На правах рукописи

Рассоха Анастасия Владимировна

Математические модели и анализ некоторых проблем российской экономики

Специальность 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Москва – 2022

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», кафедра анализа систем и решений

Научный руководитель:	**Шананин Александр Алексеевич, академик РАН, доктор физико-математических наук, профессор**
Ведущая организация:	Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Омский государственный технический университет»

Защита состоится «23» декабря 2022 г. в 14 часов 00 минут на заседании диссертационного совета ФПМИ.1.2.2.010, созданного на базе федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)» (МФТИ, Физтех)

по адресу 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МФТИ, Физтех и на сайте организации https://mipt.ru.

Автореферат разослан «____» ____________________ 2022 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
ФПМИ.1.2.2.010,
к.т.н., доцент Войтиков Константин Юрьевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования и степень её разработанности

Построение межотраслевого баланса в относительно современном его понимании имеет более чем вековую историю. Однако действительно классическим инструментом экономического анализа с середины XX века стала модель межотраслевого баланса, разработанная В. В. Леонтьевым. Эта модель до сих пор является инструментом анализа состояния экономики для различных стран. Основополагающим предположением модели Леонтьева является предположение о постоянстве норм затрат производственных факторов на выпуск единицы продукции и, как следствие, отсутствие замещения производственных факторов. В послевоенное тридцатилетие экономический рост в мире был экстенсивным, поэтому это предположение адекватно описывало реальную ситуацию. Однако, начиная с 1990-х годов, на смену простому росту объёмов выпускаемой продукции пришёл рост её разнообразия и качества. Начинается стремительный рост доли сферы услуг в экономике. Кроме того, в этот же период начались процессы глобализации, вследствие чего для экономик большинства стран, в том числе и России, стали характерны более глубокие и интенсивные экспортно-импортные обмены, чем когда-либо ранее. В связи с произошедшими изменениями предположение о постоянстве норм затрат стало противоречить наблюдаемым процессам. Возросшую замещаемость производственных факторов требуется научиться описывать на языке математических моделей.

Помимо общемировых тенденций, с 2014 года в экономике России происходят дополнительные изменения. В 2014 году на Россию были наложены первые санкции, произошла сильная девальвация курса рубля. С начала 2020 года, после начала пандемии COVID-19, в мире стали прослеживаться тенденции к локализации и изоляции, обратные происходившим ранее процессам глобализации. Помимо этих мировых процессов, с конца февраля 2022 года на Россию были наложены дополнительные пакеты санкций, в первую очередь касающиеся экспортно-импортных отношений. Всё это делает анализ возможности замещения производственных факторов, особенно анализ возможности замещения импорта отечественной продукцией, ещё более актуальной задачей.

Ещё одной проблемой современной российской экономики является затянувшийся период стагнации, последовавший после периода восстановительного роста. Для выхода из режима стагнации реализовывались национальные проекты, призванные стимулировать спрос на продукцию определённых отраслей и, как следствие, рост экономики в целом. Однако темпы роста 2000-х годов в промышленном производстве так и не были достигнуты. Воздействие санкций на экономику России и вынужденное замещение импорта отечественной продукцией может вызвать рост мультипликатора (что часто сопровождается снижением эффективности экономики) и уменьшение ВВП, что проблему стагнации только усугубит. Необходимо оценить влияние событий 2022 года на общее состояние экономики, для чего нужно произошедшие события описать на языке математической модели и построить прогноз. Кроме того, для выправления положения хотелось бы определить, инвестирование в какие экономические отрасли вызовет превосходящий отклик экономики в целом (так называемые отрасли-драйверы). Для этого, в числе прочего, требуется оценивать эффективность и доходность инвестиций. Классический метод NPV оценки инвестиционных проектов использует величину «временная стоимость денег». Однако для российской экономики эта величина трудноопределима, поскольку рынок капитала несовершенный: разница между процентными ставками по кредиту и депозиту очень велика. Кроме того, процентные ставки по кредитам и депозитам ощутимо различаются и для разных категорий заёмщиков и вкладчиков, что затрудняет и использование различных модификаций этого подхода, использующих две процентные ставки (по кредитам и депозитам). В работе предлагается использовать теоретические результаты, полученные Д. Г. Канторов и С. А. Липманом, для описания инвестиционной среды предпринимателя и для оценки эффективности инвестиций.

Цели и задачи работы.

Цель работы — модернизация методов описания производственной сферы экономики в применении к современным условиям экономики России.

Цель исследования конкретизируется в следующих задачах:

- Построение и идентификация на российской экономической статистике модели нелинейного межотраслевого баланса;
- Анализ применимости модели нелинейного межотраслевого баланса;
- Исследование динамики значений дефляторов денежных потоков в модели Кантора-Липмана.

Научная новизна проведенных исследований заключается в следующем:

1. Впервые модель межотраслевого баланса с производственными функциями типа Кобба-Дугласа и типа CES была проидентифицирована на новых данных российской экономической статистики, опубликованных после длительного перерыва (данные за 2011 и 2016 годы, опубликованные в 2017 и 2019 годах соответственно);
2. Получена эмпирическая оценка скорости сходимости к магистрали дефляторов в модели Кантора-Липмана с одним инвестиционным проектом.

Теоретическая и практическая значимость работы

1. Построены и экономически обоснованы модификации классической модели межотраслевого баланса, допускающие замещение производственных факторов;
2. Сформулировно необходимое и достаточное условие неэффективности нетиражируемого инвестиционного проекта с учётом доступной предпринимателю инвестиционной среды.

Результаты и выводы, полученные в данной диссертационной работе, могут быть использованы для решения следующих задач:

1. Экономические стресс-тесты: анализ влияния эпидемий, санкций и других шоковых воздействий на экономику;
2. Поиск наилучшей схемы ответных государственных мер;
3. Поиск стратегии выхода экономики из состояния стагнации;

Методология и методы исследования

Теоретической базой исследования является классическая модель межотраслевого баланса Леонтьева, а также модель Кантора-Липмана.

При постороении модификаций модели межотраслевого баланса использовались теоретические результаты из области выпуклого анализа, численные методы решения задач оптимизации и систем нелинейных уравнений.

Эмпирическую базу исследования составили официальные статистические данные: публикуемые Росстатом таблицы межотраслевого баланса (таблицы «Затраты-выпуск») и значения индексов потребительских цен, а также публикуемая Центральным банком информация о курсах иностранной валюты.

Положения, выносимые на публичное представление

1. Построенные модели проидентифицированы на данных российской экономической статистики, оценён показатель эластичности замещения производственных факторов;
2. Показано, что модификации лучше классической модели приближают реальные статистические данные;
3. Доказан критерий эффективности нетиражируемого инвестиционного проекта с учётом инвестиционной среды предпринимателя;
4. Проведено эмпирическое исследование скорости сходимости к магистрали дефляторов денежных потоков в модели Кантора-Липмана с одним тиражируемым инвестиционным проектом.

Степень достоверности и апробация результатов

Высокий уровень достоверности результатов обеспечивается использованием корректно построенных и обоснованных модификаций модели межотраслевого баланса. Адекватность модификаций модели проверялась сравнением результатов прогноза, полученных с их помощью, с реальными данными статистики в те периоды времени, для которых эти статистические данные существуют в открытом доступе. Корректность теоретических результатов обусловлена их строгим математическим обоснованием.

Основные положения и результаты диссертации были доложены, обсуждены и одобрены специалистами на следующих конференциях:

1. XI международная молодежная научно-практическая конференция с элементами научной школы «Прикладная математика и и фундаментальная информатика», 23-29 апреля 2021г, Омск (Россия);
2. International conference «Mathematical Optimization Theory and Operations Research» (MOTOR 2021), July 5-10, 2021, Irkutsk (Russia);

3. 7-th International Conference Quasilinear Equations, Inverse Problems and their Applications, 23-29 Aug. 2021, Sochi, Sirius (Russia);
4. XII международная молодежная научно-практическая конференция с элементами научной школы «Прикладная математика и и фундаментальная информатика», 16-21 мая 2022г, Омск (Россия);
5. 8-th International Conference Quasilinear Equations, Inverse Problems and their Applications, 23-29 Aug. 2022, Sochi, Sirius (Russia).

Публикации автора по теме НКР

По темам исследования автором опубликовано 4 работы, отражающих основные результаты НКР, в том числе 2 статьи, [1] и [4], в журналах, рекомендованных ВАК, и две статьи, [2] и [3], в журналах, индексируемых Web of Science и Scopus.

Личный вклад автора в публикации с соавторами

В статьях [3]–[4] автором описанные теоретические схемы исследования применены к современной российской экономчиеской статистике, совершена обработка статистики, выполнены численные решения возникающих при идентификации моделей и прогнозировании данных задач оптимизации и систем уравнений, проанализированы полученны результаты.

Структура и объём диссертации.

Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав, заключения, списка литературы и двух приложений. Работа содержит 132 страницы текста, 11 таблиц, 13 рисунков. Список литературы включает 94 наименования.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении к диссертации дана базовая характеристика работы: объяснена актуальность проблемы, описаны научная новизна и практическая значимость результатов диссертации и т. п.

Первая глава посвящена описанию метода межотраслевого баланса. **В разделе 1.1** описываются предпосылки возникновения метода межотраслевого баланса, разработка классической модели Леонтьева, модельные предположения, принимаемые в данном методе. Также упоминается основное направление дискуссии вокруг модели Леонтьева в XX веке и первые попытки его модифицировать. Перечисляются основные пути применения модели межотраслевого баланса в XX веке. **В разделе 1.2** приведена математическая формулировка системы материальных балансов, пояснено понятие *продуктивности*, сформулированы классические теоретические условия продуктивности модели. **В разделе 1.3** объяснена логика перехода от материальных балансов к денежным. Описан вид реальных статистических данных, публикуемых по теме межотраслевого баланса. Объяснены основные проблемы, возникающие при сборе соответствующей статистики, такие, как проблема выделения «чистых» отраслей, проблема определения степени подробности межотраслевого баланса и агрегирования данных. Предположение о постоянстве норм затрат производственных факторов на выпуск единицы продукции сформулировано в терминах денежного баланса с учётом изменяющихся цен при переходе от одного периода времени к другому. **В разделе 1.4** перечислены и пояснены основные причины «кризиса» метода межотраслевого баланса Леонтьева на рубеже XX–XXI веков. Наконец, **раздел 1.5** посвящён обзору различных направлений модификации модели Леонтьева, предпринятых с целью более корректно описать изменившуюся экономическую ситуацию (а именно, учесть возможность замещения производственных факторов). Упомянуты классическая и обобщённая модели Хаутеккера-Йохансена, сетевые модели экономики с производственными функциями Кобба-Дугласа для экономики США (использование функций Кобба-Дугласа означает, в отличие от функций Леонтьева, постоянство норм финансовых, а не материальных затрат производителей и конечных потребителей), изучение распространения каскадов в производственных сетях в условиях линейного баланса, сопоставление результатов прогнозирования экономик нескольких стран мира с использованием классической модели межотраслевого баланса и модели нелинейного межотраслевого баланса, введение в рассмотрение производственных функций с постоянной эластичностью замещения (CES) и другие.

Вторая глава посвящена описанию нелинейного межотраслевого баланса и применению этого метода к статистике России.

В разделе 2.1 описывается модель оптимального распределения ресурсов на основе нелинейного межотраслевого баланса. Рассмотрим группу из m чистых отраслей, связанных взаимными поставками продукции в качестве производственных факторов (ПФ). Обозначим через X_i^j объём продукции i-й отрасли, который используется в качестве ПФ в процессе производства в j-й отрасли, а через $X^j = \left(X_1^j, \ldots, X_m^j\right)$ — затраты j-й отраслью ПФ, производимых рассматриваемой группой отраслей. Будем также предполагать, что в процессе производства отрасли затрачивают в качестве ПФ первичные ресурсы (n видов). Обозначим через $l^j = \left(l_1^j, \ldots, l_n^j\right)$ вектор затрат первичных ресурсов j-й отрасли, а через $F_j\left(X^j, l^j\right)$ – производственную функцию j-й отрасли, т.е. зависимость выпуска j-й отрасли от затрат ПФ. Будем предполагать, что производственные функции отраслей обладают неоклассическими свойствами, т.е. являются вогнутыми, монотонно неубывающими, непрерывными функциями на $\mathbb{R}_+^{m+n}$, обращающимися в нуле в нуль. Кроме того, будем считать, что $F_j\left(X^j, l^j\right)$ являются положительно однородными функциями первой степени. Будем говорить, что такие функции принадлежат классу Φ_{m+n}

Обозначим через $X^0 = \left(X_1^0, \ldots, X_m^0\right)$ объёмы поставок производимой рассматриваемыми отраслями продукции внешним потребителям. Будем считать, что спрос внешних потребителей описывается с помощью функции полезности $F_0\left(X^0\right)$. Предположим, что функция $F_0\left(X^0\right) \in \Phi_m$. Предположим, что предложение первичных ресурсов рассматриваемой группе отраслей ограничено объёмами $l = (l_1, \ldots, l_n) \geqslant 0$, и рассмотрим задачу об оптимальном распределении этих ресурсов между отраслями в целях максимизации функции полезности внешних потребителей при балансовых ограничениях по первичным ресурсам и выпускаемой отраслями продукции:

$$F_0\left(X^0\right) \to \max \tag{1}$$

$$F_j\left(X^j, l^j\right) \geqslant \sum_{i=0}^{m} X^i_j, \quad j = 1, \ldots, m; \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{m} l^j \leqslant l; \tag{3}$$

$$X^0 \geqslant 0, \quad X^1 \geqslant 0, \ldots, X^m \geqslant 0, \quad l^1 \geqslant 0, \ldots, l^m \geqslant 0. \tag{4}$$

Будем считать, что рассматриваемая группа отраслей продуктивна, т.е. существуют $\hat{X}^1 \geqslant 0, \ldots, \hat{X}^m \geqslant 0, \hat{l}^1 \geqslant 0, \ \ldots, \hat{l}^m \geqslant 0$, такие, что

$$F_j\big(\hat{X}^j, \hat{l}^j\big) > \sum_{i=0}^{m} \hat{X}^i_j, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Применяя принцип Лагранжа, получим, что набор векторов $\left\{\hat{X}^0, \hat{X}^1, \ldots, \hat{X}^m, \hat{l}^1, \ldots, \hat{l}^m\right\}$, удовлетворяющих ограничениям (2)–(4), является решением задачи оптимизации (1)–(4) тогда и только тогда, когда существуют множители Лагранжа $p_0 > 0$, $p = (p_1, \ldots, p_m) \geqslant 0$, $s = (s_1, \ldots, s_n) \geqslant 0$ к задаче (1)–(4), такие, что

$$\big(\hat{X}^j, \hat{l}^j\big) \in \operatorname{Arg\,max} \left\{p_j F_j\left(X^j, l^j\right) - pX^j - sl \middle| X^j \geqslant 0, l^j \geqslant 0\right\}, \ j = 1, \ldots, m; \tag{5}$$

$$p_j\left(F_j\big(\hat{X}^j, \hat{l}^j\big) - \hat{X}^0_j - \sum_{i=1}^{m} \hat{X}^i_j\right) = 0, \ j = 1, \ldots, m; \tag{6}$$

$$s_k\left(l_k - \sum_{j=1}^{m} \hat{l}^j_k\right) = 0, \ k = 1, \ldots, n; \tag{7}$$

$$\hat{X}^0 \in \operatorname{Arg\,max} \left\{p_0 F_0\left(X^0\right) - pX^0 \middle| X^0 \geqslant 0\right\}. \tag{8}$$

Будем интерпретировать множители Лагранжа $p = (p_1, \ldots, p_m)$ к балансовым ограничениям по выпускаемым отраслями продуктам как цены на эти продукты, а множители Лагранжа $s = (s_1, \ldots, s_n)$ к балансовым ограничениям по первичным ресурсам — как цены на первичные ресурсы. Тогда получаем, что оптимальными механизмами распределения являются равновесные рыночные механизмы. Индекс потребительских цен определяется из соотношения

$$q_0(q) = \inf\left\{\frac{qX^0}{F_0\left(X^0\right)} \middle| X^0 \geqslant 0, F_0\left(X^0\right) > 0\right\},$$

а функции себестоимости — из соотношения

$$q_j(p,s) = \inf\left\{ \frac{pX^j + sl^j}{F_j\left(X^j, l^j\right)} \middle| X^j \geqslant 0, l^j \geqslant 0, F_j\left(X^j, l^j\right) > 0 \right\}.$$

В разделе 2.2 приведено двойственное описание задачи оптимального распределения ресурсов в терминах *агрегированной функции себестоимости.* Обозначим через $F^A(l)$ оптимальное значение функционала в задаче (1)–(4) в зависимости от вектора предложения первичных ресурсов l в правой части балансового ограничения (3). Функция $F^A(l) \in \Phi_n$ и интерпретируется как агрегированная производственная функция. Агрегированной производственной функции $F^A(l)$ соответствует двойственная агрегированная функция себестоимости

$$q_A(s) = \inf\left\{ sl/F^A(l) \,\middle|\, l \geqslant 0,\ F^A(l) > 0 \right\}.$$

Агрегированная функция себестоимости представима в виде

$$q_A(s) = \sup\left\{ q_0(p) \,|\, p = (p_1, \ldots, p_m) \geqslant 0,\ q_j(p,s) \geqslant p_j,\ j = 1, \ldots, m \right\}. \qquad (9)$$

Определение 1. *Будем называть задачу* (9) *двойственной по Янгу к задаче* (1)–(4).

Разделы 2.3 и 2.4 описывают процедуру идентификации модели на статистических данных для случаев, когда производственные функции и функция полезности конечных потребителей являются функциями Кобба-Дугласа и функциями типа CES. Для обоих случаев первичной информацией являются публикуемые Росстатом таблицы затрат-выпусков, которые имеют следующую структуру (см. табл. 1).

Пусть в экономике выделено m отраслей, n первичных ресурсов и k конечных потребителей. В первом квадранте описывается потребление продукции отраслей самими же отраслями. Элемент Z_i^j, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, равняется сумме, затраченной j-й отраслью на продукцию i-й отрасли. Третий квадрант описывает потребление отраслями первичных ресурсов: элемент Z_{m+i}^j, стоящий на пересечении $(m+i)$-й строки и j-го столбца, равняется сумме, затраченной j-й отраслью на i-й первичный ресурс. Второй же квадрант описывает конечное потребление: Z_i^{m+j}, стоящий на пересечении i-й строки и $(m+j)$-го столбца, равняется сумме, затраченной j-м конечным потребителем на продукцию i-й отрасли.

Системность собранной информации можно проверить с помощью несложного критерия. Заметим, что в i-м столбце расположены все затраты i-й отрасли, включая выводимую из производства прибыль. В то же время в i-й строке содержатся суммы, которые были получены i-й отраслью от всех экономических агентов. Таким образом, финансовый баланс для отраслей будет выглядеть так: общая сумма денег, полученная отраслью из всех источников

Таблица 1 Схема таблиц межотраслевого баланса

	Отрасль 1	Отрасль 2	...	...	Отрасль m	Конечный потребитель 1	...	Конечный потребитель k
Отрасль 1	Z_1^1	Z_1^2			Z_1^m	Z_1^{m+1}		Z_1^{m+k}
Отрасль 2	Z_2^1	Z_2^2			Z_2^m	Z_2^{m+1}		Z_2^{m+k}
...								
...								
Отрасль m	Z_m^1	Z_m^2			Z_m^m	Z_m^{m+1}		Z_m^{m+k}
Первичный ресурс 1	Z_{m+1}^1	Z_{m+1}^2			Z_{m+1}^m			
...								
Первичный ресурс n	Z_{m+n}^1	Z_{m+n}^2			Z_{m+n}^m			

(иначе говоря, стоимость всей выпущенной продукции), должна равняться общей сумме её затрат. Поэтому сумма элементов i-й строки должна равняться сумме элементов i-го столбца для всех $i \in \{1, \dots, m\}$:

$$\sum_{i=1}^{m+n} Z_i^j = \sum_{i=1}^{m+k} Z_j^i, \quad j = 1, \dots, m. \tag{10}$$

Будем для денежного баланса называть выпуском i-й отрасли стоимость всей выпущенной продукции: $Y^i = \sum\limits_{i=1}^{m+k} Z_j^i$.

Поскольку равенство (10) должно быть выполнено для всех отраслей, должно быть верно и

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m+n} Z_i^j = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m+k} Z_i^j.$$

Заметим, что правая и левая части равенства содержат общую сумму $\sum\limits_{j=1}^{m} \sum\limits_{i=1}^{m} Z_i^j$. Вычитая её из обеих частей равенства, получим:

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=m+1}^{m+n} Z_i^j = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=m+1}^{m+k} Z_i^j,$$

то есть суммы элементов 2 и 3 квадрантов равны.

Введём обозначения:

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} Z_i^j,\ j = 1, \dots, m, A_0 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=m+1}^{m+k} Z_i^j.$$

Заметим, что $A_j = Y^j$. Положим

$$a_i^j = Z_i^j / A_j,\ i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, m;$$

$$b_i^j = Z_{m+i}^j / A_j,\ i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m;$$

$$a_i^0 = Z_i^0 / A_0,\ i = 1, \dots, m.$$

Обозначим $A = \left[a_i^j\right]_{j=1,\dots,m}^{i=1,\dots,m}$, $B = \left[b_k^j\right]_{k=1,\dots,n}^{j=1,\dots,m}$. Будем предполагать, что при производстве каждого вида продукции используется по крайней мере один первичный ресурс. Из этого следует, что матрица A продуктивна.

Случай функций Кобба-Дугласа. Определим производственную функцию j-й отрасли как

$$F_j\left(X^j, l^j\right) = A_j \left(\prod_{i=1}^{m} \left(X_i^j / Z_i^j\right)^{a_i^j}\right) \left(\prod_{i=1}^{n} \left(l_i^j / Z_{m+i}^j\right)^{b_i^j}\right),\ j = 1, \dots, m,$$

функцию полезности конечных потребителей как функцию Кобба-Дугласа

$$F_0\left(X^0\right) = \prod_{i=1}^{m} \left(X_i^0\right)^{a_i^0},$$

вектор предложения первичных ресурсов как

$$l = \left(l_1, \dots, l_n\right), \quad l_i = \sum_{j=1}^{m} Z_{m+1}^j, \quad i = 1, \dots, n.$$

При таком определении функций и ограничений решение задачи (1)–(4) воспроизводит таблицу межотраслевого баланса, т. е. набор значений переменных

$$\Big\{\hat{X}_i^0 = Z_i^0,\ i = 1, \dots, m;\ \hat{X}_i^j = Z_i^j,\ j = 1, \dots, m,\ i = 1, \dots, m;$$
$$\hat{l}_t^j = Z_{m+t}^j,\ j = 1, \dots, m,\ t = 1, \dots, n\Big\}$$

является решением задачи выпуклого программирования (1)–(4). Таким образом, решена обратная задача идентификации модели.

В силу преобразования Янга индекс потребительских цен равен

$$q_0(p) = \frac{1}{F_0\left(a^0\right)} p_1^{a_1^0} \dots p_m^{a_m^0},$$

функция себестоимости j-й отрасли равна

$$q_j(p, s) = \frac{1}{F_j\left(a^j, b^j\right)} p_1^{a_1^j} \dots p_m^{a_m^j} s_1^{b_1^j} \dots s_n^{b_n^j}.$$

Вектор цен может быть определён аналитически из решения двойственной задачи. Если матрица A продуктивна, то задача

$$\begin{aligned} & q_0(p) \to \max \\ & q_j(p, s) \geqslant p_j \geqslant 0, \ j = 1, \dots, m, \end{aligned} \tag{11}$$

имеет решение вида

$$p_j = s_1^{c_1^j} \dots s_n^{c_n^j}, \ j = 1, \dots, m, \tag{12}$$

где матрица $C = \left[c_k^j\right]_{j=1,\dots,m}^{k=1,\dots,n} = \left(E - A^*\right)^{-1} B^*$.

Агрегированная функция себестоимости и агрегированная производственная функция имеют вид $q_A(s) = s_1^{\gamma_1} \dots s_n^{\gamma_n}$, $F^A(l) = \big(1/q_A(\gamma)\big) l_1^{\gamma_1} \dots l_n^{\gamma_n}$, где $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^* = C^* a^0$, причём $\gamma_1 + \ldots + \gamma_n = 1$.

Полученные результаты могут быть применены к анализу произошедших в экономике изменений и прогнозированию таблиц затрат-выпусков по информации произошедших изменениях. Пусть в результате изменения цен на импортные товары и услуги и в результате инфляции вектор индексов цен на первичные ресурсы принимает значение $\hat{s}$, а изменения доходов от экспорта товаров в терминах модели выражаются в изменении вектора денежных расходов $\hat{Z}^0 = \big(\hat{Z}_1^0, \dots, \hat{Z}_m^0\big)$. Из (12) следует, что $p_j = \hat{s}_1^{c_1^j} \dots \hat{s}_n^{c_n^j}$, $j = 1, \dots, m$. Из условий (5)–(8) следует, что новые значения симметричной таблицы межотраслевого баланса равны

$$\hat{Z}_i^j = a_i^j \hat{Y}^j, \ \hat{Z}_{m+t}^j = b_t^j \hat{Y}^j, \ j = 1, \dots, m, \ i = 1, \dots, m, \ t = 1, \dots, n,$$

где $\hat{Y}^j$ — стоимость произведённой j-й отраслью продукции, а вектор выпусков $\hat{Y} = \big(\hat{Y}_1, \dots, \hat{Y}_m\big)$ определяется из соотношения $\hat{Y} = (E - A)^{-1} \hat{Z}^0$. Потоки материальных товаров и услуг в исходных ценах определяются из соотношений $\hat{X}_i^0 = \hat{Z}_i^0 / p_i$, $\hat{X}_i^j = \hat{Z}_i^j / p_i$, $\hat{l}_t^j = \hat{Z}_{m+t}^j / \hat{s}_t$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, m$, $t = 1, \dots, n$.

Для проверки того, насколько предположение о производственных функциях Кобба-Дугласа соответствует действительной ситуации, построим прогноз таблицы того года, для которого имеются статистические данные, и сравним результаты. Из современных данных существует всего две таблицы затрат-выпусков в одинаковой номенклатуре: за 2011 и за 2016 годы. Построим прогноз на 2016 год, проидентифицировав модель на данных 2011 года. Росстат, собирая статистику межотраслевого баланса, выделяет 98 отраслей. Получающаяся таблица содержит порядка 10^4 значений. Такое количество данных затруднительно для первичного анализа. Для упрощения восприятия сагрегируем все отрасли в крупные комплексы отраслей. В промежутке между 2011 и 2016 годами наиболее существенные изменения произошли в соотношении цен на импортную и отечественную продукцию (цена бивалютной корзины с 2011 по 2016 годы выросла в 2,033 раза, индекс потребительских цен — в 1,503 раза). Поэтому в качестве первичных ресурсов будем выделять импорт и добавленную стоимость (в которую входят оплата труда, прибыль, некоторые виды налогов и т. д.). Отрасли будем делить на комплексы также в зависимости от их роли в экспортно-импортных отношениях. Выделим четыре таких группы — комплекса отраслей. К первому комплексу отнесем экспортно-ориентированные отрасли добывающей промышленности, такие как нефтегазовая отрасль, металлургия, производство минеральных удобрений. Ко второму комплексу отнесём отрасли, продукция которых конкурирует с импортом на отечественном рынке, такие как машиностроение, пищевая промышленность, сельское хозяйство. К третьему комплексу отнесём отрасли услуг естественных монополий, продукция которых не имеет экспортного потенциала и не конкурирует с импортом: электроэнергетика, транспорт, связь. В четвертый комплекс попадают отрасли сферы услуг, такие как торговля и ЖКХ. Процедура вычисления агрегированных цен для работы с агрегированным балансом описана в **подразделе 2.3.4**.

Было показано, что в целом данные воспроизводятся с достаточной точностью. При этом точность прогноза агрегированного баланса существенно выше, чем подробного. Однако, разумеется, не все изменения в экономике за указанные 5 лет были обусловлены только изменением цен на первичные ресурсы и изменением расходов конечных потребителей. Помимо них, произошли и другие структурные изменения, основной причиной которых является влияние санкций против России не только на стоимость импорта и экспорта, но и на доступность некоторых импортных товаров. В этот же период начала действовать государственная политика, направленная на вытеснение импорта. Можно предположить, что для различных отраслей замещение импорта оказалось доступно в разной степени.

По результатам сравнения реальных данных и прогноза было выделено несколько тенденций произошедших изменений. Так, например, заметим, что доля добавленной стоимости среди расходов в реальности снизилась относительно прогнозируемого значения для всех комплексов отраслей, доля импорта — для всех комплексов отраслей, кроме комплекса сферы услуг. Снижение общей доли импорта можно объяснить тем, что его стоимость выросла сильнее, чем стоимость остальных товаров и услуг, что вкупе с политикой импортозамещения вызвало частичную замену импортных производственных факторов на отечественные. Однако рост доли импорта для 4-го комплекса отраслей может означать, что при закупке по крайней мере некоторых категорий импортных товаров выросла доля посредничества. Более подробное рассмотрение столбца расходов для сферы услуг подтверждает это предположение: для комплекса сферы услуг выросли доли расходов на импорт и на собственную продукцию, доли остальных категорий расходов снизились. Доля, затрачиваемая отраслями на продукцию 2-й группы отраслей (т.е. отраслей, чья продукция конкурирует с импортом), выросла для всех комплексов отраслей, кроме 4-го, что также может говорить о вытеснении импорта в течение рассматриваемого периода.

Случай CES-функций. Определим

$$w_i^0 = \left(Z_i^0\right)^{\frac{1+\rho}{\rho}} \left(\sum_{k=1}^{m} Z_k^0\right)^{-\frac{1+\rho}{\rho}} = \left(Z_i^0/A_0\right)^{\frac{1+\rho}{\rho}},\ i = 1, \dots, m;$$

$$w_i^j = \left(Z_i^j\right)^{\frac{1+\rho}{\rho}} \left(\sum_{k=1}^{m+n} Z_k^j\right)^{-\frac{1+\rho}{\rho}} = \left(Z_i^j/A_j\right)^{\frac{1+\rho}{\rho}},\ i = 1, \dots, m+n,\ j = 1, \dots, m.$$

Определим производственную функцию j-й отрасли как функцию

$$F_j\left(X^j, l^j\right) = \left(\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{X_i^j}{w_i^j}\right)^{-\rho} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{l_k^j}{w_{m+k}^j}\right)^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}},$$

функцию полезности конечных потребителей как функцию

$$F_0\left(X^0\right) = \left(\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{X_i^0}{w_i^0}\right)^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}},$$

вектор предложения первичных ресурсов как

$$l = (l_1, \dots, l_n),\ l_i = \sum_{j=1}^{m} Z_{m+1}^j,\ i = 1, \dots, n.$$

Аналогично случаю функций Кобба-Дугласа, набор значений переменных

$$\Big\{\hat{X}_i^0 = Z_i^0,\ i = 1, \dots, m; \hat{X}_i^j = Z_i^j,\ j = 1, \dots, m,\ i = 1, \dots, m;$$
$$\hat{l}_t^j = Z_{m+t}^j,\ j = 1, \dots, m,\ t = 1, \dots, n\Big\}$$

является решением задачи выпуклого программирования (1)–(4), то есть решена обратная задача идентификации модели.

В силу преобразования Янга индекс потребительских цен равен

$$q_0(p) = \left(\sum_{i=1}^{m} \left(w_i^0 p_i\right)^{\frac{\rho}{1+\rho}}\right)^{\frac{1+\rho}{\rho}},$$

функция себестоимости j-й отрасли равна

$$q_j(p, s) = \left(\sum_{i=1}^{m} \left(w_i^j p_i\right)^{\frac{\rho}{1+\rho}} + \sum_{k=1}^{n} \left(w_{m+k}^j s_k\right)^{\frac{\rho}{1+\rho}}\right)^{\frac{1+\rho}{\rho}}.$$

Пусть матрица A продуктивна. Тогда задача

$$\begin{aligned}&q_0(p) \to \max\\&q_i(p,s) \geqslant p_i \geqslant 0,\ i=1,\ldots,m\end{aligned}$$

имеет аналитическое решение вида

$$p_j = \left(\sum_{k=1}^{n} c_j^k \left(s_k\right)^{\frac{\rho}{1+\rho}}\right)^{\frac{1+\rho}{\rho}},\quad j=1,\ldots,m. \tag{13}$$

Агрегированная функция себестоимости и агрегированная производственная функция имеют вид

$$q_A(s) = \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\gamma_k s_k\right)^{\frac{\rho}{1+\rho}}\right)^{\frac{1+\rho}{\rho}},\quad F^A(l) = \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{l_k}{\gamma_k}\right)^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}},$$

где $\gamma_k = \left(\sum\limits_{j=1}^{m} c_j^k \left(w_j^0\right)^{\frac{\rho}{1+\rho}}\right)^{\frac{1+\rho}{\rho}},\quad k=1,\ldots,n.$

Произошедшие в экономике изменения будем так же, как и в рассмотренном выше случае функций Кобба-Дугласа, описывать изменением цен на первичные ресурсы (обозначим новое значение как $\hat{s}$) и изменениемм вектора денежных расходов конечных потребителей (обозначим новое значение как $\hat{Z}^0 = \left(\hat{Z}_1^0,\ldots,\hat{Z}_m^0\right)$). Новые значения вектора $\hat{p}$ определяются соотношением из предложения 13. Тогда новые значения таблицы затрат-выпусков определяются как

$$\begin{aligned}\hat{Z}_i^j = \frac{\hat{p}_i}{q_j(\hat{p},\hat{s})}\frac{\partial q_j(\hat{p},\hat{s})}{\partial \hat{p}_i}\hat{Y}^j = \\ = \hat{Y}^j\left(\sum_{\alpha=1}^{m}\left(\hat{p}_\alpha w_\alpha^j\right)^{\frac{\rho}{1+\rho}} + \sum_{k=1}^{n}\left(\hat{s}_k w_{m+k}^j\right)^{\frac{\rho}{1+\rho}}\right)^{-1}\left(\hat{p}_i w_i^j\right)^{\frac{\rho}{1+\rho}},\\ j=1,\ldots,m,\ i=1,\ldots,m;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{Z}_{m+t}^j = \frac{\hat{s}_k}{q_j(\hat{p},\hat{s})}\frac{\partial q_j(\hat{p},\hat{s})}{\partial \hat{s}_k}\hat{Y}^j = \\ = \hat{Y}^j\left(\sum_{\alpha=1}^{m}\left(\hat{p}_\alpha w_\alpha^j\right)^{\frac{\rho}{1+\rho}} + \sum_{k=1}^{n}\left(\hat{s}_k w_{m+k}^j\right)^{\frac{\rho}{1+\rho}}\right)^{-1}\left(\hat{s}_t w_{m+t}^j\right)^{\frac{\rho}{1+\rho}},\\ j=1,\ldots,m,\ t=1,\ldots,n,\end{aligned}$$

где $\hat{Y}^j$ — стоимость произведённой j-й отраслью продукции, а вектор выпусков $\hat{Y} = \left(\hat{Y}_1, \ldots, \hat{Y}_m\right)$ определяется из соотношения $\hat{Y} = (E - \Lambda)^{-1}\hat{Z}^0$. Здесь $\Lambda = \left[\lambda_{ij}\right]_{j=1,\ldots,m}^{i=1,\ldots,m}$, $\lambda_{ij} = \left(\sum_{\alpha=1}^{m}\left(\hat{p}_\alpha w_\alpha^j\right)^{\frac{\rho}{1+\rho}} + \sum_{k=1}^{n}\left(\hat{s}_k w_{m+k}^j\right)^{\frac{\rho}{1+\rho}}\right)^{-1}\left(\hat{p}_i w_i^j\right)^{\frac{\rho}{1+\rho}}$.

Потоки материальных товаров и услуг в исходных ценах определяются из соотношений

$$\hat{X}_i^0 = \frac{\hat{Z}_i^0}{\hat{p}_i},\ \hat{X}_i^j = \frac{\hat{Z}_i^j}{\hat{p}_i},\ \hat{l}_t^j = \frac{\hat{Z}_{m+t}^j}{\hat{s}_t},\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, m,\ t = 1, \ldots, n.$$

Вопрос агрегирования межотраслевого баланса для случая CES-функций рассмотрен в **подразделе 2.4.4.**

В подразделе 2.4.5 описывается результат прогнозирования таблицы межотраслевого баланса 2016 года при помощи модели, идентифицированной по данным 2011 года. Однако на этот раз у нас имеется влияющий на результаты прогнозирования параметр ρ (при стремлении ρ к 0 CES-функция переходит в функцию Кобба-Дугласа). Рассматривалось изменение основных характеристик производства (выпуск, добавленная стоимость, использование импорта совокупные и по комплексам отраслей) в зависимости от значения ρ. Эти величины сопоставлялись со статистическими данными. Так, прогнозируемая суммарная величина импорта совпадала с реальной при $\rho = 0.07$, однако ни для какого значения ρ прогнозируемый вектор использования импотра не совпадал с реальным. Наибольшие отклонения наблюдаются в комплексе экспортноориентированных отраслей, против которого и были преимущественно направлены санкции. В первом же комплексе отраслей наблюдается наиболее существенное (для всех возможных ρ) падение добавленной стоимости. Для 3 и 4 комплексов отраслей, напротив, произошёл преимущественно рост добавленной стоимости, что может быть объяснено замещением импорта отечественной продукцией и ростом транзакционных издержек.

Прогнозное значение совокупного выпуска же при любом возможном ρ оказывалось ниже реального. Помимо собственно выпуска, в экономике рассматривается величина мультипликатора — отношение добавленной стоимости к выпуску. Для всех отраслей почти для всех значений ρ реальное значение мультипликатора оказалось выше прогнозируемого, особенно сильное отклонение — для комплекса добывающих отраслей. Рост мультипликатора часто трактуется как снижение эффективности экономики. В данном же случае он может оказаться результатом импортозамещения, то есть того, что продукция, ранее импортировавшаяся и не включённая в выпуск, теперь производится внутри экономики.

В 3 главе описывается подход к анализу доходности инвестиционных проектов в условиях несовершенного рынка капитала. **Во введении к третьей главе** описываются классические подходы к оценке инвестиционных проектов и трудности их применения на несовершенном рынке капитала. В работе предлагается описывать инвестиционную среду предпринимателя при помощи *модели Кантора-Липмана.*

В разделе 3.1 описывается постановка задачи в модели Кантора-Липмана, приводится обоснование и формулировка основного результата этой модели.

В модели Кантора–Липмана изучается доходность инвестиционных стратегий, использующих пул доступных проектов при том условии, что все возможности, включая возможности кредитования и заимствования, включены в описываемый пул проектов. Пусть инвестору в любой период времени в пределах временного горизонта доступны M различных типов инвестиционных проектов. Проект m-го типа задаётся вектором финансовых потоков $\vec{a}_m = [a_0^m, a_1^m, \ldots, a_n^m]$. Здесь $(n+1)$ — наибольшая продолжительность среди всех проектов (векторы более коротких проектов можно дополнить нулями), $m = 1, \ldots, M$. Для того, чтобы эти проекты можно было считать альтернативным источником вложений средств, они должны быть стационарными и тиражируемыми (то есть могут быть начаты в любой момент времени с произвольной неотрицательной интенсивностью).

Будем в каждый период времени характеризовать состояние инвестора состоянием его расчётного счёта. Обозначим через S_t состояние расчётного счёта инвестора в момент t, которое, в соответствии с условием самофинансирования, должно быть неотрицательным. Расчётный счёт изменяется в результате продолжения начатых в предыдущие периоды времени проектов и начала новых проектов в текущий период времени. Обозначим через u_t^m интенсивность проектов m-го типа, начатых в период времени t. Предполагается, что в начальный момент инвестор обладает определённой суммой, которую можно принять за единицу (и при необходимости пронормировать все остальные суммы денег на эту величину). Целью инвестиционной стратегии является максимизация дохода в терминальный период времени N, т.е. оптимальная стратегия инвестиций определяется из решения задачи линейного программирования

$$\begin{aligned}
&S_N \to \max, \\
&S_{t+1} = S_t + \sum_{m=1}^{M} \sum_{i=0}^{n} a_i^m u_{t-i}^m, \ t = 0, \ldots, N-1; \\
&S_t \geqslant 0, \ t = 0, \ldots, N; \\
&u_t^m \geqslant 0, \ t = 0, \ldots, N-1, \ m = 1, \ldots, M; \\
&u_t^m = 0, \ t = N-n+1, \ldots, N \text{ или } t < 0, \ m = 1, \ldots, M; \\
&S_0 = 1.
\end{aligned} \tag{14}$$

Назовём инвестиционным полиномом проекта с вектором $\vec{a}_m$, $m = 1, \ldots, M$, полином $P_m(x) = a_0^m + a_1^m x + \ldots a_n^m x^n$. Инвестиционной функцией пула проектов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_M$ назовём поточечный максимум инвестиционных полиномов: $F(x) = \max\limits_m P_m(x)$

Теорема 1 (Кантора–Липмана)**.** *Предположим, что пул инвестиционных проектов содержит проект сохранения денежных средств. Обозначим через* V_N *оптимальное значение функционала в задаче линейного программирования* (14)*. Тогда*

- *если для* $x \in (0, 1]$ $F(x) > 0$*, то пул инвестиционных проектов допускает арбитраж, т. е. существует такое* N_0*, что при* $N \geqslant N_0$ $V_n = +\infty$*;*
- *если* $F(1) \leqslant 0$*, то пул инвестиционных проектов убыточен, т.е. для любого* $N > 0$ $V_N = 1$*;*
- *если* $F(1) > 0$ *и* $\rho = \max\bigl\{r \in (0, 1)\bigl|F(r) = 0\bigr\}$*, то* $\lim\limits_{N\to+\infty} \frac{\ln V_N}{N} = \ln\bigl(\frac{1}{\rho}\bigr)$*.*

Замечание 1. Ситуации 1 и 2, описанные в теореме 1, неинтересны для дальнейшего рассмотрения. Ситуация, в которой на инвестиционном рынке допустим арбитраж, возможна, но не может являться устойчивой. Ясно, что в реальности тиражируемость проектов имеет некоторые ограничения, поэтому при возникновении ситуации, допускающей арбитраж, предприимчивый инвестор успеет получить только некоторую конечную сумму денег прежде, чем ситуация на рынке изменится и возможность арбитража исчезнет. При этом не будет выполнено условие о стационарности проектов. В случае же убыточного пула проектов инвестирования вообще не происходит, и ситуация для изучения опять же неинтересна. Наконец, ситуация 3 называется **нормальной**, и именно она рассматривается в дальнейшей работе.

Пусть теперь у инвестора дополнительно появляется единоразовый крупный проект, характеризующийся вектором финансовых потоков $\vec{c} = [c_0, c_1, \dots, c_k]$ и доступный для запуска в момент τ ($\tau \leqslant \min\{N - n, N - k\}$). Будем считать, что величина проекта кратно превышает капитал инвестора, однако для проекта доступно долевое участие. В силу этого рассматривается вопрос о том, стоит ли инвестору принимать участие в проекте, а интенсивность его реализации будем считать произвольной положительной величиной: $u \geqslant 0$. **В разделе 3.2** формулируется и доказывается критерий неэффективности такого инвестиционного проекта. Для исследования инвестиционной среды построим двойственную к (14) задачу с помощью функции Лагранжа. Обозначим множители Лагранжа к ограничениям из задачи (14) как $p(t)$. Тогда двойственная задача имеет вид

$$\begin{aligned}
&p(0) \to \min \\
&p(t) \leqslant p(t-1),\ t = 0, \dots, N-1; \\
&p(N-1) \geqslant 1; \\
&\sum_{i=0}^{n} a_i^m p(t+i) \leqslant 0,\ t = 0, \dots, N-r-1,\ m = 1, \dots, M.
\end{aligned} \tag{15}$$

Определение 2. *Будем говорить, что новый проект* $[c_0, c_1, \ldots, c_k]$, *доступный для инвестирования в момент* τ, *неэффективен, если оптимальные значения функционалов в задачах* (14) *и* (15) *равны.*

Предложение 1. *Для того, чтобы новый проект* $[c_0, c_1, \ldots, c_k]$, *доступный для запуска в момент* τ $(0 \leqslant \tau \leqslant \min\{N - r, N - k\})$, *был неэффективным, необходимо и достаточно, чтобы существовало решение* $\big(\hat{p}(0), \hat{p}(1), \ldots, \hat{p}(N-1)\big)$ *задачи* (15), *такое, что*

$$\sum_{i=0}^{k} c_i \hat{p}(\tau + i) \leqslant 0. \tag{16}$$

В разделах 3.3 описывается магистральное свойство решения задачи 15, **в разделе 3.5** экспериментально исследуется его наличие и скорость сходимости решения к магистрали.

Модель Кантора–Липмана при некоторой корректировке постановки становится частным случаем обобщённой модели Неймана-Гейла, для которой введено понятие равновесия и *магистрали.* Для такой скорректированной постановки задачи В. З. Беленький сформулировал (без доказательства) магистральное свойство решения задачи оптимального инвестирования. Заключается оно в следующем. Как доказано в теореме Кантора-Липмана, $\lim\limits_{N\to+\infty} \frac{\ln V_n}{N} = \frac{1}{\rho}$; при этом по теореме двойственности оптимальные значения функционалов прямой и двойственной задач равны, т. е. для оптимального значения функционала в задаче (15) выполнено то же предельное соотношение. Введём векторы $\vec{p'} = [\rho^{-k}, \rho^{-k+1}, \ldots, \rho^{-1}, 1]$, $\vec{p}(t) = [p(t), \ldots, p(t + k)]$, $t = 0, \ldots, N - k - 1$. Тогда магистральное свойство решения задачи (15) может быть сформулировано следующим образом:

Магистральное свойство. При достаточно продолжительном инвестиционном горизонте N выполнено:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \tau_1, \tau_2 : \quad \left\| \frac{\vec{p'}}{\|\vec{p'}\|} - \frac{\vec{p}(t)}{\|\vec{p}(t)\|} \right\| < \varepsilon \quad \forall t = \tau_1, \ldots, N - \tau_2,$$

где под $\|\cdot\|$ понимается евклидова норма вектора.

Луч $\mathbb{R}_+\vec{p'}$ будем называть магистральным лучом. Из выполнения магистрального свойства для решения задачи (15) можно сформулировать более простой критерий эффективности проекта. Если в процессе инвестирования в базовые проекты в момент, не принадлежащий ни началу инвестирования, ни завершению инвестиционной деятельности, возникает однократно доступный для использования проект с вектором $\vec{c} = [c_0, c_1, \ldots, c_k]$, то для оценки его эффективности необходимо вычислить величину $P_{\vec{c}}(\rho)$. Если $P_{\vec{c}}(\rho) > 0$, то проект следует принять к использованию, в противном случае — отклонить. Фактически, в этом случае для оценки инвестиционного проекта нужно применять критерий NPV, а дефлятором денежных потоков при этом считать величину ρ из теоремы 1.

Будем для рассматриваемых инвестиционных проектов называть наибольший корень инвестиционного полинома из интервала $(0, 1)$ (ρ) его **главным корнем**, остальные корни — **побочными**. Для экспериментального исследования были для начала (для удобства сопоставления) выбраны 25 проектов с главным корнем $\rho = 0.8$, но различными сочетаниями побочных корней. Задачи решались на временном горизонте $N = 100$. Типичные из получившихся траекторий зависимости $p(t)/p(t-1)$ от t приведены на рис. 1.

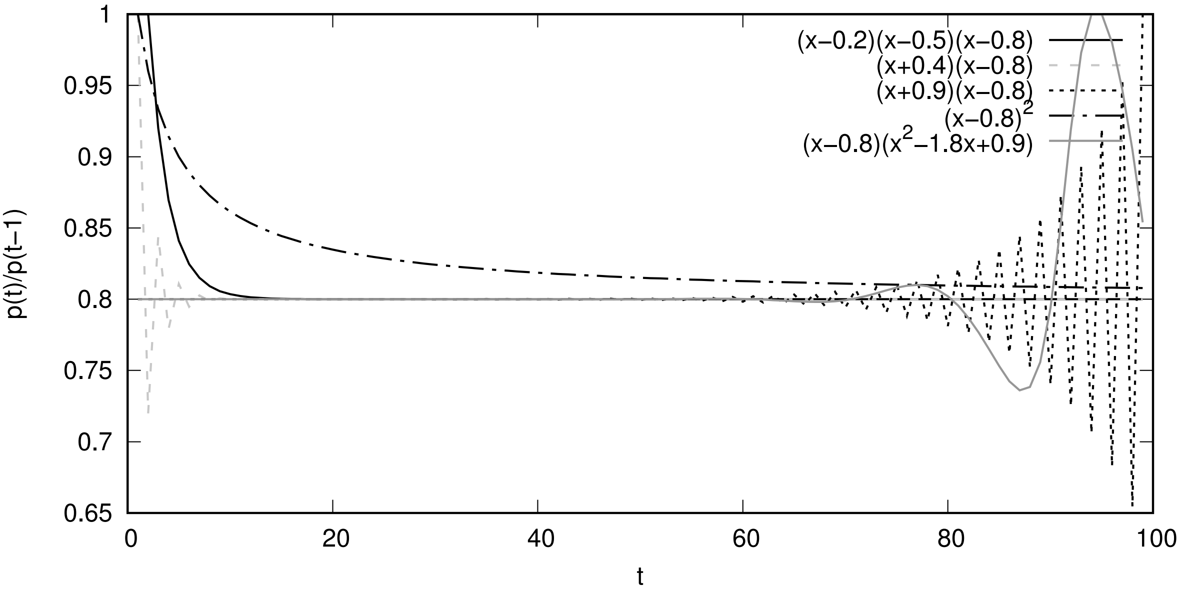

Рис. 1 Сходимость решения двойственной задачи к магистрали для различных проектов.

Наличие магистрального свойства построенными графиками подтверждается. При этом сходимость решения к магистрали для случая кратного главного корня существенно медленнее, чем для простого. По построенным графикам было замечено, что если все побочные корни инвестиционного полинома по модулю меньше главного корня, то отклонение от магистрали наблюдается только на начальные периодах времени. Так как двойственная задача является задачей в обратном времени, можно говорить о том, что этот участок траектории является *сходом с магистрали*. Если же все побочные корни больше главного, то, напротив, отклонение от магистрали наблюдается только на наиболее поздних временных этапах (этот участок будет являться *выходом на магистраль*). Если в проекте имеются как корни, большие главного корня по модулю, как и корни, меньшие его, у траектории есть и сход с магистрали, и выход на неё.

По внешнему виду траекторий (для примера — рис. 1) можно предположить экспоненциальный характер сходимости. Проверим это предположение. Для всех исследуемых инвестиционных проектов построим график зависимости величины $\ln(|p(t)/p(t-1) - \rho|)$ от момента времени t. Типичные формы получившихся графиков приведём на рис. 2.

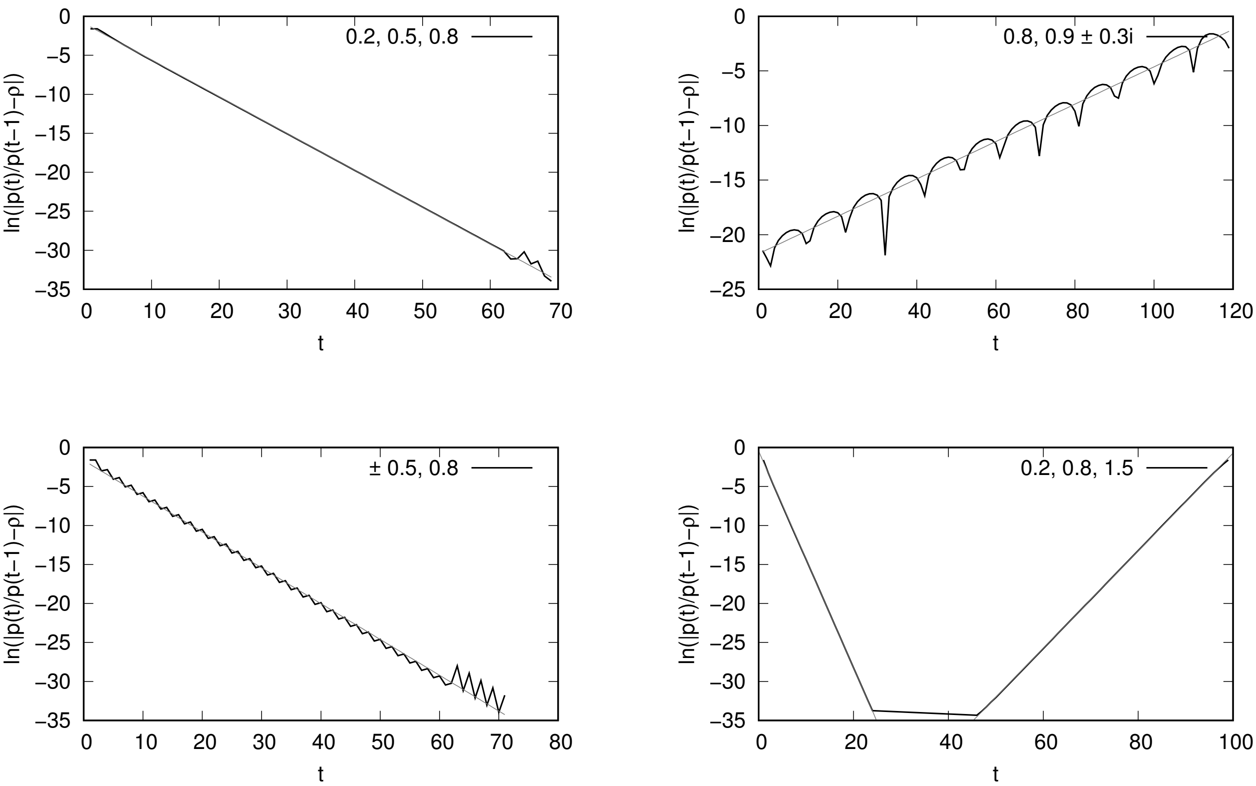

Рис. 2 Иллюстрации различных типов поведения траекторий при выходе на магистраль или при сходе с неё.

Наличие линейных участков графиков подтверждает экспоненциальных характер сходимости. Принципиальное отличие наблюдается только для случаев кратного главного корня: в этом случае экспоненциальной сходимости нет. Для всех остальных случаев была построена таблица соответствия набора побочных корней полинома и коэффициента наклона линейного участка графика $\ln(|p(t)/p(t-1)-\rho|)$ от t. Было замечено, что на коэффициент наклона существенным образом влияет только побочный корень, ближайший по модулю к главному (больший главного — для участка выхода на магистраль, меньший главного — для участка схода с неё). По графику зависимости коэффициента наклона k от модуля соответствующего побочного корня c было выдвинуто предположение о том, что $k = \ln(|c|/\rho)$. Для подтверждения этого предположения был взят другой набор инвестиционных полиномов с различными значениями главного корня. По совокупности всех рассмотренных проектов был построен график зависимости k от $\ln(|c|/\rho)$ (см. рис. 3).

Высказанное предположение с очень хорошей точностью выполняется для проектов, для которых корень c является простым корнем. В случае же, если корень c — кратный, наблюдается заметное отклонение от предполагаемой величины.

В заключении перечислены основные результаты диссертации и возможные направления дальнейшей работы.

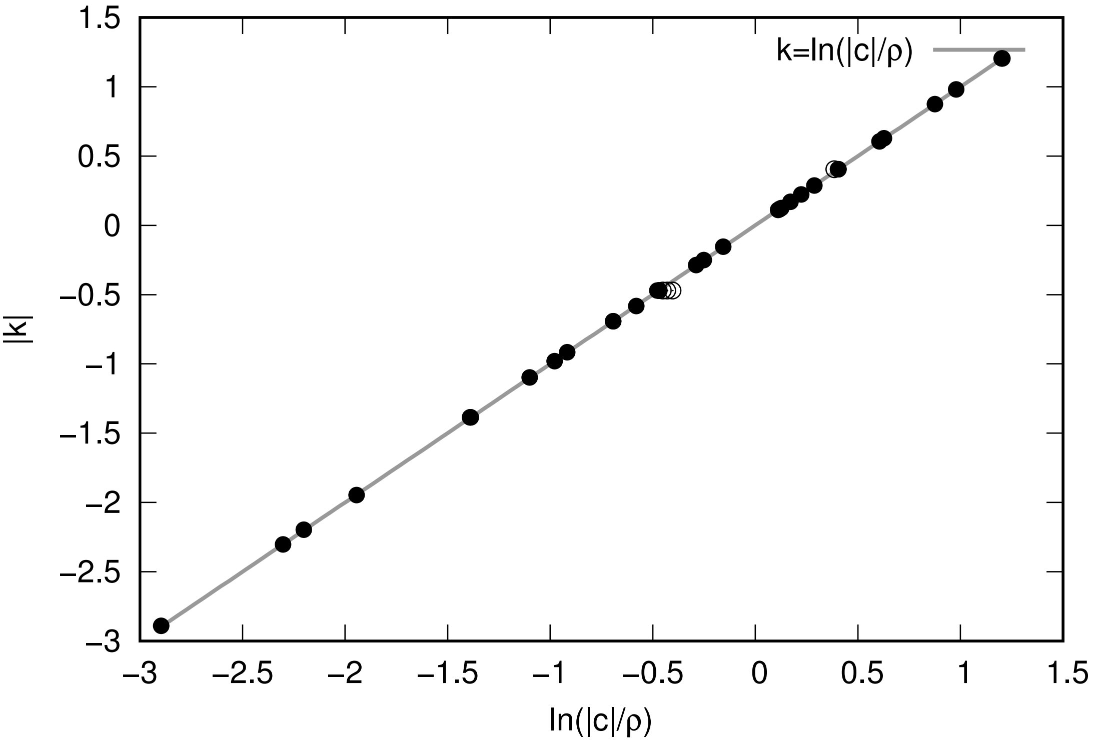

Рис. 3 График зависимости скорости сходимости дефляторов к магистрали в зависимости от параметров проекта. Серая линия — график прямой $k = \ln(|c|/\rho)$. Незакрашенные точки соответствуют случаям проектов с кратным c, закрашенные — случаям проектов с простым c.

В приложении 1 приведено распределение всех отраслей межотраслевого баланса России по 4 комплексам отраслей, описанным выше.

В приложении 2 приведён код программы в MatLab, позволяющий строить прогноз таблицы межотраслевого баланса по изменению цен на первичные ресурсы и новым данным о конечном потреблении.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

1. Проанализированы классические модели межотраслевого баланса и существующие их модификации, а также текущая экономическая ситуация России. Сделан выбор модификаций, применимых для современной российской экономики. Проведён анализ, поиск и обработка имеющейся статистической информации, достаточной для практического применения выбранных моделей нелинейного межотраслевого баланса.
2. Проведена идентификация нелинейного межотраслевого баланса для экономики России при различных предположениях о характере замещаемости производственных факторов. При помощи проидентифицированных моделей сделан прогноз таблицы межотраслевого баланса для периода, для которого имеется реальная статистическая информация. Проведено сопоставление прогнозных и статистических данных, сделан вывод о применимости моделей нелинейного межотраслевого баланса и о характере и

причинах произошедших в рассматриваемый период изменений в экономике.

3. Изучены имеющиеся подходы к оценке доходности инвестиций на несовершенном рынке капитала. Сформулировано условие неэффективности нетиражируемого инвестиционного проекта в модели Кантора-Липмана инвестиций на несовершенном рынке капитала, предложено упрощение этого критерия с использованием магистрального свойства дефляторов финансовых потоков.
4. На примерах проверено выполнение магистрального свойства дефляторов в модели Кантора-Липмана. Для наиболее простого случая (модель с одним инвестиционным проектом) была эмпирически выведена зависимость скорости сходимости дефляторов к магистрали от таких параметров проекта, как главный и ближайший к нему побочный корни инвестиционного полинома.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Рассоха А.В. Оценка доходности инвестиционных проектов в условиях несовершенного рынка капитала // Труды МФТИ, 2018. — Т.10, №4. — с. 74–86.
2. *Шананин А.А., Рассоха А. В.* Элементы финансовой математики. Учебное пособие. М.: МФТИ, 2018. — 61 с.
3. Shananin A., Rassokha A. Inverse problems in analysis of input-output model in the class of CES functions // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 2021. — V. 29, No. 2. — p. 305–316.
4. Рассоха А. В., Шананин А. А. Обратные задачи анализа межотраслевых балансов // Математическое моделирование, 2021. — Т. 33, №3. — с. 39–58. Rassokha A. V., Shananin A. A. Inverse problems of the analysis of input-output balances // Mathematical models and computer simulations, 2021. — V. 13, No. 6. — p. 943–954.
5. Рассоха А.В. Исследование сходимости к магистрали дефляторов в модели Кантора–Липмана инвестиций на несовершенном рынке капитала // Труды МФТИ, 2022. — Т. 14, №3. — с. 74–86.