

Lista de ejercicios: Distribuciones discretas.

Profesora: Leticia Cañedo Suárez.

1. Un fabricante de válvulas admite que su control de calidad ha decaído, de modo que actualmente la probabilidad de producir una válvula defectuosa es 0.5. Si se fabrican un millón de válvulas al mes y eliges al azar entre estas válvulas 10,000 muestras cada una formada por 15 válvulas. ¿En cuántas muestras esperas encontrar

a) Exactamente 13 válvulas buenas?

b) Menos de 13 válvulas buenas?

Resp. a) 32 b) 9963

2. En promedio una persona en 1000 comete un error numérico al preparar su declaración de impuestos. Si se seleccionan 10,000 formas al azar y se examinan, ¿cuál es la probabilidad de que 6, 7 u 8 de las formas contengan un error?

Resp. 0.2657

3. Un puente de cuota cobra \$1.0 por cada autobús de pasajeros y \$2.5 por otros vehículos. Supón que durante las horas diurnas, el 60% de todos los vehículos son autobuses de pasajeros. Si 25 vehículos cruzan el puente durante un periodo particular diurno, ¿cuál es el ingreso resultante de cuotas esperado?

Resp. 40

4. Se sabe que el proceso de producción de luces de un tablero de automóvil de indicador giratorio produce uno por ciento de luces defectuosas. Si este valor permanece invariable, y se selecciona al azar una muestra de 100 luces, encuentre $P(\hat{p} \leq 0.03)$, donde \hat{p} es la fracción de defectos de la muestra.

Resp. 0.981

5. Dada una distribución binomial con un valor fijo de n ¿existen valores de p para los cuales $\sigma^2 = 0$? Explica.

6. Dada una distribución binomial con un valor fijo de n , ¿cuál es el valor de p en el que el valor de σ^2 es máximo? Explica.

Resp. 0.5

7. Si $b(x; n, p)$ denota la probabilidad de x éxitos para un experimento binomial con n intentos y $P(\text{éxito}) = p$, demuestre que $b(x; n, 1 - p) = b(n - x; n, p)$.

8. Una venta en particular involucra 4 artículos seleccionados al azar de un gran lote que contiene 10% de defectuosos. Sea Y el número de defectuosos entre los 4 artículos vendidos. El comprador de los artículos regresará los defectuosos para ser reparados, y el costo de reparación está dado por $C = 3Y^2 + Y + 2$ encuentre el costo esperado de reparación.

Resp. 3.96

9. Supón que hemos obtenido una distribución binomial con n intentos y probabilidad de éxito p . Ahora considera una distribución binomial con n intentos en la cual la probabilidad de éxito es $1 - p$.

a) ¿Cómo se comparan las medias de las distribuciones binomiales?

b) ¿Cómo se comparan las desviaciones estándar?

Resp. a) Son diferentes b) Son iguales

10. Un fabricante sabe que en promedio 20% de los tostadores eléctricos que fabrica requerirán de reparaciones dentro de un año después de su venta. Cuando se seleccionan al azar 20 tostadores, encuentra los números x y y apropiados tales que:

a) La probabilidad de que al menos x de ellos requieran reparaciones sea menor que 0.5.

b) La probabilidad de que al menos y de ellos no requieran reparaciones sea mayor de 0.8.

Resp. a) 5 b) 15

11. Una región que requiere la instalación de un detector de humo en todas las casas prefabricadas, ha estado en vigor en una ciudad durante un año. El departamento de bomberos está preocupado porque muchas casas siguen sin detectores. Sea p la verdadera proporción de casas que tienen detectores y supón que se inspecciona al azar una muestra de 25 casas. Si la muestra indica que menos del 80% tienen detector, el departamento de bomberos hará una campaña para que el programa de instalaciones sea obligatorio. Pero debido a lo costoso del programa, el departamento no pedirá tales inspecciones a menos que la evidencia muestral apoye con argumentos sólidos esta necesidad. Sea X el número de casas con defectos entre las 25 de la muestra. Considera rechazar la afirmación de que $p \geq 0.8$ si $X \leq 15$, donde x es el valor observado de X .

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la petición sea rechazada cuando el valor real de p es 0.8?

b) ¿Cuál es la probabilidad de no rechazar la petición cuando $p = 0.7$? Y ¿Cuándo $p = 0.6$?

Resp. a) 0.017 b) 0.811 y 0.425

12. La limusina perteneciente a un aeropuerto tiene espacio para cuatro pasajeros en cualquier viaje. La compañía aceptará un máximo de seis reservaciones por viaje y un pasajero debe tener una reservación. Por registros anteriores, 20% de quienes hacen reservaciones no se presentan para el viaje. Si se hacen seis reservaciones, ¿Cuál es la probabilidad de que, por lo menos, un individuo con reservación no tenga espacio para el viaje?

Resp. 0.6553

13. Se ha observado que el 80% de las impresoras conectadas a computadoras en el hogar funciona correctamente en el momento de la instalación. Las demás precisan ajustes. Un distribuidor específico vende 10 unidades en un mes dado.

a) Calcula la probabilidad de que al menos nueve de las impresoras funcionen correctamente al ser instaladas.

b) Considera 5 meses en los que se venden 10 unidades mensuales. ¿Cuál es la probabilidad de que cuando menos nueve unidades funcionen adecuadamente encada uno de los cinco meses?

Resp. a) 0.3758 b) (0.3758)⁵

14. Es posible que una computadora reciba una señal errónea que no se muestra como error en la pantalla. Se le denomina error de paginación silencioso. Una terminal específica está defectuosa, de modo que al usar el procesador de textos introduce un error de este tipo con probabilidad de 0.1. El procesador de textos se usa 20 veces durante una semana dada.

a) Calcula la probabilidad de que no haya ocurrido un error de paginación silencioso.

b) Calcula la probabilidad de que haya ocurrido por lo menos uno de esos errores.

c) ¿Sería inusual que hayan tenido lugar más de cuatro de esos errores? Explica tu respuesta.

15. Una v.a binomial tiene media 5 y varianza 4. Calcula los valores de n y p que caracterizan su distribución.

16. Supón que cada vez que se genera la señal en el detector de metales de un aeropuerto 25% de las veces las causan las monedas en el bolsillo del pasajero. Durante una hora dada, se detiene a 15 pasajeros porque se activa la señal del detector.

a) Calcula la probabilidad de que se haya detenido por lo menos a tres personas por monedas en su bolsillo.

b) Si el detector detienen a 15 pasajeros, ¿sería inusual que ninguno de ellos haya sido detenido a causa de monedas en su bolsillo? Explica.

17. Sólo cerca de 70% de la sangre donada en los bancos de sangre es utilizada. El restante 30% no puede ser empleada debido a la presencia de distintas infecciones. Supón que para una operación de alto riesgo se solicitan 10 donadores (a cada uno se le extrae una *unidad de sangre*: 450 ml). Sea X una v.a que representa el número de unidades que pueden usarse.

Basados en los cuestionarios llenados por los donadores, se cree que al menos 5 de las unidades son útiles. Para la operación se requieren al menos 7 unidades. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 7 de las unidades sean útiles si se toma como cierto que al menos 5 de las unidades son buenas?

18. Sea X una v.a binomial con la siguiente distribución de probabilidad ($n = 3$):

X	0	1	2	3
$P(X) = p$	0.2746	0.4436	0.2389	0.0429

Determina los valores de p y de q .

19. Un embarque de 100 artículos contiene 20 unidades defectuosas. Al llegar el embarque a su destino, el importador toma una m.a y la inspecciona con el criterio de que si encuentra una unidad defectuosa se rechazará todo el embarque.

a) Si la muestra es de 20 unidades, ¿Cuál es la probabilidad de rechazar el embarque?

b) Si se selecciona una muestra de 30 unidades, ¿cuál es la probabilidad de rechazar el embarque?

c) Si el importador estuviera de acuerdo con que hubiera una probabilidad de 0.95 de rechazar el embarque con 20 unidades defectuosas y 80 buenas, ¿de qué tamaño debería seleccionar la muestra?

20. Se repiten de manera independiente ensayos Bernoulli con probabilidad de éxito constante hasta obtener k éxitos.

a) Encuentra la f.d.p de esta variable aleatoria.

Una pareja desea tener exactamente 2 niñas en su familia. Tendrán hijos hasta que se satisfaga esta condición.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la familia tenga x hijos varones?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la familia tenga cuatro hijos?

21. Un agente de bienes raíces estima que la probabilidad de vender una casa es 0.1. El día de hoy tiene que ver 4 clientes. Si tiene éxito en las primeras tres visitas ¿cuál es la probabilidad de que su cuarta visita no sea exitosa?

Resp. 0.0009

22. La probabilidad de que un submarino hunda un barco enemigo con un disparo de sus torpedos es 0.8. Si los disparos son independientes, determina la probabilidad de un hundimiento dentro de los primeros 2 disparos y dentro de los primeros tres.

Resp. 0.96 y 0.992

23. En la ESCOM la probabilidad de que ocurra una tormenta en cualquier día durante la primavera es 0.05. Suponiendo independencia ¿cuál es la probabilidad de que la primera tormenta ocurra el 5 de abril? Suponiendo que la primavera comienza el primero de marzo.

Resp. 0.0083

24. En tiempo ocupado un conmutador telefónico está muy cerca de su capacidad, por lo que los usuarios tienen dificultad al hacer sus llamadas. Es de interés conocer el número de intentos necesarios a fin de conseguir un enlace telefónico. Supón que la probabilidad de conseguir un enlace durante el tiempo ocupado es 0.05. Nos interesa conocer la probabilidad de que se necesiten cinco intentos para una llamada exitosa.

Resp. 0.041

25. Tres personas lanzan una moneda y el disparejo paga los cafés. Si todas las monedas tienen el mismo resultado, se lanzan de nuevo. Encuentra la probabilidad de que se necesiten menos de 4 lanzamientos.

Resp. 63/64

26. La probabilidad de que un estudiante para piloto apruebe el examen escrito para una licencia de piloto privado es 0.7. Encuentra la probabilidad de que el estudiante apruebe el examen

a) en el tercer intento.

b) antes del cuarto intento.

Resp. a) 0.063 b) 0.973

27. La probabilidad de que un cliente acuda al mostrador de una tienda de abarrotes en cualquier periodo de dos segundos, es igual a 0.1. Supón que los clientes llegan de manera aleatoria y por lo tanto las llegadas en cada intervalo de un segundo son independientes.

a) Encuentra la probabilidad de que la primera llegada ocurra durante el tercer intervalo de un segundo.

b) Encuentra la probabilidad de que la primera llegada no ocurra hasta al menos el tercer intervalo de un segundo.

Resp. a) 0.081 b) 0.81

28. Al responder una pregunta con respecto a un tema controversial (como "¿Alguna vez ha fumado marihuana?"), muchas veces la gente no quiere contestar afirmativamente. Obtén la distribución de probabilidad para Y , el número de personas que se necesitaría entrevistar hasta obtener una sola respuesta afirmativa, sabiendo que el 80% de la población contestaría verídicamente "no" a la pregunta y que del 20% que deberían contestar verídicamente "sí", un 70% miente.

Resp. $Y \sim G(y; p = 0.06)$

29. ¿Cuántas veces esperas que haya que lanzar una moneda perfecta hasta obtener la primera cara?

Resp. 2

30. Un explorador de petróleo perfora una serie de pozos en cierta área para encontrar un pozo productivo. La probabilidad de que tenga éxito en una prueba es 0.2.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el primer pozo productivo sea el tercer pozo perforado?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el explorador no vaya a encontrar un pozo productivo si solamente puede perforar a lo más 10 pozos?

Resp. a) 0.128 b) 0.1073

31. Supón que el costo de efectuar un experimento es \$1,000. Si el experimento falla, se incurre en un costo adicional de \$300 debido a ciertos cambios que deben efectuarse antes de que se intente un nuevo experimento. Si la probabilidad de éxitos en cualquiera de los ensayos es 0.2, si los ensayos aislados son independientes y si los experimentos continúan hasta que se obtiene el primer resultado exitoso, ¿Cuál es el costo esperado del procedimiento completo?

Resp. 6,200

32. Si la probabilidad de que cierto examen dé una reacción “positiva” es igual a 0.4, ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran menos de 5 reacciones “negativas” antes de la primera positiva?

Resp. 0.9222

33. Un lote de 25 cinescopios se somete a un procedimiento de pruebas de aceptación. El procedimiento consiste en extraer 5 tubos al azar, sin reemplazo, y probarlos. Si dos o menos tubos fallan, los restantes se aceptan. De otro modo el lote se rechaza. Si el lote contiene 4 tubos defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad de que el lote se acepte?

Resp. 0.98

34. El dueño de una casa planta seis bulbos seleccionados al azar de una caja que contiene 5 bulbos de tulipán y 4 de narciso. ¿Cuál es la probabilidad de que plante dos bulbos de narciso y 4 de tulipán?

Resp. 5/14

35. Estudios de biología y el ambiente a menudo etiquetan y sueltan a sujetos a fin de estimar el tamaño y el grado de ciertas características en la población. Se capturan 10 animales de cierta población que se piensa extinta o cerca de la extinción, se etiquetan y se liberan en cierta región. Después de un período se selecciona en la región una m.a de 15 animales del tipo. ¿Cuál es la probabilidad de que cinco de estos seleccionados sean animales etiquetados si hay 25 animales de este tipo en la región?

Resp. 0.2315

36. Una fuerza de tarea gubernamental sospecha que algunas fábricas violan los reglamentos contra la contaminación ambiental con respecto a la descarga de cierto tipo de producto, 20 empresas están bajo sospecha pero no todas se pueden inspeccionar. Supón que tres de las empresas violan los reglamentos. ¿Cuál es la probabilidad de que:

a) en la inspección de 5 empresas no se encuentre ninguna violación?

b) el plan anterior encuentre 2 que violan el reglamento?

Resp. a) 0.3991 b) 0.1315

37. Para evitar la detección en la aduana un viajero coloca 6 tabletas de narcótico en una botella que contiene 9 píldoras de vitamina similares en apariencia. Si el oficial de la aduana selecciona 3 de las tabletas al azar para su análisis, ¿Cuál es la probabilidad de que el viajero sea arrestado por posesión ilegal de narcóticos?

Resp. 0.815

38. Supón que X tiene una distribución de Poisson. Si $P(X = 2) = \frac{2}{3}P(X = 1)$. Calcula $P(X = 0)$ y $P(X = 3)$.

Resp. 0.264 y 0.104

39. Una fuente radiactiva se observa durante 7 intervalos cada uno de 10 segundos de duración y se cuenta el número de partículas emitidas durante cada periodo. Supón que el número de partículas emitidas, digamos X , durante cada periodo observado tiene una distribución de Poisson con parámetro $\lambda = 5$. ¿Cuál es la probabilidad de que:

a) en cada uno de los 7 intervalos de tiempo, se emitan 4 o más partículas?

b) Al menos en uno de los 7 intervalos de tiempo se emitan 4 o más partículas?

Resp. a) 0.1158 b) 0.999

40. El número de partículas emitidas por una fuente radioactiva durante un periodo específico es una v.a con distribución de Poisson. Si la probabilidad de ninguna emisión es igual a $1/3$. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran 2 o más emisiones?

Resp. $\frac{(2 - \ln 3)}{3}$

41. Una secretaria comete dos errores por página en promedio. ¿Cuál es la probabilidad de que en la siguiente página cometa:

a) 4 o más errores?

b) Ningún error?

Resp. a) 0.1429 b) 0.1353

42. Un estacionamiento tiene dos entradas. Los coches llegan a la entrada 1 de acuerdo con una distribución de Poisson con una media de tres por hora, y a la entrada 2 de acuerdo con una distribución de Poisson con una media de 4 por hora. ¿Cuál es la probabilidad de que tres coches lleguen al estacionamiento durante una hora dada?

Resp. 0.521

43. Según la Administración de incendios, 185 personas murieron en 12,438 incendios en hoteles y moteles en 1979, es decir aproximadamente 1.5 muertos por cada 100 incendios.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el número de muertos exceda de ocho, si en una región ocurrieron 200 incendios en hoteles y moteles?

b) Al ocurrir 200 incendios en hoteles y moteles en cierta región y al exceder el número de muertos de ocho, ¿sospechas que la razón promedio de muertos en la región es más alta que la media nacional?

Resp. a) 0.004

44. El chef de un restaurante prepara una ensalada revuelta que contiene, en promedio, cinco vegetales. Encuentra la probabilidad de que la ensalada contenga más de 5 vegetales:

a) en un día dado.

b) en tres de los siguientes 4 días.

c) por primera vez en abril el día 5.

Resp. a) 0.385 b) 0.14 c) 0.055

45. Supón que aviones pequeños llegan a cierto aeropuerto según un proceso de Poisson, con tasa de 8 aviones por hora, de modo que el número de llegadas durante un periodo de t horas es una v.a de Poisson con parámetro $\lambda = 8t$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 5 aviones pequeños lleguen durante un período de una hora? ¿Por lo menos 5? ¿Por lo menos 10?

b) ¿Cuál es el valor esperado y la desviación estándar del número de aviones pequeños que lleguen durante un periodo de 90 minutos?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos 20 aviones pequeños lleguen durante un periodo de 2.5 hrs? ¿De que a lo sumo lleguen 10 durante este periodo?

Resp. a) 0.091, 0.9 y 0.283 b) 12 y 3.464 c) 0.53 y 0.011

46. Supón que un libro con n páginas contiene, en promedio λ erratas por página. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos haya m páginas que contengan más de k erratas?

47. La probabilidad de que un ratón inoculado con un suero contraiga cierta enfermedad es 0.2. Encuentra la probabilidad de que a lo más tres de 30 ratones inoculados contraigan la enfermedad, utilizando una aproximación de Poisson.

Resp. 0.151

48. El dueño de una tienda tiene existencias de cierto artículo y decide utilizar la siguiente promoción para disminuir la existencia. El artículo tiene un precio de \$100. El dueño reducirá el precio a la mitad por cada cliente que compre el artículo durante un día en particular. Así el primer cliente pagará \$50 por el artículo, el segundo pagará \$25, y así sucesivamente. Supón que el número de clientes que compra el artículo durante el día tiene una distribución de Poisson con media 2. Encuentra el costo esperado del artículo al final de día.

Resp. $100e^{-1}$

49. De acuerdo con un estudio publicado por un grupo de sociólogos de la Universidad de Massachusetts, cerca de dos tercios de los 20 millones de personas que en este país consumen Valium son mujeres. Supón que esta cifra es una estimación válida, encuentra la probabilidad de que en un día dado la quinta prescripción de Valium que escribe un doctor es la primera que prescribe Valium para una mujer.

Resp. 1/54

50. El número promedio de ratas de campo por acre en un campo de cinco acres de trigo se estima en 12. Encuentra la probabilidad de que se encuentren menos de siete ratas de campo:

a) En un acre dado

b) En dos de los siguientes tres acres que se inspeccionan.

Resp. 0.0458 y 0.006