Ejercicio 2.

$X_1, \ldots, X_m$ es una muestra aleatoria de una distribución de resistencia de vigas de concreto con media μ_1 y desviación estándar σ_1 e $Y_1, \ldots, Y_n$ es una muestra aleatoria de una distribución de resistencia de cilindros de concreto con media μ_2 y desviación estándar σ_2. Suponga que $X_1, \ldots, X_m$ e $Y_1, \ldots, Y_n$ son muestras aleatorias independientes entre sí.

Se obtuvieron las siguientes observaciones:

Resistencias de vigas de concreto:

5,9 7,2 7,3 6,3 8,1 6,8 7,0 7,6 6,8 6,5 7,0 6,3 7,9 9,0 8,2 8,7 7,8 9,7 7,4 7,7

Resistencias de cilindros de concreto:

6,1 5,8 7,8 7,1 7,2 9,2 6,6 8,3 7,0 8,3 7,8 8,1 7,4 8,5 8,9 9,8 9,7 14,1 12,6 11,2

a) Calcule una estimación para μ_1, μ_2, σ_1^2 y σ_2^2.
b) Dé un estimador insesgado de $\mu_1 - \mu_2$. Calcule una estimación de dicha diferencia.
c) Obtenga la varianza y la desviación estándar (error estándar) del estimador del inciso b).
d) Calcule una estimación puntual de la relación σ_1/σ_2.

c_ $V(\widehat{\mu_1 - \mu_2}) = V(\bar{X} - \bar{Y}) \overset{\text{ind.}}{=} V(\bar{X}) + V(\bar{Y}) \doteq V\left(\frac{1}{m}\sum X_i\right) + V\left(\frac{1}{n}\sum Y_i\right)$
$= \frac{1}{m^2}\sum V(X_i) + \frac{1}{n^2}\sum V(Y_i) = \frac{1}{m^{\cancel{2}}}\cdot \cancel{m}\,\sigma_1^2 + \frac{1}{n^{\cancel{2}}}\cancel{n}\,\sigma_2^2 =$
$\frac{1}{m}\cdot\sigma_1^2 + \frac{1}{n}\cdot\sigma_2^2$ (error est.) desviacion, luego:

* $\sqrt{V(\widehat{\mu_1 - \mu_2})} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}$

• Estimación $V(\widehat{\mu_1 - \mu_2}) = \frac{0,932}{20} + \frac{4,4272}{20} = 0,26796$

• Luego, $\sqrt{0,26796} = 0,5176$

a_ Estimación para $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$:

* $\hat{\mu}_1 = \bar{X} = \left[\sum_1^m X_i\right]\cdot 1/m$ y $\hat{\mu}_2 = \left[\sum_1^n Y_i\right]\cdot 1/n$
$= 7,46$ $\quad = 8,57$

* $\hat{\sigma}_1^2 = S^2_{m-1(1)} = 1/m-1 \sum (X_i - \hat{\mu}_1)^2 = 0,932$ y
$\hat{\sigma}_2^2 = S^2_{n-1(2)} = 1/n-1 \cdot \sum (Y_i - \hat{\mu}_2)^2 = 4,4272$

b_ Para que $\hat{\theta} = h(X_1, \ldots, X_n)$ es insesgado para θ si $E(\hat{\theta}) = \theta$. Entonces $\widehat{\mu_1 - \mu_2} = \bar{X} - \bar{Y}$ tq. $E(\widehat{\mu_1 - \mu_2}) = E(\bar{X} - \bar{Y}) = E(\bar{X}) - E(\bar{Y}) = E\left(\left[1/m\cdot\sum_1^m X_i\right]\right) - E\left(\left[1/n\cdot\sum_1^n Y_i\right]\right) =$
$1/m\cdot\sum^m E[X_i] - 1/n\cdot\sum^n E[Y_i] = 1/\cancel{m}\cdot\cancel{m}\cdot\mu_1 - 1/\cancel{n}\cdot\cancel{n}\,\mu_2$
$= \mu_1 - \mu_2 \rightarrow$ Es insesgado.

* Estimación: $\widehat{\mu_1 - \mu_2} = \bar{X} - \bar{Y} = 7,46 - 8,575 = -1,115$

d_ $\widehat{(\sigma_1/\sigma_2)} = \frac{\hat{\sigma}_1}{\hat{\sigma}_2} = \frac{\sqrt{0,932}}{\sqrt{4,4272}} = 0,4588$

Ejercicio 3.

Se seleccionan al azar n_1 fumadores (hombres) y n_2 fumadoras. Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes que denotan, respectivamente, el número de fumadores y fumadoras que fuman cigarrillos con filtro. Denotamos con p_1 y p_2 las respectivas probabilidades de que un hombre y una mujer seleccionados al azar fumen cigarrillos con filtro.

a) Demuestre que (X_1/n_1) - (X_2/n_2) es un estimador insesgado para $p_1 - p_2$.

b) ¿Cuál es el error estándar del estimador del inciso a)?

c) Si $n_1 = n_2 = 200$, $x_1 = 127$ y $x_2 = 176$, obtenga una estimación de $p_1 - p_2$.

d) Con los datos del inciso c) obtenga una estimación del error estándar del estimador de $p_1 - p_2$.

. n_1 fumadores y n_2 fumadoras y X_1 usan filtro de los fumadores, X_2 usan filtro de las fumadoras. Luego, tengo que $X_1 \sim B(n_1, p_1)$ y $X_2 \sim B(n_2, p_2)$

a_ $\widehat{p_1 - p_2} = X_1/n_1 - X_2/n_2$. Veamos que, $E\left[X_1/n_1 - X_2/n_2 \right] = 1/n_1 \, E[X_1] - 1/n_2 \, E[X_2] = \cancel{1/n_1} [\cancel{n_1} \cdot p_1] - \cancel{1/n_2} \cdot [\cancel{n_2} \cdot p_2] = p_1 - p_2$

b_ Error estandar: $V\left(X_1/n_1 - X_2/n_2 \right) \doteq (1/n_1)^2 V(X_1) + (1/n_2)^2 V(X_2) = 1/n_1^2 \left[n_1 \cdot p_1 (1-p_1) \right] - 1/n_2^2 \left[n_2 \cdot p_2 (1-p_2) \right] = \dfrac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \dfrac{p_2(1-p_2)}{n_2} =$

$*$ Error estandar $= \sqrt{V(\text{estimador})} = \sqrt{\dfrac{p_1(1-p_1)}{n_1} - \dfrac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$

c_ $p_1 - p_2 = X_1/n_1 - X_2/n_2 = \dfrac{127}{200} - \dfrac{176}{200} = \dfrac{-49}{200} = -0{,}245$

d_

$*$ $\hat{p}_1 = x_1/n_1$, $\hat{p}_2 = x_2/n_2 = \sqrt{\dfrac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \dfrac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} = \sqrt{\dfrac{\frac{127}{200}\left(1-\frac{127}{200}\right)}{200} + \dfrac{\frac{170}{200}\left(1-\frac{176}{200}\right)}{200}}$

Ejercicio 4.
Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria, donde cada X_i tiene media μ y varianza σ^2.
a) Demuestre que $\bar{X}^2$ no es un estimador insesgado para μ^2.
b) ¿Para qué valor de k es el estimador $X^2 - kS^2$ insesgado para μ^2?

a_ $E[\bar{X}_2^2] \neq \mu_i^2$, luego:

. $V[\bar{x}] = E[\bar{x}^2] - (E[\bar{x}])^2$, $E[\bar{x}] = E[1/n \sum^n X_i] = \mu$

$\longrightarrow V[\bar{x}] = \frac{1}{n^2} V(\sum x_i) = \frac{1}{n^2} \sum V(x_i) = \frac{1}{n^2} n \cdot \sigma^2$.

* Ahora, $\underbrace{V(\bar{x})}_{\frac{1}{n}\sigma^2} = E[\bar{x}^2] - (E[\bar{x}^2])^2$

$\frac{1}{n}\sigma^2 = ? - \mu^2$, $E[\bar{x}^2] = \frac{1}{n}\sigma^2 + \mu^2 \neq \mu^2$, luego no es insesgado.

b_ $E[\bar{x}^2 - k \cdot s^2] = E[\bar{x}^2] - k \cdot E[s^2] = [\frac{1}{n} \cdot \sigma^2 + \mu_2] - k \cdot E[s^2] = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 - k \cdot E(s^2) = \mu^2$

$\rightarrow \frac{\sigma^2}{n} = k \cdot E(s^2)$

* Finalmente, $k = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{1}{E(s^2)} = \frac{1}{n}$

Ejercicio 5.
Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de la función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 0,5(1 - \theta x) & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

donde $1 \leq \theta \leq 1$ (esta distribución aparece en física de partículas).
Demostrar que $\hat{\theta} = 3\bar{X}$ es un estimador insesgado de θ y calcular su varianza.

* $E(\hat{\theta}) = \theta$ por def. de insesgado. Luego $E(\hat{\theta}) = E(3\bar{X}) = 3 \cdot 1/n \cdot \sum E(X_i) \doteq$ $3/n \cdot \sum \int x \cdot f(x)\,dx = 3/n \cdot \sum^n \theta/3 = \cancel{3}/\cancel{n} \cdot \cancel{n} \cdot \theta/\cancel{3}$ $= \theta$. Luego $3\bar{X}$ es insesgado.

* Nota: $\int_{-1}^{1} 0,5(1 + \theta x) \cdot x\,dx \doteq 0,5 \int x + \theta x^2\,dx = 0,5 \cdot (\int x\,dx + \int \theta x^2\,dx) = 0,5 \left(\cancel{x^2/2 \Big|_{-1}^{1}} + \theta \cdot x^3/3 \Big|_{-1}^{1} \right) \doteq \theta(1/3 + 1/3) \cdot 0,5$
$\theta \cdot 2/3 \cdot 0,5 = \theta/3$ ✓

* $V(3\bar{x}) = 3^2 \cdot V(\bar{x}) = 3^2 \cdot V(1/n \cdot \sum x_i) = \left(\frac{3}{n}\right)^2 \cdot \sum V(x_i)$, en donde $V(x_i) = E(x_i^2) - E(x_i)^2$. Luego:
$E(x_i^2) = \int x^2 \cdot f(x)\,dx = 1/3$, $V(x_i) = 1/3 - \left(\frac{\theta}{3}\right)^2 = 1/3 - \theta^2/9 = \frac{3 - \theta^2}{9}$

$$* \quad V(\theta) = (3/n)^2 \cdot \sum \frac{3-\theta^2}{9} = \frac{\cancel{3^2}}{n^2} \cdot \cancel{n} \cdot \frac{3-\theta^2}{\cancel{3^2}} \doteq \frac{3-\theta^2}{n} \longleftarrow$$

Ejercicio 6.

Se denota con X la proporción de tiempo que un estudiante, seleccionado al azar, emplea trabajando en cierta prueba de aptitud. Se supone que X tiene función de densidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} (\theta+1)x^{\theta} & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

donde $-1 < \theta$.

a) Obtenga por el método de los momentos un estimador de θ.

b) Se toma una muestra aleatoria de 10 estudiantes obteniéndose las siguientes observaciones:

0,92 0,79 0,90 0,65 0,86 0,47 0,73 0,97 0,94 0,77

Calcule con esta información una estimación de θ, usando el estimador obtenido en el inciso a).

a_ Planteamos "m" ecuaciones, tq:

- $E[x] = 1/n \cdot \sum X_i$
- $E[x^2] = 1/n \cdot \sum x_i^2$

$\vdots$

- $E[x^m] = 1/n \cdot \sum x_i^m$

$$* \; E[x] = \int x \cdot f(x)\,dx = \int_0^1 x \cdot (\theta+1)x^{\theta}\,dx = (\theta+1) \cdot \int_0^1 x^{\theta+1}\,dx = (\theta+1) \cdot \left[\frac{x^{\theta+2}}{\theta+2}\right]\Big|_0^1 = \frac{\theta+1}{\theta+2}$$

$*$ Luego $E(x) = \bar{x} \Rightarrow \theta+1/\theta+2 = \bar{x}$, despejamos "$\theta$":

$\frac{\theta+1}{\theta+2} = \bar{x}$, $\theta+1 = \bar{x}(\theta+2)$, $\theta+1 = \bar{x}\theta + \bar{x}2$, $\theta+1-\bar{x}\theta = 2\bar{x}-1$, $\theta(1-\bar{x}) = 2\bar{x}-1$, $\theta = \frac{2x-1}{(1-\bar{x})}$, Finalmente, tengo:

$$* \quad \boxed{\hat{\theta} = \frac{2\bar{x}-1}{1-\bar{x}}}$$

b_ $\bar{x} = 0,8$, luego $\hat{\theta} = \frac{2(0,8)-1}{1-0,8} = 3$

Ejercicio 7.

Se supone que el espesor de pintura de baja viscosidad (X) tiene distribución normal. Se realizaron las siguientes observaciones de espesores de pintura de baja viscosidad:

0,83 0,88 0,88 1,04 1,09 1,12 1,29 1,31 1,48 1,49 1,59 1,62 1,65 1,71 1,76 1,83

a) Calcule una estimación puntual de la media de la distribución del espesor de pintura por el método de los momentos.
b) Calcule una estimación puntual de la mediana de la distribución del espesor de pintura por el método de MV.
c) Calcule una estimación del percentil 90 de la distribución del espesor de pintura por el método de MV.
d) Estime $P(X < 1,5)$ por el método de MV.
e) ¿Cuál es el error estándar del estimador usado en el inciso a)?

a_ $X \sim (\mu, \sigma^2)$, y $\bar{x} \doteq 1,3481$. $\hat{\theta} = \bar{x}$, $\hat{\theta} = 1,3481$

b_ Mediana def. com el cuantil $\eta_x(0,5) \sim \eta_z(0,5) = 0$ pues $\phi(0) = 0,5$ y por propiedad:

* $\hat{\eta}_x(p) = \eta_z(p) S_n + \bar{x}$, luego $0 \cdot S_n + \bar{x} = 1,3481$

* $\eta_z(0,9) = 1,3$, $\eta_z(p) = 1,3 \cdot S_n + \bar{x}$, luego $S_n \doteq 0,3277$
$1,3 \cdot (0,3277) + 1,3481 = 1,7742$

d_ $P(X < 1,5)_{MV} \doteq P(X \leq 1,5)_{MV} \doteq \phi\left(\frac{1,5 - \bar{x}}{S_n}\right) \doteq \phi\left(\frac{1,5 - 1,3481}{0,3277}\right)$,

$\phi(0,46) = 0,6772$

e_ $\sigma_{\hat{\theta}} = \sqrt{V(\hat{\theta})}$, veamos primero $V(\hat{\theta}) = V(\bar{x})$, luego: $V\left(1/n \cdot \sum^n \bar{X}\right) \doteq \frac{1}{n^2} \cdot \sum^n V(X_i) = \frac{1}{n^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{n} \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$, finalmente tomamos raíz, $\sigma / \sqrt{n}$

Ejercicio 8.
El tiempo de respuesta X (en segundos) de cierta terminal de computadoras tiene distribución exponencial de parámetro $\lambda > 0$.
a) Obtenga el estimador de máxima verosimilitud de λ.
b) Se hacen 10 observaciones resultando los valores:

3,11 0,64 2,55 2,20 5,44 3,42 10,39 8,93 17,82 1,30

Calcule, con estos datos, una estimación para λ usando el estimador obtenido en el inciso a).

$$L(x) = \prod_1^n \left(\lambda \cdot e^{-\lambda x_i}\right) = \lambda^n \left(e^{-\lambda \cdot x_1} \cdots e^{-\lambda \cdot x_n}\right) = \lambda^n \cdot e^{-\lambda \cdot \sum_i^n x_i}$$

$\bar{x} = 1/n \cdot \sum_i^n x_i$, $\bar{x} \cdot n = \sum_i^n x_i$

$\underbrace{\bar{x} \cdot n}_{\sum_i^n x_i} \rightarrow$

* $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ y se que $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & c.c \end{cases}$

a) Funcion de MV: $L(x) = \prod_1^n f_x(x_i, \lambda)$, luego $f_x(x,\lambda) = \begin{cases} \lambda^n \cdot e^{-\lambda \sum_i^n x_i} \\ 0 \end{cases}$

* $L(x_i, \lambda) = \begin{cases} \lambda^n \cdot e^{-\lambda n \bar{x}} \\ 0 \end{cases}$, $\ln(L(\lambda)) = \ln \lambda^n + \ln e^{-\lambda n \bar{x}}$
$= n \ln(\lambda) + (-\lambda n \bar{x})$
$= n \ln(\lambda) - \lambda n \bar{x}$

* $(n \ln(\lambda) - \lambda n \bar{x})' = \frac{n}{\lambda} - n\bar{x} = 0$, $\frac{n}{\lambda} = n\bar{x}$, $n = n\bar{x}\lambda$, $\frac{n}{n} = \bar{x}\lambda$, $\frac{1}{\bar{x}} = \lambda$ $\rightarrow$ Candidato a MV.

$\rightarrow$ Veamos si es maximo:

* $(n \cdot \ln(\lambda) - \lambda n \bar{x})'' = (n/\lambda - n\bar{x})' = \frac{n' \cdot \lambda - n \cdot \lambda'}{\lambda^2} = \frac{0 \cdot \lambda - n(1)}{\lambda^2} = -\frac{n}{\lambda^2}$, $-n / \underbrace{\left(\frac{1}{\bar{x}}\right)^2}_{\text{siempre positivo.}} < 0$

$\therefore$ $\hat{\lambda} = 1/\bar{x}$ es máximo.