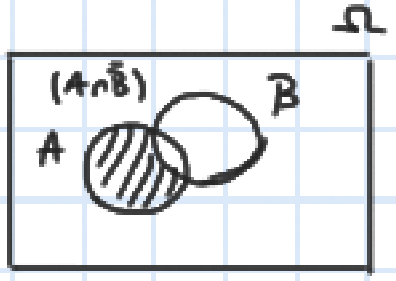
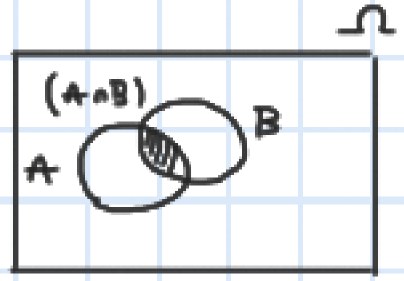
Dado un modelo probabilístico, A y B dos eventos independientes tales que: $P(\overline{A\cap B})=0{,}7$ y $P(A\cap\bar{B})=0{,}45$

Si A y B son independientes, entonces tengo que: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$





* $P(\overline{A\cap B}) \doteq 1-0{,}7 = 0{,}3 \Rightarrow 0{,}3 \doteq P(\overline{\bar{A}\cup\bar{B}}) \doteq \boxed{P(A\cap B)=0{,}3}$
* $P(\overline{A\cap\bar{B}}) \doteq 1-P(A\cap\bar{B}) \doteq 0{,}55 \Rightarrow 0{,}55 \doteq \boxed{P(\bar{A}\cup B)\doteq 0{,}55}$

* $A = (A\cap B)\cup(A\cap\bar{B})$, por diagramas.

$\rightarrow (A\cup(A\cap\bar{B}))\cap(B\cup(A\cap\bar{B})) \doteq (A\cup A)\cap(B\cup A) \doteq A\cap(B\cup A)=A$ ✓

* $P((A\cap B)\cup(A\cap\bar{B})) \doteq P(A\cap B)+P(A\cap\bar{B})-P((A\cap B)\cap(A\cap\bar{B}))$, pero por diagramas, $(A\cap B)\cap(A\cap\bar{B})\doteq\emptyset$, luego por prop. $P(\emptyset)=0$.

$\rightarrow P(A)\doteq P(A\cap B)+P(A\cap\bar{B})-0$, luego, $P(A)=0{,}3+0{,}45\doteq\boxed{0{,}75}$

a) $P(\bar{A})\doteq 1-P(A)\doteq 1-0{,}75\doteq\boxed{0{,}25}$

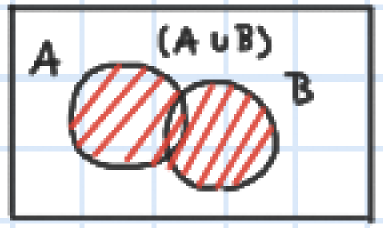
b) $P(B)\doteq P(A\cap B)\doteq P(A)\cdot P(B)$, luego $P(B)=P(A\cap B)/P(A)\doteq 0{,}3/0{,}75\doteq\boxed{0{,}4}$

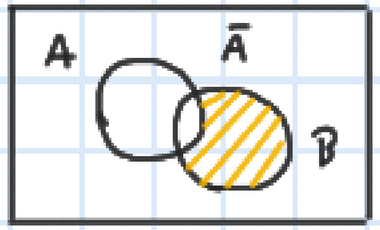
c) $P(\bar{A}\cap B)\doteq P(\bar{A})+P(B)-P(\bar{A}\cup B)\doteq 0{,}25+0{,}40-0{,}55\doteq\boxed{0{,}10}$

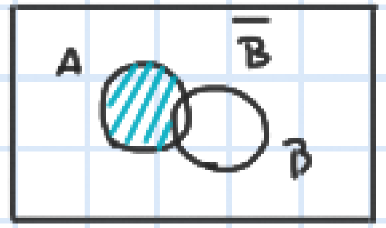
d) $P(A\cup B)\doteq P(A)+P(B)-P(A\cap B)\doteq 0{,}75+0{,}40-0{,}3\doteq\boxed{0{,}85}$

Dado un modelo probabilístico, A y B dos eventos independientes tales que:

$P(A \cup B) = 0{,}90$ y $P(\bar{A}) = 0{,}40.$

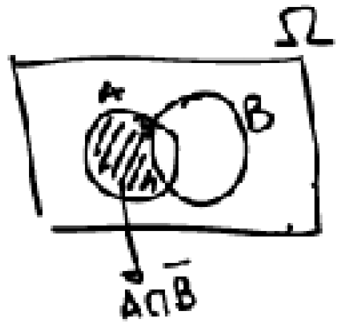






- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, $0{,}4 = 1 - P(A)$, $P(A) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$
- $P(\overline{A \cup B}) \doteq P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}10$ ✓
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}6 + P(B) - (P(A) \cdot P(B) = 0{,}6 + P(B) - 0{,}6P(B) = 0{,}6 + 0{,}4P(B)$,
  luego $0{,}90 = 0{,}6 + 0{,}4\,P(B) = 0{,}3 = 0{,}4P(B) = {}^{0{,}3}/_{0{,}4} = P(B)$, luego $P(B) = 0{,}75$ ✓
- $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$ ✓
- $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}6 + 0{,}75 - P(A \cup B) = 0{,}6 + 0{,}75 - 0{,}9 = 0{,}45$ ✓

$\rightarrow P(A \cap \bar{B}) = ¿?$

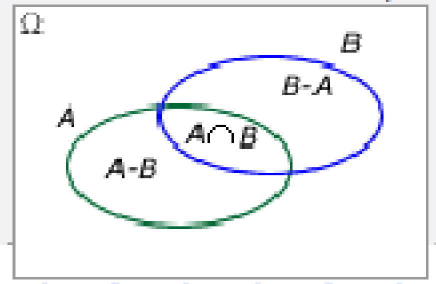


$A \cap \bar{B} = A \setminus (A \cap B) \Rightarrow$ Como $A \cap B \subset A \Rightarrow$ por prop. 5,

$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

$= 0{,}8 - 0{,}6 = \boxed{0{,}2}$

5.- Dados dos sucesos cualesquiera se tiene P(A U B) = P(A) + P(B) - P(A∩B)



P(A U B) = P(A-B) + P(B-A) + P(A∩B)
Por otro lado P(A) = P(A-B) + P(A∩B) y
P(B) = P(B-A) + P(A∩B)
P(A-B)=P(A) - P(A∩B) y P(B-A)=P(B) - P(A∩B)
y sustituyendo se obtine el resultado deseado
P(A U B) = P(A) + P(B) - P(A∩B)

Sea la función de distribución acumulada de una variable aleatoria X dada por:

$$F(x)=\begin{cases}0 & si\ x<-1\\ 0.6 & si\ -1\le x<2\\ b & si\ x\ge 2\end{cases}$$ donde 0.6 < b es una constante.

$\bullet\ F(x)=\begin{cases}0 & si\ x<-1\\ 0{,}6 & si\ -1\le x<2\\ 1 & si\ x\ge 1\end{cases}$ ✱ $f(x)\begin{cases}0{,}6 & x=-1\\ 0{,}4 & x=2\\ 0 & c.c\end{cases}$

a) "b" es 1.

b) el conjunto de valores con prob. positiva, es: $\{-1,2\}$

c) $E(x)\doteq\sum_{i=-1}^{2} x_i\cdot P(x_i)$ ✱, $-1\cdot P(-1)+0\cdot P(0)+1\cdot P(1)+2\cdot P(2)$, $-1\cdot(0{,}6)+0\cdot(0)+1\cdot(0)+2\cdot(0{,}4)$, $\boxed{0{,}2=E(x)}$

d) $V(x)\doteq E(X-\mu)^2$ con $\mu=E(x)$ o $E(x^2)-\mu^2$, elegimos la segunda pues se cumple que $E(x^2)<\infty$:

* $E(x^2)\doteq\sum_{i=-1}^{2} x_i^2\cdot P(x_i)$, luego $E(X^2)=(-1)^2\cdot 0{,}6+2^2\cdot(0{,}4)=0{,}6+1{,}6=2{,}2-0{,}04=2{,}16$ ✓

e) $W=-3x+6$, luego $V(ax+b)=a^2\cdot V(x)$, luego:

* $E(X)=\sum_{i=-1}^{2} h(x_i)\cdot p(x_i)=-3(-1)+6\cdot(0{,}6)+-3(2)+6\cdot(0{,}4)=5{,}4$ ✓

$\hookrightarrow (-3)^2\cdot V(X)=9\cdot 2{,}16=19{,}44$ ✓

Un sistema para detectar incendios está compuesto por tres dispositivos sensibles a la temperatura que actúan independientemente uno de otro y tales que uno o más de ellos puede activar la alarma. Cada dispositivo tiene una probabilidad de 0,8 de activar la alarma al alcanzar una temperatura de por lo menos 100°C. Sea Y el número de dispositivos que activan la alarma cuando la temperatura alcanza por lo menos 100°C.

a) La probabilidad de que a lo sumo uno de los dispositivos active la alarma cuando la temperatura alcanza por lo menos 100°C es igual a

Veamos que la prob. de que un dispositvio encienda la alarma es de 0.8. Entonces, para saber la probabilidad de que al menos un dispositivo se encienda, tengo que tener en cuenta do escenarios:

a_ ningún dispositivo activo
b_ Un dispositivo activo per los demás no.

* $a = 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}008$
* $b = 0{,}2^2 \cdot 0{,}8 \binom{3}{1} = 0{,}096$

$\Rightarrow$ la suma de a y b nos da la respueta, 0,104 ✓

b) La probabilidad de que la alarma se active cuando la temperatura alcanza por lo menos 100°C es igual a

• Veamos que tenemos 3 casos: a_ "1 disp. activo"
b_ "2 disp. activos"
c_ "3 disp. activos"

a_ $0{,}8 \cdot \binom{3}{1} \cdot 0{,}2^2 = 0{,}096$, b_ $0{,}8^2 \cdot \binom{3}{1} \cdot 0{,}2 = 0{,}384$, c_ $0{,}8^3 = 0{,}512$

* La suma de a, b, c: 0,992 ✓

c) $E(x) \doteq \sum_{i=0}^{3} x_i (P x_i) = 0 \cdot (P_0) + 1 \cdot (P_1) + 2 \cdot (P_2) + 3 \cdot (P_3) = 0 + 0{,}096 + 2 \cdot 0{,}384 + 3 \cdot 0{,}512 = 2{,}4$ ✓

d) $E(x^2) \doteq \sum_{i=0}^{3} x_i^2 (P x_i) = 0 \cdot (P_0) + 1^2 \cdot (P_1) + 2^2 \cdot (P_2) + 3^2 \cdot (P_3) = 0{,}096 + 4 \cdot 0{,}384 + 9 \cdot 0{,}512 = 6{,}24$ ✓

Los siguientes datos corresponden a la concentración del receptor de transferrina en una muestra de mujeres embarazadas:

7,6	7,2	15,2	10,9	9,4	9,4	12,8
7,8	9,7	11,5	11,9	9,3	22,5	

Realice la estadística descriptiva redondeando la respuesta final a dos cifras decimales significativas y complete el siguiente texto:

a_ $\bar{x}$ (media muestral) = $i \in (0,13)$, $1/n \sum_{i=1}^{13} x_i$, x_i = "dato", n = # datos (13), $1/13 \cdot \sum_{i=1}^{13} x_i = 1/13 \cdot (145,2) \doteq 11,1692$, luego 11,17 ✓

b_ RIC =

7,2	7,6	7,8	9,3	9,4	9,4	9,7
10,9	11,5	11,9	12,8	15,2	22,5	

* $Q_2 = n+1/2 \doteq 14/2 = 7$, $x_7 \doteq 9,7$ ✓
* $Q_1 = n+1/2 \doteq 8/2 = x_4 = 9,3$ ✓
* $Q_3 = 11,9$ ✓

. luego RIC $\doteq Q3 - Q1 \doteq 11,9 - 9,3 = 2,6$ ✓

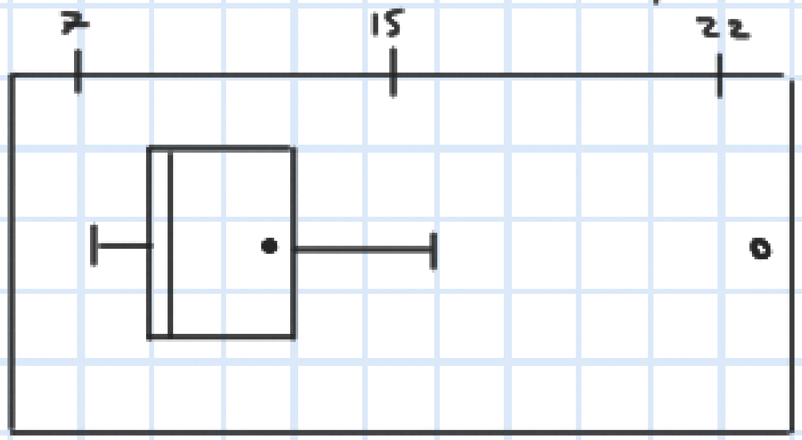
. Rango = $22,5 - 7,2 = 15,3$ ✓

. Varianza = $1/n \sum_{i=1}^{13} (x_i - \bar{x})^2 = 1/13 \cdot \sum_{i=1}^{13} (x_i - \bar{x})^2 = 16,65$ ✓

. devío estandar $\sqrt{V(x)} \doteq \sqrt{16,65} = 4,08$ ✓

. Datos atípicos: $< Q_1 - RIC(1,5)$ y $> Q_3 + RIC(1,5)$, $< 5,4$ y $> 15,8$, por tanto, tengo un solo dato atípico y es 22,5 ✓

. Coeficiente de variación: $s_n/\bar{x}$ 100% = $4,08/11,17 \cdot 100\% = 36,526\% \doteq 36,53\%$ ✓



* Bigote inferior: 7,2
* Bigote superior: 15,2

Un fabricante de aparatos celulares afirma que aproximadamente el 10% de sus unidades necesitan reparación durante el período de garantía. Los técnicos de laboratorio de pruebas compran 15 celulares y las usan durante el período de garantía.

- $1/10$ necesita reparación $(0{,}10)$
- $n = 15$ telefonos

a- Probabilidad de que 4 necesiten reparación: $\underbrace{(0{,}10)^4 \cdot \binom{15}{4}}_{\text{necesitan reparación}} \cdot \overbrace{(0{,}90)^{11}}^{\text{no necesitan rep.}} = 0{,}04283$

b- Al menos 3, necesiten reparación: $P(X \geq 3)$, $\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ $\forall x \{k \in \mathbb{Z},\ 3 \leq k \leq 15\}$

$\longrightarrow f(x) = \binom{n}{x} \cdot (0{,}10)^x \cdot (1-p)^{n-x}$, luego $f(3) = \binom{15}{3} \cdot (0{,}10)^3 \cdot (1-p)^{15-3}, \ldots, \binom{15}{15} \cdot (0{,}10)^{15} \cdot (1-p)^{15-15} \doteq 0{,}1841$ ✓

c- El valor esperado "W" es: $E(x) = n \cdot p$, $15 \cdot 0{,}10 = 1{,}5$ ✓

d- La varianza en una Binomial, $np(1-p)$, $V(x) = 15 \cdot 0{,}10\,(0{,}90) = 1{,}35$ ✓

e- 80% de 15 $\doteq$ 12 , $\sum_{i=0}^{3} \binom{15}{x} \cdot (0{,}10)^x \cdot (0{,}90)^{15-x} = 0{,}9444$ ✓

Ejercicio 6.
El diámetro de los árboles de determinado tipo, a cierta altura, se distribuye normalmente con $\mu = 8,8$ pulg. y $\sigma = 2,8$ pulg. según sugiere el artículo "Simulating a Harvester-Forwarder Softwood Thinning".
a) ¿Cuál es la probabilidad de que el diámetro de un árbol, seleccionado al azar, sea a lo sumo 10 pulg.? ¿Y que sea mayor que 10 pulg.?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el diámetro de un árbol, seleccionado al azar, esté entre 5 y 10 pulg.?
c) ¿Qué valor de c es tal que el intervalo $(8,8 - c\ ;\ 8,8 + c)$ incluye el 98% de todos los valores de diámetro?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 1 de 5 árboles elegidos al azar tenga diámetro entre 5 y 10 pulg.?

a_ $\mu = 8,8$ y $\sigma = 2,8$, luego $P(X \leq 10 \text{ pulg}) \Rightarrow z = \frac{x - \mu}{2,8}$, luego $z \leq 1,2/2,8$, $z \leq 0,428571$
$\rightarrow P(z \leq 0,428571) \sim N(0,1) \doteq 0,6664$ (redondea a 0,43) ✓

b_ $P(5 \leq X \leq 10) \doteq P\left(\frac{5-8,8}{2,8} \leq \frac{x-8,8}{2,8} \leq \frac{10-8,8}{2,8}\right) \doteq P(-1,3571 \leq z \leq 0,428571) \doteq \phi(0,43) - \phi(-1,36) \doteq \phi(0,43) - (1 - \phi(1,36))$
$\doteq 0,6664 - (1) + 0,9131 \doteq 0,5797$ ✓

c_ valor "c" tq el int. $(8,8 - c, 8,8 + c)$ incluye el 98% de los v. del diámetro.

$P(8,8 - c \leq X \leq 8,8 + c) = 0,98$, luego $z = \frac{x - 8,8}{2,8} \doteq \frac{8,8 - c}{2,8} \leq z \leq \frac{c + 8,8}{2,8} \doteq \frac{-c}{2,8} \leq z \leq \frac{c}{2,8}$ (*)

. Por (*), $P\left(-\frac{c}{2,8} \leq z \leq \frac{c}{2,8}\right) \doteq \phi\left(\frac{c}{2,8}\right) - \phi\left(-\frac{c}{2,8}\right) \doteq \phi\left(\frac{c}{2,8}\right) - \left(1 - \phi\left(\frac{c}{2,8}\right)\right) \doteq 2\phi\left(\frac{c}{2,8}\right) - 1 = 0,98$.·.

* Despejo de .·., $2\phi\left(\frac{c}{2,8}\right) = 1 + 0,98$, $\phi\left(\frac{c}{2,8}\right) = 1,98/2$, $\phi\left(\frac{c}{2,8}\right) = 0,99$, $\phi\left(c/2,8\right) = 2,33$, $c/2,8 = 2,33$
. $c = 2,33 \cdot 2,8 = 6,524$ ✓

d) (1/5) arboles al menos 1 arbol tiene prob. 0,5797 de tener entre 5 y 10 pulgadas.
. $\sum_{i=1}^{5} \binom{5}{x_i} (\ P\ )^{x_i} (1-P)^{5-x_i} \doteq \sum_{i=1}^{5} \binom{5}{x_i} \cdot (0,5797)^{x_i} \cdot (0,4203)^{5-x_i} \doteq 0,9869$ ✓

Anotaciones importantes para tener en cuenta

Variables Aleatorias Discretas ($\Omega \longrightarrow \mathbb{N}$)

* Esperanza de x: $E(X) = \sum x_i \cdot p(x_i)$ (se denota μ)
* Esperanza de $V = h(x)$: $E(X) = \sum h(x) \cdot P(x_i)$
* $E(aX+b) = a \cdot E(X) + b$
* Varianza = $V(X) = E(X-\mu)^2$, $V(X) = E(X^2) - \mu^2$
* $V(aX+b) = a^2 \cdot V(X)$
* Desvio Estandar = $\sqrt{V(X)}$

* Distr. Binomial = $p(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$
  - $\rightarrow E(X) = np$
  - $\rightarrow V(X) = np(1-p)$

* Dist. Poisson = $p(k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$
  - $\rightarrow E(X) = V(X) = \lambda$. $\lambda \doteq np$

* Distr. Hipergeometrica = $P(k) = \dfrac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$,
  N (pob), M (exitos), n (muestra)
  - $\rightarrow E(X) = n\left(\frac{M}{N}\right)$
  - $\rightarrow V(X) = n\left(\frac{M}{N}\right) \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

* Distr. Binomial Negativa = $p(k) = \binom{r+k-1}{r-1} \cdot p^r \cdot (1-p)^k$
  - $\rightarrow E(X) = r(1-p)/p$
  - $\rightarrow V(X) = r(1-p)/p^2$

Variables Aleatorias Continuas ($\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$)

* fdp = $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
* fda = $f(x) = \begin{cases} F'(x) & \forall x \text{ donde } \in F'(x) \\ 0 & c.c \end{cases}$
* cuantil p = $p = F(\eta(p)) \doteq \int_{-\infty}^{\eta(p)} f(t)\,dt$
* $E(X) = \int x \cdot f(x)\,dx$
  - $\rightarrow E(h(x)) = \int h(x) \cdot f(x)\,dx$
* $V(X) = \int (x-\mu)^2 f(x)\,dx$, $E(X^2) - \mu^2$
* $E(aX+b) = a \cdot E(X) + b$
* $V(aX+b) = a^2 \cdot V(X)$

* Dist. Uniforme = $f(x) = \begin{cases} 1/b-a \\ 0 \end{cases}$
  - $\rightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & , x < a \\ x-a/b-a & ; a \le x < b \\ 1 & ; b \le x \end{cases}$

* Dist. Normal =
  - fdp = $f(x) = 1/\sqrt{2\pi\sigma^2} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
  - ↳ Normal Estandar: $Z \sim N(0,1)$
    * $Z = X-\mu/\sigma$
    * $P(a \le X \le b) = \phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

Ejercicio 14:
Suponga que $X=$ número de tornados observados, en una región particular, durante un período de un año tiene distribución de Poisson con $\lambda = 8$.
a) Calcular: $P(X < 5)$, $P(6 < X < 9)$, $P(10 < X)$ y $P(X > 1)$.
b) ¿Cuántos tornados se puede esperar que se observen durante un periodo de un año? ¿Cuál es la desviación estándar de X?

Si X tiene distr. de Poisson, luego $p(k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$ y teniendo $\lambda = 8$:

a_ $P(X \leq 5) = \sum_{i=0}^{5} e^{-8} \cdot \frac{8^k}{k!} = 0,1912$ ✓

b_ $E(X) = \lambda = 8$, $V(X) = \sqrt{8} = 2,82$ ✓

Ejercicio 12:
Cada uno de 12 refrigeradores de cierto tipo ha sido devuelto a un distribuidor debido a la presencia de un ruido oscilante agudo cuando está funcionando. Supongamos que 4 de esos 12 tienen compresores defectuosos y los otros 8 tienen problemas menos serios. Si se examinan 6 refrigeradores al azar, sea $X=$ número de refrigeradores que tienen el compresor defectuoso entre los 6 examinados.
a) Calcular: i) $P(X = 1)$ ii) $P(X \geq 4)$ iii) $P(1 \leq X \leq 3)$
b) ¿Cuánto vale $E(X)$ y $V(X)$?

* $N = 12$, $4/12$ def., $8/12$ +/-. $\Rightarrow$ Usamos hipergeométrica

* $f(k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ $\Big\}$. $N = 12$, $n = 6$, $M = 4$

a) $P(X=1) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{8}{5}}{\binom{12}{6}} = 0,2424$ ✓

* $P(X \geq 4) = P(X = 4)$ pues solo hay $4/12$ def.

* $P(1 \leq X \leq 3) = \sum_{i=1}^{3} f(x) = \left(0,2424\right) + \left(\frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{8}{4}}{\binom{12}{6}}\right) + \left(\frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{8}{3}}{\binom{12}{6}}\right) = 0,9393$ ✓

b) . $E(X) = n\left(\frac{M}{N}\right) = 6 \cdot 4/12 = 2$
. $V(X) = n(M/N)(1 - M/N) \cdot (N-n / N-1) = 2 \cdot (1 - 4/12) \cdot (6/5) = 1,6$ ✓

Ejercicio 4.

El tiempo X (en minutos) en que un asistente de laboratorio prepara el equipo para un experimento tiene una distribución uniforme en el intervalo $[25\ ,\ 35]$ ($X \sim \mathcal{U}[25, 35]$).

a) Dar la función de densidad y la función de distribución acumulada de X.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de preparación exceda 33 minutos?

c) Para cualquier a tal que $25 < a < a+2 < 35$, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo de preparación esté entre a y $a+2$?

d) Calcular $E(X)$ y $V(X)$.

e) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de preparación se encuentre a menos de 1 DE del tiempo medio de preparación? ¿Y a menos de 2 DE?

a_ $\text{fdp} \begin{cases} 1/25-35 & , x \in [25,35] \\ 0 & , \end{cases}$

$\text{fda} \begin{cases} 0 & , x < 25 \\ x-25/10 & , x \in [25,35] \\ 1 & , x > 35 \end{cases}$

b_ $P(X>33) \doteq \int_{33}^{35} 1/10\, dx \doteq 1/10 \int_{33}^{35} dx = 1/10 \cdot x \Big|_{33}^{35} = 1/10\ (2) = 0{,}2$ ✓

c_ $0{,}2$ ✓

d_ $E(x)$ y $V(x)$, $E(x) = \int_{25}^{35} x \cdot f(x)\, dx = \int_{33}^{35} x \cdot 1/10\, dx = 1/10 \cdot x^2/2 \Big|_{25}^{35} = x^2/20 \Big|_{25}^{35} = 30$ ✓, luego $V(x) = \int_{25}^{35} (x-\mu)^2 f(x)\, dx$

$\int_{25}^{35} (x-30)^2 \cdot 1/10\, dx \doteq 1/10 \int_{u}^{u} u^2\, du$, $u = x-30$, $du = dx$, $1/10 \cdot u^3/3 \Big|_{25}^{35} \doteq 1/10 \cdot (x-30)^3/3 \Big|_{25}^{35} \doteq 1/10 \cdot \left(5^3/3 - (-5)^3/3\right) \doteq 8{,}33$ ✓

Ley de Probabilidad Total

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos mutuamente excluyentes tal que $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Entonces:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i); \qquad \forall B \subset \mathcal{A}$$

Ejemplo 6:

Al llegar al último año de una determinada carrera universitaria, los alumnos deben elegir cursar una materia optativa entre tres opciones disponibles: A1, A2, A3. El 40 % de los estudiantes elige la materia A1, el 35 % elige A2 y el resto A3. Se sabe que, de los alumnos que cursan A1, el 30 % promociona, de los que cursan A2 el 60 % promociona y de los que cursan A3 el 50 % promociona.

a) *¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elija cursar A2 y promocione?*

b) *¿Cuál es la probabilidad de que el alumno elegido al azar promocione?*

c) *Si se sabe que el alumno promocionó, ¿cuál es la probabilidad que haya cursado A3 ?*

Teorema de Bayes

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos mutuamente excluyentes tal que $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ y $P(A_i) > 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$. Entonces:

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)} \qquad \forall j = 1, 2, \ldots, n \quad y \quad \forall B \in \mathcal{A} \quad con \quad P(B) > 0.$$

$B_2 \cap A_2 \subset A_2 \Rightarrow A_2 = A_2 \cap B_2 + A_2 \cap \bar{B}_2$

a) $\cdot P(A_1) = 0{,}4$, $P(B_1) = 0{,}3$

$\cdot P(A_2) = 0{,}35$, $P(B_2) = 0{,}6$

$\cdot P(A_3) = 0{,}25$, $P(B_3) = 0{,}5$

$P(B) = $

$P(B|A_i) \quad P(A_i) =$

$\dfrac{0.21}{\sum_{i=1}^{3} P(B|A_j)P(A_j)} = 0.4615$

$\cdot P(B_2 | A_2) = 0{,}6$, $0{,}6 \cdot 0{,}35 = 0{,}21$

Problema 1:
Se determinaron 9 mediciones de concentraciones de fósforo en suelo de un campo y los datos obtenidos fueron:

522,8 | 499,1 510,2 | 508,6 473,3 | 501,2 | 495,4 | 507,3 | 519,9

a) Dar cuatro medidas de posición para estos datos.
b) Dar cuatro medidas de dispersión para estos datos.
c) Determinar si hay datos atípicos para estas mediciones. Justifique su respuesta.
d) Realizar un gráfico de caja o box plot para estos datos.
e) Si a los datos originales les multiplicamos por (-2) y le restamos 1200 ¿cuánto vale el promedio y desvío estándar para los datos transformados?

a) $\bar{x} = 504,2$ ✓ , $-2,204,4 \} \bar{x}(-2) - 1200$

473,3 495,4 499,1 501,2 507,3 508,6 510,2 519,9 522,8

$\tilde{x} = x_{\frac{n+1}{2}} \Rightarrow x_5 = 507,3$ ✓

$Q_1 = X_{\frac{n+1}{2}} = X_3 = 499,1$ ✓

$Q_3 = X_{\frac{n+1}{2}} = X_7 = 510,2$ ✓

$* \; S_x^2 = 1/n \sum_{i=1}^{9} (x_i - \bar{x})^2 = 191,63$ ✓

$S_x = \sqrt{S_x^2} = 13,84$ ✓

b) Rango muestral: 49,5 ✓

R.I.C: 11.1 ✓

c)

• $1,5 \cdot RIC = 16,65$, $Q_1 - 16,65 <$ $< Q_3 + 16,65$

482,45 526,85

Datos atípicos: 473,3 ✓

$y = -2x - 1200$

$$\boxed{\begin{array}{l} \bar{y} = a(\bar{x}) + b \\ s^2_y = a^2 S_x^2 \end{array}}$$

$$\frac{\sum -2x - 1200}{n} = \frac{-2}{n} \sum x + 600$$

$$\frac{-2}{n} \sum x + 1200n$$

$$-2\bar{x} + 1200n$$

$$\frac{1}{n} \sum \left(-2x - 1200n + 2\bar{x} - 1200n\right)$$

$$\frac{2}{n} \sum \left(-2x + 2\bar{x}\right) = -2 \, r(x)$$

Problema 2:

Las máquinas M1, M2 y M3 fabrican en serie determinado artículo. Las producciones de M1, M2 y M3 son de 500, 350 y 650 artículos diarios y los porcentajes de defectuosos son del 1,5 %; 3,5% y 1% respectivamente. De la producción total de las tres máquinas se toma una pieza al azar al final del día.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el artículo haya sido producido por la máquina M1?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuoso y haya sido producido por la máquina M3?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el artículo sea defectuoso?

d) Si se sabe que el artículo seleccionado es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producido por la máquina M2?

e) Si se sabe que el artículo seleccionado no es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producido por la máquina M1?

$\underbrace{\begin{array}{l} \cdot M_1 \text{ — } 500, 1{,}5\% \\ \cdot M_2 \text{ — } 350, 3{,}5\% \\ \cdot M_3 \text{ — } 650, 1\% \end{array}}_{n=1500}$

$$\boxed{0{,}228} = \frac{0{,}008}{0{,}035} = \frac{P(M_2 \cap A)}{0{,}035}$$

$$P(M_2|A) = \frac{P(M_2 \cap A)}{0{,}035}$$

a) $\frac{500}{1500} = 0.\overline{3}$

$P(A)\ \frac{6.5}{1500} = 0{,}004\overline{3}$

b) $\frac{650}{150} = 0{,}4\overline{3}$

d) $P(A|M_2) = \frac{P(A \cap M_2)}{P(M_2)} = 0{,}035 = \frac{P(A \cap M_2)}{0{,}2\overline{3}}$

$0{,}2\overline{3} \cdot 0{,}035 = \boxed{0{,}008}$

c) $500 \times 1.5\% + 350 \times 3{,}5\% + 650 \times 1\% = 7.5 + 12.25 + 6{,}5$

$= \frac{26.25}{1500} = 0{,}0175$

b) $\overbrace{P(A|M3)}^{0{,}01} = \frac{P(A \cap M_3)}{\underbrace{P(M_3)}_{0{,}4\overline{3}}} =$

$0{,}01 \cdot 0{,}43 = P(A \cap M_3)$

e) $P(A|M1) = 0{,}015$ = def.

$1 - 0{,}0015 = 0{,}985 \rightarrow$ no def.

$0{,}985 \times 0{,}\overline{3} = 0{,}33$

Problema 3:

La función de distribución acumulada (f.d.a.) de X es como sigue:

$$F(x) = P[X \le x] = \begin{cases} 0 & si\ x < -1 \\ 0{,}30 & si\ -1 \le x < 2 \\ a & si\ 2 \le x < 4 \\ 1 & si\ x \ge 4 \end{cases}$$

siendo $0{,}30 < a < 1$, una constante a determinar.

a) ¿Cuáles son los valores posibles que puede tomar X con probabilidad positiva?

b) Si se sabe que la E(X)=3/2, hallar el valor de la constante a tal que F sea f.d.a.

c) Graficar la función probabilidad de masa y la función distribución acumulada de X.

d) Calcular la varianza de X.

e) Determinar cuánto vale la esperanza y varianza de W=-5 X+ 18.

a) _ $P(-1)$, $P(2)$, $P(4)$

b) _ $E(x) = 3/2$, luego $E(x) = \sum_{i=0}^{n} x_i \, p(x_i)$

$(-1)\,0{,}30 + 2(a - 0{,}3) + 4(1-a) = 3/2$

$-0{,}3 + 2a - 0{,}6 + 4 - 4a = 3/2$

$-2a = 3/2 + 0{,}3 + 0{,}6 - 4$

$a = -1{,}6/2$

$a = 0{,}8$ ✓

$[P(-1) = 0{,}3,\ P(2) = 0{,}5,\ P(4) = 0{,}2]$

d) $= V(x) = E(x^2) - \mu^2 = E(x^2) - (3/2)^2$

$E(x^2) = \sum_{i=-1}^{4 \neq 7} (-1)^2 \cdot 0{,}3 + (2)^2 \cdot 0{,}5 + (4)^2 \cdot 0{,}2 = 5{,}5 - 2{,}25 = 3{,}25$