Martes 23 de marzo de 2021.

Una manera alternativa de sacar la esperanza de la binomial es recordando que la v.a binomial es una suma de n Bernoullis independientes cada una con media p, y que la esperanza de una suma de variables aleatorias independientes es la suma de las esperanzas,

$$E(X)=E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} E(X_i)=np$$

Para encontrar **la varianza** se necesita el segundo momento de la v.a por lo tanto se calcula la segunda derivada de la f.g.m evaluada en cero:

si $X \sim bin(x; n, p)$

$\therefore \psi_X(t)=(q+pe^t)^n$

$$\psi''_X(t=0)=np\left[(q+pe^t)^{n-1}e^t+e^t(n-1)(q+pe^t)^{n-2}pe^t\right]\Big|_{t=0}$$

$$=np\left[(q+pe^0)^{n-1}e^0+e^0(n-1)(q+pe^0)^{n-2}pe^0\right]$$
$$=np[1+(n-1)p]=np(1+np-p)=np(q+np)=npq+n^2p^2 = E(X^2)$$

$$\therefore\ V(X)=E(X^2)-E^2(X)=npq+n^2p^2-n^2p^2$$

La varianza de la v.a binomial es $\boxed{V(X)=npq}$

La varianza de la v.a Binomial también se obtiene con el hecho de que la varianza de una suma de variables aleatorias independientes es la suma de las varianzas de las variables aleatorias que se están sumando y recordando que la varianza de una Bernoulli es pq.

$$V(X)=V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} V(X_i)=npq = V(X)$$

La función de probabilidad acumulada.

$F_X(x)=P(X\le x)=\sum_{i=0}^{x}\binom{n}{i}p^i q^{n-i}$. Los valores ya están tabulados en las llamadas tablas binomiales que se encuentran en los anexos de los libros de probabilidad.

1) Suma de Bernoullis independientes es Binomial

2) Suma de Binomiales independientes es Binomial

Teorema._ Si $X_1, X_2, \ldots, X_k$ son k variables aleatorias independientes y $X_i \sim b(x_i; n_i, p)$ $i = 1, 2, \ldots, k$.
Entonces la v.a $X=X_1+X_2+\cdots+X_k$ tiene una distribución binomial con parámetros $n=\sum_{i=1}^{k} n_i$ y p.

Demostración
La f.g.m para X es

$$\psi_X(t)=\prod_{i=1}^{k}\psi_{X_i}(t)=(q+pe^t)^{n_1}(q+pe^t)^{n_2}\cdots(q+pe^t)^{n_k}=(q+pe^t)^{\sum_{i=1}^{k}n_i}$$

$$\boxed{\psi_X(t)=(q+pe^t)^n \quad \text{con } n=\sum_{i=1}^{k}n_i}$$

Observa que es la f.g.m para una binomial con parámetros $n=\sum_{i=1}^{k} n_i$ y probabilidad de éxito igual a p.

Ejemplos:

1._ Una moneda con probabilidad de cara 0.6 se lanza nueve veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par de caras?

p n → éxito

Solución

$x=0,1,\ldots,9$

X: Número de caras. en 9 lanzamientos
$X \sim b(x; n=9, p=0.6)$
A: Número par de caras.

$+P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+\cdots+P(X=6)+P(X=0)+P(X=1)+\cdots$

$P(X=0)+P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$

$$P(A)=P(X=0)+P(X=2)+P(X=4)+P(X=6)+P(X=8) = F_X(0)+F_X(2)+F_X(4)+F_X(6)+F_X(8) = 0.0003+0.025+0.2666+$$

$\to F_X(0)+[F_X(2)-F_X(1)]+[F_X($

$$=\binom{9}{0}(0.6)^0(0.4)^9+\binom{9}{2}(0.6)^2(0.4)^7+\binom{9}{4}(0.6)^4(0.4)^5+\binom{9}{6}(0.6)^6(0.4)^3+\binom{9}{8}(0.6)^8(0.4)$$
$$=0.0002621+0.0212336+0.1672151+0.2508226+0.0604661=0.499\approx 0.5$$

2._ Tres hombres A, B y C disparan a un blanco. Supón que A dispara 3 veces y la probabilidad de que dé en el blanco en un disparo concreto es $\frac{1}{8}$, que B dispara 5 veces y la probabilidad de que dé en el blanco es $\frac{1}{4}$ y C dispara sólo 2 veces con probabilidad de dar en el blanco de $\frac{1}{2}$.
a) ¿Cuál es el número esperado de disparos que darán en el banco?
b) ¿Cuál es la varianza del número de disparos que darán en el blanco?
Solución

X_1: Número de disparos de A que dan en el blanco. $\therefore X_1 \sim bin(x_1; n_1=3, p_1=\frac{1}{8})$ $\therefore E(X_1)=n_1p_1=3(\frac{1}{8})$ y $V(X_1)=n_1p_1q_1=3(\frac{1}{8})$

X_2: Número de disparos de B que dan en el blanco. $\therefore X_2 \sim bin(x_2; n_2=5, p_2=\frac{1}{4})$ $\therefore E(X_2)=n_2p_2=5(\frac{1}{4})$ y $V(X_2)=n_2p_2q_2=\frac{5}{4}$

X_3: Número de disparos de C que dan en el blanco. $\therefore X_3 \sim bin(x_3; n_2=2, p_3=\frac{1}{2})$ $\therefore E(X_3)=n_3p_3=2(\frac{1}{2})$ y $V(X_3)=n_3p_3q_3=\frac{1}{2}$

X: Número total de disparos que dan en el blanco.

$X=X_1+X_2+X_3$ $\therefore X \sim bin(x; n=n_1+n_2+n_3=10, p)$

$n_1=3$ $\quad n_2=5$ $\quad n_3=2$

$p_1=\frac{1}{8}$ $\quad p_2=\frac{1}{4}$ $\quad p_3=\frac{1}{2}$

$X_i \sim b(x_i; n_i, p_i)$ $i=1, 2, 3.$

a) El número total de disparos que dan en el blanco es la suma del número de disparos del señor A que dan en el blanco, el número de disparos del señor B que dan en el blanco y el número de disparos del señor C que dan en el blanco.

$X=X_1+X_2+X_3$

$$E(X)=E(X_1+X_2+X_3)=\sum_{i=1}^{3}E(X_i)=\sum_{i=1}^{3}n_ip_i$$

$$E(X)=3\left(\frac{1}{8}\right)+5\left(\frac{1}{4}\right)+2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3+10+8}{8}=\frac{21}{8}=2.625$$

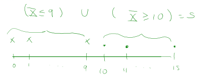
El número esperado de tiros que dan en el blanco es 3.

b) Los tiros son independientes unos de otros, por lo tanto

$$V(X)=\sum_{i=1}^{3}V(X_i)=\sum_{i=1}^{3}n_ip_iq_i=3\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{7}{8}\right)+5\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)+2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{21}{64}+\frac{15}{16}+\frac{1}{2}=\frac{21+60+32}{64}=\frac{113}{64}=1.766$$

3._ La probabilidad de que un paciente se recupere de una rara enfermedad en la sangre es de 0.4. Si se sabe que 15 personas han contraído esta enfermedad ¿Cuál es la probabilidad de que:
a) Por lo menos 10 de ellos sobrevivan?
b) Sobrevivan de 3 a 8 personas?
c) Se salven exactamente 5?
Solución

$(X\le 9) \cup (X\ge 10)=S$



X: Número de sobrevivientes.

$p=0.4,\ q=0.6,\ n=15$
$X\sim b(x; n=15, p=0.4)$

Este problema lo resolvemos utilizando las tablas binomiales.
a) $P(X\ge 10)=1-P(X<10)=1-P(X\le 9)=1-F_X(9)=1-0.9662=0.0338$
b) $P(3\le X\le 8)=F_X(8)-F_X(2)=0.905-0.0271=0.8779$
c) $P(X=5)=F_X(5)-F_X(4)=0.4032-0.2173=0.1859$

4._ La probabilidad de que una cierta clase de componentes sobreviva a una prueba de choque dada es $\frac{3}{4}$. Determina la probabilidad de que resistan exactamente 2 de los siguientes 4 componentes que se van a probar.
Solución

X: Número de componentes que sobreviven a la prueba.
$p=\frac{3}{4},\ q=\frac{1}{4},\ n=4$

$X\sim b\left(x; n=4, p=\frac{3}{4}\right)$

$F_X(2)-F_X(1)=0.2617-0.0508=0.2109$

$$P(X=2)=\binom{4}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2=\left(\frac{4!}{2!2!}\right)\left(\frac{9}{16}\right)\left(\frac{1}{16}\right)=\frac{54}{16^2}=\frac{27}{128}=0.21$$

5._ Un fabricante de cera para pisos desarrolla dos productos nuevos, A y B que desea someter a la evaluación de las amas de casa para determinar cuál es mejor. Las dos ceras A y B se aplican en los pisos de 15 casas. Se supone que en realidad no hay diferencia en calidad entre las dos marcas. ¿Cuál es la probabilidad de que
a) 10 o más amas de casa vayan a preferir la marca A?
b) 10 o más amas de casa prefieran A o B?

$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$

Solución

Sean las variables aleatorias:
X: Número de amas de casa que prefieren A.
Y: Número de amas de casa que prefieren B.

a) $X\sim b(x; n=15, p=0.5)$
$P(X\ge 10)=1-P(X\le 9)=1-F_X(9)=1-0.849=0.151$

b) $Y\sim b(y; n=15, p=0.5)$
$P(\text{10 o más amas de casa prefieran B})=P(Y\ge 10)=P(X\le 5)=F_X(5)=0.151$
Entonces $P(X\ge 10 \text{ o } X\le 5)=P(X\ge 10)+P(X\le 5)=0.151+0.151=0.302$

$=P(X\ge 10)+P(Y\ge 10)$

2.5 DISTRIBUCIÓN GEOMÉTRICA.

La distribución geométrica está relacionada con una secuencia de ensayos Bernoulli con misma probabilidad de éxito pero el número de ensayos no es fijo. La variable aleatoria de interés X, es el número de ensayos necesarios hasta obtener el primer éxito. Los valores posibles que toma la variable aleatoria son $x = 1, 2, 3, \ldots$. Se dice que X tiene una distribución geométrica con parámetro p (probabilidad de éxito) lo cual se escribe como $X\sim G(x;p)$ si su f.d.p es de la forma:

Voy a lanzar una moneda (p cte) de manera independiente hasta el 1er éxito inclusive.

$\boxed{G(x;p)=P(X=x)=q^{x-1}p}$ con $x=1, 2, \ldots$

Conjunto de valores posibles infinito numerable.

Lanzamientos.

1	C	p
2	X C	qp
3	X X C	q^2p
4	X X X C	
5	X X X X C	
6	X X X X X C	
⋮		
x		$q^{x-1}p$
⋮		

X: # de ensayos Bernoulli hasta el 1er éxito.

La f.g.m. para esta distribución es:

$(qe^t)^1 \quad (qe^t)^2$

$$\psi_X(t)=E(e^{tX})=\sum_{x=1}^{\infty}e^{tx}pq^{x-1}=p(e^t+e^{2t}q+e^{3t}q^2+e^{4t}q^3+\cdots)=pe^t(1+e^tq+e^{2t}q^2+e^{3t}q^3+\cdots)$$

$(qe^t)^0=1$

$$=pe^t\sum_{i=0}^{\infty}e^{it}q^i=pe^t\sum_{i=0}^{\infty}(e^tq)^i=pe^t\left[\frac{1}{1-qe^t}\right]$$

$$\therefore \boxed{\psi_X(t)=\frac{pe^t}{1-qe^t}}$$

Nota._ Utilizamos el resultado de la serie geométrica $\sum_{i=0}^{\infty}r^i=\frac{1}{1-r}$