Miércoles 8 de septiembre de 2021.

Solución

$E[X(X-1)] = E(X^2 - X) = E(X^2) - E(X)$

Pero $V(X) = E(X^2) - E^2(X) \;\therefore\; E(X^2) = V(X) + E^2(X)$

Entonces $E[X(X-1)] = \sigma^2 + \mu^2 - \mu = \sigma^2 + \mu(\mu - 1)$ ◆

2.3 Función generadora de momentos de una variable aleatoria discreta.

Definición: Si X es una v.a con $E(X) = \mu_X$ y k un entero positivo se definen dos tipos de momentos para la v.a:

1._ k-ésimo momento alrededor del origen definido como $\boxed{\mu_k^o = E(X^k) = \sum_x x^k f_X(x)}$

2._ k-ésimo momento alrededor de la media o k-ésimo momento central, definido por:

$$\boxed{\mu_k^c = E\left[(X-\mu_X)^k\right] = \sum_x (x-\mu_X)^k f_X(x)}$$

Observaciones:

i) La media de una v.a es el momento de orden 1 o primer momento alrededor del origen.

$$\mu_X = \mu_1^o$$

ii) La varianza de la v.a X es el segundo momento central de la misma.

$$\sigma_X^2 = \mu_2^c$$

Definición: Si X es una v.a discreta, la función generadora de momentos f.g.m se define como:

$$\boxed{\psi_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_x e^{tx} f_X(x)}$$

Observaciones:

1) Sacando la primera derivada de la f.g.m y evaluando en $t = 0$ se obtiene la media de la v.a.

$$\psi'_X(t=0) = \frac{d}{dt}\left[E(e^{tX})\right]\Big|_{t=0} = E\left[\frac{d}{dt}(e^{tX})\right]\Big|_{t=0} = E(Xe^{tX})\big|_{t=0} = E(Xe^{0(X)}) = E(X)$$

$$\boxed{\psi'_X(t=0) = E(X) = \mu_X}$$

Es más intuitiva la demostración usando el hecho de que la derivada de una suma es la suma de las derivadas, de la manera siguiente:

$$\psi'_X(t) = \frac{d}{dt}\left[E(e^{tX})\right] = \frac{d}{dt}\sum_x e^{tx} f_X(x) = \sum_x \frac{d}{dt} e^{tx} f_X(x) = \sum_x e^{tx} x f_X(x)$$

Evaluando en cero se tiene:

$$\psi'_X(t=0) = \sum_x e^{0(x)} x f_X(x) = \sum_x x f_X(x) = E(X) = \mu_X$$

2) La n-ésima derivada de la f.g.m evaluada en cero es el n-ésimo momento.

La misión en la vida de la f.g.m es generar momentos y ahora ya sabemos cómo lo hace.

$$\frac{d}{dt}\psi_{\underline{X}}(t) = \frac{d}{dt}\sum e^{tx} f_{\underline{X}}(x) = \sum_x \frac{d}{dt} e^{tx} f_{\underline{X}}(x) = \sum_x x e^{tx} f_{\underline{X}}(x)$$

$u = tx$

$\frac{d}{dt}u = x$

Evaluando esta derivada en cero

$\psi'_{\underline{X}}(t=0) = \sum_x x f_{\underline{X}}(x) = E(\underline{X})$ 1er momento.

$\psi''_{\underline{X}}(t=0) = \sum_x x^2 e^{tx} f_{\underline{X}}(x)\Big|_{t=0}$

$= \sum_x x^2 f_{\underline{X}}(x) = E(\underline{X}^2)$ 2° momento

$\psi'''_{\underline{X}}(t=0) = \sum_x x^3 e^{tx} f_{\underline{X}}(x)\Big|_{t=0}$

$= \sum_x x^3 f_{\underline{X}}(x) = E(\underline{X}^3)$ 3er momento

$\vdots$

$\psi^{(n)}_{\underline{X}}(t=0) = E(\underline{X}^n)$ n-ésimo momento.

Propiedades de la f.g.m.

P1._ Si X es una v.a con f.g.m $\psi_X(t)$ y $Y = aX + b$ es otra v.a, con a y b constantes, entonces

$$\boxed{\psi_Y(t) = e^{bt}\psi_X(at)}$$

Ya que $\psi_Y(t) = E(e^{tY}) = E(e^{t(aX+b)}) = E(e^{atX}e^{bt}) = e^{bt}E(e^{atX}) = e^{bt}\psi_X(at)$

P2._ Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes cada una con f.g.m $\psi_{X_i}(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ y $Y = \sum_{i=1}^n X_i$, entonces la f.g.m de la v.a. Y, está dada por $\boxed{\psi_Y(t) = \prod_{i=1}^n \psi_{X_i}(t)}$

Ya que $\psi_Y(t) = E(e^{tY}) = E\left(e^{t\sum_{i=1}^n X_i}\right) = E\left(\prod_{i=1}^n e^{tX_i}\right) = \prod_{i=1}^n E(e^{tX_i}) = \prod_{i=1}^n \psi_{X_i}(t)$

Ejemplos:

1._ Supón que X es una v.a con $E(X)=1$, $E(X^2)=2$ y $E(X^3)=5$. Determina el valor del tercer momento central de X.

Solución

$$\mu_3^c = E\left[(X-\mu)^3\right] = E(X^3 - 3X^2\mu + 3X\mu^2 - \mu^3) = E(X^3) - 3\mu E(X^2) + 3\mu^3 - \mu^3$$

$$\mu_3^c = 5 - 3(2) + 2 = 1$$

2._ Determina la media y la varianza de la v.a X si se sabe que su f.g.m está dada por $\psi_X(t) = \frac{1}{4}(3e^t + e^{-t})$ para $-\infty < t < \infty$.

Solución

La media de la v.a es el primer momento, entonces necesitamos la primera derivada de la f.g.m y evaluar en cero:

$$\psi'_X(t=0) = \frac{1}{4}(3e^t - e^{-t})\Big|_{t=0} = \frac{1}{4}(3-1) = \frac{1}{2} = \mu_X$$

$$\psi''_X(t=0) = \frac{1}{4}(3e^t + e^{-t})\Big|_{t=0} = \frac{1}{4}(3+1) = 1$$

$$V(X) = E(X^2) - \mu_X^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

3._ Sea X una v.a con media μ y varianza σ^2 y sea $\psi_X(t)$ su f.g.m para $-\infty < t < \infty$. Si c es una constante positiva y Y una v.a con f.g.m $\psi_Y(t) = e^{c[\psi_X(t)-1]}$ para $-\infty < t < \infty$. Determina las expresiones de la media y la varianza de Y en función de la media y la varianza de X.

Solución

$$\mu_Y = \psi'_Y(t=0) = e^{c[\psi_X(t)-1]}c\psi'_X(t)\Big|_{t=0} = e^{c(1-1)}c\mu = \underline{c\mu}$$

Ya que $\psi_X(t) = E(e^{tX}) \;\therefore\; \psi_X(0) = E(e^0) = E(1) = 1$

Para el calculo de la varianza, se necesita la segunda derivada de la f.g.m de Y evaluada en cero.

$$\psi'_Y(t) = ce^{-c}e^{c\psi_X(t)}\psi'_X(t)$$

$$\psi''_Y(t) = ce^{-c}\left[e^{c\psi_X(t)}\psi''_X(t) + \psi'_X(t)e^{c\psi_X(t)}c\psi'_X(t)\right]$$

$$\psi''_Y(0) = ce^{-c}\left[e^{c\psi_X(0)}\psi''_X(0) + \mu^2 e^{c\psi_X(0)}c\right]$$

$$= ce^{-c}\left(e^c\psi''_X(0) + c\mu^2 e^c\right)$$

$$= c\psi''_X(0) + c^2\mu^2$$

Pero $\psi''_X(0) = E(X^2) = V(X) + E^2(X) = \sigma^2 + \mu^2$

Entonces $\psi''_Y(0) = c(\sigma^2 + \mu^2) + c^2\mu^2$

Por lo tanto $V(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = c\sigma^2 + c\mu^2 + c^2\mu^2 - c^2\mu^2 = c(\sigma^2 + \mu^2)$

4._ Si $\psi_X(t) = \frac{e^t}{6} + \frac{2e^{2t}}{6} + \frac{3e^{3t}}{6}$. Encuentra a) la esperanza de la v.a, b) su varianza y c) Su función de probabilidad.

Solución

a) $\psi'_X(t=0) = \frac{e^t}{6} + \frac{4e^{2t}}{6} + \frac{9e^{3t}}{6}\Big|_{t=0} = \frac{1+4+9}{6} = \frac{14}{6} \;\therefore\; \mu_X = \frac{7}{3}$

b) $\psi''_X(t=0) = \frac{e^t}{6} + \frac{8e^{2t}}{6} + \frac{27e^{3t}}{6}\Big|_{t=0} = \frac{1+8+27}{6} = \frac{36}{6} \;\therefore\; E(X^2) = 6$

$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = 6 - (7/3)^2 = 6 - \frac{49}{9} = \frac{5}{9}$

c) $\psi_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_x e^{tx}P(X=x) = \frac{1}{6}e^t + \frac{2}{6}e^{2t} + \frac{3}{6}e^{3t}$

La función de probabilidad de esta v.a está dada por la tabla siguiente:

$X = x$	$f_X(x) = P(X = x)$
1	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{2}{6}$
3	$\frac{3}{6}$

Observa que $\frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = 1$.

$8, 9, 10$ $\quad \frac{8+9+10}{3} = 8\left(\frac{1}{3}\right) + 9\left(\frac{1}{3}\right) + 10\left(\frac{1}{3}\right)$ promedio

$\underline{X} = x$	$P(\underline{X} = x)$
8	1/3
9	1/3
10	1/3

$\mu = \sum_x x\,P(\underline{X} = x)$

$\underline{X} = x$	$P(\underline{X} = x)$
8	0.15
9	0.25
10	0.60

$\mu = 8(0.15) + 9(0.25) + 10(0.6)$

Medidas de

- Tendencia central
  - Media - Esperanza - Valor esperado   promedio ponderado
  - Moda - la que más se repite
  - Mediana - la que se encuentra en medio de los valores
- Dispersión
  - Varianza σ^2
  - Desviación estándar $\sqrt{\sigma^2} = \sigma$
  - Rango $R = X_{(n)} - X_{(1)}$

x_1, x_2, x_3, x_4, x_5

$n = 5$ $21, 20, 21, 21, 23$ ¿ mediana 21 ?

$n = 6$ $23, 20, 21, 23, 22, 22$

$\frac{21+23}{2} = $ ¿ 22 es la media?

Primero se ordena la muestra

$X_{(1)} \le X_{(2)} \le \cdots \le X_{(n-1)} \le X_{(n)}$

Estadísticas de orden

$20, 21, 21, 21, 23$ $R = 23 - 20 = 3$

$20, 21, 22, 22, 23, 23$ 22

No necesariamente el valor central en la muestra original y en la muestra ordenada.

Dado

$\underline{X} = x$	$P(\underline{X} = x)$
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

a) Encuentra media y varianza usando la definición.

b) Encuentra la f.g.m

c) Encuentra media y varianza usando la f.g.m

Sol

a) $\mu = \sum_x x\,P(\underline{X} = x) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6}$

$E(\underline{X}^2) = \sum_x x^2 P(\underline{X} = x)$

$= \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6}$

$V(\underline{X}) = E(\underline{X}^2) - \mu^2$

$= \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2 = \frac{546 - 441}{36} = \frac{105}{36}$

b) $\psi_{\underline{X}}(t) = E(e^{t\underline{X}}) = \sum_x e^{tx} P(\underline{X} = x)$

$= \frac{1}{6}(e^t + e^{2t} + e^{3t} + e^{4t} + e^{5t} + e^{6t})$

c) $\mu = \psi'_{\underline{X}}(0)$

$= \frac{1}{6}(e^t + 2e^{2t} + 3e^{3t} + 4e^{4t} + 5e^{5t} + 6e^{6t})\Big|_{t=0}$

$= \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6}$

$E(\underline{X}^2) = \psi''_{\underline{X}}(0)$

$= \frac{1}{6}(e^t + 4e^{2t} + 9e^{3t} + 16e^{4t} + 25e^{5t} + 36e^{6t})\Big|_{t=0}$

$= \frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36)$

$V(\underline{X}) = E(\underline{X}^2) - \mu^2$

$= \frac{105}{36}$

Actividad Para el problema de: Por cada cara ganas \$1.00 y por cada cruz pierdes un peso. Lanzas 3 monedas y $\underline{X}$: Ganancia al cabo de los 3 lanzamientos y $P(C) =$

$\underline{X} = x$	$P(\underline{X} = x)$
-3	0.216
-1	0.432
1	0.288
3	0.064

Encuentra:

a) Media y varianza con definición

b) f.g.m

c) media y varianza con f.g.m

Trabajo en clase 08/09/21

Entregar antes del jueves 09/09/21 a las 10:00 PM