Martes 7 de septiembre de 2021.

$$V(\underline{X}+\underline{Y}+Z) = \begin{cases} V(\underline{X}) + V(\underline{Y}) + V(Z) & \text{si } \underline{X}, \underline{Y}, Z \text{ si son independientes.} \\ V(\underline{X}) + V(\underline{Y}) + V(Z) + 2[Cov(\underline{X},\underline{Y}) + Cov(\underline{X},Z) + Cov(\underline{Y},Z)] \cdots (1) & \text{si no son independientes} \end{cases}$$

Ejercicio._ Demostrar (1)

PROPIEDADES DEL VALOR ESPERADO.

(4) $E[g(\underline{X})] = \sum_x g(x) P(\underline{X}=x)$

Sea X una v.a discreta con función de probabilidad $f_X(x)$

→ Y es una función de $\underline{X}$

P1._ Si a y b son constantes y $Y = aX + b$, entonces $\boxed{E(Y) = aE(X) + b}$

Ya que; $E(Y) = \sum_x (ax+b) f_X(x) = \sum_x ax f_X(x) + \sum_x b f_X(x)$

$$= a\underbrace{\sum_x x f_X(x)}_{\mu} + b\cancel{\sum_x f_X(x)} = aE(X) + b \quad \blacklozenge$$

$E(b) = b$ (1)

Observación._ Si $a = 0$ la esperanza de la constante b es ella misma, $\boxed{E(a) = a}$

$b = 0 \therefore E(a\underline{X}) = aE(\underline{X})$ (2)

P2._ Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias con valores esperados $E(X_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ respectivamente, entonces la esperanza de la suma de las variables aleatorias es la suma de las esperanzas de las variables aleatorias.

$$\boxed{E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)} \quad (3)$$

Definición: La **covarianza** entre las variables aleatorias X y Y con $E(X) = \mu_X$ y $E(Y) = \mu_Y$ está dada por:

$$\boxed{Cov(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]}$$

Se obtiene una definición alterna con un poco de álgebra.

$E(\underline{X}\mu_{\underline{Y}}) = \mu_{\underline{Y}} E(\underline{X})$

$$\begin{aligned} E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] &= E(XY - X\mu_Y - \mu_X Y + \mu_X\mu_Y) \\ &= E(XY) - E(X)\mu_Y - \mu_X E(Y) + \mu_X\mu_Y \\ &= E(XY) - \mu_X\mu_Y \cancel{- \mu_X\mu_Y + \mu_X\mu_Y} \end{aligned}$$

$$\boxed{Cov(X,Y) = E(XY) - \mu_X\mu_Y}$$

Observación._ En el capítulo 4 se verán distribuciones de probabilidad conjuntas y se entenderá la siguiente justificación. Si $X \perp Y$ entonces $Cov(X,Y) = 0$.

Si $\underline{X} \perp \underline{Y} \therefore E(\underline{X}\underline{Y}) = E(\underline{X})E(\underline{Y}) \rightarrow Cov(\underline{X},\underline{Y}) = 0$ solo en el caso de independencia

Para $X \perp Y$ se tiene que $f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ por lo que la esperanza del producto es el producto de las esperanzas.

$$E(XY) = \sum_x\sum_y xy f_{XY}(x,y) = \sum_x\sum_y xy f_X(x) f_Y(y)$$

$$E(XY) = \sum_x x f_X(x) \sum_y y f_Y(y) = E(X)E(Y) = \mu_X\mu_Y$$

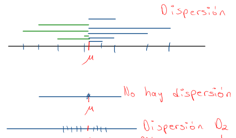
Es decir, la esperanza de un producto de variables aleatorias independientes es el producto de las esperanzas de las variables aleatorias.
La covarianza entre dos variables aleatorias independientes es cero.

$$Cov(X,Y) = E(XY) - \mu_X\mu_Y = E(X)E(Y) - \mu_X\mu_Y = 0$$

Varianza: Es una medida de dispersión.

VARIANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA.

Definición._ Si X es una v.a con media μ, la **varianza de** X se define como $\boxed{V(X) = E(X-\mu)^2}$



$D_1 > D_2$

Observaciones:
1._ La varianza de la v.a es un número no negativo.

2._ Otra manera de expresar la varianza se obtiene al desarrollar el cuadrado de la expresión original y con un poco de álgebra:

$V(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2$ es decir $\boxed{V(X) = E(X^2) - \mu^2}$

3._ La varianza proporciona una medida de la variación o dispersión de una distribución alrededor de su media. Un valor pequeño de la varianza indica que la distribución de probabilidad está muy concentrada alrededor de la media y un valor grande indica que la distribución de probabilidad tiene gran dispersión alrededor de su valor central.

$E(\underline{X}^2) = E(\underline{X})^2 \neq E^2(\underline{X}) = (E(\underline{X}))^2 = \mu^2$

4._ La varianza se denota con la letra griega sigma cuadrada $V(X) = \sigma^2$ $= \sigma_{\underline{X}}^2$, pero como la varianza nos lleva a hablar de unidades cuadradas y esto deja de tener sentido para el investigador, se acostumbra trabajar con su raíz cuadrada positiva, a la cual se le llama **desviación estándar** y se denota por sigma $\boxed{\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\sigma^2}}$

$\sqrt{D_1} > \sqrt{D_2}$ $\qquad \sqrt{25} > \sqrt{9}$

$5 > 3$

PROPIEDADES DE LA VARIANZA.

P1._ La varianza de una constante es cero. Si a = Cte entonces $\boxed{V(a) = 0}$

$$V(a) = E(a^2) - [E(a)]^2 = a^2 - a^2 = 0 \quad \blacklozenge$$

P2._ La varianza del producto de una constante por una v.a. es el producto del cuadrado de la constante por la varianza de la v.a. $\boxed{V(aX) = a^2 V(X)}$

$$V(aX) = E(a^2X^2) - [E(aX)]^2 = a^2\{\overbrace{E(X^2) - [E(X)]^2}^{V(\underline{X})}\} = a^2 V(X) \quad \blacklozenge$$

$= a^2E(\underline{X}^2) - (aE(\underline{X}))^2 = a^2E(\underline{X}^2) - a^2E^2(\underline{X})$

Eje. $E(4\underline{X}) = 4E(\underline{X})$ $\qquad E(-3\underline{X}) = -3E(\underline{X})$

$V(4\underline{X}) = 16V(\underline{X})$ $\qquad V(-3\underline{X}) = 9V(\underline{X})$

P3._ Si X y Y son variables aleatorias cualesquiera $\boxed{V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y)}$

$V(\sigma) = E(\sigma^2) - [E(\sigma)]^2$

$\sigma = \underline{X} + \underline{Y}$

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= E[(X+Y)^2] - E^2(X+Y) \\ &= E(X^2 + Y^2 + 2XY) - [E(X) + E(Y)]^2 \\ &= E(X^2) + E(Y^2) + 2E(XY) - E^2(X) - E^2(Y) - 2E(X)E(Y) \\ &= [E(X^2) - E^2(X)] + [E(Y^2) - E^2(Y)] + 2[E(XY) - E(X)E(Y)] \\ &= V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y) \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

Si X y Y son variables aleatorias independientes entonces la $Cov(X,Y) = 0$ y por lo tanto la varianza de la suma es la suma de las varianzas.

$$\boxed{V(X+Y) = V(X) + V(Y)}$$

La varianza de la suma de v.v.a.a.i.i (variables aleatorias independientes) es la suma de las varianzas individuales.
Si no son independientes hay que incluir covarianzas.

La varianza de la suma de tres variables aleatorias cualesquiera.

¿Cómo será $V(\underline{X} - \underline{Y})$?

$$V(\underline{X}-\underline{Y}) = \begin{cases} V(\underline{X}) + V(\underline{Y}) & \underline{X} \perp \underline{Y} \\ V(\underline{X}) + V(\underline{Y}) - 2Cov(\underline{X},\underline{Y}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V(X+Y+Z) &= V[(X+Y)+Z] = V(X+Y) + V(Z) + 2Cov[(X+Y),Z] \\ &= V(X) + V(Y) + V(Z) + 2[Cov(X,Y) + Cov(X,Z) + Cov(Y,Z)] \end{aligned}$$

$E(\underline{X}) = \mu_{\underline{X}}$

$$\begin{aligned} V(\underline{X}-\underline{Y}) &= E(\underline{X}-\underline{Y})^2 - (E(\underline{X}-\underline{Y}))^2 \\ &= E(\underline{X}^2 - 2\underline{X}\underline{Y} + \underline{Y}^2) - (\mu_{\underline{X}}^2 - 2\mu_{\underline{X}}\mu_{\underline{Y}} + \mu_{\underline{Y}}^2) \\ &= \underbrace{[E(\underline{X}^2) - \mu_{\underline{X}}^2]} + \underbrace{[E(\underline{Y}^2) - \mu_{\underline{Y}}^2]} - 2\underbrace{[E(\underline{X}\underline{Y}) - \mu_{\underline{X}}\mu_{\underline{Y}}]} \\ &= V(\underline{X}) + V(\underline{Y}) - 2Cov(\underline{X},\underline{Y}) \end{aligned}$$

Ya que
$$\begin{aligned} Cov[(X+Y),Z] &= E[(X+Y)Z] - E(X+Y)E(Z) \\ &= E(XZ + YZ) - E(X)E(Z) - E(Y)E(Z) \\ &= [E(XZ) - E(X)E(Z)] + [E(YZ) - E(Y)E(Z)] \\ &= Cov(X,Z) + Cov(Y,Z) \end{aligned}$$

Si X, Y y Z son mutuamente independientes entonces $Cov(X,Y) = Cov(X,Z) = Cov(Y,Z) = 0$ y por lo tanto $V(X+Y+Z) = V(X) + V(Y) + V(Z)$.

Si $\underline{X} \perp \underline{Y}$ $\quad V(\underline{X}-\underline{Y}) = V(\underline{X} + (-1)\underline{Y}) = V(\underline{X}) + V[(-1)\underline{Y}] = V(\underline{X}) + (-1)^2V(\underline{Y}) = V(\underline{X}) + V(\underline{Y})$

En general $V\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2\sum_{i<j} Cov(X_i, X_j)$.

Observa también que la segunda sumatoria consta de $\frac{n(n-1)}{2}$ términos.

Si las n variables aleatorias son independientes la segunda sumatoria se hace cero y la varianza de la suma de variables aleatorias independientes es la suma de las varianzas de las variables aleatorias.

Generalizando, se tiene que si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes entonces la varianza de su suma es la suma de las varianzas.

¿Cómo es $V\left(\sum_{i=1}^{n} \underline{X}_i\right)$?

$$\boxed{V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)}$$

a) En el caso de independencia
b) En el caso de no independencia

Ejemplo:
Si X es una v.a con media y varianza dadas por $E(X) = \mu$ y $V(X) = \sigma^2$. Demuestra que $E[X(X-1)] = \mu(\mu-1) + \sigma^2$.

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} \underline{X}_i\right) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} V(\underline{X}_i) & \text{independencia} \\ \sum_{i=1}^{n} V(\underline{X}_i) + 2\underbrace{\sum_{i<j}^{n} Cov(\underline{X}_i, \underline{X}_j)} \end{cases}$$

<u>**Solución**</u>

$E[X(X-1)] = E(X^2 - X) = E(X^2) - E(X)$

Pero $V(X) = E(X^2) - E^2(X) \therefore E(X^2) = V(X) + E^2(X)$

Entonces $E[X(X-1)] = \sigma^2 + \mu^2 - \mu = \sigma^2 + \mu(\mu-1) \quad \blacklozenge$

¿Cuántas covarianzas hay aquí?

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2(n-2)!} = \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{2\cancel{(n-2)!}} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\begin{cases} n = 2 & \frac{2(1)}{2} = 1 \\ n = 3 & \frac{3(\cancel{2})}{\cancel{2}} = 3 \end{cases}$$