Autómatas finito no determinista AFND

Contenido

Introducción

Definición formal

Equivalencia entre AFND y expresiones regulares

Ejercicios

Equivalencia entre AFND y AFD

λ-clausura

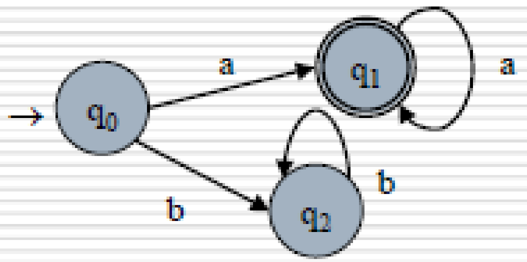
Método para pasar de un AFND a un AFD (con transiciones λ)

Autómata finito no determinista AFND

- En un **AFND** puede existir cero, una o más transiciones por cada par (estado - símbolo de alfabeto).
- Un **AFND** tiene la capacidad de estar en varios estados a la vez. Esta capacidad a menudo se expresa como la posibilidad de que el autómata "**conjeture**" algo acerca de su entrada.
- En cada momento, el **AFND** puede realizar varias transiciones diferentes entre las que deberá optar; podría incluso no optar por ninguna.
- El **AFND** puede realizar transiciones de un estado a otro sin leer ningún símbolo de entrada, mediante las denominadas **transiciones-λ** (o transiciones-ε)
- Tanto los AFD como los **AFND** pueden reconocer lenguajes generados por expresiones regulares; los **AFND** usan un menor número de estados. Un AFD puede estar contenido en su correspondiente **AFND**.

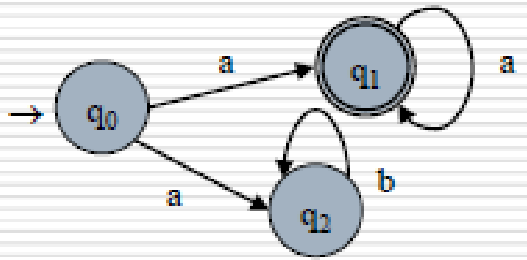
Un autómata finito es no determinista si:

- No $\exists$ f(q,a) para algún $a \in \Sigma$ desde algún $q \in Q$



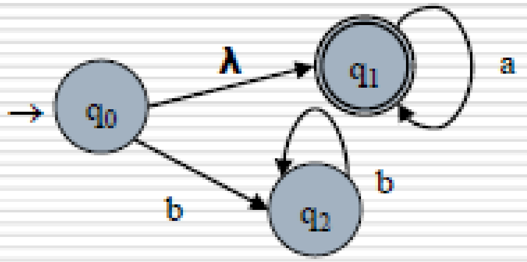
$\Sigma = \{a,b\}$

- $\exists$ mas de una f(q,a) desde $q \in Q$ con $a \in \Sigma$



$\Sigma = \{a,b\}$

- $\exists$ f(q,λ)

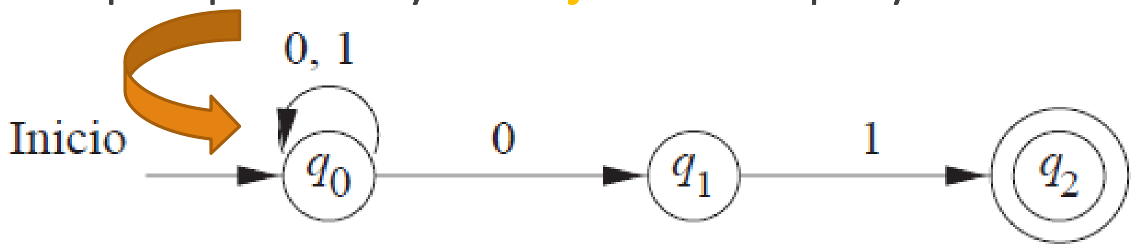


$\Sigma = \{a,b\}$

Introducción al AFND

Un **AFND** que acepta cadenas del ∑ = { 0, 1} terminadas en **01**.

El estado q_0 es el estado inicial y podemos pensar que el autómata estará en este estado (quizás entre otros estados) siempre que no haya "**conjeturado**" que ya ha comenzado a leer el **01** final.

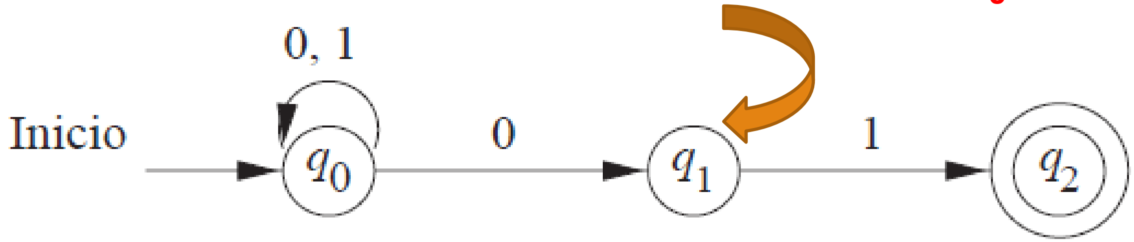


Siempre es posible que el siguiente símbolo no sea el comienzo de la cadena **01** final, incluso aunque dicho símbolo sea **0**. Por tanto, el estado q_0 puede hacer una transición a sí mismo tanto con un **0** como con un **1**.

Introducción al AFND

Un **AFND** que acepta cadenas del ∑ = { 0, 1} terminadas en 01.

Sin embargo, si el siguiente símbolo es **0**, este **AFND** también conjetura que el **01** final ha comenzado; por tanto, un arco etiquetado con **0** lleva del estado $\mathbf{q_0}$ al estado $\mathbf{q_1}$

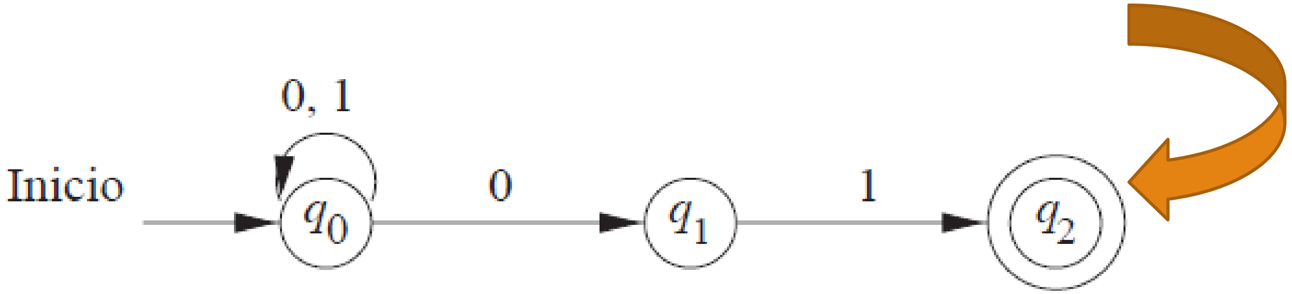


Existen dos arcos etiquetados con **0** que salen de $\mathbf{q_0}$. El **AFND** tiene la opción de pasar al estado $\mathbf{q_0}$ o al estado $\mathbf{q_1}$, y **de hecho va hacia ambos**.

Introducción al AFND

Un **AFND** que acepta cadenas del ∑ = { 0, 1} terminadas en 01.

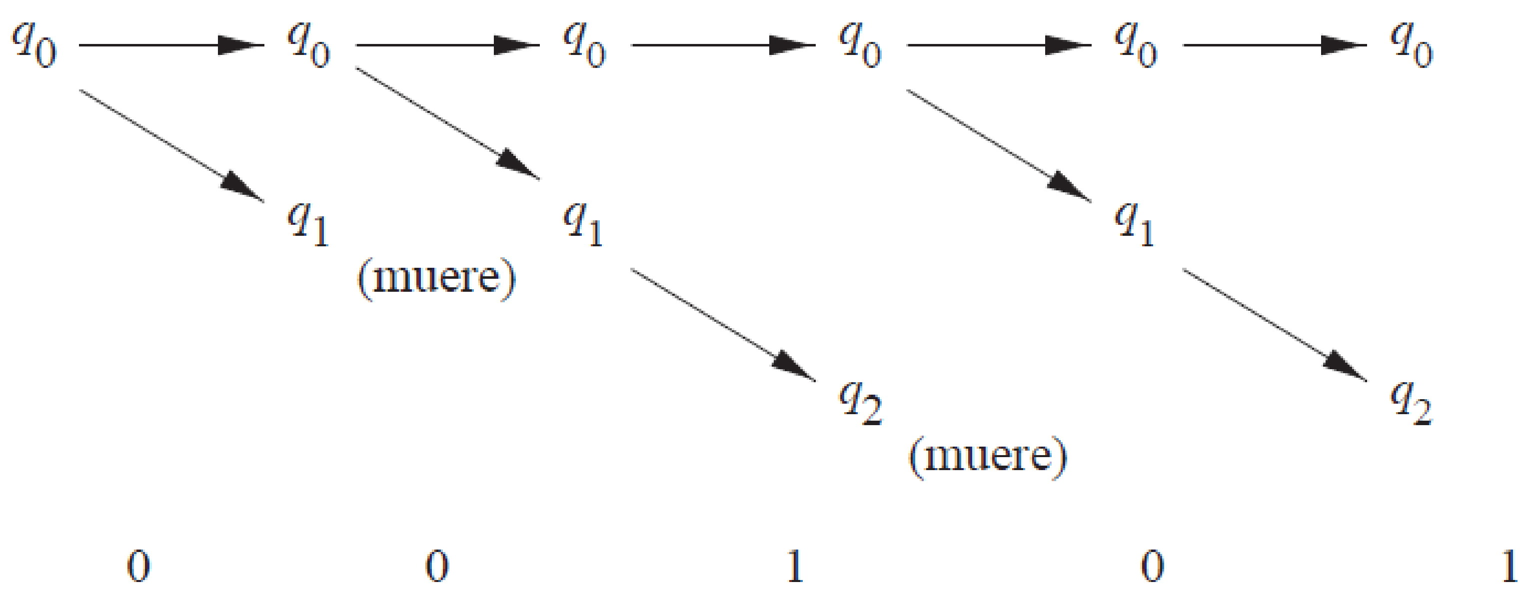
En el estado **q_1**, el **AFND** comprueba si el siguiente símbolo es un **1**, y si lo es, pasa al estado **q_2** y acepta la entrada.

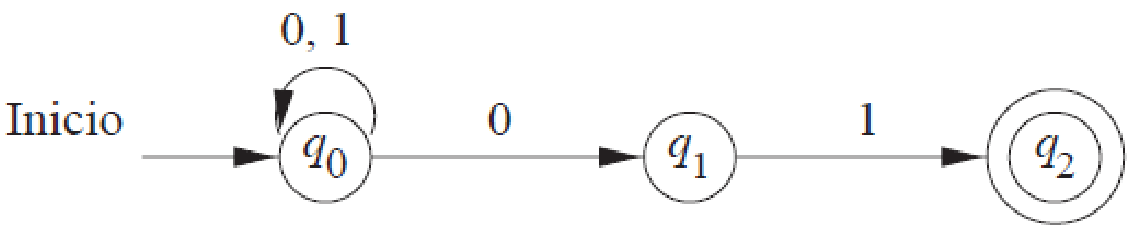


Observemos que no existe un arco que salga de **q_1** etiquetado con **0**, y tampoco hay arcos que salgan del estado **q_2**. En estas situaciones, el hilo de la existencia del **AFND** correspondiente a dichos estados simplemente "**muere**", aunque pueden continuar existiendo otros hilos.

Procesamiento de cadenas en un AFND

Veamos ahora cómo nuestro **AFND** procesa la cadena **00101**





Definición formal de un **AFND**

Un **AFND** se define como una quíntupla:

$$AFND = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$$

donde:

- Σ es el alfabeto de entrada.
- Q es el conjunto finito y no vacío de los estados del Autómata.
- δ es la función de transición, se define:

$$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{ \lambda \}) \rightarrow P(Q)$$

$P(Q)$ es el conjunto de las partes de Q (conjunto de todos los subconjuntos que se pueden formar con elementos de Q). En la entrada se permite la palabra vacía (transitar entre estados sin ninguna entrada), y se permite transitar a más de un estado (conjunto de estados) desde el mismo estado.

$q_0 \in Q$ es el estado inicial

$F \in Q$ es el conjunto de estados finales de aceptación ($F \neq 0$)

Ejemplo

Dado el siguiente AFND:

AFND = (∑, Q, f, q_0, F) ***∑ = {a, b}*** ***Q = { q_0, q_1, q_2, q_3 }*** ***F = {q_3 }***

Y con la función ***f*** dada en la siguiente tabla:

f	a	b
->q_0	{q_1, q_2}	λ
q_1	λ	{q_1, q_3}
q_2	q_2	q_3
*q_3	q_3	λ

Hallar la expresión regular que reconoce este AFND, dibujar el diagrama de estados.

Ejemplo

Dado el siguiente AFND:

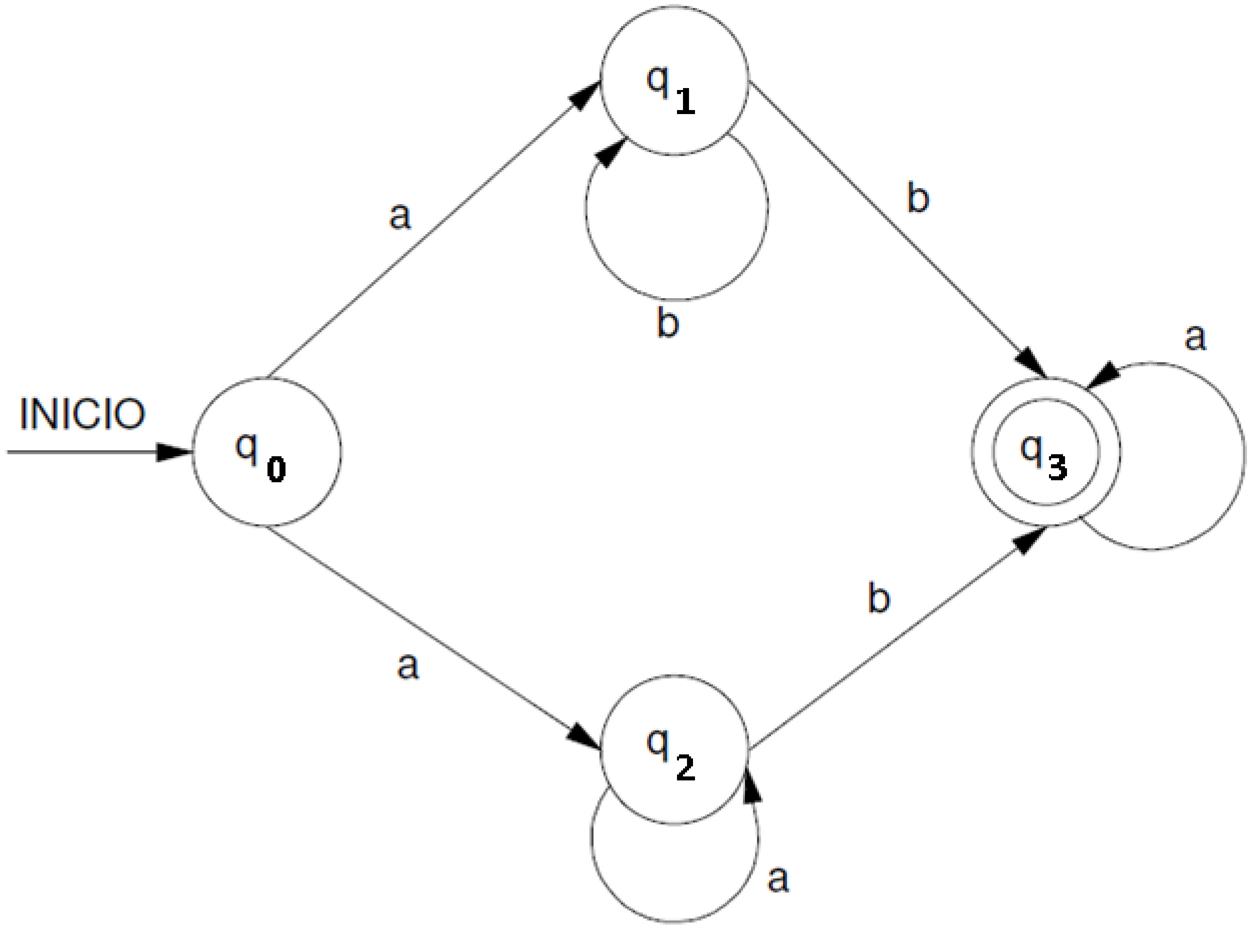
AFND = (∑, Q, f, q_0, F) ***∑ = {a, b}*** ***Q = { q_0, q_1, q_2, q_3 }*** ***F = {q_3 }***

Y con la función ***f*** dada en la siguiente tabla:

f	a	b
->q_0	{q_1, q_2}	ϕ
q_1	ϕ	{q_1, q_3}
q_2	q_2	q_3
*q_3	q_3	ϕ

Hallar la expresión regular que reconoce este AFND, dibujar el diagrama de estados.

Solución:



Expresión regular:

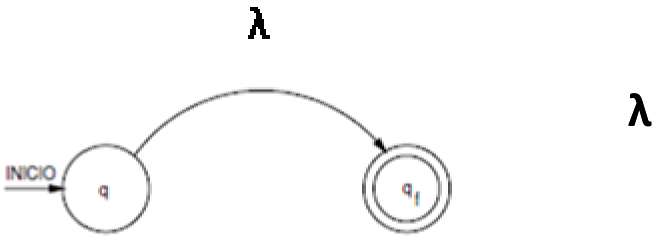
$a(b^{*}b|a^{*}b)a^{*}$

o

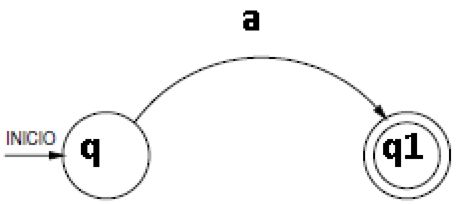
$a(b^{*}|a^{*})ba$

Equivalencia entre autómata finito y expresión regular

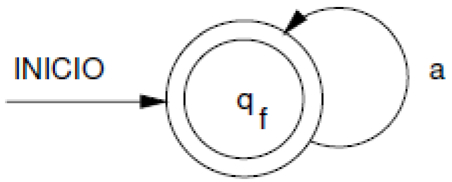
Expresión regular λ



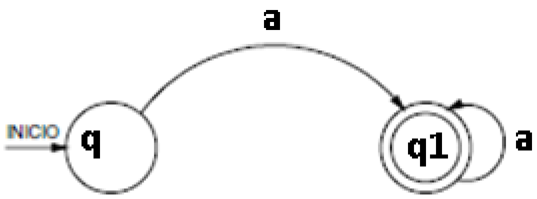
Expresión regular a



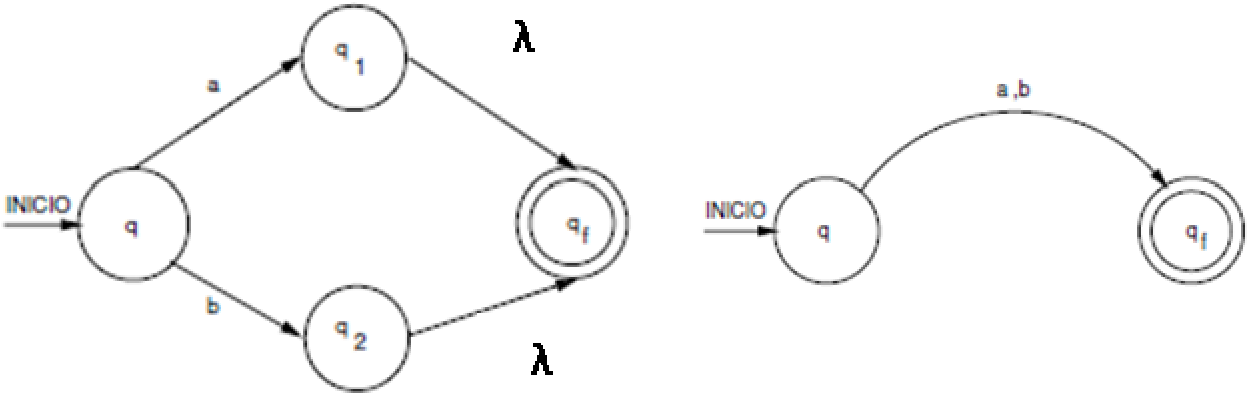
Expresión regular a^*



Expresión regular a^+



Expresión regular a|b



Ejercicios

1) Dado el siguiente AFND:

$AFND = (\Sigma, Q, f, q_0, F)$ $\Sigma = \{a, b\}$ $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$ $F = \{q_2, q_3, q_4\}$

Y con la función ***f*** dada en la siguiente tabla:

f	a	b
$\to q_0$	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_3\}$
q_1	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$
$^*q_2$	ϕ	ϕ
$^*q_3$	ϕ	ϕ
$^*q_4$	ϕ	$\{q_4\}$

Hallar la expresión regular que reconoce este AFND y dibujar el diagrama de estados del AFND.

Dibujar el diagrama de estados del AFD correspondiente a esta expresión regular ¿Cuál diagrama de estados (AFD o AFND) es más conveniente?

Ejercicios

2) Dado el siguiente AFND:

AFND $= (\Sigma, Q, f, q_0, F)$ $\Sigma = \{a, b\}$ $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ $F = \{q_0\}$

Y con la función ***f*** dada en la siguiente tabla:

f	a	b
$\rightarrow * q_0$	$\{q_1\}$	ϕ
q_1	ϕ	$\{q_0, q_2\}$
q_2	$\{q_0\}$	ϕ

Hallar la expresión regular que reconoce este AFND y dibujar su diagrama de estados.

Dibujar el diagrama de estados del AFD correspondiente a esta expresión regular ¿Cuál diagrama de estados (AFD o AFND) es más conveniente?

Ejercicios

3) Dado el siguiente AFND:

AFND = (∑, Q, f, q_0, F) ***∑ = {a, b}*** ***Q = { q_0, q_1, q_2 }*** ***F = {q_2, q_4 }***

Y con la función ***f*** dada en la siguiente tabla:

f	a	b
->q_0	{q_0, q_3 }	{q_0, q_1 }
q_1	ϕ	{ q_2 }
*q_2	{ q_2 }	{ q_2 }
q_3	{ q_4}	ϕ
*q_4	{ q_4}	{ q_4}

Dibujar el diagrama de estados del AFD correspondiente a esta expresión regular ¿Cuál diagrama de estados (AFD o AFND) es más conveniente?

Equivalencia entre AFND y AFD

Los AFND y AFD tienen el mismo poder computacional, es decir, pueden resolver los mismos problema: reconocer un lenguaje generado por una expresión regular.

Dado un AFND siempre es posible encontrar un AFD que sea equivalente.

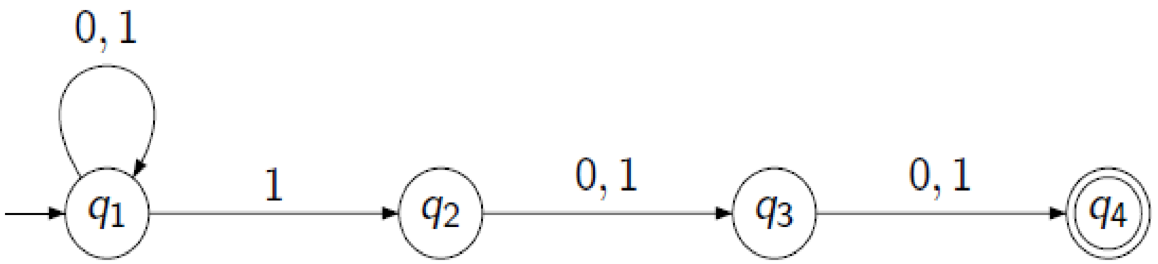
Teorema:

Dado un AFND M, existe un AFD M' tal que $L(M) = L(M')$

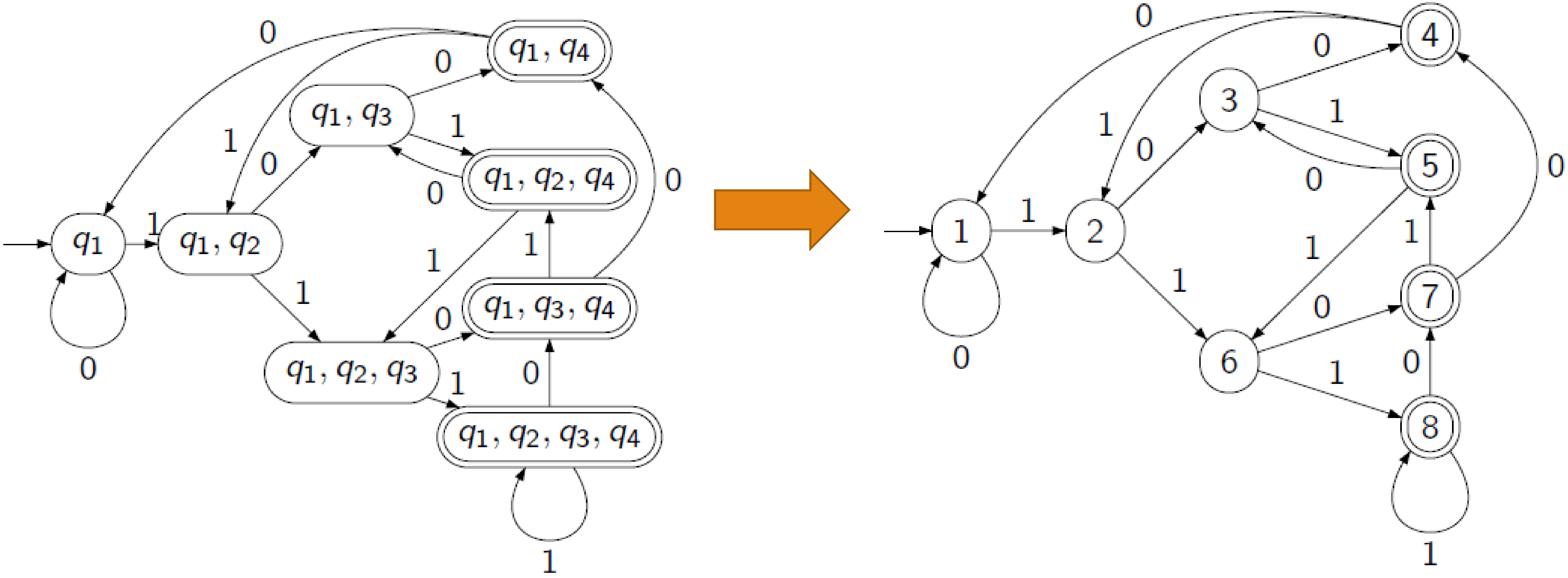
Método para pasar de un AFND a un AFD (sin transiciones λ)

1. Construir una tabla con columnas una por cada $a \in \Sigma$.
2. En la primera fila escribir $\{q_0\}$ y en la columna a escribir $\delta(\{q_0\}, a)$, es decir, todos los estados a los que puedo llegar desde q_0 con entrada a.
3. Copiar las casillas de la fila anterior como principio de nuevas filas.
4. Para cada fila R pendiente, rellenar la fila R escribiendo en cada columna a $\delta(R, a)$, es decir, todos los estados a los que puedo llegar desde algún estado de R con entrada a.
5. Copiar las casillas de la fila anterior como principio de nuevas filas.
6. Repetir los pasos 4 y 5 hasta que no queden filas por rellenar.

Ejemplo: obtener el AFD equivalente del siguiente AFND:

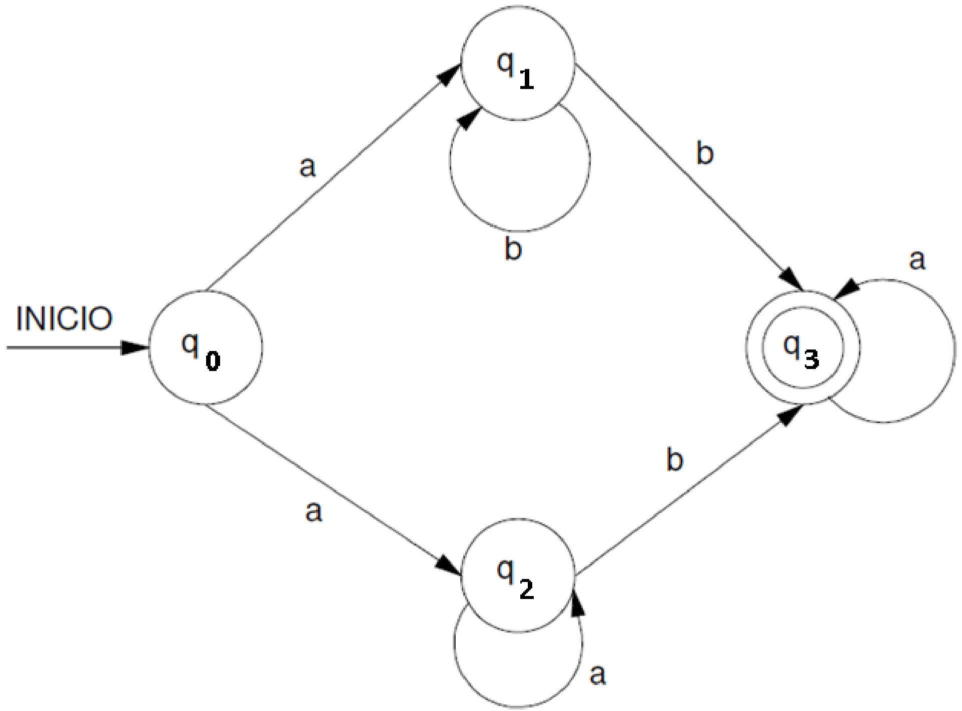


	0	1
$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$
$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$
$\{q_1, q_3\}$	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_1, q_2, q_4\}$
$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_3, q_4\}$	$\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$
$\{q_1, q_4\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$
$\{q_1, q_2, q_4\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$
$\{q_1, q_3, q_4\}$	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_1, q_2, q_4\}$
$\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$	$\{q_1, q_3, q_4\}$	$\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$


q_1
q_1, q_2
q_1, q_3
q_1, q_4
q_1, q_2, q_4
q_1, q_3, q_4
q_1, q_2, q_3
q_1, q_2, q_3, q_4
1
2
3
4
5
6
7
8

Ejercicios. Obtener el AFD equivalente de cada uno de los siguientes AFND:

1.



λ-clausura

Definición λ-clausura:

- Se llama **λ-clausura** de **un estado** al conjunto de estados a los que puede evolucionar sin consumir ninguna entrada, lo denotaremos como *CL(q)* o *λ-clausura(q)*.

- *CL(q)* se define **recursivamente**:
  - El estado q pertenece a la λ-clausura de q, $q \in CL(q)$.
  - Si el estado $p \in CL(q)$ y hay una transición del estado p al estado r etiquetada con una transición nula (λ), entonces r también está en CL(q).

- Si $P \subseteq Q$ se llama λ-clausura de un conjunto de estados P a:

$$CL(P) = \bigcup_{q \in P} CL(q)$$

Método para pasar de un AFND a un AFD (con transiciones λ)

Algoritmo de construcción de la tabla de transiciones del AFD:

1. se crea una nueva tabla *T[estado,símbolo]*, inicialmente vacía.

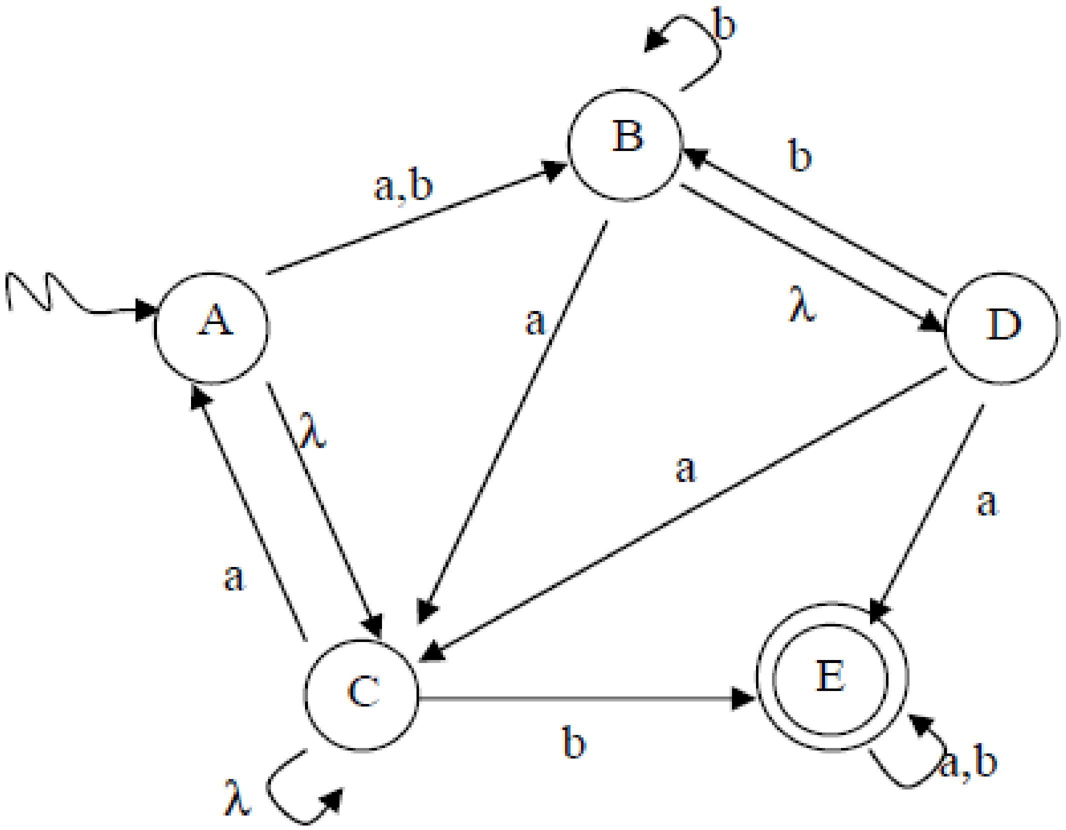
2. se calcula Q_0 = λ-clausura(q_0)

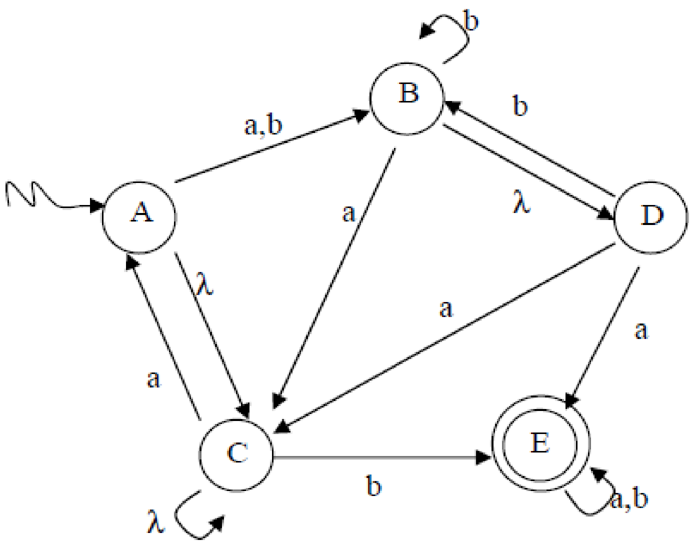
3. se crea una entrada en *T* para Q_0.

4. para cada casilla vacía *T[Q,a]* :
   1. se asigna *T[Q,a] = λ-clausura(f(Q,a))*
   2. si no existe una entrada en *T* para el estado *T[Q,a]*, se crea la entrada.

5. se repite 4 mientras existan casillas vacías.

Ejemplo 1: AFND a AFD con transiciones λ





Comenzamos calculando el estado inicial q_0 que es la λ-clausura o CL del estado inicial del AFND:

$$q_0 = CL(A) = \{A, C\}$$

a continuación calculamos la función de transición (f) para el estado q_0:

$$f(q_0, a) = CL(f(A, a) \cup f(C, a)) = CL(B, A) = \{ A, B, C, D \} = q_1$$
$$f(q_0, b) = CL(f(A, b) \cup f(C, b)) = CL(B, E) = \{ B, D, E \} = q_2$$

Continuamos calculando la función de transición para los nuevos estados que van surgiendo:

$$f(q_1,a) = CL(f(A, a) \cup f(B, a) \cup f(C, a) \cup f(D, a)) = CL(B, C, A, E) = \{A, B, C, D, E\} = q_3$$
$$f(q_1,b) = CL(f(A, b) \cup f(B, b) \cup f(C, b) \cup f(D, b)) = CL(B, E) = \{B, D, E\} = q_2$$

$$f(q_2,a) = CL(f(B, a) \cup f(D, a) \cup f(E, a)) = CL(C, E) = \{C, E\} = q_4$$
$$f(q_2,b) = CL(f(B, b) \cup f(D, b) \cup f(E, b)) = CL(B, E) = \{B, D, E\} = q_2$$

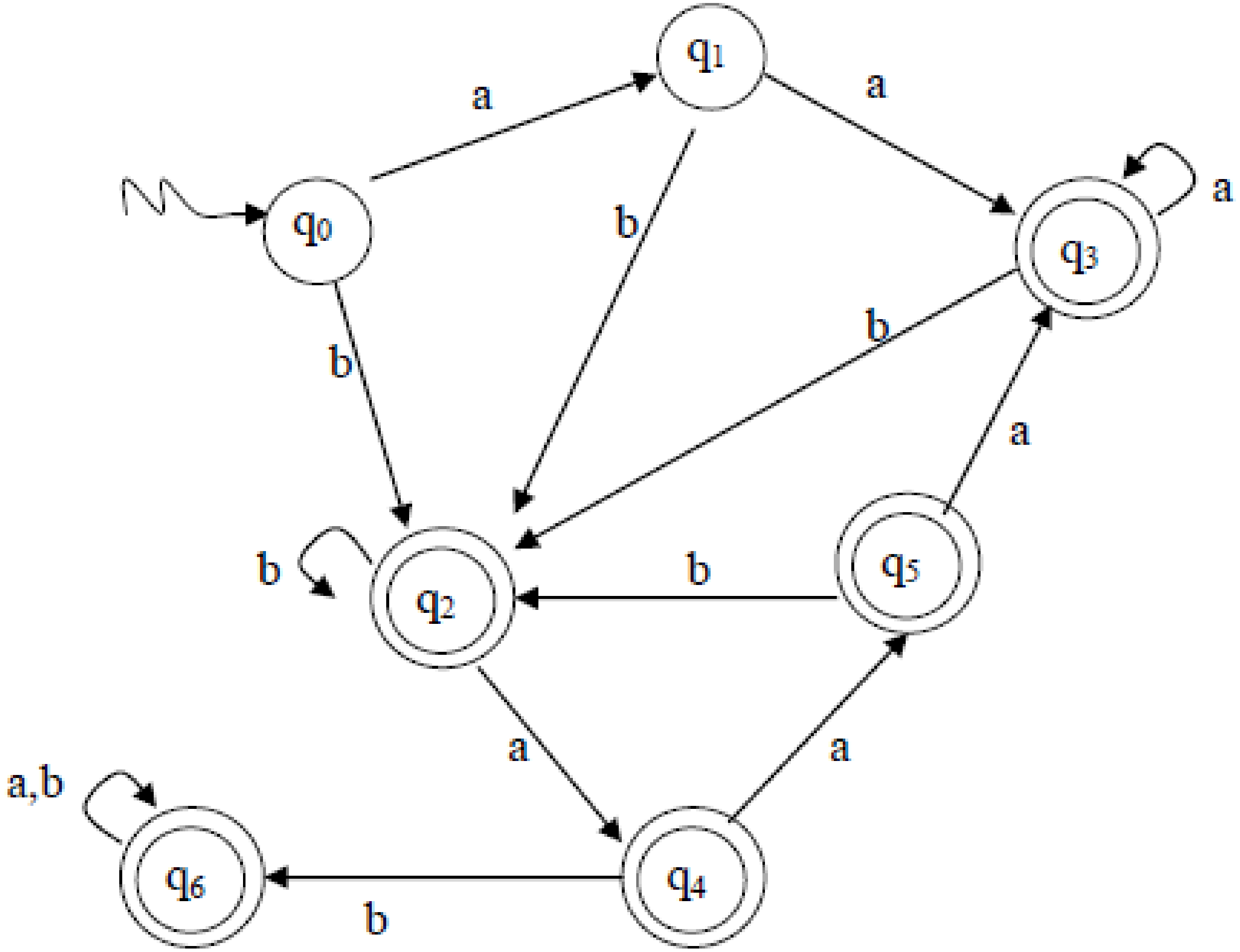
$$f(q_3,a) = CL(f(A, a) \cup f(B, a) \cup f(C, a) \cup f(D, a) \cup f(D, a)) = CL(B, C, A, E) = \{A, B, C, D, E\} = q_3$$
$$f(q_3,b) = CL(f(A, b) \cup f(B, b) \cup f(C, b) \cup f(D, b) \cup f(D, b)) = CL(B, E) = \{B, D, E\} = q_2$$

$$f(q_4,a) = CL(f(C, a) \cup f(E, a)) = CL(A, E) = \{A, C, E\} = q_5$$
$$f(q_4,b) = CL(f(C, b) \cup f(E, b)) = CL(E) = \{E\} = q_6$$

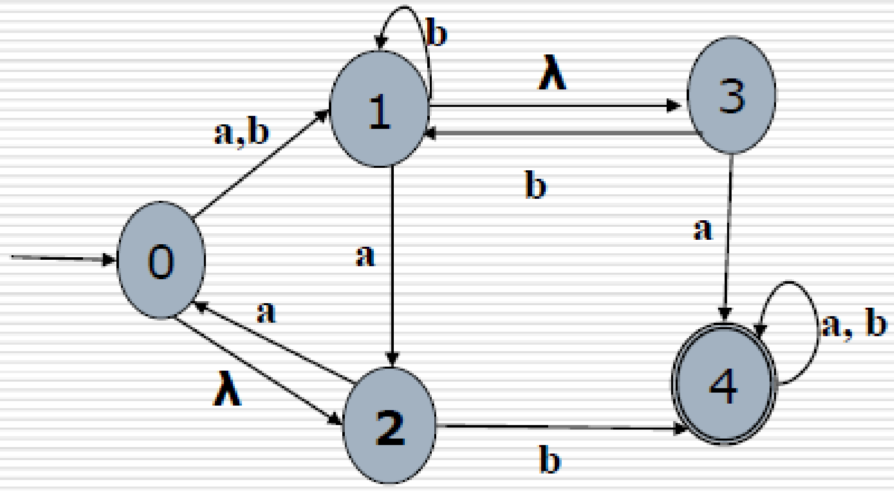
f(q5, a) = CL(f(A, a) ∪ f(C, a) ∪ f(E, a)) = CL(B, A, E) = {A, B, C, D, E} = q3
f(q5, b) = CL(f(A, b) ∪ f(C, b) ∪ f(E, b)) = CL(B, E) = {B, D, E} = q2

f(q6, a) = CL(f(E, a)) = CL(E) = q6
f(q6, b) = CL(f(E, b)) = CL(E) = q6

AFD Resultante:



Ejercicio 1: Pasar del AFND al AFD



	a	b	λ
→0	1	1	2
1	2	1	3
2	0	4	∅
3	4	1	∅
*4	4	4	∅

Solución

	a	b
$\rightarrow Q_0$	Q_1	Q_2
Q_1	Q_3	Q_2
$*Q_2$	Q_4	Q_2
$*Q_3$	Q_3	Q_2
$*Q_4$	Q_5	Q_6
$*Q_5$	Q_5	Q_2
$*Q_6$	Q_6	Q_6