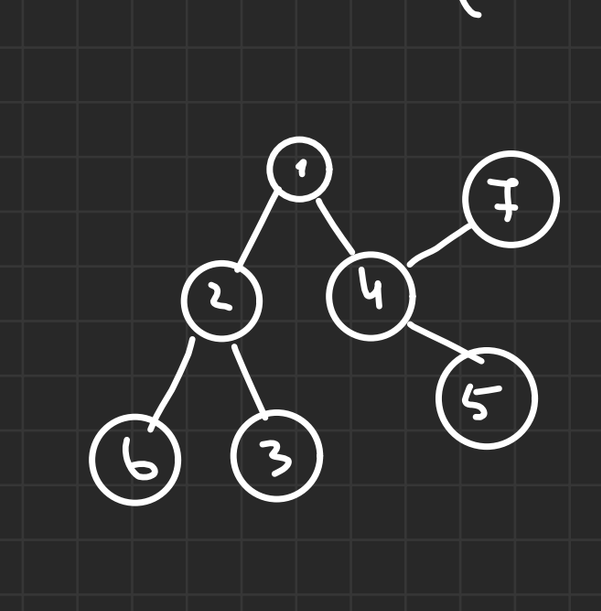
LCA. Наименьший общий предок. Sparse Table. Сведение к RMQ

1 Задача LCA (least common ancestor)

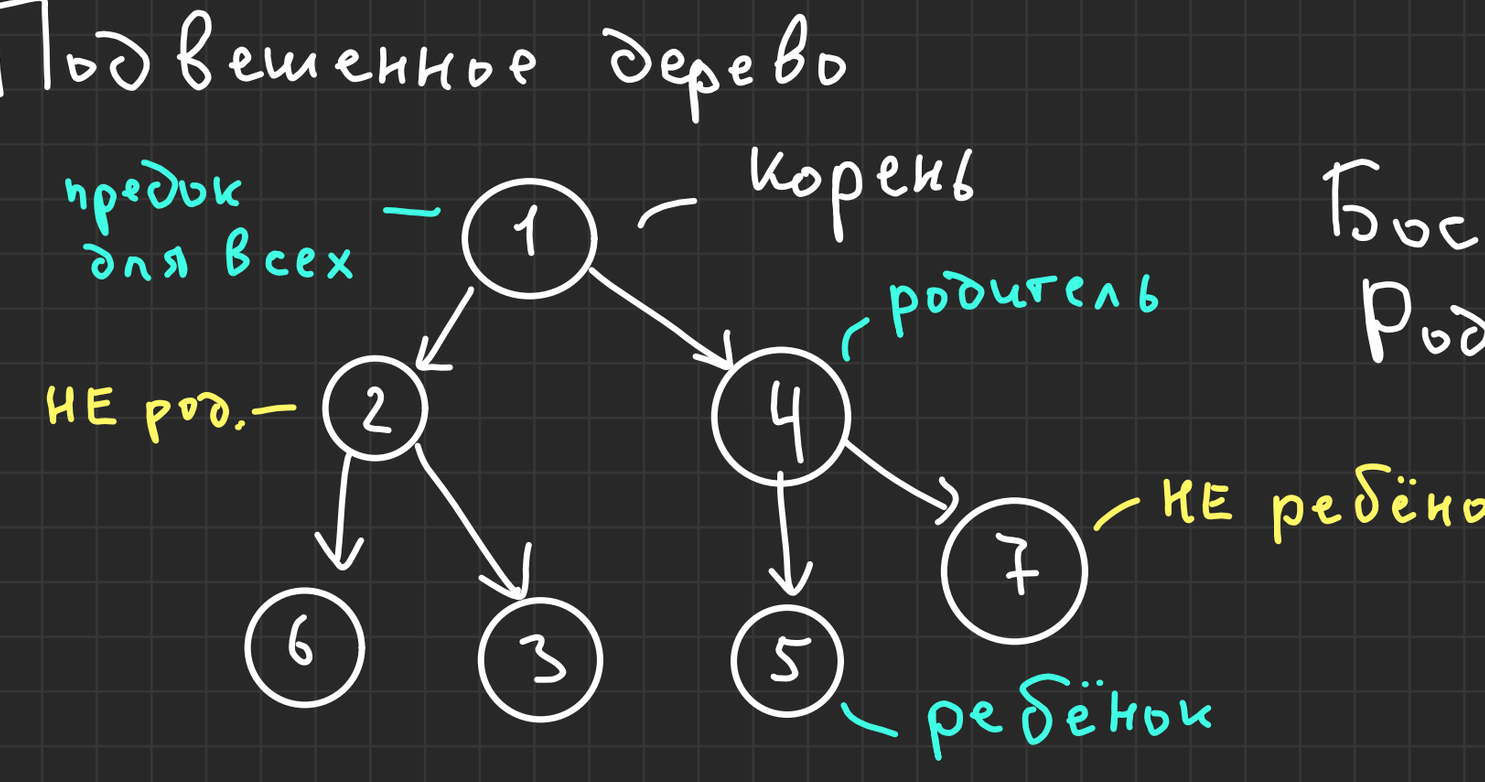
Дерево:



связный неор. граф с кол-вом рёбер = кол-во вершин - 1

между любыми 2 верш. есть ровно 1 путь.

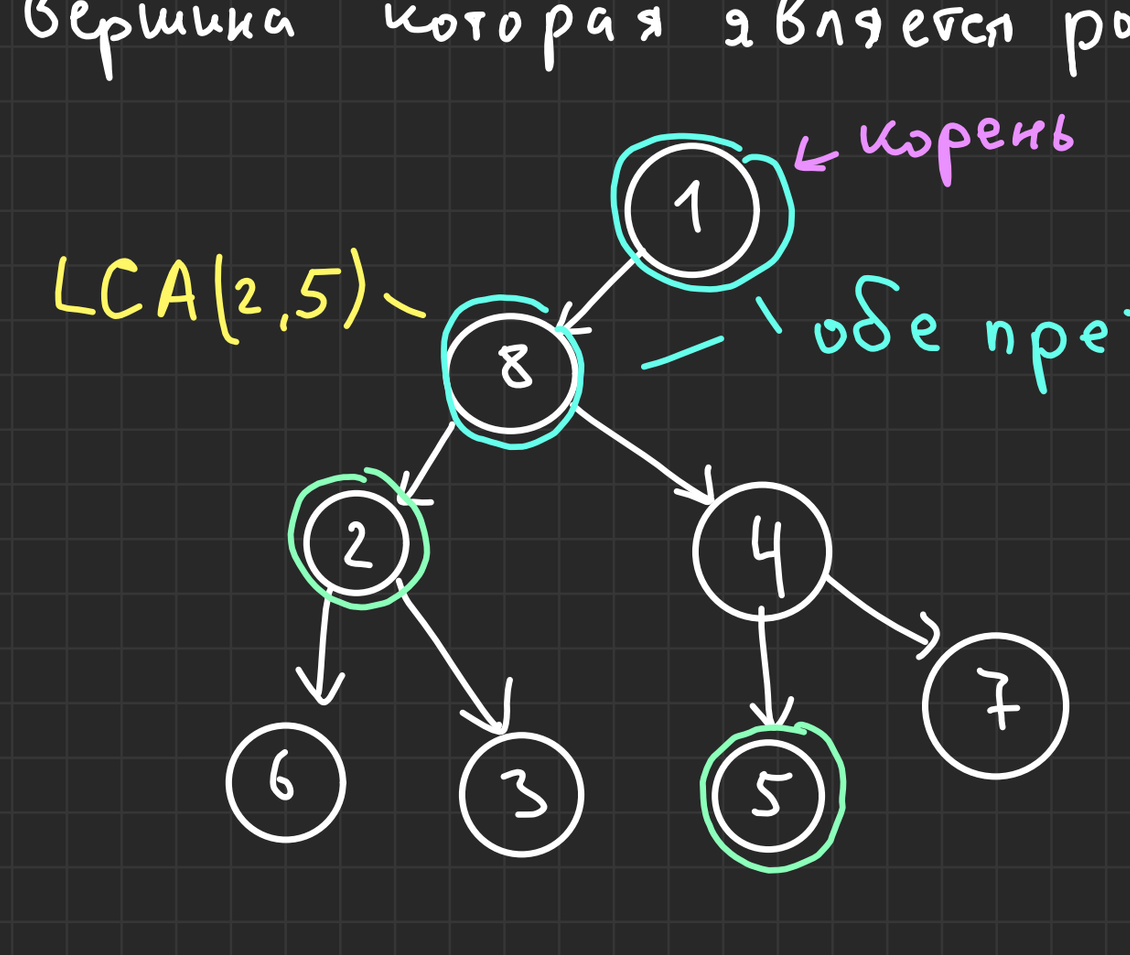
Подвешенное дерево



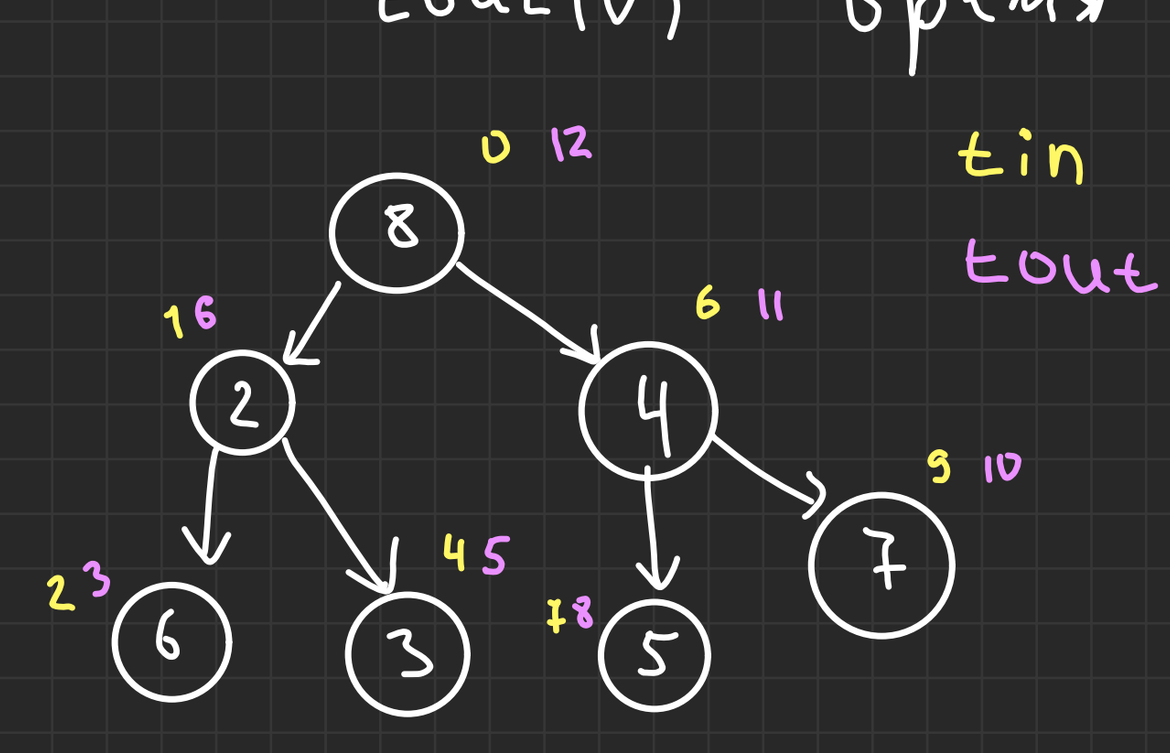
Босс-подчинённые
Родитель - ребёнок

Опр. Вершина A предок вершины B, если из вершины B есть путь (по ор. рёбрам) в A. Или же A в поддерева B.

Опр. LCA вершин A и B это ближайшая к ним вершина которая является родителем A и B.



Опр. tin(v) - время входа в вершину v во время dfs
tout(v) - время выхода (последнего) из вершины v.



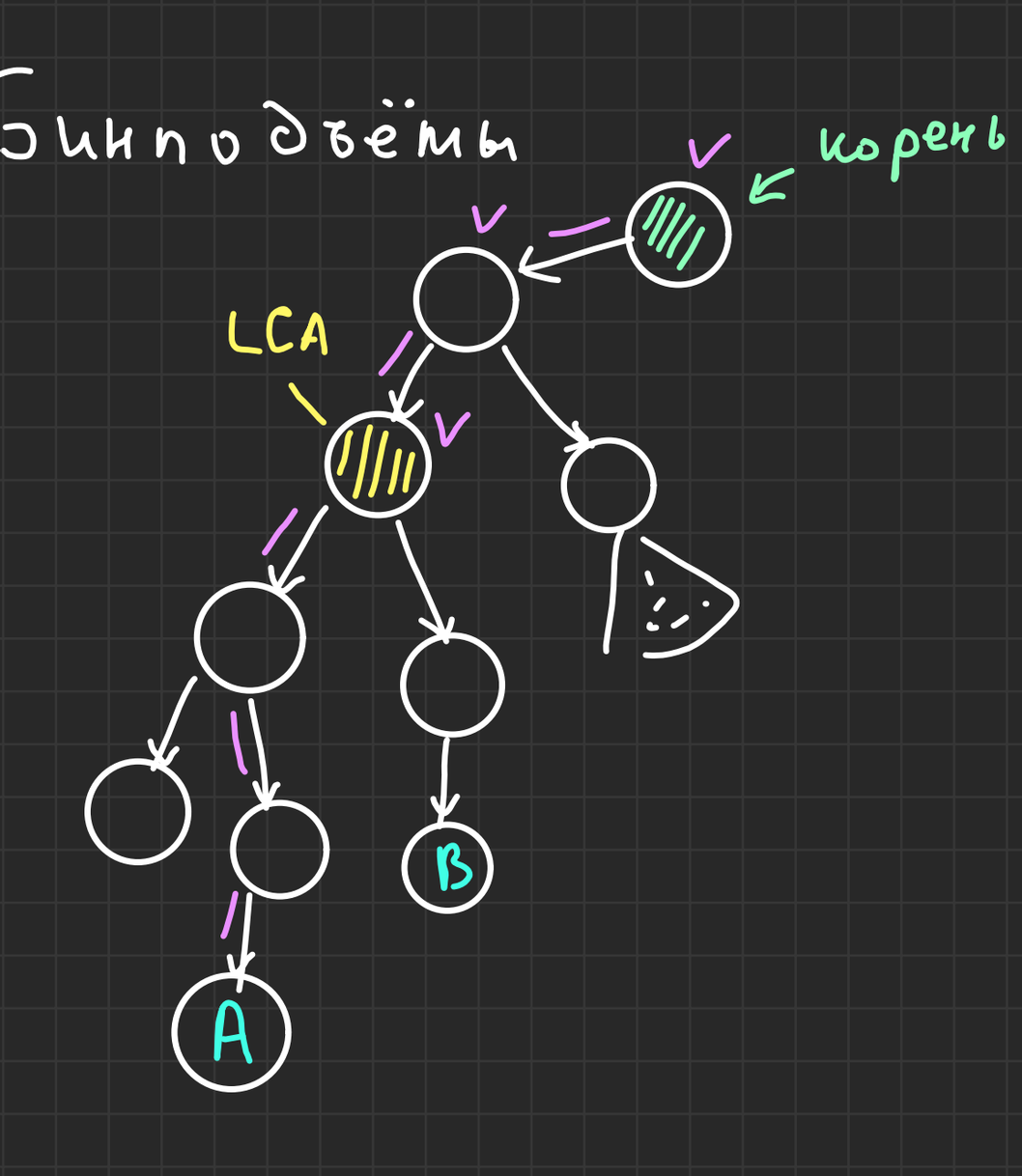

```
timer=0
void dfs(v, p)
    tin[v] = timer++;
    for u in g[v]:
        if(u≠p):
            dfs(u,v)
    tout[v] = timer++;
```

Как определить, что одна вершина предок другой?

Между tin[v] и tout[v] находятся только вершины из поддерева v.

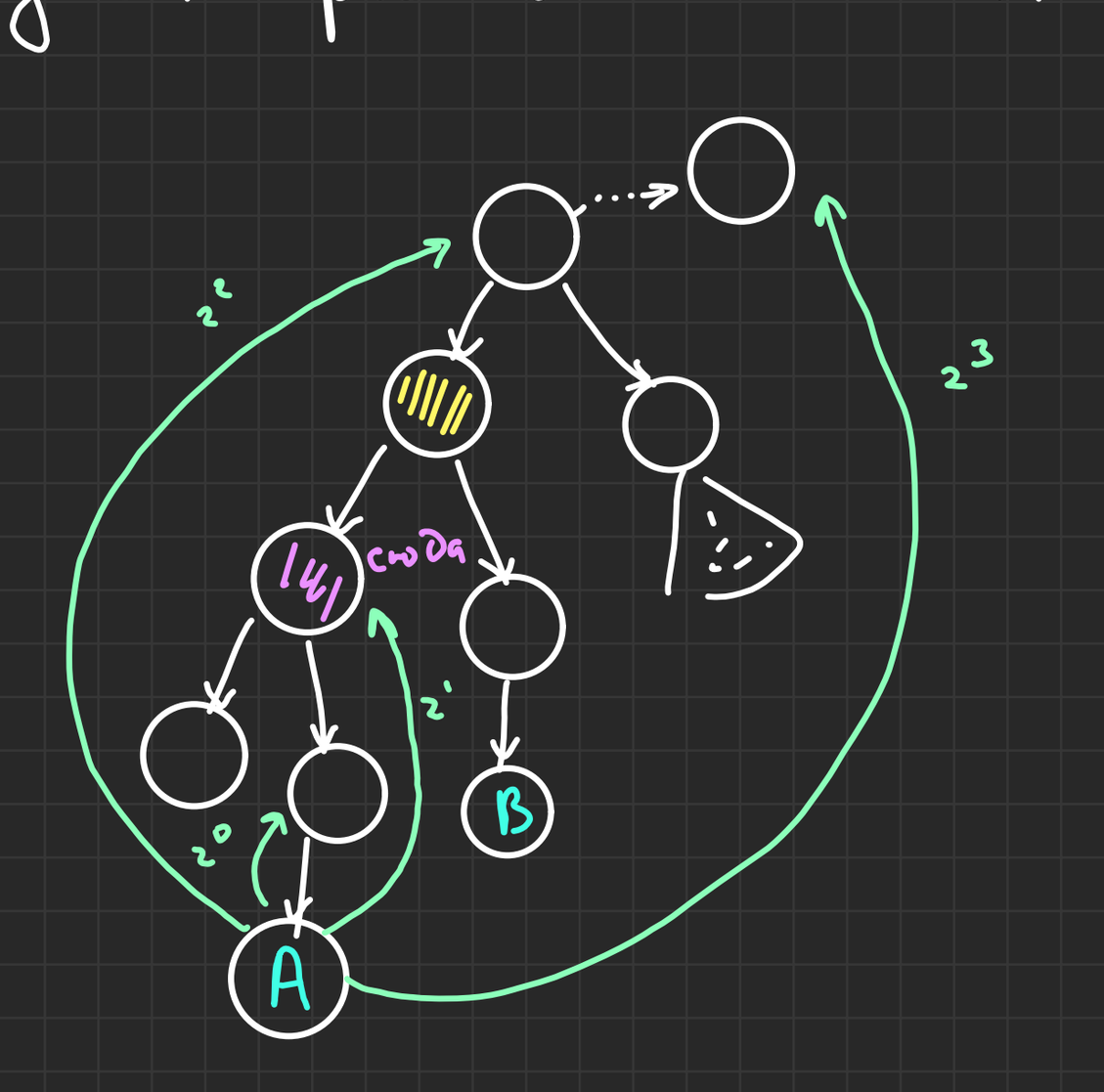
```
bool pred(a, b): (a предок b?)
    return tin[a] ≤ tin[b] && tout[a] ≥ tout[b]
```

2 Бинподъёмы



Если C предок A и B то pred(C) тоже предок A и B

Будем прыгать на степени двойки:



Для каждой вершины храним предка на расстоянии 2^k

Каждый раз прыгаем на макс. расстояние так что бы быть всегда НЕ предком вершины B

В конце окажемся в вершине, которая НЕ предок B, но уже следующая вершина предок B.

Давайте заметим, что если мы

$v \xrightarrow{2^k} v' \Rightarrow v \xrightarrow{2^{k+1}}$ ведёт не туда =>
$v' \xrightarrow{2^k}$ ведёт не туда
$(2^k + 2^k = 2^{k+1})$

$v \xrightarrow{2^k} v' \xrightarrow{2^k} a$ (2^{k+1})

```
int lca(a, b):
    if pred(a, b):
        return a
    for i = logN-1; i≥0; --i:
        if(!pred(up[a][i], b)):   // предок a на расстоянии 2^i
            a = up[a][i]
    return up[a][0]
```

Как насчитать up?

$up[v][k] = up[up[v][k-1]][k-1]$ (где $up[v][k-1]$ = v')

$v \xrightarrow{2^{k-1}} v' \xrightarrow{2^{k-1}} a$ (2^k)


```
void dfs(v, p)
    up[v][0] = p
    for i = 1...logN:
        up[v][i] = up[up[v][i-1]][i-1]
    for u in g[v]:
        if (u ≠ p):
            dfs(u, v)

dfs(root, root)
```

Асимптотика:

Память: $O(N \log N)$
Время на построение: $O(N \log N)$
Время на запрос: $O(\log N)$

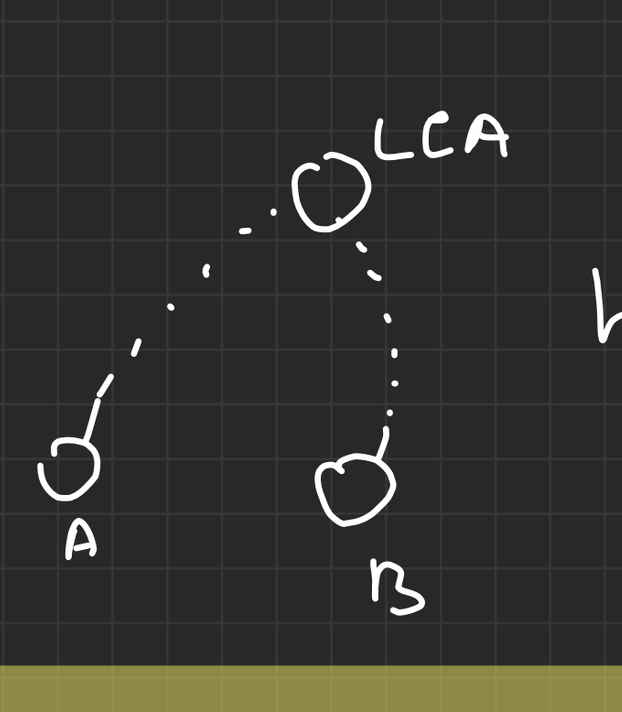
3 Запросы на пути (статичные)

- Минимум / максимум на пути между A и B
- Сумму на пути ...
- GCD, хеш, xor, ...

up[v][k] = v'
val[v][k]

up[v][k] = up[up[v][k-1]][k-1]
val[v][k] = val[v][k-1] + val[up[v][k-1]][k-1]

(v → s → v': val_1, val_2)

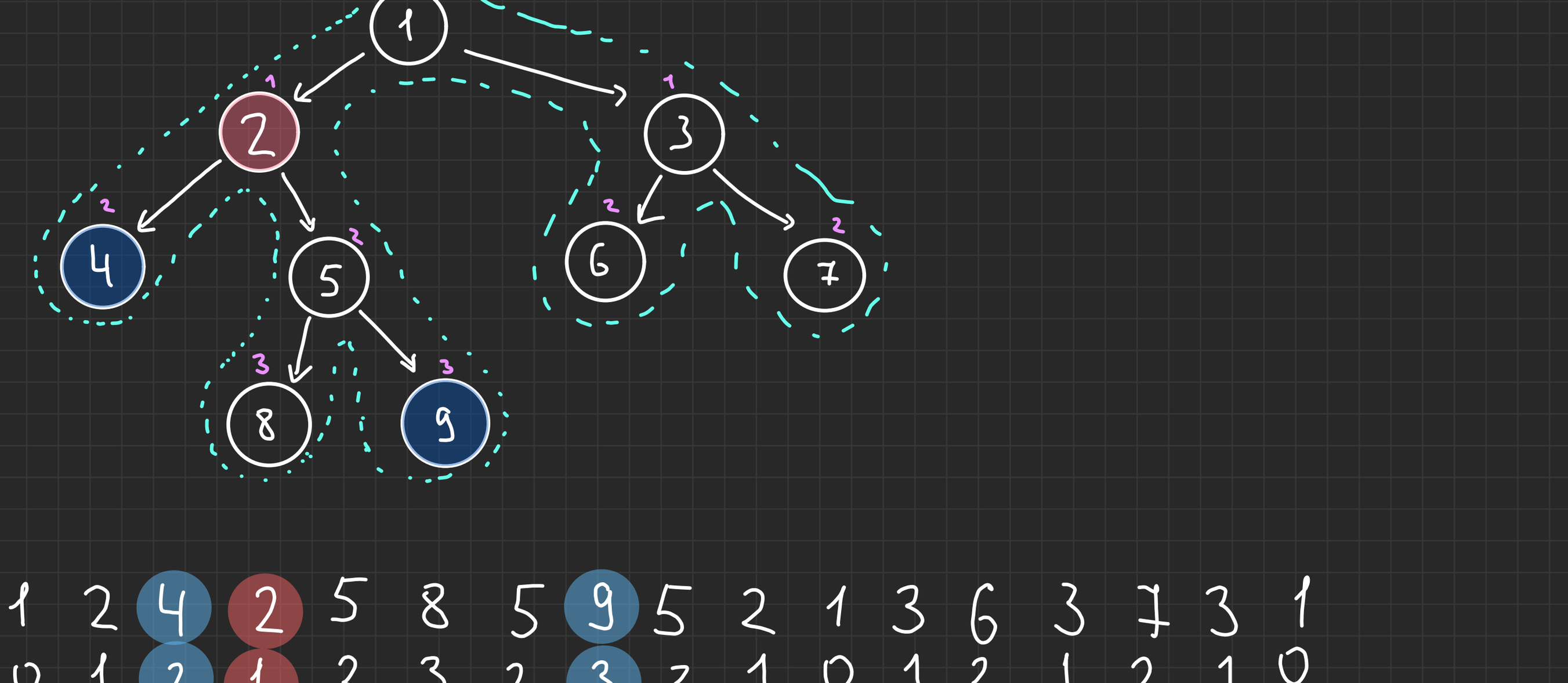


Нужно сделать два запуска

Код для минимума:

```
int lca_min(a, b)
    if pred(a, b):
        return INF
    res = INF
    for i = logN-1; i≥0; --i:
        if !pred(up[a][i], b):
            res = min(res, val[a][i])
            a = up[a][i]
    return min(res, val[a][0])
```

4 Сведение LCA к RMQ



1 2 4 2 5 8 5 9 5 2 1 3 6 3 7 3 1
0 1 2 1 2 3 2 3 2 1 0 1 2 1 2 1 0

Между двумя вершинами ровно 1 путь
Это путь по всему дереву

LCA между A и B это min на [tin(A); tin(B)]
если tin(A) ≤ tin(B)

```
order = vec{};

void dfs(v, p, d)
    tin[v] = order.size()
    order.push(v)
    for u in g[v]:
        if (u ≠ p):
            dfs(u, v, d+1)

int lca(a, b)
    l = tin[a]
    r = tin[b]
    if l > r:
        swap(l, r)
    индекс минимума на [l; r]
```

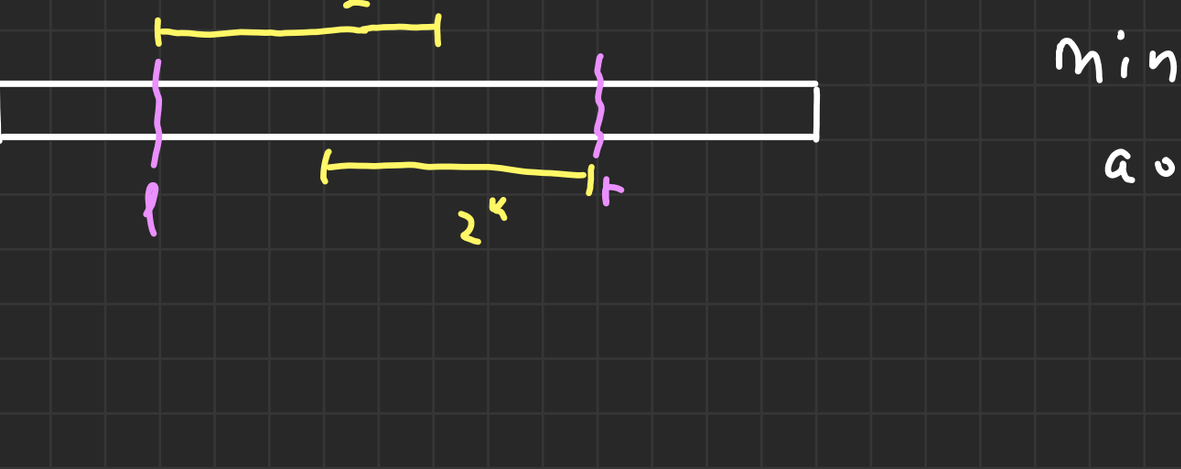
Корнячка:

Память: $O(N)$
Время на построение: $O(N)$
Время на запрос: $O(\sqrt{N})$

Дерево отрезков:

Память: $O(N)$
Время на построение: $O(N)$
Время на запрос: $O(\log N)$

5 Sparse Table (Разреженная Таблица)



min/max
a ∘ a = a

$2^k < r - l + 1$
$2^{k+1} > r - l + 1$
$\Rightarrow k = \log(r - l + 1)$

$\min[l, r] = \min(\min[l; l + 2^k], \min[r - 2^k; r])$

$T[pos][k] = \min[pos][pos + 2^k]$

```
void create(a)
    lg[1] = 0
    for (i=2; i<N; ++i) lg[i] = lg[i/2] + 1
    for (i=0; i<N; ++i) T[i][0] = a[i]
    for (j = 1; j < logN; ++j)
        for (i = 0; i + 2^j < N; ++i)
            T[i][j] = min(T[i][j-1], T[i + 2^(j-1)][j-1])
```

(T[i][j-1], T[i+2^(j-1)][j-1], i, 2^{j-1}, 2^{j-1}, 2^j)

```
int get_min(l, r)   [l; r]
    j = lg[r - l + 1]
    return min(T[l][j], T[r - 2^j][j])
```

([l; l + 2^j]   [r - 2^j; r])

Асимптотика:

Память: $O(N \log N)$
Время на построение: $O(N \log N)$
Время на запрос: $O(1)$