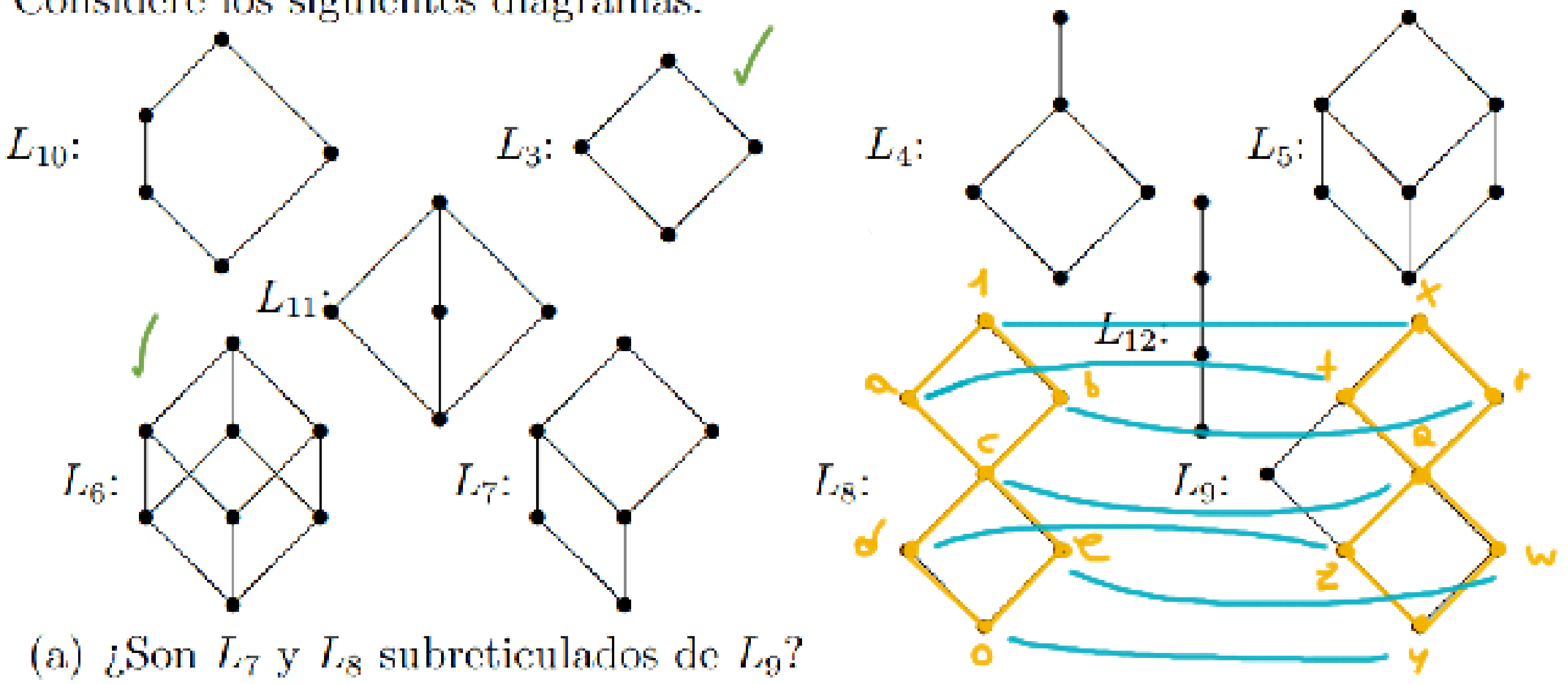
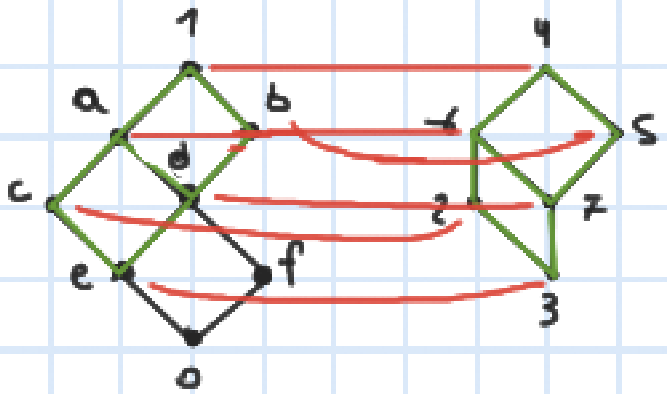
(1) Considere los siguientes diagramas.



(a) ¿Son L_7 y L_8 subreticulados de L_9?
(b) ¿En cuáles de estos reticulados puede ser incrustado L_4? ¿Y L_5?
(c) ¿De cuántas maneras distintas puede incrustarse L_3 en L_8?
(d) ¿Es L_{10} subreticulado de L_6? ¿Es M_3 subreticulado de L_8?

(a) L7 si es subreticulado de L9 pues preserva la misma estructura en terminos de supremos e infimos, a continuacion podemos verlo:



$f : S_{L_9} \to L_7$

- $f(1) = 4$
- $f(a) = 6$
- $f(b) = 5$
- $f(c) = 2$
- $f(d) = 7$
- $f(e) = 3$

✓

. Analogo con L8 (es tmb. subreticulado)

(b) L4 puede incrustarse en L6, asi como tambien L5.

(c) De dos maneras

(d) L_{10} no, y M_3 tampoco.

---

(2) ¿Cuáles de los 8 reticulados anteriores son álgebras de Boole?

Definición (Álgebra de Boole)

Un **álgebra de Boole** $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ es una estructura donde $(B, \vee, \wedge, 0, 1)$ es un retículo distributivo acotado y $\neg : B \to B$ da un complemento:

$$a \vee \neg a = 1 \qquad a \wedge \neg a = 0.$$

Siguiendo la definicion vista en el teorico, tenemos que todos los posets anteriores, son reticulados pero no todos distributivos, primero filtremos la busqueda segun esa caracteristica.

. De los 8 posets, son distributivos: $L_6, L_7, L_3, L_4, L_{12}, L_8, L_9$. Todos cumplen ser acotados, entonces deberíamos de ver $\neg : B \to B$.

- L_3
- L_6

(3) Sea B un álgebra de Boole y $\leq$ el orden asociado a B. Demuestre que
(a) $(x^c)^c = x$;
(b) $x \leq y$ si y sólo si $y^c \leq x^c$;
(c) $y \wedge z = 0$ si y sólo si $y \leq z^c$; (¿cómo sería una propiedad similar con $y \vee z$?)
(d) si $x \leq y$ e $y \wedge z = 0$ entonces $z \leq x^c$ (vea lo que hizo antes).

(a) $(x^c)^c \doteq$ Veamos que, en toda algebra de bool, debe estar definida la funcion de negacion, que da un complemento, ahora sabemos que, si B es algebra de Bool, B es distributivo y acotado, por lo que la unicidad de los complementos esta presente, luego:

* $x^c \doteq y$, por unicidad de complementos, y es el unico elemento, tq $x \vee y = 1$ y $x \wedge = 0$. Por tanto, $y^c = x$.
→ Finalmente, $x^c = y \doteq y^c = x$, $(x^c)^c = (y)^c = x$

(b) $x \leq y \longleftrightarrow y^c \leq x^c$ (*) $x \vee y = y$ // $x \wedge y = x$

. (⇒) Sup. $x \leq y$, y probemos $y^c \leq x^c$.

* $z \in B$, $z \leq z \vee a$, $\forall a \in B$. Luego $z = y^c$, $z \leq z \vee x^c$, luego $y^c \leq y^c \vee x^c$, $y^c \overset{M}{\leq} (y^{c^c} \wedge x^{c^c})^c$ luego
$y^c \leq (y \wedge x)^c \doteq \boxed{y^c \leq x^c}$

. (⇐) Sup. $y^c \leq x^c$ y probamos que $x \leq y$.

. $y^c \leq x^c \Longrightarrow y^c \wedge x \leq x^c \wedge x$
. $\Longrightarrow y^c \wedge x \leq 0$
$\Longrightarrow y^c \wedge x = 0$

C)

⇒) Sup y ∧ z = 0.
$y = y \wedge (1) = y \wedge (z \vee z^c) = (y \wedge z) \vee (y \wedge z^c) = 0 \vee (y \wedge z^c) = (y \wedge z^c) \Rightarrow \boxed{y \leq z^c}$ //

⇒) Sup y ∧ z = 0.
$y = y \wedge (1) = y \wedge (z \vee z^c) = (y \wedge z) \vee (y \wedge z^c) = 0 \vee (y \wedge z^c) = (y \wedge z^c)$
Entonces $y \leq z^c$.
⇐) Sup $y \leq z^c$. Tomo ∧ z, me queda: $y \wedge z \leq z^c \wedge z = 0 \Rightarrow y \wedge z = 0$.

(Recordemos monotonía:
a ≤ b
c ≤ d
----
a ∧ c ≤ b ∧ d
En particular,
$y \leq z^c$
z ≤ z

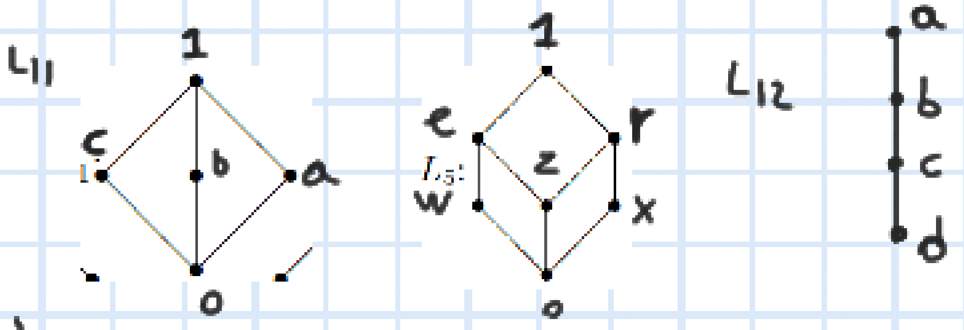
$y \wedge z \leq z^c \wedge z$)

(4) Determine cuáles de los siguientes isomorfismos valen.
(a) $D_{78} \cong D_{385}$. (b) $D_{12} \cong D_{18}$. (c) $D_{2310} \cong \mathcal{P}(\{a,b,c,d,e\})$.
(d) $D_{90} \cong \mathcal{P}(\{a,b,c,d\})$.

(a) D_{78}, $78 \doteq 2 \cdot 13 \cdot 3 \doteq At(D_{78})$ $\Longrightarrow$ $At(D_{78}) \cong At(D_{385}) \longrightarrow D_{78} \cong D_{385}$
D_{385}, $385 \doteq 5 \cdot 7 \cdot 11 \doteq At(D_{385})$

* Preguntar mañana

(5) Considere los reticulados L_5, L_{11} y L_{12} de la figura:
(a) Calcule el conjunto de átomos de cada reticulado.
(b) Para cada uno de esos reticulados, explique por qué **no** es un álgebra de Boole.



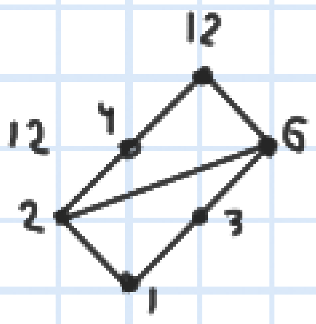
* $At(L_{11}) \doteq \{c, b, a\}$
* $At(L_5) \doteq \{w, z, x\}$
* $At(L_{12}) \doteq \{c\}$

(b)

- L11 no es algebra de Boole, porque directamente no es distributivo, se aplica por teorema M3/N5, o bien por propiedad cancelativa, ya que c tiene dos complementos, y son distintos.
- L5 si bien es distributivo, no cumple la propiedad de tener la funcion de negacion de B en B para el elemento "Z", por tanto no existe (Z v Zc) = 1 o (Z ^ Zc) = 0. Analogo con L12, para el elemento b y c.

(6) (a) Encuentre los átomos de $(D_{12}, |)$
(b) Encuentre los átomos de $(D_{36}, |)$.
(c) Muestre que los elementos 2 y 6 en D_{12} no tienen complementos.

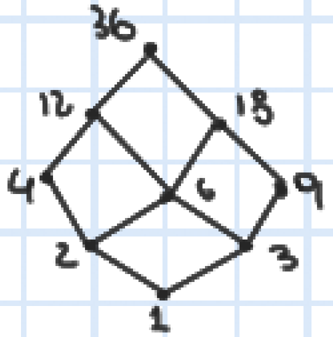
. D_{12}



. $At(D_{12}, |) \doteq 2, 3$

. D_{36}

$At(D_{36}, |) \doteq 2, 3$



(c) Def. de complemento : · $a \vee \neg a = 1$
· $a \wedge \neg a = 0$

→ Podríamos hacer un analisis por casos, y no encontraríamos "$\neg a$" tq. que cumpla la prop. anterior.

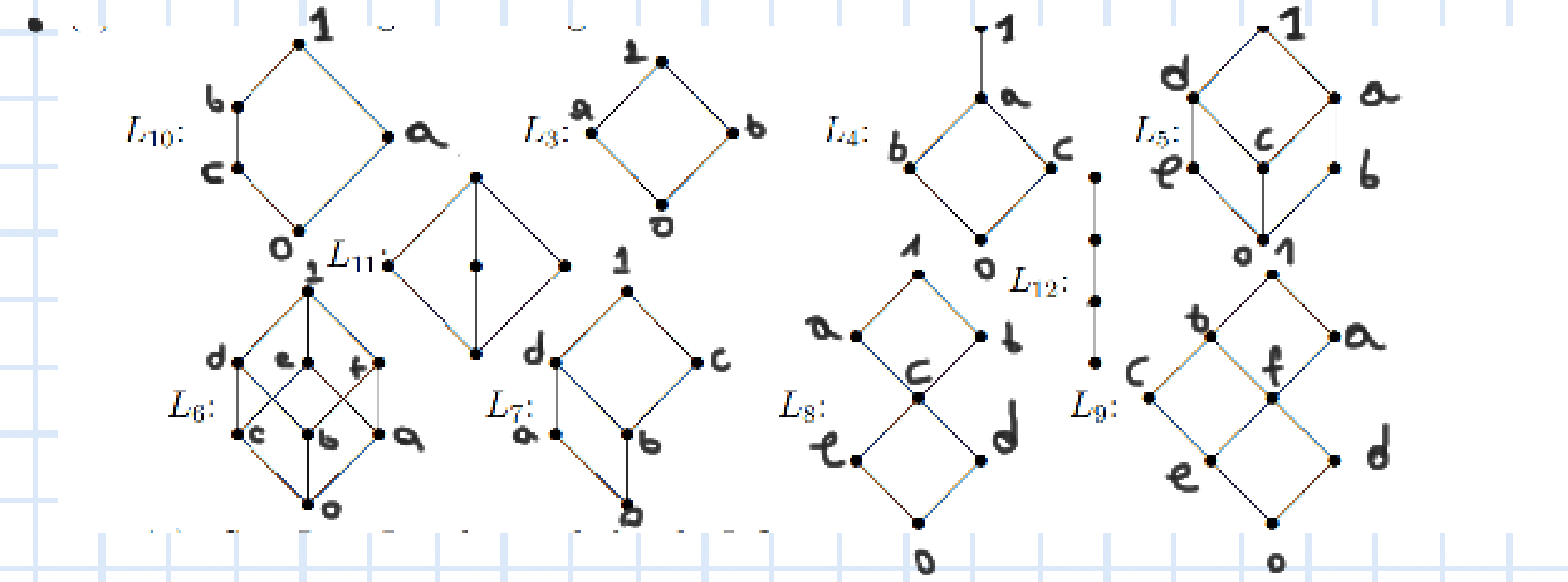
* Veamos que para 2, hay un sólo elemento que podría ser "$\neg a$"
→ $a = 2$, $\neg a = 3$, luego · $2 \vee 3 = 6$ ✗
· $2 \wedge 3 = 1$ ✓ } Abs!

(7) Considere todos diagramas, excepto L_{11} y L_{12}, de la figura.

(a) Halle en cada caso $At(L)$.

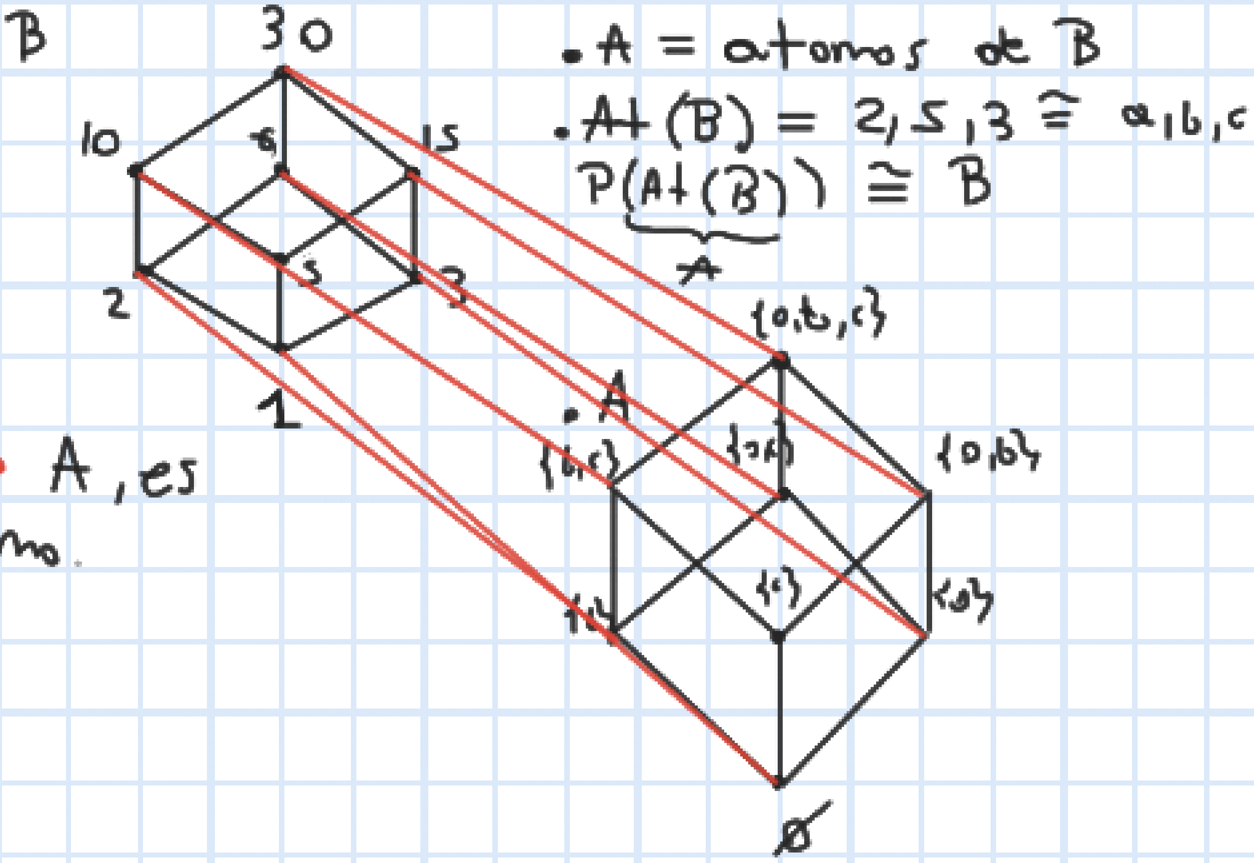
(b) Dibuje en cada caso el diagrama de Hasse de $\mathcal{P}(At(L))$.

(c) Determine cuáles son álgebras de Boole.



(8) Defina de manera explícita el mapa F del Teorema de Representación de Álgebras de Boole finitas, considerando el Álgebra de Boole D_{30}.

. $D_{30} \doteq$



. A = atomos de B

. $At(B) = 2,5,3 \cong a,b,c$

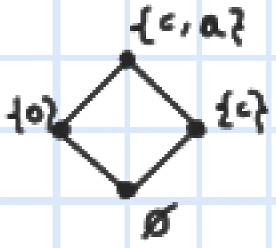
$\underbrace{P(At(B))}_{A} \cong B$

. $F: B \rightarrow A$, es isomorfismo.

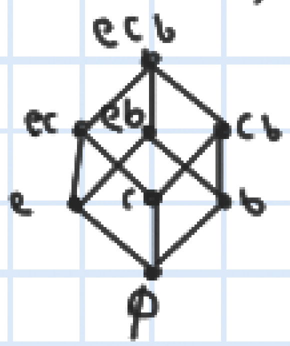
(a)

* $At(L_{10}) \doteq c, a$
* $At(L_5) \doteq e, c, b$
* $At(L_3) \doteq a, b$
* $At(L_9) \doteq e, d$
* $At(L_4) \doteq b, c$
* $At(L_8) \doteq e, d$
* $At(L_7) \doteq a, b$
* $At(L_6) \doteq c, b, a$

(b) . $P(At(L_{10})) \doteq \{\emptyset, \{c\}, \{a\}, \{c,a\}\}$



. $P(At(L_5)) \doteq \{\emptyset, \{e\}, \{c\}, \{b\}, \{e,c\}, \{e,b\}, \{c,b\}, \{e,c,b\}\}$



. $P(At(L_3)) \doteq \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$