Viernes 24 de septiembre de 2021.

3 VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS.

OBJETIVO: Caracterizar las distribuciones de probabilidad de las variables aleatorias continuas más comunes.

Si la v.a cuenta es discreta
Si la v.a mide es continua.

3.1 VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS.

Si se tuviera interés en ***medir*** la estatura de una persona, el peso de un artículo, la vida útil de algún aparato electrónico, etc. no se podría descartar ningún número real como posible resultado, una variable de este tipo se llama **continua** y debido a que el número de valores posibles que puede tomar la variable es infinito, la probabilidad de que tome un valor x en particular es cero. Lo cual se escribe como $P(X=x)=0$, $-\infty<x<\infty$.

$P(X=1)=\frac{1}{2}\neq 0$ Discreto

Observa que:

i) $P(a<X\le b)=P(a<X<b)+P(X=b)=P(a<X<b)$.
ii) $P(a\le X<b)=P(X=a)+P(a<X<b)=P(a<X<b)$.
iii) $P(a\le X\le b)=P(X=a)+P(a<X<b)+P(X=b)=P(a<X<b)$.

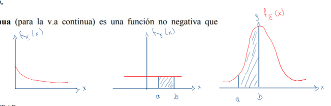
Es decir; $P(a<X\le b)=P(a\le X<b)=P(a\le X\le b)=P(a<X<b)$.

3.1.1 FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD.

Definición: Una **función de densidad continua** (para la v.a continua) es una función no negativa que cumple dos propiedades:

i) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx=1$

ii) $P(a<X<b)=\int_a^b f_X(x)dx$



3.1.2 FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD.

Definición: La **función de distribución o función de probabilidad acumulada** para una v.a continua, X con función de densidad $f_X(x)$ está dada por

$$F_X(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, \quad -\infty<x<\infty$$

Observación:

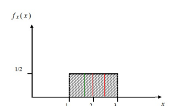
i) $\boxed{f_X(x)=F'_X(x),}$ $-\infty<x<\infty$ en todos los puntos donde $f_X(x)$ es continua.

ii) $f_X(x)=0$ en otro caso.

Ejemplo 1: Una v.a continua X que puede asumir valores entre 1 y 3 tiene una función de densidad de probabilidad dada por $f_X(x)=\frac{1}{2}$.

a) Muestra que el área bajo la curva es 1.
b) Encuentra $P(2<X<2.5)$.
c) Encuentra la $P(X\le 1.6)$.
d) Encuentra $F_X(x)$ y úsala para encontrar $P(2<X<2.5)$.

Solución



Función de densidad para la v.a X

Observa que esta v.a sólo toma valores de 1 a 3, en los demás puntos la función es cero. El área total bajo la curva debe ser 1, por definición de f.d.p, debido a que la representación gráfica de esta función es una figura geométrica conocida, también podemos encontrar el área bajo la curva con la fórmula del área para el rectángulo, con base igual a 2 y altura igual a $\frac{1}{2}$.

a) $\int_1^3 f_X(x)dx=\int_1^3\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}x\Big|_1^3=\frac{1}{2}(3-1)=\underline{1}$

b) $P(2<X<2.5)=\int_2^{2.5} f_X(x)dx=\int_2^{2.5}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}x\Big|_2^{2.5}=\frac{2.5-2}{2}=\underline{\frac{1}{4}}$

c) $P(X\le 1.6)=\int_1^{1.6} f_X(x)dx=\int_1^{1.6}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}x\Big|_1^{1.6}=\frac{1.6-1}{2}=\underline{0.3}$

d) $F_X(x)=P(X\le x)=\int_1^{x} f_X(t)dt=\int_1^{x}\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}t\Big|_1^{x}=\frac{x-1}{2}$ para $1\le x\le 3$

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ \frac{x-1}{2} & 1\le x\le 3\\ 1 & x>3\end{cases}$$

Usando la acumulada se tiene que: $P(2<X<2.5)=F_X(2.5)-F_X(2)=\frac{2.5-1}{2}-\frac{2-1}{2}=\frac{0.5}{2}=\underline{\frac{1}{4}}$

Ejemplo 2: Sea Y una v.a continua con función de densidad de probabilidad

$$f_Y(y)=\begin{cases}3y^2 & 0\le y\le 1\\ 0 & \text{o.c}\end{cases}$$

Encuentra la función de probabilidad acumulada y grafica ambas funciones.

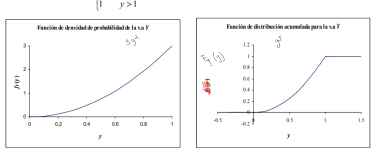
Solución

$$F_Y(y)=\int_0^y f_Y(t)dt=\int_0^y 3t^2dt=\frac{3t^3}{3}\Big|_0^y=y^3$$

$F_Y(y)=\begin{cases}0 & y<0\\ y^3 & 0\le y\le 1\\ 1 & y>1\end{cases}$

Entonces

$$F_Y(y)=\begin{cases}0 & y<0\\ y^3 & 0\le y\le 1\\ 1 & y>1\end{cases}$$



3.2 VALOR ESPERADO Y VARIANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA.

Las definiciones para media, varianza y f.g.m de una v.a continua son similares al caso discreto, sólo se cambian las sumatorias por integrales.

$E(g(X))=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx$

Media: $\mu_X=E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx$

Varianza: $\sigma_X^2=V(X)=E\left[(X-\mu_X)^2\right]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_X)^2f_X(x)dx$

Otra manera de expresar la varianza de la v.a X es: $\sigma_X^2=E(X^2)-\mu_X^2=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f_X(x)dx-\mu_X^2$

Función generadora de momentos: $\psi_X(t)=E(e^{tX})=\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}f_X(x)dx$

Ejemplo 1: Si la v.a X tiene una f.d. expresada por la siguiente función:

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{4(1-x^3)}{3} & 0<x<1\\ 0 & \text{o.c}\end{cases}$$

a) Demuestra que es una función de densidad de probabilidad.
b) Encuentra la media y la varianza de la v.a X.
c) Encuentra la función de distribución acumulada.

Solución

a) Hay que verificar que se cumplen las dos condiciones de una f.d.p.
i) Observa que para x entre 0 y 1 el valor de la función es siempre no negativo.
ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx=\int_0^1\frac{4(1-x^3)}{3}dx=\frac{4}{3}\left[\int_0^1dx-\int_0^1x^3dx\right]=\frac{4}{3}\left[x-\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)=\underline{1}$

Por estas dos propiedades se concluye que sí es una f.d.p.

b) $E(X)=\int_0^1 xf_X(x)dx=\int_0^1x\frac{4(1-x^3)}{3}dx=\frac{4}{3}\left[\int_0^1xdx-\int_0^1x^4dx\right]$

$$=\frac{4}{3}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\frac{4}{3}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right]=\underline{\frac{2}{5}}$$

$$E(X^2)=\int_0^1x^2f_X(x)dx=\int_0^1x^2\frac{4(1-x^3)}{3}dx=\frac{4}{3}\left[\int_0^1x^2dx-\int_0^1x^5dx\right]$$

$$=\frac{4}{3}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^6}{6}\right]_0^1=\frac{4}{3}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right]=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{6}\right)=\underline{\frac{2}{9}}$$

$$V(X)=E(X^2)-\mu_X^2=\frac{2}{9}-\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{50-36}{9(25)}=\underline{\frac{14}{225}}$$

c) $F_X(x)=\int_0^x f_X(t)dt=\int_0^x\frac{4(1-t^3)}{3}dt=\frac{4}{3}\left[t-\frac{t^4}{4}\right]_0^x=\frac{4}{3}\left[x-\frac{x^4}{4}\right]=\frac{4x}{3}-\frac{x^4}{3}=\frac{4x-x^4}{3}$

Entonces la función de distribución acumulada queda como

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{4x-x^4}{3} & 0<x<1\\ 1 & x>1\end{cases}$$

Ejemplo 2: Si la función de probabilidad de una v.a. continua X es

$$f_X(x)=\begin{cases}ce^{-2x} & x>0\\ 0 & \text{o.c}\end{cases}$$

a) Determina el valor de c.
b) Encuentra $P(1<X<2)$.

Solución

a) Se sabe que $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx=1$

Entonces $\int_0^{\infty}ce^{-2x}dx=c\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x}\Big|_0^{\infty}=\frac{c}{2}=1 \therefore \underline{c=2}$

$u=-2x \quad du=-2dx$

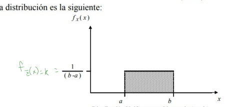
b) $P(1<X<2)=\int_1^2 2e^{-2x}dx=-\int_1^2e^{-2x}(-2)dx=-e^{-2x}\Big|_1^2=-e^{-4}+e^{-2}=\underline{0.117}$

DISTRIBUCIÓN UNIFORME.

La más sencilla de las distribuciones continuas es la uniforme, la cual recibe su nombre debido a que es constante en todo el intervalo donde existe. Se dice que la v.a continua X, tiene una distribución uniforme si su **f.d.p** está dada por la expresión:

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{o.c.}\end{cases}$$

Dado que el área bajo la función es la probabilidad total, podemos encontrar esta área con la fórmula conocida para un rectángulo, con base igual a $(b-a)$ y altura $\left(\frac{1}{b-a}\right)$, con lo cual se obtiene la unidad. La gráfica de esta distribución es la siguiente:



Distribución Uniforme en el intervalo (a , b)

$1=\int_a^b f_X(x)dx=kx\Big|_a^b=k(b-a)$
$\rightarrow k=\frac{1}{b-a}$

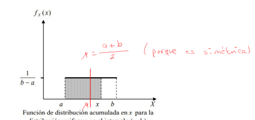
La notación para esta distribución es $X\sim U(a,b)$ y se lee "la v.a X se distribuye uniformemente en el intervalo (a,b)."

La **función de probabilidad acumulada** para esta distribución está dada por:

$F_X(x)=\int_a^x\frac{dt}{b-a}=\frac{t}{b-a}\Big|_a^x=\frac{x-a}{b-a}$ si $a<x<b$.

$F'_X(x)=\frac{1}{b-a}(x-a)'=\frac{1}{b-a}(1)=\frac{1}{b-a}=f_X(x)$

Observa que es la fórmula para encontrar el área del rectángulo delimitado por las rectas $x=a$, $x=x$, $y=0$ y $y=\frac{1}{b-a}$.



Función de distribución acumulada en x para la distribución uniforme en el intervalo (a, b).

Valor esperado, varianza y f.g.m.

$$\mu_X=E(X)=\int_a^b xf_X(x)dx=\int_a^b x\left(\frac{1}{b-a}\right)dx=\frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{(b+a)\cancel{(b-a)}}{2\cancel{(b-a)}}$$

$$\boxed{\mu_X=\frac{a+b}{2}}$$

Para el cálculo de la varianza necesitamos el segundo momento:

$$E(X^2)=\int_a^b\frac{x^2dx}{b-a}=\frac{x^3}{3(b-a)}\Big|_a^b=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{(b^2+ab+a^2)\cancel{(b-a)}}{3\cancel{(b-a)}}=\frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$b-a \,\overline{)\, b^3-a^3}$; b^2+ab+a^2
$-b^3+ab^2$
$-ab^2+a^2b$
$-a^2b+a^3$

Por lo tanto la varianza es:

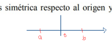
$$\sigma^2=V(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$
$$=\frac{4a^2+4ab+4b^2-3a^2-6ab-3b^2}{12}=\frac{a^2+b^2-2ab}{12}$$

$$\boxed{\sigma^2=\frac{(a-b)^2}{12}}=\frac{(b-a)^2}{12} \qquad (-1)^2=1^2$$

La **f.g.m** es de la forma:

$$\psi_X(t)=E(e^{tX})=\int_a^b\frac{e^{tx}dx}{b-a}=\frac{e^{tx}}{t(b-a)}\Big|_a^b=\frac{e^{bt}-e^{at}}{t(b-a)} \qquad \boxed{\psi_X(t)=\frac{e^{bt}-e^{at}}{t(b-a)}}$$

Ejemplo 1: Si X se distribuye uniformemente, es simétrica respecto al origen y tiene varianza 1. ¿Cuánto vale a y cuánto b?



Solución

Por ser simétrica respecto al origen se tiene que si $b=k$, entonces $a=-k$. Además la información que se tiene es que: $V(X)=\frac{(a-b)^2}{12}=\frac{(-k-k)^2}{12}=1 \therefore 12=4k^2$

es decir; $k=\sqrt{3}$ y por lo tanto $a=-\sqrt{3}$ y $b=\sqrt{3}$.

Ejemplo 2: Si $X\sim U(a=0,b=4)$. ¿Cuál es la probabilidad de que las raíces de $y^2+4xy+x+1=0$ sean reales?

$f_X(x)=\frac{1}{b-a}=\frac{1}{4-0}=\frac{1}{4}$

Solución

Las raíces de la ecuación cuadrática $y^2+(4x)y+(x+1)=0$, se sacan usando la fórmula general con $a=1$, $b=4x$ y $c=x+1$.

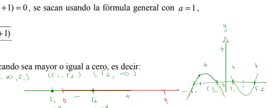
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-4x\pm\sqrt{16x^2-4(x+1)}}{2}$$

Para que las raíces sean reales se necesita que el radicando sea mayor o igual a cero, es decir:

$$16x^2-4(x+1)\ge 0$$

Dividiendo entre 4, se tiene que $4x^2-x-1\ge 0$

$4(0)-0-1$



Esta última nuevamente es una ecuación de segundo grado pero ahora en x, con raíces dadas por;

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4(4)(-1)}}{2(4)}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{8}=\begin{cases}0.64\\ -0.39\end{cases}$$

Observa que la función es positiva en el intervalo (0.64, 4). La probabilidad de que las raíces sean reales coincide con la probabilidad de que X esté en ese intervalo.
Dado que $X\sim U(0,4)$ procedemos como sigue:

$$P(0.64<X<4)=\int_{0.64}^4\frac{dx}{4}=\frac{x}{4}\Big|_{0.64}^4=\frac{4-0.64}{4}=\underline{0.84}$$