(10) Encontrar la representación en serie de Taylor, centrada en $a = 0$, de las siguientes funciones. ¿Para qué valores de x vale la representación?

(a) $f(x) = (1-x)^2$
(b) $f(x) = \ln(1+x)$
(c) $f(x) = \cos(x)$
(d) $f(x) = \operatorname{sen}(5x^2)$
(e) $f(x) = e^{5x}$
(f) $f(x) = xe^{x}$

* (e) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, en potencias de $(x+2)$.

$$* F(x) = -1/x \longrightarrow -\frac{1}{x+2-2} \doteq \frac{1}{-((x+2)-2)} \doteq \frac{1}{-(x+2)+2} \doteq$$

$$\frac{1}{2\left(-\frac{(x+2)}{2}+1\right)} \doteq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{(x+2)}{2}} \doteq \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+2}{2}\right)^n \;*$$

Si $\frac{|x+2|}{2} < 1$

$$* \; 1/2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x+2}{2^n}^{n} + C = 1/2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}(x+2)^{n+1} + C$$

$\longrightarrow$ Ahora, la derivo: $1/2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{2^{n+1}}(x+2)^n$

a) $f(x) = (1-x)^2$, veamos sus derivadas:

- $f'(x) \doteq 2(1-x) \cdot -1 = -2(1-x) = -2+2x$, $f'(0) = -2$
- $f''(x) \doteq (-2)(-1)$, $f''(0) = 2$
- $f'''(x) \doteq 0$

$\longrightarrow f^n \doteq 0$

$*$ Polinomio de Taylor: $(1-0)^2 \cdot x^0 + -2 \cdot x^1 + \frac{2}{2!} \cdot x^2$

$*$ $1 - 2x + x^2 + 0 \ldots 0$ Válido en $\mathbb{R}$

b) $f(x) = \ln(1+x) \longrightarrow$

- $* f' = 1/1+x$, $f'(0) = 1$
- $* f'' = 1/(1+x)^2$, $f''(0) = 1$
- $* f''' = -2/(1+x)^3$, $f'''(0) = -2$
- $* f^{IV} = 6/(1+x)^4$, $f^{IV}(0) = 6$
- $* f^{V} = -24/(1+x)^5$, $f^{V}(0) = -24$

$$* \ln(1) + 1 \cdot x + \frac{x^2}{2!} - \frac{2}{3!}x^3 + \frac{6}{4!}x^4 - \frac{24}{5!}x^5 + \frac{120}{6!}x^6 \ldots$$

$$\longrightarrow f^n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)!}{(x+1)^n} \doteq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n \text{ en } a=0$$

c) $f(x) = \cos(x) \longrightarrow$

- $* f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$, $f'(0) = 0$
- $* f''(x) = -\cos(x)$, $f''(0) = -1$
- $* f'''(x) = \operatorname{sen}(x)$, $f'''(0) = 0$
- $* f^{IV}(x) = \cos(x)$, $f^{IV}(0) = 1$
- $* f^{V}(x) = \operatorname{sen}(x)$, $f^{V}(0) = 0$
- $* f^{VI}(x) = -\cos(x)$, $f^{VI}(0) = -1$

$* f^{2m}(0) = (-1)^m$

$* f^{2m+1}(0) = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} x^{2n}$$

(1) Calcular los vectores $A+B$, $A-B$, $3A$, $-2B$, y representarlos gráficamente.

(a) $A = (2,-1)$, $B = (-1,1)$ (b) $A = (0,3,-1)$, $B = (2,-3,7)$

a) $A - B \doteq (2-(-1), -1-1) \doteq (3,-2)$
$A + B \doteq (2+(-1), -1+1) \doteq (1,0)$
$3A - 2B \doteq 3(2,-1) - 2(-1,1) \doteq (6,-3)-(-2,2) \doteq (6-(-2), -3-2) \doteq (8,-5)$

b) $A - B \doteq (0-2, 3-(-3), -1-7) \doteq (-2,6,-8)$
$A + B \doteq (0+2, 3+(-3), -1+7) \doteq (2,0,6)$
$3A - 2B \doteq 3(0,3,-1) - 2(2,-3,7) \doteq (0,9,-3)-(4,-6,14) \doteq (-4,15,-11)$

(2) Calcular el producto escalar o interno $A.B$ en los siguientes casos.

(a) $A = (-1,3)$, $B = (0,4)$ (c) $A = (4,3,-1)$, $B = (2,-3,7)$
(b) $A = (-1,-1,3)$, $B = (-1,3,-4)$

a) $-1(0) + 3(4) = 12 = \langle A,B \rangle$
b) $-1(-1) + (-1)3 + 3(-4) = 1 + (-3) + (-12) = -14 = \langle A,B \rangle$
c) $4(2) + 3(-3) + (-1)7 = 8 - 9 - 7 = -8 = \langle A,B \rangle$

(3) ¿Cuáles de los siguientes pares de vectores son perpendiculares entre si?

(a) $A = (1,-1,1)$, $B = (2,3,1)$ (c) $A = (4,2,-1)$, $B = (2,-3,2)$
(b) $A = (-5,2,7)$, $B = (3,-1,2)$

a) Veamos si $\langle A,B \rangle$: $1(2) + (-1)3 + 1(1) = 2-3+1 = 0$ (son perpendiculares)
b) $\langle A,B \rangle = -5(3) + 2(-1) + 7(2) = -15 - 2 + 14 = -3$ (no son perpendiculares)
c) $\langle A,B \rangle = 4(2) + 2(-3) + (-1)2 = 8 + (-6) + (-2) = 0$ (son perpendiculares)

(5) Obtener la longitud o norma de cada uno de los siguientes vectores: $A = (2, -1)$, $B = (2, 3, 1)$ y $C = (\ t/2, 2, 7)$.

a) $\|A\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

b) $\|B\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$

c) $\|C\| = \sqrt{(-t/2)^2 + 2^2 + 7^2} = \sqrt{t^2/4 + 4 + 49} = \sqrt{t^2/4 + 53}$

(6) Calcular el coseno de los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son: $(3, 1, 1)$, $(-1, 2, 1)$ y $(2, -2, 5)$.

$B_1 \doteq (3,1,1), (-1,2,1)$
$B_2 \doteq (3,1,1), (2,-2,5)$
$B_3 \doteq (-1,2,1), (2,-2,5)$

* A tener en cuenta: $\dfrac{\langle A, B\rangle}{\|A\| \cdot \|B\|}$ (cálculo de ángulos)

$\cdot B_1 \doteq \dfrac{\langle (3,1,1), (-1,2,1)\rangle}{\|(3,1,1)\| \cdot \|(-1,2,1)\|} \doteq \dfrac{0}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{6}} \doteq 0$

$\cdot B_2 \doteq \dfrac{\langle (3,1,1), (2,-2,5)\rangle}{\|(3,1,1)\| \cdot \|(2,-2,5)\|} \doteq \dfrac{9}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{33}} \doteq \dfrac{9}{\sqrt{11 \cdot 33}}$

$\cdot B_3 \doteq \dfrac{\langle (-1,2,1), (2,-2,5)\rangle}{\|(-1,2,1)\| \cdot \|(2,-2,5)\|} \doteq \dfrac{-1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{33}} \doteq \dfrac{-1}{\sqrt{6 \cdot 33}}$

(7) Dar la ecuación vectorial de las siguientes rectas:

(a) L pasa por $(-3, 2)$ y es paralela a $(1, -2)$.
(b) L pasa por los puntos $(-3/2, 4)$ y $(1, -5)$.
(c) L está definida por $x = 3t + 1$; $y = 5t - 2$; $z = 2t + 1$.
(d) L pasa por $(2, 0)$ y es ortogonal a $(1, 3)$.
(e) L pasa por $(1, 3)$ y es paralela a la recta que pasa por $(-1, 4)$ y $(3, -2)$.

$X = P_0 + tV$, con $t \in \mathbb{R}$ → Ecuación vectorial de la recta

a) $P_0 \doteq (-3,2)$, $V \doteq (1,-2) \longrightarrow (-3,2) + t \cdot (1,-2)$

b) $P_0 \doteq (1,-5)$, $V \doteq (-3/2, 4) - (1,-5) \longrightarrow (1,-5) + t \cdot (-5/2, 9)$

c) $(3t+1, 5t-2, 2t+1) \doteq (1,-2,1)\ t\,(3,5,2)$

d) $P_0 \doteq (2,0)$, $V \doteq$ ortogonal a $(1,3) \doteq \langle B, (1,3)\rangle = 0 \doteq (-3,1)$
$\longrightarrow (2,0) + t\,(-3,1)$

e) $P_0 \doteq (1,3)$, $L_2 \doteq (3,-2) + t\,((-1,4) - (3,-2)) \doteq (3,-2) + t \cdot (-4,6)$
* L_1 tiene la misma dirección que L_2
$\longrightarrow (1,3) + t \cdot (-4,6)$

<u>Definición</u>: dados $A, B \in \mathbb{R}^n$ con $A \neq 0$ y $B \neq 0$ decimos que A y B
(i) son <u>ortogonales</u> (o perpendiculares) si $\langle A, B\rangle = 0$
(ii) son <u>paralelos</u> si $A = rB$ para algún $r \in \mathbb{R}$.

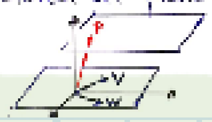
(8) Dar la ecuación vectorial de los siguientes planos:

(a) S está generado por $(-1,0,4)$ y $(2,3,-10)$, y contiene al punto $(2,3,-5)$.

(b) S está generado por $(-1,0,4)$ y $(2,3,-10)$, y contiene al punto $(3,-3,6)$.

(c) S está generado por $\left(-2,1,\frac{1}{2}\right)$ y $\left(4,-\frac{1}{5},-1\right)$ y contiene al punto $(0,-1,4)$ ¿Pasa este plano por el origen? ¿Contiene a los puntos $\left(1,-1,\frac{1}{2}\right)$, $\left(0,-\frac{1}{10},\frac{7}{2}\right)$ y $\left(0,\frac{3}{2},1\right)$?

a) Definición: Dados $V, W \in \mathbb{R}^3$ con $V \neq 0 \neq W$ y $V \neq sW$ $\forall s \in \mathbb{R}$ y dado $P \in \mathbb{R}^3$, decimos que $X = P + tV + rW$, con $t, r \in \mathbb{R}$ → ec. vectorial del plano es la ecuación vectorial del plano generado por V y W que pasa por el punto P.



(*) $X \doteq (2,3,-5) + t\cdot(-1,0,4) + r(2,3,-10)$

b) $X \doteq (3,-3,6) + t\cdot(-1,0,4) + r\cdot(2,3,-10)$

c) $X \doteq (0,-1,4) + t\cdot(-2,1,1/2) + r\cdot(4,-1/5,-1)$

(*) $\left.\begin{array}{l} x \doteq 0 + t\cdot -2 + r4 \doteq -2t + 4r \\ y \doteq -1 + t - r/5 \\ z \doteq 4 + t/2 - r \end{array}\right\}$ Para ver que pasa por el origen, las igualo a cero. $(0,0,0)$ (*)

(*) $-2t + 4r = 0 \longrightarrow t = 2\cdot r \rightarrow t \doteq 2\cdot(5/9) \doteq \boxed{10/9 = t}$

$-1 + t - r/5 = 0 \longrightarrow -1 + (2r) - r/5 \doteq \boxed{r = 5/9}$

$4 + t/2 - r = 0 \longrightarrow t/2 - r = -4$

→ Para que pase por el origen, $t/2 - r \doteq -4$

↳ $\frac{10/9}{2} \doteq \frac{10}{18}$, $10/18 - 5/9 \neq -4$

↳ Finalmente, "X" no pasa por el origen.

(i) $(1,-1,1/2)$?

(i) $\begin{cases} -2t + 4r = 1 & ① \\ -1 + t - r/5 = -1 & ② \\ 4 + t/2 - r = 1/2 & ③ \end{cases}$

① $t = \frac{1-4r}{-2}$, en ②: $-1 + \left(\frac{1-4r}{-2}\right) + r/5 = -1$

* $\frac{1-4r}{-2} + \frac{r}{5} \doteq -1 + 1$, $\frac{5(1-4r)}{-2} + \frac{2(r)}{5} \doteq 0$, $-\frac{5(1-4r)}{10} + \frac{2r}{10} \doteq 0$,

$-5(1-4r) + 2r \doteq 0$, $-5 + 20r + 2r = 0$, $r = 5/22$

① $t = \frac{1 - 5/22}{-2} \doteq -17/44$

③ $4 + \frac{-17/44}{2} - 5/22 = 1/2$ X , $(1,-1,1/2)$ No pertenece al plano

(ii) $(0,-1/10,7/2) \doteq \begin{cases} -2t + 4r = 0 & ① \\ -1 + t - r/5 = -1/10 & ② \\ 4 + t/2 - r = 7/2 & ③ \end{cases}$

① $t = 2r$, en ② $-1 + 2r - r/5 = 1/10$, $r = 11/18$, en ① $t = 22/18$

③ $4 + \frac{22/18}{2} - 11/18 = 7/2$ X , $(0,-1/10,7/2)$ No pertenece al plano.

(iii) $(0,3/2,1) \doteq \begin{cases} -2t + 4r = 0 & ① \\ -1 + t - r/5 = 3/2 & ② \\ 4 + t/2 - r = 1 & ③ \end{cases}$

① $t = 2r$, en ② $-1 + 2r - r/5 = 3/2 \doteq r = 25/18$, en ① $t = 50/18$

③ $4 + \frac{50/18}{2} - 25/18 = 1$ X , $(0,3/2,1)$ No pertenece al plano.

(9) Dar la ecuación normal de los siguientes planos:

(a) el plano que contiene a los puntos $(1, -1, 1)$, $(-2, 0, 1)$ y $(-1, 1, 1)$.

(b) $X = s(1, 2, 0) + t(2, 0, 1) + (1, 0, 0)$ para todo $s, t \in \mathbb{R}$.

Definición: el plano normal a N y que pasa por P_0 es el conjunto de puntos $X \in \mathbb{R}^3$ tq $X - P_0$ es perpendicular a N, es decir

$\langle X - P_0, N \rangle = 0$ → ecuación normal del plano.

(a) $\underbrace{(1,-1,1)}_{P}, \underbrace{(-2,0,1)}_{Q}, \underbrace{(-1,1,1)}_{R}$

$* \; P - Q \doteq (3,-1,0) \; V$

$* \; R - Q \doteq (1,1,0) \; W$

$$X \doteq (1,-1,1) + t\,\overbrace{(3,-1,0)}^{V} + r \cdot \overbrace{(1,1,0)}^{W}$$

→ Para N, debo calcular el producto vectorial entre W y V.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \doteq V \times W = (v_2w_3 - w_2v_3,\; w_1v_3 - v_1w_3,\; v_1w_2 - w_1v_2) \doteq -1(0) - 1(0),\; 1(0) - 3(0),\; 3(1) - (1)\cdot -1,\; (0,0,4) \doteq N$$

$*$ Ec. Normal, $\langle X - P_0, N \rangle \doteq \langle (x,y,z) - (1,-1,1), (0,0,4) \rangle$

b) $$V \times W \doteq \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \doteq 2(1) - 0(0),\; 2(0) - 1(1),\; 1(0) - 2(2),\; (2,-1,-4) \doteq N$$

$*$ Ec. Normal, $\langle (x,y,z) - (1,0,0), (2,-1,-4) \rangle$

(10) Dar una ecuación vectorial de los siguientes planos:

(a) $3x + 3y + z = 1$ (b) $x + y - z = 2$ (c) $x - 3y + z + 2 = 0$

a) $3x + 3y + z = 1$, z = Anulo x e y $\doteq 3(0) + 3(y) + z = 1$, $z = 1$

x = Anulo z e y $\doteq 3x + 3(0) + 0 = 1$, $x = 1/3$ ⊛

y = Anulo x y z $\doteq 3(0) + 3y + 0 \doteq 1$, $y = 1/3$

⊛ tengo, $(0,0,1)$ } P_0

$(1/3, 0, 0)$ } Q

$(0, 1/3, 0)$ } R

$* \; P - Q \doteq (-1/3, 0, 1)$

$* \; R - Q = (-1/3, 1/3, 0)$

$$X \doteq (0,0,1) + t \cdot (-1/3, 0, 1) + r(-1/3, 1/3, 0)$$

(b) $x = \overbrace{(2,0,0)}^{P}$, $y = \overbrace{(0,2,0)}^{Q}$, $z = \underbrace{(0,0,-2)}_{R}$

$* \; X = (2,0,0) + t((2,-2,0) + r(0,-2,-2)$

c) $x = (-2,0,0)$, $y = (0,2/3,0)$, $z = (0,0,-2)$

$* \; X = (-2,0,0) + t(-2,-2/3,0) + r(0,-2/3,-2)$

(11) Obtener el coseno del ángulo comprendido entre los planos S_1 y S_2, donde:

(a) $S_1: x+y+z=0,\ S_2: x+2y+3z=1.$ (c) $S_1: x+z=1,\ S_2: y+z=1.$
(b) $S_1: 3x+2y-z=0,\ S_2: 6x-3y+2z=5.$

a) $N_1=(1,1,1)$, $N_2=(1,2,3)$

Definición: decimos que α es el ángulo entre dos planos si α es el ángulo correspondiente a sus vectores normales (o perpendiculares).

$$\frac{\langle N_1, N_2\rangle}{\|N_1\|\cdot\|N_2\|} \doteq \frac{6}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{14}} \doteq \boxed{\cos(N_1,N_2)=\frac{6}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{14}}}$$

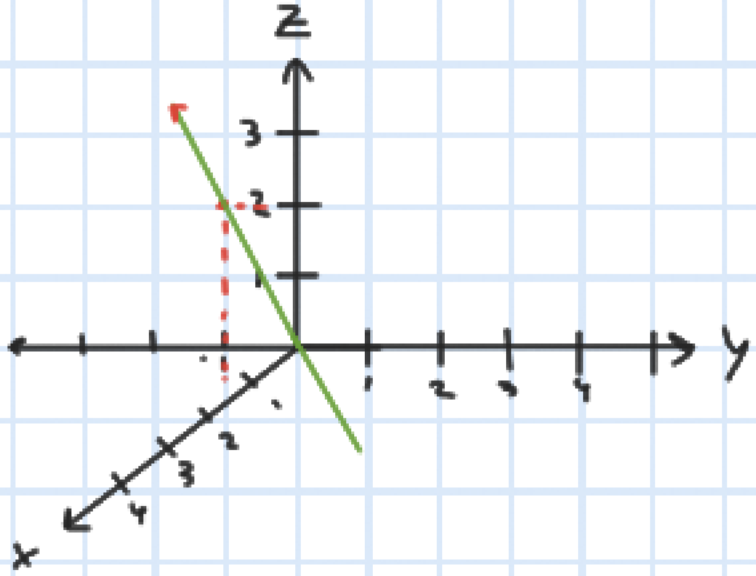
b) $N_1=(3,2,-1)$, $N_2=(6,-3,2) \doteq \dfrac{-11}{\sqrt{15}\cdot\sqrt{51}} \doteq \boxed{\cos(N_1,N_2)=\dfrac{-11}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{51}}}$

c) $N_1=(1,0,1)$, $N_2=(0,1,1) \doteq \dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2\cdot 2}} = \boxed{\cos(N_1N_2)=\dfrac{1}{4}}$

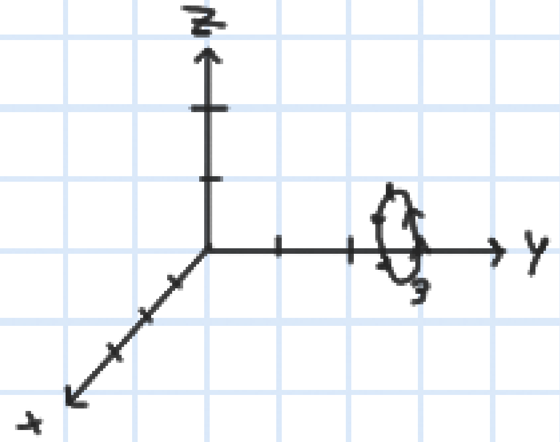
(12) Bosquejar la imagen de la curva descripta por las siguientes funciones vectoriales. Indicar con una flecha la dirección en la que t aumenta.

(a) $r(t)=(t,-t,2t)$ (c) $r(t)=(\operatorname{sen} t, t, \cos t)$
(b) $r(t)=(\operatorname{sen} t, 3, \cos t)$ (d) $r(t)=(t^2, t, 2)$

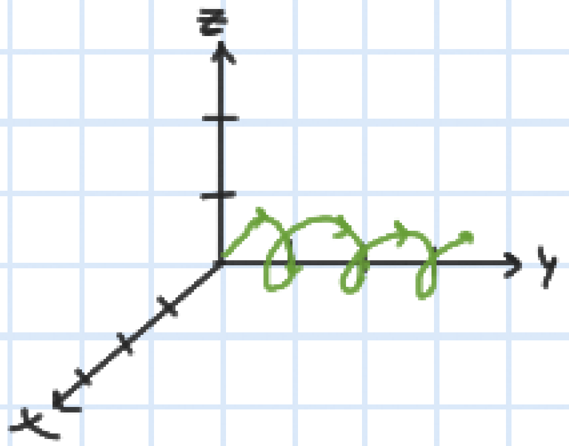
a) $V=(1,-1,2) \doteq t(1,-1,2)$



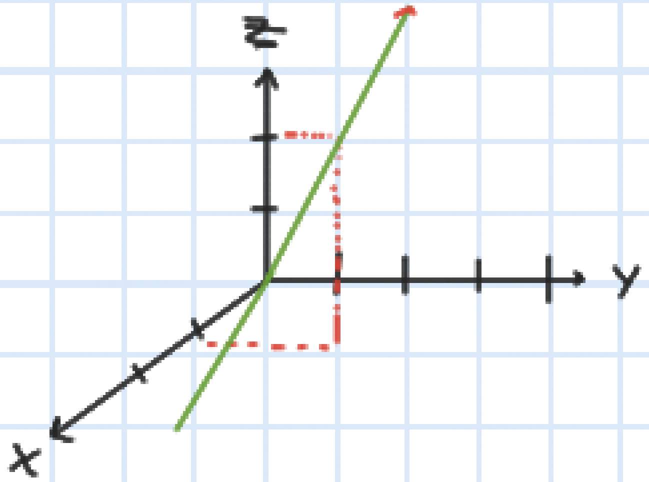
b) $V=(\operatorname{sen}(t), 3, \cos(t))$



c) $V=(\operatorname{sen}(t), t, \cos(t))$



d) $(1,1,2)$



(13) Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim_{t\to 0}\left(t, \cos^2 t, 5\right)$ (b) $\lim_{t\to 0}\left(t, \ln(t+1), e^{-1/t^2}\right)$

Definición: dados $a \in \mathbb{R}$ y $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una función vectorial, definimos el límite de f cuando $t \to a$ como

$\lim_{t\to a} f(t) \doteq \left(\lim_{t\to a} f_1(t), \dots, \lim_{t\to a} f_n(t)\right)$, siempre que los límites $\lim_{t\to a} f_i(t)$ exista $\underline{\forall\, i=1,\dots,n}$. (5.1)

a) $\lim_{t\to 0}\left(t, \cos^2(t), 5\right) \doteq \left(\lim_{t\to 0}(t), \lim_{t\to 0}\cos^2(t), \lim_{t\to 0} 5\right) \doteq (0, 1, 5)$ ✓

b) $\lim_{t\to 0}(t), \lim_{t\to 0}\ln(t+1), \lim_{t\to 0} e^{-1/t^2}) \doteq \left(0, 0, \underbrace{\lim_{t\to 0}\left(1/e^{1/t^2}\right)}_{\text{Límite laterales}}\right) \doteq (0,0,0)$ ✓

---

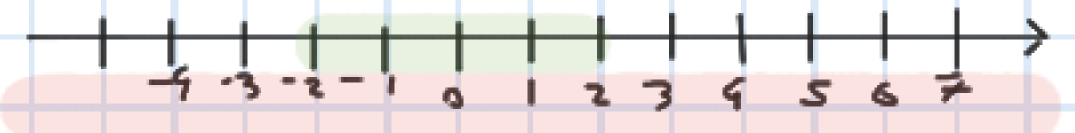
(14) Determinar el dominio y la derivada de las siguientes funciones vectoriales:

(a) $r(t) = \left(\ln(4-t^2), t^3, \arctan(t)\right)$ (b) $r(t) = t\mathbf{a} + \langle \mathbf{b}, t\mathbf{c}\rangle\, \mathbf{d}$,
donde $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$ son vectores.

Definición: dadas $f_i: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i=1,\dots,n$, llamamos función vectorial a la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dada por $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$. Las f_i se llaman funciones coordenadas de f.

El dominio de f es $\mathrm{Dom}(f) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Dom}(f_i)$

a) $\mathrm{Dom.}(\ln(4-t^2)) \cap \mathrm{Dom}(t^3) \cap \mathrm{Dom.}(\arctan(t)) \doteq 4-t^2 \geq 0$, $\mathbb{R}$, $(-\pi/2, \pi/2) \doteq 2 \geq t \doteq [-2,2] \cap \mathbb{R} \cap \mathbb{R}$



$d/dt\left(\ln(4-t^2), t^3, \arctan(t)\right) \doteq \left(\frac{1}{4-t^2}\cdot(-2), 3t, \frac{1}{1+t^2}\right)$

b) a, b, c, d son vectores; supongamos que de $\mathbb{R}^3$.

$\left.\begin{array}{l} * (a_1, a_2, a_3) \\ * (b_1, b_2, b_3) \\ * (c_1, c_2, c_3) \\ * (d_1, d_2, d_3) \end{array}\right\}$ $r(t) = t\cdot(a_1, a_2, a_3) + \underbrace{\langle (b_1, b_2, b_3), t\cdot(c_1, c_2, c_3)\rangle}_{t\cdot \sum_k^3 b_k\cdot c_k} (d_1, d_2, d_3) \doteq t(a_1, a_2, a_3) + \underbrace{d_1\left(t\sum_k^3 b_k\cdot c_k\right) + d_2\left(t\sum_k^3 b_k\cdot c_k\right) + d_3\left(t\sum_k^3 b_k c_k\right)}_{\text{Polinomio válido en } \mathbb{R}}$

$* \; d/dt\; r(t) \doteq t' = 1 \longrightarrow (a_1, a_2, a_3) + d_1\left(\sum b_k c_k\right) + d_2\left(\sum b_k c_k\right) + d_3\left(\sum b_k c_k\right)$

(15) Para cada una de las siguientes funciones vectoriales bosquejar su imagen y obtener $r'(t)$. Además, dar el vector posición y el vector tangente para el valor de t indicado.

(a) $r(t) = (\cos(t), \text{sen}(t))$, $t = \pi/4$.

(b) $r(t) = (1 + t, t^2)$, $t = 1$.

(c) $r(t) = (t^3, t^2)$, $t = 1$.

x y

a) $r'(t) \doteq (-\text{sen}(t), \cos(t))$, $t = \pi/4 \doteq (-\text{sen}(\pi/4), \cos(\pi/4)) \doteq \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

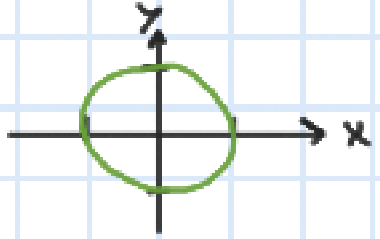
b) $r'(t) \doteq (1, 2t)$, $t = 1 \doteq (1, 2) \longrightarrow x = 1 + t$, $y = t^2$, $y \doteq (x-1)^2$

c) $r'(t) \doteq (3t^2, 2t)$, $t = 1 \doteq (3, 2)$

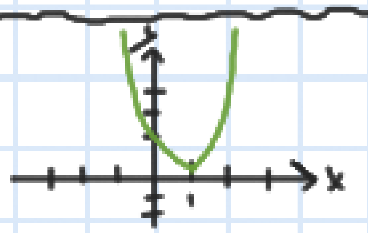
↳ $x = t^3$; $t = \sqrt[3]{x}$

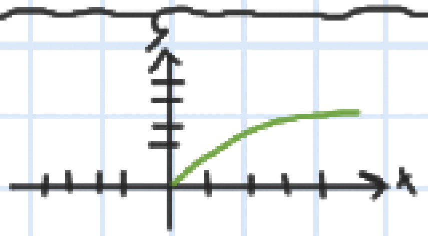
↳ $y = t^2$; $(\sqrt[3]{x})^2 = x^{2/3}$

a)



b)





(16) Determinar en qué punto se intersecan las siguientes curvas, $r_1(t) = (t, 1 - t, 3 + t^2)$ y $r_2(s) = (3 - s, s - 2, s^2)$, y calcular el ángulo de la intersección.

* $r_1 \doteq r_2 \to r_{1_j} \doteq r_{1_k} \to t = 3 - s$, $1 - t = s - 2$, $3 + t^2 = s^2$): Despejo "t" y "s".

* $s = 2$, $r_2(s) = (1, 0, 4)$
* $t = 1$, $r_1(1) = (1, 1 - 1, 3 + (1)^2) = = (1, 0, 4)$

* Se intersectan en $(1,0,4)$

* Obtengo los vectores tangentes para obtener el ángulo:

$r_1'(t) = (1, -1, 2t)$, $(1, -1, 2)$ u

$r_2'(t) = (-1, 1, 2s)$, $(-1, 1, 4)$ v

* $\frac{\langle (1,-1,2), (-1,1,4) \rangle}{\|(1,-1,2)\| \cdot \|(-1,1,4)\|} \doteq \frac{8}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}}$, $\cos(u, v) = \frac{8}{\sqrt{30}}$

.Practico 5:

(1) Determinar el dominio de las siguientes funciones y graficarlo.

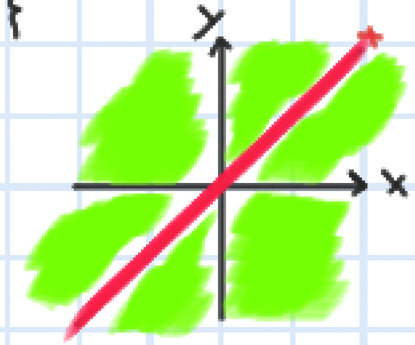
(a) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$

(b) $f(x,y) = \sqrt{x\,y}$

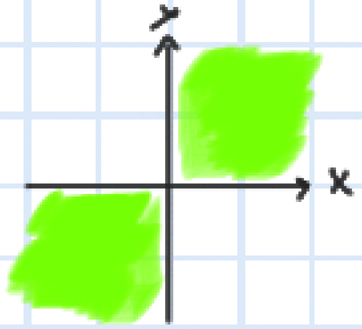
(c) $f(x,y) = \dfrac{x\,y}{x^2-y^2}$

(d) $f(x,y) = \sqrt{4\,x^2+9\,y^2-36}$

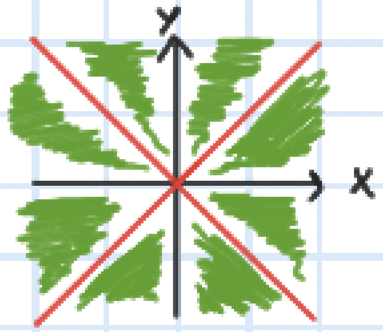
a) en $f(x,y) = {}^{x+y}/_{x-y}$ la división por cero no es posible. Por lo que $x-y \neq 0$.
$\rightarrow x \neq y$. $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq. } x \neq y\}$

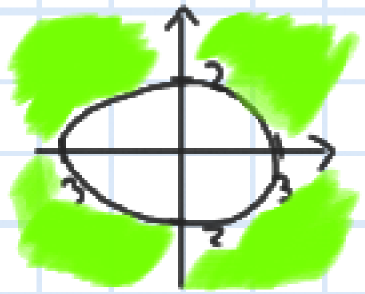


b) en $f(x,y) = \sqrt{xy}$, $xy \geq 0 \longrightarrow (x \geq 0 \wedge y \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge y \leq 0)$, $Dom_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq. } (x,y \geq 0) \vee (x,y \leq 0)\}$



c) $f(x,y) = {}^{xy}/_{x^2-y^2}$ en donde $x^2-y^2 \neq 0$, $x^2 \neq y^2$ $\therefore$ $\sqrt{x^2} \neq \sqrt{y^2} = |x| \neq |y|$, $Dom_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq. } |x| \neq |y|\}$





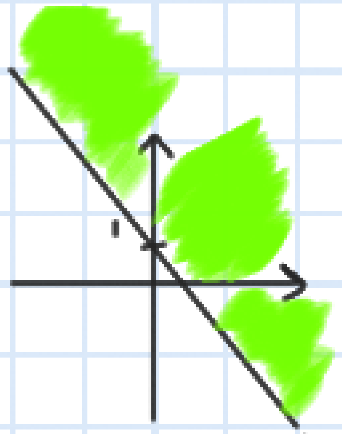
d) en $f(x)$, $4x^2+9y^2-36 \geq 0$, $4x^2-9y^2 \geq 36$ } elipse con $a=3$ y $b=2$.
$x^2/9 + y^2/4 \geq 1$

(2) Sea $f(x,y) = \ln(x+y-1)$.

(a) Evalúe $f(1,1)$ y $f(e,1)$.
(b) Determine y grafique el dominio de f.
(c) Determine el rango de f.

a) $f(1,1) = \ln(1+1-1) = \ln(1) = 0$
$f(e,1) = \ln(e+1-1) = \ln(e) = 1$

b) $D_{omf} = x+y-1>0,\ x+y>1,\ y>1-x$



c) $\mathrm{Img} f$ = veamos que $z = \ln(x+y-1)$ y $\mathrm{Img}\, z \subseteq (-\infty,\infty)$.
Si ocurre $\mathrm{Img}\, z \subseteq (-\infty,\infty)$, $\mathrm{Img}\, z = (-\infty,\infty)$
$*$ $f(1,y) = \ln(y)$, $\ln(y) \subseteq \mathrm{Img}\, z \rightarrow \mathrm{Img}\, z = (-\infty,\infty)$

(3) Sea $f(x,y) = x^2 e^{3xy}$.

(a) Evalúe $f(2,0)$.
(b) Determine y grafique el dominio de f.
(c) Determine el rango de f.

a) $f(2,0) = 2^2 \cdot e^{3\cdot 2\cdot 0} = 4 \cdot e^0 = 4$

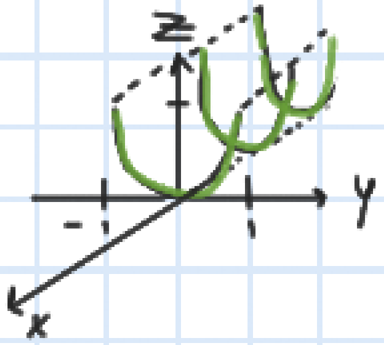
b) Analizemos $f(x)$, x^2 es válido en todo $\mathbb{R}$ y lo mismo ocurre con e^{3xy}. Por ende, $D_{omf} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$

c) $f(x)$ solo devuelve valores positivos, teniendo en cuenta $z = x^2 \cdot e^{3x2}$, $\mathrm{Img}\, z = [0,\infty)$

(4) Bosquejar la gráfica de las siguientes funciones.

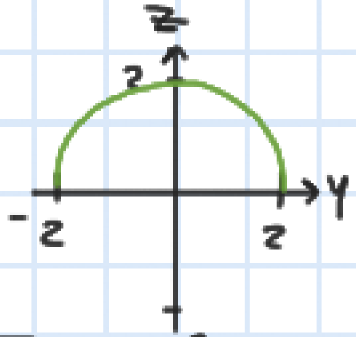
(a) $f(x,y) = y^2$, donde $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$
(b) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ (semiesfera)
(c) $f(x,y) = x^2 + y^2$ (paraboloide)
(d) $f(x,y) = x^2 - y^2$ (silla de montar)
(e) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ (cono)
(f) $f(x,y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ (hiperboloide de dos hojas)

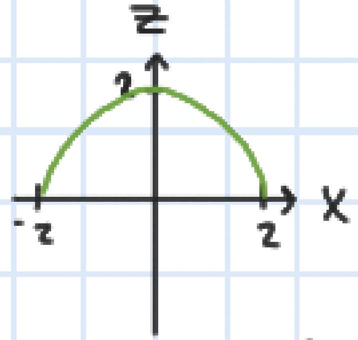
a) $f(x,y) = y^2 \doteq z = y^2$



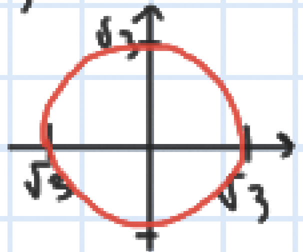
b) $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$, $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$

• Gráfico por partes: $*$ $x=0$, $\sqrt{4-y^2}$; $*$ $y=0$, $\sqrt{4-x^2}$

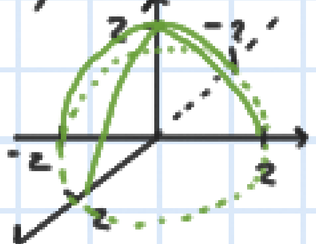




• Si z no es nulo, $1 = \sqrt{4-x^2-y^2}$, $1^2 = (\sqrt{4-x^2-y^2})^2$, $1 = 4-x^2-y^2$, $3 = -x^2-y^2$
$x+y = \sqrt{3}$

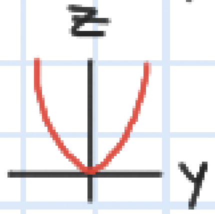


, Finalmente :

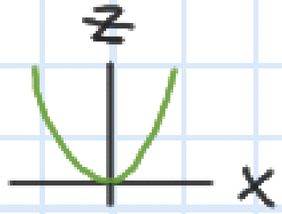


c) $z = x^2 + y^2$, grafico por partes:

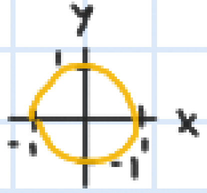
. si $x=0$, $z = y^2$



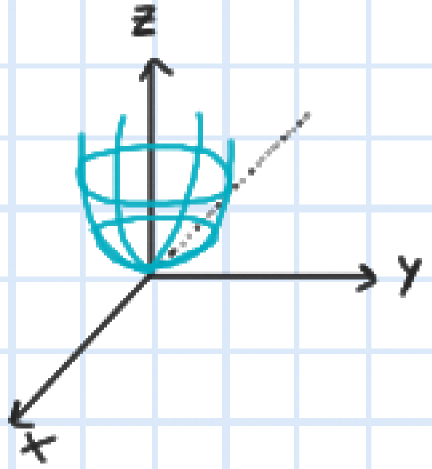
si $y=0$, $z = x^2$



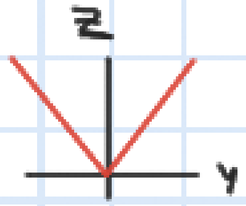
$1 = x^2 + y^2$



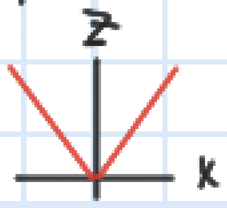
* Finalmente:



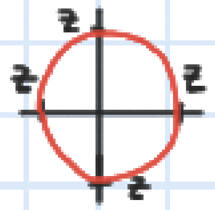
e) $z = \sqrt{x^2+y^2}$, analogo. $x=0$, $z = \sqrt{y^2} = |y|$



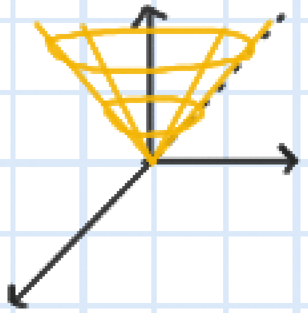
$y=0$, $z = \sqrt{x^2} = |x|$



$z>0$, $z = \sqrt{x^2+y^2}$



* Finalmente:



Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones y evaluarlas en el punto dado.

(a) $f(x,y) = x - y$, $(3,2)$

(b) $f(x,y,z) = \dfrac{xz}{y+z}$, $(1,1,1)$

(c) $f(x,y) = xy + x^2$, $(2,0)$

(d) $w = e^{y \ln z}$, $(e,2,e)$

(e) $f(x,y,z) = x^3y^4z^5$, $(0,-1,-1)$

(f) $w = \ln(1+e^{xyz})$, $(2,0,-1)$

a) $f(x,y) = x - y$, $f_x(x,y) = 1 - 0$, $f_y(x,y) = 0 - 1$

. $f_x(3,2) = 1$, $f_y(3,2) = -1$

b) $f(x,y,z)$ $xz/y+z$, $f_x(x,y,z) \; z(y+z) - xz(0) / (y+z)^2 = z/(y+z)$, $1/2$

. $f_y(x,y,z) = 0 - xz\cdot(1)/(x+y)^2 = -xz/(x+z)^2$, $-1/4$

. $f_z(x,y,z) = x(y+z) - xz/(y+z)^2 = xy + xz - xz/(y+z)^2 = xy/(y+z)^2$, $1/4$

c) $f_x(x,y) = y + 2x$, $f_x(2,0) = 4$

$f_y(x,y) = x$, $f_y(2,0) = 2$

d) $W = e^{y\cdot \ln(z)}$, simplifico $w = z^y$, prop $a^{x'} = \ln(a)\cdot a^x$, $z^y \cdot \ln(z)$, $f_y(e,2,e) = e^2 \cdot \ln(e) = e^2$

$\cdot f_z(y,z) =$, simplifico $w = z^y$, $f_z(y,z) = y \cdot z^{y-1}$, $f_z(2,e,2) = e \cdot 2^{e-1}$

e) $f_x(x,y,z) = 3x^2 \cdot y^4 \cdot z^5$, $f_x(0,-1,-1) = 0$

$f_y(x,y,z) = 4x^3 \cdot y^3 \cdot z^5$, $f_y(0,-1,-1) = 0$

$f_z(x,y,z) = 5 \cdot x^3 \cdot y^4 \cdot z^4$, $f_z(0,-1,-1) = 0$

(6) Obtener las ecuaciones de la recta normal al plano tangente y del plano tangente al gráfico de las siguientes funciones en los puntos dados.

(a) $f(x,y) = \cos\left(\frac{x}{y}\right)$, en $(\pi, 4)$.

(b) $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, en $(1,2)$.

a) $\cdot f_x(x,y) = -\operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{1}{y}$, en $(\pi,4) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{8}$

$\cdot f_y(x,y)\ x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right) / y^2$, en $(\pi,4) = \pi \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) / 8 = \frac{\sqrt{2}\cdot\pi}{32}$

por def. ec plano tangente: $f_x(x-x_0) + f_y(y-y_0) + f(x_0,y_0)$

$\rightarrow \frac{-\sqrt{2}}{8}(x-\pi) + \frac{\sqrt{2}\cdot\pi}{32}(y-4) + \frac{\sqrt{2}}{2} = z$

* Por otro lado, la recta que pasa por $(\pi, 4, \sqrt{2}/2)$ con dirección $(-\sqrt{2}/8, \sqrt{2}\pi/32, 1)$, es:

$(\pi, 4, \sqrt{2}/2) + t\,(-\sqrt{2}/8, \sqrt{2}\pi/32, 1)$

b) $f(x,y) = x/x^2+y^2$

$\cdot f_x(x,y) = \frac{x'(x^2+y^2) - x(x^2+y^2)'}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$, en $(1,2) = 3/25$

$\cdot f_y(x,y) = x \cdot \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{1'(x^2+y^2) - 1(x^2+y^2)'}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2y}{x^2+y^2} \cdot x$, en $(1,2) = -4/25$

$\cdot f(1,2) = 1/5$

Recta tangente: $1/5 + 3/5\,(x-1) - 4/25\,(y-2)$

$\rightarrow W = (3/25, -4/25, 1)$, $P_0 = (1, 2, 1/5)$

$\rightarrow$ Recta Normal $= (1, 2, 1/5) + t\,(3/5, -4/25, 1)$

(7) Para las siguientes funciones encontrar: *(i)* el gradiente en el punto indicado, *(ii)* una ecuación del plano tangente al gráfico de f en el punto dado, *(iii)* una ecuación de la recta tangente a la curva de nivel que pasa por el punto dado.

(a) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$, en (1,1). (b) $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$, en $(0,2)$.

a) i_ Gradiente: $f_x(x,y) = \dfrac{(x-y)'(x+y)-(x-y)(x+y)'}{(x+y)^2} = \dfrac{2y}{(x+y)^2}$ en $(1,1) = \dfrac{2}{4} \doteq 1/2$

$.f_y(x,y) = \dfrac{-(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} = \dfrac{-2x}{(x+y)^2}$ en $(1,1) = \dfrac{-2}{4}$, $-1/2$

$\rightarrow \nabla f(x,y) = (1/2, -1/2)$

ii_ Ec. del plano tangente: $z = 1/2\,(x-1) - 1/2\,(y-1)$

iii_ Definición: la recta tangente a la curva de nivel de f que pasa por (x_0,y_0) está definido como $(x,y) = (x_0,y_0) + t\left(-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)$, con $t \in \mathbb{R}$.

$\rightarrow P_0 = (1,1)$, $W = (-f_y(1,1), f_x(1,1)) = (1/2, 1/2) \doteq (1,1) + t\,(1/2, 1/2)$

b) i_ Gradiente: $.f_x(2x/x^2+y^2) \doteq 2y^3 - 2x^2y/(x^2+y^2)^2$ en $(0,2) = 16/16 = 1$

$.f_y(2x/x^2+y^2) \doteq 2x^3 - 2xy^2/(x^2+y^2)^2$ en $(0,2) = 0$

$\rightarrow \nabla f(x,y) = (1,0)$

ii_ Ec. del plano tangente: $z = 1(x-0) + 0(y-2) + 0$

$.f(0,2) = 0$

iii_ Recta tangente a la curva de nivel: $(0,2) + t\,(0,1)$

(8) Obtener la ecuación del plano tangente a la superficie de nivel de la función f que pasa por el punto dado.

(a) $f(x,y,z) = x^2y + y^2z + z^2x$, en $(1,-1,1)$.

(b) $f(x,y,z) = \cos(x+2y+3z)$, en $(\pi/2, \pi, \pi)$.

(9) Calcular la derivada direccional de f en el punto P_o y en la dirección del vector $\vec{u}$ dado.

(a) $f(x,y) = xe^{2y}$, $P_o = (2,0)$, $\vec{u} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

(b) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2+z^2)$, $P_o = (1,3,2)$, $\vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$.

a) Me fijo si $\vec{u}$ es unitario: $\|\vec{u}\| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1$ ✓

. $D_{\vec{u}}(x,y) = \langle \nabla f(x,y), \vec{u} \rangle$, $D_{\vec{u}}(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) =$ ✻

✻ $f_x(x,y) = e^{2y}$, $(2,0) = e^0 = 1$
$f_y(x,y) = 2xe^{2y}$, $(2,0) = 2\cdot(2)\cdot e^0 = 4$
$\Big\}\ \nabla f(x,y) = (1,4)$

. $D_{\vec{u}}(2,0) = \langle (1,4), (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \rangle \doteq \frac{1}{2} + \frac{4\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + 2\sqrt{3}$

b) $\vec{u} = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}^2} \doteq \sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} \doteq \sqrt{\frac{3}{3}} \doteq \sqrt{1} = 1$ ✓

* $\nabla f(x,y,z) =$
. $f_x(x,y,z) = 2x/x^2+y^2+z^2$, $1/14$
. $f_y(x,y,z) = 2y/x^2+y^2+z^2$, $6/14$
. $f_z(x,y,z) = 2z/x^2+y^2+z^2$, $4/14$
$\Big\}\ \nabla f(x,y,z) = (1/14, 6/14, 4/14)$

. $D_{\vec{u}}(1,3,2) = \langle (1/14, 6/14, 4/14), (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}) \rangle \doteq \frac{11}{14\sqrt{3}}$

a) Calculo gradiente: $\nabla f(x,y,z) = (f_x(1,-1,1), f_y(1,-1,1), f_z(1,-1,1))$

. $f_x(x,y,z) = 2xy$, $2(1)(-1) = -1$
. $f_y(x,y,z) = 2yz + x^2$, $1-2 = -1$
. $f_z(x,y,z) = y^2 + 2zx$, $1+2 = 3$
$\Big\}\ \nabla f(x,y,z) = (-1,-1,3)$

. Ec. del plano tangente a la sup. de nivel:

$\rightarrow \langle (x,y,z) - (x_0,y_0,z_0), \nabla f(x,y,z) \rangle$

$\rightarrow \langle (x,y,z) - (1,-1,1), (-1,-1,3) \rangle$

$\rightarrow \langle (x-1), (y+1), (z-1), (-1,-1,3) \rangle$

$\rightarrow -(x-1) - (y+1) + 3(z-1)$

b) Calculo $\nabla f(x,y,z)$

. $f_x(x,y,z) = -\text{sen}(x+2y+3z)\cdot 1$, $(\pi/2, \pi, \pi) = 1$
. $f_y(x,y,z) = -\text{sen}(x+2y+3z)\cdot 2$, $(\pi/2, \pi, \pi) = 2$
. $f_z(x,y,z) = -\text{sen}(x+2y+3z)\cdot 3$, $(\pi/2, \pi, \pi) = 3$

$\rightarrow \nabla f(x,y,z) = (1,2,3)$

* $\langle (x,y,z) - (\pi/2, \pi, \pi), (1,2,3) \rangle$

$\rightarrow \langle (x-\pi/2), (y-\pi), (z-\pi), (1,2,3) \rangle$

$\rightarrow (x-\pi/2) + 2(y-\pi) + 3(z-\pi)$

(10) ¿En qué dirección debemos movernos, partiendo de $(1,1)$, para obtener la más alta y la más baja tasa de crecimiento de la función $f(x,y) = (x+y-2)^2 + (3x-y-6)^2$?

* Mayor Tasa: $\nabla f(x,y)$, Menor Tasa: $-\nabla f(x,y)$

- $f_x(x,y) = 2(x+y-2)\cdot(1) + 2(3x-y-6)\cdot(3-0) = 2(x+y-2) + 6(3x-y-6) = 2(0) + 6(-4) = -24$

- $f_y(x,y) = 2(x+y-2) - 2(3x-y-6) = 8$

$\nabla f(x,y) = (-24, 8)$, no es unitario, por tanto: $\|\nabla f(1,1)\| \doteq 16 \cdot \sqrt{\frac{5}{2}}$

* Maximo crecimiento: $\left(\frac{-24}{16\cdot\sqrt{\frac{5}{2}}}, \frac{8}{16\cdot\sqrt{\frac{5}{2}}}\right)$

* Minimo crecimiento: $\left(\frac{24}{16\cdot\sqrt{\frac{5}{2}}}, -\frac{8}{16\cdot\sqrt{\frac{5}{2}}}\right)$

(11) Calcular las derivadas parciales segundas de las siguientes funciones.

(a) $z = x^2(1+y^2)$ (b) $w = x^3y^3z^3$

a) $z_x(x,y) = 2x(1+y^2)$, $z_{xx}(x,y) = 2(1+y^2)$

$z_y(x,y) = x^2 + x^2y^2 = 0 + 2x^2y$, $z_{yy}(x,y) = 2x^2$

b) $w_x(x,y,z) = 3x^2y^3z^3$, $w_{xx}(x,y) = 6xy^3z^3$

$w_y(x,y,z) = x^3 3y^2z^3$, $w_{yy}(x,y) = x^3 6y z^3$

$w_z(x,y,z) = x^3y^3 3z^2$, $w_{zz}(x,y) = x^3 y^3 6z$

(12) Aplique la regla de la cadena para hallar dz/dt

(a) $z = x^2 + y^2 + xy$, $x = \sin t$, $y = e^t$

(b) $z = \cos(x+4y)$, $x = 5t^4$, $y = 1/t$

(c) $z = \sqrt{1+x^2+y^2}$, $x = \ln t$, $y = \cos t$

(d) $\arctan(y/x)$, $x = e^t$, $y = 1 - e^{-t}$

$* \ \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$

a) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y + x$, $\frac{dx}{dt} = \cos(t)$, $\frac{dy}{dt} = e^t$

$\longrightarrow 2(\mathrm{sen}(t) + e^t) \cdot \cos(t) + 2(e^t + \mathrm{sen}(t)) \cdot e^t$

b) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\mathrm{sen}(x+4y) \cdot 1$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\mathrm{sen}(x+4y) \cdot 4$, $\frac{dx}{dt} = 20t^3$, $\frac{dy}{dt} = \frac{-1}{t^2}$

$\cdot \ -\mathrm{sen}(5t^4 + 4/t) \cdot 20t^3 + \frac{4\,\mathrm{sen}(5t^4 + 4/t)}{t^2} \cdot \ \forall t \neq 0$

(13) Sea $u = \sqrt{x^2+y^2}$ donde $x = e^{st}$, $y = 1 + s^2\cos t$. Calcular $\frac{\partial u}{\partial t}$ usando la regla de la cadena y comparar con el resultado que se obtiene al reemplazar x e y en u y luego derivar.

- $f_x(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2} \cdot (2x) = \frac{2x}{2(x^2+y^2)^2}$
- $f_y(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2} \cdot 2y = \frac{2y}{2(x^2+y^2)^2}$
- $x_t(s,t) = e^{st} \cdot s$
- $y_t(s,t) = 2s\cos(t)$

$\longrightarrow f_x(x(s,t), y(s,t)) \cdot x_s(s,t) + f_y(x(s,t), y(s,t))\, y_s(s,t)$

$\longrightarrow \frac{2(e^{st}) \cdot e^{st} \cdot s}{2(e^{st} + 1 + s^2\cos(t))^2} + \frac{2(1+s^2\cos t) \cdot 2s\cos(t)}{2(e^{st} + 1 + s^2\cos(t))^2}$

(14) Sea $f(x,y,z) = xyz^3$.

(a) Calcular $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$.

(b) Sabiendo que $x = x(z) = \sin z$ e $y = y(z) = e^{4z}$, calcular $\frac{d}{dz}[f(x(z), y(z), z)]$ reemplazando $x(z)$ e $y(z)$ en la fórmula de f.

(c) Comprobar que $\frac{d}{dz}[f(x(z), y(z), z)] = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dz} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dz} + \frac{\partial f}{\partial z}$

a) $\partial f / \partial z = 3xyz^2$

b) $f(x(z), y(z), z) = \mathrm{sen}(z) \cdot (e^{4z}) \cdot z^3$

$\cdot \ \partial f / \partial z = \cos(z) \cdot e^{4z} \cdot z^3 + \mathrm{sen}(4e^{4z} \cdot z^3 + 3e^{4z} \cdot z^2)$

c) $\frac{\partial f}{\partial x} = yz^3$, $\frac{\partial f}{\partial y} = xz^3$, $\frac{dx}{dz} = \cos(z)$, $\frac{dy}{dz} = 4e^{4z}$

$\rightarrow (e^{4z} \cdot z^3) \cdot \cos(z) + \mathrm{sen}(z) \cdot z^3 \cdot 4e^{4z} + 3\,\mathrm{sen}(z)\, e^{4z} \cdot z^2$

(15) Sea $z = f(x, y)$, $x = 2s + 3t$, $y = 3s - 2t$. Calcular,

(a) $\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}$ (b) $\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}$ (c) $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$

(16) Encontrar y clasificar los puntos críticos de las siguientes funciones:

(a) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4x + 4y$ (b) $f(x, y) = \frac{xy}{2 + x^2 + y^2}$

\# $D = f_{xx}(x_0, y_0)\, f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2$

→ Calculo "D":

* $f_x(x,y) = 2x + 0 - 4 + 0 = 2x - 4$ // $f_{xx}(x,y) = 2$

* $f_y(x,y) = 0 + 4y - 0 + 4$ // $f_{yy}(x,y) = 4$

* $f_{xy}(x,y) = 0$

→ $D = 2 \cdot 4 - 0^2 = 8$ → f tiene un maximo local.

→ $2x - 4 \doteq x = 2$, $4y + 4 \doteq y = 1$, $(2,1)$ pto. crítico

b) $f_x(x,y) = \frac{y(2 + x^2 + y^2) - xy \cdot 2x}{(2 + x^2 + y^2)^2} = \frac{2y + yx^2 + y^3 - 2x^2y}{(2 + x^2 + y^2)^2}$

$= \frac{y(2 + x^2 + y^2 - 2x^2)}{(2 + x^2 + y^2)^2} = \frac{y(2 - x^2 + y^2)}{(2 + x^2 + y^2)^2}$ ■

$f_y(x,y) = \frac{x(2 + x^2 + y^2) - xy(2y)}{(2 + x^2 + y^2)^2} = \frac{2x + x^3 + xy^2 - 2xy^2}{(2 + x^2 + y^2)^2} = \frac{x(2 + x^2 + y^2 - 2y^2)}{(2 + x^2 + y^2)^2}$

$= \frac{x(2 + x^2 - y^2)}{(2 + x^2 + y^2)^2}$ ■

∴ "Despejo, los polinomios se hacen cero cuando x, y son iguales a cero. Pto. crítico: $(0,0)$

(17) Encontrar los valores máximos y mínimos locales de $f(x, y) = \dfrac{x}{1 + x^2 + y^2}$

$\cdot f_x(x,y) = \dfrac{1(1+x^2+y^2) - x(2x)}{(1+x^2+y^2)^2} = \dfrac{1+x^2+y^2-2x^2}{(1+x^2+y^2)^2} = \dfrac{1+y^2-x^2}{(1+x^2+y^2)^2}$, $f_{xx}(x,y) = \dfrac{-2x(1+x^2+y^2)^2 - 1+y^2-x^2\, 2(1+x^2+y^2)\cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^4}$

$\cdot f_y(x,y) = \dfrac{-x(2y)}{(1+x^2+y^2)^2}$, $f_{yy}(x,y) = \dfrac{-2x(1+x^2+y^2)^2 + 2xy(1+x^2+y^2)^2}{(1+x^2+y^2)^4}$

* $1+y^2-x^2 = -2yx$, $y^2-x^2-2yx = -1$, $y=0 \longrightarrow x = \pm 1$, Por tanto: $(1,0), (-1,0)$ ptos. críticos.

$\cdot D(1,0) = 1/4 > 0$, $f_{xx}(1,0) < 0 \longrightarrow$ Max. local
$\cdot D(-1,0) = 1/4 > 0$, $f_{xx}(-1,0) > 0 \longrightarrow$ Mín. local

---

(19) Calcular la distancia más corta desde el punto $(1, 0, -2)$ al plano $x + 2y + z = 4$.

* $S_1 = x+2y+z=4$, Buso "R" tq. $\|R-P\|$ sea la menor distancia posible:

. $\|R-Q\| \doteq \sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2+(z+2)^2}$, y teniendo en cuenta que $z = 4-x-2y$. El vector es de la forma:
$R = (x, y, (4-x-2y))$, $\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2+(6-x-2y)^2}$ ⊛

⊛ Debo encontrar el mínimo de $(x-1)^2 + y^2 + (6-x-2y)^2$, $f_x(x,y) = 2(x-1) + 0 + 2(6-x-2y)(-1) = 4x+4y-14$, $f_y(x,y) = 2y - 4(6-x-2y) =$
$10y + 4x - 24$.

* $\begin{cases} 4x+4y-14 = 0 \\ 10y+4x-24 = 0 \end{cases}$, $x = {-4y+14}/4$, $10y + \cancel{4}\left(\dfrac{-4y+14}{\cancel{4}}\right) - 24 = 0$, $6y-10$, $6y = 10$, $y = 10/6$, $x = \dfrac{-4(10/6)+14}{4} = 11/6$

.Pto crítico $(11/6, 10/6)$, Con test. de derivados parciales: mínimo ✓ $\rightarrow$ $R = (11/6, 10/6, -7/6)$