Ejercicio 2:

La frecuencia de resonancia (en Hz) de las raquetas de tenis de cierto tipo tienen distribución normal con media μ y varianza σ^2 conocida. Se toma una muestra aleatoria de tamaño n.

a) ¿Cuál es el nivel de confianza del intervalo $\bar{x} \pm 2.81\sigma/\sqrt{n}$?

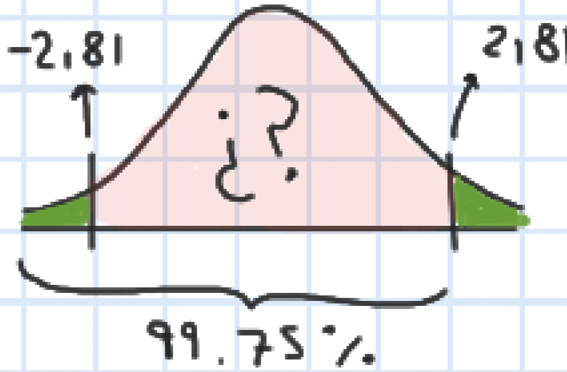
b) ¿Cuál es el valor de $z_{\alpha/2}$ que corresponde a un intervalo de confianza para μ del 99.7 %?

c) Con la muestra dada se obtuvieron los siguientes intervalos de confianza para μ: (114.4 , 115.6) y (114.1 , 115.9).

  i) ¿Cuál es el valor de la media muestral?

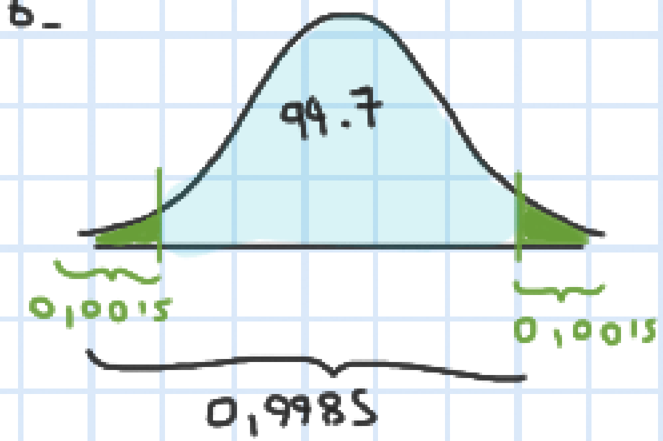
  ii) ¿Cuál de estos intervalos tiene mayor nivel de confianza?

a_ $P\left(\bar{x} - 2,81\,\sigma\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x} + 2,81\,\sigma\sqrt{n}\right) = (1-\alpha)$, luego tenemos que:



. Luego $\phi(0,9975) = 2,81$ y
$1 - 0,9975 = 0,0025$. Finalmente,
$0,9975 - 0,0025 = 0,995$.
* 99.5 %.

b_



* $\phi(0,9985) = 2,96$, luego $z_{\alpha/2} = 2,95$

c_ para μ, (114.4 , 115.6) y (114.1 , 115.9). Luego, veamos $114.1 + 115.6 + 114.1 + 115.9 = 460 / 2 = 115$. Por ende, $\bar{x} = 115$

ii) Esta pregunta puede ser respondida sin necesidad de calculos. Veamos que el segundo intervalo es mas grande que el primero, en terminos de longitud. Luego, por teoria, sabemos que a mayor nivel de confianza, se pierde precision. Osea que podemos decir, que si u intervalo tiene menor precision que otro, porque es mas extenso, tiene mayor nivel de confianza.

Ejercicio 1:

Se desea un intervalo de confianza para la media verdadera μ de pérdida de carga para cierto tipo de motor de inducción(en watts), cuando la corriente de línea se mantiene en 10 amps para una velocidad de 1500 rpm. Suponga que la pérdida de carga está normalmente distribuída con $\sigma = 3$.

a) Calcular un intervalo de confianza del 95 % para μ cuando $n = 25$ y $\bar{x} = 58.3$.

b) Calcular un intervalo de confianza del 95 % para μ cuando $n = 100$ y $\bar{x} = 58.3$. Compare la longitud de este intervalo con la obtenida en (a).

c) Calcular un intervalo de confianza del 99 % para μ cuando $n = 100$ y $\bar{x} = 58.3$. Compare la longitud de este intervalo con la obtenida en (b).

d) ¿Qué tan grande debería ser n para que la longitud del intervalo de confianza del 99 % para μ sea a lo sumo 1?

a_

, en $X \sim N(0,1)$ veamos $\phi(0{,}975) = 1{,}96$.
* Por ende $Z_{\alpha/2} = 1{,}96$ y $-Z_{\alpha/2} = -1{,}96$.
Luego, reemplazamos en ⊛

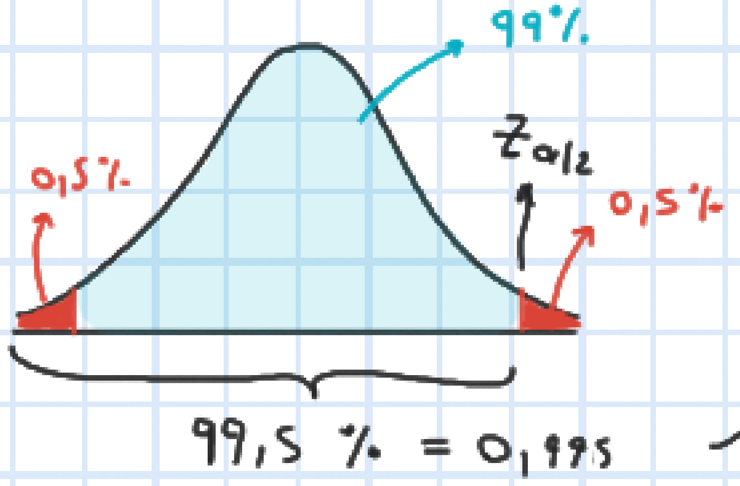
⊛ $P((\bar{X} - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})) = (1 - \alpha)$, entonces:

$P(58{,}3 - 1{,}96 \cdot \frac{3}{5} \le \mu \le 58{,}3 + 1{,}96 \cdot \frac{3}{5}) =$

$P(57{,}124 \le \mu \le 59{,}476) = 0{,}95 \Rightarrow [57{,}124, 59{,}476]$

b_ Para un nivel del 95%, tengo $Z_{\alpha/2} = 1{,}96$. Luego veamos que: $P(58.3 - 1{,}96 \cdot \frac{3}{10} \le \mu \le 58{,}3 + 1{,}96 \cdot \frac{3}{10}) = 0{,}975$
$P(57.712 \le \mu \le 58{,}888) = 0{,}975$, $[57.712, 58{,}888]$.
Tiene menor long. que el anterior, y por ende es más preciso.

c_



$\phi(0{,}995) = 2{,}58$

$P(58{,}3 - 2{,}58 \cdot \frac{3}{10} \le \mu \le 58{,}3 + 2{,}58 \cdot \frac{3}{10}) = 0{,}99$,
$P(57{,}526 \le \mu \le 59{,}072)$, entonces $[57{,}526, 59{,}072]$ (mayor que en b) y menos preciso.

d_ $1 - \alpha = 0{,}99$, long ≤ 1 en donde long $= 2 \cdot Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

. $2 \cdot Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le 1$, $2 \cdot Z_{\alpha/2} \cdot \sigma \le \sqrt{n}$, $(2 \cdot Z_{\alpha/2} \cdot \sigma)^2 \le n$,

$(2 \cdot 2{,}58 \cdot 3)^2 = 239.6304$

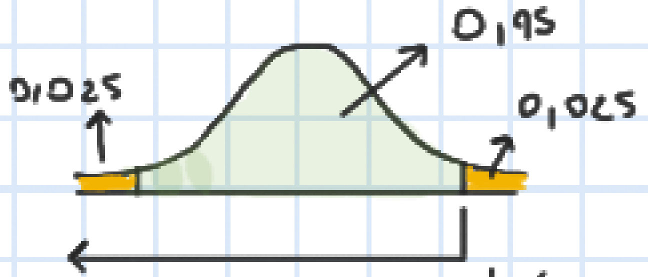
Ejercicio 3:

Un artículo analiza el uso de fotografía infrarroja en color para la identificación de árboles normales en bosques de pino de Oregon. Para una muestra de 69 árboles sanos, la media muestral de densidad de la capa de tinte fue de 1.028 y la desviación estándar muestral de 0.163.

a) Calcular un intervalo de confianza del 95 % para la media poblacional de la densidad de capa de tinte μ para estos pinos.

b) Suponga que los investigadores habían hecho una estimación de 0.16 para el valor de s antes de reunir los datos, ¿qué tamaño muestral sería necesario para obtener un intervalo de longitud a lo sumo 0.05 y con un nivel de confianza del 95 %?

a_ $n = 69$, $\bar{x} = 1{,}028$, $\sigma = 0{,}163$, $\sqrt{n} = 8{,}30$, $(1-\alpha) = 0{,}95$



$0{,}975 \simeq \phi(0{,}975) = 1{,}96 = z_{\alpha/2}$

* $1{,}028 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}163 / 8{,}30 =$ $(0{,}9895 , 1{,}0665)$

* $IC = [0{,}9895 , 1{,}0665]$

b_ $n \geq \left(2 \cdot z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{L}\right)^2$, $n \geq \left(2 \cdot 1{,}96 \cdot \frac{0{,}16}{0{,}05}\right)^2 = 158$

Ejercicio 4:

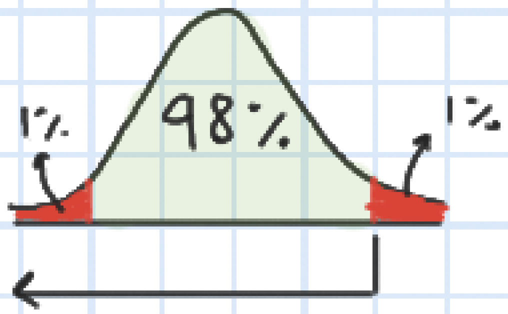
Se seleccionó una muestra aleatoria de 539 sujetos pertenecientes a cierta ciudad. Se determinó que 133 de ellos poseían por lo menos un arma de fuego.

a) Determine un intervalo de confianza del 98 % para la verdadera proporción de propietarios de armas en esa ciudad.

b) ¿Qué tamaño de muestra sería necesario para obtener un intervalo de longitud a lo sumo 0.10 y con un nivel de confianza del 98 %, independiente del $\hat{p}$?

* $n = 539$, 133 poseen arma. Osea que 0,2467 de los 539 tienen armas

a_



$0{,}98 + 0{,}01 = 0{,}99 \simeq \phi(0{,}99) = 2{,}33$

* IC de nivel $1-\alpha$ para $\hat{p}$ $\left(\hat{p} = \frac{539}{133}\right) =$ $\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ ▲

▲ $0{,}2468 \pm 2{,}3 \cdot \sqrt{\frac{0{,}2468(1-0{,}2468)}{539}} = [0{,}2035 , 0{,}2900]$

b_ $n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2}}{L}\right)^2 \simeq 543$

Ejercicio 5:

Se quiere analizar si las determinaciones del contenido de un ácido que realiza un laboratorio son aceptables. Se tomó una muestra de alimento conteniendo 78 mg/kg de este ácido y se analizaron las siguientes determinaciones independientes obtenidas por el laboratorio:

80 81 77 80 77 74 77 79 81 79

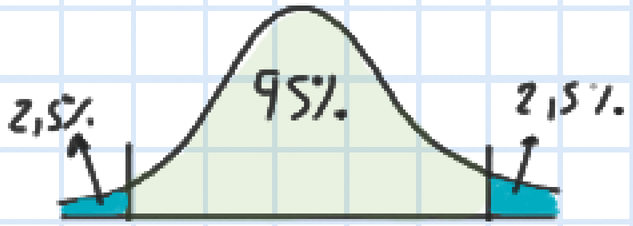
Suponga que el contenido del ácido tiene distribución normal.

a) Determine un intervalo de 95 % de confianza para el contenido medio del ácido según el laboratorio y a partir del mismo concluya si las mediciones del laboratorio son aceptables.

b) ¿Cuál sería su conclusión en el inciso a) si el contenido real del ácido en la muestra de alimento fuera de 82 mg/kg?

a_ $\bar{x} = 78{,}5$

$n = 10$



$(1-\alpha) = 0{,}95$, $\alpha = 0{,}025$

$* \; t_{0{,}025;9} = 2{,}262$

$\downarrow$

$Z_{\alpha/2}$

· $\phi(0{,}975) = 1{,}96$

$\rightarrow S^2_{n-1} = 1/n-1 \cdot \sqrt{\left(\sum_{1}^{n} x_i^2\right) - n\bar{x}} = 2{,}2236$

$\rightarrow 78{,}5 \pm 2{,}262 \cdot \frac{2{,}2236}{\sqrt{10}} = [76{,}9094 , 80{,}0906]$

Usamos distr. T-Student puesto que no conocemos sigma cuadrado y n es menor a 40. Por tanto calculamos t(0,025) y con 9 grados de libertad debido a n -1 (10 - 1) = 9

* IC aceptable pues $\bar{x}$ está incluido en el mismo.

b) En ese caso las mediciones no son aceptables.

Ejercicio 6:

Un triatlón es una competencia deportiva que incluye pruebas de natación, ciclismo y carrera. Un artículo reporta una investigación donde participaron triatletas hombres. Se registraron las máximas pulsaciones del corazón (latidos/minutos) durante la actuación en cada uno de los tres eventos. En natación, la media y desviación estándar muestrales fueron 188.0 y 7.2, respectivamente. Se supone que la distribución del ritmo cardíaco es aproximadamente normal.

a) Si participaron 40 atletas:

i) determine un intervalo de confianza del 98 % para la media poblacional de ritmo cardíaco en la prueba de natación.

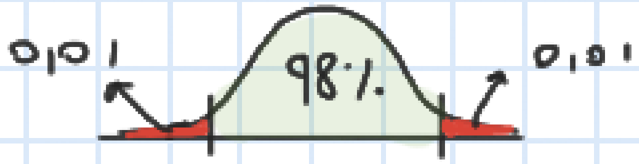
ii) determine un intervalo de confianza del 98 % para la varianza poblacional de ritmo cardíaco en la prueba de natación.

b) Si participaron 9 atletas:

i) determine un intervalo de confianza del 95% para la media poblacional de ritmo cardíaco en la prueba de natación.

ii) determine un intervalo de confianza del 95% para la varianza poblacional de ritmo cardíaco en la prueba de natación.

$* \; \bar{x} = 188 , \sigma = 7{,}2$



a_

* Para la media, con $n = 40$ y $(1-\alpha) = 0{,}98$ y $\alpha = 0{,}02$. Luego $z_{\alpha/2} = \phi(0{,}99) = 2{,}33$

$\rightarrow 188 \pm 2{,}33 \cdot 7.2/6{,}3245 = [185{,}3474 , 190{,}6525]$

ii) $\left[\frac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} , \frac{(n-1)\, s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}}\right]$, $* \; \chi^2_{0{,}01, 39} = 62{,}426$

$* \; \chi^2_{0{,}99, 39} = 21{,}425$

$\left[\frac{39 \cdot 51{,}84}{62{,}426} , \frac{39 \cdot 51{,}84}{21.425}\right]$

$= [32{,}3865 , 94{,}3645]$

b_ i) $[182{,}4656 , 193{,}5344]$

ii) $[23{,}6523 , 190{,}2385]$

Ejercicio 7:

El intervalo de confianza del 95 % para la media poblacional de una distribución normal con varianza desconocida fue (229.764 , 233.504), para una muestra de tamaño 5. Si ahora usted considera que es mejor un intervalo de confianza del 99 %, ¿cuáles son las cotas de ese intervalo?

* $n=5$, $(1-\alpha)=0{,}95 \longrightarrow \alpha/2 = 0{,}025 \longrightarrow t_{0{,}025,4} = 2{,}776$

$\longrightarrow \bar{x} = (229{,}764 + 233{,}504)/2 = 231{,}634$

$\longrightarrow 2\cdot t_{\alpha/2}\cdot \sigma/\sqrt{n} = (229{,}764 - 233{,}504)$, $2\cdot(2{,}776)\cdot\frac{\sigma}{2{,}236} = 3{,}74$, $\sigma = \frac{3{,}74}{2(2{,}776)}\cdot 2{,}236 \doteq 1{,}5062$

* $t_{0{,}005}\ \frac{1.5062}{2.236} = 4.604(0.6736) = 3.1013$

$\longrightarrow [228.5326 , 234.7353]$

Ejercicio 8:

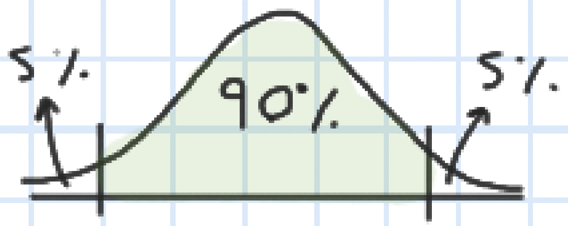
El tiempo de reacción (TR) ante un estímulo es el período que comienza con la presentación de un estímulo y termina con el primer movimiento discernible de cierto tipo. Un artículo reporta que la media muestral del TR para 16 nadadores, al arranque con un disparo, fue de 0.214' y la desviación estándar fue de 0.036'. Suponiendo que el TR tiene aproximadamente distribución normal, obtener:

a) un intervalo de confianza del 90 % para la verdadera media del TR de los nadadores.

b) un intervalo de confianza del 90 % para la desviación estándar del TR de los nadadores.

* $\bar{x} = 0{,}214$, $\sigma = 0{,}036$, $n = 16$

a-



$0{,}95 \simeq \Phi(0{,}95) = 1{,}65$

* $0{,}214 \pm 1{,}65\cdot\frac{0{,}036}{4} =$

$[0{,}19915 , 0{,}22885]$

b- $\left[\sqrt{\frac{15\cdot 0{,}001296}{24{,}996}} , \sqrt{\frac{15\cdot 0{,}001296}{7{,}261}}\right] = [0{,}0279 , 0{,}0517]$

Ejercicio 9:
Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una distribución uniforme en el intervalo $[0, \theta]$. Si $Y = \text{máx}(X_i)$, se puede demostrar que la función densidad de $U = Y/\theta$ está dada por:

$$f_U(u) = \begin{cases} nu^{n-1} & \text{si } 0 \leq u \leq 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

a) Pruebe que:

$$P\left((\alpha/2)^{1/n} \leq \frac{Y}{\theta} \leq (1-\alpha/2)^{1/n}\right) = 1-\alpha$$

Utilice este resultado para hallar un intervalo de confianza para θ del $(1-\alpha)100\,\%$.

b) Pruebe que: $P\left(\alpha^{1/n} \leq \frac{Y}{\theta} \leq 1\right) = 1-\alpha$ y utilice este resultado para hallar un intervalo de confianza para θ del $(1-\alpha)100\,\%$.

c) ¿Cuál de los dos intervalos es más corto?

d) Si el tiempo de espera de un autobús por la mañana está uniformemente distribuído y los tiempos de espera observados son: 4.2, 3.5, 1.7, 1.2 y 2.4, deduzca un intervalo de confianza del 95 % para θ usando el más corto.

a – $$\int_{\frac{\alpha}{2}^{1/n}}^{(1-\frac{\alpha}{2})^{1/n}} n u^{n-1}\, du = n \cdot \frac{u^n}{n} \Big|_{\alpha/2^{1/n}}^{(1-\frac{\alpha}{2})^{1/n}} = \left((1-\alpha/2)^{1/n}\right)^n - \left((\alpha/2)^{1/n}\right)^n$$

$$= (1-\alpha/2) - (\alpha/2) = \boxed{1-\alpha}$$

distribuciones uniformes son continuas(se intega los intervalos)

$$* \; P\left(\frac{1}{\alpha/2^{1/n}} \geq \frac{\theta}{Y} \geq \frac{1}{(1-\alpha/2)^{1/n}}\right) = P\left(\frac{Y}{(1-\alpha/2)^{1/n}} \leq \theta \leq \frac{Y}{\alpha/2^{1/n}}\right)$$