

# Oscilador armónico amortiguado y forzado

Ulises Maximino Garibay Valladolid

Facultad de ciencias Físico-Matemáticas, Universidad Michoacana de  
San Nicolás de Hidalgo. Cd. Universitaria, 58040 Morelia, Michoacán

(Dated: May 9, 2020)

En esta practica el objetivo será resolver el sistema no-autónomo correspondiente al oscilador armónico amortiguado y forzado.

## I. INTRODUCCIÓN

Consideremos la ecuación diferencial del oscilador armónico amortiguado y forzado la cual es

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\sin(\Omega t) \quad (1)$$

donde la dependencia del tiempo de la ecuación requerirá usar la evaluación de las pendientes en ambas partes, en la variable independiente y en la incógnita. Este sistema es equivalente a

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\frac{b}{m}y - \frac{k}{m}x + \frac{F_0}{m}\sin(\Omega t) \end{aligned} \quad (2)$$

Para este sistema del oscilador armónico amortiguado forzado fijaremos los parámetros  $m = 1/2$  y  $k = 2$  como en todos los ejemplos previos y consideraremos dos particulares escenarios relacionados con el régimen de resonancia.

## II. RUNGE-KUTTA, SEGUNDO ORDEN

Ahora ilustraremos la construcción del método para un segundo orden de precision en la integración. Utilizaremos el método Midpoint de la familia de los Runge-Kutta.

*Midpoint.*- Este es obtenido usando  $a_2 = 1$ , lo cual implica que  $a_1 = 0$  y  $b_1 = c_{11} = 1/2$ . El método se escribe como sigue

$$\begin{aligned} y_i &= y_{i-1} + k_2\Delta x + O(\Delta x^3) \\ k_1 &= f(x_{i-1}, y_{i-1}) \\ k_2 &= f\left(x_{i-1} + \frac{1}{2}\Delta x, y_{i-1} + \frac{1}{2}k_1\Delta x\right) \end{aligned} \quad (3)$$

Donde  $k_2$  es la pendiente calculada en el punto medio entre  $x_{i-1}$  y  $x_i$ .

El error  $+O\Delta x^3$  es local, lo cual implica que el error global es de segundo orden  $+O(\Delta x^2)$ .

## III. RESULTADOS

*Caso A.*- En este caso fijamos los parámetros  $b = 0.05$ ,  $F_0 = 0.2$  y  $\Omega = 1$  con las condiciones iniciales de siempre  $x(0) = 1.0$  y  $y(0) = 0$  también utilizamos las resoluciones  $\Delta t_1 = 0.025$ ,  $\Delta t_2 = 0.0125$  y  $\Delta t_3 = 0.00625$  para nuestras pruebas de auto-convergencia. Se puede observar en 1a, como el termino del amortiguamiento en la curva predomina en un principio y después se estabiliza gracias al termino de forzamiento  $F_0\sin(\Omega t)$ . En 1b se observa el diagrama de espacio de fase el cual es una espiral que se enrolla hacia adentro de una manera algo desordenada hasta estabilizarse en una elipse cerca de su centro.

En las gráficas 2a y 2b se muestran las curvas de error y su de factor auto-convergencia el cual es de segundo orden como era de esperarse ya que utilizamos un metodo de segunda precision

*Caso B.*- en este caso usaremos casi los mismos parámetros que en el caso A, solo modificaremos  $\Omega = 2$  y también usaremos las mismas condiciones iniciales y las mismas resoluciones. Para este caso observamos en 2a como en un principio la curva decrece por el factor de amortiguamiento  $b$  y después empieza a crecer gracias al factor  $F_0\sin(\Omega t)$  hasta estabilizarse en los valores asintóticos de  $-2$  y  $2$ .

En las gráficas 3a y 3b se muestran las gráficas de error y del factor de auto-convergencia para el caso B en el cual también podemos observar que es de segundo orden como era de esperarse.

Por ultimo en las gráficas 5a y 5b se muestran fragmentos de las gráficas de error para el caso A y el caso B, con el único objetivo de dar mayor claridad al comportamiento de los errores.

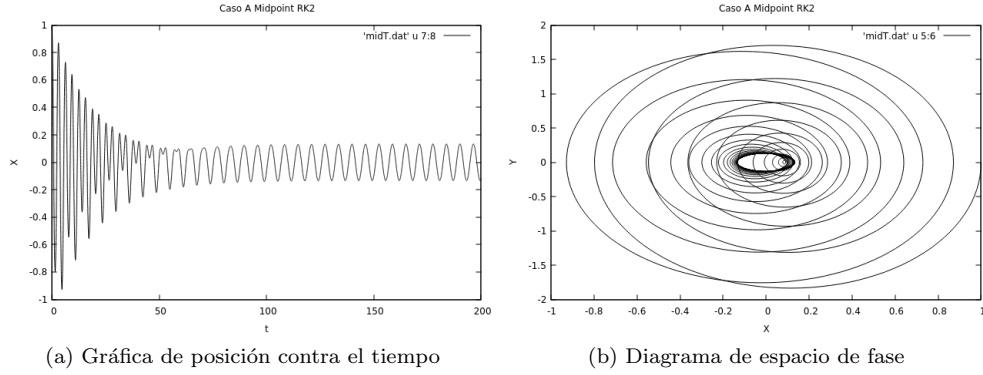


FIG. 1: Gráfica que muestra el comportamiento de la solución de la EDO con los parámetros dados para el caso A. En 1a se observa la curva de la posición contra el tiempo y en 1b se observa el diagrama de espacio de fase

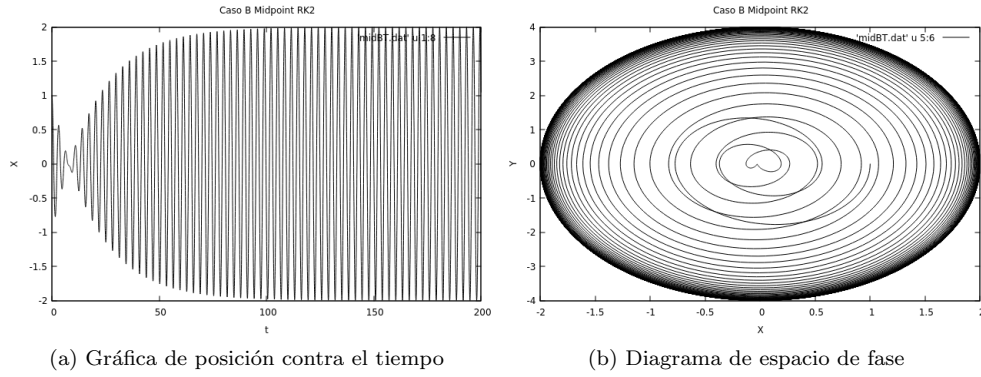


FIG. 2: Gráfica que muestra el comportamiento de la solución de la EDO con los parámetros dados para el caso B. En 2a se observa la curva de la posición contra el tiempo y en 2b se observa el diagrama de espacio de fase

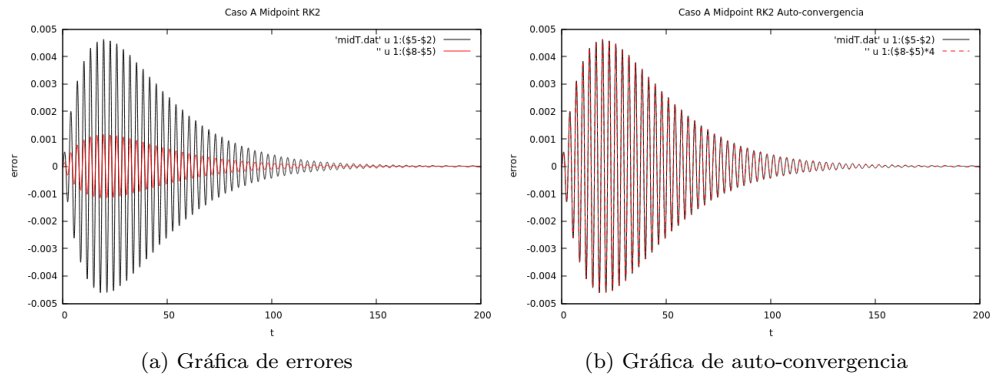


FIG. 3: Gráfica que muestra las curvas de error para el caso A. En 3a se muestran las curvas de error del método y en 3b se muestra el factor de auto-convergencia del método usado la cual es  $2^2 = 4$  osea es de segundo orden

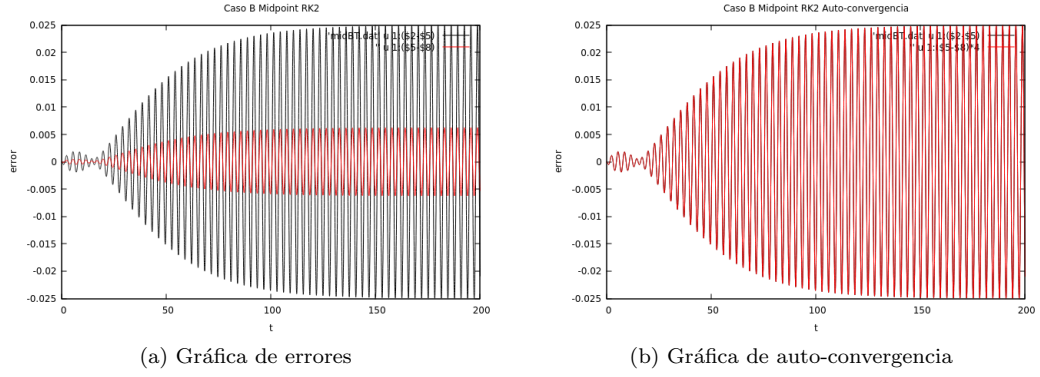


FIG. 4: Gráfica que muestra las curvas de error para el caso B. En 4a se muestran las curvas de error del método y en 4b se muestra el factor de auto-convergencia del método usado la cual es  $2^2 = 4$  osea es de segundo orden

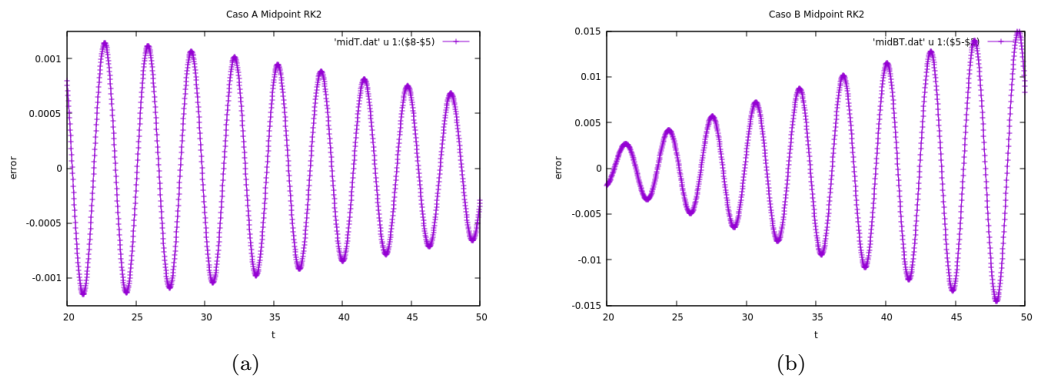


FIG. 5: Gráfica que muestra fragmentos de las curvas de error para observar su comportamiento