CÁLCULO I

O Teorema de Taylor

Fórmula de Taylor

Objetivo

Aproximar localmente funções deriváveis até ordem n, da melhor maneira possível, através de polinômios de ordem n.

- **Erro de Aproximação.**

Polinômio de Taylor (ordem 1)

Seja f derivável até 1ª ordem em I e sejam x, $x_0 \in I$. O polinômio:

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

denomina-se polinômio de Taylor de ordem 1, de f, em volta de x_0.

Polinômio de Taylor (ordem 1)

Exemplo

Utilizando o polinômio de Taylor de ordem 1, em volta de $x_0 = 1$, avalie o valor de $\ln 1,03$.

Polinômio de Taylor (ordem 1)

Exemplo

Utilizando o polinômio de Taylor de ordem 1, em volta de $x_0 = 1$, avalie o valor de $\ln 1,03$.

$$P(x) = f(1) + f'(1)(x - 1)$$

Polinômio de Taylor (ordem 1)

$$P(x) = f(1) + f'(1)(x - 1)$$

$$f(1) = \ln 1 = 0$$

$$f'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$P(x) = (x - 1) \rightarrow P(1{,}03) = 0{,}03$$

Polinômio de Taylor (ordem 1)

$$\boldsymbol{P(x) = f(1) + f'(1)(x-1)}$$

$$\boldsymbol{f(1) = \ln 1 = 0}$$

$$\boldsymbol{f'(1) = \frac{1}{1} = 1}$$

$$\boldsymbol{P(x) = (x-1) \rightarrow P(1,03) = 0,03}$$

Polinômio de Taylor (ordem 1)

Erro

$$|f(1,03) - P(1,03)| = 0,000441 = 4,41 \times 10^{-4}$$

Polinômio de Taylor (ordem 2)

Seja f derivável até 2ª ordem em I e sejam x, $x_0 \in I$. O polinômio:

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

denomina-se polinômio de Taylor de ordem 2, de f, em volta de x_0.

Polinômio de Taylor (ordem 2)

Exemplo

Utilizando o polinômio de Taylor de ordem 2, em volta de $x_0 = 1$, avalie o valor de $\ln 1,03$.

$$P(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2$$

Polinômio de Taylor (ordem 2)

$$P(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2$$

$$f(1) = \ln 1 = 0$$

$$f'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$f''(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$$

Polinômio de Taylor (ordem 2)

$$\boldsymbol{P(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2}$$

$$\boldsymbol{P(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2}$$

$$\boldsymbol{P(1,03) = 0,02955}$$

Polinômio de Taylor (ordem 2)

Erro

$$|f(1,03) - P(1,03)| = 0,000008802 = 8,8 \times 10^{-6}$$

Polinômio de Taylor (ordem n)

Seja f derivável até a ordem n em I e sejam x, $x_0 \in$ I. O polinômio:

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

denomina-se polinômio de Taylor de ordem n, de f, em volta de x_0.

Polinômio de Taylor (ordem 3)

Exemplo

Utilizando o polinômio de Taylor de ordem 3, em volta de $x_0 = 1$, avalie o valor de $\ln 1,03$.

$$P(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 +$$

$$+\frac{f'''(1)}{6}(x-1)^3$$

Polinômio de Taylor (ordem 3)

$$P(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{6}(x-1)^3$$

$$f(1) = \ln 1 = 0$$

$$f'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$f''(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$$

$$f'''(1) = \frac{2}{1^3} = 2$$

Polinômio de Taylor (ordem 3)

$$P(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{6}(x-1)^3$$

$$P(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{6}(x-1)^3$$

$$P(1,03) = 0,029559$$

Polinômio de Taylor (ordem 3)

Erro

$$|f(1,03) - P(1,03)| = 0,000000198 = 1,98 \times 10^{-7}$$

CÁLCULO I

O Teorema de Taylor