

Ejemplo 5: Se encuestran los grupos de niños de la escuela primaria a leer por dos métodos diferentes, 50 para cada método. Al terminar el periodo de instrucción, una prueba de lectura dio los siguientes resultados: $\bar{x}_1 = 74, \bar{x}_2 = 71, s_1^2 = 9, s_2^2 = 10$. ¿Cuál es el nivel de significancia de la prueba a desear verificar si hay evidencia de una diferencia real entre las dos medias poblacionales? ¿Cuál sería tu conclusión si deseas utilizar un valor de α igual a 0.05?

Solución:

$H_0: \mu_1 = \mu_2$ La igualdad siempre se rechaza en la hipótesis nula.
 $H_A: \mu_1 \neq \mu_2$ Toma 3 pruebas para comparar 2 medias.

Se consideran iguales, porque se rechazan iguales, depende del error muestral.

Contraste de hipótesis: $H_0: \mu_1 = \mu_2$ Los resultados siempre se rechazan en la hipótesis nula.
 $H_A: \mu_1 \neq \mu_2$ Toma 3 pruebas para comparar 2 medias.

Veremos que las 2 medias tienen una varianza desigual, así que se consideran iguales.

Estadístico de prueba: $Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{n}}} = \frac{74 - 71}{\sqrt{\frac{9 + 10}{50}}} = 1.576 > 1.58$

La probabilidad de que sea menor o igual a 1.58 es de 0.9382.

Región de rechazo (RR): Rechazar H_0 si $|Z| > Z_{0.05/2}$ o equivalentemente si $p < \frac{\alpha}{2} = 0.025$.

El nivel de confianza es $(1-\alpha)100\% = 95\%$ y $z_{0.05/2} = 1.96$, como $1.58 < 1.96$ no se rechaza la hipótesis nula, equivalentemente para $z = 1.58$ se tiene que $p = 0.0571 > 0.025$ por lo tanto no se rechaza H_0 .

Se concluye que al basarse en la muestra no existe evidencia de que exista una diferencia real entre los dos métodos de enseñanza en los niños de la escuela primaria.

Ejercicio 6: Se tienen 2 grupos de 100 personas cada uno. Se les aplicó un examen de matemáticas y se obtuvieron los siguientes resultados: $\bar{x}_1 = 70, \bar{x}_2 = 72, s_1^2 = 10, s_2^2 = 12$. Se consideran iguales las varianzas de los 2 grupos. ¿Cuál es el nivel de significancia de la prueba de que las 2 medias son iguales?

Solución:

$H_0: \mu_1 = \mu_2$ La igualdad siempre se rechaza en la hipótesis nula.
 $H_A: \mu_1 \neq \mu_2$ Toma 3 pruebas para comparar 2 medias.

Se consideran iguales, porque se rechazan iguales, depende del error muestral.

Contraste de hipótesis: $H_0: \mu_1 = \mu_2$ Los resultados siempre se rechazan en la hipótesis nula.
 $H_A: \mu_1 \neq \mu_2$ Toma 3 pruebas para comparar 2 medias.

Veremos que las 2 medias tienen una varianza desigual, así que se consideran iguales.

Estadístico de prueba: $Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{n}}} = \frac{70 - 72}{\sqrt{\frac{10 + 12}{20}}} = -1.414 < -1.96$

La probabilidad de que sea menor o igual a -1.96 es de 0.0251.

Región de rechazo (RR): Rechazar H_0 si $|Z| > Z_{0.05/2}$ o equivalentemente si $p < \frac{\alpha}{2} = 0.025$.

El nivel de confianza es $(1-\alpha)100\% = 95\%$ y $z_{0.05/2} = 1.96$, como $-1.414 < 1.96$ se rechaza la hipótesis nula, equivalentemente para $z = -1.414$ se tiene que $p = 0.0251 < 0.025$ por lo tanto se rechaza H_0 .

Se concluye que al basarse en la muestra existe evidencia de que las 2 medias son diferentes.

Ejemplo 7: Se tienen 2 grupos de 100 personas cada uno. Se les aplicó un examen de matemáticas y se obtuvieron los siguientes resultados: $\bar{x}_1 = 70, \bar{x}_2 = 72, s_1^2 = 10, s_2^2 = 12$. Se consideran iguales las varianzas de los 2 grupos. ¿Cuál es el nivel de significancia de la prueba de que las 2 medias son iguales?

Solución:

$H_0: \mu_1 = \mu_2$ La igualdad siempre se rechaza en la hipótesis nula.
 $H_A: \mu_1 \neq \mu_2$ Toma 3 pruebas para comparar 2 medias.

Se consideran iguales, porque se rechazan iguales, depende del error muestral.

Contraste de hipótesis: $H_0: \mu_1 = \mu_2$ Los resultados siempre se rechazan en la hipótesis nula.
 $H_A: \mu_1 \neq \mu_2$ Toma 3 pruebas para comparar 2 medias.

Veremos que las 2 medias tienen una varianza desigual, así que se consideran iguales.

Estadístico de prueba: $Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{n}}} = \frac{70 - 72}{\sqrt{\frac{10 + 12}{20}}} = -1.414 < -1.96$

La probabilidad de que sea menor o igual a -1.96 es de 0.0251.

Región de rechazo (RR): Rechazar H_0 si $|Z| > Z_{0.05/2}$ o equivalentemente si $p < \frac{\alpha}{2} = 0.025$.

El nivel de confianza es $(1-\alpha)100\% = 95\%$ y $z_{0.05/2} = 1.96$, como $-1.414 < 1.96$ se rechaza la hipótesis nula, equivalentemente para $z = -1.414$ se tiene que $p = 0.0251 < 0.025$ por lo tanto se rechaza H_0 .

Se concluye que al basarse en la muestra existe evidencia de que las 2 medias son diferentes.

Ejemplo 8: Se tienen 2 grupos de 100 personas cada uno. Se les aplicó un examen de matemáticas y se obtuvieron los siguientes resultados: $\bar{x}_1 = 70, \bar{x}_2 = 72, s_1^2 = 10, s_2^2 = 12$. Se consideran iguales las varianzas de los 2 grupos. ¿Cuál es el nivel de significancia de la prueba de que las 2 medias son iguales?

Solución:

$H_0: \mu_1 = \mu_2$ La igualdad siempre se rechaza en la hipótesis nula.
 $H_A: \mu_1 \neq \mu_2$ Toma 3 pruebas para comparar 2 medias.

Se consideran iguales, porque se rechazan iguales, depende del error muestral.

Contraste de hipótesis: $H_0: \mu_1 = \mu_2$ Los resultados siempre se rechazan en la hipótesis nula.
 $H_A: \mu_1 \neq \mu_2$ Toma 3 pruebas para comparar 2 medias.

Veremos que las 2 medias tienen una varianza desigual, así que se consideran iguales.

Estadístico de prueba: $Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{n}}} = \frac{70 - 72}{\sqrt{\frac{10 + 12}{20}}} = -1.414 < -1.96$

La probabilidad de que sea menor o igual a -1.96 es de 0.0251.

Región de rechazo (RR): Rechazar H_0 si $|Z| > Z_{0.05/2}$ o equivalentemente si $p < \frac{\alpha}{2} = 0.025$.

El nivel de confianza es $(1-\alpha)100\% = 95\%$ y $z_{0.05/2} = 1.96$, como $-1.414 < 1.96$ se rechaza la hipótesis nula, equivalentemente para $z = -1.414$ se tiene que $p = 0.0251 < 0.025$ por lo tanto se rechaza H_0 .

Se concluye que al basarse en la muestra existe evidencia de que las 2 medias son diferentes.

Ejemplo 9: Se tienen 2 grupos de 100 personas cada uno. Se les aplicó un examen de matemáticas y se obtuvieron los siguientes resultados: $\bar{x}_1 = 70, \bar{x}_2 = 72, s_1^2 = 10, s_2^2 = 12$. Se consideran iguales las varianzas de los 2 grupos. ¿Cuál es el nivel de significancia de la prueba de que las 2 medias son iguales?

Solución:

$H_0: \mu_1 = \mu_2$ La igualdad siempre se rechaza en la hipótesis nula.
 $H_A: \mu_1 \neq \mu_2$ Toma 3 pruebas para comparar 2 medias.

Se consideran iguales, porque se rechazan iguales, depende del error muestral.

Contraste de hipótesis: $H_0: \mu_1 = \mu_2$ Los resultados siempre se rechazan en la hipótesis nula.
 $H_A: \mu_1 \neq \mu_2$ Toma 3 pruebas para comparar 2 medias.

Veremos que las 2 medias tienen una varianza desigual, así que se consideran iguales.

Estadístico de prueba: $Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{n}}} = \frac{70 - 72}{\sqrt{\frac{10 + 12}{20}}} = -1.414 < -1.96$

La probabilidad de que sea menor o igual a -1.96 es de 0.0251.

Región de rechazo (RR): Rechazar H_0 si $|Z| > Z_{0.05/2}$ o equivalentemente si $p < \frac{\alpha}{2} = 0.025$.

El nivel de confianza es $(1-\alpha)100\% = 95\%$ y $z_{0.05/2} = 1.96$, como $-1.414 < 1.96$ se rechaza la hipótesis nula, equivalentemente para $z = -1.414$ se tiene que $p = 0.0251 < 0.025$ por lo tanto se rechaza H_0 .

Se concluye que al basarse en la muestra existe evidencia de que las 2 medias son diferentes.

Ejemplo 10: Se tienen 2 grupos de 100 personas cada uno. Se les aplicó un examen de matemáticas y se obtuvieron los siguientes resultados: $\bar{x}_1 = 70, \bar{x}_2 = 72, s_1^2 = 10, s_2^2 = 12$. Se consideran iguales las varianzas de los 2 grupos. ¿Cuál es el nivel de significancia de la prueba de que las 2 medias son iguales?

Solución:

$H_0: \mu_1 = \mu_2$ La igualdad siempre se rechaza en la hipótesis nula.
 $H_A: \mu_1 \neq \mu_2$ Toma 3 pruebas para comparar 2 medias.

Se consideran iguales, porque se rechazan iguales, depende del error muestral.

Contraste de hipótesis: $H_0: \mu_1 = \mu_2$ Los resultados siempre se rechazan en la hipótesis nula.
 $H_A: \mu_1 \neq \mu_2$ Toma 3 pruebas para comparar 2 medias.

Veremos que las 2 medias tienen una varianza desigual, así que se consideran iguales.

Estadístico de prueba: $Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{n}}} = \frac{70 - 72}{\sqrt{\frac{10 + 12}{20}}} = -1.414 < -1.96$

La probabilidad de que sea menor o igual a -1.96 es de 0.0251.

Región de rechazo (RR): Rechazar H_0 si $|Z| > Z_{0.05/2}$ o equivalentemente si $p < \frac{\alpha}{2} = 0.025$.

El nivel de confianza es $(1-\alpha)100\% = 95\%$ y $z_{0.05/2} = 1.96$, como $-1.414 < 1.96$ se rechaza la hipótesis nula, equivalentemente para $z = -1.414$ se tiene que $p = 0.0251 < 0.025$ por lo tanto se rechaza H_0 .

Se concluye que al basarse en la muestra existe evidencia de que las 2 medias son diferentes.

Ejemplo 11: Se registraron los precios, al cierre de las operaciones, de dos acciones comunes durante un período de 10 días. Las medias y varianzas fueron $\bar{x}_1 = 40.33, S_1^2 = 1.54$ y $\bar{x}_2 = 42.54, S_2^2 = 2.96$ respectivamente. ¿Presentan estos datos suficiente evidencia para indicar una diferencia en variabilidad entre los precios al cierre de las operaciones, de las dos acciones para las poblaciones asociadas con las muestras? Considera $\alpha = 0.02$.

Solución:

Datos del problema: $n_1 = n_2 = 16$, $\bar{x}_1 = 40.33, S_1^2 = 1.54, \bar{x}_2 = 42.54, S_2^2 = 2.96$

Contraste de hipótesis: $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H_A: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Estadístico de prueba: $F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{1.54}{2.96} = 0.52$

Toma de decisión: Rechazar la hipótesis nula si $F > F_{0.01/2, 15, 15}$ o $F < F_{0.99/2, 15, 15}$

Los grados de libertad son 15 tanto para el numerador como para el denominador y $F_{0.01/2, 15, 15} = 3.52$, $F_{0.99/2, 15, 15} = 0.280$ al punto no se rechaza la hipótesis nula es decir no existe evidencia estadística de que las varianzas sean distintas.

Fecha de entrega: 3 de diciembre o a más tardar el 10 de diciembre.

TAREA 1:

Hacer un maestro en excel para comparar 2 medias, en el caso de varianzas poblacionales desconocidas. Dado que hay dos posibles pruebas primero debemos averiguar si las muestras descomponen se pueden considerar iguales o diferentes para elegir la prueba adecuada en la comparación de las medias.

1) Se puede hacer usando sólo intervalos de confianza (IC).
 2) Solo pruebas de hipótesis (PH).
 3) Una IC (para comparar las varianzas) y una PH (comparar las medias).
 4) Una PH (para comparar las varianzas) y una IC (comparar las medias).

Se alimenta de los datos de las dos muestras, n_1, n_2 , Confianza y/o la significancia, los valores de los puntos críticos que necesita (Averiguar como se hace en excel).

SALIDA:

La conclusión de la comparación de varianzas.
 Escribir el intervalo o PH y utilizar en la comparación de las medias.

La conclusión de la comparación de las medias.

TAREA 2:

Preparar una exposición por equipos de 3 personas.

Tema: Estimación puntual.

Tarea: *¿Qué considera el equipo que es lo que todo alumno del curso debe saber sobre el tema? ¿Y por qué?*

1) Explique algunos ejemplos representativos según su respuesta en 1)
 2) Explique la diferencia entre una IC y una PH
 3) Explorar: Buscar algunos datos reales y aplicar algo de la teoría de estimación puntual y por intervalos.

Martes 30/11/21 Equipo 1
 miércoles 1/12/21 Equipo 2
 jueves 2/12/21 Equipo 3
 martes 7/12/21 Equipo 4
 miércoles 8/12/21 Equipo 5
 viernes 10/12/21 Equipo 6
 martes 14/12/21 Equipo 7
 miércoles 15/12/21 Equipo 8
 viernes 17/12/21 Equipo 9
 martes 21/12/21 Equipo 10
 miércoles 22/12/21 Equipo 11

Tarea: *• Estudiar la teoría de IC y PH*
• Tener a la mano los códigos de fórmulas de los IC y PH
• Realizar los ejercicios realizando de IC o PH
• Escribir matraca a clase
• Tareas: intervalos de confianza PH y PH: 1) cálculos de media

Ejemplo 12: Se tienen 2 grupos de 100 personas cada uno. Se les aplicó un examen de matemáticas y se obtuvieron los siguientes resultados: $\bar{x}_1 = 70, \bar{x}_2 = 72, s_1^2 = 10, s_2^2 = 12$. Se consideran iguales las varianzas de los 2 grupos. ¿Cuál es el nivel de significancia de la prueba de que las 2 medias son iguales?

Solución:

X_1 : Número de hombres que consideran más caro el coche más caro (con el modelo).
 X_2 : Número de hombres que consideran más barato el coche más caro (sin el modelo).

$n_1 = n_2 = 50$
 $P_1 = 0.74, P_2 = 0.46$

Contraste de hipótesis: $H_0: P_1 \leq P_2$ $H_A: P_1 > P_2$

Estadístico de prueba: $Z = \frac{P_1 - P_2}{\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}} = \frac{0.74 - 0.46}{\sqrt{\frac{0.74(1-0.74)}{50} + \frac{0.46(1-0.46)}{50}}} = 2.98$

Región de rechazo: Rechazar H_0 si $|Z| > Z_{0.05/2}$ o equivalentemente si $p < \alpha$.

El nivel de confianza es $(1-\alpha)100\% = 95\%$ y $z_{0.05/2} = 1.96$ se rechaza la hipótesis nula, equivalentemente para $z = 2.98$ se tiene que $p = 0.0014 < 0.05$ por lo tanto se rechaza H_0 .

Se concluye que al basarse en la muestra existe evidencia de que el modelo influye en la percepción de los hombres respecto al precio del coche.

Nota: Cuando se rechaza la hipótesis nula se dice que la prueba es significativa, esto se debe a que la igualdad siempre va a H_0 y la designación en H_1 . Por ejemplo, si hacemos una prueba de hipótesis para comparar dos medianas poblacionales μ_1 y μ_2 y las medias muestrales son $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$ y $\bar{x}_1 > \bar{x}_2$, numerosamente se dice que $\mu_1 < \mu_2$ y $\mu_1 > \mu_2$ respectivamente. Sin embargo, si se considera el experimento de nuevo se observa que el mismo experimento se tuviera que $x_1 < x_2$ y $x_1 > x_2$, incluso $x_1 < x_2$ y $x_1 > x_2$, la conclusión sobre las medias poblacionales se basaría en base a estos tres situaciones muestrales tendiendo que $\mu_1 < \mu_2$ en el primer caso, $\mu_1 > \mu_2$ en el segundo caso y $\mu_1 = \mu_2$ en el tercero caso, es decir estaríamos concluyendo tres cosas diferentes para las mismas poblaciones. Entonces la pregunta es ¿estos 3 puntos de vista tienen la misma probabilidad? La respuesta es que no, ya que las probabilidades de que las 3 medias poblacionales $\mu_1 < \mu_2$ son realmente diferentes? O en realidad esta diferencia es significativa y se debe sólo a un error muestral y en realidad las medias poblacionales se pueden considerar iguales?

Ejemplo 13: El voltaje de salida en cierto circuito eléctrico deseado es igual a 120 voltios según se especifica. Una muestra de 40 lecturas independientes para este circuito da una media muestral de 128.6 y una desviación estándar de 2.1. Prueba la hipótesis de que el voltaje de salida promedio es 120 frente a la hipótesis de que alternativa de que es menor que 120. Utiliza un nivel de significancia de 5%.

Solución:

Datos $n = 40, \bar{x} = 128.6, S^2 = (2.1)^2$
 Contraste de hipótesis: $H_0: \mu = 120$ $H_A: \mu < 120$

Estadístico de prueba: $Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} = \frac{128.6 - 120}{\sqrt{\frac{(2.1)^2}{40}}} = \frac{8.6}{0.34} = 24.70$

Decision: El valor critico es $z_{0.05} = -1.645$ Debido a que el estadístico de la prueba si cae en la región de rechazo ($-24.70 < -1.645$) se concluye que si hay evidencia estadística de que el voltaje promedio es menor que 120.

Ejemplo 14: Se analizan 2 observaciones de tiempo de escape, en segundos, para trabajadores petroleros, en un ejercicio simulado, a través de las cuales se calculan el promedio y la desviación estándar, obteniéndose $\bar{x} = 34.26$ y $s = 2.46$. Si se considera que los trabajadores petroleros tienen un promedio de escape de 36 segundos, ¿se contradicen estos datos con la hipótesis de que el tiempo promedio de escape era de 36 segundos? ¿Los datos contradicen esta creencia a priori? Asumiendo normalidad, prueba la hipótesis apropiada con un nivel de significancia de 0.05.

Solución:

$n = 26$
 $\bar{x} = 370.69$ seg $= 6.18$ min
 $s = 24.26$ seg $= 0.40$ min
 $\alpha = 0.05$

Contraste de hipótesis: $H_0: \mu \leq 36$ $H_A: \mu > 36$

Estadístico de prueba: $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{370.69 - 36}{\frac{24.26}{\sqrt{26}}} = 1.77$

p-value: 0.0417

Punto critico: $t_{0.05, 25} = t_{0.05, 26} = 2.059$

Decision: 2.25 > 2.059 es decir el estadístico de prueba cae en la región de rechazo entonces se rechaza H_0 . Equivalente 0.0417 < 0.05 por lo tanto se concluye que la información de la muestra si contradice la creencia a priori de que el tiempo real promedio de escape era a lo más de 6 minutos.

Estadística:

$$S_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}} = \sqrt{\frac{(9-1)10.25 + (4-1)0.74}{9+4-2}} = \sqrt{124.64-11.3} = \sqrt{113.34} = 11.3$$

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\frac{S_p}{\sqrt{n_1+n_2-2}}} = \frac{80-65}{\frac{11.3}{\sqrt{13}}} = 2.21$$

Punto critico: $t_{0.05, n_1+n_2-2} = t_{0.05, 11} = 2.5$

Criterio de decisión: 2.21 > 2.5 entonces el $t_{0.05, 11}$ no está en la región de rechazo.

Con una confianza del 95% se puede decir que los dos grupos tienen la misma calificación promedio.

Ejemplo 15: Un fabricante de máquinas para empacar detergente afirma que su máquina podría llenar con un peso medio las cajas con un rango de 0.4 de onzas. La medida y la varianza de una muestra de ocho cajas de 3 libras fueron iguales a 3.1 y 0.018, respectivamente. Prueba la hipótesis de que la varianza de la población de las mediciones de los pesos es $\sigma^2 = 0.01$ frente a la alternativa $\sigma^2 > 0.01$. Utiliza una significancia de $\alpha = 0.05$.

Solución:

Los datos del problema son $n = 8, \bar{x} = 3.1, S^2 = 0.018, \alpha = 0.05$

Contraste de hipótesis: $H_0: \sigma^2 = 0.01$ $H_A: \sigma^2 > 0.01$

Estadístico de prueba: $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(8-1)0.018}{0.01} = 12.6$

Toma de decisión: Rechazar la hipótesis nula si $\chi^2 > \chi^2_{0.05}$ buscando el valor en tablas se tiene que $\chi^2_{0.05} = 14.0671$ con 0.05 la significancia de la prueba y son los grados de libertad ($n-1$).

Por 12.6 > 14.0671 por lo tanto se concluye que **no existe evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula**, entonces no se rechaza el hecho de que la varianza del peso de las cajas sea 0.01 libras.

Conclusion: La proba es significativa es decir el grupo A tiene mayor calificación promedio que el grupo B.