Autómatas de Pila.

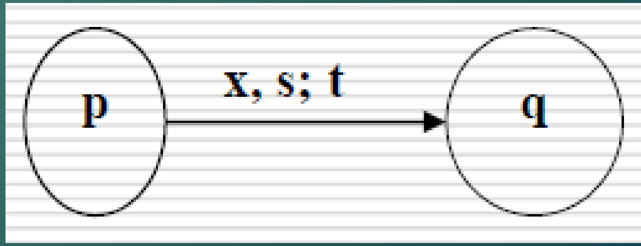
Teoría Computacional - ESCOM - IPN - Prof. Rafael Aguilar

Contenido

- Introducción
- Definición
- Ejemplos
- Ejercicios

Introducción

- Cualquier lenguaje generado por una GIC puede ser reconocido por un Autómata de Pila (AP)
- Un AP es un Autómata Finito al que se le ha incorporado **memoria que se gestiona como una pila**, con lo que se aumenta su poder funcional.
- En la pila se almacenan símbolos de la cadena de entrada y de la gramática, así como caracteres especiales (#) para indicar el estado de pila vacía.
- Las transiciones son de la forma: **(p, x, s; q, t)**
  - p= estado inicial
  - q= estado al que pasa o llega
  - x= símbolo de la cadena de entrada
  - s= símbolo que extraemos de la pila
  - t= símbolo que ingresamos en la pila



Autómata de Pila – Definición formal

- Definimos formalmente un AP de la siguiente forma:

$$AP = \{ Q, \sum, \Gamma, f, q_0, z_0, F \}$$

donde :

Q es el conjunto finito de estados

$\sum$ es el alfabeto de la cinta de entrada

f es la función de transferencia

Γ es el alfabeto de la pila

q_0 ε **Q** es el estado inicial

z_0 ε **Γ** es el símbolo inicial de la pila

F c Q es el conjunto de estados finales

Autómata de Pila – Definición formal

- Definimos formalmente un AP de la siguiente forma:

$$AP = \{ Q, \sum, f, \Gamma, q_0, z_0, F \}$$

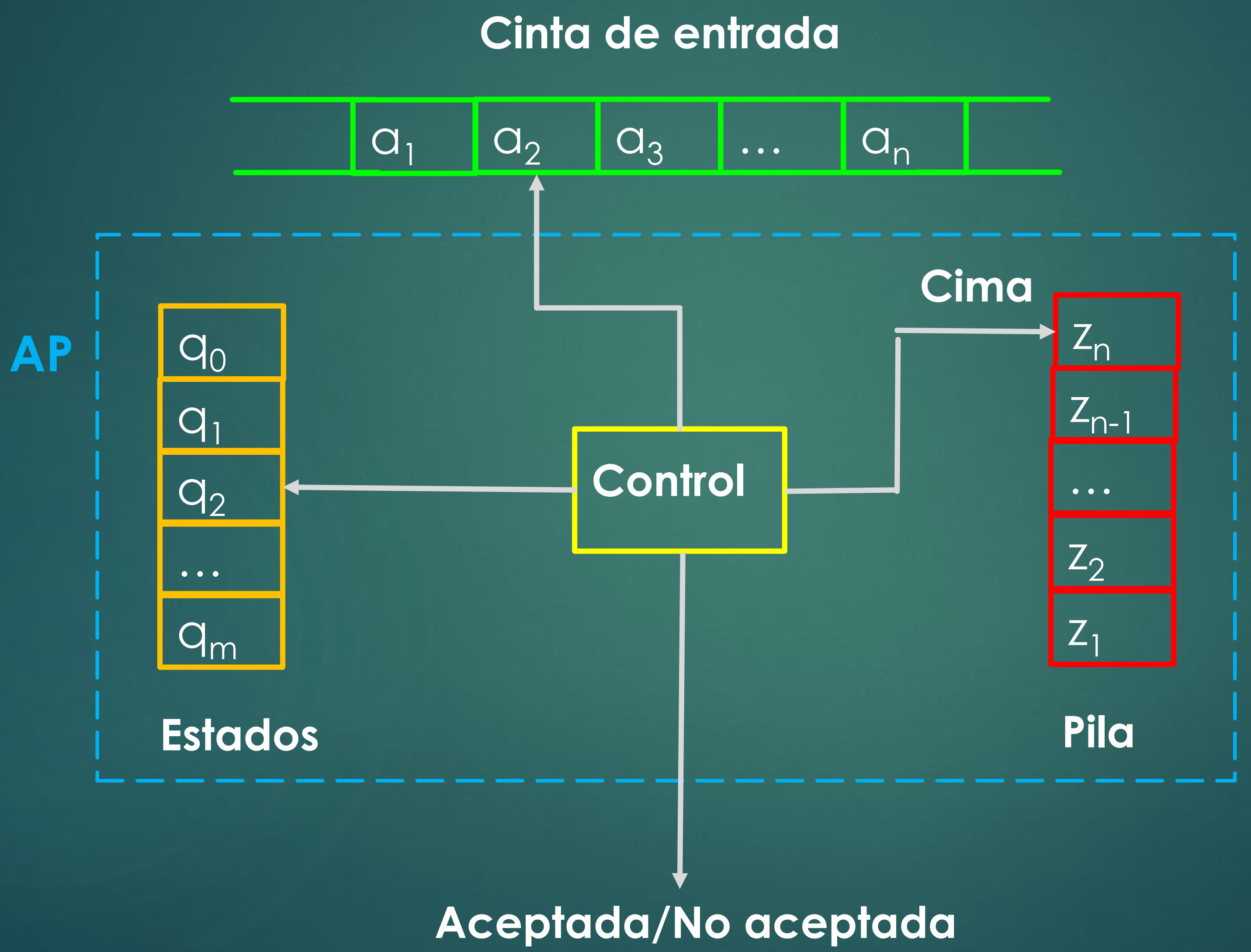
donde :

$f : Q \times (\sum \cup \lambda) \times \Gamma \rightarrow P(Q \times \Gamma^*)$

$f(q, a, z) = \{ (p_1, \Psi_1), (p_2, \Psi_2), \ldots, (p_n, \Psi_n) \}$

Estas transiciones indican que si el AP se encuentra en el estado **q**, recibe como entrada el símbolo **a** y **z** es el símbolo que se encuentra en la cima de la pila, el Autómata puede pasar al estado p_1 y reemplazar en la pila el carácter **z** por la cadena Ψ_1, o bien elegir cualquiera de las otras posibilidades.

AP – Concepto gráfico



Movimientos en un AP.
Dos tipos de transiciones:

1) Cuando hay un símbolo de la entrada, **$a \varepsilon \Sigma$**, si está en el estado **$q \varepsilon Q$**, hay un símbolo en la cima de la pila **$Z \varepsilon \Gamma$**, y la función de transición para esta terna es:

$$f(q, a, Z) = \{ (q_1, z_1), (q_2, z_2), \ldots, (q_n, z_n)\}, (q_i \varepsilon Q, z_i \varepsilon \Gamma^*)$$

Entonces:

- transita a uno de los estados **q** **$(q \varepsilon Q)$** (determinista o no determinista),
- se quita de la pila el símbolo **Z**,
- se introducen en la cima de la pila los símbolos que formen parte del **z_i** correspondiente,
- y se sitúa la cabeza de lectura en el siguiente símbolo de la entrada,

La introducción de la palabra **$z_i = Z_1Z_2 \ldots Z_n$ $(Z_1 \varepsilon \Gamma)$** correspondiente, se realiza de forma inversa: primero **Z_n**, luego **Z_{n-1}**, hasta llegar a **Z_1**.

Movimientos en un AP.
Dos tipos de transiciones:

2) Cuando no se lee ningún símbolo de la entrada, si está en el estado **q ε Q**, hay un símbolo en la cima de la pila **Z ε Γ**, y la función de transición para la terna es:

$$f(q, \lambda, Z) = \{ (q_1, z_1), (q_2, z_2), \ldots, (q_n, z_n)\}, \ (q_i \in Q, z_i \in \Gamma^*)$$

Entonces:

- transita a uno de los estados q_i (**q ε Q**) (determinista o no determinista),
- se quita de la pila el símbolo **Z**,
- se introducen en la cima de la pila los símbolos que formen parte del z_i correspondiente,
- y **no se mueve** la cabeza de lectura de la entrada.

Ejemplo de AP. El AP_1 reconoce el lenguaje formado por ***n*** unos seguidos de ***n*** ceros, ***n>=1***

- **AP_1 = ({ 0, 1 }, { A, 1, 0 }, { q_0, q_1}, A, q_0, f, ϕ)**

  Donde f se define como:

  $f(q_0, 1, A) = \{ (q_0, 1A)\}$

  $f(q_0, 1, 1) = \{ (q_0, 11)\}$

  $f(q_0, 0, 1) = \{ (q_1, \lambda)\}$

  $f(q_1, 0, 1) = \{ (q_1, \lambda)\}$

  $f(q_1, \lambda, A) = \{ (q_1, \lambda)\}$

  Para el AP_1 veremos los movimientos dada la palabra de entrada 1100.

- Se comienza con el estado q_0 y en la pila solo está el símbolo ***A*** (figura 1). Dado que el primer símbolo de la entrada es un **1**, y en la cima está ***A***, y la función de transición para estos tres elementos es $f(q_0, 1, A) = \{ (q_0, 1A)\}$, se transita al estado q_0 , se elimina de la pila **A**, y se añade **1A**, poniendo el **1** en la cima de la pila (figura 2).

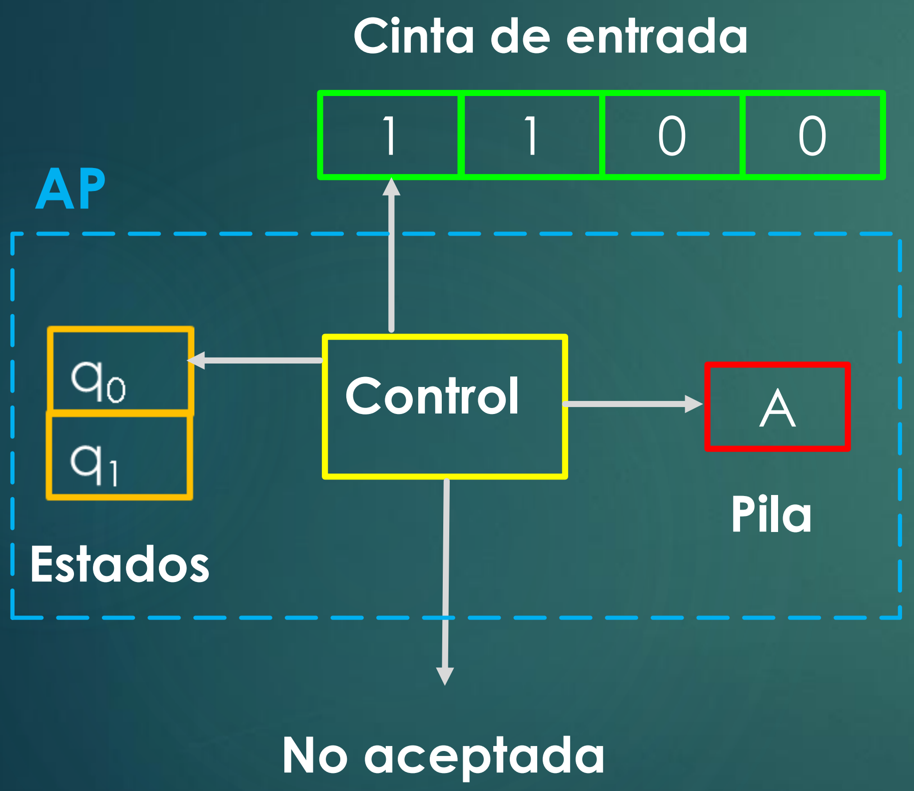


Figura 1

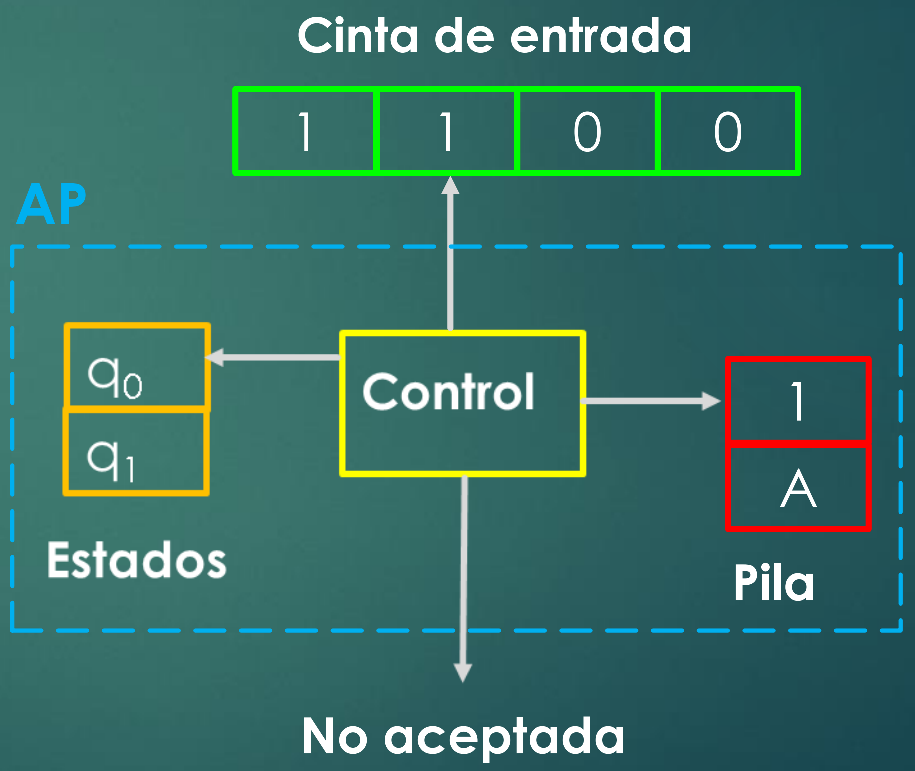


Figura 2

- Se lee el siguiente símbolo de la entrada (**1**) y, con la cima de la pila (**1**), la función de transición es ***$f(q_0, 1, 1) = \{ (q_0, 11)\}$*** . Por tanto se transita al estado ***q_0***, se elimina el **1** de la cima de la pila y se añaden dos unos, con lo que queda ***11A***, (fig 3). Al leer el siguiente **0** de la entrada, se aplica la función de transición ***$f(q_0, 0, 1) = \{ (q_1, \lambda)\}$*** , que transita al estado ***q_1***, elimina el primer 1 de la pila y no añade nada a la pila, queda entonces **1A**, ver figura 4.

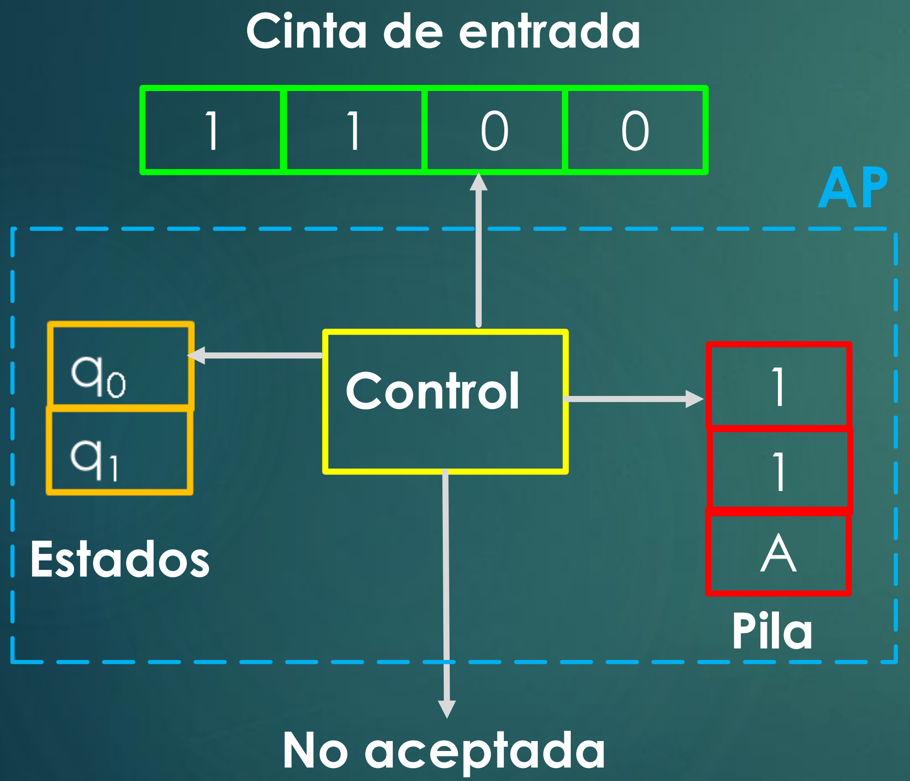


Figura 3

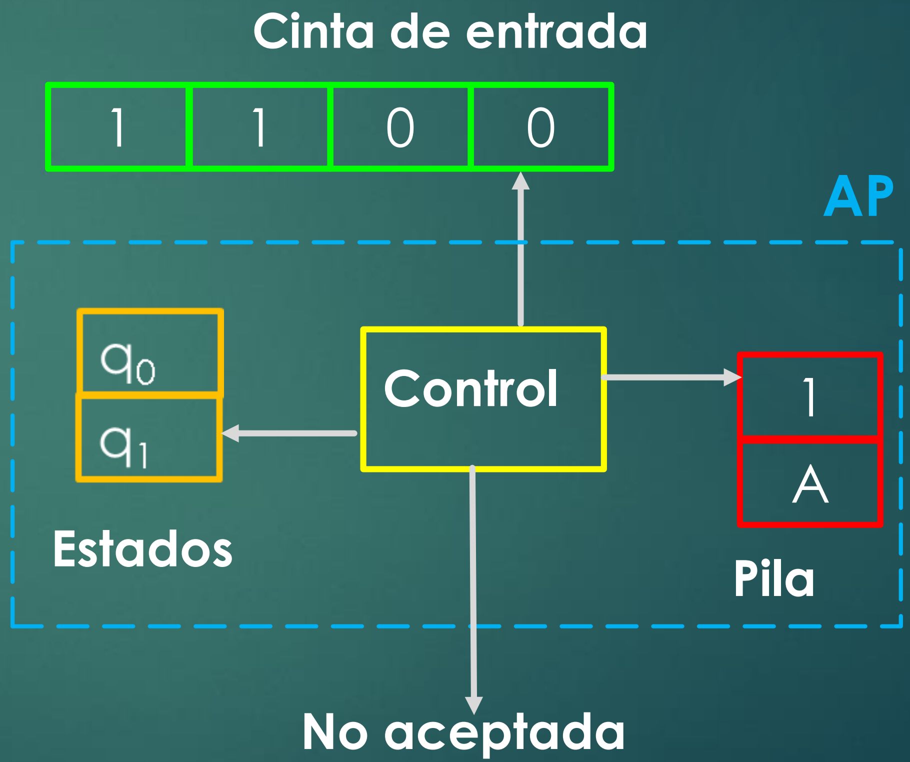


Figura 4

- A continuación, se lee el último **0** y con la función de transición, $f(q_1,0,1) = \{ (q_1, \lambda)\}$ se sigue en el estado q_1, se elimina el **1** de la cima de la pila, que queda sólo con ***A***, y no se añade nada nuevo a la pila (figura 5). Por último, sin leer nada de la entrada, estando en el estado q_1, y en la cima de la pila ***A***, se transita con $f(q_1,\lambda,A) = \{ (q_1, \lambda)\}$ al estado q_1, se elimina la A de la pila, quedándose la pila vacía como se muestra en la figura 6. La pila vacía significa que la palabra es aceptada.

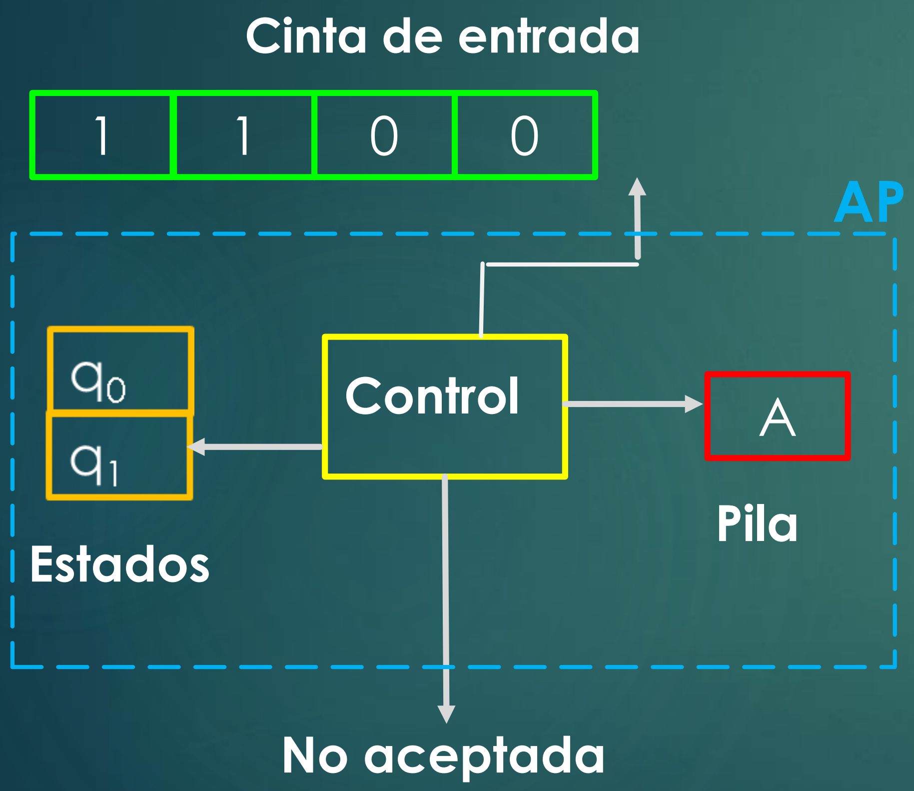


Figura 5

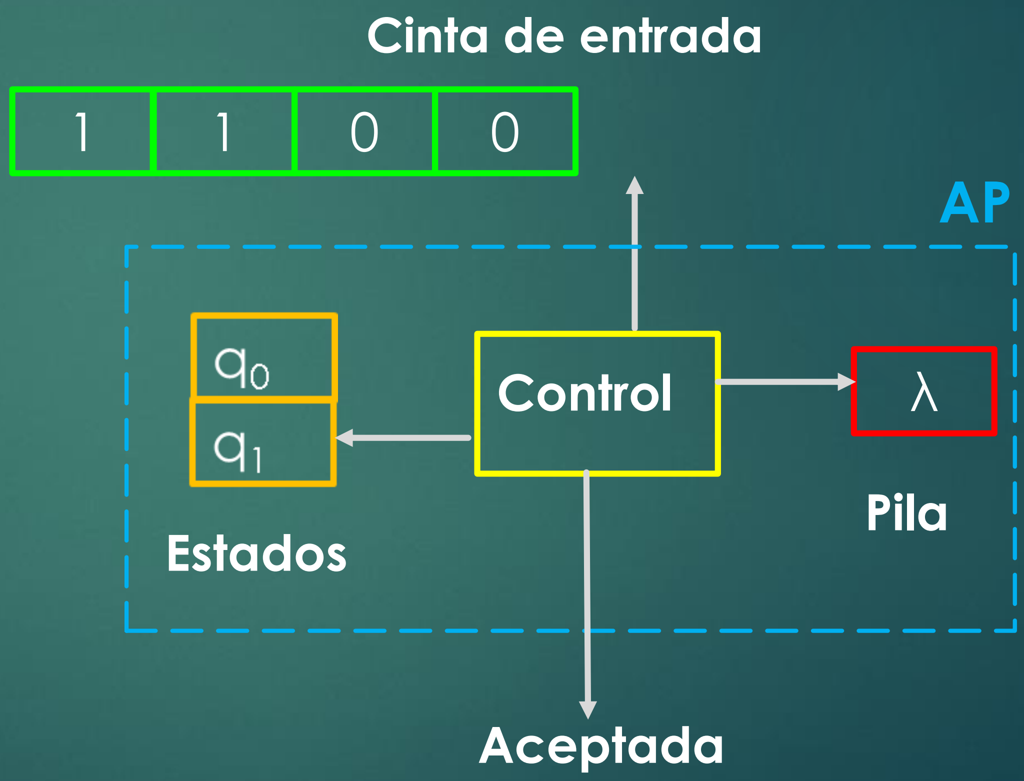


Figura 6

Descripción instantánea

- El concepto de descripción instantánea permite describir sencillamente la configuración del autómata en cada momento.
- **Representación:**
- Es una terna **(q, x, z), $q \in Q$, $x \in \Sigma^*$, $z \in \Gamma^*$)**

q es el estado actual

x es el resto de la palabra de entrada que queda por leer

z es la pila en ese instante

El primer símbolo de la palabra de entrada representa el puntero de lectura de la cinta de entrada, y el primer símbolo de la pila representa el tope o cima de la pila.

Descripción instantánea

- Ejemplo: con base en el ejemplo anterior:
- La descripción instantánea del momento inicial : ***(q_0, 1100, A)***
- La descripción instantánea del siguiente momento : ***(q_0, 100, 1A)***
- La descripción instantánea del último momento: ***(q_1, λ, λ)***

Descripción instantánea

- **Movimientos:**

Si ***(p, x)*** ***ε f(q, a, z)*** **, con**

p, q ε Q, a ε ∑ U { λ }, Z ε Γ, x ε Γ*

entonces, de la descripción instantánea ***(q, ay, ZX)***, se puede pasar a la descripción instantánea ***(p, y, xX)***, representándose como

(q, ay, ZX) ⊢ (p, y, xX)

como puede verse, se ha desplazado el puntero de lectura de la cinta de entrada al siguiente símbolo de la cinta, se ha eliminado el símbolo en la cima de la pila (**Z**), y se han introducido los símbolos en la pila (**x**) que señale la función de transición.

Aplicando movimientos al ejemplo anterior, tenemos:

$(q_0, 1100, A) \vdash (q_0, 100, 1A) \vdash (q_0, 00, 11A) \vdash (q_1, 0, 1A) \vdash (q_1, \lambda, A) \vdash$

$\vdash (q_1, \lambda, A)$

Descripción instantánea

- **Sucesión de movimientos:**
- Para representar una serie de movimientos de la descripción instantánea d_2 a partir de la d_1, se utilizará una notación similar a las derivaciones de los autómatas finitos:

$$\mathbf{d_1 \vdash_* d_2}$$

Aplicando sucesión de movimientos al ejemplo anterior, tenemos:

$$(q_0, 1100, A) \vdash_* (q_1, \lambda, A)$$

Autómatas de Pila deterministas (AP) y no deterministas (APND)

- **Un AP es determinista cuando:**

  $\forall q \, \varepsilon \, Q,\ A \, \varepsilon \, \Gamma,\ si\ |f(q, \lambda, A)| > 0\ entonces\ \forall a \, \varepsilon \, \sum,\ f(q, a, A) = \phi\ ;$ y

  $\forall q \, \varepsilon \, Q,\ A \, \varepsilon \, \Gamma,\ a \, \varepsilon \sum \cup \{ \lambda \},\ |f(q, \lambda, A)| < 2$

Es decir, si hay alguna transición λ dados un estado q y un símbolo de pila A, entonces no puede haber transición con ningún símbolo de entrada, y además, no puede haber más de una transición dados el mismo q y símbolo de pila en el tope o cima de la pila A, incluyendo las transiciones ***λ***.

El autómata **AP1** es determinista porque cumple con las restricciones anteriores.

Autómatas de Pila deterministas (AP) y no deterministas (APND)

- **Un AP es no determinista cuando:**

  $\forall q \in Q,\ A \in \Gamma,\ \ |f(q, \lambda, A)| > 0$

  $\forall q \in Q,\ A \in \Gamma,\ a \in \sum \cup \{\lambda\},\ |f(q, \lambda, A)| > 1$

Por ejemplo, el AP_2 es un APND:

$AP_2 = (\{0, 1\}, \{A, 1, 0\}, \{q_0, q_1\}, A, q_0, f, \phi)$

f: $f(q_0, 0, A) = \{(q_0, 0A)\}$

$f(q_0, 1, A) = \{(q_0, 1A)\}$

$f(q_0, 0, 0) = \{(q_0, 00), (q_1, \lambda)\}$

$f(q_0, 0, 1) = \{(q_0, 01)\}$

$f(q_0, 1, 0) = \{(q_0, 10)\}$

$f(q_0, 1, 1) = \{(q_0, 11), (q_1, 1), (q_1, \lambda)\}$

$f(q_1, 0, 0) = \{(q_1, \lambda)\}$

$f(q_1, 1, 1) = \{(q_1, \lambda)\}$

$f(q_1, \lambda, A) = \{(q_1, \lambda)\}$

Lenguaje aceptado por un AP

- **Por vaciado de Pila:**

El lenguaje aceptado es el conjunto de palabras que permiten transitar desde el estado inicial hasta una descripción instantánea en la que tanto la entrada (la cinta) como la pila están vacías.

$$LV_{AP} = \{ x \mid (q_0, x, A_0) \vdash_* (p, \lambda, \lambda), p \in Q, x \in \Sigma^* \}$$

Ejemplo: los autómatas AP_1 y AP_2 aceptan el lenguaje por vaciado de pila. El lenguaje aceptado por AP_2 sería:

$$L_{AP2} = \{ x\,(1 \mid \lambda)\, x^{-1} \mid x = (0 \mid 1)^+ \}$$

AP_2 acepta ceros y unos en la entrada, que va introduciendo en la pila por medio del estado q_0. En cualquier momento, puede seguir leyendo la palabra x, o empezar a leer la misma palabra de entrada, pero al revés (su inversa x^{-1}), y transitar al estado q_1, que se encargará de comprobar que se lee bien la inversa.

Lenguaje aceptado por un AP

- **Por estado final:**

El lenguaje aceptado por estado final es el equivalente a los AF: todas las palabras que permiten transitar desde el estado inicial a uno final. Se aceptarán todas las palabras que permitan pasar de la configuración inicial a una en la que se haya leído toda la palabra de la entrada y el autómata esté en uno de los estados finales, independientemente del contenido de la pila.

$$LF_{AP} = \{\, x \mid (q_0, x, A_0) \vdash_* (p, \lambda, X),\ p \in F,\ x \in \Sigma^*,\ X \in \Gamma^* \,\}$$

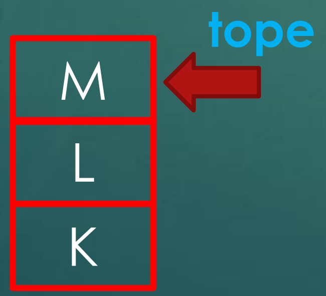
Ejemplo: un autómata equivalente al AP_1, que acepte por estado final sería:

$$AP_1' = (\{0, 1\}, \{A, 1, 0\}, \{q_0, q_1, q_2\}, A, q_0, f, \{q_2\})$$

Lenguaje aceptado por un AP-Diagrama de estados de un APD

- La función de transición de estados de una AP puede ser representada por un diagrama donde los nodos representan los estados y los arcos las transiciones. Si existe transición tipo 1 (ver diapositiva 7), tenemos:

- Si el estado actual es q_0 y la cabeza lectora apunta a un símbolo **a**, y el tope de la pila es **K**, entonces pasamos al nuevo estado q_1, avanzamos la cabeza lectora, y sustituimos el símbolo del tope **K** en la pila por la cadena **π**.
- Por ejemplo:
- Si **π** = MLK



- M,L,K, ε Z

Si **π** = KK

Si **π** = K

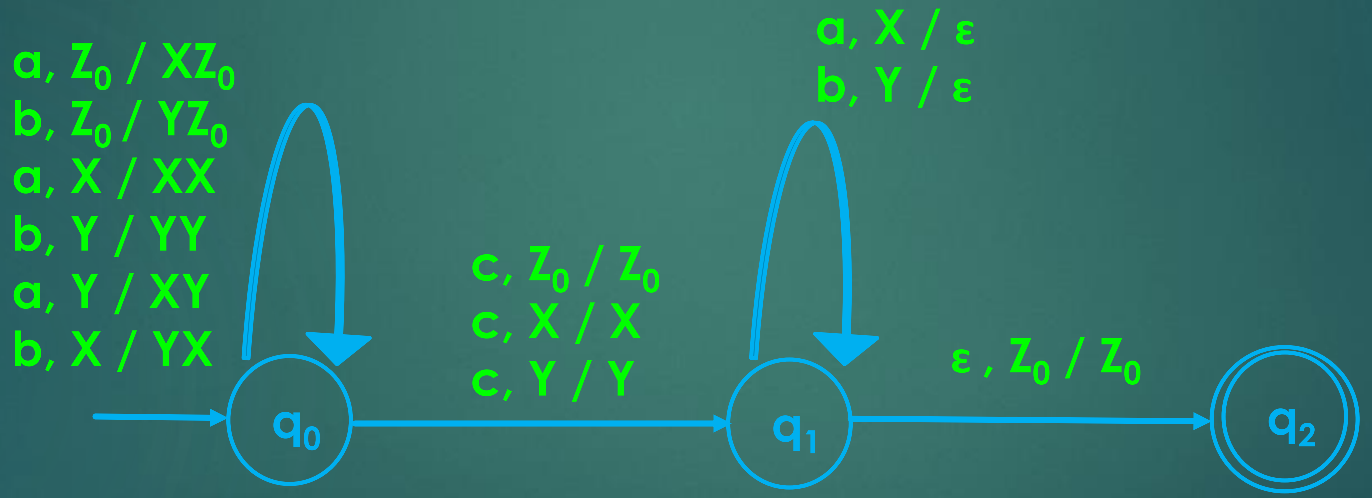
- Si **π** = ε Se elimina K, y el nuevo tope es símbolo que esté debajo de K (o λ)

Ejemplo 1. Dibujar el diagrama de transición del AP que reconoce el lenguaje L_1.

$\sum_1 = \{a, b, c\}$ $\Gamma = \{ X, Y, Z_0\}$ $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ $F = \{q_2\}$

$L_1 = \{ \omega c \omega^{-1} \mid \omega \in \{a, b\}^* \}$

$AP_{L1} = (Q, \sum_1 , \Gamma, f, q_0, Z_0, F)$



$f^*(q_0, abcba) = q_2$ $abcba \in L_1$

$f^*(q_0, c) = q_2$ $c \in L1$

$f^*(q_0, abcab) = q_1$ $abcab \notin L1$

$f^*(q_0, a) = q_0$ $a \notin L1$

Ejercicios: dibuja el AP que acepte cada uno de los siguientes lenguajes

- $L_2 = \{ a^i\, b\, c^k \mid i, k \geq 1 \text{ y } i < k \}$
- $L_3 = \{ a^i\, b\, c^k \mid i, k \geq 1 \text{ y } i \leq k \}$
- $L_4 = \{ a^i\, b\, c^k \mid i, k \geq 1 \text{ y } i > k \}$
- $L_5 = \{ a^i\, b\, c^k \mid i, k \geq 1 \text{ y } i \geq k \}$
- $L_6 = \{ 0^i\ 1^{i+k}\, 2^k\, 3^{n+1} \mid i, k, n \geq 0 \}$
- $L_7 = \{ h^n\ g^j\, e^{2n}\, d^{3i} \mid i, j, n \geq 0 \}$

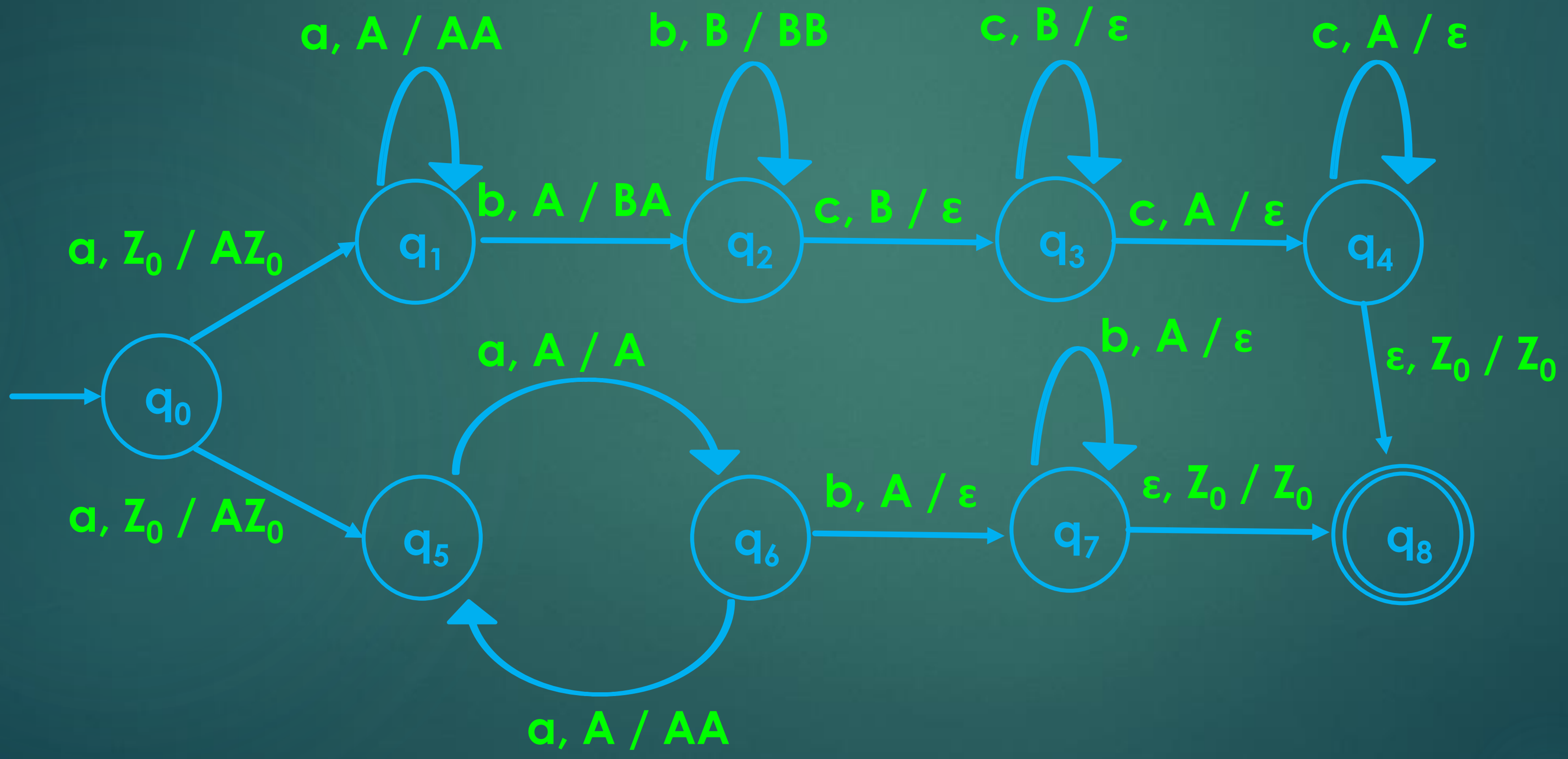
Autómata de pila no determinista (APND) Ejemplo:

Ejemplo 1. Dibujar el diagrama de transición del APND que reconoce al lenguaje L_8.

$\sum_1 = \{a, b, c\}$ $\Gamma = \{A, B, Z_0\}$ $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8\}$ $F = \{q_8\}$

$L_8 = \{ a^m b^p c^{p+m} \mid m, p \geq 1\} \cup \{a^{2i} b^i \mid i \geq 1\}$

$AP_{L1} = (Q, \sum_1, \Gamma, f, q_0, Z_0, F)$



Teoría Computacional - ESCOM - IPN - Prof. Rafael Aguilar

Ejercicio. Dibujar el diagrama de transición del APND que reconoce al lenguaje L_9. Definir AP_{L9}

$L_9 = \{ a^m b^p c^{p+m} \mid m, p \geq 1\} \cup \{a^i b^{2i} \mid i \geq 1\}$