Martes 28 de septiembre de 2021.
Miércoles 29 de septiembre de 2021.

3.3.1 Distribución Exponencial.

Se utiliza a menudo para representar la distribución del tiempo que transcurre antes de la ocurrencia de un suceso. Por ejemplo; período que un componente electrónico funciona sin fallar, también conocido como vida útil del componente, período requerido para atender a un cliente en un banco, período entre las llegadas de dos clientes sucesivos a un servicio, etc.
La v.a X tiene una distribución exponencial con parámetro $\beta > 0$, y se escribe $X \sim \exp(x;\beta)$ si su **f.d.p** es de la forma:

$$f_X(x) = \begin{cases} \beta e^{-\beta x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

$f_X(x) = \beta e^{-\beta x}$, $x > 0$

$f(x) = \beta e^{-\beta x}$, $x > 0$

La **función de distribución acumulada** de la v.a es;

$$F_X(x) = \int_0^x \beta e^{-\beta t} dt = \int_0^x e^{-\beta t} \beta dt = -e^{-\beta t}\Big|_0^x = -e^{-\beta x} + e^{-0} = 1 - e^{-\beta x}$$

Para encontrar media y varianza de esta distribución, primero encontramos la **f.g.m**,

$$\psi_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \int_0^\infty e^{tx} \beta e^{-\beta x} dx = \beta \int_0^\infty e^{(t-\beta)x} dx = \frac{\beta}{t-\beta} e^{-(\beta - t)x}\Big|_0^\infty$$

$$\boxed{\psi_X(t) = \frac{\beta}{\beta - t}}$$

Obs.- Conviene factorizar el signo "−" porque $\lim_{x\to\infty} e^{x} = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} e^{x} = e^{-\infty} = 0$

$$\mu_X = E(X) = \psi'_X(t=0) = \frac{d}{dt}\left[\beta(\beta - t)^{-1}\right]\Big|_{t=0} = \beta(\beta - t)^{-2}\Big|_{t=0} = \frac{\beta}{\beta^2}$$

$$\boxed{\mu_X = \frac{1}{\beta}}$$

$$E\left(X^2\right) = \psi''_X(t=0) = \frac{d}{dt}\left[\beta(\beta - t)^{-2}\right]\Big|_{t=0} = 2\beta(\beta - t)^{-3}\Big|_{t=0} = \frac{2\beta}{\beta^3} = \frac{2}{\beta^2}$$

$$\sigma^2 = V(X) = E\left(X^2\right) - E^2(X) = \frac{2}{\beta^2} - \frac{1}{\beta^2} \quad \therefore \quad \boxed{\sigma^2 = \frac{1}{\beta^2}}$$

Esta distribución también tiene la propiedad de falta de memoria, es decir para los enteros positivos t y h se cumple que:

$$P(X \ge t+h \mid X \ge t) = \frac{P(X \ge t+h)}{P(X \ge t)} = \frac{1 - F_X(t+h)}{1 - F_X(t)} = \frac{1 - (1 - e^{-t\beta - h\beta})}{1 - (1 - e^{-t\beta})} = \frac{e^{-t\beta} e^{-h\beta}}{e^{-t\beta}} = e^{-h\beta} = e^{-\beta h} = P(X > h)$$

Y por otro lado $P(X \ge h) = 1 - F_X(h) = 1 - \left(1 - e^{-h\beta}\right) = e^{-h\beta}$

Entonces $\boxed{P(X \ge t+h \mid X \ge t) = P(X \ge h)}$

Usar 1) $X_i \sim \exp(x_i; \beta_i = \beta_i)$ $\forall i = 1, \dots, n$. $\therefore P(X_i > y) = e^{-\beta_i y}$

Teorema: Si las variables aleatorias $X_1, X_2, \dots, X_n$ son variables aleatorias independientes con distribución exponencial con parámetro β. Entonces la v.a $Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ también se distribuye como una exponencial pero con parámetro $n\beta$.

$Y \sim \exp(y; \beta_Y = \sum_{i=1}^n \beta_i)$ si $\beta_i = \beta$ $\forall i = 1, \dots, n$: $\sum_{i=1}^n \beta_i = \sum \beta = n\beta$

Demostración

Observa que si el tiempo mínimo de espera de los n que tenemos es mayor que t entonces todos los demás también son mayores que t, es decir:

$$P(Y > t) = P(X_1 > t, \dots, X_n > t) = P(X_1 > t) \cdots P(X_n > t) = e^{-t\beta} \cdots e^{-t\beta} = e^{-nt\beta}$$

Por lo tanto $Y \sim \exp(y; n\beta)$. ♦

Ejemplo 1: El motor y el tren de transmisión de un automóvil nuevo están garantizados por un año. Las vidas medias de estos componentes se estiman en tres años, y el tiempo transcurrido hasta la falla tiene una distribución exponencial. La ganancia en un auto nuevo es de \$1,000. Incluyendo los costos de refacciones y de mano de obra, la agencia debe pagar \$250 para reparar la falla. ¿Cuál es la utilidad esperada por automóvil?

1° Construir la función de utilidad en función de la vida útil del automóvil. $U(X) = g(X)$
2° Encontrar la esperanza de esta función utilidad.

Solución

La vida media del motor y del tren de transmisión es de 3 años, es decir $E(X) = \frac{1}{\beta} = 3$, despejando se tiene que el parámetro de la distribución es $\frac{1}{3}$.

X : tiempo transcurrido hasta la falla.
$X \sim \exp\left(x; \beta = \frac{1}{3}\right)$
$U(X)$: utilidad en función del tiempo transcurrido hasta la falla.

$$U(X) = \begin{cases} 1000 & X > 1 \text{ año} \\ 1000 - 250 = 750 & X \le 1 \text{ año} \end{cases}$$

La utilidad esperada está dada por:

$$\begin{aligned} E[U(X)] &= 1000P[U(X) = 1000] + 750P[U(X) = 750] \\ &= 1000P(X > 1) + 750P(X \le 1) = 1000[1 - F_X(1)] + 750F_X(1) \\ &= 1000 - F_X(1)[1000 - 750] = 1000 - 250F_X(1) \\ &= 1000 - 250\left(1 - e^{-\frac{1}{3}}\right) = 750 + 250e^{-\frac{1}{3}} = 929.13 \end{aligned}$$

$= 1000e^{-\frac{1}{3}} + 750\left(1 - e^{-\frac{1}{3}}\right) = 750 - 250e^{-1/2}$

Ejemplo 2: ¿Hay una densidad exponencial que cumple la siguiente condición?
$P(X \le 2) = \frac{2P(X \le 3)}{3}$. Si es así encuentra el valor del parámetro de la distribución.

Supongamos que $X \sim \exp(x; \beta)$

Solución

$$P(X \le 2) = F_X(2) = \frac{2F_X(3)}{3} = \frac{2P(X \le 3)}{3}$$

$$1 - e^{-2\beta} = \frac{2}{3}\left(1 - e^{-3\beta}\right)$$
$$3\left(1 - e^{-2\beta}\right) = 2\left(1 - e^{-3\beta}\right)$$
$$3 - 3e^{-2\beta} = 2 - 2e^{-3\beta}$$
$$3 - 2 = 3e^{-2\beta} - 2e^{-3\beta}$$
$$1 = 3e^{-2\beta} - 2e^{-3\beta}$$

Lo cual ocurre sólo si $\beta = 0$, pero una de las condiciones de la definición de la f.d.p exponencial es que el parámetro debe ser estrictamente mayor que cero, es decir no existe una distribución exponencial que cumpla la condición pedida.

Ejemplo 3: Se sabe que un componente electrónico tiene una vida útil representada por una densidad exponencial con tasa de falla de 10^{-5} fallas por hora. ¿Cuál es la fracción de componentes que fallan antes de su vida media?

¿Cuál es la probabilidad de que falle antes de su vida media?

Solución

La fracción de componentes de interés coincide con la probabilidad de que un componente falle antes de su vida esperada, por lo tanto procedemos como sigue:

X : vida útil del componente.
$X \sim \exp\left(x; 10^{-5}\right)$

La tasa de falla es $\beta = 10^{-5}$ por lo tanto $E(X) = \frac{1}{\beta} = 10^5$.

Entonces $P\left(X < \frac{1}{\beta}\right) = P\left(X < 10^5\right) = 1 - e^{-10^{-5}(10^5)} = 1 - e^{-1} = 0.632$

Ejemplo 4: Supón que se quiere decidir entre dos procesos de manufactura para fabricar cierto componente. Con el proceso *A*, producir un componente cuesta *C* dólares, con el proceso *B*, producir un componente cuesta kC dólares, con $k > 1$. El tiempo de vida de los componentes se distribuye exponencialmente con una tasa de $\frac{1}{200}$ fallas por hora para el proceso *A*. Los componentes producidos con el proceso *B* tienen una vida útil distribuida exponencialmente con una tasa de $\frac{1}{300}$ fallas por hora. Debido a una cláusula de garantía, si un componente dura menos de 400 hrs, el fabricante debe pagar una multa de M dólares. ¿Cuál proceso escogerías?

Solución

Voy a elegir el proceso con menor costo esperado.

X_i : Vida útil del componente.
C_i : Costo bajo el proceso *i*, con $i = A, B$.

$$X_A \sim \exp\left(x_A; \beta_A = \frac{1}{200}\right)$$
$$X_B \sim \exp\left(x_B; \beta_B = \frac{1}{300}\right)$$

$$C_A = \begin{cases} C & X_A \ge 400 \text{ hrs.} \\ C + M & X_A < 400 \text{ hrs.} \end{cases} \quad \text{Discreta}$$

$$C_B = \begin{cases} kC & X_B \ge 400 \text{ hrs.} \\ kC + M & X_B < 400 \text{ hrs.} \end{cases} \quad \text{Discreta}$$

$$\begin{aligned} E(C_A) &= CP(X_A \ge 400) + (C+M)P(X_A < 400) \\ &= C(1 - F_X(400)) + (C+M)F_X(400) \\ &= C - CF_X(400) + (C+M)F_X(400) \\ &= C + [C + M - C]F_X(400) = C + MF_X(400) \end{aligned}$$

$$E(C_A) = C + M\left(1 - e^{-\frac{400}{200}}\right) = C + M\left(1 - e^{-2}\right)$$

Para el proceso *B* se tiene que:

$$\begin{aligned} E(C_B) &= kCP(X_B \ge 400) + (kC+M)P(X_B < 400) \\ &= kC(1 - F_X(400)) + (kC+M)F_X(400) \\ &= kC + MF_X(400) = kC + M\left(1 - e^{-\frac{400}{300}}\right) = kC + M\left(1 - e^{-1.33}\right) \end{aligned}$$

M es una multa fija que pagan ambos procesos en caso de que la vida útil del componente sea menor a 400 hrs. Si el costo esperado de producción bajo el proceso *A* es menor que el costo esperado bajo el proceso *B*, se prefiere el proceso *A*, lo cual ocurre si:

Si $E(C_A) < E(C_B)$ entonces me quedo con A.

$$C + M\left(1 - e^{-2}\right) < kC + M\left(1 - e^{-1.33}\right)$$
$$C + M\left(1 - e^{-2}\right) - M\left(1 - e^{-1.33}\right) < kC$$
$$\frac{1}{C}\left[C + M\left(1 - e^{-2} - 1 + e^{-1.33}\right)\right] < k$$
$$1 + \frac{M}{C}\left(e^{-1.33} - e^{-2}\right) < k$$
$$1 + 0.129\frac{M}{C} < k$$

Dime cuánto valen C, M y k y yo te digo cual te conviene.

Ejemplo 5: Supón que las variables aleatorias $X_1, X_2, \dots, X_k$ son independientes y que $X_i \sim \exp(x_i; \beta_i)$ con $i = 1, \dots, k$. Si $Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_k)$ ¿Cómo se distribuye *Y*?

Solución

$X_i \sim \exp(x_i; \beta_i)$, entonces para $t > 0$

$$\begin{aligned} P(Y > t) &= P(X_1 > t, X_2 > t, \dots, X_k > t) \\ &= P(X_1 > t)P(X_2 > t) \cdots P(X_k > t) \\ &= \left(1 - F_{X_1}(t)\right)\left(1 - F_{X_2}(t)\right) \cdots \left(1 - F_{X_k}(t)\right) = e^{-t\beta_1} e^{-t\beta_2} \cdots e^{-t\beta_k} = e^{-[\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_k]t} \end{aligned}$$

Por lo tanto $Y \sim \exp\left(y; \beta = \sum_{i=1}^k \beta_i\right)$.

Ejemplo 6: Supón que cierto sistema contiene tres componentes que funcionan independientemente unos de otros y que están conectados en serie de forma que el sistema falla tan pronto como uno de los componentes falla. Si el tiempo de vida de cada uno de los componentes medido en horas se distribuye exponencialmente con parámetros 0.001, 0.003 y 0.006 respectivamente. Determina la probabilidad de que el sistema no falle antes de 100 horas.

Solución

X_i : tiempo de vida del *i*-ésimo componente.
$X_1 \sim \exp(x_1; 0.001)$
$X_2 \sim \exp(x_2; 0.003)$
$X_3 \sim \exp(x_3; 0.006)$
X : tiempo de vida del sistema.

Debido a la construcción del sistema, su tiempo de vida es $X = \min(X_1, X_2, X_3)$. Entonces $X \sim \exp(x; 0.01)$ ya que $0.001 + 0.003 + 0.006 = 0.01$.
Por lo tanto $P(X > 100) = 1 - F_X(100) = 1 - \left(1 - e^{-100(0.01)}\right) = e^{-1} = 0.3678$

Ejemplo 7: Si un sistema electrónico contiene *n* componentes similares que funcionan independientemente unos de otros y están conectados en serie (el sistema falla tan pronto como uno de los componentes falla). Si el tiempo de vida de cada componente medido en horas, tiene una distribución exponencial con media μ. Encuentra la media y la varianza del tiempo de espera hasta que falle el sistema.

Solución

X_i : tiempo de vida del *i*-ésimo componente.
$X_i \sim \exp\left(x_i; \frac{1}{\mu}\right)$ con $i = 1, \dots, n$.
X : tiempo de vida del sistema.
$X = \min(X_1, \dots, X_n)$
$X \sim \exp\left(x; \frac{n}{\mu}\right)$

$\beta = \sum_{i=1}^n \beta_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\mu} = n\left(\frac{1}{\mu}\right) = \frac{n}{\mu}$

Entonces; $E(X) = \frac{1}{\beta} = \frac{\mu}{n}$ y $V(X) = \frac{1}{\beta^2} = \frac{\mu^2}{n^2}$