Miércoles 29 de septiembre de 2021.

3.3.2 Distribución Gamma.

$-\lim_{b\to\infty} e^{-x}\Big|_0^b$

Para esta distribución necesitamos recordar la función gamma por lo que es indispensable comenzar con la siguiente:

Definición: La función gamma para $\alpha > 0$ se define como $\boxed{\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx}$

Observa que $\Gamma(1)=\int_0^\infty x^{1-1}e^{-x}dx=\int_0^\infty e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^\infty=1 \rightsquigarrow \Gamma(1)=1$

$u=-x$
$du=-dx$

Nota: Para que la integral converja se requiere $x>0$.

La función gamma tiene las siguientes propiedades:

1) Si $\alpha>1$ entonces $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$
2) Si $n\in Z^{+}$ entonces $\Gamma(n)=(n-1)!$

$\Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1)=(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)=(n-1)(n-2)(n-3)\Gamma(n-3)=(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\Gamma(n-4)$

Por este motivo también se conoce a esta función como función factorial generalizada.

Demostración

1) $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$

Integrando por partes con $u=x^{\alpha-1}$, $du=(\alpha-1)x^{\alpha-2}dx$, $dv=e^{-x}dx$ y $v=-e^{-x}$ $\qquad \int u\,dv=uv-\int v\,du$

$$\Gamma(\alpha)=-x^{\alpha-1}e^{-x}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty e^{-x}(\alpha-1)x^{\alpha-2}dx=(\alpha-1)\underbrace{\int_0^\infty x^{(\alpha-1)-1}e^{-x}dx}_{\text{Aplicar la definición de la función gamma.}}=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1) \quad \blacklozenge$$

2) Aplicando repetidas veces la propiedad uno se tiene que:

$$\Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1)=(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)=\cdots=(n-1)(n-2)\cdots\Gamma(1)$$

Pero $\Gamma(1)=\int_0^\infty x^{1-1}e^{-x}dx=\int_0^\infty e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^\infty=1$ Entonces $\Gamma(n)=(n-1)!$ $\quad\blacklozenge$

Los intervalos de tiempo entre dos fallas en un proceso de producción, los intervalos de tiempo entre dos llegadas a la caja en un banco, en general los tiempos entre dos ocurrencias de un evento son variables aleatorias continúas que se pueden modelar con la función de densidad tipo Gamma. Se dice que la v.a X tiene una distribución de probabilidad Gamma con parámetros $\alpha>0$ y $\beta>0$ y se escribe $X\sim Gamma(x;\alpha,\beta)$ o equivalentemente $X\sim\Gamma(x;\alpha,\beta)$ si su **f.d.p** está definida como:

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x} & x>0\\ 0 & \text{o.c}\end{cases}$$

La f.g.m para esta distribución está dada por:

$$\psi_X(t)=E\left(e^{tX}\right)=\int_0^\infty e^{tx}\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}dx=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-(\beta-t)x}dx$$

Tomando $u=(\beta-t)x$ se tiene que $x=\dfrac{u}{\beta-t}$ y que $du=(\beta-t)dx$ entonces $dx=\dfrac{du}{\beta-t}$
$du=(\beta-t)dx$
Sustituyendo en la integral:

$$\psi_X(t)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty\left(\frac{u}{\beta-t}\right)^{\alpha-1}e^{-u}\frac{du}{\beta-t}=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{(\beta-t)^{\alpha-1}}\frac{1}{(\beta-t)}\underbrace{\int_0^\infty u^{\alpha-1}e^{-u}du}_{\Gamma(\alpha)}=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha)}{(\beta-t)^\alpha}$$

$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$

$$\boxed{\psi_X(t)=\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^\alpha}=[\beta^\alpha(\beta-t)^{-\alpha}]$$

$[\beta(\beta-t)^{-1}]'=\beta(\beta-t)^{-2}$

Media y varianza.

$$\mu_X=E(X)=\psi'_X(t=0)=\alpha\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^{\alpha-1}\beta(\beta-t)^{-2}\Big|_{t=0}\quad\therefore\ \boxed{\mu_X=\frac{\alpha}{\beta}}$$

$\alpha\left(\frac{\beta}{\beta}\right)^{\alpha-1}\frac{\beta}{\beta^2}=\frac{\alpha\beta}{\beta^2}=\frac{\alpha}{\beta}$ $\qquad \alpha-1+2$

El segundo momento de la variable es:

$$E\left(X^2\right)=\psi''_X(t=0)=(\alpha\beta^\alpha)(\alpha+1)(\beta-t)^{-\alpha-2}\Big|_{t=0}=\alpha\beta^\alpha(\alpha+1)\beta^{-\alpha-2}=\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}$$

Entonces $\sigma^2=V(X)=E\left(X^2\right)-E^2(X)=\dfrac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}-\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}=\dfrac{\alpha^2+\alpha-\alpha^2}{\beta^2}$

$$\boxed{\sigma^2=\frac{\alpha}{\beta^2}}$$

$\psi'_X(t)=\alpha\dfrac{\beta^{\alpha-1}}{(\beta-t)^{\alpha-1}}\dfrac{\beta}{(\beta-t)^2}=\dfrac{\alpha\beta^\alpha}{(\beta-t)^{\alpha+1}}$

$\psi'_X(t)=\alpha\beta^\alpha(\beta-t)^{-(\alpha+1)}$

$\psi''_X(t)=-\alpha\beta^\alpha(\alpha+1)(\beta-t)^{-(\alpha+1)-1}(-1)=\alpha\beta^\alpha(\alpha+1)(\beta-t)^{-\alpha-2}$

$\psi''_X(0)=\alpha\beta^\alpha(\alpha+1)\beta^{-\alpha-2}=\dfrac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}$

$V(X)=E(X^2)-E^2(X)=\dfrac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}-\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}=\dfrac{\alpha^2+\alpha-\alpha^2}{\beta^2}=\dfrac{\alpha}{\beta^2}=V(X)$

Ejercicio: Si α es un entero positivo, encuentra la probabilidad de que la v.a $X\sim Gamma(x;\alpha,\beta)$ sea mayor que el número x.

$F_X(x)=P(X\le x)=1-P(X>x)$

Solución

$$P(X>x)=\int_x^\infty\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}dx=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_x^\infty x^{\alpha-1}e^{-\beta x}dx$$

Integrando por partes con $u=x^{\alpha-1}$, $du=(\alpha-1)x^{\alpha-2}dx$, $dv=e^{-\beta x}dx$ y $v=\dfrac{-e^{-\beta x}}{\beta}$

Y tomando $A=\dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$, tenemos que:

$$P(X>x)=A\left[-\frac{x^{\alpha-1}e^{-\beta x}}{\beta}\Big|_x^\infty+\int_x^\infty\frac{e^{-\beta x}}{\beta}(\alpha-1)x^{\alpha-2}dx\right]$$
$$=A\left[\frac{x^{\alpha-1}e^{-\beta x}}{\beta}+\frac{\alpha-1}{\beta}\int_x^\infty x^{\alpha-2}e^{-\beta x}dx\right]$$

Integrando nuevamente por partes con:

$u=x^{\alpha-2}$, $\qquad du=(\alpha-2)x^{\alpha-3}dx$

$dv=e^{-\beta x}dx$, $\qquad v=\dfrac{-e^{-\beta x}}{\beta}$

$uv-\int v\,du=\dfrac{x^{\alpha-2}e^{-\beta x}}{\beta}+\dfrac{\alpha-2}{\beta}\int_x^\infty x^{\alpha-3}e^{-\beta x}dx$

$$=A\left[\frac{x^{\alpha-1}e^{-\beta x}}{\beta}+\frac{(\alpha-1)x^{\alpha-2}e^{-\beta x}}{\beta^2}+\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{\beta^2}\int_x^\infty x^{\alpha-3}e^{-\beta x}dx\right]$$

$$=A\left\{\frac{x^{\alpha-1}e^{-\beta x}}{\beta}+\frac{(\alpha-1)x^{\alpha-2}e^{-\beta x}}{\beta^2}+\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{\beta^2}\left[\frac{x^{\alpha-3}e^{-\beta x}}{\beta}+\frac{\alpha-3}{\beta}\int_x^\infty x^{\alpha-4}e^{-\beta x}dx\right]\right\}$$
$$=A\left\{\frac{x^{\alpha-1}e^{-\beta x}}{\beta}+\frac{(\alpha-1)x^{\alpha-2}e^{-\beta x}}{\beta^2}+\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}e^{-\beta x}}{\beta^3}+\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{\beta^3}\int_x^\infty x^{\alpha-4}e^{-\beta x}dx\right\}$$
$$=A\left\{\frac{x^{\alpha-1}e^{-\beta x}}{\beta}+\frac{(\alpha-1)x^{\alpha-2}e^{-\beta x}}{\beta^2}+\cdots+\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-(\alpha-1))}{\beta^{\alpha-1}}\int_x^\infty x^{\alpha-\alpha}e^{-\beta x}dx\right\}$$

Pero $\int_x^\infty e^{-\beta x}dx=\dfrac{-e^{-\beta x}}{\beta}\Big|_x^\infty=\dfrac{e^{-\beta x}}{\beta}$

Entonces:

$$=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{x^{\alpha-1}e^{-\beta x}}{\beta}+\frac{(\alpha-1)x^{\alpha-2}e^{-\beta x}}{\beta^2}+\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}e^{-\beta x}}{\beta^3}+\cdots+\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(1)}{\beta^{\alpha-1}}\frac{e^{-\beta x}}{\beta}\right]$$

Sustituyendo el valor de A, llegamos a:

$$P(X>x)=\frac{e^{-\beta x}(\beta x)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}+\frac{e^{-\beta x}(\beta x)^{\alpha-2}}{(\alpha-2)!}+\frac{e^{-\beta x}(\beta x)^{\alpha-3}}{(\alpha-3)!}+\cdots+e^{-\beta x}$$

$$\boxed{P(X>x)=\sum_{k=0}^{\alpha-1}\frac{e^{-\beta x}(\beta x)^k}{k!}}\quad(*)$$

Recuerda que la f.d.p de la Poisson es de la forma $f_X(x)=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$

Entonces, (*) es precisamente la probabilidad acumulada de la Poisson con parámetro $\lambda=\beta x$, evaluada en el número $(\alpha-1)$. Que escribimos como $P(X>x)=F_X^P(\alpha-1)$.

Finalmente se tiene que la función de distribución acumulada para la Gamma, está dada por:

acumulada Gamma (continua) $\qquad$ → Acumulada Poisson

$$\boxed{F_X^G(x)=P(X\le x)=1-P(X>x)=1-F_X^P(\alpha-1)}$$

→ $\lambda=\beta x$ $\qquad X\sim\Gamma(x;\alpha,\beta)$ $\quad F_X(x)$

Observa que tomando $\alpha=1$ en la distribución Gamma, $\Gamma(x;\alpha,\beta)=\dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}=\beta e^{-\beta x}=\exp(x;\beta)$ se obtiene la f.d.p exponencial con parámetro β.

Ejemplo 1: Si las variables aleatorias $X_1,X_2,\ldots,X_\alpha$ tienen una distribución exponencial con parámetro β y son independientes unas de otras. ¿Cómo se distribuye la v.a $X=\sum_{i=1}^{\alpha}X_i$?

Solución

Como las variables aleatorias son independientes, se usa la propiedad de que la f.g.m de una suma de variables aleatorias independientes es el producto de las f.g.m de cada una de las variables aleatorias que se están sumando;

$\psi_X(t)=\prod_{i=1}^{\alpha}\psi_{X_i}(t)=\prod_{i=1}^{\alpha}\dfrac{\beta}{\beta-t}=\left(\dfrac{\beta}{\beta-t}\right)^\alpha$ es la f.g.m para una Gamma con parámetros α y β.

> Entonces, *suma de α variables aleatorias, independientes distribuidas exponencialmente con parámetro β es una* $\Gamma(x;\alpha,\beta)$.

Ejemplo 2: Si las variables aleatorias $X_1,X_2,\ldots,X_k$ son independientes y $X_i\sim\Gamma(x_i;\alpha_i,\beta)$ para $i=1,\ldots,k$. Encuentra la distribución de la v.a $X=\sum_{i=1}^{k}X_i$.

Solución

$$\psi_{X_i}(t)=\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^{\alpha_i}$$

$$\psi_X(t)=\prod_{i=1}^{k}\psi_{X_i}(t)=\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^{\sum_{i=1}^{k}\alpha_i}$$

Entonces $X\sim\Gamma\left(x;\alpha=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i,\beta\right)$.

Ejemplo 3: Un sistema redundante opera de la siguiente manera. Cuando la unidad 1 falla el tablero de decisiones pone la unidad 2 hasta que falla y entonces activa la unidad 3. El interruptor de decisión se supone perfecto, por lo que la vida del sistema puede representarse como la suma de las vidas de los subsistemas. Si las vidas de los subsistemas son independientes entre sí y cada subsistema tiene una vida X_j, $j=1,2,3$, con densidad $g(x_j)=\dfrac{e^{-\frac{x_j}{100}}}{100}$, $x_j\ge 0$. Encuentra la función de confiabilidad $R(x)$ del sistema, donde $R(x)=P(\text{El sistema opere al menos } x \text{ horas})=P(X\ge x)=1-F_X(x)$.

Solución

X_i: Vida del subsistema i con $i=1,2,3$.
X: Vida del sistema.
$X=X_1+X_2+X_3$.

Si $X_i\sim\exp\left(x_i;\dfrac{1}{100}\right)$, entonces $X\sim\Gamma\left(x;\alpha=3,\beta=\dfrac{1}{100}\right)$ y por lo tanto la confiabilidad del sistema es:

$$R(x)=1-\left(1-\sum_{k=0}^{\alpha-1}\frac{e^{-\beta x}(\beta x)^k}{k!}\right)=\sum_{k=0}^{2}\frac{e^{-0.01x}(0.01x)^k}{k!}=e^{-0.01x}\left(1+0.01x+0.00005x^2\right)$$

Ejemplo 4: Una caja de caramelos contiene 24 barras. El tiempo entre pedidos por barra se distribuye exponencialmente con media 10 minutos. Supón que se vende el primer caramelo en cuanto se abre la caja. ¿Cuál es la probabilidad de que una caja abierta a las 8:00 A.M. se haya terminado al medio día?

Solución

X_i: Tiempo entre pedidos $i=1,2,\ldots,23$.
X: tiempo en que se acaba la caja.

$X=\sum_{i=1}^{23}X_i$, pero $X_i\sim\exp(x_i;6)$ ya que 1 hora tiene 60 minutos.

Hay independencia entre pedidos, y de las 8:00 a las 12:00 hay 4 horas. Se desea encontrar la $P(X\le 4)$. Sabemos que $X\sim\Gamma(x;\alpha=23,\beta=6)$, y que la distribución acumulada de probabilidad de la distribución Gamma queda en términos de la distribución acumulada de una Poisson con parámetro $\lambda=\beta x=6(4)=24$, así que:

$$F_X(4)=1-\sum_{k=0}^{22}\frac{e^{-24}(24)^k}{k!}=1-F_X^P(22)=1-0.3917=0.6083$$

Ejemplo 5: El tiempo de reabastecimiento de cierto producto cumple con la distribución Gamma con media 40 y varianza 400. Determina la probabilidad de que un pedido se envíe dentro de los 20 días posteriores a su solicitud.

Solución

X: Tiempo de reabastecimiento del producto en días.
$X\sim\Gamma(x;\alpha=4,\beta=0.1)$

$\mu=\dfrac{\alpha}{\beta}=40$ y $\sigma^2=\dfrac{\alpha}{\beta^2}=\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{40}{\beta}=400$
Entonces $\alpha=4$ y $\beta=0.1$

$P(X<20)=F_X(20)=1-F_X^P(3)$ con $\lambda=\beta x=0.1(20)=2$
$P(X<20)=0.1433$