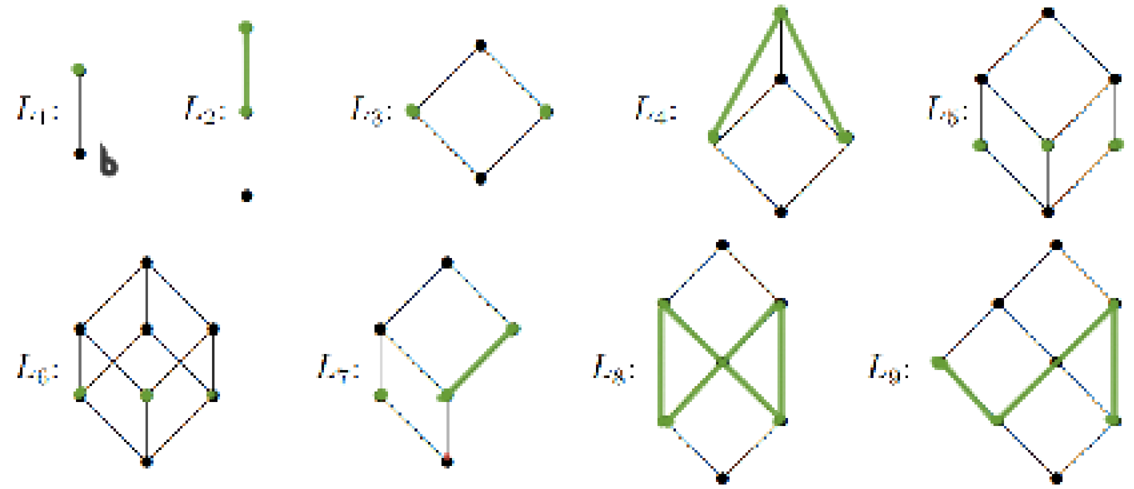
(1) Considere los siguientes reticulados.

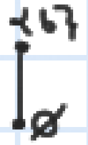
(a) Dibuje el diagrama de Hasse del poset de elementos irreducibles.

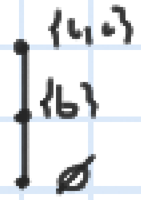
(b) Dibuje en cada caso el diagrama de Hasse de $\mathcal{D}(Irr(L))$.

(c) Utilice el Teorema de Birkhoff para determinar si es distributivo o no.



(a) Elementos $\vee$-ireducibles.

(b) $L_1 \doteq D(\mathrm{Irr}(L_1)) =$ 



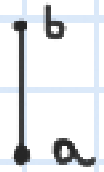
$L_2 \doteq D(\mathrm{Irr}(L_2)) = \{\emptyset, b, \{b,c\}$

$L_3 \doteq D(\mathrm{Irr}(L_3)) = \{\emptyset, \{a\},$

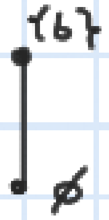
$L_4 \doteq D(\mathrm{Irr}(L_4)) =$

$L_5 \doteq D(\mathrm{Irr}(L_5)) =$

$L_9 \doteq D(\mathrm{Irr}(L_9)) =$

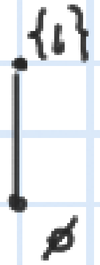
(c) $L_1 \doteq$ 

, luego $\mathrm{Irr}(L_1) = \bullet \implies$

$D(\mathrm{Irr}(L_1)) = \{\emptyset, \{b\}\} \cong$ 

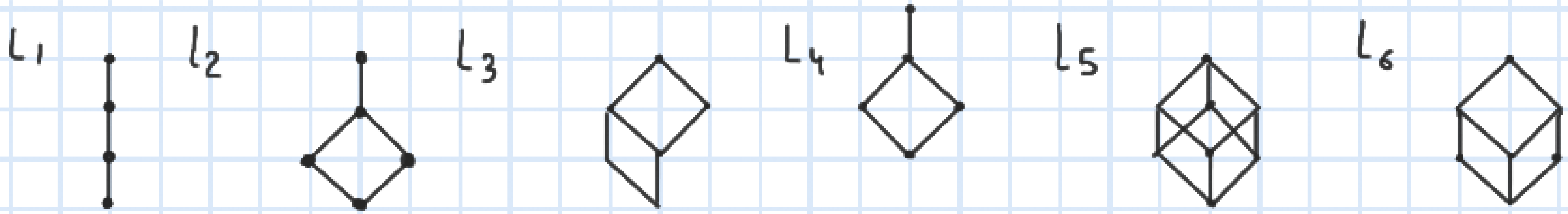
⊛

Por ⊛ tengo que 

$\cong$ 

✓

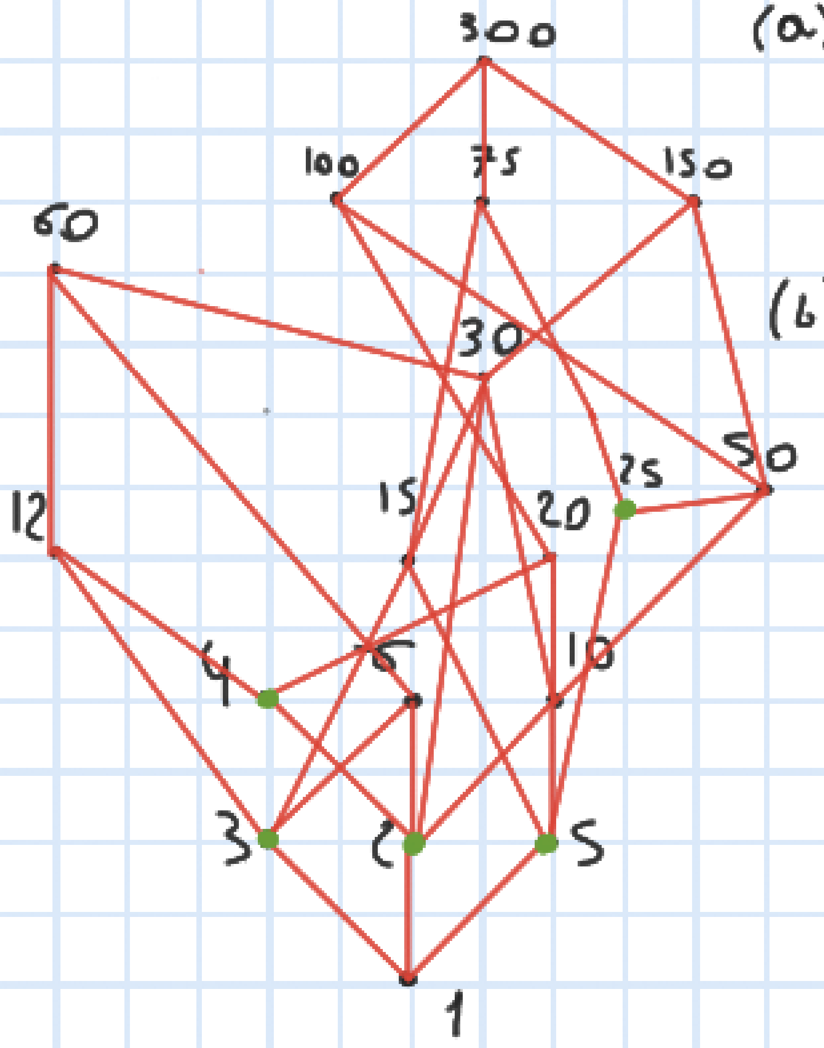
(2) Dé todos los reticulados distributivos con exactamente 3 elementos irreducibles.



(3) Sea n producto de primos distintos $p_1, p_2, \ldots, p_k$, ¿cuáles son los elementos irreducibles de D_n?

Por definicion, sabemos que x es irreducible si x = (a v b) y (a = x) o (b = x). Luego, sabemos que todo Dn es distributivo, y particularmente que Dn con n = p1 * p2 * ... * pn con pi primos distintos es u
Algebra de Boole, por lo que todo elemento tiene complemento. Luego, Irr(L) = At(L), para todo L Algebra de Boole,(esta ultima parte es un si solo si).

(4) (a) Determine $Irr(D_{300})$.
(b) Describa de la forma más clara posible los elementos irreducibles de D_n.



(a)

$D_n = 300$, luego $n = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$

$\rightarrow$ Luego, $Irr(D_{300}) = \{2, 3, 4, 5, 25\}$

(b) $Irr(D_n)$ para $n = P_1, \ldots P_K$, n prod. de p primos $\doteq At(D_n)$ ✓

$Irr(D_n)$ para n prod. de p primos repetidos $\doteq$ primos y prod. de p repetidos

(5) Explique por qué no existe X tal que D_{60} sea isomorfo a $\mathcal{P}(X)$

Tengamos en cuenta que, Dn con n producto de primos distintos es AB, luego tambien sabemos que P(X) para todo X es AB. Entonces, si tenemos un ismorfismo entre P(X) para algun X en particular, y L (poset) estariamos ante un AB, luego probamos que D60 no es AB, por lo tanto el ismorfismo entre AB no tendria sentido.

. D_{60}, $60 \doteq 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, luego no puedo afirmar que es A.B.

→ Probemos que no es AB

*

(6) Determine cuándo D_n es isomorfo a algún $\mathcal{P}(X)$. Dé explícitamente el iso.

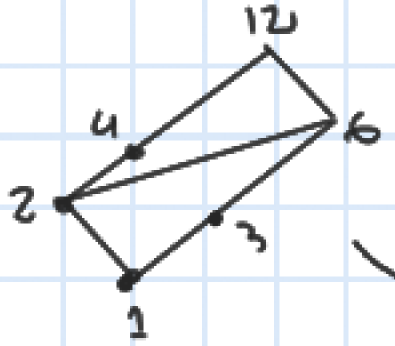
$|D_n| = 2^k \in K\mathbb{Z}$ $\qquad 12 \neq 2^k$

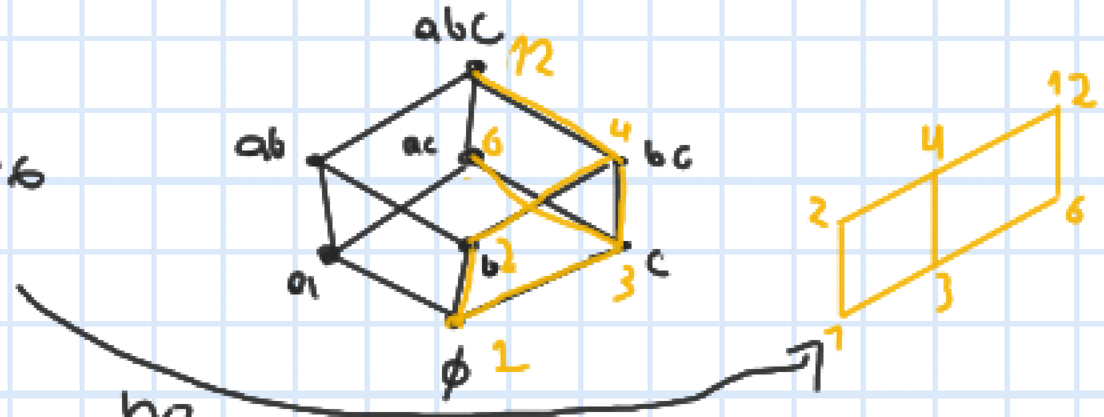
(7) ¿Se puede incrustar N_5 en D_{630}? ¿Se puede incrustar D_{12} en $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$?

630	2
315	3
105	5
21	3
7	7
1	

$Irr(D630) = \{2, 3, 9, 5, 7\}$

P(Irr)





no se incrusta:

$D(Irr(630)) = \{ 2, 5, 7, 3, \phi, \{3,9\}, \{2,3\}, \{2,5\}, \{2,7\}, \{3,5\}, \{3,7\}, \{5,7\}, \{2,3,9\}, \{2,5,7\}, \{5,3,9\}, \{2,3,5\}, \{$

$6 \wedge 4 = 2$ $\qquad 6 \wedge 4 = 3$

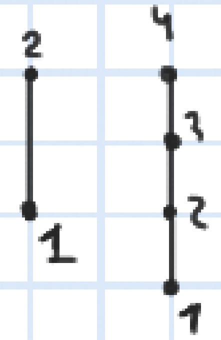
(8) Sean $(L, \leq_L)$ y $(M, \leq_M)$ posets. Considere el conjunto $L \times M$ con $\preceq$ definida así:

$$(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \text{ sii } x_1 \leq_L x_2 \text{ y } y_1 \leq_M y_2.$$

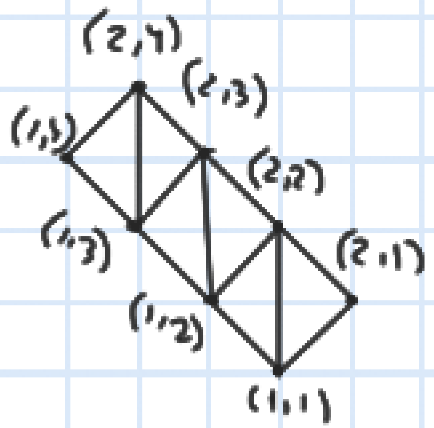
(a) Dé el diagramas de Hasse de $\mathbf{2} \times \mathbf{4}$ y de $\mathcal{P}(\{a, b\}) \times \mathbf{2}$.

(b) Pruebe que si L y M son reticulados entonces $L \times M$ también lo es. Dé explícitamente las operaciones de supremo e ínfimo.

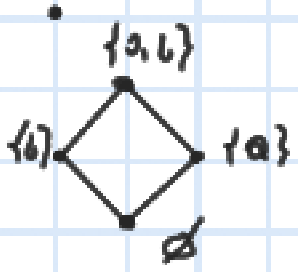
(a) •

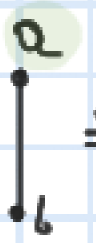


$$\doteq \underbrace{(2,4),(2,3),(2,2),(2,1),(1,4).(1,3),(1,2).(1,1)}_{2 \times 4} \doteq$$



•





$$\doteq \cancel{(\{a,b\},a)}, \cancel{(\{b\},a)}, \cancel{(\{a\},a)}. \cancel{(\emptyset,a)}, \cancel{(\{a,b\},b)}, \cancel{(\{b\},b)}, \cancel{(\{a\},b)}, \cancel{(\emptyset,b)} \doteq$$