Miércoles 23 de septiembre de 2021.

DISTRIBUCIÓN DE POISSON.

La distribución de Poisson a menudo servirá como una distribución de probabilidad apropiada para variables aleatorias tales como el número de llamadas telefónicas que entran a un conmutador en un periodo de tiempo dado, el número de partículas emitidas por una fuente en un periodo de 15 minutos, o el número de defectos en una longitud específica de una tela fabricada. Cada una de estas variables aleatorias representa el número total de ocurrencias de un fenómeno durante un período de tiempo fijo o en una región fija del espacio. Esta v.a tiene una distribución de probabilidad conocida como Poisson con parámetro λ, y su f.d.p está dada por:

$X \sim P(x; \lambda)$

$$\boxed{P(x;\lambda)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}} \quad \text{si } x=0,1,2,\ldots$$

Función generadora de momentos.

$$\psi_X(t)=E\left(e^{tX}\right)=\sum_{x=0}^{\infty}e^{tx}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{tx}\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\left(e^t\lambda\right)^x}{x!}=e^{-\lambda}e^{e^t\lambda} \quad \text{Es decir } \boxed{\psi_X(t)=e^{\lambda(e^t-1)}}$$

Nota._ Utilizando el resultado de la serie $e^{\lambda}=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!}$

$u = \lambda(e^t - 1) = \lambda e^t - \lambda$

$u' = \lambda e^t$

$X_1 \sim P(x; \lambda_1) \therefore \psi_{X_1}(t) = e^{\lambda_1(e^t-1)}$

$X_2 \sim P(x; \lambda_2) \therefore \psi_{X_2}(t) = e^{\lambda_2(e^t-1)}$

$\vdots$

$X_k \sim P(x; \lambda_k) \therefore \psi_{X_k}(t) = e^{\lambda_k(e^t-1)}$

Media y varianza.

$$\mu=\psi'_X(t=0)=e^{\lambda(e^t-1)}\lambda e^t\Big|_{t=0}=e^{\lambda(1-1)}\lambda e^0$$

La media de la v.a Poisson es $\boxed{\mu=\lambda}$ es decir, el parámetro de la distribución es el número promedio de ocurrencias en la unidad de tiempo, área, espacio, etc.

Para enconrar la varianza necesitamos el segundo momento:

$$E\left(X^2\right)=\psi''_X(t=0)=\lambda\left(e^{\lambda(e^t-1)}e^t+e^te^{\lambda(e^t-1)}\lambda e^t\right)\Big|_{t=0}$$
$$=\lambda\left(e^{\lambda(0)}e^0+e^0e^{\lambda(0)}\lambda e^0\right)=\lambda(1+\lambda)=\lambda+\lambda^2$$

Sustituyendo en la expresión para la varianza $V(X)=E\left(X^2\right)-E^2(X)=\lambda+\lambda^2-\lambda^2$ por lo tanto $\boxed{V(X)=\sigma_X^2=\lambda}$

Observación._ Esta distribución tiene la característica de que su media y su varianza son iguales.

v.v.a.a independientes	Suma
Bernoulli's	Binomial
Binomiales	Binomial
Poisson	Poisson
Bernoulli's no independientes	Hipergeométrica

Función de probabilidad acumulada.

$F_X(x)=P(X\le x)=\sum_{k=0}^{x}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ Existen tablas para estos valores en los anexos de los libros de probabilidad.

Teorema._ Si las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_k$ son independientes y $X_i \sim P(x_i;\lambda_i)$ para $i=1,2,\ldots,k$. Entonces la v.a $X=\sum_{i=1}^{k}X_i$ tiene una distribución de Poisson con parámetro $\lambda=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i$.

Demostración:

La f.g.m para X_i es $\psi_{X_i}(t)=e^{\lambda_i(e^t-1)}$, para $i=1,2,\ldots,k$. Debido a que estas variables aleatorias son independientes, tenemos que la f.g.m de la suma de ellas está dada por el producto de las f.g.m. de las variables aleatorias individuales:

$$\psi_X(t)=\prod_{i=1}^{k}\psi_{X_i}(t)=\prod_{i=1}^{k}e^{\lambda_i(e^t-1)}=e^{(e^t-1)\sum_{i=1}^{k}\lambda_i} \quad \text{que se puede escribir como}$$

$\psi_X(t)=e^{\lambda(e^t-1)}$ con parámetro $\lambda=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i$.

Ejemplos:

1._ Supón que en un fin de semana concreto el número de accidentes en un cierto cruce tiene una distribución de Poisson con media 0.7. ¿Cuál es la probabilidad de que haya al menos tres accidentes en el cruce durante el fin de semana?

Solución

$P(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-0.7}\frac{0.7^x}{x!}$

X : Número de accidentes en un cruce un fin de semana.
$X \sim P(x;\lambda=0.7)$

$$P(X\ge 3)=1-F_X(2)=1-e^{-0.7}\left(\frac{(0.7)^0}{0!}+\frac{(0.7)^1}{1!}+\frac{(0.7)^2}{2!}\right)=1-0.966=0.034$$

2._ Supón que el número de defectos en un rollo de tela fabricado con un cierto proceso tiene una distribución de Poisson con media 0.4. Si se inspecciona una muestra aleatoria de cinco rollos de tela. ¿Cuál es la probabilidad de que el número total de defectos en los cinco rollos sea al menos 6?

Solución

X_i: Número de defectos en el rollo i. $i = 1, 2, \ldots, 5$
$X_i \sim P(x_i;\lambda_i=0.4)$
X: Número de defectos en los 5 rollos.
$X \sim P(x;\lambda=5(0.4)=2)$

Ya que $X=X_1+X_2+X_3+X_4+X_5$

$$P(X\ge 6)=1-F_X(5)=1-e^{-2}\left(\frac{(2)^0}{0!}+\frac{(2)^1}{1!}+\frac{(2)^2}{2!}+\frac{(2)^3}{3!}+\frac{(2)^4}{4!}+\frac{(2)^5}{5!}\right)=1-0.983=0.017$$

3._ Supón que un libro con n páginas contiene en promedio λ erratas por página. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos haya m páginas que contengan más de k erratas?

X: # de páginas $\underbrace{\text{con más de } k \text{ erratas}}_{\text{éxito}}$ de n páginas.
Y: # de erratas $\underbrace{\text{por página}}_{\text{espacio}}$.
$X \sim bin(x; n, p = P(\text{Una página tenga más de } k \text{ erratas}))$
$X \sim bin(x; n, p = P(Y > k))$
$Y \sim P(x; \lambda)$

$P(Y > k) = p$

Solución

X: Número de erratas por página.
$X \sim P(x;\lambda)$

La probabilidad de que una página contenga más de k erratas es

$$P(X>k)=\sum_{x=k+1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = 1 - F_X(k) = 1 - e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{k}\frac{\lambda^x}{x!} = p$$

Sea ahora la v.a Y: Número de páginas de un total de n con más de k erratas.

$$P(\text{éxito})=P(\text{la página tiene más de } k \text{ erratas})=\sum_{x=k+1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=p$$

Entonces $Y\sim b(y;n,p)$ y la probabilidad de que al menos haya m páginas con el éxito está dada por:

$$P(Y\ge m)=\sum_{y=m}^{n}\binom{n}{y}\left[\sum_{x=k+1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\right]^y\left[\sum_{x=0}^{k}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\right]^{n-y}$$

2.7 APROXIMACIÓN ENTRE LAS DISTRIBUCIONES BINOMIAL Y POISSON.

Para n grande y p pequeña.

Buscando el valor más grande para n en las tablas binomiales: 20, 25, 35

Supón que $X\sim b(x;n,p)$ con función de probabilidad dada por

Distribución real

$n - (x - 1) = n - x + 1$

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^xq^{n-x}=\frac{n!}{x!(n-x)!}p^xq^{n-x}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-x+1)\cancel{(n-x)!}}{\cancel{(n-x)!}\,x!}p^xq^{n-x}$$

$p^x = \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x = \frac{\lambda^x}{n^x}$ $n = 63$, $n = 1000$ } Problemas

Observa que en el numerador del primer factor de esta ecuación hay exactamente x términos. Si hacemos $\lambda=np$ se tiene que $p=\frac{\lambda}{n}$, sustituyendo en la ecuación anterior tenemos que:

$n^x = \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdots n}_{x \text{ veces}}$

$$P(X=x)=\frac{\lambda^x}{x!}\underbrace{\frac{(n-x+1)}{n}\cdots\frac{(n-1)}{n}\frac{n}{n}}_{n^x}\left[1-\frac{\lambda}{n}\right]^{n-x}$$
$$=\frac{\lambda^x}{x!}\frac{(n-x+1)}{n}\cdots\frac{(n-1)}{n}\frac{n}{n}\left[1-\frac{\lambda}{n}\right]^{n}\left[1-\frac{\lambda}{n}\right]^{-x}$$

Tomando el límite cuando n tiende a infinito: (Para n grande)

$$\lim_{n\to\infty}P(X=x)=\frac{\lambda^x}{x!}\lim_{n\to\infty}\frac{(n-x+1)}{n}\cdots\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)}{n}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{\lambda}{n}\right]^{n}\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{\lambda}{n}\right]^{-x}$$

$$=\frac{\lambda^x}{x!}(1)\cdots(1)\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{\lambda}{n}\right]^{n}\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{\lambda}{n}\right]^{-x}$$

Recuerda que $(1+x)^k=1+kx+\frac{k(k-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{k(k-1)\cdots(k-(n-1))}{n!}x^n+\cdots$

Entonces $\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n=1+n\left(-\frac{\lambda}{n}\right)+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{\lambda^2}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-(m-1))}{m!}\frac{\lambda^m}{n^m}+\cdots$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n=1+(-\lambda)+\frac{(-\lambda)^2}{2!}+\cdots+\frac{(-\lambda)^m}{m!}+\cdots=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^i}{i!}=e^{-\lambda}$$

Por lo tanto $\lim_{n\to\infty}P(X=x)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$ que es precisamente la función de probabilidad de Poisson con parámetro $\lambda=np$.

Cuando n es grande y p es chica, el valor de la distribución binomial se puede aproximar con el valor de la distribución de Poisson con media $\lambda=np$.

Ejemplos:

1._ Supón que en una gran población la proporción de personas que tienen una cierta enfermedad es 0.01. Se desea encontrar la probabilidad de que en un grupo aleatorio de 200 personas al menos cuatro tengan la enfermedad.

p pequeña

n grande

Solución

La v.a de interés es X : Número de personas con la enfermedad.
$X\sim b(x;n=200,p=0.01)$
Como n es grande, podemos aproximar con una distribución de Poisson con parámetro $\lambda=np=200(0.01)=2$. Entonces la probabilidad buscada está dada por:

$X \approx P(x; \lambda = 2)$

$$P(X\ge 4)=1-F_X(3)=1-0.8571=0.1429$$

$1 - e^{-2}\left[1 + 2 + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{6}\right]$

2._ Supón que la proporción de personas daltónicas en cierta población es 0.005. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya más de una persona daltónica en un grupo de 600 personas seleccionadas aleatoriamente?

p pequeña

n grande

Solución

X : Número de personas daltónicas.

$X\sim b(x;n=600,p=0.005)$

Aproximando con una Poisson,
$X\approx P(x;\lambda=np=600(0.005)=3)$
$P(X\le 1)=F_X(1)=0.1992 = e^{-\lambda}[1 + 3] = 4(e^{-3})$

	Media	Varianza
Binomial	$np = 600(0.005) = 3$	$npq = 3(0.995) = 2.985$
Poisson	3	3

3._ La probabilidad de trillizos en nacimientos humanos es aproximadamente 0.001. ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente un conjunto de trillizos entre 700 nacimientos en un gran hospital?

p pequeña

n grande

Solución

X: Número de nacimientos de trillizos.

$X\sim b(x;n=700,p=0.001)$

Que se puede aproximar con una Poisson dada por
$X\approx P(x;\lambda=np=700(0.001)=0.7)$

$P(X=1)=0.7e^{-0.7}=0.3476$.

$P(\text{defectuosas}) = 0.01$ p pequeña

4._ Se sabe que el proceso de producción de luces de un tablero de automóvil de indicador giratorio produce uno por ciento de luces defectuosas. Si este valor permanece invariable, y se selecciona al azar una muestra de 100 luces, encuentre $P(\hat{p}\le 0.03)$, donde $\hat{p}$ es la fracción de defectos de la muestra.

n grande

X : fracción de bolas rojas
X : " de luces defectuosas.
$\hat{p}$: fracción de luces defectuosas.

X : # de luces defectuosas $\qquad X \sim bin(x; n = 100, p = \frac{1}{100})$

$\hat{p} = \frac{X}{100} \qquad X \approx P(x; \lambda = np = 1)$

$P(\hat{p} \le 0.03) = P\left(\frac{X}{100} \le 0.03\right)$

$= P(X \le 3) = e^{-1}\left[1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right] = \frac{8}{3}e^{-1} = 0.981$

$e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$

Solución

Sea la v.a X: Número de luces defectuosas.

P (luz defectuosa) = 0.01

La v.a tiene una distribución binomial de la forma $X\sim bin(x;n=100,p=0.01)$

Dado que n es grande se hace una aproximación usando la distribución de Poisson con parámetro $\lambda=np=100(0.01)=1$.

Observa que la fracción de luces defectuosas en la muestra en términos de la v.a es

$$\hat{p}=\frac{X}{n}$$

Entonces

$$P(\hat{p}\le 0.03)=P\left(\frac{X}{n}\le 0.03\right)=P(X\le n(0.03))=P(X\le 100(0.03))=P(X\le 3)=F_X(3)$$

Buscando en tablas de la distribución de Poisson con parámetro $\lambda=1$ y acumulando en tres se tiene que $P(\hat{p}\le 0.03)=0.981$.

Si no se cuenta con las tablas de la distribución de Poisson se puede calcular directamente de la fórmula de la f.d.p Poisson

$$P(X\le 3)=\sum_{i=0}^{3}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=\sum_{i=0}^{3}\frac{e^{-1}1^x}{x!}=e^{-1}\sum_{i=0}^{3}\frac{1}{x!}=e^{-1}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\right)=e^{-1}\left(\frac{6+6+3+1}{6}\right)$$
$$=e^{-1}\left(\frac{16}{6}\right)=e^{-1}\left(\frac{8}{3}\right)=0.981$$

5._ La probabilidad de que un ratón inoculado con un suero contraiga cierta enfermedad es 0.2. Encuentra la probabilidad de que a lo más tres de 30 ratones inoculados contraigan la enfermedad, utilizando una aproximación de Poisson.

Solución

La variable aleatoria de interés es:

X: Número de ratones inoculados que contraen la enfermedad.

Su distribución es binomial con parámetros 30 y 0.2, lo cual se denota como

$X\sim bin(x;n=30,p=0.2)$.

Si se aproxima con una Poisson $\lambda=np=30(0.2)=6$ $\qquad X \approx P(x; \lambda = 6)$

$$P(X\le 3)=\sum_{x=0}^{3}e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}\left[\frac{\lambda^0}{0!}+\frac{\lambda^1}{1!}+\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^3}{3!}\right]$$
$$=e^{-6}\left[\frac{6^0}{0!}+\frac{6^1}{1!}+\frac{6^2}{2!}+\frac{6^3}{3!}\right]=e^{-6}[1+6+18+36]=61e^{-6}=0.151$$

$p = 0.001$ pequeña

6._ En promedio una persona en 1000 comete un error numérico al preparar su declaración de impuestos. Si se seleccionan 10,000 formas al azar y se examinan, ¿cuál es la probabilidad de que 6, 7 u 8 de las formas contengan un error? n grande

Solución

X: Número de personas que cometen un error en su declaración de impuestos.

La probabilidad de que una persona cometa un error en su declaración es $\frac{1}{1000}=0.001$, y la v.a tiene una distribución binomial con los siguientes parámetros.

$X\sim bin(x;n=10{,}000,p=0.001)$

Aproximando con una Poisson se debe hacer $\lambda=np=10{,}000(0.001)=10$ $\qquad X \approx P(x; \lambda = 10)$

La probabilidad de interés se puede encontrar usando las tablas Poisson de la siguiente manera

$P(6\le X\le 8)=F_X(8)-F_X(5)=0.3328-0.0671=0.2657$

O usando la formula de la f.d.p Poisson como se muestra a continuación

$$P(6\le X\le 8)=\sum_{x=6}^{8}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=e^{-10}\left(\frac{10^6}{6!}+\frac{10^7}{7!}+\frac{10^8}{8!}\right)=0.2657$$

$= F_X(8) - F_X(5) = 0.3328 - 0.0671 = 0.2657$

Una Mala: 1er Examen oral y escrito. Martes 28 septiembre Escrito

Una buena: Ya terminamos la U2