Ejercicio 1: i) Los valores de contenido de Nitrógeno (mg/L) en muestras de aguas residuales, registrados a la salida de una planta industrial, fueron: 11,6; 19,2; 14,9; 7,3; 16,6; 9,8; 11,6; 9,7; 15,1; 14,4; 5,1; 28,8 y 15,9.

a) Dar cuatro medidas de posición y tres medidas de dispersión para estos datos.

b) Determinar si hay datos atípicos para estas mediciones. Justifique su respuesta.

ii) Se realizó una investigación en personas que sufren leucoplasia oral. El 85% de ellos fuman o consumen alcohol, el 55% consume alcohol (A) y el 65% fuma (F).

a) ¿Cuál es la probabilidad que la persona no fume y consuma alcohol?

b) ¿Son disjuntos o excluyentes los eventos F y A?

c) ¿Son independientes los eventos F y A?

d) Dado que se selecciona un sujeto fumador ¿cuál es la probabilidad que consuma alcohol?

a - Por definicion, sabemos que las medidas de posicion pueden ser la media, mediana, cuantiles. Mientras que las de dispersion son la varianza, desvio muestral, rango muestral, coeficiente de variacion, entre otros. Primero ordenemos los datos y calculemos las medidas:

5.1 , 7.3 , 9.7 , 9.8 , 11.6 , 11.6 , 14.4 , 14.9 , 15.1 , 15.9 , 16.6 , 19.2 , 28.8

Luego, tenemos la mediana igual a 14.4 , el percentil 25 = 9.7 + 9.8 / 2 y el 75 = 15.9 + 16.6 / 2. Finalmente, tenemos mediana 14.4, Q1 9.75 y Q3 16.25

En las medidas de dispersion dare rango muestral (Max xi - Min xi) ,variacion y desvio estandar muestral. Rango muestral 23.7 , Varianza 33.0824 y finalmente desvio estandar 5.7517

b - Veamos si hay datos atipicos observando si es que existen datos fuera de 1.5*RIC. Primero calculemos RIC = Q3 - Q1, que es 16.25 - 9.75 = 6.5, luego 6.5 * 1.5 es igual a 9.75. Ahora veamos los bigotes para determinar si existen datos atipicos en nuestra muestra. Q1 - 1.5 * RIC y Q3 + 1.5 * RIC = 0 y 25.5, es decir que si existe algun dato antes que 0 o despues que 25.5 sera considerado atipico. Finalmente en este caso el unico dato atipico presente es 28.8

---

ii) Datos: $P(A \cup F) = 0{,}85$, $P(A) = 0{,}55$, $P(F) = 0{,}65$, $P(NF) = 0{,}35$

a - $P(A \cap NF) \doteq P(A) \cdot P(NF) \doteq 0{,}55 \cdot 0{,}35 = 0{,}1925$

b - No son disjuntos puesto que puede haber individuos en la muestra que que fumen y beban alcohol, por lo que la interseccion entre F y A dejaria de ser vacia y por el contrario disjunta.

d - Sí, puesto que $(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Veamoslo: $P(A \cup F) = P(A) + P(F) - P(A \cap F)$, luego tengo que:

* $P(A \cap F) = P(A) + P(F) - P(A \cup F) = 0{,}55 + 0{,}65 - 0{,}85 = 0{,}35$. Luego $P(A) \cdot P(F) = 0{,}3575$, por ende son independientes.

d - $P(A \mid F) = \dfrac{P(A \cap F)}{P(F)} = \dfrac{0{,}35}{0{,}65} \doteq 0{,}5384$

Ejercicio 2: Sea X una variable aleatoria con función de distribución acumulada dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < -1 \\ a & si\ x \in [-1\ ;\ 1) \\ b & si\ x \in [1\ ;\ 6) \\ c & si\ x \geq 6 \end{cases}$$

para constantes a, b y c números reales tales que $0 < a < b < c$.

a) Determinar si X es una variable aleatoria discreta o continua. Justificar su respuesta.
b) Hallar el valor de las constantes a, b y c tales que $E(X) = 2{,}1$ y $E(X^2) = 11{,}5$.
c) Dar la función probabilidad de masa o función densidad de probabilidad de X según corresponda.
d) Calcula el valor medio y varianza para $W = -5\,X + 10$.

a - Notemos que el dominio de la funcion de distribucion acumulada presenta "saltos" y no depende de x. Por estas razones estamos ante una variable aleatoria discreta. Ya que el dominio toma "individuos" finitos y numerables.

b_ $E(x) = \sum x_i \cdot p(x_i)$, luego :

$\rightarrow -1 \cdot a + 1 \cdot (b-a) + 6 \cdot (c-b) \doteq -a + b - a + 6c - 6b \doteq$
$-2a + 6c - 5b$. Luego, $2{,}1 = -2a + 6c - 5b$

$E(x^2) = \sum x_i^2 \cdot p(x_i)$. Luego, $11{,}5 = (-1)^2 a + (1)^2 \cdot (b-a) + 36(c-b) \doteq$

$\rightarrow \cancel{a} + b - \cancel{a} + 36c - 36b \doteq 11{,}5 = 36c + 35b$, luego "$c = 1$".
$\rightarrow b = 0{,}7$
$\rightarrow a \doteq 2{,}1 = -2a + 0{,}7 - 5(0{,}7) \doteq a = 0{,}2$

c_

$$*F(x) = \begin{cases} 0 & , x < -1 \\ 0{,}2 & , x\,[-1,1) \\ 0{,}7 & , x\,[1,6) \\ 1 & , x \geq 6 \end{cases} \Rightarrow *f(x) \begin{cases} 0{,}2 & si\ X = -1 \\ 0{,}5 & si\ X = -1 \\ 0{,}3 & si\ X = 6 \\ 0 & c.c \end{cases}$$

d_ $E(W) \doteq E(-5x + 10) \doteq -5 \cdot E(x + 10) \doteq -5 \cdot E(x) + 10 \doteq$
$-5(2{,}1) + 10 \doteq -0{,}5$ ✓

Ejercicio 3: La altura de los hombres (X) de una población tiene una distribución normal con una media de 170 cm y un desvío estándar de 1,5 cm y la altura de las mujeres (Y) tiene una distribución normal con una media de 164 cm y un desvío estándar 1,5 cm.

a) Si se elige un hombre al azar de esta población, ¿cuál es la probabilidad de que su altura esté comprendida entre 168 y 173 cm?

b) Hallar el percentil 7% o cuantil 0,07 para la variable Y.

c) Se elige un hombre y una mujer al azar de esta población, ¿cuál es la probabilidad de que el hombre sea más alto que la mujer?

d) Si se eligen 9 mujeres al azar

i) ¿cuál es la probabilidad de que el promedio muestral de las alturas esté comprendida entre 162 y 165 cm?

ii) ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos 7 de ellas tengan una altura superior a 165 cm?

* $X \sim N(\mu, \sigma)$, $X \sim (170, 1{,}5)$
* $Y \sim N(\mu, \sigma)$, $Y \sim (1{,}64, 1{,}5)$

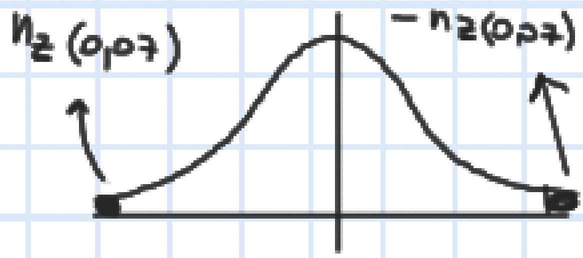
a_ $P(168 \leq X \leq 173)$, luego estandarizamos. $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$.

$\rightarrow P\left(\frac{168-170}{1{,}5} \leq \frac{X-170}{1{,}5} \leq \frac{173-170}{1{,}5}\right) = P(-1{,}33 \leq Z \leq 2)$, luego tengo

$P(Z \leq 2) - P(Z \leq -1{,}33) = \phi(2) - \phi(-1{,}33) = \phi(2) - 1 + \phi(1{,}33)$

$= 0{,}9772 - 1 + 0{,}9082 = 0{,}8854$

b_ Percentil 7 es $n_Z(0{,}07)$ tq. $0{,}07 = P(Z \leq n_Z(0{,}07))$. Primero debemos estandarizar la variable para que distribuya a una Normal Estandar, entonces :



* $P\left(Z \leq \frac{n_Y(0{,}07) - 164}{1{,}5}\right) \doteq \phi\left(\frac{n_Y(0{,}07) - 164}{1{,}5}\right) = 0{,}07 \therefore$

$\because 0{,}07 = \phi(n_Z(0{,}07)) \longrightarrow n_Z(0{,}07)$. Luego $\frac{n_Y(0{,}07) - 164}{1{,}5} = n_Z(0{,}07)$ y despejo "$n_Y(0{,}07)$".

* $\underbrace{P(Z \geq -n_Z(0{,}07))}_{\text{simetría}} \doteq 1 - \underbrace{P(Z \leq -n_Z(0{,}07))}_{\text{opuesto}} \doteq 1 - 0{,}07 = 0{,}93$, $\phi(1{,}48) = 0{,}93$. $-n_Z(0{,}07) = 1{,}48$ y $n_Z(0{,}07) = -1{,}48$

* Luego $\frac{n_Y(0{,}07) - 164}{1{,}5} = -1{,}48$, $n_Y(0{,}07) = -1{,}48 \cdot 1{,}5 + 164 = \boxed{161{,}78}$

En resumen, puesto que el percentil 0,07 es un numero negativo, conviene buscar su opuesto, es decir el percentil 0,93 en este caso, y luego cambiarle el signo. Una vez cambiado el signo, ese resultado el percentil 0,07 en la Normal estandar, pero como lo queremos en relacion a nuestra variable Y, despejamos desde la estandarizacion y asi obtenemos el percentil en cuestion.

Que el hombre sea mas alto que la mujer significa que la diferencia entre las variables aleatorias debe ser positiva, es decir: $P(X - Y \geq 0)$, veamos a que distribuye $X - Y$. Osea, $X - Y \sim (\mu_X - \mu_Y, \sigma_X + \sigma_Y)$. Luego tenemos que $X - Y \sim N(6, 3)$. Veamos ahora $P(X - Y \geq 0) \doteq P\left(Z \geq \frac{0-6}{3}\right) \doteq P(Z \geq -2) \doteq 1 - P(Z \leq -2) \doteq 1 - \phi(-2) \doteq 1 - (1 - \phi 2) = 1 - 1 + \phi(2) = 0{,}9772$ $\rightarrow$ prob. de que el hombre sea más alto que la muser.

d) $n = 9$ (mujeres). Luego por teorema central del límite, se que mi v.a $\bar{Y} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$. Luego quiero ver que:

$*$ $P(162 \leq \bar{Y}_n \leq 165)$ por t.c.l $\doteq \phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\cdot\sqrt{n}\right) - \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\cdot\sqrt{n}\right) \doteq \phi\left(\frac{165-164}{\sigma}\cdot\sqrt{9}\right) - \phi\left(\frac{162-164}{\sigma}\cdot\sqrt{9}\right) \therefore$

$*$ $\bar{Y} \dot{\sim} N(\mu, \sigma^2/n)$, luego $\sigma^2/n \approx (1{,}5)^2/9 \doteq 0{,}25 \Rightarrow \sqrt{\sigma^2/n} = 0{,}75$

$\therefore \phi\left(\frac{165-164}{0{,}75}\right) = \phi(1{,}33) = 0{,}9082$

$\therefore \phi\left(\frac{162-164}{0{,}75}\right) = \phi(-2{,}66) = 1 - \phi(2{,}66) = 1 - 0{,}9961$

$0{,}9082 - 1 + 0{,}9961 = 0{,}9043$ ✓

ii) $P(Y > 165) \doteq 1 - P(Y \leq 165) \doteq 1 - P\left(Z \leq \frac{165-164}{\sqrt{9}}\right) \doteq 1 - \phi(0{,}67) \doteq 1 - 0{,}7486 \doteq 0{,}2514$

$\rightarrow$ Creamos R tq. $R \sim B(9, 0.2514)$

$\rightarrow$ Usamos Binomial, luego:

$\rightarrow$ $P(R \geq 7) = P(R=7) + P(R=8) + P(R=8) \doteq \binom{9}{7}\cdot(0{,}2514)^7\cdot(0{,}7486)^2 + \binom{9}{8}\cdot(0{,}2514)^8\cdot(0{,}7486)^1 + \binom{9}{9}\cdot(0{,}2514)\cdot(0{,}7486)^0 \doteq$

$0{,}0014$ ✓

Ejercicio 4: El fabricante afirma que sus tabletas de aspirinas pesan 1gr. Como parte de un estudio de medicamentos se tomó una muestra de 22 tabletas de aspirinas, producidas por éste fabricante, cuyo peso promedio muestral fue de 0,95 gramos y la desviación estándar muestral (s_{n-1}) de 0,05 gramos. Suponga que la variable peso de las tabletas tiene distribución normal.

a) Dar estimaciones por máxima verosimilitud para la media poblacional, para el desvío estándar poblacional y para el percentil 5 o cuantil 0,05 para la variable peso de las tabletas.

b) ¿Existe evidencia suficiente para decir que el peso medio de estas tabletas es menor a 1gr? Para responder: plantear las hipótesis adecuadas, dar el estadístico de prueba y su distribución bajo hipótesis nula, calcular el valor observado del estadístico de prueba, dar la región de rechazo y concluir en el contexto del problema al 5%

a) Si ahora suponemos que $\sigma = 0{,}045$ ¿existe evidencia suficiente para decir que el peso medio de estas tabletas es menor a 1gr? Para responder: plantear las hipótesis adecuadas, calcular el valor observado del estadístico de prueba y concluir en el contexto del problema al 5% usando el p-valor.

a. Por propiedades vistas en el teorico, podemos dar estimadores por el metodo de maxima verosimilitud para el promedio muestral y para la desviacion estandar.

$*$ Estimadores por MV:

$\rightarrow$ $\hat{\mu} = \bar{X}$, $\hat{\sigma} = S^2$, luego en este caso $\hat{\mu} = 0{,}95$, $\hat{\sigma} = \frac{\sqrt{n-1}\cdot S_{n-1}}{\sqrt{n}}$ $\Rightarrow 0{,}0489$

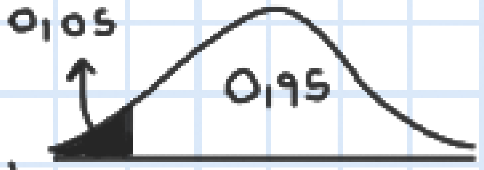
. Luego para p5 $\doteq \hat{\eta}_X(0{,}05) = \hat{\sigma}_{mv}\,\eta_Z(0{,}05) + \hat{\mu}_{mv}$

$*$ $\eta_Z(0{,}05) \doteq 1 - 0{,}05 \doteq 0{,}95 \doteq -\eta_Z(0{,}05) = 1{,}655$. Luego $\eta_Z(0{,}05) = -1{,}655$

$\rightarrow$ $\eta_X(0{,}05) = 0{,}0489\cdot(-1{,}655) + 0{,}95 = 0{,}8696 \therefore$

$\therefore \hat{\eta}_X(0{,}05)_{mv} = 0{,}8696$

b_ Caso $H_a: \mu < \mu_0$, luego el z_α que buscamos:



→ $H_0: \mu = 1$, estadístico $\frac{\bar{X} - \mu_0}{S_{n-1}} \cdot \sqrt{n} \sim t_{n-1}$ (caso c)

→ $t_{0,05,20} = -1,725$

→ $t_{obs} = \frac{0,95 - 1}{0,05} \cdot \sqrt{21} \doteq -4,2855$

$RR_\alpha: \{t \leq -t_\alpha\}$, luego $-4,2855 \leq -1,725$, por lo tanto tengo evidencia suf. para rechazar H_0.

---

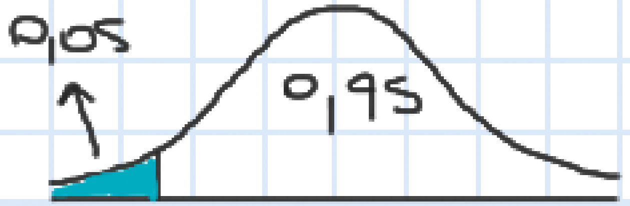
a. $\sigma = 0,045$. Luego caemos en el caso A:

→ $H_0: \mu = 1$, $H_a: \mu < 1$, $\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \sim N(0,1)$

→ $RR_\alpha: \{z \leq -z_\alpha\}$

* $z_{obs} = \frac{0,95 - 1}{0,045} \cdot \sqrt{21} = -5,0917$

. $RR_\alpha = \{z \text{ tq } z \leq -1,645\}$, luego $-5,0917 \leq -1,645$ por lo que rechazo H_0.



$-z_\alpha = -1,645$

Ejercicio 12.

Se proporcionan pares de valores p y niveles de significancia α. Para cada par exprese si el valor observado p llevaría al rechazo de H_0 al nivel de significancia dado.

a) valor $p = 0,084$, $\alpha = 0.05$.
b) valor $p = 0.003.$, $\alpha = 0,001$.
c) valor $p = 0,498$, $\alpha = 0,05$.
d) valor $p = 0,084$, $\alpha = 0,10$.
e) valor $p = 0,039$, $\alpha = 0,01$.
f) valor $p = 0,218$, $\alpha = 0,10$.

a _ No hay evidencia suficiente puesto que 0,084 > 0,05

b _ No hay evidencia suficiente, 0,003 > 0,001

c _ No hay evidencia suficiente, 0,498 > 0,05

d _ Rechazo H0 puesto que 0,084 < 0,10

e _ No hay evidencia suficiente, 0,039 > 0,01

f _ Rechazo H0, 0,218 < 0,10

¿Cómo concluir a un nivel α usando el p-valor?

- Si $p - valor \leq \alpha$ entonces rechazar H_0 a un nivel α
- Si $p - valor > \alpha$ entonces diremos que no hay evidencia suficiente para rechazar H_0 a un nivel α.

Ejercicio 13.
Calcular el valor p para una prueba basada en un estadístico Z en cada una de las siguientes situaciones y dar una conclusión a un nivel de significación de $\alpha = 0,05$.

a) $H_0 : \mu = 5$ versus $H_a : \mu > 5$
i) $z_{obs} - 1,42$ ii) $z_{obs} - 2,48$

b) $H_0 : \mu = 5$ versus $H_a : \mu < 5$
i) $z_{obs} = -1,96$ ii) $z_{obs} = -0,11$

c) $H_0 : \mu = 5$ versus $H_a : \mu \neq 5$
i) $z_{obs} = 2,10$ ii) $z_{obs} = -1,75$

Distribución del estadístico de prueba	Hipótesis Alternativa	$p - valor$
Z	Cola superior	$1 - \Phi(z_{obs})$
	Cola inferior	$\Phi(z_{obs})$
	Bilateral	$2(1 \quad \Phi(\lvert z_{obs}\rvert))$

a_ p-valor $= 1 - \phi(Z_{obs}) \doteq 1 - \phi(1,42) \doteq 1 - 0,9222 \doteq 0,0778$. Luego $0,0778 > 0,05$ por lo que no hay evidencia suficiente.
p-valor $= 1 - \phi(Z_{obs}) \doteq 1 - \phi(2,48) \doteq 1 - 0,9934 \doteq 0,0066$. Luego $0,0066 < 0,05$ por lo que rechazo H_0.

b_ p-valor $= \phi(Z_{obs}) \doteq \phi(-1,96) \doteq 1 - \phi(1,96) \doteq 1 - 0,9750 \doteq 0,025$. Luego $0,025 < 0,05$, rechazo H_0.
p-valor $= \phi(Z_{obs}) \doteq \phi(-0,11) \doteq 1 - \phi(0,11) \doteq 1 - 0,5438 \doteq 0,4562$. Rechazo H_0.

c_ p-valor $= 2 \cdot (1 - \phi(|Z_{obs}|)) \doteq 2 \cdot (1 - 0,9821) \doteq 0,0358$. Luego $0,0358 < 0,05$, rechazo H_0.
p-valor $= 2 \cdot (1 - \phi(|Z_{obs}|)) \doteq 2 \cdot (1 - 0,9599) \doteq 0,0802$. Luego no hay evidencia suficiente

---

Ejercicio 14.
En un experimento para probar los efectos de hormonas en el crecimiento de ganado para carne, se implantaron 200 mg de progesterona y 20 mg de benzoato de estradiol en el oído externo de 16 terneros seleccionados al azar, cada uno con un peso aproximado de 500 lb. Se encontró que el promedio muestral de peso ganado por día durante cierto número de días fue de 2,72 lb y la desviación estándar muestral de 0,41 lb por día. ¿Sugiere esta información que la media verdadera diaria de ganancia de peso para terneros tratados con el implante de hormonas excede 2,5 lb? Acotar el valor p y concluir a un nivel de significación de 0,05.

• $H_0: \mu = 2,5$, $H_a: \mu > 2,5$ $\longrightarrow$ p-valor $= 1 - \phi(Z_{obs})$.

* $Z_{obs} \longrightarrow \dfrac{2,72 - 2,5}{0,41} \cdot \sqrt{16} = 2,1463$

* p-valor $= 1 - \phi(2,1463) = 1 - 0,9838 = 0,162$. Luego $0,162 > 0,05$ por lo que no hay evidencia suf. para rechazar H_0. Por tanto no se puede determinar que la media verdadera excede las 2,5 lb.

Ejercicio 1:

Se desea un intervalo de confianza para la media verdadera μ de pérdida de carga para cierto tipo de motor de inducción(en watts), cuando la corriente de línea se mantiene en 10 amps para una velocidad de 1500 rpm. Suponga que la pérdida de carga está normalmente distribuída con $\sigma = 3$.

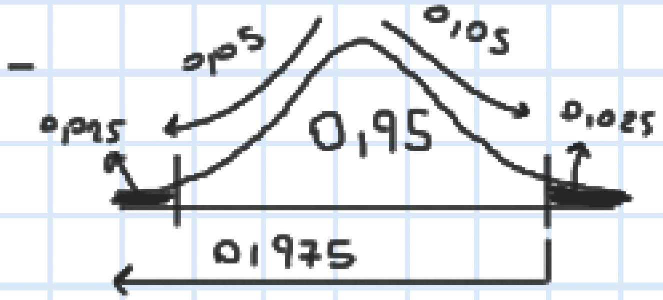
a) Calcular un intervalo de confianza del 95 % para μ cuando $n = 25$ y $\bar{x} = 58.3$.

b) Calcular un intervalo de confianza del 95 % para μ cuando $n = 100$ y $\bar{x} = 58.3$. Compare la longitud de este intervalo con la obtenida en (a).

c) Calcular un intervalo de confianza del 99 % para μ cuando $n = 100$ y $\bar{x} = 58.3$. Compare la longitud de este intervalo con la obtenida en (b).

d) ¿Qué tan grande debería ser n para que la longitud del intervalo de confianza del 99 % para μ sea a lo sumo 1?

a _

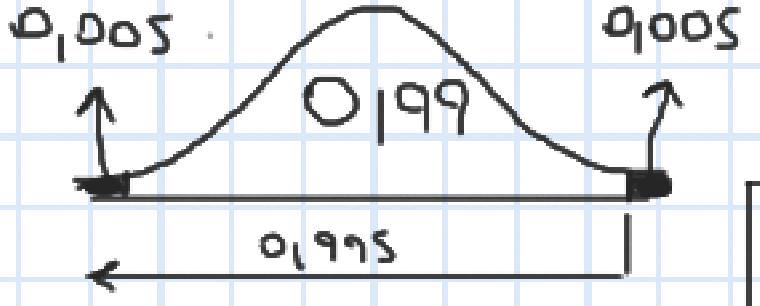


$* \; Z_{\frac{\alpha}{2}} \doteq \phi(\quad) = 0,975$

$\longrightarrow Z_{\alpha/2} \doteq 1,96$

. Caso A, $IC \doteq \bar{X} \pm Z_{\alpha} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \boxed{58 \pm 1,96 \cdot \dfrac{3}{\sqrt{25}}}$

C _



$* \; Z_{\alpha/2} = \phi(\quad) = 0,995$

$\longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,575$

$\boxed{* \; IC = 58,3 \pm 2,575 \cdot \dfrac{3}{\sqrt{100}}}$

Ejercicio 1.

La biblioteca de una universidad tiene cinco ejemplares de un cierto texto en reserva. Dos ejemplares (1 y 2) son primeras impresiones y los otros tres (3, 4 y 5) son segundas impresiones. Un estudiante examina estos libros (sin repetir) en orden aleatorio, deteniéndose sólo cuando selecciona una segunda impresión.

a) Hacer una lista de todos los resultados posibles.

b) Sea el evento A: sólo un libro es examinado. ¿Cuáles resultados están en A?

c) Sea el evento B: el libro 5 es seleccionado. ¿Cuáles resultados están en B?

d) Sea el evento C: el libro 1 no se examina. ¿Cuáles resultados están en C?

e) Expresar $A \cap B$, $A \cup B$ y $\overline{(B \cap C)}$.

a. Casos posibles: 1-2-3,1-2-4,1-2-5,1-3,1-4,1-5,2-1-3,2-1-4,2-1-5,2-3,2-4,2-5,3,4,5

b. A = {3,4,5}

c. B = {5,1-5,2-5,1-2-5,2-1-5}

d. C = {2-3,2-4,2-5,3,4,5}

e. $(A \cap B) = \{5\}$, $(A \cup B) = \{3,4,5,1\text{-}5,2\text{-}5,1\text{-}2\text{-}5,2\text{-}1\text{-}5\}$, $(\overline{B \cap C}) = \Omega - \{2\text{-}5,5\}$

Ejercicio 2:

a) Considere dos cajas. La caja A contiene 2 bolas blancas y 4 rojas y la caja B, 8 blancas y 4 rojas. Si se selecciona una bola de cada caja, ¿cuál es la probabilidad de que la bola elegida de la caja A sea blanca dado que exactamente una bola fue blanca?

* A $\longrightarrow$ 2 blancas, 4 rojas
  B $\longrightarrow$ 8 blancas, 4 rojas

* $P(BA) = 2/6 \doteq 0{,}3333$
* $P(BB) = 8/12 \doteq 0{,}6666$
* $P(RA) = 4/6 \doteq 0{,}6666$
* $P(RB) = 4/12 \doteq 0{,}3333$

* "Salió una sola Blanca": $P(BA \cap RB) = P(BA) \cdot P(RB) \doteq 1/9$ y $P(RA \cap BB) = 4/9$. Luego la suma de ellas nos da la probabilidad de obtener una Bola Blanca: $5/9$

. Finalmente, $P(BA \mid \text{"Salió una sola Blanca"}) \doteq \dfrac{P(BA \cap \text{"\ \ "})}{P(\text{"Salió..."})} \doteq \dfrac{P(BA) \cdot P(\text{"\ \ "})}{5/9} \doteq \dfrac{2/6 \cdot 5/9}{5/9} \doteq 1/3$

---

b) Un nuevo test para detectar la presencia de HIV es efectivo en un 98% cuando el virus está presente, pero también arroja "falsos positivos" en el 4% de los individuos no portadores (el test resulta positivo pero el individuo no es portador). Se sabe que en ciertas regiones de África, el 5% de los habitantes son portadores de HIV. Se aplica el test a un individuo elegido al azar de esta población.
i) Calcular la probabilidad de obtener un resultado negativo en el test.
ii) Si el resultado del test es positivo, calcular la probabilidad de que el individuo sea portador.
iii)Calcular la probabilidad de que el test arroje un resultado erróneo.

i) P (Positivo | Enfermo) = 0,98
P (Positivo | No Enfermo) = 0,04
P (Portador en Africa) = 0,05
P (No Portador en Africa) = 0,95

* $P(\text{positivo}) \doteq P(\text{Positivo} \mid \text{Enfermo}) \cdot P(\text{Porta. en Africa}) + P(\text{Positivo} \mid \text{No enfermo}) \cdot P(\text{No Portador en Africa}) \doteq$
$P(\text{Positivo}) \doteq 0{,}087 \Rightarrow P(\text{negativo}) = 1 - P(\text{Positivo}) \doteq 0{,}913$

* $P(\text{portador} \mid \text{Positivo}) \doteq \dfrac{0{,}98 \cdot 0{,}05}{0{,}087} \doteq 0{,}5632$

iii)

Una muestra aleatoria de 16 ranas macho, de la especie Rana pipiens, fue seleccionada de una región A y se midió la longitud de sus cuerpos (en mm). El promedio obtenido en la muestra fue de 84 mm.

Suponga que la variable longitud del cuerpo de esta especie tiene distribución normal de parámetros μ y σ^2.

+ preciso

a) Considere que σ es conocido, entonces:

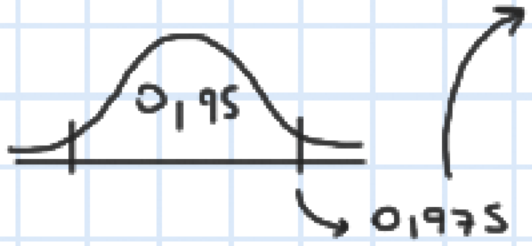
i) Si el intervalo de confianza del 95% para μ es [77,63; 90,37] determinar cuál es el valor de σ.

ii) Si con la misma muestra y el valor de σ obtenido en i) se obtuvo este intervalo de confianza para μ: [75,0625; 92,9375], determinar el nivel de confianza de este intervalo y cuál de los dos intervalos (de i) y ii)) es más preciso.

i) $(1-\alpha)=0{,}95$, $\alpha=0{,}05$, $\alpha/2=0{,}0025$

→ $\bar{X}=84$

$\phi(1{,}96)=0{,}975$

→ 

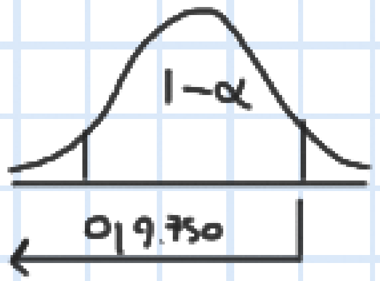
$* \ 84 \pm 1{,}96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{16}} \doteq IC.$

$* \ 2\cdot z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = L$, luego $90{,}37-77{,}63 \doteq 12{,}74$

$\rightarrow 2\cdot 1{,}96\cdot\frac{\sigma}{4} = 12{,}74 \Rightarrow \sigma = \frac{12{,}74}{2\cdot 1{,}96}\cdot 4 \doteq \boxed{13=\sigma}$

ii) con $n=16$, $\bar{x}=84$, $\sigma=13$ ⟶ [75,0625 ; 92,9375]

$\rightarrow 2\cdot z_{\alpha/2}\cdot\frac{13}{4} = 17{,}875$, $z_{\alpha/2} = \boxed{2{,}75}$ ⟶ $\phi(2{,}75)=0{,}9970$



$1-0{,}9970 \doteq 0{,}003$, $0{,}9970-0{,}003 \doteq \boxed{0{,}994}$ → Nivel de Confianza.

b) Considere que σ es desconocido y que la varianza muestral (s_{n-1}^2) fue igual a 169 mm².

i) Dar estimaciones por el **método de los momentos** para μ y σ^2.

ii) Dar estimaciones por el **método de máxima verosimilitud** para σ y para $P(X \geq 74)$.

iii) Se sabe que en otra región, que llamaremos B, la longitud de esta especie de ranas macho tiene una longitud media de 74 mm. ¿Existe evidencia suficiente para decidir que la longitud media en la región A es mayor a la longitud media en la región B? Plantear las hipótesis adecuadas, dar la región de rechazo, calcular el valor observado del estadístico de prueba y concluir en el contexto del problema al 5%.

i)

ii) $\hat{\sigma} = S_n^2$, luego $S_n^2 = \frac{\sqrt{n-1} \cdot S_{n-1}}{\sqrt{n}}$, $\frac{\sqrt{15} \cdot 13}{4} \doteq 12{,}5871$.

$\rightarrow \hat{\sigma} = 12{,}5871$

$$. P(X \geq 74) \doteq 1 - P(X < 74) \doteq 1 - \overbrace{P(X \leq 73)}^{\text{estandarizo}}, 1 - P\left(Z \leq \frac{73-84}{12{,}5871}\right) \doteq \phi(-0{,}8739) \doteq 1 - (1 - \phi(0{,}8779)) \doteq \phi(0{,}8739)$$

$\doteq 0{,}8078$

iii)

Ejercicio 6: Sea $X_1, X_2, \dots, X_n$ una muestra aleatoria con $n \geq 3$ y función densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,(1+\theta\,x)\,; & \text{si } x \in [-1;1] \\ 0 & ;\text{ en caso contrario} \end{cases}$$

donde $-1 \leq \theta \leq 1$.

a) Hallar el estimador por el método de los momentos para θ.

b) Calcular el valor esperado y desviación estándar para el estimador obtenido en a). Justifique.

c) Considere los siguientes estimadores para θ:

$\hat\theta_1 = X_1 + X_2 + X_n\,;\ \hat\theta_2 = \bar X\,;\ \hat\theta_3 = 3\,\bar X$ y $\hat\theta_4 = X_1 + 2\,X_2 + X_3$.

i) Determinar cuáles estimadores son insesgados para θ. Justifique.

ii) Entre los estimadores insesgados para θ, ¿cuál elegiría? Justifique.

a- $\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(1+\theta x)\cdot x\,dx \doteq \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x+\theta x^2\,dx \doteq \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} x\,dx + \theta\int_{-1}^{1} x^2\,dx\right)$

$\doteq \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} + \theta\left(\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}\right)\right) \doteq \frac{1}{2}\left(0+\theta\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)\right) \doteq \cancel{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\theta\cancel{2}}{3}$

$\doteq \boxed{E(x) = \theta/3}$

$\rightarrow E(x^1) = \bar X\ ,\ \theta/3 = \bar X\ ,\ \boxed{\hat\theta = 3\bar X}$

b). $E(\hat\theta) = E(3\bar x) \doteq 3E(\bar x) \doteq 3E\left(\sum_1^n x_i \cdot 1/n\right) \doteq 3\cdot 1/n \cdot E\left(\sum_1^n X_i\right) \doteq 3/n \cdot n \cdot E(X_i) \doteq 3\cdot\theta/3 \doteq \boxed{\theta}$

. $V(\hat\theta) = V(3\bar X) \doteq 9\cdot V(\bar x) \doteq 9\cdot V\left(\sum_1^n x_i \cdot 1/n\right) \doteq 9/n^2 \cdot V\left(\sum_1^n x_i\right) \doteq 9/n^2 \cdot \sum_1^n V(x_i) \doteq 9/n^2 \cdot n \cdot V(x_i) \doteq 9/n \cdot V(x_i) = 9/n \cdot$
$E(x^2) - E(x)^2 \doteq 9/n\cdot\left(E(x^2) - \theta^2/9\right) \therefore$

$\therefore E(x^2) = \int_{-1}^{1} x^2\cdot\frac{1}{2}(1+\theta x)\,dx \doteq \boxed{1/3} \implies 9/n\left(1/3 - \theta^2/9\right) \doteq 9/n\left(3/9 - \theta^2/9\right) \doteq 9/n\cdot\frac{3-\theta^2}{9} \doteq \boxed{\frac{3-\theta^2}{n}}$

c). $\hat\theta = X_1 + X_2 + X_n \doteq E(\hat\theta) = \theta/3 + \theta/3 + \theta/3 \doteq 3\theta/3 \doteq \theta\ \checkmark$, Insesgado.

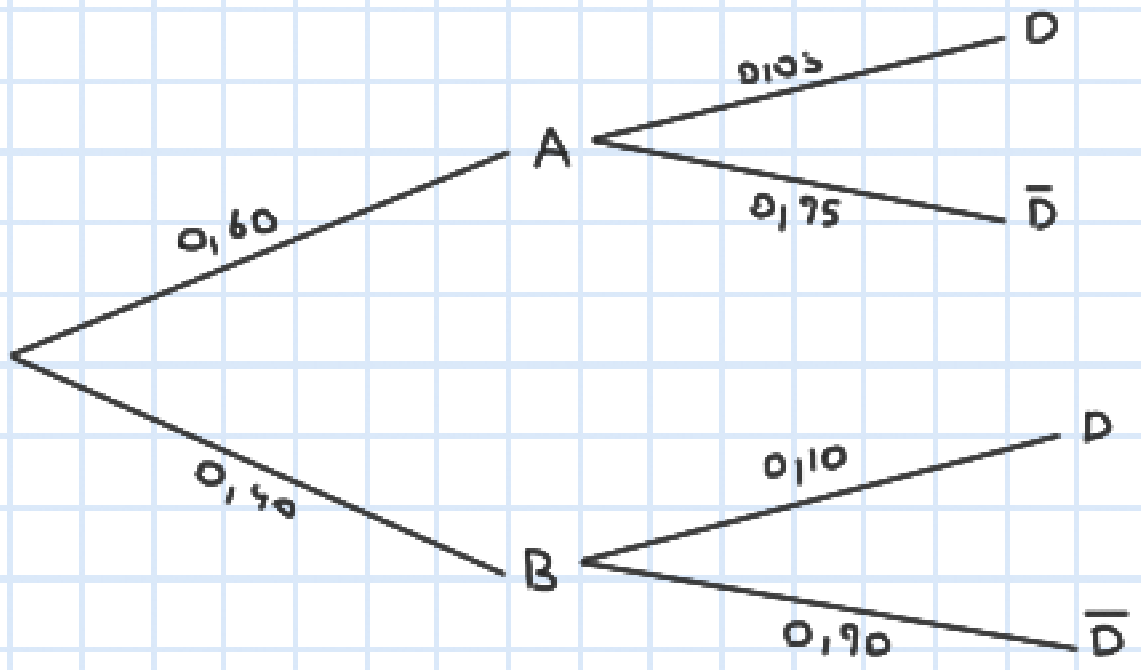
. $\hat\theta_2 = \bar X = E(\bar X) \doteq E\left(\sum_1^n X_i \cdot 1/n\right) \doteq E(x_i) = \theta/3\ X$, no insesgado.

. $\hat\theta_3 = 3\bar X = 3E(\bar x) = 3\cdot\theta/3 = \theta\ \checkmark$, Insesgado

. $\theta_4 = X_1 + 2X_2 + X_3 \doteq \theta/3 \cdot 2\theta/3 + \theta/3 \doteq 4\theta/3\ X$, no insesgado

Una fábrica de celulares dispone de dos máquinas A y B que elaboran el 60% y el 40% de la producción.
El porcentaje de celulares defectuosos que produce cada máquina es del 5% y del 10% respectivamente.
Calcular:
a) ¿Cuál es la probabilidad que el celular haya sido fabricado por la máquina A, sabiendo que es defectuoso?

* teorema de Bayes: $P(A \mid B) = \dfrac{P(B \mid A) \cdot P(A)}{P(B)}$



a_ $P(A \mid D) = \dfrac{P(D \mid A) \cdot P(A)}{P(D)} = \dfrac{0{,}05 \cdot 0{,}60}{0{,}05 \cdot 0{,}6 + 0{,}10 \cdot 0{,}4} \doteq 0{,}428$

Ejercicio 14.
En un lote de 10 tablas de madera, dos están demasiado verdes para ser usadas en construcción de primera calidad. Se seleccionan 2 tablas al azar, una después de otra.
Sea $A = \{$la primera tabla está verde$\}$ y $B = \{$la segunda tabla está verde$\}$. Calcule $P(A)$, $P(B)$ y $P(A \cap B)$.
¿Son A y B independientes?

a_ 10 tablas $\longrightarrow$ selecciono 2.

$\rightarrow$ 2/10 verdes , $P(V) = 0{,}2$

$\rightarrow$ 8/10 estan bien , $P(\bar{V}) = 0{,}8$

* $P(A) = 2/10$, $0{,}2$

* $P(B) = \underbrace{0{,}2}_{\text{verde}} \cdot \underbrace{1/9}_{\text{verde}} + \underbrace{0{,}8}_{\text{no verde}} \cdot \underbrace{2/9}_{\text{verde}} \doteq 0{,}2$

* $P(B \cap A) = 0{,}2 \cdot 1/9 = 0{,}022$

Ejercicio 1:

Determinar si son Verdaderas o Falsas las siguientes afirmaciones, justificando todas sus respuestas.

I) Un profesor analiza las notas obtenidas por sus alumnos en un primer parcial de Probabilidad y Estadística. A continuación se presenta una tabla con las notas y sus correspondientes porcentajes.

nota	2	3	6	8	9	10
porcentaje	5	20	50	15	5	5

a) El porcentaje de alumnos con nota menor o igual a 6 es del 50%.

b) El promedio para este conjunto de notas es 6,33.

c) Considere que el número total de alumnos que rindió el parcial es de 40.

i) Si se aprueba con por lo menos 4, entonces 25 alumnos no aprobaron el parcial.

ii) Para poder alcanzar la promoción de la materia, el alumno necesita obtener por lo menos siete en cada uno de los dos parciales. Entonces, 27 alumnos continúan en carrera para la promoción.

II) Para un conjunto de 18 datos se obtuvo un promedio de 64,50. Luego se agregan dos observaciones: 56,8 y 80,6 al conjunto inicial. Entonces el promedio del conjunto incluyendo a las nuevas observaciones es igual a 64,92.

a_ Falso, es el 75%.

b_ $\frac{5(2)+3(20)+6(50)+8(15)+9(15)+10(15)}{100} \doteq 58,5$, luego es Falso.

c_ i) 40 alumnos es el 100%, luego el 25% es 10. Es falso, 10 alumnos no aprobaron.

ii) Falso, 10 alumnos están en promoción.

iii) $\frac{1}{18}\cdot\sum_{1}^{18} X_i = 64,5$, $\sum_{1}^{18} X_i = 64,5\cdot 18$, $1161+56,8+80,6/20 \doteq 64,92$, luego es Verdadero.

Ejercicio 3:

La velocidad (en Km/h) a la que van los automóviles por una autopista tiene distribución normal de parámetros $\mu = 100$ y $\sigma = 15$. El límite de velocidad para esa autopista es de $110\,Km/h$. Si un vehículo va entre 110 y 120 Km/h pagará una multa de \$3000 y si va a más de 120 Km/h pagará \$6000.

a) ¿Qué proporción de vehículos pagará una multa de \$3000? ¿Y de \$6000?

b) Se eligen al azar 10 automóviles en esta autopista, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos dos de ellos tengan que pagar una multa?

c) Se quiere cambiar el límite de velocidad para que sólo el 15% de los automovilistas paguen multa. ¿Cuál debería ser ese nuevo límite?

$X \sim N(100, 225)$. $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

a_ $P(110 \le X \le 120) \doteq P\left(\frac{110-100}{15} \le Z \le \frac{120-100}{15}\right) \doteq P(0,6666 \le Z \le 1,3333) \doteq \phi(1,3333) - \phi(0,6666) = 0,9082 - 0,7454 \doteq \boxed{0,1628}$

$P(X \ge 120) \doteq P(Z \ge 1,3333) \doteq 1 - P(Z \le 1,3333) \doteq 1 - \phi(1,3333) \doteq \boxed{0,0918}$

b_ $n = 10$.

Aproximamos por Binomial $A \sim B(p, n)$. Calculemos $p = P(Y \ge 110)$, $1 - P(Z \le 110) \doteq 1 - \phi(0,6666) \doteq 1 - 0,7454 \doteq 0,2546$. Luego $A \sim B(0,2546, 10)$

$\rightarrow P(A \ge 2) \doteq 1 - P(A \le 2)$, $1 - \left(\binom{10}{0}\cdot 0,2546^0 \cdot (1-0,2546)^{10} + \binom{10}{1}\cdot 0,2546^1\cdot(1-0,2546)^9\right) \doteq \boxed{0,7591}$

c) $P(Y \geq k) = 0{,}15$, $1 - P\left(Z \leq \frac{k-100}{15}\right) = 0{,}15$, $1 - \phi\left(\frac{k-100}{15}\right) = 0{,}15$, $0{,}85 = \phi\left(\frac{k-100}{15}\right)$, $\phi(0{,}85) = \frac{k-100}{15}$, $(100 + \phi(0{,}85)) \cdot 15 = k$, luego k es $115{,}6$.

Ejercicio 2.

Considere que el estadístico de prueba Z tiene distribución normal estándar cuando $H_0 : \mu = \mu_0$ es verdadera y sea z el valor observado de Z. Proporcione el nivel de significación para cada una de las siguientes situaciones:

a) $H_a : \mu > \mu_0$, región de rechazo $z \geq 1,88$.

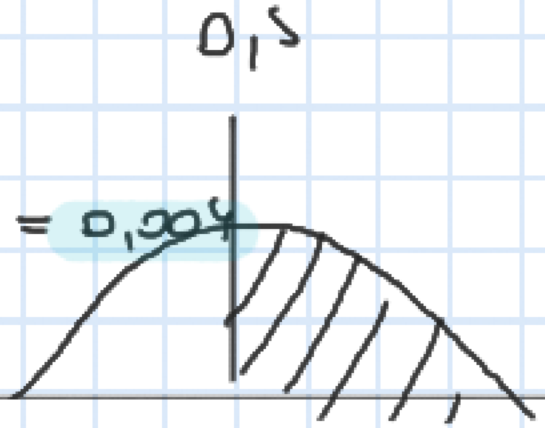
b) $H_a : \mu < \mu_0$, región de rechazo $z \leq -2,75$.

c) $H_a : \mu \neq \mu_0$, región de rechazo $z \geq 2,88$ o $z \leq -2,88$.

a- $\phi(1{,}88) \doteq 0{,}9699$, luego $1 - 0{,}9699 \doteq 0{,}0311$

b- $\phi(-2{,}75) \doteq 1 - \phi(2{,}75) \doteq 1 - 0{,}9970 \doteq 0{,}003$

c- $\left.\begin{array}{l} \phi(2{,}88) = 0{,}9980, \quad 1 - 0{,}9980 = 0{,}002 \\ \phi(-2{,}88) = 1 - \phi(2{,}88) = 0{,}002 \end{array}\right\} \; 0{,}002 + 0{,}002 = 0{,}004$



Ejercicio 2. Sea X una variable aleatoria que cumple $E(X^2) = 10$ y que su función de distribución acumulada está dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x < 0 \\ a, \text{ si } 0 \le x < 1 \\ 0{,}5, \text{ si } 1 \le x < 3 \\ 0{,}8, \text{ si } 3 \le x < 6 \\ 1, \text{ si } 6 \le x \end{cases}$$

$x \geq 2$

a) Hallar el valor de la constante a para que se cumplan las condiciones planteadas y dar la función de probabilidad de masa de X.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que X sea por lo menos 2?

c) Hallar la varianza de X.

a_ $E(x^2) = 10$, $\cancel{0^2 \cdot a} + 1^2(0{,}5-a) + 3^2(0{,}8-0{,}5) + 6^2(1-0{,}8) = 10$,

$0{,}5 - a + 7{,}2 - 4{,}5 + 36 - 28{,}8 = 10$, $\boxed{a = 0{,}4}$

$$* f(x) = \begin{cases} 0{,}4 & , x = 0 \\ 0{,}1 & , x = 1 \\ 0{,}3 & , x = 3 \\ 0{,}2 & , x = 6 \end{cases}$$

b) $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) \doteq 1 - P(X=0) + P(X=1) = 1 - (0{,}4 + 0{,}1)$

$= \boxed{0{,}5}$

c) $E(X) = 0(0{,}4) + 1(0{,}1) + 3(0{,}3) + 6(0{,}2) \doteq \boxed{2{,}2}$

$\rightarrow V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \doteq 10 - (2{,}2)^2 = \boxed{5{,}16}$

Ejercicio 3. Se sabe que los ingresos de trabajadores pertenecientes a cierta industria metalmecánica tiene distribución normal, siendo $\mu = 135000$ el valor medio y $\sigma = 1500$ la desviación estándar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un trabajador de la industria tenga un salario superior a \$136000? Justifique su respuesta.

b) Hallar el percentil 25 o cuantil 0.25 para la variable salario de un trabajador de la industria.

c) Se tomó una muestra aleatoria de tamaño 11 de trabajadores de la industria.

i) ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos dos, de los 11, trabajadores tenga un salario inferior a \$136000? Justifique su respuesta.

ii) ¿Cuál es la probabilidad de que el salario promedio de trabajadores sea de por lo menos \$137000?

a_ $P(X \geq 136000) \doteq 1 - P(X \leq 136000) \doteq 1 - P\left(Z \leq \frac{136000 - 135000}{1500}\right) \doteq$

$1 - P(Z \leq 0{,}6666) \doteq 1 - \phi(0{,}66) \doteq 1 - 0{,}7454 = 0{,}2546$

b_ $\frac{n_z(0{,}25) - \mu}{\sigma} = 0{,}25$. Veamos que $1 - 0{,}25 = 0{,}75$, luego $\phi(0{,}68) = 0{,}75$

$- n_z(0{,}25) = 0{,}68$, luego $n_z(0{,}25) = -0{,}68$. Luego, tenemos:

$* \quad \frac{n_z(0{,}25) - 135000}{1500} = -0{,}68$, $n_z(0{,}25) \doteq \boxed{133.980}$

c) i) $P(X \leq 136000) \doteq 1 - P(X \geq 136000) \doteq 1 - 0{,}2546 \doteq 0{,}7454$

$\rightarrow \sum_{2}^{11} \binom{11}{x} \cdot (0{,}7454)^x \cdot (0{,}2546)^{11-x}$. Luego $X \sim B(16, 0.7454)$

$\rightarrow P(X \geq 2) \doteq 1 - P(X \leq 2) \doteq 1 - \left(\binom{11}{0} \cdot (0{,}7454)^0 \cdot (0{,}2546)^{11} + \ldots + \binom{11}{2} \cdot (0{,}7454)^2 \cdot (0{,}2546)^9\right)$

PARTE B

Ejercicio 4. Refiérase al enunciado del Ejercicio 1 y suponga que la variable concentración de fósforo tiene una distribución normal.

a) Dar estimaciones por Máxima Verosimilitud para la media poblacional, varianza poblacional y percentil 95% para la variable concentración de fósforo con este nuevo método.

b) Hallar un intervalo de confianza del 95% para la concentración media de fósforo en suelo, según el nuevo método.

c) Suponga que la concentración verdadera de fósforo en suelo es de 500 mg/Kg. ¿Hay evidencia suficiente para decir que la concentración promedio de fósforo obtenida con el nuevo método difiere significativamente del valor real? Plantear las hipótesis de interés, dar el estadístico de prueba y su distribución bajo hipótesis nula, dar la región de rechazo al 5%, calcular el valor observado del estadístico de prueba y concluir en el contexto del problema.

d) Si el p-valor, para la prueba planteada en el item c), es igual a 0,0186 concluir usando un $\alpha = 0,01$.

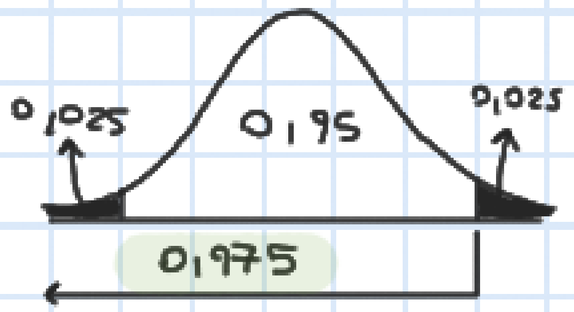
a_ $\hat{\mu}_{mv} = \bar{X}$, $\hat{\sigma}^2_{mv} =$, $\eta_Z(0,95) = \hat{\sigma} \cdot \eta_Z(0,95) + \hat{\mu}$.

→ $\hat{\mu}_{mv} \doteq \bar{X}$ ⟶ 499,7288

→ $\hat{\sigma}_{mv} \doteq S_n^2$ ⟶ 3,3510

. Luego, $\widehat{\eta_Z(0,95)} = 3,3510 \cdot 1,65 + 499,7288 = 505.2579$

b_



* Dado que conocemos la varianza:

$IC \doteq \bar{X} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ∴

* $\Phi(1,96) = 0,975$

* $499,7288 \pm 1,96 \cdot \frac{1,8305}{\sqrt{12}}$ ⟶ $[498,8810 ; 500,5744]$