

Metodos Runge-Kutta

Ulises Maximino Garibay Valladolid

Facultad de ciencias Físico-Matemáticas, Universidad Michoacana de
San Nicolás de Hidalgo. Cd. Universitaria, 58040 Morelia, Michoacán

(Dated: May 7, 2020)

En esta practica el objetivo será resolver la EDO del oscilador armónico usando los métodos Runge-Kutta.

I. INTRODUCCIÓN

Para la EDO genérica

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

en el dominio numérico discreto, construimos métodos útiles, específicamente, Euler, Backward Euler y Averaged Euler, que proveen una expresión para y_i en términos de la información conocida, llamada la pendiente de la solución cualquiera en x_{i-1} en el caso de el método de Euler, en x_i en el caso del método Backward Euler y el promedio de estas dos pendientes en el caso de el método Averaged Euler, usado para predecir la solución usando la ecuación de una línea.

El método Runge-Kutta es una generalización de esta estrategia, y consiste en proponer una expresión mas general para la pendiente tal que la predicción de la solución numérica y_i es del tipo

$$y_i = y_{i-1} + \alpha(x_{i-1}, y_{i-1}, \Delta x) \Delta x \quad (1)$$

con α una función actuando como una pendiente de una línea que usaremos para predecir el valor y_i como discutimos anteriormente. El método RK consiste en asumir que α sea

$$\alpha = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_m k_m \quad (2)$$

donde las constantes k_j representan las pendientes de la solución numérica evaluada en diferentes puntos con el intervalo Δx , y específicamente definido como

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_{i-1}, y_{i-1}) \\ k_2 &= f(x_{i-1} + b_1 \Delta x, y_{i-1} + c_{11} k_1 \Delta x) \\ k_3 &= f(x_{i-1} + b_2 \Delta x, y_{i-1} + c_{21} k_1 \Delta x + c_{22} k_2 \Delta x) \\ &\vdots \\ k_m &= f(x_{i-1} + b_{m-1} \Delta x, y_{i-1} + c_{m-1,1} k_1 \Delta x \\ &\quad + c_{m-1,2} k_2 \Delta x + \dots + c_{m-1,m-1} k_{m-1} \Delta x). \end{aligned} \quad (3)$$

Notese que solo la pendiente x_{i-1} , llamada k_1 es independiente, mientras que k_1, k_2, \dots dependen de las pendientes previas. Aquí los coeficientes b_j determinan la

posición donde la pendiente tiene que ser evaluada y c_{jk} son coeficientes de una combinación lineal de todas las pendientes calculadas previamente. Estas constantes serán determinadas en términos de la exactitud del método requerido.

II. RUNGE-KUTTA, SEGUNDO ORDEN

Ahora ilustraremos la construcción del método para un segundo orden de precision en la integración. El método general reduce (1) a una expresión con dos pendientes

$$\begin{aligned} y_i &= y_{i-1} + (a_1 k_1 + a_2 k_2) \Delta x \\ k_1 &= f(x_{i-1}, y_{i-1}) \\ k_2 &= f(x_{i-1} + b_1 \Delta x, y_{i-1} + c_{11} k_1 \Delta x) \end{aligned} \quad (4)$$

con el propósito de determinar a_1, a_2, b_1, c_{11} la primera expresión de (4) y las pendientes son comparadas con una expansión de Taylor de segundo orden de y al rededor de x_{i-1} como sigue

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_{i-1}, y_{i-1}) \\ k_2 &= f(x_{i-1} + b_1 \Delta x, y_{i-1} + c_{11} k_1 \Delta x) \\ &= f(x_{i-1}, y_{i-1}) + b_1 \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_{i-1}} \Delta x + c_{11} k_1 \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x_{i-1}} \Delta x + O(\Delta x^2) \end{aligned}$$

lo cual implica que la expresión para y_i en (4) es

$$\begin{aligned} y_i &= y_{i-1} + [a_1 f(x_{i-1}, y_{i-1}) + a_2 f(x_{i-1}, y_{i-1})] \Delta x \\ &\quad + \left(a_2 b_1 \frac{\partial f}{\partial x} + a_2 c_{11} \frac{dy}{dx} \frac{\partial f}{\partial y} \right) \bigg|_{x_{i-1}} \Delta x^2 + O(\Delta x^3) \end{aligned} \quad (5)$$

El valor de y_i obtenido con expansiones de series de Taylor al rededor de y_i

$$y_i = y_{i-1} + \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_{i-1}} \Delta x + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x_{i-1}} \Delta x^2 + O(\Delta x^3)$$

Donde

$$\begin{aligned} \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_{i-1}} &= f(x_{i-1}, y_{i-1}) \\ \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x_{i-1}} &= \frac{df(x_{i-1}, y_{i-1})}{dx} = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) \Big|_{x_{i-1}} \end{aligned}$$

de lo cual sustituyendo en (5) resulta en

$$\begin{aligned} y_i &= y_{i-1} + f(x_{i-1}, y_{i-1})\Delta x \\ &+ \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) \Big|_{x_{i-1}} \frac{\Delta x^2}{2} + O(\Delta x^3) \end{aligned} \quad (6)$$

Al comparar (5) y (6) implica que

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 1 \\ a_2 b_1 &= \frac{1}{2} \\ a_2 c_{11} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

El cual es un sistema indeterminado de tres ecuaciones con cuatro incógnitas a_1, a_2, b_1 y c_{11} con una infinidad de soluciones. Este sistema puede ser escrito en términos de a_2

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 - a_2 \\ b_1 &= c_{11} = \frac{1}{2a_2} \end{aligned}$$

así que para un valor dado de a_2 diferentes sabores del método pueden ser construidos, todos ellos dentro de la familia de los Runge-Kutta métodos con segundo orden de precisión.

Midpoint.- Este es obtenido usando $a_2 = 1$, lo cual implica que $a_1 = 0$ y $b_1 = c_{11} = 1/2$. El método se escribe como sigue

$$\begin{aligned} y_i &= y_{i-1} + k_2 \Delta x + O(\Delta x^3) \\ k_1 &= f(x_{i-1}, y_{i-1}) \\ k_2 &= f\left(x_{i-1} + \frac{1}{2}\Delta x, y_{i-1} + \frac{1}{2}k_1 \Delta x\right) \end{aligned} \quad (7)$$

Donde k_2 es la pendiente calculada en el punto medio entre x_{i-1} y x_i .

Ralston.- Este es obtenido asumiendo que $a_2 = 2/3$ lo cual implica que $a_1 = 1/3$ y $b_1 = c_{11} = 3/4$. El método queda completamente determinado a través de las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} y_i &= y_{i-1} + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2 \right) \Delta x + O(\Delta x^3) \\ k_1 &= f(x_{i-1}, y_{i-1}) \\ k_2 &= f\left(x_{i-1} + \frac{3}{4}\Delta x, y_{i-1} + \frac{3}{4}k_1 \Delta x\right). \end{aligned} \quad (8)$$

Heun.- En este caso $a_2 = 1/2$, lo cual implica que $a_1 = 1/2$ y $b_1 = c_{11} = 1$ y finalmente se escribe como

$$\begin{aligned} y_i &= y_{i-1} + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2 \right) \Delta x + O(\Delta x^3) \\ k_1 &= f(x_{i-1}, y_{i-1}) \\ k_2 &= f(x_{i-1} + \Delta x, y_{i-1} + k_1 \Delta x). \end{aligned} \quad (9)$$

El error $+O\Delta x^3$ es local, lo cual implica que el error global es de segundo orden $+O(\Delta x^2)$.

Notese que las expansiones de arriba, incluyendo las pendientes k_2 involucran la evaluación de f en los dos argumentos (x, y) desplazados por una cantidad proporcional a Δx . En todos los ejemplos, f ha sido función solamente de la incógnita y . Específicamente en la ley de enfriamiento de Newton el lado derecho de la ecuación depende solamente de la temperatura T , no de la variable independiente t . Para el oscilador armónico notese que el lado derecho de la ecuación depende solamente de x y de y pero no de t . Esto significa que los ejemplos están asociados al sistema autónomo de ecuaciones.

III. RESULTADOS

Para resolver las ecuaciones de oscilador armónico amortiguado se utilizaron los siguientes parámetros $m = 0.5$, $k = 2$, $b = 0.075$ en el dominio $t \in [0, 100]$, con las condiciones iniciales $x(0) = 1$ y $\dot{x}(0) = 0$, las resoluciones utilizadas fueron $dt_1 = 0.05$, $dt_2 = 0.025$ y $dt_3 = 0.0125$. En 1a se muestran los resultados correspondientes al sabor Midpoint, como se puede observar para las distintas resoluciones dt_1, dt_2, dt_3 utilizadas las curvas convergen con un factor $2^2 = 4$ y $4^2 = 16$ para la otra resolución, osea converge con segundo orden (1b), como era de esperarse ya que estamos usando una precisión de segundo orden para estos métodos. En 2a podemos ahora observar los resultados correspondientes al sabor Ralston, que en semejanza con el método anterior también podemos observar que el factor de convergencia es $2^2 = 4$ y $4^2 = 16$ para la siguiente resolución, como cabria esperarse 2b. Por ultimo para el ultimo caso 3a tenemos resultados similares a los anteriores donde nuevamente nuestro factor de convergencia es $2^2 = 4$ y $4^2 = 16$ para las diferentes resoluciones (3b). Notese que los tres métodos Midpoint, Ralston y Heun tienen el mismo factor de convergencia lo cual es lógico ya que pertenecen a la misma familia de métodos Runge-Kutta los cuales para esta practica, desarrollamos con segundo orden de precisión.

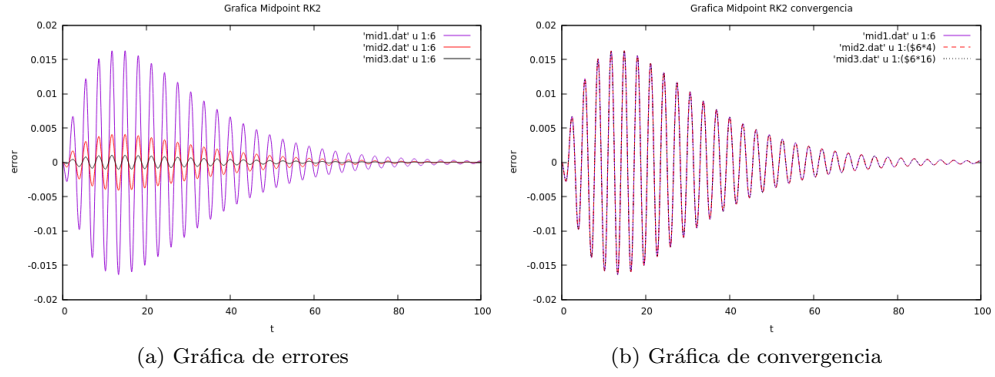


FIG. 1: Gráfica que muestra el error del método y su factor de convergencia para el método Midpoint RK2. en 1a se observa los errores para las distintas resoluciones y en 1b se muestra la convergencia de las curvas con segundo orden

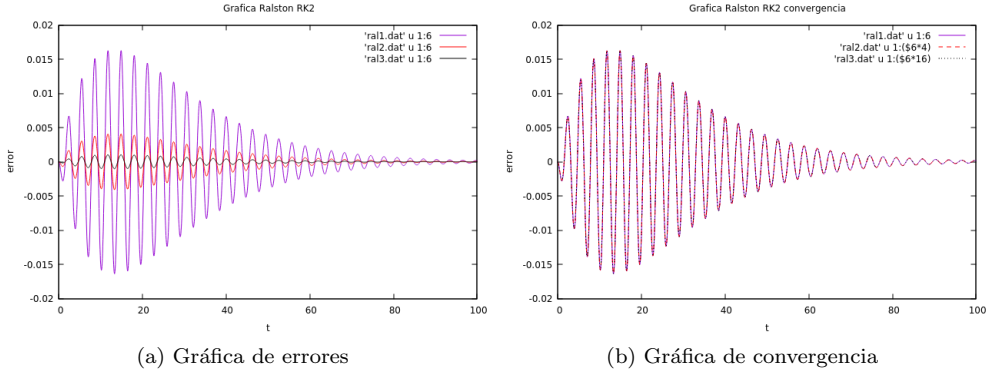


FIG. 2: Gráfica que muestra el error del método y su factor de convergencia para el método Ralston RK2. en 2a se observa los errores para las distintas resoluciones y en 2b se muestra la convergencia de las curvas con segundo orden

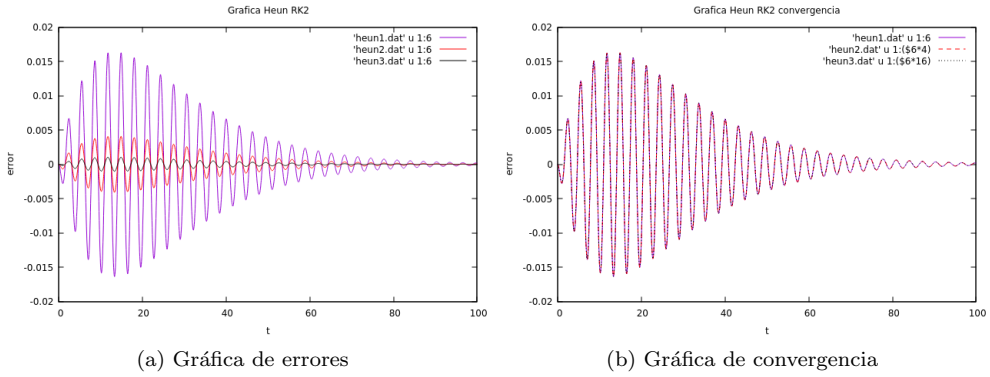


FIG. 3: Gráfica que muestra el error del método y su factor de convergencia para el método Heun RK2. en 3a se observa los errores para las distintas resoluciones y en 3b se muestra la convergencia de las curvas con segundo orden