Martes 26 de octubre de 2021.

Método de los momentos para estimar parámetros.

Este método da por hecho que los momentos muestrales son una buena aproximación de los momentos poblacionales, por lo tanto se igualan ambos momentos y de ahí se despeja el estimador del parámetro de interés.

$\mu_k = E(X^k)$ k-ésimo momento poblacional de la v.a X.

$m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^{\,k}$ k-ésimo momento muestral de la v.a X.

$\boxed{\mu_k = m_k}$ y de aquí se despeja el estimador.

Al estimador del parámetro θ obtenido por el método de los momentos se le pone una tilde de la forma $\tilde{\theta}$.

Ejemplo 9: Sea $X \sim N(x;\mu,\sigma^2)$ estima $\underline{\theta} = (\mu,\sigma^2)$ en base a una muestra aleatoria de tamaño n usando el método de los momentos.

Solución

Tenemos dos parámetros a estimar por lo tanto necesitamos los dos primeros momentos muestrales y los dos primeros momentos poblacionales.
Se igualan los primeros momentos; $\tilde{\mu} = \bar{x}$
Se igualan también los segundos momentos

$V(\bar{X}) = E(\bar{X}^2) - \mu^2$

$E(\bar{X}^2) = V(\bar{X}) + \mu^2$

$= \sigma^2 + \mu^2$

$\mu_2 = E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = m_2$ entonces $\boxed{\tilde{\mu} = \bar{x}}$

$$\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\mu}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\tilde{\sigma}^2 + (\bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2 = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n(\bar{x})^2\right]$$

$$\boxed{\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

¿Qué pero le ponemos a este estimador?
R.- No es insesgado
(El estimador insesgado para σ^2 es $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

Ejemplo 10: Determina los estimadores por momentos para los parámetros α y β de la distribución gamma, en base a una m.a de tamaño n.

2 estimadores
∴ Necesitamos 2 momentos poblacionales y 2 momentos muestrales

Solución

Igualando los dos primeros momentos poblacionales con los muestrales tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas a resolver.

$$\mu_1 = \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}} = \bar{X} = m_1$$

$$\mu_2 = \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}^2} + \frac{\tilde{\alpha}^2}{\tilde{\beta}^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = m_2$$

sistema de ecs. 2x2

si $\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}} = \bar{x}$ ∴ $\left(\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}}\right)\frac{1}{\tilde{\beta}} + \left(\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$

$\frac{\bar{x}}{\tilde{\beta}} + \bar{x}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$

$\frac{\bar{x}}{\tilde{\beta}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$

$\frac{1}{\tilde{\beta}} = \frac{\frac{1}{n}\left[\sum x_i^2 - n\bar{x}^2\right]}{\bar{x}}$

$\tilde{\beta} = \frac{\bar{x}}{\frac{1}{n}\left[\sum x_i^2 - n\bar{x}^2\right]} = \frac{n\bar{x}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$

Despejando $\tilde{\alpha}$ de la primera ecuación y sustituyendo en la segunda se tiene:

$$\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}\bar{X}$$

$$\frac{\tilde{\beta}\bar{X}}{\tilde{\beta}^2} + \frac{\tilde{\beta}^2\bar{X}^2}{\tilde{\beta}^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

$$\frac{\bar{X}}{\tilde{\beta}} + \bar{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

$$\frac{\bar{X}}{\tilde{\beta}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2 - \bar{X}\right)^2$$

Finalmente, los estimadores por el método de los momentos para los parámetros de la distribución Gamma son: $\tilde{\beta} = \frac{n\bar{X}}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2 - \bar{X}\right)^2}$ y $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}\bar{X} = \frac{n\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2 - \bar{X}\right)^2}$

Ejemplo 11: Sea X una v.a binomial con parámetros n y p desconocidos, encuentra los estimadores por el método de los momentos para tales parámetros en base a una muestra aleatoria de tamaño k.

Solución

$$\mu_1 = np = \bar{X} = m_1$$

$$\mu_2 = np(1-p) + n^2p^2 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_i^2 = m_2$$

$$\bar{X}(1-\tilde{p}) + \bar{X}^2 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_i^2$$

$$\bar{X} - \tilde{p}\bar{X} + \bar{X}^2 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_i^2$$

$$\bar{X} - \tilde{p}\bar{X} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(X_i - \bar{X})^2$$

$$\tilde{p}\bar{X} = \bar{X} - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(X_i - \bar{X})^2$$

$$\boxed{\tilde{p} = 1 - \frac{1}{k\bar{X}}\sum_{i=1}^{k}(X_i - \bar{X})^2}$$

$$\boxed{\tilde{n} = \frac{\bar{X}}{\tilde{p}} = \frac{k\bar{X}^2}{k\bar{X} - \sum_{i=1}^{k}(X_i - \bar{X})^2}}$$

Ejemplo 12: Sea una población con distribución Geométrica con parámetro p. Encuentra el estimador para el parámetro usando el método de los momentos y en base a una muestra aleatoria de tamaño n.

Solución

$\mu_1 = \frac{1}{\tilde{p}} = \bar{X} = m_1 \quad \therefore \quad \tilde{p} = \frac{1}{\bar{X}}$

Método De Máxima Verosimilitud.

Definición 5: La función de verosimilitud de n variables aleatorias se define como su densidad conjunta $f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. En particular si $X_1,X_2,\ldots,X_n$ es una muestra aleatoria de la densidad $f(x;\theta)$ entonces la función de verosimilitud de la muestra está dada por

$$L(\theta) = f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\cdots f(x_n;\theta)$$

$$\boxed{L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)}$$

Definición 6: Se dice que $\hat{\theta}$ es un estimador máximo verosímil si maximiza la función de verosimilitud.

Recuerda que para maximizar se deriva parcialmente respecto al parámetro de interés, se iguala a cero y se despeja el valor que hace posible la ecuación.
Por facilidad de cálculo y dado que las funciones $L(\theta)$ y $\ln L(\theta)$ se maximizan en el mismo punto, se acostumbra encontrar al estimador máximo verosímil resolviendo la ecuación $\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(\theta) = 0$

Método:

1) Escribir la función de verosimilitud. $L(\theta)$
[Escribir los 2 primeros términos y el último]

2) Sacar el logaritmo natural. $\ln(L(\theta))$

3) Derivar parcialmente respecto al parámetro o parámetros de interés igualar a cero y despejar al estimador

poner su gorro "^" a los parámetros

de interés o resolver el sistema para encontrar a los estimadores de interés.

Cuando se tiene un vector de parámetros a estimar por ejemplo $\underline{\theta} = (\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k)$ la manera de proceder es resolver las k ecuaciones siguientes:

$$\frac{\partial}{\partial\theta_1}\ln L(\underline{\theta}) = \frac{\partial}{\partial\theta_1}\ln L(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta_2}\ln L(\underline{\theta}) = \frac{\partial}{\partial\theta_2}\ln L(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k) = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta_k}\ln L(\underline{\theta}) = \frac{\partial}{\partial\theta_k}\ln L(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k) = 0$$

Ejemplo 13: Encuentra el estimador máximo verosímil de p en base a una m.a de tamaño n de una población Bernoulli. $\mu = p$

Solución

$$f_X(x;p) = p^x(1-p)^{1-x} \text{ si } x = 0,\ 1$$

i) La función de verosimilitud de una m.a de tamaño n

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,p) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$= p^{x_1}(1-p)^{1-x_1}\, p^{x_2}(1-p)^{1-x_2} \cdots p^{x_n}(1-p)^{1-x_n}$

$= p^{x_1+x_2+\cdots+x_n}(1-p)^{1-x_1+1-x_2+\cdots+1-x_n}$

ii) Sacar el logaritmo natural de la función de verosimilitud.

$$\ln L(p) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln(p) + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln(1-p)$$

iii) Sacar la derivada parcial respecto a p.

$\frac{\partial}{\partial p}\ln L(p) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p} - \frac{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}{1-p}$ ***iv)*** Igualar a cero y resolver la ecuación $\frac{\partial}{\partial p}\ln L(p) = 0$. En el momento en que se iguala a cero se le pone un "gorrito" al parámetro para indicar que se trata de su estimador máximo verosímil.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\hat{p}} - \frac{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}{1-\hat{p}} = 0$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\hat{p}} = \frac{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}{1-\hat{p}}$$

$$\frac{1-\hat{p}}{\hat{p}} = \frac{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\frac{1}{\hat{p}} - 1 = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} - 1$$

$$\frac{1}{\hat{p}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \therefore \hat{p} = \bar{x}$$

Ejemplo 14: Sea $X_1,X_2,\ldots,X_n$ una m.a de una densidad Normal con media μ y varianza σ^2 encuentra el estimador máximo verosímil de $\underline{\theta} = (\mu,\sigma^2)$.