Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)
Физтех-школа прикладной математики и информатики
Кафедра дискретной математики

На правах рукописи

Шабанов Лев Эдуардович

Теоремы типа Турана для дистанционных графов

Специальность 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика
Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Москва 2022

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук **Райгородский Андрей Михайлович**
Ведущая организация:	Хабаровское отделение Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук.

Защита состоится 23 декабря 2022 г. в 12 часов 00 минут на заседании диссертационного совета ФПМИ.1.1.5.002, созданного на базе федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)» (МФТИ, Физтех).

по адресу: 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д.9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МФТИ, Физтех и на сайте организации https://mipt.ru.

Автореферат разослан «___» ____________________ 2022 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
ФПМИ.1.1.5.002,
к.т.н., доцент Войтиков Константин Юрьевич

Актуальность работы

Данная работа находится на стыке нескольких областей комбинаторики, прежде всего экстремальной теории графов и разных задач турановского типа, а также исследования дистанционных графов, поговорим отдельно про каждый из этих аспектов.

Задачи Турановского типа

Классическая теорема Турана [1] дает ответ на вопрос, каково максимально возможное количество ребер в графе на n вершинах, не содержащем полного подграфа размера k.

Теорема 1. *Наибольшее количество ребер в графе на n вершинах, не содержащем полного подграфа размера k достигается на полном $(k-1)$-дольном подграфе, размер каждой доли которого $\lfloor\frac{n}{k-1}\rfloor$ или $\lceil\frac{n}{k-1}\rceil$.*

В дальнейшем был поставлен вопрос о том, какое количество ребер получится, если запрещенные подграфы не будут полными. Первым продвижением в данном вопросе стала теорема Эрдеша–Стоуна–Шимоновича ([2] - [4]):

Теорема 2. *Пусть H — граф с хроматическим числом r. Тогда справедлива следующая оценка:*

$$\mathrm{ex}(n,H) \leqslant \binom{n}{2}\frac{r-2}{r-1} + o(n^2),$$

где $\mathrm{ex}(n,H)$ — наибольшее возможное количество ребер в графе на n вершинах, не содержащем H в качестве подграфа.

Оценка, предложенная в теореме 2, являеется точной при $r \geqslant 3$ и достигается на полном $(r-1)$-дольном графе с размерами долей $\lfloor\frac{n}{r-1}\rfloor$ или $\lceil\frac{n}{r-1}\rceil$. В случае двудольного графа H теорема говорит о том, что максимальное количество ребер $o(n^2)$, не конкретизируя асимптотику.

Для двудольных графов ключевым результатом явдляется теорема Ковари–Шош–Турана [5]:

Теорема 3. *Для наибольшего количества ребер в графе, не содержащем двудольного подграфа $K_{s,t}$, где $s \leqslant t$, справедлива оценка:*

$$\mathrm{ex}(n, K_{s,t}) = O(n^{2-1/s})$$

До сих пор не известно, точна ли оценка из теоремы 3, однако существует немало работ, в которых исследовалось дальше экстремальное количество ребер в двудольном случае, например [6]–[9].

Для целей нашей задачи полезным будет формулировка теоремы Турана в терминах чисел независимости, которая получается из оригинальной при замене графа на дополнение:

Определение 1. *Числом независимости* $\alpha(G)$ графа G назовем размер максимального подмножества S вершин графа G такого, что никакие две вершины из S не соединены ребром.

Теорема 4. *Наименьшее число ребер в графе на n вершинах с числом независимости α достигается на графе, который является дизъюнктным объединением α полных подграфов, по $\lfloor \frac{n}{\alpha} \rfloor$ или $\lceil \frac{n}{\alpha} \rceil$ вершин в каждом.*

Дистанционные графы

Дистанционные графы — один из важнейших классов графов в комбинаторной геометрии. Для данного класса графов существует множество работ, посвященных исследованию различных характеристик дистанционных графов ([10]–[19]). Дистанционные графы специального вида полезны в вопросах, связанных с теорией кодирования ([20], [21]) и для решения задач в других областях, например построении контрпримеров к гипотезе Борсука ([22]–[24]). Помимо этого существует немало исследований различных свойств подобных дистанционных графов ([25]–[34]).

Дадим определение дистанционного графа.

Определение 2. Граф $G = (V, E)$ называется *дистанционным* в метрическом пространстве (S, d), если $V \subset S$, а $E = \{(x, y) \in V \times V : d(x, y) = 1\}$.

В данном определении проиллюстрировано наиболее естественное понимание дистанционного графа. Для наших целей также полезным будет более широкое определение:

Определение 3. Граф $G = (V, E)$ называется *обобщенно дистанционным* в метрическом пространстве (S, d), если существует отображение $f : V \to S$ такое, что $d(f(x), f(y)) = 1$ для любых $(x, y) \in E$.

Хроматические числа дистанционных графов

Дистанционные графы — один из важнейших классов графов в комбинаторной геометрии. Одна из известнейших проблем, связанная с данным классом графов — это задача Нельсона–Хадвигера о хроматическом числе плоскости. До недавнего времени для этой задачи были известны только тривиальные оценки $4 \leqslant \chi(\mathbb{R}^2) \leqslant 7$, нижняя достигается на графе, называемом веретеном Мозера, а верхняя при помощи раскраски шестиугольниками со стороной от $\frac{1}{\sqrt{7}}$ до $\frac{1}{2}$ и только в 2018 году Обри де Грей сконструировал [35] граф на 1581 вершине, имеющий хроматическое число 5. Впоследствии был предложен более простой пример дистанционного графа, имеющий 509 вершин.

Помимо хроматического числа плоскости исследовались и смежные вопросы. В работе [36] рассматривалось какую часть плоскости можно покрасить в один цвет и была предложена конструкция множества точек без единичных расстояний, занимающая долю плоскости, равную 0.2293, что сильно больше, чем оценка 1/7, следующая из верхней оценки хроматического числа и даже больше, чем 1/5. Более того, на плоскости можно разместить не одну, а целых четыре попарно непересекающихся подобных конструкции, из чего следует, что почти 92% вершин графа можно покрасить правильным образом в 4 цвета.

Еще один вопрос это хроматическое число пространств большей размерности. Современные оценки для пространств малой размерности приведены в работе [37]. В асимптотических оценках до сих пор сохраняется большой зазор:

$$(1.239 + o(1))^n \leqslant \chi(\mathbb{R}^n) \leqslant (3 + o(1)).$$

Верхняя оценка была доказана в работе Лармана и Роджерса [38] в 1972 году, а нижняя — Райгородским [39] в 2000 году при рассмотрении графов с вершинами в множестве $\{-1, 0, 1\}^n$.

Помимо стандартного пространства $\mathbb{R}^n$, в работе [40] рассматривалось пространство, называемое тонким слоем:

Определение 4. Назовем (n, k, ε)-*слоем* подмножество $\mathbb{R}^n \times [-\varepsilon, \varepsilon]^k \subset \mathbb{R}^{n+k}$.

В работе рассматривался тонкий $(2, k, \varepsilon)$-слой ($\varepsilon \to 0$) над плоскостью и исследовалось в том числе хроматическое число для разных k. Очевидно, что оно не меньше, чем хроматическое число плоскости. При этом верхняя оценка для данного хроматического числа по-прежнему 7 для произвольного фиксированого k и достаточно малого положительного ε. Нижнюю же оценку удалось улучшить, а именно еще до 2018 было доказано, что для любого положительного ε хроматическое число $(2, 1, \varepsilon)$-слоя не меньше, чем 5 для любого положительного ε, а хроматическое число $(2, 2, \varepsilon)$-слоя не меньше, чем 6.

Количество ребер в дистанционном графе

Другой важный вопрос, связанный с дистанционными графами можно сформулировать так: каково максимальное количество ребер $U(n, \mathbb{R}^d)$ в дистанционном графе на n вершинах в пространстве $\mathbb{R}^d$?

В данной задаче с асимптотической точки зрения интересным является случай $d \leqslant 3$, поскольку при $d \geqslant 4$ можно доказать асимптотически точную оценку. С одной стороны, полный $(\lfloor d/2 \rfloor + 1)$-дольный граф с долями по 3 вершины не является дистанционным, а с другой стороны асимптотически точная оценка в теореме 2 для такого запрещенного подграфа достигается на полном $\lfloor d/2 \rfloor$-дольном графе, который является дистанционным в $\mathbb{R}^d$.

Для дистанционных графов на плоскости и в пространстве можно оценить сверху количество ребер, используя теорему 3 для запрещенных подграфов $K_{3,2}$ и $K_{3,3}$, откуда следует, что $U(n, \mathbb{R}^2) \leqslant O(n^{3/2})$, а $U(n, \mathbb{R}^3) \leqslant O(n^{5/3})$. На текущий момент известны следующие оценки:

$$O(ne^{\frac{\log n}{\log \log n}}) \leqslant U(n, \mathbb{R}^2) \leqslant O(n^{4/3});$$

$$O(n^{4/3} \log \log n) \leqslant U(n, \mathbb{R}^3) \leqslant O(n^{3/2}).$$

Нижние оценки для плоскости и пространства были доказаны Эрдешем в [41] и [42], а верхние были приведены в работах [43] и [44] соответсвенно.

Запрещенные подграфы и число независимости

В представленной работе рассматриваются дистанционные графы в четырех пространствах: $\mathbb{R}^2$, $(2, d, \varepsilon)$-слой при малом значении ε, $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^4$ с классической евклидовой метрикой. Наша задача — определить какое наименьшее количество ребер может быть в дистанционном графе с фиксированным числом вершин и фиксированным числом независимости α.

Первая идея — это рассмотреть, какие графы не являются дистанционными в пространстве $\mathbb{R}^d$. Простейшим из таких графов является K_{d+2}, не являющийся дистанционным и в достанточно тонком слое над пространством размерности d.

Графы, свободные от K_n, исследовались в работах [45], [46], [47], [48]. В частности, при $n \leqslant 6$ были получены оценки, точные при некоторых значениях числа независимости:

Теорема 5. *Для графа G справедливы следующие нижние оценки количества ребер:*

1) $|E(G)| \geqslant 3|V(G)| - 5\alpha(G)$, если G не содержит K_3.

2) $|E(G)| \geqslant 5|V(G)| - 12\alpha(G)$, если G не содержит K_4.

3) $|E(G)| \geqslant 6.5|V(G)| - 20\alpha(G)$, если G не содержит K_5.

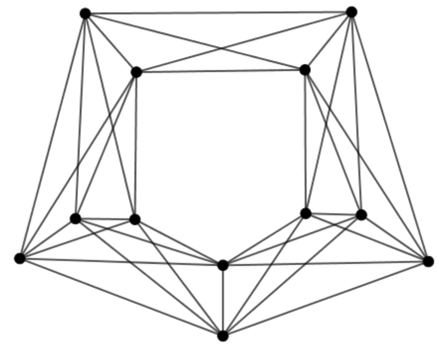
4) $|E(G)| \geqslant 8.5|V(G)| - 32.5\alpha(G)$, если G не содержит K_6.

Каждый из графов, не содержащих K_n, на которых достигается оценка, представляет из себя дизъюнктное объединение копий двух подграфов: первый граф это K_{n-1}, а второй зависит от n, при $n = 3$ это цикл из 5 вершин, а при $n = 4, 5, 6$ это графы, изображенные на рисунках 1a, 1b и 1c соответсвенно.

Графы, изображенные на рисунке 1 не являются дистанционными в пространствах $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^4$ соответственно. Помимо этого существуют и другие подграфы, не являющиеся дистанционными в $\mathbb{R}^d$, но не содержащие K_{d+2}. Запретив некоторые недистанционные подграфы, можно получить более сильные оценки в пространствах $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ и тонком слое над пространством $\mathbb{R}^2$.

Научная новизна и практическая значимость

Все результаты, приведенные в данной диссертации являются новыми. Диссертация носит теоретический характер. Полученные в ней результаты важны



(a) Граф без K_4,
$\alpha = 2$, $|V| = 8$, $|E| = 16$

(b) Граф без K_5,
$\alpha = 2$, $|V| = 10$, $|E| = 25$

(c) Граф без K_6,
$\alpha = 2$, $|V| = 12$, $|E| = 37$

Рис. 1: Примеры графов, для которых оценка из теоремы 5 точна

для теории графов и гиперграфов, комбинаторной геометрии и экстремальной комбинаторики.

Результаты, выносимые на защиту

1. Приведены и доказаны нижние оценки минимального числа ребер при заданном количестве вершин и числе независимости для дистанционных графов на плоскости.

2. Доказана аналогичная случаю плоскости оценка в случае дистанционных графов в слое над плоскостью.

3. Приведены и доказаны нижние оценки минимального числа ребер при заданном количестве вершин и числе независимости для дистанционных графов в трехмерном и четырехмерном пространстве. Данные оценки являются точными при некоторых соотношениях числа вершин и числа независимости.

4. Доказан критерий дистанционности графов определенного вида, называемых в работе пятиугольными графами, и доказано аналогичное необходимое условие дистанционности для обобщения данного вида графов, называемого k-угольными графами.

Апробация работы

Основные результаты работы докладывались на:

- The Fifth German-Russian Week of the Young Researcher on Discrete Geometry, MIPT (2015);
- Семинар по теории графов, механико-математический факультет Московского государственного университета, руководитель А.М. Райгородский (2016);
- Семинар по дискретной математике и теории чисел, механико-математический факультет Московского государственного университета, руководители Н.Г. Мощевитин, Н.П. Долбилин (2016);
- II Осенние математические чтения в Адыгее, Майкоп (2017);
- 2nd Russian-Hungarian workshop on Discrete Mathematics, Alfred Renyi Institute, Budapest (2018);
- I Всероссийская научная конференция «Экстремальная комбинаторика и дискретная геометрия», Адыгейский государственный университет (2018).
- Семинар по дискретной математике, МФТИ, руководитель А.М Райгородский (2015–2022)

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в четырех работах автора и соавторов ([49], [50], [51], [52]), список которых приведен в конце диссертации.

Личный вклад

Все результаты работ [49], [50], [51], [52] получены соискателем. А. М. Райгородский участвовал в написании обзорной части, переводе на английский язык, консультировании и устранении ряда неточностей в первоначальных вариантах текстов.

Благодарности

Автор признателен Андрею Михайловичу Райгородскому за многогранную поддержку, без которой работа не состоялась бы, и Александру Андреевичу Полянскому за ценные замечания.

Краткое содержание диссертации

Основные результаты диссертации — нижние оценки минимального количества ребер в дистанционном графе с фиксированным количеством вершин и числом независимости в четырех разных пространствах: евклидово пространство размерности 2, 3 и 4, а также тонкий слой над пространством размерности 2.

В первой главе диссертации сформулированы основные результаты диссертации для различных пространств. Для плоскости оценка выглядит следующим образом:

Теорема 6. *В дистанционном графе $G(V, E)$ в пространстве $\mathbb{R}^2$ с числом независимости α справедлива оценка $|E| \geqslant \frac{19|V|-50\alpha}{3}$.*

Для слоя над плоскостью оценка является аналогичной:

Теорема 7. *В графе $G(V, E)$, являющимся дистанционным в $(2, d, \varepsilon)$-слое для некоторого фиксированного d и произвольного положительного ε, с числом независимости α справедлива оценка $|E| \geqslant \frac{19|V|-50\alpha}{3}$.*

Для дистанционных графов в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^4$ справедливы следующие результаты:

Теорема 8. *В обобщенно дистанционном графе $G(V, E)$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ с числом независимости α справедлива оценка $|E| \geqslant 7|V| - 22\alpha$.*

Теорема 9. *В обобщенно дистанционном графе $G(V, E)$ в пространстве $\mathbb{R}^4$ с числом независимости α справедлива оценка $|E| \geqslant 9|V| - 35\alpha$.*

Для доказательства теорем 6–9 используются похожие методы. Первым полезным соображением является факт, что K_{d+2} не является дистанционным в $\mathbb{R}^d$ и в тонком слое над $\mathbb{R}^d$, однако случай, когда запрещен только подграф K_{d+2} уже изучался ранее и при $d \leqslant 4$ были доказаны оценки, которые являются точными при определенных значениях числа независимости (см. теорему 5).

Чтобы получить более точные оценки для случая дистанционных графов в каждом из случаев используется дополнительный набор подграфов небольшого размера, не являющихся дистанционными в соответствующем пространстве.

Помимо этого все четыре доказательства используют метод математической индукции по числу вершин графа, базой которого служит пустой граф, не содержащий вершин и ребер. Для перехода индукции используется понятие *конфигурации* графа, то есть вектора из трех характеристик графа: количества вершин, числа независимости и количества ребер в графе и следующее утверждение, называемое в работе ключевой леммой:

Ключевая лемма. *Из любого дистанционного графа можно удалить несколько вершин и все ребра, инцидентные удаленным вершинам, так, чтобы конфигурация графа уменьшилась на вектор (v, α, e), удовлетворяющий неравенству для соответсвующего пространства, а именно:*

1) $e \geqslant \frac{19}{3}v - \frac{50}{3}\alpha$ в двумерном пространстве или в слое над ним;

2) $e \geqslant 7v - 22\alpha$ в трехмерном пространстве;

3) $e \geqslant 9v - 35\alpha$ в четырехмерном пространстве.

Используя эту ключевую лемму можно удалять вершины из графа до тех пор, пока они там есть и после сложения всех векторов, на которые уменьшалась конфигурация в процессе удаления вершин, получится, что конфигурация начального графа также удовлетворяла необходимому нам неравенству.

Чтобы гарантировать, что число независимости графа уменьшилось после удаления нескольких вершин, множество вершин, удаляемых из графа, обычно выбирается таким образом, что несколько удаляемых вершин не смежны ни друг с другом ни с вершинами, которые останутся в графе после удаления. Тогда число независимости гарантированно уменьшится по крайней мере на количество таких вершин.

Для оценки количества ребер, которые были удалены в процессе удаления вершин используется одно из следующих соображений:

Предложение 1. *Пусть мы удаляем n вершин, причем минимальная степень удаленной вершины равна d. Тогда при удалении выбранных вершин будет удалено не менее $\frac{nd}{2}$ ребер.*

Предложение 2. *Пусть D — сумма степеней удаленных вершин, причем между ними не больше, чем E ребер. Тогда при удалении выбранных вершин будет удалено не меньше, чем $D - E$ ребер.*

Предложение 3. *Пусть D — сумма степеней удаленных вершин, а количество ребер, соединяющих удаленные вершины с неудаленными, не меньше, чем E. Тогда при удалении выбранных вершин будет удалено не меньше, чем $\frac{D+E}{2}$ ребер.*

В каждом из случаев доказательство представляет из себя разбор всех возможных случаев, соответствущих значению минимальной степени вершины в нашем графе.

Вторая глава посвящена доказательству теоремы 6 о дистанционных графах на плоскости и основана на результатах работ [49], [52]. При доказательстве теоремы 6 помимо недистанционности подграфа K_4 используется недистанционность подграфа $K_{3,2}$ и подграфа, изображенного на рисунке 2, называемого в работе *полузвездчатым*.

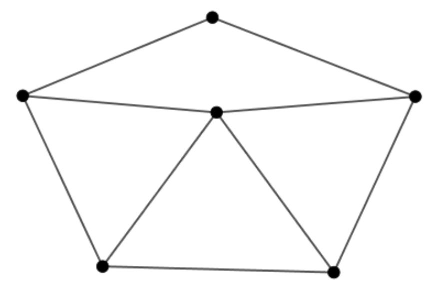
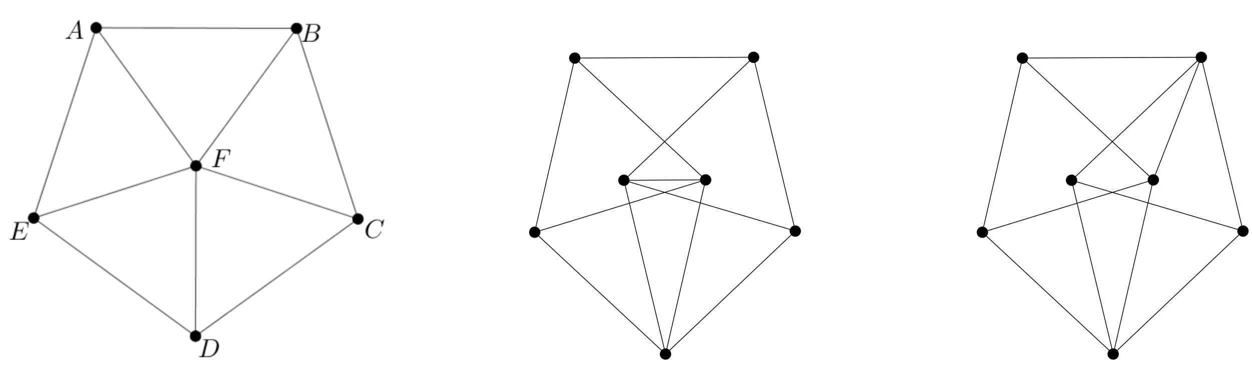


Рис. 2: Полузвездчатый граф

Оценка из теоремы 5 в двумерном случае является точной при $\frac{\alpha}{|V|} \in \left[\frac{2}{7}, \frac{1}{3}\right]$, поэтому улучшение достигается при $\alpha < \frac{2}{7}|V|$. В случае, когда $\alpha = \frac{1}{4}|V|$ теорема Турана оценивает снизу количество ребер как $1.5|V|$, теорема 5 как $2|V|$, в то время как новая теорема 6 утверждает, что ребер по крайней мере $\frac{13}{6}|V|$.

Третья глава посвящена случаю тонкого слоя над плоскостью. Несмотря на то, что полузвездчатый подграф и $K_{3,2}$ являются дистанционными в слое над плоскостью, оценка для плоскости справедлива и для слоя над плоскостью. Для ее доказательства используется недистанционность следующих графов: колеса с пятью спицами W_5, а также двух графов, получаемых добавлением ребра к веретену Мозера, называемых в работе $MS{+}_1$ и $MS{+}_2$.



(a) Граф W_5 (b) Граф $MS{+}_1$ (c) Граф $MS{+}_2$

Рис. 3: Недистанционные графы в тонком слое над плоскостью

Четвертая глава посвящена исследованию графов в трехмерном пространстве и доказательству теоремы 8. Для графов, не содержащих K_5 точная нижняя оценка достигается на дизъюнктном объединении K_4 и подграфа, изображенного на рис. 1b, однако последний не является дистанционным в $\mathbb{R}^3$. Используя это соображение и недистанционность K_5, удалось доказать оценку из теоремы 8.

Данная оценка является точной при определенных соотношениях числа вершин и числа независимости, а именно при $\frac{\alpha}{|V|} \in [\frac{1}{5}, \frac{1}{4}]$. При этом при $\alpha = \frac{1}{5}|V|$ получается значение $\frac{13}{5}|V|$, в то время как из теоремы 5 следует оценка $2.5|V|$, а из теоремы Турана $2|V|$.

Пятая глава посвящена исследованию графов в четырехмерном пространстве и доказательству теоремы 9. Для графов, не содержащих K_6 точная нижняя оценка достигается на дизъюнктном объединении K_5 и подграфа, изображенного на рис. 1c, однако последний не является дистанционным в $\mathbb{R}^4$. Используя это соображение и недистанционность K_6, удалось доказать оценку из теоремы 9.

Оценка из теоремы 9 является точной при определенных соотношениях числа вершин и числа независимости, а именно при $\frac{\alpha}{|V|} \in [\frac{1}{6}, \frac{1}{5}]$. При этом при $\alpha = \frac{1}{6}|V|$ получается значение $\frac{19}{6}|V|$, в то время как из теоремы 5 следует оценка $\frac{37}{12}|V|$, а из теоремы Турана $2.5|V|$.

Недистанционность графов, изображенных на рисунках 1b и 1c в пространствах $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^4$ достаточно нетривиальна. Для ее доказательства вводится понятие k-угольного графа:

Определение 5. Назовем граф k-угольным графом размера $a_1, \ldots, a_k$, если его вершины можно разбить на множества $S_1, \ldots, S_k, (S_{k+1} = S_1)$ с мощностями $a_1, \ldots, a_k$ таким образом, что две вершины смежны в том и только том случае, если они лежат либо в одном множестве, либо одна лежит в S_i, а другая в S_{i+1} для некоторого i от 1 до k.

Оказывается, что описанные запрещенные графы в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^4$ являются пятиугольными графами. Для пятиугольных графов была доказана следующая теорема об их дистанционности:

Теорема 10. *Пятиугольный граф, являющийся дистационным графом в $\mathbb{R}^d$, содержит не больше, чем $2d + 3$ вершины.*

Из нее сразу же следует недистанционность описанных запрещенных графов в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^4$ соответсвенно. Помимо этого было доказано обобщение этой теоремы на случай k-угольных графов при нечетном k:

Теорема 11. *В $2k+1$-угольном графе, являющимся дистанционным в $\mathbb{R}^d$, не может быть больше, чем $kd+2k-1$ вершина.*

Идея доказательства теоремы 11 состоит в рассмотрении минимальных аффинных подпространств, содержащих симплексы, соответствующие одной доле k-угольного графа, и векторов, соединяющих центры соседних таких симплексов, и исследовании их ортогональностей.

Помимо обобщения теоремы 10 было доказано, что условие дистанционности пятиугольных графов является достаточным:

Теорема 12. *Пятиугольный граф на $2d+3$ вершинах, не содержащий K_{d+2} в качестве подграфа является дистанционным в $\mathbb{R}^d$ при $d \geqslant 2$.*

В заключении приводятся две гипотезы, которые обобщают доказанные в работе теоремы. Первая гипотеза говорит о минимальном количестве ребер в дистанционном графе в $\mathbb{R}^d$ при определенном числе независимости:

Гипотеза 1. *Пусть $G(V,E)$ — дистанционный граф в $\mathbb{R}^d$ с числом независимости α. Тогда в G не меньше, чем $(2d+1)|V| - (d+1)\left(\frac{3d}{2}+1\right)\alpha$ ребер, причем если $\alpha \in \left[\frac{2|V|}{2d+3}, \frac{|V|}{d+1}\right]$, то это минимальное число ребер.*

Вторая гипотеза утвержает, что условие дистанционности в теореме 11 является достаточным.

Гипотеза 2. *$(2k+1)$-угольный граф с количеством вершин $(kd+2k-1)$ и не содержащий подграфа K_{d+2} является дистанционным в $\mathbb{R}^d$.*

Литература

[1] P. Turán, *On an extremal problem in graph theory*, Matematikai és Physikai Lapok, 48 (1941), 436 - 452 (in Hungarian).

[2] Erdős, P.; Stone, A. H. (1946). *On the structure of linear graphs.* Bulletin of the American Mathematical Society. 52 (12): 1087–1091. doi:10.1090/S0002-9904-1946-08715-7

[3] P. Erdős and M. Simonovits, A limit theorem in graph theory, Studia Sci. Math. Hungar. 1 (1966), 51–57.

[4] P. Erdős and M. Simonovits, Compactness results in extremal graph theory, Combinatorica 2 (1982), 275–288.

[5] T. Kővári, Vera T. Sós, P. Turán. *On a problem of K. Zarankiewicz* // Colloquium Math.. — 1954. — T. 3. — C. 50–57.

[6] J. A. Bondy and M. Simonovits, Cycles of even length in graphs, J. Combin. Theory, Ser. B 16 (1974), 97–105.

[7] N. Alon, M. Krivelevich, B. Sudakov, *Turán Numbers of Bipartite Graphs and Related Ramsey-Type Questions*, Combinatorics Probability and Computing, 12 (2003)

[8] B. Sudakov, I. Tomon, *Turán number of bipartite graphs with no* $K_{t,t}$, Proc. Amer. Math. Soc. 148 (2020), 2811-2818

[9] D. Conlon, O. Janzer, J.Lee, *More on the extremal number of subdivisions*, arXiv:1903.10631 (2019)

[10] P. Brass, W. Moser, J. Pach, *Research problems in discrete geometry*, Springer, 2005.

[11] Tikhomirov, M. On computational complexity of length embeddability of graphs / M. Tikhomirov // Discret. Math., 2016. - Vol. 339, №11. - P.2605 - 2612.

[12] М. Тихомиров, О задаче проверки дистанционной и мультидистанционной вложимости графа , Доклады Академии Наук, т. 468, № 3, с. 261–263, 2016.

[13] A.M. Raigorodskii, *Cliques and cycles in distance graphs and graphs of diameters*, "Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics", AMS, Contemporary Mathematics, 625 (2014), 93 - 109.

[14] A.M. Raigorodskii, *Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters*, Thirty Essays on Geometric Graph Theory, J. Pach ed., Springer, 2013, 429 - 460.

[15] А.М. Райгородский, *Проблема Эрдеша–Хадвигера и хроматические числа конечных геометрических графов*, Мат. сборник, 196 (2005), N1, 123 - 156.

[16] А.А. Сагдеев, А.М. Райгородский, *О хроматическом числе пространства с запрещенным правильным симплексом*, Доклады РАН, 472 (2017), N2, 127 - 129.

[17] Dainyak, A. Independent sets in graphs / A. Dainyak, A. Sapozhenko // Discret. Math. Appl., 2016. - Vol. 26, №6. - P.323 - 346.

[18] Боголюбский Л. И., Райгородский А. М. *Замечание о нижних оценках хроматических чисел пространств малой размерности с метриками* ℓ_1 *и* ℓ_2 // Матем. заметки. — 2019. — Т. 105, No 2. — С. 187—213.

[19] Райгородский А. *Об устойчивости числа независимости случайного подграфа* // Доклады РАН. — 2017. — Т. 477, No 6. — С. 649—651.

[20] Bassalygo L., Cohen G., Zémor G. *Codes with forbidden distances* // Discrete Mathematics. — 2000. — Vol. 213. — P. 3–11.

[21] Raigorodskii A. Combinatorial geometry and coding theory // Fundamenta Informatica. — 2016. — Vol. 145. — P. 359–369.

[22] А.М. Райгородский, *О размерности в проблеме Борсука*, УМН, 1997. Т.52 №6, с. 181-182

[23] А.М. Райгородский, *Об одной оценке в проблеме Борсука*, УМН, 1999. Т.54 №2, с. 185-186

[24] А. М. Райгородский. *Проблема Борсука.* — М.: МЦНМО, 2006. — 56 с.

[25] Бобу А., Куприянов А., Райгородский А. *О хроматических числах дистанционных графов, близких к кнезеровским* // Доклады РАН. — 2016. — Т. 468, No 3. — С. 247—250.

[26] Е.И. Пономаренко, А.М. Райгородский, *Новые верхние оценки чисел независимости графов с вершинами в* $\{-1, 0, 1\}^n$ *и их приложения в задачах о хроматических числах дистанционных графов*, Матем. заметки, 96 (2014), N1, 138 - 147.

[27] В.К. Любимов, А.М. Райгородский, *О нижних оценках чисел независимости дистанционных графов с вершинами в* $\{-1, 0, 1\}^n$, Доклады РАН, 427 (2009), N4, 458 - 460.

[28] А.Э. Гутерман, В.К. Любимов, А.М. Райгородский, А.С. Усачев, *О числах независимости дистанционных графов с вершинами в* $\{-1, 0, 1\}^n$, Мат. заметки, 86 (2009), №5, 794 - 796.

[29] Шишунов Е., Райгородский А. *О числах независимости некоторых дистанционных графов в* $\{-1, 0, 1\}^n$ // Доклады РАН. — 2019. — Т. 485, No 3.

[30] Райгородский А., Михайлов К. *О числах Рамсея для полных дистанционных графов с вершинами в* $\{0, 1\}^n$ // Матем. сборник. — 2009. — Т. 200, No 12. — С. 63—80.

[31] Пушняков Ф. *О числе рёбер в индуцированных подграфах специального дистанционного графа* // Матем. заметки. — 2016. — Т. 99, No 4. — С. 550—558.

[32] Пушняков Ф. *Новая оценка числа рёбер в индуцированных подграфах специального дистанционного графа* // Пробл. передачи информ. — 2015. — Т. 51, No 4. — С. 371—377.

[33] Пушняков Ф. *О количествах ребер в порожденных подграфах некоторых дистанционных графов* // Матем. заметки. — 2019. — Т. 105, No 4. — С. 592—602.

[34] Ф. А. Пушняков, А. М. Райгородский. *Оценка числа ребер в особых подграфах некоторого дистанционного графа* // Матем. заметки. — 2020. — Т. 107, No 2. — С. 286—298.

[35] A.D.N.J. de Grey, The chromatic number of the plane is at least 5, arXiv:1804.02385 (2018).

[36] H.T. Croft, *Incidence incidents*, Eureka (Cambridge), 30 (1967), 22–26.

[37] Д.Д. Черкашин, А.М. Райгородский, *О хроматических числах пространств малой размерности*, Доклады РАН, 472 (2017), N1, 11 - 12.

[38] D. G. Larman and C. A. Rogers. *The realization of distances within sets in Euclidean space.* Mathematika, 19:1–24, 1972.

[39] A. M. Raigorodskii. *On the chromatic number of a space.* Uspekhi Mat. Nauk, 55(2(332)):147–148, 2000.

[40] А.Я. Канель-Белов, В.А. Воронов, Д.Д. Черкашин, *О хроматическом числе плоскости*, Алгебра и анализ, 29 (2017), №5.

[41] P. Erdős, *On sets of distances of n points*, Amer. Math. Monthly, 53 (1946), 248 - 250.

[42] P. Erdős, *On sets of distances of n points in Euclidean space*, Magyar Tud. Akad. Mat. Kut. Int. Kőzl. 5 (1960), 165–169.

[43] J. Spencer, E. Szemerédi, W. T. Trotter, *Unit distances in the Euclidean plane*, Graph Theory and Combinatorics (ed. B. Bollobás), Academic Press, 1984.

[44] H. Kaplan, J. Matousek, Z. Safernova, M. Sharir, *Unit Distances in Three Dimensions*, Combinatorics, Probability and Computing, 21(4) (2012), 597-610.

[45] K.L. Fraughnaugh, S. Locke, 11/30 *finding large independent sets in connected triangle-free 3-regular graphs*, Journal of Combinatorial Theory, 65 (1995), N1, 51 - 72.

[46] K.L. Fraughnaugh, S. Locke, *Finding independent sets in triangle-free graphs*, SIAM Journal Discrete Math., 9 (1996), N4, 674 - 681.

[47] K.L. Fraughnaugh, S. Locke, *Lower bounds on size and independence in K_4-free graphs*, Journal of Graph Theory, 26 (1997), N2, 61 - 71.

[48] J. Weigand, *PhD Thesis*, University of Colorado at Denver, 2006

[49] L.E. Shabanov, A.M. Raigorodskii, *Turán type results for distance graphs*, Discrete and Computational Geometry, Springer, 56 (2016), 814 - 832.

[50] L.E. Shabanov, *Turán-Type Results for Distance Graphs in an Infinitesimal Plane Layer* // Journal of Mathematical Sciences. — 2019. — Vol. 236, no. 5.

[51] Л.Э. Шабанов, *Турановские оценки для дистанционных графов в тонкой слойке*, Записки научных семинаров ПОМИ, том 464 (2017), 132 - 168.

[52] Л.Э. Шабанов, А.М. Райгородский *Турановские оценки для дистанционных графов*, Доклады РАН, 475, №3 (2017) - С.254 - 257.