CÁLCULO I

Introdução ao Estudo de Funções de uma Variável

Função

Uma função (real de variável real) é uma regra/relação f que a cada número real x de algum subconjunto $A \subset \mathbb{R}$, associa outro número real y, de maneira única e sem exceção:

$$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \text{ tal que } \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).$$

Função

Uma função (real de variável real) é uma regra/relação f que a cada número real x de algum subconjunto $A \subset \mathbb{R}$, associa outro número real y, de maneira única e sem exceção:

$$f: A \to B \text{ tal que } x \to y = f(x).$$

Variável independente

Variável dependente

Domínio e Imagem

- O conjunto A é chamado de domínio da f e denotaremos $A = D(f)$.

- Denominamos imagem da f, o conjunto
$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A, y = f(x)\}.$$

Exemplo

Vamos associar a cada valor real x, o seu inverso, isto é:

$$\boldsymbol{y = f(x) = \frac{1}{x}}$$

- $\boldsymbol{D(f) = \mathbb{R} - \{0\}}$
- $\boldsymbol{Im(f) = \mathbb{R} - \{0\}}$

Exemplo

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 \; se \; x > 1 \\ 1 \qquad\quad se \; x = 1 \\ x + 1 \; se \; x < 1 \end{cases}$$

- $D(f) = \mathbb{R}$
- $Im(f) = \mathbb{R}$

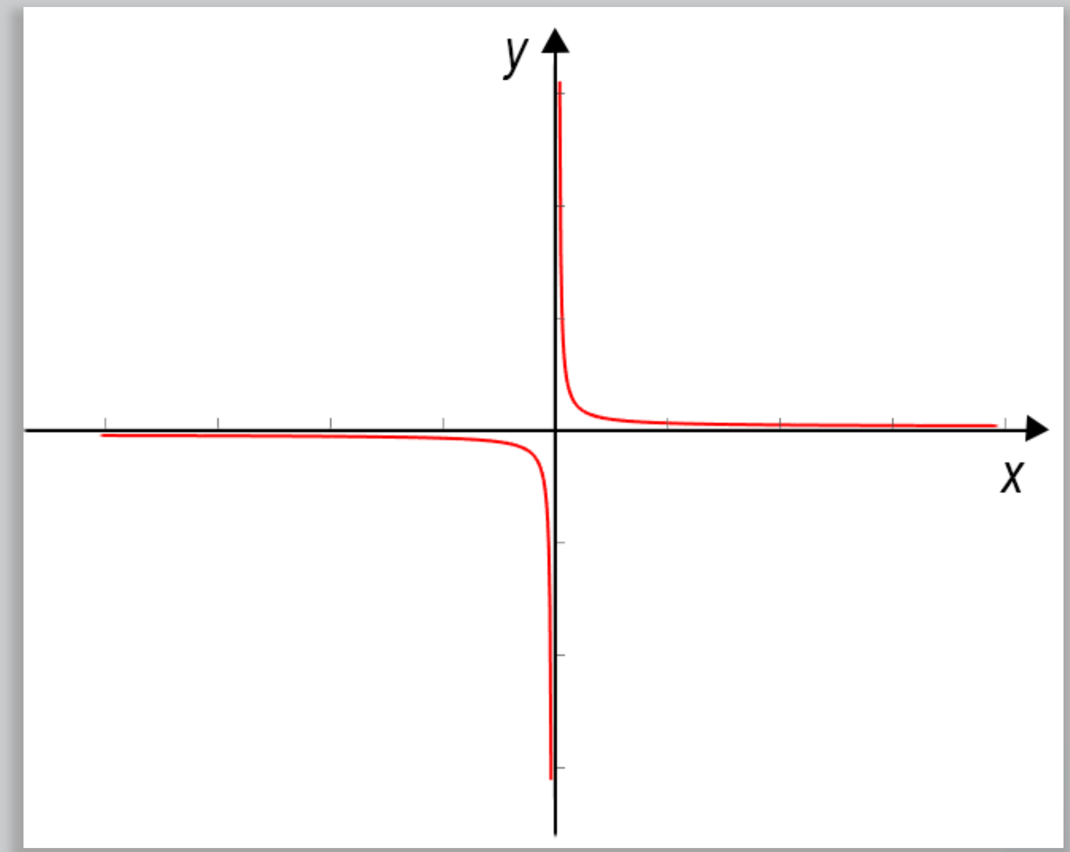
Funções Elementares e seus Gráficos

- **Definimos o gráfico de f como o conjunto de pares $(x, f(x))$ do plano $\mathbb{R}^2$, correspondentes a todos os $x \in D(f)$.**

- **Gráficos fornecem várias propriedades da função.**

Exemplo

- $f(x) = \frac{1}{x}$
- $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
- $Im(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

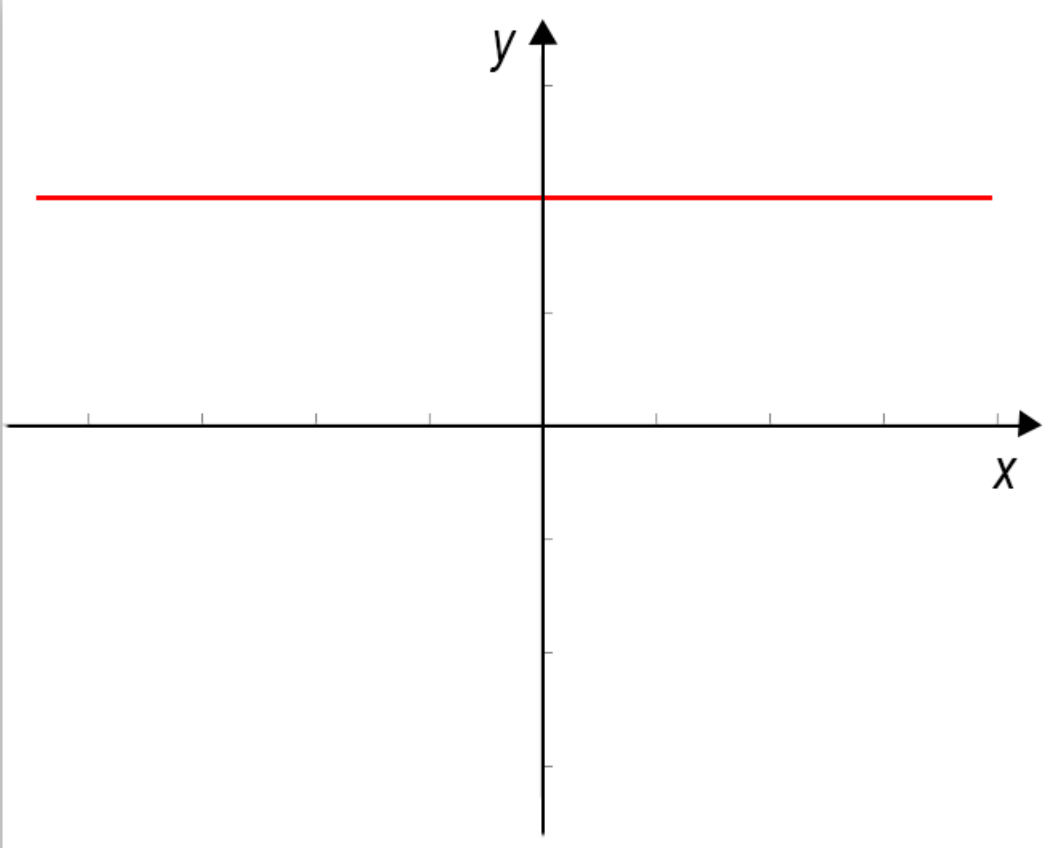


Função Constante

. $f(x) = c, c \in \mathbb{R}$

. $D(f) = \mathbb{R}$

. $Im(f) = c$



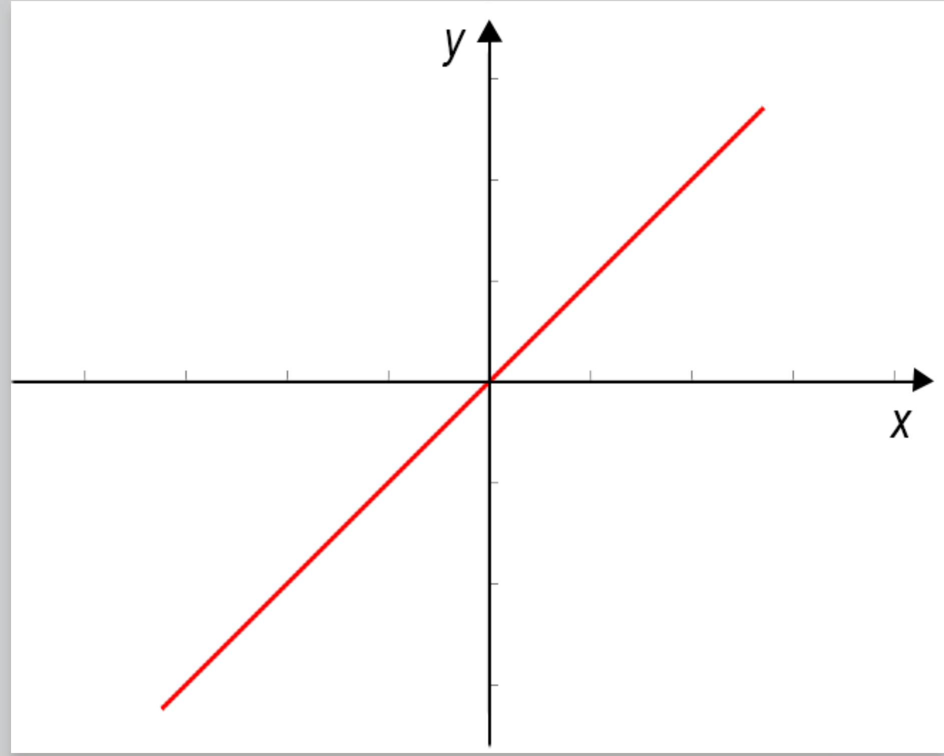
Função Linear

. $\boldsymbol{f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}}$

. $\boldsymbol{f(x) = x}$

. $\boldsymbol{D(f) = \mathbb{R}}$

. $\boldsymbol{Im(f) = \mathbb{R}}$



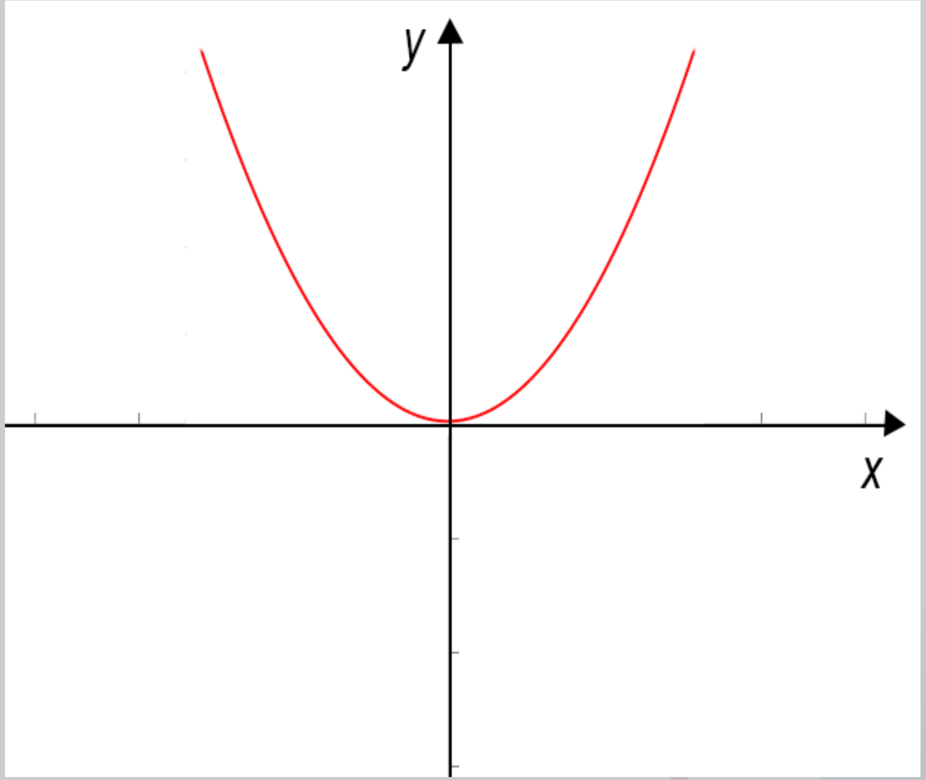
Função Quadrática

. $f(x) = ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{R}$

. $f(x) = x^2$

. $D(f) = \mathbb{R}$

. $Im(f) = \mathbb{R}_+$



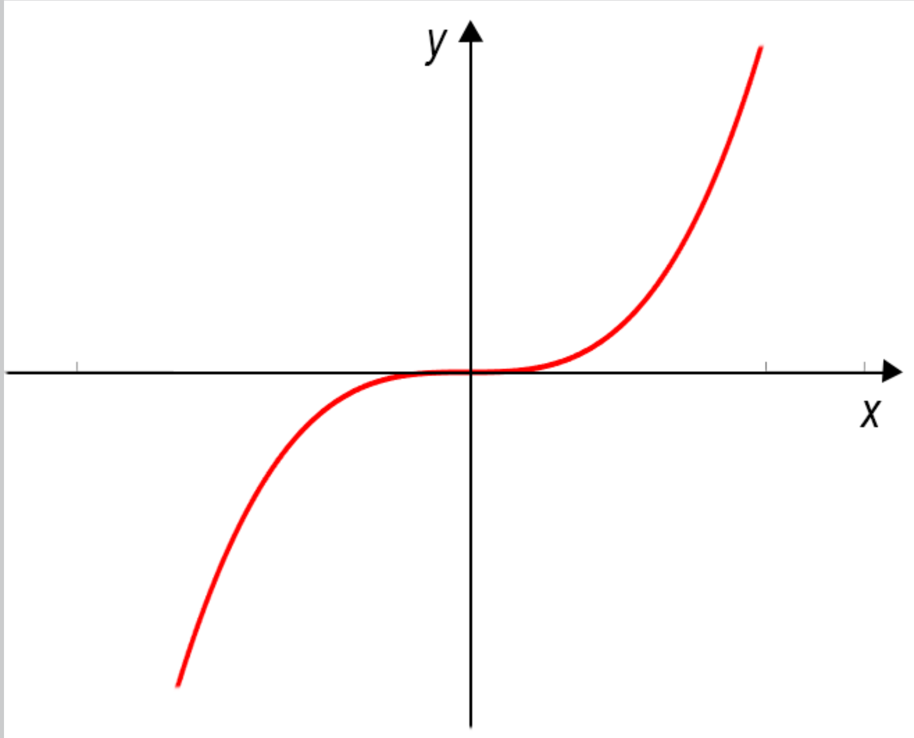
Função Cúbica

. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, a, b, c, d \in \mathbb{R}$

. $f(x) = x^3$

. $D(f) = \mathbb{R}$

. $Im(f) = \mathbb{R}$



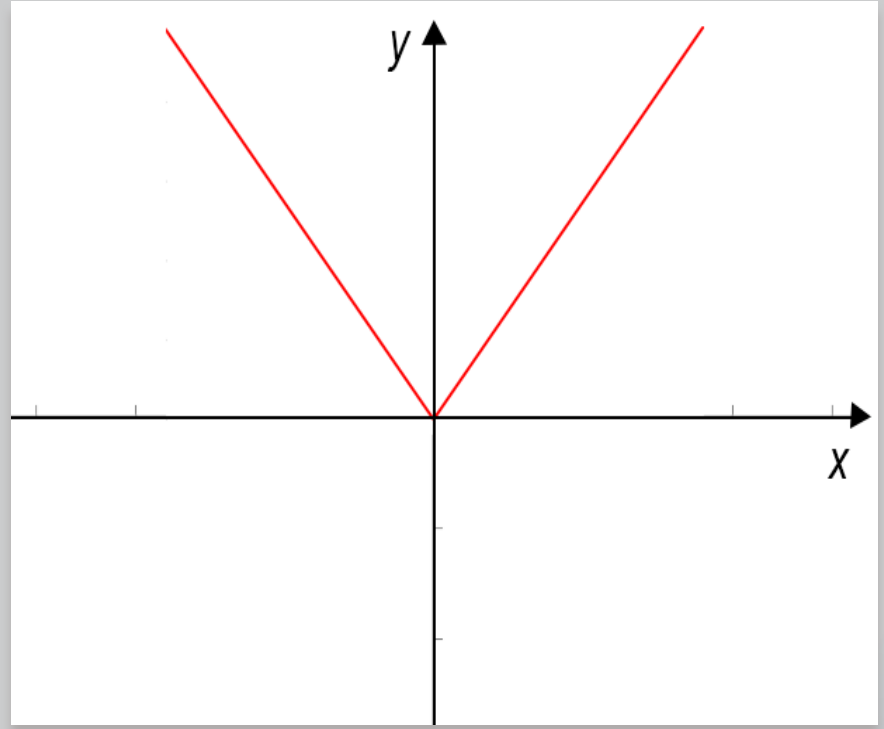
Função Modular

. $f(x) = |x|$

. $f = \begin{cases} x, & se\ x \geq 0 \\ -x, & se\ x < 0 \end{cases}$

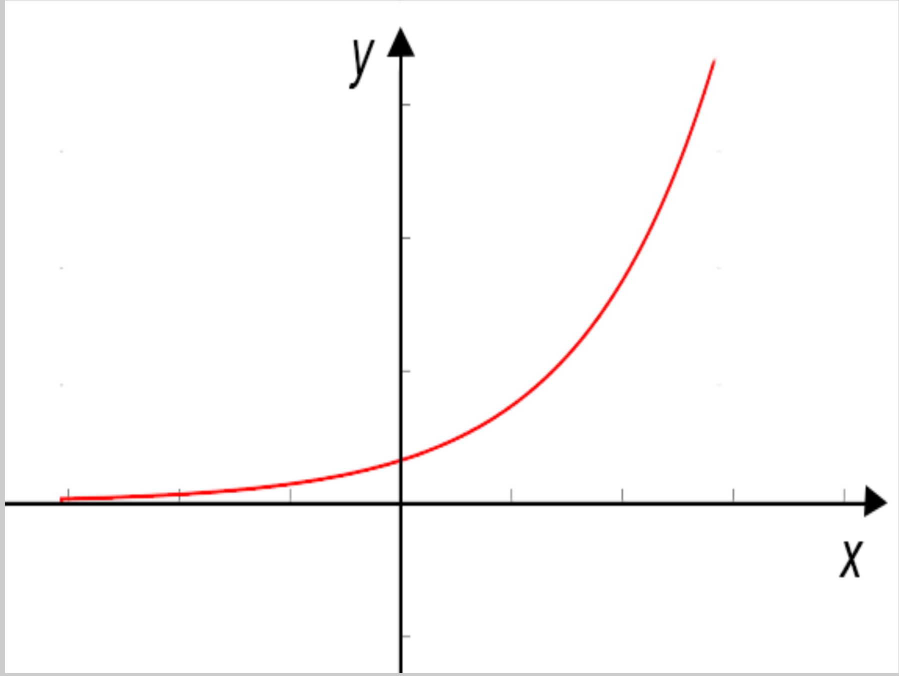
. $D(f) = \mathbb{R}$

. $Im(f) = \mathbb{R}_+$



Função Exponencial

. $f(x) = a^x, a \in \mathbb{R}$



. $f(x) = e^x$

. $D(f) = \mathbb{R}$

. $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$

Função Exponencial

Gráfico disponível em: https://liibre.github.io/coronabr/

Função Exponencial

Propriedades

- $a^x a^y = a^{x+y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $(ab)^x = a^x b^x$
- Se $a > 1, x < y$, então $a^x < a^y$
- Se $0 < a < 1, x < y$, então $a^x > a^y$

Função Logarítmica

Denomina-se logaritmo de b na base a, o número real x, tal que:

$$\boxed{x = log_a b \Leftrightarrow a^x = b}$$

Função Logarítmica

Denomina-se logaritmo de b na base a, o número real x, tal que:

$$\boxed{x = log_a b \Leftrightarrow a^x = b}$$

- $log_a b$ somente está definido para $b > 0, a > 0$ e $a \neq 1$.
- O logaritmo na base e é indicado por $\ln$, ou seja:

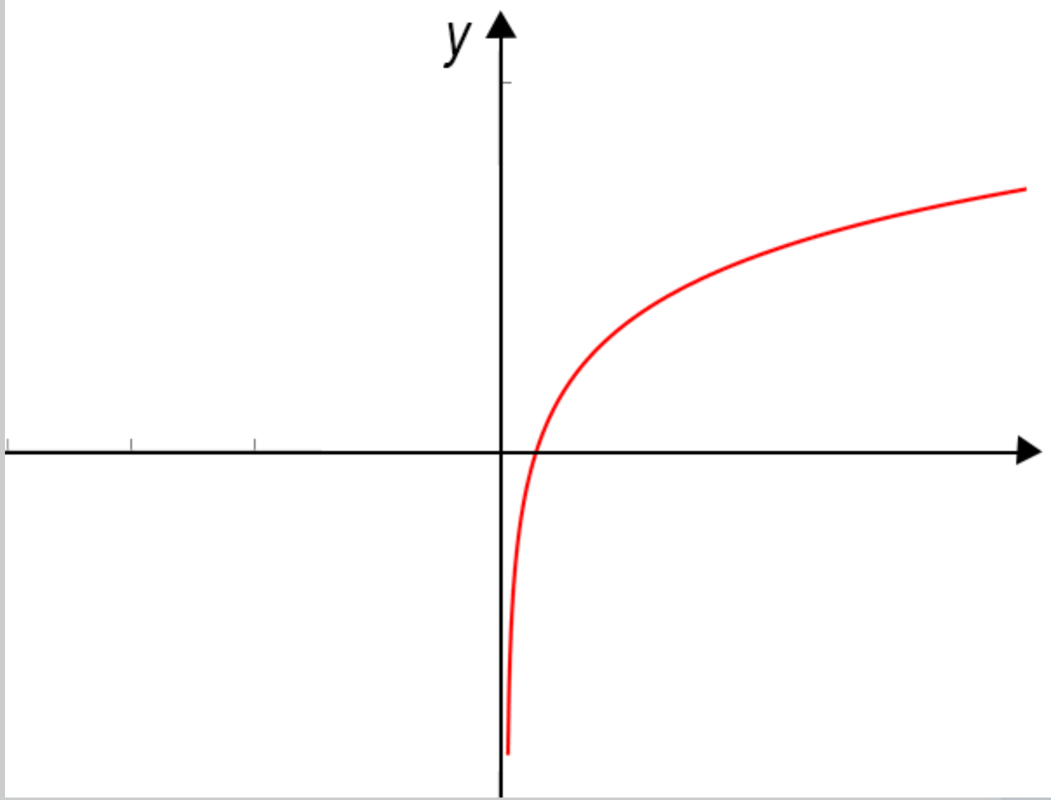
$$y = ln\, x \Leftrightarrow e^y = x$$

Função Logarítmica

. $f(x) = ln(x)$

. $D(f) = \mathbb{R}_+^*$

. $Im(f) = \mathbb{R}$

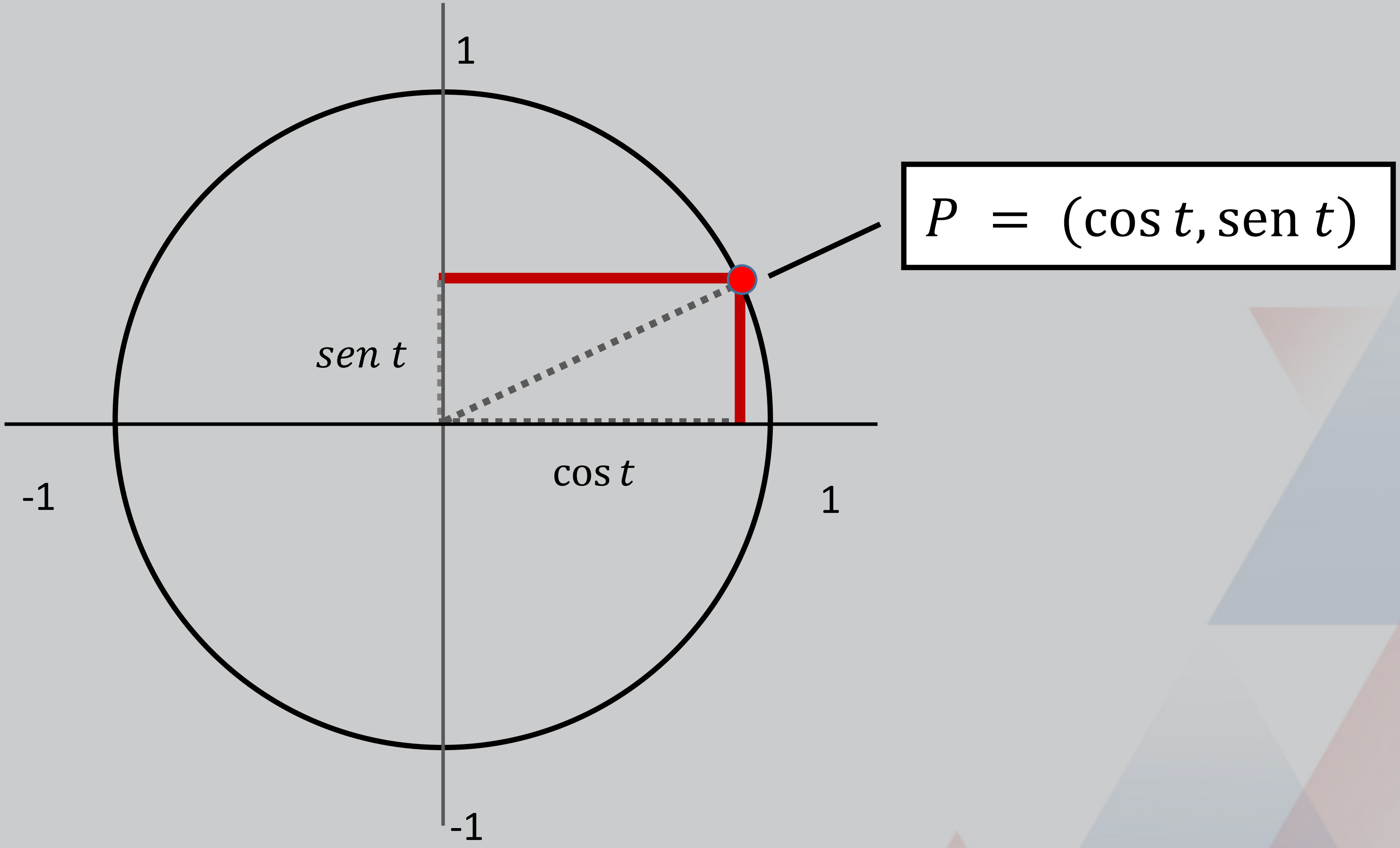


Funções Trigonométricas

Seno e Cosseno (sen e $\cos$ **)**

- $\operatorname{sen} \mathbf{0} = \mathbf{0}$
- $\cos \mathbf{0} = \mathbf{1}$
- $\operatorname{sen}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \operatorname{sen} \boldsymbol{a} \cos \boldsymbol{b} - \operatorname{sen} \boldsymbol{b} \cos \boldsymbol{a}$
- $\cos(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \cos \boldsymbol{a} \cos \boldsymbol{b} + \operatorname{sen} \boldsymbol{a} \operatorname{sen} \boldsymbol{b}$
- $\operatorname{sen}^{\mathbf{2}} \boldsymbol{t} + \cos^{\mathbf{2}} \boldsymbol{t} = \mathbf{1}$

Funções Trigonométricas



Seno e Cosseno

Período: 2π

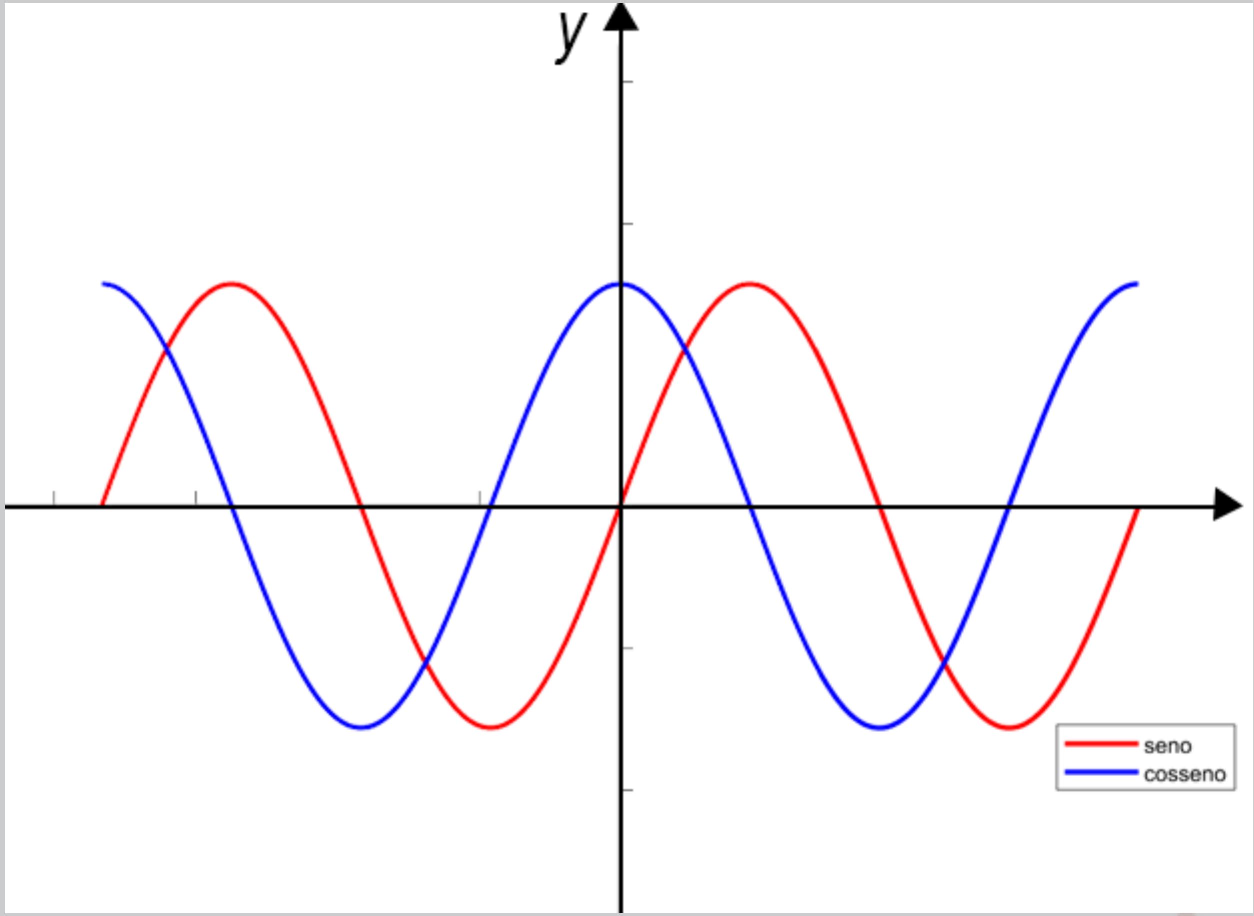
. $\boldsymbol{f(x) = sen(x)}$

. $\boldsymbol{g(x) = cos(x)}$

. $\boldsymbol{D(f) = \mathbb{R} = D(g)}$

. $\boldsymbol{Im(f) = [-1, 1] = Im(g)}$

Gráfico



Tangente

. $f(x) = tg(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$

. $D(f) = \left\{x \in R: x \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi\right\}$

. $Im(f) = \mathbb{R}$

. **Período:** π

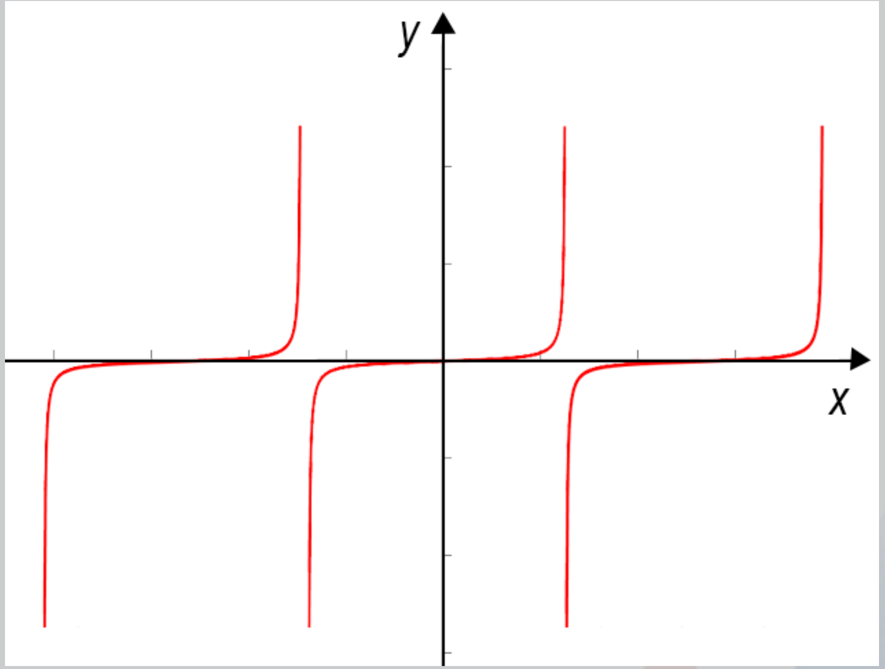
Tangente

. $f(x) = tg(x)$

. $D(f) = \left\{x \in R : x \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi\right\}$

. $Im(f) = \mathbb{R}$

. **Período:** π



Função Composta

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções reais, tais que

$$f: A \to B \text{ e } g: C \to D$$

Se $Im(f) \subset D(g)$, ou seja, $B \subset C$, a função que pode ser calculada através da expressão $g(f(x))$ é denominada função composta $g \circ f(x)$.

Exemplo - Composta

Sejam $f(x) = \cos(x)$ **e** $g(h) = 2h$**.**

$D(f) = \mathbb{R}$ **e** $Im(f) = [-1, 1]$

$D(g) = \mathbb{R} = Im(g)$

$$gof = g\big(f(x)\big) = g\big(cos(x)\big) = 2cos(x)$$

$$fog = f\big(g(x)\big) = f(2x) = cos(2x)$$

CÁLCULO I

Introdução ao Estudo de Funções de uma Variável