2018008931 HW #2

#3.6

3.6 Evaluate e^{-5} using two approaches

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

and

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots}$$

and compare with the true value of 6.737947×10^{-3}. Use 20 terms to evaluate each series and compute true and approximate relative errors as terms are added.

$$\text{Relative error} = \left| \frac{\text{true value} - \text{approximate value}}{\text{true value}} \right|$$

i) $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \cdots$

$$e^{-5} = 1 - 5 + \frac{5^2}{2!} - \frac{5^3}{3!} + \frac{5^4}{4!} - \frac{5^5}{5!} \cdots + \frac{5^{20}}{20!}$$

$= 6.74554 \times 10^{-3}$ (by excel) — ①

ii) $\frac{1}{e^x} = \frac{1}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots}$

$$e^{-5} = \frac{1}{1 + 5 + \frac{5^2}{2} + \frac{5^3}{3!} + \frac{5^4}{4!} + \cdots + \frac{5^{20}}{20!}} = 6.737948 \times 10^{-3} \text{ — ②}$$

iii) $R_1 = \left| \frac{6.737947 \times 10^{-3} - 6.74554 \times 10^{-3}}{6.737947 \times 10^{-3}} \right| = 1.1 \times 10^{-4}$

$R_2 = \left| \frac{6.737947 \times 10^{-3} - 6.737948 \times 10^{-3}}{6.737947 \times 10^{-3}} \right| = 1.48 \times 10^{-7}$

$\therefore 1.1 \times 10^{-4}, \quad 1.48 \times 10^{-7}$

#3.7

3.7 The derivative of $f(x) = 1/(1 - 3x^2)$ is given by

$$\frac{6x}{(1 - 3x^2)^2}$$

Do you expect to have difficulties evaluating this function at $x = 0.577$? Try it using 3- and 4-digit arithmetic with chopping.

i) $f(x) = \frac{1}{(1-3x^2)}$, $f'(x) = 6x / (1-3x^2)^2$

$$f'(0.577) = \frac{6 \times 0.577}{\{1 - 3 \times (0.577)^2\}^2} = \frac{3.462}{(1 - 0.998787)^2} = 2352911$$

$\therefore$ no difficulty

ii) 3-digit

$$f'(0.577) = \frac{3.46}{(1 - 3 \times \cancel{0.332})^2} = \frac{3.46}{(0.004)^2} = 216250$$

0.996

$$R_1 = \left| \frac{2352911 - 216250}{2352911} \right| \doteqdot 0.908$$

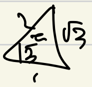
ii) 4-digit

$$f'(0.5777) = \frac{3.462}{(1-0.9987)^2} = \frac{3.462}{(0.0013)^2} = 2048521$$

$$R_2 = \left|\frac{2352911 - 2048521}{2352911}\right| \doteqdot 0.129$$

4.2

?



4.2 The Maclaurin series expansion for cos x is

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

Starting with the simplest version, $\cos x = 1$, add terms one at a time to estimate $\cos(\pi/3)$. After each new term is added, compute the true and approximate percent relative errors. Use your pocket calculator to determine the true value. Add terms until the absolute value of the approximate error estimate falls below an error criterion conforming to two significant figures.

$1^{m}23\ldots$?

i) $n=0$

$$\cos\frac{\pi}{3} = 1.$$

$$R_0 = \left|\frac{0.5-1}{0.5}\right| = 1$$

ii) $n=2$ (2) ($\pi \doteqdot 3.141592$)

$$\cos\frac{\pi}{3} = 1 - \frac{1}{2}\times\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 = 0.451688\ldots \doteqdot 0.45$$

$$R_2 = \left|\frac{\overset{0.05}{0.5-0.45}}{0.5}\right| = 0.1$$

#4.5

4.5 Use zero- through third-order Taylor series expansions to predict $f(3)$ for

$$f(x) = 25x^3 - 6x^2 + 7x - 88$$

using a base point at $x = 1$. Compute the true percent relative error ε_t for each approximation.

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!}h^3 + \cdots$$

$x_i = 1,\ x_{i+1} = 3$

$h = 3-1 = 2$

$f'(x) = 75x^2 - 12x + 7$

i) Zero-order

$f(x_{i+1}) \doteqdot f(x_i) = f(1)$

$= 25\times1^3 - 6\times1^2 + 7\times1 - 88$

$= 554$

$$\varepsilon = \left|\frac{554-(-62)}{554}\right| \times 100 = \frac{\overset{616}{\cancel{554+62}}}{554}\times100 \doteqdot 111.19\%$$

ii) first-order

$f(x_{i+1}) \doteqdot f(x_i) + f'(x_i)h$

$f'(1) = 75\times1^2 - 12\times1 + 7 = 70$

$\Rightarrow f(3) \doteqdot f(1) + f'(1)\times2$

$= -62 + \cancel{70\times2}^{140}$

$= 78$

$$\varepsilon = \left|\frac{\overset{476}{\cancel{554-78}}}{554}\right| \times 100 \doteqdot 85.9\%$$

iii) Second-order

$$f(x_{i+1}) \doteqdot f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2}\times h^2$$

$f''(x) = 150x - 12$

$$f(3) \doteqdot f(1) + f'(1)\times2 + \frac{f''(1)}{2}\times2^2$$

$$= -62 + 70\times2 + \frac{150-12}{2}\times4$$

$= 354.$

$$\varepsilon = \left|\frac{\overset{200}{\cancel{554-354}}}{554}\right| \times 100 \doteqdot 36.1\%$$

iv) Third order

$$f(x_{i+1}) \doteqdot f(x_i) + f'(x_i)\times h + \frac{f''(x_i)}{2}\times h^2 + \frac{f'''(x_i)}{6}\times h^3$$

$f'''(x_i) = 150$

$$f(3) \doteqdot f(1) + f'(1)\times 2 + \frac{f''(1)}{2}\times 2^2 + \frac{f'''(1)}{6}\times 8$$

$$= 554$$

$$\varepsilon = \left|\frac{554-554}{554}\right| \times 100 = 0\%$$

$\therefore$ Third order.

\# 4.12

4.12 Repeat Prob. 4.11 with $g = 9.81$, $t = 6$, $c = 12.5 \pm 1.5$, and $m = 50 \pm 2$.

i) $v(t) = \frac{gm}{c}\left(1-e^{-(c/m)t}\right)$

ii) $$\frac{dv(t)}{dc} = \frac{cgte^{\frac{-ct}{m}} - gm\left(1-e^{\frac{-ct}{m}}\right)}{c^2}$$

$$= \frac{12.5\times 9.81\times 6\times e^{\frac{-12.5\times 6}{50}} - 9.8\times 50\times\left(1-e^{\frac{-12.5\times 6}{50}}\right)}{(12.5)^2}$$

$$\doteqdot -1.3866$$

iii) $$\frac{dv(t)}{dm} = \frac{g}{c}\left(1-e^{\frac{-ct}{m}}\right) + \frac{gm}{c}\times e^{\frac{-ct}{m}}\times\frac{-ct}{m^2}$$

$$= \frac{g}{c}\left(1-e^{\frac{-ct}{m}}\right) - \frac{gt}{m}e^{\frac{-ct}{m}}$$

$$= \frac{9.81}{12.5}\times\left(1-e^{-1.5}\right) - \frac{9.81\times 6}{50}\times e^{-1.5}$$

$$\doteqdot 0.871468$$

iv) $$\Delta v(c) = \left|\frac{dv}{dc}\right|(\Delta c) + \left|\frac{dv}{dm}\right|(\Delta m)$$

$$= |-1.38661|\times 1.5 + 0.871468\times 2$$

$$= 3.822834$$

$$v(12.5) = \frac{9.81\times 50}{12.5}\left(1-e^{-1.5}\right) = 30.4534$$

$$\therefore v = 30.453 + 3.8228 = 34.2758$$

수치해석 HW#2

컴퓨터소프트웨어학부

2018008931

이유진

1. How to use pointers for memory allocation?

A[j]는 *((a)+(j)) 로 정의되는데, 이는 pointer a를 j만큼 늘림으로써 얻어지는 주소의 내용물을 의미한다. 또한, 배열의 원소인 a[0]는 항상 정의되어 있으며, 이를 보통 "zero-origin" 혹은 "zero-offset"이라고 부른다. 이를 이용하여, 메모리를 할당하는 함수와 해제하는 함수가 만들어진다. Float **a에서, a[i][j]는 a의 주소에 i를 더한 후의 값을 새로운 주소로 정하고, 이것에 j를 더한 후, 그 값을 새로운 주소로 return 해 준다는 것을 의미한다. 이때, 포인터들의 배열의 저장을 위한 값과 우리가 array를 선언할 때 pointers를 initialize할때 기억을 위한 약간의 값이 필요하다. 그리하여, 우리는 포인터의 array의 포인터를 기억하는 것 대신, matirx의 rows의 첫번째 주소만 기억하는 방법을 택한다.

2. How to use pointer to function?

우리는 함수(functon)에서 많은 인자를 사용한다. 이때, 그저 value 값을 참조할 경우에는 value만을 가지고 오면 되지만, 해당 인자의 값을 바꾸는 등의 변형을 하고 싶을 때에는 pointer를 이용하여 참조하여야 한다. 이때, 함수에서 사용할 인자의 모든 physical size를 기억할 필요가 없다. Identifier를 이용하면 되기 때문이다. 1번에서 설명하였듯이 포인터들의 physical size를 모두 기억하고 기록하는 것은 굉장히 비효율적이며, fixed size를 잘 사용하지도 않기 때문에, 우리는 array의 첫번째 element의 pointer, 즉 address만을 기억한다. 그리하여, function에서 인자를 사용할 때는 그것의 pointer(주소) 혹은 배열일 경우 첫번째 element의 pointer (주소) 만을 사용하면 된다.