



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES  
ACADEMIA DE INGENIERÍA DE SOFTWARE



Profesora: M. en C. Ma. Elena Cruz Meza,  
e-mail: [analisisimagenesescom@gmail.com](mailto:analisisimagenesescom@gmail.com)

**ANÁLISIS DE IMÁGENES**

**Unidad I**

**Introducción** [ 2 ]

## Contenido Unidad I

- 1.1 La importancia y el uso del análisis de imágenes en las ciencias de la computación
- 1.2 El sistema de visión humano
- 1.3 Adquisición y creación de imágenes digitales
  - 1.3.1 Muestreo y cuantización
  - 1.3.2 Imágenes binarias
  - 1.3.3 Imágenes en niveles de gris
  - 1.3.4 Imágenes en colores
  - 1.3.5 El histograma
- 1.4 Almacenamiento de imágenes digitales
  - 1.4.1 Formatos espaciales (BMP, PNG y JPEG)
  - 1.4.2 Formatos vectoriales (AI y CDR)

[ 3 ]

1.1 La importancia y el uso del análisis de imágenes en las ciencias de la computación.



De gran utilidad para:

- La mejora de la información de las imágenes
- El procesamiento de los datos por una máquina
- Uso: el reconocimiento de objetos, la segmentación de regiones, etc.

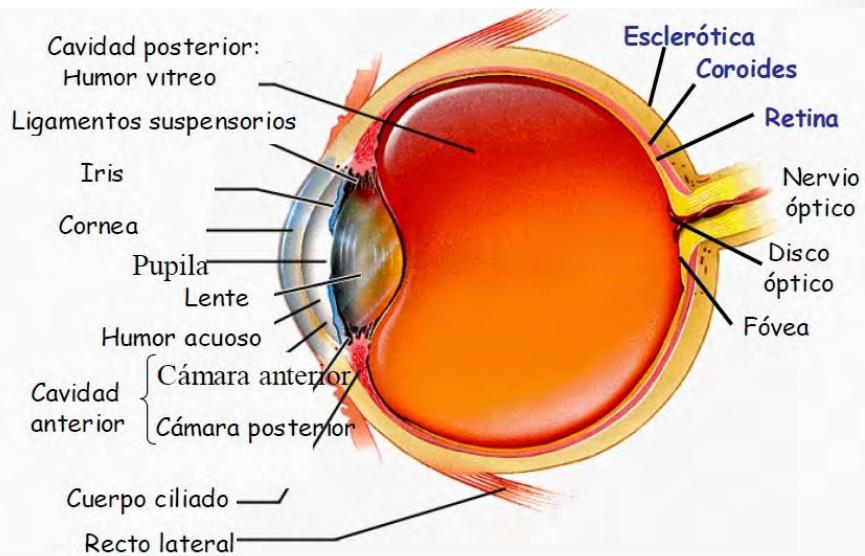
[ 4 ]

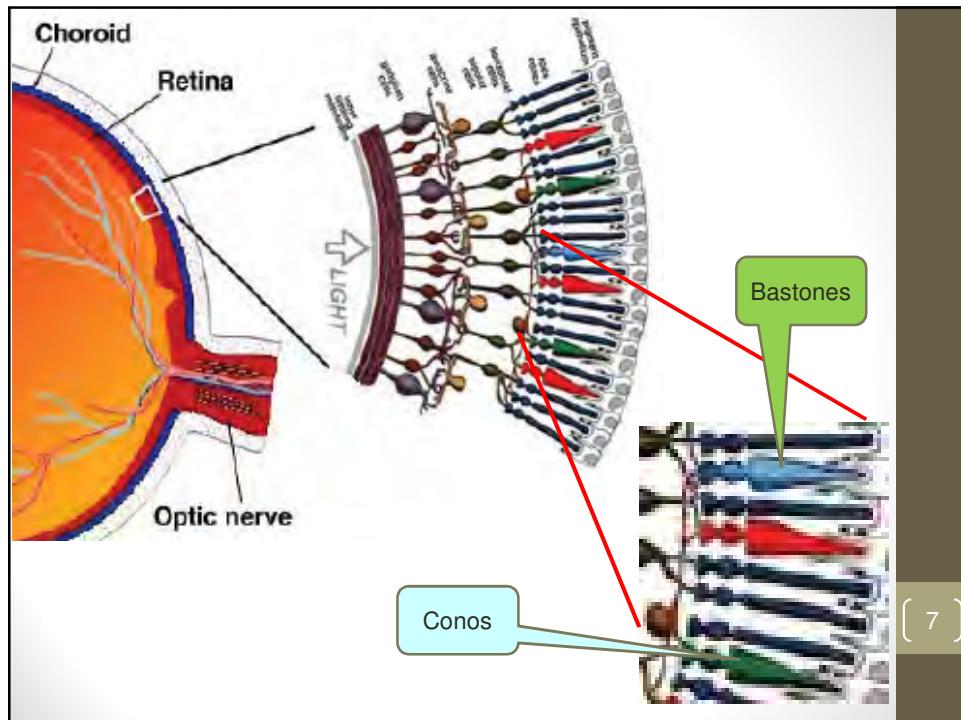
## 1.1 La importancia y el uso del análisis de imágenes en las ciencias de la computación.



## 1.2 El sistema de visión humano

### El ojo humano





## 1.2 El sistema de visión humano

- ▶ La retina contiene 125 millones de fotoreceptores
  - ▶ Bastones: ByN, sensibles a la intensidad de luz
  - ▶ Conos: sensibles al color, requieren un alto número de fotones
- ▶ 1 millón de fibras ópticas: compresión (125: 1)

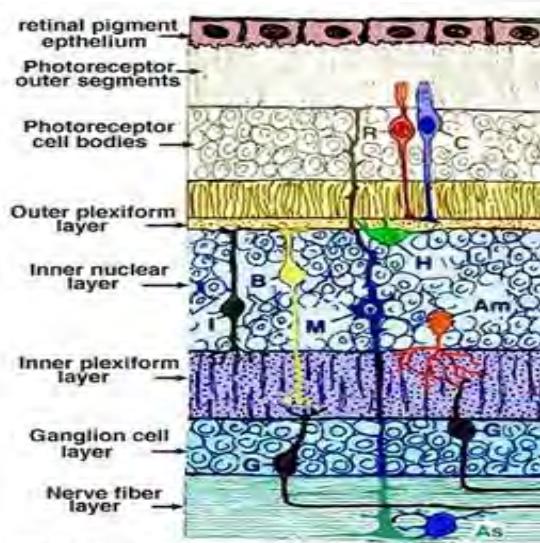
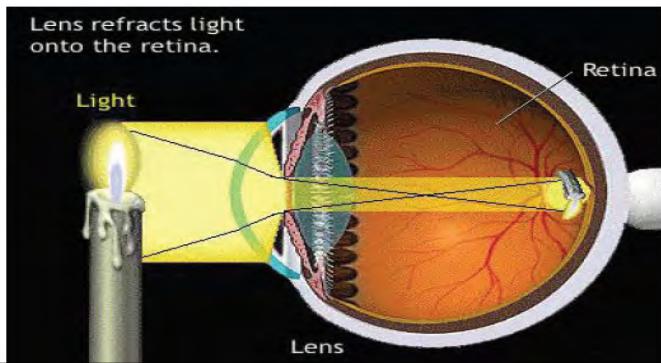


Fig. 5. Scheme of the layers of the developing retina around 5 months' gestation (Modified from Odgen, 1989).

## 1.2 El sistema de visión humano

Imagen: Percepción 2D de una escena.

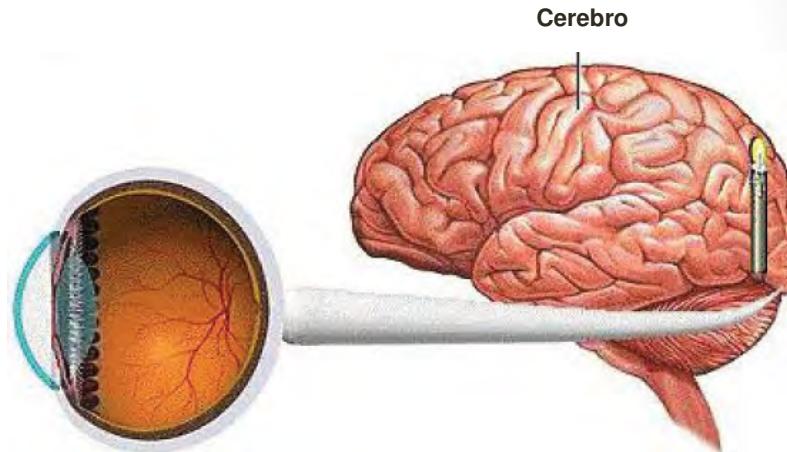
- En general, las cámaras fotográficas sencillas funcionan como los ojos de los animales. La lente del cristalino forma en la retina una imagen invertida de los objetos que enfoca y la retina se corresponde con la película sensible a la luz.



[ 9 ]

## 1.2 El sistema de visión humano

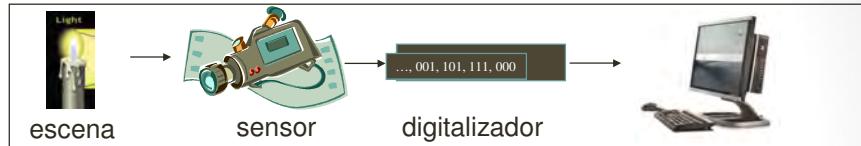
- Interpretación de la escena:** El cerebro interpreta la orientación de la imagen correctamente



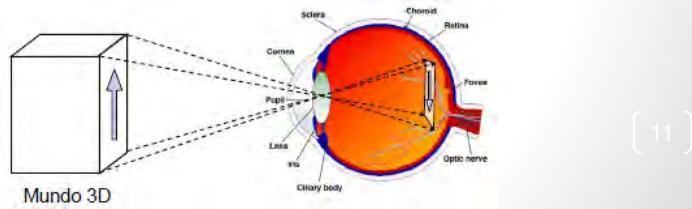
[ 10 ]

## 1.3 Adquisición y creación de imágenes digitales

### ► Adquisición de imágenes

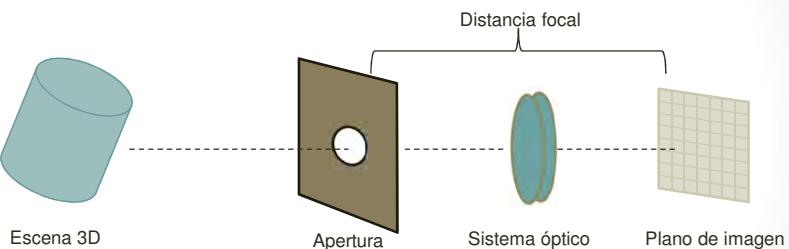


- La formación de imágenes es un proceso mediante el cual una información 3D (la escena) es proyectada en un plano 2D.
  - Las cámaras imitan el proceso de la visión humana



## 1.3 Adquisición y creación de imágenes digitales

### ► Modelo de cámara simplificado

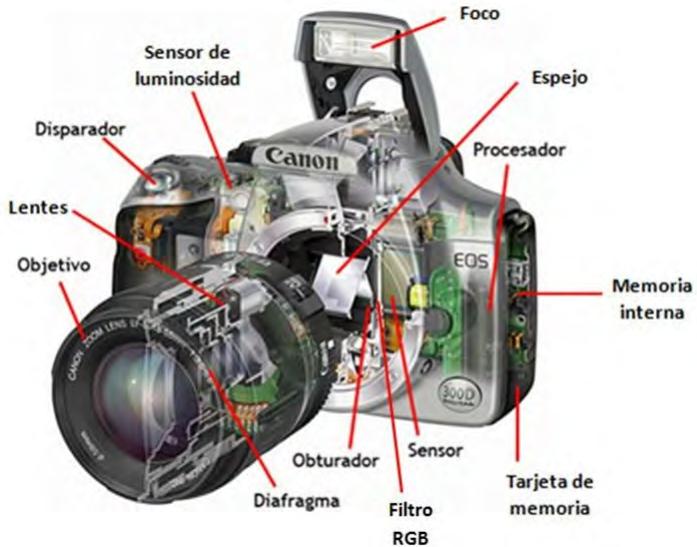


- El objetivo consiste en que cada punto de la escena sea proyectada en un solo punto del plano de imagen, de este modo la imagen estará enfocada.

12)

### 1.3 Adquisición y creación de imágenes digitales

Elementos de una cámara fotográfica digital:



[ 13 ]

### 1.3 Adquisición y creación de imágenes digitales

#### ► Modelo ideal de cámara (pinhole).

- Una superficie mate emite luz en todas las direcciones.
- Cuando la apertura es muy pequeña, desde cualquier punto sólo pasa luz con una dirección.
- Todos los puntos están bien definidos: imagen enfocada.
- A medida de que aumenta el tamaño de la apertura la imagen se difumina.



[ 14 ]

### 1.3 Adquisición y creación de imágenes digitales

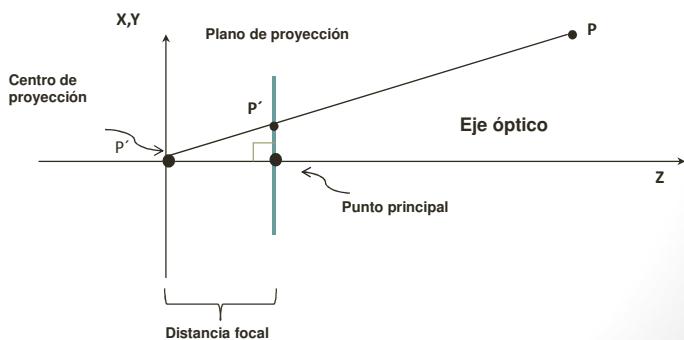
- ▶ La imagen estará enfocada cuando el tamaño del círculo de confusión sea menor que el tamaño de cada celda del fotodetector
- ▶ El modelo *pinhole* tiene muchas limitaciones y es poco usado
  - ▶ Apertura muy pequeña, entra muy poca luz y la captura de la imagen es muy oscura



( 15 )

### 1.3 Adquisición y creación de imágenes digitales

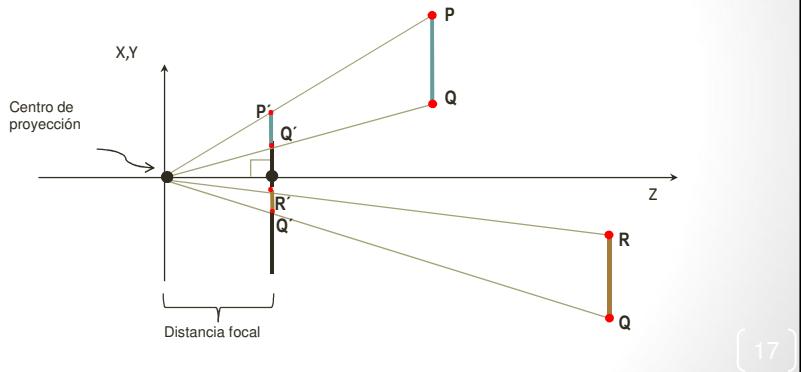
- ▶ El modelo matemático de la formación de una imagen
  - ▶ Modelo de proyección perspectiva
  - ▶ Elementos del modelo:
    - ▶ Centro de proyección (equivale a la apertura del pinhole)
    - ▶ Plano de proyección (plano de la imagen)



( 16 )

### 1.3 Adquisición y creación de imágenes digitales

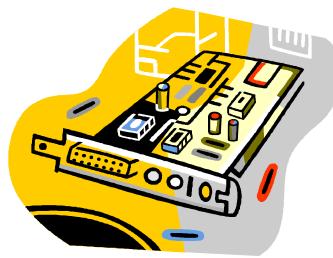
- Si el centro de proyección es el punto  $(0, 0, 0)$  y la distancia focal es 1, y el punto principal  $(0, 0, 1)$ , la proyección en la imagen de un punto  $P = (x, y, z)$  será:  $(u, v) = (x/z, y/z)$



**Naturaleza del modelo:** Los objetos lejanos se ven más pequeños que los cercanos

### 1.3 Adquisición y creación de imágenes digitales

- El modelo proyectivo no es completo. No explica algunos fenómenos como el desenfoque, la distorsión radial y la separación de colores.
- Se concluye:
  - El proceso de formación está en la “parte analógica” del ámbito de procesamiento de imágenes



### 1.3.1 Muestreo y cuantización

Termino **Imagen**:

- ✓ Puede describirse como una función continua  $F(x,y)$ , donde las coordenadas  $x, y$  son variables espaciales y la función valor (amplitud) es la densidad
- ✓ En realidad para poder obtener la imagen digital la función continua debe estar discretizada, tanto en las variables espaciales como en la amplitud. La función discreta resultante  $f(x,y)$  se denomina imagen digital.

[ 19 ]

### 1.3.1 Muestreo y cuantización

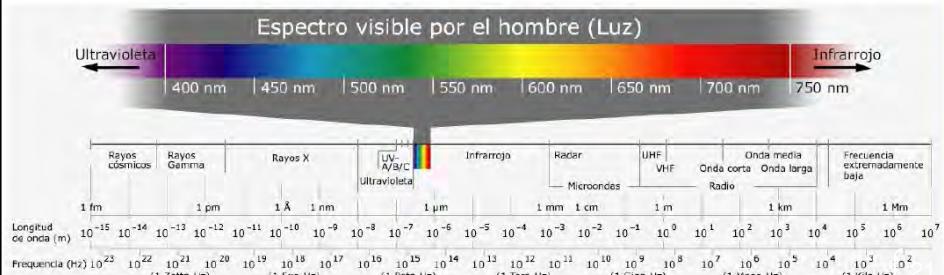
- ▶ Imagen: función bidimensional de la luz y la intensidad, a la que indicamos por  $f(x,y)$



[ 20 ]

### 1.3.1 Muestreo y cuantización

El rango de colores que se percibe como luz visible representa una pequeña porción del espectro electromagnético, como muestra la siguiente figura



### 1.3.1 Muestreo y cuantización

- Puesto que la luz es una forma de energía,  
 $0 < f(x,y) < \infty$
- La naturaleza de  $f(x,y)$  esta caracterizada por dos componentes:
  - Iluminación:  $i(x,y)$
  - Reflectancia (propiedades del objeto que esta siendo iluminado):  $r(x,y)$ ,

Es decir:  $f(x,y) = i(x,y) r(x,y)$ , donde  
 $< i(x,y) < \infty$  y  $0 < r(x,y) < 1$

NOTA: Una imagen se degrada conforme se disminuye la resolución espacial y la cuantización de los niveles de gris

(22)

### 1.3.1 Muestreo y cuantización

- Algunos ejemplos de valores de iluminación e índices de reflexión se muestran a continuación

Condición	Iluminación(lm/m <sup>2</sup> )
Día claro	90.000
Día nuboso	10.000
Noche clara	0.1
Oficina comercial	1000

Material	Reflexión
Terciopelo negro	0.01
Acero Inoxidable	0.65
Pared blanca	0.80
Nieve	0.93

[ 23 ]

<https://www.youtube.com/watch?v=14nDZDKlZZM>

<https://www.youtube.com/watch?v=MIUHEGSqlo>

### 1.3.1 Muestreo y cuantización

- El proceso de discretizar las variables espaciales  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  se conoce como **muestreo**
- A la discretización de la amplitud g como **cuantificación**.
- El elemento discreto  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  es el píxel (de las palabras inglesas picture x element) y  $\Delta g$  es un nivel de gris, denominado informalmente **brillo**.
- Así pues una **imagen digital** puede expresarse por

$$f(\Delta x \cdot i, \Delta y \cdot j, = 0, \dots, N-1; j=0, \dots, M-1)$$

Donde: i, j son la dirección del píxel, N el número de filas y M el número de columnas.

[ 24 ]

### 1.3.1 Muestreo y cuantización

► **Muestreo**

- Digitalización de las coordenadas espaciales (x,y)

► **Cuantificación**

- La digitalización de la amplitud

► **Imagen**

- Matriz de valores en la que cada celda representa una porción de la escena captada por el sensor (celda = pixel).

Ejemplo. Imagen de 8x8

100  
Pixel

159	120	103	132	96	68	42	49
134	105	71	82	121	80	51	12
105	98	86	82	106	83	76	17
122	→100	88	141	142	111	87	33
149	110	137	168	161	132	96	56
159	124	151	167	158	138	108	80
172	124	141	138	108	116	114	84
167	106	118	111	54	70	95	90

( 25 )

### 1.3.1 Muestreo y cuantización

- La función imagen se escribe normalmente como  $f(x,y)$ .
  - Hay que tener en cuenta que las variables espaciales son valores discretos, usualmente valores enteros.
- La cuantización de la imagen asignará a cada localización discreta (x,y) un valor entero  $2^b$ , con b siendo valores de: 2, 4, 8, 12, 16 o 32 bits por píxel. De esta forma la resolución radiométrica describirá el número de bits por píxeles en una imagen.<sup>(26)</sup>

### 1.3.1 Muestreo y cuantización

#### Resolución espacial y en amplitud

- Dependiendo del número de pixeles que tenga el dispositivo o en el caso de imágenes analógicas del número de muestras tomadas, la imagen poseerá mayor o menor resolución espacial.



320x200



160x100

{ 27 }

### 1.3.1 Muestreo y cuantización

#### Resolución espacial y en amplitud

##### Efecto del muestreo espacial



80x50



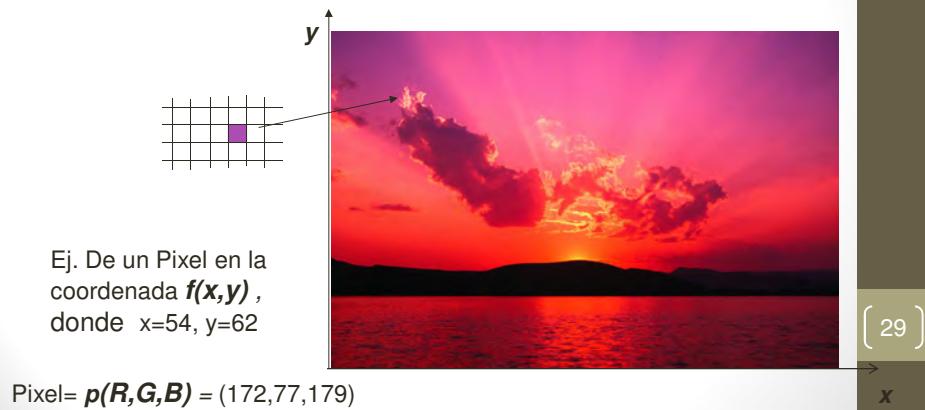
40x25

{ 28 }

Nota: es importante comprender que, a medida que mejora la resolución espacial, el tamaño de los archivos digitales aumenta de forma espectacular y exige, para su tratamiento, un espacio de almacenamiento considerable

### 1.3.1 Muestreo y cuantización

► **Pixel:** Acrónimo formado con las palabras inglesas 'Picture element'. Es el elemento simple de una imagen digital.



### 1.3.1 Muestreo y cuantización

La función en la imagen, que representa un píxel tiene niveles mínimos y máximos:

$$L_{\min} < f(x, y) < L_{\max}$$

Por ejemplo:

Para binario:

--	--

$$f(x,y) \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

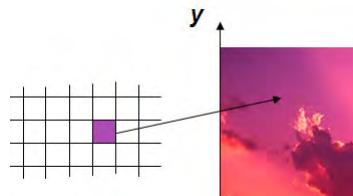
para escalas de grises:

$$0 < f(x, y) < L - 1$$

30 )

### 1.3.1 Muestreo y cuantización

- ▶ Cada píxel representa el valor de una magnitud física:
  - ▶ Cantidad de luz en un punto de una escena.
  - ▶ Valor de color (cantidad de radiación en la frecuencia del rojo, verde y azul).
  - ▶ Nivel de radiación infrarroja, rayos X, etc. En general, cualquier radiación electromagnética.
  - ▶ Profundidad (distancia) de una escena en una dirección.
  - ▶ Cantidad de presión ejercida en un punto. Nivel de absorción de determinada radiación.



[ 31 ]

### 1.3.1 Muestreo y cuantización

- ▶ Num. de bytes de 8 bits de almacenamiento

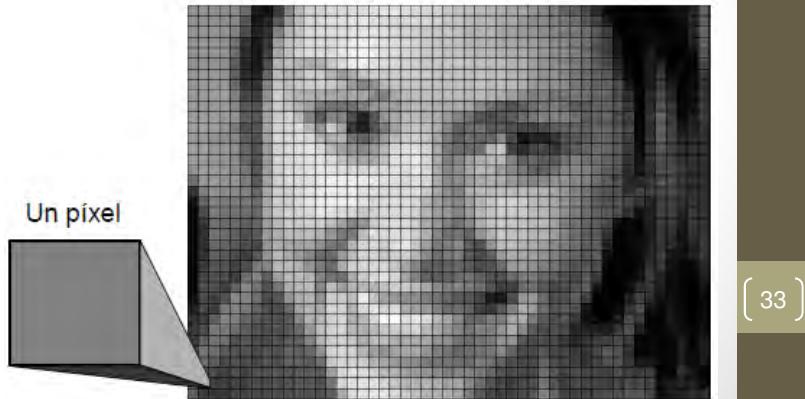
N \ m	1	2	3	4	5	6	7	8
32	128	256	512	512	1024	1024	1024	1024
64	512	1024	2048	2048	4096	4096	4096	4096
128	2048	4096	8192	8192	16384	16384	16384	16384
256	8192	16384	3276	32768	65536	65536	65536	65536
			8					
512	3276	65536	1310	13107	26214	26214	26214	26214
	8		72	2	4	4	4	4
1024	1310	26214	3932	52428	65536	78643	91750	10485
	72	4	16	8	0	2	4	76

[ 32 ]

### 1.3.1 Muestreo y cuantización

#### Representación de una imagen digital

- Una **imagen digital es una matriz, o array bidimensional** de números.
- Cada celda de la matriz es un **píxel**
- **Ejemplo del segmento de una Imagen digital en niveles de gris de 50x37**



#### Ejercicio:

- Resolución espacial y de intensidad
  - Dada la imagen  $f(x,y)$  siguiente,
  - a) Determinar su resolución espacial y de intensidad,
  - b) Disminuir la resolución espacial a la mitad,
  - c) Reducir la resolución espacial linealmente al rango [0, 32]

	y	x	→				
	↓	0	1	2	3	4	5
l=	0	1	32	119	45	45	160
	1	4	45	128	56	66	180
	2	0	20	110	78	76	240
	3	4	10	120	89	34	124
	4	5	12	234	24	23	132
	5	6	11	122	32	77	192

( 34 )

## Ejercicio:

“Resolución espacial y de intensidad”

- **Solución: a)** Determinar su resolución espacial y de intensidad,
  - La resolución espacial se corresponde con el numero de filas (M) y columnas (N) de la imagen, es decir: M=6 y N=6
  - La resolución de intensidad es de 256 niveles variando de 0 a 255, con esta resolución, cada pixel se puede representar con 8 bits
  - A veces, se dice en este caso que la profundidad de intensidad es de 1 byte

[ 35 ]

## Ejercicio:

“Resolución espacial y de intensidad”

- **Solución: b)** Disminuir la resolución espacial a la mitad
  - Si la resolución espacial se reduce a la mitad, ahora el número de filas (m) y columnas (n) resulta ser  $m=M/2=3$  y  $n=N/2=3$
  - Para llevar a cabo esta operación se suprime filas y columnas alternativamente hasta lograr la reducción de la dimensión espacial, con la cual la imagen quedaría así:

y	x →	0	1	2	3	4	5
↓		1	32	119	45	45	160
l =	0	4	45	128	56	66	180
1	2	0	20	110	78	76	240
2	3	4	10	120	89	34	124
3	4	5	12	234	24	23	132
4	5	6	11	122	32	77	192

y	x →	0	1	2
↓		45	56	280
l' =	0	10	89	124
1	2	11	32	192

[ 36 ]

## Ejercicio:

- Resolución espacial y de intensidad
  - Solución: c) Reducir la resolución espacial linealmente al rango [0, 32]

$$A(x, y) = \frac{C_{MAX} - C_{MIN}}{I_{MAX} - I_{MIN}} I(x, y) - I_{MIN} + C_{MIN}$$

	x →	0	1	2	3	4	5	
↓	I =	0	1	32	119	45	45	160
		1	4	45	128	56	66	180
		2	0	20	110	78	76	240
		3	4	10	120	89	34	124
		4	5	12	234	24	23	132
		5	6	11	122	32	77	192

I' =	0	4	15	6	6	20
	1	6	16	7	8	23
	0	3	14	10	10	30
	1	1	15	11	4	16
	1	2	29	3	3	17
	1	1	15	4	10	24

( 37 )

### 1.3.1 Muestreo y cuantización

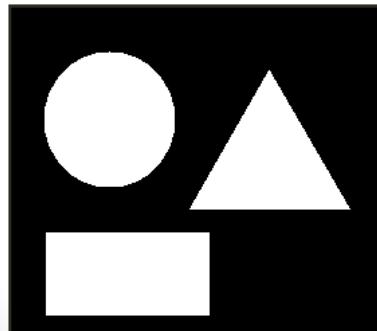
- Dado que el ojo humano recibe una imagen como una colección de puntos de energía espacialmente distribuidas, para que el cerebro las interprete y determine que tipo de información representan, el tipo de imágenes que el hombre puede capturar mediante un dispositivo pueden ser de alguna de las siguientes clases:
  - Imágenes binarias
  - Imágenes en niveles de gris (monocromáticas)
  - Imágenes en color
  - Imágenes multiespectrales

( 38 )

### 1.3.2 Imágenes binarias

- ✓ Son las más simples con las que podemos tratar,
- ✓ Un objeto binario es una porción de la imagen formada por un conjunto de pixeles con valor verdadero conectados entre sí y totalmente rodeados por pixeles con valor falso, los valores verdadero y falso son:

Negro = 0,      Blanco = 1



Objetos binarios: 3, formados con  
pixeles blancos  
Fondo de la imagen: pixeles  
negros

[ 39 ]

### 1.3.2 Imágenes binarias

Una imagen binaria es referida también como una imagen 1 bit/pixel. Particularmente son usadas donde se requiere la forma o contorno, por ejemplo:

- Las aplicaciones del estudio de imágenes binarias son numerosas y van en aumento, desde detectar errores en cadenas de producción, trazar perfiles geográficos y medir distancias, hasta el reconocimiento de cadenas de ADN, posicionamiento de un robot para tomar objetos, reconocimiento óptico de caracteres (ROC), etc.

[ 40 ]

### 1.3.3 Imágenes en niveles de gris



Llamaremos al intervalo  $[L_{min}; L_{max}]$  escala de grises y normalmente se desplaza al intervalo  $[0; L]$ , donde  $I = 0$  se considera negro y  $I = L$  se considera blanco. El resto de valores son variaciones de grises que varían de forma continua desde el negro hasta el blanco.

### 1.3.3 Imágenes en niveles de gris

- ✓ Son conocidas también como monocromáticas o imágenes a un solo color.
- ✓ Contienen solo información de brillo (no de color).
- ✓ El número de bits usados para cada pixel determina el número de niveles de gris (brillo).
- ✓ Una imagen típica contiene 8 bits/pixel → 256 niveles de brillantes → (0, 255).
- ✓ Sin embargo en aplicaciones como astronomía o medicina, 12 o incluso 16 bits/pixel son normales.

[ 42 ]

### 1.3.4 Imágenes en colores

Se diferencian de las imágenes en escala de grises en que son necesarias tres matrices para representar el color de un píxel (cada matriz representa los colores rojo, verde y azul respectivamente o RGB). El color es el resultado de la combinación de las intensidades de los tres colores básicos.



[ 43 ]

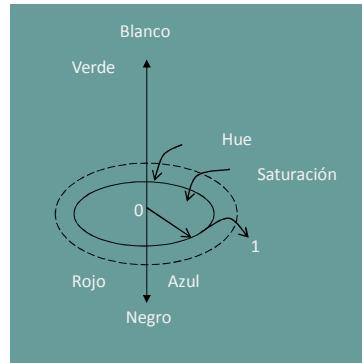
### 1.3.4 Imágenes en colores

- ✓ Se pueden modelar como 3 imágenes monocromáticas, cada una relacionada con su banda espectral. Típicamente, se representan como imágenes RGB (RVA).
- ✓ En general se usan 24 bits/pixel (3 bytes), 8 bits para cada color, se pueden representar aproximadamente 16 millones de posibles colores.
- ✓ En muchas aplicaciones la información RGB es transformada en otro espacio matemático y permite desacoplar la información de brillo de la de color. Después de una tal transformación, la información imagen constará de:
  - Un espacio 1D de brillo o iluminación.
  - Un espacio 2D color.
  - La razón de hacer esto es ésta última modelación, es más acorde con el SVH.
    - Ejemplos de este tipo de transformación son las transformaciones (HSI) Hue/Saturación/iluminación

[ 44 ]

### 1.3.4 Imágenes en colores

- ▶ Representación gráfica de la distribución que existe de las distintas tonalidades de grises con relación al número de pixeles o porcentaje de los mismos.



- ▶ La iluminación se refiere al brillo de la imagen.
- ▶ El Hue es lo que normalmente representamos como color RVA.
- ▶ La saturación es la medida de que tan blanco es un color. Por ejemplo:
  - ▶ Rosa = rojo con mas saturación de blanco ∴ menos saturado que un rojo.

[ 45 ]

### 1.3.4 Imágenes en colores

Este método puede ser usado para describir color; por ejemplo: un color "naranja brillante" tendría:

- ✓ Iluminación = brillante
- ✓ Hue = naranja
- ✓ Saturación = alta (profunda)



**Nota:**

*Uno puede imaginarse este color en la mente, sin embargo, no cualquiera puede decir que dados los tres canales (RGB), realmente significa R=245, G=110 y B=20*

[ 46 ]

### 1.3.4 Imágenes en colores

Ya que el espacio HSI fue desarrollado de manera que el ser humano lo entienda, varios métodos han sido propuestos para pasar de RGB a HSI. Un ejemplo de esto es llamado “**transformada esférica**”.

Varios estándares sobre color han sido propuestos, uno de los más usados es el que usa coordenadas de cromacidad.

La (CIE) definió el siguiente estándar, para el caso de imagen RGB, las coordenadas de cromacidad correspondientes son:

$$r = \frac{R}{R+G+B}$$

$$g = \frac{G}{R+G+B}$$

$$b = \frac{B}{R+G+B}$$

[ 47 ]

### 1.3.4 Imágenes en colores

Estas ecuaciones básicamente normalizan cada componente con respecto a la suma de las demás.

Otro comité, el ITUR especifico el siguiente estándar diseñado para vídeo digital, ITU-RG01.

- ✓ En este caso se usan una señal de iluminación Y, 2 señales de diferencia de color Cr y Cb.

[ 48 ]

### 1.3.4 Imágenes en colores

#### PRINCIPIOS DE RECONOCIMIENTO DE PATRONES POR FUKINAWA

Para convertir una señal RGB de 24 bits/pixel en el sistema (Y, Cr, Cb):

$$Y = 0.299 R + 0.587 G + 0.114 B$$

$$Cr = -0.168 R - 0.3313 G + 0.5 B + 128$$

$$Cb = 0.5 R - 0.4187 G - 0.0813 B + 128$$

**Nota:**

Esta transformación es muy usada en muchos algoritmos de compresión de imágenes en color.

[ 49 ]

### 1.3.4 Imágenes en colores

Otra transformación usada para reducir información es la **transformada por componentes principales (TCP)**.

A grosso modo, esta transformada aplica métodos estáticos para poner la mayor parte de la información de las tres bandas en una sola.

La TCP examina todos los vectores RGB en la imagen y encuentra la transformada lineal que alinea las coordenadas de forma que la mayor parte de la información caiga a lo largo de un eje, el eje principal. Normalmente, se puede poner más del 90% de la información en una sola banda.

**Recomendación:**

Estudiar el modelo de color del libro de González & Woods.

[ 50 ]

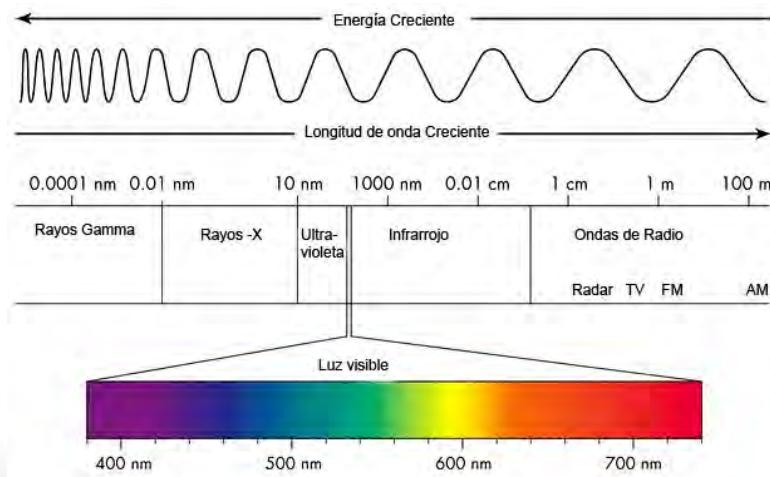
### 1.3.4 Imágenes en colores – Imágenes multiespectrales

- Una **imagen multi-espectral** es la que captura los datos de la imagen en frecuencias específicas a través del espectro electromagnético
- Las longitudes de onda pueden estar separados por filtros o por el uso de instrumentos que son sensibles a las longitudes de onda particular, incluyendo la luz de frecuencias por encima del rango de luz visible como el infrarrojo, ultravioleta, rayos X, características del radar, etc.
- La imagen espectral puede permitir la extracción de la información adicional que el ojo humano no logra captar con sus receptores para los canales rojo, verde y azul

[ 51 ]

### 1.3.4 Imágenes en colores – Imágenes multiespectrales

#### Espectro electromagnético



[ 52 ]

### 1.3.4 Imágenes en colores – Imágenes multiespectrales

✓ Si las imágenes multiespectrales tienen más de tres bandas, entonces se usa el método de componente principal para mapear la información o los privilegios, ejemplo de fuentes generadoras:

- ✓ Sistemas satelitales
- ✓ Sistemas infrarrojos
- ✓ Sistemas de sonar
- ✓ Sistemas de diagnóstico médico
- ✓ Sistemas de radar

[ 53 ]

### 1.3.4 Imágenes en colores – Imágenes multiespectrales

✓ El número de bandas en las cuales la información se divide dependiendo de la sensibilidad de los sensores del sistema. Por ejemplo, aunque el espectro pudiera dividirse en más de tres por cuestiones asociadas al SVH.

✓ La mayoría de los satélites en órbita colectan información en 2 a 7 bandas.

- ✓ 1 - 3 en el visible
- ✓ 1 o más en infrarrojo.
- ✓ El resto en radar.

✓ Los más nuevos pueden capturar información en ~30 bandas. Esto justifica los métodos de compresión.

[ 54 ]

### Ej. Imágenes multiespectrales Landsat

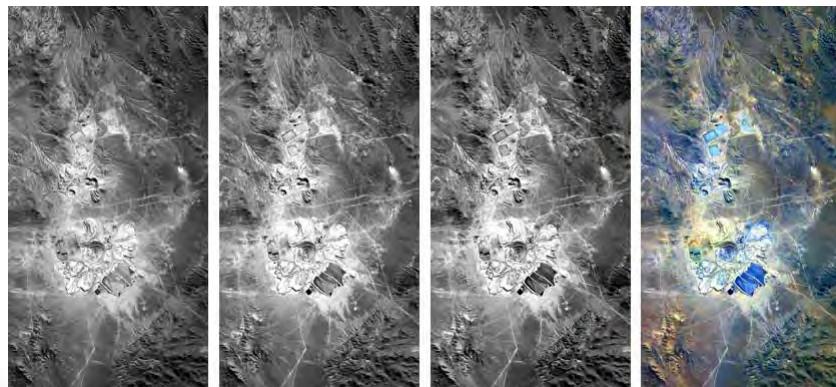
Landsat es el nombre de una serie de satélites lanzados por la agencia NASA de los EUA para la observación de la Tierra. Landsat es un acrónimo de "Land Satellite" (Satélite de la Tierra).



[ 55 ]

### Ej. Imágenes multiespectrales

*Bandas 1, 2 y 3 de una imagen ASTER de “La Escondida”, después una combinación RGB en 321 para crear imágenes de color.*



[ 56 ]

Ej. Imágenes multiespectrales

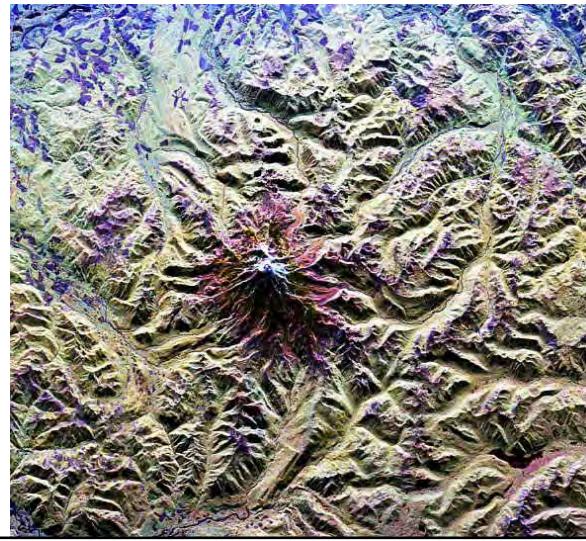
*Imagen ASTER de “La Escondida”, desierto de Atacama, Chile*



[ 57 ]

Ej. Imágenes multiespectrales

*Imagen de radar del Monte Rainier, en el estado de Washington*



[ 58 ]

## Ej. Imágenes multiespectrales

*Imagen del tobillo por Resonancia Magnética*

[ 59 ]

## Ej. Imágenes multiespectrales

*Imagen del abdomen por Tomografía Axial Computarizada*

[ 60 ]

**Ej. Imágenes multiespectrales****Ej. Imágenes satelitales**

Imagen	No. De bandas multiespectrales	Resolución multiespectral (m)	Extensión Escena (Km <sup>2</sup> )	Data Ima gen
Landsat 7 (+ETM)	8	30 (60)	185*170	1999
Landsat 5 (TM)	8	30 (60-120)	185*170	1982
ASTER	14	15 (30-90)	61,5*63	2000
AVNIR-2 (ALOS)	4	10	70*70	2006
QuickBird	4	2,4	16,5*16,5	2002

[ 61 ]

**1.3.5 El histograma**

✓ El **histograma** de una imagen se define como la curva que a lo largo de uno de sus ejes representa cada uno de los posibles niveles de gris, y en el otro la frecuencia relativa de aparición del mismo en la imagen.

✓ Un vistazo al histograma ofrece una idea rápida de cuánto distribuidos se encuentran los niveles de gris en la imagen, aspecto asociado al concepto de contraste.

[ 62 ]

### 1.3.5 El histograma

#### Formalización:

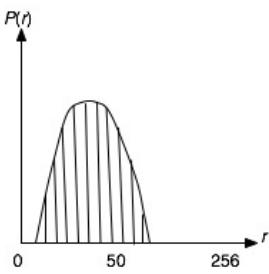
- ✓ El **histograma** de una imagen es una función discreta que representa el número de píxeles en la imagen en función de los niveles de intensidad ( $g$ ).
- ✓ La probabilidad  $P(g)$  de ocurrencia de un determinado nivel de gris ( $g$ ) se define como:

$$P(g) = \frac{N(g)}{M}$$

[ 63 ]

### 1.3.5 El histograma

- O de otro modo, para niveles de gris en el rango  $[0, L-1]$
- es una función discreta  $p(r_k) = n_k/n$ ,
- donde  $r_k$  es el  $k$ -ésimo nivel de gris,
- $n_k$  es el número de píxeles de la imagen con ese nivel de gris,
- $n$  es el número total de píxeles de la imagen y  $k=0,1,2,3,\dots,L-1$



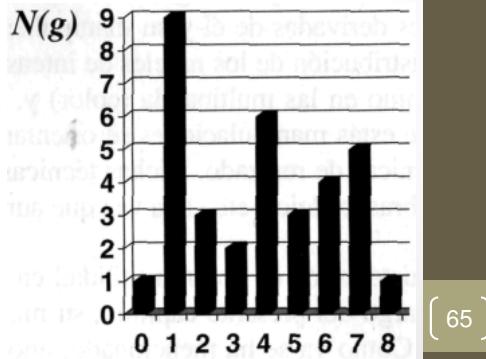
[ 64 ]

### 1.3.5 El histograma

Ej. Matriz que muestra la fracción de una imagen (a) y de acuerdo a los niveles de gris que en ella se presenta, su correspondiente histograma (b)

$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 7 & 6 & 6 \\ 2 & 2 & 7 & 7 & 6 & 6 \\ 8 & 2 & 7 & 7 & 9 & 9 \end{bmatrix}$
--

a)



b)

[ 65 ]

### 1.3.5 El histograma

#### Propiedades de un Histograma

##### 1. Media

$$\bar{g} = \sum_{g=0}^{L-1} g P(g) = \sum_i \sum_j \frac{I(i,j)}{M}$$

##### 2. Varianza

$$\sigma^2 = \sum_{g=0}^{L-1} (g - \bar{g})^2 P(g)$$

##### 3. Asimetría

##### 4. Energía

$$a = \sum_{g=0}^{L-1} (g - \bar{g})^3 P(g)$$

##### 5. Entropía

$$E = \sum_{g=0}^{L-1} (P(g))^2$$

$$e = - \sum_{g=0}^{L-1} P(g) \log_2 [P(g)]$$

[ 66 ]

### 1.3.5 El histograma

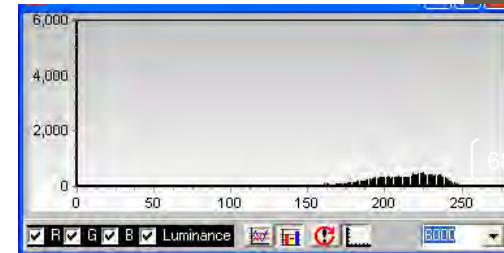
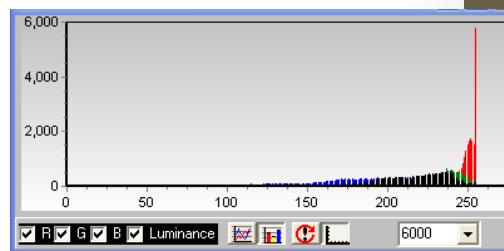
**Ejercicio:** Calcular el histograma de la siguiente imagen A, así como las propiedades de Media y Varianza

A=	170	120	100	70	120	255	230	150
	218	150	90	110	200	70	50	90
	40	100	80	110	200	200	50	90
	200	150	70	140	80	200	200	160
	40	60	130	200	200	200	220	220
	100	40	200	200	140	200	230	220
	100	200	190	200	220	226	220	230
	100	80	120	220	220	140	90	90

[ 67 ]

### 1.3.5 El histograma

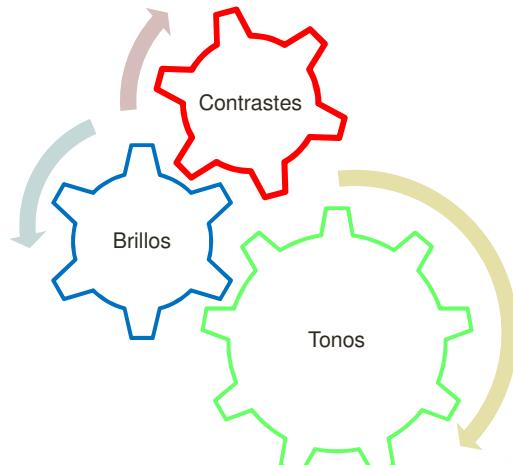
Ej. Imagen en colores y en niveles de gris con sus correspondientes histogramas



[ 68 ]

## 1.4 Almacenamiento de imágenes digitales

Consideraciones al almacenar una imagen digital:



[ 69 ]

## 1.4 Almacenamiento de imágenes digitales

Consideraciones al almacenar una imagen digital:

se puede elegir de entre varios formatos

- **comprimidos**: algunos con pérdidas y otros sin ellas;
- **sin compresión**
- memoria limitada,
- descargarse desde Internet
- Interesa máxima calidad posible y poco importa el espacio que puedan ocupar
- etc.

[ 70 ]

## 1.4 Almacenamiento de imágenes digitales

Tamaño imágenes:

- Pixel ByN:
  - intensidad (8 bits)
- Pixel Color:
  - RGB (24 bits, 16 millones colores)

Ejemplo de características de una imagen 768x540 RGB  
(24 bits)

- $768 \times 540 \times 3 = 1.244.160$  aprox. 1,2Mb
- 1 seg (25 img/seg) aprox. 26,2 Mb.
- 10 min aprox. 862 Mb

71 ]

## 1.4 Almacenamiento de imágenes digitales

► Almacenamiento:

Hi-color: método reducido para representar colores  
1 píxel = 2 bytes

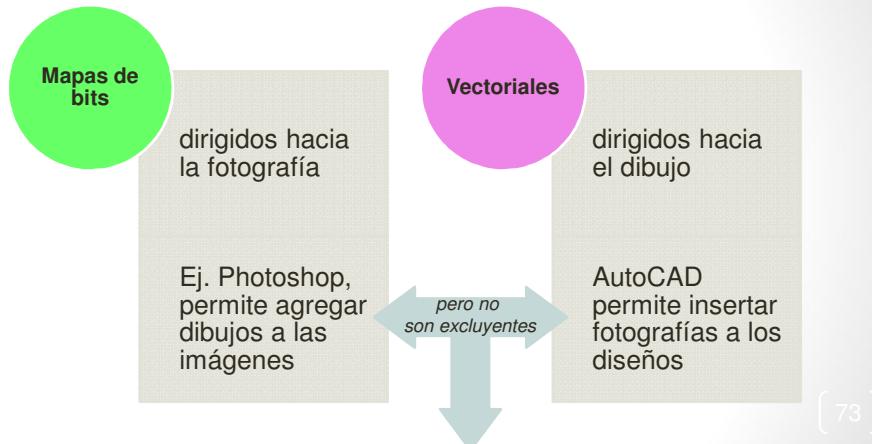
5 bits por cada color (Rojo, Verde, Azul)

Imágenes en punto flotante: útiles en procesos intermedios  
1 píxel = 1 float o un double

[ 72 ]

## 1.4 Almacenamiento de imágenes digitales

### ► Formatos de almacenamiento:



programas de diseño gráfico como Corel Draw son ejemplos de sistemas en donde confluyen mapas de bits y vectoriales

## 1.4 Almacenamiento de imágenes digitales

Mapa de bits	Vectoriales
ideal para las fotografías	más apropiados para hacer dibujo
las líneas oblicuas parecen pixeladas	ofrece líneas bien definidas,
	tratamiento de la imagen por partes,
	permite editar elementos tan sencillos como una raya o un punto
	requerir menos <u>memoria</u> y menos espacio de <u>almacenamiento</u>
	pueden ser redimensionadas y extendidas sin perder calidad

[ 74 ]

#### 1.4.1 Formatos espaciales (BMP, PNG y JPG)

##### ► Pixelación:

- ▶ Los pixels no tienen siempre el mismo tamaño ni se tienen porque encontrar en mismo número en imágenes de las mismas dimensiones.
- ▶ La calidad de una imagen viene dada por número de pixels en que dividamos una imagen (normalmente esto se mide en puntos por pulgada o dpi) y el número de colores que puedan tener y, evidentemente, ocuparán más espacio en disco en la medida que dicha calidad aumente.
- ▶ Como consecuencia de esto aquellos gráficos con más calidad y número de pixels serán mucho más costosos de reproducir y transformar para nuestra aplicación o reproductor gráfico y más lentos en la descarga vía web.

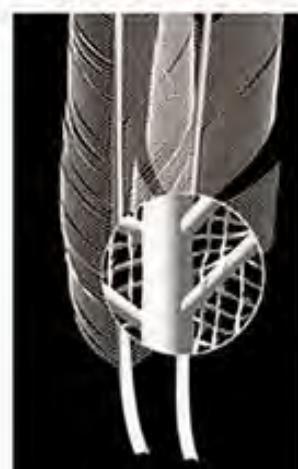
[ 75 ]

#### 1.4.1 Formatos espaciales (BMP, PNG y JPG)

Mapa de Bits



Imagen Vectorial



[ 76 ]

- ▶ Ejemplo: Si ampliamos mucho una zona de la imagen, observemos el **pixelado**

#### 1.4 Almacenamiento de imágenes digitales

- ▶ A pesar de las diferencias, es posible convertir diseños vectoriales a mapas de bits y viceversa, Aunque este segundo proceso es más complicado.
- ▶ Esta conversión la pueden hacer muchos programas:
  - ▶ Corel Draw es muy eficiente para convertir sus archivos vectoriales (CDR) en mapas de bits,
  - ▶ Streamline, de Adobe, es una de las pocas aplicaciones de nivel profesional que permite <sup>77</sup>) convertir numerosos mapas de bits a formato vectorial.

#### 1.4 Almacenamiento de imágenes digitales

- ▶ Conversión entre formatos de Mapa de Bits y gráficos Vectoriales
- ▶ La transformación de un mapa de bits a un formato vectorial se llama vectorización.
  - ▶ Este proceso normalmente se lleva a cabo o bien manualmente calcando el mapa de bits con curvas de Bézier o polígonos vectoriales o bien con ayuda de un programa específico, como por ejemplo Corel PowerTrace o Inkscape.
  - ▶ El proceso inverso, convertir una imagen vectorial en una imagen de mapa de bits, es mucho más sencillo y se llama rasterización.

( 78 )

#### 1.4.1 Formatos espaciales (BMP, PNG y JPG)

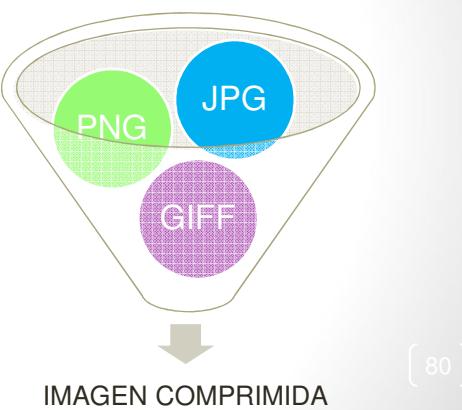
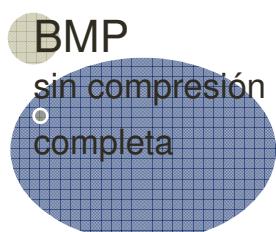
- Entre los tipos de archivo de mapa de bits más comunes tenemos:



( 79 )

#### 1.4.1 Formatos espaciales (BMP)

La diferencia fundamental entre los formatos en que se almacena una imagen es el nivel de compresión de la imagen original a la cual representan.



( 80 )

#### 1.4.1 Formatos espaciales

Existen dos formas de compresión fundamentales

Sin  
pérdida de  
calidad:

- Son aquellos formatos en que la imagen original se puede recuperar bit a bit a pesar de poder reducir de un 10% al 40% el tamaño de la imagen.
- Ejemplos de estos formatos son: TIFF y PNG.

Con  
pérdida en  
la calidad

- Se puede alcanzar niveles de compresión más elevados, pero cuando se convierte a este formato no se puede recuperar la calidad de la imagen original.
- Ejemplo: GIF (mayor de 256 colores) y JPEG.

[ 81 ]

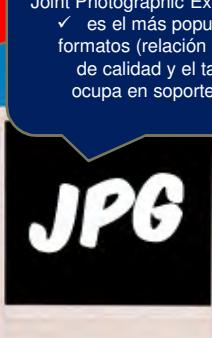
#### 1.4.1 Formatos espaciales (GIF, PNG y JPG)

- File Image File Format:
- ✓ almacenan imágenes de alta calidad
  - ✓ tamaño mayor adicional sobre la misma como el nombre que la imagen a la que representa (información del autor, descripción, etc.)
  - ✓ formato preferido de fotógrafos para crear copias impresas de alta calidad



utilizado para representar imágenes de mejor calidad que el formato JPEG en páginas Web

- Joint Photographic Experts Group:
- ✓ es el más popular de los formatos (relación entre el nivel de calidad y el tamaño que ocupa en soportes digitales)



PNG (Portable Network Graphics):  
✓ a pesar de utilizar un método de compresión sin pérdida de calidad, ocupa menos espacio que el formato TIFF



[ 82 ]

Existe gran variedad de formatos de imágenes (más de 30)!

#### 1.4.1 Formatos espaciales (BMP, GIF, PNG y JPG)

- Para comparar el tamaño que ocupan los archivos entre los diferentes formatos, supóngase una imagen a color de 24 bits por píxel, con una resolución de 260x175 píxeles ( $260 \times 175 \times 3 = 136,5$  kB).
- El almacenamiento para diferentes formatos se muestra en la siguiente tabla.

Formato	Tamaño	Compresión
Imagen original	136.5 kB	1x
JPEG	46.3 kB	$136.5/46.3=2.95x$
TIFF	138.5 kB	$136.5/138.5=0.985x$
PNG	96.3 kB	$136.5/96.3=1.42x$
GIF	38.2 kB	$136.5/38.2=3.6x$

( 83 )

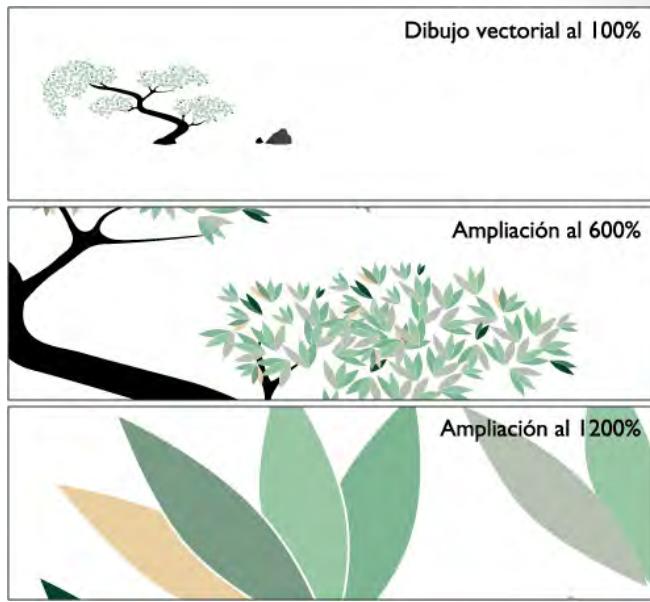
#### 1.4.2 Formatos vectoriales (AI, CDR)

- ▶ El formato vectorial define objetos geométricos (puntos, líneas y polígonos) mediante la codificación explícita de sus coordenadas.
- ▶ Los puntos se codifican en formato vectorial por un par de coordenadas en el espacio, las líneas como una sucesión de puntos conectados y los polígonos como líneas cerradas (formato orientado a objetos) o como un conjunto de líneas que constituyen las diferentes fronteras del polígono (formato Arco/nodo).

( 84 )

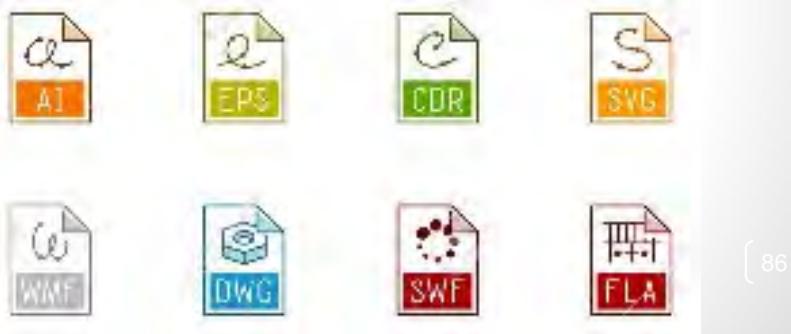
## 1.4.2 Formatos vectoriales (AI, CDR)

▶ Ejemplo:



## 1.4.2 Formatos vectoriales (AI, CDR)

- ▶ Algunos de los formatos gráficos que aceptan vectores son:
- ▶ AI (de Illustrator), CDR (de Corel Draw), DXF (formato de intercambio de AutoCad), .FH9, .FH10, .FH11... (de FreeHand), IGES, PostScript, SVG, SWF (de Flash), WMF (Windows MetaFiles), etc.



### 1.4.2 Formatos vectoriales (AI, CDR)



Metaformato utilizado para guardar sus archivos gráficos nativos.

Admiten cabecera de previsualización (thumbnail) y pueden trabajar con vectores y mapas de bits

Permiten texturas, degradados, fotos integradas o vinculadas a archivos externos, textos trazados o con fuentes incluidas y manejo de capas y máscaras

Admite algoritmos de compresión sin pérdidas

Apto para intercambiar gráficos entre diferentes aplicaciones

### 1.4.2 Formatos vectoriales (AI, CDR)



#### CDR (.cdr) (Corel Draw)

Admite la inclusión de elementos de mapa de bits, pudiendo llevar además cabecera de previsualización (thumbnail).

Formatos con más posibilidades con respecto al color, a la calidad de los diseños y al manejo de fuentes, pudiendo contener los textos trazados o con fuentes incluidas

Desventaja: su falta de compatibilidad con el resto de aplicaciones gráficas, al ser éstas incapaces de almacenar imágenes bajo este formato

( 88 )

## Actividad 1. Mapa mental U-1

1. La importancia y el uso del análisis de imágenes en las ciencias de la computación y el sistema de visión humano
  2. Adquisición y creación de imágenes digitales
    - Muestreo y cuantización
    - Imágenes binarias, en niveles de gris y en colores
  - 3 El histograma
  - 4 Almacenamiento de imágenes digitales
    - Formatos espaciales (BMP, PNG y JPEG)
    - Formatos vectoriales (AI y CDR)
- Equipos: 4 equipos de 4 elementos



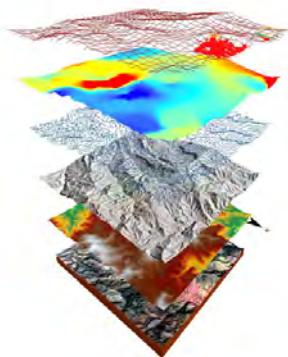
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES  
ACADEMIA DE INGENIERÍA DE SOFTWARE



Profesora: M. en C. Ma. Elena Cruz Meza,  
e-mail: [analisisimagenesescm@gmail.com](mailto:analisisimagenesescm@gmail.com)

## ANÁLISIS DE IMÁGENES

### Análisis de Imágenes



## Unidad II

### Análisis Espacial

## Análisis de Imágenes

### Contenido

#### 2.1 La convolución

2.1.1 La convolución de dos funciones continuas.

2.1.2 La convolución de dos funciones discretas.

2.1.3 La imagen digital como una función discreta bidimensional.

#### 2.2 El uso de la convolución de dos imágenes digitales.

2.2.1 Ajuste de brillo.

2.2.2 Filtros pasa-bajas (Promediador, gaussiano, etc.)

2.2.3 Filtros pasa-altas (Gradiente, Sobel, Canny, etc.)

#### 2.3 Filtros de moda y mediana.

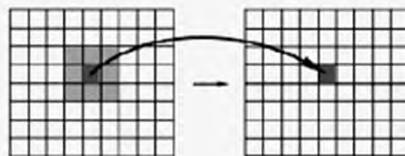
#### 2.4 Segmentación.

2.4.1 Binarización.

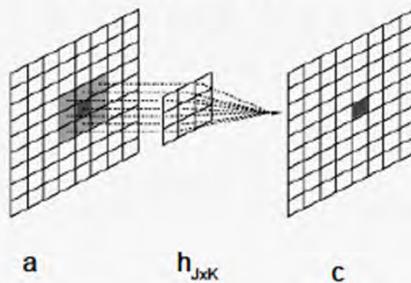
2.4.2 Binarización automática haciendo uso del histograma.

## 2.1 La Convolución

Imagen MxN



Núcleo de convolución mxn



## 2.1 La Convolución

### La Convolución y la Correlación

- Son dos relaciones de la transformada de Fourier que constituyen la unión fundamental entre los dominios espacial y de frecuencias
- Ambas son de importancia fundamental para la comprensión de las técnicas de procesado de imágenes basadas en la transformada de Fourier.

## 2.1 La Convolución

**La convolución y las operaciones relacionadas se encuentran en muchas aplicaciones de ingeniería y matemáticas**

- Estadística: un promedio móvil ponderado es una convolución
- Teoría de la probabilidad: la distribución de probabilidad de la suma de dos variables aleatorias independientes es la convolución de cada una de sus distribuciones de probabilidad
- Óptica: una fotografía desenfocada es la convolución de la imagen correcta con el círculo borroso formado por el diafragma del iris

## 2.1 La Convolución

**La convolución y las operaciones relacionadas se encuentran en muchas aplicaciones de ingeniería y matemáticas**

- Acústica: un eco es la convolución del sonido original con una función que represente los objetos que se reflejen
- Ingeniería eléctrica y otras disciplinas: la salida de un sistema lineal es la convolución de la entrada con la respuesta del sistema a un impulso
- Física: en un sistema lineal con un principio de superposición aparece una operación de convolución

### 2.1.1 La Convolución de dos funciones continuas

Definición:

- ✓ La convolución de  $f$  y  $g$  se denota por  $f*g$
- ✓ Se define como la integral del producto de ambas funciones después de que sea invertida y desplazada una distancia  $T$
- ✓ La convolución requiere que una de las dos funciones sea refejada respecto al origen, antes de que la integral sea calculada sobre la variable de desplazamiento

$$(f * g)(t) = \int f(\tau)g(t - \tau)d\tau \quad \left. \right\} \begin{matrix} \text{Espacio} \\ \text{continuo 2D} \end{matrix}$$

## 2.1.2 La Convolución de dos funciones discretas

Supongamos que en lugar de ser continuas,  $f(x)$  y  $g(x)$  están discretizadas en matrices de tamaño  $A$  y  $B$ , respectivamente:  $\{f(0), f(1), f(2), \dots, f(A-1)\}, \dots, \{g(B-1)\}$ .

$$f[m] * g[m] = \sum_n f[n]g[m-n]$$
} Espacio discreto 2D

## 2.1.2 La Convolución de dos funciones discretas

Tipos de convolución:

Convolución Discreta:

$$y[n] = \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} t * x[k] * h[n-k] \right] = t * \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] * h[n-k] \right]$$

La convolución discreta se determina por un intervalo de muestreo  $t=1$ :

$$y[n] = x[n] * h[n] = \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] * h[n-k] \right]$$

Convolución Circular:

$$(f * g_T)(t) \equiv \int_{t_0}^{t_0+T} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\tau + kT) \right] g_T(t - \tau) d\tau,$$

## 2.1.2 La Convolución de dos funciones discretas

Propiedades:

- Comutatividad

$$f * g = g * f$$

Nota: Esta propiedad se puede perder si no se pide que “demos” la vuelta a una función.

- Asociatividad

$$f * (g * h) = (f * g) * h$$

- Distributividad

$$f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$$

## 2.1.2 La Convolución de dos funciones discretas

### Asociatividad con multiplicación escalar

$$a(f * g) = (af) * g = f * (ag)$$

Para todo número complejo o real  $a$ .

### Regla de derivación

$$\mathcal{D}(f * g) = \mathcal{D}f * g = f * \mathcal{D}g$$

Donde  $\mathcal{D}f$  denota la derivada de  $f$  o, en el caso discreto, el operador diferencia

$$\mathcal{D}f(n) = f(n+1) - f(n)$$

### Teorema de convolución

$$\mathcal{F}(f * g) = (\mathcal{F}(f)) \cdot (\mathcal{F}(g))$$

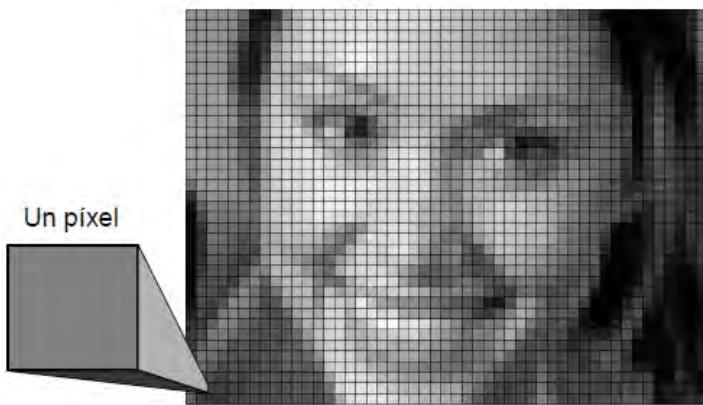
Donde  $\mathcal{F}$  denota la Transformada de Fourier de  $f$ . Este teorema también se cumple con la Transformada de Laplace.

### 2.1.3 La imagen digital como una función discreta bidimensional

- ▶ Imagen: término referente a una función bidimensional de la luz y la intensidad, a la que indicamos por  $f(x,y)$ , donde:
  - el valor o amplitud de  $f$  en las coordenadas espaciales  $(x,y)$  da la intensidad de la imagen en ese punto (iluminación), es decir, la naturaleza de  $f(x,y)$  está caracterizada por dos componentes: Iluminación  $i(x,y)$  y Reflectancia  $r(x,y)$ ,
- ▶ O de otra forma:
  - ▶ Una imagen se puede interpretar como una superficie bidimensional.
  - ▶ Una imagen digital es un muestreo discreto de la señal continua.

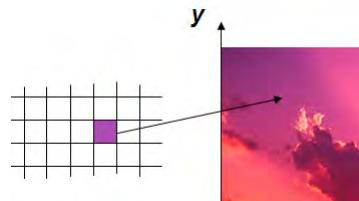
### 2.1.3 La imagen digital como una función discreta bidimensional

- Recordando que una **imagen digital es una matriz**, por lo que cada celda de la matriz es un **píxel**...



### 2.1.3 La imagen digital como una función discreta bidimensional

- ▶ Cada píxel representa el valor de una magnitud física.
  - ▶ Cantidad de luz en un punto de una escena.
  - ▶ Valor de color
  - ▶ Nivel de radiación, en general, cualquier radiación electromagnética.
  - ▶ Profundidad de una escena en una dirección.
  - ▶ Cantidad de presión ejercida en un punto.



### 2.1.3 La imagen digital como una función discreta bidimensional

Ejemplo de los tipos de imágenes digitales en tres formas distintas que son capturadas por el hombre mediante un dispositivo: a) Imagen en color, b) Imagen en niveles de gris y c) Imagen binaria

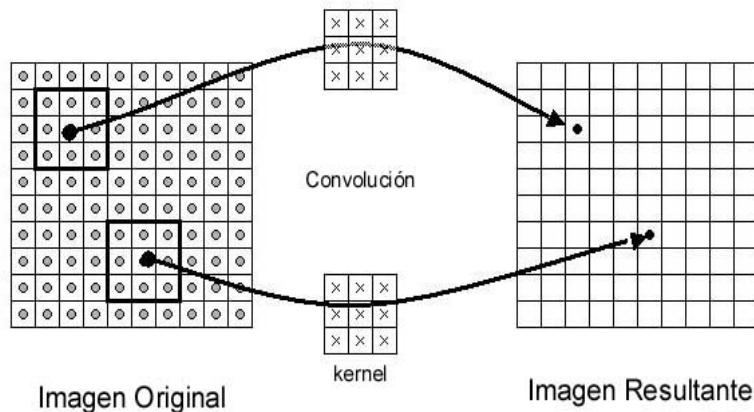


a)

b)

c)

## 2.2 El uso de la convolución de dos imágenes digitales.



## 2.2 El uso de la convolución de dos imágenes digitales.

### Covolución sobre imágenes

- Es una operación lineal
- Es la operación más general que se puede aplicar a una imagen
- A veces también nos referimos a la convolución como **filtrado**, he ahí el término de *filtrado espacial (directamente aplicable mediante una máscara)*
- Las máscaras de convolución no suelen ser grandes por el gasto computacional (ahorro de tiempo de cómputo)

## 2.2 El uso de la convolución de dos imágenes digitales.

### Covolución sobre imágenes

- Es una operación matemática, fundamental para muchos operadores de procesamiento de imágenes digitales
- Provee una forma de multiplicar dos arreglos de números, generalmente de tamaños diferentes pero de la misma dimensión para producir un tercer arreglo de números de la misma dimensión
- Esto puede ser utilizado para implementar operadores cuyos valores de pixeles de salida sean simples combinaciones lineales de ciertos valores de pixeles de entrada

## 2.2 El uso de la convolución de dos imágenes digitales.

### Filtrado Espacial o Métodos en el Dominio Espacial:

- Los filtros espaciales tienen como objetivo modificar la contribución de determinados rangos de frecuencias de una imagen.
- El término espacial se refiere al hecho de que el filtro se aplica directamente a la imagen y no a una transformada de la misma, es decir, el nivel de gris de un pixel se obtiene directamente en función del valor de sus vecinos.

## 2.2 El uso de la convolución de dos imágenes digitales.

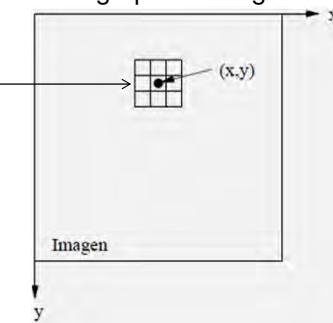
Las funciones del procesado de imágenes en el dominio del espacio pueden expresarse como:

$$g(x,y) = T[f(x,y)]$$

donde:

- $f(x; y)$  es la imagen de entrada,
- $g(x; y)$  es la imagen procesada, y  $T$  es un operador sobre  $f$ , definido sobre una ventana en  $(x; y)$ .
- El operador  $T$  también puede operar sobre un grupo de imágenes.

Ej. Una máscara de 3x3.



## 2.2 El uso de la convolución de dos imágenes digitales.

### Máscara o kernel:

- una pequeña distribución bidimensional
- los filtros se definen mediante máscaras de coeficientes:

$$\frac{1}{K} \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline w_1 & w_2 & w_3 \\ \hline w_4 & w_5 & w_6 \\ \hline w_7 & w_8 & w_9 \\ \hline \end{array} \Rightarrow R = w_1 z_1 + w_2 z_2 + \dots + w_9 z_9 = \sum_{j=1}^9 w_j z_j$$

<b>w<sub>1</sub></b>	<b>w<sub>2</sub></b>	<b>w<sub>3</sub></b>
<b>w<sub>4</sub></b>	<b>w<sub>5</sub></b>	<b>w<sub>6</sub></b>
<b>w<sub>7</sub></b>	<b>w<sub>8</sub></b>	<b>w<sub>9</sub></b>

14	14	15	16	20
20	11	7	6	4
12	9	6	8	10
21	22	10	4	30
23	15	16	1	0

## 2.2 El uso de la convolución de dos imágenes digitales.

### Uso de la convolución mediante los filtros espaciales

- Usando una máscara o filtro, la convolución puede expresarse como:

$$F(x, y) = \sum_i \sum_j f(x+i, y+j)h(i, j)$$

- Se multiplican los valores correspondientes de la máscara con los pixeles de la ventana considerada

## 2.2 El uso de la convolución de dos imágenes digitales.

### Representación de una máscara o kernel de convolución

- Normalmente la máscara se suele expresar como una matriz:

$$\begin{bmatrix} h4 & h3 & h2 \\ h5 & h0 & h1 \\ h6 & h7 & h8 \end{bmatrix}$$

y la convolución queda expresada como:

$$C = \left[ \sum_{K=0}^8 Pk * hk \right]$$

## 2.2 El uso de la convolución de dos imágenes digitales.

### Implementación

- Uno de los arreglos de entrada es usualmente una imagen en niveles de gris en 2D. El segundo arreglo es usualmente mucho más pequeño y también es 2D (aunque puede ser de 1x1, i.e. un pixel)

I <sub>11</sub>	I <sub>12</sub>	I <sub>13</sub>	I <sub>14</sub>	I <sub>15</sub>	I <sub>16</sub>	I <sub>17</sub>	I <sub>18</sub>	I <sub>19</sub>
I <sub>21</sub>	I <sub>22</sub>	I <sub>23</sub>	I <sub>24</sub>	I <sub>25</sub>	I <sub>26</sub>	I <sub>27</sub>	I <sub>28</sub>	I <sub>29</sub>
I <sub>31</sub>	I <sub>32</sub>	I <sub>33</sub>	I <sub>34</sub>	I <sub>35</sub>	I <sub>36</sub>	I <sub>37</sub>	I <sub>38</sub>	I <sub>39</sub>
I <sub>41</sub>	I <sub>42</sub>	I <sub>43</sub>	I <sub>44</sub>	I <sub>45</sub>	I <sub>46</sub>	I <sub>47</sub>	I <sub>48</sub>	I <sub>49</sub>
I <sub>51</sub>	I <sub>52</sub>	I <sub>53</sub>	I <sub>54</sub>	I <sub>55</sub>	I <sub>56</sub>	I <sub>57</sub>	I <sub>58</sub>	I <sub>59</sub>
I <sub>61</sub>	I <sub>62</sub>	I <sub>63</sub>	I <sub>64</sub>	I <sub>65</sub>	I <sub>66</sub>	I <sub>67</sub>	I <sub>68</sub>	I <sub>69</sub>

K <sub>11</sub>	K <sub>12</sub>	K <sub>13</sub>
K <sub>21</sub>	K <sub>22</sub>	K <sub>23</sub>

$$O_{35} = I_{35}k_{11} + I_{36}k_{12} + I_{37}k_{13} \\ + I_{45}k_{21} + I_{46}k_{22} + I_{47}k_{23}$$

## 2.2 El uso de la convolución de dos imágenes digitales.

### Implementación

- Máscaras de diferentes tamaños conteniendo distintos patrones de números dan resultados distintos

1	1	1
1	1	1
1	1	1

Conjunto de puntos =  
 $\{(-1,-1), (0,-1), (1,-1),$   
 $(-1,0), (0,0), (1,0),$   
 $(-1,1), (0,1), (1,1)\}$

Nota: En las implementaciones, los valores de las orillas difieren.

## 2.2 El uso de la convolución de dos imágenes digitales.

### Algoritmo general para calcular la convolucion con un pixel (x,y) de una imagen:

1. Se rota el filtro de convolucion (kernel) 180 grados respecto a su pixel central, excepto cuando es simétrico respecto a su origen
2. Se desliza el filtro rotado de manera que su pixel central quede alineado con el pixel (x,y) de la imagen
3. Se multiplica cada peso del filtro por los elementos de la imagen que se encuentran debajo
4. Se suman los productos individuales calculados en el paso 3

## 2.2 El uso de la convolución de dos imágenes digitales.

### Implementación

- Al deslizar la máscara sobre la imagen, generalmente se inicia por la esquina superior izquierda, y moviéndose a todas las posiciones donde quede completamente dentro de los límites de la imagen
- Si la imagen es de MxN y la máscara de nmx, el tamaño de la imagen de salida será (M-m+1)x(N-n+1)
- Cada posición de la máscara corresponde a un solo pixel de salida cuyo valor se calcula como sigue:

$$O(i, j) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n I(i + k - 1, j + l - 1) K(k, l)$$

donde  $i = 1..M-m+1, j = 1..N-n+1$

## 2.2 El uso de la convolución de dos imágenes digitales.

Ejemplo1: Consideremos la imagen y la máscara de convolución siguientes,

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Imagen

w1	w2	w3
w4	w5	w6
w7	w8	w9

1	1	1
1	1	1
1	1	1

Mascara o kernel

$$g(3,2) = w(-1, -1)f(x - 1, y - 1) + w(-1, 0)f(x - 1, y) + w(-1, +1)f(x - 1, y + 1) + \\ w(0, -1)f(x, y - 1) + w(0, 0)f(x, y) + w(0, 1)f(x, y + 1) + \\ w(1, -1)f(x + 1, y - 1) + w(1, 0)f(x + 1, y) + w(1, 1)f(x + 1, y + 1)$$

## 2.2 El uso de la convolución de dos imágenes digitales.

Al aplicar la convolución de la máscara con la coordenada g(3,2) , tenemos:

17	24	1	8	15
23	15	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Imagen original

$$g(2,2) \\ = 1*7 + 1*14 + 1*16 + 13 + 1*20 + 1*22 + 1*19 + 1*21 + 1*3 \\ = 7 + 14 + 16 + 13 + 20 + 22 + 19 + 21 + 3 \\ = 135$$


Resultado de la convolución

## 2.2 El uso de la convolución de dos imágenes digitales.

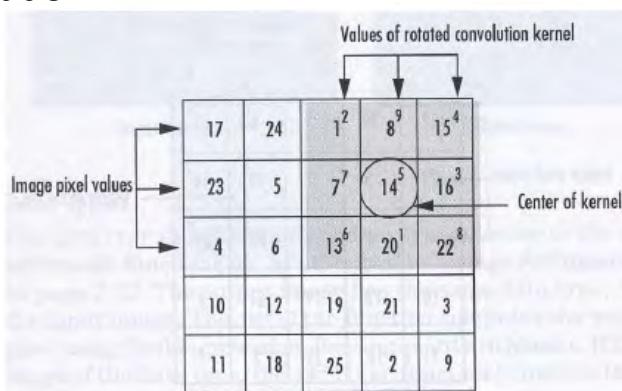
Ejemplo2 para calcular la convolución en el pixel (2,4) de la imagen, ahora con un kernel distinto:

$$\text{Sea la imagen } A = \begin{pmatrix} 17 & 24 & 1 & 8 & 15 \\ 23 & 5 & 7 & 14 & 16 \\ 4 & 6 & 13 & 20 & 22 \\ 10 & 12 & 19 & 21 & 3 \\ 11 & 18 & 25 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{y el filtro de convolución } h = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

## 2.2 El uso de la convolución de dos imágenes digitales.

### Resultado:



Por lo que, la salida del pixel (2,4) después de la convolución es:

$$h(2,4) = 1 \cdot 2 + 8 \cdot 9 + 15 \cdot 4 + 7 \cdot 7 + 14 \cdot 5 + 16 \cdot 3 + 13 \cdot 6 + 20 \cdot 1 + 22 \cdot 8 \\ = 575$$

## 2.2 El uso de la convolución de dos imágenes digitales.

### Correlación

$$(h \odot I)(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u, v)I(x + u, y + v) \partial u \partial v$$

$$(h \odot I)(x, y) = \sum_i \sum_j h(i, j)I(x + i, y + j)$$

Donde  $I$  es la función de entrada y  $h$  es el operador o filtro (template).

## 2.2 El uso de la convolución de dos imágenes digitales.

Para calcular la correlación en el pixel (2,4) de la imagen se siguen los pasos:

1. Se desliza el filtro de manera que su pixel central quede alineado con el pixel (2,4) de la imagen.
2. Se multiplica cada peso del filtro por los elementos de la imagen que se encuentran debajo.
3. Se suman los productos individuales calculados en el paso 2.

## 2.2 El uso de la convolución de dos imágenes digitales.

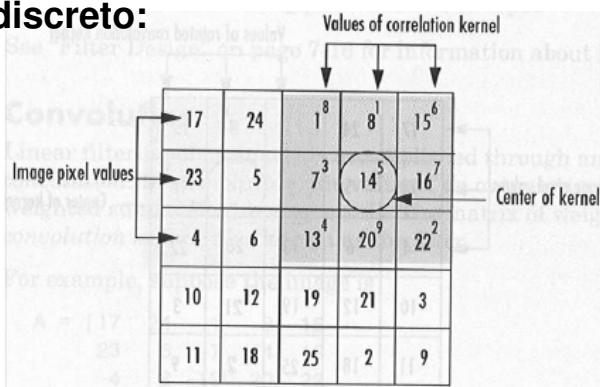
**Ejemplo3: Correlación de la imagen A con el filtro h:**

$$\text{Sea la imagen } A = \begin{pmatrix} 17 & 24 & 1 & 8 & 15 \\ 23 & 5 & 7 & 14 & 16 \\ 4 & 6 & 13 & 20 & 22 \\ 10 & 12 & 19 & 21 & 3 \\ 11 & 18 & 25 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{y el filtro de convolución } h = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

## 2.2 El uso de la convolución de dos imágenes digitales.

**Ej, en 2D discreto:**



Por lo que, la salida del pixel (2,4) después de la correlación es:

$$\begin{aligned} h(2,4) &= 1 \cdot 8 + 8 \cdot 1 + 15 \cdot 6 + 7 \cdot 3 + 14 \cdot 5 + 16 \cdot 7 + 13 \cdot 4 + 20 \cdot 9 + 22 \cdot 2 \\ &= 585 \end{aligned}$$

## 2.2 El uso de la convolución de dos imágenes digitales.

- Dependiendo de la máscara de convolución que se aplique se tiene un efecto distinto.

Ejemplos:

Filtro Promedio Estándar:

$$h = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Filtro Promedio Pesado:

$$h = \frac{1}{N+8} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & N & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Filtro Paso Alto Básico:

$$h = \frac{1}{9A} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & A-1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Detector de bordes de Sobel

$$h = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

## 2.2 El uso de la convolución de dos imágenes digitales.

Ejercicio: Sea la imagen A y el filtro g, obtener el resultado de

- la convolución de A con h
- La coorelación de A con h

$$A= \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 17 & 24 & 1 & 8 & 15 \\ \hline 23 & 15 & 7 & 14 & 16 \\ \hline 4 & 6 & 13 & 20 & 22 \\ \hline 10 & 12 & 19 & 21 & 3 \\ \hline 11 & 18 & 25 & 2 & 9 \\ \hline \end{array}$$

$$h= \begin{array}{|c|c|c|} \hline 8 & 1 & 6 \\ \hline 3 & 5 & 7 \\ \hline 4 & 9 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$A * h = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline \end{array}$$

$$A \circ h = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline \end{array}$$

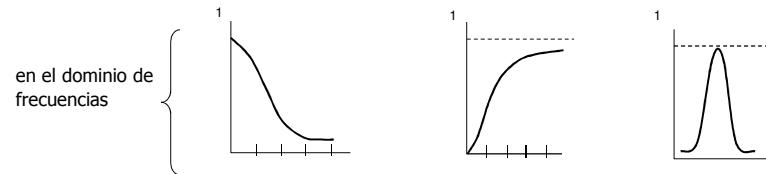
## 2.2 El uso de la convolución de dos imágenes digitales.

- Los filtros espaciales pueden clasificarse basándose en su linealidad: filtros lineales y filtros no lineales.
- Los filtros lineales pueden clasificarse según las frecuencias que dejen pasar:
  - los filtros paso bajo atenúan o eliminan las componentes de alta frecuencia a la vez que dejan inalteradas las bajas frecuencias;
  - los filtros paso alto atenúan o eliminan las componentes de baja frecuencia con lo que agudizan las componentes de alta frecuencia;
  - los filtros paso banda eliminan regiones elegidas de frecuencias intermedias.

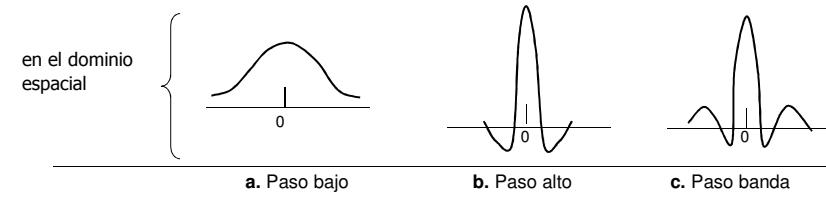
## 2.2 El uso de la convolución de dos imágenes digitales.

### Secciones transversales de:

- ✓ formas básicas para filtros de simetría circular en el dominio de la frecuencia



- ✓ correspondientes filtros en el dominio espacial.



## 2.2 El uso de la convolución de dos imágenes digitales.

### Tipos de filtros:

- Filtros lineales
  - Pasa altas
  - Pasa banda
  - Pasa bajas
- Filtros de orden – n o no lineales
- Filtros adaptativos

#### 2.2.1 Ajuste de brillo

- El ajuste de brillo es uno de los ajustes más elementales dentro del ajuste de imágenes y uno de los más empleados
- El Brillo es el porcentaje de luminiscencia u oscuridad de un color. Puede ir desde el 0% que significa negro, hasta el 100% que significa blanco.
- La operación correspondiente al ajuste de brillo es la siguiente:

$$M + B = C$$

### 2.2.1 Ajuste de brillo

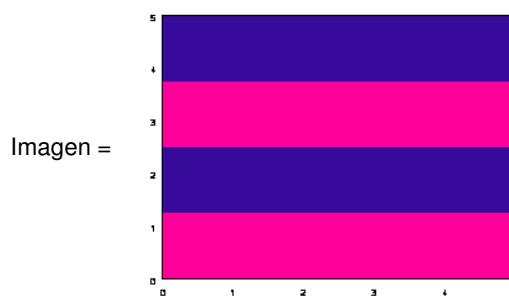
$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \dots & m_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (p,p,p) & (p,p,p) & \dots & (p,p,p) \\ (p,p,p) & (p,p,p) & \dots & (p,p,p) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (p,p,p) & (p,p,p) & \dots & (p,p,p) \end{pmatrix} = C$$

- Donde  $m_{ij}$  corresponde a un vector ( $R_{ij}$ ,  $G_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ) correspondiente a la Imagen.
- Para  $i = 1, 2, 3, \dots, m$  y  $j = 1, 2, 3, \dots, n$
- Donde  $M$  corresponde a la matriz imagen y  $C$  corresponderá a la imagen ajustada de  $M$ .
- Y  $p$  es el parámetro de ajuste de brillo, cuyo estándar va de -100 a 100

### 2.2.1 Ajuste de brillo

Ejemplo:

$$\text{Matriz } M = \begin{bmatrix} [55, 10, 155] & [55, 10, 155] & [55, 10, 155] & [55, 10, 155] \\ [255, 0, 155] & [255, 0, 155] & [255, 0, 155] & [255, 0, 155] \\ [55, 10, 155] & [55, 10, 155] & [55, 10, 155] & [55, 10, 155] \\ [255, 0, 155] & [255, 0, 155] & [255, 0, 155] & [255, 0, 155] \end{bmatrix}$$



### 2.2.1 Ajuste de brillo

Ejemplo:

$$\text{Matriz } N = \begin{bmatrix} [-100, -100, -100] & [-100, -100, -100] & [-100, -100, -100] & [-100, -100, -100] \\ [-100, -100, -100] & [-100, -100, -100] & [-100, -100, -100] & [-100, -100, -100] \\ [-100, -100, -100] & [-100, -100, -100] & [-100, -100, -100] & [-100, -100, -100] \\ [-100, -100, -100] & [-100, -100, -100] & [-100, -100, -100] & [-100, -100, -100] \end{bmatrix}$$

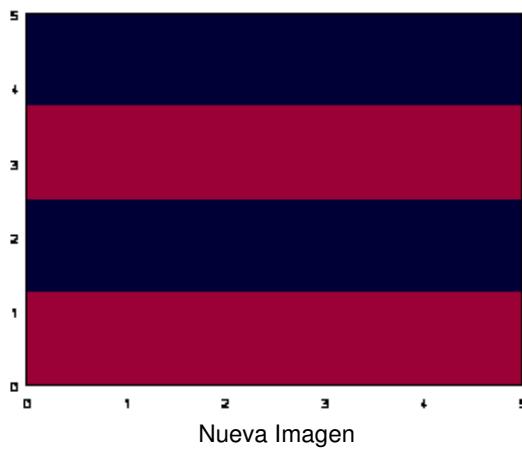
Ajuste de brillo  $M + N = C$

$$\text{Matriz } C = \begin{bmatrix} [-45, -90, 55] & [-45, -90, 55] & [-45, -90, 55] & [-45, -90, 55] \\ [155, -100, 55] & [155, -100, 55] & [155, -100, 55] & [155, -100, 55] \\ [-45, -90, 55] & [-45, -90, 55] & [-45, -90, 55] & [-45, -90, 55] \\ [155, -100, 55] & [155, -100, 55] & [155, -100, 55] & [155, -100, 55] \end{bmatrix}$$

### 2.2.1 Ajuste de brillo

Ejemplo:

Ajuste de brillo  $M + N = C$



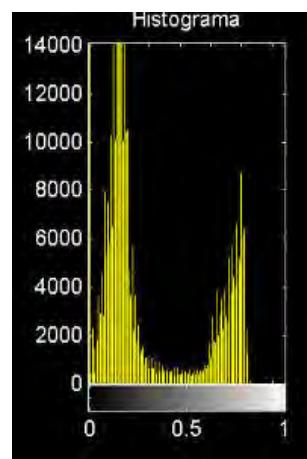
### 2.2.1 Ajuste de brillo

La imagen que se exhibe corresponde a una fotografía tomada en malas condiciones de iluminación:



### 2.2.1 Ajuste de brillo

✓Del caso mostrado, los colores de las cebras deberían verse mucho más claramente contrastados. Si se grafica el histograma, se puede observar que éste no muestra una distribución homogénea sino una distribución bimodal; es decir, existen muchos niveles de gris oscuro y muchos niveles claros, con una deficiencia de niveles a la mitad del rango y en los niveles más altos.



*El histograma refleja una distribución bimodal.*

### 2.2.1 Ajuste de brillo

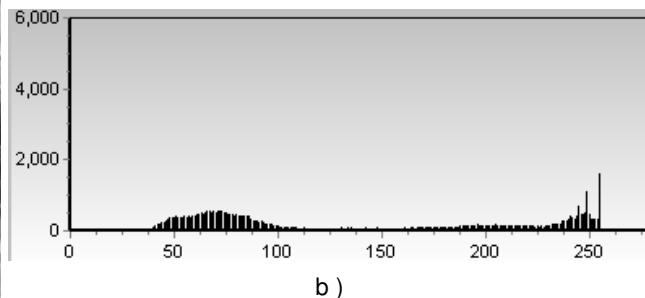
✓ Del caso mostrado, si se aplica un ajuste de brillo mediante alguno de los métodos basados en el histograma, por ejemplo, ecualización o igualación del histograma, se espera obtener una distribución más uniforme y una imagen de mejor calidad que la original



### 2.2.1 Ajuste de brillo

En general, un histograma con una distribución de los niveles de gris:

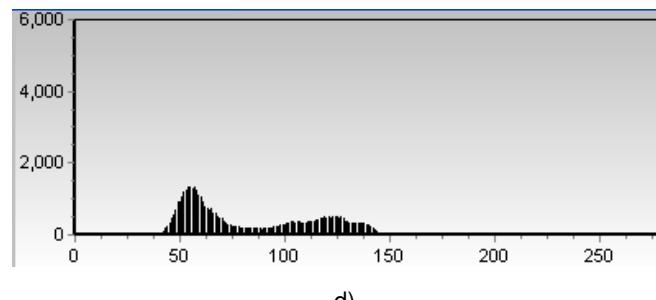
- 1) con una amplia distribución de los niveles de gris tiene un alto contraste (imágenes a y b)



a)

**2.2.1 Ajuste de brillo**

- 2) concentrada en una determinada zona presenta un contraste muy bajo (imágenes c y d)

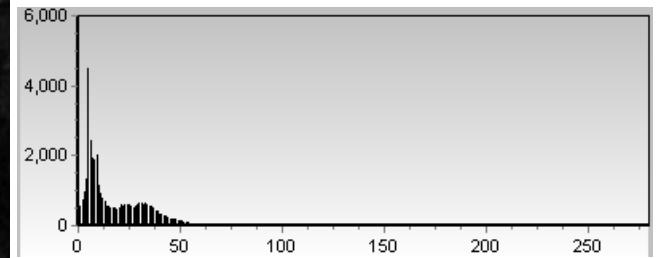


c)

d)

**2.2.1 Ajuste de brillo**

- 3) con los niveles de gris concentrados en la parte baja del rango corresponde a una imagen oscura (imágenes e y f)



e)

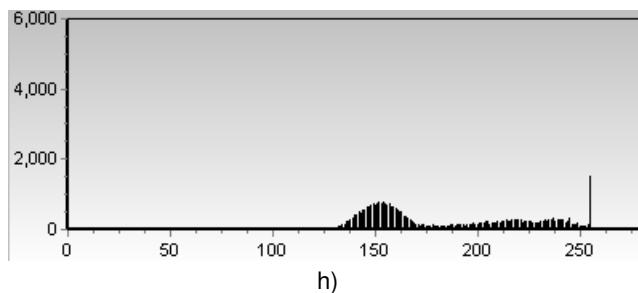
f)

### 2.2.1 Ajuste de brillo

- 4) con los valores concentrados en su parte alta corresponde a una imagen brillante (imágenes g y h)

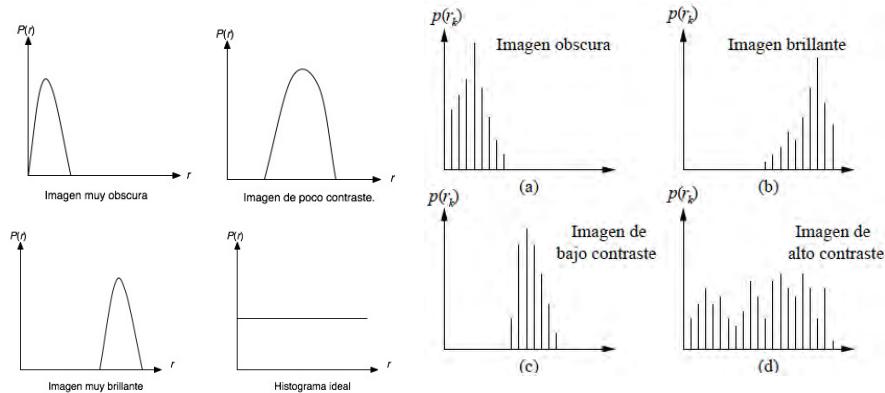


g)



### 2.2.1 Ajuste de brillo

- Representación gráfica de la distribución que existe de las distintas tonalidades de grises con relación al número de pixeles o porcentaje de los mismos.



### 2.2.1 Ajuste de brillo

Las técnicas básicas de transformación del histograma que resultan muy útiles para modificar el brillo y contraste de una imagen son:

- *Desplazamiento del histograma*
- *Contracción del histograma*
- *Expansión del histograma*
- *Ecualización o igualación del histograma*

### 2.2.1 Ajuste de brillo

#### ***Desplazamiento del histograma***

Se usa para aclarar u oscurecer una imagen manteniendo la relación entre los valores de niveles de gris. Esta operación puede llevarse a cabo por la simple adición o sustracción de un número fijo a todos los valores de nivel de gris:

$$g(i,j) = f(i,j) + DES$$

Donde *DES* es el valor a desplazar

### 2.2.1 Ajuste de brillo

#### ***Contracción del histograma***

Esta técnica produce una disminución del contraste de la imagen:

$$g(i,j) = \left[ \frac{C_{MAX}-C_{MIN}}{f(i,j)_{MAX}-f(i,j)_{MIN}} \right] [f(i,j) - f(i,j)_{MIN}] + C_{MIN}$$

Donde:

$f(i,j)$  es el nivel de gris de la imagen de entrada;

$f(i,j)_{MAX}$  es el mayor nivel de gris en la imagen de entrada  $f$ ;

$f(i,j)_{MIN}$  es el menor valor de gris en la imagen de entrada  $f$ .

$C_{MAX}$  y  $C_{MIN}$  son los valores máximos y mínimos deseados en la compresión del histograma.

### 2.2.1 Ajuste de brillo

#### ***Expansión del histograma***

Esta técnica expande los niveles de gris en la imagen:

$$g(i,j) = \left[ \frac{f(i,j)-f(i,j)_{MIN}}{f(i,j)_{MAX}-f(i,j)_{MIN}} \right] [MAX - MIN] + MIN$$

Donde:

$f(i,j)$  es el nivel de gris de la imagen de entrada;

$f(i,j)_{MAX}$  es el mayor nivel de gris en la imagen de entrada  $f$ ;

$f(i,j)_{MIN}$  es el menor valor de gris en la imagen de entrada  $f$ .

$C_{MAX}$  y  $C_{MIN}$  son los valores máximos y mínimos deseados en la compresión del histograma.

### 2.2.1 Ajuste de brillo

#### ***Ecualización o igualación del histograma***

$$F(g) = [g_{max} - g_{min}] P_g(g) + g_{min}$$

Donde:

$g_{max}$  y  $g_{min}$ , consideran los valores de intensidad máximo y mínimo, respectivamente, de la imagen dada, con:

$$P_g(g) = \sum_{g=0}^G p(g)$$

## Ejercicios:

- Dada la imagen X, que se muestra a continuación, realizar sobre ella lo siguiente:

0	0	1	2	6
1	3	3	1	3
2	2	4	3	3
2	4	5	4	3
1	5	5	4	4

- Una expansión, ocupando todo el rango de valores de gris, teniendo en cuenta que se mantienen los diez niveles de gris originales.
- Dada la expansión obtenida en 1), realizar sobre ella una contracción del histograma con el rango de niveles de intensidad entre 4 y 6.
- Considerando el valor de desplazamiento DES=2, aplicar el desplazamiento a la imagen obtenida en 2).
- Dada la imagen X, aplicar sobre ella la ecualización uniforme entre los valores máximos y mínimos del rango posible entre 0 y 9.

## 2.2.2 Filtros Pasa-Bajas

- Son utilizados en la reducción de ruido; suavizan y apllanan un poco las imágenes y como consecuencia se reduce o se pierde la nitidez.
- Producen difuminado de la imagen
- Su aplicación puede dificultar la búsqueda de las orillas, ya que ésta se basa normalmente en la detección de cambios bruscos de intensidad en la imagen.
- En inglés son conocidos como Smoothing Spatial Filters.
- Ej. Mean filtering (box filtering), Gausiano, etc.

### 2.2.2 Filtros Pasa-Bajas

#### Ej. Filtro promedio o de caja (box filtering)

- Normalmente los filtros se normalizan para que  $\sum h[j,k]=1$
- Es el filtro más simple y se basa en el promedio aritmético de los primeros vecinos de un píxel.

$$h = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Este filtro tiene las propiedades de suavizar, eliminar ruido y difuminar bordes
- Se encargan de atenuar la información de alta frecuencia, dejando inalterada la de baja frecuencia

### 2.2.2 Filtros Pasa-Bajas: Ejemplo



a) Imagen original

$$h = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Filtro promedio



c) Imagen ruidosa

d) Imagen filtrada

### 2.2.2 Filtros Pasa-Bajas

#### Ej. Filtro promedio estándar pesado

- Es una variación del filtro promedio estándar, también y se basa en el promedio aritmético de los primeros vecinos de un píxel, solo que le da mayor peso al pixel central ( $N>1$ )

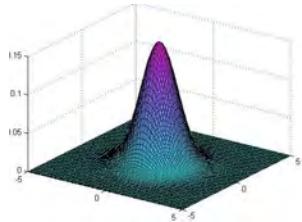
$$h = \frac{1}{N+8} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & N & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Los efectos de este filtro son similares al promedio estándar ya que depende del valor de N (mayor valor de N, más importancia al píxel central)

### 2.2.2 Filtros Pasa-Bajas

## Filtros Gaussianos

- Simulan una distribución gaussiana bivariante. El valor máximo aparece en el pixel central y disminuye hacia los extremos tanto más rápido cuanto menor sea el parámetro de desviación típica s. El resultado será un conjunto de valores entre 0 y 1. Para transformar la matriz a una matriz de números enteros se divide toda la matriz por el menor de los valores obtenidos.



$$g(x, y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2*s^2}}$$
$$G(x, y) = \frac{g(x, y)}{\min_{x,y}(g(x, y))}$$

### 2.2.2 Filtros Pasa-Bajas

## Filtros Gaussianos

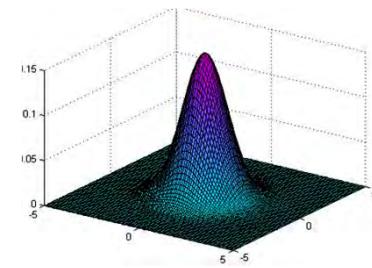
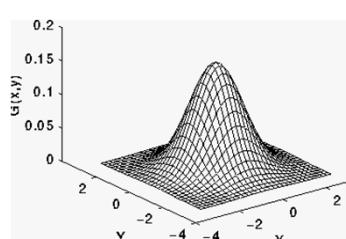
- Este tipo de filtros generalmente son utilizados para obtener filtros de tipo genérico. Pueden ser útiles, por ejemplo, cuando se asume que la respuesta espectral de un pixel es función de la reflectividad de los píxeles vecinos atenuada en función de la distancia.
- El alcance de esta atenuación (r) viene marcado por el tamaño de la ventana de filtrado ( $w = 2r + 1$ ) que debe especificarse previamente.

### 2.2.2 Filtros Pasa-Bajas

## Filtro Paso-bajas Gaussiano ( soften )

$$g_3 = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g_s = \frac{1}{246} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$



### 2.2.2 Filtros Pasa-Bajas

## Comparación : Gaussiano vs Promedio



Imagen original



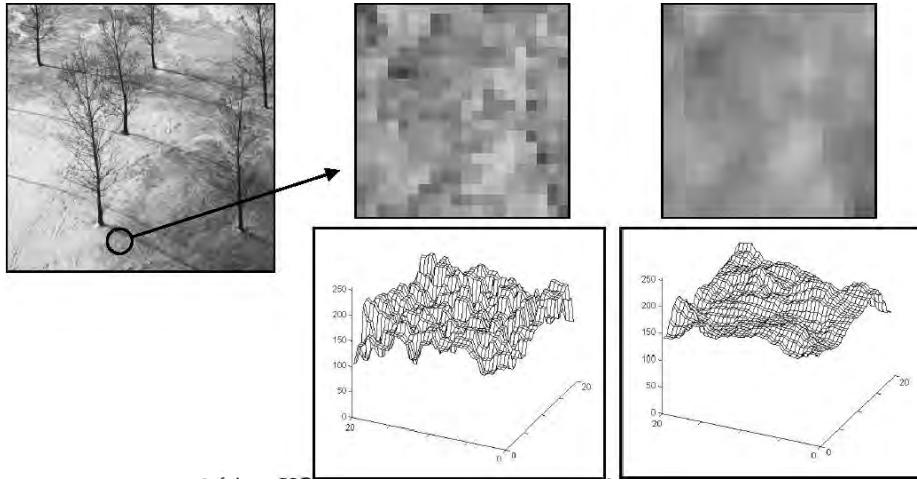
Filtro promediador



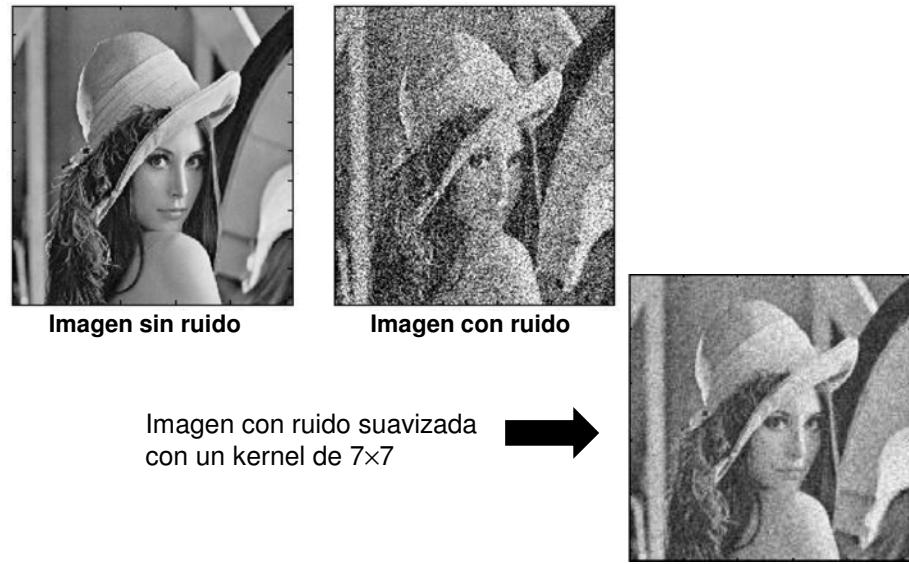
Filtro Gaussiano

### 2.2.2 Filtros Pasa-Bajas

## Filtro Paso-bajas Gaussiano : Detalles



### 2.2.2 Filtros Pasa-Bajas



**2.2.2 Filtros Pasa-Bajas**

Imagen sin ruido



Filtro bloque 7x7



Imagen con ruido



Filtro binomial 7x7

**2.2.2 Filtros Pasa-Bajas****Resumen: Suavizado direccional**

- Los filtros paso-bajas son utilizados para difuminar y reducir ruido en las imágenes, a este proceso se le conoce en inglés como smoothing.
- La reducción de ruido puede ser completada por el difuminado usando filtros lineales o bien con un filtrado no lineal.
- El difuminado (blurring) es usado en etapas de preprocessamiento desde la eliminación de pequeños detalles hasta la extracción de objetos y relleno de pequeños huecos en líneas y curvas.

## 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

- Estos filtros son utilizados para detectar cambios de luminosidad.
- Son utilizados en la detección de patrones como bordes o para resaltar detalles finos de una imagen.
- Son conocidos como Sharpening Spatial Filters, ej: Laplaciano

## 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

### Filtros basados en derivadas de la función Gaussiana

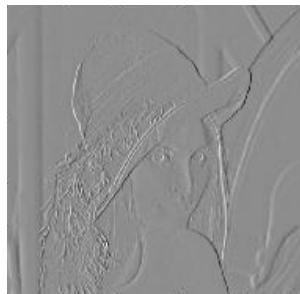
- Los filtros de Sobel y Prewitt, entre otros se basan en la derivada de la función Gaussiana y generalmente son empleados para detectar la presencia de bordes.
- En un principio estos filtros se obtuvieron heurísticamente, pero posteriormente se verificó que su funcionamiento correspondía a la aproximación de una binomial de primer orden para una primera derivada de una Gaussiana.
- A continuación se muestran los filtros Prewitt, Sobel, Robert y otros detectores de bordes y se profundizará con ellos en el tema de filtros pasa altas.

## 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

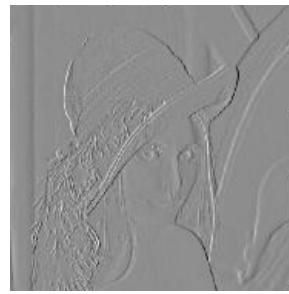
Operador	<i>Gradiente por fila</i>	<i>Gradiente por columna</i>
<b>Pixel difference</b>	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
<b>Separated pixel difference</b>	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
<b>Roberts</b>	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
<b>Prewitt</b>	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
<b>Sobel</b>	$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

## 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

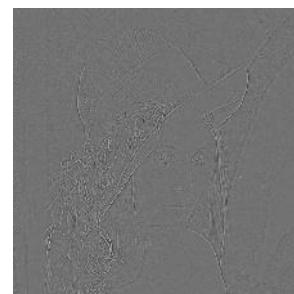
Ejemplo: Detección de bordes empleando distintas sobre la Imagen de Lena



Filtro Prewitt



Filtro Sobel



Filtro Laplaciano

### 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

#### Detección de discontinuidades: puntos aislados

Un punto aislado de una imagen tiene un tono de gris que difiere significativamente de los tonos de gris de sus píxeles vecinos, es decir, de los ocho píxeles de su entorno  $3 \times 3$ .

Ej. Una máscara (Laplaciano) para detectar un punto aislado es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Diremos que un píxel es un punto aislado si el resultado de aplicar la máscara sobre el píxel (en valor absoluto) es mayor o igual que un cierto valor umbral  $T$ , fijado por el decisor. Dicho valor depende de la aplicación que estemos realizando.

### 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

#### Filtro Laplaciano

Se basa en crear una máscara que destaque los píxeles (a través del aumento de su nivel de gris) cuya variación, con respecto a su vecindad, es significativa. A este tipo de filtro se le denomina sharpening, que puede traducirse como enfoque de la imagen, ya que destaca los detalles finos, bordes y otras discontinuidades de la misma a través de la aplicación de un filtro paso alto.

Si existiese una imagen formada por una matriz de una única fila, se podría calcular la variación de un píxel con respecto a su vecino aplicando el diferencial discreto de primer orden, ello es:

## 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

### Filtro Laplaciano

$$\frac{\partial f(y)}{\partial y} = f(y+1) - f(y)$$

- Si se aplica el diferencial de segundo orden, resulta:

$$\frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2} = (f(y+1) - f(y)) - (f(y) - f(y-1)) = f(y+1) + f(y-1) - 2f(y)$$

- El Laplaciano se define como el diferencial de segundo orden con respecto a dos variables, esto es:

$$\nabla^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$$

## 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

### Filtro Laplaciano

- Los términos derivativos se calculan como una extensión de:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = f(x+1, y) + f(x-1, y) - 2f(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = f(x, y+1) + f(x, y-1) - 2f(x, y)$$

- Sustituyendo ambas ecuaciones en la anterior, tenemos que:

$$\nabla^2 f(x, y) = f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x, y-1) - 4f(x, y)$$

- Lo que es equivalente a una máscara de la forma:

$w(-1, -1)$	$w(-1, 0)$	$w(-1, 1)$
$w(0, -1)$	$w(0, 0)$	$w(0, 1)$
$w(1, -1)$	$w(1, 0)$	$w(1, 1)$

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

## 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

### Filtro Laplaciano

Otra variante en las máscaras laplaciadas son la inversión del signo de los elementos que conforman la misma, como pueden ser:

0	-1	0	-1	-1	-1	0	-1	0	-1	-1	-1
-1	4	-1	-1	8	-1	-1	5	-1	-1	9	-1
0	-1	0	-1	-1	-1	0	-1	0	-1	-1	-1

## 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

### Filtro Laplaciano

Es importante destacar que el filtro laplaciano, al basarse en el diferencial de los píxeles de la vecindad, destaca las variaciones en las tonalidades de gris, mientras que atenúa la semejanza entre estos niveles.

### 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

Ejemplo:

mask	*	original image	=	convolved image
-1	-1	-1		
-1	8	-1		
-1	-1	-1		
*			=	
1	1	1	1	1
1	10	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

Dependiendo del valor de T, obtenemos:

4 puntos, si ( $0 < T \leq 9$ )

1 punto, si ( $9 < T \leq 72$ )

Ningún punto, si ( $T > 72$ )

### 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

- Sin embargo, frecuentemente estamos interesados en detectar líneas en una determinada dirección.
- Los píxeles que forman parte de una línea horizontal, vertical o diagonal, tendrán respuestas extremas ante alguna de las máscaras siguientes:

-1	-1	-1
2	2	2
-1	-1	-1

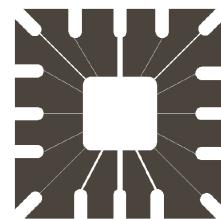
2	-1	-1
2	2	2
-1	-1	2

-1	2	-1
-1	2	-1
-1	2	-1

-1	-1	2
-1	2	-1
2	-1	-1

### 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

Ejemplo: supongamos que estamos interesados en las líneas de la imagen con una orientación de  $-45^\circ$ :



Máscara:

2	-1	-1
-1	2	-1
-1	-1	2



Valores absolutos de los resultados usando la máscara de detección de líneas con  $-45^\circ$  posterior umbralización

### 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

#### Detección de discontinuidades: líneas

##### Borde de una imagen digital en escala de grises



Borde ideal: forman un camino de un píxel de ancho, en los que se produce, perpendicularmente, un cambio en el nivel de gris.

Borde "rampa": forman un conjunto de píxeles conexos en los que se produce, en una determinada dirección, una variación gradual en el nivel de gris.

- Un punto se dice que es del borde si su derivada primera dos-dimensional es mayor que un cierto valor umbral.

### 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

#### Detección de discontinuidades: bordes

La idea que subyace en la mayor parte de las técnicas de detección de bordes es el cálculo de un operador local de derivación ya que un píxel pertenece a un borde si se produce un cambio brusco entre niveles de grises con sus vecinos.

Incidiremos en las propiedades de los operadores de derivación que vimos para realce de la imagen, para con la detección de bordes y estudiaremos otros no vistos hasta ahora.

### 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

#### Criterios a considerar para la detección de bordes

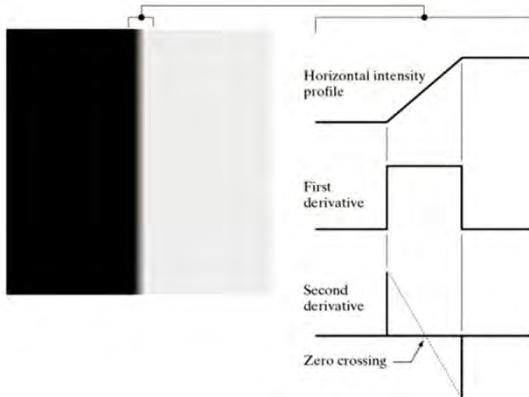
Un problema considerable en la búsqueda de los cambios bruscos para detectar bordes, es que también se detectará, colateralmente, el ruido.

En general, podemos decir que los pasos fundamentales en la detección de bordes son:

1. Realizar un suavizado de la imagen para reducir el ruido;
2. Detectar los posibles candidatos a ser puntos del borde;
3. Seleccionar, de entre los candidatos, aquéllos que pertenecen realmente al borde.

## 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

### Detección de bordes en imágenes en escala de grises



La primera derivada se puede usar para determinar la presencia de un borde. Además, el signo de la derivada segunda determina en qué parte del borde se encuentra el píxel.

## 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

En general, no hay forma de conocer si los píxeles detectados como parte del borde son correctos o no.

- **Falso positivo:** el detector devuelve un píxel cuando en realidad no pertenecía a ningún borde
- **Falso negativo:** el detector no devuelve un píxel cuando en realidad pertenecía a un borde.

Una manera posible de evaluar si un detector de bordes es bueno o no sería comparando el borde obtenido por el detector con el borde real de la imagen (para lo que, evidentemente, necesitamos conocerlo de antemano).

Existen otras aproximaciones que se basan en la "coherencia local". En este caso, no se compara con el borde real de la imagen, sino que se compara cada píxel detectado con sus vecinos.

### 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

Un ejemplo de un evaluador que compara con el borde real de la imagen viene dado por la siguiente función:

$$E = \frac{\sum_{i=1}^{I_D} \left( \frac{1}{1 + \alpha d(i)^2} \right)}{\max(I_D, I_I)}$$

donde

- $I_D$  es la cantidad de píxeles que devuelve el detector de bordes,
- $I_I$  es la cantidad de píxeles reales que pertenecen a un borde en la imagen,
- $d(i)$  es la distancia entre el píxel  $i$ -ésimo del detector y el píxel más próximo del verdadero borde de la imagen,
- $\alpha$  es una constante que se usa para reescalado . Lo normal es  $\alpha=1/9$ .

*Observemos que mientras más lejano esté el borde calculado al borde real, más próximo a cero es el valor de  $E$  y mientras más cercano, más próximo a 1.*

### 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

**Ejercicio:** Dada la imagen correspondiente a la siguiente matriz, encontrar el valor del evaluador anterior (llamado Figure of Merit), para los siguientes bordes encontrados (a), b) y c)). Tómese  $\alpha=0.5$  y la distancia city-block.

$$\text{Image Array} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 100 & 100 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
--	--	--

## 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

### Operadores gradiente:

Del vector gradiente  $\nabla f = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right] = [G_x, G_y]$

obtenemos su módulo  $|\nabla f| \approx |G_x| + |G_y|$

y su dirección  $\alpha(x, y) = \tan^{-1}\left(\frac{G_y}{G_x}\right)$

que es perpendicular a la del borde.

Varias máscaras usadas para calcular el gradiente:

Prewitt es más sencilla, pero Sobel evita mejor el ruido.

<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>-1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td></tr> </table>	-1	0	0	1	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>0</td><td>-1</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td></tr> </table>	0	-1	1	0										
-1	0																		
0	1																		
0	-1																		
1	0																		
Robert																			
<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	-1	-1	-1	0	0	0	1	1	1	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr> </table>	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1
-1	-1	-1																	
0	0	0																	
1	1	1																	
-1	0	1																	
-1	0	1																	
-1	0	1																	
Prewitt																			
<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>-1</td><td>-2</td><td>-1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr> </table>	-1	-2	-1	0	0	0	1	2	1	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>-2</td><td>0</td><td>2</td></tr> <tr><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr> </table>	-1	0	1	-2	0	2	-1	0	1
-1	-2	-1																	
0	0	0																	
1	2	1																	
-1	0	1																	
-2	0	2																	
-1	0	1																	
Sobel																			

## 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

### Operadores gradiente



## 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

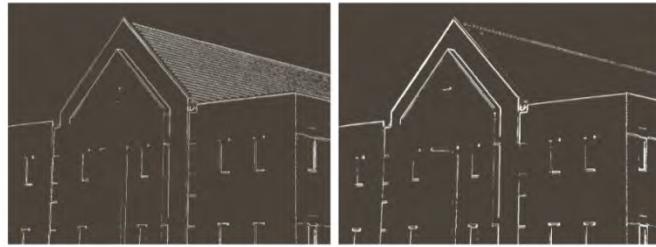
### Operadores gradiente



## 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

### Operadores gradiente

En algunas ocasiones es conveniente realizar una umbralización de la imagen gradiente obtenida.



## 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

### Operadores máscaras “brújula”

Un ejemplo son las máscaras de **Kirsch** (8 máscaras):

$K_0$	$K_1$	$K_2$	$K_3$
-3 -3 5 -3 0 5 -3 -3 5	-3 5 5 -3 0 5 -3 -3 -3	5 5 5 -3 0 -3 -3 -3 -3	5 5 -3 5 0 -3 -3 -3 -3
$K_4$	$K_5$	$K_6$	$K_7$
5 -3 -3 5 0 -3 5 -3 -3	-3 -3 -3 5 0 -3 5 5 -3	-3 -3 -3 -3 0 -3 5 5 5	-3 -3 -3 -3 0 5 -3 5 5

## 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

### Máscaras de compás de **Kirsch**:

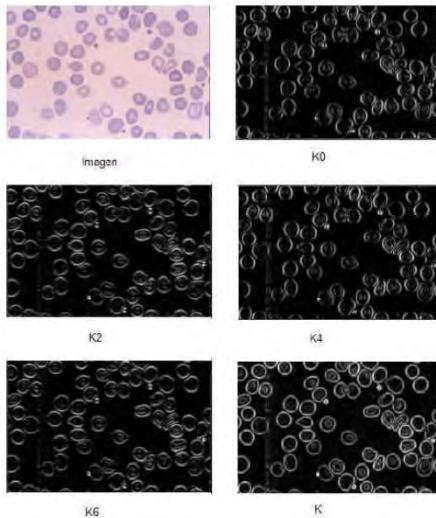
Por ejemplo, si el mayor valor es el resultante de aplicar la primera máscara sobre un píxel implica que existe un borde en sentido vertical en el píxel donde se ha aplicado la máscara.

Para encontrar los bordes, se aplica cada una de las máscaras en cada uno de los píxeles (se realiza una convolución con cada máscara). La respuesta del detector de bordes es el máximo de las respuestas de cada una de las ocho máscaras y la dirección del gradiente sería  $\pi^*i/4$  si  $K_i$  ha sido la máscara responsable de dicho máximo.

Otro ejemplo: **Robinson** (más sencillo de implementar, pues sólo posee coeficientes 0,1,2).

## 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

### Máscara de Kirsch



Los operadores Sobel y Kirsch producen menos errores que otros modelos de gradiente digital en imágenes con ruido. Normalmente, el operador de Kirsch produce mejores resultados que el de Sobel. Sin embargo, ambos operadores siguen siendo demasiado sensibles a determinada cantidad de ruido.

## 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

### Filtro de Marr-Hildreth

Los pasos a seguir son:

1. Aplicar un filtro Gaussiano.
2. Calcular el Laplaciano de la imagen resultante.
3. Determinar los píxeles de “paso por cero”.

## 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

### Filtro de Marr-Hildreth

**PASO 1** Realizar una convolución a la imagen I con una matriz G que modeliza una función gaussiana bidimensional:

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

donde  $\sigma$  representa la desviación típica.

$\frac{1}{273}$

1	4	7	4	1
4	16	26	16	4
7	26	41	26	7
4	16	26	16	4
1	4	7	4	1

Ejemplo de máscara 5x5 para el filtro gaussiano con  $\sigma=1.0$

Recordemos que la convolución de una imagen con una función de esta forma emborrona la imagen con un grado de emborronamiento proporcional a  $\sigma$  (por tanto, se produce una reducción de ruido).

## 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

### Filtro de Marr-Hildreth

**PASO 2** Calcular el Laplaciano de la imagen resultante

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Los pasos 1 y 2 se pueden aproximar mediante la convolución con la máscara:

Se trata del filtro Laplaciano del Gaussiano (LoG). Existen otras aproximaciones alternativas que modelizan este filtro.

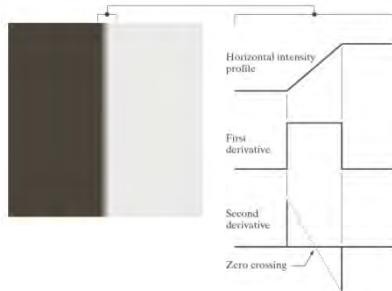
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -16 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[+ información...](#)

## 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

### Filtro de Marr-Hildreth

**PASO 3** Determinar los píxeles de “paso por cero”.



Los píxeles del borde son aquellos tal que el Laplaciano de dos de sus vecinos en posiciones opuestas tienen distinto signo (píxeles de paso por cero). Normalmente se considera un valor umbral para el valor absoluto de la diferencia numérica entre posiciones opuestas para considerar que un píxel es de paso por cero.

## 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

### Filtro de Marr-Hildreth

Ejemplo:

Inconvenientes: efecto “espagueti”; implementación del paso por cero.

[Demo on-line](#)

## 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

### Filtro de Canny

Es el detector de bordes más potente que existe actualmente.

Los pasos principales del algoritmo son:

1. Se aplica un filtro gaussiano. De esta forma la imagen se suaviza (eliminación de ruidos).
2. Se calcula el gradiente de la imagen suavizada, para determinar los píxeles donde se produce máxima variación (mayor módulo del vector gradiente). También se determina la dirección del vector gradiente.
3. La matriz M correspondiente al módulo del gradiente de la función gaussiana tendrá valores grandes donde la variación de la intensidad sea grande. Se eliminan (igualan a cero) aquellos píxeles que no son máximos locales en la dirección del gradiente (que es perpendicular al borde).

## 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

### Filtro de Canny

3. continuación....

Se realiza un proceso de doble umbralización para determinar los píxeles del borde: se marcan los píxeles con valor por encima de un umbral T1; se marcan aquellos píxeles conectados a los primeros cuyo valor esté por encima de un segundo umbral T2 ( $T_2 < T_1$ ). Esto eliminará falsos bordes o bordes dobles, al mismo tiempo que permite un resultado conexo.

[Algo más de información on-line](#)

## 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

### Ej. De filtrado con el método de Canny

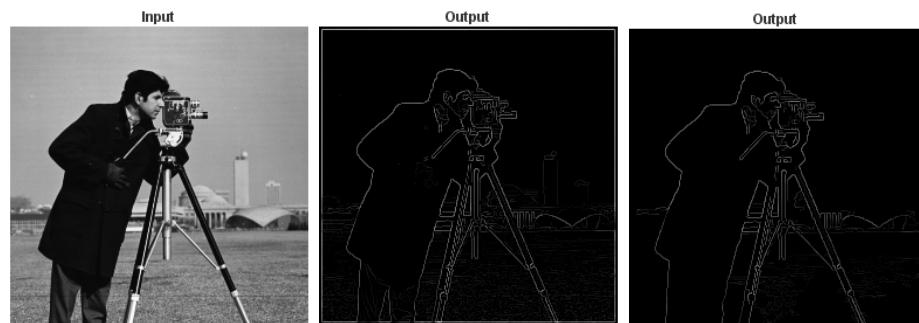


El filtro Gaussiano se ha realizado para  $\sigma=4$  y una máscara de tamaño  $25 \times 25$ . Los umbrales considerados han sido  $T_1=0.1$  y  $T_2=0.04$

[Demo on-line](#)

## 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

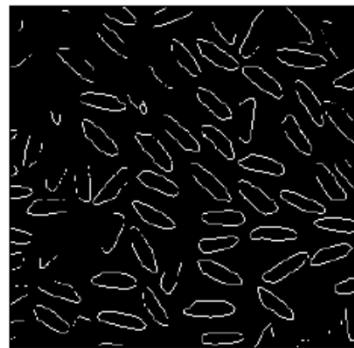
### Ej. Filtrado de Canny variando el valor del umbral y la desviación estándar



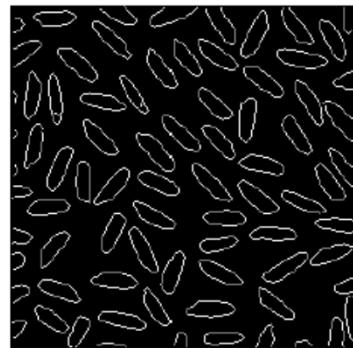
- Convolución con una máscara de  $3 \times 3$ ,  $\sigma = 0.5$ , umbral=75
- Convolución con una máscara de  $7 \times 7$ ,  $\sigma=0.45$ , umbral=10

### 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

Ej. Comparación entre el detector de bordes de Sobel y de Canny



Sobel Filter



Canny Filter

### 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

#### Enlazado de bordes

Las técnicas anteriores detectan las discontinuidades de intensidad.

En la práctica, el conjunto de píxeles que se obtiene, rara vez caracteriza completamente un borde debido al ruido, a una iluminación no uniforme, etc. Por ello, los algoritmos de detección de bordes, normalmente se siguen de procedimientos de enlazado de los mismos.

Un procesamiento local consiste en analizar las características de los vecinos en un entorno de cada uno de los píxeles de la imagen que se han detectado como borde. Todos los puntos que son similares en algún sentido predeterminado, se enlazan.

### 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

#### Enlazado de bordes

Las dos principales propiedades utilizadas en este tipo de análisis para establecer la similitud de los píxeles del borde son:

- La intensidad de la respuesta del operador gradiente utilizado para producir el píxel del borde. Un píxel del borde de coordenadas  $(x',y')$  que se encuentra en un entorno de vecindad determinado de un píxel de coordenadas  $(x,y)$ , tiene intensidad similar si:

$$|\nabla f(x, y) - \nabla f(x', y')| \leq T$$

donde  $T$  es un valor umbral no negativo.

### 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

#### Enlazado de bordes

La dirección del gradiente. Un píxel del borde de coordenadas  $(x',y')$  que se encuentra en un entorno de un píxel de coordenadas  $(x,y)$ , tiene ángulo similar si:

$$|\alpha(x, y) - \alpha(x', y')| \leq A$$

donde  $A$  es un valor umbral no negativo.

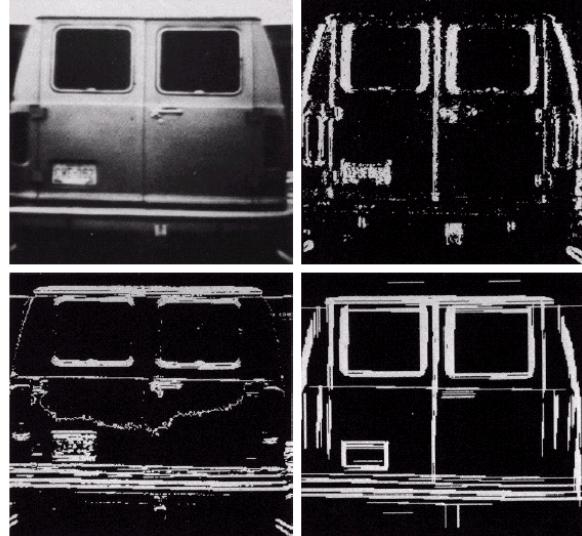
Siendo  $\alpha(x, y) = \arctg\left(\frac{\nabla_2 f(x, y)}{\nabla_1 f(x, y)}\right)$  la dirección del gradiente (que es perpendicular a la del borde).

### 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

#### Enlazado de bordes

- En el siguiente ejemplo se muestra la imagen original (a),
- la componente x e y del gradiente usando el operador de Sobel ((b) y (c), respectivamente),
- La figura (d) muestra el resultado de enlazar todos los puntos que tienen módulo del gradiente mayor que 25 y cuya dirección del gradiente no difiere más de  $15^\circ$ .

### 2.2.2 Filtros Pasa-Altas



**2.2.2 Filtros Pasa-Altas**

## Ejemplos y ejercicios con los Métodos Detectores de Bordes

Operador de Robert, Sobel,  
Prewitt y Laplaciano

**2.2.2 Filtros Pasa-Altas**

### Aplicando el operador de Sobel

- Suponiendo la imagen, calcular el gradiente del píxel marcado en color rojo con la máscara de convolución que se indica: filtro de Sobel en ( $G_x$ ), posteriormente realizarlos para cada píxel de  $f(x,y)$ .

5	14	0	0	56	35	42
0	180	180	179	79	55	47
1	188	195	191	50	50	10
193	33	215	204	160	10	0
200	230	245	230	190	200	200
0	230	200	230	190	200	200
0	2	2	18	12	70	0

Imagen  $f(x,y)$ 

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

Máscara de convolución

Operador de Sobel en  $G(x)$

### 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

#### Algoritmo...

Para cada pixel se le aplica un kernel primera derivada en las direcciones ortogonales X e Y, los resultados se elevan al cuadrado, se suman y se le encuentra la raíz cuadrada.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv M_x \quad \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \equiv M_y$$

$$\sqrt{\left| \frac{\partial B}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial B}{\partial y} \right|^2} \quad \text{o} \quad \text{Resultado} = |M_x + M_y|$$

### 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

#### Continuación...

Es decir, tomando una región de una imagen de dimensión 3x3, con las máscaras de Sobel para obtener Gx y Gy, en el mismo punto:

- a)  $Gx = (z3+ 2z6+ z9) - (z1+ 2z4+ z7)$
- b)  $Gy = (z7+ 2z8+ z9) - (z1+ 2z2+ z3)$
- c)  $|G| = |Gx| + |Gy|$

### 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

Continuación...

- d) Binarización de la imagen gradiente, con un umbral definido, siendo un valor no negativo

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } |G| > T \\ 0 & \text{si } |G| \leq T \end{cases}$$

Donde  $T$  es un valor de umbral

### 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

Resolviendo...

Para el cálculo del gradiente aplicamos las ecuaciones a) y b), obteniendo:

$$|G_x| \quad y \quad |G_y|$$

y mediante la ecuación (c), obtenemos  $|G|$ . Con el umbral definido, el píxel marcado sería un punto de borde, quedando la nueva imagen como:

	180	180	179	
	188	195	191	
	33	215	204	

			c	

### 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

Continuación...

Las operaciones anteriores se realizan para cada píxel, de modo que al final se tiene una imagen binaria donde se visualizan en tonos blancos, los puntos de borde y el fondo en negro.

### 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

#### Operador de Prewitt:

- Es similar al operador SOBEL pero, en lugar de aplicar las máscaras de la derivada primera, aplica las siguientes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \equiv M_x \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \equiv M_y$$

- Con los resultados obtenidos de la aplicación de las máscaras para cada pixel se realiza la operación:

$$\sqrt{\left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)^2} \quad \text{o bien} \quad |M_x + M_y|$$

### 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

Los operadores de Robert:

- ▶ Las dos máscaras toman otra posición en la mascara de convolución

-1	0	0
0	1	0
0	0	0

M1

0	-1	0
1	0	0
0	0	0

M2

- Con los resultados obtenidos de la aplicación de las máscaras para cada pixel se realiza la operación:

$$\sqrt{\left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)^2} \quad \text{o bien} \quad |M_x + M_y|$$

### 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

Ejercicios:

Filtra la imagen con el operador de Sobel, con un  $T=105$

5	14	0	0	56	35	42
0	180	180	179	79	55	47
1	188	195	191	50	50	10
193	33	215	204	160	10	0
200	230	245	230	190	200	200
0	230	200	230	190	200	200
0	2	2	18	12	70	0

Matriz de la Imagen original


Resultado con el Operador de Sobel

### 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

Ejercicios:

Filtra la imagen con el operador de Prewitt, con un  $T=105$

5	14	0	0	56	35	42
0	180	180	179	79	55	47
1	188	195	191	50	50	10
193	33	215	204	160	10	0
200	230	245	230	190	200	200
0	230	200	230	190	200	200
0	2	2	18	12	70	0

Matriz de la Imagen original


Resultado con el Operador de Prewitt

### 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

Ejercicios:

Filtra la imagen con el operador de Robert, con un  $T=105$

5	14	0	0	56	35	42
0	180	180	179	79	55	47
1	188	195	191	50	50	10
193	33	215	204	160	10	0
200	230	245	230	190	200	200
0	230	200	230	190	200	200
0	2	2	18	12	70	0

Matriz de la Imagen original


Resultado con el Operador de Robert

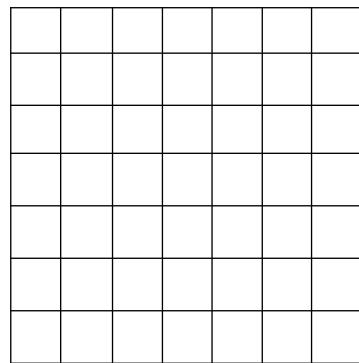
### 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

Ejercicios:

Filtra la imagen con el operador Laplaciano, con un  $T=105$

5	14	0	0	56	35	42	
0	180	180	179	79	55	47	
1	188	195	191	50	50	10	
193	33	215	204	160	10	0	
200	230	245	230	190	200	200	
0	230	200	230	190	200	200	
0	2	2	18	12	70	0	

Matriz de la Imagen original



Resultado con el Filtro Laplaciano

### 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

Tarea:

**Realizar un análisis de comparación de detectores de bordes.**

- El objetivo es que mediante la experimentación sobre algunos detectores, determinar cual es el que mejor realiza la función de extracción/resaltado de bordes para una imagen en particular (resolución de un problema).
- Para dar una idea de lo complicado que puede resultar hacer una comparación rigurosa y formal de algo, puede decirse que depende totalmente de la subjetividad del sujeto que califique lo bueno que es un detector de esta naturaleza y del problema en cuestión.

### 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

En resumen:

- (1) La detección de bordes usando operadores de aproximación del gradiente tiende a funcionar bien **en los casos en que se involucran imágenes con transiciones de intensidad claramente definidas y ruidos relativamente bajos.**
- (2) Los pasos por cero ofrecen una alternativa **en los casos en que los bordes están borrrados o cuando está presente un alto contenido de ruido.** El paso por cero **ofrece fiabilidad en las localizaciones de bordes y la propiedad de suavizado de la convolución gaussiana reduce los efectos del ruido.** El precio a pagar por estas ventajas es el incremento de complejidad de cálculo y tiempo.
- (3) El algoritmo de **Canny** es el que **ofrece mejores resultados para bordes de imágenes con ruido gaussiano.**

### 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

#### Filtros Paso-Banda:

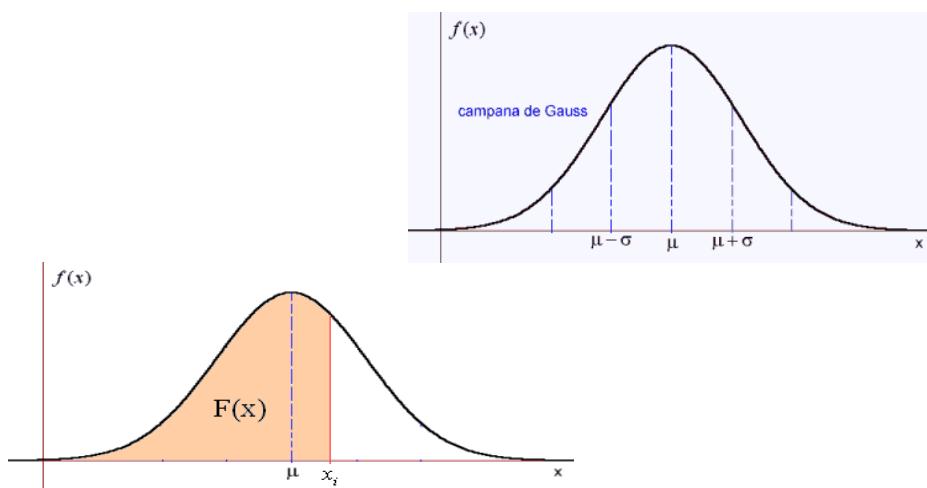
- Son utilizados para detectar patrones de ruido. Ya que un filtro paso-banda generalmente elimina demasiado contenido de una imagen casi no son usados. Sin embargo, los filtros paso-banda son útiles para aislar los efectos de ciertas bandas de frecuencias seleccionadas sobre una imagen. De esta manera, estos filtros ayudan a simplificar el análisis de ruido, razonablemente independiente del contenido de la imagen.

### 2.2.2 Filtros Pasa-Altas

#### Filtros Adaptativos:

- Son considerablemente más complejos ya que los coeficientes de ponderación se recalculan para cada uno de los pixeles en función del histograma de los ND que aparecen en la ventana. Se han utilizado con gran éxito filtros adaptativos para eliminar el ruido *speckle* de las imágenes de radar y para detectar, con un solo filtro, diferentes elementos.

### 2.3 Filtros de Moda y Mediana



## 2.3 Filtros de Moda y Mediana

### Filtro de la mediana

- Es un filtro no lineal y altamente efectivo en la eliminación de ruido y su efecto es de suavizado sin embargo, se tiene el problema de que genera la pérdida de líneas finas y de bordes, por lo que, para evitar este inconveniente, puede solucionarse al aplicar una máscara de los 4-vecinos
- Por otro lado tiene la ventaja de que el valor final del pixel es un valor real presente en la imagen y no un promedio, de este modo se reduce el efecto borroso que tienen las imágenes que han sufrido un filtro de media.

## 2.3 Filtros de Moda y Mediana

### Filtro de la mediana

- La mediana es el valor que divide en dos partes iguales un conjunto de valores, es decir, se considera al valor representativo de ambos conjuntos al valor medio, por ej, en una ventana de 3x3, el valor mediana es el 5º. valor.

123	125	126	130	140	Neighbourhood values:
122	124	126	127	135	115, 119, 120, 123, 124,
118	120	150	125	134	125, 126, 127, 150
119	115	119	123	133	Median value: 124
111	116	110	120	130	

## 2.3 Filtros de Moda y Mediana

### Filtro de la mediana

- El filtro de la mediana es menos sensible a valores extremos
- Su complejidad consiste en el calculo de ordenar los diferentes valores que aparecen en los pixeles incluidos en la ventana y determinar cual es el valor central

20	23	30	31
22	21	29	30
23	24	32	33
29	31	34	37

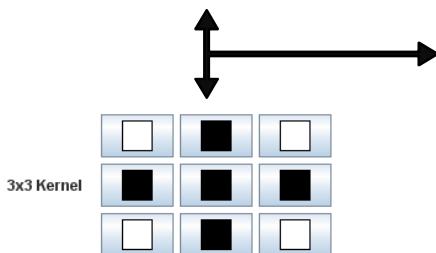
→

N	N	N	N
N	23	<b>30</b>	N
N	29	31	N
N	N	N	N

## 2.3 Filtros de Moda y Mediana



- Ej. Eliminación de ruido salt & pepper empleando una máscara de 3x3 4-vecinos



## 2.3 Filtros de Moda y Mediana

Input Image

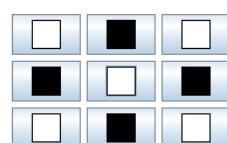


- Ej. Eliminación de ruido salt & pepper empleando una máscara de 3x3 4-vecinos

Output Image



3x3 Kernel



## 2.3 Filtros de Moda y Mediana

Ej. De eliminación de ruido: mediana vs media

Input Image



Imagen con ruido  
sal t & pepper

Output Image



después de aplicar  
filtro mediana

Output Image



después de aplicar  
filtro media

## 2.3 Filtros de Moda y Mediana

### La moda

- La moda es el valor que más se repite en una distribución, por lo que se sustituye el valor del píxel en cuestión por el valor de su vecino más repetido
  - Ventaja: atenúa el ruido impulsional (sal y pimienta)
  - Inconveniente: con frecuencia los valores de intensidad en la vecindad son todos diferentes, o bien, la presencia de distribuciones multimodales (con más de una moda)

## 2.3 Filtros de Moda y Mediana

### Otros filtros de orden-n

De rango ordenado n:

- Similar al filtro de la mediana pero en lugar de elegir la mediana, se elige el n-esimo valor de la vecindad, el filtro de la mediana es un caso particular de éste.
- Comúnmente son conocidos los filtros
  - Máximo y Mínimo

### 2.3 Filtros de Moda y Mediana

#### Otros filtros estadísticos o No-lineales

Máximo:

- Ordena los valores de nivel de gris y **selecciona el mayor valor contenido en la máscara**
  - Ventaja: Elimina el ruido pimienta (píxeles negros)
  - Inconveniente: sólo funciona cuando el ruido es exclusivamente tipo pimienta y tiende a aclarar la imagen

### 2.3 Filtros de Moda y Mediana

#### Otros filtros estadísticos o No-lineales

Mínimo:

- Ordena los valores de nivel de gris y **selecciona el menor valor de dentro de una ventana**
  - Ventaja: Elimina el ruido sal (píxeles blancos)
  - Inconveniente: sólo funciona cuando el ruido es exclusivamente tipo sal y tiende a oscurecer la imagen

### 2.3 Filtros de Moda y Mediana

Ej. Imagen filtrada con filtro Máximo y filtro Mínimo



Imagen original



Filtro Mínimo



Filtro Máximo

### 2.3 Filtros de Moda y Mediana

#### Ejercicio:

- Filtrar la siguiente imagen A con el filtro que se indica:

<b>17</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>8</b>	<b>16</b>
<b>15</b>	<b>15</b>	<b>7</b>	<b>16</b>	<b>16</b>
<b>4</b>	<b>6</b>	<b>13</b>	<b>20</b>	<b>20</b>
<b>10</b>	<b>12</b>	<b>2</b>	<b>20</b>	<b>3</b>
<b>10</b>	<b>12</b>	<b>2</b>	<b>20</b>	<b>9</b>

A=

1	1	1
1	2	1
1	1	1

- Ejecute el filtro Promedio considerando el centro de la máscara con mayor peso:

### 2.3 Filtros de Moda y Mediana

#### Ejercicio:

- Filtrar la siguiente imagen A con el filtro propuesto

17	1	1	8	16
15	15	7	16	16
4	6	13	20	20
10	12	2	20	3
10	12	2	20	9

A=

w1	w2	w3
w4	w5	w6
w7	w8	w9

- Ejecute los filtros de la Mediana, Moda, Máximo y Mínimo

### 2.3 Filtros de Moda y Mediana

#### Ejercicio

- Analizar el resultado de los filtros: de orden Promedio vs el filtro Paso Bajas Promedio Pesado
- Realizar de tarea los filtros Mediana, Moda, Máximo y Mínimo

17	1	1	8	16
15	15	7	16	16
4	6	13	20	20
10	12	2	20	3
10	12	2	20	9

A=


## Bibliografía

- Gonzalez, RC y Woods, RE Digital Image Processing. Addison-Wesley, USA, 1992.
- Forsyth y Ponce. Computer Vision: A modern approach. Prentice-Hall, New Jersey, 2003.
- J. Parker. *Algorithms for image processing and computer vision*. John Wiley & Sons ed. (1997), 116-149

## Links para practicar:

[http://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/HIPR2/hipr\\_top.htm](http://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/HIPR2/hipr_top.htm)

<http://www.tsc.uc3m.es/imagine/index.html>



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES  
ACADEMIA DE INGENIERÍA DE SOFTWARE



Profesora: M. en C. Ma. Elena Cruz Meza,  
e-mail: [mcruzm@ipn.mx](mailto:mcruzm@ipn.mx),

## ANÁLISIS DE IMÁGENES

### Análisis de Imágenes

## Unidad II

### Análisis Espacial

## Unidad II

- 2.1 La convolución
  - 2.1.1 La convolución de dos funciones continuas.
  - 2.1.2 La convolución de dos funciones discretas.
  - 2.1.3 La imagen digital como una función discreta bidimensional.
- 2.2 El uso de la convolución de dos imágenes digitales.
  - 2.2.1 Ajuste de brillo.
  - 2.2.2 Filtros pasa-bajas (Promediador, gaussiano, etc.)
  - 2.2.3 Filtros pasa-altas (Gradiente, Sobel, Canny, etc.)
- 2.3 Filtros de moda y mediana.
- 2.4 Segmentación.**
  - 2.4.1 Binarización.**
  - 2.4.2 Binarización automática haciendo uso del histograma.**

# Introducción...

## 2.4 Segmentación

- **Segmentación:** Partición de una imagen en regiones homogéneas con respecto a una o más características, por ej.:
  - la forma,
  - el color,
  - el brillo,
  - la textura,
  - el movimiento, ...
- La segmentación es el primer paso del Análisis de Imágenes (por ej. eliminación de ruido, etc.) y puede verse como el proceso que divide la imagen en sus partes constituyentes hasta un nivel de subdivisión en el que se aíslan las regiones u objetos de interés.

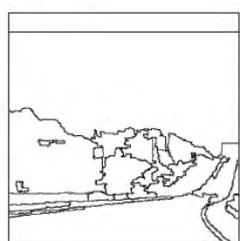
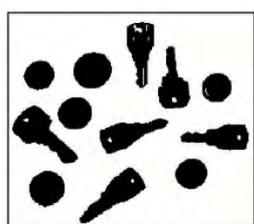
## 2.4 Segmentación

### Introducción...

- El nivel de la subdivisión depende del problema, por ejemplo, hasta que los objetos de interés buscados hayan sido aislados
  - **Segmentación completa:** termina cuando los objetos que aparecen en una imagen se corresponden únicamente con las distintas regiones resultado de la segmentación.
  - **Segmentación parcial:** se segmentan p.e. agrupaciones de objetos.
- Los algoritmos que se basan en una de estas dos propiedades básicas de los valores del nivel de gris:
  - Discontinuidad
  - Similitud entre los niveles de gris de píxeles vecinos

## 2.4 Segmentación

### Ejemplos de segmentación:



Segmentación completa, mediante umbralización

Segmentación parcial, mediante detección de bordes

M. en C. Sandra Luz Morales Güitrón

## 2.4 Segmentación

### Introducción...

#### • Discontinuidad:

- Consiste en dividir una imagen basándose en los cambios bruscos de nivel de gris
- Principales categorías: detección de puntos aislados y la detección de líneas y bordes de una imagen

#### • Similaridad:

- Principales categorías basados en la umbralización, crecimiento de región, y división y fusión de regiones

8

## 2.4 Segmentación

### Formulación del problema de la segmentación

Veamos tres ejemplos de problemas en los que se requiere la segmentación de regiones de interés en una imagen para:

- Identificación de huellas dactilares
- Identificación de múltiples objetos en una misma escena
- Reconocimiento de objetos similares

9

## 2.4 Segmentación

### 1.- Segmentación de las Huellas Dactilares(0)

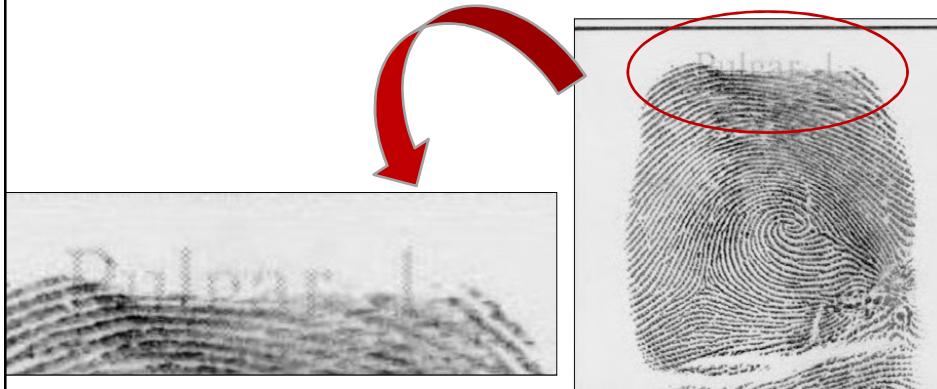
*Objetivo:* Identificación de Personas mediante la Huella Dactilar



10

## 2.4 Segmentación

### 1.- Segmentación de las Huellas Dactilares(I)



11

## 2.4 Segmentación

### 1.- Segmentación de las Huellas Dactilares(II)



Imagen original

Imagen tratada (binarizada)

12

## 2.4 Segmentación

### 1.- Segmentación de las Huellas Dactilares(III)



Imagen con bordes detectados



Imagen con minucias detectadas

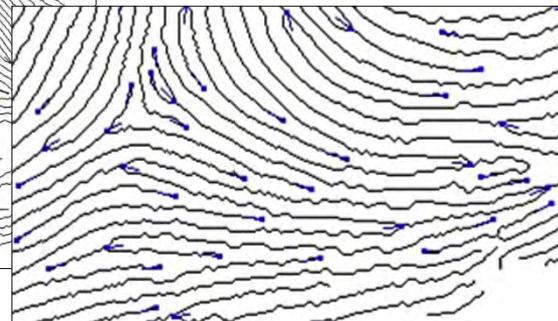
13

## 2.4 Segmentación

### 1.- Segmentación de las Huellas Dactilares(IV)



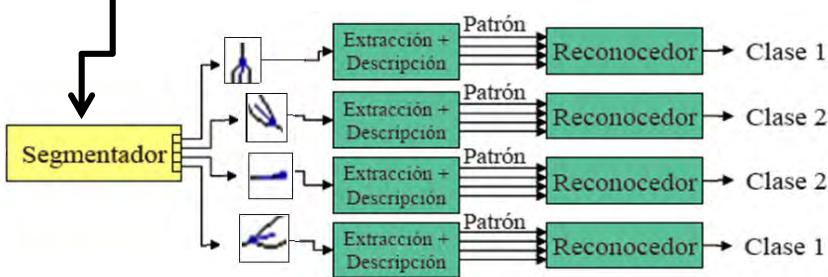
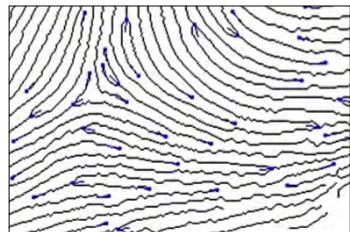
Minucias detectadas



14

## 2.4 Segmentación

### 1.- Segmentación de las Huellas Dactilares(V)



15

## 2.4 Segmentación

### 2.- Identificación de múltiples objetos (I)

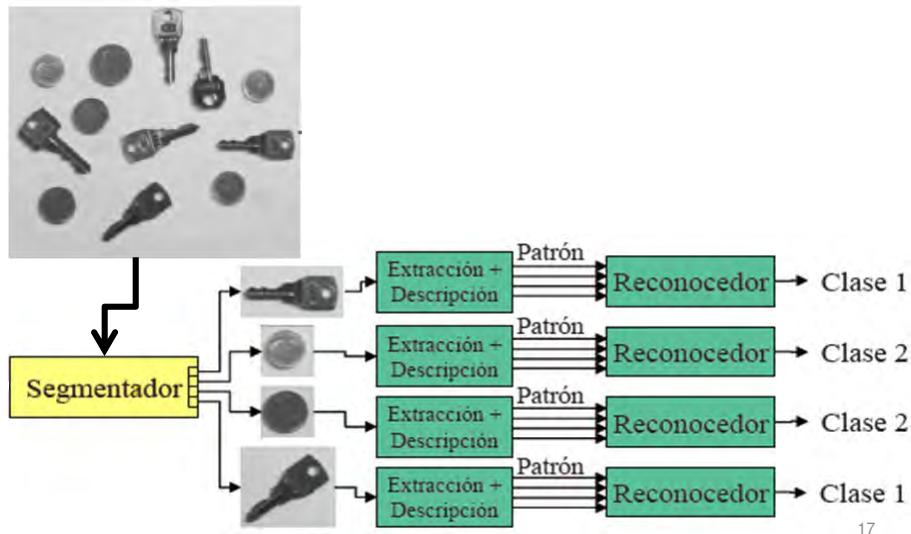


*Objetivo:* Identificación de varios objetos similares que aparecen en la misma escena y conteo de los mismos

16

## 2.4 Segmentación

### 2.- Identificación de múltiples objetos (II)



## 2.4 Segmentación

### 3.- Clasificación de tipos de Iris (flores) (I)

Iris Setosa



Iris Versicolor



Iris Virginica



<http://www.et.ethz.ch/eTutorials/evim/dateien/u3/irisbilder.htm>

Objetivo: Clasificación e identificación de tres objetos similares

18

## 2.4 Segmentación

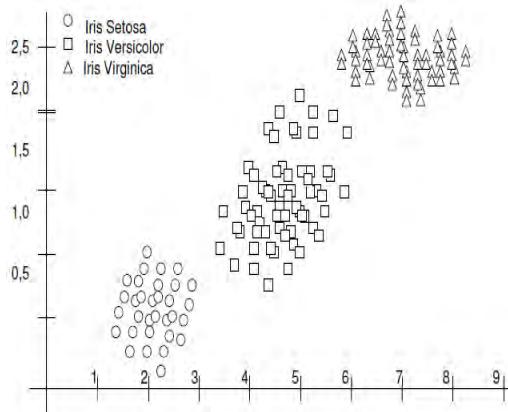
### 3.- Clasificación de tipos de Iris (flores) (II)

- Tres categorías
- Patrones bidimensionales:
  - longitud del pétalo
  - anchura del pétalo
- Los descriptores utilizados sirven para discriminar iris setosa de las otras dos, pero no para discriminar entre iris virginica e iris versicolor

19

## 2.4 Segmentación

### 3.- Clasificación de tipos de Iris (flores) (III)



20

## 2.4 Segmentación

- En general, la segmentación de imágenes involucra **la extracción y selección de características**:
  - **Extractor de características**: subsistema que extrae información relevante para la clasificación a partir de las entidades cuantificables.
  - **Clasificador**: subsistema que utiliza un vector de características de la entidad cuantificable y lo asigna a una de M clases
  - **Tipos de patrones**:
    - Vectores:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$
    - Cadenas
    - Árboles

21

### 2.4.1 Binarización

## Introducción

La umbralización o binarización es una técnica de segmentación ampliamente utilizada, por ejemplo en aplicaciones industriales, ya que se emplea cuando hay una clara diferencia entre objetos a extraer respecto al fondo de la escena. Los principios que rigen son la similitud entre los píxeles pertenecientes a un objeto y sus diferencias respecto al resto, por lo que la escena debe caracterizarse por un fondo uniforme y por objetos parecidos.

22

#### 2.4.1 Binarización

### Introducción...

- La segmentación de un nivel es la conversión entre una imagen en niveles de grises y una imagen monocroma (blanco y negro)
- Características de la imagen monocroma:
  - debe contener toda la información esencial de la imagen original (mismo nº de objetos, misma forma, misma posición)
  - Mucho menor espacio

23

#### 2.4.1 Binarización

### Umbralización

- La umbralización del nivel de gris es el **proceso de segmentación más simple**.
- La mayor parte de los objetos o regiones de interés en una imagen están caracterizados por una **reflectividad o absorción de luz más o menos constante de su superficie** (**los píxeles de un objeto tienen, aproximadamente, el mismo nivel de gris**)
- La idea es obtener un **umbral de brillo (valor de nivel de gris) que separe el(los) objeto(s) del fondo**

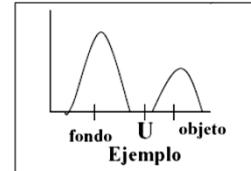
24

## 2.4.1 Binarización

### El Umbral

- Dado que la *umbralización* permite convertir una imagen de niveles de gris en una binaria, la imagen binaria  $B(i,j)$  se obtiene a partir de la original  $I(i,j)$  en niveles de gris, y de un umbral de separación  $U$  seleccionado, mediante:

$$\begin{aligned} B(i,j) &= 1, && \text{si } I(i,j) \geq U \\ B(i,j) &= 0, && \text{si } I(i,j) < U \end{aligned}$$



- Características:
  - Rápida, de coste computacional bajo, se puede realizar en tiempo real.
  - Sencilla e intuitiva
- La obtención de  $U$  se basa en el *histograma* de la imagen, donde se buscan y analizan sus mínimos locales.
- El histograma de una imagen no considera información espacial sino solamente la distribución de niveles de grises en la imagen.

25

## 2.4.1 Binarización

### Algoritmo de umbralización

- Al aplicar un umbral  $T$  a la imagen en escala de grises  $f(x,y)$ , esta quedará binarizada etiquetando con 1 los píxeles correspondientes al objeto y con 0 aquellos que son del fondo.
  - Conjunto de píxeles negros (0):  $\text{Imagen}(i,j) < T$
  - Conjunto de píxeles blancos (1):  $\text{Imagen}(i,j) \geq T$
- Es decir, recorrer todos los píxeles de la imagen; si su nivel de gris es mayor (menor) que el umbral es parte del objeto, si es menor (mayor) es parte del fondo

26

### 2.4.1 Binarización

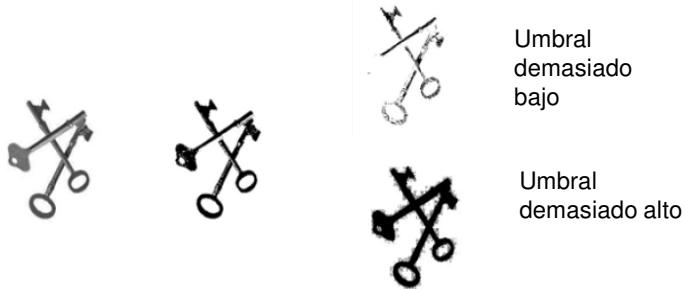
#### Ejemplo de la función umbral



### 2.4.1 Binarización

#### Elección del valor de *Umbral* adecuado

- La **selección del umbral correcto es crucial en el proceso de segmentación por umbralización**
- La selección del umbral puede ser interactiva o puede ser el resultado del algún **método de detección de umbral**
- **Problemas:** Ruido, Efectos de iluminación.



28

## 2.4.1 Binarización

Imagen Original



Imagen Modificada



Aplicando el Operación umbral:



Aplicando el Operación umbral inverso

*Operador Umbral:*

$$\begin{aligned} q(x,y) &= 0 \quad \text{para } p(x,y) < u \\ q(x,y) &= 255 \quad \text{para } p(x,y) \geq u \end{aligned}$$

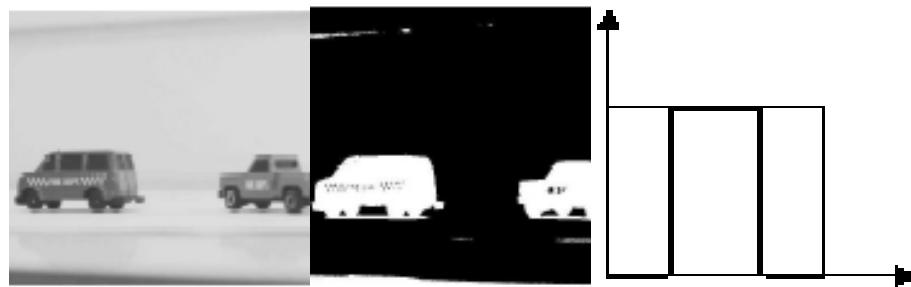
*Operador umbral inverso*

$$\begin{aligned} q(x,y) &= 255 \quad \text{para } p(x,y) < u \\ q(x,y) &= 0 \quad \text{para } p(x,y) \geq u \end{aligned}$$

## 2.4.1 Binarización

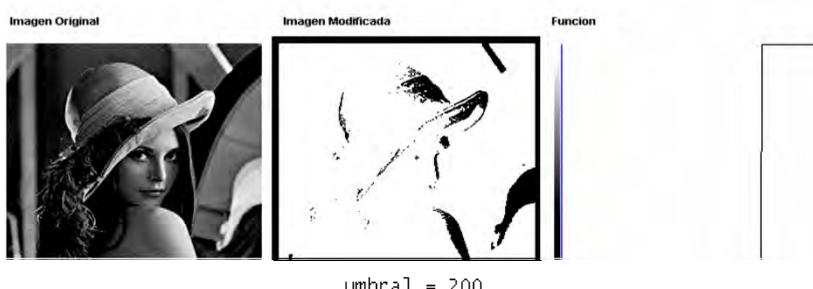
**Ejemplo de Semiumbralización :** Operador intervalo de un umbral binario

$$\begin{aligned} q(x,y) &= 255 \quad \text{para } p(x,y) \leq u1 \text{ ó } p(x,y) \geq u2 \\ q(x,y) &= 0 \quad \text{para } u1 > p(x,y) < u2 \end{aligned}$$



### 2.4.1 Binarización

Ejemplo de la función umbral inverso



### 2.4.1 Binarización

Operador intervalo de un umbral binario

$$\begin{aligned} q(x,y) &= 255 \quad \text{para } p(x,y) \leq u1 \text{ ó } p(x,y) \geq u2 \\ q(x,y) &= 0 \quad \text{para } u1 > p(x,y) < u2 \end{aligned}$$



#### 2.4.1 Binarización

### Operador intervalo de un umbral binario inverso

$$\begin{aligned} q(x,y) &= 0 && \text{para } p(x,y) \leq u1 \text{ ó } p(x,y) \geq u2 \\ q(x,y) &= 255 && \text{para } u1 < p(x,y) < u2 \end{aligned}$$



#### 2.4.1 Binarización

### Operador umbral de la escala de grises

$$\begin{aligned} q(x,y) &= 255 && \text{para } p(x,y) \leq u1 \text{ ó } p(x,y) \geq u2 \\ q(x,y) &= p(x,y) && \text{para } u1 > p(x,y) < u2 \end{aligned}$$

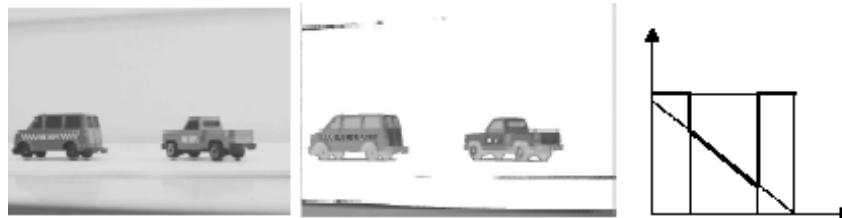


### 2.4.1 Binarización

## Operador umbral de la escala de grises inverso

$$q(x,y) = 255 \quad \text{para } p(x,y) \leq u_1 \text{ ó } p(x,y) \geq u_2$$

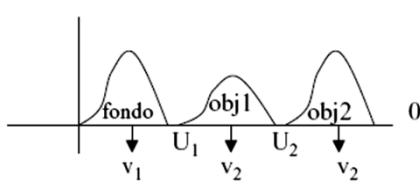
$$q(x,y) = 255 - p(x,y) \quad \text{para } u_1 > p(x,y) < u_2$$



### 2.4.1 Binarización

## Tipos de umbralización

- **Multiumbralización:** Consiste en la elección de múltiples valores de umbral, permitiendo separar a diferentes objetos dentro de una escena cuyos niveles de gris difieran.
- Ejemplo:



2 umbrales

3 modos dominantes

Objeto 1: si  $U_1 < I(x,y) \leq U_2$

Objeto 2: si  $I(x,y) > U_2$

Fondo: si  $I(x,y) \leq U_1$

### 2.4.1 Binarización

#### Tipos de umbralización

##### Multiumbral

- Se obtiene una **imagen no binaria**

$$g(x,y) = \begin{cases} G_1 & f(x,y) \in D_1 \\ G_2 & f(x,y) \in D_2 \\ G_3 & f(x,y) \in D_3 \\ \dots \\ G_n & f(x,y) \in D_1 \\ 0 & \text{otro} \end{cases}$$



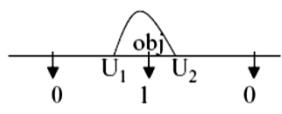
M. en C. Sandra Luz Morales Güitón

### 2.4.1 Binarización

#### Tipos de umbralización

##### Umbral Banda

- Segmenta una imagen en **regiones pertenecientes o no a un conjunto de niveles de gris**



$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & f(x,y) \in D \\ 0 & \text{otro} \end{cases}$$

- Puede servir indirectamente para detectar bordes

## 2.4.1 Binarización

### Tipos de umbralización...

- **Semiumbralización:** se obtiene una imagen resultado en niveles de gris, poniendo a cero el fondo de la imagen y conservando los niveles de gris de los objetos a segmentar que aparecen en la imagen inicial, es decir, **Enmascara el fondo** dejando a la vista la información de los objetos:

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{Si } f(x,y) \geq U \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

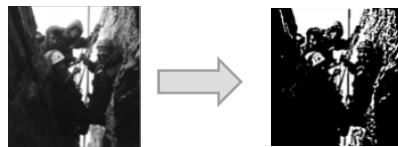
- Puede servir indirectamente para detectar bordes

39

## 2.4.1 Binarización

### Umbral Adaptativo

- El valor del umbral depende de las características locales de la imagen. El umbral depende de las coordenadas espaciales x e y.
- El **valor del umbral varía como función de las características locales de la imagen.**
  - $T = T(f, f_c)$
- La imagen se **divide en subimágenes  $f_c$ .**
- Se calcula un **umbral para cada subimagen.**
- Si no se puede calcular en alguna subimagen, **se interpola a partir de las subimágenes vecinas.**
- Cada subimagen se procesa respecto a su umbral.



40

## 2.4.1 Binarización

### Tipos de umbralización...

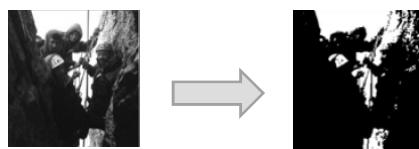
- **Métodos basados en el valor de gris medio:** Se usa el nivel medio de gris de la imagen como valor de umbral
  - (suma de todos los niveles de gris de cada píxel / nº total de píxeles)
- Efecto en la imagen binarizada:
  - casi la mitad de los píxeles serán considerados como blancos, y los demás como negros

41

## 2.4.1 Binarización

### Umbral Global

- En realidad sólo se debería usar **en circunstancias muy concretas**
  - $T = T(f)$
- Las variaciones en el nivel de gris son habituales ...debidas a iluminación no uniforme, parámetros no uniformes del dispositivos de captura, etc...
- (la umbralización global tiene éxito si el entorno de captura es controlado, p.e. inspección de objetos industriales). El éxito depende de si el histograma está bien dividido. A veces la iluminación impide una partición del histograma efectiva y es preciso utilizar umbralización local o adaptativa).



42

#### 2.4.1 Binarización automática haciendo uso del histograma

Mediante el histograma de niveles de grises de la imagen: Porcentaje de píxeles negros

- Dado un histograma, y un porcentaje de píxeles negros deseados:
  - Se determina el numero de píxeles negros multiplicando el porcentaje por el número total de píxeles
  - Se cuentan el número de píxeles de cada nivel del histograma, empezando por el nivel cero, hasta llegar al número de píxeles negros deseados
  - El umbral será el nivel de gris del histograma en el que la cuenta llegue al número de píxeles negros deseados

Profesora María Elena Cruz Meza

43

#### 2.4.1 Binarización automática haciendo uso del histograma

Método de los picos usando el histograma de niveles de grises de la imagen (I)

- Basado en una observación práctica:
  - El valor  $T$  de umbral suele aparecer en el punto bajo entre dos picos del histograma
- Seleccionar el umbral ahora consiste en
  - Encontrar los dos picos
  - Encontrar el punto bajo entre ellos.
- Encontrar el primer pico es fácil (aquel nivel de gris del histograma que tenga el mayor valor)
- Segundo pico mas difícil de encontrar

Profesora María Elena Cruz Meza

44

### 2.4.1 Binarización automática haciendo uso del histograma

Método de los picos usando el histograma de niveles de grises de la imagen (II)

- Problema 2º pico:
  - El segundo valor más grande del histograma puede ser el que está justo a la derecha del mayor, en vez de ser el segundo pico
- Solución: Dar preferencia a picos que no están cercanos al máximo.
  - Si el pico más alto en nivel  $j$ , seleccionar el segundo pico por:

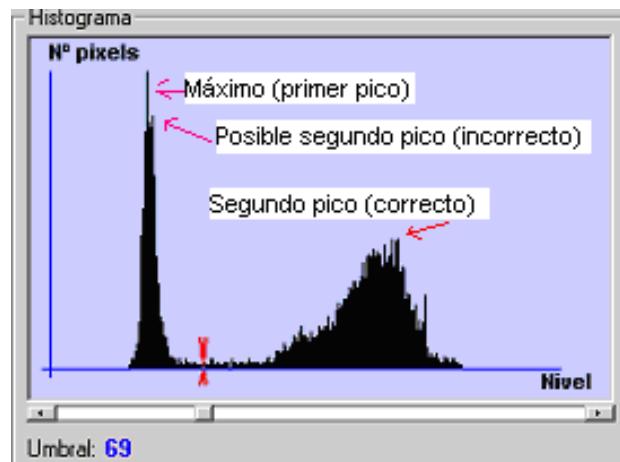
$$\max \{((k - j)^2 h[k]) \mid (0 \leq k \leq 255)\}$$

Profesora María Elena Cruz Meza

45

### 2.4.1 Binarización automática haciendo uso del histograma

Método de los picos usando el histograma de niveles de grises de la imagen (III)



Profesora María Elena Cruz Meza

46

### 2.4.1 Binarización automática haciendo uso del histograma

#### Binarización mediante el histograma de píxeles borde (I)

- Este método se basa en el hecho de que un píxel de borde debe estar cercano al límite entre una imagen y el fondo, o entre dos objetos
- El método consiste en buscar un umbral haciendo uso del operador Laplaciano (operador de detección de borde no direccional)

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Profesora María Elena Cruz Meza

47

### 2.4.1 Binarización automática haciendo uso del histograma

#### Binarización mediante el histograma de píxeles borde (II)

**Algoritmo:**

- Calcular la convolución entre el operador laplaciano con la imagen
- Calcular el histograma de la convolución obtenida
- Obtener el valor de gris para el histograma que cubre el porcentaje especificado
- Calcular histograma de la imagen original considerando únicamente los píxeles que cuyo laplaciano es mayor que el valor anterior
- Calcular el umbral con el nuevo histograma por alguno de los métodos anteriores

Profesora María Elena Cruz Meza

48

#### 2.4.1 Binarización automática haciendo uso del histograma

##### Binarización mediante Selección Iterativa de un Umbral (I)

- Un umbral inicial es refinado por pasos consecutivos por medio de la imagen o del histograma.
- El umbral inicial estimado es el nivel de gris medio llamado  $T_b$  y el nivel medio de los píxeles mayores o iguales al inicial es llamado  $T_o$ . Una nueva estimación del umbral es  $(T_b+T_o)/2$ , y el proceso se repite usando este umbral. Cuando no hay cambios en el umbral en dos pasos consecutivos se termina el proceso y este es el umbral.

Profesora María Elena Cruz Meza

49

#### 2.4.1 Binarización automática haciendo uso del histograma

##### Binarización mediante Selección Iterativa de un Umbral (I)

- El mismo umbral puede ser calculado usando el histograma (más rápido)
- El umbral inicial será el nivel de gris medio, para el paso  $n$ -ésimo se calcula como:

$$T_k = \frac{\sum_{i=0}^{T_{k-1}} i \cdot h(i)}{2 \sum_{i=0}^{T_{k-1}} h(i)} + \frac{2 \sum_{j=T_{k-1}+1}^N j \cdot h(j)}{2 \sum_{j=T_{k-1}+1}^N h(j)}$$

- El proceso continua hasta encontrar un  $T_k$  igual a  $T_{k-1}$ , este valor es el umbral.

Profesora María Elena Cruz Meza

50

#### 2.4.1 Binarización automática haciendo uso del histograma

##### Binarización Optima

- Si hay dos grupos de píxeles en la imagen, la varianza de los valores de nivel grises en la imagen se denota por:  
 $\sigma_t^2$
- Para un umbral dado, se puede calcular por separado la varianza de los píxeles de objeto y de los píxeles de fondo, denotado por:  
 $\sigma_b^2$

Profesora María Elena Cruz Meza

51

#### 2.4.1 Binarización automática haciendo uso del histograma

##### Binarización Optima

- Un umbral óptimo puede ser encontrado reduciendo al mínimo la proporción de la varianza entre-clase de la varianza total.  
$$\eta(t) = \frac{\sigma_b^2}{\sigma_t^2}$$
- El valor medio global es:  
 $\mu_T$
- La varianza entre-clases es calculado por:

$$\sigma_b^2 = \omega_0 \omega_1 (\mu_0 \mu_1)^2$$

Profesora María Elena Cruz Meza

52

## 2.4.1 Binarización automática haciendo uso del histograma

### Binarización Óptima

- Donde:

$$\omega_0 = \sum_{i=0}^t p_i \quad \eta(t) \quad \omega_1 = 1 - \omega_0$$

- Siendo  $P_i$  la probabilidad del nivel de gris i.  $H(i)/N$

$$\mu_0 = \frac{\mu_t}{\omega_0} \quad \mu_1 = \frac{\mu_T - \mu_t}{1 - \omega_0} \quad \mu_t = \sum_{i=0}^t i.p_i$$

- El valor de t que minimice  $\eta(t)$  será el valor de umbral óptimo.

Profesora María Elena Cruz Meza

53

## 2.4.1 Binarización automática haciendo uso del histograma

### Métodos de Binarización con umbral mínimo error

- El histograma de la imagen puede ser pensado como una función de densidad de probabilidad de las dos distribuciones (pixeles objetos y pixeles de fondo).
- El histograma se puede aproximar por:

$$p(g) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-((g-\mu_1)^2/2\sigma_1^2)} + \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} e^{-((g-\mu_2)^2/2\sigma_2^2)}$$

Profesora María Elena Cruz Meza

54

## 2.4.1 Binarización automática haciendo uso del histograma

### Binarización mediante umbrales regionales

- Normalmente son cuatro umbrales, cada uno de los cuales puede calcular el umbral para un cuarto de la imagen.
- Reduce los resultados de la segmentación en la totalidad de la imagen, pero simplifica la dificultad de los cálculos.
- El algoritmo de cálculo de umbral aplicado a cada región intenta dividir los píxeles en dos grupos, objetos y fondos.
- Este algoritmo se usa si en la región hubiera píxeles de ambos grupos.

Profesora María Elena Cruz Meza

55

## 2.4.1 Binarización automática haciendo uso del histograma

### Métodos de medias móviles

- El algoritmo se basa en umbral por píxel de una manera rápida, usando promedios.
- Un promedio móvil es simplemente el significado del nivel de gris de los últimos  $n$  píxeles vistos.

$$M_{i+1} = M_i - \frac{M_i}{n} + g_{i+1}$$

- Cualquier píxel menor a un porcentaje fijo de su promedio móvil pertenece al conjunto de píxeles negros; de otra manera al conjunto de blancos.
- Para computar la estimación del promedio móvil para el próximo píxel (el primero), que se usa como umbral

$$V = \begin{cases} 0 & \text{si } \left( g_i < \left( \frac{M_i \cdot 100 - pct}{100} \right) \right) \\ 255 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Profesora María Elena Cruz Meza

56

## Ejercicio:

- Mediante el método de Segmentación por Umbral Adaptativo, realizar la segmentación de la siguiente imagen:

5	14	0	0	56	35	42	42
5	14	0	0	56	35	42	42
0	180	180	179	79	55	47	47
1	188	195	191	50	50	10	10
193	33	215	204	160	10	0	0
200	230	245	230	190	200	200	200
0	230	200	230	190	200	200	200
0	2	2	18	12	70	0	0

Matriz de la Imagen original


Resultado de la segmentación

## Bibliografía

- Gonzalez, RC y Woods, RE Digital Image Processing. Addison-Wesley, USA, 1992.
- Forsyth y Ponce. Computer Vision: A modern approach. Prentice-Hall, New Jersey, 2003.
- J. Parker. *Algorithms for image processing and computer vision*. John Wiley & Sons ed. (1997), 116-149

## Links para practicar:

► .  
[http://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/HIPR2/hipr\\_top.htm](http://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/HIPR2/hipr_top.htm)

<http://www.tsc.uc3m.es/imagine/index.html>



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES  
ACADEMIA DE INGENIERÍA DE SOFTWARE



## ANÁLISIS DE IMÁGENES

Profesora:  
M. en C. Ma. Elena Cruz Meza,  
e-mail:  
[analisisimagenesescm@gmail.com](mailto:analisisimagenesescm@gmail.com)

### Análisis de Imágenes

## Unidad III

Análisis en el dominio de  
la frecuencia

## Unidad III

### Contenido

- 3.1 La transformada discreta de Fourier (TF)
  - 3.1.1 La TF de funciones continuas
  - 3.1.2 La T de funciones discretas
  - 3.1.3 La Transformada rápida de Fourier
  - 3.1.4 La Transformada inversa de Fourier
  - 3.1.5 Equivalencia entre la convolución y la TF
- 3.2 El uso de la TF en las imágenes digitales
  - 3.2.1 Ajuste de brillo
  - 3.2.2 Filtros pasa bajas
  - 3.2.3 Filtros pasa altas

## LA TRANSFORMADA DE FOURIER

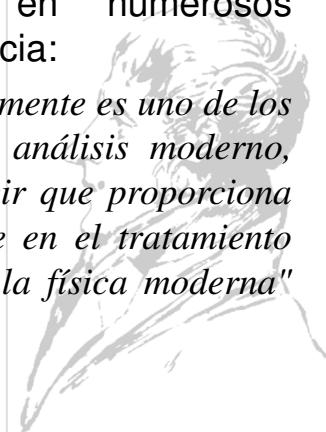


Jean Baptiste Joseph Fourier  
(1768 - 1830)

La Théorie Analitique de la Chaleur (1822)  
(La teoría analítica del calor)

### 3.1 La Transformada discreta de Fourier

- Fourier desarrolló una representación de funciones basada en la frecuencia, que ha tenido una gran importancia en numerosos campos de matemáticas y ciencia:
  - *"El teorema de Fourier no solamente es uno de los resultados más hermosos del análisis moderno, sino que además se puede decir que proporciona una herramienta indispensable en el tratamiento de casi todos los enigmas de la física moderna"*  
[Lord Kelvin ]



### 3.1 La Transformada discreta de Fourier



• *Toda señal periódica, sin importar cuan complicada parezca, puede ser reconstruida a partir de sinusoides cuyas frecuencias son múltiplos enteros de una frecuencia fundamental, eligiendo las amplitudes y fases adecuadas.*

### 3.1 La Transformada discreta de Fourier

- Fourier propone que mediante la suma de señales co/sinusoidales de diferentes amplitudes, frecuencias y fases, es posible construir casi cualquier función arbitraria. Dentro de este conjunto de señales puede existir una con frecuencia cero, que es un término constante, a menudo referido como la componente continua (DC), debido al hecho de que cierta terminología en este área está derivada del procesado de señal y electrónica.

### 3.1 La Transformada discreta de Fourier

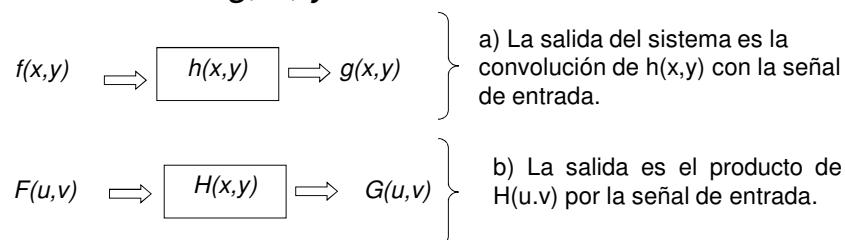
- La variación de la brillantez de una imagen, medida a lo largo de una dirección cualquiera es entonces una función que se puede representar mediante el teorema de Fourier, con una suma de distribuciones senoidales de varias frecuencias.***
- Sin entrar en detalles técnicos innecesarios, atenuar o reforzar individualmente algunas de estas componentes senoidales puede tener un efecto dramático en la calidad de una imagen, mejorándola o empeorándola, según el caso.

### 3.1.1 La TF de funciones continuas

- Recordando los métodos ya estudiados en el dominio de la frecuencia:
  - Métodos que se basan en el teorema de convolución, el cual cumple con lo siguiente:

$$G(u,v) = H(u,v) F(u,v)$$

donde  $G$ ,  $H$  y  $F$  son las transformadas de Fourier de  $g$ ,  $h$ , y  $f$ .



### 3.1.1 La TF de funciones continuas

- Podemos decir que todos los dominios transformados, que se utilizan dentro del tratamiento digital de imagen, tienen la misma forma básica que puede expresarse como:

$$T(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} I(x,y) b(x,y,u,v)$$

- donde  $T$  es la *imagen transformada*,  $I$  la *imagen de entrada de tamaño  $M \times N$* , y  $b$  es la *función base de la transformación*.

### 3.1.1 La TF de funciones continuas

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

t: Tiempo

f: Frecuencia en Hz

x(t): Señal de prueba

$e^{-j2\pi f t}$ : Fasor de Sondeo (Kernel Function)

X(f): Espectro en función de la frecuencia f

- $x(t) \leftrightarrow X(f)$ , es decir para una función  $x(t)$  existe un equivalente  $X(f)$ .
- $X(f)$ , el espectro, revela la fuerza (energía) de varias componentes de frecuencia, ordenadas por frecuencia.
- La transformada de Fourier actúa como un detector de energía en frecuencia-dependiente

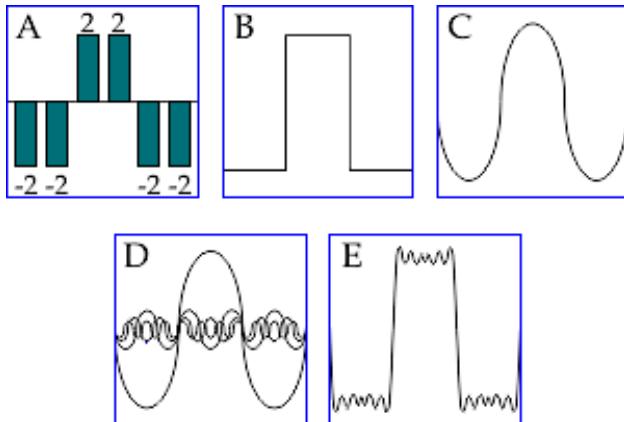
### 3.1.1 La TF de funciones continuas

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i ux} dx$$

Observemos que la transformada de una función real es una función compleja. Es decir,  $F(u)=R(u)+I(u)i$ , donde  $R(u)$  e  $I(u)$  son la parte real e imaginaria de  $F(u)$ , respectivamente.

- La variable u recibe el nombre de variable de frecuencia.
- El módulo de  $F(u)$ ,  $|F(u)|= (R(u)^2+ I(u)^2)^{1/2}$  recibe el nombre del espectro de Fourier.
- El cuadrado del espectro se denomina espectro de potencias ó densidad espectral de  $f(x)$ .
- Su ángulo  $P(u)=\arctg(I(u)/R(u))$  recibe el nombre de fase.

### 3.1.1 La TF de funciones continuas



La oscilación sobre un valor medio (**A**) puede representarse por una forma lineal (**B**) y ésta puede reproducirse como una suma de ondas. La onda **C** describe la forma **B** mucho peor que las cinco ondas del gráfico **D** que vemos sumadas en **E**.

### 3.1.2 La TF de funciones discretas

El equivalente en tiempo y frecuencia discreta es la Transformada Discreta de Fourier

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{2\pi j}{N} kn}$$

N: Número de Samplers en  $x[n]$

$x[n]$ : Señal de prueba discreta (con índice n)

$X[k]$ : Espectro en función de la frecuencia discreta (con índice k)

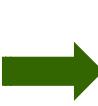
$e^{-jkn/N}$ : Fasor de Sondeo discreto (Kernel Function)

### 3.1.2 La TF de funciones discretas

$$F(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-j2\pi ux/M}$$

$$F_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n W_N^{-nk}$$

para  $k = 0, 1, \dots, N-1$



$$f_n = \sum_{k=0}^{N-1} F_k W_N^{nk}$$

para  $n = 0, 1, \dots, N-1$

Donde:  $W_N = e^{j2\pi/N}$

### 3.1.2 La TF de funciones discretas

#### Complejidad de la TDF

- El cálculo de la transformada discreta de Fourier involucra dos pasos:

$$F_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n W_N^{-nk}$$

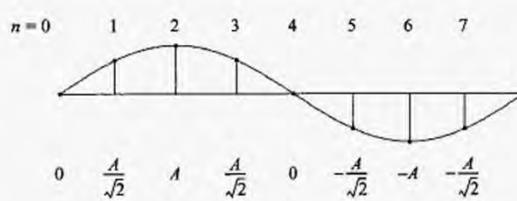
para  $k = 0, 1, \dots, N-1$

- Cálculo de  $W_N^{-nk}$ , para  $n, k = 0, 1, \dots, N-1$   
Complejidad =  $O(N^2)$
- Cálculo de  $F_k$  = suma de  $N$  números,  $k = 0, 1, \dots, N-1$   
Complejidad =  $O(N^2)$

### 3.1.2 La TF de funciones discretas

Ejemplos:

$$x(n) = A \sin\left(f2\pi \frac{n}{N}\right)$$



Para simplificar este análisis, se descompone la Transformada en:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \quad DCT$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot -j \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \quad DST$$

### 3.1.2 La TF de funciones discretas

Ejemplos:

Para simplificar más operemos en una DST real positiva:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right)$$

Para  $N = 8$ ,  $f = 1$  y  $k = 1$ , es decir ambas señal de sondeo y de prueba son iguales:

Sample	0	1	2	3	4	5	6	7
Input	0	$\frac{A}{\sqrt{2}}$	A	$\frac{A}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{A}{\sqrt{2}}$	-A	$-\frac{A}{\sqrt{2}}$
Sondeo	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
Producto	0	$\frac{A}{\sqrt{2}}$	A	$\frac{A}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{A}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{A}{\sqrt{2}}$

### 3.1.2 La TF de funciones discretas

Ejemplos:

Para  $x(n) = A \sin f 2\pi(n/N)$  con  $k = f$ ,

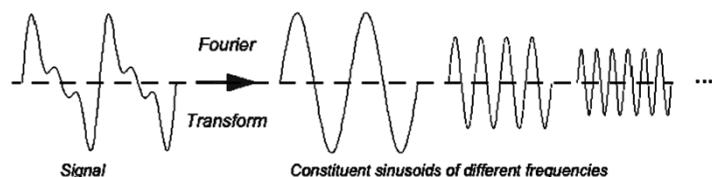
$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin \left( \frac{2\pi}{N} kn \right) = 0 + \frac{A}{2} + A + \frac{A}{2} + 0 + \frac{A}{2} + A + \frac{A}{2} \\ = 4A$$

Para un  $N$  general, se obtiene:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin \left( \frac{2\pi j}{N} kn \right) = \frac{A}{2}$$

### 3.1.2 La TF de funciones discretas

- En el caso de las imágenes, las “señales” corresponden a los niveles de gris o intensidad de las diferentes filas o columnas de la matriz de la imagen, donde el eje del tiempo se reemplaza por los ejes  $x,y$ .



### 3.1.2 La TF de funciones discretas

Sea  $f(x,y)$  una imagen en niveles de grises, tal que  $x=0,1,\dots,N-1$  e  $y=0,1,\dots,N-1$ ; y  $f(x,y)$  toma valores discretos representando el nivel de gris del píxel  $(x,y)$  entonces, la transformada discreta de Fourier de la imagen consiste en una función  $F(u,v)$  tal que  $u=0,1,\dots,N-1$  y  $v=0,1,\dots,N-1$ :

$$F(u,v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-2\pi i(ux+vy)/N}$$

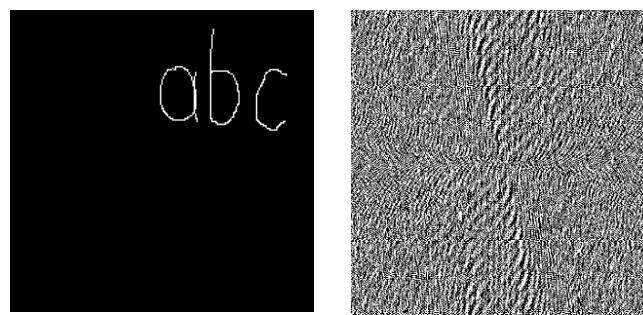
y su inversa como

$$f(x,y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) e^{2\pi i(ux+vy)/N}$$

### 3.1.2 La TF de funciones discretas

Ejemplo:

Consideremos una imagen de tamaño 100x100 en la que en una esquina tiene impresa tres objetos en blanco (las letras abc), la TDF en 2D de tal imagen nos da una matriz de números complejos. Considerando el argumento (ángulo) de cada una de las entradas de esa matriz, que es un número entre  $-180^\circ$  y  $180^\circ$ . Si ese número es negativo, ponemos un cero (o el color negro), y si el número es positivo, ponemos un uno (o el color blanco).



### 3.1.2 La TF de funciones discretas

Diferentes frecuencias de píxeles en una imagen:

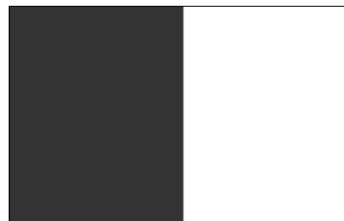


Imagen con altas frecuencias



Imagen con baja frecuencia



Imagen con frecuencia nula

### 3.1.2 La TF de funciones discretas

Las propiedades de la transformada de Fourier discreta bidimensional (TFD):

#### Núcleo separable y simétrico

La ventaja que aporta esta propiedad es el hecho de poder obtener la transformada  $F(x,y)$  (o la inversa  $f(x,y)$ ) en dos pasos, mediante la aplicación de la Transformada de Fourier 1-D (o su inversa):

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} F(x, v) e^{-2\pi i ux/N}$$

Donde:

$$F(x, v) = \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2\pi i vy/N}$$

En particular, esto significa que la matriz de la transformada se puede obtener mediante un producto de matrices  $T = A^T F A$

### 3.1.2 La TF de funciones discretas

#### La linealidad

La transformada de Fourier y su inversa son transformaciones lineales, es decir, poseen la propiedad distributiva respecto de la suma.

#### La traslación

- $TF[f(x,y) e^{j2\pi(uX+vY)/N}] = F(u-U, v-V)$  (se traslada el origen de la transformada a  $(U, V)$ )

$$\bullet TF[f(x-X, y-Y)] = F(u, v) e^{-j2\pi(uX+vY)/N}$$

Un caso particular de esta propiedad consiste en mover el origen de la transformada de Fourier de  $f(x,y)$  al centro de la matriz  $N \times N$  que le corresponda, es decir al punto  $(N/2, N/2)$ . Para ello, podemos hacer uso de que:  $TF[f(x,y)(-1)^{x+y}]$  se hace corresponder con  $F(u-N/2, v-N/2)$ .

También cabe resaltar, que un desplazamiento en la función  $f(x,y)$ , no provocará un cambio en la magnitud de su transformada de Fourier. Véase esto matemáticamente en la siguiente expresión:

$$|F(u,v)e^{-j2\pi(uX+vY)/N}| = |F(u,v)|$$

### 3.1.2 La TF de funciones discretas

#### La simetría y periodicidad

Si  $f(x,y)$  es real, la transformada de Fourier satisface:

$$|F(u,v)| = |F(-u, -v)|$$

La transformada discreta de Fourier y su inversa son funciones periódicas de periodo  $N$ ; es decir,

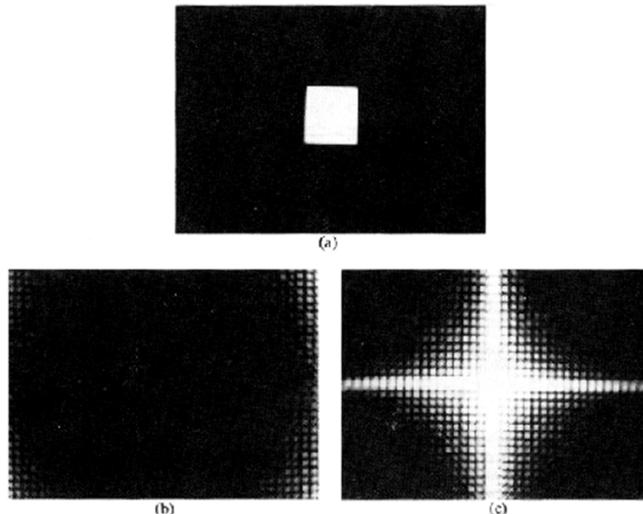
$$F(u,v) = F(u+N, v) = F(u, v+N) = F(u+N, v+N).$$

Consecuencia:

Si se desplaza el origen de la transformada al punto  $(N/2, N/2)$ , para calcular la transformada de Fourier,  $F(u-N/2, v-N/2)$ , en un periodo completo sólo necesitamos calcularla en los  $N/2 + 1$  puntos primeros.

### 3.1.2 La TF de funciones discretas

Ej. La simetría y periodicidad



### 3.1.2 La TF de funciones discretas

#### Valor promedio

Una definición ampliamente utilizada del valor promedio de una función discreta de dos dimensiones es:

$$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{N^2} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)$$

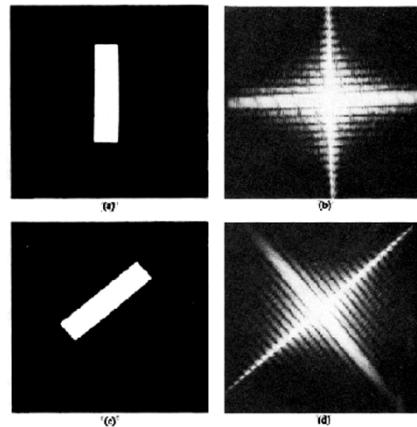
Propiedad:

$$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{N} F(0, 0)$$

### 3.1.2 La TF de funciones discretas

#### La rotación

Si rotamos la función  $f(x,y)$  un ángulo determinado, la transformada de Fourier también será afectada por una rotación del mismo ángulo. Esta propiedad también se da a la inversa, es decir, si la transformada se rota en un determinado ángulo, la transformada inversa también se verá rotada ese mismo ángulo.



### 3.1.3 La Transformada Rápida de Fourier

- *La transformada rápida de Fourier* sigue la estrategia de: *divide y vencerás!!*
- La idea:

Por: J.W. Cooley y  
J.W. Tukey, 1965

$$F_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n W_N^{-nk}$$

↓

$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} g_n W_{N/2}^{-nk}$   
 $TDF(g, N/2)$

$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} h_n W_{N/2}^{-nk}$   
 $TDF(h, N/2)$

<http://www.youtube.com/watch?v=a66i5TFr3M8&feature=related>

### 3.1.3 La Transformada Rápida de Fourier

- De manera que se divide la TDF en coeficientes en posiciones *pares* e *impares* como sigue:

$$F_{2k} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} (f_n + f_{n+N/2}) W_{N/2}^{-nk} = TDF(g, N/2)$$

$$F_{2k+1} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} [(f_n - f_{n+N/2}) W^n] W_{N/2}^{-nk} = TDF(h, N/2)$$

### 3.1.3 La Transformada Rápida de Fourier

- Por lo que calcular la TDF de N coeficientes es igual a calcular 2 TDF de N/2 coeficientes. Se aplica esta idea de manera recursiva y obtenemos la FFT.
- La complejidad de la FFT

$$O(N \log_2 N)$$

### 3.1.3 La Transformada Rápida de Fourier

- El algoritmo de la FFT es complicado y sus detalles son generalmente dejados para aquellos que se especializan en ella. En esta sección sólo esbozaremos las ideas principales del método.
- El material utilizado para tal fin fué tomado del libro: *The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing*, cuyo autor es Steven W. Smith y pueden encontrarlo en la siguiente página web:

<http://www.dspguide.com/pdfbook.htm>

### 3.1.3 La Transformada Rápida de Fourier

#### Representación de la TDF real y compleja

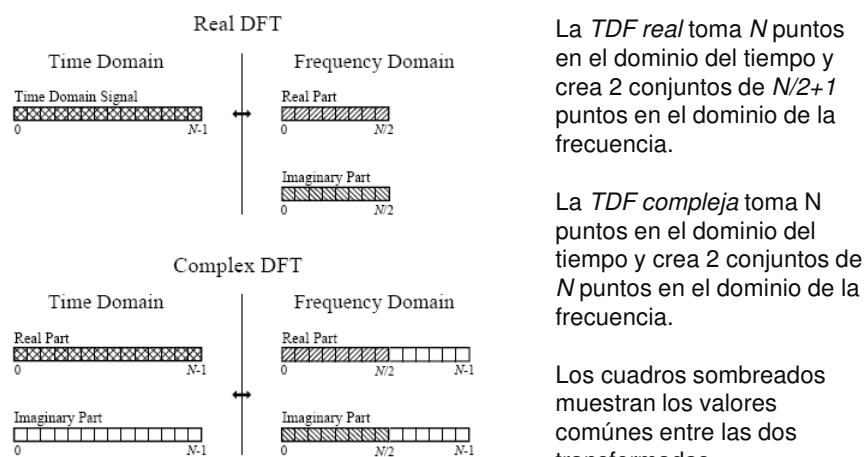
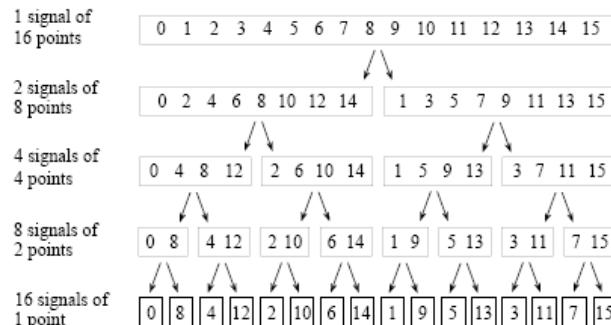


FIGURE 12-1  
Comparing the real and complex DFTs. The real DFT takes an  $N$  point time domain signal and creates two  $N/2 + 1$  point frequency domain signals. The complex DFT takes two  $N$  point time domain signals and creates two  $N$  point frequency domain signals. The crosshatched regions shows the values common to the two transforms.

### 3.1.3 La Transformada Rápida de Fourier

- El algoritmo de la FFT opera:
  - (1) descomponiendo *una señal* del dominio del tiempo de *tamaño N* puntos en *N señales* del dominio del tiempo cada una compuesta por *un sólo punto*.
  - (2) El segundo paso es calcular los *N espectros de frecuencia* correspondientes a estas *N señales* en el dominio del tiempo.
  - (3) Finalmente, los *N espectros* se sintetizan en *un arreglo de espectros de frecuencia*.

### 3.1.3 La Transformada Rápida de Fourier



Descomposición de FFT:  
Una señal de *N* puntos se descompone en *N* señales de un sólo punto cada una.

Cada estado utiliza una *descomposición entrelazada*, separando las muestras enumeradas como *pares* e *impares*.

FIGURE 12-2  
The FFT decomposition. An *N* point signal is decomposed into *N* signals each containing a single point.  
Each stage uses an *interlace decomposition*, separating the even and odd numbered samples.

Esta es una señal que tiene inicialmente 16 puntos y es descompuesta en 16 señales de un sólo punto cada una.

### 3.1.3 La Transformada Rápida de Fourier

## Descomposición entrelazada

- La *descomposición entrelazada* se utiliza cada vez que la señal se divide en dos, esto es, la señal se separa en sus muestras numeradas como *pares* e *impares*.
- Se requieren  $\log_2 N$  estados para esta descomposición, por ejemplo: una señal de 16 puntos ( $2^4$ ) requiere de 4 estados, una señal de 512 puntos ( $2^7$ ) requiere de 7 estados, una señal de 4096 ( $2^{12}$ ) requiere de 12 estados, etc

Nota: Recuerda el valor de  $\log_2 N$ , será mencionado más adelante

### 3.1.3 La Transformada Rápida de Fourier

## Reordenamiento de las muestras

- La descomposición no es más que un *reordenamiento* de las muestras.

Sample numbers in normal order		Sample numbers after bit reversal		A la izquierda se ve una lista de valores decimales con sus equivalentes valores binarios.  A la derecha las muestras se encuentran reordenadas también con sus equivalentes binarios.
Decimal	Binary	Decimal	Binary	
0	0000	0	0000	
1	0001	8	1000	
2	0010	4	0100	
3	0011	12	1100	
4	0100	2	0010	
5	0101	10	1010	
6	0110	6	0100	
7	0111	14	1110	
8	1000	1	0001	
9	1001	9	1001	
10	1010	5	0101	
11	1011	13	1101	
12	1100	3	0011	
13	1101	11	1011	
14	1110	7	0111	
15	1111	15	1111	

FIGURE 12-3  
The FFT bit reversal sorting. The FFT time domain decomposition can be implemented by sorting the samples according to bit reversed order.

A esto se le llama *ordenamiento reverso de bit* (*bit reversal sorting*). Reordena las  $N$  muestras del dominio del tiempo, *invirtiendo los bits* de izquierda a derecha.

### 3.1.3 La Transformada Rápida de Fourier

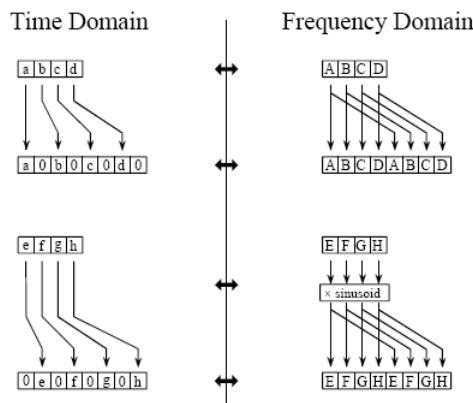
- El siguiente paso en el algoritmo de la TRF es *encontrar el espectro de frecuencia* de las señales de tiempo de un punto. El espectro de frecuencia de una señal de un punto es *igual a si misma!* Esto significa que no se requiere hacer nada en este paso.
- Aunque no hay ningún trabajo en este paso, recordemos que ahora *cada punto* es *un espectro de frecuencia* y no una señal del tiempo.

### 3.1.3 La Transformada Rápida de Fourier

- El último paso en la TRF es *combinar* los  $N$  espectros de frecuencia en el *orden inverso* en que se llevó la descomposición en el dominio del tiempo. (Aquí es donde el *algoritmo se vuelve complicado!*)
- Desafortunadamente no se puede regresar con la misma rapidez y hay que pasar por un estado cada vez. En el primer estado 16 espectros de frecuencia (1 punto c/u) se sintetizan en 8 espectros de frecuencia (2 puntos c/u). En el segundo estado 8 espectros de frecuencia (2 puntos c/u) se sintetizan en 4 espectros de frecuencia (4 puntos c/u), etc. El último estado resulta el espectro de frecuencia de 16 puntos esperado como salida de la TRF.

### 3.1.3 La Transformada Rápida de Fourier

## Síntesis de la TRF



Dos espectros de frecuencia de 4 puntos c/u se combinan en un sólo espectro de frecuencia de 8 puntos.

*Diluir* (mezclar) los puntos en el dominio del tiempo con ceros corresponde a una *duplicación* en el dominio de la frecuencia.

El espectro de frecuencia se combina en la TRF duplicándolos, y luego sumando los espectros duplicados.

FIGURE 12-4

The FFT synthesis. When a time domain signal is diluted with zeros, the frequency domain is duplicated. If the time domain signal is also shifted by one sample during the dilution, the spectrum will additionally be multiplied by a sinusoid.

### 3.1.3 La Transformada Rápida de Fourier

## Síntesis de la TRF

- De manera que correspondan a la hora de unirse, las dos señales de tiempo se mezclan de manera algo diferente. A una señal se le ponen en *cero las posiciones pares*, mientras que a la otra se le ponen en *cero las posiciones impares*. En otras palabras, una de las señales en el dominio del tiempo se *recorre a la derecha una muestra*.
- El *corrimiento* en el dominio del tiempo corresponde a la *multiplicación* del espectro de frecuencia por una *senoidal*.

### 3.1.3 La Transformada Rápida de Fourier

#### Síntesis de la TRF

FIGURE 12-5  
FFT synthesis flow diagram. This shows the method of combining two 4 point frequency spectra into a single 8 point frequency spectrum. The  $\times S$  operation means that the signal is multiplied by a sinusoid with an appropriately selected frequency.

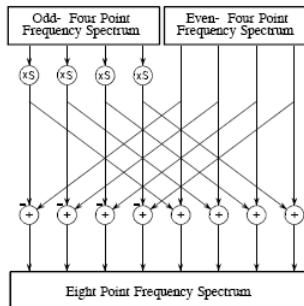
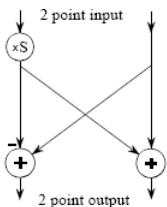


Diagrama de la unión de dos espectros de 4 puntos c/u en un espectro de 8 puntos.

FIGURE 12-6  
The FFT butterfly. This is the basic calculation element in the FFT, taking two complex points and converting them into two other complex points.



Elemento de cálculo básico para unir 2 números complejos en otros 2 números complejos que se repiten una y otra vez durante esta parte del algoritmo. Llamado "mariposa".

### 3.1.3 La Transformada Rápida de Fourier

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_0(k) \cdot \exp\left(\frac{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot k}{N}\right) \quad \text{con} \quad n=0..N-1$$

$$\text{Sea: } W = \exp\left(\frac{-j \cdot 2 \cdot \pi}{N}\right)$$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix}$$

Transformada rápida:

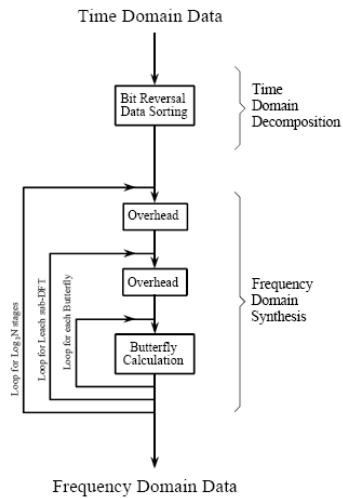
$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(0) \\ x_2(1) \\ x_2(2) \\ x_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \end{bmatrix}$$

### 3.1.3 La Transformada Rápida de Fourier

## Diagrama de flujo de la TRF

FIGURE 12-7  
Flow diagram of the FFT. This is based on three steps: (1) decompose an  $N$  point time domain signal into  $N$  signals each containing a single point, (2) find the spectrum of each of the  $N$  point signals (nothing required), and (3) synthesize the  $N$  frequency spectra into a single frequency spectrum.

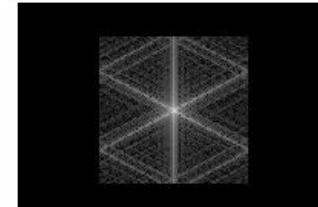
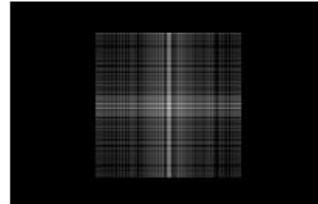


La descomposición del dominio del tiempo se realiza por ordenamiento inverso de bits. Transformar los datos descompuestos a frecuencia no involucra ninguna operación, así que no aparece en el digrama.

La síntesis requiere de tres ciclos: (1) externo:  $\log_2 N$  estados. (2) medio: se mueve en cada espectro de frecuencia individual, (3) interno: utiliza la mariposa para calcular cada punto del espectro de frecuencia.

### 3.1.3 La Transformada Rápida de Fourier

## Algoritmo de la TRF

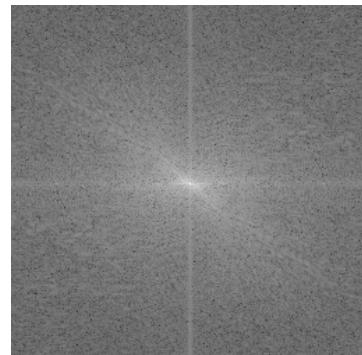


Imágenes con su correspondiente espectro mediante la TRF

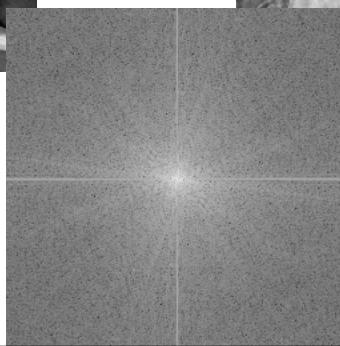
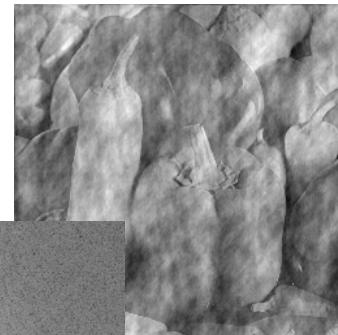
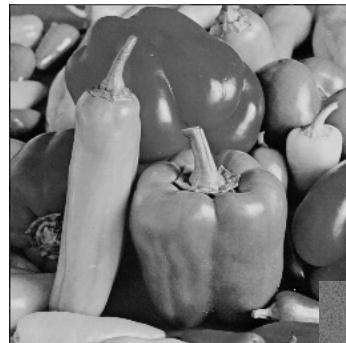
### 3.1.3 La Transformada Rápida de Fourier

- La descripción anterior de la TRF es para señales en 1D. Para implementarla en 2D, es necesario hacer el cálculo para la imagen:
  - 1- los renglones
  - 2- las columnas,  
(en cada caso se aplica el algoritmo de la TRF en 1D)
- Existen numerosos lugares donde se puede encontrar el código de la TRF (casi en cualquier lenguaje de programación)
  - Ej. En lenguaje C aplicado a imágenes:  
<http://local.wasp.uwa.edu.au/~pbourke/miscellaneous/dft/index.html>

### 3.1.3 La Transformada Rápida de Fourier



### 3.1.3 La Transformada Rápida de Fourier



### 3.1.3 La Transformada Rápida de Fourier

Aplicaciones más importantes de la FFT en el tratamiento de imagen:

- ✓ Filtros y convolución
- ✓ Análisis espectral en tiempo real - Análisis del Cepstrum
- ✓ Estimación de funciones de transferencia
- ✓ Análisis de sistemas
- ✓ Demoduladores
- ✓ Filtros digitales de alta velocidad
- ✓ Compresión del ancho de banda de vídeo
- ✓ Restauración de imágenes

### 3.1.4 La Transformada Inversa de Fourier

La inversa de la transformada de Fourier se define como:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{2\pi i u x} dx$$

Análogamente, se define la transformada de Fourier de una función continua e integrable de 2 variables:

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i (ux + vy)} dx dy$$

y su inversa como

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{2\pi i (ux + vy)} dx$$

### 3.1.4 La Transformada Inversa de Fourier

La inversa de la transformada de Fourier puede implementarse a partir de la TF con mínimas modificaciones de entrada, ya que puede reescribirse como:

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \exp[-j2\pi u x / N]$$

y:

$$f(u) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} F(u) \exp[-j2\pi u x / N]$$

Tomando el complejo conjugado de la primera ec. se observa que la parte inferior de la de derecha de la segunda ec. corresponde a la forma de la TF. Por lo que tomando como entrada  $F^*(u)$  en un algoritmo para calcular la TF directa se obtiene la función  $f^*(x)/N$ . Tomando el complejo conjugado y dividiendo por N se obtiene la función  $f(x)$  buscada.

### 3.1.4 La Transformada Inversa de Fourier

Para matrices cuadradas bidimensionales se toma el complejo conjugado de la ecuación:

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp[-j2\pi(ux + vy)/N]$$

Cuando  $f(x)$  o  $f(x,y)$  son reales la operación complejo conjugado es inn:

$$f^*(x) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp[-2j2\pi(ux + vy)/N]$$

### 3.1.5 Equivalencias entre la convolución y la TF

#### La Convolución y la Correlación

- Son dos relaciones de la transformada de Fourier que constituyen la unión fundamental entre los dominios espacial y de frecuencias
- Ambas son de importancia fundamental para la comprensión de las técnicas de procesado de imágenes basadas en la transformada de Fourier.

### 3.1.5 Equivalencias entre la convolución y la TF

**La convolución y las operaciones relacionadas se encuentran en muchas aplicaciones de ingeniería y matemáticas**

- Estadística: un promedio móvil ponderado es una convolución
- Teoría de la probabilidad: la distribución de probabilidad de la suma de dos variables aleatorias independientes es la convolución de cada una de sus distribuciones de probabilidad
- Óptica: una fotografía desenfocada es la convolución de la imagen correcta con el círculo borroso formado por el diafragma del iris

### 3.1.5 Equivalencias entre la convolución y la TF

Definición:

- ✓ La convolución de  $f$  y  $g$  se denota por  $f * g$
- ✓ Se define como la integral del producto de ambas funciones después de que sea invertida y desplazada una distancia  $T$
- ✓ La convolución requiere que una de las dos funciones sea refejada respecto al origen, antes de que la integral sea calculada sobre la variable de desplazamiento

$$(f * g)(t) = \int f(\tau)g(t - \tau)d\tau \quad \left. \right\} \text{Espacio continuo 2D}$$

### 3.1.5 Equivalencias entre la convolución y la TF

Supongamos que en lugar de ser continuas,  $f(x)$  y  $g(x)$  están discretizadas en matrices de tamaño  $A$  y  $B$ , respectivamente:  $\{f(0), f(1), f(2), \dots, f(A-1)\}, \dots, \{g(B-1)\}$ .

$$f[m] * g[m] = \sum_n f[n]g[m-n]$$
} Espacio discreto 2D

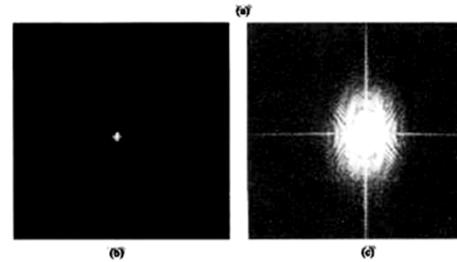
### 3.2 El uso de la TF en imágenes digitales

#### Representación del logaritmo del espectro

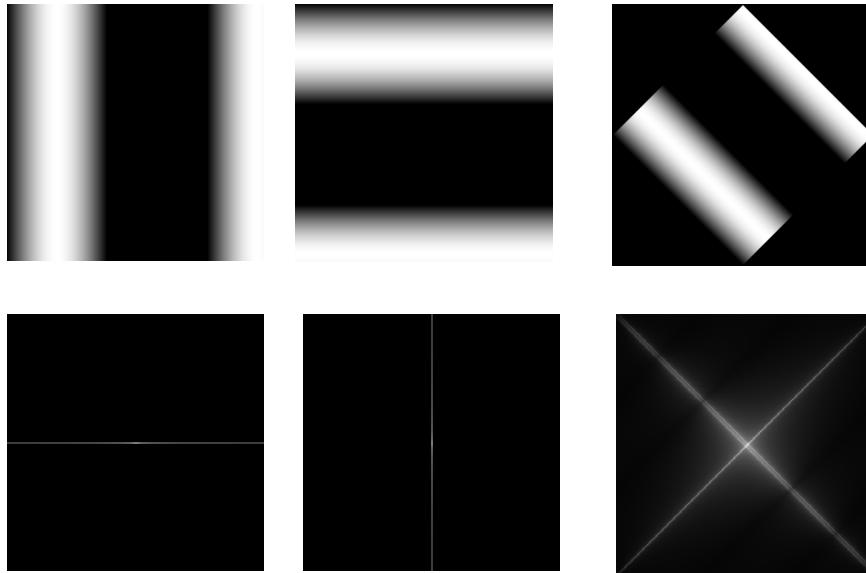
**El espectro de Fourier** suele tener un rango mucho mayor que los usuales para mostrar una imagen. Una técnica usual para evitar esto es considerar el logaritmo del espectro usando la fórmula

$$D(u,v) = C(\log(1+|F(u,v)|))$$

donde  $C$  es una constante adecuada de reescalado de la imagen, que se aplica para obtener valores dentro de la paleta de colores disponible.



### 3.2 El uso de la TF en imágenes digitales



### 3.2 El uso de la TF en imágenes digitales

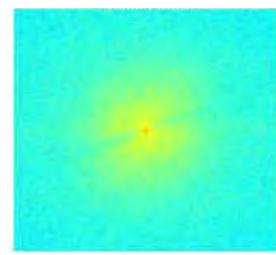
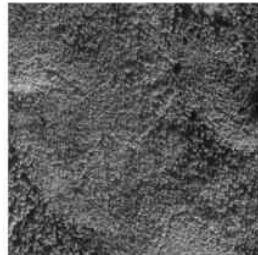
**La convolución y las operaciones relacionadas se encuentran en muchas aplicaciones de ingeniería y matemáticas**

- Acústica: un eco es la convolución del sonido original con una función que represente los objetos que se reflejen
- Ingeniería eléctrica y otras disciplinas: la salida de un sistema lineal es la convolución de la entrada con la respuesta del sistema a un impulso
- Física: en un sistema lineal con un principio de superposición aparece una operación de convolución

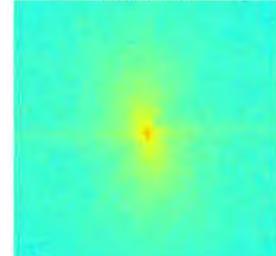
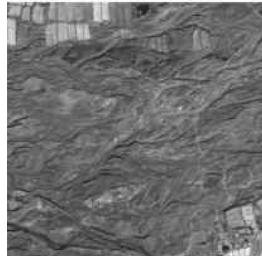
### 3.2 El uso de la TF en imágenes digitales

Aplicación del logaritmo del espectro de Fourier: Analizador de texturas:

Textura de bosque



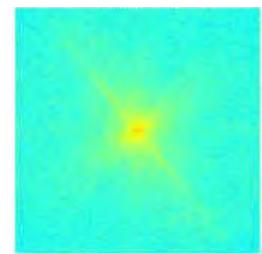
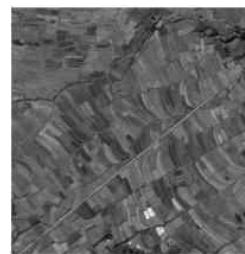
Textura de barro



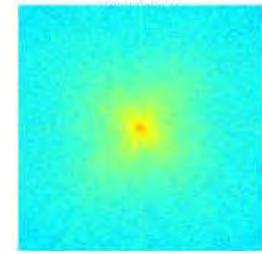
### 3.2 El uso de la TF en imágenes digitales

Aplicación del logaritmo del espectro de Fourier: Analizador de texturas:

Texturas de campos



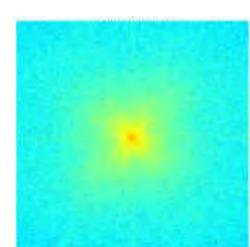
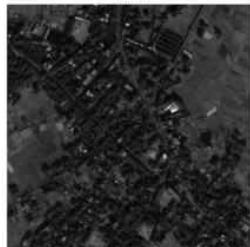
Texturas de charcas



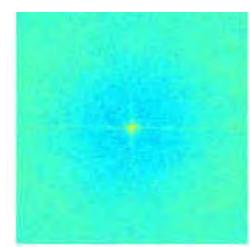
### 3.2 El uso de la TF en imágenes digitales

Aplicación del logaritmo del espectro de Fourier: Analizador de texturas:

Texturas de ciudad



Texturas de agua



#### 3.2 .1 Ajuste de brillo

### 3.2.2 Filtros pasa bajas

#### Filtrado

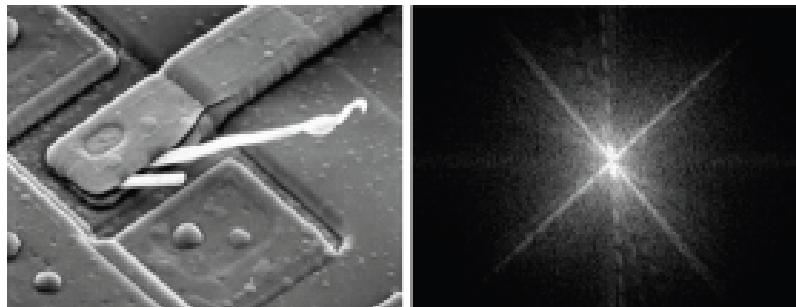


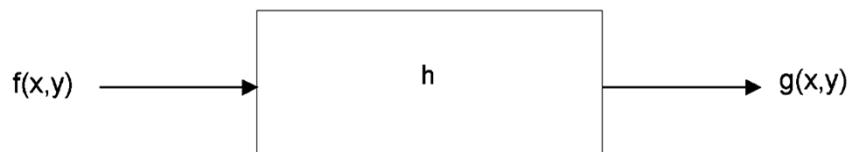
Imagen SEM de un microchip dañado y su espectro de Fourier

### 3.2.2 Filtros pasa bajas

#### Filtrado

- Filtrar una imagen consiste en aplicar una transformación de forma que se acentúen o disminuyan ciertos aspectos

$$g(x,y) = T[f(x,y)]$$



### 3.2.2 Filtros pasa bajas

## Tipos de Filtros

- Dominio espacial- convolución.

$$g(x,y) = h(x,y) * f(x,y)$$

- Dominio de la frecuencia - multiplicación + transformadas de Fourier

$$G(u,v) = H(u,v) F(u,v)$$

### 3.2.2 Filtros pasa bajas

## Filtros en frecuencia

- Se realiza una transformación de la imagen al dominio de la frecuencia mediante la transformada de Fourier
- Esto permite que el filtrado sea más sencillo (multiplicación) y pueda ser más *preciso* en frecuencia



**3.2.2 Filtros pasa bajas**

## Transformadas

- Transformado de Fourier

$$F(u) = \int f(x)e^{-j2\pi ux}dx$$

- Transformada inversa

$$f(x) = \int F(u)e^{j2\pi ux}du$$

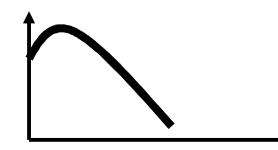
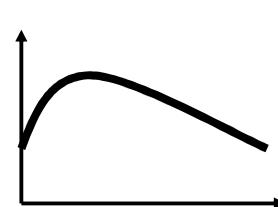
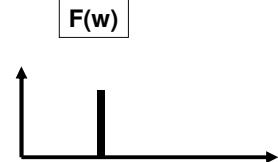
**3.2.2 Filtros pasa bajas**

### Ejemplos:

$f(t)$



$F(w)$



### 3.2.2 Filtros pasa bajas

## Transformadas de 2 variables

- Para el caso de una imagen se requiere aplicar la transformación en 2-D
- Transformado de Fourier

$$F(u) = \iint f(x,y) e^{[-j2\pi(ux+vy)]} dx dy$$

- Transformada inversa

$$f(x) = \iint F(u,v) e^{[j2\pi(ux+vy)]} du dv$$

### 3.2.2 Filtros pasa bajas

## Transformadas discreta

- Para el caso de una imagen digital se aplica la *transformada discreta de Fourier (DFT)*
- Transformado de Fourier

$$F(u) = (1/MN) \sum \sum f(x,y) e^{[-j2\pi(ux/M+vy/N)]}$$

- Transformada inversa

$$f(x) = \sum \sum F(u,v) e^{[j2\pi(ux/M+vy/N)]}$$

- Existe una forma eficiente de implementar la DFT llamada *transformada rápida de Fourier (FFT)*

### 3.2.2 Filtros pasa bajas

## Pasos para un Filtrado

- Se aplica la Transformada de Fourier
- Se aplica el filtro
- Se aplica la transformada inversa



### 3.2.2 Filtros pasa bajas

## Tipos de Filtrado

- **Pasa bajos**
  - (Ej. Filtros butterworth)



- **Pasa banda**

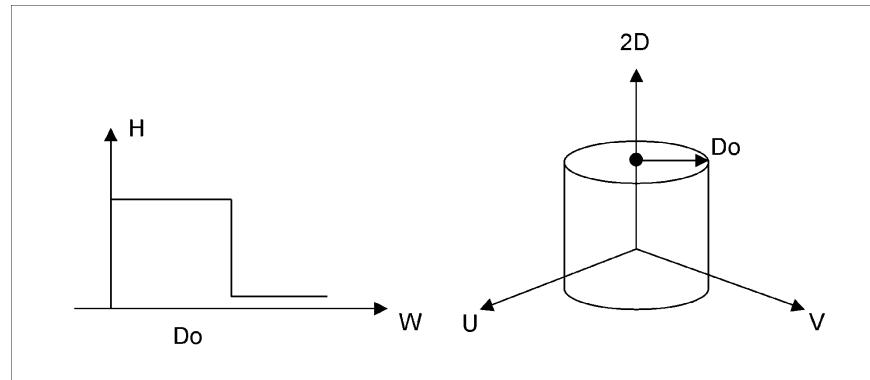


- **Pasa altos**



### 3.2.2 Filtros pasa bajas

## Filtro ideal pasa bajos



### 3.2.2 Filtros pasa bajas

## Filtro ideal pasa bajos

- Un filtro de paso bajo bidimensional es aquel cuya función de transferencia verifica la relación:

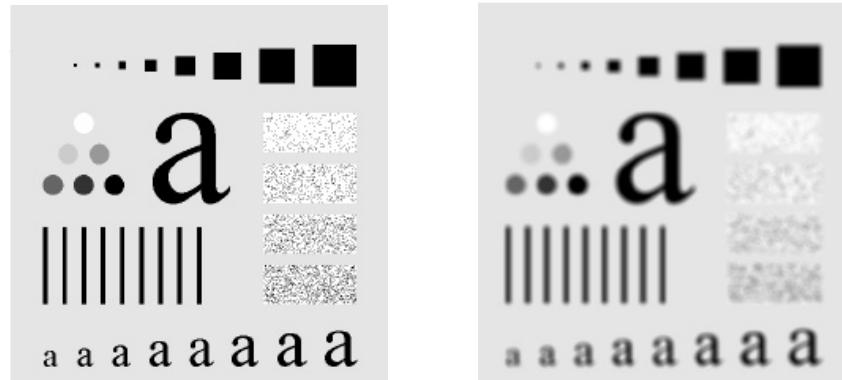
$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{si } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

Donde  $D_0$  es una cantidad especificada no negativa, y  $D(u, v)$  es la distancia desde el punto  $(u, v)$  al origen de coordenadas en el plano de frecuencias, es decir:

$$D(u, v) = (u^2 + v^2)^{1/2}$$

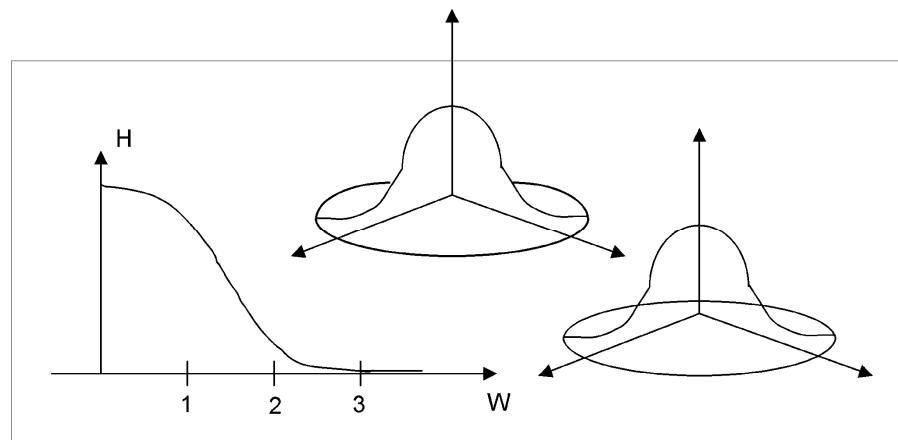
### 3.2.2 Filtros pasa bajas

- Filtro paso-bajo: “suavizan” las transiciones de grises



### 3.2.2 Filtros pasa bajas

## Filtro Butterworth pasa-bajos



### 3.2.3 Filtros pasa altas

## Filtro ideal pasa altas

- Un filtro de paso bajo bidimensional viene caracterizado por una función de transferencia que verifica la relación:

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{si } D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{si } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

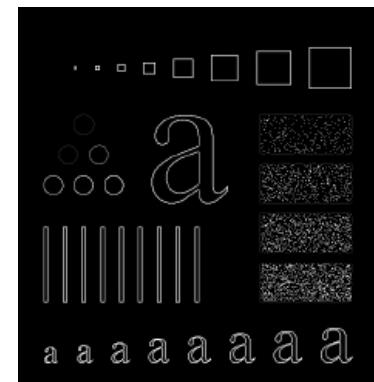
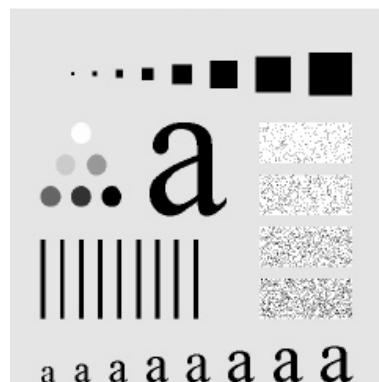
Donde  $D_0$  es la distancia de corte medida desde el origen del plano de frecuencias, y  $D(u, v)$  viene dado por la ecuación:

$$D(u, v) = (u^2 + v^2)^{1/2}$$

*NOTA: Al igual que el filtro ideal paso bajo, el filtro ideal paso alto no es físicamente realizable.*

### 3.2.3 Filtros pasa altas

- Filtro paso-alto: enfatizan las transiciones de grises



## Transformada de Fourier

### Ejemplos:

- **Aplicación del Filtro Gaussiano y Laplaciano:**  
<http://www.youtube.com/watch?v=HxE4QC1kDDI>

### Para practicar:

- ✓ [Applet de Java](#)
- ✓ <http://www.dai.ed.ac.uk/HIPR2/fourier.htm>
- ✓ <http://www.ee.siu.edu/~cvip/>
- ✓ <http://rsbweb.nih.gov/ij/applet/>

## Ejemplo: Aplicando la TRF a una imagen

Sea la siguiente imagen de dimensión NxM  
(4x4), aplicarle la TDF al coeficiente  $f(1,0)$

$f(x, y) =$

17	2	1	8
23	15	7	14
4	6	3	20
0	12	9	41

$F(u,v) =$




INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES  
ACADEMIA DE INGENIERÍA DE SOFTWARE



Profesora: M. en C. Ma. Elena Cruz Meza,  
e-mail: analisisimagenesescm@gmail.com

## **ANÁLISIS DE IMÁGENES**

### **Análisis de Imágenes**

## **Unidad IV**

Análisis morfológico

## Unidad III

### 4.1 Morfología matemática de conjuntos

- 4.1.1 La imagen binaria como conjunto
- 4.1.2 Traslación y reflexión
- 4.1.3 Dilatación y erosión
- 4.1.4 Apertura y cierre
- 4.1.5 Filtros morfológicos
- 4.1.6 Transformada Hit & Miss
- 4.1.7 Granulometría

### 4.2 Morfología matemática de lattices

- 4.2.1 Los lattices
- 4.2.2 La imagen en niveles de gris como un lattice
- 4.2.3 Traslación y reflexión
- 4.2.4 Dilatación y erosión
- 4.2.5 Apertura y Cierre
- 4.2.6 Filtros morfológicos
- 4.2.7 Transformada Watershed

# Introducción...

#### 4.1 Morfología matemática de conjuntos

## Que es la Morfología Matemática?

- En biología, el término **morfología** se refiere al estudio de la forma y la estructura de plantas y animales.
- En imágenes, se refiere a una rama del procesamiento y análisis de imágenes no lineal, desarrollado inicialmente por George Matheron y Jean Serra, al concentrarse en la estructura geométrica de las imágenes, la cual puede ser:
  - una macronaturaleza, donde la meta es el análisis de formas tales como las de las herramientas manuales o de los caracteres impresos,
  - una micronaturaleza donde uno puede interesarse en la distribución de partículas o texturas generadas por pequeñas primitivas.

#### 4.1 Morfología matemática de conjuntos

## Que es la Morfología Matemática?...

- La Morfología Matemática o simplemente la morfología, puede ser definida como una teoría para el análisis de estructuras espaciales.
- Es llamada morfología porque analiza la forma de los objetos y es matemática, en el sentido de que el análisis está basado en la teoría de conjuntos, la geometría integral y el álgebra de “lattices” o reticulados.
- La MM no es solo una teoría, sino una poderosa técnica de análisis de imágenes

**4.1 Morfología matemática de conjuntos****¿Dónde se aplica?**

- El alcance es tan amplio PDI por sí mismo: mejoramiento, segmentación, restauración, detección de bordes, análisis de texturas, análisis de partículas, generación de características, esqueletización, análisis de imágenes en general, compresión, análisis de componentes, rellenado de curvas.
- Aplicados, como en la visión por computadora, la inspección industrial, la microscopía de todo tipo, la medicina, el sensaje remoto, la biología, la metalurgia, en la lectura automática de caracteres escritos a máquina o manuscritos, en fin.

**4.1 Morfología matemática de conjuntos****El elemento de estructura (EE)**

- Cuando decimos que el procesamiento morfológico está basado en la Geometría, lo entendemos en un sentido específico. La idea básica, es inspeccionar una imagen con un ee y cuantificar la manera en la cual dicho elemento se ajusta o no dentro de la imagen.
- En la Figura 1 vemos una imagen binaria y un ee cuadrado. El ee se muestra localizado en dos posiciones diferentes.
- En la primera posición se ajusta completamente dentro de la imagen y en la otra no. Al marcar los lugares en los cuales el ee se ajusta dentro de la imagen, obtenemos información estructural concerniente a la misma.

#### 4.1 Morfología matemática de conjuntos

El elemento de estructura ...

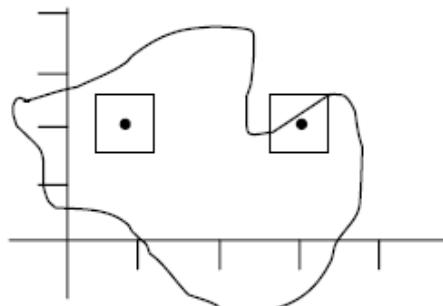


Figura 1. Ajuste y no ajuste de un elemento de estructura en una imagen

- Esta información depende del tamaño y forma del EE, y como enfatiza Matheron, “La naturaleza de la información es consecuencia de la elección del elemento de estructura”.

#### 4.1 Morfología matemática de conjuntos

El elemento de estructura ...

- El objetivo de las transformaciones morfológicas es la extracción de estructuras geométricas en los conjuntos sobre los que opera (imágenes), mediante la utilización de otro conjunto de forma conocida llamado elemento de estructura.
- Se le llama Elemento de Estructura (EE) a una distribución bi- o tridimensional de píxeles dispuestos regularmente (formando cuadrados, rectángulos, conos, etc.) o irregularmente (sin una forma regular), los cuales se definen por su largo y ancho (tamaño), niveles de gris y con un punto de referencia, imprescindible para procesar digitalmente las imágenes mediante técnicas morfológicas.
- El origen del EE es un concepto importante, pues define la traslación de las interacciones.

#### 4.1 Morfología matemática de conjuntos

El elemento de estructura ...

- El EE se considera como una matriz de valores discretos relativos a una posición dada que se le da el nombre de origen o punto de referencia del EE. La simbolizamos como  $(S(x,y))$  (Fig. 2).

$S(x-1,y-1)$	$S(x,y-1)$	$S(x+1,y-1)$
$S(x-1,y)$	$S(x,y)$	$S(x+1,y)$
$S(x-1,y+1)$	$S(x,y+1)$	$S(x+1,y+1)$

Figura 2. Esquema de un elemento de estructura

Los elementos estructurales solo pueden tener 3 posibles valores por casilla, 1, 0 ó X. En las imágenes binarias los únicos valores para la matriz son 0 y 1. X representa un valor cualquiera del 0 al 255 en las imágenes en niveles de gris.

El tamaño del elemento estructural depende de los píxeles que se involucren para la operación a realizar

#### 4.1 Morfología matemática de conjuntos

## Atributos de un EE

- Los atributos de un EE son:
  - Tamaño.
  - Forma.
  - Cantidad de celdas (depende del tamaño y forma del EE).
  - Valor de cada celda o píxel. Los valores pueden ser 1 ó 0 en binarios y del 0 al 255 en niveles de gris.
- La forma y el tamaño de los EEs deben ser adaptados a las propiedades geométricas de los objetos de la imagen que va a ser procesada; por ejemplo, los EEs lineales son adecuados para la extracción de objetos lineales

#### 4.1 Morfología matemática de conjuntos

## La elección del EE

- Algunas formas pueden ser consideradas para un EE, aunque sólo un rango limitado de EEs se usa en aplicaciones prácticas.
- Aparte de la forma, uno puede también definir un tamaño específico y, para algunos EEs asimétricos, una orientación específica
- Tipos de EE
  - EEs adaptativos.
  - EEs compuestos.
  - EEs simétricos elementales.
  - EEs adicionales.
  - EEs para entrenamiento de Redes morfológicas.
  - EEs optimizados.

#### 4.1 Morfología matemática de conjuntos

## Ejemplo de distintas estructuras para un EE

1	1	1
1	0	1
1	1	1
	1	
1	0	1
1		

		1	1	1	
	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1
		1	1	1	

1	1	
1	0	1
1	1	1

Note que cada punto en el ee puede tener un valor indistinto. En los ee simples usados para imágenes binarias, en operaciones tal como la erosión, los ee tienen un solo valor, en este caso representado como 1

Figura 3 Algunos ejemplos de ee

#### 4.1.1 La imagen binaria como conjunto

### Morfológica Binaria

- El lenguaje de la morfología matemática binaria es la teoría de conjuntos.
- Los conjuntos en morfología matemática representan las formas presentes en imágenes binarias o en niveles de gris:
  - *El conjunto de todos los píxeles blancos y negros en una imagen binaria, constituye una descripción completa de la imagen.*
- En las imágenes binarias los puntos seleccionados son los que no pertenecen al fondo.

#### 4.1.1 La imagen binaria como conjunto

### Imagen binaria

- En imágenes binarias los conjuntos son miembros del espacio bidimensional entero  $Z^2$ , donde cada elemento de un conjunto es una tupla (vector bidimensional) cuyas coordenadas son las coordenadas  $(x,y)$  de un pixel negro de una imagen

**4.1.2 Traslación y reflexión**

## Traslación y Reflexión

- Sean  $A$  y  $B$  conjuntos con  $Z^2$ , con componentes  $a=(a_1, a_2)$  y  $b=(b_1, b_2)$ , respectivamente. La **traslación** de  $A$  por  $x=(x_1, x_2)$  representada por  $(A)_x$  se define como:

$$(A)_x = \{c / c = a + x, \text{ para } a \in A\}$$

- La **reflexión** representada por  $B^\wedge$  se define como:

$$(B^\wedge) = \{x / x = -b, \text{ para } b \in B\}$$

**4.1.2 Traslación y reflexión**

Otras definiciones básicas...

- El complemento del conjunto  $A$ :

$$(A^c) = \{x / x \notin A\}$$

- Finalmente la diferencia de dos conjuntos  $A$  y  $B$ , representadas por  $A-B$  se define como:

$$A-B = \{x / x \in A, x \notin B\} = A \cap B^c$$

#### 4.1.3 Dilatación y erosión

## La Dilatación

- La dilatación es la transformación morfológica que combina dos vectores mediante la suma.
- La dilatación binaria fue usada primero por Minkowski, por lo que en la literatura matemática recibe el nombre de suma o adición de Minkowski. Si  $f$  y  $b$  son conjuntos en un  $n$ -espacio  $Z^n$  con elementos  $y f = (f_1, \dots, f_n)$  y  $b = (b_1, \dots, b_n)$ , respectivamente, siendo ambos  $n$ -tuplas, entonces la dilatación de  $f$  por  $b$  es el conjunto de todos los posibles vectores que son suma de pares de elementos, uno de  $f$  y otro de  $b$ .

#### 4.1.3 Dilatación y erosión

## Dilatación ...

- Formalmente, la dilatación de  $f$  por  $b$ , denotada como,  $\delta_Y(f)(x,y)$  se define mediante la expresión:

$$\delta_Y(f)(x,y) = \max_{(s,t) \in Y} f(x-s, y-t)$$

- Usualmente en la práctica manipulada como:  

$$A \oplus B = \{c \in E^n / c = a + b \text{ para todo } a \in A \text{ y } b \in B\}$$

Al ser la suma conmutativa, la dilatación también lo es:

$$A \oplus B = B \oplus A$$

**4.1.3 Dilatación y erosión****Dilatación ...**

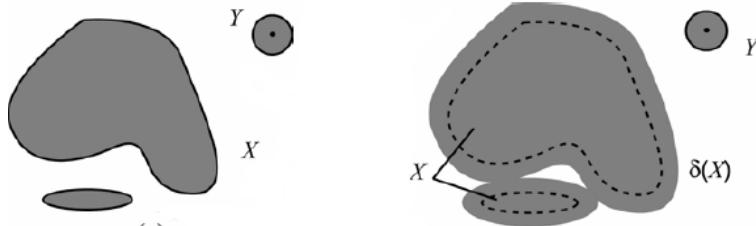
- En la práctica, los conjuntos  $A$  y  $B$  no son simétricos. El primer elemento de la dilatación  $A$  está asociado con la imagen que se está procesando y el segundo elemento, llamado **elemento estructural** o **elemento de estructura**, es la forma (geométrica) que actúa sobre  $A$  en la dilatación para producir  $A \oplus B$ .
- Con la dilatación siempre ocurre una expansión de la imagen cuando la referencia se encuentra dentro del elemento de estructura, es decir, la imagen original siempre será un subconjunto de la imagen resultante.

**4.1.3 Dilatación y erosión****Dilatación ...**

- La dilatación, en general, tiene las siguientes propiedades:
  - La dilatación por un elemento estructural trasladado es igual a la traslación de la dilatación  $A \oplus B_t = (A \oplus B)_t$
  - Propiedad distributiva:  $A \oplus (B \cup C) = (A \oplus B) \cup (B \oplus C)$
  - Asociatividad (iteración):  $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$
  - Expansión:  $A \subseteq B \Rightarrow A \oplus K \subseteq B \oplus K^* \text{ lcm } \forall K$

#### 4.1.3 Dilatación y erosión

##### Dilatación ...



El efecto de la operación de dilatación puede observarse, en donde un ee  $Y$  en forma de disco circular aumenta la definición del objeto  $X$ .

El valor de dilatación de un píxel  $(x,y)$  es el máximo valor de la imagen en la ventana de la vecindad definida por el ee cuando su origen se sitúa en  $(x,y)$ .

#### 4.1.3 Dilatación y erosión

##### Ej. de la dilatación

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0

(a)

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

(b)

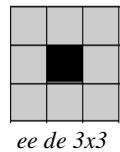
Efecto de la dilatación de una imagen binaria usando un ee de 3x3 cuadrado

### 4.1.3 Dilatación y erosión

Dilatación ...



(a)



(b)

La dilatación de la imagen binaria (a) por un ee de tamaño 3x3. En la Imagen resultante (b) el objeto aumenta su definición.

### 4.1.3 Dilatación y erosión

## La Erosión

- Formalmente, la erosión de  $f$  por  $b$ , denotada como,  $\epsilon_Y(f)(x,y)$  se define mediante la expresión:

$$\epsilon_Y(f)(x,y) = \min_{(s,t) \in Y} f(x+s, y+t)$$

- Usualmente en la práctica manipulada como:  
 $A \Theta B = \{x \in Z^n / x + b \in A \text{ para todo } b \in B\}$

**4.1.3 Dilatación y erosión****Erosión ...**

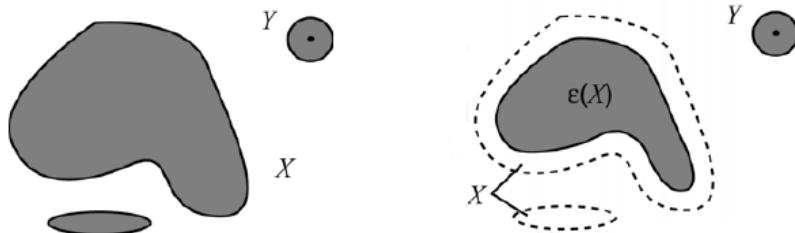
- Como puede notarse, la erosión es la operación morfológica dual de la dilatación. Es la transformación morfológica que combina dos conjuntos mediante el concepto de inclusión.
- Si  $A$  y  $B$  son conjuntos en el espacio euclídeo  $n$ -dimensional, entonces la erosión de  $A$  por  $B$  es el conjunto de todos los elementos  $x$  para los que  $x+b \in A \forall b \in B$ . La sustracción de Minkowski está muy relacionada con la erosión.

**4.1.3 Dilatación y erosión****Erosión ...**

- La transformación de la erosión es el resultado de comprobar si el  $ee Y$ , está totalmente incluido dentro del conjunto  $X$ . Cuando esto no ocurre, el resultado de la oración es el conjunto vacío.
- La erosión se concibe usualmente como una reducción de la imagen original. En términos de la teoría de conjuntos, el conjunto erosionado siempre está contenido en el original.

### **4.1.3 Dilatación y erosión**

## Erosión ...



- El efecto de esta operación puede observarse en la figura, en la que un ee Y, en forma de disco circular, hace desaparecer las estructuras de menor tamaño al elemento.
  - La erosión es el mínimo valor de la función imagen en la ventana, definida por un ee cuando su origen se sitúa en  $(x,y)$ . El resultado es el mínimo valor de todos los píxeles bajo la definición del ee.

### **4.1.3 Dilatación y erosión**

## Erosión ...



## Efecto de la erosión de una imagen binaria usando un kernel de 3x3 cuadrado

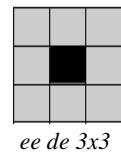
- En el resultado de la erosión se tienen aquellos puntos de  $A$ , para los cuales todas las posibles traslaciones definidas por  $B$  también están en  $A$

### 4.1.3 Dilatación y erosión

Erosión ...



Imagen original



ee de 3x3



Imagen erosionada

- La erosión de la imagen binaria se realizó con ee de 3x3 cuadrado con origen en el centro. El origen del ee es importante pues define la orientación de la traslación

### 4.1.3 Dilatación y erosión

Ejemplos y ejercicios:

Consideremos la imagen  $A_1$ ,  $A_2$  y los elementos de estructuras  $B_1$ ,  $B_2$  y  $B_3$ , cuyo origen esta marcado con un “\*”.

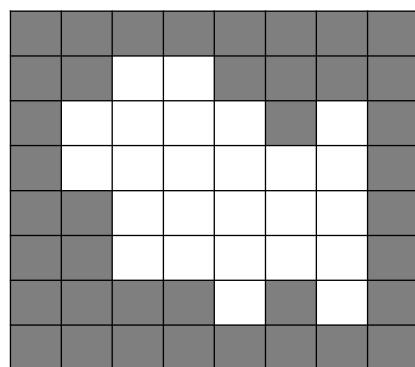
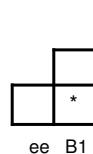
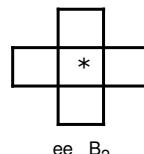


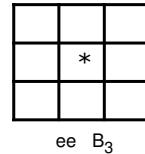
Imagen  $A_1$



ee  $B_1$



ee  $B_2$



ee  $B_3$

### 4.1.3 Dilatación y erosión

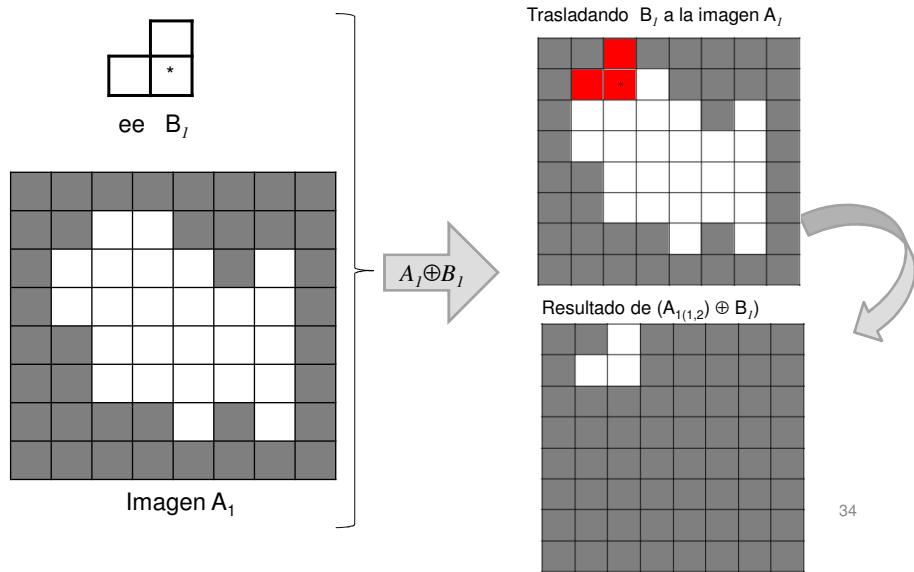
## Ejemplo del operador dilatación con los elementos estructurantes $B_1$ y $B_2$

Utilizando los elementos de estructura  $B_1$  y  $B_2$ , se muestra el proceso de la dilatación con el primer pixel de la imagen  $A_1$  y repitiendo el proceso para cada pixel de toda la imagen, se muestra el efecto de este operador de forma completa con el último pixel de la imagen.

33

### 4.1.3 Dilatación y erosión

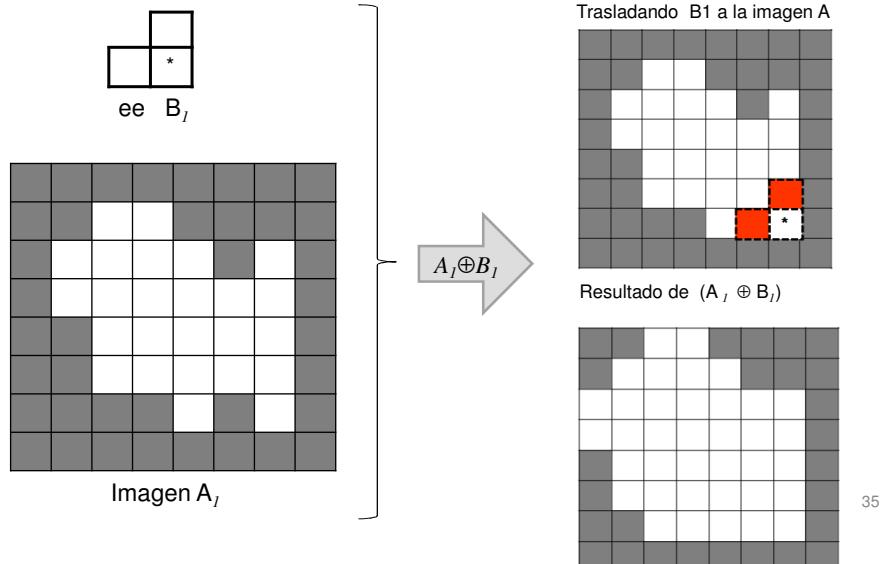
Realizando la dilatación del primer pixel  $A_{1(1,2)}$  con  $B_1$



34

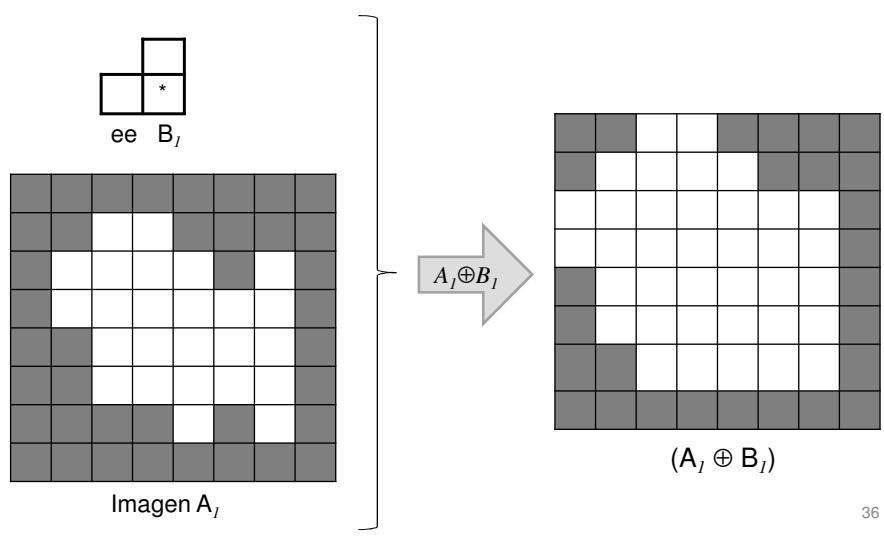
### 4.1.3 Dilatación y erosión

Realizando la dilatación del último pixel  $A_I(6,6)$  con  $B_I$



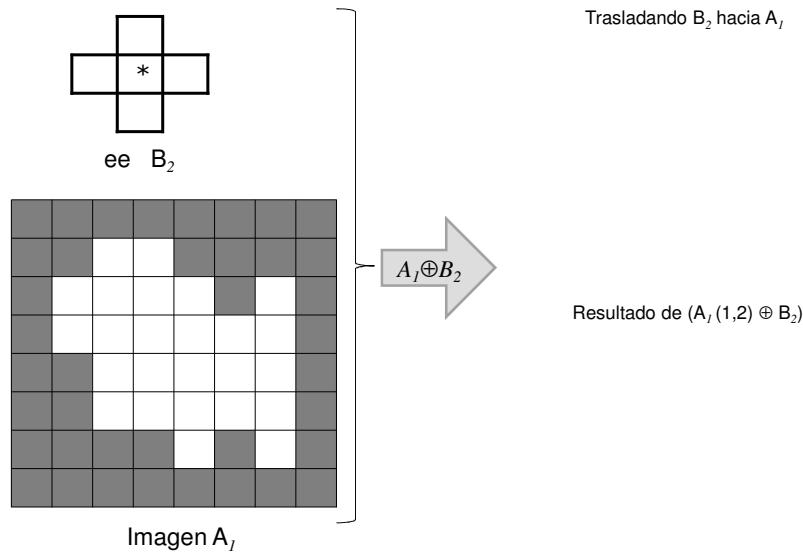
### 4.1.3 Dilatación y erosión

Resultado de la dilatación de  $A_I$  con  $B_I$



### 4.1.3 Dilatación y erosión

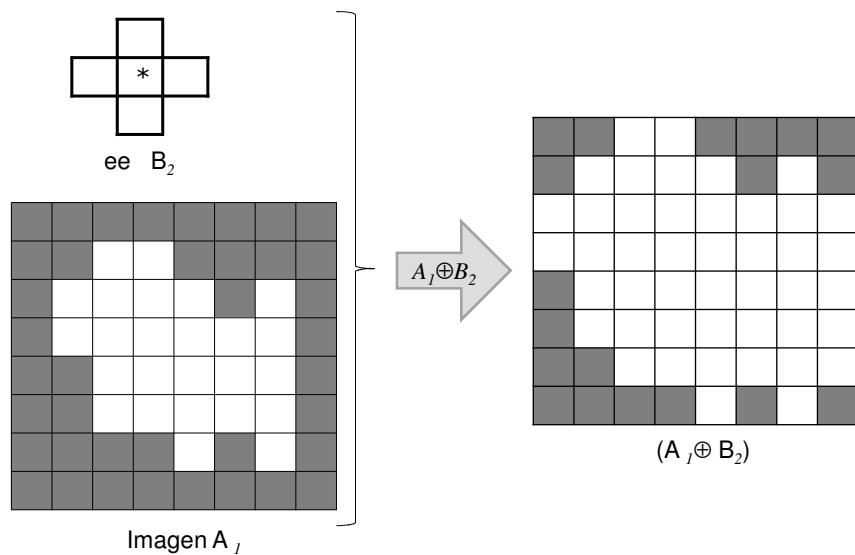
Resultado de la Dilatación de  $A_1$  con  $B_2$



37

### 4.1.3 Dilatación y erosión

Resultado de la Dilatación de  $A_1$  con  $B_2$



38

### 4.1.3 Dilatación y erosión

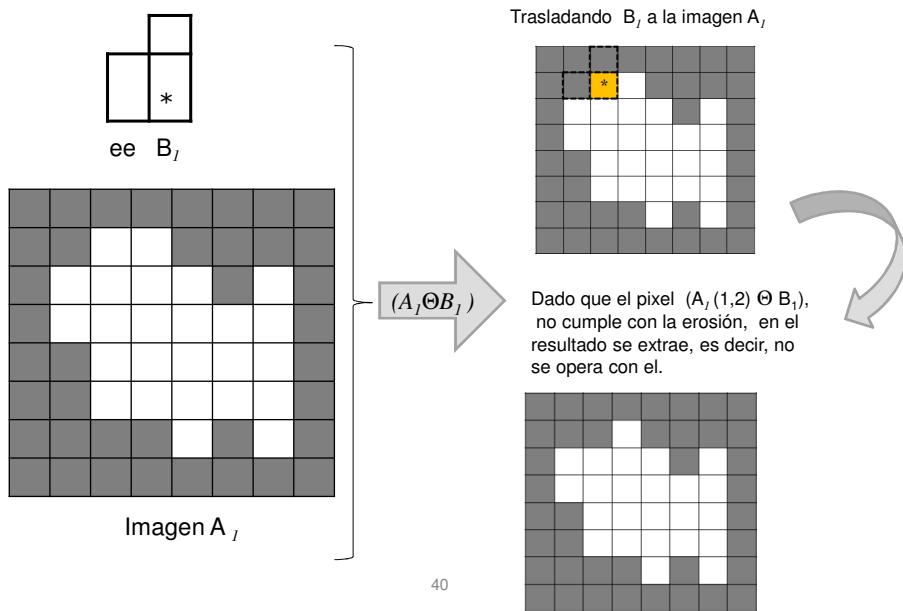
## Ejemplo del operador erosión con los elementos estructurantes $B_1$ y $B_2$

Utilizando los elementos de estructura  $B_1$  y  $B_2$ , se muestra el proceso de la erosión con el primer pixel de la imagen  $A_1$ , y repitiendo el proceso para cada pixel de toda la imagen, se muestra el efecto de este operador de forma completa con el último pixel de la imagen.

39

### 4.1.3 Dilatación y erosión

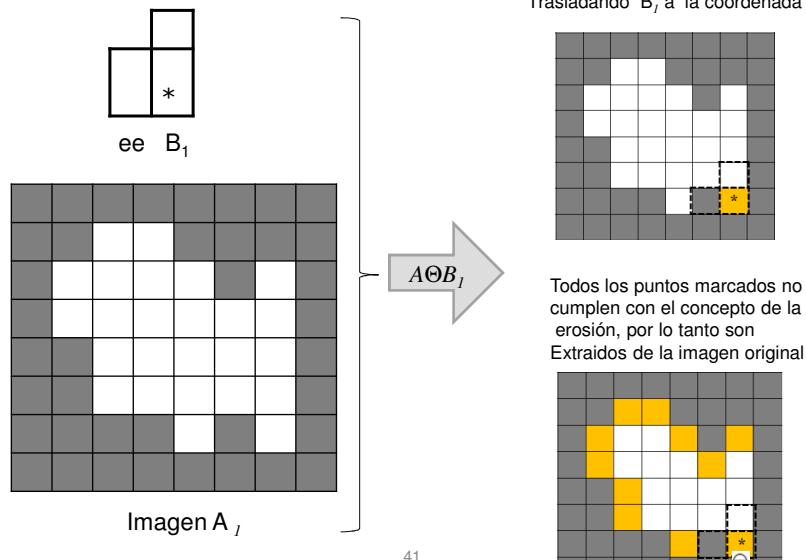
Realizando la Erosión del primer pixel  $A_1(1,2)$  con  $B_1$



40

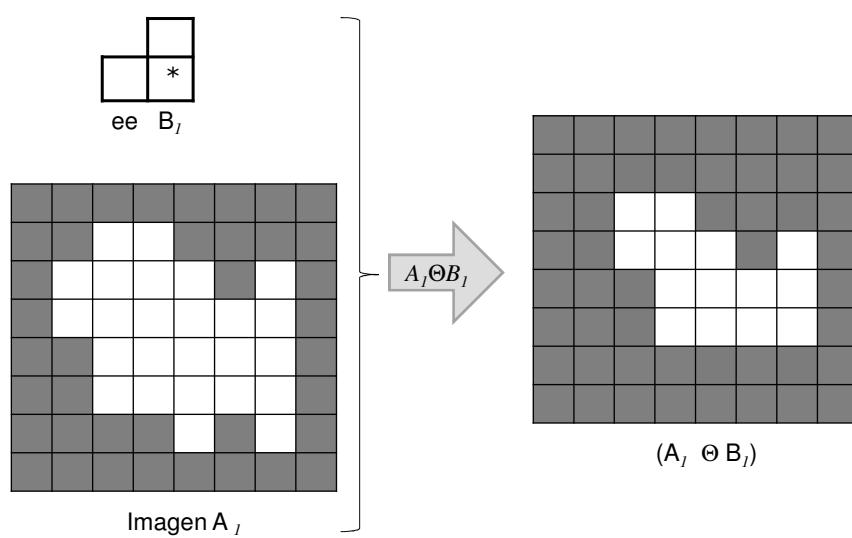
### 4.1.3 Dilatación y erosión

Realizando la Erosión del último pixel  $A_I(6,6)$  con  $B_I$



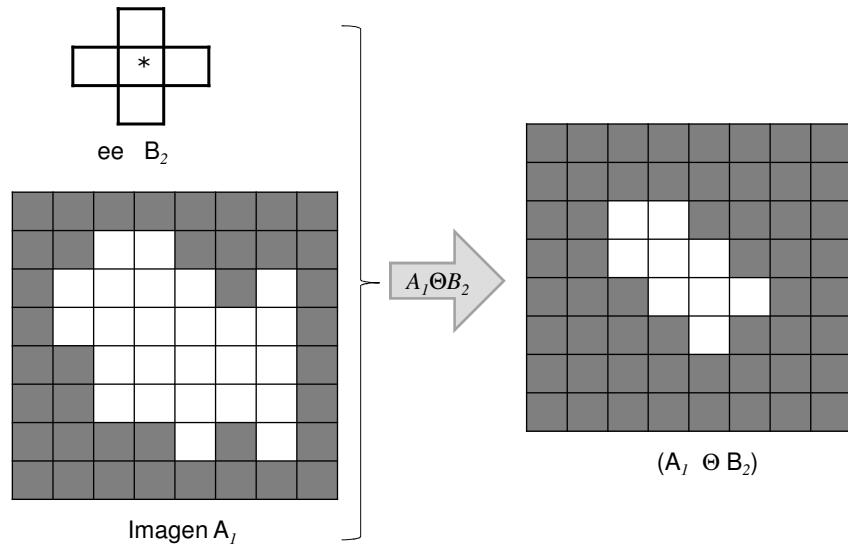
### 4.1.3 Dilatación y erosión

Resultado de la Erosión de  $A_I$  con  $B_I$



### 4.1.3 Dilatación y erosión

Resultado de la Erosión de  $A_1$  con  $B_2$



43

### 4.1.3 Dilatación y erosión

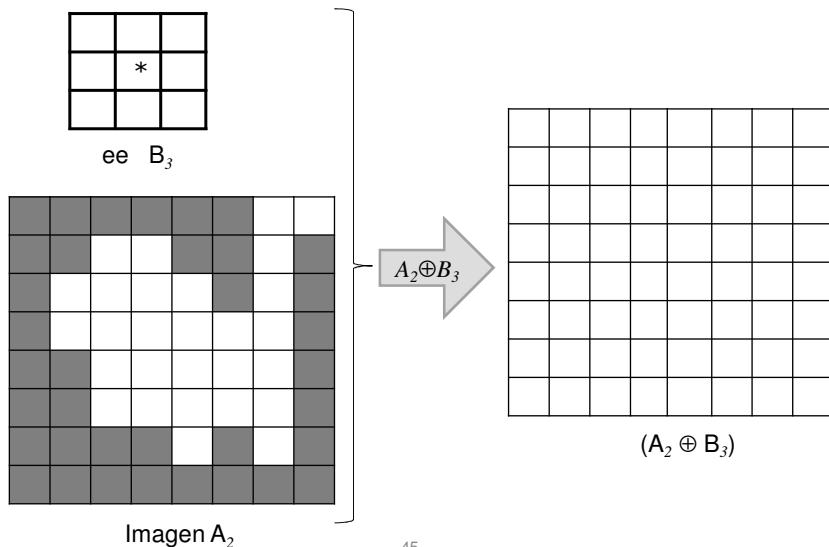
#### Tarea:

- a) Realizar la **dilatación** de  $A_2$  con el elemento de estructura  $B_3$
- b) Realizar la **erosión** de  $A_2$  con el elemento de estructura  $B_3$

44

### 4.1.3 Dilatación y erosión

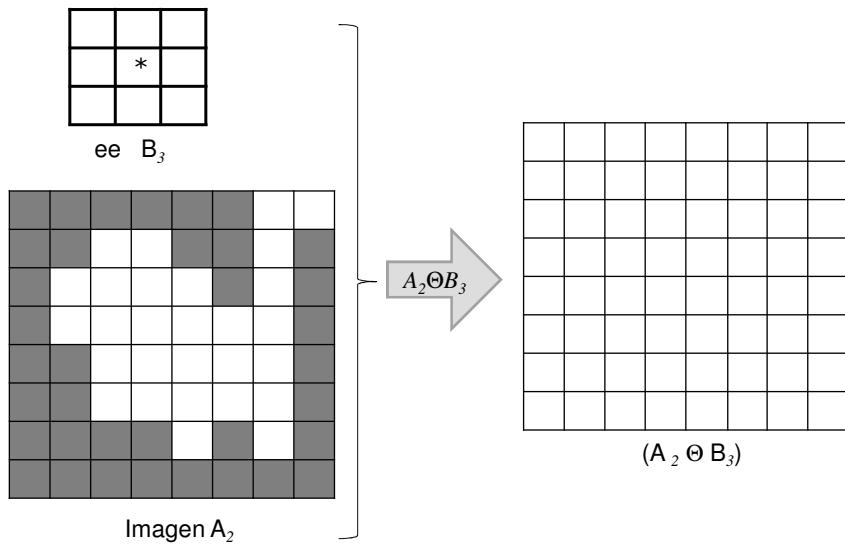
a) Realizar la Dilatación de  $A_2$  con el ee  $B_3$



45

### 4.1.3 Dilatación y erosión

b) Realizar la Erosión de  $A_2$  con el ee  $B_3$



46

#### 4.1.4 Apertura y cierre

- La operación de erosión junto a la dilatación, son la base de cualquier transformación morfológica.
- Cualquier operador, transformación o algoritmo incluirá una erosión, una dilatación, o ambas primitivas en su implementación.
- Sin necesidad de formar nuevos operadores es posible encontrar nuevas aplicaciones interesantes en las trasformaciones básicas.

#### 4.1.4 Apertura y cierre

- Como se ha mostrado, **la dilatación expande una imagen y la erosión la contrae**. Al combinar estos dos operadores se generan la apertura y la cerradura,
  - **la apertura** generalmente suaviza el contorno de una imagen, rompe istmos estrechos y elimina protuberancias delgadas.
  - **La clausura o cierre** también tiende a suavizar secciones de contornos pero, generalmente fusiona separaciones estrechas y entrantes delgados y profundos, elimina pequeños huecos y rellena agujeros del contorno.

#### 4.1.4 Apertura y cierre

## La Apertura

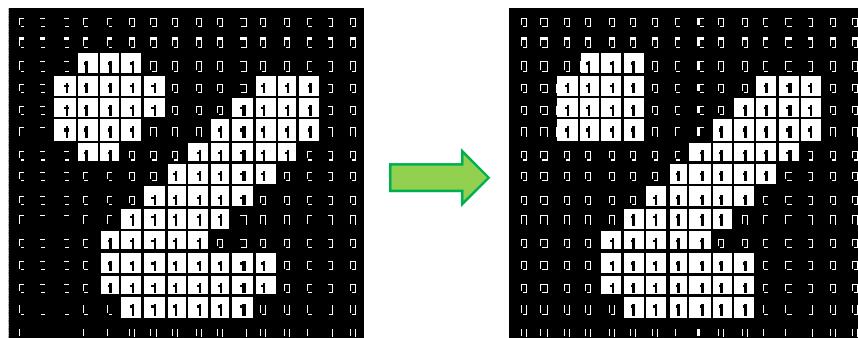
- La apertura de un conjunto  $A$  por un EE  $B$ , representada por  $A \ominus B$ , se define como:

$$A \ominus B : (A \ominus B) \oplus B$$

que nos dice que la apertura de  $A$  por  $B$  es simplemente la erosión de  $A$  por  $B$ , seguida por una dilatación del resultado por  $B$ .

#### 4.1.4 Apertura y cierre

Ejemplo del efecto de la Apertura:

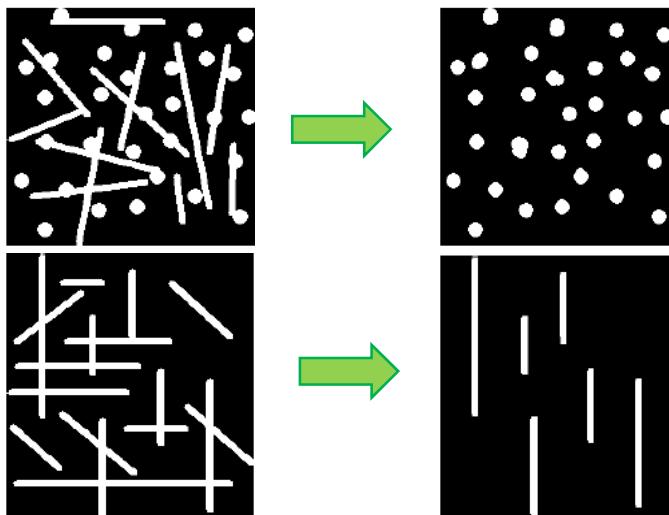


Como puede verse, se realiza primero una erosión y luego una dilatación, ambas con el mismo ee 3x3 cuadrado.

El efecto de la apertura es suavizar el contorno de los objetos, se tiende a eliminar los salientes que puedan haber en el contorno y se eliminan pequeños elementos.

#### 4.1.4 Apertura y cierre

Ej. de la Apertura:



Efecto de la apertura usando un ee de 3x3 cuadrado

51

#### 4.1.4 Apertura y cierre

### La clausura o Cierre

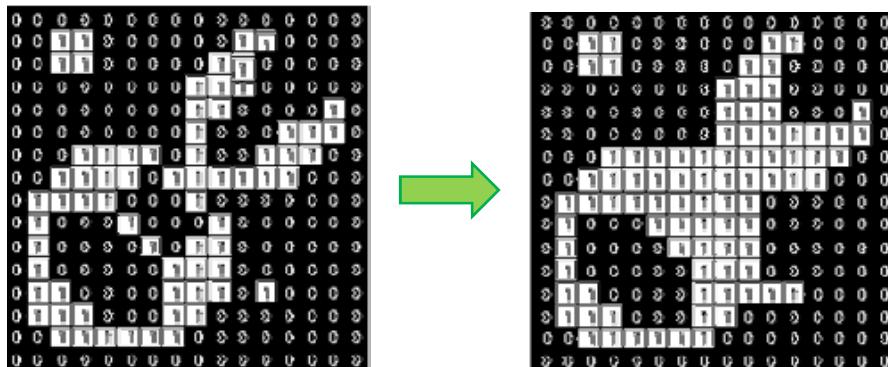
- El cierre del conjunto  $A$  por un EE  $B$ , representada por  $A \bullet B$ , se define como:

$$A \bullet B : ( A \oplus B ) \ominus B$$

que nos dice que la cierre de  $A$  por  $B$  es simplemente la dilatación de  $A$  por  $B$ , seguida por una erosión del resultado por  $B$ .

#### 4.1.4 Apertura y cierre

## Ejemplo del efecto del Cierre:

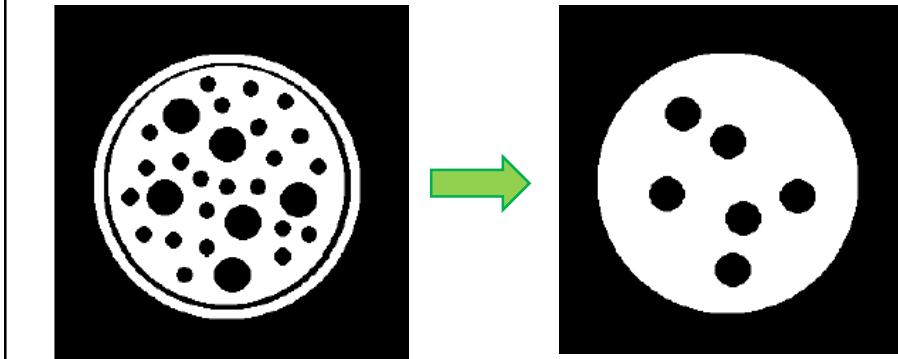


Como puede observarse en el ejemplo, con el cierre se tiende a llenar agujeros o se tiende a unir objetos cercanos

53

#### 4.1.4 Apertura y cierre

## Ej. del Cierre o clausura



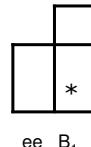
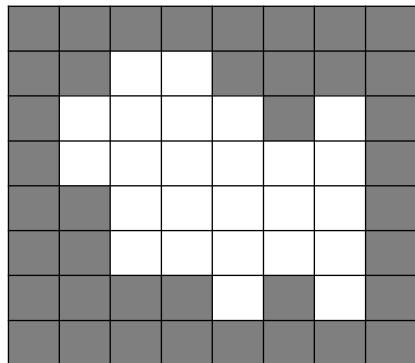
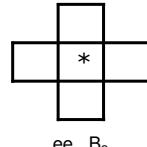
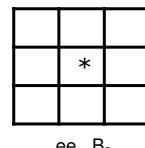
## Efecto de la cerradura usando un ee de 3x3 cuadrado

54

#### 4.1.4 Apertura y cierre

### Ejemplos:

Consideremos la imagen  $A_1$ ,  $A_3$  y los elementos de estructuras  $B_1$ ,  $B_2$  y  $B_3$ , cuyo origen esta marcado con un “\*”

ee  $B_1$ ee  $B_2$ ee  $B_3$ 

55

#### 4.1.4 Apertura y cierre

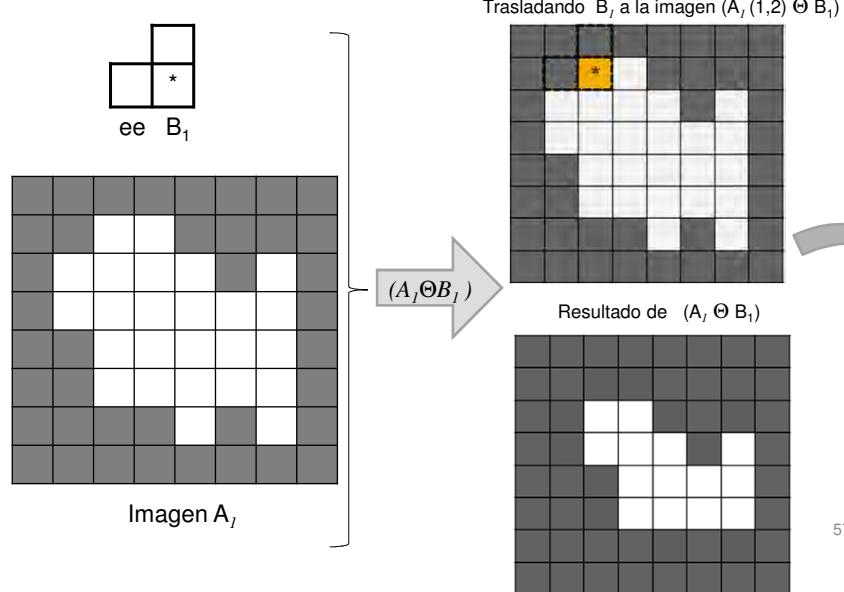
Realizando la apertura utilizando el elemento estructurante  $B_1$

Utilizando los elementos de estructura  $B_1$ , se muestra el proceso de la apertura con el primer pixel de la imagen  $A_1$  y repitiendo el proceso para cada pixel de toda la imagen, se muestra el efecto de este operador de forma completa con el último pixel de la imagen.

56

#### 4.1.4 Apertura y cierre

Primer paso, erosionar  $A_I$  con  $B_1$

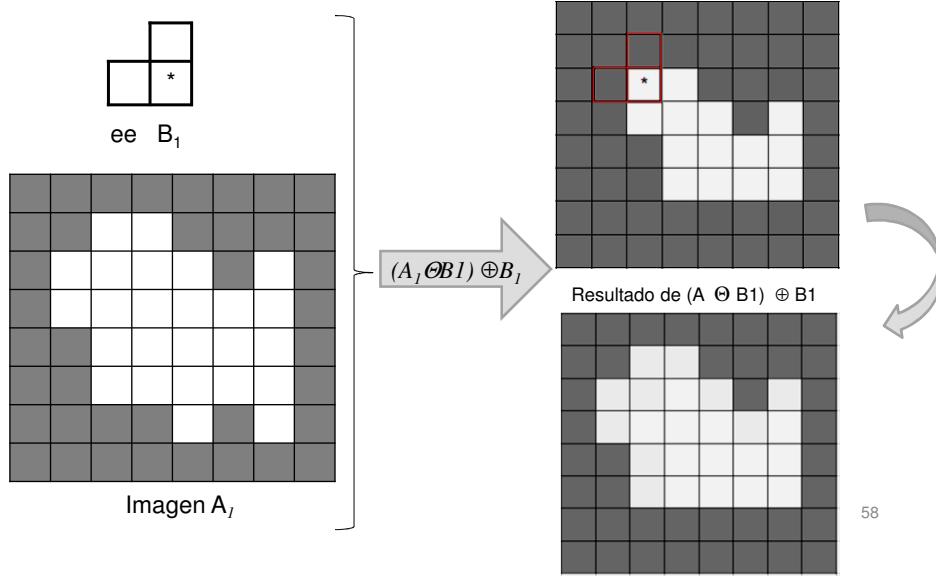


57

#### 4.1.4 Apertura y cierre

Segundo paso, DILATAR el resultado de  $(A_I \ominus B_1)$  con  $B_1$

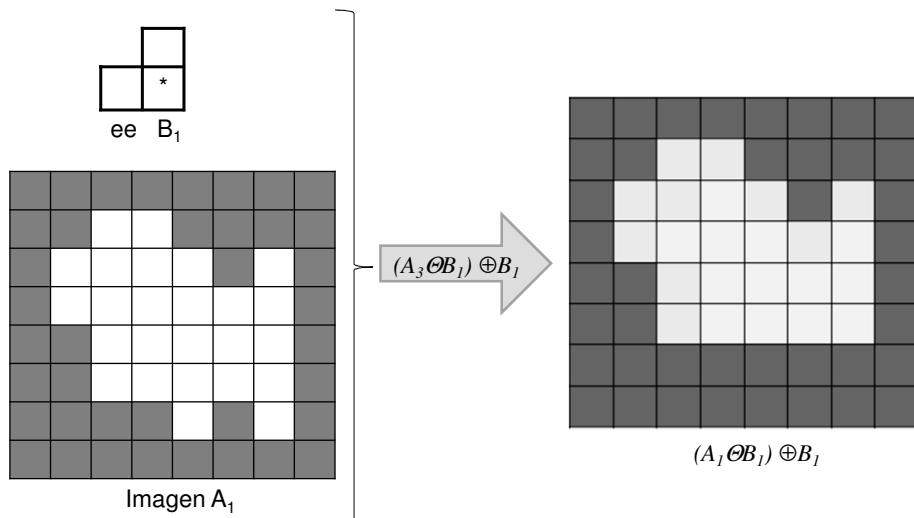
Trasladando  $B_1$  a la imagen  $(A_I \ominus B_1) \oplus B_1$



58

#### 4.1.4 Apertura y cierre

Resultado de la apertura de  $A_1$  con  $B_1$



59

#### 4.1.4 Apertura y cierre

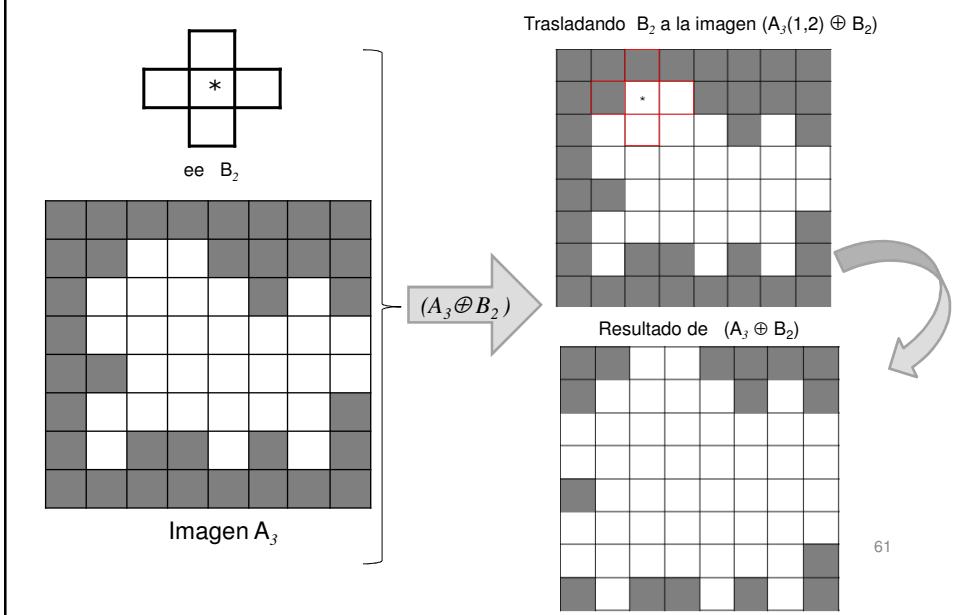
Realizando la cerradura de  $A_3$  utilizando el elemento estructurante  $B_2$

Utilizando el elemento de estructura  $B_2$ , se muestra el proceso de la cerradura con el primer pixel de la imagen  $A_3$  y repitiendo el proceso para cada pixel de toda la imagen, se muestra el efecto de este operador de forma completa con el último pixel de la imagen.

60

#### 4.1.4 Apertura y cierre

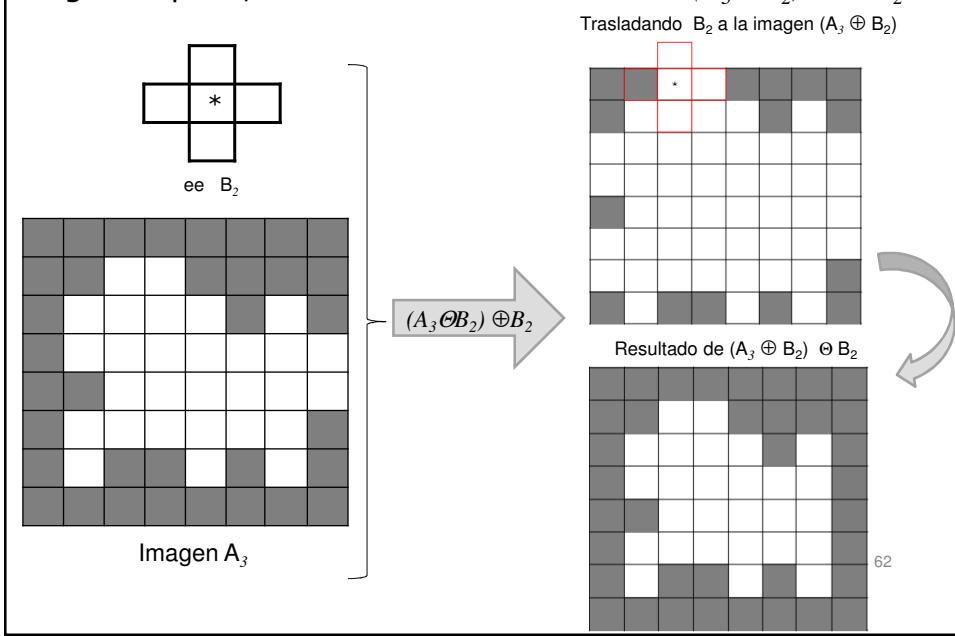
Primer paso, DILATAR  $A_3$  con  $B_2$



61

#### 4.1.4 Apertura y cierre

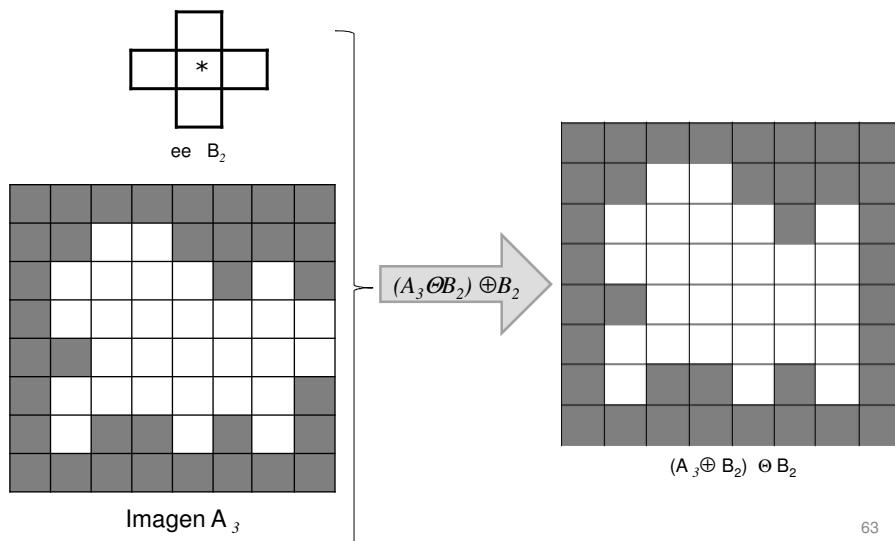
Segundo paso, EROSIONAR el resultado de  $(A_3 \oplus B_2)$  con  $B_2$



62

#### 4.1.4 Apertura y cierre

Resultado del cierre de  $A_3$  con  $B_2$



63

#### 4.1.4 Apertura y cierre

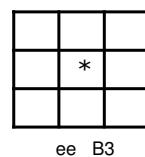
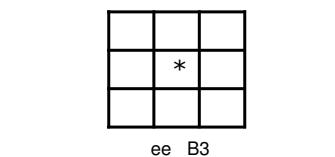
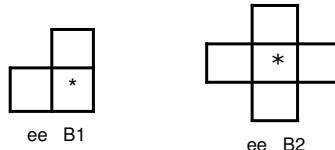
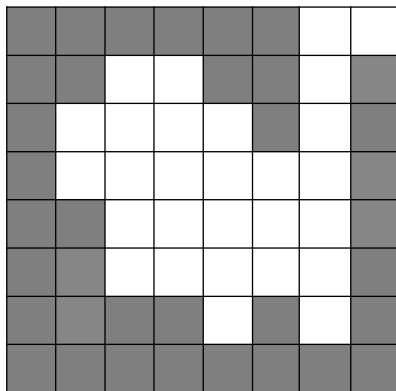
### Ejercicios:

- a) Realizar la **apertura** de  $A_2$  con el elemento de estructura  $B_3$
- b) Realizar la **clausura** de  $A_3$  con el elemento de estructura  $B_1$

64

#### 4.1.4 Apertura y cierre

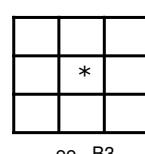
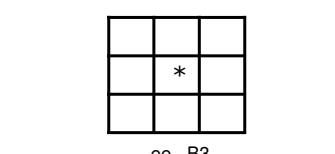
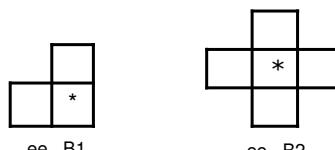
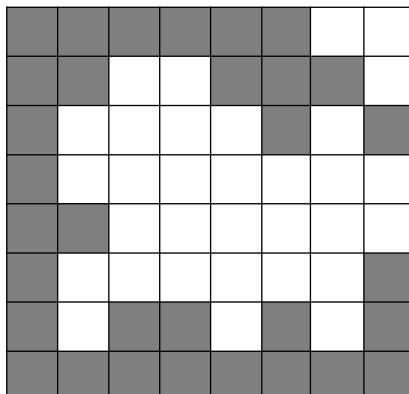
- a) Obtener la apertura morfológica considerando la imagen  $A_2$  y de la familia de elementos de estructura, aplicar el ee  $B_3$ , cuyo origen esta marcado con un “\*” .



65

#### 4.1.4 Apertura y cierre

- a) Obtener el cierre morfológico considerando la imagen  $A_3$  y de la familia de elementos de estructura, aplicar el ee  $B_1$ , cuyo origen esta marcado con un “\*” .



66

#### 4.1.5 Filtros morfológicos

### Filtros lineales VS Filtros Morfológicos

- Los filtros lineales son los mejores para resolver los problemas debidos a los fenómenos lineales. Por ejemplo, un movimiento de la cámara durante la adquisición de la imagen o un enfoque incorrecto genera imágenes borrasas.
- Los filtros morfológicos son filtros no lineales adecuados para otras tareas de filtrado.
  - *Primero, un filtro morfológico puede ser usado para restaurar imágenes corrompidas por algún tipo de ruido.*
  - *Segundo, un filtro morfológico puede ser usado para eliminar selectivamente estructuras u objetos irrelevantes de la imagen, mientras preserva otros.*
  - *La propiedad principal del filtro morfológico es la idempotencia.*

#### 4.1.5 Filtros morfológicos

### Filtros Morfológicos Básicos

- Seleccionando cuidadosamente el tamaño y las formas de los elementos de estructura, es posible crear filtros morfológicos para eliminar características de la imagen de acuerdo a su tamaño, orientación y forma
- En la práctica existen tres métodos para la creación de nuevos filtros a partir de transformaciones existentes: *combinaciones paralelas, secuenciales e iterativas*
- Se hablan solo de las secuenciales ya que son los básicos

#### 4.1.5 Filtros morfológicos

Filtros Morfológicos Básicos ...

- Filtros:
  - de Apertura: son filtros morfológicos antiextensivos
  - de clausura o cierre: son filtros morfológicos extensivos
- Ambos son filtros morfológicos básicos.

#### 4.1.5 Filtros morfológicos

### Combinaciones secuenciales

- La composición de dos filtros ordenados es siempre un filtro. El par de filtros ordenados que se considera es frecuentemente una apertura  $\gamma$  y su dual la clausura  $\phi$ . Una apertura filtra estructuras brillantes de la imagen, mientras una clausura tiene el mismo efecto, pero en las estructuras oscuras de las imágenes
- Las composiciones o productos de filtros ordenados que conducen a nuevos filtros son:

$$\gamma\phi, \phi\gamma, \gamma\phi\gamma, \gamma\phi\gamma\phi$$

Esta regla es llamada el teorema estructural. Además, de las siguientes relaciones de orden son siempre satisfechas

$$\gamma \leq \gamma\phi\gamma \leq \frac{\gamma\phi}{\phi\gamma} \leq \phi\gamma\phi \leq \phi$$

**4.1.5 Filtros morfológicos****Algunas aplicaciones de la  
morfología binaria****Ejemplo de operadores  
combinados**

71

**4.1.5 Filtros morfológicos****Extracción de la frontera**

- La frontera de un conjunto A se puede obtener primero erosionando A por B y realizando posteriormente la diferencia entre A y su erosión. Es decir,

$$F(A) = A - (A \ominus B)$$

72

#### 4.1.5 Filtros morfológicos

##### Ejemplo de extracción de la frontera

Se ilustra el mecanismo de la extracción de fronteras, aunque el ee usado es muy simple, existen elecciones más complejas, por ejemplo de tamaño 5x5 que ampliaría el grosor de la frontera a dos o tres píxeles

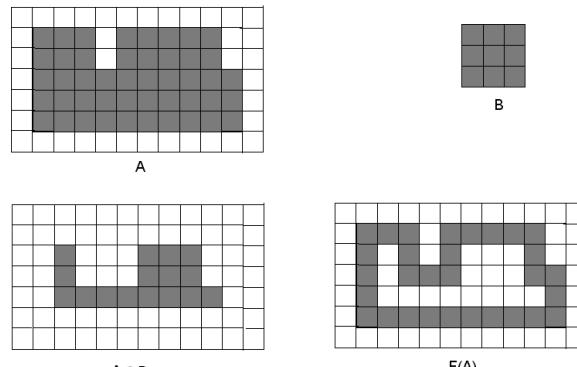
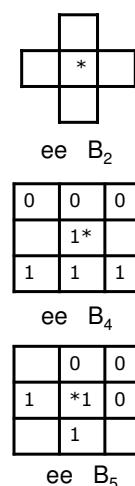
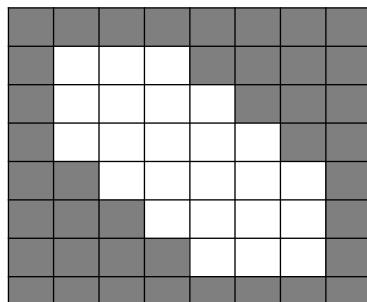


Figura: Extracción del borde o frontera

73

#### 4.1.5 Filtros morfológicos

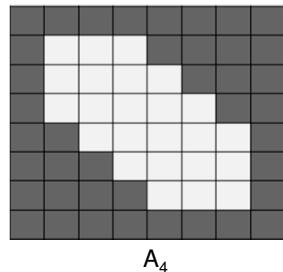
**Ejemplo:** Consideremos la imagen  $A_4$  y los elementos de estructuras  $B_2$ ,  $B_4$  y  $B_5$



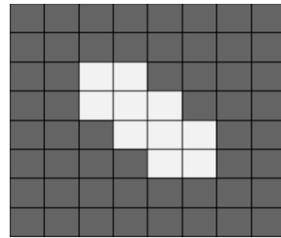
74

#### 4.1.5 Filtros morfológicos

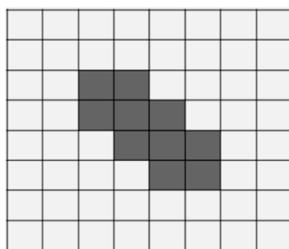
Ejercicio...



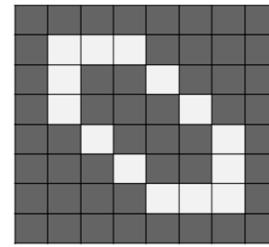
$A_4$



$(A_4 \Theta B_1)$



NOT  $(A_4 \Theta B_1)$



NOT  $(A_4 \Theta B_1)$  AND  $(A_4)$

75

#### 4.1.5 Filtros morfológicos

## Thinning o adelgazamiento

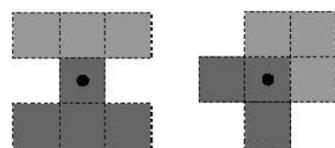
- Se utiliza para reducir los objetos en una imagen binaria.
- Difiere de la erosión ya que los objetos no son totalmente removidos.
- Se realizan varios adelgazamientos hasta que se estabiliza el algoritmo y se obtiene el esqueleto.
- El adelgazamiento esta definido como:

$$THIN(X, B) = X \setminus HMT_B(X)$$

#### 4.1.5 Filtros morfológicos

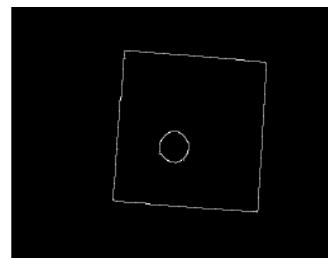
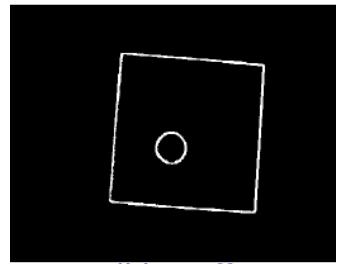
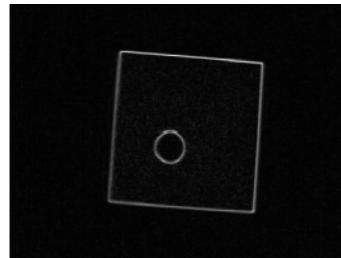
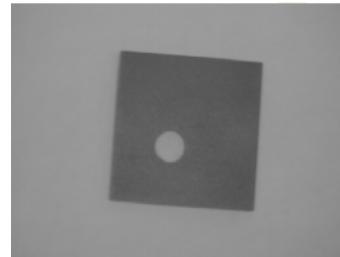
Thinning ...

- Ejemplo estructura de los elementos utilizados en adelgazamiento (girado 90 grados en 3 veces la creación de 8 elementos de la estructura).



#### 4.1.5 Filtros morfológicos

Ejemplo de Thinning ...



Doblado = 60

**4.1.5 Filtros morfológicos**

## Esqueleto de una región

- Una importante aproximación para representar la forma estructural de una región plana es reducirla a un grafo. En esta reducción se puede conseguir el esqueleto de la región mediante un algoritmo de reducción (denominado también esqueletización).
- Ej. de los procedimientos de reducción en problemas del procesado de imágenes: la inspección automática de tarjetas de circuitos impresos, contar las fibras de amianto de los filtros de aire, etc.

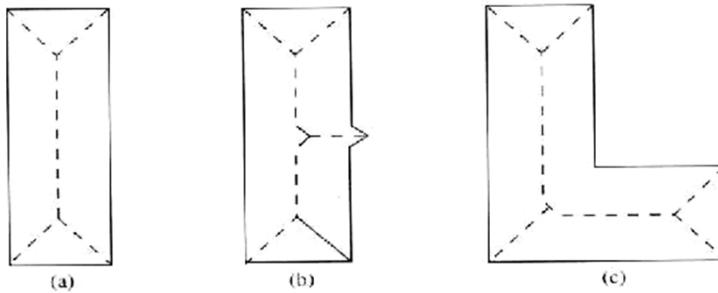
**4.1.5 Filtros morfológicos**

### a) El esqueleto de una región por Medial Axis Transformation (MAT)

- El esqueleto de una región se puede definir mediante la transformación del eje medio propuesta por Blum (1967).
- La MAT de una región  $R$  con borde  $B$  es la siguiente: Para cada punto  $p$  de  $R$ , se encuentra su vecino más próximo en  $B$ . Si  $p$  tiene más de un vecino de éstos, se dice que pertenece al *eje medio* (esqueleto) de  $R$ . El concepto de “más próximo” depende de la definición de una distancia, y por lo tanto los resultados de una operación MAT están influidos por la elección de una medida de distancia.

#### 4.1.5 Filtros morfológicos

Ejemplo: eje medio de tres regiones sencillas



Las Figuras muestra algunos ejemplos, en los que se utilizan la distancia euclídea.

#### 4.1.5 Filtros morfológicos

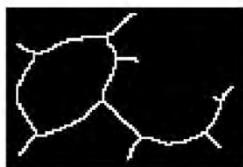
##### b) Esqueleto morfológico

- El esqueleto de un objeto se define a menudo como el eje medio de un objeto.
- Los píxeles se definen como píxeles del esqueleto si tienen más un vecino cercano.
- Algunos algoritmos se basan en esta definición y se calculan a través de la transformada de la distancia.
- Otros algoritmos producen esqueletos más pequeños que el eje medio (como un mínimo esqueleto)

#### 4.1.5 Filtros morfológicos

Esqueleto morfológico ...

- Representación compacta o mínima de los objetos en una imagen, mientras se mantenga la forma de la imagen.
- Los esqueletos de los objetos en una imagen se puede encontrar por los sucesivos adelgazamientos hasta la estabilidad del algoritmo.
- El adelgazamiento no se puede aplicar paralelamente ya que esto puede deformidad.



#### 4.1.5 Filtros morfológicos

Ejemplo de obtención del Esqueleto morfológico ... (1)

- Problema: Encontrar una representación mínima.
  - Solución 1: Poda de las ramas más pequeñas.
    - Se puede usar el HMT para localizar y remover los puntos finales.



#### 4.1.5 Filtros morfológicos

Ej. Obtención del esqueleto morfológico ... (2)

- La Poda esta en dependencia de los parámetro opcionales (máximo de largo de la rama para ser eliminados).
- Solución 2: El algoritmo Skeleton produce un esqueleto mínimo.
- Uno de esos algoritmos se describe en [Thinning Methodologies-A Comprehensive Survey," IEEE TrPAMI, vol. 14, no. 9, pp. 869-885, 1992.]
- El HMT no es usado en este algoritmo.



#### 4.1.6 Transformada Hit and Miss

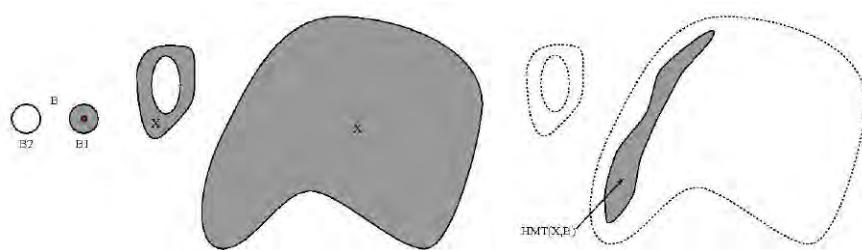
## La transformada Hit and/or Miss

- La transformación de Hit or Miss (Ganar y/o Perder) es una operación morfológica binaria que puede ser usada para observar patrones particulares de frente y fondo de píxeles en una imagen. Al igual que con otros operadores binarios morfológicos que toma como entrada un binario de imagen y un elemento de estructura, y produce otra imagen binaria como salida.

#### 4.1.6 Transformada Hit and Miss

##### Hit and/or Miss ...

- Operación binaria también usado en niveles de gris
- Su característica principal es extraer píxeles con una configuración de vecinos específica de una imagen, es decir, permite localizar determinados patrones de fondo y objeto, por lo que usa dos EE  $B_1$  y  $B_2$ , que encuentran esa configuración en el en frente (foreground) y el fondo (background), respectivamente.
  - El ee. puede contener uso y ceros



#### 4.1.6 Transformada Hit and Miss

##### Hit and/or Miss...

$$HMT_B(X) = \{x | (B_1)_x \subseteq X, (B_2)_x \subseteq X^c\}$$

- Puede ser escrito en términos de intersección de dos erosiones.

$$HMT_B(X) = \varepsilon_{B_1}(X) \cap \varepsilon_{B_2}(X^c)$$

#### 4.1.6 Transformada Hit and Miss

- Ejemplo1: *Localización de puntos finales con la transformada Hit and/or Miss....*

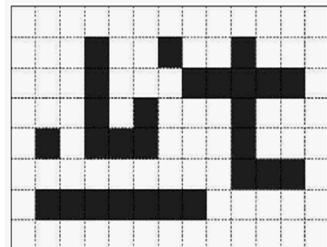
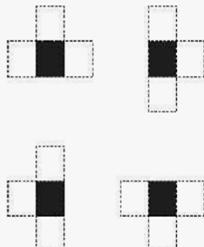
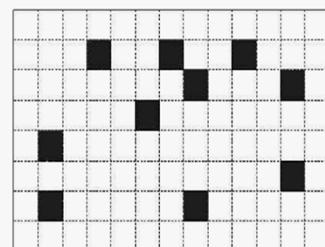


Imagen I



EE para 4 punto finales.



Resultado de HMT

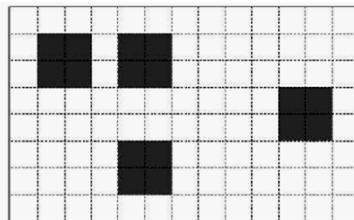
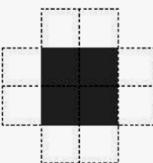
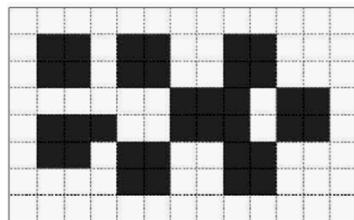
#### 4.1.6 Transformada Hit and Miss

- Ejemplo2: *Localización de puntos finales con la transformada Hit and/or Miss....*

• **Objetivo:** mantener todos los puntos que se ajustan al EE.

• **Definición:**

$$\tilde{\gamma}_B(X) = \delta_{\check{B}_1} HMT_B(X) = \delta_{\check{B}_1} \varepsilon_{B_1}(X) \cap \varepsilon_{B_2}(X^c)$$



#### 4.1.6 Transformada Hit and Miss

- **Ejemplo3:** Localización de esquinas con la transformada Hit and/or Miss....

**Proceso:**

- Al recorrer la imagen con el ee se marcan aquellos puntos que coinciden exactamente con el patrón dado por ee
- Para poder localizar todas las esquinas en la imagen, son necesarios 4 ee, uno por cada esquina:
  - esquina superior derecha, esquina superior izquierda, esquina inferior derecha, esquina inferior izquierda
- Se opera con cada uno de los ee diseñados, obteniendo 4 imágenes resultantes y posteriormente se aplica el operador OR entre ellas, resultando la imagen final con las esquinas localizadas

91

#### 4.1.6 Transformada Hit and Miss

- Ejemplo3:** Localización de esquinas con la transformada Hit and/or Miss....

<table border="1"> <tr><td></td><td>1</td><td></td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td></td></tr> </table>		1		0	1	1	0	0		<table border="1"> <tr><td></td><td>1</td><td></td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td></td></tr> </table>		1		1	1	0	0	0		<table border="1"> <tr><td>0</td><td>0</td><td></td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td></td><td></td></tr> </table>	0	0		1	1	0	1			<table border="1"> <tr><td>0</td><td>0</td><td></td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td></td><td></td></tr> </table>	0	0		0	1	1	1		
	1																																						
0	1	1																																					
0	0																																						
	1																																						
1	1	0																																					
0	0																																						
0	0																																						
1	1	0																																					
1																																							
0	0																																						
0	1	1																																					
1																																							

Familia de elementos estructurantes  $B_k$

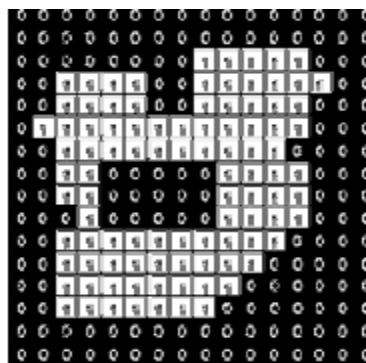
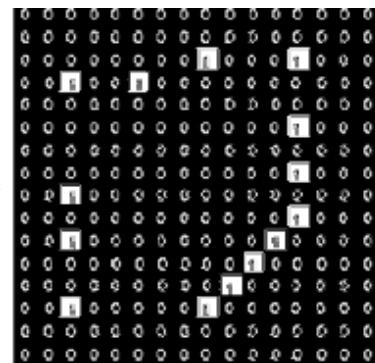


Imagen original



Esquinas localizadas

92

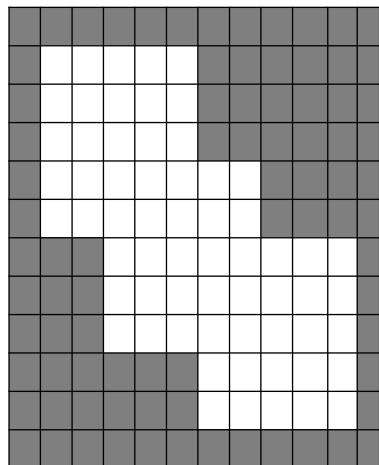
**4.1.6 Transformada Hit and Miss****Ejercicio:**

Obtener la **Trasformada Hit & Miss** de la imagen  $A_4$  con la familia del elemento de estructura definido como  $B_k$

93

**4.1.6 Transformada Hit and Miss**

Consideremos la imagen  $A_4$  y los elementos de estructuras  $B_k$ , con  $k=1,2,3,4$

Imagen A<sub>4</sub>

	1	
0	1*	1
0	0	

ee B<sub>1</sub>

	1	
1	1*	0
0	0	

ee B<sub>2</sub>

	0	0
1	1*	0
1		

ee B<sub>3</sub>

0	0	
0	1*	1
1		

ee B<sub>4</sub>

94

#### 4.1.6 Transformada Hit and Miss

Resultado:

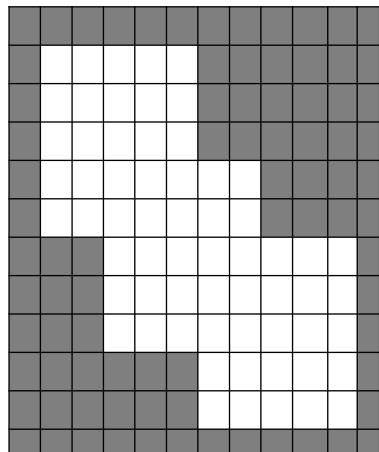


Imagen A<sub>1</sub>

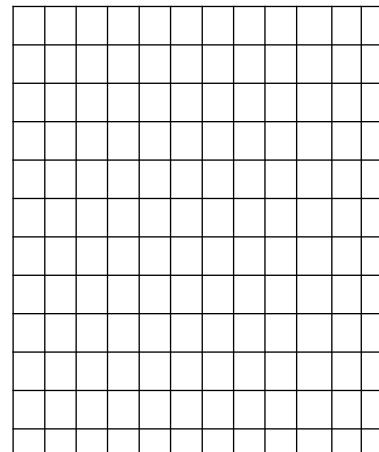


Imagen A<sub>1'</sub>

95

#### 4.1.6 Transformada Hit and Miss

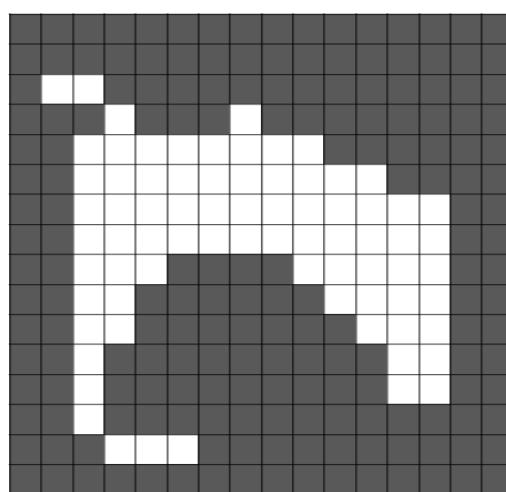
Ejemplo de obtención del esqueleto de una región empleando **adelgazamiento morfológico** y la **Transformada Hit&Miss**, con los ee B1 y B2 ... (1)

0	0	0
1		
1	1	1

e.e. B1

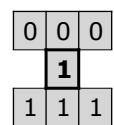
	0	0
1	1	0
	1	

e.e. B2



#### 4.1.6 Transformada Hit and Miss

1. - Se aplica la Transformada Hit & Miss con el ee B1

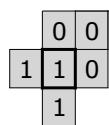


0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

97

#### 4.1.6 Transformada Hit and Miss

2. - Se aplica la Transformada Hit & Miss con el ee B2

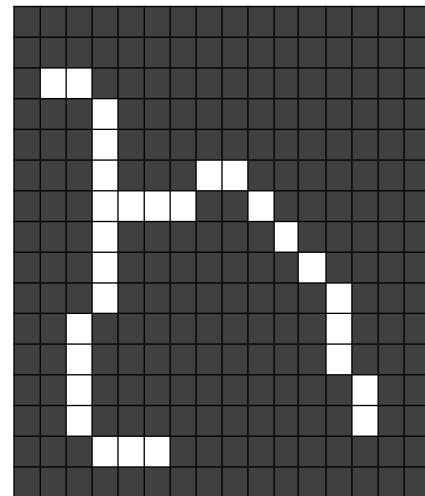
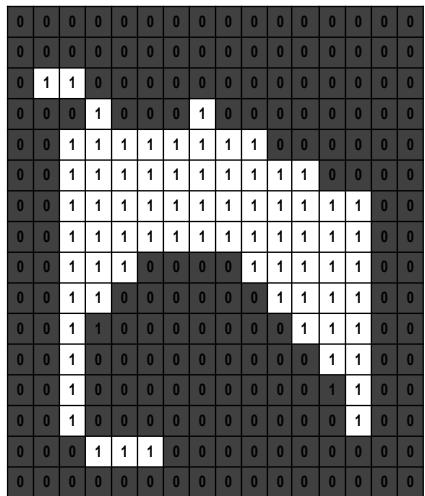


0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

98

## 4.1.6 Transformada Hit and Miss

3. - Se aplica la intersección de todas las imágenes resultantes en los pasos 1 y 2



99

## 4.1.6 Transformada Hit and Miss

# Ejemplo de adelgazamiento morfológico utilizando la Transformada Hit&Miss

100

#### 4.1.6 Transformada Hit and Miss

Adelgazamiento de imágenes binarias:

Sea la imagen A2 y los ee's B<sub>k</sub>, con k=1,2,3,4, 6, 7, 8

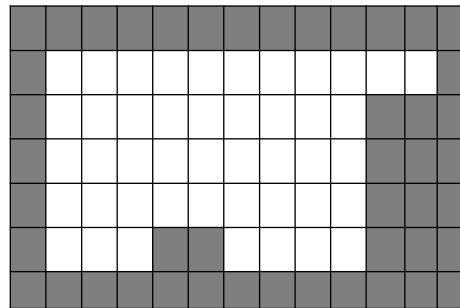


Imagen A2

101

0	0	0
x	1*	x
1	1	1

ee B1

x	0	0
1	1*	0
1	1	X

ee B2

1	X	0
1	1*	0
1	X	0

ee B3

1	1	X
1	1*	0
X	0	0

ee B4

1	1	1
X	1*	X
0	0	0

ee B5

X	1	1
0	1*	1
0	0	X

ee B6

0	X	1
0	1*	1
0	X	1

ee B7

0	0	X
0	1*	1
X	1	1

ee B8

#### 4.1.6 Transformada Hit and Miss

Erosión de A con el ee B1

0	0	0
x	1*	x
1	1	1

ee B1

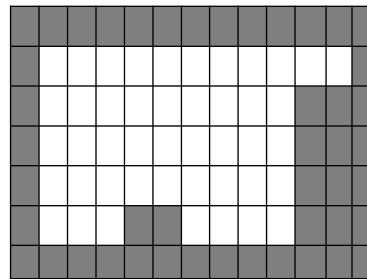
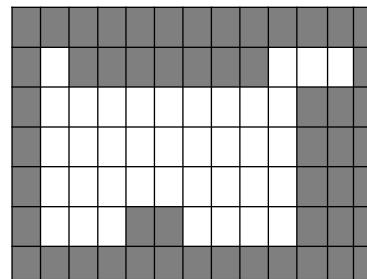


Imagen A2



Resultado de (A2 ⊖ B1)

Al resultado de la operación se erosiona con el ee siguiente ...

102

#### 4.1.6 Transformada Hit and Miss

##### Erosión de A con el ee B2

x	0	0
1	1*	0
1	1	X

ee B2

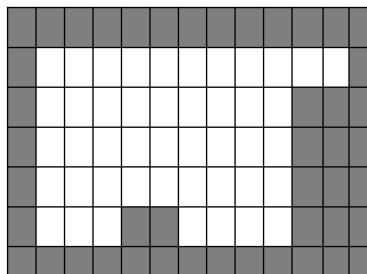
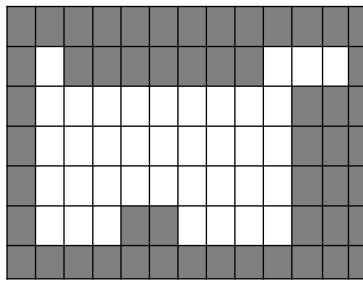


Imagen A2

Resultado de  $(A2 \ominus B1) \oplus B2$ , sin cambios

Al resultado de la operación se erosiona con el ee siguiente ...

103

#### 4.1.6 Transformada Hit and Miss

##### Erosión de A con el ee B3

1	X	0
1	1*	0
1	X	0

ee B3

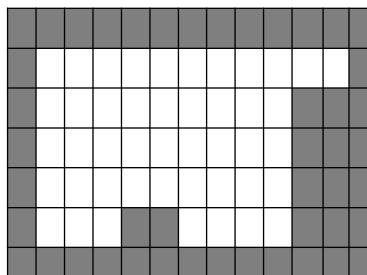
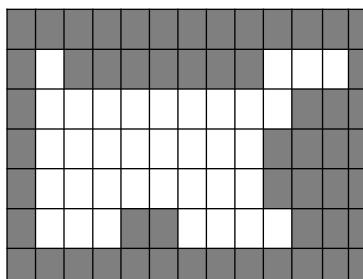


Imagen A2

Resultado de  $((A2 \ominus B1) \oplus B3)$ 

Al resultado de la operación se erosiona con el ee siguiente ...

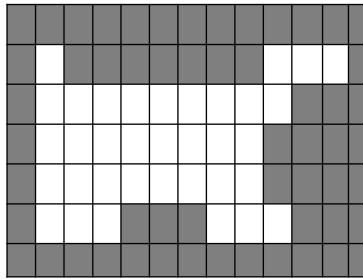
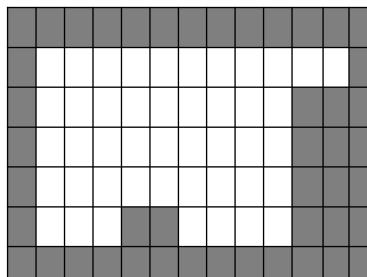
104

#### 4.1.6 Transformada Hit and Miss

##### Erosión de A con el ee B4

1	1	X
1	1*	0
X	0	0

ee B4



Resultado de  $((A2 \ominus B1) \ominus B3) \ominus B4$

Al resultado de la operación se erosiona con el ee siguiente ...

Imagen A2

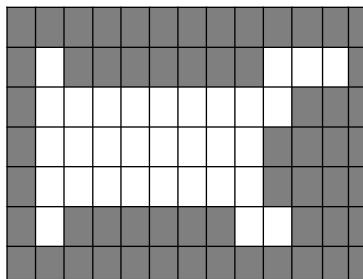
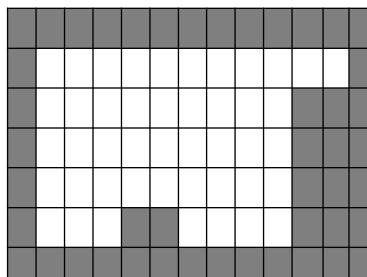
105

#### 4.1.6 Transformada Hit and Miss

##### Erosión de A con el ee B5

1	1	1
X	1*	X
0	0	0

ee B5



Resultado de  $((A2 \ominus B1) \ominus B3) \ominus B4 \ominus B5$

Al resultado de la operación se erosiona con el ee siguiente ...

Imagen A2

106

#### 4.1.6 Transformada Hit and Miss

##### Erosión de A con el ee B6

X	1	1
0	1*	1
0	0	X

ee B6

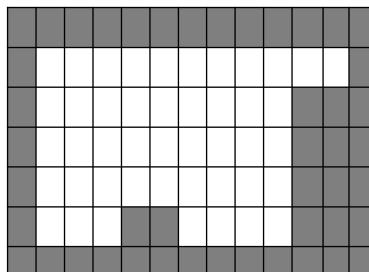
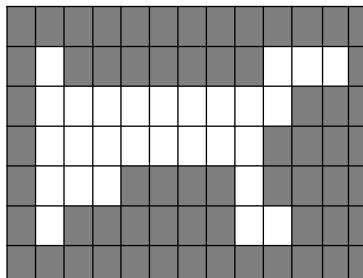


Imagen A2

Resultado de  $((A_2 \ominus B_1) \oplus B_3) \ominus B_4) \oplus B_5) \ominus B_6$ 

Al resultado de la operación se erosiona con el ee siguiente ... iterar hasta que no haya forma de erosionar elementos de la imagen... una vez que se ha detenido, realizar un a. unión de todas las imágenes resultantes...

107

#### 4.1.6 Transformada Hit and Miss

Resultado del adelgazamiento morfológico de la imagen  $A_2$  con la familia de  $B_k$  con  $k=1,2,\dots,8$

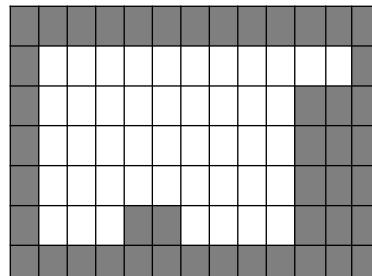


Imagen A2

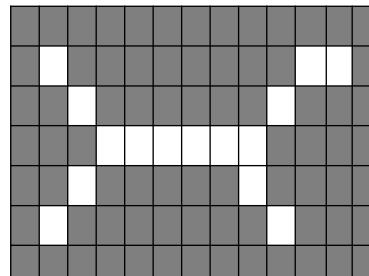


Imagen adelgazada

108

#### 4.1.6 Transformada Hit and Miss

Sea la imagen  $A_2$  y los ee's  $B_k$ , con  $k=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

#### Ejercicio: Adelgazamiento morfológico

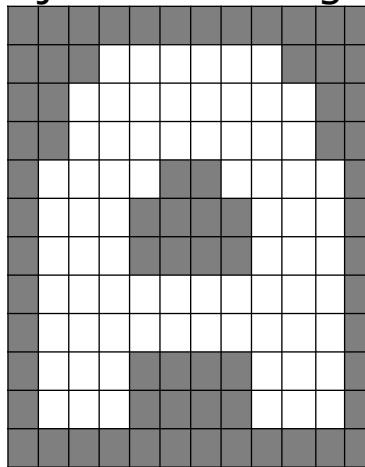


Imagen A1

109

0	0	0
X	1*	X
1	1	1

ee B1      ee B2

1	X	0
1	1*	0
1	X	0

ee B3      ee B4

1	1	1
X	1*	X
0	0	0

ee B5      ee B6

0	X	1
0	1*	1
0	X	1

ee B7      ee B8

0	0	X
0	1*	1
X	1	1

#### 4.1.7 Granulometría

### Concepto general de la Granulometría

- Se denomina **clasificación granulométrica** o **granulometría**, a la medición y gradación que se lleva a cabo de los granos de una formación sedimentaria, de los materiales sedimentarios, así como de los suelos, con fines de análisis, tanto de su origen como de sus propiedades mecánicas, y el cálculo de la abundancia de los correspondientes a cada uno de los tamaños previstos por una **escala granulométrica**.

**4.1.7 Granulometría**

## Granulometría con MM

- La **Granulometría** es una herramienta morfológica para la descripción de imágenes.
- Auxilia en la determinación de la distribución del tamaño de las partículas en una imagen
  - Cuenta de gránulos
- El efecto de aislamiento de partículas (objetos) en una imagen es lo que se conoce como granulación

**4.1.7 Granulometría**

## Ejemplo de Granulometría con MM ...(0)

- Supongamos que tenemos que segmentar una imagen que consiste de tres objetos claros o luminosos de tres tamaños distintos. Los objetos no solo están solapados si no que están muy desordenados, lo que dificulta detectar partículas individuales (fig. a) (González& Woods)

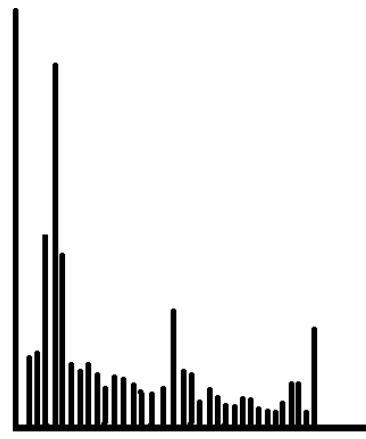
**4.1.7 Granulometría**

Ej. de Granulometría ... (1)



(a)

imagen original



(b)

histograma de la distribución del tamaño de partículas

**4.1.7 Granulometría**

Ej. de Granulometría ... (2)

- Como los objetos (partículas) son brillantes respecto al fondo, puede usarse la sig, aproximación morfológica para determinar el tamaño de la distribución:
  - Realizar sobre la imagen original operaciones de apertura con ee de tamaño creciente. La diferencia entre la imagen original y su apertura se calcula después de cada pasada con un ee distinto. Al final del proceso esas diferencias son normalizadas y se construye el histograma de la distribución del tamaño de partículas (fig b)

**4.1.7 Granulometría****Ej. de Granulometría ... (3)**

- La aproximación anterior de basa den la idea de que las operaciones de apertura de un tamaño particular tienen un mayor efecto en regiones de la imagen de entrada que contiene partículas del tamaño similar.

**4.1.7 Granulometría****Ej. de Granulometría ... (4)**

- Así, una medida del número relativo de cada partícula se obtiene calculando la diferencia entre las imágenes de entrada y salida. El histograma indica la presencia de tres tamaños de partículas dominantes en la imagen de entrada.
- Este tipo de procesamiento se utiliza para describir regiones con carácter de partículas semejantes dominantes.

▶ .

**Links para practicar:**

[http://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/HI  
PR2/morops.htm](http://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/HIPR2/morops.htm)



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES  
ACADEMIA DE INGENIERÍA DE SOFTWARE



# ANÁLISIS DE IMÁGENES

Profesora

M. en C. Ma. Elena Cruz Meza,

e-mail:

[analisisimagenesescom@gmail.com](mailto:analisisimagenesescom@gmail.com),

## Análisis de Imágenes

# Unidad IV

Análisis Morfológico

## Unidad IV

### 4.1 Morfología matemática de conjuntos

- 4.1.1 La imagen binaria como conjunto
- 4.1.2 Traslación y reflexión
- 4.1.3 Dilatación y erosión
- 4.1.4 Apertura y cierre
- 4.1.5 Filtros morfológicos
- 4.1.6 Transformada Hit & Miss
- 4.1.7 Granulometría

### 4.2 Morfología matemática de lattices

- 4.2.1 Los lattices
- 4.2.2 La imagen en niveles de gris como un lattice
- 4.2.3 Traslación y reflexión
- 4.2.4 Dilatación y erosión
- 4.2.5 Apertura y Cierre
- 4.2.6 Filtros morfológicos
- 4.2.7 Transformada Watershed

# Introducción...

## 4.2 Morfología matemática de laticces

### Introducción

- ✓ La información en laticces es pues una función de un retículo de puntos o valores enteros no negativos y recibe el nombre de *imagen en niveles de gris..*
- ✓ Las imágenes como es habitual en niveles de gris, vienen dadas como una función  $f(x,y)$  de dimensión  $MxN$ , la intensidad observada en el pixel  $x$ , normalmente  $0 \leq f(x) \leq 255$
- ✓ El  $b$  es como  $b(i,j)$ , que es realmente una subimagen de dimensión  $mxn$ , en ambos casos son imágenes discretas

5

## 4.2 Morfología matemática de laticces

### Introducción ...

- ✓ Si  $Z$  representa al conjunto de enteros reales, se supone que  $(x,y)$  son enteros de  $ZxZ$ , y que  $f$  y  $b$  son funciones que asignan un valor de escala de grises (un número real del conjunto de números reales,  $R$ ) a cada par de coordenadas  $(x,y)$ . Si los niveles de gris tambien son enteros,  $Z$  reemplaza a  $R$

6

#### 4.2.1 Los laticces

## Laticces

- ✓ A partir de esto podemos plantear diversas transformaciones morfológicas que podemos aplicar en el espacio en Laticces:
  - ✓ Extensiones de la dilatación, erosión, apertura y clausura en niveles de gris.
  - ✓ Extracción de componentes para la interpretación y descripción de objetos, etc.

7

#### 4.2.2 La imagen en niveles de gris como un laticce

## Imagen en niveles de grises

- En imágenes digitales en escala de grises se pueden representar como conjuntos cuyos componentes están en  $Z^3$ , donde dos componentes de cada elemento del conjunto hacen referencia a las coordenadas de un pixel, y el tercero corresponde a su valor de intensidad discreta
- Los conjuntos de espacio en dimensiones mayores pueden contener otros atributos de imagen, tales como color y componentes variables con el tiempo.

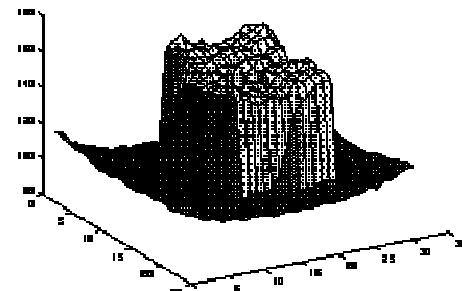
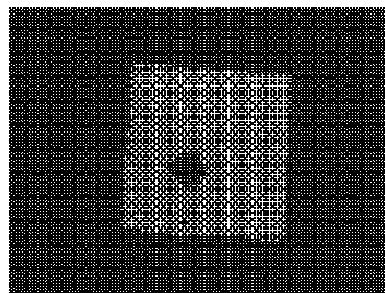
**4.2.2 La imagen en niveles de gris como un laticce**

Imagen en niveles de gris y susuperficie correspondiente en el espacio de imagen

9

**4.2.2 La imagen en niveles de gris como un laticce****Aplicando operaciones morfológicas a las imágenes en niveles de gris**

- ✓ El ee además de poder adquirir diferentes tamaños y formas bidimensionales como en el tridimensional, es decir, se caracteriza por un volumen que representa una figura
  - ✓ *El cono, los discos, las esferas, los cubos y los cilindros son algunos elementos estructurales tridimensionales utilizados comúnmente.*
- ✓ Cuando el ee es bidimensional se comparan los niveles de gris de la imagen original que quedan comprendidos en el entorno delimitado por la forma y tamaño del ee

10

#### 4.2.2 La imagen en niveles de gris como un laticce

##### Aplicando operaciones morfológicas a las imágenes en niveles de gris

- ✓ Cuando el ee es tridimensional se compara píxel a píxel la relación entre los niveles de gris correspondientes en la imagen original y los niveles de gris correspondientes al ee tridimensional. En este caso las operaciones se determinan basándose en ambos conjuntos de niveles de gris y no solamente en las intensidades de la imagen original como en el caso de la utilización de objetos estructurantes bidimensionales. El ee es desplazado por toda la imagen obteniendo de esta manera una nueva imagen en niveles de gris.

11

#### 4.2.3 Traslación y reflexión

### Traslación y Reflexión

- Sean A y B conjuntos con  $Z^2$ , con componentes  $a=(a_1, a_2)$  y  $b=(b_1, b_2)$ , respectivamente. La **traslación** de A por  $x=(x_1, x_2)$  representada por  $(A)_x$  se define como:

$$(A)_x = \{c \mid c = a + x, \text{ para } a \in A\}$$

- La **reflexión** representada por  $B^\wedge$  se define como:

$$(B^\wedge) = \{x \mid x = -b, \text{ para } b \in B\}$$

#### 4.2.4 Dilatación y erosión

## La Dilatación

- ✓ El proceso para la dilatación en niveles de gris se da aplicando el ee a cada pixel de la imagen para definir una vecindad eligiendo el **máximo** de la suma de los correspondientes píxeles

$$D_G(A, B) = \max_{[j,k] \in B} \{a[m-j, n-k] + b[j, k]\}$$

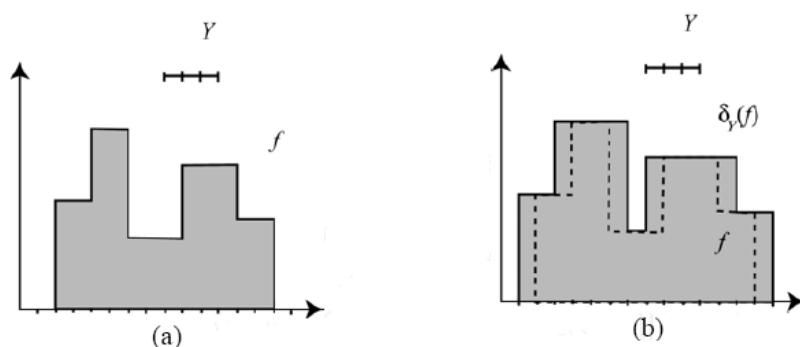
- ✓ Usualmente se simplifica como

$$D_G(A, B) = \max_{[j,k] \in B} \{a[m-j, n-k] + b[j, k]\} = \max(A)$$

13

#### 4.2.4 Dilatación y erosión

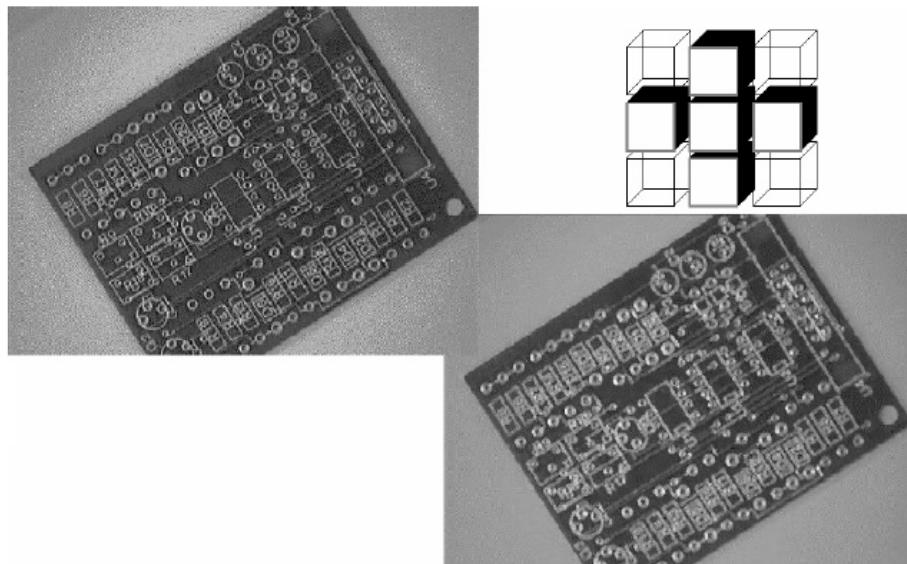
### Dilatación ...



(a) La Dilatación de una señal bidimensional definida por la función  $f$  con un ee  $Y$  de tamaño 3x3. (b) El resultado en cada punto de  $f$  es el máximo de todos los valores presentes bajo la definición del ee.

#### 4.2.4 Dilatación y erosión

Efecto de la Dilatación ...



#### 4.2.4 Dilatación y erosión

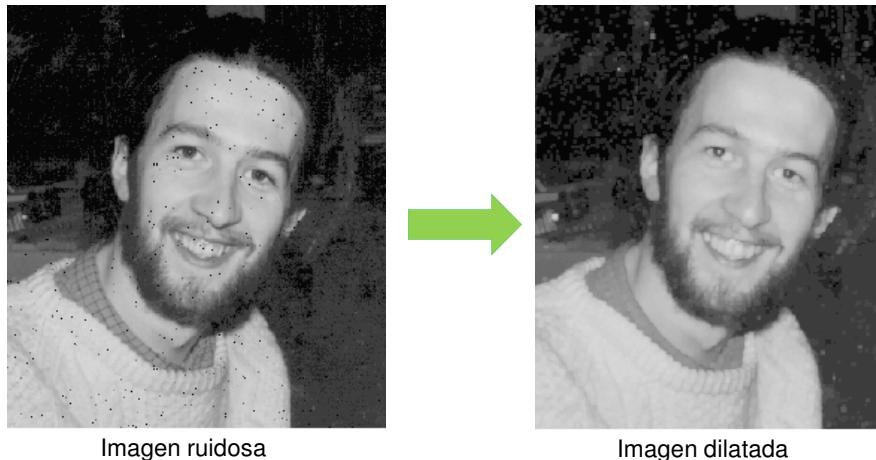
Efecto de la Dilatación:



El resultado de la dilatación en señal unidimensional de escala de grises (a) es generalmente, es una señal de mayor valor, es decir una imagen más clara (b) puesto que la dilatación maximiza el valor de la señal.

#### 4.2.4 Dilatación y erosión

Ej. Eliminando ruido pimienta mediante la Dilatación



#### 4.2.4 Dilatación y erosión

## La Erosión

- ✓ El proceso para la erosión en niveles de gris se da aplicando el ee a cada pixel de la imagen para definir una vecindad eligiendo el **mínimo** de la suma de los correspondientes pixeles

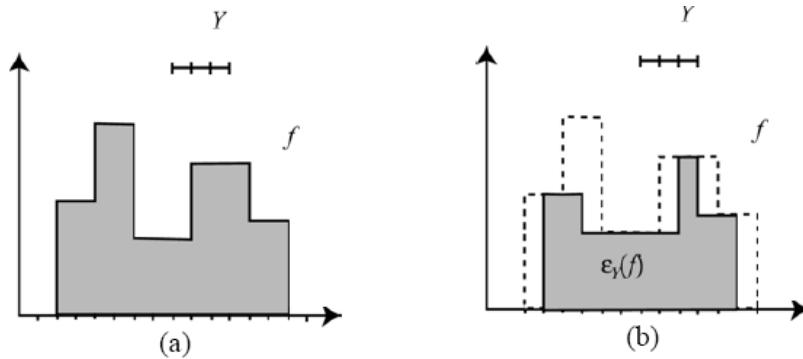
$$E_G(A \cdot B) = \min_{[j,k] \in B} \{a[m-j, n-k] + b[j,k]\}$$

- ✓ Usualmente se simplifica como

$$E_G(A \cdot B) = \min_{[j,k] \in B} \{a[m-j, n-k] + b[j,k]\} = \min (A)$$

#### 4.2.4 Dilatación y erosión

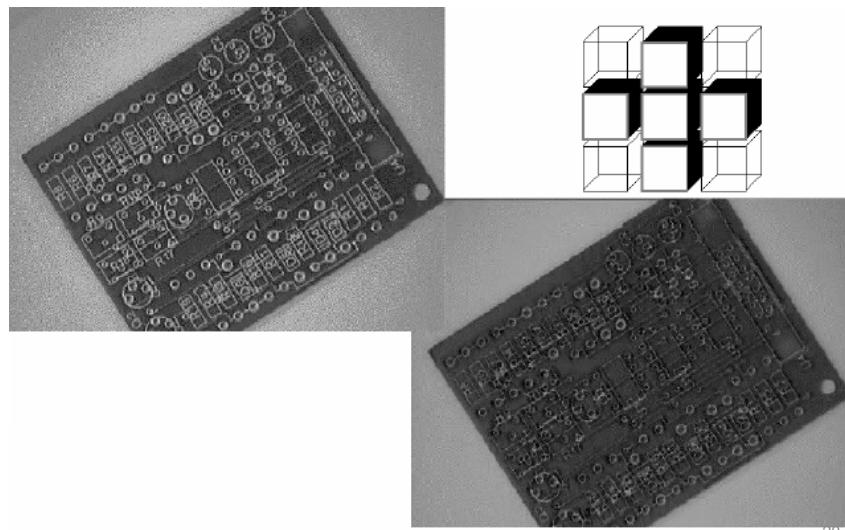
Erosión ...



(a) La erosión de una señal unidimensional de función  $f$  con un ee de tamaño  $3 \times 3$ . Se puede observar el efecto de la intersección de traslaciones definidas por el ee  $Y$ . (b) El resultado es el mínimo valor de todos los píxeles bajo la definición del ee.

#### 4.2.4 Dilatación y erosión

Efecto de la Erosión ...



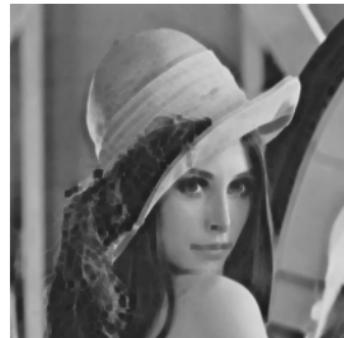
20

#### 4.2.4 Dilatación y erosión

Efecto de la Erosión...



(a)

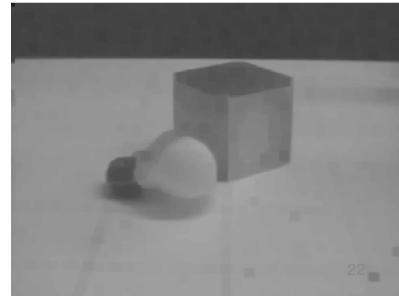
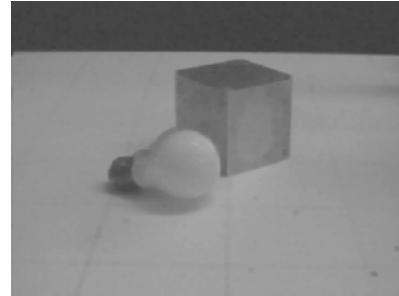
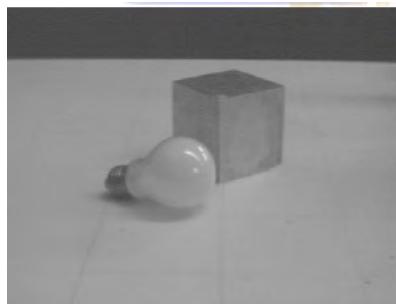


(b)

El resultado de la erosión en señales bidimensionales de escala de grises (imágenes) es una señal de menor valor, es decir una imagen más oscura, puesto que la erosión pretende minimizar el valor de la señal que, en el caso de los grises tiene una definición [0,255].

#### 4.2.4 Dilatación y erosión

Ej. Suavizado, eliminación de brillo mediante la erosión



#### 4.2.4 Dilatación y erosión

- ✓ Ejercicio visual: Identificar los efectos de la Erosión y Dilatación



#### 4.2.5 Apertura y cierre

## La Apertura Morfológica

- La apertura de una señal  $f$  por un elemento estructurante  $Y$  se denota por  $\gamma Y(f)$ , y se define como la erosión de  $f$  por  $Y$ , seguida de la dilatación por el mismo elemento estructurante:

$$\gamma Y(f) = \delta_Y(\epsilon_Y(f))$$

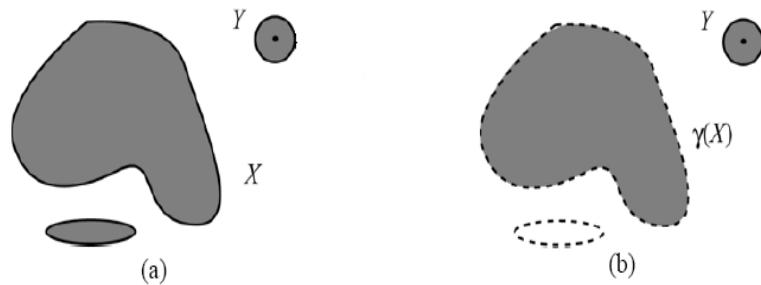
Usualmente se maneja como:

$$fob = (f \Theta b) \oplus b$$

#### 4.2.5 Apertura y cierre

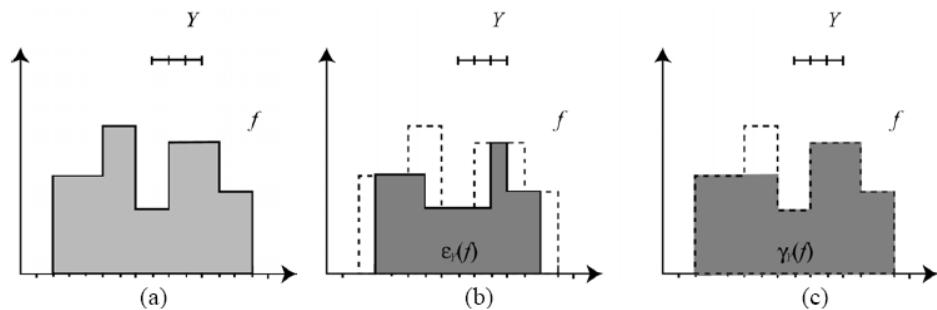
## La Apertura Morfológica

- La apertura de un conjunto  $X$  por un ee  $Y$  elimina objetos menores en tamaño al ee, la apertura redondea las convexidades importantes



#### 4.2.5 Apertura y cierre

## Apertura Morfológica ...



La apertura de una señal unidimensional por un elemento de estructura de tamaño 3. (a) Señal original  $f$ . (b) Erosión de la señal  $f$  por el ee  $Y_k$ , (c) Dilatación de la erosión  $E(f)$  por el ee  $Y$ .

#### 4.2.5 Apertura y cierre

Apertura Morfológica...

- El tamaño y la forma de los elementos de estructura empleados en la apertura deben ser acordes con la estructura de la imagen que se desea eliminar
- En ocasiones tamaños elevados de EE eliminan formas indeseables en una imagen afectaran el resto de la estructura
- Tamaños reducidos serán óptimos cuando las imágenes contengan pequeños detalles.

#### 4.2.5 Apertura y cierre

Efecto de la Apertura Morfológica...

- En el siguiente ej. se observa como la apertura con un ee de 3x3 filtra la imagen eliminando las formas u objetos claros



Imagen original



Imagen filtrada

**4.2.5 Apertura y cierre**

Filtro morfológico mediante la Apertura...

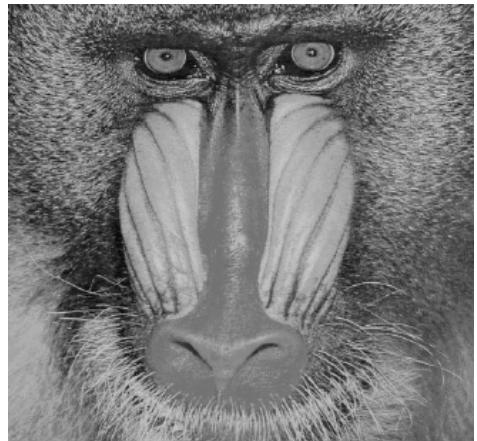


Imagen original

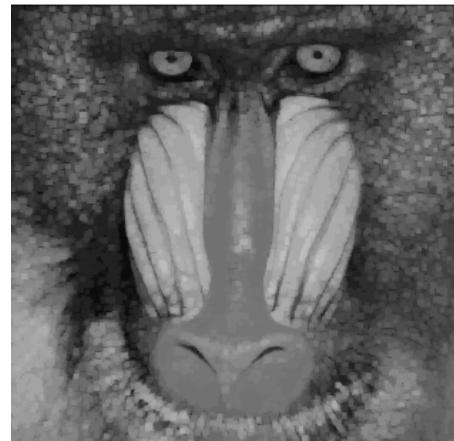


Imagen filtrada

29

**4.2.5 Apertura y cierre**

Filtro morfológico mediante la Apertura... eliminando ruido sal!



Imagen original



Imagen filtrada

30

#### 4.2.5 Apertura y cierre

## La Clausura Morfológica

- También conocido por cierre morfológico, de una imagen  $f$  por un elemento de estructura  $Y$ , se denota por  $\phi Y(f)$ , y se define como la dilatación de  $f$  por  $Y$ , seguida de la erosión por el mismo EE.

$$\phi Y(f) = \mathcal{E}_Y(\delta_Y(f))$$

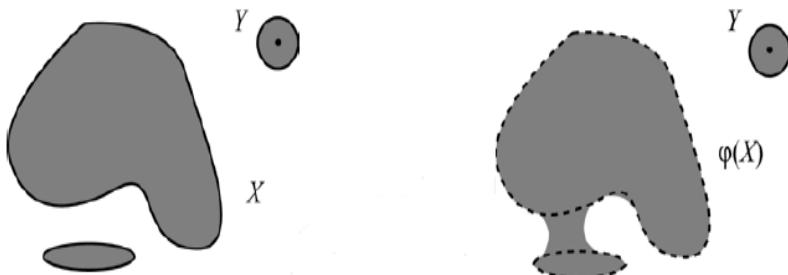
Usualmente se maneja como:

$$f \bullet b = (f \oplus b) \ominus b$$

#### 4.2.5 Apertura y cierre

## La Clausura Morfológica...

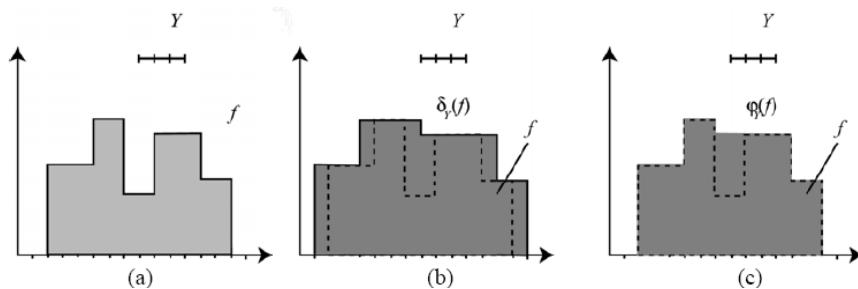
- La apertura de un conjunto  $X$  por un ee  $Y$  redondea las concavidades importantes



#### 4.2.5 Apertura y cierre

##### Clausura Morfológica ...

- En la clausura de la señal unidimensional se observa como la dilatación en estructuras que la erosión no puede separar



(a) señal unidimensional original. (b) Dilatación de la señal  $f$  por un ee  $Y$ .  
(c) Erosión de la dilatación pór un ee  $Y$

#### 4.2.5 Apertura y cierre

##### Clausura Morfológica ...

- En una imagen de niveles de gris la clausura morfológica ayuda a eliminar estructuras oscuras menores en tamaño al elemento de estructura.
- La dilatación maximiza los valores de forma que se atenúan los objetos oscuros.
- La erosión minimiza la señal y sólo los elementos no eliminados quedan presentes en la imagen final.

#### 4.2.5 Apertura y cierre

##### Clausura Morfológica ...

- En el siguiente ej. se observa como la clausura con un ee de 3x3 eliminando objetos o formas obscuras



Imagen original



Imagen filtrada

#### 4.2.5 Apertura y cierre

##### Clausura Morfológica ...



Imagen original



Imagen después de ser filtrada

36

#### 4.2.5 Apertura y cierre

Filtro morfológico mediante la Clausura...

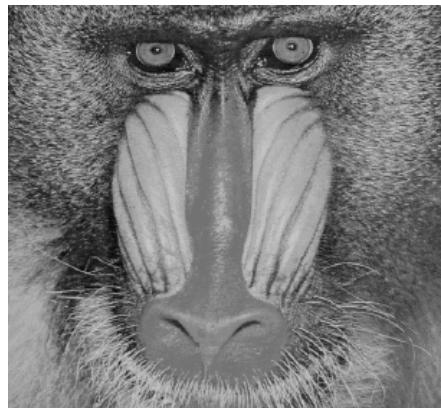


Imagen original

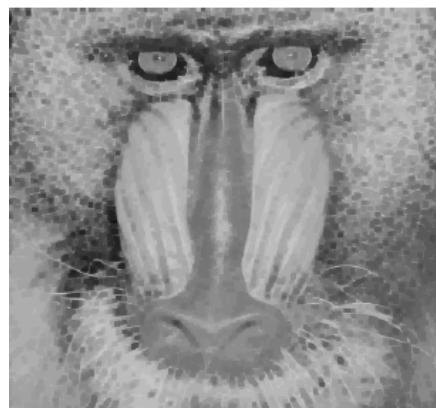


Imagen filtrada

37

#### 4.2.5 Apertura y cierre

Filtro morfológico mediante el Cierre... eliminando ruido pimienta!



Imagen original



Imagen filtrada

38

#### 4.2.4 Dilatación y erosión

Ejemplo de los operadores dilatación y erosión en Laticces, con los elementos estructurantes  $B_1$  y  $B_2$

Utilizando los elementos de estructura  $B_1$  y  $B_2$ , se muestran los procesos de la dilatación y de la erosión de la imagen  $A_1$ , con el ee de estructura propuesto

39

#### 4.1.3 Dilatación y erosión

Considerando las imágenes  $A_1$  y  $A_2$  con los ee  $B_1$  y  $B_2$  realizar las operaciones de morfología matemática en Laticces

2	1
2	*1

0	1	0
1	1	1
0	1	0

ee  $B_1$ 

0	1	0
1	1	1
0	1	0

ee  $B_2$ 

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	3	4	4	5	0	0	0
0	0	5	4	4	5	0	0	0
0	0	1	3	3	2	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

Imagen  $A_1$ 

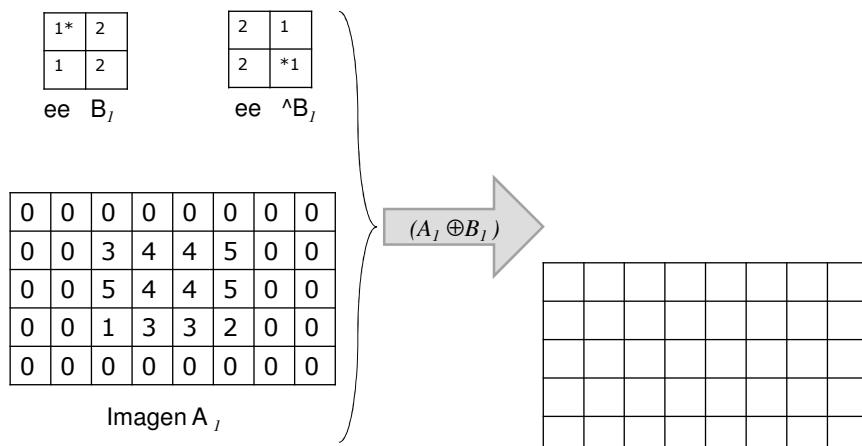
5	14	0	0	56	35	42
0	180	180	179	79	55	47
1	188	195	191	50	50	10
193	33	215	204	160	10	0
200	230	245	230	190	200	200
0	230	200	230	190	200	200
0	2	2	18	12	70	0

Imagen  $A_2$ 

40

### 4.1.3 Dilatación y erosión

Realizando la **Dilatación** de  $A_I$  con el ee  $B_I$



41

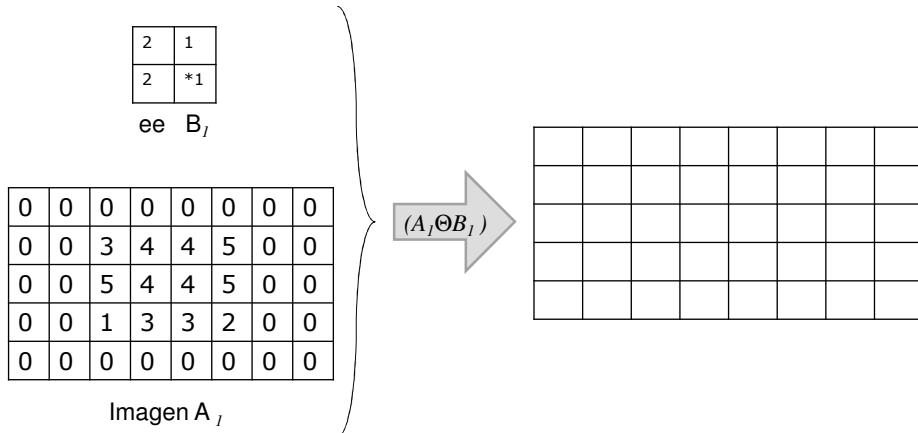
### 4.2.4 Dilatación y Erosión

#### Nota:

- La operación de la dilatación esta basada en la elección del valor máximo de  $f+B$  en una vecindad definida por el ee, el efecto es doble para laticces:
  1. Si todos los valores del ee son +, la imagen de salida tiende a ser mas brillante que la imagen de entrada,
  2. Los detalles oscuros o bien son reducidos o eliminados dependiendo de sus valores y forma en relación al ee

### 4.1.3 Dilatación y erosión

Realizando la **Erosión** de  $(A_I \ominus B_1)$ , el resultado es:



43

### 4.2.4 Dilatación y Erosión

#### Nota:

- La operación de la erosión esta basada en la elección del valor mínimo de  $f-B$  en una vecindad definida por el ee, el efecto es doble para laticces:
  1. Si todos los valores del ee son +, la imagen de salida tiende a ser mas oscura que la imagen de entrada,
  2. Los detalles brillantes en la imagen de entrada que son mas pequeños en relación al ee, se reducen (es determinado por el nivel de brillo de este)

## 4.2 Ejercicio

Considerando las imágenes  $A_2$  con el ee  $B_2$ , realizar las operaciones de:

- Dilatación y erosión
- Apertura y cierre

5	14	0	0	56	35	42
0	180	180	179	79	55	47
1	188	195	191	50	50	10
193	33	215	204	160	10	0
200	230	245	230	190	200	200
0	230	200	230	190	200	200
0	2	2	18	12	70	0

Imagen  $A_2$ 


Resultado

45

### 4.2.6 Filtros morfológicos

## Operaciones combinadas

- La operación de erosión junto a la dilatación, son la base de cualquier transformación morfológica.
- Cualquier operador, transformación o algoritmo incluirá una erosión, una dilatación, o ambas primitivas en su implementación.
- Sin necesidad de formar nuevos operadores es posible encontrar nuevas aplicaciones interesantes en las trasformaciones básicas.

**4.2.6 Filtros morfológicos****Algunos filtros morfológicos en niveles de grises:**

- Alisamiento morfológico
- Top Hat
- Bot hat
- Gradiente morfológico
  - Por dilatación
  - Por erosión
  - Simétrico

**4.2.6 Filtros morfológicos****Alisamiento morfológico**

- Una forma de llevar a cabo el alisamiento de una imagen es realizar una apertura seguida de una clausura.
- El resultado de estas dos operaciones es suprimir o atenuar elementos extraños muy brillantes u oscuros.

$$\tau(f) = (f \circ b) \bullet f$$

#### 4.2.6 Filtros morfológicos

### Top Hat

- La transformación de "Top-Hat" o sombrero de copa, que se denota  $th$ , se define como la diferencia entre la función  $f$  y su apertura con un elemento de estructura  $b$
- También conocido por Top Hat por apertura o Top Hat Blanco, por destacar los objetos claros que han sido eliminados en la apertura
- Consiste en descubrir aquellas estructuras de la imagen que han sido eliminadas en el filtrado de apertura o cierre

$$TH(f) = f - (f \circ b) \quad \text{o bien,} \quad \rho(f) = f - \gamma(f)$$

- Usualmente también se maneja como:

$$TH(f) = (f \oplus b) - (f \ominus b)$$

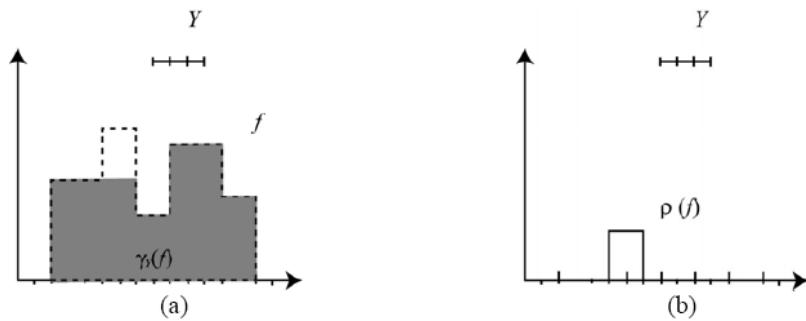
#### 4.2.6 Filtros morfológicos

### Top Hat ...

- Es útil para detectar los picos claros, es decir, las zonas más claras de las imágenes, resalta detalles en la presencia de sombras
- Con la elección de un ee de forma y tamaño y orientación adecuados, es posible filtrar la imagen y eliminar determinados elementos en al imagen original:
  - una operación de diferencia entre el mapa original y el filtrado aumenta considerablemente el contraste de las zonas eliminadas.

#### 4.2.6 Filtros morfológicos

Ejemplo de Top Hat por apertura en una señal unidimensional...



Se observa como se descubre aquella parte de la señal no eliminada en la apertura

#### 4.2.6 Filtros morfológicos

Ejemplo ...



Imagen original

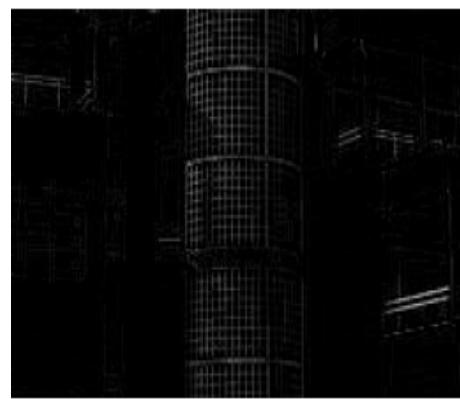


Imagen filtrada

#### 4.2.6 Filtros morfológicos

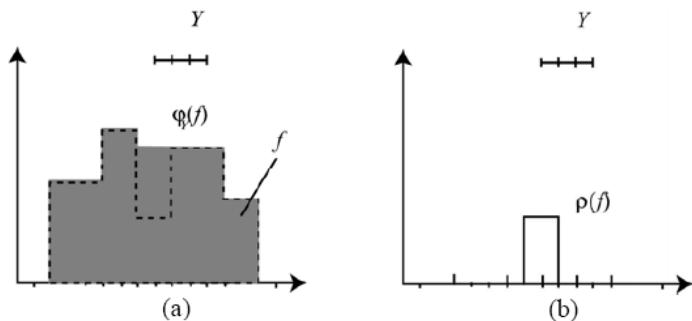
## Bot Hat

- La transformación “Bot-Hat”, que se denota  $bh$ , se define como la diferencia de la clausura de la función  $f$  con un elemento de estructura  $b$  y la función  $f$ .
- También conocido como Top Hat por cierre o Top Hat Negro, ya que visualiza los objetos oscuros de la imagen original eliminados en el cierre.
- Esta transformación es útil para detectar los valles, es decir, las zonas más oscuras de las imágenes.

$$bh = f \bullet b - f \quad \rho(f) = \varphi(f) - f$$

#### 4.2.6 Filtros morfológicos

Ejemplo de Bot Hat por apertura en una señal unidimensional...



En este caso los nuevos valores debidos al cierre son descubiertos e identificados.

#### 4.2.6 Filtros morfológicos

Ejemplo...



Imagen original

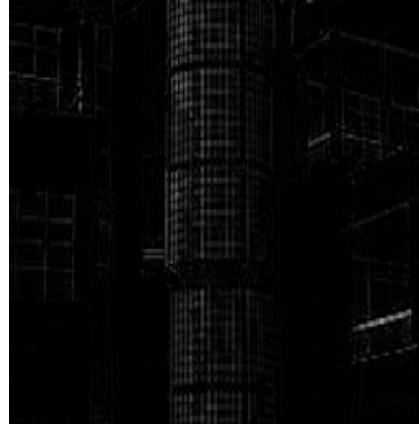


Imagen filtrada

#### 4.2.6 Filtros morfológicos

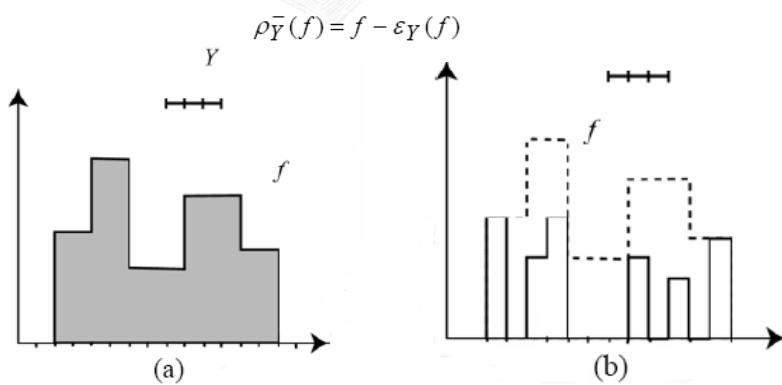
### Gradiente Morfológico

- El primer residuo de operaciones que se puede definir en morfología matemática es el gradiente morfológico, siendo la primera aproximación de la segmentación morfológica. El residuo gradiente conocido en la morfología como gradiente de Beucher es:
  - la diferencia entre una dilatación y una erosión, una dilatación y la imagen original o una erosión y la imagen original.

#### 4.2.6 Filtros morfológicos

##### a) Gradiente por erosión

- El primero de los gradientes a definir se conoce como gradiente por erosión y es la diferencia entre el conjunto o imagen original y la erosión por un elemento estructurante  $Y$ .



#### 4.2.6 Filtros morfológicos

Ejemplo del Gradiente por erosión ...

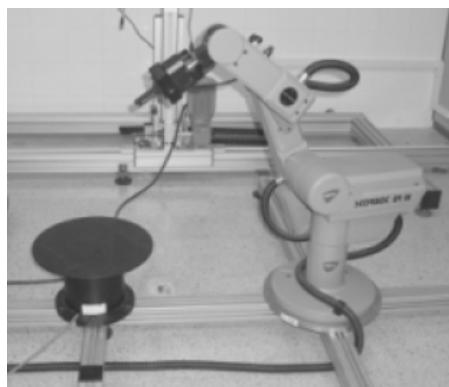


Imagen original



Imagen filtrada

**4.2.6 Filtros morfológicos****b) Gradiente por Dilatación**

- El gradiente por dilatación se define como la diferencia entre una dilatación por elemento estructurante  $Y$  y la identidad (imagen original)

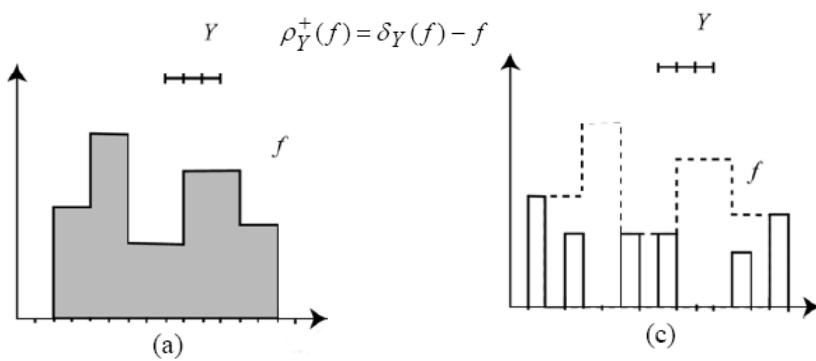
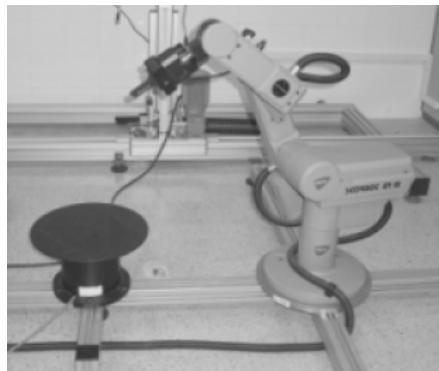
**4.2.6 Filtros morfológicos****Ejemplo del Gradiente por Dilatación**

Imagen original

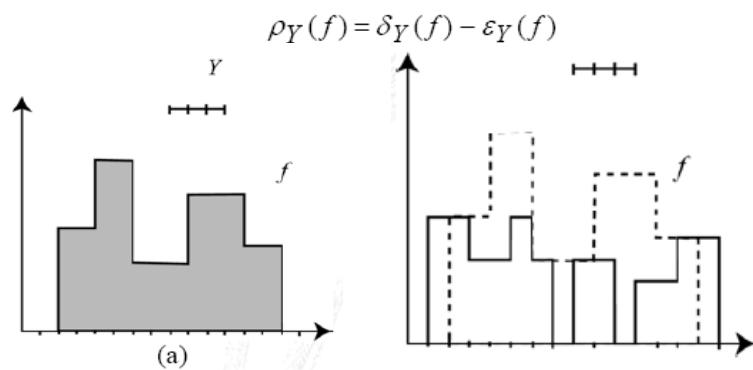


Imagen filtrada

#### 4.2.6 Filtros morfológicos

##### c) Gradiente Simétrico

- El gradiente simétrico se define como una diferencia entre la dilatación y la erosión de una imagen por un elemento estructurante  $Y$ .



#### 4.2.6 Filtros morfológicos

##### Ejemplo del Gradiente Simétrico

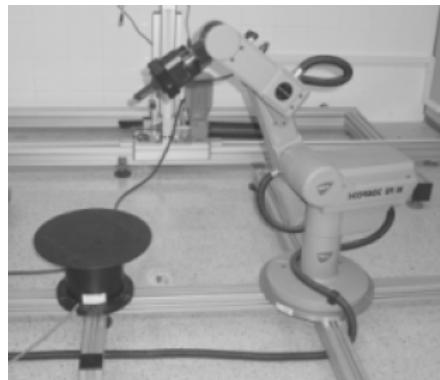


Imagen original

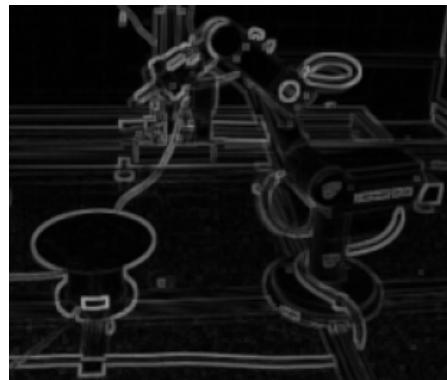


Imagen filtrada

#### 4.2.7 Transformada Watershed

## Segmentación por Cuencas (“Watersheds”)

- La Transformada Watershed es una herramienta morfológica que permite segmentar imágenes.
- Esta transformada se adapta a los diferentes tipos de imágenes siendo capaz de distinguir objetos sumamente complejos que no pueden ser procesados correctamente mediante algoritmos convencionales.
- El éxito de la Transformada Watershed depende fundamentalmente de la existencia de marcadores únicos para cada uno de los objetos de interés y de un gradiente que permita la adecuada aplicación de los algoritmos de inundación.

#### 4.2.7 Transformada Watershed

Segmentación por Cuencas (“Watersheds”) ...

- La imagen **gradiente** y la **transformación sombrero de copa** son a menudo usadas en la transformación “Watershed”, debido a que el criterio fundamental para la segmentación en muchas aplicaciones es la homogeneidad de los niveles de gris de los objetos presentes en la imagen.
- Cuando la segmentación es basada en la forma de los objetos, el uso de la función distancia es muy útil.

#### 4.2.7 Transformada Watershed

Segmentación por Cuencas ("Watersheds") ...

El **Gradiente Morfológico** de una imagen se define como:

$$G(f) = (f \oplus B) - (f \ominus B)$$

Cuando  $f$  es continuamente diferenciable, este gradiente es igual al módulo del gradiente de :

$$g(f) = \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2}$$

El modo más simple de aproximar este módulo, es asignándole a cada punto  $x$  la diferencia entre los pixeles más altos ("highest") y los más bajos ("lowest") dentro de una vecindad dada. Esto se logra mediante la diferencia entre la función de dilatación y la función de erosión.

#### 4.2.7 Transformada Watershed

Segmentación por Cuencas ("Watersheds") ...

- **Sombra de Copa Blanco o White Top Hat** se define como la diferencia entre la función  $f$  y su apertura morfológica:

$$WTH(f) = f - \gamma(f)$$

- **Sombrero de Copa Negro o Black Top Hat** usa una clausura para detectar los rasgos negros y estrechos:

$$BTH(f) = \phi(f) - f$$

Se han de escoger diferentes tamaños y formas de ee para ser usados tanto en la apertura como en la clausura.

#### 4.2.7 Transformada Watershed

Segmentación por Cuencas ("Watersheds") ...

**La Función Distancia:** Sea  $Y$  un conjunto de  $Z^2$ . Para todo punto  $y$  de  $Y$ , se define la distancia de  $d(y)$  de  $Y$  al conjunto complementario  $Y^c$  como:

$$\forall y \in Y, \quad d(y) = \text{dist}(y, Y^c)$$

donde  $d(y, Y^c)$  es la distancia de  $y$  al punto más cercano de  $Y^c$

Puede demostrarse muy fácilmente que una sección de  $i$  en el nivel  $d$  está dada por:

$$X_i(d) = \{y : d(y) \geq i\} = Y \ominus B_i$$

donde  $B_i$  es un disco de radio  $i$ .

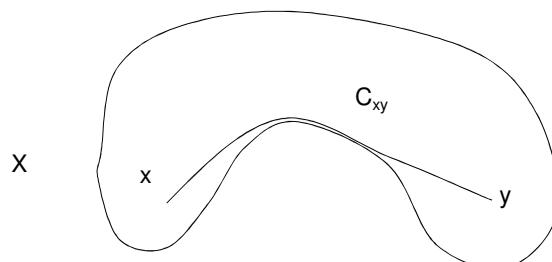
Esta función distancia es muy útil para segmentar objetos binarios.

#### 4.2.7 Transformada Watershed

##### Geodesia- Distancia geodésica

Hablaremos del SKIZ geodésico ("Skeleton by Zones of Influence" - **Esqueleto por zonas de influencia**) y de la reconstrucción de un conjunto a partir de un marcador.

Sea  $X \subset Z^2$  un conjunto, y  $x$  y  $y$  dos puntos de  $X$



#### 4.2.7 Transformada Watershed

Geodesia- Distancia geodésica ...

Sea  $Y$  cualquier conjunto incluido en  $X$

Nosotros podemos calcular el conjunto de todos los puntos de  $X$  que están a una distancia geodésica finita de  $Y$  mediante la expresión:

$$R_x(Y) = \{x \in X : \exists y \in Y, d_x(x, y) \text{ finita}\}$$

Donde  $R_X(Y)$  es llamado el conjunto reconstruido  $f$  por el conjunto marcador  $Y$ , que está creado por todos los componentes conectados de  $X$  que son marcados por  $Y$ .

#### 4.2 Evaluación del tema

Considerando las imágenes  $A_2$  y con el ee  $B_2$  (del ejercicio anterior), realizar las operaciones de:

- a) Alisamiento morfológico
- b) Gradiente simétrico

5	14	0	0	56	35	42
0	180	180	179	79	55	47
1	188	195	191	50	50	10
193	33	215	204	160	10	0
200	230	245	230	190	200	200
0	230	200	230	190	200	200
0	2	2	18	12	70	0

Imagen  $A_2$


Resultado

▶ .

**Links para practicar:**

[http://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/HI  
PR2/morops.htm](http://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/HIPR2/morops.htm)