Método de Euler Backward y Euler Averaged para la solución de EDO's

Ulises Maximino Garibay Valladolid
Facultad de ciencias Físico-Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Cd. Universitaria, 58040 Morelia, Michoacán
(Dated: April 4, 2020)

Como objetivo de esta practica estaremos interesados en resolver ecuaciones diferenciales por el método de Euler Backward y Euler Averaged, usando un dominio discreto como ya hemos venido utilizando anteriormente, y también una condición inicial.

I. INTRODUCTION

Vamos a asumir que una ecuación diferencial ordinaria que sera integrada en el dominio $x \in [0, x_f]$ es de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

con alguna inicial condición $y(x = 0) = y_0$ donde f es una función arbitraria de la variable independiente x y de la desconocida función y

en esta practica vamos a construir una solución numérica de este tipo de ecuaciones en un dominio discreto. El método que usaremos consiste en dos pasos básicos

A. Construir una version discreta del dominio

B. Construir la solución numérica de la condición inicial en el dominio discreto

utilizaremos una discretizacion simple y uniforme del dominio, la construiremos como sigue. para un entero dado N definimos la resolución como $\Delta x = x_f/N$, entonces el dominio numérico es el conjunto discreto de $N + 1$ números reales $x_i = i\Delta x$, con $i = 0, ..., N$

la solución numérica es entonces el conjunto de valores $y_i = y(x_i)$

El paso B define los diferentes métodos numéricos para la integración, con diferente exactitud y velocidad de convergencia

Para este trabajo usaremos la ley de enfriamiento de Newton

II. LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON

Esta ley modela la manera en que una substancia adquiere la temperatura de un baño termal, por ejemplo la temperatura de una taza de café sometida a temperatura ambiente en una oficina. la expresión de esta ley es como sigue

$$\frac{dT}{dt} = (T_a - T) \tag{2}$$

donde T_a es la temperatura ambiente, la cual puede ser la temperatura de la habitación, k es la velocidad de enfriamiento o calentamiento de la sustancia en la habitación, dependiendo si estaba inicialmente mas caliente o mas fría que la habitación, y tiene unidades de tiempo inverso. Esta ecuación puede resolverse por separación de variables

$$T - T_a = e^{-kt+C} \tag{3}$$

con C una constante de integración. Ahora asumiendo que la temperatura inicial de la sustancia es $T(0) = T_0$ tenemos la solución completa

$$T = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt} \tag{4}$$

la solución converge exponencial mente en el tiempo a un valor asintotico que resulta ser la temperatura de la habitación.

III. MÉTODO DE EULER BACKWARD

En el método Backward Euler hay una pequeña variante con el método de Euler. La idea es la misma, usa la ecuación de una linea, la pendiente de esta linea es $f(x_i, y_i)$, evaluada en el punto x_i. La expresión para la construcción de la solución es como sigue:

$$y_i \simeq y_{i-1} + \Delta x f(x_i, y_i) \tag{5}$$

Para atender este método necesitamos primero estimar y_i usando el método de euler y entonces evaluar $f(x_i, y_i)$. La construcción de la solución en cada x_i requerirá de dos pasos.

Solución numérica.- Para comparar la solución usando este método y el de Euler usaremos la ley de enfriamiento de Newton nuevamente, con los mismos parámetros.

IV. METODO DE EULER AVERAGED

Con los dos métodos anteriores juntos, podemos construir ahora un método bastante robusto, por el ejemplo de la ley de enfriamiento de newton echo anteriormente sabemos que el método de Euler tiene signo opuesto al método de Euler Backward.

Recordemos que el método de euler esta basado en la idea de usar la ecuación de una linea con pendiente evaluada en x_{i-1}, mientras que el método de Euler Backward utiliza la ecuación de una linea con pendiente evaluada en x_i, una de ellas subestima la pendiente con respecto a la solución exacta y la otra la sobrestima. La idea ahora es utilizar la ecuación de una linea con una pendiente que es el promedio de las pendientes en x_{i-1} y x_i, y esperar que esto sea mejor que los dos métodos por separado.

Denotaremos las pendientes x_{i-1} y x_i como $k1$ y $k2$ respectivamente. Así el método puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} y_i &= y_{i-1} + \frac{1}{2}(k1 + k2)\Delta x \\ k_1 &= f(x_{i-1}, y_{i-1}) \\ k_2 &= f(x_i, y_i) \end{aligned} \tag{6}$$

En caso de la ley de enfriamiento de newton, $k_1 = \kappa(T_a - T_{i_1})$ y $k_2 = \kappa(T_a - T_i)$.

V. RESULTADOS

OBJETIVO 1 y 2. A continuación se presentaran los resultados del objetivo 1 y del objetivo 2 respectivamente, como se puede observar en VI y en VI. En las gráficas se utilizaron diferentes resoluciones, las cuales fueron $\Delta t = 0.5$, $\Delta t = 0.25$, $\Delta t = 0.125$ y $\Delta t = 0.0625$. También cabe mencionar que la condición inicial es $T(0) = 0$ y la temperatura ambiente es $T_a = 35$

VI. DISCUSIÓN

Con la ayuda de las gráficas VI y VI y analizando los resultados obtenidos, podemos ahora decir con seguridad cual es el orden y el factor de convergencia de cada método utilizado con respecto a su error local y su error global.

Observamos que para el método de Euler, el cual discutimos en el trabajo anterior, la convergencia para el error global en este método fue de primer orden y el factor de convergencia fue 2^1, esto porque nuestro numero de particiones aumentaba con un factor de 2 para obtener las diferentes resoluciones con las que trabajamos. Nuestro error local resulto ser de orden 2 y por tanto el factor de convergencia fue $2^2 = 4$ donde la base es la misma ya que utilizamos las mismas resoluciones y el exponente dos es nuestro orden.

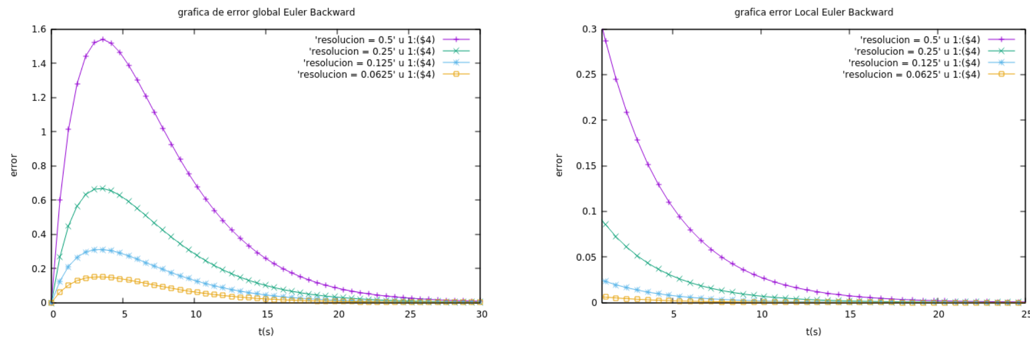
Ahora para nuestro método Backward Euler de la 3a, podemos observar para nuestro error global que nuestro factor de convergencia fue 2^1 que es el mismo que en el método de Euler, porque usamos las mismas resoluciones y nuestro orden de convergencia es 1. Para el error local 3b se puede observar que el factor de convergencia es 2^2 y por tanto nuestro orden de convergencia ahora es 2, osea el error local es de segundo orden.

Observase que tanto el método de euler y el método de Backward euler tienen el mismo error de convergencia tanto global como local, solo que en el primero el error global resulta positivo y en el otro negativo.

Por ultimo analicemos que pasa con el método de Euler Averaged, como se puede observar en la figura 4a. Para el error global este método converge con un factor de 2^2 y por tanto es de orden 2. Y el error local 4b converge con un factor 2^3 osea es de tercer orden o lo que es lo mismo de orden 3.

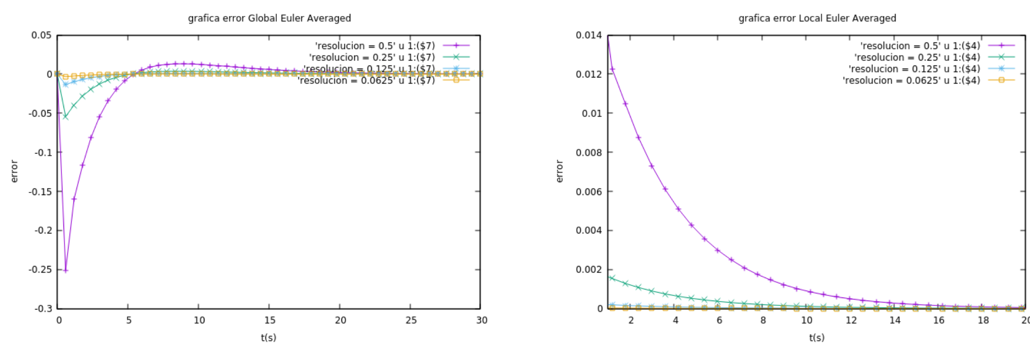
Esto sucede ya que este método se basa en la idea de una recta tangente que es el promedio de los otros dos métodos utilizados anteriormente, lo que hace que su precision mejore significativamente, es por ello que el error disminuye, y el error global es de orden 2 y el local es de orden 3.

Las diferencias entre el orden de convergencia y el factor de convergencia es que, el factor de convergencia como ya lo hemos venido diciendo, seria el numero que cuando aumentamos las particiones en un múltiplo de k con respecto a nuestra partición original el error disminuye con un factor k^n, este numero es precisamente lo que llamamos factor de convergencia, el orden de convergencia proviene de que método numérico estemos utilizando, es el numero que esta en el exponente de nuestro factor de convergencia. Resumiendo el factor de convergencia nos da la expresión de como converge nuestro error, la base k es el numero en el cual aumentamos las particiones y el exponente n es el orden de convergencia. Por ejemplo en el método de Euler Averaged tenemos que en nuestro error local 4a, 4b, el orden de convergencia n es 3, nuestra base k es 2 ya que para pasar de la resolución $\Delta t = 0.5$ a la resolución $\Delta t = 0.25$ necesitamos aumentar al doble nuestro numero de particiones. Y por lo tanto nuestro factor de convergencia k^n es 2^3. Dicho de otra manera el error local en este método se puede representar como sigue $error(\Delta t_i) \simeq (2^3) error(\Delta t_{i+1}) = (8) error(\Delta t_{i+1})$.



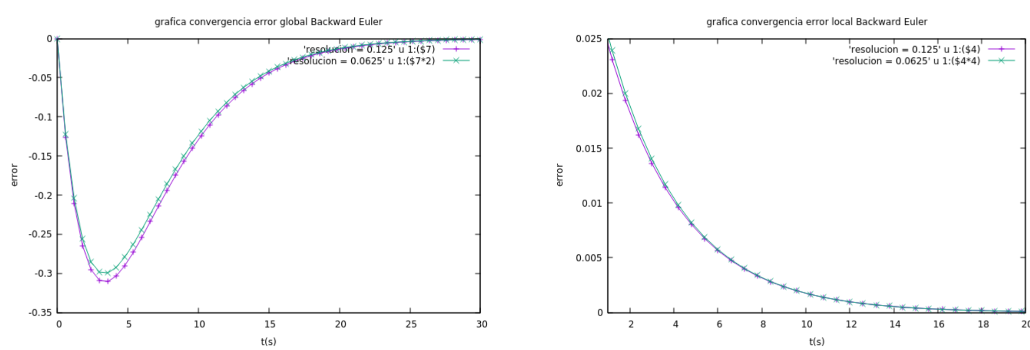
(a) Error global (b) Error Local

FIG. 1: Errores cometidos con el método Backward Euler. En 1a se muestran los errores globales con las diferentes resoluciones, en 1b se muestran los errores locales con las diferentes resoluciones



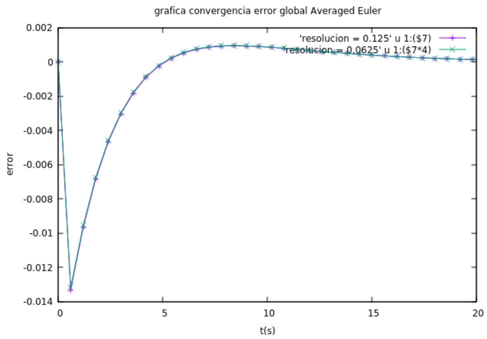
(a) Error global (b) Error Local

FIG. 2: Errores cometidos con el método Averaged Euler. En 2a se muestran los errores globales cometidos con diferentes resoluciones, en 2b se muestran los errores locales cometidos con diferentes resoluciones

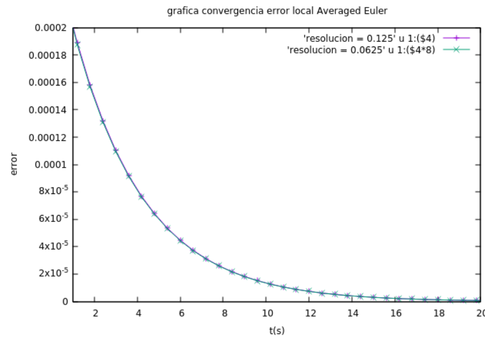


(a) Convergencia Error global (b) Convergencia Error Local

FIG. 3: Convergencia de errores, método Backward. Como se puede observar en 3a este método converge global mente con un factor 2^1, osea es de orden 1. De 3b observamos que el error local de este método converge con un factor de 2^2, osea de orden 2.



(a) Convergencia Error global



(b) Convergencia Error Local

FIG. 4: Convergencia de errores, método Averaged. Como se puede observar en 4a este método converge global mente con un factor de 2^2, osea es de orden 2. De 4b observamos que el error local de este método converge con un factor de 2^3, por tanto es de tercer orden