Martes 19 de octubre de 2021.

Definición: La función de probabilidad marginal de una variable aleatoria $(X \text{ o } Y)$ que forma parte de una v.a conjunta o bidimensional (X,Y) está dada por:

Caso Discreto

i) Marginal de la v.a X ._ $f_X(x)=P(X=x)=\sum_y P(X=x,Y=y)=\sum_y f_{X,Y}(x,y)$ Para cada valor posible de x.

ii) Marginal de la v.a Y ._ $f_Y(y)=P(Y=y)=\sum_x P(X=x,Y=y)=\sum_x f_{X,Y}(x,y)$ Para cada valor posible de y.

$X=x$	$P(X=x)$
x_1	$\sum_y P(X=x_1, Y=y)$
x_2	
$\vdots$	
x_n	$\sum_y P(X=x_n, Y=y)$

Caso Continuo

i) Marginal de la v.a X ._ $\boxed{f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy}$

ii) Marginal de la v.a Y ._ $\boxed{f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx}$

$Y=y$	$P(Y=y)$
y_1	$\sum_x P(X=x, Y=y_1)$
y_2	
$\vdots$	
y_m	$\sum_x P(X=x, Y=y_m)$

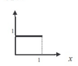
Ejemplo: El empuje X y la razón de la mezcla Y son dos características del funcionamiento de un motor a reacción. Si (X,Y) es una v. a. bidimensional con f. d. p $f_{X,Y}(x,y)=2(x+y-2xy)$ en $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$. Encuentra las distribuciones marginales para X y Y.

Solución

$$f_X(x)=\int_{y=0}^{1} f_{X,Y}(x,y)dy \quad \text{con} \quad 0\le x\le 1$$
$$=\int_0^1 2(x+y-2xy)dy$$
$$=2\left[xy+\frac{y^2}{2}-\frac{\cancel{2}xy^2}{\cancel{2}}\right]_{y=0}^{y=1}$$
$$=\cancel{2}\left[\cancel{x}+\frac{1}{\cancel{2}}-\cancel{x}\right]=1$$

Entonces la f.d.p marginal para X es una distribución uniforme $X\sim U(0,1)$ dada por $f_X(x)=1$. Cuya gráfica es la siguiente.

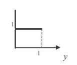
Gráfica de la v.a $X\sim U(0,1)$



Para encontrar la marginal de Y se integra la conjunta respecto a X:

$$f_Y(y)=2\int_0^1 (x+y-2xy)dx \quad \text{con } 0\le y\le 1$$
$$=2\left[\frac{x^2}{2}+xy-\frac{2x^2y}{2}\right]_0^1$$
$$=2\left[\frac{1}{2}+y-y\right]=1$$

Por lo tanto Y también tiene una f.d.p uniforme de 0 a 1, lo cual se escribe así $Y\sim U(0,1)$ $f_Y(y)=1$ Y su representación gráfica es



Ejemplo: Se dice que la v. a. bidimensional (X,Y) se distribuye uniformemente en la región R si tiene f.d.p

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} C & (x,y)\in R \\ 0 & \text{o.c.}\end{cases}$$

Encuentra el valor de la constante C.

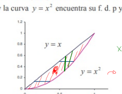
Solución

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} C\,dxdy=C\iint_R dxdy$$

$$C[\text{Area de } R]=1 \quad \therefore \quad \boxed{C=\frac{1}{\text{Area de}\langle R\rangle}}$$

Siempre y cuando R sea una región de área finita.

Ejemplo: Supón que la v. a. bidimensional (X,Y) está distribuida uniformemente en la región R comprendida entre la recta $y=x$ y la curva $y=x^2$ encuentra su f. d. p y las marginales.



$\rightsquigarrow x=\sqrt{y}$ $\quad x\Big|_0^1 \quad y\Big|_{x^2}^{x}$

Primero se encuentra el área de la región en donde está definida la uniforme bidimensional.

$$\text{Area de } R=\int_{x=0}^{1}\int_{y=x^2}^{y=x} dydx=\int_0^1 y\Big|_{y=x^2}^{y=x}dx$$
$$=\int_0^1 (x-x^2)dx$$
$$=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{A(R)}=\frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{6}}=\frac{6}{1}=6$

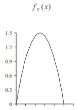
Entonces la f.d.p conjunta está dada por $f_{X,Y}(x,y)=6 \quad (x,y)\in R$

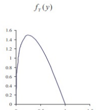
Cálculo de las marginales:

$$f_X(x)=\int_{y=x^2}^{x} 6dy=6\left[y\big|_{x^2}^{x}\right]=6\left[x-x^2\right] \qquad 0\le x\le 1$$

$$f_Y(y)=\int_{x=y}^{\sqrt{y}} 6dx=6\left[x\big|_y^{\sqrt{y}}\right]=6\left[\sqrt{y}-y\right] \qquad 0\le y\le 1$$

La representación gráfica de las f.d.p marginales para las variables X y Y respectivamente es:





Definición: La función de distribución condicional está dada por:

i) Caso discreto $f_{X|y}(x|y)=\dfrac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}$ con $P(Y=y)>0$

Mayúscula v.a — minúscula es un número

ii) Caso continuo $f_{X|y}(x|y)=\dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$ con $f_Y(y)>0$

Mayúscula v.a — minúscula número

$f_{Y|x}(y|x)=\dfrac{P(X=x, Y=y)}{P(X=x)}$

$f_{Y|x}(y|x)=\dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$

Observación:

1._ En esta definición la variable aleatoria es X y está condicionada al valor específico y de la v.a Y.

2._ Las dos funciones anteriores cumplen las condiciones de la f. d. p

$$f_{X|y}\ge 0 \quad y \quad \begin{cases}\sum_x f_{X|y}(x|y)=1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|y}(x|y)dx=1\end{cases}$$

Es una sumatoria y una integral porque hay sólo una v.a.

Tarea: Demuestra el punto 2 de la observación.

Definición: La esperanza condicional de la v.a X se define como antes en términos de su f.d.p es decir

$$E(X|y)=\begin{cases}\sum_x x f_{X|y}(x|y) & \text{Caso Discreto} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|y}(x|y)dx & \text{Caso Continuo}\end{cases}$$

$$E(Y|x)=\begin{cases}\sum_y y\, P(Y=y|X=x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_{Y|x}(y|x)dy\end{cases}$$

Ejemplo: Si (X,Y) tiene f.d.p conjunta $f_{X,Y}(x,y)=x^2+\frac{yx}{3}$ $0\le x\le 1$, $0\le y\le 2$, encuentra las distribuciones condicionales $f_{X|y}(x|y)$ y $f_{Y|x}(y|x)$ y verificar que son f.d.p

Solución

Primero se calculan las f.d.p marginales para las variables X y Y:

$$f_X(x)=\int_0^2 (x^2+\frac{xy}{3})dy=\left[x^2y+\frac{x}{3}\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=2}=2x^2+\frac{2}{3}x$$

$$f_Y(y)=\int_0^1 (x^2+\frac{xy}{3})dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{y}{3}\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}y$$

Siguiendo la definición de la función de distribución de probabilidad condicional se tiene que:

$$f_{X|y}(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$
$$=\frac{x^2+\frac{xy}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}y}$$
$$=\frac{\frac{3x^2+xy}{3}}{\frac{2+y}{6}}$$
$$=\frac{6(3x^2+xy)}{3(2+y)}=\frac{2(3x^2+xy)}{2+y} \qquad 0\le x\le 1$$

Y la condicional de la variable aleatoria Y dado el valor particular x de la variable aleatoria X, es:

$$f_{Y|x}(y|x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$
$$=\frac{x^2+\frac{xy}{3}}{2x^2+\frac{2}{3}x} \qquad 0\le y\le 2$$
$$=\frac{\frac{3x^2+xy}{3}}{\frac{6x^2+2x}{3}}$$
$$=\frac{3x^2+xy}{6x^2+2x}$$
$$=\frac{x(3x+y)}{x(6x+2)}=\frac{3x+y}{6x+2} \qquad 0\le y\le 2$$

ii) $\int_0^1 f_{X|y}(x|y)\,dx=\int_0^1 \frac{6x^2+2xy}{2+y}dx$
$=\frac{1}{2+y}\left[6\int_0^1 x^2dx+2y\int_0^1 x\,dx\right]=\frac{1}{2+y}\left[2x^3+yx^2\right]\Big|_{x=0}^{x=1}$
$=\frac{1}{2+y}\left[2+y\right]=1$ $\rightsquigarrow$ $f_{X|y}(x|y)$ es una f.d.p

Es decir; las f.d.p condicionales son:

$$f_{X|y}(x|y)=\frac{6x^2+2xy}{2+y} \qquad 0\le x\le 1 \qquad 0\le y\le 2$$

$$f_{Y|x}(y|x)=\frac{3x+y}{6x+2} \qquad 0\le x\le 1 \qquad 0\le y\le 2$$

i) Es evidente que son funciones no negativas.

$\int_0^2 f_{Y|x}(y|x)dy=\int_0^2\frac{3x+y}{6x+2}dy=\frac{1}{6x+2}\left[3xy+\frac{y^2}{2}\right]\Big|_0^2$
$=\frac{1}{6x+2}\left[6x+2\right]=1$ $\rightsquigarrow$ $f_{Y|x}(y|x)$ sí es una f.d.p

4.3 Independencia de dos o más variables aleatorias.

Definición: Sea (X,Y) una v. a. bidimensional. Se dice que las variables aleatorias X y Y son independientes si

i) Caso discreto $P(X=x,Y=y)=P(X=x)P(Y=y)$ Para todos los valores posibles de (X,Y)

ii) Caso continuo $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ Para todo (x,y) en la región de definición R.

Teorema: Sea (X,Y) una v. a. bidimensional discreta. Entonces X y Y son independientes si y sólo si se tiene que:

i) Caso discreto $P(X=x|Y=y)=P(X=x)$

ii) Caso continuo $f_{X|y}(x,y)=f_X(x)$

Demostración:

i) Supóngase que $X\perp Y$

Por definición

$$P(X=x|Y=y)=\frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}=\frac{P(X=x)P(Y=y)}{P(Y=y)}=P(X=x)$$

ii) Tarea. No hacer.

Ejemplo: Supón que una máquina se usa para un trabajo especifico en la mañana y para otro diferente en la tarde. X es el número de veces que la máquina falla en la mañana y Y el número de veces que la máquina falla en la tarde. En la tabla se muestra la distribución de probabilidad conjunta. ¿Son independientes las variables aleatorias X y Y?

Función de probabilidad conjunta $P(X,Y)$

Y \ X	0	1	2	Suma $P(Y=y)$
0	0.10	0.20	0.20	0.5
1	0.04	0.08	0.08	0.2
2	0.06	0.12	0.12	0.3
Suma $P(X=x)$	0.20	0.40	0.40	1.00

Para que sean independientes se debe cumplir que la conjunta sea el producto de las marginales, entonces.

$P(X=0,Y=0)=P(X=0)P(Y=0)$
$0.1=0.5(0.2)$

$P(X=0,Y=1)=P(X=0)P(Y=1)$
$0.04=0.2(0.2)$
$P(X=0,Y=2)=P(X=0)P(Y=2)$
$0.06=0.2(0.3)$

Continuando así por columnas se tiene que:

$0.2=0.4(0.5)$	$0.2=0.4(0.5)$
$0.08=0.4(0.2)$	$0.08=0.4(0.2)$
$0.12=0.4(0.3)$	$0.12=0.4(0.3)$

Por lo tanto X y Y sí son independientes.

Ejemplo: Sean X y Y la duración de dos dispositivos electrónicos, con f. d. p conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y)=e^{-(x+y)} \qquad \underbrace{y\ge 0 \quad , \quad x\ge 0}$$

Hay independencia entre los valores posibles de las variables involucradas.

¿Son X y Y variables aleatorias independientes?

1° Observar si hay independencia entre los rangos de definición de las v.v.a.a, es decir que una no involucre a la otra.

En el pasado $0\le x\le 1$ y $0\le y\le 2$ también hay independencia entre los rangos de definición individuales.

En estos casos hay que averiguar si las v.v.a.a son o no independientes.

Si los rangos de definición fueran tales que

$0\le x\le y\le 3$ — En este caso no hay independencia entre los rangos de valores posibles de las variables y por lo tanto tampoco entre las v.v.a.a. $\underbrace{X \not\perp Y}_{\text{no son independientes.}}$

Solución Si la f.d.p conjunta se puede escribir como el producto de las marginales entonces sí son independientes, es decir si $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ entonces $X\perp Y$.

Las f.d.p marginales son:

$$f_X(x)=\int_0^\infty e^{-x}e^{-y}dy=e^{-x}\left(-e^{-y}\right)\Big|_0^\infty=e^{-x}(1)=e^{-x}$$

$$f_Y(y)=\int_0^\infty e^{-x}e^{-y}dx=e^{-y}\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^\infty=e^{-y}$$

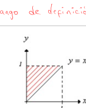
$f_{X,Y}(x,y)=e^{-(x+y)}=e^{-x}e^{-y}=e^{-x}\,e^{-y}$ entonces X y Y sí son independientes.

Nota: Si la función de densidad conjunta se puede factorizar como el producto de una función de una de las variables y otra función de la otra variable y el recorrido de una de las variables no depende del recorrido de la otra variable entonces las variables son independientes.

Ejemplo: Sea (X,Y) una v. a. bidimensional con f. d. p conjunta $f_{X,Y}(x,y)=8xy$ en $0\le x\le y\le 1$.
¿Son independientes X y Y?

R._ No, porque el rango de definición o recorrido de X depende del de Y.

Solución



NO son independientes ya que a pesar de que la f.d.p conjunta se puede factorizar en una función que depende sólo de X y otra que depende sólo de Y, el recorrido de X depende del recorrido de Y.

Recomendación: Primero se analiza al recorrido de las variables, si estos son independientes, se procede a encontrar las marginales y ver sí se verifica que la f.d.p conjunta es igual al producto de las marginales.

Definición: La esperanza de la v.a bidimensional (X,Y) está dada por:

i) Caso discreto $\quad \boxed{E(X,Y)=\sum_y\sum_x xyP(X=x,\ Y=y)}$

ii) Caso continuo $\quad \boxed{E(X,Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_{X,Y}(x,y)dxdy}$

Teorema.- Si $g(X,Y)$ es una función de la v.a bidimensional (X,Y), entonces la esperanza de la función está dada, como en el caso unidimensional, por la expresión:

i) Caso discreto $\quad \boxed{E[g(X,Y)]=\sum_y\sum_x g(x,y)P(X=x,\ Y=y)}$

ii) Caso continuo $\quad \boxed{E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, f_{X,Y}(x,y)dxdy}$

Ejemplo: Sea (X,Y) una v.a bidimensional con f.d.p conjunta dada por $f_{X,Y}(x,y)$. Encuentra $E[g(X,Y)]$ si $g(X,Y)=X$

Solución

$$E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, f_{X,Y}(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} xdx\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy=\int_{-\infty}^{\infty} xdxf_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx=E(X)$$

Ejemplo: La distribución conjunta para Y_1, el número de contratos asignados a la empresa A, y Y_2, el número de contratos asignados a la empresa B, está dado por las entradas de la tabla siguiente.

f.d.p conjunta de (Y_1,Y_2)

Y_2	Y_1			Suma
	0	1	2	
0	1/9	2/9	1/9	4/9
1	2/9	2/9	0	4/9
2	1/9	0	0	1/9
Suma	4/9	4/9	1/9	1

a) Demuestra que la marginal para Y_1 es $bin(y_1, n=2,\ p=1/3)$.
b) Encuentra $E(Y_1-Y_2)$

Solución

a)

f.d.p de Y_1

$Y_1=y_1$	$P(Y_1=y_1)$
0	4/9
1	4/9
2	1/9

sale de la tabla conjunta de arriba.

La binomial con parámetros n y p está dada por $P(Y_1=y_1)=\binom{n}{y_1}p^{y_1}q^{n-y_1}$ $\quad y_1=0,1,2 \quad n=2 \quad p=\frac{1}{3}$

De la tabla se tiene que $P(Y_1=0)=\frac{4}{9}$ y de la fórmula se tiene que $\quad \binom{2}{0}\frac{1}{3}^0\left(\frac{2}{3}\right)^2$

$\frac{4}{9}=\binom{n}{0}p^0q^n \quad$ con $\quad n=2$

$\frac{4}{9}=q^2$ entonces $q=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$ y por lo tanto $p=\frac{1}{3}$

Si $Y_1\sim bin\left(y_1;\ n=2,\ p=\frac{1}{3}\right)$ tendremos que

$P(Y_1=1)=\binom{2}{1}pq=2\frac{1}{3}\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$

$P(Y_1=2)=\binom{2}{2}p^2q^0=p^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

b) $E(Y_1-Y_2)=\sum_{y_2=0}^{2}\sum_{y_1=0}^{2}(y_1-y_2)P(Y_1=y_1,\ Y_2=y_2)$ $\qquad g(X,Y)=Y_1-Y_2$

$=(0-0)\frac{1}{9}+(1-0)\frac{2}{9}+(2-0)\frac{1}{9}+(0-1)\frac{2}{9}+(1-1)\frac{2}{9}$
$+(2-1)0+(0-2)\frac{1}{9}+(1-2)0+(2-2)0$
$=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}-\frac{2}{9}-\frac{2}{9}=0$