Oscilador Armónico

Ulises Maximino Garibay Valladolid
Facultad de ciencias Físico-Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Cd. Universitaria, 58040 Morelia, Michoacán
(Dated: April 27, 2020)

En esta practica el objetivo sera resolver la ecuación diferencial de segundo orden del oscilador armónico, por los métodos numéricos empleados en la practica anterior, y también compararemos la solución exacta de nuestra EDO con nuestra solución numérica.

I. INTRODUCCIÓN

Para un resorte que obedece la ley de Hooke, sometido a una fuerza de amortiguamiento, la segunda ley de newton establece la siguiente ecuación de movimiento para un oscilador armónico amortiguado

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx - b\dot{x} \\ \ddot{x} + \frac{b}{m}\ \dot{x} &+ \frac{k}{m}x = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Donde m es la masa del oscilador, k es la constante del resorte, el termino $b\dot{x}$ corresponde al termino de amortiguamiento modelado con una función lineal de velocidad. Esta ecuación tiene una única solución con las condiciones iniciales provistas para $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$.

Cuando queremos trabajar con un ejemplo es conveniente fijar condiciones iniciales. En todos los casos asumiremos las condiciones iniciales $x(0) = 1$ y $\dot{x}(0) = 0$, esto es, el resorte estirado a la derecha de la posición de equilibrio y luego soltado en un tiempo inicial.

Para estas condiciones iniciales, en el caso del oscilador armónico simple, donde $b = 0$ la solución exacta, y su derivada contra el tiempo con las condiciones iniciales dadas es:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}e^{iwt} + \frac{1}{2}e^{-iwt} = cos(wt) \\ \dot{x}(t) &= -wsin(wt) \end{aligned} \tag{2}$$

Donde $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Para tener completamente bien definido el ejemplo que estamos trabajando fijamos los parámetros de la masa y el resorte a $m = 1/2$ y $k = 2$, entonces $w = 2$.

En este caso particular donde $b = 0$ la energía E se debería conservar sin embargo cuando utilizamos soluciones numéricas observaremos que no es así, y de echo la solución numérica por los métodos Euler y Backward Euler se parecerá mas al caso donde $b \neq 0$.

En el caso de un oscilador armónico amortiguado, donde $b \neq 0$ para las condiciones iniciales $x(0) = 1$ y $\dot{x}(0) = 0$ la solución exacta es:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\alpha t}\left[\frac{1}{\beta}sin(\alpha\beta t) + cos(\alpha\beta t)\right] \Rightarrow \\ \dot{x}(t) &= -\alpha e^{-\alpha t}\left[\frac{1}{\beta}sin(\alpha\beta t) + cos(\alpha\beta t)\right] \\ &\quad + \alpha e^{-\alpha t}\left[cos(\alpha\beta t) - \beta sin(\alpha\beta t)\right] \end{aligned} \tag{3}$$

Donde $\alpha = b/2m$ y $\beta\sqrt{|\ 1 - 4km/b^2\ |}$.

Esto significa que la energía se esta disipando o se le esta añadiendo energía al sistema y es posible calcular la velocidad de la energía perdida o aumentada

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) \\ &= (m\ddot{x} + kx)\,\dot{x} \\ &= -b\dot{x}^2 \end{aligned} \tag{4}$$

II. SOLUCIÓN NUMÉRICA

Primero notese que la ecuación diferencial del oscilador armónico simple es de segundo orden, y antes de aplicar los métodos numéricos descritos anteriormente necesitamos primero escribir la ecuación como un conjunto de 2 ecuaciones de primer orden. de echo este problema es ilustrativo porque requiere la solución de mas de una ecuación. Esto se puede hacer fácilmente definiendo $y = \dot{x}$, entonces la ecuación 1 se puede describir como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\frac{b}{m}y - \frac{k}{m}x \end{aligned} \tag{5}$$

sujeto a las condiciones iniciales que definimos en la construcción de la solución exacta $x(0) = x_0 = 1$ y $y(0) = v_0 = 0$. Notese que como en el caso previo t es la variable independiente y ahora las soluciones son x y y.

En este caso necesitamos resolver para ambas x_i y y_i en el dominio numérico discreto t_i, $i = 0, ..., t_{N_t}$. La diferencia importante de este problema con la ley de enfriamiento de Newton es que ahora x tiene pendiente $\frac{dx}{dt} = y$ y y tiene pendiente $\frac{dy}{dt}$.

Primero construiremos la solución usando el método de Euler para el sistema 5

$$\begin{aligned} x_i &= x_{i-1} + \frac{dx}{dt}(t_{i-1})\Delta t \\ &= x_{i-1} + y_{i-1}(t_{i-1})\Delta t \\ y_i &= y_{i-1} + \frac{dy}{dt}(t_{i-1})\Delta t \\ &= y_{i-1} + \left(-\frac{b}{m}y_{i-1} - \frac{k}{m}x_{i-1}\right)\Delta t \end{aligned} \tag{6}$$

Para el método de Backward Euler necesitamos calcular las derivadas de dos ecuaciones en el tiempo t_i, calcular dx/dt y dy/dt en t_i, las cuales son las pendientes de las ecuaciones lineales usadas para estimar el valor de las soluciones x_i y y_i en el tiempo t_i. Lo cual lo haremos en dos pasos:

- Avanzar de t_{i-1} a t_i de acuerdo al método de Euler

$$\begin{aligned} x_i &= x_{i-1} + y_{i-1}\Delta t \\ y_i &= y_{i-1} + \left(-\frac{b}{m}y_{i-1} - \frac{k}{m}x_{i-1}\right)\Delta t \end{aligned}$$

- Con estos valores evaluar $dx/dt(t_i)$, y $dy/dt(t_i) = -\frac{b}{m}y_i - \frac{k}{m}x_i$. Entonces la solucion en el tiempo t_i es

$$\begin{aligned} x_i &= x_{i-1} + y_i\Delta t \\ y_i &= y_{i-1} + \left(-\frac{b}{m}y_i - \frac{k}{m}x_i\right)\Delta t \end{aligned}$$

III. RESULTADOS

A continuación se muestran los resultados obtenidos para cada uno de los objetivos de esta practica, se utilizaron los siguientes parámetros para realizar nuestra practica: $m = 1/2$,$k = 2$, $b = 0$ con el objetivo de tener $\omega = 2$ en el dominio $t \in [0, 10]$, también se usaron 2 resoluciones $dt_1 = 0.025$ y $dt_2 = 0.0125$. Primero graficamos el diagrama espacial de fase para el método de Backward Euler 1b y para el método de Euler 1a, junto con la solución exacta la cual es una elipse. Sin embargo se puede observar en nuestra solución por medio de los métodos numéricos, como en el caso de el método Backward Euler la energía se disipa lo cual crea un efecto de espiral hacia adentro, y en el caso de el método Euler pasa el efecto contrario, la solución numérica inyecta energía al sistema y da un efecto de espiral hacia afuera.

Ahora si en vez de lo anterior graficamos x contra t obtendremos la gráfica del oscilador armónico, en la cual se podría esperar que la gráfica sea la de un oscilador armónico simple ya que nuestro parámetro es $b = 0$, mas sin embargo esto no sucede así por los errores acumulados de los métodos numéricos utilizados. Con el objetivo de ver que ecuación es la que mejor se ajusta a la solución numérica de cada uno de nuestros métodos empleados, procedí utilizando la estrategia 2 la cual fue hacer un fit a las gráficas resultantes de las soluciones numéricas por los métodos Backward Euler y Euler utilizando una ecuación genérica en base a un oscilador armónico amortiguado, como la ecuación (3), la cual fue $f = e^{-Bt}(Acos(Ct) + Dsin(Ct))$ al hacer el ajuste mencionado en gnuplot obtuve los siguientes valores para A, B, C, D los cuales fueron:

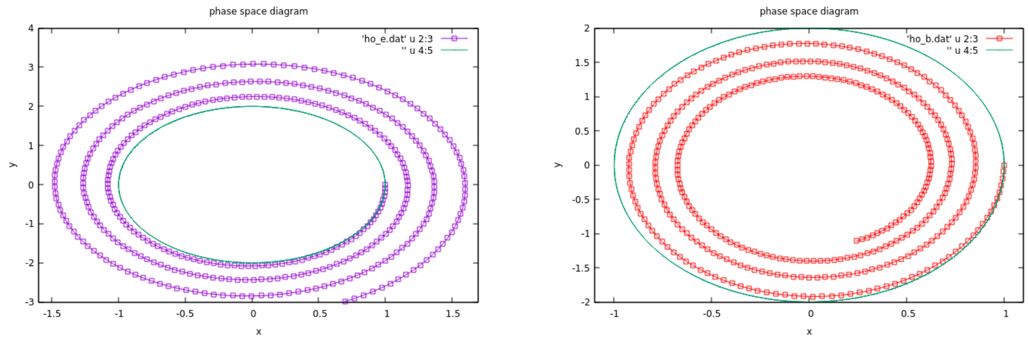
Para el método de Euler con resolución $dt_1 = 0.025$, $A = 1.0$, $B = -0.0499376$, $C = 1.99834$ y $D = -5.48038e - 16$.
Para $dt_2 = 0.0125$, $A = 1$, $B = -0.0249922$, $C = 1.99958$ y $D = -5.48038e - 16$.

Para el método de Backward Euler con resolución $dt_1 = 0.025$, $A = 1$, $B = 0.0500626$, $C = 2.00083$ y $D = -5.48038e - 16$.
Para $dt_2 = 0.0125$, $A = 1$, $B = 0.0250078$, $C = 2.00021$ y $D = -5.48038e - 16$.

De entre todos estos valores obtenidos el que nos interesara mayormente sera B ya que el objetivo principal de esta practica es determinar el coeficiente de amortiguamiento b que introducen nuestros métodos numéricos empleados. Para ello se sigue de la ecuación (3) que $b = 2mB$, como $m = 1/2 \Rightarrow b = B$ en este caso especifico.

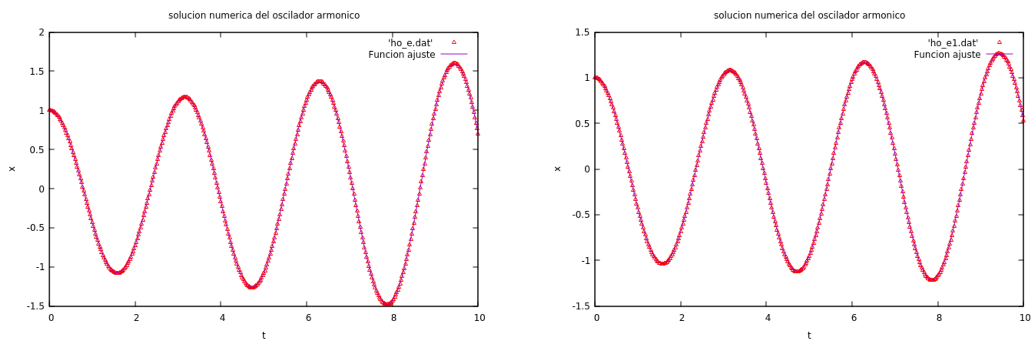
Método Backward Euler.- para este método lo que obtuvimos es que $b = 0.0500626$ para la resolución $dt_1 = 0.025$ y $b = 0.0250078$ para la resolución $dt_2 = 0.0125$, y como $b > 0$ produce una disipación de la energía 3a y 3b, también se puede observar claramente como a medida de que nuestras particiones aumentan al doble usando las dos resoluciones obtenemos que el factor de convergencia del error global es 2^1 4b, como cabria de esperarse por los trabajos echos anteriormente.

Método Euler.- En este método se observa el fenómeno contrario, obtiene que $b = -0.0499376$ para $dt_1 = 0.025$ y $b = -0.249922$ para $dt_2 = 0.0125$, ya que $b < 0$, lo cual quiere decir que al oscilador armónico se le esta aplicando cierta energía que hace crecer la amplitud del sistema (2a, 2b), de igual manera que en el método anterior podemos observar en 4a que para este método también tendremos un factor de convergencia 2^1.



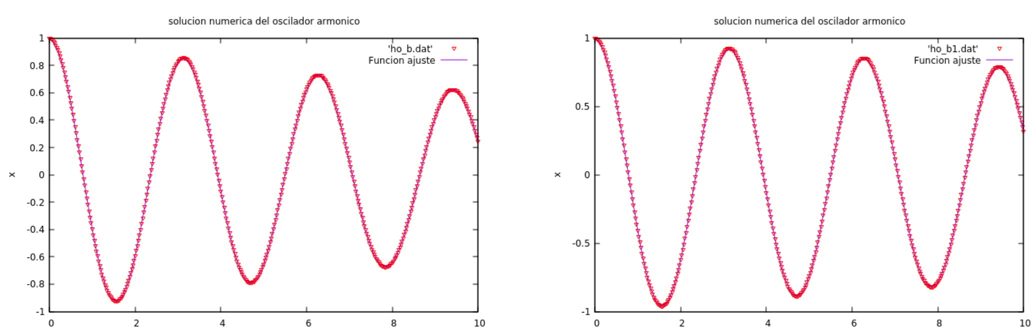
(a) Euler (b) Backward Euler

FIG. 1: Diagramas espaciales de cada uno de los métodos utilizados, donde x es la posición y y es la velocidad de la partícula que oscila



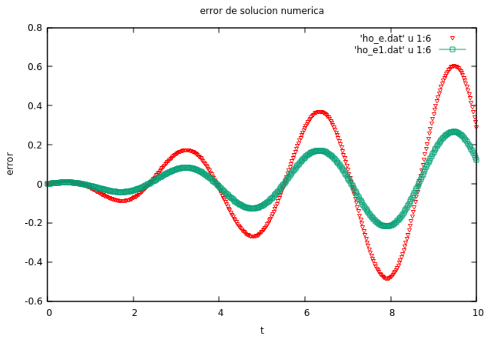
(a) Resolución $dt = 0.025$ (b) Resolución $dt = 0.0125$

FIG. 2: Gráfica de posición x contra el tiempo t utilizando el método de Euler. Como se puede observar en 2b al aumentar las particiones el método numérico tiene mas precision y se le inyecta menos energía al sistema. Note que aunque estamos resolviendo una ecuación sin amortiguamiento, el método numérico introduce una $b < 0$ para este método

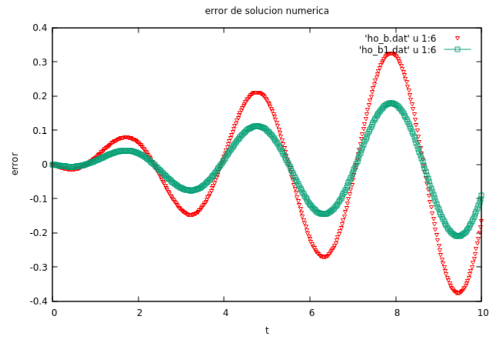


(a) Resolución $dt = 0.025$ (b) Resolución $dt = 0.0125$

FIG. 3: Gráfica de posición x contra el tiempo t utilizando el método de Backward Euler. Como se puede observar con este método se disipa la energía del sistema, y en 3b se observa que al aumentar la resolución el efecto disminuye. Note que aunque estamos resolviendo una ecuación sin amortiguamiento, el método numérico introduce una $b > 0$ para este método



(a) Error global método Euler



(b) Error global método Backward Euler

FIG. 4: En este gráfico se puede observar los errores cometidos por los métodos numéricos empleados, notese que las gráficas 4a y 4b tienen el signo opuesto, esto sucede porque el método de Euler inyecta energía al sistema mientras que el Backward Euler le resta energía