Instituto Politécnico Nacional

Escuela Superior de Cómputo

Teoría Computacional

Conceptos fundamentales

Lenguajes

Prof. Rafael Aguilar
raffaello.escom@gmail.com

Contenido

- Lenguajes, definición formal
- Operaciones en lenguajes
  - Unión
  - Concatenación
  - Potencia
  - Cierre o clausura
  - Reflexión
  - Ejercicios

Lenguajes

- Se llama **lenguaje** sobre el alfabeto Σ a cualquier subconjunto del lenguaje universal de Σ.

- Se llama **lenguaje** a un conjunto (finito o infinito) de palabras sobre un alfabeto determinado.

- Un **lenguaje** es un conjunto de palabras (cadenas) de un determinado alfabeto Σ.

- **Formalmente:** Se llama **lenguaje** sobre un alfabeto a todo subconjunto del lenguaje universal de Σ.

$$L \subset W(\Sigma)$$

Lenguajes

Ejemplo 1.

$\Sigma = \{a, b, c\}$ $L_1 = \{a, c\}$ $L_2 = \{a, b\}$ $L_3 = \{b, c\}$

Ejemplo 2

Sobre el alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$ podemos considerar el lenguaje formado por todas las palabras que tienen el mismo número de a´s, b´s, y c´s.

Formalmente:

$L = \{w \mid |w|_a = |w|_b = |w|_c\} = \{\lambda, abc, acb, bac, bca, cab, cba, \ldots\}$

Definición de lenguajes por descripción de conjuntos

Lenguajes

- Otros ejemplos de lenguajes:

La lengua española, donde la colección de las palabras correctas de la lengua es un conjunto de cadenas del alfabeto que consta de todas las letras.

$\Sigma = \{$a…z }; L={a, abismo, abuelo,…}

El lenguaje de programación Java, donde los programas correctos son un subconjunto de las posibles cadenas que pueden formarse a partir del alfabeto del lenguaje Java.

$\Sigma = \{$a…z, {,},(,),…} L = { class, int, for, …}

El lenguaje de todas las cadenas que constan de *n* ceros seguidos de *n* unos para cualquier *n* >= 0:

{λ, 01, 0011, 000111, ….}

Lenguajes

- La única restricción que puede tener un lenguaje es que todos los alfabetos son finitos.

- Sin embargo un lenguaje puede tener un número infinito de cadenas o palabras mediante la notación de conjuntos.

Definición de lenguajes mediante descripción de conjuntos:

{*w* | *algo acerca de w*}   “w, tal que w es…”

Ejemplos:

{*w* | *w consta de un número igual de ceros que de unos*}
{*w* | *w es un entero binario que es primo*}
{*w* | *w es un programa en Java sintácticamente correcto*}

Lenguajes

- Este es un ejemplo ya descrito:

$L = \{w \mid |w|_a = |w|_b = |w|_c\} = \{\lambda, abc, acb, bac, bca, cab, cba, \ldots\}$
Sobre el alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$

También podemos reemplazar *w* por alguna expresión con parámetros y describir las cadenas del lenguaje estableciendo condiciones sobre los parámetros.

Ejemplos:

- $L = \{ 0^n1^n \mid n>=1 \} = \{01, 0011, 000111, \ldots\}$

Parámetros: *n*

La expresión significa: “el conjunto de palabras 0^n1^n tal que *n* es mayor o igual que 1”, o sea, el mismo número de ceros y unos en cada palabra del lenguaje L.

Lenguaje

- $L = \{ 0^i 1^j \mid 0 <= i <= j \} = \{1, 01, 011, 0111, 0011, 00111, 000111, \ldots\}$

Parámetros: *i, j*

El lenguaje L consta de cadenas formadas por ceros (puede ser ninguno) seguidos de al menos el mismo número de unos.

Lenguaje

- Ejercicios. Para cada lenguaje, dar 3 ejemplos de cadenas pertenecientes a los mismos.

a) $L = \{ a^i b^i \mid i = 1,2,3,\dots \}$

b) $M = \{a^p bc^p \mid p \geq 0\}$

c) $L = \{xy \mid x \in (ab)^i, y \in (ba)^i, i>1\}$

d) $N = \{wz \mid z \in ((ab)^{-1})^j, w \in (ab)^j, j \geq 0\}$

e) $O = \{x \mid x \in (00)^i , i>1\}$

f) $P = \{wz \mid z \in ((10)^i)^{-1}, w \in (ab)^i, i \geq 0\}$

Lenguajes

- En particular, el conjunto vacío Φ es un subconjunto de W(Σ) y se llama por ello lenguaje vacío.
- Este lenguaje no debe confundirse con el que tiene como único elemento la palabra vacía {λ}, que también es un subconjunto (diferente) de W(Σ).
- Para distinguirlos hay que observar su cardinalidad (número de símbolos):

$$C(\Phi)=0$$

$$C(\{\lambda\})=1$$

Nota:

Obsérvese que tanto Φ como {λ} son lenguajes sobre cualquier alfabeto. Por otra parte, un alfabeto puede considerarse también como uno de los lenguajes generados por él mismo, el que contiene todas las palabras de una sola letra: llamado entonces *unilateral*, $\Sigma = \{a\}$, utilizaremos la notación a^* para referirnos al lenguaje $\{a\}^*$

Operaciones en lenguajes

Unión o alternativa

Sean dos lenguajes definidos sobre el mismo alfabeto, $L_1 \subset W(\Sigma)$, $L_2 \subset W(\Sigma)$ se denomina unión de los dos lenguajes $L_1 \cup L_2$ al conjunto formado por las cadenas que pertenezcan indistintamente a uno u otro de los dos lenguajes.

$$L_1 + L_2 = \{ x \mid x \varepsilon L_1 \vee x \varepsilon L_2 \}$$

o

$$L_1 \cup L_2 = \{ x \mid x \varepsilon L_1 \vee x \varepsilon L_2 \}$$

Operaciones en lenguajes

Unión de lenguajes - Propiedades

- ***Operación cerrada***. La unión de dos lenguajes sobre el mismo alfabeto es también un lenguaje sobre dicho alfabeto
- ***Propiedad asociativa*** : $(L_1 + L_2) + L_3 = L_1 + (L_2 + L_3)$
  $(L_1 \cup L_2) \cup L_3 = L_1 \cup (L_2 \cup L_3)$

Al cumplir las dos propiedades anteriores, tenemos que la **unión de lenguajes es un *semigrupo***

- ***Existencia de elemento neutro***: cualquiera que sea el lenguaje L, el lenguaje vacío cumple que $\phi + L = L + \phi = L$

Al cumplir las tres propiedades anteriores, tenemos que la **unión de lenguajes es un *monoide***.

- ***Propiedad conmutativa***: cualesquiera que sean L_1 y L_2, se verifica que
  $L_1 + L_2 = L_2 + L_1$
  $L_1 \cup L_2 = L_2 \cup L_1$

Operaciones en lenguajes

Unión de lenguajes - Propiedades

- Al cumplir las cuatro propiedades anteriores, tenemos que la **unión de lenguajes es un *monoide abeliano***.

- ***Propiedad idempotente*** : cualquiera que sea L, se verifica que $L \cup L = L$ o $L + L = L$

Operaciones en lenguajes

Concatenación de lenguajes

- Sean dos lenguajes definidos sobre el mismo alfabeto $L_1 \subset W(\Sigma)$, $L_2 \subset W(\Sigma)$, se denomina concatenación de los dos lenguajes L_1L_2 (o $L_1 \cdot L_2$) al conjunto de todas las cadenas formadas concatenando una palabra del primer lenguaje con otra del segundo:

$$L_1L_2 = \{xy \mid x \varepsilon L_1, y \varepsilon L_2 \}$$

Nota: La definición anterior sólo es valida si L_1 y L_2 contienen al menos un elemento. Para la concatenación de L con el lenguaje vacío Φ se tiene que: $\Phi L = L\Phi = \Phi$

Operaciones en lenguajes

Concatenación de lenguajes

Ejemplos:

- Sobre el alfabeto $\Sigma = \{$a, b}

Sean L_1 = { a, ab, baa}   y L_2 = {ab, ba }

Se tiene:

L_1L_2 ={ aab, aba, abab, abba, baaab, baaba}

- { a, ab} · { b, ab} = { ab, aab, abb, abab}

- { a, ab} · { b, bb} = { ab, abb, abbb}

Operaciones en lenguajes

Concatenación de lenguajes

Ejercicio:

Sobre el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$, sean:

L1 el conjunto de palabras que tienen exactamente tantas a's como b's.

L2 el conjunto de palabras que tienen al menos tantas a's como b's.

L3 el conjunto de palabras que tienen al menos tantas b's como a's.

Encontrar:

L_1L_1, L_1L_2, L_2L_1, L_2L_2, L_1L_3, L_3L_1, L_3L_3, L_2L_3, L_3L_2

Nota: Hacer la definición de lenguajes mediante descripción de conjuntos para L_1, L_2 , y L_3.

Operaciones en lenguajes

Concatenación de lenguajes - Propiedades

- ***Operación cerrada***. La concatenación de dos lenguajes sobre el mismo alfabeto es también un lenguaje sobre dicho alfabeto.
- ***Propiedad asociativa*** : $(L_1 L_2) L_3 = L_1 (L_2 L_3)$
  $(L_1 \cdot L_2) \cdot L_3 = L_1 \cdot (L_2 \cdot L_3)$

Al cumplir las dos propiedades anteriores, tenemos que la **concatenación de lenguajes es un *semigrupo***

- ***Existencia de elemento neutro***: cualquiera que sea el lenguaje L, el lenguaje formado por la palabra vacía cumple que $\lambda L = L \lambda = L$

Al cumplir las tres propiedades anteriores, tenemos que la **concatenación de lenguajes es un *monoide***.

Operaciones en lenguajes

Unión de lenguajes - Propiedades

- ***Operación cerrada***. La unión de dos lenguajes sobre el mismo alfabeto es también un lenguaje sobre dicho alfabeto.

- ***Propiedad asociativa*** : $(L_1 \cup L_2) \cup L_3 = L_1 \cup (L_2 \cup L_3)$

Al cumplir las dos propiedades anteriores, tenemos que la **unión de lenguajes es un *semigrupo***

- ***Existencia de elemento neutro***: cualquiera que sea el lenguaje L, el lenguaje formado por la palabra vacía cumple que $\lambda \cup L = L \cup \lambda = L$

Al cumplir las tres propiedades anteriores, tenemos que la **unión de lenguajes es un *monoide***.

Operaciones en lenguajes

Potencia de un lenguaje

- Se llama **potencia** i-ésima de un lenguaje a la operación que consiste en concatenarlo consigo mismo i veces.

L^i = LLL…L (i veces)

Definiremos también:

$L^1 = L$
$L^{i+1} = L^i L = L L^i$ $(i > 0)$
$L^i L^j = L^{i+j}$ $(i, j > 0)$
$L^0 = \{\lambda\}$

Operaciones en lenguajes

Iteración, cierre o clausura de un lenguaje

- **Cierre o clausura positiva:** La operación de cierre positivo de un lenguaje L es otro lenguaje L^+ el cual se obtiene uniendo el mismo lenguaje con todas sus potencias posibles, excepto L^0.

$$L^+ = \{L\} \cup \{LL\} \cup \{LLL\} \ldots = \bigcup_{n=1}^{\infty} L^n$$

Ninguna clausura positiva contiene la palabra vacía, a menos que dicha palabra este en L.

Puesto que el alfabeto Σ es también un lenguaje sobre Σ, puede aplicársele esta operación.

$$\Sigma^+ = W(\Sigma) - \{\lambda\}$$

Operaciones en lenguajes

Iteración, cierre o clausura de un lenguaje

- **Cierre o clausura positiva**

Ejemplo:

Si $L = \{ 0 , 1\}$

entonces $L^{+} = \{ 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \ldots\}$

Operaciones en lenguajes

Iteración, cierre o clausura de un lenguaje

- **Cierre u operación estrella (cerradura de Kleene):** La operación cierre de un lenguaje L es otro L^* obtenido uniendo el lenguaje L con todas sus potencias posibles, incluso L^0.

$$L^* = \{\lambda\} \cup \{L\} \cup \{LL\} \cup \{LLL\} \ldots = \bigcup_{n=0}^{\infty} L^n$$

Puesto que el alfabeto Σ es también un lenguaje sobre Σ, puede aplicársele esta operación.

$$\Sigma^* = W(\Sigma)$$

Operaciones en lenguajes

Iteración, cierre o clausura de un lenguaje

- **Cierre u operación estrella (cerradura de Kleene):**

Ejemplo:

Si L = { 0 , 1}

entonces L^* = { λ, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, …}

Operaciones en lenguajes

Reflexión de un lenguaje

- La reflexión de un lenguaje L está formada por la aplicación de la reflexión a cada una de las palabras del lenguaje

$$L^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in L\}$$

Ejemplo: Si L = { 0, 1, 00, 10 }, entonces
L^{-1} = { 0, 1, 00, 01}

Operaciones en lenguajes

Resta

- Si L_1 y L_2 son lenguajes, la resta de L_1 y L_2, $L_1 - L_2$, contendrá todas las palabras que pertenezcan a L_1 y no pertenezcan a L_2

$$L_1 - L_2 = \{x \mid x \in L_1 \text{ y } x \notin L_2 \}$$

Ejemplo: Si $L_1 = \{ \text{nana, napa, lana} \}$ y
$L_2 = \{ \text{nana, pana, palabra, papa, pala} \}$
$L_1 - L_2 = \{ \text{napa, lana} \}$
$L_2 - L_1 = \{ \text{pana, palabra, papa, pala} \}$

Ejercicios

- Sea:
  - $\Sigma_1 = \{a,b,c,d,\ldots,z\}$
  - $L_1 = \{anita,lava,la,tina\}$
  - $L_2 = \{hola,como,estas,amigo\}$
  - $L_3 = \{a,arca,amigo,animo,teoria,grupo,salon\}$
- Obtener:
  - $(L_1 \cup L_2)\ L_3$
  - $(L_1\ L_2\ ) \cup L_3$
  - $L_1^{\,2}$
  - $L_2^{\,+}$
  - $L_2^{\,*}$
  - $L_2^{\,-1}$