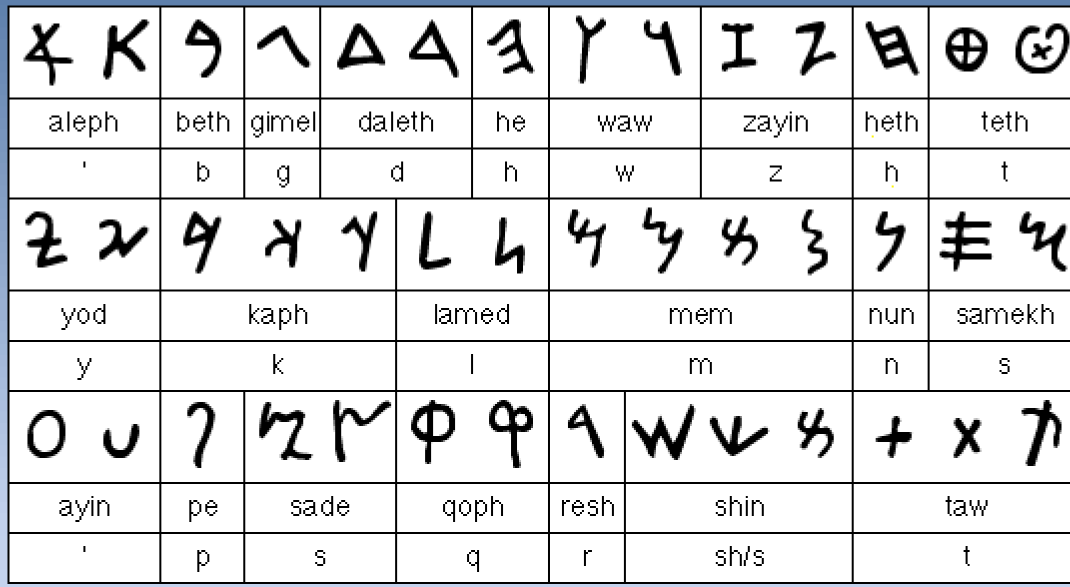
Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Cómputo

Teoría Computacional

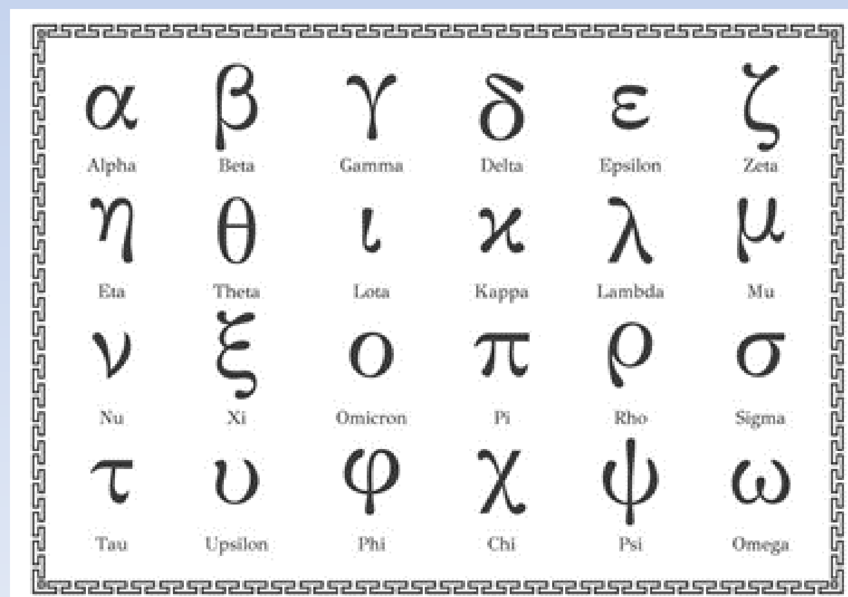
Conceptos fundamentales
Alfabetos, cadenas

Prof. Rafael Aguilar
raffaello.escom@gmail.com

Alfabetos


aleph
'
beth
b
gimel
g
daleth
d
he
h
waw
w
zayin
z
heth
h
teth
t
yod
y
kaph
k
lamed
l
mem
m
nun
n
samekh
s
ayin
'
pe
p
sade
s
qoph
q
resh
r
shin
sh/s
taw
t


Glifos Mayas - Equivalencia Fonética
A A A B B C T E H
I CAK L L M N O O
PP CU KU X X U U Z P


α Alpha
β Beta
γ Gamma
δ Delta
ε Epsilon
ζ Zeta
η Eta
θ Theta
ι Iota
κ Kappa
λ Lambda
μ Mu
ν Nu
ξ Xi
ο Omicron
π Pi
ρ Rho
σ Sigma
τ Tau
υ Upsilon
φ Phi
χ Chi
ψ Psi
ω Omega

Contenido

- Alfabetos, símbolos, cadenas (palabras)
- Operaciones en cadenas
  - Prefijo, sufijo,
  - Concatenación
  - Subcadena y subsecuencia
  - Inversión de una cadena
  - Potencia de una cadena
  - Ejercicios

Alfabetos

- Se llama **alfabeto** a un conjunto finito, no vacío, cuyos elementos se denominan “letras” o “símbolos”. Se definen los alfabetos por la enumeración de los símbolos que contiene.

- Se utiliza el símbolo Σ para designar un alfabeto.
  - Σ_1 = {0, 1}, el alfabeto binario.
  - Σ_2 = {0, ..., 9}, el alfabeto para representar números naturales base 10
  - Σ_3 = {a, b, ..., z}, el conjunto de todas las letras minúsculas.
  - Σ_4 = { (,) }, el conjunto de los dos símbolos “(“ y “)”
  - El conjunto de los caracteres ASCII imprimibles.

Palabra o cadena

➢Secuencia finita de símbolos o letras seleccionados de algún alfabeto. Se utilizarán las letras minúsculas x o y o z para representar las cadenas de un alfabeto.

Ejemplos:

- Palabras sobre el alfabeto Σ_1: x=0 y=101010 z=1111
- Palabras sobre el alfabeto Σ_2: x=2016 y=112233 z=1984
- Palabras sobre el alfabeto Σ_3: x=pacodelucia y=chopin z=milesdavis
- Palabras sobre el alfabeto Σ_4: x=() y=((())) z=)()(
- Palabras sobre el alfabeto Σ_5: x=A0 y=Jazz107 z=&*+?

Longitud de una cadena

- Se llama longitud de una cadena al número de símbolos que la componen.
- La longitud de la cadena x se representa con la notación |x|.
- La cadena cuya longitud es cero se llama **cadena vacía** y se representa con la letra griega lambda (λ). Evidentemente, cualquiera que sea el alfabeto considerado, siempre puede formarse la cadena vacía.

Ejemplos

Σ_1 = {a, b,…,z}   x = afrodita |x| = 8 (en Σ_1)

Σ_2 = {af, ta, ro, mi, di}   x = afrodita |x| = 4 (en Σ_2)

Número de ocurrencias de un símbolo en una cadena

- Si **a** es un símbolo cualquiera de un alfabeto Σ, representamos por $|w|_a$ el número de ocurrencias del símbolo **a** en la palabra **w**.

Ejemplo: Si consideramos el alfabeto $\Sigma_1 = \{a, b, c\}$

$|bcba|_a = 1$ $|bcba|_b = 2$ $|bcbb|_a = 0$

Lenguaje universal

- El conjunto de todas las cadenas que se pueden formar con las letras de un alfabeto se llama ***lenguaje universal o universo del discurso*** de Σ, y se denota como $\boldsymbol{W(\Sigma)}$ (*) Es evidente que $W(\Sigma)$ es un *conjunto infinito*. Incluso en el peor caso, si el alfabeto sólo tiene una letra.

Ejemplo: un alfabeto con el menor número posible de letras (1).

Σ_1 = { a }

W(Σ_1) = {λ, a, aa, aaa, aaaa, ...}
(número infinito de elementos)

- La palabra vacía **λ** pertenece a todos los lenguajes universales de todos los alfabetos posibles.

(*) La notación $\boldsymbol{\Sigma^*}$ es equivalente a $\boldsymbol{W(\Sigma)}$

Operaciones con cadenas

Concatenación de Cadenas

Sean dos palabras *x*, *y* tales que *x* ε W(Σ), *y* ε W(Σ)

Supongamos que $x=A_1A_2\ldots\ldots A_i$, $|x| = i$; $y= B_1B_2\ldots\ldots B_j$, $|y| = j$

Se llama concatenación de las palabras *x* e *y* (se representa por *xy*) a otra palabra, *z*, obtenida con las letras de *x* y a continuación las de *y* :

$z= A_1A_2\ldots\ldots A_i B_1B_2\ldots\ldots B_j$ Se cumple que: $|z|=|x|+|y|$

Ejemplo:

$\Sigma = \{0, \ldots, 9\}$

x = 01234 y = 56789 z = xy = 0123456789

Operaciones con cadenas

Concatenación de Cadenas - Propiedades

- ***Operación cerrada***. La concatenación de dos palabras de W(Σ) es otra palabra de W(Σ). Si x ε W(Σ) e y ε W(Σ), entonces xy ε W(Σ).
- ***Propiedad asociativa*** : $x(yz)=(xy)z$ *(o también xyz)*

Al cumplir las dos propiedades anteriores, tenemos que la **operación de concatenación es un *semigrupo***

- ***Existencia de elemento neutro***: El elemento neutro de esta operación es la palabra vacía **λ**, tanto por la derecha como por la izquierda. Siendo x una palabra cualquiera, se cumple :

  $x \lambda = \lambda x = x$

Al cumplir las tres propiedades anteriores, tenemos que la **operación de concatenación es un *semigrupo con elemento neutro*** o un ***monoide***.

- ***Propiedad conmutativa***: No se cumple

Operaciones con cadenas

Prefijos y sufijos de una Cadena

- Sea ω una cadena sobre cierto alfabeto Σ. Sean u y v dos cadenas sobre Σ tales que $\omega=uv$. Decimos que u es un ***prefijo*** y que v es un ***sufijo*** de ω.

- Un ***prefijo de la cadena*** ω es cualquier cadena que se obtiene al eliminar cero o más símbolos del final de ω.
  v.g. **ferro**, **ferroca, ferrocarril** y **λ** son prefijos de
  ω =**ferrocarril**.

- Un ***sufijo de la cadena*** ω es cualquier cadena que se obtiene al eliminar cero o más símbolos del principio de ω.
  v.g. **rrocarril**, **carril**, **ferrocarril** y **λ** son sufijos de
  ω =ferrocarril

Operaciones con cadenas

Subcadena y subsecuencia de una Cadena

- Una ***subcadena*** *(o subpalabra o factor)* de ω se obtiene al eliminar cualquier prefijo y cualquier sufijo de ω (*).
  v.g. ferrocarril, roca y λ son subcadenas de ferrocarril.

- Los **prefijos**, **sufijos** y **subcadenas** ***propios*** de una cadena ω son esos prefijos, sufijos y subcadenas, de la propia ω que no son λ ni son iguales a la misma ω.
  v.g ferro es prefijo propio de ferrocarril
  v.g. carril es sufijo propio de ferrocarril
  v.g. roca es una subcadena propia de ferrocarril

(*) *Prefijos* y *sufijos* son casos particulares de subcadenas. El término *infijo* es sinónimo de subcadena o subpalabra.

Operaciones con cadenas

Subcadena y subsecuencia de una Cadena

- Ejemplo: la palabra aba tiene el conjunto de factores siguiente: {λ, a, b, ab, ba, aba}
  prefijos : { λ, a, ab, aba} prefijos propios: { a, ab}
  sufijos: { λ, a, ba, aba} sufijos propios: {a, ba}
  subcadenas: {λ, a, b, ab, ba, aba}
  subcadenas propias: { a, b, ab, ba}

- Una ***subsecuencia*** de ω es cualquier cadena que se forma mediante la eliminación de cero o más posiciones no necesariamente consecutivas de s ω.
  v.g. rorri es una subsecuencia de ferrocarril.

Operaciones con cadenas

Inversión o Reflexión de una Cadena

- Sea ω una cadena sobre cierto alfabeto Σ. Llamamos ***inversa*** (o ***reflejada***) de la cadena ω , y la representamos por ω^{-1}, a la cadena obtenida al escribir los símbolos que constituyen la cadena ω en orden inverso.

  Si $\omega=a_1, a_2, \ldots, a_n$, su cadena reflejada sería $\omega^{-1}=a_n, \ldots, a_2, a_1$.

Ejemplo:

x = omar x^{-1}= ramo

- Puede ocurrir que una cadena coincida con su inversa como es el caso de ω=anitalavalatina; tales cadenas reciben el nombre de *palíndromos*.

Operaciones con cadenas

Propiedades de la Inversión o Reflexión de una Cadena

- $(uv)^{-1} = v^{-1}u^{-1}$, es decir, la cadena inversa (o reflejada) de la concatenación de dos cadenas es la concatenación de las cadenas inversas (o reflejadas) .

- $|\omega^{-1}| = |\omega|$, es decir, la longitud de una cadena y su inversa coinciden siempre.

Operaciones con cadenas

Potencia de una Cadena

Sea ω una cadena y k un número entero, definimos:

$$\omega^k = \begin{cases} \omega \ldots^{k)} \ldots \omega & si\ k>0 \\ \lambda & si\ k=0 \\ \omega^{-1} \ldots^{-k)} \ldots \omega^{-1} & si\ k<0 \end{cases}$$

Ejemplos de uso:

Sea $\omega = 91$ sobre el alfabeto $\Sigma_1 = \{0 \ldots 9\}$, entonces:

$\omega^3 = 919191$, $\omega^{-1} = 19$, $\omega^{-2} = 1919$, $\omega^0 = \lambda$

Sea ω = *amor* sobre el alfabeto $\Sigma_2 = \{a, \ldots, z\}$, entonces:

$\omega^{-3} = (\omega^{-1})^3 = (roma)^3$ = romaromaroma

Operaciones con cadenas

Potencia de una Cadena

Se denomina potencia i-ésima de una palabra a la concatenación consigo misma i veces.

$$x^i = \underbrace{xxx...xx}_{i}$$

se cumplen las siguientes relaciones

$$x^{i+1} = x^i x = x x^i \ (i > 0)$$

$$x^i x^j = x^{i+j} \ (i, j > 0)$$

Operaciones con cadenas

Potencia de una Cadena

Para que ambas relaciones se cumplan también para i, j = 0, basta con definir $\mathbf{x^0 = \lambda}$, cualquiera que sea x.

Ejemplo: x = ABCD, entonces

x^2 = xx = ABCDABCD
x^3 = xxx = ABCDABCDABCD

La longitud de la potencia es $\mathbf{|x^i| = i * |x|}$

Operaciones con cadenas

Potencias de un alfabeto

- Si Σ es un alfabeto, podemos expresar el conjunto de todas las cadenas de una determinada longitud de dicho alfabeto utilizando una notación exponencial.

- Definimos Σ^{κ} para que sea el conjunto de las cadenas de longitud *k*, tales que cada uno de los símbolos de las mismas pertenece a Σ.

$\Sigma^0 = \{\lambda\}$, independientemente de cuál sea el alfabeto Σ; λ es la única cadena cuya longitud es 0.

Ejemplo: Si $\Sigma = \{0, 1\}$, entonces

$\Sigma^0 = \{\lambda\}$, $\Sigma^1 = \{0, 1\}$, $\Sigma^2 = \{00, 01, 10, 11\}$,
$\Sigma^3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$, etc.

Operaciones con cadenas

Potencias de un alfabeto

En ocasiones, desearemos excluir la cadena vacía del conjunto de cadenas. El conjunto de cadenas no vacías del alfabeto Σ se designa como Σ^+

$$\Sigma^+ = \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup \ldots.$$

$$\Sigma^* = \Sigma^+ \cup \{\lambda\}.$$

Ejercicios

- Sea $\Sigma=\{a,b,c\}$, $x=aa$, $y=b$, $z=cba$. Definir las siguientes palabras xx, xy, xz, yx, yz, yy, zx, zy, zz, xyz, x^3, $x^2 z^2$, $(xz)^2$, $(zxx)^{-3}$. ¿Cuáles son sus longitudes, prefijos y sufijos?