

Sistema de Lorenz y caos

Ulises Maximino Garibay Valladolid

Facultad de ciencias Físico-Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Cd. Universitaria, 58040 Morelia, Michoacán

(Dated: May 4, 2020)

En esta practica el objetivo será resolver el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden de Lorenz. También se determinara el factor de auto-convergencia del método Averaged Euler

I. INTRODUCCIÓN

Estudiando modelos atmosféricos, en 1962 Edward Lorenz llego al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(y - x) \\ \dot{y} &= bx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - cz\end{aligned}\quad (1)$$

Donde x esta asociado a la intensidad convectiva, y a la temperatura y z mide la desviación de la linealidad de un perfil vertical. Los parámetros son el numero a de Prandtl, el numero b de Rayleigh, el cual esta asociado con la adición de calor al sistema y la relación de aspecto de cillazamiento de fluidos c .

Este sistema de ecuaciones se vuelve interesante y famoso porque muestra comportamientos caóticos. En teoría el caos aparece siempre que se cumplan dos condiciones iniciales. i) el sistema muestra sensibilidad a las condiciones iniciales y ii) es al menos un sistema con 3 dimensiones. En el lenguaje de sistemas dinámicos, la dimension de un sistema es básicamente el numero de ecuaciones diferenciales de primer orden necesarias para describir la dinámica, o equivalentemente, la dimension del espacio de fase.

Con el objetivo de ilustrar la solución numérica de este sistema fijaremos 2 escenarios, uno en el cual la solución muestra un atractor en el tiempo solución y un segundo en el cual el sistema muestra soluciones caóticas. Estos dos escenarios pueden ser logrados asumiendo las condiciones iniciales $(x_0, y_0, z_0) = (7, 6, 5)$ con los parámetros fijos $a = 15$, $c = 3$ y dos valores del parámetro b que determinan los dos diferentes comportamientos

II. SOLUCIÓN NUMÉRICA

Para emplear el método de Averaged Euler necesitamos promediar las pendientes dx/dt , dy/dt dz/dt en los tiempos t_{i-1} y t_i . Por motivos de claridad y una fácil implementación, definiremos las pendientes k_{1x} , k_{1y} y k_{1z} como las derivadas en t_{i-1} y k_{2x} , k_{2y} , k_{2z} como las derivadas en t_i . El algoritmo de integración es el siguiente

- Ejecutar un paso del método de Euler

$$\begin{aligned}k_{1x} &= a(y_{i-1} - x_{i-1}) \\ k_{1y} &= bx_{i-1} - y_{i-1} - x_{i-1}z_{i-1} \\ k_{1z} &= x_{i-1}y_{i-1} - cz_{i-1} \\ x_i &= x_{i-1} + k_{1x}\Delta t \\ y_i &= y_{i-1} + k_{1y}\Delta t \\ z_i &= z_{i-1} + k_{1z}\Delta t\end{aligned}$$

- Luego calcularemos las pendientes k_{2x} , k_{2y} y k_{2z} usando estos nuevos valores. Entonces calcularemos el paso de tiempo con las pendientes promedio.

$$\begin{aligned}k_{2x} &= a(y_i - x_i) \\ k_{2y} &= bx_i - y_i - x_iz_i \\ k_{2z} &= x_iy_i - cz_i \\ x_i &= x_{i-1} + \frac{1}{2}(k_{1x} + k_{2x})\Delta t \\ y_i &= y_{i-1} + \frac{1}{2}(k_{1y} + k_{2y})\Delta t \\ z_i &= z_{i-1} + \frac{1}{2}(k_{1z} + k_{2z})\Delta t\end{aligned}$$

III. RESULTADOS

Para realizar esta practica se consideraron dos casos como ya se menciona en la introducción, uno en el cual la solución del sistema muestra un atractor en el tiempo solución y otra en que la solución es caótica. En los dos caos se usaran las condiciones iniciales $(x_0, y_0, z_0) = (7, 6, 5)$ y los parámetros fijos $a = 15$, $c = 3$ y del valor de b dependerá el comportamiento del sistema, el dominio es $t \in [0, 100]$ con una resolución base $\Delta t = 0.001$ y $\Delta t = 0.0005$, $\Delta t = 0.00025$ para determinar el factor de auto-convergencia.

Para adaptar el código de Averaged Euler para que resolviera este sistema de ecuaciones de primer orden solo fue necesario observar que al tener las 3 condiciones iniciales (x_0, y_0, z_0) podemos tener las 3 ecuaciones diferenciales totalmente definidas para esos valores y que a partir de ahí dentro de un ciclo *do* solo teníamos que escribir el sistema de ecuaciones de Lorenz para esos valores y a partir de ahí construir los valores para los siguientes t_i .

Primero analicemos el caso donde la solución numérica del sistema muestra un atractor, aquí el parámetro es $b = 20$ y como se puede observar en 1a las curvas correspondientes a los valores de X contra t , Y contra t y Z contra t muestra que la solución tiene un atractor fijo en el tiempo, en 1b se muestra el gráfico del espacio de fase, en el cual también se puede observar que la trayectoria gira entorno a dos bucles y finalmente las espirales bajan hacia el centro de una de las curvas.

Para obtener el factor de auto-convergencia fue necesario resolver el sistema con los mismos parámetros empleados en este caso utilizando las diferentes resoluciones y restando la soluciones para x con lo que obtuvimos las dos curvas del error de auto-convergencia $(x_1 - x_2$ y $x_2 - x_3)$ 4a. Como se puede observar en 4b el factor de auto-convergencia es $2^2 = 4$ y se ajusta durante todo el dominio.

En el segundo caso cuando tenemos $b = 30$ la solución numérica muestra un resultado caótico donde no hay ningún punto fijo atractor en el tiempo 2a. En 2b se muestra el diagrama de espacio de fase para esta solución caótica la cual da como resultado una trayectoria que gira entorno a dos curvas y que en ningún momento llega a un punto atractor fijo.

Para obtener el factor de auto-convergencia para esta solución caótica, hicimos lo mismo que para el caso anterior. En 5a se pueden observar las dos curvas correspondientes al error de la solución del sistema caótico usando diferente resolución y en 5b se observa que el factor de auto-convergencia para este caso es también $2^2 = 4$ ya que estamos utilizando el mismo método Averaged Euler. Notese sin embargo que para este caso después de $t = 10$ la solución de este sistema caótico no auto-converge.

Para dar mayor claridad de la sensibilidad a las condiciones en el sistema caótico en 3a y en 3b se muestra la solución de el sistema caótico con los parámetros levemente modificados $(x_0, y_0, z_0) = (7.001, 6, 5)$ y $(x_0, y_0, z_0) = (7, 6.001, 5)$ respectivamente. Notese que a partir de $t \sim 10$ las soluciones para estos nuevos parámetros se separan de la solución con los parámetros originales base, lo cual muestra claramente la sensibilidad del sistema.

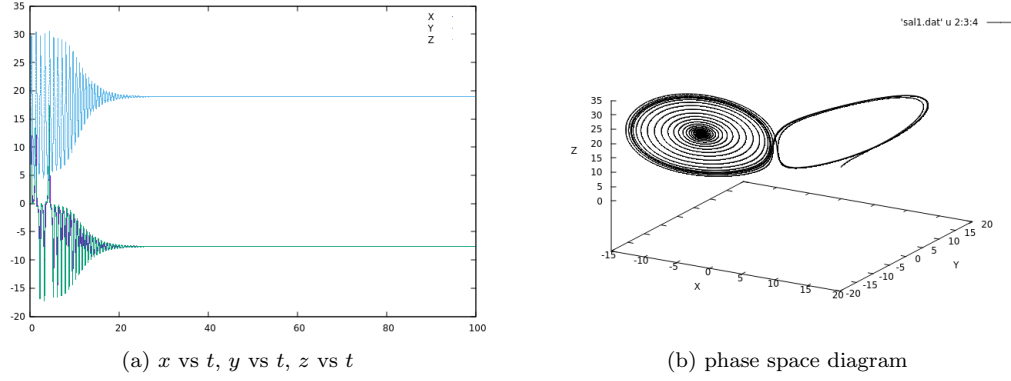


FIG. 1: Gráfica que muestra la solución del sistema atractor. En 1a se muestran las variables contra el tiempo, En 1b se muestra el diagrama de espacio de fase.

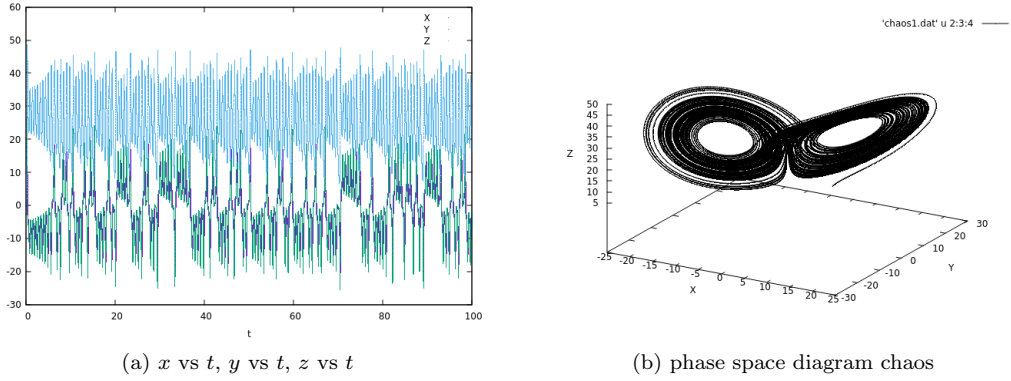


FIG. 2: Gráfica que muestra la solución caótica del sistema. En 2a se muestra el gráfico solución de las variables contra el tiempo, en 2b se muestra el gráfico del espacio de fase para la solución caótica

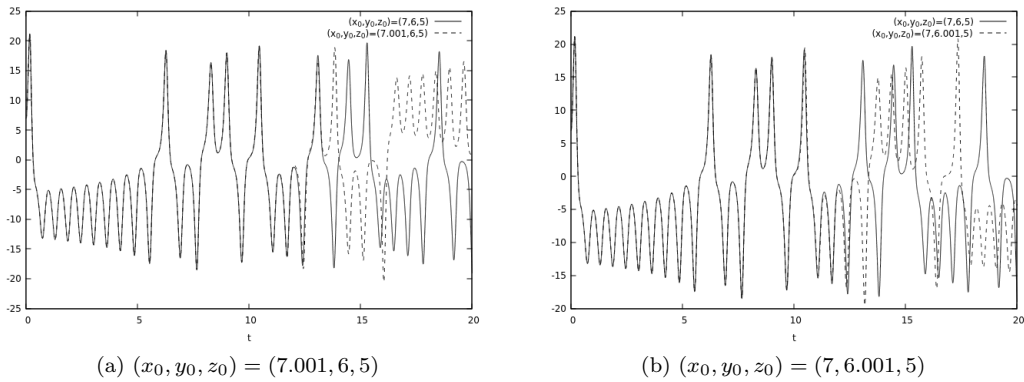


FIG. 3: Gráfica que muestra la solución para el caso caótico de x contra t las líneas continuas en las curvas corresponden a los parámetros originales, mientras que las punteadas corresponden a los parámetros levemente modificados

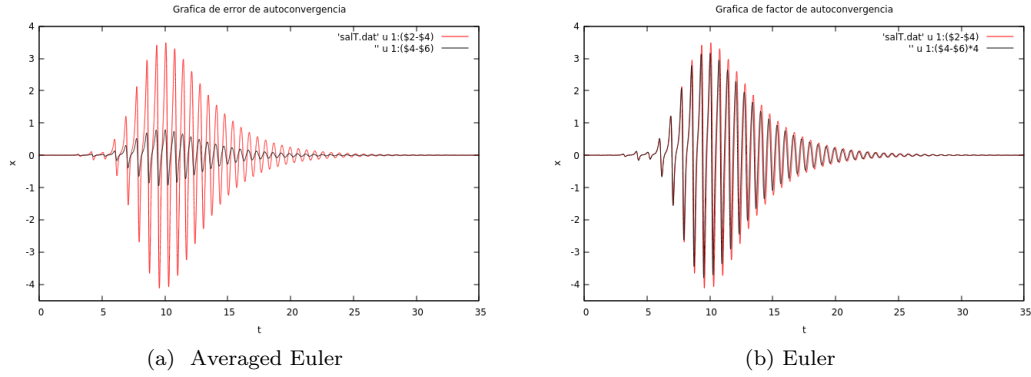


FIG. 4: Gráfica que muestra las curvas de error para la solución del sistema con $b = 20$. En 4a se muestran las curvas de error y en 4b se muestra el factor de auto-convergencia

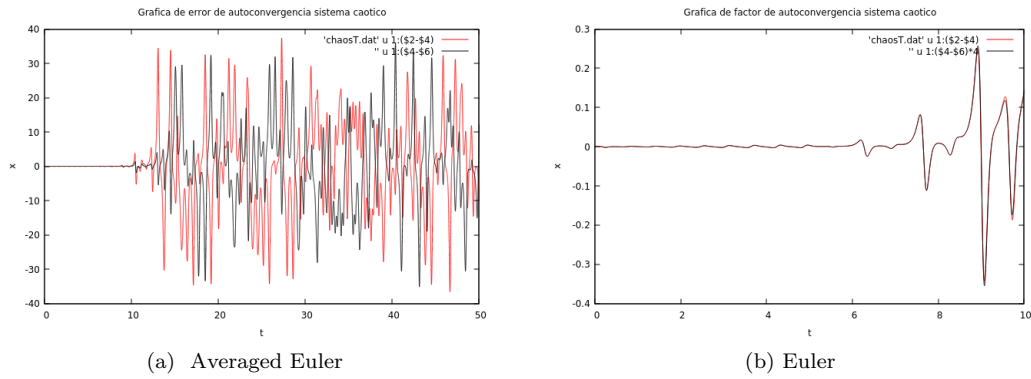


FIG. 5: Gráfica que muestra las curvas de error para la solución del sistema caótico ($b = 30$). En 5a se muestran las curvas de error ($x_1 - x_2$ y $x_2 - x_4$). En 5b se muestra el factor de auto-convergencia el cual es $2^2 = 4$, notese que hay auto-convergencia hasta $t \sim 10$ después de eso no auto-converge