Métodos simples para problemas de valores iniciales que involucran EDP

Ulises Maximino Garibay Valladolid
Facultad de ciencias Físico-Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Cd. Universitaria, 58040 Morelia, Michoacán
(Dated: May 28, 2020)

En esta practica el objetivo sera emplear por primera vez métodos para la resolución de ecuaciones diferenciales parciales con valores iniciales y se analizara la solución de la ecuación de onda como caso especifico.

I. INTRODUCCIÓN

Asumiremos un problema de valor inicial que consta de una ecuación diferencial parcial de segundo orden general definida en un dominio bidimensional, siendo el tiempo t una de las variables independientes y x una coordenada espacial:

$$\begin{aligned}
&combinaciones\ de \left(f, \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = 0,\ f = f(x,t) \\
&D = x \in [xmin, xmax] \times t \in [0, t_f] \quad Dominio \\
&f(x,0) = f_0(x) \quad Condiciones\ \ iniciales \\
&\dot{f}(x,0) = \dot{f}_0(x) \\
&f(x_{min}, t), f(x_{max}, t) \qquad Condiciones\ de\ frontera
\end{aligned} \tag{1}$$

Con el objetivo de resolver este problema usando aproximaciones de diferencias finitas, hay dos ingredientes básicos:

1.- Definir una version discreta del dominio D_d.
2.- construir una version discreta de la EDP, con condiciones iniciales y de frontera.

$1. -$ *El dominio discreto* D_d. Un dominio discreto simple es un conjunto de puntos $D_d = (x_i, t^k)$ donde $x_i = x_{min} + i\Delta x$ con $i = 0, ..., N_x$ y $t^n = n * \Delta t$, $\Delta x = (x_{max} - x_{min})/Nx$, $\Delta t = t_f/Nt$, son las resoluciones de espacio y de tiempo.

$2. - Version\ discreta\ de\ la\ EDP$. Necesitamos construir una version discreta de la ecuación en el dominio discreto D_d. Esto incluye la derivada espacial y la derivada temporal en la EDP de (1). Por lo tanto, un ingrediente clave es la construcción de versiones discretas de las derivadas involucradas. En lo que sigue construiremos la version discreta de la primera y segunda derivada que serán necesarias para el ejemplo que desarrollaremos.

II. DERIVADAS ESPACIALES

Para esto consideraremos la función f_i^n definida en D_d. La construcción de derivadas parciales usa expansiones de Taylor de f_i^n en vecindades cercanas. Para las derivadas a lo largo de x, los valores de la función en las vecindades cercanas son f_{i-1}^n y f_{i+1}^n.

Para la primera derivada estos valores son

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_i,t^n)} &= \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{\Delta x} + O(\Delta x) \\
\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_i,t^n)} &= \frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x) \\
\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_i,t^n)} &= \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)
\end{aligned}$$

las cuales son 3 versiones discretas de la derivada de primer orden con respecto a x definidas en D_d. Las primeras dos formulas son de primer orden de exactitud, mientras que la tercera es de segundo orden de exactitud. Sus nombres respectivos son upwind, downwind y centered respectivamente.
Ahora queremos construir la segunda derivada con respecto de x para ello necesitaremos hacer combinaciones de las expansiones de Taylor par los valores f_{i-1}^n, f_i^n, f_{i+1}^n y la segunda derivada sera:

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x_i,t^n)} = \frac{f_{i-1}^n - 2f_i^n + f_{i+1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \tag{2}$$

la cual es una version discreta centered de la segunda derivada con respecto a x definida en D_d

III. DERIVADAS DEL TIEMPO

La construcción de derivadas del tiempo es bastante similar a la construcción de las derivadas espaciales mencionadas anteriormente. se usaran expansiones de Taylor para calcular la primera derivada con respecto a t la cual es:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{(x_i,t^n)} &= \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \\
\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{(x_i,t^n)} &= \frac{f_i^n - f_i^{n-1}}{\Delta t} + O(\Delta t) \\
\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{(x_i,t^n)} &= \frac{f_i^{n+1} - f_i^{n-1}}{2\Delta t} + O(\Delta t^2)
\end{aligned}$$

Finalmente una apropiada combinación de las expansiones de Taylor para f_i^{n+1}, f_i^n y ${}_i^{n-1}$ nos da la formula de la segunda derivada con respecto al tiempo t la cual es:

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right|_{(x_i,t^n)} = \frac{f_i^{n-1} - 2f_i^n + f_i^{n+1}}{\Delta t^2} + O(\Delta t^2) \qquad (3)$$

IV. ECUACIÓN DE ONDA CON UNA DISCRETIZACION SIMPLE

Ahora usaremos la ecuación de onda para ilustrar la solución de un problema de valores iniciales asociado a una ecuación diferencial parcial, usando diferencias de aproximaciones finitas. Este ejemplo es definido en un dominio bidimencional.

El problema de valor inicial para la ecuación de onda puede ser definida como:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0 \quad \phi = \phi(x,t) \\
&D = x \in [xmin, xmax] \times t \in [0, t_f] \quad Dominio \\
&\phi(x,0) = \phi_0(x) \qquad Condiciones\ \ iniciales \\
&\dot\phi(x,0) = \dot\phi_0(x) \\
&\phi(x_{min},t), \phi(x_{max},t) \qquad Condiciones\ de\ frontera (4)
\end{aligned}$$

1.- Para la discretizacion de D_d usaremos la misma construcción descrita anteriormente.
2.- Para la version discreta de la EDP la construiremos usando las expresiones (2) y (3) como sigue:

$$\frac{\phi_i^{n-1} - 2\phi_i^n + \phi_i^{n+1}}{\Delta t^2} - \frac{\phi_{i-1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i+1}^n}{\Delta x^2} = O(\Delta t^2, \Delta x^2)$$

de lo cual es posible resolver para ϕ_i^{n+1}

$$\begin{aligned}
\phi_i^{n+1} = &\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 [\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n] \\
&+2\phi_i^n - \phi_i^{n-1} + O(\Delta x^2, \Delta t^2) \qquad (5)
\end{aligned}$$

con esta expresión podemos calcular el valor de la función de onda en el punto x_i en el tiempo t^{n+1}, en términos de los valores de ϕ en los tiempos previos t^{n-1} y t^n. Usando (5) para todo i tenemos la solución de la función de onda en el tiempo t^{n+1}, esto es, podemos construir los valores de la función de onda en los futuros tiempos en términos de sus valores en el pasado.

Con el factor de Courant-Friedichs-levy $C = \Delta t/\Delta x$ podemos definir a $\Delta t = C\Delta x$ el cual se recomienda sea $C < 1$ para que la solución sea estable.
Condiciones iniciales.- La ecuación (5) funciona solo para puntos que no están en la frontera. Explicitamente, en el tiempo inicial, para calcular ϕ_i^1 la expresión (5) necesita la información de ϕ_i^{-1} que no esta definida dentro del dominio D_d, análogamente en las fronteras espaciales, para calcular ϕ_0^{n+1} y $\phi_N^{n+1}x$ se necesitan los valores de ϕ_{-1}^n y ϕ_{Nx+1}^n los cuales no están definidos.

En este caso las condiciones iniciales están definidas como $\phi(x,0)$ y $\dot\phi(x,0)$ porque la ecuación de onda es de segundo orden en el tiempo. Para ilustrar usaremos las condiciones iniciales simétricas en el tiempo que consisten en fijar $\dot\phi(x,0) = 0$ y una distribución de $\phi(x,0)$. Esta condición refleja el echo de que la evolución tiene una simetría entre el pasado y el futuro en $t = 0$.

Para la función de onda inicial usaremos una Gaussiana

$$\phi_i^0 = Ae^{-x_i^2/\sigma^2} \qquad (6)$$

También definiremos un tiempo virtual t^{-1} y asociaremos valores para la función de onda ϕ_i^{-1}. La función de onda en el tiempo t^{-1} es obtenida por haciendo una expansión de Taylor hacia atrás en el tiempo ϕ_i^{-1} y asumiendo la simetría $\partial_t(\phi_i^0) = 0$ tenemos

$$\phi_j^{-1} = \phi_j^0 + \frac{\Delta t^2}{2}\partial_{xx}(\phi_i^0) + O(\Delta t^3) \qquad (7)$$

Ahora con (6) y (7) y aplicando condiciones de frontera respectivas que emplearemos adelante tendremos definida la solución para (5)

V. RESULTADOS Y CONCLUSIÓN

Para todas las siguientes practicas se usaran los parámetros: $[x_{min}, x_{max}] = [-1, 1]$, $Nx = 200$, $CFL = 0.5$ (solo para las 3 primeras practicas), $t_f = 2$, $A = 1.0$ y por ultimo $\sigma = 0.1$.

Practica 1.- Para este caso usamos el factor de $CFL = 0.5$ y las condiciones de frontera $\phi(-1) = \phi(1) = 0$. En V tenemos las gráficas para los tiempos $0.25, 0.75, 1.0, 1.5$ podemos observar como a medida que hacemos que el tiempo sea mayor las dos ondas se alejan una de la otra simétricamente moviéndose hacia las fronteras, después al llagar a $t = 1$ la curva se empieza a reflejar con sentido negativo y en $t = 1.5$ la curva es la misma que en $t = 0.5$ pero con sentido negativo, osea la onda esta reflejada.

Practica 2.- En este caso usaremos condiciones de frontera periódicas las cuales son:

$$\begin{aligned}
\phi(0) &= CFL^2[\phi_1^n - 2\phi_0^n + \phi_{Nx-1}^n] + 2\phi_0^n - \phi_0^{n-1} \\
\phi(Nx) &= CFL^2[\phi_1^n - 2\phi_{Nx}^n + \phi_{Nx-1}^n] + 2\phi_{Nx}^n - \phi_{Nx}^{n-1}
\end{aligned}$$

En V se pueden observar las gráficas obtenidas para los diferentes tiempos, como se puede apreciar en un principio como las ondas se alejan entre si las cuales tienen una amplitud de 0.5 y en $t = 1$ las ondas en la frontera vuelven al valor de 1.0 de amplitud y en $t = 1.5$ se nota como aproximan de nuevo hacia el centro. Este es el comportamiento periódico que se busca la onda inicia con una amplitud de 1.0 y después al pasar el tiempo se separa en dos ondas con su amplitud disminuida a la mitad, pero al llegar a la frontera vuelven a retomar su valor de amplitud 1.0 y regresan de nuevo hacia la curva original lo que hace de esto un movimiento periódico de las ondas.

Practica 3.- Ahora usaremos las condiciones de frontera de onda saliente las cuales son:

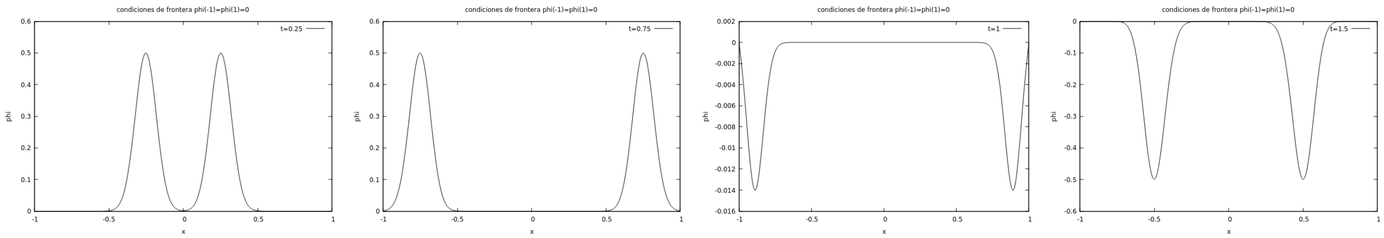
$$\begin{aligned} \phi(0) &= (CFL[-\phi_2^{n+1} + 4\phi_1^{n+1}] + 4\phi_0^n - \phi_0^{n-1})/3/(1 + CFL) \\ \phi(Nx) &= (CFL[-\phi_{Nx-2}^{n+1} + 4\phi_{Nx-1}^{n+1}] + 4\phi_{Nx}^n - \phi_{Nx}^{n-1})/3/(1 + CFL) \end{aligned} \tag{8}$$

En V se muestran los resultados para distintos valores del tiempo con estas condiciones iniciales, notese como en un principio las dos ondas empiezan a alejarse una de la otra y en $t = 1$ llegan a la frontera con la misma amplitud, después de $t = 1$ su amplitud es casi 0, esto quiere decir que en este caso se permite que la onda deje el dominio y siga su camino.
Practica 4.- para esta practica utilizamos la ecuación de onda con condiciones de frontera periódicas, ahora lo que nos interesa es analizar el factor CFL, al cual le asignaremos dos valores $CFL = 0.9$ y $CFL = 1.1$ esto es con el propósito de verificar la estabilidad del sistema ya que como se menciono en la introducción se debe cumplir que $CFL < 1$.

En V se muestran las gráficas a los distintos tiempos para el valor de $CFL = 0.9$ notese que a pesar de tener un valor muy cercano a 1 el sistema se comporta de una manera estable y de manera muy parecida al caso donde $CFL = 0.5$ descrito anteriormente en la practica 2.

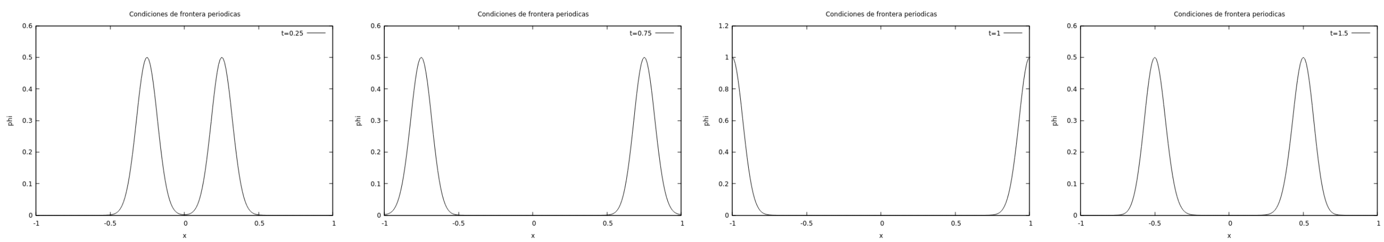
En V se muestran las gráficas correspondientes a los distintos valores en el tiempo ahora para $CFL = 1.1$. Podemos observar como en una primera etapa en $t = 0.25$ las ondas tienen un comportamiento estable, pero al poco tiempo en $t = 0.75$ la situación cambia dramáticamente y curva se dispara en los siguientes tiempos con lo cual no podemos decir que esto sea un comportamiento estable que era lo que cabria esperar ya que nuestro factor $CFL > 1$. Esto sucede de esta manera ya que al ser nuestro factor mas grande que 1 lo que esta pasando es que la amplitud de función de onda crece de manera muy rápida, en cada punto crecería al tiempo t^{n+1} con respecto al valor que tenia en el tiempo t^n, lo cual hace que no se comporte de manera estable.

De todas estas practicas podemos observar la importancia de que el factor sea $CFL < 1$ para poder trabajar en un escenario estable, también como cambia el comportamiento de la función de onda cuando cambiamos sus condiciones de frontera las cuales nos dictan diferente comportamiento al llegar a la frontera como lo vimos en las practicas y en sus gráficas asociadas a ellas, también en este caso asumimos condiciones simétricas con la primer derivada igualada a 0 sin embargo para otros propósitos esto puede cambiar.



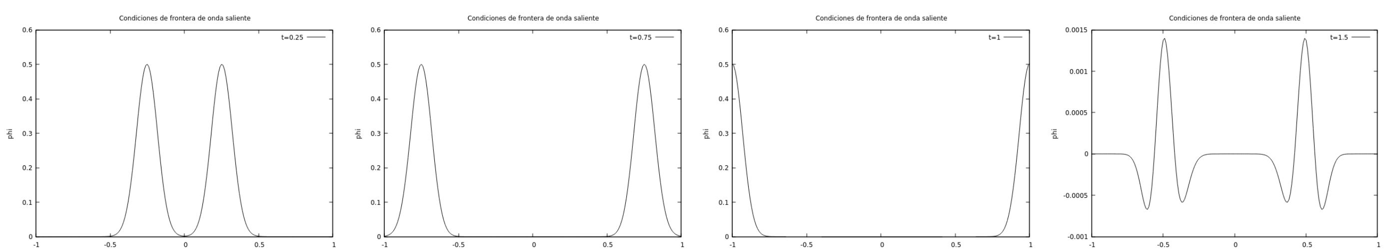
(a) t=0.25 (b) t=0.75 (c) t=1.0 (d) t=1.5

FIG. 1: Se muestran las gráficas para los diferentes tiempos con las condiciones iniciales $\phi(-1) = \phi(1) = 0$ como se puede observar en un principio las ondas se dirigen hacia la frontera y al llegar a t=1 el valor es casi 0 después las ondas cambian de signo y se dirigen de nuevo hacia el centro, dicho de otra manera existe una reflexión



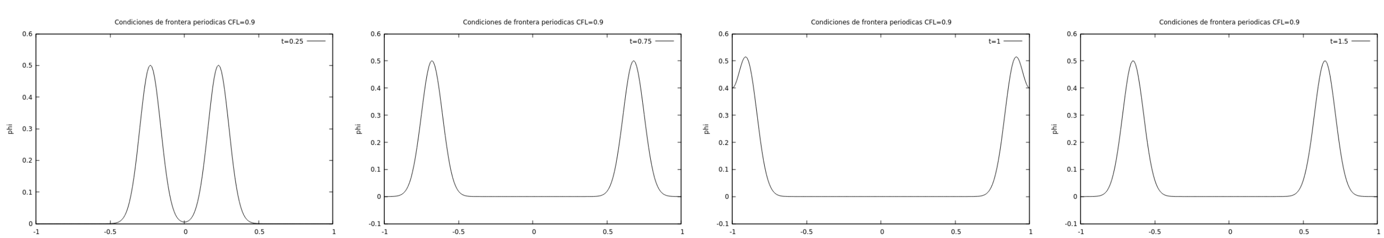
(a) t=0.25 (b) t=0.75 (c) t=1.0 (d) t=1.5

FIG. 2: Se muestra el comportamiento para las condiciones de frontera periódicas en los distintos tiempos como se puede observar las ondas se dirigen hacia la frontera en un principio y al llegar a $t = 1$ aumentan su amplitud a 1.0 después se vuelven a dirigir hacia el centro con amplitud 0.5



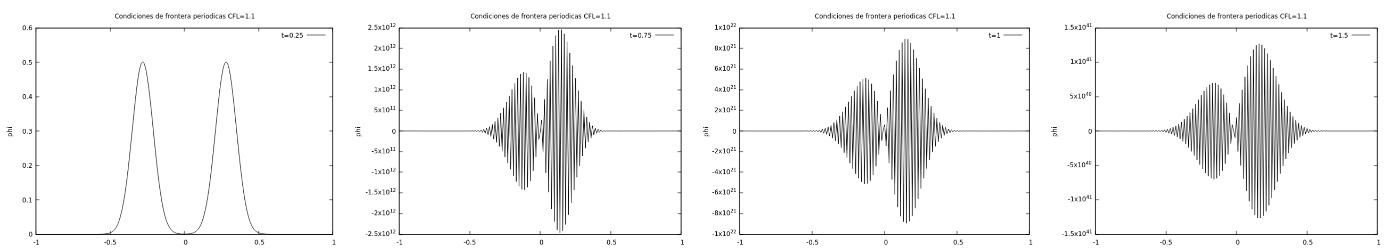
(a) t=0.25 (b) t=0.75 (c) t=1.0 (d) t=1.5

FIG. 3: se muestra el comportamiento para las condiciones iniciales de frontera de onda saliente, como se puede observar las ondas se aproximan a la frontera y al llegar ahí para los valores mas grandes a t=1 la curva se hace casi 0



(a) t=0.25 (b) t=0.75 (c) t=1.0 (d) t=1.5

FIG. 4: Se muestra el comportamiento para el caso de las condiciones periódicas en cada uno de los diferentes tiempos, con el factor $CFL = 0.9$ Se observa un comportamiento periódico y estable



(a) t=0.25 (b) t=0.75 (c) t=1.0 (d) t=1.5

FIG. 5: Se muestra el comportamiento para el caso de las condiciones periódicas en cada uno de los diferentes tiempos, con el factor $CFL = 1.1$ Se observa que el comportamiento no es estable