Martes 5 de octubre de 2021.

3.4 Distribución Normal.

Es una de las distribuciones más importantes en estadística, es simétrica respecto a su media y casi el 98% de la distribución se encuentra entre $(\mu-2\sigma, \mu+2\sigma)$, en gran parte de las aplicaciones se supone normalidad en las variables.
Se dice que la v.a X tiene una distribución normal o Gaussiana con parámetros μ y σ^2 y se escribe $X \sim N(x;\mu,\sigma^2)$ si su **f.d.p** es de la forma:

$$\boxed{f_X(x)=\frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}} \quad \text{con } -\infty<x<\infty,\ \ -\infty<\mu<\infty,\ \ \sigma^2>0$$

Ejercicio: Demuestra que $\int_{-\infty}^{\infty} N(x;\mu,\sigma^2)dx=1$

Solución

Sea $\mathrm{I}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}dx$

Si probamos que $\mathrm{I}^2=1$, se tendría que $\mathrm{I}=1$ y habremos terminado.

Haciendo el cambio de variable $u=\frac{x-\mu}{\sigma}$ $\therefore$ $du=\frac{dx}{\sigma}$, sustituyendo en I nos queda:

$$\mathrm{I}=\frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du \quad \text{entonces} \quad \mathrm{I}^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{v^2}{2}}dv\right)$$

$$\mathrm{I}^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}dudv$$

Trabajando con coordenadas polares,

Si $u=rCos\theta$ y $v=rSen\theta$
$u^2+v^2=r^2Cos^2\theta+r^2Sen^2\theta=r^2\left(Cos^2\theta+Sen^2\theta\right)=r^2$

$$\begin{vmatrix}\partial_r u & \partial_\theta u\\ \partial_r v & \partial_\theta v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}Cos\theta dr & -rSen\theta d\theta\\ Sen\theta dr & rCos\theta d\theta\end{vmatrix}=rCos^2\theta drd\theta+rSen^2\theta drd\theta=rdrd\theta\left(Cos^2\theta+Sen^2\theta\right)=rdrd\theta$$

$$\mathrm{I}^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}e^{-\frac{r^2}{2}}rdrd\theta$$

Tomando $u=-\frac{r^2}{2}$ y $du=-rdr$

$$\mathrm{I}^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\Big|_0^{\infty}\right]d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{1}{2\pi}\theta\Big|_0^{2\pi}=1$$

Observa que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ es una normal con media 0 y varianza 1. Esta normal recibe el nombre de normal estándar y se denota como $Z \sim N(0,1)$.

3.4.1 Estandarización y Cálculo de Probabilidades Utilizando las Tablas.

La v.a Normal estándar se representa con la letra zeta y se escribe $Z\sim N(z;0,1)$ o simplemente $Z\sim N(0,1)$, los valores de la distribución acumulada de la normal estándar se encuentran tabulados en unas tablas conocidas como tablas normales.

Función generadora de momentos.

$$\psi_X(x)=E\left(e^{tX}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx$$

Tomando $u=\frac{x-\mu}{\sigma}$ y $du=\frac{dx}{\sigma}$

$$\psi_X(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{t(\mu+\sigma u)}e^{-\frac{1}{2}u^2}\sigma du=\frac{e^{t\mu}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\left(u^2-2t\sigma u\right)}du$$

Completando el trinomio cuadrado perfecto en la exponencial.

$$\psi_X(t)=\frac{e^{t\mu}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\left(u^2-2t\sigma u+t^2\sigma^2-t^2\sigma^2\right)}du=\frac{e^{t\mu}e^{\frac{1}{2}t^2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(u-t\sigma)^2}du$$

$z=u-t\sigma$ y $dz=du$

$$\psi_X(t)=\exp\left(t\mu+\tfrac{1}{2}t^2\sigma^2\right)\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\tfrac{1}{2}z^2\right)dz\right]$$

Observa que el término entre corchetes es una normal estándar por lo que la integral tiene el valor de 1 por ser una f.d.p. así que la f.g.m de la normal es: $\boxed{\psi_X(t)=\exp\left(t\mu+\tfrac{1}{2}t^2\sigma^2\right)}$

Media y varianza.

$$E(X)=\psi'_X(t=0)=e^{t\mu+\frac{1}{2}t^2\sigma^2}\left[\mu+\frac{\sigma^2 2t}{2}\right]\Big|_{t=0}=e^0(\mu+0)=\mu$$

$$E\left(X^2\right)=\psi''_X(t=0)=e^{t\mu+\frac{1}{2}t^2\sigma^2}\sigma^2+\left[\mu+\sigma^2t\right]e^{t\mu+\frac{1}{2}t^2\sigma^2}\left(\mu+\sigma^2t\right)\Big|_{t=0}=e^0\sigma^2+\mu e^0\mu=\sigma^2+\mu^2$$
$$V(X)=E\left(X^2\right)-E^2(X)=\sigma^2+\mu^2-\mu^2=\sigma^2$$

Función de distribución acumulada.

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx$$

Esta integral se tiene que hacer con métodos de integración numérica, pero se tabularon los valores para la normal estándar es decir para la normal con media cero y varianza 1. La distribución acumulada en z se denota por

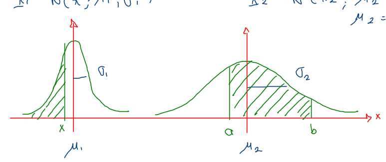
$\phi(z)=F_Z(z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz$. Las tablas se conocen como tablas normales. Para consultarlas, primero se estandariza la distribución normal con media μ y σ^2, $N(x;\mu,\sigma^2)$ mediante la fórmula, $\boxed{z=\frac{x-\mu}{\sigma}}$.

Los valores originales de la variable se recuperan con la fórmula $x=z\sigma+\mu$.

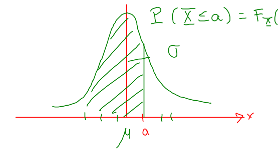
98,764,127

$\bar{X}_1 \sim N(x;\mu_1,\sigma_1^2)$ $\qquad$ $\bar{X}_2 \sim N(x_2;\mu_2,\sigma_2^2)$

$\mu_2 = 0.014$ cm



$\bar{X} \sim N(x;\mu,\sigma^2)$

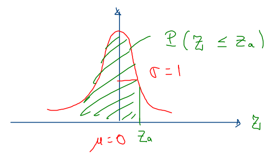


Si $\sigma_1 < \sigma_2$ $\therefore$ $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$

Si $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ $\therefore$ $\sigma_1 < \sigma_2$

NORMAL ESTÁNDAR

$Z \sim N(0,1)$ $\mu=0$ y $\sigma^2=1$



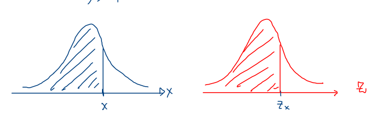
$P(Z \le z_a) = F_Z(z_a) = \phi(z_a)$

Acumulada en z_a
de una Normal estándar.

$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

estandarización

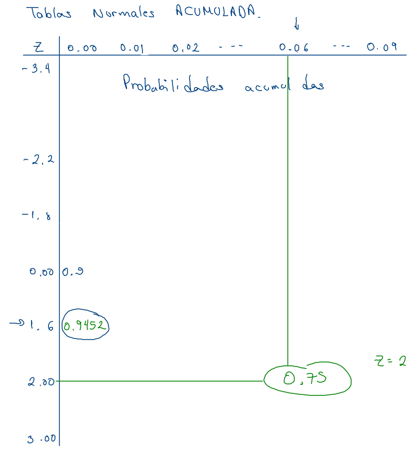
$\bar{X} \sim N(x;\mu,\sigma^2)$ $\qquad$ $Z \sim N(0,1)$

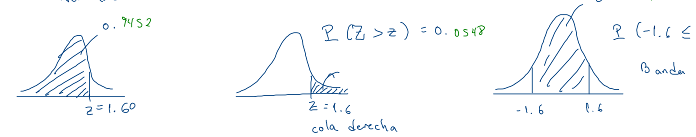


desestandarización

$x = z\sigma + \mu$

Tablas Normales ACUMULADA.





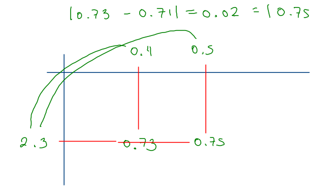
$z = 2.06$ $\quad$ $\phi(2.06) = 0.75$

Si conozco la probabilidad acumulada hay que buscar adentro de la tabla el valor que más se aproxime.

Si existen 2 valores que estén igual de cerca se toma el de en medio.

Ejm.. Quiero 0.73 y en la tabla no viene pero están 0.71 y 0.75

$|0.73 - 0.71| = 0.02 = |0.75 - 0.73|$



z : $\quad$ 2.34 $\qquad$ 2.35

$\quad$ 2.340 $\qquad$ 2.350

2.345 $\quad$ $\therefore$ El valor de z que se toma es 2.345

Ejercicio: Encuentra el valor de z que acumula el 95% de la probabilidad.

Tarea 05_10_21