

5.1.2 INTERVALOS POR INTERVALO.

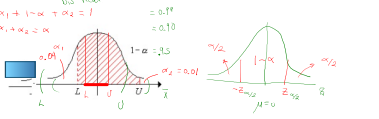
Cuando vemos hemos escuchado expresiones como "tema entre 25 y 30 años", "yo pienso que saca entre 8 y 10 en el examen de matemáticas", "espero llegar entre 10:30 y 11:45", "tiene una estatura entre 1.75m y 1.85m", etc. Todas estas expresiones en realidad son estimaciones por intervalo y muchas veces una estimación de este tipo nos da más información que una estimación puntual. Y la manera de hacer estimaciones por intervalo es construyendo intervalos de confianza.

5.2 INTERVALOS DE CONFIANZA.

Un intervalo de confianza (IC) es un intervalo de la forma $[L, U]$ que se construye de tal manera que exista una probabilidad grande de que el parámetro de interés se encuentre dentro del intervalo. Si α es un número pequeño entonces $(1-\alpha)$ es un número grande y si $P(L \leq \theta \leq U) = 1-\alpha$, se dice que $[L, U]$ es un intervalo para el parámetro θ con una confianza de $(1-\alpha)100\%$.

CASO 1.- IC para la media poblacional, cuando la muestra es grande y la varianza conocida. ($n \geq 30$ y σ^2 conocida)

Queremos estimar la media poblacional, como es de suponerse el estimador puntual idóneo es la media muestral \bar{X} , en base a una muestra aleatoria de tamaño n de una densidad con media μ desconocida y varianza σ^2 conocida se tiene que el TCL garantiza que $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ entonces $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$



Queremos encontrar L y U tales que $P(L \leq Z \leq U) = 1-\alpha$. ¿Cómo escoger L y U de tal manera que el intervalo sea lo más angosto posible?

Aprovechando la simetría de la distribución Normal tomamos $L = -U$

La construcción del intervalo es como sigue:

$1-\alpha = P(-Z_{\alpha/2} \leq Z \leq Z_{\alpha/2})$ Intervalo simétrico

$$= P\left(-Z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq Z_{\alpha/2}\right)$$
$$= P\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2} \leq \bar{X} - \mu \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2}\right)$$

Multiplicando por -1 y recomendando

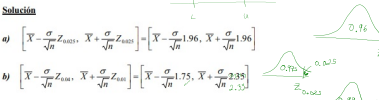
$$= P\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2} \leq \mu - \bar{X} \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2}\right)$$

Sumando \bar{X}

$$= P\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2}\right)$$

El intervalo para μ con una confianza de $(1-\alpha)100\%$ está dado por $\left[\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2}\right]$

Ejemplo 1: Considere el intervalo de confianza para μ con σ conocida $\bar{X} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2}$ donde $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, si $\alpha = 0.05$ obtén el intervalo para $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2 = 0.025$. Después determina el intervalo para $\alpha_1 = 0.01$ y $\alpha_2 = 0.04$. ¿Cuál es el intervalo más angosto? ¿Hay ventaja para un intervalo de confianza simétrico?



La longitud del IC en a) es $2(1.96) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3.92 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ I.C más angosto

Y la longitud del IC en b) es $(1.75 + 2.39) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 4.10 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ La ventaja del intervalo simétrico es que es más angosto.

La precisión de la estimación por intervalo está dada por la longitud del intervalo, mientras más angosta sea el IC se considera más precisa la estimación. Si el intervalo es simétrico a medida que la confianza aumenta la precisión disminuye.

Ejemplo 2: Es habitual la manifestación tardía de lesiones después de la exposición a dosis suficientes de radiación. Se obtuvieron los datos siguientes del tiempo en días que transcurren entre la exposición a la radiación y la aparición de eritema (enrojecimiento de la piel) de intensidad máxima.

16	12	14	16	13	9	15	7
20	19	11	14	9	13	11	3
8	21	16	16	12	16	14	20
7	14	18	14	18	13	11	16
18	16	11	13	14	16	15	15

$n=70$ \therefore muestra grande

a) Aunque el tiempo en el cual aparece el eritema se redondea al día más cercano, en realidad es una variable continua cuya distribución es Normal con desviación estándar de 4 días. Construye un IC al 95% para la media de tiempo para la aparición del eritema.

b) ¿Te sorprendería la afirmación de que $\mu = 17$ días? Explica tu respuesta.

Ejemplo 3: En estudios, se ha comprobado que la \bar{X} a \bar{X} , el tiempo de procesamiento requerido para una multiplicación es una nueva computadora tridimensional, tiene distribución normal, con media μ y desviación estándar de 2.2 μ (microsegundos). Se toma una muestra aleatoria de 16 observaciones.

a) ¿Cuál es la distribución de \bar{X} ? $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

b) Se obtienen los datos siguientes:

42.65	45.15	39.32	44.44
41.63	41.54	41.39	45.68
46.50	41.35	44.37	40.27
43.87	43.79	43.28	40.70

A partir de estos datos, encuentra una estimación insegura para la media poblacional.

c) Construye un IC al 95% para la media poblacional. ¿Te sorprendería la afirmación de que el tiempo promedio requerido para procesar una multiplicación en el sistema sea de 42.2 μ ? Explica.

Ejemplo 4: En un estudio de diversos sistemas de cómputo, se considera la \bar{X} , el número de archivos que se ha almacenado. La experiencia indica que la desviación estándar es de 4.2 μ . Para los datos siguientes:

8	4	5	9	9	
4	12	8	1	8	7
3	13	2	1	17	7
12	5	6	2	1	13
14	10	2	4	9	11
3	5	12	6	10	7

$n=56$

a) Encuentra una estimación insegura para el número promedio de archivos almacenados.

b) ¿Cuál es la distribución aproximada de la media muestral?

c) Construye un IC al 98% para el número promedio de archivos almacenados.

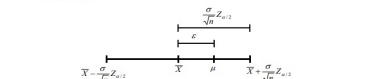
d) En una descripción del tamaño del sistema, un ejecutivo afirma que el número promedio de archivos almacenados es mayor de 10. ¿Qué opinas al respecto?

5.3 ERROR ESTÁNDAR Y TAMAÑO DE LA MUESTRA.

Todo estadístico tienen su varianza, por ejemplo la media muestral tiene varianza igual a la varianza de la población de donde salió la muestra dividido por el tamaño de la muestra, $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$, y la raíz cuadrada

positiva de esta varianza es lo que se conoce como **error estándar**, en este caso el error estándar de la media muestral está dado por $ee = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Considera ahora el intervalo de confianza para una media poblacional con varianza conocida, el cual está centrado en \bar{X} con límite inferior $\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2}$ y límite superior $\bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2}$. Por la manera en que fue construido el IC se tiene que $(1-\alpha)100$ de las veces el parámetro cae dentro del intervalo como se muestra en la figura siguiente.



La distancia entre el parámetro y la estimación es un error $e = |\mu - \bar{X}|$ entonces $(1-\alpha)100$ de las veces se tiene que $e \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2}$ o equivalentemente $\sqrt{n} \leq \frac{\sigma Z_{\alpha/2}}{e}$. El intervalo más corto se obtiene cuando n es lo más grande posible, es decir cuando $n = \left(\frac{\sigma Z_{\alpha/2}}{e}\right)^2$

Ejemplo 5: Se sabe que la vida en horas de una bombilla eléctrica de 75 watts se distribuye aproximadamente en forma Normal, con desviación estándar $\sigma = 25$ hrs. Una muestra aleatoria de 20 bombillas tiene una vida media de $\bar{x} = 1014$ horas.

a) Construye un intervalo de confianza de dos lados al 95% respecto a la vida media.

$$\left[\bar{x} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2}\right] = \left[1014 \pm \frac{25}{\sqrt{20}} (1.96)\right] = [1003.04, 1024.96]$$

b) $P(L \leq \mu) = 0.95$ Para este caso que se desea un intervalo de una sola cola se tiene que $z_{\alpha} = 1.645$ Por lo tanto $L = \bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha} = 1014 - \frac{25}{\sqrt{20}} (1.645) = [1004.804, \infty)$

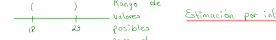
c) $1-\alpha = 0.95$ y $z_{\alpha/2} = 1.96$.

Si el ancho del intervalo es de 8 hrs entonces la mitad del intervalo es de 4 hrs, es decir $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2} = 4$, despejando el tamaño de la muestra se tiene que $n = \left(\frac{\sigma Z_{\alpha/2}}{4}\right)^2 = \left(\frac{25 (1.96)}{4}\right)^2 = 150$ bombillas.

$\hat{\mu} = \bar{X} = 2.0$ es un **estimador puntual**



La **medida promedio** desconocida está entre los 1.8 y 2.2 años.



Estimación por intervalo

Si el **ancho** trabajo con vida humana se trabaja con una **confianza** del 99%.

En **estadística** preferimos hasta un 80% es aceptable.

Estadística

Ejemplo 6: Un experto en eficiencia de tiempo promedio que el tiempo que toma tres agujeros en una moneda metálica.

¿De qué tamaño se necesita la muestra para tener una confianza de 95% de que la media de la muestra está dentro de 15 seg. respecto de la media verdadera? Supón que por estudios previos se sabe que $\sigma = 40$ segundos.

Solución

$\alpha = 5\%$

$e = 15$ seg

$\sigma = 40$ seg

$z_{\alpha/2} = 1.96$

$e = |\mu - \bar{X}| = 15$ seg

$$n = \left(\frac{\sigma z_{\alpha/2}}{e}\right)^2 = \left(\frac{40(1.96)}{15}\right)^2 = 27$$
 abrazaderas.

Ejemplo 7: La lectura de pantallas digitales bajo luz brillante es problemática. Un grupo de ingenieros pretende diseñar un filtro para optimizar la brillantez y el contraste de color. A tal efecto, se planea estimar el número promedio de pies-candela en la cabina de mando de aviones comerciales, donde se usará el filtro. Se realiza un estudio piloto preliminar y se obtiene una desviación estándar estimada de 500 pies-candela. ¿Cuán grande debe ser la muestra para estimar la media poblacional a no más de 50 pies-candela con una confianza del 95%? Respuesta $n=385$

Caso 2.- IC para una media de una distribución Normal con varianza desconocida. (Para $n < 30$ con σ^2 desconocida)

Si X_1, \dots, X_n es una m.a. de una $N(\mu, \sigma^2)$ con parámetros desconocidos, no conocemos la varianza poblacional por lo tanto la estimamos con la varianza muestral S^2 .

Sabemos que $\bar{X} - f_{\alpha/2}(\mu, \sigma^2/n) = f_{\alpha/2}(\mu, S^2/n)$ el estadístico $t = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$ tiene una distribución t de Student con $(n-1)$ grados de libertad.

El IC con una confianza de $(1-\alpha)100\%$ para la media poblacional se construye de la manera siguiente:

$1-\alpha = P(-t_{\alpha/2} \leq t \leq t_{\alpha/2})$
$$= P\left(-t_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha/2}\right)$$
$$= P\left(-\frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2} \leq \bar{X} - \mu \leq \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}\right)$$

Multiplicando por -1 y acomodando

$$= P\left(-\frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2} \leq \mu - \bar{X} \leq \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}\right)$$

Sumando \bar{X}

$$= P\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}\right)$$

El IC es $\left[\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}, \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}\right]$

Si $n \geq 30$ este intervalo usual construye como $\left[\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right]$

Para cada una de 18 muestras de perforación de depósitos de carbón impregnado de petróleo, se midió la cantidad de saturación de gas residual después de una inyección de solvente de un flujo de agua. Las observaciones, en porcentaje de volumen de poros, fueron:

23.5	31.5	34.0	46.7	45.6	32.5
41.4	37.2	42.5	46.9	51.5	36.4
44.5	35.7	33.5	39.3	22.0	51.2

Construye un intervalo de confianza al 98% para el verdadero promedio de cantidad de saturación de gas residual. Respuesta: [33.53, 43.79]

Considera los siguientes 1000 intervalos de confianza al 95% para μ que un consultor en estadística obtendría para varios clientes. Supón que los conjuntos de datos sobre los que están basados los intervalos se seleccionan de manera independiente entre sí. ¿Cuántos de estos 1000 intervalos esperarías que capturan el valor correspondiente de μ ? ¿Cuál es la probabilidad de que entre 940 y 960 de estos intervalos

contengan el valor correspondiente de μ ? (sugerencia: sea T el número entre los 1000 intervalos que contienen a μ). ¿Qué clase de variable aleatoria es T ? Respuesta: 950, 8714

Ejemplo 8: Los conductores metálicos o tubos huecos se usan en el cableado eléctrico. En la prueba de tubos de 1 pulgada, se obtienen los datos siguientes respecto del diámetro exterior en pulgadas del tubo

1.281	1.293	1.287	1.286
1.288	1.291	1.291	1.295
1.292	1.291	1.290	1.296
1.289	1.289	1.286	1.291
1.291	1.288	1.289	1.286

a) Calcula la media y la varianza muestral en base a la muestra.

b) Si el muestreo se hizo de una distribución normal. Construye un IC al 95% para el diámetro externo medio de tubos de este tipo.

c) Los fabricantes de este tipo de tubo afirman que el diámetro exterior medio es de 1.29 pulgadas. ¿Qué opinas al respecto?

Caso 3.- IC para la diferencia de medias con varianzas conocidas. (Para μ_1, μ_2 con σ_1^2 y σ_2^2 conocidas)

Sea $X_1, \dots, X_n(t; \theta)$ con $E(X_i) = \mu_1$ desconocida y $V(X_i) = \sigma_1^2$ conocida, y $Y_1, \dots, Y_n(t; \theta)$ con $E(Y_i) = \mu_2$ desconocida y $V(Y_i) = \sigma_2^2$ conocida.

Si las densidades son Normales o bien los tamaños de las muestras aleatorias n_1 y n_2 son grandes, el TCL garantiza que $\bar{X} \sim N(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1})$ y $\bar{Y} \sim N(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2})$ además una diferencia de Normales es Normal con media igual a la diferencia de las medias y varianza igual a la suma de las varianzas.

$(\bar{X} - \bar{Y}) \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$ por lo tanto $Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$

La construcción del IC es como sigue:

$1-\alpha = P(-Z_{\alpha/2} \leq Z \leq Z_{\alpha/2})$
$$= P\left(-Z_{\alpha/2} \leq \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \leq Z_{\alpha/2}\right)$$

$$= P\left(-\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} Z_{\alpha/2} \leq (\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2) \leq \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} Z_{\alpha/2}\right)$$

Multiplicando por -1 y

$$= P\left(-\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} Z_{\alpha/2} \leq (\mu_1 - \mu_2) - (\bar{X} - \bar{Y}) \leq \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} Z_{\alpha/2}\right)$$

Restando $(\bar{X} - \bar{Y})$

$$= P\left((\bar{X} - \bar{Y}) - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} Z_{\alpha/2} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (\bar{X} - \bar{Y}) + \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} Z_{\alpha/2}\right)$$

El IC para la diferencia de medias es de la forma

$$\left[(\bar{X} - \bar{Y}) - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} Z_{\alpha/2}, (\bar{X} - \bar{Y}) + \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} Z_{\alpha/2}\right]$$

Observación: Si $n_1 = n_2 = n$ el IC queda $\left[(\bar{X} - \bar{Y}) - \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}} Z_{\alpha/2}, (\bar{X} - \bar{Y}) + \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}} Z_{\alpha/2}\right]$

y entonces $e \leq \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}} Z_{\alpha/2}$, dejando al tamaño de la muestra se tiene que $n = \left(\frac{Z_{\alpha/2}}{e}\right)^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

Supón que la porosidad del helio de muestras de carbón tomado de cualquier veta en particular está normalmente distribuida con una desviación estándar verdadera de 0.75.

a) Calcula un IC al 95% para el verdadero promedio de porosidad de cierta veta, si el promedio de porosidad para 20 especímenes de la veta fue de 4.85.

b) Calcula un IC al 98% para el verdadero promedio de porosidad de otra veta con base en 16 especímenes con un promedio de porosidad muestral de 4.56.

c) ¿D cuál estimación a) o b) es más precisa.

d) ¿Qué tan grande se necesita un tamaño muestral si la longitud del intervalo de 95% debe ser 0.40?

Supón que μ_1 y μ_2 son las verdaderas distancias medias de parada a 30 mph para automóviles de cierto tipo equipados con dos tipos diferentes de sistemas de frenos. Para los siguientes datos: $n_1 = 6$, $\bar{x}_1 = 115.7$, $s_1 = 5.03$, $n_2 = 6$, $\bar{x}_2 = 129.3$ y $s_2 = 5.38$. Utiliza estos datos para calcular un intervalo de confianza al 95% para la diferencia entre el verdadero promedio de distancia de parada para automóviles equipados con el sistema 1 y automóviles equipados con el sistema 2. ¿Siguiere el intervalo que se dispone de información precisa acerca del valor de esta diferencia?