Viernes 27 de agosto de 2021.

1.5 EVENTOS INDEPENDIENTES Y REGLA DE LA MULTIPLICACIÓN.

Ejemplos:

1._ Considera una caja con 4 bolitas etiquetadas del 1 al 4. Se saca una de ellas al azar y se observa el número de la etiqueta. Con los eventos A y B definidos a continuación.

$S=\{1,2,3,4\}$

$A=\{1,2\} \quad P(A)=\frac{1}{2}$

$B=\{1,3\} \quad P(B)=\frac{1}{2}$

$AB=\{1\} \quad P(AB)=\frac{1}{4}$

Entonces $P(B\mid A)=\frac{P(BA)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\underline{\frac{1}{2}}$

Observa que $\underline{P(B)=P(B\mid A)}$

2._ De los viajeros que llegan a un aeropuerto pequeño, 60% utilizan aerolíneas importantes, 30% viaja mediante aviones privados, y el resto usa aviones comerciales que no pertenecen a las aerolíneas importantes. De las personas que usan aerolíneas importantes 50% viaja por negocios, mientras que 60% de los pasajeros de los aviones privados y 90% de los que usan otras aeronaves comerciales también viaja por negocios. Supón que se selecciona al azar una persona que llega a este aeropuerto. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona

a) viaje por negocios? $P(n)$

b) Viaje por negocios en avión privado? $P(np)$ $\to P(n)P(p\mid n)$ ✓ $\to P(p)P(n\mid p)$ ✓

c) Haya viajado en avión privado dado que lo hace por negocios? $\underbrace{P(p\mid n)}=\frac{P(pn)}{P(n)}$

d) Comparo $P(p)$ con $P(p\mid n)$

Solución

Sean los eventos

- I: viaja en aerolínea importante.
- p: viaja en avión privado.
- c: viaja en aerolínea comercial.
- n: viaja por negocios.

Datos:

$P(I)=0.6 \qquad P(n\mid I)=0.5$

$P(p)=0.3 \qquad P(n\mid p)=0.6$

$P(c)=0.1 \qquad P(n\mid c)=0.9$

a) La persona puede viajar por negocios en cualquiera de las tres aerolíneas, y no pude viajar en dos o más aerolíneas a la vez por lo tanto son eventos disjuntos y se tiene que:

$$\begin{aligned}P(n)&=P(nI)+P(np)+P(nc)\\&=P(n\mid I)P(I)+P(n\mid p)P(p)+P(n\mid c)P(c)\\&=0.5(0.6)+0.6(0.3)+0.9(0.1)=\underline{0.57}\end{aligned}$$

Observa que $P(n)\neq P(n\mid I)$, $P(n)\neq P(n\mid p)$ y $P(n)\neq P(n\mid c)$

b) $P(np)=P(n\mid p)P(p)=0.6(0.3)=\underline{0.18}$ n y p se intersectan

c) $P(p\mid n)=\frac{P(pn)}{P(n)}=\frac{0.18}{0.57}=\frac{6}{19}=\underline{0.3158}$ $0.57=P(n)\neq P(n\mid p)=0.6$

$\to$ n y p no son independientes

Observa también que $P(p\mid n)\neq P(p)$.

Con los dos ejemplos previos hemos visto que hay casos en donde la ocurrencia de un evento no altera la ocurrencia del otro, como en el ejemplo 1, la probabilidad incondicional (en base al espacio muestral original S) y la probabilidad condicional (en base al espacio muestral reducido) son iguales [$P(B)=P(B\mid S)=P(B\mid A)$], si ocurre o no ocurre A, la probabilidad de B no se altera, es decir B no depende de A, cuando esto ocurre se dice que A y B son independientes.
Si en cambio la ocurrencia de uno altera la ocurrencia del otro, podemos pensar que hay una dependencia entre ellos como ocurre en el ejemplo 2, y en este caso la probabilidad incondicional y la probabilidad condicional son diferentes.

Definición: Los eventos A y B son **independientes** si $\boxed{P(B)=P(B\mid A)}$ y se escribe $\underline{A\perp B}$. o $A\not\perp B$ A y B no son independientes

Es decir, la ocurrencia de A no influye en la ocurrencia de B, pase o no pase A la probabilidad de B no cambia.

Observación: Si $A\perp B$ sabemos que $P(B)=P(B\mid A)=\frac{P(BA)}{P(A)}$ $\therefore$ $\boxed{P(BA)=P(B)P(A)}$ es decir, si A y B son eventos independientes entonces la probabilidad de la intersección de ellos es el producto de las probabilidades individuales.
Generalmente pensamos que si dos eventos son disjuntos o excluyentes entonces son independientes, pero esto no es verdad, considera el siguiente

Ejemplo:

3._ $S=\{1,2,3,4\}$

$A=\{1,2\} \therefore P(A)=\frac{1}{2}$

$B=\{3,4\} \therefore P(B)=\frac{1}{2}$

$AB=\varnothing \therefore P(AB)=0\neq\frac{1}{4}=P(A)P(B)$ Los eventos A y B son disjuntos, pero no independientes.

$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \to P(AB)=P(B)P(A\mid B)$

$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \to P(AB)=P(A)P(B\mid A)$

Para cualesquiera A y B

$P(AB)=\begin{cases}P(A)P(B\mid A)\\P(B)P(A\mid B)\end{cases}$ Ley de la multiplicación

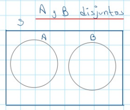
¿Qué pasa con esta Ley si $A\perp B$?

$P(A\mid B)=P(A)$

$P(B\mid A)=P(B)$

$\therefore$ $\underline{P(AB)}=\begin{cases}P(A)P(B)\\P(B)P(A)\end{cases} \to \underline{P(A)P(B)}$

A y B disjuntos

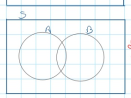


Yo imaginé este diagrama cuando me dijeron por primera vez que A y B eran independientes

$P(AB)=P(\varnothing)=0$

$P(A)\neq 0\neq P(B)$

$P(A)P(B)\neq 0$



Entonces si A y B son disjuntos NO PUEDEN SER INDEPENDIENTES.

Si A y B son independientes NECESARIAMENTE se INTERSECTAN.

Si A y B se intersectan no necesariamente son independientes puede que sí pero también puede que no.

No todos los eventos que se intersectan son independientes.

Problema 5._ Si $A\perp B$ prueba que $A'\perp B'$

¿Qué tenemos que demostrar para probar que $A'\perp B'$?

i) $P(A')=P(A'\mid B')$ y
$P(B')=P(B'\mid A')$

ii) $\underline{P(A'B')}=P(A')P(B')$

¿Qué sabemos? ¿Qué tenemos para jugar?

$P(AB)=P(A)P(B)$

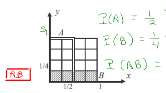
$P(A')=1-P(A)$

$$\begin{aligned}P(A'B')=P(A\cup B)'&=1-P(A\cup B)\\&=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]\\&=1-P(A)-P(B)+P(AB)\\&=(1-P(A))-P(B)+P(A)P(B)\\&=(1-P(A))-P(B)[1-P(A)]\\&=(1-P(A))[1-P(B)]\\&=\underline{P(A')P(B')} \to A'\perp B'\end{aligned}$$

Nota._ Se dice que los eventos A, B y C son mutuamente independientes si se cumplen todas las condiciones siguientes:
i) $P(AB)=P(A)P(B)$
ii) $P(AC)=P(A)P(C)$
iii) $P(BC)=P(B)P(C)$
iv) $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$

4._ Sea S el cuadrado $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$, en el plano. Considera el espacio de probabilidad uniforme sobre el cuadrado y sean A y B los eventos:
$A=\{(x,y)\mid 0\le x\le 0.5,\ 0\le y\le 1\}$
$B=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 0.25\}$ ¿Son independientes A y B?

Solución



$P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{4}$ $\Big)$ $P(A)P(B)=\frac{1}{2}\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

$P(AB)=\frac{1}{8}$

$AB=\{(x,y)\mid 0\le x\le 0.5,\ 0\le y\le 0.25\}$

$P(AB)=\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)=P(A)P(B) \therefore \underline{A\perp B}$

5._ Si $A\perp B$ entonces ¿$A'\perp B'$?

Solución

$A\perp B$ entonces $P(AB)=P(A)P(B)$
Por las Leyes de D'Morgan se tiene que

$$\begin{aligned}P(A'B')&=P(A\cup B)'\\&=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=1-P(A)-P(B)+P(AB)\\&=[1-P(A)]-P(B)+P(A)P(B)=P(A')-P(B)[1-P(A)]\\&=P(A')-P(B)P(A')=P(A')[1-P(B)]=P(A')P(B') \therefore \underline{A'\perp B'}\end{aligned}$$

6._ La probabilidad de que Tomás esté vivo dentro de 20 años es de 0.7 y la probabilidad de que Nancy esté viva dentro de 20 años es 0.9. Si se asume independencia entre ambos eventos ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de los dos esté vivo dentro de 20 años?

Solución

Sean los eventos T: Tomás viva dentro de 20 años y N: Nancy viva dentro de 20 años.
$P(T)=0.7 \quad P(T')=1-P(T)=0.3 \quad P(N)=0.9 \quad P(N')=1-P(N)=0.1$
Se sabe que $T\perp N$, por lo tanto los complementos también son independientes, y entonces
$P(T'N')=P(T')P(N')=(0.3)(0.1)=\underline{0.03}$

7._ Si $A\perp B$ y la probabilidad de que A o B ocurran es 0.6, mientras que la probabilidad de que A ocurra es 0.4. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra B?

Solución

Datos: $A\perp B$, $P(A\cup B)=0.6$, $P(A)=0.4$ $P(A')=0.6$

Sabemos que $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ $=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$
$=P(A)+P(B)[1-P(A)]=P(A)+P(B)P(A')$

Entonces $P(B)=\frac{P(A\cup B)-P(A)}{P(A')}=\frac{0.6-0.4}{0.6}=\frac{0.2}{0.6}=\underline{0.33}$

8._ Supón que A, B y C son eventos mutuamente independientes y que $P(AB)\neq 0$. Muestra que $P(C\mid AB)=P(C)$

$P(AB)=P(A)P(B)\neq 0$
$P(AC)=P(A)P(C)$
$P(BC)=P(B)P(C)$
$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$

$\underline{P(A)P(B)},P(C)=P(AB)P(C)$

Solución

$$P(C\mid AB)=\frac{P(ABC)}{P(AB)}=\frac{\cancel{P(AB)}P(C)}{\cancel{P(AB)}}=P(C)$$

9._ Supón que se lanzan 3 monedas idénticas y perfectamente balanceadas una sola vez. Sea A_i el evento de que la i-ésima moneda cae en cara. Muestra que los eventos A_1, A_2, A_3 son mutuamente independientes.

Solución

El espacio muestral del experimento es
$S=\{xxx, xcc, cxc, ccx, xxc, xcx, cxx, ccc\}$

$A_1=\{cxc, ccx, cxx, ccc\} \quad P(A_1)=\frac{1}{2}$

$A_2=\{xcc, ccx, xcx, ccc\} \quad P(A_2)=\frac{1}{2}$

$A_3=\{xcc, cxc, xxc, ccc\} \quad P(A_3)=\frac{1}{2}$

$A_1A_2=\{ccx, ccc\} \quad P(A_1A_2)=\frac{1}{4}$ $=\frac{1}{2}\frac{1}{2}=P(A_1)P(A_2)$

$A_1A_3=\{cxc, ccc\} \quad P(A_1A_3)=\frac{1}{4}$ $=\frac{1}{2}\frac{1}{2}=P(A_1)P(A_3)$

$A_2A_3=\{xcc, ccc\} \quad P(A_2A_3)=\frac{1}{4}$ $=\frac{1}{2}\frac{1}{2}=P(A_2)P(A_3)$

$A_1A_2A_3=\{ccc\} \quad P(A_1A_2A_3)=\frac{1}{8}$ $=\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}=P(A_1)P(A_2)P(A_3)$

Se tiene que $P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j) \quad \forall \quad i\neq j=1,2,3.$

y $P(A_1A_2A_3)=\prod_{i=1}^{3}P(A_i)$ entonces los tres eventos son mutuamente independientes.

Usando la definición de probabilidad condicional se tiene que

$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \therefore P(AB)=P(A\mid B)P(B)$ y también

$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \therefore P(AB)=P(B\mid A)P(A)$

esto se conoce como Teorema o Ley de la multiplicación de probabilidades y se puede leer como, *la probabilidad de la intersección de dos eventos es igual a la probabilidad condicional de uno de los eventos dado el otro por la probabilidad de la condición. O bien; la probabilidad de la intersección de dos eventos es igual a la probabilidad de uno de los eventos por la probabilidad condicional del otro evento dado el que ya tomamos.*

Teorema de la multiplicación $\boxed{P(AB)=P(A\mid B)P(B)=P(B\mid A)P(A)}$

Este teorema se puede generalizar de la manera siguiente

$P\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=\boxed{P(A_1A_2\cap\cdots\cap A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cap\cdots\cap A_{n-1})}$

Demostración:

$$P(A_1A_2\cap\cdots\cap A_n)=\cancel{P(A_1)}\frac{\cancel{P(A_1A_2)}}{\cancel{P(A_1)}}\frac{\cancel{P(A_1A_2A_3)}}{\cancel{P(A_1A_2)}}\cdots\frac{\cancel{P(A_1A_2\cap\cdots A_{n-1})}}{\cancel{P(A_1A_2\cap\cdots A_{n-2})}}\frac{P(A_1A_2\cap\cdots\cap A_n)}{\cancel{P(A_1A_2\cap\cdots\cap A_{n-1})}} \quad \blacklozenge$$

Ejemplo:

10._ La probabilidad de que le apliquen rayos X a una persona que llega a su dentista es de 0.6, la probabilidad de que una persona a la que se le han aplicado rayos X tenga también caries es de 0.3, y la probabilidad de que a alguna persona a la que se le han aplicado rayos X y a la que se le ha curado una caries, se le extraiga también un diente es de 0.1. ¿Cuál es la probabilidad de que a una persona que visite a su dentista se le apliquen rayos X, se le cure una caries y se le extraiga un diente?

Solución

Sean los eventos X: se le aplican rayos X, C: tiene caries y E: se le extrae un diente.
Datos: $P(X)=0.6$
$P(C\mid X)=0.3$
$P(E\mid XC)=0.1$

Entonces $P(XCE)=P(X)P(C\mid X)P(E\mid XC)=0.6(0.3)(0.1)=\underline{0.018}$

Hacer los problemas 7, 8, 10, 12, 13, 14, 16–20 y entregar a más tardar el lunes 30/08/21 a las 10:00 PM

Recuerda que la Ley de la multiplicación se puede escribir de 2 maneras diferentes.

¿De cuántas maneras diferentes se puede escribir la Ley de la multiplicación para

2 eventos 2 $P(AB)=\overbrace{P(A)P(B\mid A)}^{1}=\overbrace{P(B)P(A\mid B)}^{2}$
3 eventos 6
4 eventos 24
n eventos $n!$

$P(ABC)=P(A)P(B\mid A)P(C\mid AB)$ 1
$P(ACB)=P(A)P(C\mid A)P(B\mid AC)$ 2
$P(BAC)=P(B)P(A\mid B)P(C\mid BA)$ 3
$P(BCA)=P(B)P(C\mid B)P(A\mid BC)$ 4
$P(CAB)=P(C)P(A\mid C)P(B\mid CA)$ 5
$P(CBA)=P(C)P(B\mid C)P(A\mid CB)$ 6