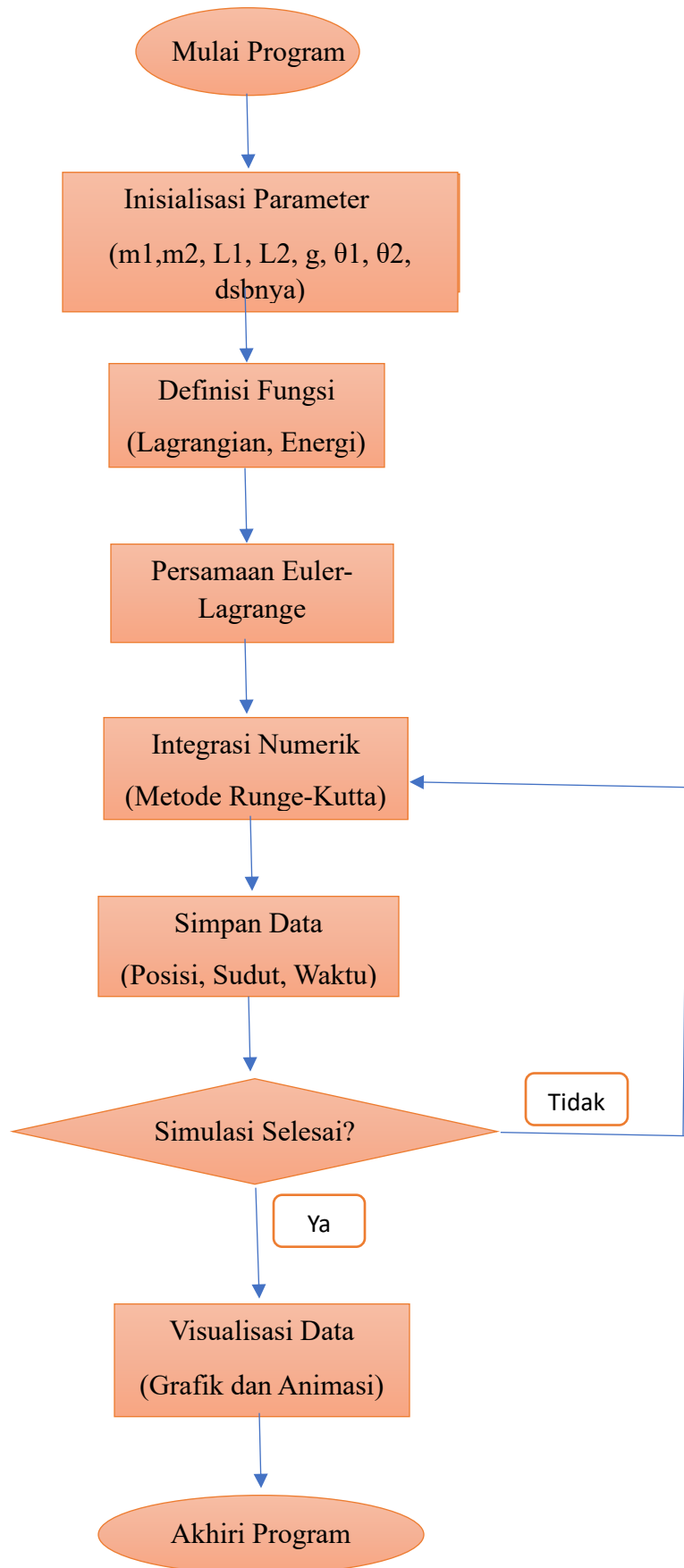


Nama : Ulfah Hasanah

NIM: 1227030036

MODUL 8 ANALISIS DOUBLE PENDULUM

Diagram Alir (Flowchart)



Nama : Ulfah Hasanah

NIM: 1227030036

MODUL 8 ANALISIS DOUBLE PENDULUM

```
[ ] import numpy as np
import sympy as smp
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import animation
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from matplotlib.animation import PillowWriter
from IPython.display import HTML
```

```
#Menentukan variabel yang diperlukan untuk sympy
t, m, g, l1, l2, w, C, alpha, beta = smp.symbols(r't m g L_1, L_2 \omega C \alpha \beta')
```

```
[ ] #Mendefinisikan theta 1 dan theta 2 dan menyatakan fungsi waktu. Juga definisi turunan pertama dan kedua.
the1, the2, = smp.symbols(r'\theta_1, \theta_2 ', cls=smp.Function)
```

```
[ ] the1 = the1(t)          the2 = the2(t)
the1_d = smp.diff(the1, t)  the2_d = smp.diff(the2, t)
the1_dd = smp.diff(the1_d, t) the2_dd = smp.diff(smp.diff(the2, t), t)
```

```
[ ] #mendeklarasikan nilai x1(teta1),y1(teta1) dan x2(teta1,teta2), y2(teta1,teta2)
x1, y1, x2, y2 = smp.symbols('x_1, y_1, x_2, y_2', cls=smp.Function)
x1= x1(t, the1)
y1= y1(t, the1)
x2= x2(t, the1, the2)
y2= y2(t, the1, the2)
```

```
#Masukkan ke dalam bentuk fungsional spesifik dari x1,y1,x2,y2
x1 = smp.cos(w*t)+L1*smp.sin(the1)
y1 = -L1*smp.cos(the1)
x2 = smp.cos(w*t)+L1*smp.sin(the1) + L2*smp.sin(the2)
y2 = -L1*smp.cos(the1) -L2*smp.cos(the2)
```

```
#definisi fungsi numerik dari vx1, vy1, vx2, vy2
smp.diff(x1, t)
vx1_f = smp.lambdify((t,w,L1,L2,the1,the2,the1_d,the2_d), smp.diff(x1, t))
vx2_f = smp.lambdify((t,w,L1,L2,the1,the2,the1_d,the2_d), smp.diff(x2, t))
vy1_f = smp.lambdify((t,w,L1,L2,the1,the2,the1_d,the2_d), smp.diff(y1, t))
vy2_f = smp.lambdify((t,w,L1,L2,the1,the2,the1_d,the2_d), smp.diff(y2, t))
```

```
#rumus lagrange
T = 1/2 * (smp.diff(x1, t)**2 + smp.diff(y1, t)**2) + \
    1/2 * m * (smp.diff(x2, t)**2 + smp.diff(y2, t)**2)
V = g*y1 + m*g*y2
L = T-V
```

```
[ ] #Persamaan Lagrange-Euler untuk theta1
LE1 = smp.diff(L, the1) - smp.diff(smp.diff(L, the1_d), t)
LE1 = LE1.simplify()
```

```
[ ] #Persamaan Lagrange-Euler untuk theta2
LE2 = smp.diff(L, the2) - smp.diff(smp.diff(L, the2_d), t)
LE2 = LE2.simplify()
```

LE1

LE2

Nama : Ulfah Hasanah

NIM: 1227030036

MODUL 8 ANALISIS DOUBLE PENDULUM

```
sols = smp.solve([LE1, LE2], (the1_dd, the2_dd),  
                 simplify=False, rational=False)
```

```
sols[the1_dd] #d^2 / dt^2 theta_1
```

```
a = LE1.subs([(smp.sin(the1-the2), the1-the2),  
              (smp.cos(the1-the2), 1),  
              (smp.cos(the1), 1),  
              (smp.sin(the1), the1),  
              (the1, C*smp.cos(w*t)),  
              (the2, C*alph*smp.cos(w*t)),  
              (m, 1),  
              (L2, L1),  
              ]).doit().series(C, 0, 2).removeO().simplify()  
b = LE2.subs([(smp.sin(the1-the2), the1-the2),  
              (smp.cos(the1-the2), 1),  
              (smp.cos(the1), 1),  
              (smp.cos(the2), 1),  
              (smp.sin(the1), the1),  
              (smp.sin(the2), the2),  
              (the1, C*smp.cos(w*t)),  
              (the2, C*alph*smp.cos(w*t)),  
              (m, 1),  
              (L2, L1),  
              ]).doit().series(C, 0, 2).removeO().simplify()
```

```
yeet = smp.solve([a.args[1], b.args[2]], (w, alph))
```

```
yeet[2][0]
```

```
yeet[0][0]
```

```
smp.limit(yeet[1][0].subs(C, beta/L1).simplify(), beta, smp.oo)
```

#Mengubah persamaan eksak dan memasukan ke dalam persamaan Numerik

```
dz1dt_f = smp.lambdify((t, m, g, w, L1, L2, the1, the2, the1_d, the2_d), sols[the1_dd])  
dthe1dt_f = smp.lambdify(the1_d, the1_d)
```

```
dz2dt_f = smp.lambdify((t, m, g, w, L1, L2, the1, the2, the1_d, the2_d), sols[the2_dd])  
dthe2dt_f = smp.lambdify(the2_d, the2_d)
```

Mendefinisikan persamaan differensial fungsi 5

```
def dSdt(S, t):  
    the1, z1, the2, z2 = S  
    return [  
        dthe1dt_f(z1),  
        dz1dt_f(t, m, g, w, L1, L2, the1, the2, z1, z2),  
        dthe2dt_f(z2),  
        dz2dt_f(t, m, g, w, L1, L2, the1, the2, z1, z2),  
    ]
```

Nama : Ulfah Hasanah

NIM: 1227030036

MODUL 8 ANALISIS DOUBLE PENDULUM

```
#Menambahkan salah satu contoh fungsi numerik untuk mendapatkan nilai
t = np.linspace(0, 20, 1000)
g = 9.81
m=1
L1 = 20
L2 = 20
w = np.sqrt(g/L1)
ans = odeint(dSdt, y0=[0, 0, 0, 0], t=t)
```

```
plt.plot(ans.T[0])
```

```
# Membuat Persamaan energi kinetik
def get_energy(w):
    t = np.linspace(0, 100, 2000)
    ans = odeint(dSdt, y0=[0.1, 0.1, 0, 0], t=t)
    vx1 = vx1_f(t,w,L1,L2,ans.T[0],ans.T[2],ans.T[1],ans.T[3])
    vx2 = vx2_f(t,w,L1,L2,ans.T[0],ans.T[2],ans.T[1],ans.T[3])
    vy1 = vy1_f(t,w,L1,L2,ans.T[0],ans.T[2],ans.T[1],ans.T[3])
    vy2 = vy2_f(t,w,L1,L2,ans.T[0],ans.T[2],ans.T[1],ans.T[3])
    E = 1/2 * np.mean(vx1**2+vx2**2+vy1**2+vy2**2)
    return E
```

```
ws = np.linspace(0.4, 1.3, 100)
Es = np.vectorize(get_energy)(ws)
```

```
plt.plot(ws, Es)
plt.axvline(1.84775*np.sqrt(g/L1), c='k', ls='--')
plt.axvline(0.76536*np.sqrt(g/L1), c='k', ls='--')
# Tautochrone
#plt.axvline(np.sqrt(np.pi*g**(-1/2)), c='k', ls='--')
plt.grid()
```

```
t = np.linspace(0, 200, 20000)
g = 9.81
m=1
L1 = 20
L2 = 20
w = ws[ws>1][np.argmax(Es[ws>1])]
ans = odeint(dSdt, y0=[0.1, 0.1, 0, 0], t=t)
```

```
def get_x0y0x1y1x2y2(t, the1, the2, L1, L2):
    return (np.cos(w*t),
            0*t,
            np.cos(w*t) + L1*np.sin(the1),
            -L1*np.cos(the1),
            np.cos(w*t) + L1*np.sin(the1) + L2*np.sin(the2),
            -L1*np.cos(the1) - L2*np.cos(the2),
            )
```

Nama : Ulfah Hasanah

NIM: 1227030036

MODUL 8 ANALISIS DOUBLE PENDULUM

```
x0, y0, x1, y1, x2, y2 = get_x0y0x1y1x2y2(t, ans.T[0], ans.T[2], L1, L2)

def animate(i):
    ln1.set_data([x0[::10][i], x1[::10][i], x2[::10][i]], [y0[::10][i], y1[::10][i], y2[::10][i]])
    trail1 = 50          # Panjang jejak benda 1
    trail2 = 50          # Panjang jejak benda 2
    ln2.set_data(x1[::10][i:max(1,i-trail1):-1], y1[::10][i:max(1,i-trail1):-1]) # jejak dan garis pada benda 1
    ln3.set_data(x2[::10][i:max(1,i-trail2):-1], y2[::10][i:max(1,i-trail2):-1]) # jejak dan garis pada benda 2

fig, ax = plt.subplots(1,1, figsize=(8,8))
ax.set_facecolor('k')
ax.get_xaxis().set_ticks([]) # menyembunyikan garis sumbu x
ax.get_yaxis().set_ticks([]) # menyembunyikan garis sumbu y
ln1, = plt.plot([], [], 'ro--', lw=3, markersize=8)
ln2, = ax.plot([], [], 'ro-', markersize = 8, alpha=0.05, color='cyan') # line for Earth
ln3, = ax.plot([], [], 'ro-', markersize = 8, alpha=0.05, color='cyan')
ax.set_ylim(-44,44)
ax.set_xlim(-44,44)

#Animasi gerak double pendulum
ani = animation.FuncAnimation(fig, animate, frames=2000, interval=50)
#ani.save('pen.gif',writer='pillow',fps=50)
HTML(ani.to_html5_video())
```

➤ Logaritma :

Program dimulai dengan mengimpor sejumlah pustaka Python yang diperlukan untuk perhitungan numerik, manipulasi simbolik, integrasi persamaan diferensial, dan visualisasi. Pustaka-pustaka ini meliputi numpy untuk operasi matematika numerik, sympy untuk komputasi simbolik, scipy.integrate khususnya odeint untuk menyelesaikan persamaan diferensial, serta matplotlib untuk memvisualisasikan hasil simulasi dan membuat animasi dari gerakan double pendulum.

Selanjutnya, berbagai variabel simbolik dideklarasikan, termasuk waktu (t), massa (m), gravitasi (g), panjang tali dari kedua pendulum ($L1$ dan $L2$), serta beberapa variabel lainnya seperti w , C , α , dan β . Fungsi sudut yang menggambarkan gerak masing-masing pendulum, $\theta_1(t)$ dan $\theta_2(t)$, juga didefinisikan, bersama dengan turunan pertama dan kedua dari fungsi-fungsi ini untuk menghitung kecepatan sudut dan percepatan sudut

Pada langkah berikutnya, sistem menghitung posisi kartesian dari dua titik massa yang berada di ujung pendulum. Koordinat ($x1$, $y1$) menggambarkan posisi massa pertama, sedangkan

Nama : Ulfah Hasanah

NIM: 1227030036

MODUL 8 ANALISIS DOUBLE PENDULUM

(x_2, y_2) menggambarkan posisi massa kedua. Posisi ini dihitung dengan mempertimbangkan sudut rotasi dan panjang masing-masing tali, menggunakan fungsi sinus dan kosinus untuk mengonversi dari koordinat sudut ke koordinat kartesian.

Setelah mendapatkan posisi kartesian, program kemudian menghitung energi kinetik dan energi potensial sistem. Energi kinetik diperoleh dari kecepatan linier kedua massa, sementara energi potensial dihitung berdasarkan ketinggian massa terhadap titik nol yang ditentukan oleh gravitasi. Selisih antara energi kinetik dan potensial digunakan untuk membentuk fungsi Lagrangian (L), yang merupakan dasar dari pendekatan mekanika Lagrange.

Dengan Lagrangian yang telah ditentukan, persamaan gerak diturunkan menggunakan persamaan Euler-Lagrange. Dua persamaan diperoleh untuk masing-masing sudut pendulum (θ_1 dan θ_2). Persamaan-persamaan ini kemudian disederhanakan dan dipecahkan untuk mendapatkan percepatan sudut dari masing-masing pendulum ($\ddot{\theta}_1$ dan $\ddot{\theta}_2$).

Setelah persamaan diferensial diselesaikan secara simbolik, hasilnya dikonversi menjadi fungsi yang dapat dievaluasi secara numerik. Fungsi $dSdt$ didefinisikan untuk menghitung perubahan keadaan sistem (sudut dan kecepatan sudut) sebagai input untuk solver numerik `odeint`. Solver ini digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial sistem secara numerik dalam rentang waktu tertentu, menggunakan kondisi awal yang telah ditentukan.

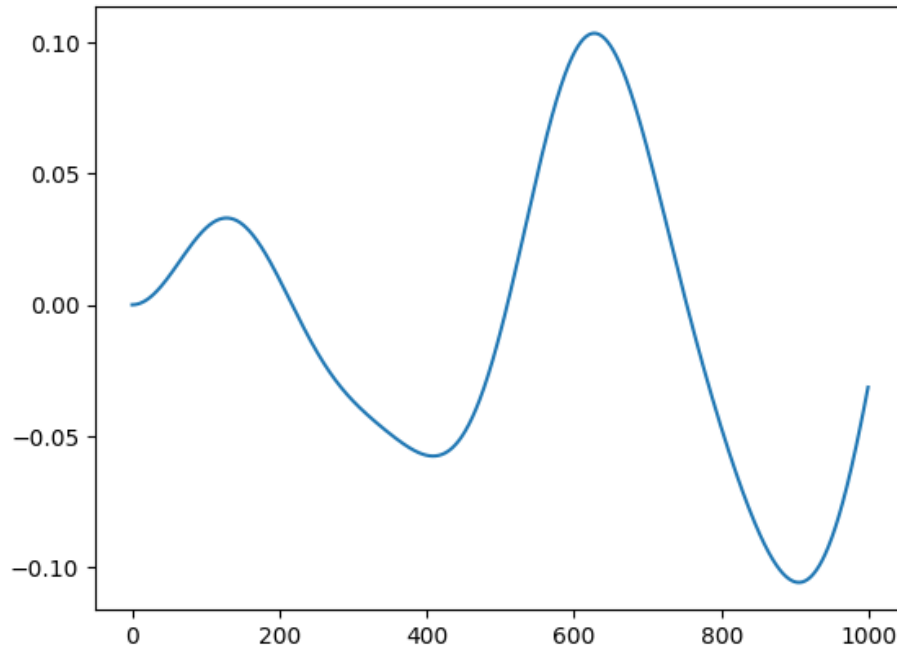
Pada bagian akhir, program melakukan visualisasi hasil simulasi. Hasil numerik dari solusi `odeint` ditampilkan dalam bentuk grafik yang menunjukkan perubahan sudut pertama (θ_1) terhadap waktu. Selain itu, program juga menghasilkan animasi dari gerakan double pendulum, yang memperlihatkan lintasan massa pertama dan kedua secara dinamis. Fungsi `animate()` digunakan untuk memperbarui posisi pendulum dan jejak lintasannya pada setiap frame animasi, sehingga menghasilkan representasi visual yang menunjukkan sifat kacau (chaotic) dari gerak double pendulum. Dengan demikian, program ini menggunakan pendekatan simbolik dan numerik untuk menyelesaikan masalah fisika yang kompleks dan kemudian menyajikannya secara visual, yang memungkinkan kita untuk lebih memahami perilaku dinamis dari sistem double pendulum.

Nama : Ulfah Hasanah

NIM: 1227030036

MODUL 8 ANALISIS DOUBLE PENDULUM

➤ Analisis Grafik Dan Animasi Double Pendulum



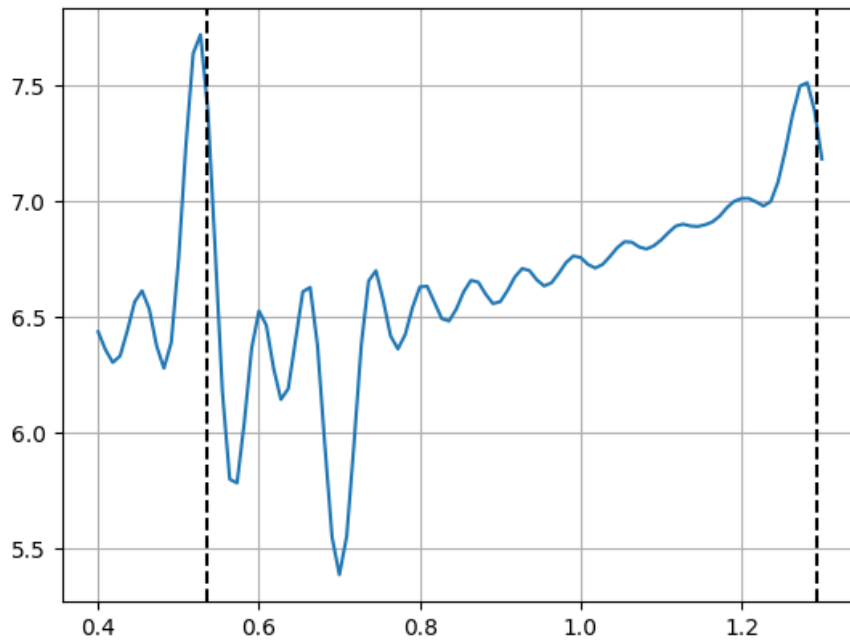
Grafik 1.1

Grafik 1.1 diatas menunjukkan pola naik-turun yang tidak beraturan. Hal ini menunjukkan gerak osilasi, yang sering muncul pada sistem pendulum. Namun, osilasi ini tidak sepenuhnya periodik (tidak berulang secara teratur). Hal ini adalah salah satu ciri khas dari sistem pendulum ganda yang chaotic (kacau). Sifat chaos ini berarti bahwa gerakan sistem sangat sensitif terhadap kondisi awal — perubahan kecil pada kondisi awal akan menghasilkan hasil yang sangat berbeda dan amplitudo berubah-ubah mengindikasikan adanya transfer energi di antara pendulum, atau mungkin kehilangan energi (jika ada efek redaman).

Nama : Ulfah Hasanah

NIM: 1227030036

MODUL 8 ANALISIS DOUBLE PENDULUM



Grafik 1.2

Grafik 1.2 menunjukkan hubungan antara frekuensi penggerak (sumbu X) dan energi kinetik rata-rata (sumbu Y) pada sistem pendulum ganda. Grafik ini memiliki pola osilasi dengan beberapa puncak dan lembah. Puncak-puncak tersebut menunjukkan adanya resonansi, yaitu kondisi di mana energi kinetik rata-rata mencapai nilai maksimum pada frekuensi tertentu. Sebaliknya, lembah-lembah menunjukkan frekuensi di mana transfer energi ke sistem kurang efisien.

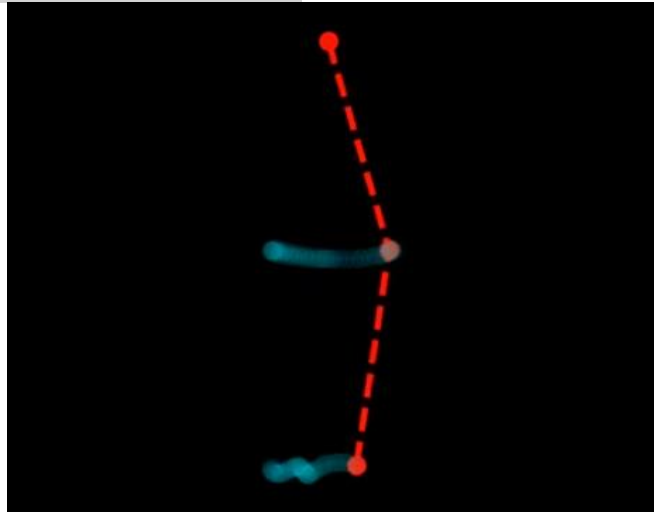
Garis putus-putus vertikal kemungkinan menandai batasan tertentu, seperti frekuensi kritis atau area transisi stabilitas berdasarkan analisis teoretis. Secara fisik, resonansi terjadi ketika frekuensi penggerak cocok dengan karakteristik alami sistem, sehingga energi dari penggerak ditransfer secara maksimal ke pendulum ganda.

Grafik ini konsisten dengan kode yang digunakan untuk simulasi, di mana energi kinetik dihitung untuk berbagai nilai frekuensi penggerak menggunakan metode numerik. Pola fluktuasi energi ini mencerminkan sifat kompleks dinamika pendulum ganda, yang sangat sensitif terhadap perubahan parameter

Nama : Ulfah Hasanah

NIM: 1227030036

MODUL 8 ANALISIS DOUBLE PENDULUM



Gambar 1.3

Double pendulum adalah sistem fisik yang sangat menarik karena menunjukkan perilaku dinamika non-linear yang kompleks. Sistem ini terdiri dari dua pendulum yang saling terhubung, di mana pendulum pertama menggantung pada titik tetap, dan pendulum kedua menggantung pada ujung pendulum pertama. Animasi dari double pendulum biasanya digunakan untuk memvisualisasikan bagaimana interaksi antar dua pendulum menghasilkan gerakan yang tak terduga dan tidak teratur.

Ketika animasi double pendulum dijalankan, kita dapat melihat bahwa gerakan awalnya tampak cukup teratur, dengan pola yang terlihat berulang. Pendulum pertama dan kedua bergerak dalam arah tertentu, saling menarik dan memengaruhi satu sama lain. Namun, seiring berjalannya waktu, gerakan ini mulai menjadi semakin rumit. Pendulum mulai menunjukkan perilaku yang disebut "chaotic motion" atau gerakan chaos, di mana pola geraknya menjadi tidak terprediksi. Setiap perubahan kecil pada kondisi awal, seperti sudut atau kecepatan pendulum, dapat menghasilkan pola gerakan yang sangat berbeda. Inilah yang membuat double pendulum menjadi contoh yang sempurna dari sistem non-linear yang sangat sensitif terhadap kondisi awal.

Dalam animasi, kita juga dapat memperhatikan bagaimana energi dalam sistem ini terus berubah. Energi kinetik, yang berasal dari kecepatan pendulum, dan energi potensial, yang bergantung pada posisi pendulum terhadap gravitasi, saling bertransformasi sepanjang waktu. Ketika pendulum mencapai titik tertinggi dalam lintasannya, energi kinetiknya hampir nol, tetapi energi potensialnya maksimum. Sebaliknya, saat pendulum

Nama : Ulfah Hasanah

NIM: 1227030036

MODUL 8 ANALISIS DOUBLE PENDULUM

bergerak sangat cepat di dekat titik terendahnya, energi kinetik mendominasi, sementara energi potensial menurun. Meskipun terjadi perubahan energi seperti ini, total energi sistem tetap konstan karena tidak ada gesekan atau hambatan lain yang memengaruhi gerakan pendulum.

Hal yang paling mencolok dari animasi double pendulum adalah bagaimana gerakan kedua pendulum tampak saling memengaruhi. Pendulum pertama menarik pendulum kedua dengan gaya gravitasi, sementara pendulum kedua memberikan dorongan atau tarikan balik kepada pendulum pertama. Akibatnya, gerakan kedua pendulum ini menjadi sangat kompleks. Pada beberapa saat, Anda mungkin melihat pendulum kedua bergerak begitu cepat hingga melampaui pendulum pertama, membentuk lintasan melingkar yang rumit.

Selain itu, double pendulum sering kali menghasilkan pola gerakan yang indah jika dianalisis lebih lanjut. Jika posisi pendulum dicatat dalam bentuk grafik, hasilnya akan berupa lintasan yang sangat kompleks dan tampak seperti seni abstrak. Ini mencerminkan sifat dasar dari sistem chaotic, di mana gerakan yang tampak tidak teratur sebenarnya masih mematuhi hukum-hukum fisika.

Secara keseluruhan, animasi double pendulum memberikan wawasan mendalam tentang bagaimana sistem fisik bekerja dalam situasi yang kompleks. Meski gerakannya tampak kacau dan tidak teratur, semuanya dapat dijelaskan menggunakan prinsip energi dan dinamika non-linear. Sistem ini juga menjadi contoh bagaimana perubahan kecil dalam kondisi awal dapat berdampak besar pada hasil akhirnya, yang menjadi salah satu ciri khas sistem chaotic. Dengan visualisasi ini, kita tidak hanya belajar tentang fisika, tetapi juga dapat mengapresiasi keindahan kompleksitas alam.