(1) Para las siguientes cadenas determinar cuáles están en Σ^*, cuáles en *Prop*, y cuáles en ninguno de los dos.

(a) $p_0 \to p_1$
(b) $((p \wedge p) \to p)$
(c) $(\varphi \vee \psi)$
(d) $(((p_1 \to p_2) \to p_1) \to p_2)$

a_ Dado que P_0 y $P_1 \in$ a Prop, luego $P_0 \to P_1 \in$ Prop y por lo tanto a Σ^*

b_ $(p \wedge p) \to p$, como es una cadena $\in \Sigma^*$, luego no puedo afirmar que $\in$ Prop.

c. $\varphi \odot \psi \in$ Prop y $\in \Sigma^*$ $\forall$ "$\odot$" op. binaria.

d_ Pertenece a Prop y a Σ^*

Defina recursivamente una función $paren\_izq(\varphi)$ que devuelva la cantidad de paréntesis izquierdos que posee φ, para cada $\varphi \in Prop$ (resp. $paren\_der$).

* paren_izq tq. Prop $\longrightarrow$ Int, luego :

$$\left.\begin{array}{l} paren\_izq(\varphi) = 0 \text{ , si } \varphi \in At \wedge \varphi \neq `(' \\ paren\_izq(\varphi) = 1 \text{ , si } \varphi \in At \wedge \varphi \equiv `(' \end{array}\right\} \text{Casos triviales}$$

$$paren\_izq(\varphi \odot \psi) = F(z) + F(X) \; (*)$$

(*) {Sea $X \setminus \{z\} \wedge X \cup \{z\}\} \supseteq \psi \wedge \psi \notin At$,
$F(z) + F(X)$

• Analogo con paren_der

---

(3) Demuestre que toda $\varphi \in Prop$ tiene tantos "(" como ")".

. Si $\varphi \in$ Prop $\Rightarrow$ $\varphi \in At \wedge \varphi \odot \psi \in \forall \varphi, \psi \in$ Prop.

• Además, si $paren\_izq(\varphi) \neq paren\_der(\varphi) \longrightarrow$ `(' , `)' desequilibrados para $\psi \in \varphi$, luego $\psi \notin$ Prop, y como $\psi \in \varphi \longrightarrow \varphi \notin$ Prop.

• Sup $\varphi \in At$, luego $\varphi \in$ Prop. Pero $paren\_izq \neq paren\_der$ $\Rightarrow$ φ es de la forma "$(\varphi$", "$\varphi)$"... luego $\varphi \notin$ Prop.

(4) Defina recursivamente una función $ocur(k, \varphi)$, que devuelva la cantidad de ocurrencias de p_k que posee φ, para cada $\varphi \in Prop$. (Note que para cada k fijo se está definiendo una función de $Prop$ en los naturales.)

. $K : Prop \to Nat$, luego $ocur(K, \varphi_i) = 1$ si $\varphi \in At$

$ocur(k, \varphi_i \odot \psi_i) = ocurr(\varphi_i) + ocurr(\psi_i)$

---

(5) Defina la noción de *subfórmula* de una fórmula de $Prop$, a través de una una función $S(\varphi)$ que devuelva el conjunto subfórmulas de φ para cada $\varphi \in Prop$.

. ψ es subfórmula de φ si se define como "$\psi \in S(\varphi)$". Luego, definimos inductivamente como:

* $S(p) := \{p\}$ si $p \in At$

* $S((\varphi \odot \psi)) := \{(\varphi \odot \psi)\} \cup S(\varphi) \cup S(\psi)\}$

Una definición alternativa de $Prop$ es la siguiente: $Prop = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Prop_n$. Los "subuniversos" $Prop_n$ que permiten esta definición se definen como sigue:

$$
\begin{aligned}
Prop_0 &= At \\
Prop_1 &= Prop_0 \cup \{(\varphi \odot \psi) \mid \varphi, \psi \in Prop_0\} \\
&\dots \\
Prop_{k+1} &= Prop_k \cup \{(\varphi \odot \psi) \mid \varphi, \psi \subset Prop_k\}
\end{aligned}
$$

Determine el menor n tal que $Prop_n$ contiene φ, para cada una de las siguientes proposiciones φ: "$\neg p$"

(a) $(p_0 \to \perp)$
(b) $((\neg p_0) \wedge ((p_0 \to \perp) \to \perp))$
(c) $(((\neg p_0) \vee p_{2312}) \wedge (\neg(p_0 \to \perp)))$

a – "p_0", "$\perp$", "$p_0 \to \perp$" $\doteq$ $\boxed{n \equiv 3}$

b – "p_0", "$\neg p_0$", "$\perp$", "$p_0 \to \perp$", "$\neg p_0 \wedge (p_0 \to \perp)$", "$(p_0 \to \perp) \to \perp$", "$((\neg p) \wedge (p_0 \to \perp) \to \perp)$" $\doteq$ $\boxed{n \equiv 7}$

c – "$\neg p_0$", "$\perp$" "p_{2312}", "p_0", "$p_0 \to \perp$", "$\neg p_0 \vee p_{2312}$", "$\neg(p_0 \to \perp)$", "$(((\neg p_0) \vee (p_{2312})) \wedge (\neg(p_0 \to \perp)))$" $\doteq$ $\boxed{n \equiv 8}$

(7) Demuestre que la definición $Prop = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Prop_n$ es correcta. O sea, se tiene que demostrar que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Prop_n$ satisface la propiedad que se dió en el teórico para definir $Prop$.

. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Prop_n$ satisface que: $\eta \in At$, luego $\eta \in Prop$.
$(\eta \odot \kappa)$ si $A(\eta)$ y $A(\psi) \Rightarrow A((\eta \odot \psi))$

. si $n \in \mathbb{N}$, $n \in \{0,1,2 \ldots, n+1\}$, luego todo $At \in \mathbb{N} \in Prop$.
. si $n, k \in \mathbb{N}$, $n, k \in \{0,1,2 \ldots, n+1\}$, luego $n \odot k \in Prop$. $\Rightarrow$ $A(\eta) \in Prop$, $A(\kappa) \in Prop$ $\wedge (\eta \odot \kappa) \in Prop$, luego $A(\eta \odot \kappa) \in Prop$.

* Guía B_2 :

(1) $f : V \to \{0,1\}$, $f(P_1) = 0$, $f(P_3) = 0$, $f(P_2) = 1$

Determine $[\![((\neg p_2) \to (p_3 \vee (p_1 \to p_2)))]\!]_f$. (Recuerde que $\neg\varphi \;=_{def}\; \varphi \to \bot$.)

$$[\![((\neg P_2) \longrightarrow (P_3 \vee (P_1 \to P_2)))]\!] \equiv [\![((P_2 \to \bot) \longrightarrow (P_3 \vee (P_1 \to P_2)))]\!] \equiv [\![((0) \longrightarrow (P_3 \vee (1)))]\!] \equiv [\![(0 \to (\text{máx}\{0\},\{1\}))]\!]$$

$$\equiv \underbrace{[\![(0 \to 1)]\!]} \equiv 1$$

$$\varphi \vee \psi = 0 \longleftrightarrow [\![\varphi]\!] = 1 \wedge [\![\psi]\!] = 0$$

---

(2) Suponga que $f_i : V \to \{0,1\}$ es una asignación, para $i = 1,2,3$. Sólo disponemos de la siguiente información sobre cada f_i, que describe el valor que adopta en algunos elementos de V.

(a) $f_1(p_1) = f_1(p_2) = f_1(p_3) = 0$
(b) $f_2(p_1) = 0$, $f_2(p_3) = 1$
(c) $f_3(p_1) = f_3(p_2) = f_3(p_3)$

Para $i = 1,2,3$ determine, en caso de ser posible,

$$[\![((((\neg p_2) \to (p_3 \vee (p_1 \leftrightarrow p_2))) \wedge (\neg p_3)) \to p_3)]\!]_{f_i}.$$

Recuerde que $(p_1 \leftrightarrow p_2) =_{def} ((p_1 \to p_2) \wedge (p_2 \to p_1))$

a_ En f_1 tengo: $[\![((((\underbrace{\neg p_2)}) \to (p_3 \vee (p_1 \leftrightarrow p_2))) \wedge (\neg p_3)) \to p_3)]\!]_{f_1}$.

$$\equiv 1 \to ((0 \vee 0) \wedge 1) \to 0)$$
$$\equiv 1 \to (((0) \wedge 1) \to 0)$$
$$\equiv 1 \to (0 \to 0)$$
$$\equiv 1 \to 0$$
$$\equiv 0 \checkmark$$

b_ en f_2: $[\![((((\neg p_2) \to (p_3 \vee (p_1 \leftrightarrow p_2))) \wedge (\neg p_3)) \to p_3)]\!]_{f_2}$.

$$\equiv (\neg P_2) \to (1 \vee (0 \leftrightarrow P_2) \wedge 0) \to 1)$$
$$\equiv (\neg P_2) \to (1 \vee ((0 \to P_2) \wedge (P_2 \to 1)) \to 1)$$
$$\equiv (\neg P_2) \to (1 \vee (1 \wedge (P_2 \to 1))) \to 1)$$
$$\equiv (\neg P_2) \to (1 \vee (1 \wedge 1) \to 1$$
$$\equiv (\neg P_2) \to (1 \vee 1) \to 1$$
$$\equiv \neg P_2 \to (1 \to 1)$$
$$\equiv \neg P_2 \to 1$$ $\longrightarrow$ Valido para $P_2 \equiv 0$ y $P_2 \equiv 1$
$$\equiv 1 \checkmark$$

c_ en f_3: $f_3(P_1) = f_3(P_2) = f_3(P_3) = 0$

① $[\![((((\neg p_2) \to (p_3 \vee (p_1 \leftrightarrow p_2))) \wedge (\neg p_3)) \to p_3)]\!]_{f_3}$.

si $P_2 \equiv 0$, $\neg P_2 \equiv 0 \to \bot \equiv 0 \to 0 \equiv 1$

$$\Rightarrow 1 \to (((0 \vee (0)) \wedge 1) \to 0)$$
$$\equiv 1 \to ((0 \wedge 1) \to 0)$$
$$\equiv 1 \to (0 \to 0)$$
$$\equiv 1 \checkmark$$

② $\equiv 1 \checkmark$ } Rta $\equiv \boxed{1}$

(3) Para cada ítem, decida si existe una asignación f que valide el conjunto dado.

(a) $\{p_0\}$ (b) $\{p_0, \neg p_1, p_2, \neg p_3, ...\}$ (c) $PROP$ (d) $\{p_0, p_0 \to \neg p_1, p_1\}$

↘ No existe f de asignación tal

a - $f : \{P_0\} \to \{1\}$

b - $f(n) \begin{cases} 1 \text{ si } & n \bmod 2 = 0 \\ 0 \text{ si } & c.c \end{cases}$

c - si $\varphi \in Prop \Rightarrow \forall \varphi \in Prop,\ [\![\varphi]\!]_f \equiv 1$

---

(4) Determine en cada caso si existe g (asignación) que satisfaga la condición dada.

(a) $[\![\varphi]\!]_g := 0$ para toda $\varphi \in PROP$ que sólo contenga variables proposicionales y los símbolos $\{(,), \vee, \wedge\}$ (ningún otro). Si la respuesta es si, cuánto vale $[\![\varphi]\!]_g$ para una φ que no satisface la condición dada?

(b) $[\![\varphi]\!]_g = [\![\varphi[\perp/p_0]]\!]_f$ para toda $\varphi \in PROP$, (donde f una asignación cualquiera). Además de decidir, describa a $[\![\_]\!]_g$ con sus palabras. Pregunte a su compañero si entiende su definición ◡.

(b) Si esxiste g(x) tal que a cada caracter bottom le asigne "p0", ahora como por la regla de Leibniz, "p0" deberia deberia de ser equivalente a bottom, y como bottom vale siempre 0, deberia de asignarle un "p0" con valor 0.

(a) Si existe $[\![\cdot]\!]_g$, luego si $\exists \varphi$ tq $\varphi \equiv 1$, ya no se cumpliría.

$\to$ $\varphi \in At \not\in \{(,),\wedge,\vee\}$ luego tengo 2 opciones:

* $P_i \vee P_k$, $g(P_i) \equiv 1 \vee g(P_k) \equiv 1$
* $P_i \wedge P_k$, $g(P_i) \equiv 1 \wedge g(P_k) \equiv 1$

(5) Determine cuáles de las sigueintes afirmaciones es cierta. En caso de serlo debe demostrarla utilizando la definición de consecuencia. Si no es cierta, debe encontrar una asignación que certifique su falsedad.

(a) $\{p_0 \to p_1\} \models \neg p_0 \vee p_1$ V

(b) $\{p_0\} \models (p_0 \wedge p_1)$ F

(c) $\{p_0, p_1, p_2\} \models \neg(\neg p_0 \vee \neg p_1)$

(d) $\{p_0, (p_0 \to (p_1 \vee p_2)\} \models p_2$.

* def. de consecuencia: $(\varphi \to \psi) := 0$ si $[\![\varphi]\!] = 1$ y $[\![\psi]\!] = 0$.

Definición

- v **valida** $\Gamma \longleftrightarrow$ para toda $\psi \in \Gamma$, $[\![\psi]\!]_v = 1$. (**notación:** $[\![\Gamma]\!]_v = 1$)
- φ es **consecuencia** de $\Gamma \iff$ toda asignación v que valida Γ hace verdadera a φ:

$$[\![\Gamma]\!]_v = 1 \implies [\![\varphi]\!]_v = 1$$

(**notación:** $\Gamma \models \varphi$)

(a) $\{p_0 \to p_1\} \models \neg p_0 \vee p_1$

- $\{p_0 \to p_1\} \doteq$ $p_0 = 0$, $p_1 = 0$; $p_0 = 0$, $p_1 = 1$; $p_0 = 1$, $p_0 = 1$ — asignaciones válidos

- $\neg p_0 \vee p_1 \doteq$ $p_0 = 0$, $p_1 = 0$; $p_0 = 0$, $p_1 = 1$; $p_0 = 1$, $p_1 = 1$

* $\{p_0 \to p_1\}$ válida $\neg p_0 \vee p_1$ pues $\forall v$ valido en $\{p_0 \to p_1\}$, v es válido en $\neg p_0 \vee p_1$.

(b) $\{p_0\} \doteq 1$ o 0. Luego $\{p_0\}$ no válida "$p_0 \wedge p_1$" pues $[\![p_0]\!] \doteq 0$ convierte en 0 la prop.

(c) $\{p_0, p_1, p_2\} \doteq$ $p_0 = 1, 0$; $p_1 = 1, 0$; $p_2 = 1, 0$, luego valida $\neg(\neg p_0 \vee \neg p_1)$

(d) Ejercicio para el lector.

(6) Sea $F : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ dada por $F(\delta_0, \delta_1, \delta_2) = (\delta_0 + \delta_1 + \delta_2) mod(2)$ (resto de la división por 2). Encontrar una proposición φ que tenga a F como tabla de verdad. Esto es, debe satisfacer $[\![\varphi]\!]_f = F(f(p_1), f(p_2), f(p_3))$.

---

(7) Determine $\varphi[((\neg p_0) \to p_3)/p_0]$ para cada uno de los siguientes φ:

$\varphi = ((p_1 \wedge p_0) \to (p_0 \to p_3))$
$\varphi = ((p_3 \leftrightarrow p_0) \vee (p_2 \to (\neg p_0)))$.

- $\varphi = ((p_1 \wedge ((\neg p_0) \to p_3)) \longrightarrow (((\neg p_0) \to p_3) \longrightarrow p_3)$
- $\varphi = ((p_3 \longleftrightarrow ((\neg p_0) \to p_3)) \vee (p_2 \to \neg((\neg p_0) \to p_3))$

* Guía B_3:

(1) Pruebe que $\models \varphi \to \psi$ si y sólo si $\{\varphi\} \models \psi$.

. $\{\varphi\} \models \psi \;\longleftrightarrow\; [\![\varphi]\!] = 1$, luego $[\![\varphi \to \psi]\!] = 1$ si $[\![\psi]\!] = 1$.

. Supongamos ($\Rightarrow$) que "$\varphi \to \psi$" es tautología, luego $[\![\varphi]\!] = 0/1$ y $[\![\psi]\!] = 1$. Por ende $\{\varphi\} \models \psi$, $[\![\varphi]\!] = 1$.
Finalmente, ($[\![\varphi]\!] = 1$ y $[\![\psi]\!]$) $\models \{\varphi\} \models \psi$

. ($\Leftarrow$) Es trivial , puesto que si $\{\varphi\} \models \psi$, $[\![\varphi]\!] = 1$.

---

(2) Suponga que φ satisface $\{\varphi\} \models \perp$. Si $[\![\_]\!]$ es una valuación, cómo es $[\![\varphi]\!]$?

(3) Complete las siguientes derivaciones agregando la abreviatura de la regla utilizada en cada paso, y los corchetes en las hipótesis canceladas, suponiendo que en cada paso se cancelan la mayor cantidad de hipótesis posibles. En la primera derivación se deben cancelar todas las hipótesis. En las segunda sólo debe quedar φ sin cancelar.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\psi \qquad \dfrac{[\varphi]^3 \quad [\varphi\to\psi]^1}{\psi}\to I_2}{\perp}}{\dfrac{\neg\varphi}{\neg\psi\to\neg\varphi}\to I_3}}{(\varphi\to\psi)\to(\neg\psi\to\neg\varphi)}\to I_1$$

$$\dfrac{[\![\dfrac{\varphi}{\psi\to\varphi}\to I_1]\!]_2 \qquad [\![\dfrac{\dfrac{\varphi \quad [\neg\varphi]^2}{\perp}}{\dfrac{[\psi]^1}{\neg\varphi\to\psi}}\to I_2]\!]_2}{(\psi\to\varphi)\wedge(\neg\varphi\to\psi)}$$

Recuerde: $\neg\varphi$ es una abreviatura de $\varphi\to\perp$.

(4) Encuentre derivaciones para:

(a) $\{\varphi\wedge\gamma,\ \varphi\to(\psi\wedge\gamma)\}\vdash\psi$

(b) $\{\varphi\to(\psi\to\gamma),\}\vdash\psi\to(\varphi\to\gamma)$

(c) $\{\varphi\}\vdash\neg(\neg\varphi\wedge\neg\psi)$

(d) $\vdash(\varphi\to\psi)\to((\varphi\to(\psi\to\gamma))\to(\varphi\to\gamma))$

a)

$$\dfrac{\dfrac{\varphi\to\psi\wedge\gamma \qquad \dfrac{\varphi\wedge\gamma}{\varphi}\wedge E}{\psi\wedge\gamma}\to E}{\psi}\wedge E$$

b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi\wedge\psi}{\varphi}\wedge E \quad \wedge \quad \dfrac{\gamma\wedge\psi}{\gamma}\wedge E}{\gamma}\wedge E}{\varphi\longrightarrow\gamma}\to I_2}{\psi\longrightarrow(\varphi\longrightarrow\gamma)}\to I$$

c)

$$\dfrac{\dfrac{\varphi}{(\varphi\vee\psi)}\vee I}{\neg(\neg\varphi\wedge\neg\psi)}\text{MO}$$

d)

$$\dfrac{\dfrac{\gamma}{(\varphi\longrightarrow\gamma)}\to I}{(\varphi\longrightarrow(\psi\longrightarrow\gamma))\longrightarrow(\varphi\to\gamma)}\to I$$

(5) Lo siguiente ya fue demostrado en esta guía. ¿En qué ejercicio?

$$\{(\neg(p_2 \to p_5))\} \vdash \neg(\neg(\neg(p_2 \to p_5)) \wedge \neg(p_3 \to ((\neg p_2) \wedge p_5)))$$

. $\{(\neg(p_2 \to p_5))\} \vdash \neg(\neg(\neg(p_2 \to p_5)) \wedge \neg(p_3 \to ((\neg p_2) \wedge p_5)))$

$\vdash \neg((p_2 \to p_5) \wedge \neg(p_3 \to ((\neg p_2) \wedge p_5)))$

$\vdash (\neg p_2 \to \neg p_5) \wedge (\neg p_3 \to \neg((\neg p_2) \wedge p_5)))$

$\vdash (\neg p_2 \to \neg p_5) \wedge \neg p_3 \to (p_2 \vee \neg p_5)$

$\vdash \neg(p_2 \to p_5) \wedge \neg(p_3 \to (\neg p_2 \wedge p_5))$

$\neg(\neg(\neg p_2 \to \neg p_5) \wedge \neg(\neg(p_3 \to (\neg p_2 \wedge p_5))$

$\equiv$

$\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \longrightarrow$ Ej. 4c)

---

(6) Determine cuáles son válidas. Para las que lo son, encuentre derivaciones que tengan como hipótesis el conjunto de la izquierda, y como conclusión la proposición de la derecha.

(a) $\{\neg\varphi, \psi \to \varphi\} \models \gamma \to (\psi \to \bot)$ ✗
(b) $\{\neg\varphi\} \vdash \psi \to (\varphi \wedge \neg\psi)$ ✗
(c) $\{\neg\varphi\} \models \psi \to (\varphi \to \neg\psi)$ ✓

a_ $\neg\varphi \equiv 1 \to \varphi \equiv 0$; $\psi \to \varphi \equiv 1 \to (\psi \equiv 0/1 \wedge \varphi \equiv 1) \vee (\psi \equiv 0 \wedge \varphi \equiv 0)$

$* \; \gamma \to \neg\psi \equiv$. $\gamma \to 1$
. $\gamma \to 0$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]_2 \qquad \neg\varphi}{\bot}\;\to E}{\neg\psi}\; I_3}{\varphi \longrightarrow \neg\psi}\; I_2}{\psi \longrightarrow (\varphi \longrightarrow \neg\psi)}\; I_1$$

c) 1_ ψ
2_ φ

5a) $\vdash \varphi$ implica $\vdash \psi \to \varphi$ * Luego: 1- ψ

$$\underbrace{\dfrac{\begin{matrix}[\ \ ] \\ \vdots\ D_1\end{matrix}}{\varphi}}_{\forall \text{ hipotesis canceladas}} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\ \ ] \\ \vdots\ D_2\end{matrix}}{\psi \to \varphi} \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix}[\ \ ] \\ \vdots\ D_1 \\ \varphi\end{matrix}}{\psi \to \varphi}\ \to I_1$$

b) $\varphi \vdash \psi \ \wedge\ \neg\varphi \vdash \psi \longrightarrow \vdash \psi$

$$\dfrac{\begin{matrix}\varphi \\ \vdots\ D_1\end{matrix}}{\psi} \ \wedge\ \dfrac{\begin{matrix}\neg\varphi \\ \vdots\ D_2\end{matrix}}{\psi} \longrightarrow \left.\dfrac{\begin{matrix}\varphi \\ \vdots\ D_1\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\neg\varphi \\ \vdots\ D_2\end{matrix}}{\psi}\ \right\}$$

* Luego

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \qquad \begin{matrix}\neg\varphi \\ \vdots\ D_2 \\ \psi\end{matrix}}{\varphi \wedge \psi}\ \wedge I}{\psi}\ \wedge E$$

* Guía B5:

(1) Pruebe lo siguiente. Para demostrar los casos $\nvdash$ enuncie claramente el o los resultados teóricos que permiten justificar la afirmación.

(a) $\Gamma \vdash \neg \bot$

(b) $\{p_0\} \nvdash p_1$

(c) $\{\bot\} \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$

(d) $\{\neg p_0,\ \neg(p_1 \wedge (\neg p_2))\} \nvdash p_2 \to p_0$

a.- $\Gamma \vdash \neg\bot$, luego por criterio de la consistencia:

. si $\exists$ v tq. $[\![\psi]\!]_v = 1$ $\forall$ $\psi \in \Gamma$, entonces Γ es consistente.

Demostración. Supongamos por el absurdo que $\Gamma \vdash \bot$. Por la Corrección de la lógica proposicional, $\Gamma \models \bot$, así que para toda asignación v tal que $[\![\Gamma]\!]_v = 1$, se debe dar $[\![\bot]\!]_v = 1$. Pero como para toda v, $[\![\bot]\!]_v = 0$, llegamos a una contradicción. $\square$

b.- Por T. de corrección: si $\Gamma \vdash \varphi \to \Gamma \models \varphi \equiv \Gamma \nvdash \varphi \longrightarrow \Gamma \not\models \varphi$

2. Hallar derivaciones que muestren:

✓ a) [1 pto] $\vdash (\varphi \to \psi) \land (\chi \to \sigma) \to (\varphi \land \chi \to \psi \land \sigma)$.

✓ b) [1 pto] $\{\neg\varphi\} \vdash \varphi \lor \psi \leftrightarrow \psi$.

✓ c) [1 pto] $\vdash (\varphi \to \psi) \lor (\varphi \to \neg\psi)$.

b) $\{\neg\varphi\} \vdash \varphi \lor \psi \leftrightarrow \psi$

c) $\vdash (\varphi \to \psi) \lor (\varphi \to \neg\psi)$

- φ_1
- ψ_2
- $\neg\varphi_3$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\varphi]_2}{\neg\varphi \lor \psi}\lor I \qquad \dfrac{\dfrac{[\varphi]_1 \; [\neg\varphi]_2}{\bot} \to E}{\psi}\bot \qquad [\psi]_2}{\psi}\lor E_2}{(\varphi \to \psi)} \to I_1}{(\varphi \to \psi) \lor (\varphi \to \neg\psi)} \lor I$$

$\vdash \bot \Leftrightarrow \models \bot = 1$ ab!

$[\![\bot]\!]_v = 0$

3. Decida cuáles de los siguientes conjuntos son consistentes. Justifique dando una valuación o una derivación según sea el caso.

a) [1 pto] $\{p_0, p_0 \to (p_1 \land p_2), p_1 \to (p_3 \land (p_4 \land (p_5 \land p_6))), p_2 \to (p_3 \to \bot)\}$.

b) [1.5 pto] $\{\varphi \in PROP : (p_0 \to \varphi)$ es una tautología$\}$. Es decir, el conjunto de todas las φ tal que $\models p_0 \to \varphi$.

a) 1. $[\![p_0]\!]_v = 0$

2. $[\![p_0 \to (p_1 \land p_2)]\!]_v = 0$

$1 \to 0 = 0$

$[\![p_0]\!] = 1$

Contradicción •1 necesito que $p_0 = 0$ para ser inconsistente, luego en •2 necesito $P_0 = 1$. abNido ya antes era 0

b) por el teorema de correcion son equivalentes la derivacion y la valuacion, entonces podemos derivador:

Como $(\models p_0 \Rightarrow \varphi)$ entonces $(p_0 \Rightarrow \varphi \;\vdots\; \bot)$ $D\cancel{A}$

- $p_0 1$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\bot}{\neg p_0}\to I \qquad [p_0]}{\bot}\to E}{\varphi}\bot}{p_0 \to \varphi}\to I_1$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\varphi \\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\varphi \to \psi} \to I$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\varphi}{\varphi \lor \neg\varphi}\lor I \qquad \dfrac{[\varphi]_2 \; [\neg\varphi_3]}{\bot}\to E \qquad \dfrac{[\psi]_3 \; [\varphi]_2}{\bot}}{\bot}\lor E_3}{\bot}RAA_2}{\dfrac{\varphi}{p_0 \to \varphi}\to I_2}$$

1. p_0
2. $\neg\varphi$
3. φ