Коммутирующие слова над алфавитом $\{A, B\}$ являются степенями общего слова

Алфавит $\Sigma = \{A, B\}$. *Словом* называется конечная последовательность символов из Σ. Конкатенация слов u, v обозначается uv, пустое слово — ε, длина слова w — $|w|$.

Определение 1 (Степень слова)**.** Для слова w и числа $k \in \mathbb{N}$ положим

$$w^0 = \varepsilon, \qquad w^{k+1} = w\,w^k.$$

Лемма 2 (Аддитивность показателя)**.** *Для любых $m, n \in \mathbb{N}$ и любого слова w верно*

$$w^{m+n} = w^m\,w^n.$$

Доказательство. Индукция по m.

- База $m = 0$: $w^{0+n} = w^n = \varepsilon\,w^n = w^0 w^n$.
- Переход $m \mapsto m + 1$:

$$w^{(m+1)+n} = w^{m+1+n} = w\,w^{m+n} \overset{\text{ИП}}{=} w\,(w^m w^n) = (w\,w^m)\,w^n = w^{m+1} w^n.$$

□

Лемма 3 (Равноразложимость конкатенации)**.** *Для любых слов l_1, l_2, l_3, l_4 из Σ^* из равенства*

$$l_1 l_2 = l_3 l_4$$

следует, что существует слово s такое, что либо

$$l_1 = l_3 s \text{ и } l_4 = s l_2, \qquad \text{либо} \qquad l_3 = l_1 s \text{ и } l_2 = s l_4.$$

Доказательство. Индукция по длине $|l_3|$.

- База $|l_3| = 0$: тогда $l_3 = \varepsilon$ и из $l_1 l_2 = \varepsilon l_4$ следует $l_1 l_2 = l_4$. Берём $s = l_1$ и получаем $l_3 = \varepsilon$ и $l_4 = l_1 l_2 = s l_2$, то есть выполняется вторая альтернатива с $l_3 = l_1 s$ тривиально (так как $\varepsilon = \varepsilon\, s$).
- Переход. Пусть $l_3 = au$, где $a \in \Sigma$, $u \in \Sigma^*$. Рассмотрим два случая по l_1.
  - Если $l_1 = \varepsilon$, то из $l_1 l_2 = l_3 l_4$ имеем $l_2 = (au) l_4$. Берём $s = au$. Тогда $l_1 = \varepsilon$ и $l_2 = s l_4$, то есть выполняется вторая альтернатива с $l_3 = l_1 s$ (так как $l_3 = \varepsilon \cdot s = s$).

– Если $l_1 = bv$ с $b \in \Sigma$, $v \in \Sigma^*$, то из

$$l_1 l_2 = b(vl_2) = l_3 l_4 = a(ul_4)$$

равенство первых символов даёт $a = b$, а равенство хвостов даёт $vl_2 = ul_4$. По индукционной гипотезе для u и равенства $vl_2 = ul_4$ существует s такое, что либо (А) $v = us$ и $l_4 = sl_2$, либо (Б) $u = vs$ и $l_2 = sl_4$.

  * (А) Тогда $l_1 = bv = b(us) = (bu)s = l_3 s$, а $l_4 = sl_2$, то есть первая альтернатива.
  * (Б) Тогда $l_3 = au = a(vs) = (av)s = l_1 s$, а $l_2 = sl_4$, то есть вторая альтернатива.

□

Теорема 4 (Коммутирующие слова — степени общего корня)**.** *Пусть $x, y \in \Sigma^*$ таковы, что $xy = yx$. Тогда существуют слово $\omega \in \Sigma^*$ и числа $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, для которых $x = \omega^{k_1}$ и $y = \omega^{k_2}$.*

Доказательство. Доказательство по индукции по сумме длин $n = |x|+|y|$ (индукция по хорошо-основанной мере).

База. Если $x = \varepsilon$, берём $\omega = y$, $k_1 = 0$, $k_2 = 1$. Если $y = \varepsilon$, берём $\omega = x$, $k_1 = 1$, $k_2 = 0$. В обоих случаях утверждение тривиально.

Переход. Пусть $x \neq \varepsilon$ и $y \neq \varepsilon$, и выполнено $xy = yx$. Применим лемму 3 к равенству $xy = yx$: существует слово t такое, что либо

$$\text{(I)} \quad x = yt \text{ и } y = ty, \qquad \text{либо} \qquad \text{(II)} \quad y = xt \text{ и } x = tx.$$

Рассмотрим случай (I); случай (II) симметричен.

Из $x = yt$ и $y = ty$ следует, что t и y коммутируют:

$$ty = yt.$$

Причём сумма длин новой пары (t, y) строго меньше исходной:

$$|t| + |y| = |x| < |x| + |y| = n,$$

так как $x = yt$ и $y \neq \varepsilon$. По индукционному предположению существуют слово ω и числа $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, такие что

$$t = \omega^{k_1}, \qquad y = \omega^{k_2}.$$

Тогда

$$x = yt = \omega^{k_2}\,\omega^{k_1} = \omega^{k_2+k_1}$$

по лемме 2. Следовательно, x и y являются степенями одного и того же слова ω.

В симметричном случае (II) из $y = xt$ и $x = tx$ получаем коммутативность t и x, применяем индукционное предположение к паре (t, x) и получаем $x = \omega^{k_2}$ и $y = \omega^{k_2+k_1}$ для некоторого ω и $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. $\square$