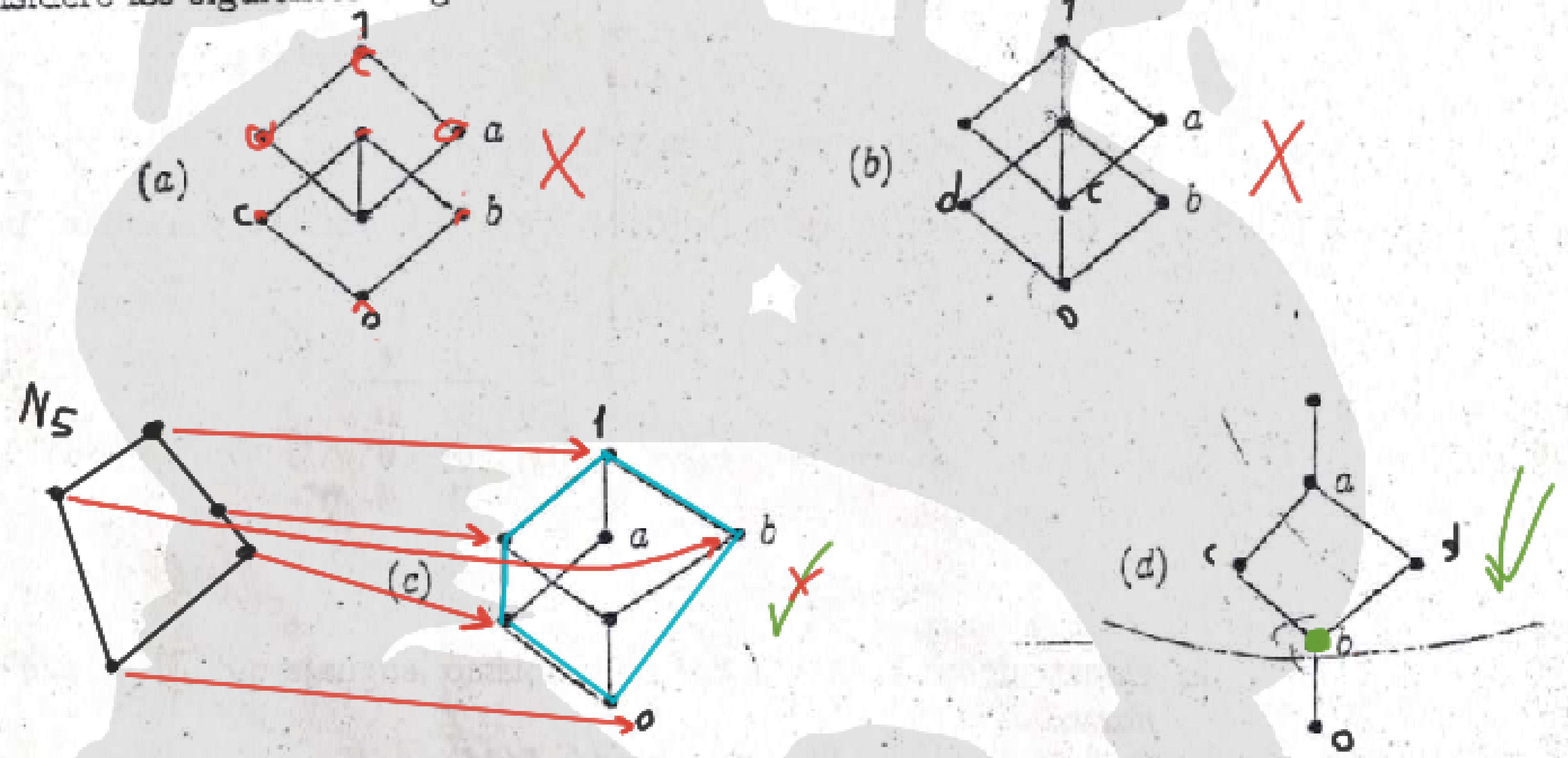
(1) Considere los siguientes diagramas de Hasse:



(i) Marque sobre cada diagrama $inf\{a, b\}$, en caso que exista. ✓

(ii) Determine cuales son reticulados, justifique la respuesta. ✓

(iii) Determine cuales son reticulados distributivos, justifique la respuesta. $\frac{2}{3}$

(iv) Para los reticulados, calcule en cada caso el conjunto de átomos y el conjunto de $\frac{5}{6}$
join-irreducibles.

(v) Calcule todos los filtros primos de (d). $\frac{1}{1}$

(iv) (a) $At(L) = c, b$

(b) $At(L) = c, b, d$

(c) $At(L) = c, d$

(d) $At(L) = b$

(c) $Irr(L) = c, d, b, a$

(d) $Irr(L) = 1, c, d, b$

(2) (i) Pruebe que en todo reticulado vale la desigualdad:

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (y \vee z)$$

(ii) Pruebe que en toda álgebra de Boole vale la propiedad:

$$x \leq y' \Leftrightarrow x \wedge y = 0$$

(iii) Pruebe que en toda álgebra de Boole vale la igualdad:

$$(x'' \vee y'') = (x' \wedge y')'.$$

(Pruebe toda propiedad que use.)

(iv) Cuántas álgebras de Boole de a lo sumo 20 elementos hay? Justifique.

i) $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (y \wedge z)$

$x \vee (y \wedge z) \leq y \wedge (x \vee z)$; Distributividad

$x \vee (y \wedge z) \leq y \wedge (z \vee x)$; Conmutatividad

$x \vee (y \wedge z) \leq (y \wedge z) \vee x$; Asociatividad

iii) $(x'' \vee y'') = (x' \wedge y')'$

$x \vee y = (x' \wedge y')'$

$(x \vee y)'' = (x' \wedge y')'$

$x'' = x$

$(x' \wedge y')' = (x' \wedge y')'$

$x' = y \Rightarrow y' = x$

$(x \vee y) \wedge (x^c \wedge y^c) = 0$ y

(iv) $P(abcd) = 16$

(a)

abc

ab

$2^5 = 32$

$D_{14} = 7 \cdot 2$

$D_7 = 7$

$D_{13} = 13$

$D_5 = 5$

$D_{11} = 11$

f biyectiva y $\forall a, b$: $a \leq b \rightarrow f(a) \leq' f(b)$

f biyectiva, y $\forall a b$: $a \vee b \rightarrow f(a) \vee' f(b)$

$a \wedge b \rightarrow f(a) \wedge' f(b)$

Hay infinitas algebras de boole de a lo sumo 20 elementos, ya que todo Dn con n producto de primos distintos es algebra de boole, y existen infinitos primos.

(3) (a) Defina isomorfismo de poset, e isomorfismo de reticulado.

(b) Suponga que $f : L \to L'$ es un isomorfismo de posets, y que L, L' son reticulados. Pruebe que f es un isomorfismo de reticulados.

(c) Suponga que $(L, \vee, \wedge, 0, 1, ')$, $(L', \vee', \wedge', 0', 1', '')$ son reticulados acotados con operación complemento, y que $f : L \to L'$ es un isomorfismo de posets.

(i) Vale que $f(x')$ es complemento de $f(x)$?✓

(ii) Vale que $f(x') = f(x)''$? ✓

b) L/L' reticulado $\Rightarrow \forall a, b$ tengo def. $a \vee b$ y $a \wedge b$

$f : L \to L'$, f debe cumplir $a \vee b \to f(a) \vee' f(b)$

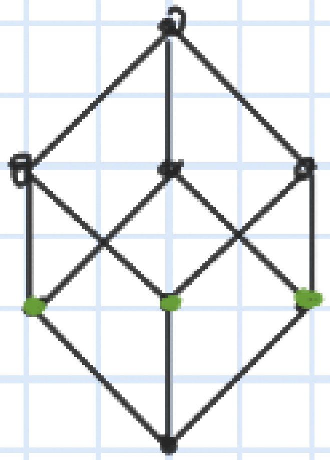
. $f : L \to L'$ f : $a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$, luego no tengo $a \vee b \to f(a) \vee f(b)$

$L \to L' \Rightarrow a \vee b \to f(a) \vee f(b)$, luego por Abs! tengo f es iso

(4) Pruebe que todo elemento en un álgebra de Boole se puede escribir como supremo de átomos de manera única.

. At, $At(B) = Irr(B)$, $x \in Irr(B) \Rightarrow x = a \vee x$

*Contra ejemplo

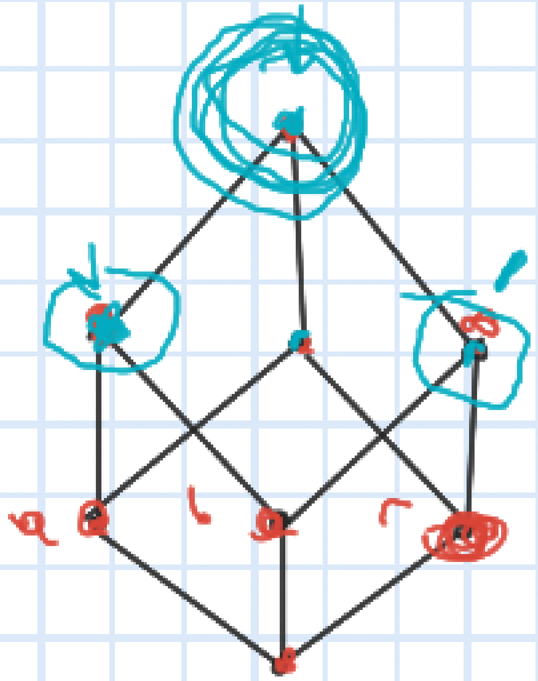


LEMA 1.1. *Sea B un álgebra de Boole finita. Entonces todo elemento de B se escribe de manera única como supremo de átomos. O sea: para todo $x \in B$ se tiene:*

(1) $x = sup\{a \in At(B) : a \leq x\}$,

(2) *si* $A \subseteq At(B)$ *y* $x = sup\, A$, *entonces* $A = \{a \in At(B) : a \leq x\}$.

DEMOSTRACIÓN. Veamos que $x \wedge y^c \neq 0$. Si $x \wedge y^c = 0$, entonces $y \vee (x \wedge y^c) = y \vee 0$, o sea $y \vee x = y$, lo que contradice la hipótesis del lema. Luego $x \wedge y^c \neq 0$. Por el lema anterior existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq x \wedge y^c$. Claramente $a \leq x$, veamos que $a \not\leq y$. Si $a \leq y$, como $a \leq x \wedge y^c$ tendríamos $a \leq x \wedge y^c \wedge y = 0$, lo que es absurdo puesto que a es un átomo. Luego $a \not\leq y$. $\square$



$\sup(\sup(a,b), c)$

(13) Sea L un reticulado. Pruebe o refute cada una de las siguientes desigualdades:

1. $x \ovee (y \owedge z) \leq (x \ovee y \ovee z) \owedge (x \ovee y)$
2. $x \ovee (y \owedge z) \leq (x \ovee y) \owedge (y \ovee z)$
3. $x \owedge (y \ovee z) \leq (x \owedge y) \ovee (x \owedge y)$
4. $a \geq c \Rightarrow a \owedge (b \ovee c) \geq (a \owedge b) \ovee c$
5. $(a \owedge b) \ovee (a \owedge c) \ovee (b \owedge c) \leq (a \ovee b) \owedge (a \ovee c) \owedge (b \ovee c)$
6. $(a \owedge b) \ovee (a \owedge c) \ovee (b \owedge c) \geq (a \ovee b) \owedge (a \ovee c) \owedge (b \ovee c)$

1- $x \vee (y \wedge z) \leq \underbrace{(x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y)}_{u}$

$x \leq x \vee (y \wedge z) \leq u$ } por trans

$(y \wedge z) \leq x \vee (y \wedge z) \leq u$

$x \leq x \vee y$

x e $y \wedge z$ es cota inf $\{x \vee y \vee z, x \vee y\}$

$x \leq x \vee y \leq x \vee y \vee z$

$y \wedge z \leq y \vee z \leq x \vee y \vee z$

$y \wedge z \leq y \leq x \vee y$

1) $x \leq u$

2) $(y \wedge z) \leq u$

x es cota inf.

1 $x \leq (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y)$

$x \leq (x \vee y)$

2 $(y \wedge z) \leq (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y)$

cota inf $\vee$ cota inf $\leq u$