Lema de bombeo

Teoría Computacional - ESCOM - IPN - Prof. Rafael Aguilar

Contenido

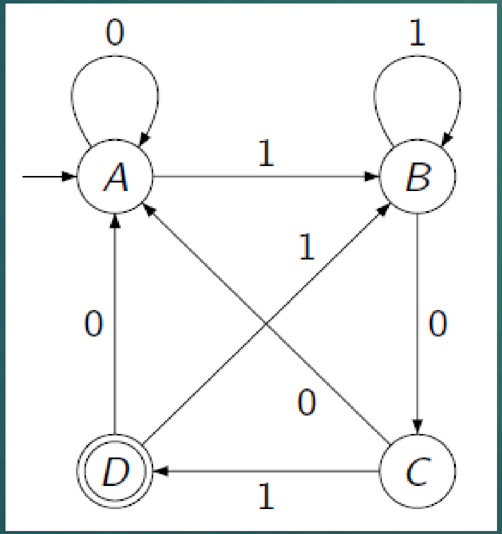
- Introducción
- Lema de bombeo
- Ejemplos
- Ejercicios

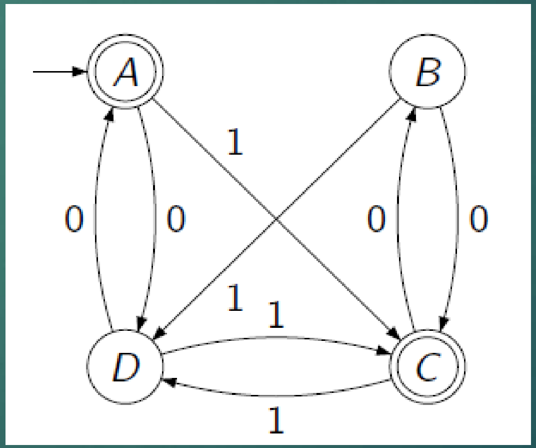
Introducción.

- Entre las propiedades de los lenguajes regulares tenemos que se pueden definir usando expresiones regulares o autómatas finitos (deterministas y no deterministas), se pueden comparar, simplificar, etc.
- Pero, ¿todos los lenguajes son regulares?
- El lema de bombeo nos permite determinar cuándo un lenguaje no es regular.

Introducción.
Los autómatas y los bucles.

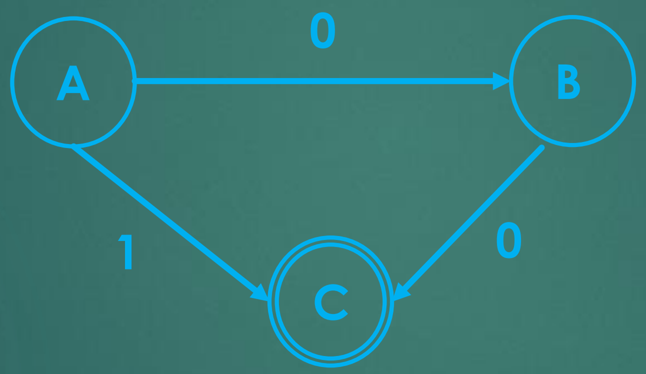
- Los bucles en los autómatas nos dan indicación de que una palabra se puede alargar indefinidamente.
- A esta acción de alargar también se le conoce como bombear.





Introducción.
Los autómatas y los bucles.

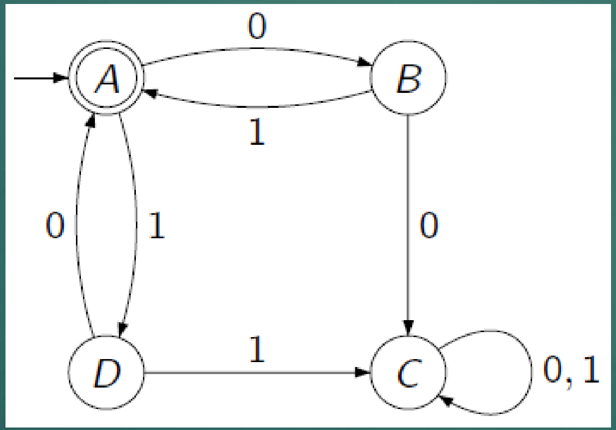
- Cuando un autómata acepta un número finito de palabras no tenemos bucles:



- Los lenguajes finitos son todos regulares.
- Nos interesan por lo tanto autómatas con bucles, en donde esté presente el bombeo porque aquí es donde podríamos tener lenguajes no regulares.

Introducción

- El lema del bombeo dice que si un lenguaje es regular, las palabras largas se pueden bombear, es decir, se puede alargar la palabra repitiendo un bucle.
- Por ejemplo, el siguiente autómata acepta la palabra 010110100101 .



- Podemos repetir el bucle (desde A) B, A,… con subcadenas 01, por ejemplo obteniendo $01(01)^{100}10100101$ también aceptada

Lema de Bombeo

- Sea **L** un lenguaje regular
- Existe una constante **n** (distinta en función de **L**) tal que para toda cadena **w** perteneciente a **L** con $|w| \geq n$, podemos descomponer **w** en tres cadenas: $w = xyz$, de modo que:
  - $y \neq \lambda$
  - $|xy| \leq n$
  - Para todo $k \geq 0$, la cadena xy^kz también pertenece a **L**.
- Si esta última cadena resultante sigue perteneciendo a **L**, decimos entones que **L** es un lenguaje regular.

Ejemplo 1

Determinar si el lenguaje representado por: **01^n0** es un lenguaje regular.

- Creamos la cadena **w**, y hacemos la constante **n=5**, de forma que se cumpla **|w|≥ n**, así tenemos:

  w = **0111110**, se cumple que **|w| ≥ 5**

- Descomponemos **w** en tres cadenas: **xyz**,

$$\underbrace{0\ 1\ 1\ 1}_{x}\ \underbrace{1}_{y}\ \underbrace{1\ 0}_{z}$$

$|xy| \leq n \rightarrow |xy| = 5$

- Comprobamos que **xy^kz ε L** para **k≥0**; hacemos k=0:

$$\underbrace{0\ 1\ 1\ 1}_{x}\ \underbrace{1^0}_{y}\ \underbrace{1\ 0}_{z} = 0\ 1\ 1\ 1\ \lambda\ 1\ 0 = 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0$$

0 1 1 1 1 0 ε L, por lo tanto L es regular

Ejemplo 2

Determinar si el lenguaje representado por: 0^n1^n es un lenguaje regular.

- Creamos la cadena **w**, y hacemos la constante **n=5**, de forma que se cumpla **|w|≥ n**, así tenemos:

  w = 0000011111, se cumple que **|w| ≥ 5**

- Descomponemos **w** en tres cadenas: **xyz**,

$$\underbrace{0\;0\;0\;0}_{x}\;\Big|\;\underbrace{0}_{y}\;\Big|\;\underbrace{1\;1\;1\;1\;1}_{z}$$

$$|xy| \leq n \rightarrow |xy| = 5$$

- Comprobamos que $xy^kz \in L$ para $k \geq 0$; hacemos k=0:

$$\underbrace{0\,0\,0\,0}_{x}\,\underbrace{0^0}_{y}\,\underbrace{11111}_{z} = 0000\;\lambda\;11111 = 000011111$$

000011111 ∉ L, por lo tanto L no es regular

Ejercicios. Determinar si son lenguajes regulares o no.

1) $L = \{ w \mid w$ tiene igual número de 0´s y 1´s $\}$
2) $L = \{ w \mid w$ tiene igual número de 01´s y 10´s $\}$
3) $L = \{ w \mid |w|_a = |w|_b = |w|_c \} = \{\lambda, abc, acb, bac, bca, cab, cba, \ldots\}$

   Sobre el alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$
4) $L = \{ 0^n 1 0^m \mid n, m \geq 0 \}$
5) $L = \{ w \mid w$ tiene la terminación 01 $\}$