Viernes 03 de septiembre de 2021.

2._ Se sabe que al lanzar una moneda, a menudo sale cara (c) tres veces más que cruz (x). Esta moneda se lanza 3 veces. Sea X la v.a que representa el número de caras que aparecen:
a) Encuentra la función de masa de probabilidad de X.
b) Encuentra la función de probabilidad acumulada de X.
c) Grafica ambas funciones.

Sea $P(x) = p = \frac{1}{4}$
$\therefore P(c) = 3p = \frac{3}{4}$ $P(x) + P(c) = 1 = p + 3p = 4p$
$p = \frac{1}{4}$

Solución

a) La variable aleatoria es X: número de caras en los tres lanzamientos. La ocurrencia de cara (c) es tres veces la de cruz (x), por lo tanto, si la ocurrencia de cruz está dada por a, la de cara es $3a$, y el número total de lanzamientos sería $4a$, con lo cual se tiene que $P(x) = \frac{a}{4a} = \frac{1}{4}$ y $P(c) = \frac{3a}{4a} = \frac{3}{4}$.

E_i	$X = x$	$P(E_i)$
ccc	3	$\left(\frac{3}{4}\right)^3$
ccx	2	$\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)$
cxc	2	$\left(\frac{3}{4}\right)^2\frac{1}{4}$
xcc	2	$\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)$
cxx	1	$\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^2$
xcx	1	$\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^2$
xxc	1	$\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^2$
xxx	0	$\left(\frac{1}{4}\right)^3$

La f.d.p de la variable aleatoria se puede presentar en la tabla siguiente:

Función de probabilidad para el número de caras en tres lanzamientos de una moneda.

$X = x$	$f_X(x) = P(X = x)$
0	$\frac{1}{64}$
1	$\frac{9}{64}$
2	$\frac{27}{64}$
3	$\frac{27}{64}$

$= \binom{3}{x}\left(\frac{3}{4}\right)^x\left(\frac{1}{4}\right)^{3-x}$

Observa que $\frac{1}{64} + \frac{9}{64} + \frac{27}{64} + \frac{27}{64} = 1$. ✓

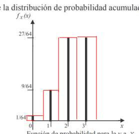
b) La función de probabilidad acumulada se construye de la manera siguiente:

$$F_X(0) = P(X \le 0) = P(X = 0) = \frac{1}{64}$$
$$F_X(1) = P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1}{64} + \frac{9}{64} = \frac{10}{64}$$
$$F_X(2) = P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{64} + \frac{9}{64} + \frac{27}{64} = \frac{37}{64}$$
$$F_X(3) = P(X \le 3) = P(X = 0) + \ldots + P(X = 3) = \frac{37}{64} + \frac{27}{64} = 1$$

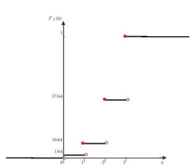
La función de probabilidad acumula de la v.a X es la función escalonada siguiente:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{64} & \text{si } 0 \le x < 1 \\ \frac{10}{64} & \text{si } 1 \le x < 2 \\ \frac{37}{64} & \text{si } 2 \le x < 3 \\ 1 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$

c) Las gráficas de la f.d.p y de la distribución de probabilidad acumulada son:



Función de probabilidad para la v.a. X.



Función de probabilidad acumulada para la v.a X.

Observa que de la gráfica de la probabilidad acumulada se tiene que:

$$P(X = 1) = \frac{10}{64} - \frac{1}{64} = \frac{9}{64}$$
$$P(X = 3) = \frac{64}{64} - \frac{37}{64} = \frac{27}{64}$$
$$P(X = -1) = P(X = 1.4) = 0$$

2.2 Valor esperado y varianza de una variable aleatoria discreta.

Definición: Si X es una v.a discreta con función de probabilidad $f_X(x)$, **la esperanza**, **valor esperado** o **media** de la v.a X está dada por

$$\boxed{E(X) = \sum_x x f_X(x) = \sum_x x P(X = x)}$$

$E(\underline{X}) = \mu_{\underline{X}}$

Ejemplos:

1._ En base al ejemplo de la sección 2.1.1 donde se lanzaba una moneda 3 veces y por cada cara se ganaba 1 peso y por cada cruz se perdía 1 peso. ¿Cuál es el valor esperado de la v.a. X: ganancia al cabo de los tres lanzamientos?
Solución

ccc 3
ccx 2 - 1 = 1
cxx -1
xxx -3

Función de probabilidad de X: ganancia al cabo de los tres lanzamientos.

$X = x$	$f_X(x) = P(X = x)$
-3	0.216
-1	0.432
1	0.288
3	0.064

Encuentra la ganancia esperada.

¿Para qué me servirá?
R._ Para ver si al final del juego ganaré o perderé dinero.

Si yo entro al juego y la esperanza fue negativa a) ¿En esa ronda del juego perderé dinero?
b) Y si la media es positiva ¿En esa ronda ganaré?

¿Es posible que alguien gane en una ronda si la media es negativa? Sí

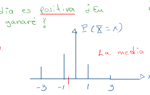
¿Es posible que alguien pierda en una ronda si la media es positiva? Sí

$$E(X) = \sum_x x f_X(x) = -3P(X = -3) + (-1)P(X = -1) + 1P(X = 1) + 3P(X = 3)$$
$$= -3(0.216) - 1(0.432) + 1(0.288) + 3(0.064) = -0.6$$

La ganancia esperada en este juego es de -0.6 pesos. Lo cual indica una pérdida de dinero.

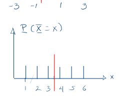
Observación: El valor esperado de la v.a no necesariamente es uno de los valores posibles de la v.a.
Lo que no puede pasar es que la media se salga del rango de valores posibles de la v.a.

¿Cómo se interpreta el valor esperado de una variable aleatoria?
Imagina que el experimento se repite n veces, se tendría entonces n ganancias, si se saca el promedio de estas ganancias el número resultante sería muy parecido al valor esperado, es decir a –0.6 pesos. La similitud entre el promedio de las n ganancias y el valor esperado calculado aumenta a medida que n aumenta.



La media queda más cargada en donde hay más concentración de probabilidad.

Entonces no se debe pensar que al hacer una vez el experimento se perderá la cantidad de 0.6 pesos, de hecho ya nos dimos cuenta que esto no ocurre nunca ya que este no es un valor posible de la v.a. en un solo experimento, se puede perder uno o tres pesos y se puede ganar uno o tres pesos. Pero participar muchas veces en el experimento, a la larga produce una pérdida de dinero.



La media quedó justo al centro porque es una f.d.p uniforme

$E(\underline{X}) = \sum_{x=1}^{6} x\, \underline{P}(\underline{X} = x)$

$= \sum_{x=1}^{6} x\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6}$

$6\overline{)21}$ 3.5
30

2._ Un fabricante produce artículos de tal modo que el 10% es defectuoso y el 90% no lo es. Si se produce un artículo defectuoso el fabricante pierde \$1.00, mientras que un artículo sin defectos le produce una utilidad de \$5.00. Si X es la utilidad neta por artículo, encuentra su valor esperado.

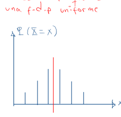
Solución

X: utilidad neta por artículo.
$x = -1,\ 5.$
$P(Defectuoso) = 0.1$
$P(Bueno) = 0.9$

¿Para qué le servirá esta información al fabricante?
R._ Para ver si le conviene o no seguir con su producción.

Tabla 1

x	$\underline{P}(\underline{X} = x)$
-1	$\underline{P}(\underline{X} = -1) = \underline{P}(\text{Defectuoso}) = 0.1$
5	$\underline{P}(\underline{X} = 5) = \underline{P}(\text{Bueno}) = 0.9$



Si la distribución es simétrica la media también queda al centro

Los valores posibles de la v.a son –1 si el artículo es defectuoso y 5 si no lo es. La esperanza de la utilidad es:

$$E(X) = \sum_x x f_X(x) = -1P(X = -1) + 5P(X = 5)$$
$$= -1P(Defectuoso) + 5P(bueno) = -1(0.1) + 5(0.9) = 4.40$$

$g(x)$	$E(g(x))$
$g(x) = \underline{X}^2$	$\sum_x x^2\, \underline{P}(\underline{X} = x)$
$g(x) = 3\underline{X} - 4$	$\sum_x (3x - 4)\underline{P}(\underline{X} = x)$
$g(x) = e^{2\underline{X}}$	$\sum_x e^{2x}\, \underline{P}(\underline{X} = x)$
$g(x) = \sqrt{x}$	$\sum_x \sqrt{x}\, \underline{P}(\underline{X} = x)$
$g(x) = \ln(3x)$	$\sum_x \ln(3x)\, \underline{P}(\underline{X} = x)$

Encontrar todas estas esperanzas para la f.d.p en la tabla 1.

Nota 1._ Si la v.a X puede tomar un número infinito numerable de valores, entonces se dice que la esperanza de X existe si y sólo si $\sum_x |x|\, f_X(x) < \infty$, es decir la serie tiene que ser absolutamente convergente.

Nota 2._ Si X es una v.a discreta con función de probabilidad $f_X(x)$ y $g(x)$ es una función de valores reales de x, se tiene que el valor esperado de la función de la v.a está dado por la expresión siguiente:

$$\boxed{E[g(x)] = \sum_x g(x) f_X(x)}$$

Propiedades del valor esperado.

Sea X una v.a discreta con función de probabilidad $f_X(x)$

P1._ Si a y b son constantes y $Y = aX + b$, entonces $\boxed{E(Y) = aE(X) + b}$

Ya que; $E(Y) = \sum_x (ax + b) f_X(x) = \sum_x ax f_X(x) + \sum_x b f_X(x)$
$= a\sum_x x f_X(x) + b\sum_x f_X(x) = aE(X) + b$ ♦

Observación._ Si $a = 0$ la esperanza de la constante b es ella misma, $\boxed{E(a) = a}$