Miércoles 06 de octubre de 2021.

Ejemplo 1: La resistencia al rompimiento en Newton de una tela sintética denotada por X se distribuye normal con media de 800 y varianza 144. El comprador de la tela requiere que esta tenga una resistencia de por lo menos 772N. Se selecciona al azar y se prueba una muestra de tela ¿Cuál es la probabilidad de que el comprador se lleve la tela?

Solución

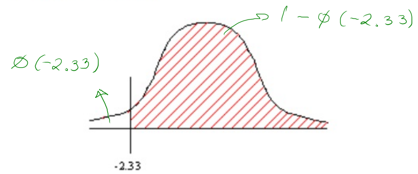
X : Resistencia de la tela al rompimiento.
$X \sim N(x; \mu = 800, \sigma^2 = 144)$

Primero se estandarizan ambos lados de la desigualdad para poder buscar en tablas.

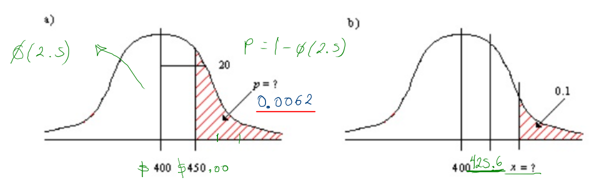
$$P(X \geq 772) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{772-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \geq \frac{772-800}{12}\right) = P(Z \geq -2.33)$$

$$= 1 - \phi(-2.33) = 1 - 0.0099 = 0.9901$$

La probabilidad de que se lleve la tela es 0.99.



Ejemplo 2: Se observó durante un largo período que la cantidad semanal gastada en el mantenimiento y en las reparaciones en cierta fábrica tiene aproximadamente una distribución normal con una media de \$400 y una desviación estándar de \$20. Si el presupuesto para la próxima semana es de \$450.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que los costos reales sean mayores que la cantidad presupuestada?
b) ¿De cuánto tendría que ser el presupuesto para reparaciones semanales y mantenimiento para que la cantidad presupuestada solamente sea rebasada con una probabilidad de 0.1?



Relación de orden

$X \boxed{<} 450$ Ceja, Tenorio

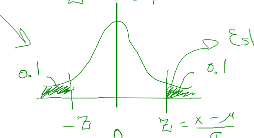
Solución

X : Cantidad semanal gastada.
$X \sim N(x; \mu = 400, \sigma^2 = 400)$

Dos maneras de resolver:

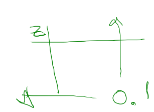
i) Esta cola izquierda o inferior SI es acumulada

$Z \sim N(0,1)$

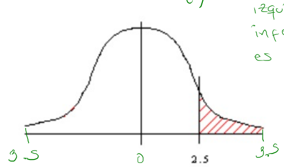


Esta cola derecha o superior NO es acumulada

$Z\sigma + \mu = X$



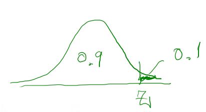
$Z < 0$ $\therefore$ El Z que yo estoy buscando es el Z positivo asociado

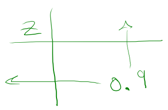


$\frac{x-\mu}{\sigma} = Z$

a) $P(X > 450) = P\left(Z \geq \frac{450-400}{20}\right) = P(Z \geq 2.5) = 1 - \phi(2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062$

ii)

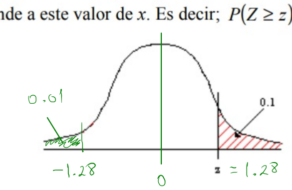




b) Estoy buscando un valor x para la v.a tal que $P(X > x) = 0.1$. Al estandarizar la v.a hay un valor z para la normal estándar que corresponde a este valor de x. Es decir; $P(Z \geq z) = 0.1$.

Este Z si es el que necesito

$\therefore$ hacer $X = \sigma Z + \mu$



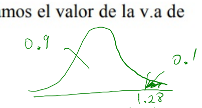
i) si busco en mi tabla una acumulada muy parecida a 0.1 encuentro

0.08
$-1.2 \leftarrow 0.1003$ 0.0985

Buscamos en las tablas el valor de z que corresponde a la probabilidad 0.1 y despejamos el valor de la v.a de interés de la fórmula de estandarización,

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \quad \therefore \quad x = \mu + z\sigma$$

ii)



Busco en mi tabla una acumulada muy parecida a 0.9. Tengo 2 valores cercanos a 0.9

0.08
$1.2 \leftarrow 0.8997$ 0.9015

$z = 1.28$

El valor de tablas es $z = 1.28$ por lo tanto $x = 400 + 1.28(20) = 425.6$.

La cantidad presupuestada tiene que ser de \$425.6 para que sea rebasada con una probabilidad de 0.1

Teorema: Si X tiene una distribución normal con media μ y varianza σ^2 y si $Y = aX + b$ donde a y b son constantes con a diferente de cero, entonces Y tiene una distribución normal con media $a\mu + b$ y varianza $a^2\sigma^2$.

Obs. $E(Y) = E(aX + b) = aE(X) + b = a\mu + b = \mu_Y$

$V(Y) = V(aX + b) = a^2 V(X) = a^2\sigma^2 = \sigma^2_Y$

Demostración

$X \sim N(x; \mu, \sigma^2)$
$Y = aX + b$

$$\psi_Y(t) = E(e^{tY}) = E(e^{t(aX+b)}) = e^{tb}E(e^{atX}) = e^{tb}\psi_X(at) = e^{tb}e^{at\mu + \frac{1}{2}a^2t^2\sigma^2} = \exp[(b + a\mu)t + \tfrac{1}{2}t^2(a^2\sigma^2)]$$

La f.g.m para la v.a Y corresponde a una normal con $\mu_Y = a\mu + b$ y $\sigma^2_Y = a^2\sigma^2$.