Martes 31 de agosto de 2021.

2 Variables Aleatorias Discretas.

2.1 Variables aleatorias Discretas.

Considera el experimento de lanzar una moneda 3 veces, la probabilidad de que caiga cara en un lanzamiento es p. Supón que por cada cara ganas 1 peso y por cada cruz pierdes 1 peso, si X es la cantidad total ganada al cabo de los tres lanzamientos. Para cada evento simple (E_i) del espacio muestral se tiene un valor de X y un valor para su probabilidad como se ilustra en el siguiente cuadro:

i	E_i	X	$P(E_i)$
1	ccc	3	p^3
2	ccx	1	$p^2(1-p)$
3	cxc	1	$p^2(1-p)$
4	xcc	1	$p^2(1-p)$
5	cxx	-1	$p(1-p)^2$
6	xcx	-1	$p(1-p)^2$
7	xxc	-1	$p(1-p)^2$
8	xxx	-3	$(1-p)^3$

Cada lanzamiento es independiente de los demás por lo que $P(ccc)=\prod_{i=1}^{3}P(c)=p^3$.

Además $\sum_{i=1}^{8}P(E_i)=p^3+3[p^2(1-p)]+3p(1-p)^2+(1-p)^3=(p+1-p)^3=1$.

Si A es el evento de que la ganancia es 1 peso, se tiene que $A=\{E_i \mid X(E_i)=1\}=\{ccx,cxc,xcc\}$
Entonces $P(A)=3p^2(1-p)$.

A menudo se hace referencia a este hecho diciendo que $X=1$ tiene probabilidad $3p^2(1-p)$ o bien que $P(X=1)=3p^2(1-p)$, de igual manera se dice que:
$P(X=-1)=3p(1-p)^2$, $P(X=3)=p^3$, $P(X=-3)=(1-p)^3$ y $P(X=2)=0$.

Definición: Sea S el espacio muestral asociado a un experimento. Una función X que asigna a cada uno de los elementos $E_i \in S$ un número real $X(E_i)$ se llama **variable aleatoria (v.a)** y se denota con una letra mayúscula X, Y, Z, etc la v.a es una "descripción" por ejemplo X puede ser el número de artículos defectuosos en una muestra aleatoria, o la ganancia al cabo del juego descrito anteriormente, etc.

La v.a toma valores numéricos, por ejemplo si la variable aleatoria X es el número de materias aprobadas por un alumno al cabo del primer semestre en la ESCOM los valores posibles de esta v.a,

bajo el supuesto de que se cursan 6 materias en el primer semestre, son x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Entonces la expresión "$X=x$" se lee "el número de materias aprobadas por un alumno al cabo del primer semestre en la ESCOM es igual a x". Recuerda que X es una descripción de algo que se cuenta (en el caso discreto) y x es un número.

Definición: Un valor x de la v.a es posible si tiene probabilidad de ocurrencia diferente de cero, es decir si $P(X=x)\neq 0$.

Definición: Si el número de valores posibles que puede tomar la variable aleatoria X es finito (los puedes contar y acabas) o infinito numerable (los puedes contar pero nunca acabas) se dice que X es una v.a **discreta.**

Ejemplo:
Un envío de 5 automóviles contiene dos de ellos con pequeñas fallas en la pintura. Si una agencia recibe en forma aleatoria tres de estos automóviles, obtén una lista de los elementos del espacio muestral S utilizando las letras B y D para bueno y defectuoso respectivamente; después asigna a cada punto muestral un valor x de la v.a X que representa el número de automóviles adquiridos por la agencia que tuvieron defectos de pintura.

Solución

Se tienen 2 automóviles defectuosos y 3 buenos de los cuales queremos seleccionar 3 al azar, no importa el orden por lo tanto la cardinalidad del espacio muestral está dada por:

$$\binom{5}{3}=\frac{5!}{(3!)(2!)}=\frac{5(4)(3!)}{(3!)(2!)}=\frac{20}{2}=10$$

De estas 10 posibles muestras de tamaño 3 se tienen sólo tres posibilidades dado que hay 3 automóviles buenos puede ser que ninguno en la muestra sea defectuoso, puede ser que sólo uno sea defectuoso o que dos sean defectuosos, esto porque sólo hay 2 defectuosos en los automóviles disponibles.

¿Cuántas muestras de 3 automóviles se pueden sacar de los 5 que tenemos siendo los 3 buenos? $\binom{3}{3}=1$

¿Cuántas muestras de 3 automóviles se pueden sacar de los 5 que tenemos siendo 2 buenos y 1 defectuoso?

$$\binom{3}{2}\binom{2}{1}=\frac{3!}{(2!)(1!)}(2)=6$$

¿Cuántas muestras de 3 automóviles se pueden sacar de los 5 que tenemos siendo 1 bueno y 2 defectuosos?

$$\binom{3}{1}\binom{2}{2}=\frac{3!}{(1!)(2!)}(1)=3$$

Listando las 10 posibles muestras y el valor de la v.a se tiene que:

Muestra i	E_i	$X=x$
1	$B_1B_2B_3$	0
2	$B_1B_2D_1$	1
3	$B_1B_2D_2$	1
4	$B_1B_3D_1$	1
5	$B_1B_3D_2$	1
6	$B_2B_3D_1$	1
7	$B_2B_3D_2$	1
8	$B_1D_1D_2$	2
9	$B_2D_1D_2$	2
10	$B_3D_1D_2$	2

El espacio muestral está dado por el conjunto siguiente:

$$S=\{B_1B_2B_3, B_1B_2D_1, B_1B_2D_2, B_1B_3D_1, B_1B_3D_2, B_2B_3D_1, B_2B_3D_2, B_1D_1D_2, B_2D_1D_2, B_3D_1D_2\}$$

y los valores posibles de la v.a son 0, 1, 2.

2.1.1 Función de masa de probabilidad.

Definición: La función f definida sobre $\Re$ como $\boxed{f_X(x)=P(X=x)}$ se conoce como la función de masa de probabilidad o función de probabilidad f.d.p de la v.a X si cumple con las propiedades siguientes:

i) $f_X(x)\geq 0 \quad \forall \quad x\in \Re$.
ii) $\{x \mid f_X(x)\neq 0\}$ es un conjunto finito o infinito numerable.
iii) $\sum_x f_X(x)=1$

Nota._ Si x es tal que $f_X(x)>0$ entonces x es un valor posible de la v.a X.

Ejemplo:
En base al ejemplo de lanzar 3 veces la moneda de la sección anterior, se dijo que la probabilidad de una cara en un lanzamiento era p. Si $p=0.4$ la v.a X tiene la función de masa de probabilidad siguiente:

$$f_X(-3)=P(X=-3)=(1-p)^3=(1-0.4)^3=0.216.$$
$$f_X(-1)=P(X=-1)=3p(1-p)^2=3(0.4)(1-0.4)^2=3(0.4)(0.6)^2=0.432.$$
$$f_X(1)=P(X=1)=3p^2(1-p)=3(0.4)^2(1-0.4)=3(0.4)^2(0.6)=0.288.$$
$$f_X(3)=P(X=3)=p^3=(0.4)^3=0.064.$$

La función de masa de probabilidad de una variable aleatoria discreta se puede presentar como una tabla de valores de la manera siguiente:

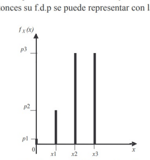
Función de probabilidad de X: ganancia al cabo de los tres lanzamientos.

$X=x$	$f_X(x)=P(X=x)$
-3	0.216
-1	0.432
1	0.288
3	0.064

Observa que $0.216+0.432+0.288+0.064=1$.

La f.d.p de una v.a además de representarse por una tabla se puede representar por una gráfica o por una fórmula.

Si la v.a X toma los valores posibles $x=x1, x2, x3$ y sus probabilidades asociados son $p1$, $p2$, $p3$ respectivamente entonces su f.d.p se puede representar con la gráfica siguiente:

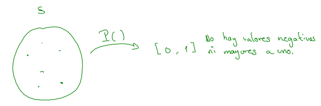


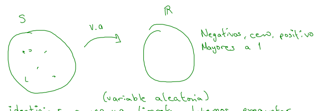
Función de probabilidad para la v.a X.

También se puede decir que la v.a X tiene f.d.p dada por $f_X(x)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$, con $x=0,1,2,...,n$.

O que la f.d.p de la v.a Y es de la forma $f_Y(y)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!}$ con $y=0,1,2,...$

Observa que la manera más compacta de expresar una f.d.p es mediante una fórmula pero a veces no es tan fácil construirla.





Para identificar a una v.a discreta debemos preguntar ¿Cuenta? si sí ∴ si es una v.a discreta

X, Y, Z, W v.a es una descripción NO es un número

Función

$\sqrt{\ }$ $\sqrt{81}=9$ valor que toma cuando se aplica a un argumento

ln $\ln(1)=0$

argumento

X : # de errores en un examen.
Y : # de llamadas que entran a tu celular en 2 hrs.
Z : # de defectos en 1 mt de tela.

$x=3$ errores en el examen
$y=5$ llamadas en 2 hrs.
$z=0$ defectos en el mt de tela

número valor que puede tomar la v.a

Se usa la misma letra de la v.a pero minúscula.

$X=x$ El número de errores en un examen es x.

$Y=y$ El número de llamadas que entran a tu celular en 2 hrs es y.

$Z=z$ El número de defectos en 1mt de tela es z.

Si la v.a cuenta es discreta.

x es un valor posible de la v.a X si $P(X=x)\neq 0$ o $P(X=x)>0$
es un valor imposible de la v.a X si $P(X=x)=0$

Ejem: X : Cara de un dado

10 es un valor imposible de X porque $P(X=10)=0$
-3 " " " " " " $P(X=-3)=0$
5 es un valor posible de X porque $P(X=5)=1/6\neq 0$

v.a
- f.d.p $f_X(x)$
- Acumulada $F_X(x)$
- Esperanza, media, valor esperado $E(X)=\mu_X$
- Varianza $V(X)=\sigma_X^2$
- Desviación estándar $\sqrt{V(X)}=\sigma_X$
- f.g.m $\psi_X(t)$

X : Cara del dado

x	$P(X=x)$
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

TAREA

Y : # de caras en un lanzamiento

y	$P(Y=y)$

Z : # de caras en 2 lanzamientos

z	$P(Z=z)$

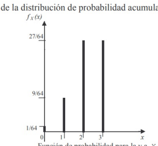
W : # de caras en 3 lanzamientos

w	$P(W=w)$

Poner en la pág Martes 31/08/31 de la sección Tarea

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ \frac{1}{64} & \text{si } 0\leq x<1\\ \frac{10}{64} & \text{si } 1\leq x<2\\ \frac{37}{64} & \text{si } 2\leq x<3\\ 1 & \text{si } x\geq 3\end{cases}$$

c) Las gráficas de la f.d.p y de la distribución de probabilidad acumulada son:



Función de probabilidad para la v.a X