Viernes 08 de octubre de 2021.

Teorema: Si las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_k$ son independientes y $X_i \sim N(x_i; \mu_i, \sigma_i^2)$ $i=1,\ldots,k$ entonces $X_1 + \cdots + X_k$ tiene una distribución normal con media $\mu = \mu_1 + \cdots + \mu_k$ y varianza $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_k^2$.

Demostración

si $X = \sum_{i=1}^{k} X_i$ $\therefore E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right) = \sum_{i=1}^{k} E(X_i) = \sum_{i=1}^{k} \mu_i$ ✓

$V(X) = V\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right) = \sum_{i=1}^{k} V(X_i) = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2$ ✓

$$\psi_{X_i}(t) = e^{t\mu_i + \frac{1}{2}t^2\sigma_i^2}$$

$$X = \sum_{i=1}^{k} X_i$$

$$\psi_X(t) = \prod_{i=1}^{k} \psi_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{k} e^{t\mu_i + \frac{1}{2}t^2\sigma_i^2} = \exp\left(t\sum_{i=1}^{k}\mu_i + \tfrac{1}{2}t^2\sum_{i=1}^{k}\sigma_i^2\right)$$

$X_i \sim N(x_i; \mu_i, \sigma_i^2)$ $\therefore \psi_{X_i}(t) = e^{\mu_i t + \frac{t^2}{2}\sigma_i^2}$

$$\psi_X(t) = \prod_{i=1}^{k} \psi_{X_i}(t) = e^{\underbrace{\mu_1 t} + \underbrace{\frac{t^2}{2}\sigma_1^2}} e^{\underbrace{\mu_2 t} + \underbrace{\frac{t^2}{2}\sigma_2^2}} \cdots e^{\underbrace{\mu_k t} + \underbrace{\frac{t^2}{2}\sigma_k^2}}$$

$$= e^{(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k)t + (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_k^2)\frac{t^2}{2}}$$

$$= e^{\overbrace{\left(\sum_{i=1}^{k}\mu_i\right)}^{\mu_X} t + \frac{t^2}{2}\overbrace{\sum_{i=1}^{k}\sigma_i^2}^{\sigma_X^2}}$$

esta es la f.g.m para una normal con $\mu_X = \sum_{i=1}^{k} \mu_i$ y $\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2$

Que es precisamente la f.g.m para una normal con media $\mu_X = \sum_{i=1}^{k}\mu_i$ y varianza $\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{k}\sigma_i^2$.

Ejemplo 1: Un eje con diámetro exterior distribuido normalmente con media 1.2 y varianza 0.0016 se inserta en un cojinete de manguito que tiene un diámetro interior distribuido normalmente con media 1.25 y varianza 0.0009 ¿Cuál es la probabilidad de que el eje no quepa en el cojinete?

$V(X + (-1)Y) = V(X) + V((-1)Y)$
$= V(X) + (-1)^2 V(Y)$
$= V(X) + V(Y)$

Recuerda que

$Z = X - Y = X + (-1)Y$

$E(X + (-1)Y) = E(X) + E[(-1)Y]$
$= E(X) + (-1)E(Y)$
$= E(X) - E(Y)$

X: diametro exterior del eje
Y: " interior del cojinete

$X \sim N(x; \mu = 1.2, \sigma^2 = 0.0016)$
$Y \sim N(y; \mu = 1.25, \sigma^2 = 0.0009)$

$P(X \geq Y) = ?$

$P(\underbrace{X - Y}_{W} \geq 0) = P(Z \geq 1)$
$= 1 - \phi(1)$

$W \sim N(w; \mu_W = \mu_X - \mu_Y = 1.25 - 1.25$
$\sigma_W^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 = 0.0016 + 0.0009)$

entonces la variable $X = a_1X_1 + \cdots + a_kX_k + b$ tiene una distribución normal con media $\mu = a_1\mu_1 + \cdots + a_k\mu_k + b$ y varianza $\sigma^2 = a_1^2\sigma_1^2 + \cdots + a_k^2\sigma_k^2$.

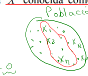
(hay independencia)

Corolario 2: Supón que las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ constituyen una muestra aleatoria de una distribución normal con media μ y varianza σ^2. Sea la variable aleatoria $\overline{X}$ conocida como la media muestral. Entonces $\overline{X} \sim N\left(\bar{x}; \mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

m.a de tamaño k

$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \underbrace{\frac{1}{n}}_{a_1} X_1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{a_2} X_2 + \cdots + \underbrace{\frac{1}{n}}_{a_n} X_n + \underbrace{0}_{b=0}$

Población $N(x; \mu, \sigma^2)$



Tamaño de la población: N
Tamaño de la muestra: n
$n \leq N$

si $n < N$ es un muestreo | $n = N$ es un censo

Demostración

$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ Por el corolario anterior se tiene que $\overline{X} \sim N\left(\bar{x}; \mu_{\overline{X}} = \frac{1}{n}n\mu = \mu, \sigma_{\overline{X}}^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}\right)$

$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n} n\mu = \mu$

$V(\bar{X}) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$
$= \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$
$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i)$
$= \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

Cualquier X_i de esta población cumple:

$E(X_i) = \mu$

$V(X_i) = \sigma^2$

μ : Media poblacional
$\bar{x}$: media muestral de una muestra de tamaño n.

$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

Ejemplo 1: Un eje con diámetro exterior distribuido normalmente con media 1.2 y varianza 0.0016 se inserta en un cojinete de manguito que tiene un diámetro interior distribuido normalmente con media 1.25 y varianza 0.0009 ¿Cuál es la probabilidad de que el eje no quepa en el cojinete?

Solución

X : Diámetro exterior del eje.
Y : Diámetro interior del cojinete.

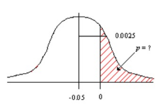
$X \sim N(x; \mu_X = 1.2, \sigma_X^2 = 0.0016)$
$Y \sim N(y; \mu_Y = 1.25, \sigma_Y^2 = 0.0009)$

Si el eje es más grande que el cojinete, entonces no cabe, por lo tanto la probabilidad de que el eje no quepa en el cojinete coincide con $P(X > Y)$, aplicando la teoría sobre suma de normales y estandarizando se tiene que:

$P(X > Y) = P(X - Y > 0) = P(W > 0)$

Con $W = X - Y$, entonces $W \sim N(w; \mu_W = 1.2 - 1.25 = -0.05, \sigma_W^2 = 0.0016 + 0.0009 = 0.0025)$.

Por lo tanto $P(W > 0) = P\left(Z > \frac{0 - (-0.05)}{\sqrt{0.0025}}\right) = P(Z > 1) = 1 - 0.84134 = 0.15866$

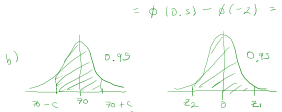


Ejemplo 2: La dureza de Rockwell de una aleación particular se distribuye normalmente con media de 70 y desviación estándar de 4.
a) Si un espécimen se acepta sólo si su dureza está entre 62 y 72. ¿Cuál es la probabilidad de que un espécimen elegido al azar tenga una dureza aceptable?
b) Si el intervalo de dureza aceptable es $(70 - c, 70 + c)$ ¿Para qué valor de c el 95% de los especimenes tendrían una dureza aceptable?
c) En el caso de que el intervalo aceptable sea el indicado en a) y la dureza de cada uno de 9 especimenes seleccionados al azar se determine en forma independiente ¿Cuál es el número esperado de especimenes aceptables de entre los 9?

X: Dureza
$X \sim N(x; \mu = 70, \sigma^2 = 4^2)$

a) $P(62 \leq X \leq 72) = P\left(\frac{62 - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{72 - \mu}{\sigma}\right)$
$= P\left(\frac{62 - 70}{4} \leq Z \leq \frac{72 - 70}{4}\right) = P(-2 \leq Z \leq \frac{1}{2})$
$= \phi(0.5) - \phi(-2) = 0.6915 - 0.0228 = 0.6687$

b)



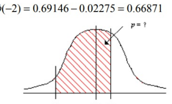
$z_1 = \frac{70 + c - \mu}{\sigma} = \frac{70 + c - 70}{4}$

Solución

X : Dureza de la aleación.
$X \sim N(x; \mu = 70, \sigma^2 = 16)$

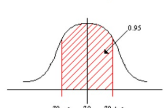
a) $P(62 < X < 72) = P\left(\frac{62 - 70}{4} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{72 - 70}{4}\right) = P(-2 < Z < 0.5)$

$$= \phi(0.5) - \phi(-2) = 0.69146 - 0.02275 = 0.66871$$



b) $P(70 - c < X < 70 + c) = P\left(\frac{70 - c - 70}{4} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{70 + c - 70}{4}\right) = P\left(\frac{-c}{4} < Z < \frac{c}{4}\right) = 0.95$

Debido a la simetría de la distribución y del intervalo se busca en tablas el valor de z que acumula una probabilidad de 0.975 el cual es $z = 1.96$ entonces, $1.96 = \frac{c}{4}$, por lo tanto $c = 4(1.96) = 7.84$



c) Sea Y : el número de especimenes aceptables.

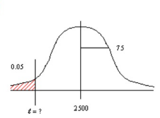
$\therefore\ Y \sim \text{bin}(y;\ n = 9,\ p = 0.66871)$

$E(Y) = np = 9(0.66871) = 6$

Ejemplo 3: Se sabe que cierta bombilla eléctrica tiene una salida que se distribuye normalmente con media de 2500 pie-candela y desviación estándar de 75 pie-candela. Determine un límite de especificación inferior tal que sólo 5% de las bombillas fabricadas sean defectuosas.

Solución

X : Salida de la bombilla.
$X \sim N(x; \mu = 2500, \sigma^2 = 75^2)$



$P(X < l) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{l - 2500}{75}\right) = P(Z < z) = 0.05$

Buscando en tablas el valor de z que corresponde a la probabilidad acumulada de 0.05, se tiene que $z = \frac{l - 2500}{75} = -1.65$ por lo tanto el límite inferior de especificación debe ser:
$l = 75z + 2500 = 75(-1.65) + 2500 = 2{,}376.25$ pie-candela.