1 Базовое задание

Пусть ω — строка, $n \in \mathbb{N}$. n-ой степенью слова ω назовём $\omega^n = \underbrace{\omega \dots \omega}_{n \text{ раз}}$.

По определению, $\omega^0 = \varepsilon$ (пустое слово).

Дан двухбуквенный алфавит $\Sigma = \{a, b\}$. Доказать, что если два произвольных слова в нём ω_1, ω_2 удовлетворяют соотношению $\omega_1\omega_2 = \omega_2\omega_1$, тогда существует слово v и степени k_1, k_2 такие, что $\omega_1 = v^{k_1}$, $\omega_2 = v^{k_2}$.

Подсказка: можно использовать формально обоснованное преобразование Нильсена. Если дано уравнение $X\Phi = Y\Psi$ в словах (в свободной полугруппе), тогда либо X начинается с Y, либо Y начинается с X. Тогда, следуя подходящей ветке, можно заменить X на YX' или же Y на XY', сократить общие префиксы и перейти к уравнению, в котором слова уже короче.

Чтобы делать индукцию по этому преобразованию, переходя от слов к их суффиксам, важно убедиться, что суффиксы собственные, поэтому случай пустого слова необходимо разобрать отдельно (а также имеет смысл хранить длину слов, которая обязательно будет убывать при отщеплении непустых слов из префиксов). В качестве индукции удобно использовать метод бесконечного спуска: если каждый шаг алгоритма влечёт убывание параметра относительно фундированного порядка, то алгоритм не может бесконечно выполняться.

2 Продвинутое задание

Доказать теорему Файна-Вилфа: Если слово длины как минимум $p + q - gcd(p, q)$ может быть представлено степень слова длины p и степень слова длины q, то оно может быть представлено как степень слова длины $gcd(p, q)$. Достаточно доказать для случая, когда p и q взаимно просты, и тем самым, что слово есть степень единственной буквы.

3 Материалы

Доказательство без использования длины и базовая теория строк приведены в статье: ссылка