Método de Euler para la solución de EDO's

Ulises Maximino Garibay Valladolid
Facultad de ciencias Físico-Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Cd. Universitaria, 58040 Morelia, Michoacán
(Dated: March 28, 2020)

Como objetivo de esta practica estaremos interesados en resolver ecuaciones diferenciales por el método de euler, usando un dominio discreto como ya hemos venido utilizando anteriormente, y también una condición inicial

I. INTRODUCTION

Vamos a asumir que una ecuación diferencial ordinaria que sera integrada en el dominio $x \in [0, x_f]$ es de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

con alguna inicial condición $y(x = 0) = y_0$ donde f es una función arbitraria de la variable independiente x y de la desconocida función y

en esta practica vamos a construir una solución numérica de este tipo de ecuaciones en un dominio discreto. El método que usaremos consiste en dos pasos básicos

A. Construir una version discreta del dominio

B. Construir la solución numérica de la condición inicial en el dominio discreto

utilizaremos una discretizacion simple y uniforme del dominio, la construiremos como sigue. para un entero dado N definimos la resolución como $\Delta x = x_f/N$, entonces el dominio numerico es el conjunto discreto de $N + 1$ números reales $x_i = i\Delta x$, con $i = 0, ..., N$

la solución numérica es entonces el conjunto de valores $y_i = y(x_i)$

El paso B define los diferentes métodos numéricos para la integración, con diferente exactitud y velocidad de convergencia

Para este trabajo usaremos la ley de enfriamiento de Newton

II. LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON

Esta ley modela la manera en que una substancia adquiere la temperatura de un baño termal, por ejemplo la temperatura de una taza de cafe sometida a temperatura ambiente en una oficina. la expresion de esta ley es como sigue

$$\frac{dT}{dt} = (T_a - T) \tag{2}$$

donde T_a es la temperatura ambiente, la cual puede ser la temperatura de la habitación, k es la velocidad de enfriamiento o calentamiento de la sustancia en la habitación, dependiendo si estaba inicialmente mas caliente o mas fría que la habitación, y tiene unidades de tiempo inverso. Esta ecuación puede resolverse por separación de variables

$$T - T_a = e^{-kt+C} \tag{3}$$

con C una constante de integracion. Ahora asumiendo que la temperatura inicial de la sustancia es $T(0) = T_0$ tenemos la solucion completa

$$T = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt} \tag{4}$$

la solución converge exponencial mente en el tiempo a un valor asintotico que resulta ser la temperatura de la habitación.

III. MÉTODO DE EULER

Este método esta basado en la definición de derivada en calculo. consideremos un aumento del dominio discreto cerca de x_i, donde Δx es pequeña. entonces un aproximado valor de la derivada de la función y en x_i puede ser estimado como

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_i} \simeq \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x} \tag{5}$$

notece que esto es solo una aproximación desde que omitimos el limite cuando $\Delta x \longrightarrow 0$. Permitámonos asumir que conocemos el valor de la solución y_{i-1} en el punto x_{i-1}, entonces es posible evaluar f en $f(x_{i-1}, y_{i-1})$. Usando la expresión anterior aplicada a la original ecuación (1), implica lo siguiente

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x} \simeq f(x_{i-1}, y_{i-1}) \tag{6}$$

Esta es la version discreta de la ecuación (1) y el valor y_i es la solución de esta en el punto x_i en términos de x_{i-1}, y_{i-1}:

$$y_i \simeq y_{i-1} + f(x_{i-1}, y_{i-1})\Delta x \tag{7}$$

Esta expresión es equivalente a construir la ecuación de una linea $y = mx + b$ que pasa atraves del punto (x_{i-1}, y_{i-1}) con pendiente $m = f(x_{i-1}, y_{i-1})$ y $b = y_{i-1}$

Esta formula permite la construcción de la solución numérica de una ecuación como la ecuación (1) con una condición inicial, que en el dominio discreto corresponde a $y(x_0) = y_0$. Específicamente en el dominio discreto, conociendo y_0 podemos usar (7) para construir y_1. Con este valor, usando (7) nuevamente para obtener y_2 y continuar así hasta y_N. Todo el conjunto de valores $y_0, ..., y_N$ es la solución numérica de la ecuacion diferencial ordinaria.

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON. para construir la solución numérica de esta ecuación tenemos que identificar con base a la teoría de arriba la variable independiente $x \rightarrow t$ y la solución de la función $y \rightarrow T$. Así el dominio discreto de la solución estará dado por $t_i = i\Delta t$ para $i = 1, ..., N_t$, la temperatura tendrá los valores $T_i = T(t_i)$.

Entonces necesitamos aplicar la formula (7) a la ecuación (2), de lo cual resulta

$$T_i = T_{i-1} + k(T_a - T_{i-1})\Delta t \tag{8}$$

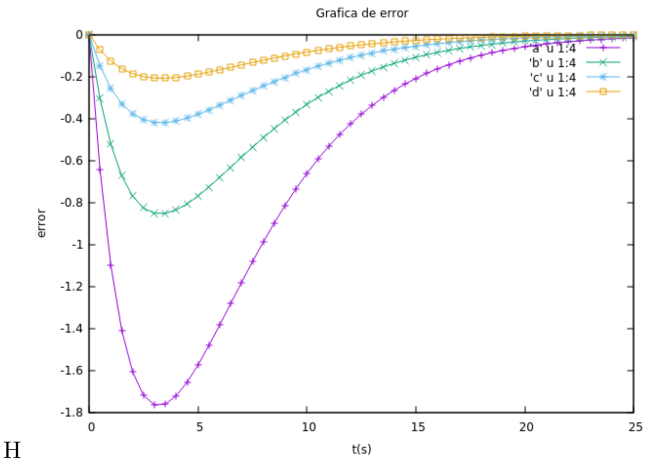
IV. RESULTADOS

OBJETIVO1. A continuación se presentaran los resultados del objetivo 1, en el cual queremos reproducir las gráficas mostradas en el pdf que se nos fue enviado, como se puede observar en las gráficas se utilizaron diferentes resoluciones, las cuales fueron $\Delta t = 0.5$, $\Delta t = 0.25$, $\Delta t = 0.125$ y $\Delta t = 0.0625$.

Como se puede observar claramente en la gráfica No. 1 el error se vuelve cada vez mas pequeño a medida que se aumenta el numero de puntos en N_t, es decir cuando la resolución tiende a ser mas pequeña el error disminuye en un factor de 2 con primer orden ya que lo que se muestra en la gráfica es el error global

A continuación la siguiente gráfica muestra la comparación entre la solución exacta y la solución numérica, como se observa, nuestra condición inicial es en $T(0) = 80$ que es la temperatura inicial, y $T_a = 20$ que es nuestro valor asintotico de la temperatura ambiente

La siguiente gráfica muestra el comportamiento cuando $Ta = 25$ y $T(0)_1 = 15$ y $T(0)_2 = 40$, como podemos observar la gráfica muestra que las temperaturas de



H

FIG. 1. Gráfica que muestra el error global entre las resoluciones

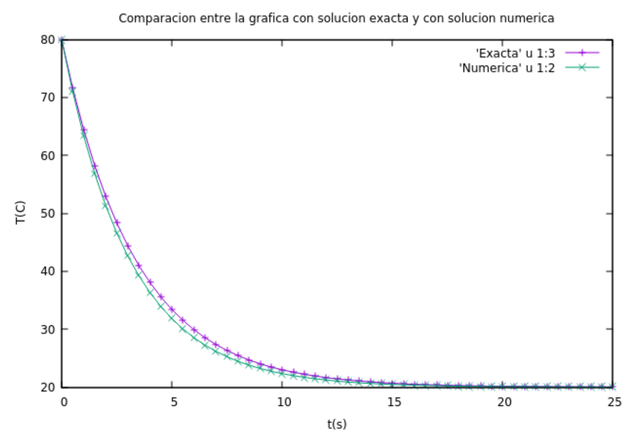


FIG. 2. Gráfica que muestra el error que existe cuando se grafica la exacta y la numérica

las sustancias después de un cierto tiempo tienden al valor de nuestra temperatura ambiente T_a.

OBJETIVO2. A continuación construimos una solución numérica para la ley de enfriamiento de newton ahora con los valores $T_a = 35$ y $T(0) = 0$, usaremos las mismas resoluciones que en el objetivo anterior y comprobaremos que converge con un factor 2.

También estaremos interesados en determinar el error local y global usando el método de Euler.

Para calcular el error global cometido al utilizar el método de Euler procedí calculando la solución exacta de la ecuación diferencial ordinaria y fui calculando cada uno de los valores en el punto t_i, ahora mediante el método de Euler calcule la solución numérica de forma iterativa, al hacer esto de este modo el error se fue acumulando dándome como resultado un error global. Para hacer el calculo de el error global y poder graficar

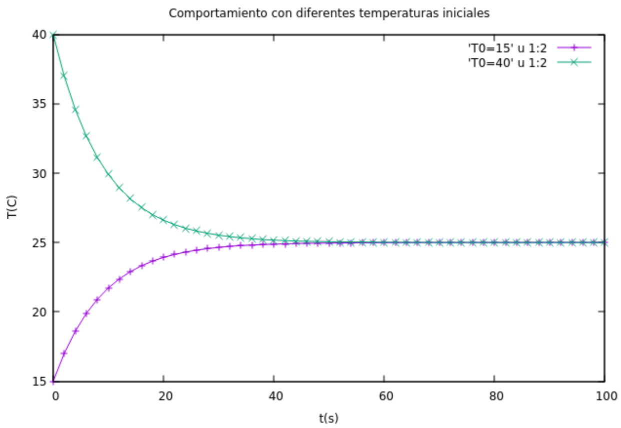


FIG. 3. muestra como dos sustancias con temperatura distinta tienden al valor de la temperatura ambiente al pasar el tiempo

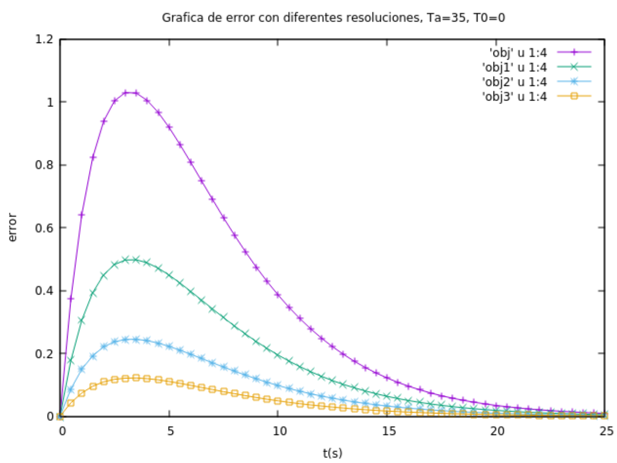


FIG. 4. Grafica que muestra el error global entre las resoluciones

el error solo basto con restar la solución exacta echa anteriormente menos la solución numérica obtenida, como la solución numérica tenia un error acumulado global, con este simple resta se pudo calcular el error global obtenido, el cual como se puede observar en la figura es de orden lineal, osea el factor de convergencia es 2 y el orden es 1.

Ahora para calcular el error local procedí analizando el error cometido entre la solución exacta en un punto t_{i+1} y la solución numérica (por el método de Euler) evaluada en el punto x_i, y_i la cual nos da una recta tangente en ese punto y la diferencia entre la "altura" de esa recta en x_{i+1}, y_{i+1} y la solución exacta en el punto t_{i+1} es precisamente el error local que queremos encontrar. Procedí resolviendo la ecuación diferencial exacta para la ley de enfriamiento de Newton para un punto arbitrario n, ahora despejando la constate de integración encontré que $C = \frac{T - Ta}{e^{-kt}}$ y sustituyendo esa

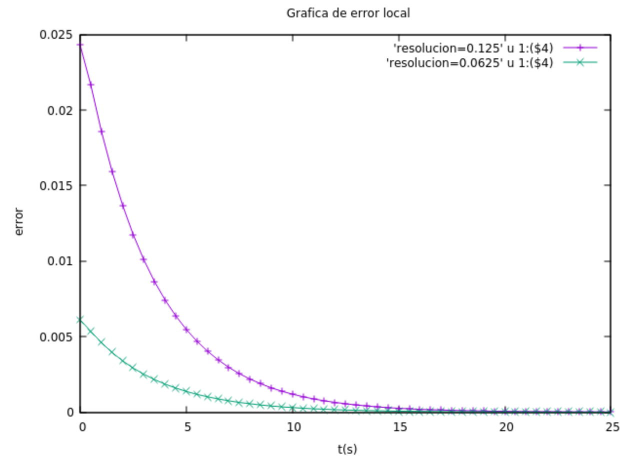


FIG. 5. Grafica que muestra el error local entre dos resoluciones

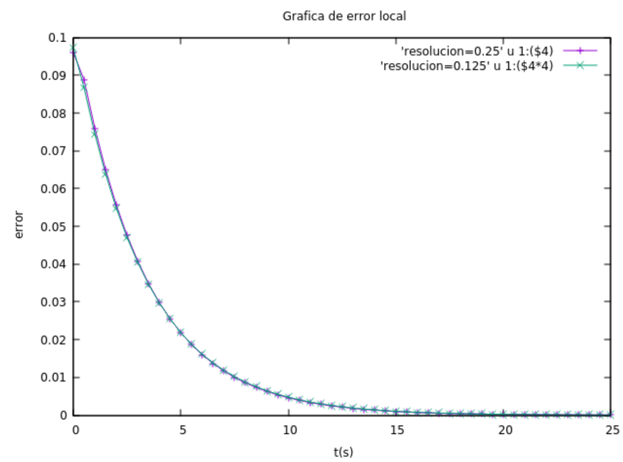


FIG. 6. Grafica que muestra que el error local entre dos resoluciones es de orden 2

constante en la solución exacta para T_{n+1} obtuve el valor exacto del punto que pasa por x_{i+1}, y_{i+1}, después al valor de la numérica en t_{i+1} le reste el valor de la exacta en t_{i+1}. Este método de construir el error en cada punto t_i me permitió obtener el error local en cada punto el cual guarde en un arreglo llamado $elol(i)$ y al graficar $t(i)$ contra $elol(i)$ obtuve la siguiente gráfica

También de los valores obtenidos y del comportamiento entre las gráficas de error local con diferente resolución, tenemos que el factor del error local es 2 y es de orden 2, osea el error local es de orden 2

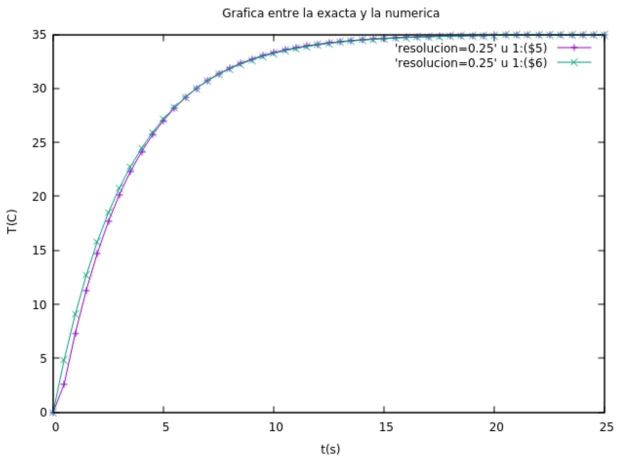


FIG. 7. Gráfica que muestra el error que hay entre la exacta y la numérica