \frac{1}{\pi^n+5}$ (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2e^n}$ (k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+n\sqrt{n}}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3^n \ln n}$ (l) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4-2} \doteq$

Teorema (Criterio de comparación en el límite)

Sean $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ series de términos positivos. Entonces

(i) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \doteq c > 0$, ent. $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ converge

(ii) Si $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$, ent. $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ conv. $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ conv. (o equiv. $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ div $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ diverge)

(iii) Si $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$, ent. $\sum b_n$ div. $\Rightarrow \sum a_n$ div. (o equiv. $\sum a_n$ conv. $\Rightarrow \sum b_n$ conv.)

* Utilizo la serie $1/n^3$ (ya que se comportan similarmente)

$$\longrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n}{n^4-2}}{\frac{1}{n^3}}\right) \doteq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^4}{n^4-2}\right) \doteq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{n^4/n^4}\ 1}{\cancel{n^4/n^4}\ 1-2/n^4}\right)$$

* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-2/\infty}\right) \doteq \boxed{1} \longrightarrow c>0$, y $b_n \doteq 1/n^3$ converge, entonces, a_n converge.

Teorema (Criterio del cociente). Sean $a_n \neq 0$ $\forall n \geq n_0$ y $r \doteq \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. (46)

(i) Si $r < 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente (y por lo tanto es convergente)

(ii) Si $r > 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente (puede ser $r = \infty$).

(iii) Si $r = 1$, entonces no se puede asegurar nada.

b) $\displaystyle\sum_{n=8}^{\infty} \frac{1}{\pi^n+5} \doteq$

Teorema (Criterio de comparación para series) (49)

Si $0 \leq a_n \leq b_n$ $\forall n \geq n_0$, para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, entonces $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge.

Equivalentemente, $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ diverge.

* Planteo $B_n \doteq 1/\pi^n$, que cumple $0 \leq a_n \leq b_n$, ya que $0 \leq \frac{1}{\pi^n+5} \leq 1/\pi^n$. Ahora, veamos:

(*) $\displaystyle\sum_{n=8}^{\infty} \frac{1}{\pi^n} \doteq$ Utilizo el teorema del cociente

$$\longrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{\frac{1}{\pi^{n+1}}}{\frac{1}{\pi^n}}\right|\right) \doteq \lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{\pi^n}{\pi^{n+1}}\right|\right) \doteq \lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{\cancel{\pi^n}}{\cancel{\pi^n}\cdot\pi}\right|\right) \doteq \boxed{\frac{1}{\pi}}$$

* $r = 1/\pi < 1 \longrightarrow a_n$ converge absolutamente

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}$ $\doteq$ Utilizo teorema del cociente: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\left| \frac{\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^3+1}}{\frac{n^2+1}{n^3+1}} \right| \right) \doteq \left(\left| \frac{(n+1)^2+1\,(n^3+1)}{(n+1)^3+1\,(n^2+1)} \right| \right)$

$\displaystyle\doteq \lim_{n\to\infty} \left(\left| \frac{n^2+2n+n^3+2}{n^3+3n^2+3n+1} \right| \right) \doteq \left(\left| \frac{\cancel{n^3}\left(1/n+2/n^2+3\right)}{\cancel{n^3}\left(1+3/n+3/n^2+1/n^3\right)} \right| \right) \doteq \lim_{n\to\infty} \left(\left| \frac{1/n+2/n^2+3}{1+3/n+3/n^2+1/n^3} \right| \right) \doteq \left(\left| \frac{\cancel{1/\infty}+\cancel{2/\infty}+3}{1+\cancel{3/\infty}+\cancel{3/\infty}+\cancel{1/\infty}} \right| \right) \doteq \boxed{3}$ ⊛

⊛ $3 \doteq c \longrightarrow c > 0 \longrightarrow$ Converge

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n \doteq$

Teorema (Criterio de la raíz). Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, sea $r \doteq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. (48)

(i) Si $r < 1$, entonces la serie es absolutamente conv. (y por tanto es converg.)

(ii) Si $r > 1$, entonces la serie diverge.

(iii) Si $r = 1$, no se puede asegurar nada.

$\displaystyle\doteq r \doteq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \left(\frac{n}{2n} \right)^n \right|} \doteq \lim_{n\to\infty} \cancel{\sqrt[n]{\left| \frac{n}{2n} \right|^{n}}}$

$\displaystyle\doteq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2n} \right) \doteq \frac{n/n}{2n/n} \doteq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} \right) \doteq \boxed{r = 1/2}$

* Convergente

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{2n+1}}{n^n} \doteq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{2n}\cdot 5}{n^n} \doteq 5 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{2n}}{n^n} \doteq 5 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5^2}{n} \right)^n \doteq 5 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\cancel{\sqrt[n]{\left| \frac{25}{n} \right|^{n}}} \right) =$

$\displaystyle 5 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{25}{n} \right) \doteq 125 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1/n \right) \doteq 125\,(0) \doteq \boxed{r = 0}$

* $r < 1 \doteq 0 < 1 \longrightarrow$ La serie converge absolutamente

(7) Utilizar el criterio de la integral para series numéricas y determinar si las siguientes integrales convergen o no.

(a) $\int_1^\infty \frac{e^x}{x^x}\,dx$ (b) $\int_2^\infty \frac{dx}{x(\log x)^x}$

b) $\int_e^\infty \frac{dx}{x(\log x)^x}$

a) Por el criterio, sabemos que:

$\sum a_n$ converge $\longleftrightarrow$ $\int f(x)dx$ converge

$\longrightarrow$ A priori, bastaría ver si la integral converge.

$* \int_1^\infty \frac{e^x}{x^x}dx \doteq \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{e^x}{x^x}dx \doteq \int_1^t e^x \cdot \frac{1}{x^x}\,dx$ ⊛

⊛ $\int e^x \cdot \frac{1}{x}\,dx \doteq \begin{matrix} u = e^x & du = e^x dx \\ dv = 1/x & v = \ln(x) \end{matrix} \doteq u\cdot v - \int v\,du \doteq$

$\longrightarrow e^x \cdot \ln(x) - \int \ln(x)\cdot e^x\,dx$ ⊛

⊛ $\int \ln(x)\cdot e^x\,dx \doteq \begin{matrix} u = \ln(x), & du = 1/x\,dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{matrix} \doteq$

$\ln(x)\cdot e^x - \underbrace{\int \frac{e^x}{x}\,dx}_{E_i(x)} \doteq \cancel{e^x\cdot\ln(x) - \ln(x)\cdot e^x} - E_i(x)\Big|_1^t$

$* -E_i(x)\Big|_1^t \doteq -E_i(t) + E_i(1) \doteq \lim_{t\to\infty}(-E_i(t) + E_i(1))$

$\doteq \lim_{t\to\infty}(-E_i(t)) + E_i \doteq$ Analizando "E_i", concluyo que diverge.

(1) ¿Qué es una serie de potencias?

(2) (a) ¿Cuál es el radio de convergencia de una serie de potencias? ¿Cómo se determina?
(b) ¿Cuál es el intervalo de convergencia de una serie de potencias? ¿Cómo se calcula?

* Serie de potencias: series las cuales sus términos dependen de una variable osea, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$, con $a \in \mathbb{R}$ fijo y $x \in \mathbb{R}$

→ Son una generalización de los polinomios.

→ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1 (x-a)^1 + a_2 \ldots$ → centrado en "a"

A continuación veremos un criterio que nos permite calcular el radio de convergencia (55)

Teorema (Crit. del cociente para series de potencias): Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$, con $c_n \neq 0$ $\forall n \geq n_0$ y R su radio de convergencia. Escribimos

$$L \doteq \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}.$$

(i) Si $0 < L < \infty$, entonces $R = \frac{1}{L}$

(ii) Si $L = 0$, entonces $R = \infty$

(iii) Si $L = \infty$, entonces $R = 0$.

Definición: Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ una serie de potencias.

(A) Decimos que la serie tiene radio de convergencia $R = 0$ si sólo converge en $x = a$.

(B) Decimos que la serie tiene radio de convergencia $R = \infty$ si converge $\forall x \in \mathbb{R}$.

(C) Si ocurre (ii) en el teorema anterior decimos que R es su radio de convergencia

Definición: Llamamos intervalo de convergencia al conjunto

$$I = \{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \text{ converge}\}$$

(3) Determinar el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}x^n$ (g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 x^n}{2^n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{n^3}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n^3}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ (i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+5^n}{n!} x^n$

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \doteq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot (x-0)^n$ *

* $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\left|\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right|}{\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right|} \right) \doteq \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \right) \doteq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cancel{\sqrt{n}/n}^{\,1}}{\sqrt{\cancel{n/n}_{\,1} + 1/n}} \right)$

$\doteq \frac{1}{\sqrt{1 + 1/\infty}} \doteq \boxed{1} \to L$, por teo (i) $0 < 1 < \infty \to R = 1/L = \boxed{1}$

* $|x| < 1 \doteq -1 < x < 1$

$\longrightarrow I \doteq \{-1, 1\}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n \doteq \lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)+1}}{\frac{(-1)^n x^n}{n+1}}\right|\right) \doteq \lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{(-1)^{n+1}\cdot x^{n+1}\cdot(n+1)}{((n+1)+1)\cdot(-1)^n\cdot x^n}\right|\right) \doteq \left(\left|\frac{\cancel{(-1)^n}\cdot(-1)\cdot\cancel{x^n}\cdot x\cdot(n+1)}{(n+2)\cdot\cancel{(-1)^n}\cdot\cancel{x^n}}\right|\right)$

$\doteq \lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{-1\cdot x\cdot(n+1)}{(n+2)}\right|\right) \doteq \lim_{n\to\infty}\left(|-x|\cdot\left|\frac{n+1}{n+2}\right|\right) \doteq |-x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{n+1}{n+2}\right|\right) \doteq x\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{n+1}{n+2}\right|\right)$

$l = 1 \longrightarrow \boxed{R=1}$ $* I \doteq |x| < 1 \doteq -1 < x < 1 \doteq I = \{-1, 1\}$

---

(4) Suponga que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ es convergente cuando $x = -4$ y diverge cuando $x = 6$. ¿Qué puede decir con respecto a la convergencia o divergencia de las series siguientes?

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n 8^n$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-3)^n$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n 9^n$

(6) Usar la expansión $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$, válida en el rango $-1 < x < 1$, para representar las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \frac{1}{1+x}$, en potencias de x.

(b) $f(x) = \frac{3}{1-x^4}$, en potencias de x.

b) $f(x) = 3/1 - x^4 \doteq$ mismo razonamiento que en a).

$* \frac{3}{1-x^4} \doteq 3 \cdot \frac{1}{1-x^4} \doteq 3 \cdot \frac{1}{1-y}$ $\quad * y = x^4$ (*)

(*) $3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (y)^n \doteq 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (x^4)^n \longleftrightarrow |x^4| < 1$

(c) $f(x) = \frac{2}{3-x}$, en potencias de x.

(e) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, en potencias de $(x+2)$.

(d) $f(x) = \ln x$, en potencias de $(x-4)$.

(f) $f(x) = x\ln(1-x)$, en potencias de x.

c) $f(x) = 2/3 - x \doteq \frac{2}{3-x} \doteq \frac{2}{3(1 - x/3)} \doteq$

$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 - x/3} \doteq \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-y}$ $\quad * y = x/3$ (*)

(*) $2/3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (y)^n \doteq 2/3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (x/3)^n \longleftrightarrow x/3 < 1$

a) $* \frac{1}{1-f(x)} \doteq \sum_{n=0}^{\infty} f(x)^n$ si $|f(x)| < 1$

$\cdot\ 1/1+x \doteq 1/1-(-x) \doteq 1/1-y$ $\quad * y = -x$

$* \frac{1}{1-y} \doteq \sum_{n=0}^{\infty} (y)^n \doteq \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \longleftrightarrow |-x| < 1$

d) $f(x) = \ln(x)$ en potencias de $(x-4)$

* teniendo en cuenta, $\ln(x)' \doteq 1/x$ y usando el mismo razonamiento que antes, tengo que $f(x)' \doteq \frac{1}{x}$, tiene que ser en potencias de $(x-4)$ (*)

(*) $\frac{1}{x-4+4} \doteq \frac{1}{(x-4)+4} \doteq \frac{1}{4\left(\frac{x-4}{4}\right)+1} \doteq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x-4}{4}\right)+1}$

$\doteq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\left(\frac{x+4}{4}\right)\right)} \doteq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-y}$ $\quad * y = \frac{-x+4}{4}$ (*)

(*) $1/4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-x+4}{4}\right)^n \doteq 1/4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x+4)^n}{4^n} \doteq$

$1/4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \cdot (x-4)^n \longleftrightarrow \left|\frac{x-4}{4}\right| < 1$