4 DISTRIBUCIÓN DE VARIABLES ALEATORIAS BIDIMENSIONALES.

OBJETIVO: Extender los conocimientos adquiridos para el caso de una variable aleatoria unidimensional al caso de las variables aleatorias bidimensionales.

4.1 DENSIDAD CONJUNTA Y MARGINAL.

En ciertas ocasiones es necesario estudiar el efecto conjunto de dos variables aleatorias, de ahí la necesidad de estudiar variables aleatorias bidimensionales representadas por $Z = (X, Y)$. Observa que:

a) Si X y Y son discretas, Z será una v. a. bidimensional discreta.

b) Si X y Y son continuas, Z será una v. a. bidimensional continua.

Definición: La función de probabilidad conjunta de una v. a. bidimensional discreta está dada por:

$$f_{X,Y}(x, y) = P(X = x,\ Y = y)$$

y cumple con las siguientes condiciones:

i) $P(X = x, Y = y) \geq 0 \quad \forall (x, y)$

ii) $\sum_{y} \sum_{x} P(X = x, Y = y) = 1$

Definición: La función de densidad de probabilidad conjunta de una v. a. bidimensional continua es una función que satisface las dos condiciones siguientes:

i) $f_{X,Y}(x, y) \geq 0 \quad \forall \quad (x, y) \in R$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dxdy = 1$

Ahora el rango de valores posibles de la v.a bidimensional en el caso continuo serán regiones en el plano y las probabilidades de interés serán volúmenes bajo la curva en la región de interés.

Ejemplo 1: Dos líneas de producción fabrican cierto tipo de artículos. Supón que la capacidad (en cualquier día dado) es de 5 artículos para la línea I y de 3 artículos para la línea II y que el número verdadero de artículos producidos por cada una de las líneas es una v. a.
Sea (X,Y) la representación de la v.a bidimensional que proporciona el número de artículos producidos por la línea I y por la línea II respectivamente.

Función de probabilidad conjunta $P(X,Y)$

$Y \setminus X$	0	1	2	3	4	5
0	0.00	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05

a) Encuentra la probabilidad de que la línea I produzca 2 artículos y la línea II produzca 3 artículos.
b) Encuentra la probabilidad de que la línea I produzca más artículos que la línea II.
c) ¿Cuánto vale la probabilidad de que la línea I produzca exactamente 4 artículos?
d) ¿Cuál es el número esperado de artículos producidos por la línea II?

Solución

Sean las variables aleatorias unidimensionales:

X : Número de artículos producidos por la línea I.
Y : Número de artículos producidos por la línea II.

a) $P(X=2,Y=3)=0.04$

b) $P(X>Y)=\sum\sum_{x>y} P(X=x,Y=y)$

$$=P(X=1,Y=0)+P(X=2,Y=0)+P(X=2,Y=1)+P(X=3,Y=0)+P(X=3,Y=1)$$

$$+P(X=3,Y=2)+P(X=4,Y=0)+P(X=4,Y=1)+P(X=4,Y=2)+P(X=4,Y=3)$$

$$+P(X=5,Y=0)+P(X=5,Y=1)+P(X=5,Y=2)+P(X=5,Y=3)$$

$$=0.01+(0.03+0.04)+(0.05)3+(0.07+0.06+0.05+0.06)+(0.09+0.08+0.06+0.05)=0.75$$

c) $P(X=4)=\sum_{y=0}^{3} P(X=4,Y=y)$

$$=P(X=4,Y=0)+P(X=4,Y=1)+P(X=4,Y=2)+P(X=4,Y=3)$$
$$=0.07+0.06+0.05+0.06=0.24$$

d) Para la esperanza de Y primero se encuentra la f.d.p de la v.a Y y después se usa la definición de la esperanza para el caso discreto unidimensional.

f.d.p de Y

$Y = y$	$P(Y = y)$
0	0.25
1	0.26
2	0.25
3	0.24

Finalmente la esperanza de Y está dada por $E(Y) = \sum_{y=0}^{3} yP(Y = y) = 0.26 + 2(0.25) + 3(0.24) = 1.48$

Ejemplo 2: Sea X el número de caras y Y el número de caras menos el número de cruces cuando se lanzan 3 monedas. Encuentra la distribución de probabilidad conjunta de X y Y.

<u>Solución</u>

Posible resultado.	X No. de caras	Y No. Caras - No. De cruces
ccc	3	3
ccx	2	1
cxc	2	1
xcc	2	1
xxc	1	-1
xcx	1	-1
cxx	1	-1
xxx	0	-3

La variable aleatoria X tiene una distribución binomial con parámetros 3 y 0.5, es decir.

$$X \sim bin\left(x; n = 3, p = \frac{1}{2}\right)$$

$$P(X = 0) = \binom{3}{0} p^0 q^3 = \frac{1}{8}$$

$$P(X = 1) = \binom{3}{1} p^1 q^2 = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} p^2 q^1 = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 3) = \binom{3}{3} p^3 q^0 = \frac{1}{8}$$

La función de distribución de probabilidad conjunta o bidimensional, se expresa mediante el cuadro siguiente.

f.d.p Conjunta de (X, Y)

X	Y			
	-3	-1	1	3
0	1/8	0	0	0
1	0	3/8	0	0
2	0	0	3/8	0
3	0	0	0	1/8

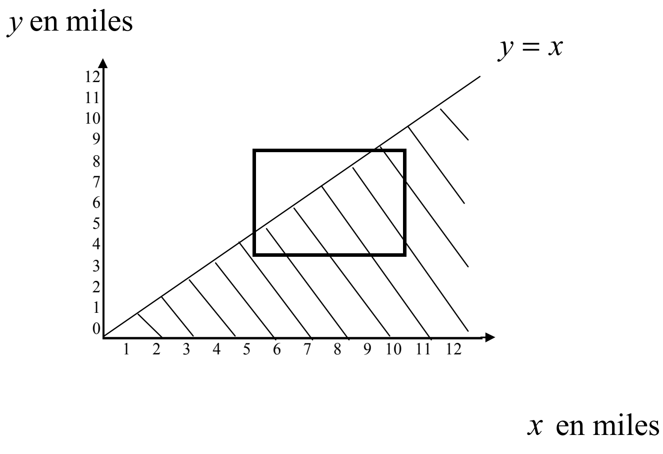
Ejemplo 3: Supón que un fabricante de bombillas está interesado en el número de éstas que le han sido pedidas durante los meses de Enero y Febrero. X y Y indican el número de bombillas ordenadas durante esos dos meses, respectivamente. Supón que (X, Y) es una v. a. bidimensional con la siguiente f.d.p conjunta

$f_{X,Y}(x, y) = C \quad , \quad 5000 \le x \le 10{,}000 \quad y \quad 4000 \le y \le 9000$

a) Encuentra el valor de la constante *C*.
b) Calcula $P(X \ge Y)$.

<u>Solución</u>

En problemas de este tipo lo que se acostumbra hacer es graficar la región en donde existe la f.d.p conjunta y localizar la región de interés para poder identificar los límites de integración en la integral doble que define a la probabilidad pedida.
En la siguiente figura el cuadradito representa la región donde está definida la f.d.p conjunta y la parte rayada que se intersecta con el cuadrado representa la región donde se cumple la condición $X \ge Y$.

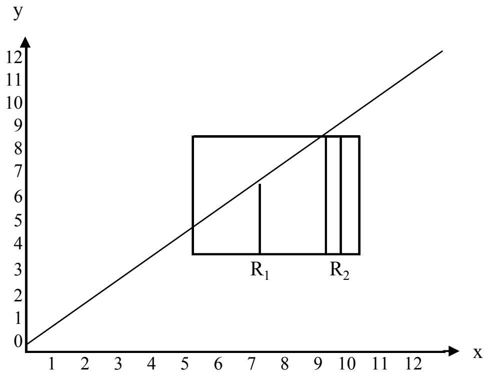


a) Sabemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy=1 \qquad \therefore \int_{4mil}^{9mil}\int_{5mil}^{10mil} Cdxdy=1$$

$$C\left[x\Big|_{5mil}^{10mil} \quad y\Big|_{4mil}^{9mil}\right]=C[(5mil)(5mil)]=1 \qquad \therefore C=\frac{1}{25{,}000{,}000}$$

b) Se tiene que integrar en la parte inferior de la recta $y=x$, para ello se divide la región de interés en dos partes R_1 y R_2 debido a que los límites de integración cambian en estas dos regiones. Tomando el elemento diferencial vertical se tiene que en la primera región y corre de 4,000 a la recta a 45 grados $y=x$ mientras que x corre libremente de 5,000 a 9,000. Dado que y queda en términos de x primero se integra respecto a y y luego respecto a x. En la región 2 la variable x corre de 9,000 a 10,000 y la variable y toma valores de 4,000 a 9,000, como se indica en la figura.



$$P(X\geq Y)=C\left[\int_{x=5,000}^{9,000}\int_{y=4,000}^{x} dydx+\int_{y=4,000}^{9,000}\int_{x=9,000}^{10,000} dxdy\right]$$

$$=C\left[\int_{x=5,000}^{9,000}\left(y\Big|_{4,000}^{x}\right)dx+\left(x\Big|_{9,000}^{10,000}\right)\left(y\Big|_{4,000}^{9,000}\right)\right]$$

$$=C\left[\int_{x=5,000}^{9,000}(x-4{,}000)dx+5{,}000{,}000\right]$$

$$=C\left[\left(\frac{x^2}{2}-4{,}000x\right)\Bigg|_{5,000}^{9,000}+5{,}000{,}000\right]$$

$$=\frac{1}{25{,}000{,}000}\left[\frac{81{,}000{,}000-25{,}000{,}000}{2}-16{,}000{,}000+5{,}000{,}000\right]$$

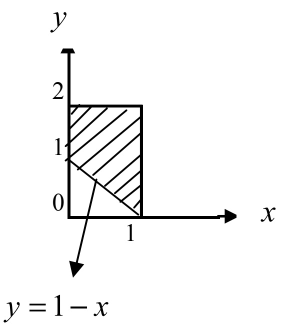
$$=\frac{17}{25}=0.68$$

Ejemplo 4: Si la v. a. bidimensional continua (X,Y) tiene una f.d.p conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = x^2 + \frac{xy}{3} \qquad 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2$$

a) Verifica que el volumen bajo la curva en la región definida es uno.
b) Encuentre $P(X+Y \ge 1)$.

Solución



a) $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_0^2\int_0^1 (x^2 + \frac{y}{3}x)dxdy = \int_0^2\left[\frac{x^3}{3} + \frac{yx^2}{6}\right]_0^1 dy = \int_0^2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}y\right)dy = \left[\frac{1}{3}y + \frac{1}{12}y^2\right]_0^2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

b) Si $x + y = 1 \ \therefore\ \ y = 1 - x$

La probabilidad pedida es la integral en la región sombreada.

$$P(X+Y \ge 1) = \int_{x=0}^{x=1}\left[\int_{y=1-x}^{2}\left(x^2 + \frac{y}{3}x\right)dy\right]dx = \int_{x=0}^{x=1}\left(x^2 y + \frac{x}{3}\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=1-x}^{2} dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=1}\left(2x^2 - (1-x)x^2 + \frac{4}{6}x - \frac{x}{6}(1-x)^2\right)dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=1}\left(2x^2 - x^2 + x^3 + \frac{2}{3}x - \frac{x}{6}\left[1 - 2x + x^2\right]\right)dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=1}\left(2x^2 - x^2 + x^3 + \frac{2}{3}x - \frac{x}{6} + \frac{1}{3}x^2 - \frac{x^3}{6}\right)dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=1}\left(\frac{5}{6}x^3 + \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{2}x\right)dx = \left[\frac{5}{6}\frac{x^4}{4} + \frac{4}{3}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{5}{24}x^4 + \frac{4}{9}x^3 + \frac{1}{4}x^2\right]_0^1 = \frac{45 + 96 + 54}{216} = \frac{195}{216} = \frac{65}{72}$$

4.2 DISTRIBUCIÓN CONJUNTA Y MARGINAL.

Definición: La función de distribución acumulada para la v. a bidimensional (X, Y) o bien la función de distribución acumulada conjunta esta dada por:

i) Caso discreto $F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$

ii) Caso continuo $F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_{x,y}(x,y)dxdy$

Nota: $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y) = f_{X,Y}(x,y)$

Ejemplo 1: Y_1 y Y_2 tienen la función de densidad conjunta dada por

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = ky_1y_2 \text{ si } 0 \leq y_1 \leq 1,\ 0 \leq y_2 \leq 1$$

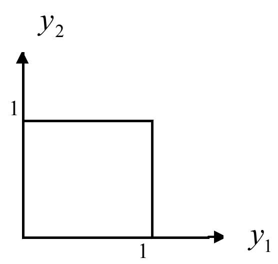
a) Determina el valor de k que la convierte en una función de densidad de probabilidad.

b) Encuentre la función $F_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)$

c) Calcula $P\left(Y_1 \leq \frac{3}{4}, Y_2 \geq \frac{1}{2}\right)$

Solución

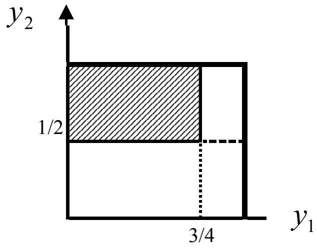
La f.d.p conjunta está definida en el cuadrado unitario siguiente



a) $k\int_0^1\int_0^1 y_1y_2dy_1dy_2 = k\left.\frac{y_1^2}{2}\right|_0^1 \left.\frac{y_2^2}{2}\right|_0^1 = \frac{k}{4} = 1 \quad \therefore \quad k = 4$

b) $F_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = 4\int_0^{y_2}\int_0^{y_1} y_1y_2dy_1dy_2 = 4\frac{y_1^2}{2}\frac{y_2^2}{2} = y_1^2y_2^2$ dentro del cuadrado $0 \leq y_1 \leq 1,\ 0 \leq y_2 \leq 1$

c)



$$P\left(Y_1 \le \frac{3}{4}, Y_2 \ge \frac{1}{2}\right) = 4\int_0^{\frac{3}{4}} y_1 dy_1 \int_{\frac{1}{2}}^{1} y_2 dy_2$$

$$= 4\frac{y_1^{\ 2}}{2}\Bigg|_0^{\frac{4}{3}} \frac{y_2^{\ 2}}{2}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= \frac{4}{4}\left[y_1^{\ 2}\Big|_0^{\frac{3}{4}} y_2^{\ 2}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} \right]$$

$$= \left[\left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) \right]$$

$$= \left[\left(\frac{9}{16}\right)\left(\frac{3}{4}\right) \right] = \frac{27}{64} = 0.422$$

Si estamos interesados en la distribución de probabilidades de uno de los componentes de la v. a. bidimensional (X, Y) se dice que nos interesa la distribución marginal de X o bien la distribución marginal de la v. a. Y.

En el ejemplo de las líneas de producción (caso discreto) teníamos la distribución conjunta en una tabla, si ahora queremos la distribución marginal de X y de Y procedemos a sumar por renglones y por columnas reportando las dos tablas individuales como se muestra a continuación.

Función de probabilidad conjunta $P(X = x, Y = y)$

Y \ X	0	1	2	3	4	5	Suma
0	0	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09	0.25
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08	0.26
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06	0.25
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05	0.24
Suma	0.03	0.08	0.16	0.21	0.24	0.28	1.00

Distribución Marginal de X

$X = x$	$P(X = x)$
0	0.03
1	0.08
2	0.16
3	0.21
4	0.24
5	0.28

Distribución Marginal de Y

$Y = y$	$P(Y = y)$
0	0.25
1	0.26
2	0.25
3	0.24

Definición: La función de probabilidad marginal de una variable aleatoria (X o Y) que forma parte de una v.a conjunta o bidimensional (X, Y) está dada por:

Caso Discreto

i) Distribución marginal de la v.a X: $f_X(x) = P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y) = \sum_y f_{X,Y}(x, y) \quad \forall\ x$

ii) Distribución marginal de la v.a Y: $f_Y(y) = P(Y = y) = \sum_x P(X = x, Y = y) = \sum_x f_{X,Y}(x, y) \quad \forall\ y$

Caso Continuo

i) Distribución marginal de la v.a X: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)dy$

ii) Distribución marginal de la v.a Y: $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)dx$

Ejemplo 2: El empuje X y la razón de la mezcla Y son dos características del funcionamiento de un motor a reacción. Si (X, Y) es una v. a. bidimensional con f. d. p $f_{X,Y}(x, y) = 2(x + y - 2xy)$ en $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Encuentra las distribuciones marginales para X y Y.

<u>**Solución**</u>

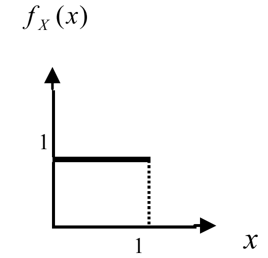
$$f_X(x) = \int_{y=0}^{1} f_{X,Y}(x, y)dy \quad \text{con} \quad 0 \le x \le 1$$

$$= \int_0^1 2(x + y - 2xy)dy = 2\left[xy + \frac{y^2}{2} - \frac{2xy^2}{2} \right]_0^1$$

$$= 2\left[x + \frac{1}{2} - x \right] = 1$$

Entonces la f.d.p marginal para X es una distribución uniforme $X \sim U(0,1)$ dada por $f_X(x) = 1$.Cuya gráfica es la siguiente.

Gráfica de la v.a $X \sim U(0,1)$

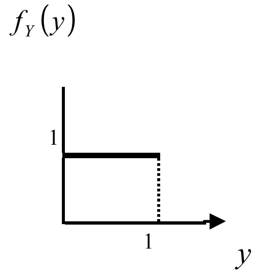


Para encontrar la marginal de Y se integra la conjunta respecto a X.

$$f_Y(y) = 2\int_0^1 (x + y - 2xy)dx \text{ con } 0 \le y \le 1$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2} + xy - \frac{2x^2 y}{2}\right]_0^1 = 2\left[\frac{1}{2} + y - y\right] = 1$$

Por lo tanto Y también tiene una f.d.p uniforme de 0 a 1, lo cual se escribe así $Y \sim U(0,1)$ $f_Y(y) = 1$ y su representación gráfica es



Ejemplo 3: Se dice que la v. a. bidimensional (X,Y) se distribuye uniformemente en la región *R* si tiene f.d.p. Encuentra el valor de la constante *C*.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} C & (x,y) \in R \\ 0 & \text{o.c.} \end{cases}$$

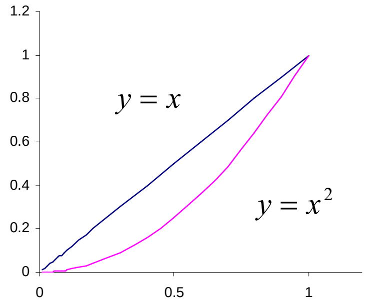
<u>**Solución**</u>

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} C\, dxdy = C\iint_R dxdy$$

$$C\left[\text{Area de } R\right] = 1 \quad \therefore \quad C = \frac{1}{\text{Area de } R}$$

Siempre y cuando *R* sea una región de área finita.

Ejemplo 4: Supón que la v. a. bidimensional (X,Y) está distribuida uniformemente en la región R comprendida entre la recta $y=x$ y la curva $y=x^2$ encuentra su f. d. p conjunta y las marginales de X y de Y respectivamente.



Primero se encuentra el área de la región en donde está definida la uniforme bidimensional.

$$\text{Area de } R = \int_{x=0}^{1}\int_{y=x^2}^{y=x} dydx = \int_0^1 y\Big|_{y=x^2}^{y=x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(x - x^2\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Entonces la f.d.p conjunta está dada por $f_{X,Y}(x,y) = 6 \qquad (x,y) \in R$

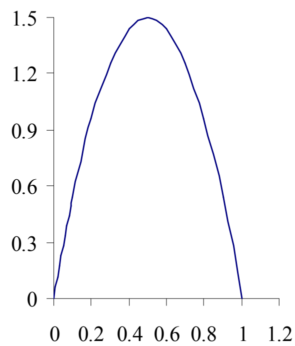
Cálculo de las marginales:

$$f_X(x) = \int_{y=x^2}^{x} 6dy = 6\left[y\Big|_{x^2}^{x}\right] = 6\left[x - x^2\right] \qquad 0 \le x \le 1$$

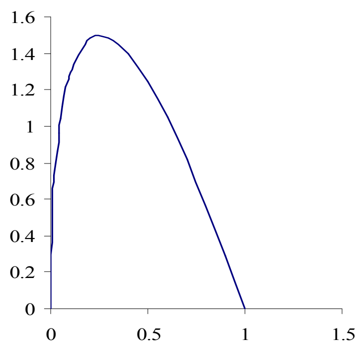
$$f_Y(y) = \int_{x=y}^{\sqrt{y}} 6dx = 6\left[x\Big|_{y}^{\sqrt{y}}\right] = 6\left[\sqrt{y} - y\right] \qquad 0 \le y \le 1$$

La representación gráfica de las f.d.p marginales para las variables X y Y respectivamente es:

$f_X(x)$



$f_Y(y)$



Definición: La función de distribución condicional está dada por:

i) Caso discreto $f_{X|y}\left(x|y\right)=\dfrac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}$ con $P(Y=y)>0$

ii) Caso continuo $f_{X|y}\left(x|y\right)=\dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$ con $f_Y(y)>0$

Observación:

- En esta definición la variable aleatoria es X y está condicionada al valor particular y de la v.a Y.
- Las dos funciones anteriores cumplen las condiciones de la f. d. p

$$f_{X|y}\geq 0 \quad y \quad \begin{cases}\sum_x f_{X|y}\left(x|y\right)=1\\ \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|y}\left(x|y\right)dx=1\end{cases}$$

Tarea: Demuestra el punto 2 de la observación.

Definición: La esperanza condicional de la v.a X se define como antes en términos de su f.d.p es decir

$$E\left(X|y\right)=\begin{cases}\sum_x xf_{X|y}\left(x|y\right) & \text{Caso Discreto}\\ \int_{-\infty}^{\infty} xf_{X|y}\left(x|y\right)dx & \text{Caso Continuo}\end{cases}$$

Ejemplo 5: Si (X,Y) tiene f.d.p conjunta $f_{X,Y}(x,y)=x^2+\dfrac{yx}{3}$ $\quad 0\leq x\leq 1$, $\quad 0\leq y\leq 2$, encuentra las distribuciones condicionales $f_{X|y}\left(x|y\right)$ y $f_{Y|x}\left(y|x\right)$ y verificar que son f.d.p.

<u>**Solución**</u>

Primero se calculan las f.d.p marginales para las variables X y Y respectivamente.

$$f_X(x)=\int_0^2 (x^2+\frac{xy}{3})dy=\left[x^2y+\frac{x}{3}\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=2}=2x^2+\frac{2}{3}x$$

$$f_Y(y)=\int_0^1 (x^2+\frac{xy}{3})dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{y}{3}\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}y$$

Siguiendo la definición de la función de distribución de probabilidad condicional se tiene que:

$$f_{X|y}(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{x^2+\frac{xy}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}y}=\frac{\frac{3x^2+xy}{3}}{\frac{2+y}{6}}=\frac{6(3x^2+xy)}{3(2+y)}$$

Y la condicional de la variable aleatoria Y dado el valor particular x de la variable aleatoria X, es:

$$f_{Y|x}(y|x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{x^2+\frac{xy}{3}}{2x^2+\frac{2}{3}x}=\frac{\frac{3x^2+xy}{3}}{\frac{6x^2+2x}{3}}=\frac{3x^2+xy}{6x^2+2x}=\frac{x(3x+y)}{x(6x+2)}$$

Es decir; las f.d.p condicionales son:

$$f_{X|y}(x|y)=\frac{6x^2+2xy}{2+y} \qquad 0\le x\le 1 \qquad 0\le y\le 2$$

$$f_{Y|x}(y|x)=\frac{3x+y}{6x+2} \qquad 0\le x\le 1 \qquad 0\le y\le 2$$

4.3 Independencia de dos o más variables aleatorias.

Definición: Sea (X,Y) una v. a. bidimensional. Se dice que las variables aleatorias X y Y son independientes si:

i) Caso discreto $P(X=x,Y=y)=P(X=x)P(Y=y)$

ii) Caso continuo $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

Teorema: Sea (X,Y) una v. a. bidimensional discreta. Entonces X y Y son independientes si y sólo si se tiene que:

i) Caso discreto $P(X=x|Y=y)=P(X=x)$

ii) Caso continuo $f_{X|y}(x,y)=f_X(x)$

Nota._ Equivalentemente las variables aleatorias X y Y son independientes si la f.d.p conjunta se puede escribir como producto de las f.d.p marginales.

Demostración del teorema:

i) Supóngase que $X \perp Y$

Por definición

$$P\left(X = x \middle| Y = y\right) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{P(X = x)P(Y = y)}{P(Y = y)} = P(X = x)$$

ii) Tarea.

Ejemplo 1: Supón que una máquina se usa para un trabajo especifico en la mañana y para otro diferente en la tarde. X es el número de veces que la máquina falla en la mañana y Y el número de veces que la máquina falla en la tarde. En la tabla se muestra la distribución de probabilidad conjunta. ¿Son independientes las variables aleatorias X y Y?

Función de probabilidad conjunta $P(X, Y)$

Y \ X	0	1	2	Suma $P(Y = y)$
0	0.10	0.20	0.20	0.5
1	0.04	0.08	0.08	0.2
2	0.06	0.12	0.12	0.3
Suma $P(X = x)$	0.20	0.40	0.40	1.00

Para que sean independientes se debe cumplir que la conjunta sea el producto de las marginales, entonces.

$$P(X = 0, Y = 0) = P(X = 0)P(Y = 0)$$
$$0.1 = 0.5(0.2)$$
$$P(X = 0, Y = 1) = P(X = 0)P(Y = 1)$$
$$0.04 = 0.2(0.2)$$
$$P(X = 0, Y = 2) = P(X = 0)P(Y = 2)$$
$$0.06 = 0.2(0.3)$$

Continuando así por columnas se tiene que:

$$0.2 = 0.4(0.5) \qquad 0.2 = 0.4(0.5)$$
$$0.08 = 0.4(0.2) \qquad 0.08 = 0.4(0.2)$$
$$0.12 = 0.4(0.3) \qquad 0.12 = 0.4(0.3)$$

Por lo tanto X y Y sí son independientes.

Profesora: Leticia Cañedo Suárez. ESCOM-IPN

Ejemplo 2: Sean X y Y la duración de dos dispositivos electrónicos, con f. d. p conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-(x+y)} \qquad y \geq 0 \quad , \qquad x \geq 0$$

¿Son X y Y variables aleatorias independientes?

Solución

Si la f.d.p conjunta se puede escribir como el producto de las marginales entonces sí son independientes, es decir si $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ entonces $X \perp Y$.

Las f.d.p marginales son:

$$f_X(x) = \int_0^\infty e^{-x}e^{-y}dy = e^{-x}\left(-e^{-y}\right)\Big|_0^\infty = e^{-x}(1) = e^{-x}$$

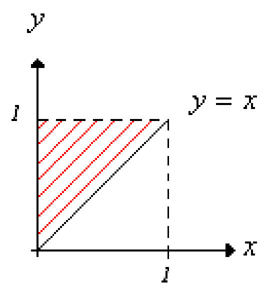
$$f_Y(y) = \int_0^\infty e^{-x}e^{-y}dx = e^{-y}\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^\infty = e^{-y}$$

$f_{X,Y}(x,y) = e^{-(x+y)} = e^{-x}e^{-y} = e^{-x}\ e^{-y}$ entonces X y Y sí son independientes.

Nota: Si la función de densidad conjunta se puede factorizar como el producto de una función de una de las variables y otra función de la otra variable y el recorrido de una de las variables no depende del recorrido de la otra variable entonces las variables aleatorias son independientes.

Ejemplo 3: Sea (X,Y) una v. a. bidimensional con f. d. p conjunta $f_{X,Y}(x,y) = 8xy$ en $0 \leq x \leq y \leq 1$.
¿Son independientes X y Y?

Solución



No son independientes ya que a pesar de que la f.d.p conjunta se puede factorizar en una función que depende sólo de X y otra que depende sólo de Y, el recorrido de X depende del recorrido de Y.

Recomendación: Primero se analiza al recorrido de las variables, si estos son independientes, se procede a encontrar las marginales para ver si se cumple que la f.d.p conjunta es igual al producto de las marginales.

Definición: La esperanza de la v.a bidimensional (X,Y) está dada por:

i) Caso discreto: $E(X,Y)=\sum_{y}\sum_{x} xyP(X=x,\ Y=y)$

ii) Caso continuo: $E(X,Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_{X,Y}(x,y)dxdy$

Teorema.- Si $g(X,Y)$ es una función de la v.a bidimensional (X,Y), entonces la esperanza de la función está dada, como en el caso unidimensional, por la expresión:

i) Caso discreto: $E[g(X,Y)]=\sum_{y}\sum_{x} g(x,y)P(X=x,\ Y=y)$

ii) Caso continuo: $E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, f_{X,Y}(x,y)dxdy$

Ejemplo 4: Sea (X,Y) una v.a bidimensional con f.d.p conjunta dada por $f_{X,Y}(x,y)$. Encuentra $E[g(X,Y)]$ si $g(X,Y)=X$.

Solución

$$
\begin{aligned}
E[g(X,Y)] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, f_{X,Y}(x,y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X,Y}(x,y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} xdx \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} xdxf_X(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx = E(X)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 5: La distribución conjunta para Y_1 , el número de contratos asignados a la empresa *A*, y Y_2 , el número de contratos asignados a la empresa *B*, está dado por las entradas de la tabla siguiente.

f.d.p conjunta de (Y_1, Y_2)

Y_2	Y_1			Suma
	0	1	2	
0	1/9	2/9	1/9	4/9
1	2/9	2/9	0	4/9
2	1/9	0	0	1/9
Suma	4/9	4/9	1/9	1

a) Demuestra que la marginal para Y_1 es $bin\left(y_1, n=2, p=\frac{1}{3}\right)$.

b) Encuentra $E(Y_1 - Y_2)$

Solución

a)

f.d.p de Y_1

$Y_1 = y_1$	$P(Y_1 = y_1)$
0	4/9
1	4/9
2	1/9

La binomial con parámetros *n* y *p* está dada por $P(Y_1 = y_1) = \binom{n}{y_1} p^{y_1} q^{n-y_1}$

De la tabla se tiene que $P(Y_1 = 0) = \frac{4}{9}$ y de la fórmula se tiene que:

$\frac{4}{9} = \binom{n}{0} p^0 q^n$ con $n = 2$

$\frac{4}{9} = q^2$ entonces $q = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ y por lo tanto $p = \frac{1}{3}$

Si $Y_1 \sim bin\left(y_1;\ n=2,\ p=\frac{1}{3}\right)$ tendremos que

$$P(Y_1 = 1) = \binom{2}{1} pq = 2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$$

$$P(Y_1 = 2) = \binom{2}{2} p^2 q^0 = p^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

b) $E(Y_1 - Y_2) = \sum_{y_2=0}^{2}\sum_{y_1=0}^{2}(y_1 - y_2)P(Y_1 = y_1,\ Y_2 = y_2)$

$$= (0-0)\frac{1}{9} + (1-0)\frac{2}{9} + (2-0)\frac{1}{9} + (0-1)\frac{2}{9} + (1-1)\frac{2}{9}$$

$$+ (2-1)0 + (0-2)\frac{1}{9} + (1-2)0 + (2-2)0$$

$$= \frac{2}{9} + \frac{2}{9} - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} = 0$$

Ejemplo 6: Y_1, Y_2 corresponden a las proporciones de tiempo, en un día de trabajo, que los empleados I y II, respectivamente, ocupan realmente en hacer sus tareas asignadas. La función de densidad conjunta para Y_1 y Y_2 está dada por

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = \begin{cases} y_1 + y_2 & 0 \le y_1 \le 1\ ,\ 0 \le y_2 \le 1 \\ 0 & \text{o.c} \end{cases}$$

El operador I tiene mayor productividad que el operador II, y una medida de la productividad total de los dos empleados está dada por $30Y_1 + 25Y_2$. Calcula la productividad esperada.

<u>Solución</u>

$$E(30Y_1 + 25Y_2) = \int_{y_2=0}^{1}\int_{y_1=0}^{1}(30y_1 + 25y_2)(y_1 + y_2)dy_1 dy_2$$

$$= 30\int_0^1\int_0^1 y_1^2 dy_1 dy_2 + 55\int_0^1\int_0^1 y_1 y_2 dy_1 dy_2 + 25\int_0^1\int_0^1 y_2^2 dy_1 dy_2$$

$$= 30\left[\int_0^1 y_1^2 dy_1 \int_0^1 dy_2\right] + 55\left[\int_0^1 y_1 dy_1 \int_0^1 y_2 dy_2\right] + 25\left[\int_0^1 dy_1 \int_0^1 y_2^2 dy_2\right]$$

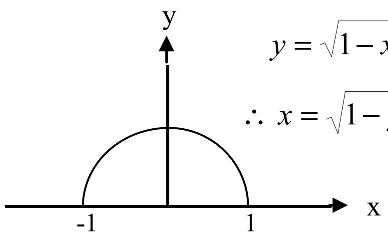
$$= 30\left[\frac{y_1^3}{3}(y_2)\right]_0^1 + 55\left[\frac{y_1^2}{2}\left(\frac{y_2^2}{2}\right)\right]_0^1 + 25\left[y_1\left(\frac{y_2^3}{3}\right)\right]_0^1$$

$$= 30\frac{1}{3}(1) + 55\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + 25(1)\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= 10 + \left(\frac{55}{4}\right) + \left(\frac{25}{3}\right) = 32.08$$

Ejemplo 7: Supón que (X,Y) se distribuye de manera uniforme sobre el semicírculo del diagrama. De tal modo que $f_{X,Y}(x,y)=\frac{2}{\pi}$ si (x,y) está en el semicírculo. Encuentra:

a) Las distribuciones marginales de X y Y.
b) Las distribuciones de probabilidad condicional.
c) Las esperanzas condicionales.



$$y=\sqrt{1-x^2}$$
$$\therefore\ x=\sqrt{1-y^2}$$

__Solución__

a) $$f_X(x)=\int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{2}{\pi}dy=\frac{2}{\pi}y\Big|_0^{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\qquad -1<x<1$$

$$f_Y(y)=2\left[\frac{2}{\pi}\int_{x=0}^{\sqrt{1-y^2}}dx\right]=\frac{4}{\pi}x\Big|_0^{\sqrt{1-y^2}}=\frac{4}{\pi}\sqrt{1-y^2}\qquad 0<y<1$$

b) $$f_{X|y}(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{\frac{2}{\pi}}{\frac{4}{\pi}\sqrt{1-y^2}}=\frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}\quad \text{para -1}\le x\le 1$$

$$f_{Y|x}(y|x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{\frac{2}{\pi}}{\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad \text{para } 0\le y\le 1$$

c) $$E(X|y)=\int_{-1}^{1}xf_{X|y}(x|y)dx=\int_{-1}^{1}x\frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}dx$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1}=0$$

$$E(Y|x)=\int_0^1 yf_{Y|x}(y|x)dy=\int_0^1 y\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{y^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

Ejemplo 8: Dadas las siguientes distribuciones conjuntas determina si X y Y son independientes.

a) $g(X,Y) = 4xye^{-\left(x^2+y^2\right)} \qquad x \geq 0,\ y \geq 0$

b) $f(X,Y) = 3x^2 y^{-3} \qquad 0 \leq x \leq y \leq 1$

c) $f(X,Y) = 6(1+x+y)^{-4} \qquad x \geq 0,\ y \geq 0$

<u>Solución</u>

a) Independientes.
b) No son independientes porque el recorrido de x depende del recorrido de y.
c) No son independientes.

Ejemplo 9: X y Y corresponden a la vida útil, expresada en horas, de componentes de tipo I y tipo II, respectivamente, en un sistema electrónico. La función de densidad conjunta para X y Y está dada por $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{8}xe^{-(x+y)/2}$ en $x > 0,\ y > 0$

Un modo de medir la eficiencia relativa de los dos componentes es el cálculo de la razón $\frac{Y}{X}$. Encuentra la eficiencia relativa esperada.

<u>Solución</u>

$$E\left(\frac{Y}{X}\right) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{y}{x}\frac{1}{8}xe^{-(x+y)/2}dxdy$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{y}{8}e^{-x/2}e^{-y/2}dxdy$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^\infty e^{-x/2}dx\int_0^\infty ye^{-y/2}dy$$

$$= \frac{1}{8}\left(-2e^{-x/2}\Big|_0^\infty\right)\left(-2ye^{-y/2} - 4e^{-y/2}\right)\Big|_0^\infty = 1$$

Ejemplo 10: Supón que X_1 y X_2 son calificaciones codificadas en dos pruebas de inteligencia y la función de densidad de probabilidad conjunta está dada por

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=6x_1^2x_2 \qquad 0\le x_1\le 1,\;\; 0\le x_2\le 1$$

a) Encuentra el valor esperado de la calificación de la prueba número 2 dada la calificación de la prueba número 1.
b) Además, obtén el valor esperado de la calificación de la prueba número 1 dada la calificación de la prueba número 2.

<u>Solución</u>

Primero se encuentran las marginales

$$f_{X_1}(x_1)=6\int_0^1 x_1^2x_2dx_2=6x_1^2\left.\frac{x_2^2}{2}\right|_0^1=3x_1^2$$

$$f_{X_2}(x_2)=6\int_0^1 x_1^2x_2dx_1=6x_2\left.\frac{x_1^3}{3}\right|_0^1=2x_2$$

Luego las f.d.p condicionales

$$f_{X_1|x_2}=\frac{f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{f_{X_2}(x_2)}=\frac{6x_1^2x_2}{2x_2}=3x_1^2$$

$$f_{X_2|x_1}=\frac{f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{f_{X_1}(x_1)}=\frac{6x_1^2x_2}{3x_1^2}=2x_2$$

Finalmente las esperanzas condicionales son:

$$E(X_1|x_2)=\int_0^1 x_1 3x_1^2dx_1=3\int_0^1 x_1^3dx_1=\left.\frac{3x_1^4}{4}\right|_0^1=\frac{3}{4}$$

$$E(X_2|x_1)=\int_0^1 x_2 f_{X_2|x_1}(x_2\mid x_1)dx_2=2\int_0^1 x_2^2dx_2=2\left.\frac{x_2^3}{3}\right|_0^1=\frac{2}{3}$$