Martes 16 de noviembre de 2021.

5.5 Prueba De Hipótesis.

La hipótesis es un supuesto que se tiene de la realidad, basado en la teoría o en la experiencia y que se pretende demostrar mediante un experimento o una prueba usando la información proporcionada por una muestra aleatoria de la población de interés.

Los elementos que se necesitan en una prueba de hipótesis son cuatro:

Elemento 1: Plantear la hipótesis. En todo experimento existen dos hipótesis que compiten como explicación de los resultados, una es la hipótesis nula denotada por H_0 y la otra es la hipótesis alternativa, H_a. La hipótesis alternativa puede ser direccional, es decir indica el sentido de la desigualdad, en tal caso se dice que la prueba es de una cola. Si la hipótesis alternativa no indica el sentido de la desigualdad se llama no direccional y en tal caso se tendrá una prueba de dos colas.

		Hipótesis nula H_0	Hipótesis alternativa H_a
H_a direccional	Prueba de una cola	$\theta \le \theta_0$	$\theta > \theta_0$
		$\theta \ge \theta_0$	$\theta < \theta_0$
H_a no direccional	Prueba de dos colas	$\theta = \theta_0$	$\theta \ne \theta_0$

La hipótesis nula es la contraparte lógica de la hipótesis alternativa, de tal manera que si la una es falsa, la otra es verdadera. Las hipótesis deben ser mutuamente excluyentes y exhaustivas.

La manera de escribir cada uno de los contrastes de hipótesis del cuadro anterior es como se muestra a continuación

Contraste o prueba de ipótesis

Prueba de cola superior.
$H_0 : \theta \le \theta_0$
$H_a : \theta > \theta_0$

θ : Parámetro
θ_0 : Número propuesto

Prueba de cola inferior.
$H_0 : \theta \ge \theta_0$
$H_a : \theta < \theta_0$

Prueba de dos colas.
$H_0 : \theta = \theta_0$
$H_a : \theta \ne \theta_0$

$\theta < \theta_0$ C. inferior
$\theta > \theta_0$ C. superior

Elemento 2: Seleccionar un estadístico de prueba ε_p. Un estadístico es una función de las mediciones muestrales, que sirve para tomar la decisión estadística de rechazar o no la hipótesis nula ya que la distribución del estadístico de prueba se encuentra suponiendo que la hipótesis nula es verdadera.

La distribución del estadístico de prueba depende del parámetro sobre el cual se hace la prueba de hipótesis, si la prueba es sobre una o dos medias con muestras grandes o una o dos proporciones poblacionales el ε_p tiene una distribución normal estándar $N(0,1)$, si la muestra es chica y la varianza poblacional desconocida el estadístico de prueba tiene una distribución t de Student, si queremos hacer una prueba de hipótesis para una varianza la distribución Ji-cuadrada es la indicada y para el caso dos varianzas poblacionales el ε_p se distribuye como una F. La probabilidad de la colita o colitas delimitadas por el ε_p se conoce como $p-value$.

$\chi^2_{t,\nu}$

En el cuadro siguiente se presenta el valor del $p-value$ para diferentes estadísticos de prueba con diferente nivel de significancia.

Prueba	ε_p	$p-value$
De cola superior para una media poblacional con una m.a de tamaño 87.	$Z = 2.46$	0.0069 ✓
De cola inferior para una diferencia de medias con varianzas poblacionales desconocidas pero iguales en base a dos muestras aleatorias de tamaños 20 y 25.	$t = -1.83$	0.037 ✓
De dos colas para una varianza poblacional, considerando una m.a de 80 casos.	$\chi^2 = 102.67$	0.038 $= P(\chi^2 < 102.67)$ $0.9619 = P(\chi^2 > 102.67)$
De cola superior para una comparación de dos varianzas poblacionales con muestras aleatorias de 100 y 125 casos.	$F = 1.47$	0.021

Elemento 3: Encontrar el punto crítico P_c definido por el nivel de significancia α de la prueba. El punto crítico es el que marca a partir de donde se considera que los valores del ε_p están lo suficientemente lejos para pensar que hay muy poca probabilidad de que la hipótesis nula sea verdadera.

Los valores extremos de la distribución delimitados por el P_c (cola superior, cola inferior o dos colas) forman lo que se llama la Región de Rechazo (RR).

El nivel α de la prueba es un valor pequeño dado por el investigador, y en una prueba lateral el punto crítico es aquel valor que deja una probabilidad igual a α en la cola superior o en la cola inferior de la distribución según sea el caso. Si la prueba es bilateral entonces el P_c está formado por dos valores, uno en cada extremo de la distribución y en cada una de las colas hay una probabilidad de $\alpha/2$.

Ejemplo 1: Para una prueba de hipótesis de cola superior de una media poblacional con varianza conocida se tienen que el $\varepsilon_p \sim N(0,1)$. Si se sabe que el investigador desea realizar la prueba con un nivel $\alpha = 0.05$ se tiene que $P_c = Z_\alpha = Z_{0.05} = 1.65$.

Ejemplo 2: En caso de una prueba de cola inferior sobre una media poblacional cuando el tamaño de muestra es chico, digamos $n = 20$ y la varianza poblacional desconocida, se tiene que el estadístico de prueba se distribuye como una t de Student y por lo tanto el punto crítico para una significancia de $\alpha = 0.03$ es $-t_{\alpha,n-1} = -t_{0.03,19} = -2.35$.

Ejemplo 3: Para una prueba de dos colas sobre la varianza σ^2, con un nivel de significancia $\alpha = 0.05$ se tiene que el estadístico de prueba tiene una distribución ji-cuadrada, por lo tanto el punto crítico se forma de dos partes $\chi^2_{1-\alpha/2,n-1} = \chi^2_{0.975,n-1}$ y $\chi^2_{\alpha/2,n-1} = \chi^2_{0.025,n-1}$, observa que estos dos valores que forman el P_c delimitan las dos colas extremas de la distribución ji-cuadrada.
Si el tamaño de la muestra es $n=65$ el punto crítico se forma por los números $\chi^2_{0.975,64} = 43.78$ y $\chi^2_{0.025,n-1} = 88$.

Ejemplo 4: En el caso de una prueba de cola inferior para probar una hipótesis sobre dos varianzas poblacionales, se tiene que el estadístico de prueba se distribuye como una F.
Si la significancia de la prueba es $\alpha = 0.01$ en base a dos muestras aleatorias de tamaños 40 y 50 se tiene que el punto crítico es $F_{0.99,39,49} = 0.48$.

Elemento 4: Establecer la regla de decisión. Hay dos maneras de tomar la decisión, la primera es comparando el estadístico de prueba con el punto crítico y la segunda es comparando el $p-value$ con el nivel de significancia de la prueba α.

Primera: Si el estadístico de prueba cae en la región de rechazo, es decir si $\varepsilon_p > P_c$ para una prueba de cola superior, $\varepsilon_p < P_c$ para una prueba de cola inferior o $\varepsilon_p > P_c$ o $\varepsilon_p < P_c$ para una prueba de dos colas entonces se rechaza la hipótesis nula, de lo contrario se acepta.

Segunda: Si $p-value \le \alpha$ se rechaza H_0
Si $p-value > \alpha$ no se rechaza H_0.

Nota._ Generalmente la hipótesis alternativa es la que se desea apoyar en base a la información contenida en la muestra.

Recuerda que si tuviéramos certeza de las cosas la estadística no tendría razón de ser, debemos apoyarnos en probabilidades y por lo mismo nos podemos equivocar, pero se busca que esto ocurra el menor número de veces. Siempre que se hace una prueba de hipótesis puede ocurrir que nuestra decisión sea correcta pero también puede darse el caso de tomar una decisión incorrecta como se muestra en el cuadro siguiente.

	Estado Real	
Decisión	**H_0 es verdadera**	**H_0 es falsa**
Rechazar H_0	**Error tipo I**	✓ Decisión correcta
No rechazar H_0	✓ Decisión correcta	**Error tipo II**

Las probabilidades asociadas a estos errores son:

$$\alpha = P(\text{Error tipo I}) = P(\text{Rechazar } H_o \mid H_o \text{ es verdadera})$$

$$\beta = P(\text{Error tipo II}) = P(\text{No rechazar } H_o \mid H_0 \text{ es falsa})$$

La ***confianza*** es la probabilidad de no rechazar la hipótesis nula dado que es verdadera, es decir

$$1-\alpha = P(\text{No rechazar } H_o \mid H_o \text{ es verdadera})$$

$$\boxed{\text{Confianza de la prueba} = 1-\alpha}$$

y la ***potencia de la prueba*** es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula dado que es falsa.

$$\text{Potencia de la prueba} = P(\text{rechazar } H_o \mid H_0 \text{ es } \overset{\text{falsa}}{\cancel{\text{verdadera}}})$$

$$\boxed{\text{Potencia de la prueba} = 1-\beta}$$

Observa que si DC es el evento de tomar una decisión correcta y ε es el evento de cometer un error, cuando se hace una prueba de hipótesis se tienen que $P(DC) + P(\varepsilon) = 1$ y como el error puede ser de dos tipos se tiene que $P(\varepsilon) = \alpha + \beta$, no se sabe cuanto vale la probabilidad de cometer un error pero una vez que ésta es fija se observa que a medida que α crece β disminuye y cuando β crece α decrece, es decir existe una relación inversa entre la probabilidad de cometer un error tipo I y la probabilidad de cometer un error tipo II.

El nivel α de la prueba lo establece el investigador al principio del experimento, es el nivel al cual desea limitar la probabilidad de cometer un error de tipo I, su valor depende de la naturaleza del experimento, generalmente se usan valores muy pequeños (confianzas grandes 95% o más) cuando el estudio es de mucha precisión o está relacionado con cuestiones de salud, y toma valores no tan pequeños cuando se está en la etapa exploratoria del experimento.