

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

---

# СИНТЕЗ МОДАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА С НАБЛЮДАЮЩИМ УСТРОЙСТВОМ

Методические указания  
для курсового и дипломного проектирования



Санкт-Петербург  
2015

Составитель – М. В. Бураков

Рецензент – кандидат технических наук, доцент А. А. Мартынов

Рассматриваются принципы конструирования модальных регуляторов по состоянию для управления динамическими системами. Приводятся основные понятия метода пространства состояний, описываются алгоритмы модального синтеза и конструирования наблюдающих устройств полного и усеченного порядка. Рассмотрены примеры конструирования модальных регуляторов с наблюдающими устройствами в MatLab.

Предназначены для подготовки бакалавров по направлению 270304 – «Управление в технических системах», а также студентов других специальностей, изучающих дисциплины «Теория автоматического управления» и «Основы теории автоматического управления».

Публикуется в авторской редакции.  
Компьютерная верстка С. Б. Мацапуры

---

Сдано в набор 09.04.15. Подписано к печати 13.10.15.  
Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 3,02.  
Уч.-изд. л. 3,25. Тираж 100 экз. Заказ № 370.

---

Редакционно-издательский центр ГУАП  
190000, Санкт-Петербург, Б. Морская ул., 67

© Санкт-Петербургский государственный  
университет аэрокосмического  
приборостроения, 2015

## ВВЕДЕНИЕ

Усложнение постановок задач, стремление к большей формализации в описании процессов управления и массовое использование компьютеров привели к появлению в 70-е годы XX-го века «современной теории управления», в основе которой лежит понятие пространства состояний [1–5].

Анализ и синтез систем в пространстве состояний отличается универсальностью, он может быть единообразно выполнен для систем с различным числом управляемых и управляющих переменных. Модель в пространстве состояний сохраняет соотношение между входом и выходом системы, но позволяет перейти от одного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка к системе из  $n$  дифференциальных уравнений 1-го порядка. Таким образом, кроме внешних переменных (вход и выход) в модели отражаются внутренние переменные системы. Возникает возможность исследования системных свойств объектов – управляемости, наблюдаемости, идентифицируемости и т. д. Кроме того, модели в переменных состояниях могут быть эффективно использованы при проектировании оптимальных систем, минимизирующих заданные функции качества.

Практически все динамические объекты могут быть описаны с помощью дифференциальных уравнений. Метод пространства состояний позволяет исследовать системы во временной области. Преимущества этого подхода обусловлены тем, что он позволяет единообразно исследовать и одномерные, и многомерные, и линейные, и нелинейные системы.

При выполнении курсовой работы предполагается, что студент знаком с основами теории автоматического управления [6–10], а также обладает основными навыками работы с системой *MatLab Simulink* [11–13].

## 1. ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

*Состояние системы* – это совокупность таких переменных, знание которых позволяет, при известном входе и известных уравнениях динамики, описать будущее состояние системы и значение ее выхода.

Уравнения состояний линейной стационарной системы имеют следующий общий вид:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t), \\ Y(t) = CX(t) + DU(t). \end{cases} \quad (1)$$

где  $X$  – вектор-столбец состояния  $[n \times 1]$ ;  $A$  – матрица коэффициентов объекта  $[n \times n]$ ;  $B$  – матрица входа  $[n \times m]$ ;  $U$  – вектор входа (управления)  $[m \times 1]$ ;  $Y$  – вектор выхода  $[k \times 1]$ ;  $C$  – матрица выхода  $[k \times n]$ ;  $D$  – матрица влияния входа непосредственно на выход системы  $[k \times m]$ .

Размер вектора состояния  $n$  равен порядку системы.

Уравнениям состояния соответствует структурная схема, показанная на рис. 1.

На практике часто рассматриваются скалярные системы (с одним входом и одним выходом). Матрица  $D$  обычно нулевая.

В программном комплексе *MatLab* для формирования модели в пространстве состояний используется функция `ss`:

```
>> sys = ss(A, B, C, D)
```

Например:

```
>> sys = ss([1 0 0; 0 1 0; 2 3 4], [0; 0; 1], [1 0 0], 0)
```

```
a =  
x1 x2 x3
```

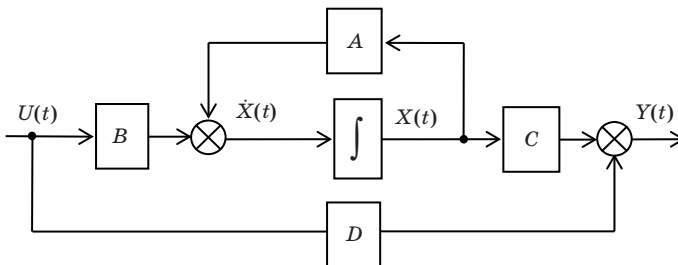


Рис. 1. Структура системы в пространстве состояний

```

x1 1 0 0
x2 0 1 0
x3 2 3 4
b=
  u1
x1 0
x2 0
x3 1
c=
  x1 x2 x3
y1 1 0 0
d=
  u1
y1 0
Continuous-time model.

```

## 2. ПЕРЕХОД ОТ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ К УРАВНЕНИЯМ СОСТОЯНИЯ

Передачная функция (ПФ) объекта имеет вид:

$$W(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}.$$

Корни полинома знаменателя называются полюсами ПФ, а корни числителя ПФ соответственно, нулями передаточной функции.

Статические свойства системы определяются коэффициентом усиления, который при ненулевых  $a_0$  и  $b_0$  может быть вычислен по формуле

$$K = \frac{b_0}{a_0}.$$

Динамические свойства определяются расположением полюсов ПФ на комплексной плоскости.

Выбор переменных состояния неоднозначен, одной и той же ПФ могут соответствовать разные модели в пространстве состояний, однако если использовать каноническую форму управляемости, то переход от ПФ к уравнениям состояния будет однозначным, например, для системы 3-го порядка:

$$W(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \Rightarrow$$

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$y = [b_0 \quad b_1 \quad b_2] X.$$

Пусть в *MatLab* описана передаточная функция:

```
>> w=tf([2 2],[3 4 1])
```

Transfer function:

```
2 s + 2
```

```
-----
```

```
3 s^2 + 4 s + 1
```

Переход от ПФ в пространстве состояний выполняется командой:

```
>> w1=ss(w)
a =
      x1      x2
x1 -1.333 -0.6667
x2  0.5    0
b =
      u1
x1  2
x2  0
c =
      x1      x2
y1 0.3333 0.6667
d =
      u1
y1 0
```

Continuous-time model.

Полученная модель соответствует канонической форме управляемости (с точностью до преобразования подобия).

Каноническую форму управляемости можно получить с помощью матрицы перестановок (для которой справедливо:  $P = P^{-1} = P^T$ ):

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad A1 = PAP, \quad B1 = PB, \quad C1 = CP.$$

Для системы 2-го порядка:

```
>> P=[0 1; 1 0]
P =
      0      1
      1      0
>> A=P*w1.a*P
A =
      0  0.5000
 -0.6667 -1.3330
>> b1=P* w1.b
b1 =
```

```

0
2
>> c1=w1.c*P
c1 =
0.6667  0.3333

```

При исследовании систем управления может возникать обратная задача – определение ПФ по уравнению состояния.

Если входной и выходной сигнал являются скалярными величинами, то передаточная функция *разомкнутой* системы выражается через матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1} B.$$

Использование команд MatLab:

```

>> w2 = ss(w1.a, w1.b, w1.c, w1.d);
>> w3 = tf(w2)
Transfer function:
0.6667 s + 0.6667
-----
s^2 + 1.333 s + 0.3333

```

Очевидно:

$$W(s) = \frac{2s + 2}{3s^2 + 4s + 1} = \frac{0.6667s + 0.6667}{s^2 + 1.333s + 0.3333}.$$



### 3. АНАЛИЗ СИСТЕМНЫХ СВОЙСТВ ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ

При анализе систем в пространстве состояний важное значение имеют свойства управляемости и наблюдаемости.

Система, описываемая матрицами  $A$  и  $B$ , называется *полностью управляемой*, если её можно перевести из любого начального состояния  $X(0)$  в любое конечное  $X(t)$  с помощью управления  $U(t)$  за конечное время.

Управляемость системы описывается условием:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} B; & AB; & A^2B; & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n.$$

Для системы с одним входом и одним выходом матрицы управляемости имеет размер  $n \times n$ :

$$W = \begin{bmatrix} B; & AB; & A^2B; & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}.$$

Если детерминант этой матрицы отличен от нуля, то система управляема.

Матрица управляемости может быть построена с помощью функции `ctrb`, которая вызывается командами вида:

```
>> W = ctrb(A, B)
>> W = ctrb(sys)
>> W = ctrb(sys.A, sys.B)
```

Продолжая пример, используем команду

```
>> W = ctrb(w2)
W =
    2.0000   -2.6667
         0    1.0000
>> det(W)
ans =    2
```

Система управляема.

Система, описываемая матрицами  $A$  и  $C$ , является *наблюдаемой* тогда и только тогда, когда существует конечное время  $T$  такое, что начальное состояние  $X(0)$  может быть определено в результате наблюдения выходной переменной  $y(t)$ ,  $t \in T$  при заданном управлении  $u(t)$

Наблюдаемость системы описывается условием:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C; & CA; & CA^2; & \dots & CA^{n-1} \end{bmatrix}^T = n.$$

Для системы с одним входом и одним выходом матрица наблюдаемости (размером  $n \times n$ ) имеет вид:

$$\begin{bmatrix} C; & CA; & CA^2; & \dots & CA^{n-1} \end{bmatrix}^T.$$

Если детерминант этой матрицы отличен от нуля, то система наблюдаема.

Матрица наблюдаемости может быть построена с помощью функции `obsv`, которая также может вызываться в одном из вариантов:

```
>> N = obsv(A, C)
>> N = obsv(sys)
>> N = obsv(sys.A,sys.C)
```

Продолжая пример, используем команду

```
>> Q = obsv(w2)
Q =
    0.3333    0.6667
   -0.1111   -0.2222

>> det(Q)
ans =    0
```

Следовательно, система не наблюдаема.

## 4. МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Рассмотрим САУ, описываемую линейным дифференциальным уравнением в операторной форме:

$$\begin{aligned} & (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) y(t) = \\ & = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) u(t). \end{aligned}$$

Общее решение этого линейного неоднородного дифференциального уравнения ищется в виде двух слагаемых:

$$y(t) = y_B + y_{CB}(t),$$

где  $y_B$  – вынужденное и  $y_{CB}$  – свободное движение системы.

Вынужденная составляющая решения находится из исходного дифференциального уравнения приравниванием к нулю всех производных в левой и правой частях уравнения, так что при установившемся значении входного сигнала  $u_{уст}$  получаем:

$$a_0 y_B = b_0 u_{уст} \Rightarrow y_B = \frac{b_0}{a_0} u_{уст}.$$

Свободная (переходная) составляющая ищется как общее решение однородного дифференциального уравнения:

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) y(t) = A(s) y(s) = 0,$$

где  $A(s)$  – характеристический полином (знаменатель ПФ).

Решение имеет вид:

$$y_{CB}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t} = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t}.$$

где  $\lambda_i$  –  $i$ -й корень характеристического полинома,  $C_i$  –  $i$ -я постоянная интегрирования, определяемая из начальных условий.

*Мода* – это часть свободной составляющей решения дифференциального уравнения. Сумма отдельных мод определяет динамику системы.

Корни характеристического полинома могут быть четырех типов:

1. Вещественного типа  $\lambda = a$ . Такой корень дает составляющую решения вида:

$$y(t) = C e^{at}.$$

При  $\alpha < 0$  значение  $y(t)$  будет убывать во времени, и при  $\alpha > 0$  – возрастать.

2. Комплексно-сопряженного типа:  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ . Составляющая решения имеет вид:

$$y(t) = C_1 e^{(\alpha + j\beta)t} + C_2 e^{(\alpha - j\beta)t} = A e^{\alpha t} \sin(\beta t + \psi).$$

Здесь возникают колебания выходной переменной, которые будут затухать по амплитуде при  $\alpha < 0$ , и расти при  $\alpha > 0$ .

3. Чисто мнимые корни. В этом случае  $\alpha = 0$ , и

$$y(t) = C_1 e^{j\beta t} + C_2 e^{-j\beta t} = A \sin(\beta t + \psi),$$

колебания будут иметь постоянную амплитуду.

4. Нулевой корень. В этом случае в характеристическом полиноме

$$A(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0.$$

отсутствует свободный член:  $a_0 = 0$ .

Здесь система находится на границе устойчивости, и при любых начальных условиях движения асимптотически затухают к положению равновесия (система устойчива в целом) или расходятся (система не устойчива).

Если изобразить корни характеристического уравнения системы точками на комплексной плоскости, то общее условие устойчивости линейной системы можно сформулировать еще так: *условием устойчивости системы является расположение всех полюсов ПФ в левой комплексной полуплоскости.*

Модальный синтез предполагает формирование таких обратных связей по состоянию, при которых обеспечивается заданное расположение полюсов замкнутой системы.

Сигнал управления описывается формулой

$$u(t) = -KX(t), \tag{2}$$

где  $K$  – неизвестный вектор коэффициентов, который требуется найти при выполнении модального синтеза.

Формула (2) предполагает, что цель управления заключается в достижении начала координат в пространстве состояний. Иначе для заданного состояния  $X_g(t)$  надо использовать выражение

$$u(t) = -K(X(t) - X_g(t)) = -KX(t) + g(t).$$

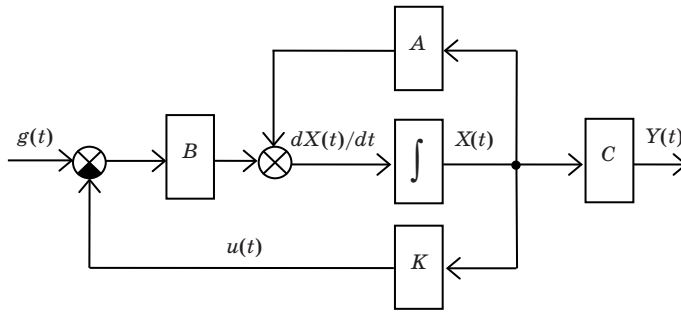


Рис. 2. Структура замкнутой системы в пространстве состояний

Рассмотрим уравнения состояния замкнутой системы

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + B(-KX(t) + g(t)); \\ Y(t) = CX(t). \end{cases} \quad (2)$$

где  $g(t)$  – заданный входной сигнал (уставка).

Этим уравнениям соответствует структура, приведенная на рис. 2.

Свободное движение системы (при  $g(t) = 0$ ) описывается выражением:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t), \\ u(t) = -KX(t). \end{cases} \Rightarrow \dot{X}(t) = (A - BK)X(t).$$

где  $K$  – вектор коэффициентов обратной связи.

Решение этого уравнения определяется формулой

$$X(t) = e^{(A-BK)t} X(0).$$

Следовательно, устойчивость и характеристики переходного процесса в системе определяются собственными числами матрицы  $A - BK$ .

Основная теорема модального управления гласит, что если линейная динамическая система является управляемой, то линейная обратная связь может быть выбрана таким образом, что матрица  $(A - BK)$  будет иметь желаемый спектр (желаемое расположение полюсов замкнутой системы).

## 5. ВЫБОР ПОЛОЖЕНИЯ ПОЛЮСОВ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ

Первый шаг модального синтеза заключается в выборе желаемого расположения полюсов замкнутой системы (т. е. формирование эталонной модели). Этот выбор можно сделать двумя способами:

1. Рассматривая корневые критерии качества системы.

2. Используя стандартные полиномиальные формы, задающие расположение полюсов замкнутой системы.

Рассмотрим *корневые критерии качества*. Для оценки быстродействия системы используется понятие *степени устойчивости*  $\eta$ , под которой понимается абсолютное значение вещественной части ближайшего к мнимой оси корня (рис. 3, где показан вариант, когда ближайшим к мнимой оси является вещественный корень (слева), и вариант, когда к мнимой оси ближе пара комплексно-сопряженных корней (справа)).

Корни, имеющие наименьшую по модулю вещественную часть, дают в переходном процессе наиболее медленно затухающую составляющую. Такие корни называют *доминирующими*.

Зная степень устойчивости, можно приближенно оценить время переходного процесса по формуле:

$$t_{\Pi} \approx \frac{3}{\eta}.$$

Эта оценка справедлива при значительном удалении ближайшего от мнимой оси полюса от других полюсов. При кратных полюсах формулу использовать нельзя.

Запас устойчивости системы оценивается *колебательностью*. Система имеет склонность к колебаниям, если характеристическое уравнение содержит комплексные корни  $\eta_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$ .

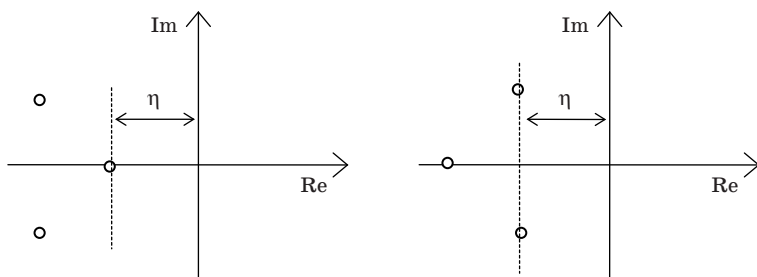


Рис. 3. Понятие степени устойчивости

Колебательность оценивается по формуле:

$$\mu = \left| \frac{\beta}{\alpha} \right|.$$

Если система имеет несколько комплексно-сопряженных корней, то ее колебательные свойства определяет пара комплексных корней, для которой  $\mu$  принимает наибольшее отношение.

По значению колебательности можно приближенно оценить перерегулирование

$$\delta \leq e^{-\frac{\pi}{\mu}} 100\%.$$

Следует учитывать, что динамические характеристики системы (переходный процесс) зависят не только от расположения полюсов ПФ, но и от расположения ее нулей. Выбирая расположение полюсов, можно всегда гарантировать устойчивость замкнутой системы, но прямые показатели качества регулирования могут не совсем совпадать с заданными.

Рассмотрим использование стандартных полиномов.

Один из возможных подходов заключается в обеспечении одинаковости всех корней характеристического уравнения. Каждый корень  $\lambda$  должен быть отрицательным, а величина его модуля  $\lambda_0$  определяется требованиями к быстродействию. Левая часть характеристического уравнения обращается в бином Ньютона  $(s + \lambda_0)^n$ , разворачивая который, можно получить стандартные значения коэффициентов характеристического уравнения. Биномиальные стандартные формы для систем до четвертого порядка имеют вид:

$$\begin{aligned} & s + \lambda_0, \\ & s^2 + 2\lambda_0 s + \lambda_0^2, \\ & s^3 + 3\lambda_0 s^2 + 3\lambda_0^2 s + \lambda_0^3, \\ & s^4 + 4\lambda_0 s^3 + 6\lambda_0^2 s^2 + 4\lambda_0^3 s + \lambda_0^4, \\ & s^5 + 5\lambda_0 s^4 + 10\lambda_0^2 s^3 + 10\lambda_0^3 s^2 + 5\lambda_0^4 s + \lambda_0^5, \\ & s^6 + 6\lambda_0 s^5 + 15\lambda_0^2 s^4 + 20\lambda_0^3 s^3 + 15\lambda_0^4 s^2 + 6\lambda_0^5 s + \lambda_0^6. \end{aligned}$$

При таком подходе обеспечивается аperiodичность переходного процесса. Чем больше  $\lambda_0$ , тем меньше время переходного процесса, поскольку

$$t_{\Pi} \approx \frac{3}{\lambda_0}.$$

Рассмотрим нормированные полиномы при  $\lambda_0 = 1$ . Первым 6-ти полиномам Ньютона соответствуют графики, показанные на рис. 4. Параметры переходных процессов приведены в табл. 1.

Существуют и другие стандартные формы, например форма Баттерворта, в соответствии с которой корни должны располагаться в левой полуплоскости на окружности радиуса  $\lambda_0$  на одинаковых угловых расстояниях друг от друга (рис. 5).

Стандартные формы Баттерворта для систем до четвертого порядка имеют вид:

$$\begin{aligned} & s + \lambda_0, \\ & s^2 + 1,4\lambda_0 s + \lambda_0^2, \\ & s^3 + 2\lambda_0 s^2 + 2\lambda_0^2 s + \lambda_0^3, \\ & s^4 + 2,6\lambda_0 s^3 + 3,4\lambda_0^2 s^2 + 2,6\lambda_0^3 s + \lambda_0^4, \\ & s^5 + 3,24\lambda_0 s^4 + 5,24\lambda_0^2 s^3 + 5,24\lambda_0^3 s^2 + 3,24\lambda_0^4 s + \lambda_0^5. \end{aligned}$$

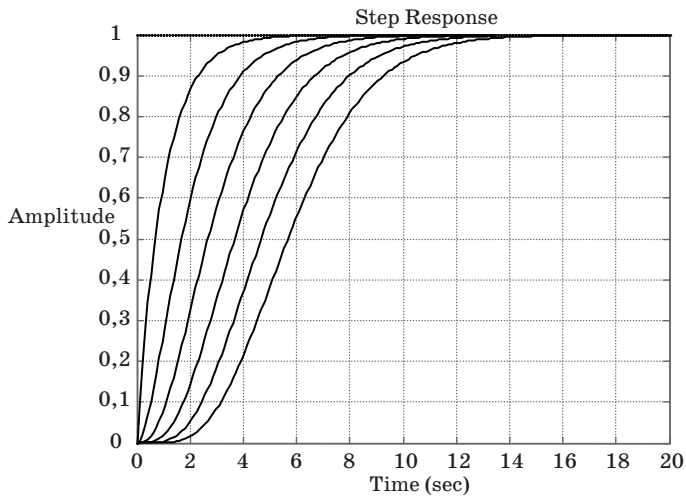


Рис. 4. Нормированные переходные функции  
(биномиальное разложение)

Таблица 1

Параметры переходных процессов для нормированных полиномов

$n$	1	2	3	4	5	6
$t_p, c$	3	4,8	6,3	7,8	9,2	10,5
$\delta, \%$	0	0	0	0	0	0



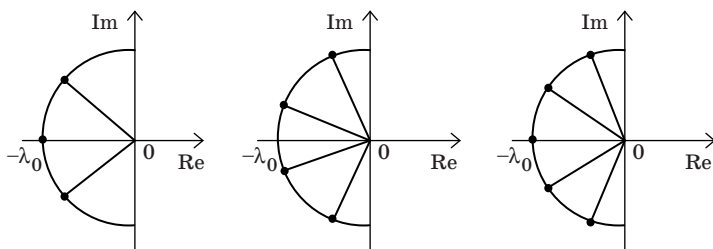


Рис. 5. Распределение Баттерворта для систем 3, 4 и 5-го порядка

Таблица 2

Полюса полиномов Баттерворта для систем различного порядка

$n$	полюса
2	$-0,5\lambda_0 \pm j 0,87 \lambda_0$
3	$-0,57\lambda_0, -0,215\lambda_0 \pm j 1,31 \lambda_0$
4	$-0,395\lambda_0 \pm j 0,505 \lambda_0, -0,105\lambda_0 \pm j 1,57 \lambda_0$
5	$-0,41\lambda_0, -0,235\lambda_0 \pm j 0,88 \lambda_0, -0,06\lambda_0 \pm j 1,7 \lambda_0$

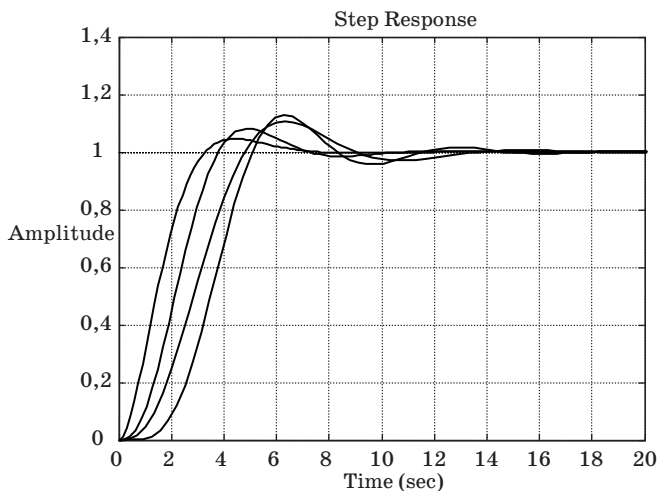


Рис. 6. Нормированные переходные функции для полиномов Баттерворта

Полином Баттерворта обеспечивает заданное время переходного процесса и перерегулирование в пределах 15%. Для многих реальных систем переходный процесс с небольшим перерегулированием

Таблица 3

**Параметры переходных процессов для нормированных полиномов**

$n$	1	2	3	4	5
$t_p, c$	3	2,9	6	6,8	7,7
$\delta, \%$	0	4,5	8	11	13,5

предпочтительнее апериодического процесса. Значения полюсов легко рассчитать из геометрических соображений.

В табл. 2 приведены полюса полиномов Баттерворта для систем 2–5 порядка.

Рассмотрим нормированные полиномы Баттерворта при  $\lambda_0 = 1$ . Первым 5-ти полиномам соответствуют графики, показанные на рис. 6. Параметры переходных процессов приведены в табл. 3.

## 6. РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОБРАТНЫХ СВЯЗЕЙ

Если задан желаемый характеристический полином замкнутой системы

$$q(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n,$$

то рассчитать вектор коэффициентов обратных связей  $K$  можно с помощью формулы Аккермана, которая имеет вид:

$$K = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} B & AB & A^2 B & \dots & A^{n-1} B \end{bmatrix}^{-1} \times \\ \times \begin{bmatrix} A^n & +a_{n-1}A^{n-1} & \dots & +a_1 A & +a_0 I \end{bmatrix}.$$

Доказательство формулы и примеры расчетов можно найти в [1].

В системе MatLab расчет коэффициентов обратных связей выполняется командой *acker*. Например:

```
>> A=[0 1;-2 3];  
>> B=[0; 1];  
>> P=[-1 -3];  
>> K=acker(A,B,P)  
K =  
    1    7
```

Здесь вектор  $P$  задает желаемое расположение полюсов замкнутой системы.

Для моделирования реакции системы надо задать матрицы  $C$  и  $D$ , например:

```
>> C=[1 0];  
>> D=0;
```

Модель разомкнутой системы в пространстве состояний:

```
>> sys = ss(A, B, C, D);
```

Реакцию на скачок можно проверить командой:

```
>> step(sys)
```

Эта команда строит график переходного процесса, приведенный на рис. 7.

Модель замкнутой системы в пространстве состояний:

```
>> sys = ss(A-B*K, B, C, D);
```

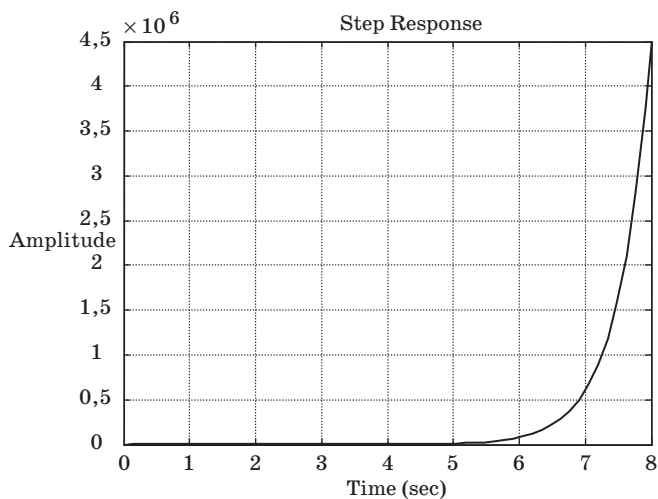


Рис. 7. Реакция на единичный скачок разомкнутой системы

Реакцию на скачок также моделируется командой *step*:

`>> step(sys)`

График переходного процесса, приведенный на рис. 8, соответствует устойчивой системе.

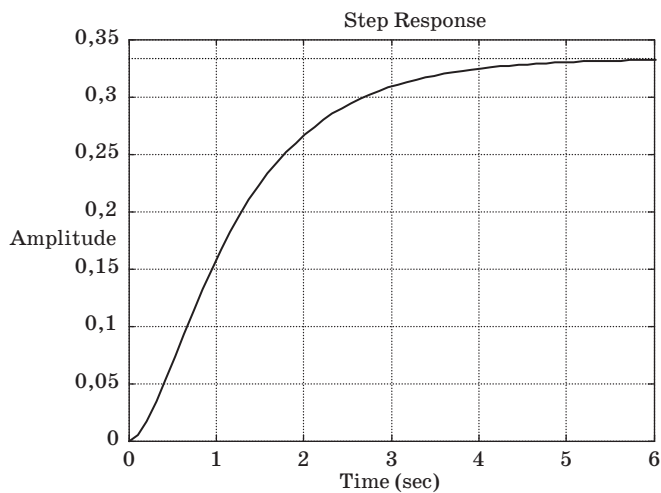


Рис. 8. Реакция на единичный скачок замкнутой системы

Как показывает рис. 8, установившееся значение выходного сигнала отличается от заданного. Это следствие особенности модального синтеза, при котором ставится задача обеспечения заданной формы и длительности переходного процесса, но не обеспечивается автоматически желаемый уровень выходного сигнала.

Проблема решается путем введения масштабирующего коэффициента для входного воздействия.

Масштабирующий коэффициент рассчитывается по формуле:

$$k_m = \left( -C(A - BK)^{-1} B \right)^{-1}$$

Например:

```
>> A=[0 1;-2 3];
>> B=[0; 1];
>> C=[1 0];
>> K=[1 7];
>> km=inv(-C*inv(A-B*K)*B)
km =
    3
```

Это значение соответствует графику, показанному на рис. 8.

В MatLab существует специальная команда *dsgain*, с помощью которой можно определить коэффициент усиления в установившемся режиме. Пример использования этой команды:

```
>> sys=ss(A-B*K,B,C,0);
>> dsgain(sys)
ans =
    0.3333
```

Разделив единицу на это значение, можно найти масштабирующий коэффициент.

## 7. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ SIMULINK MATLAB

В расширении Simulink пакета *MatLab* имеется специальный блок *State space* (рис. 9) для описания системы, заданной уравнениями (1).

Однако выход блока *State space* не позволяет непосредственно оценивать состояние системы, и для получения  $X$  из  $y$  требуется использовать наблюдающее устройство.

Для описания матриц в Simulink требуется использовать блок *gain* (рис. 10).

Блок *gain* позволяет описать матрицу коэффициентов  $K$ , которая в зависимости от своей размерности может быть константой или вектором.

Если матрица уже находится в рабочем пространстве *MatLab*, то достаточно указать ее название (рис. 11).

Можно также непосредственно описать матрицу в блоке *gain* (рис. 12).

Входным сигналом блока (обозначается буквой  $u$ ) может быть скалярная величина или вектор. Соответственно возможны четыре варианта операции умножения (см. рис. 12).

На рис. 13 показана модель в *Simulink*, соответствующая системе (2).

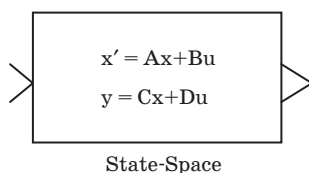


Рис. 9. Блок для описания системы уравнениями состояния

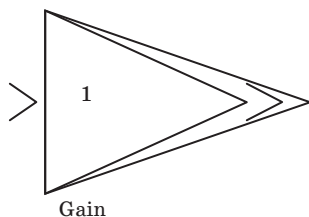


Рис. 10. Блок описания коэффициентов

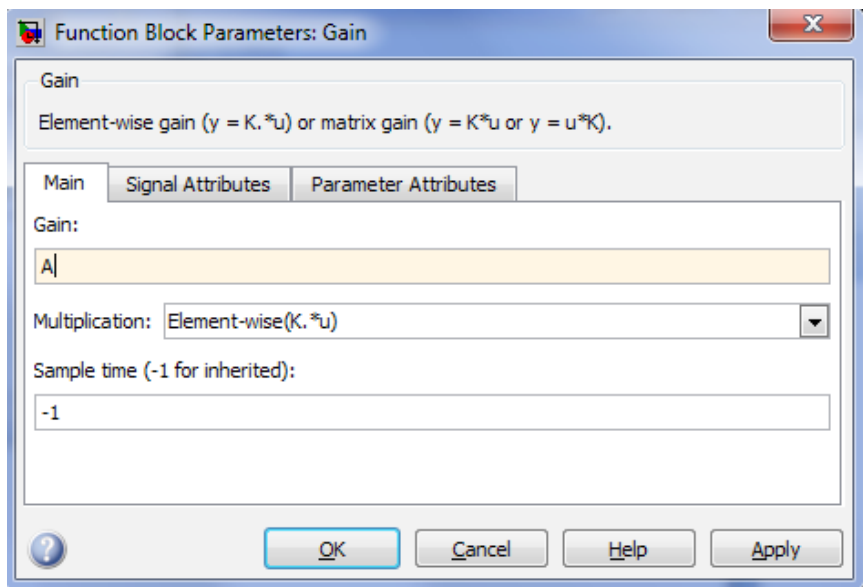


Рис. 11. Ввод матрицы с помощью указание ее названия

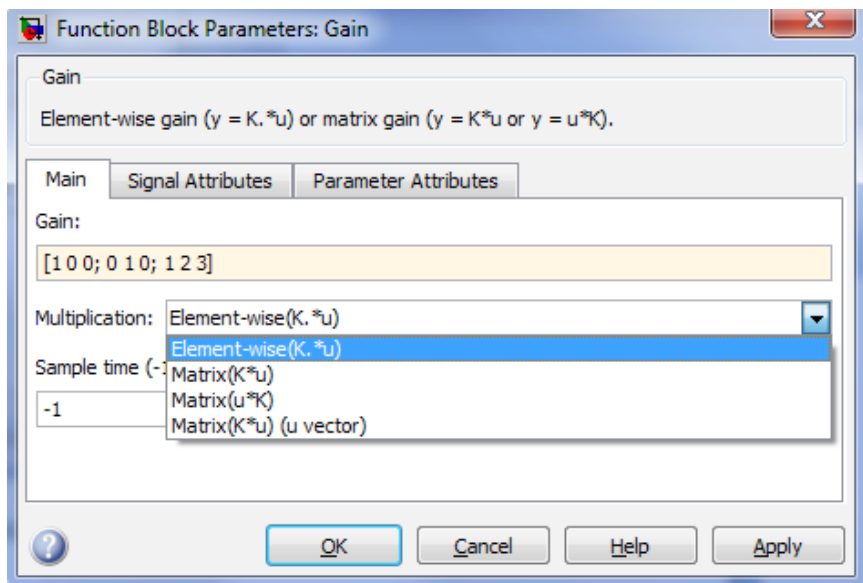


Рис. 12. Ввод матрицы с помощью указание ее названия

На рис. 14 приведен переходный процесс в системе. Для получения графика надо выставить в блоке *To Workspace* значение *Save format: Array*, затем выполнить моделирование и использовать команды:

```
>> plot(tout,simout)
>> grid
>> xlabel('t'); ylabel('y(t)');
```

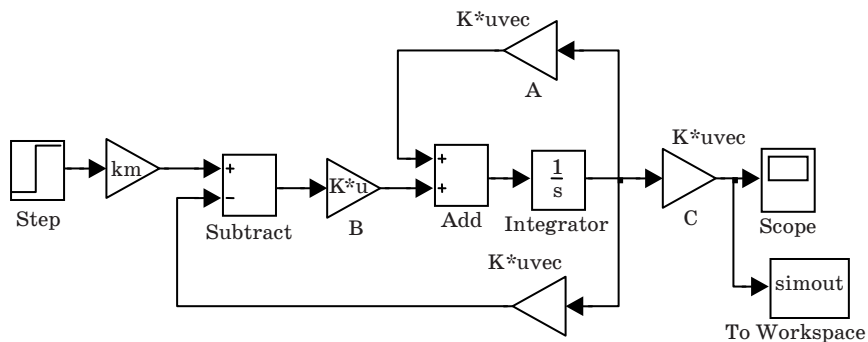


Рис. 13. Система с модальным регулятором в MatLab Simulink

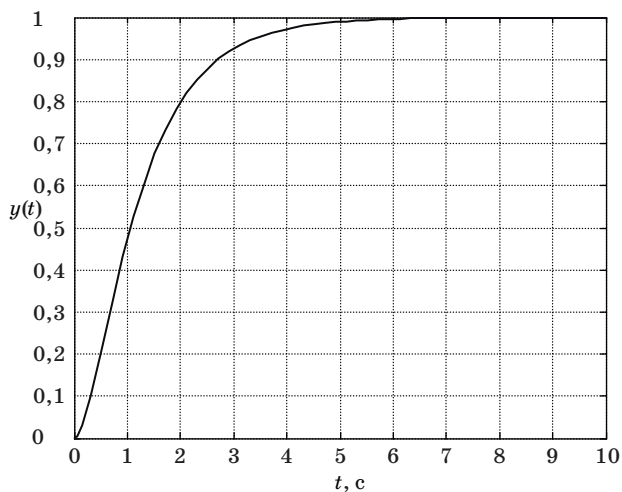


Рис. 14. Переходный процесс в системе с модальным регулятором



## 8. СИСТЕМЫ С РАСШИРЕННЫМ ВЕКТОРОМ СОСТОЯНИЯ

При использовании модального регулятора повышение порядка астатизма системы может достигаться путем введения интеграторов в контур управления.

Рассмотрим расширенный вектор состояния системы

$$X_r = \begin{bmatrix} X \\ e \end{bmatrix},$$

где переменная  $e(t)$  формируется на выходе интегратора (рис. 15).

Для системы с расширенным вектором состояния

$$A_r = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}; \quad B_r = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C_r = \begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с рис. 15 можно записать

$$\dot{e}(t) = g(t) - CX(t).$$

$$u(t) = -k_1 e(t) - KX(t).$$

Таким образом,

$$u(t) = \begin{bmatrix} K & k_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t) \\ e(t) \end{bmatrix} = K_r X_r.$$

Рассмотрим простой пример.

```
>> A=[0 1;-2 3];
>> B=[0; 1];
>> C=[1 0];
>> Ar=[A(1,1) A(1,2) 0; A(2,1) A(2,2) 0; -C 0]
Ar =
    0    1    0
   -2    3    0
   -1    0    0
>> Br=[B; 0]
Br =
    0
    1
    0
>> P=[-1 -3 -1];
>> K=acker(Ar,Br,P)
K =
    5    8   -3
```

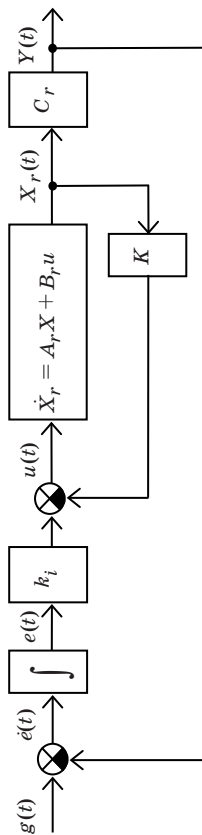


Рис. 15. Модальный регулятор с интегратором

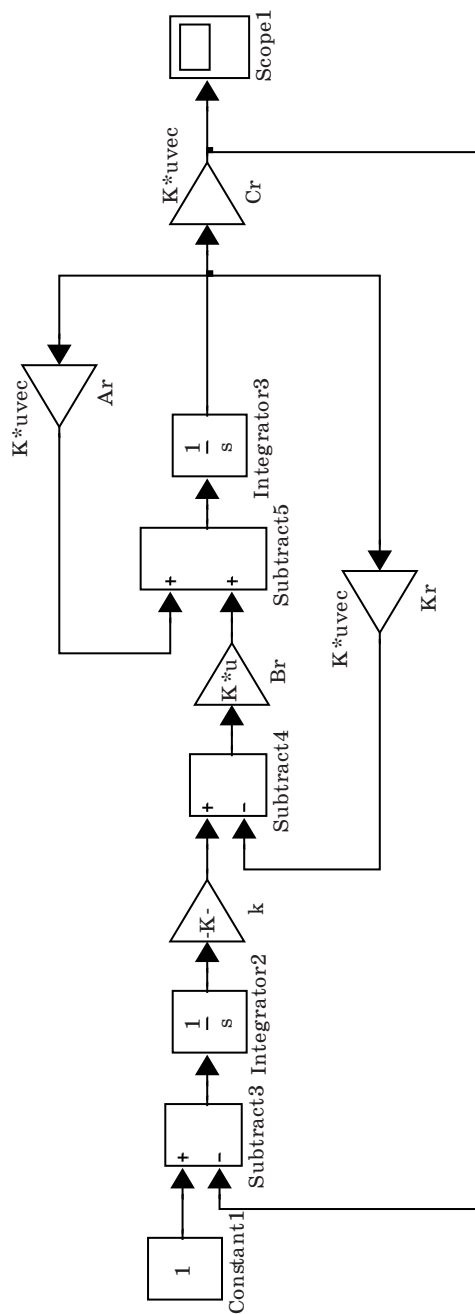


Рис. 16. Блок-схема модального регулятора с интегратором

Схема моделирования показана на рис. 16, где  $Kr = [K(1) \ K(2) \ 0]; k = -K(3)$ ;

На рис. 17 приведены переходные процессы в системе с интегратором и без интегратора.

Для более сложного входного сигнала требуется повышать порядок астатизма системы, расширяя вектор состояния:

$$X_{rr} = \begin{bmatrix} X \\ e \\ \dot{e} \end{bmatrix},$$

Для системы с расширенным вектором состояния

$$A_r = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ -C & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_r = \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C_r = \begin{bmatrix} C \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Структура системы представлена на рис. 18.

Рассмотрим пример.

```
>> A=[1 1;-2 3];
>> B=[0; 1];
>> C=[1 0];
>> Ar=[A(1,1) A(1,2) 0 0; A(2,1) A(2,2) 0 0; -C 0 0; 0 0 1 0]
```

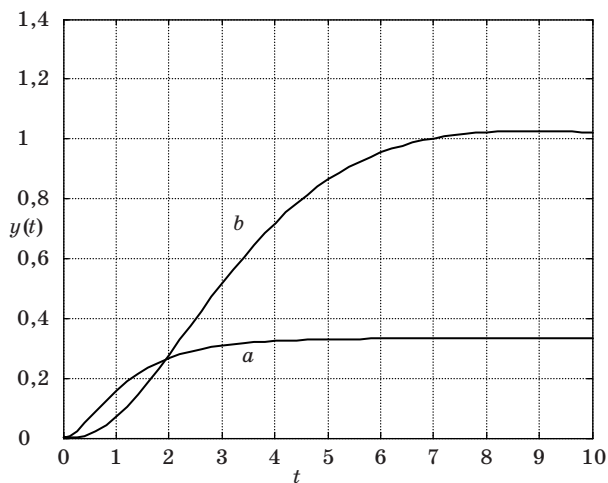
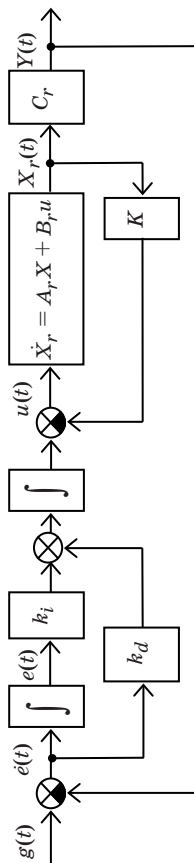


Рис. 17. Переходный процесс в системе без интегратора (а) и с интегратором (b)



*Рис. 18. Модальный регулятор с расширенным вектором состояния*

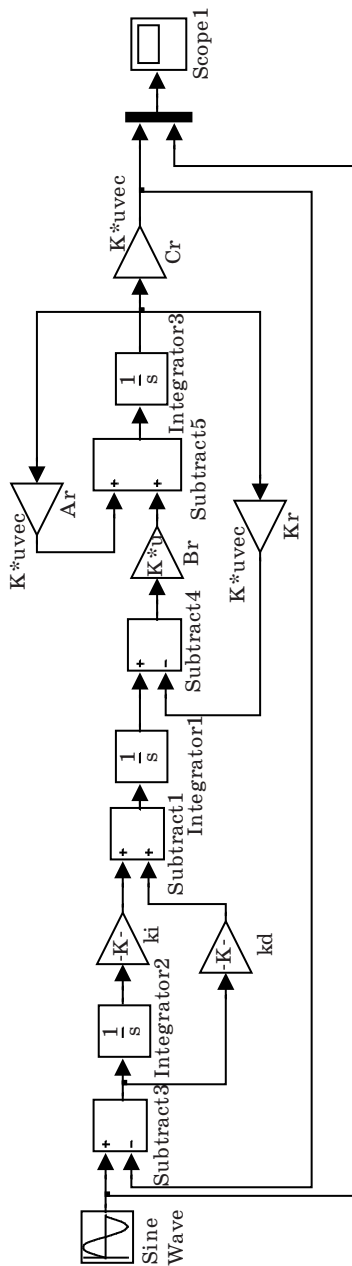


Рис. 19. Модальный регулятор с двумя интеграторами

```

Ar =
    0    1    0    0
   -2    3    0    0
   -1    0    0    0
    0    0    1    0
>> Br=[B; 0; 0]
Br =
    0
    1
    0
    0
>> Cr=[C 0 0]
Cr =
    1    0    0    0
>> P=[-3 -3 -3 -3];
>> K=acker(Ar,Br,P)
K =
    52    15 -108   -81

```

На рис. 19 приведена блок-схема модального регулятора, на вход которой подается синусоидальный эталонный сигнал.

На рис. 20 показаны переходные процессы в системе.

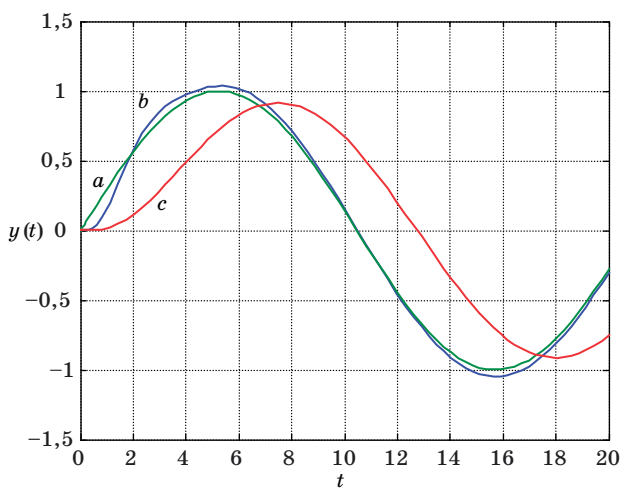


Рис. 20. Реакция на синусоидальный входной сигнал:  
*a* – входной сигнал; *b* – выход системы с двумя интеграторами;  
*c* – выход системы с одним интегратором

## 9. НАБЛЮДАЮЩЕЕ УСТРОЙСТВО ПОЛНОГО ПОРЯДКА

Метод модального управления предполагает, что все компоненты вектора состояния  $X$  могут быть измерены, но на практике некоторые компоненты могут быть неизвестны по одной из двух причин:

- измерительных приборов может быть недостаточно;
- некоторые компоненты вектора  $X$  могут не иметь физического смысла.

Однако если система является наблюдаемой, то все компоненты вектора  $X$  могут быть восстановлены по наблюдениям вектора  $Y$ .

Наблюдающее устройство полного порядка представляет собой динамическую систему, которая является моделью объекта:

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}} = A\hat{X} + BU, \\ \hat{Y} = C\hat{X}. \end{cases} \quad (3)$$

где  $\hat{X}(t)$  – оценка состояния объекта,  $\hat{Y}(t)$  – оценка выхода.

Если начальное состояние объекта и модели совпадают, и модель адекватна объекту, то можно полагать в любой момент времени, что

$$\hat{X}(t) = X(t).$$

Однако практически добиться полной адекватности объекта и модели невозможно, трудно добиться и полного равенства начальных условий. Поэтому на практике можно рассчитывать лишь на выполнение условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{X}(t) = X(t).$$

Подобным свойством обладают так называемые асимптотические наблюдающие устройства.

Асимптотическое наблюдающее устройство использует обратную связь по ошибке восстановления вектора состояния, так что работа системы с наблюдающим устройством описывается уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}}(t) = A\hat{X}(t) + BU(t) + N(Y(t) - \hat{Y}(t)) = A\hat{X}(t) + BU(t) + NCE(t), \\ \hat{Y} = C\hat{X}(t), \\ U(t) = K\hat{X}(t). \end{cases}$$

где  $N$  – матрица параметров наблюдающего устройства.

На рис. 21 показана блок-схема системы с регулятором и наблюдателем.

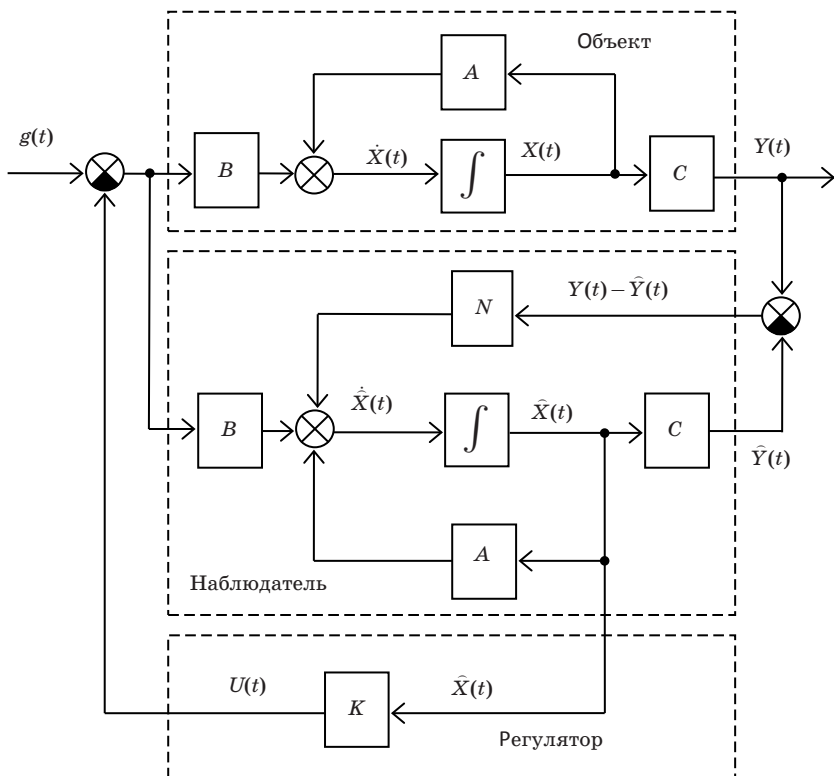


Рис. 21. Система с наблюдателем и регулятором

Можно записать

$$\dot{E} = \dot{X} - \dot{\hat{X}} = (A - NC)E,$$

Решение этого уравнения определяется формулой

$$E(t) = e^{(A-NC)t} E(0).$$

Таким образом, если собственные числа матрицы  $A - NC$  имеют отрицательную вещественную часть, то с течением времени ошибка состояния уменьшится до нуля. Соответственно, при синтезе наблюдателя нужно выбрать положение корней характеристического уравнения:

$$|\lambda I - (A - NC)| = 0.$$

Рассмотрим синтез системы управления с наблюдателем полного порядка в *MatLab Simulink*, используя данные предыдущего примера (рис. 22).

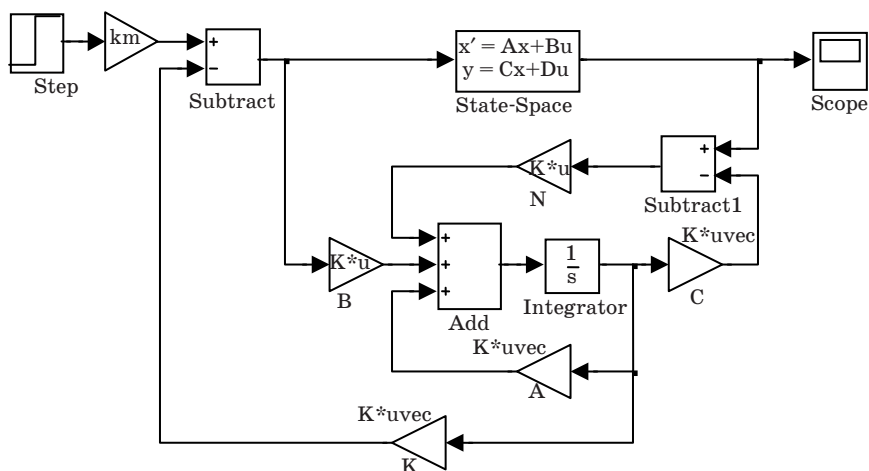
```
>> P=[-1 -3];
```

```
>> P1=[-2 -6];
```

```
>> N1=acker(A',C',P1);
```

$$N =$$

43



32



После запуска схемы можно убедиться, что переходный процесс полностью соответствует рис. 14, поскольку начальные состояния объекта и наблюдателя совпадают.

Переходный процесс будет отличаться от эталонного в двух ситуациях:

1. Если задать на интеграторе вектор начальных отклонений по состоянию.

2. Если сложить сигнал, поступающий на вход наблюдателя, с белым шумом (блок *Band-Limited White Noise*) заданной интенсивности.

## 10. НАБЛЮДАЮЩЕЕ УСТРОЙСТВО ПОНИЖЕННОГО ПОРЯДКА

Рассмотренная выше структура наблюдающего устройства обладает некоторой избыточностью. Избыточность выражается в том, что наблюдающее устройство оценивает весь вектор переменных состояния  $X(t)$ , хотя часть координат вектора состояния может быть непосредственно измерена. Эту избыточность можно устранить путем синтеза редуцированного наблюдающего устройства, порядок которого меньше, чем порядок заданного динамического объекта.

Пусть измерению доступны первые  $m$  координат вектора состояния  $X(t)$ . Тогда вектор переменных состояния можно представить следующим образом

$$X(t) = \begin{bmatrix} Y(t) \\ W(t) \end{bmatrix},$$

где  $Y(t)$  – вектор размерности  $m$  (измеряемые координаты),  $W(t)$  – вектор размерности  $n - m$  (не измеряемые координаты вектора состояния).

Тогда уравнение выхода для объекта управления можно представить следующим образом

$$Y(t) = C^T X(t), \quad C = \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix},$$

где  $I_m$  – единичная матрица размера  $m \times m$ ,  $0$  – нулевая матрица.

В уравнении

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t).$$

Матрицу  $A$  и вектор  $B$  представим в блочной форме:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

где  $A_{11}$  – матрица размера  $m \times m$ ,  $A_{12}$  – матрица размера  $m \times (n - m)$ ,  $A_{21}$  – матрица размера  $(n - m) \times m$ ,  $A_{22}$  – матрица размера  $(n - m) \times (n - m)$ , вектора  $B_1$  и  $B_2$  имеют размер  $m$  и  $n - m$ .

Тогда уравнение состояния можно переписать следующим образом

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = A_{11}Y(t) + A_{12}W(t) + B_1U(t), \\ \dot{W}(t) = A_{21}Y(t) + A_{22}W(t) + B_2U(t). \end{cases} \quad (4)$$

Этим уравнениям соответствует структурная схема, приведенная на рис. 23.

Идея синтеза редуцированного наблюдающего устройства заключается в следующем. Допустим, что вектор выхода  $Y(t)$ , его производная и входной сигнал  $U(t)$  доступны для измерения. Тогда согласно 1-му уравнению (4) можно вычислить вектор

$$Z(t) = A_{12}W(t) = \dot{Y}(t) - A_{11}Y(t) - B_1U(t).$$

Рассмотрим затем 2-е уравнение (4). Его можно считать моделью объекта с вектором состояния  $W(t)$ :

$$\dot{W}(t) = A_{22}W(t) + (A_{21}Y(t) + B_2U(t)).$$

Слагаемое в скобке будем рассматривать в качестве внешнего воздействия.

Основной теоретической базой для синтеза редуцированного наблюдателя является утверждение: «Если система  $A, C$  обладает свойством наблюдаемости, то свойствами наблюдаемости обладает и подсистема  $A_{22}, A_{12}$ ».

Таким образом, описан динамический объект:

$$\begin{cases} \dot{W}(t) = A_{22}W(t) + (A_{21}Y(t) + B_2U(t)), \\ Z(t) = A_{12}W(t) = \dot{Y}(t) - A_{11}Y(t) - B_1U(t). \end{cases}$$

Первое из этих уравнений описывает динамику объекта, а второе является уравнением выхода (рис. 24).

Для того, чтобы получить математическую модель редуцированного наблюдающего устройства воспользуемся общим уравнением наблюдающего устройства полного порядка, записав его в виде:

$$\dot{\hat{X}}(t) = (A - NC)\hat{X}(t) + NY(t) + BU(t).$$

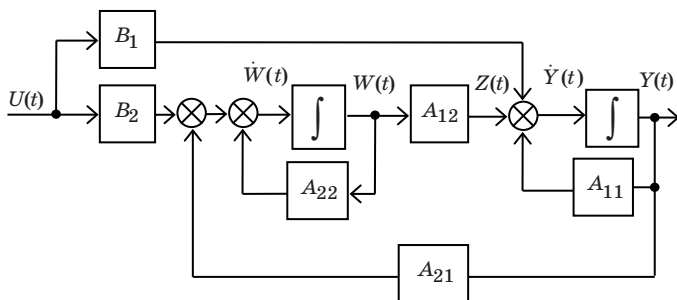


Рис. 23. Система с измеряемым выходом

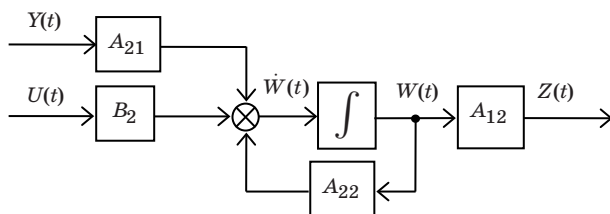


Рис. 24. Структура динамического объекта

Для редуцированного наблюдающего устройства матрице  $A$  будет соответствовать  $A_{22}$ , матрице  $C$  –  $A_{12}$  (см. рис. 18).

Матрице  $N$  будет соответствовать матрица  $L$ , содержащая коэффициенты обратных связей редуцированного наблюдающего устройства. Выходу объекта соответствует  $Z(t)$ . Эти соответствия сведены в табл. 3.

Таким образом, получаем оценку вектора состояния динамического объекта

$$\dot{\hat{W}} = (A_{22} - LA_{12})\hat{W} + L(\dot{Y} - A_{11}Y - B_1U) + (A_{21}Y + B_2U). \quad (5)$$

Структурная схема редуцированного наблюдающего устройства показана на рис. 25.

Для того, чтобы избавиться от операции дифференцирования, перепишем (5) в виде

$$\begin{aligned} \dot{\hat{W}} - L\dot{Y} &= (A_{22} - LA_{12})\hat{W} + (A_{21} - LA_{11})Y + (B_2 - LB_1)U = \\ &= (A_{22} - LA_{12})(\hat{W} - LY) + ((A_{22} - LA_{12})L + A_{21} - LA_{11}) \times \\ &\quad \times Y + (B_2 - LB_1)U. \end{aligned}$$

Таблица 3

Соответствие сигналов

Наблюдатель полного порядка	Редуцированный наблюдатель
$A$	$A_{22}$
$BU$	$A_{21}Y + B_2U$
$Y$	$\dot{Y} - A_{11}Y - B_1U$
$C$	$A_{12}$
$N$	$L$
$X$	$W$

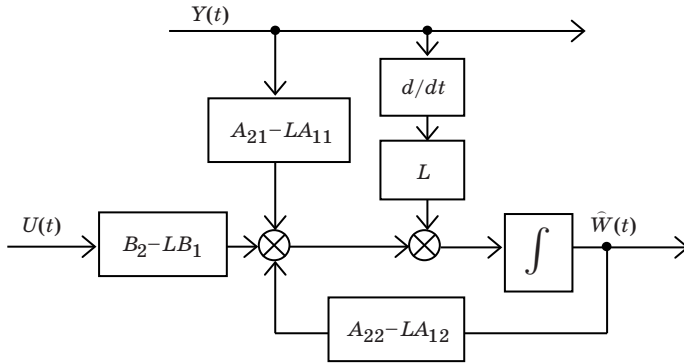


Рис. 25. Структура наблюдателя пониженного порядка

Введем обозначения

$$\eta = W - LY;$$

$$\hat{\eta} = \hat{W} - LY.$$

Тогда из последнего уравнения получаем:

$$\dot{\hat{\eta}} = (A_{22} - LA_{12})\hat{\eta} + ((A_{22} - LA_{12})L + A_{21} - LA_{11})Y + (B_2 - LB_1)U.$$

Введем обозначения

$$\hat{A} = A_{22} - LA_{12};$$

$$\hat{B} = \hat{A}L + A_{21} - LA_{11};$$

$$\hat{F} = B_2 - LB_1.$$

Таким образом, получаем

$$\dot{\hat{\eta}} = \hat{A}\hat{\eta} + \hat{B}Y + \hat{F}U.$$

Это уравнение редуцированного наблюдателя (наблюдателя минимального порядка).

Оценка всего вектора состояния получается следующим образом

$$Y(t) = C^T X(t), \quad C = \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{X}(t) = \begin{bmatrix} Y(t) \\ \hat{W}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-m} \end{bmatrix} \hat{\eta} + \begin{bmatrix} 1 \\ L \end{bmatrix} Y.$$

Или

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-m} \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ L \end{bmatrix}.$$

$$\hat{X}(t) = \hat{C}\hat{\eta} + \hat{D}Y.$$

Получившаяся структура системы с редуцированным наблюдателем показана на рис. 26.

Рассмотрим пример расчета системы модального управления с наблюдателем пониженного порядка.

Пусть динамический объект задан матрицами в канонической форме наблюдаемости

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Требуется построить наблюдающее устройство минимального порядка.

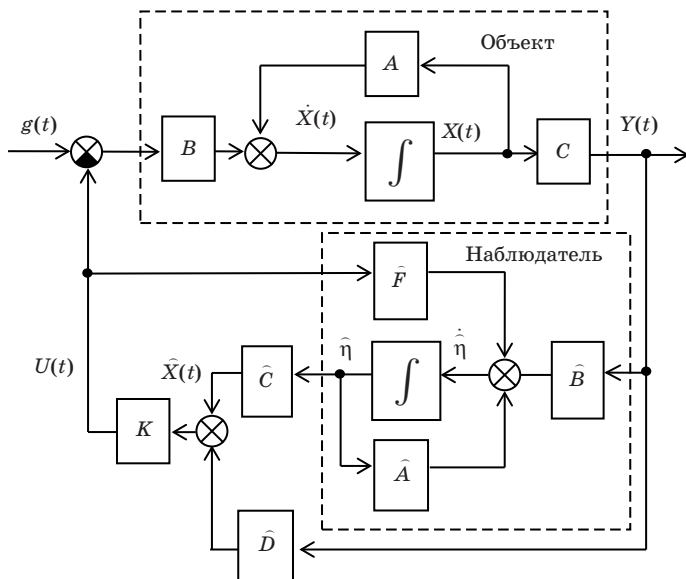


Рис. 26. Система с наблюдателем пониженного порядка

1. Рассчитаем коэффициенты обратной связи, расположив полюса замкнутой системы в точке  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -3$ .

```
>> A = [0 1 0; 0 0 1; -6 -11 -6];
>> B = [0; 0; 1];
>> C = [1 0 0];
>> D = 0;
>> P = [-3 -3 -3];
>> K = acker(A,B,P)
K =
```

```
21 16 3
```

1. Расчет масштабирующего коэффициента

```
>> sys=ss(A-B*K,B,C,0);
>> dcgain(sys)
ans =
0.0370
>> km=1/ans
km =
27
```

3. Рассмотрим матрицы наблюдателя пониженного порядка. Поскольку для этого объекта  $y = x_1$ , порядок наблюдателя будет равен 2.

$$X = \begin{bmatrix} y \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix}; \quad A_{11} = 0; \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \end{bmatrix}; \quad B_1 = 0; \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Пусть полюса наблюдателя должны располагаться в точке:  $\lambda_1 = \lambda_2 = -10$ .

Рассчитаем коэффициенты обратных связей наблюдателя

```
>> A22 = [0 1; -11 -6];
>> A12 = [1 0];
>> P1 = [-10 -10];
>> N1=acker(A22',A12',P1);
>> L=N1'
L =
14
5
```

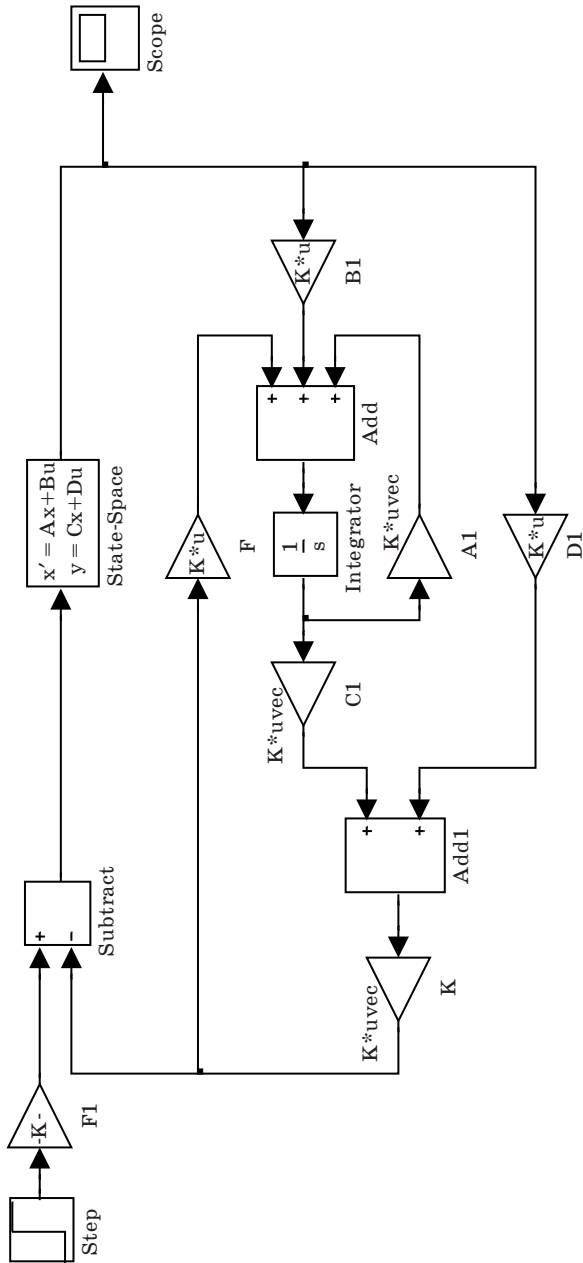


Рис. 27. Система с редуцированным наблюдателем



Далее рассчитаем матрицы наблюдателя.

$$\begin{aligned}\hat{A} &= A_{22} - LA_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 1 \\ -16 & -6 \end{bmatrix}; \\ \hat{B} &= \hat{A}L + A_{21} - LA_{11} = \begin{bmatrix} -14 & 1 \\ -16 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -191 \\ -260 \end{bmatrix}; \\ \hat{F} &= B_2 - LB_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\eta}} &= \hat{A}\hat{\eta} + \hat{B}Y + \hat{F}U = \begin{bmatrix} -14 & 1 \\ -16 & -6 \end{bmatrix} \hat{\eta} + \begin{bmatrix} -191 \\ -260 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U. \\ \hat{C} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \hat{D} = \begin{bmatrix} 1 \\ 14 \\ 5 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

На рис. 27 приведена собранная в Simulink MatLab схема модального регулятора с наблюдателем пониженного порядка.

## 11. МОДАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ

Дискретное представление в пространстве состояний необходимо при компьютерной реализации системы управления.

Дискретизация входного сигнала с шагом  $T$  означает, что входной сигнал изменяется через промежуток времени  $T$ , а внутри этого интервала остается постоянным.

Для получения дискретного описания в пространстве состояний можно использовать преобразование Лапласа.

Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu,$$

где  $a$  и  $b$  – числа,  $x$  и  $u$  – скалярные переменные.

Рассмотрим преобразование этого уравнения по Лапласу:

$$sX(s) - x(0) = aX(s) + bU(s),$$

$$X(s) = \frac{x(0)}{s-a} + \frac{b}{s-a}U(s).$$

Обратное преобразование Лапласа этого уравнения дает

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau.$$

Это формула обобщается для системы произвольного вида

$$X(t) = e^{At}X(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}BU(\tau)d\tau.$$

Рассмотрим движение объекта на интервале квантования  $T$ , используя непрерывное описание:

$$X(kT+T) = e^{At}X(kT) + \int_{kT}^{kT+T} e^{A(kT+T-\tau)}BU(\tau)d\tau.$$

Поскольку на интервале квантования  $T$  управление не изменяется:  $U(t) = U(kT)$ , можно записать:

$$A_d = e^{AT},$$
$$B_d = \left( \int_0^T e^{A(T-\tau)}d\tau \right) B.$$

(При записи последней формулы можно считать  $kT = 0$ ).  
Таким образом,

$$X(k+1) = A_d X(k) + B_d U(k).$$

Выход цифровой системы можно рассчитывать по формуле:

$$Y(k) = CX(k).$$

Дискретная система в пространстве состояний описывается структурой, приведенной на рис. 28:

Рассмотрим пример.

Пусть дана непрерывная ПФ:

$$W(s) = \frac{s+1}{s^3 + 2s^2 + s + 1}.$$

Получим описание в пространстве состояний с помощью команд:

```
>> w=tf([1 1],[1 2 1 1])
```

Transfer function:

$$s + 1$$

-----

$$s^3 + 2s^2 + s + 1$$

```
>> w1=ss(w)
```

a =

	x1	x2	x3
x1	-2	-1	-1
x2	1	0	0
x3	0	1	0

b =

u1
x1 2
x2 0
x3 0

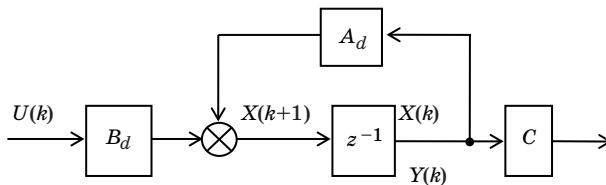


Рис. 28. Дискретная форма уравнений состояния

```
c =
      x1  x2  x3
y1  0 0.5 0.5
```

```
d =
      u1
y1  0
```

Для преобразования описания системы к дискретному виду с шагом дискретизации  $T$  используются команда:

```
>> wd = c2d(w1,T, 'zoh')
```

Здесь 'zoh' – экстраполятор нулевого порядка (по умолчанию).  
Например,

```
>> wd = c2d(w1,0.5,'zoh')
```

```
a =
      x1  x2  x3
x1  0.2906 -0.3915 -0.3015
x2  0.3015  0.8937 -0.09002
x3  0.09002  0.4815  0.9837
```

```
b =
      u1
x1  0.603
x2  0.18
x3  0.03262
```

```
c =
      x1  x2  x3
y1  0 0.5 0.5
```

```
d =
      u1
y1  0
```

Sampling time: 0.5

Discrete-time model.

На рис. 29 показано сравнение выходных сигналов непрерывной и дискретной системы.

Методика синтеза цифровых модальных регуляторов принципиально не отличается от методики синтеза непрерывных модальных регуляторов. При этом следует учитывать соотношение между  $\lambda$  – полюсами непрерывной системы и  $\lambda_d$  – полюсами дискретной системы:

$$\lambda_d = e^{\lambda T}.$$

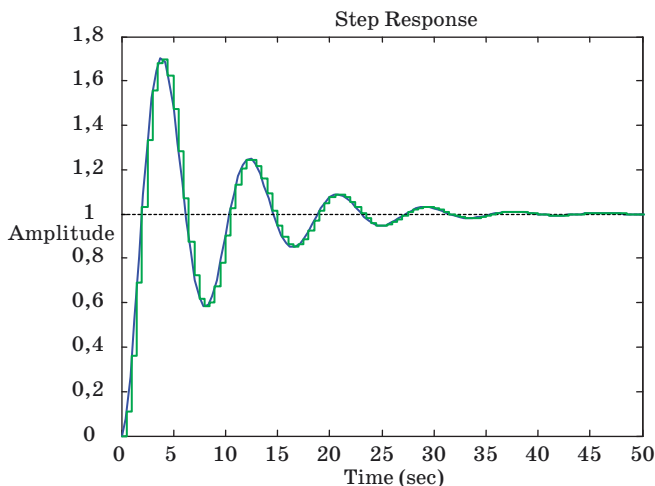


Рис. 29. Сравнение выходов непрерывной и дискретной системы

Например, если значение полюса непрерывной системы  $\lambda = -2$ , а шаг квантования по времени  $T = 0.5$ , то

$$\lambda_d = e^{\lambda T} = 0,3679.$$

Выберем расположение всех полюсов дискретной системы в этой точке:

```
>> Pd=[0.3679 0.3679 0.3679];
>> Kd=acker(wd.a,wd.b,Pd);
```

Дискретная система создается командой вида

```
>> SYS = DSS(A,B,C,D,E,Ts)
```

где  $E$  – квадратная матрица, которая задает числовые коэффициенты при производных. По умолчанию  $E = [ ]$  (пустая матрица).

```
>> sys=dss(wd.A-wd.B*Kd,wd.B,wd.C,0,[],0.5);
>> step(sys)
```

Получившийся график переходного процесса приведен на рис. 30.

На рис. 31 показана структура дискретного модального регулятора.

При описании матриц в свойство *Sample time* следует записать шаг дискретизации.

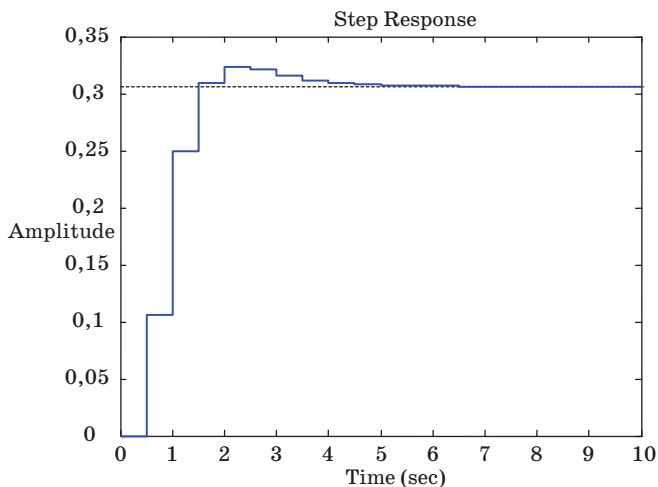


Рис. 30. Переходный процесс  
в замкнутой дискретной системе

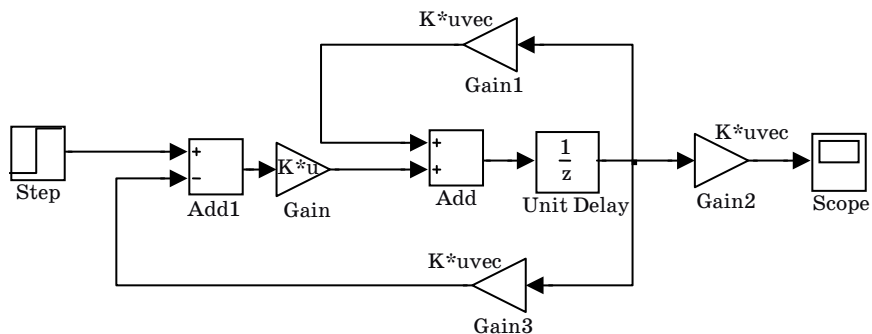


Рис. 31. Блок-схема цифрового модального регулятора  
в MatLab Simulink

При моделировании дискретного модального регулятора с наблюдающим устройством для описания объекта нужно использовать блок *Discrete State-Space*.

## 12. ЗАДАНИЕ НА КУРСОВУЮ РАБОТУ

Цель курсовой работы заключается в освоении методики проектирования модальных регуляторов с наблюдающими устройствами для одномерных динамических объектов, заданных передаточной функцией 3-го порядка.

Выполнение курсовой работы происходит в несколько этапов:

1. Преобразовать модель системы в виде передаточной функции (внешняя модель системы) в модель в пространстве состояний с помощью команд *MatLab*. Проверить эквивалентность обоих представлений, рассмотрев реакцию моделей на единичное ступенчатое воздействие. На основании анализа переходного процесса сформулировать требования к качеству работы замкнутой системы.

2. Используя модель в пространстве состояний, исследовать системные свойства управляемости и наблюдаемости средствами *MatLab*.

3. Синтезировать два варианта модального регулятора, задавая расположение полюсов замкнутой системы с помощью полиномов Ньютона и Баттерворта. Построить в *MatLab Simulink* модель системы с модальным регулятором. Рассчитать масштабирующий коэффициент регулятора.

4. Синтезировать модальный регулятор с расширенным вектором состояния для отработки постоянного входного воздействия и синусоидального сигнала. Проверить результаты моделированием.

4. Рассчитать наблюдающее устройство полного порядка и построить в *MatLab Simulink* модель системы с регулятором и наблюдателем. Проверить работу системы при различных начальных состояниях и шумах измерений на выходе объекта.

5. Рассчитать наблюдающее устройство редуцированного порядка и построить в *MatLab Simulink* модель системы с регулятором и наблюдателем. Проверить работу системы при различных начальных состояниях и шумах.

6. Синтезировать дискретный вариант модального регулятора с наблюдающим устройством. Проверить работу системы в *MatLab Simulink*.

## 13. ОФОРМЛЕНИЕ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Пояснительная записка должна содержать подробное описание результатов всех этапов курсовой работы, включая расчетные формулы, использованные команды *MatLab*, блок-схемы, собранные в *MatLab Simulink*, а также полученные графики переходных процессов.

## 14. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

№	Передаточная функция	№	Передаточная функция
1	$W(s) = \frac{0,1s+1}{s^3+0,01s^2+0,01s+1}$	16	$W(s) = \frac{s+1}{s^3+0,05s^2+0,01s+1}$
2	$W(s) = \frac{s+1}{s^3+0,01s^2+0,03s+1}$	17	$W(s) = \frac{s+1}{s^3+0,7s^2+0,1s+1}$
3	$W(s) = \frac{2s+1}{s^3+0,8s^2+0,5s+1}$	18	$W(s) = \frac{0,4s+1}{s^3+0,07s^2+0,08s+1}$
4	$W(s) = \frac{0,5s+1}{s^3+0,5s^2+0,05s+1}$	19	$W(s) = \frac{0,5s+1}{s^3+0,03s^2+0,04s+1}$
5	$W(s) = \frac{4s+1}{s^3+7s^2+0,3s+1}$	20	$W(s) = \frac{0,2s+1}{s^3+0,2s^2+0,04s+1}$
6	$W(s) = \frac{0,7}{s^3+0,7s^2+0,02s+1}$	21	$W(s) = \frac{0,3s+1}{s^3+2s^2+0,4s+1}$
7	$W(s) = \frac{3s+1}{s^3+4s^2+2s+1}$	22	$W(s) = \frac{5s+1}{s^3+0,05s^2+0,01s+1}$
8	$W(s) = \frac{5s+1}{s^3+0,5s^2+0,1s+1}$	23	$W(s) = \frac{5s+1}{s^3+0,5s^2+1s+1}$
9	$W(s) = \frac{5s+1}{s^3+0,5s^2+0,3s+1}$	24	$W(s) = \frac{3}{s^3+1,5s^2+0,2s+1}$
10	$W(s) = \frac{4s+1}{s^3+2,5s^2+s+1}$	25	$W(s) = \frac{0,1}{s^3+2s^2+0,5s+1}$
11	$W(s) = \frac{0,5s+1}{s^3+3s^2+0,3s+1}$	26	$W(s) = \frac{s^2+4s+1}{s^3+2,5s^2+s+1}$
12	$W(s) = \frac{0,5}{s^3+0,3s^2+0,03s+1}$	27	$W(s) = \frac{0,01s+1}{s^3+0,07s^2+0,02s+1}$
13	$W(s) = \frac{0,8s+1}{s^3+0,8s^2+0,08s+1}$	28	$W(s) = \frac{0,8}{s^3+0,2s^2+0,04s+1}$
14	$W(s) = \frac{3s+1}{s^3+5s^2+0,3s+1}$	29	$W(s) = \frac{0,8s+1}{s^3+2s^2+0,4s+1}$
15	$W(s) = \frac{5s+1}{s^3+5s^2+1s+1}$	30	$W(s) = \frac{0,1s+1}{s^3+0,02s^2+0,01s+1}$



## ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. В чем заключаются достоинства метода анализа и синтеза систем в пространстве состояний?
2. Что такое состояние системы?
3. Что описывают матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  при моделировании в пространстве состояний?
4. Как связаны размер вектора состояния и порядок системы?
5. Какая система называется скалярной?
6. Что такое нули и полюсы передаточной функции?
7. Чем определяются динамические свойства линейной системы?
8. Могут ли одной передаточной функции соответствовать разные модели в пространстве состояний?
9. В каком случае переход от передаточной функции к уравнениям состояния является однозначным?
10. Какая система называется полностью управляемой?
11. Как формулируется критерий управляемости для системы с одним входом и одним выходом?
12. Какая система является наблюдаемой?
13. Как формулируется критерий наблюдаемости для системы с одним входом и одним выходом?
14. Что такое мода и как она влияет на динамику системы?
15. При каких полюсах системы обеспечивается затухание переходного процесса?
16. При каких полюсах системы обеспечивается затухание колебаний в переходном процессе?
17. Как формулируется общее условие устойчивости линейной системы?
18. Какой формулой описывается сигнал управления модального регулятора?
19. Как формулируется основная теорема модального управления?
20. Что такое желаемый спектр замкнутой системы?
21. Какие способы можно использовать для выбора желаемого расположения полюсов замкнутой системы?
22. Что такое степень устойчивости системы?
23. Какие полюса системы называются доминирующими?
24. Что такое колебательность системы?
25. Какие свойства переходного процесса обеспечиваются при использовании стандартных полиномов Ньютона?
26. Какие свойства переходного процесса обеспечиваются при использовании стандартных полиномов Баттерворта?

27. По какой формуле рассчитываются коэффициенты обратных связей модального регулятора?

28. Зачем требуется использовать масштабирующий коэффициент в системе с модальным регулятором?

29. С какой целью может быть расширен вектор состояния системы при синтезе модального регулятора?

30. Зачем требуется использовать наблюдающие устройства при модальном управлении?

31. Какое наблюдающее устройство называется асимптотическим?

32. Какой сигнал обратной связи использует асимптотическое наблюдающее устройство?

33. Какие соображения учитываются при выборе полюсов асимптотического наблюдающего устройства?

34. Зачем надо использовать наблюдающие устройства пониженного порядка?

35. Когда требуется рассматривать дискретное представление системы в пространстве состояний?

36. От чего зависят конкретные значения матриц  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  дискретной системы?

37. Как связаны между собой полюса непрерывной и дискретной системы в пространстве состояний?

38. Какое условие накладывается на положение полюсов дискретной системы в пространстве состояний с точки зрения устойчивости?

39. Чем отличается методика синтеза цифровых модальных регуляторов от методики синтеза непрерывных модальных регуляторов?

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Заде Л., Дезоер Ч.* Теория линейных систем. Метод пространства состояний. М.: Наука, 1970. 704 с.
2. *Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч.* Пространство состояний в теории управления. М.: Наука, 1970. 620 с.
3. *Андреев Ю. Н.* Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976. 424 с.
4. *Кузовков Н. Т.* Модальное управление и наблюдающие устройства. М.: Машиностроение, 1976. 183 с.
5. *Мейер А., Сю Д.* Современная теория автоматического управления и ее применение. М.: Машиностроение, 1972. 544 с.
6. *Бураков М. В.* Теория автоматического управления: учеб. пособие. Ч. 1. СПб.: ГУАП, 2014. 255 с.
7. *Дорф Р., Бишоп Р.* Современные системы управления. М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. 832 с.
8. *Филипс Ч., Харбор Р.* Системы управления с обратной связью. М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. 616 с.
9. *Гудвин Г. К., Гребе С. Ф., Сальгадо М. Э.* Проектирование систем управления. М.: Бином, 2004. 911 с.
10. *Ким Д. П.* Теория автоматического управления: учебник. Т. 1. Линейные системы. М.: Физматлит, 2007. 312 с.
11. *Андриевский Б. Р., Фрадков А. Л.* Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB. СПб.: Наука, 1999. 467 с.
12. *Медведев В. С., Потемкин В. Г.* Control system toolbox. MatLab 5 для студентов. М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1999. 287 с.
13. *Бураков М. В., Полякова Т. Г., Подзорова А. В.* Лабораторные работы по ТАУ № 1–9. СПб.: ГУАП, 2006. 64 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
1. Описание системы в пространстве состояний .....	4
2. Переход от передаточной функции к уравнениям состояния .....	6
3. Анализ системных свойств объекта управления .....	9
4. Модальное управление .....	11
5. Выбор положения полюсов замкнутой системы.....	14
6. Расчет коэффициентов обратных связей .....	19
7. Использование Simulink MatLab .....	22
8. Системы с расширенным вектором состояния .....	25
9. Наблюдающее устройство полного порядка .....	30
10. Наблюдающее устройство пониженного порядка .....	34
11. Модальный синтез дискретной системы .....	42
12. Задание на курсовую работу .....	47
13. Оформление курсовой работы .....	47
14. Варианты заданий.....	48
Вопросы для самопроверки.....	49
Список литературы .....	51