Miércoles 17 de noviembre de 2021.

Ejemplo 5: Se enseño a dos grupos de niños de la escuela primaria a leer por dos métodos diferentes, 50 por cada método. Al terminar el periodo de instrucción, una prueba de lectura dio los siguientes resultados: $\bar{x}_1 = 74, \bar{x}_2 = 71, s_1 = 9, s_2 = 10$. ¿Cuál es el nivel de significancia de la prueba si deseas ~~verificar si hay evidencia de una diferencia real entre las dos medias poblacionales~~? ¿Cuál sería tu conclusión si deseas utilizar un valor de α igual a 0.05?

¿Existe diferencia significativa entre los dos métodos? Utiliza $\alpha = 0.05$

Solución

X_1 : Calificación en la lectura de los niños bajo el método 1.
X_2 : Calificación en la lectura de los niños bajo el método 2.

$n_1 = n_2 = 50$
$\bar{x}_1 = 74, \bar{x}_2 = 71$
$s_1 = 9, s_2 = 10$

Numéricamente $9 \neq 10$ pero estadísticamente puede que si se consideren iguales, pero también puede que no se consideren iguales. Depende del error muestral.

Contraste de hipótesis: $H_o : \mu_1 = \mu_2$
$H_a : \mu \neq \mu_2$

La igualdad siempre va en la hipótesis nula.

Tenemos 3 pruebas para comparar 2 medias

De esas pueden ser 2 pero necesitamos averiguar si las varianzas desconocidas se pueden considerar iguales o diferentes.

Lo podemos hacer con un I.C o con una prueba de hipótesis. (Sólo una de las 2).

Estadístico de prueba: $Z = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\dfrac{S_1^2 + S_2^2}{n}}} = \dfrac{74-71}{\sqrt{\dfrac{81+100}{50}}} = 1.576 \approx 1.58$

Región de rechazo (RR): Rechazar H_0 si $|Z| > Z_{\alpha/2}$ o equivalentemente si $p < \dfrac{\alpha}{2}$

El nivel de confianza es $(1-\alpha)100\% = 95\%$ y $z_{\alpha/2} = 1.96$, como $1.58 < 1.96$ no se rechaza la hipótesis nula, equivalentemente para $z = 1.58$ se tiene que $p = 0.0571 > 0.025$ por lo tanto no se rechaza H_0.

Se concluye que en base a la muestra no existe evidencia de que exista una diferencia real entre los dos métodos de enseñanza para la lectura en los niños de esa primaria.

Averigüemos si $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ usando un I.C

$$\left[\frac{s_1^2}{s_2^2} \frac{1}{F_{\alpha/2, n_1-1, n_2-1}} , \frac{s_1^2}{s_2^2} \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1}} \right]$$

$\alpha = 0.05 \rightsquigarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$

$F_{1-0.025, 49, 49} = F_{0.975, 49, 49} = 0.5674$

$F_{0.025, 49, 49} = 1.7622$

$$\left[\left(\frac{9}{10}\right)^2 \frac{1}{1.7622} , \left(\frac{9}{10}\right)^2 \frac{1}{0.5674} \right] = [0.46, 1.42]$$

Con una confianza del 95% se puede decir que

$$0.95 = P\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \in [0.46, 1.42] \right)$$
$$= P\left(0.46 \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq 1.42 \right)$$
$$= P\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \right)$$

Conclusión: Las varianzas desconocidas son estadísticamente iguales.

Ahora averigüemos si σ_1^2 es igual o diferente estadísticamente usando una prueba de hipótesis.

1) Contraste: $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

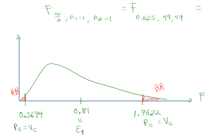
$H_a : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (Prueba bilateral - 2 colas)

2) Estadístico de prueba: $F = \dfrac{s_1^2}{s_2^2} = \dfrac{81}{100} = 0.81$

3) Punto crítico. $\alpha = 0.05$

$F_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1} = F_{0.975, 49, 49} = 0.5674$

$F_{\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1} = F_{0.025, 49, 49} = 1.7622$



$\rightsquigarrow$ No se rechaza la H_0

Conclusión: Existe evidencia estadística, con una significancia del 5% de que las varianzas poblacionales desconocidas, son estadísticamente iguales.

Ahora sí como las varianzas poblacionales desconocidas se pueden considerar iguales la prueba de hipótesis para comparar los métodos bajo estudio es la prueba 4.

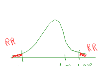
Contraste $H_0 : \mu_1 = \mu_2$
$H_a : \mu_1 \neq \mu_2$

Estadístico de prueba. $t = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_p \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} = \dfrac{74 - 71}{s_p \sqrt{\dfrac{2}{50}}} = \dfrac{15}{9.5131} = 1.576$

$$s_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}} = \sqrt{\frac{49(s_1^2 + s_2^2)}{98}} = \sqrt{\frac{49(81+100)}{98}}$$

$$= \sqrt{\frac{181}{2}} = 9.5131$$

Criterio de decisión. $t_{\alpha/2, n_1+n_2-2} = t_{0.025, 98} = 1.98$



$\rightsquigarrow$ No se rechaza H_0

Conclusión.- Existe evidencia estadística, con una significancia del 5% de que las medias poblacionales son iguales.
Ambos métodos son igual de buenos o igual de malos.

Ejemplo 9: Dos secciones de un curso de estadística son sometidas a un mismo examen final. De las calificaciones obtenidas se extrae una muestra aleatoria de tamaño 9 en el grupo "A", y otra de tamaño 4 en el grupo "B".

Grupo "A":	65, 68, 72, 75, 82, 85, 87, 91, 95
Grupo "B":	50, 59, 71, 80

Con un nivel de significancia de 0.05 ¿podría decirse que los dos grupos tienen las mismas calificaciones promedio? Supón que provienen de poblaciones normales con varianzas iguales.

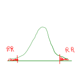
Solución

Contraste de hipótesis: $H_0 : \mu_A = \mu_B$
$H_a : \mu_A \neq \mu_B$

$\bar{x}_A = 80$ $\quad s_A^2 = 110.25$
$\bar{x}_B = 65$ $\quad s_B^2 = 174$

$n_A = 9$
$n_B = 4$

$t_{\alpha/2, n_1+n_2-2} = t_{0.025, 11} = 2.2$



$$s_p = \sqrt{\frac{8(110.25) + 3(174)}{11}}$$

PRUEBAS DE HIPOTESIS MÁS COMUNES

Caso	Contraste de hipótesis	Estadístico de prueba	Criterio de decisión
1) Muestra grande con varianza conocida	$H_o : \mu = \mu_0$ $H_a : \mu < \mu_0$ $H_a : \mu > \mu_0$ $H_a : \mu \neq \mu_0$	$z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	$z < -z_\alpha$ $z > z_\alpha$ $\|z\| > z_{\alpha/2}$
2) Muestra pequeñas con varianza desconocida	$H_o : \mu = \mu_0$ $H_a : \mu < \mu_0$ $H_a : \mu > \mu_0$ $H_a : \mu \neq \mu_0$	$t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$	$t < -t_{\alpha, n-1}$ $t > t_{\alpha, n-1}$ $\|t\| > t_{\alpha/2, n-1}$
3) Dos poblaciones con Varianzas conocidas	$H_o : \mu_1 = \mu_2$ $H_a : \mu_1 < \mu_2$ $H_a : \mu_1 > \mu_2$ $H_a : \mu_1 \neq \mu_2$	$z = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$z < -z_\alpha$ $z > z_\alpha$ $\|z\| > z_{\alpha/2}$
4) Dos poblaciones con varianzas desconocidas pero iguales $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$H_o : \mu_1 = \mu_2$ $H_a : \mu_1 < \mu_2$ $H_a : \mu_1 > \mu_2$ $H_a : \mu_1 \neq \mu_2$	$t = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$ $s_p = \sqrt{\dfrac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}$	$t < -t_{\alpha, n_1+n_2-2}$ $t > t_{\alpha, n_1+n_2-2}$ $\|t\| > t_{\alpha/2, n_1+n_2-2}$
5) Dos poblaciones con varianzas desconocidas diferentes $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$H_o : \mu_1 = \mu_2$ $H_a : \mu_1 < \mu_2$ $H_a : \mu_1 > \mu_2$ $H_a : \mu_1 \neq \mu_2$	$t = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$ $gl = \dfrac{\left[\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right]^2}{\frac{\left(s_1^2/n_1\right)^2}{n_1-1} + \frac{\left(s_2^2/n_2\right)^2}{n_2-1}}$	$t < -t_{\alpha, gl}$ $t > t_{\alpha, gl}$ $\|t\| > t_{\alpha/2, gl}$
6) Una proporción	$H_o : p = p_0$ $H_a : p < p_0$ $H_a : p > p_0$ $H_a : p \neq p_0$	$z = \dfrac{p - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}$	$z < -z_\alpha$ $z > z_\alpha$ $\|z\| > z_{\alpha/2}$
7) Dos proporciones	$H_o : p_1 = p_2$ $H_a : p_1 < p_2$ $H_a : p_1 > p_2$ $H_a : p_1 \neq p_2$	$z = \dfrac{p_1 - p_2}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}}$	$z < -z_\alpha$ $z > z_\alpha$ $\|z\| > z_{\alpha/2}$
8) Una varianza	$H_o : \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_a : \sigma^2 < \sigma_0^2$ $H_a : \sigma^2 > \sigma_0^2$ $H_a : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha, n-1}$ $\chi^2 > \chi^2_{\alpha, n-1}$ $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2, n-1}$ o $\chi^2 > \chi^2_{\alpha/2, n-1}$
9) Dos varianzas	$H_o : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H_a : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ $H_a : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $H_a : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$F = \dfrac{s_1^2}{s_2^2}$	$F < F_{1-\alpha, n_1-1, n_2-1}$ $F > F_{\alpha, n_1-1, n_2-1}$ $F < F_{1-\alpha/2, n_1-1, n_2-1}$ o $F > F_{\alpha/2, n_1-1, n_2-1}$