

# Oscilador Armónico. Auto-convergencia

Ulises Maximino Garibay Valladolid

Facultad de ciencias Físico-Matemáticas, Universidad Michoacana de  
San Nicolás de Hidalgo. Cd. Universitaria, 58040 Morelia, Michoacán

(Dated: April 30, 2020)

En esta practica el objetivo será resolver la ecuación diferencial de segundo orden del oscilador armónico, por los métodos numéricos empleados en la práctica anterior ahora sin conocer la solución exacta, se determinaran los factores de auto-convergencia de cada método.

## I. INTRODUCCIÓN

Para un resorte que obedece la ley de Hooke, sometido a una fuerza de amortiguamiento, la segunda ley de Newton establece la siguiente ecuación de movimiento para un oscilador armónico amortiguado

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx - b\dot{x} \\ \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Donde  $m$  es la masa del oscilador,  $k$  es la constante del resorte, el termino  $b\dot{x}$  corresponde al termino de amortiguamiento modelado con una función lineal de velocidad. Esta ecuación tiene una única solución con las condiciones iniciales provistas para  $x(0) = x_0$  y  $\dot{x}(0) = v_0$ .

Cuando queremos trabajar con un ejemplo es conveniente fijar condiciones iniciales. En todos los casos asumiremos las condiciones iniciales  $x(0) = 1$  y  $\dot{x}(0) = 0$ , esto es, el resorte estirado a la derecha de la posición de equilibrio y luego soltado en un tiempo inicial.

Para este trabajo no sera necesario saber la solución exacta de la ecuación diferencial como lo hemos venido haciendo a lo largo de este curso, ahora utilizaremos el concepto de la auto-convergencia el cual consiste en resolver la ecuación diferencial mediante los métodos numéricos habituales y para determinar el factor de auto-convergencia del error numérico lo que se hará será lo siguiente:

- Se utilizara el método numérico con diferentes resoluciones  $\Delta t_1$ ,  $\Delta t_2 = \Delta t_1/2$ ,  $\Delta t_3 = \Delta t_2/2$ .
- $X_1$ ,  $X_2$  y  $X_3$  serán los arreglos solución de las diferentes resoluciones utilizadas  $\Delta t_1$ ,  $\Delta t_2$  y  $\Delta t_3$  respectivamente.
- Se restaran  $X_1 - X_2$  y  $X_2 - X_3$  y se graficaran los resultados de las dos diferencias obteniendo 2 curvas del error correspondientes a las restas mencionadas.
- Por ultimo se compararan las dos curvas para determinar cual es el factor de auto-convergencia y por ende su orden de auto-convergencia.

## II. SOLUCIÓN NUMÉRICA

Primero notese que la ecuación diferencial del oscilador armónico simple es de segundo orden, y antes de aplicar los métodos numéricos descritos anteriormente necesitamos primero escribir la ecuación como un conjunto de 2 ecuaciones de primer orden. de echo este problema es ilustrativo porque requiere la solución de más de una ecuación. Esto se puede hacer fácilmente definiendo  $y = \dot{x}$ , entonces la ecuación 1 se puede describir como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\frac{b}{m}y - \frac{k}{m}x \end{aligned} \quad (2)$$

sujeto a las condiciones iniciales que definimos en la construcción de la solución exacta  $x(0) = x_0 = 1$  y  $y(0) = v_0 = 0$ . Notese que como en el caso previo  $t$  es la variable independiente y ahora las soluciones son  $x$  y  $y$ .

En este caso necesitamos resolver para ambas  $x_i$  y  $y_i$  en el dominio numérico discreto  $t_i$ ,  $i = 0, \dots, t_{N_t}$ . La diferencia importante de este problema con la ley de enfriamiento de Newton es que ahora  $x$  tiene pendiente  $\frac{dx}{dt} = y$  y  $y$  tiene pendiente  $\frac{dy}{dt}$ .

Primero construiremos la solución usando el método de Euler, para este sistema

$$\begin{aligned} x_i &= x_{i-1} + \frac{dx}{dt}(t_{i-1})\Delta t \\ &= x_{i-1} + y_{i-1}(t_{i-1})\Delta t \\ y_i &= y_{i-1} + \frac{dy}{dt}(t_{i-1})\Delta t \\ &= y_{i-1} + \left(-\frac{b}{m}y_{i-1} - \frac{k}{m}x_{i-1}\right)\Delta t \end{aligned} \quad (3)$$

Para el método de Averaged Euler necesitamos promediar las pendientes  $dx/dt$  y  $dy/dt$  en los tiempos  $t_{i-1}$  y  $t_i$ . Por motivos de claridad y una fácil implementación, definiremos las pendientes  $k_1x$ ,  $k_1y$  como las derivadas en  $t_{i-1}$  y  $k_2x$ ,  $k_2y$  como las derivadas en  $t_i$ . El algoritmo de integración es el siguiente

- Ejecutar un paso del método de Euler

$$\begin{aligned}
 k_{1x} &= \frac{dx}{dt} t_{i-1} = y_{i-1} \\
 k_{1y} &= \frac{dy}{dt} t_{i-1} = \left( -\frac{b}{m} y_{i-1} - \frac{k}{m} x_{i-1} \right) \\
 x_i &= x_{i-1} + k_{1x} \Delta t \\
 y_i &= y_{i-1} + k_{1y} \Delta t
 \end{aligned}$$

- Luego calcularemos las pendientes  $k_{2x}$  y  $k_{2y}$  usando estos nuevos valores. Entonces calcularemos el paso de tiempo con las pendientes promedio.

$$\begin{aligned}
 k_{2x} &= \frac{dx}{dt} (t_i) = y_i \\
 k_{2y} &= \frac{dy}{dt} (t_i) = \left( -\frac{b}{m} y_i - \frac{k}{m} x_i \right) \\
 x_i &= x_{i-1} + \frac{1}{2} (k_{1x} + k_{2x}) \Delta t \\
 y_i &= y_{i-1} + \frac{1}{2} (k_{1y} + k_{2y}) \Delta t
 \end{aligned}$$

### III. RESULTADOS

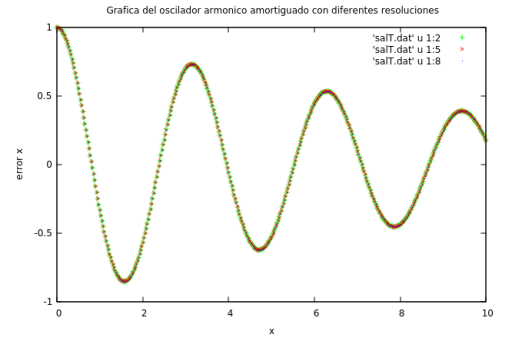
A continuación se muestran los resultados obtenidos para cada uno de los objetivos de esta practica, se utilizaron los siguientes parámetros para realizar nuestra practica:  $m = 1/2, k = 2, b = 0.1$  con el objetivo de tener  $\omega = 2$  en el dominio  $t \in [0, 10]$ , también se usaron las resoluciones  $dt_1 = 0.025, dt_2 = 0.0125$  y  $dt_3 = 0.00625$ .

Primero graficamos  $x$  contra  $t$  lo cual nos da la gráfica del oscilador armónico amortiguado en 1a y 1b que son las gráficas del método de Averaged Euler y de Euler respectivamente con las 3 resoluciones  $dt_1, dt_2$  y  $dt_3$  como se puede observar el método de Averaged tiene menor error comparado con el método de Euler, por lo cual en 1b se observa que las curvas con diferentes resoluciones no parecen coincidir. También puede observarse que como  $b = 0.1$  y por tanto  $b > 0$ , nuestras soluciones tendrán un amortiguamiento o una disipación de la energía la cual se puede observar claramente en las gráficas mencionadas anteriormente

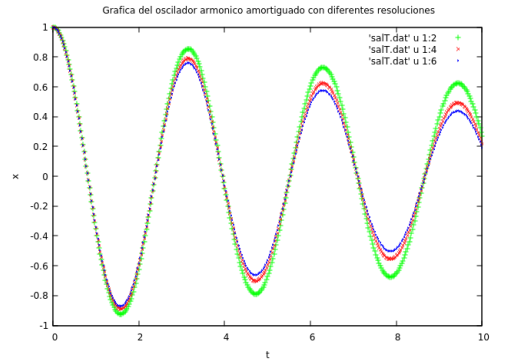
Para encontrar el error cometido por cada uno de los métodos, como ya se dijo en la introducción, se ejecutaron los métodos numéricos con diferentes resoluciones y se guardaron en 3 archivos diferentes después con un "paste" se juntaron los 3 archivos con diferente resolución en uno, se procedió a restar la solución numérica  $X_1$  y  $X_2$ , y también las soluciones  $X_2$  y  $X_3$ , con lo cual se obtuvieron los errores de cada método los cuales graficamos en 2a y 2b, como se puede observar en las gráficas mencionadas cada uno de los métodos tiene un error diferente en 2a que corresponde al método de Averaged Euler se puede observar como el error es

pequeño en comparación con el metodo de Euler (2b) y también a simple vista se puede observar que en el método de Averaged Euler el error auto-converge de manera mas rápida de la que lo hace el método de Euler. Notese también que en la gráfica correspondiente al método de Euler se utilizo una resolución extra  $dt_4 = 0.003125$  con la cual obtuvimos otra solución numérica  $X_4$  con la cual al restar  $X_3 - X_4$  obtuvimos otra curva de error que corresponde a la curva color azul, esto con el único propósito de dar mas claridad visual a los resultados obtenidos.

Ahora por ultimo comparando los errores cometidos al utilizar las diferentes resoluciones podemos observar que para el método Averaged Euler (3a) nuestro factor de auto-convergencia es  $2^2 = 4$  de lo cual se dice que el orden de auto-convergencia para este método es 2. Por otro lado para el método de Euler se puede observar de 3b que el factor de auto-convergencia es  $2^1$  y por ello se deduce que para este método el orden de auto-convergencia es 1.



(a) Averaged Euler



(b) Euler

FIG. 1: Gráfica que muestra la posición  $x$  contra el tiempo  $t$  que es la gráfica del oscilador armónico amortiguado con  $b = 0.1$ . en 1a se muestra el método Averaged con las 3 resoluciones empleadas y en 1b el método de Euler con las mismas resoluciones mencionadas

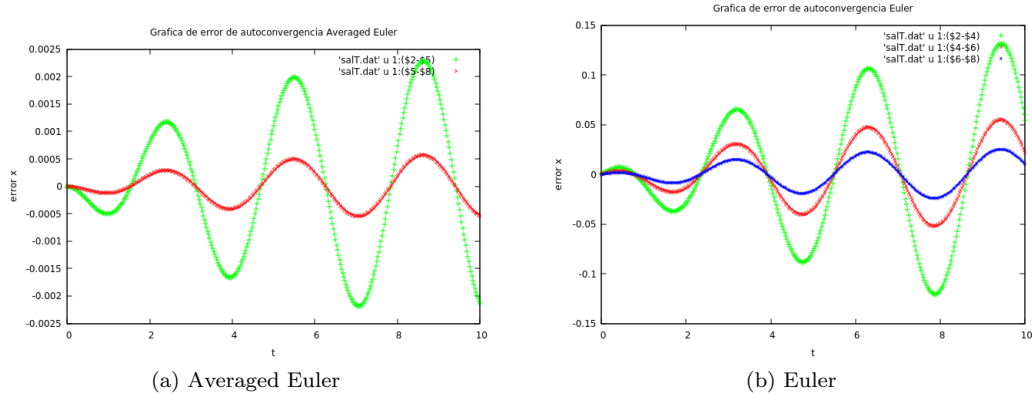


FIG. 2: Gráfica que muestra los errores de auto-convergencia cometidos en cada uno de los métodos utilizados 2a y 2b, y como estos se reducen cuando empleamos resoluciones  $\Delta t$  mas pequeñas

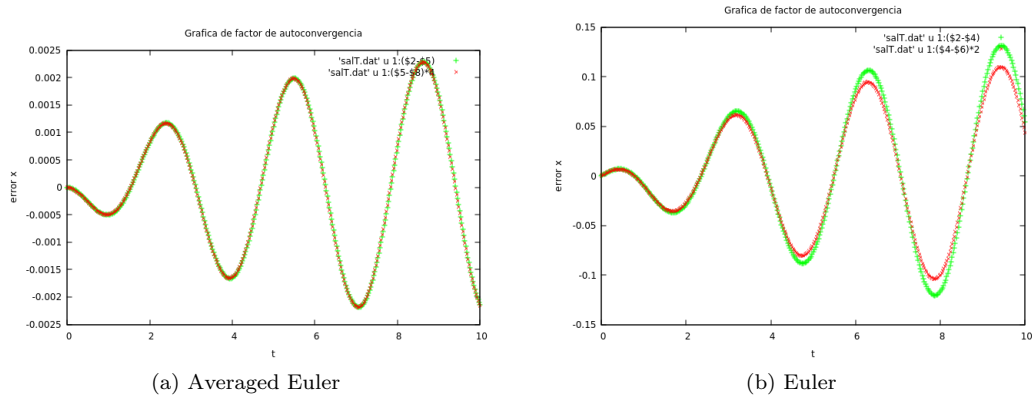


FIG. 3: Gráfica que muestra el factor de auto-convergencia de cada método utilizado. En 3a se puede observar que el factor de auto-convergencia es  $2^2 = 4$  lo cual quiere decir que el orden de auto-convergencia es 2. En 3b se puede observar que el factor de convergencia para este método es  $2^1$  lo cual nos dice que su orden de auto-convergencia es 1, notese que en este caso la gráfica no se ajusta perfectamente esto sucede por que el error para este método es más grande