Martes 31 de agosto de 2021.

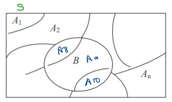
1.6 Teorema de Bayes.

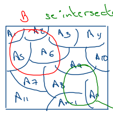
Definición: Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son eventos mutuamente excluyentes, es decir $A_iA_j = \varnothing \ \ \forall\, i \neq j$, tales que $S = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ se dice que $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ es una partición de S.

$$\overbrace{B = BA_1 \cup BA_2 \cup BA_5 \cup BA_6 \cup BA_7 \cup BA_8 \cup BA_9}^{\text{Disjuntos}}$$

B se intersecta con $A_1, A_2, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9$

S





$$\overbrace{B = BA_8 \cup BA_9 \cup BA_{n-1} \cup BA_n}^{\text{disjuntos}}$$

$$\underbrace{A_8,\ A_9,\ A_{n-1},\ A_n}_{\text{disjuntos}}$$

¿Necesariamente debo conocer con cuáles A_i se intersecta B?

Supón que tenemos una partición $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ de S, un evento posible B $\ (P(B) > 0)$ y que se conocen las probabilidades $P(B \mid A_i)$ y $P(A_i)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. ¿Cómo encontramos $P(B)$?

Observa que $B = BS = B\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \bigcup_{i=1}^{n} BA_i$

Pero $BA_i \cap BA_j = \varnothing \ \ \forall \ \ i \neq j = 1, 2, \ldots, n$, por tratarse de una partición de S. Entonces:

$$P(B) = P\left[\bigcup_{i=1}^{n} BA_i\right] = \sum_{i=1}^{n} P(BA_i)$$

$$P(BA_i) = \begin{cases} P(B)\,P(A_i \mid B) & ?\ ? \\ P(A_i)\,P(B \mid A_i) & ✓\ ✓ \end{cases}$$

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)P(A_i)}$$

Este resultado se conoce como **probabilidad total** de B.

Si ahora tenemos interés en $P(A_i \mid B)$ procedemos usando la definición de probabilidad condicional, la Ley de la multiplicación y la probabilidad total. Así;

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_iB)}{P(B)}$$

$$\boxed{P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)P(A_i)}}$$

Este resultado se conoce como **Teorema de Bayes**.

Ejemplos:

1._ Cuando los artículos llegan al final de una línea de producción, un supervisor escoge los que deben pasar por una inspección completa, 10% de todos los artículos son defectuosos, 60% de todos los artículos defectuosos y 20% de todos los artículos buenos pasan por una inspección completa. ¿Cuál es la probabilidad de que un artículo
a) haya pasado por la inspección completa? $P(I)$ probabilidad total
b) sea defectuoso dado que pasó por una inspección completa? $P(D \mid I)$ Bayes

Solución

Sean los eventos D: artículo defectuoso.
I: inspección completa.

Datos: $P(D) = 0.1 \qquad P(D') = 0.9$
$P(I \mid D) = 0.6$
$P(I \mid D') = 0.2$

a) La probabilidad total de evento I está dada por:

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)P(A_i)}$$

Observa que la partición en este problema se compone de dos eventos, que son el artículo es defectuoso o no defectuoso, entonces $n = 2$ y $A_1 = D$, $A_2 = D'$ y el evento de interés es que haya pasado por una inspección completa, es decir $B = I$. Sustituyendo en la ecuación para la probabilidad total del evento de interés tenemos que:

$$P(I) = \sum_{i=1}^{2} P(I \mid A_i)P(A_i) = P(I \mid D)P(D) + P(I \mid D')P(D') = 0.6(0.1) + 0.2(0.9) = \underline{0.24}$$

b) Usando el Teorema de Bayes

$$P(D \mid I) = \frac{P(I \mid D)P(D)}{P(I \mid D)P(D) + P(I \mid D')P(D')} = \frac{0.6(0.1)}{0.24} = \underline{0.25}$$

2._ En cierta región del país se sabe por experiencias pasadas que la probabilidad de elegir a un adulto de más de 40 años con cáncer es de 0.02. Si la probabilidad de que un doctor diagnostique en forma correcta que una persona tiene cáncer es de 0.78 y la probabilidad de que diagnostique en forma incorrecta que una persona tiene cáncer si no lo tiene es de 0.06.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que diagnostique que una persona tiene cáncer? Prob. total
b) Si el diagnóstico del doctor es que el paciente tiene cáncer. ¿Cuál es la probabilidad de que en efecto tenga la enfermedad? Bayes
c) Y ¿Cuál la probabilidad de que no la tenga? i) Bayes o
ii) Complemento de la anterior.

Solución

Sean los eventos C: tiene cáncer y D: diagnostico de cáncer.

Datos: $P(C) = 0.02 \qquad P(C') = 0.98$
$P(D \mid C) = 0.78$
$P(D \mid C') = 0.06$

a) Probabilidad total del evento D.

$$P(D) = P(D \mid C)P(C) + P(D \mid C')P(C') = 0.78(0.02) + 0.06(0.98) = \underline{0.0744}$$

b) $P(C \mid D) = \dfrac{P(D \mid C)P(C)}{P(D)} = \dfrac{0.78(0.02)}{0.0744} = \underline{0.2096}$

c) $P(C' \mid D) = \dfrac{P(D \mid C')P(C')}{P(D)} = \dfrac{0.06(0.98)}{0.0744} = \underline{0.79}$

También $P(C' \mid D) = 1 - P(C \mid D) = 1\text{-}0.2096 = \underline{0.79}$

3._ Cinco urnas llevan los números 1, 2, 3, 4 y 5 respectivamente. La urna i contiene i bolas blancas y $(5-i)$ bolas negras, con $i = 1,\ldots,5$. Se selecciona al azar una urna y después se sacan sin reposición dos bolas de dicha urna.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolas seleccionadas sean blancas? Prob. Total
b) Dado que ambas bolas seleccionadas son blancas ¿Cuál es la probabilidad de que se haya seleccionado la urna 3? Tma Bayes

Solución

Sean los eventos:
u_i: urna i, con $i = 1, 2, \ldots, 5$.
b_1: la primera bola es blanca
b_2: la segunda bola es blanca.

Partición con $n=5$
(Todo lo anterior era con $n=2$)

$u_1/u_2 \qquad F/M \qquad E/D$

Enfermo / Sano

1 blanca	2 blancas	3 blancas	4 blancas	5 blancas
4 negras	3 negras	2 negras	1 negra	0 negras
urna 1	urna 2	urna 3	urna 4	urna 5

a) Dado que la urna 1 sólo tiene una bola blanca las dos bolas pueden ser blancas sólo si provienen de cualquiera de las otras cuatro urnas, es decir, la probabilidad total del evento *dos bolas blancas* está dada por

$b_1b_2 = b_1b_2u_2 \cup b_1b_2u_3 \cup b_1b_2u_4 \cup b_1b_2u_5$

$\therefore \ P(b_1b_2) = \sum_{i=2}^{5} P(b_1b_2u_i) = \sum_{i=2}^{5} P(u_i)P(b_1|u_i)P(b_2|u_ib_1)$

La urna 1 no se considera porque la probabilidad de que salgan 2 bolas blancas es cero porque sólo hay una blanca.

$P(u_i) = \frac{1}{5} \qquad P(b_1|u_1) = \frac{1}{5} \quad P(b_2|u_1b_1) = \frac{0}{4}$

$P(b_1|\ u_2) = \frac{2}{5} \qquad P(b_2|\ u_2b_1) = \frac{1}{4}$

$P(b_1|\ u_3) = \frac{3}{5} \qquad P(b_2|\ u_3b_1) = \frac{2}{4}$

$P(b_1|\ u_4) = \frac{4}{5} \qquad P(b_2|\ u_4b_1) = \frac{3}{4}$

$P(b_1|\ u_5) = 1 \qquad P(b_2|\ u_3b_1) = 1 = \frac{4}{4}$

$$P(b_1b_2) = \frac{1}{5}\left(\frac{2}{5}\frac{1}{4} + \frac{3}{5}\frac{2}{4} + \frac{4}{5}\frac{3}{4} + 1\right) = \frac{1}{20}(2 + 6 + 12 + 20) = \frac{40}{5(20)} = \underline{\frac{2}{5}}$$

b) $P(u_3|b_1b_2) = \dfrac{P(b_1b_2|u_3)P(u_3)}{P(b_1b_2)} = \underline{\dfrac{3}{20}} = \dfrac{\frac{1}{5}\frac{3}{5}\frac{\cancel{2}\,1}{\cancel{4}\,2}}{\frac{2}{5}} = \dfrac{\frac{3}{50}}{\frac{2}{5}} = \dfrac{15}{100} = \dfrac{3}{20}$

$= P(u_3b_1b_2) = P(u_3)\,P(b_1|u_3)\,P(b_2|u_3b_1)$