TAREA. Teorema de Chebyshev.

1) ¿Cuándo se usa este teorema?
2) ¿Qué dice el teorema?
(Escribir las 2)

3) Revisar los ejemplos.
4) Contestar los problemas de Chebyshev de la lista de problemas.
(Si no hay no hacer nada).

Tarea Chebyshev

Miércoles 13 de octubre de 2021.

4 Distribución de Variables Aleatorias Bidimensionales.

Objetivo: Extender los conocimientos adquiridos para el caso de una variable aleatoria unidimensional al caso de las variables aleatorias bidimensionales.

4.1 Densidad Conjunta y Marginal.

En ciertas ocasiones es necesario estudiar el efecto conjunto de dos variables aleatorias, de ahí la necesidad de estudiar variables aleatorias bidimensionales representadas por $Z=(X,Y)$. Observa que:

a) Si X y Y son discretas, Z será una v. a. bidimensional discreta.

b) Si X y Y son continuas, Z será una v. a. bidimensional continua.

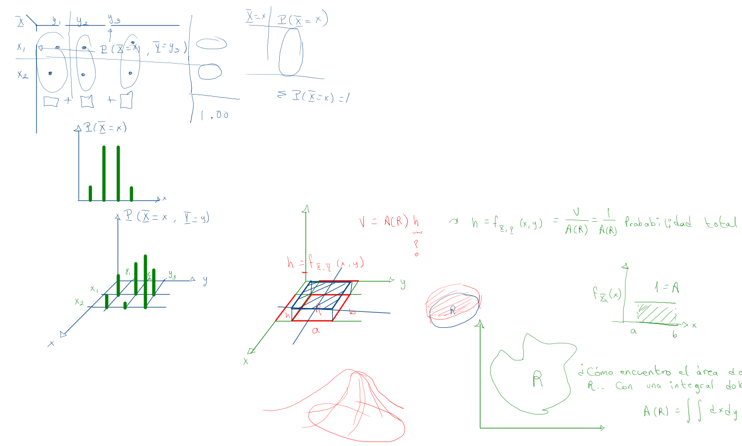
Definición: La función de probabilidad conjunta de una v. a. bidimensional discreta está dada por:

$$f_{X,Y}(x,y)=P(X=x,\ Y=y)$$

y cumple con las siguientes condiciones:

i) $P(X=x,Y=y)\geq 0 \quad \forall(x,y)$ $P(X=x,\ Y=y)\in[0,1]$

ii) $\sum_y\sum_x P(X=x,Y=y)=1$



Definición: La función de densidad de probabilidad conjunta de una v. a. bidimensional continua es una función que satisface las dos condiciones siguientes:

i) $f_{X,Y}(x,y)\geq 0 \quad \forall \quad (x,y)\in R$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy=1$

En la región de definición (R)

Ahora el rango de valores posibles de la v.a bidimensional en el caso continuo serán regiones en el plano y las probabilidades de interés serán volúmenes bajo la curva en la región de interés.

Ejemplo 1: Dos líneas de producción fabrican cierto tipo de artículos. Supón que la capacidad (en cualquier día dado) es de 5 artículos para la línea I y de 3 artículos para la línea II y que el número verdadero de artículos producidos por cada una de las líneas es una v. a.
Sea (X,Y) la representación de la v.a bidimensional que proporciona el número de artículos producidos por la línea I y por la línea II respectivamente.

Función de probabilidad conjunta $P(X,Y)$

Y \ X	0	1	2	3	4	5
0	0.00	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05
	$P(X=0)$	$P(X=1)$	$P(X=2)$	$P(X=3)$	$P(X=4)$	$P(X=5)$

$P(Y=0)=\sum_{x=0}^{5}P(X=x,\ Y=0)$
$P(Y=1)$
$P(Y=2)$
$P(Y=3)=\sum_{x=0}^{5}P(X=x,\ Y=3)$

$\sum_{y=0}^{3}P(X=5,\ Y=y)$

a) Encuentra la probabilidad de que la línea I produzca 2 artículos y la línea II produzca 3 artículos.
b) Encuentra la probabilidad de que la línea I produzca más artículos que la línea II.
c) ¿Cuánto vale la probabilidad de que la línea I produzca exactamente 4 artículos?
d) ¿Cuál es el número esperado de artículos producidos por la línea II?

Solución

Sean las variables aleatorias unidimensionales:

X : Número de artículos producidos por la línea I.
Y : Número de artículos producidos por la línea II.

a) $P(X=2,Y=3)=0.04$

b) $P(X>Y)=\sum\sum_{x>y}P(X=x,Y=y)$

$=P(X=1,Y=0)+P(X=2,Y=0)+P(X=2,Y=1)+P(X=3,Y=0)+P(X=3,Y=1)$

$+P(X=3,Y=2)+P(X=4,Y=0)+P(X=4,Y=1)+P(X=4,Y=2)+P(X=4,Y=3)$

$+P(X=5,Y=0)+P(X=5,Y=1)+P(X=5,Y=2)+P(X=5,Y=3)$

$=0.01+(0.03+0.04)+(0.05)3+(0.07+0.06+0.05+0.06)+(0.09+0.08+0.06+0.05)=0.75$

c) $P(X=4)=\sum_{y=0}^{3}P(X=4,Y=y)$
$=P(X=4,Y=0)+P(X=4,Y=1)+P(X=4,Y=2)+P(X=4,Y=3)$
$=0.07+0.06+0.05+0.06=0.24$

d) Para la esperanza de Y primero se encuentra la f.d.p de la v.a Y y después se usa la definición de la esperanza para el caso discreto unidimensional.

f.d.p de Y f.d.p marginal para Y

$Y=y$	$P(Y=y)$
0	0.25
1	0.26
2	0.25
3	0.24

Finalmente la esperanza de Y está dada por $E(Y)=\sum_{y=0}^{3}yP(Y=y)=0.26+2(0.25)+3(0.24)=1.48$

f.d.p para X f.d.p marginal

$X=x$	$P(X=x)$
0	0.03
1	0.08
2	0.16
3	0.21
4	0.24
5	0.28
	1.00

$P(X=x)=\sum_y P(X=x,\ Y=y)$ Para los valores posibles de x Marginal para X

$P(Y=y)=\sum_x P(X=x,\ Y=y)$ Para los valores posibles de y Marginal para Y

Entonces las marginales para una bidimensional continua son:

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)\,dy$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)\,dx$

Ejemplo 2: Sea X el número de caras y Y el número de caras menos el número de cruces cuando se lanzan 3 monedas. Encuentra la distribución de probabilidad conjunta de X y Y.

Solución

Posible resultado.	X No. de caras	Y No. Caras - No. De cruces
ccc	3	3
ccx	2	1
cxc	2	1
xcc	2	1
xxc	1	-1
xcx	1	-1
cxx	1	-1
xxx	0	-3

La variable aleatoria X tiene una distribución binomial con parámetros 3 y 0.5, es decir.

$$X\sim bin\left(x;n=3,\ p=\frac{1}{2}\right)$$

$$P(X=0)=\binom{3}{0}p^0q^3=\frac{1}{8}$$

$$P(X=1)=\binom{3}{1}p^1q^2=\frac{3}{8}$$

$$P(X=2)=\binom{3}{2}p^2q^1=\frac{3}{8}$$

$$P(X=3)=\binom{3}{3}p^3q^0=\frac{1}{8}$$

La función de distribución de probabilidad conjunta o bidimensional, se expresa mediante el cuadro siguiente.

f.d.p Conjunta de (X,Y)

X \ Y	-3	-1	1	3
0	1/8	0	0	0
1	0	3/8	0	0
2	0	0	3/8	0
3	0	0	0	1/8

$P(X=0,\ Y=-3)=P(xxx)=\frac{1}{8}$
$P(X=0,\ Y=-1)=0$
$P(X=1,\ Y=-3)=0$
$P(X=2,\ Y=1)=P(ccx\cup cxc\cup xcc)$
$=P(ccx)+P(cxc)+P(xcc)$
$=3/8$

Ejemplo 3: Supón que un fabricante de bombillas está interesado en el número de éstas que le han sido pedidas durante los meses de Enero y Febrero. X y Y indican el número de bombillas ordenadas durante esos dos meses, respectivamente. Supón que (X,Y) es una v. a. bidimensional con la siguiente f.d.p conjunta

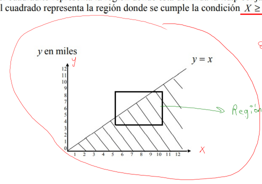
Uniforme bidimensional ← $f_{X,Y}(x,y)=C$, $5000\leq x\leq 10{,}000$ y $4000\leq y\leq 9000$

a) Encuentra el valor de la constante C.
b) Calcula $P(X\geq Y)$.

Con la manera en que se dan los valores posibles para las v.v.a.a X y Y me doy cuenta de que se le considera v.a conjunta bidimensional continua.

Solución

En problemas de este tipo lo que se acostumbra hacer es graficar la región en donde existe la f.d.p conjunta y localizar la región de interés para poder identificar los límites de integración en la integral doble que define a la probabilidad pedida.
En la siguiente figura el cuadradito representa la región donde está definida la f.d.p conjunta y la parte rayada que se intersecta con el cuadrado representa la región donde se cumple la condición $X\geq Y$.



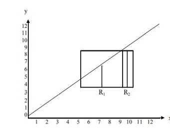
a) Sabemos que

Propiedad ii) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)dxdy=1 \quad \therefore \int_{y=4mil}^{9mil}\left[\int_{5mil}^{10mil}Cdxdy\right]=1 = C\int dx\int dy$

$C\left[x\Big|_{5mil}^{10mil}\ y\Big|_{4mil}^{9mil}\right]=C[(5mil)(5mil)]=1 \qquad \therefore C=\frac{1}{25{,}000{,}000}$

Por propiedades de f.d.p conjunta bidimensional
i) $f_{X,Y}(x,y)$ es una función no negativa.
$f_{X,Y}(x,y)\geq 0$ $\therefore$ $C\geq 0$ $\therefore$ $C\geq 0$ es también f.d.p conjunta. $C>0$

b) Se tiene que integrar en la parte inferior de la recta $y=x$, para ello se divide la región de interés en dos partes R_1 y R_2 debido a que los límites de integración cambian en estas dos regiones. Tomando el elemento diferencial vertical se tiene que en la primera región y corre de 4,000 a la recta a 45 grados $y=x$ mientras que x corre libremente de 5,000 a 9,000. Dado que y queda en términos de x primero se integra respecto a y y luego respecto a x. En la región 2 la variable x corre de 9,000 a 10,000 y la variable y toma valores de 4,000 a 9,000, como se indica en la figura.



Método largo.

$$P(X\geq Y)=C\left[\int_{x=5{,}000}^{9{,}000}\int_{y=4{,}000}^{x}dydx+\int_{y=4{,}000}^{9{,}000}\int_{x=9{,}000}^{10{,}000}dxdy\right]$$

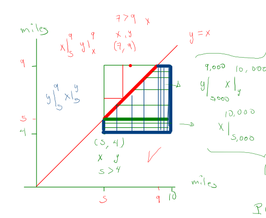
$$=C\left[\int_{x=5{,}000}^{9{,}000}\left(y\Big|_{4{,}000}^{x}\right)dx+\left(x\Big|_{9{,}000}^{10{,}000}\right)\left(y\Big|_{4{,}000}^{9{,}000}\right)\right]$$

$$=C\left[\int_{x=5{,}000}^{9{,}000}(x-4{,}000)dx+5{,}000{,}000\right]$$

$$=C\left[\left(\frac{x^2}{2}-4{,}000x\right)\Bigg|_{5{,}000}^{9{,}000}+5{,}000{,}000\right]$$

$$=\frac{1}{25{,}000{,}000}\left[\frac{81{,}000{,}000-25{,}000{,}000}{2}-16{,}000{,}000+5{,}000{,}000\right]$$

$$=\frac{17}{25}=0.68$$



Condición $X\geq Y$
$X=Y$ son todos los puntos sobre la recta que están en la R.
Límites de integración
$P(X\geq Y)=\int_{y=4000}^{9000}\int_{x=5000}^{y}f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy+\int_{y=5000}^{9000}\int_{x=9}^{10000}f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$

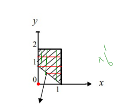
Ejercicio: Hacer el método corto.

Ejemplo 4: Si la v. a. bidimensional continua (X,Y) tiene una f.d.p conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y)=x^2+\frac{xy}{3} \qquad 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 2$$

a) Verifica que el volumen bajo la curva en la región definida es uno.
b) Encuentre $P(X+Y\geq 1)$. $y=1-x$

Solución



a) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)dxdy=\int_0^2\int_0^1(x^2+\frac{y}{3}x)dxdy=\int_0^2\left[\frac{x^3}{3}+\frac{yx^2}{6}\right]_0^1dy=\int_0^2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}y\right)dy=\left[\frac{1}{3}y+\frac{1}{12}y^2\right]_0^2=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$

b) Si $x+y=1\ \therefore\ y=1-x$

La probabilidad pedida es la integral en la región sombreada.

$$P(X+Y\geq 1)=\int_{x=0}^{x=1}\left[\int_{y=1-x}^{2}\left(x^2+\frac{y}{3}x\right)dy\right]dx=\int_{x=0}^{x=1}\left(x^2y+\frac{x}{3}\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=1-x}^{2}dx$$

$$=\int_{x=0}^{x=1}\left(2x^2-(1-x)x^2+\frac{4}{6}x-\frac{x}{6}(1-x)^2\right)dx$$

$$=\int_{x=0}^{x=1}\left(2x^2-x^2+x^3+\frac{2}{3}x-\frac{x}{6}\left[1-2x+x^2\right]\right)dx$$

$$=\int_{x=0}^{x=1}\left(2x^2-x^2+x^3+\frac{2}{3}x-\frac{x}{6}+\frac{1}{3}x^2-\frac{x^3}{6}\right)dx$$

$$=\int_{x=0}^{x=1}\left(\frac{5}{6}x^3+\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{2}x\right)dx=\left[\frac{5}{6}\frac{x^4}{4}+\frac{4}{3}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$=\left[\frac{5}{24}x^4+\frac{4}{9}x^3+\frac{1}{4}x^2\right]_0^1=\frac{45+96+54}{216}=\frac{195}{216}=\frac{65}{72}$$

$\left(x^2y+\frac{x}{6}y^2\right)\Big|_{y=1-x}^{y=2}=$

$2x^2+\frac{x}{6}4-\left[x^2(1-x)+\frac{x}{6}(1-2x+x^2)\right]$