Aproximación discreta de derivadas

Ulises Maximino Garibay Valladolid
Facultad de ciencias Físico-Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Cd. Universitaria, 58040 Morelia, Michoacán
(Dated: March 20, 2020)

En esta practica el objetivo fue comparar, mediante un dominio discreto y diferentes aproximaciones de derivadas obtenidas a partir de de la serie de Taylor, el resultado obtenido al correr el mismo programa con un numero diferente de celdas en múltiplos de 2, con el objetivo de analizar el cambio en el error obtenido al cambiar la discretizacion

I. INTRODUCTION

Consideremos el dominio $I = \{x_{min}, x_{max}\} \subseteq \mathbb{R}$. Definiremos la version discreta uniforme de I y I_d como:

$$I_d = \{x \in I \mid x_i = x_{mid} + i\Delta x\} \tag{1}$$

donde $x_i = x_{mid} + i\Delta x$ con $i = 1, ..., N_x$ y $\Delta x = (x_{max}, x_{min})/N_x$ es la resolución de la discretizacíon

Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Definiremos la version discreta de f como el conjunto $f_i = f(x_i)$, con $x_i \in I_d$

La construcción de derivadas utiliza expansiones de Taylor de f_i^n en los vecinos cercanos. Ahora para nuestro proposito utilizaremos las siguientes formulas obtenidas de combinar las 3 ecuaciones de las expanciones de Taylor en f_{i-1}, f_i y f_{i+1} :

$$\begin{aligned}
f_{i+1} - f_{i-1} &= 2\Delta x \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x_i} + O(\Delta x^3) \\
f_{i+2} - 4f_{i+1} + 3f_i &= -2\Delta x \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x_i} + O(\Delta x^3) \\
f_{i-2} - 4f_{i-1} + 3f_i &= 2\Delta x \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x_i} + O(\Delta x^3) \\
f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1} &= \Delta x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\bigg|_{x_i} + O(\Delta x^4)
\end{aligned} \tag{2}$$

donde las tres primeras ecuaciones se refieren a la primera derivada, y la cuarta es para obtener la segunda derivada, todas las ecuaciones al ser despejadas son de segundo orden de precision

II. RESULTADOSI

A continuacion se mostraran las graficas de cada uno de los resultados obtenidos a partir de utilizar lo que se pide los ejercicios propuestos, teniendo en cuenta la discretizacion base $N_x = 1000$ y las ecuaciones previamente mencionadas en la introduccion. 6.
6.

Se ve claramente como el error se reduce al aumentar N_x, y de la ultima gráfica obtenemos el resultado de que el error en N_x es 4 veces mayor que en $2N_x$ y análogamente lo mismo pasa entre $2N_x$ y $4N_x$. También esto muestra claramente que el orden de convergencia es de segundo orden con lo que se responde al ejercicio 2.

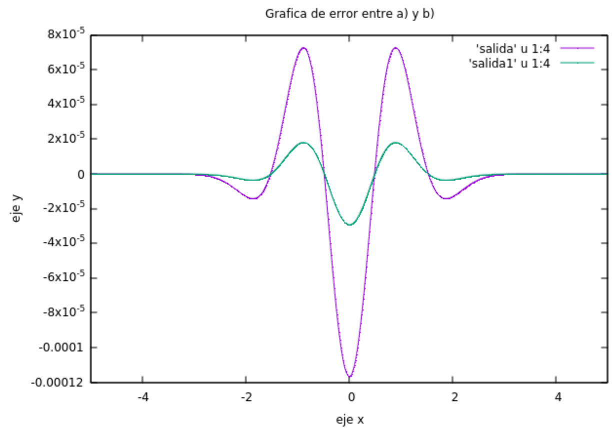

FIG. 1. Grafica que muestra el error con $N_x = 1000$ y $2N_x = 2000$

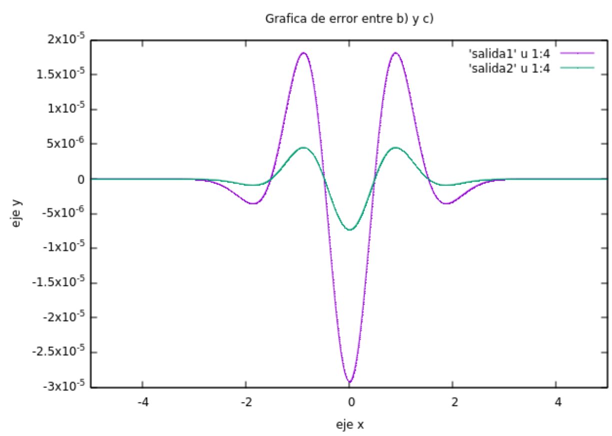

FIG. 2. Grafica que muestra el error con $2N_x = 2000$ y $4N_x = 4000$

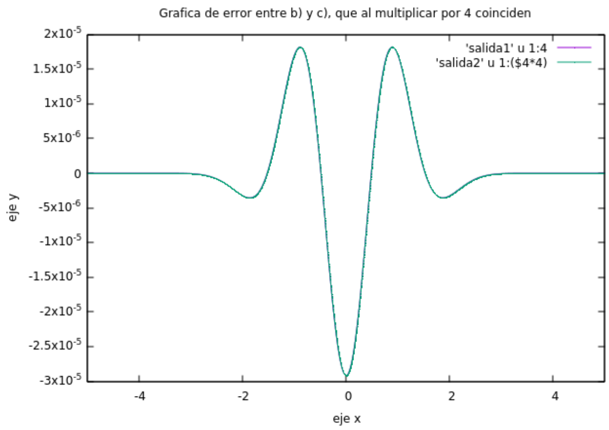

FIG. 3. Grafica que muestra el error con $N_x = 1000$ y $2N_x = 2000$ donde la grafica con $2N_x$ esta multiplicada por 4

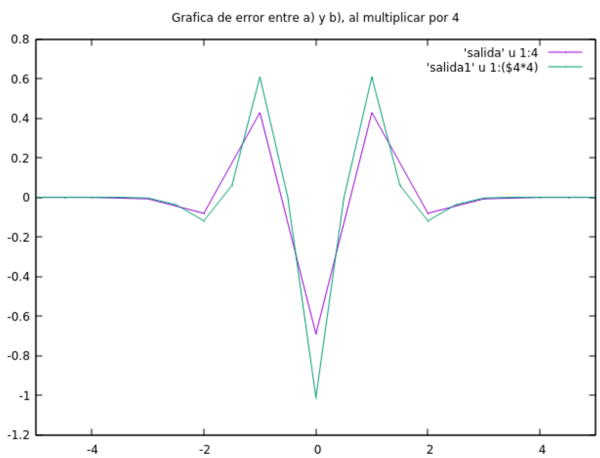

FIG. 4. Grafica que muestra el error con $N_x = 10$ y $2N_x = 20$ donde la grafica con $2N_x$ esta multiplicada por 4

III. RESULTADOSII

Los siguientes resultados responden a la pregunta de convergencia del ejercicio 3.

Como se muestra en las siguientes figuras, los resultados del error en las derivadas con N_x muy pequeño no convergen.

IV. RESULTADOSIII

Ahora para responder al ejercicio 4 y 5, utilizamos la ecuación de derivada de segundo orden con segundo orden de precision. se ve claramente a partir de los resultados y de la gráfica obtenida que los resultados convergen con segundo orden cuando usamos $N_x = 1000$, $2N_x$ y $4N_x$.

como se ve en las gráficas efectivamente se da la convergencia con segundo orden en los puntos interiores

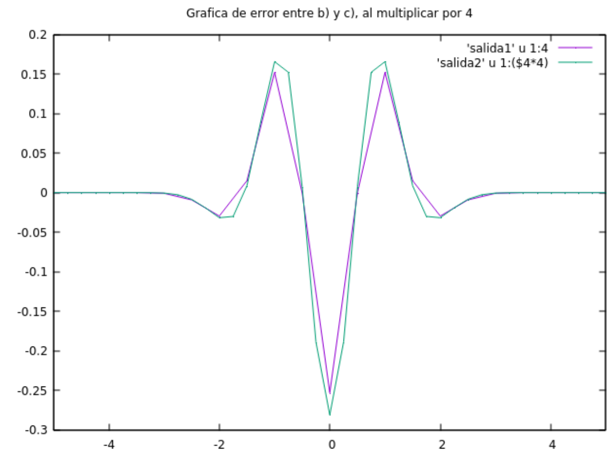

FIG. 5. Grafica que muestra el error con $2N_x = 20$ y $4N_x = 40$ donde la grafica con $2N_x$ esta multiplicada por 4

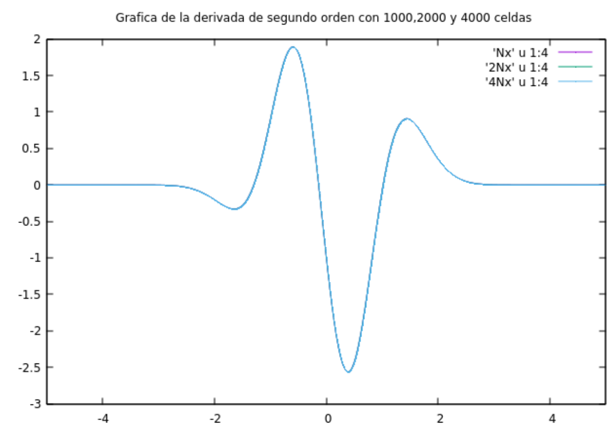

FIG. 6. Grafica que muestra el error en la segunda derivada con $N_x = 1000$ y $2N_x = 2000$ $4N_x = 4000$

$i = 1, ..., N_x - 1$, y en los extremos $0, N_x$ también convergen solo en este caso ya que la segunda derivada en estos puntos es 0 para esta función en especifico $e^{(-x^2)}sin(x)$. en caso de una función con valores distintos en esos puntos el error se volverá mas grande y no convergen