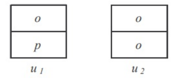
Miércoles 25 de agosto de 2021.

3._ Se tienen 2 urnas cada una con 2 cajones. La urna 1 tiene una moneda de oro en un cajón y una de plata en el otro, mientras que la urna 2 tiene una moneda de oro en cada uno de los cajones. Se escoge una urna al azar y de esta se escoge un cajón al azar, se saca la moneda y se observa que es de oro ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda provenga de la urna 2?

Si sólo leo la pregunta yo busco $P(u_2)$
si leo lo subrayado me doy cuenta de que se trata de una condicional $P(u_2 | o)$

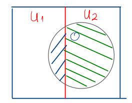
Y en general $P(u_2) \neq P(u_2 | o)$
Si es posible que $P(A) = P(A|B)$ más adelante veremos bajo que condición ocurre.

Solución



Sean los eventos o: la moneda es de oro, u_1: urna 1 y u_2:urna 2.

Datos:



$$P(u_1) = P(u_2) = \frac{1}{2}$$
$$P(o | u_1) = \frac{1}{2} \text{ y } P(o | u_2) = 1$$

Observa que el evento “la moneda es de oro” se puede ver como la unión de los eventos “es de oro de la urna 1” y “es de oro de la urna 2”, lo cual representamos mediante la expresión:

$$o = ou_1 \cup ou_2 \quad \text{es decir} \quad P(o) = P(ou_1) + P(ou_2)$$
$$= P(o | u_1)P(u_1) + P(o | u_2)P(u_2)$$

Utilizamos el hecho de que $P(o | u_2) = \frac{P(ou_2)}{P(u_2)}$ despejando $P(ou_2) = P(o | u_2)P(u_2)$

Entonces

$$P(u_2 | o) = \frac{P(u_2 o)}{P(o)} = \frac{P(o | u_2)P(u_2)}{P(o | u_1)P(u_1) + P(o | u_2)P(u_2)}$$

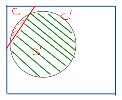
$$= \frac{1\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}$$

Cara de ¿Qué?

4._ A un sospechoso se le aplica un suero de la verdad que se sabe es confiable en 90% cuando la persona es culpable y en 99% cuando la persona es inocente. En otras palabras, el 10% de los culpables se considera inocente cuando se usa el suero y el 1% de los inocentes se juzga culpable. Si el sospechoso se escogió de un grupo del cual sólo 5% ha cometido alguna vez un crimen y el suero indica que la persona es culpable. ¿Cuál es la probabilidad de que sea inocente?

S

Solución



Sean los eventos c: culpable, c': inocente,
s: se dice inocente tomando el suero s': se dice culpable tomando el suero.

Datos: $P(s | c) = 0.1 \quad \therefore P(s' | c) = 0.9$
$P(s' | c') = 0.01$ $P(s | c') = 0.99$
$P(c) = 0.05 \quad \therefore P(c') = 0.95$

$$P(c' | s') = \frac{P(c's')}{P(s')} = \frac{P(s' | c')P(c')}{P(s' | c')P(c') + P(s' | c)P(c)} = \frac{0.01(0.95)}{0.01(0.95) + 0.9(0.05)} = 0.174$$

$\mathcal{E}$: Accidente por falla estructural.
A : Identificar al accidente debido a falla estructural.
A' : " " " " a otra falla (no estructural).

	Causa real del accidente	
	Estructural	Otra
perito: Estructural	Correcta	Incorrecto
perito: Otra	Incorrecto	Correcto

A : Accidente identificado correctamente
B : " " incorrectamente
$P(B) = 0.2$ $P(A) = 0.8$

5._ Se conduce una investigación detallada de accidentes aéreos. La probabilidad de que un accidente por falla estructural se identifique correctamente es 0.9 y la probabilidad de que un accidente que no se debe a una falla estructural se identifique en forma incorrecta como un accidente por falla estructural es 0.2. Si el 25% de los accidentes aéreos se debe a fallas estructurales, determina la probabilidad de que un accidente aéreo que se ha identificado como debido a una falla estructural en realidad haya ocurrido por una falla de este tipo.

S : Accidentes aéreos
$\mathcal{E}$: Accidente por falla estructural
$\mathcal{E}'$: " por otro tipo de falla

$P(\mathcal{E}) = 0.9$
$P(\mathcal{E}') = 1 - P(\mathcal{E}) = 0.1$

Solución

Sean los eventos e: accidente por falla estructural y E: se identifica como falla estructural.
Datos:
$P(E | e) = 0.9$
$P(E | e') = 0.2$
$P(e) = 0.25 \quad \therefore P(e') = 0.75$

Entonces

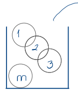
$$P(e | E) = \frac{P(eE)}{P(E)} = \frac{P(E | e)P(e)}{P(E | e)P(e) + P(E | e')P(e')} = \frac{0.9(0.25)}{0.9(0.25) + 0.2(0.75)} = 0.6$$

A : 2ª bolita con # 2

$$A = \underbrace{\overset{1^a}{1} \text{ y } \overset{2^a}{2}}_{} \quad \overset{o}{\cup} \quad \underbrace{\overset{1^a}{x} \text{ y } \overset{2^a}{2}}_{x \neq 1}$$

Disjuntos

6._ Dos bolas se extraen de una urna que contiene m bolas numeradas de 1 a m. Si la primera bola tiene el número 1 se conserva y se regresa en caso contrario. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola extraída tenga el número 2?



Sacar la 1ª
si 1 la dejas fuera y sacas otra (2ª bola) 2
si x la regresas a la urna y sacas la 2ª bola 2
con $x \neq 1$

Solución

Observa que la segunda bola puede tener el número 2 de dos maneras diferentes y excluyentes, puede que la primera tenga el número 1 y la segunda el número 2 o bien puede ser que la primera tenga un número diferente de 1 y la segunda bola tenga el número 2.

Sean los eventos:

B_1 : la primera bola tiene el número 1.
B_1' : la primera bola tiene un número diferente de 1.
b_2 :: la segunda bola tiene el número 2.

El evento de interés puede verse como la unión de dos eventos disjuntos;

$$b_2 = B_1 b_2 \cup B_1' b_2$$
$$P(b_2) = P(B_1 b_2 \cup B_1' b_2)$$
$$= P(B_1 b_2) + P(B_1' b_2)$$
$$= P(B_1)P(b_2 | B_1) + P(B_1')P(b_2 | B_1')$$
$$= \frac{1}{m}\frac{1}{m-1} + \frac{m-1}{m}\frac{1}{m}$$
$$= \frac{1}{m(m-1)} + \frac{m-1}{m^2}$$
$$= \frac{m + (m-1)^2}{m^2(m-1)}$$
$$= \frac{m + m^2 - 2m + 1}{m^2(m-1)} \quad \therefore \quad P(b_2) = \frac{m^2 - m + 1}{m^2(m-1)}$$

7._ Muestra que si A, B y C son tres eventos tales que $P(ABC) \neq 0$ y $P(C | AB) = P(C | B)$ entonces $P(A | BC) = P(A | B)$.

Solución

Se tienen que $P(C | AB) = P(C | B)$ usando la definición de probabilidad condicional

$$P(C | AB) = \frac{P(ABC)}{P(AB)} = \frac{P(BC)}{P(B)} = P(C | B)$$

$$\frac{P(ABC)}{P(BC)} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$P(A | BC) = P(A | B)$$