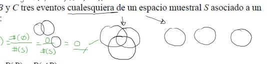
Miércoles 18 de agosto de 2021.

y $A_1, A_2, \ldots, A_k$

Teorema 1._ Sean A, B y C tres eventos cualesquiera de un espacio muestral S asociado a un experimento, entonces:



i) $P(\varnothing)=0$ $\quad P(\varnothing)=\frac{\#(\varnothing)}{\#(S)}=\frac{0}{\#(S)}=0$

ii) $P(A')=1-P(A)$

iii) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

iv) $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

v) $P\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right)=\sum_{i=1}^{k}P(A_i)-\sum_{i<j=2}^{k}P(A_iA_j)+\sum_{i<j<r=3}^{k}P(A_iA_jA_r)+\cdots+(-1)^{k-1}P\left(\bigcap_{i=1}^{k}A_i\right)$ ¿Cómo demostrar este inciso?

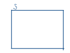
vi) Si $A\subset B$ entonces $P(A)\le P(B)$

$P(A)=\frac{\#(A)}{\#(S)}$

$P: S \to [0,1]$
función

Aceptamos sin demostración
Axiomas de Probabilidad:

i) $P(S)=1$
ii) Si $AB=\varnothing \therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)$
iii) Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mutuamente excluyentes $\therefore P\left(\bigcup_{i=1} A_i\right)=\sum_{i=1} P(A_i)$

i) 

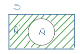
$S\cup\varnothing=S$
$S\varnothing=\varnothing$ (Disjuntos)

$P(S)=P(S\cup\varnothing)=P(S)+P(\varnothing) \Rightarrow P(\varnothing)=P(S)-P(S)=\underline{0}$

Demostración:

i)
$S\cup\varnothing=S$
$P(S\cup\varnothing)=P(S)$ pero $S\varnothing=\varnothing$
$P(S\cup\varnothing)=P(S)+P(\varnothing)=P(S)$
$\therefore P(\varnothing)=P(S)-P(S)=0$ ♦

ii)
$S=A\cup A'$ con $AA'=\varnothing$
$P(S)=P(A\cup A')=P(A)+P(A')$
$P(A')=P(S)-P(A)$
$\therefore P(A')=1-P(A)$ ♦ $\quad P(A)=1-P(A')$

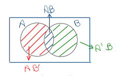


iii) Observa que $A=AB'\cup AB$ y $(AB')(AB)=\varnothing$
$B=AB\cup A'B$ y $(AB)(A'B)=\varnothing$

entonces $P(A)=P(AB')+P(AB)$ (1)
$P(B)=P(AB)+P(A'B)$ (2)

También $A\cup B=AB'\cup AB\cup A'B$ y los tres eventos son mutuamente excluyentes

$\therefore P(A\cup B)=P(AB')+P(AB)+P(A'B)$ (3)



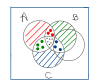
Despejando $P(AB')$ de (1) y $P(A'B)$ de (2) y sustituyendo en (3)

$$P(A\cup B)=P(A)-\cancel{P(AB)}+\cancel{P(AB)}+P(B)-P(AB)$$
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB) \quad ♦$$

Si A y B son disjuntos $\therefore P(AB)=0$
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-\cancel{P(AB)}\to 0$
$=P(A)+P(B)$

iv) Consideramos la unión de A y B como un solo evento y utilizamos ii) las veces que sea necesario. Unión de 2 eventos (Aplicar el inciso iii)

$$\underbrace{P[(A\cup B)}_{\text{primer evento}}\cup \underbrace{C}_{2^{o}\text{ evento}}]=P(A\cup B)+P(C)-P[(A\cup B)C]$$
$$=P(A)+P(B)-P(AB)+P(C)-P[(AC)\cup(BC)]$$
$$=P(A)+P(B)-P(AB)+P(C)-[P(AC)+P(BC)-P(ABC)]$$
$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC) \quad ♦$$



$P[\underbrace{(A\cup B)C}]=\,?$
Esto es una intersección, hay que llevarlo (si es posible) a una unión.

$(A\cup B)C=\underbrace{AC\cup BC}_{\text{unión de 2}}$

$AC\cap BC=(AC)(BC)=ABC$

v) Tareita. Sugerencia: Utilizar el método de inducción matemática.

Método de inducción matemática:

1) Demostrar para el n más chico que tenga sentido.
En este caso es 2
$P(A_1\cup A_2)$ ✓ ya la demostramos.

2) $\underbrace{\text{Suponer válido para}}$ n y demostrar para $n+1$.

Supuesto de inducción
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right)=\sum_{i=1}^{k}P(A_i)-\sum_{i<j=2}^{k}P(A_iA_j)+\sum_{i<j<r=3}^{k}P(A_iA_jA_r)+\cdots+(-1)^{k-1}P\left(\bigcap_{i=1}^{k}A_i\right)$$

Y demostrar que:
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k+1}A_i\right)=\sum_{i=1}^{k+1}P(A_i)-\sum_{i<j=2}^{k+1}P(A_iA_j)+\sum_{i<j<r=3}^{k+1}P(A_iA_jA_r)+\cdots+(-1)^{k}P\left(\bigcap_{i=1}^{k+1}A_i\right)$$

A_1A_2 / $\underbrace{A_1A_3 \quad A_2A_3}$ A_1A_2 / $A_1A_4 \quad A_2A_4 \quad A_3A_4$ / $A_1A_3 \quad A_2A_3 \quad A_1A_3$ /

Observa que $\bigcup_{i=1}^{k+1}A_i=\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right)\cup A_{k+1}$

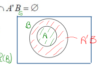
vi) Observa que si $A\subset B$ entonces $B=A\cup A'B$ pero $A\cap A'B=\varnothing$

$P(B)=P(A)+P(A'B)$ como $P(A'B)\ge 0$

$P(A'B)=P(B)-P(A)\ge 0$

Se tiene que si $P(A'B)=0 \therefore P(A)=P(B)$
si $P(A'B)>0 \therefore P(A)<P(B)$ ♦ $\Rightarrow P(A)\le P(B)$

$0\le P(A'B)\le 1$



1.2.1 Permutaciones.

Definición 3: Una **permutación** es un arreglo de objetos distintos donde el orden es importante.
Si cambias el orden cambias el resultado (1) (2) $12\ne 21$ El orden sí importa

Una permutación difiere de otra si el orden o el contenido del arreglo es diferente.

Ejemplo 7._ Considerando las letras a, b, c, d: Total de n elementos para jugar.

i) Hay 4 permutaciones distintas tomando una sola letra a la vez: a, b, c, d.
ii) Hay 12 permutaciones distintas tomando 2 letras a la vez: ab, ba, ac, ca, ad, da, bc, cb, bd, db, cd, dc.
iii) Hay 24 permutaciones distintas tomando 3 letras a la vez: abc, acb, bac, bca, cab, cba, abd, adb, bad, bda, dab, dba, bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dcb, acd, adc, cad, cda, dac, dca.

| 4 | 4 permutaciones tomando 1 letra de 4 que tengo.

También se puede utilizar el método de "las casitas" para contar las permutaciones, si quiero ver de cuántas maneras puedo permutar 3 de 4 letras posibles, tendría que la primer letra puede ser cualquiera de las 4 originales, la siguiente puede ser cualquiera de las 3 que quedan y la última puede ser cualquiera de las 2 letras restantes, dibujo tres casitas que corresponden a las tres letras que deseo tomar y las lleno de la manera descrita, quedando

| 4 | 3 | 2 | 4x3x2 = 24 permutaciones diferentes. | 4 | 3 | $4(3)=12$

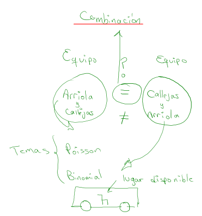
En general si quiero permutar k de n elementos tendría

| n | n-1 | n-2 | ... | n-(k-1) | $= n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$ (1) pero $1=\frac{a}{a}$

Si multiplicamos por 1 el producto no se altera, así el número de permutaciones diferentes al tomar k de n elementos está dado por

$$P_k^n=n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)\underbrace{\frac{(n-k)(n-k-1)(n-k-2)\ldots(2)(1)}{(n-k)(n-k-1)(n-k-2)\ldots(2)(1)}}_{1}$$

$$\boxed{P_k^n=\frac{n!}{(n-k)!}}$$



sienta Arriola parado Callejas ≠ Callejas sienta Arriola parado

El orden sí importa
∴ es una permutación

abcd abdc acbd acdb adbc adcd 6
bacd 6
cabd 6
dabc 6

Hay 24 permutaciones tomando 4 letras a la vez.

| 4 | 3 | 2 | 1 | $4(3)(2)(1)=4!=2$

Calculamos ahora con la fórmula:

i) $P_1^4=\frac{4!}{(4-1)!}=\frac{4!}{3!}=\frac{4(3!)}{3!}=\underline{4}$

ii) $P_2^4=\frac{4!}{(4-2)!}=\frac{4!}{2!}=\frac{4(3)(\cancel{2!})}{\cancel{2!}}=\underline{12}$

iii) $P_3^4=\frac{4!}{(4-3)!}=\frac{4!}{1!}=4!=\underline{24}$

iv) $P_4^4=\frac{4!}{(4-4)!}=\frac{4!}{0!}=4!=\underline{24}$

2 letras $\underbrace{aa,\ bb,\ cc,\ dd}_{\text{repeticiones}}$

3 letras $\underbrace{aab,\ bbb,}_{\text{repeticiones}}$

Hablar de repeticiones:
El mismo elemento aparece más de 1 vez

Ni en permutaciones ni en combinaciones hay repeticiones.

1.2.2 Combinaciones.

Definición 4: Una **combinación** es un arreglo de objetos distintos donde no importa el orden.

Una combinación difiere de otra sólo si el contenido es diferente.

Ejemplo 8._ Considerando nuevamente las cuatro letras a, b, c, d se tiene que:

i) Hay 4 combinaciones distintas tomando una sola letra a la vez: a, b, c, d.
ii) Hay 6 combinaciones distintas tomando 2 letras a la vez: ab = ba, ac = ca, ad = da, bc = cb, bd = db, cd = dc.
iii) Hay 4 combinaciones distintas tomando 3 letras a la vez: abc = acb = bac = bca = cab = cba, abd = adb = bad = bda = dab = dba, bcd = bdc = cbd = cdb = dbc = dcb, acd = adc = cad = cda = dac = dca.
iv) Sólo 1 manera de sacar las 4 letras a la vez: abcd.

Observa que teníamos 12 permutaciones tomando dos letras a la vez, pero dado que dos letras pueden cambiar el orden 2 veces, al no importar el orden para nosotros es lo mismo el par (ab) que el par (ba), dos letras son dos ordenamientos, quitando las repeticiones nos quedamos con 6 combinaciones.

Teníamos 24 permutaciones tomando 3 de 4 letras, pero con las mismas 3 letras podemos hacer 3(2)(1)=6 ordenamientos diferentes, dado que ahora ya no importa el orden estos 6 arreglos son uno solo, por lo tanto quitando las repeticiones nos quedan 4 combinaciones diferentes. Siguiendo con este razonamiento llegamos a que el número de combinaciones al tomar k de n elementos esta dado por:

$$\boxed{C_k^n=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

Ejemplo 9._ ¿Cuántos equipos que incluyan 2 ingenieros en electrónica y 1 ingeniero en sistemas computacionales se pueden formar si se dispone de 4 ingenieros en electrónica y 3 ingenieros en sistemas computacionales?

Solución

El orden no es importante por lo tanto necesitamos combinaciones

$$\binom{4}{2}\binom{3}{1}=\frac{4!}{2!(4-2)!}\frac{3!}{1!(3-1)!}=\frac{2!(3)(4)}{2!(2!)}\frac{2!(3)}{2!}=\underline{18\text{ equipos.}}$$

Ejemplo 10._ ¿Cuántas fichas tiene un domino si se usan n números y cada ficha es de la forma (x, y) siendo x y y no necesariamente diferentes y $(x, y) = (y, x)$?

Solución

El orden no importa, entonces primero necesito encontrar el número de combinaciones que tengo al tomar 2 de los n números y luego sumo n pares con números iguales, es decir los pares:
(1,1), (2,2), ... ,(n,n).

$$C_2^n=\binom{n}{2}=\frac{n!}{2!(n-2)!}=\frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!}=\frac{n(n-1)}{2}$$

Finalmente, el número total de fichas es:

$$\frac{n(n-1)}{2}+n=\frac{n(n-1)+2n}{2}=\frac{n(n-1+2)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

Ejemplo 11._ ¿De cuántas manera se pueden formar 6 personas para subirse a un autobús si ...

a) No hay restricción alguna?
b) Si 3 personas insisten en seguir cada una de ellas a las otras?
c) Si en un determinado conjunto de 2 personas, cada una de ellas se niega a seguir a la otra?

Solución

a) Si no hay restricción alguna, cualquiera de las 6 personas puede ir en la primera posición de la fila, cualquiera de las 5 que quedan en la siguiente posición y así sucesivamente, por lo tanto el número de maneras diferentes de formar a las 6 personas es 6! = 720.

b) Consideramos a las 3 personas que quieren estar juntas como si fuera una sola y entonces tendríamos que acomodar en la fila a 4 personas (las tres que no tienen preferencia y el paquete de tres que desean estar juntas), se pueden acomodar de 4! = 24 maneras diferentes, pero dentro de cada una de estas 24 maneras las 3 personas que quieren estar juntas se pueden acomodar de 3! = 6 maneras diferentes, entonces en total hay 4!(3!) = 144 maneras diferentes de acomodar a las 6 personas con la restricción pedida.

c) Se procede similar al inciso anterior considerando que las dos personas quieren estar siempre juntas, entonces tendríamos 4 personas sin preferencia alguna y un paquete de las 2 que quieren estar juntas, pero estas dos personas se pueden acomodar de 2 maneras diferentes, entonces hay 5!(2!) = 240 maneras en que siempre están juntas, si quitamos estas al número total de maneras en que se pueden acomodar las 6 personas en la fila, me quedo con el número de maneras en que nunca están juntas estas dos personas, es decir, la solución al problema esta dada por, 720-240 = 480 maneras.

Ejemplo 12._ El número de formas en que pueden acomodarse n objetos distintos en un círculo es $(n-1)!$

a) Presenta un argumento que justifique esta fórmula.
b) ¿De cuántas maneras pueden montarse 5 turquesas en un brazalete de plata?

Solución

a) Se fija un objeto cualquiera en una posición del circulo y de ahí se acomodan los $(n-1)$ objetos restantes.
b) 4! = 4(3)(2)(1) = 24 maneras de montar las 5 turquesas.

Ejemplo 13._ ¿Cuántos números diferentes de 3 dígitos pueden formarse con los números 3, 4, 7, 8 y 9 si se desea que sean mayores que 500 y que no se repitan los dígitos?

Solución

Para que el número sea mayor que 500 debe comenzar con 7, 8 o 9 y como no se pueden repetir, el siguiente dígito puede ser cualquiera de los 4 números que quedan y el tercer dígito cualquiera de los 3 números restantes.

(3)(4)(3) = 36 números.

Ejemplo 14._ ¿Cuántos números pares de tres dígitos se pueden formar con los números 1, 2, 5, 6, 9 si sólo es posible utilizar cada uno de estos una sola vez?

Solución

Para que el número sea par debe terminar con 0 o con par, es decir sólo hay dos opciones: 2 o 6. Los dos primeros números pueden ser entonces cualquiera de los 4 y luego cualquiera de los 3 que quedan. (4)(3)(2) = 24 números pares con tres dígitos no repetidos.

Ejemplo 15._ ¿Cuántos números telefónicos diferentes de siete dígitos se pueden formar si el primer dígito no puede ser cero?

Solución

No hay restricción sobre las repeticiones así que el ~~número pedido~~ es $9(10)^6$