CÁLCULO I

Técnicas de Integração
Parte III

Técnicas de Integração

Mudança de Variável

$$\int f(x)\,dx$$

$$x = \varphi(u) \rightarrow dx = \varphi'(u)du$$

$$\int f(x)\,dx = \int f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)du$$

Técnicas de Integração

Exemplo 1

$$\int x^2(x-1)^{10}dx$$

Técnicas de Integração

Exemplo 1

$$\int x^2(x-1)^{10}dx$$

$$x - 1 = u \rightarrow x = u + 1 \rightarrow dx = du$$

$$\int x^2(x-1)^{10}dx = \int (u+1)^2 u^{10} du$$

Técnicas de Integração

Exemplo 1

$$\int x^2(x-1)^{10}dx$$

$$x-1=u \to x=u+1 \to dx=du$$

$$\int x^2(x-1)^{10}dx = \int (u+1)^2u^{10}du$$

Técnicas de Integração

Exemplo 1

$$\int x^2(x-1)^{10}dx = \int (u+1)^2 u^{10} du =$$

$$\int (u^2+2u+1)u^{10}du = \int u^{12}+2u^{11}+u^{10}du$$

Técnicas de Integração

Exemplo 1

$$\int x^2(x-1)^{10}dx = \frac{u^{13}}{13} + \frac{u^{12}}{6} + \frac{u^{11}}{11} + c =$$

$$\frac{(x-1)^{13}}{13} + \frac{(x-1)^{12}}{6} + \frac{(x-1)^{11}}{11} + c$$

Técnicas de Integração

Exemplo 1

$$\int x^2(x-1)^{10}dx = \frac{u^{13}}{13} + \frac{u^{12}}{6} + \frac{u^{11}}{11} + c =$$

$$\frac{(x-1)^{13}}{13} + \frac{(x-1)^{12}}{6} + \frac{(x-1)^{11}}{11} + c$$

Técnicas de Integração

Exemplo 2

$$\int x^2\sqrt{x-1}dx$$

$$x-1=u \rightarrow x=u+1 \rightarrow dx=du$$

$$\int x^2\sqrt{x-1}dx=\int (u+1)^2u^{\frac{1}{2}}du$$

Técnicas de Integração

Exemplo 2

$$\int x^2\sqrt{x-1}\,dx$$

$$x - 1 = u \rightarrow x = u + 1 \rightarrow dx = du$$

$$\int x^2\sqrt{x-1}\,dx = \int (u+1)^2 u^{\frac{1}{2}}\,du$$

Técnicas de Integração

Exemplo 2

$$\int x^2\sqrt{x-1}dx$$

$$x-1=u \rightarrow x=u+1 \rightarrow dx=du$$

$$\int x^2\sqrt{x-1}dx=\int (u+1)^2u^{\frac{1}{2}}du$$

Técnicas de Integração

Exemplo 2

$$\int x^2\sqrt{x-1}dx = \int (u+1)^2 u^{\frac{1}{2}} du =$$

$$\int \left(u^2+2u+1\right)u^{\frac{1}{2}}\, du = \int u^{\frac{5}{2}} + 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\, du$$

Técnicas de Integração

Exemplo 2

$$\int x^2\sqrt{x-1}\,dx = \frac{2u^{\frac{7}{2}}}{7} + \frac{4u^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} + c =$$

$$\frac{2\sqrt{(x-1)^7}}{7} + \frac{4\sqrt{(x-1)^5}}{5} + \frac{2\sqrt{(x-1)^3}}{3} + c$$

Técnicas de Integração

Exemplo 2

$$\int x^2\sqrt{x-1}dx = \frac{2u^{\frac{7}{2}}}{7} + \frac{4u^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} + c =$$

$$\frac{2\sqrt{(x-1)^7}}{7} + \frac{4\sqrt{(x-1)^5}}{5} + \frac{2\sqrt{(x-1)^3}}{3} + c$$

Técnicas de Integração

Exemplo 3

$$\int_1^2 x^2\sqrt{x-1}\,dx$$

Técnicas de Integração

Exemplo 3

$$\int_1^2 x^2\sqrt{x-1}dx$$

$$x-1=u \rightarrow x=1, u=0; x=2, u=1$$

$$\int_1^2 x^2\sqrt{x-1}dx = \int_0^1 u^{\frac{5}{2}} + 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\, du$$

Técnicas de Integração

Exemplo 3

$$\left[\frac{2\sqrt{(x-1)^7}}{7} + \frac{4\sqrt{(x-1)^5}}{5} + \frac{2\sqrt{(x-1)^3}}{3}\right]_1^2 =$$

$$\frac{2}{7} + \frac{4}{5} + \frac{2}{3} = \frac{30 + 84 + 70}{105} = \frac{184}{105}$$

Técnicas de Integração

Exemplo 3

$$\left[\frac{2u^{\frac{7}{2}}}{7}+\frac{4u^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}+\right]_0^1=$$

$$\frac{2}{7}+\frac{4}{5}+\frac{2}{3}=\frac{30+84+70}{105}=\frac{184}{105}$$

Técnicas de Integração

Exemplo 4

$$\int \sqrt{1 - x^2}\,dx$$

Técnicas de Integração

Identidades Trigonométricas

- $\mathbf{sen}^2 x + \mathbf{cos}^2 x = 1$
- $\mathbf{sec}^2 x - \mathbf{tg}^2 x = 1$
- $\mathbf{cosec}^2 x - \mathbf{cotg}^2 x = 1$

Técnicas de Integração

Identidades Trigonométricas

- $\boxed{\mathbf{sen}^2 x + \mathbf{cos}^2 x = 1}$

$\mathbf{cos}^2 x = 1 - \mathbf{sen}^2 x$

- $\mathbf{sec}^2 x - \mathbf{tg}^2 x = 1$
- $\mathbf{cosec}^2 x - \mathbf{cotg}^2 x = 1$

Técnicas de Integração

Exemplo 4

$$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

$$x = \operatorname{sen} u, u \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow dx = \cos u \, du$$

Técnicas de Integração

Exemplo 4

$$\int \sqrt{1 - x^2}dx$$

$$x = \operatorname{sen} u, u \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow dx = \cos u \, du$$

$$\int \sqrt{1 - x^2}dx = \int \sqrt{\cos^2 u} \cos u \, du$$

Técnicas de Integração

Exemplo 4

$$\int \sqrt{1 - x^2}dx = \int \sqrt{\cos^2 u} \cos u \, du =$$

$$\int \cos^2 u \, du = \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2u \, du =$$

$$\frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + c$$

Técnicas de Integração

Exemplo 4

$$\int \sqrt{1 - x^2}\,dx = \int \sqrt{\cos^2 u}\,\cos u\,du =$$

$$\int \cos^2 u\,du = \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2u\,du =$$

$$\frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + c$$

Técnicas de Integração

Exemplo 4

$$\boldsymbol{sen(a+b) = sen\,a\cos b + sen\,b\cos a}$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\boxed{\operatorname{sen} 2u} + c$$

Técnicas de Integração

Exemplo 4

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + c$$

$$= \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\operatorname{sen} u \cos u + c$$

Técnicas de Integração

Exemplo 4

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + c$$

$$= \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\operatorname{sen} u \cos u + c$$

$$\boxed{x = \operatorname{sen} u}$$

Técnicas de Integração

Exemplo 4

$$\int \sqrt{1 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + c$$

$$= \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\operatorname{sen} u \cos u + c$$

$\boxed{u = \operatorname{arc\,sen} x}$ $\boxed{x = \operatorname{sen} u}$

Técnicas de Integração

Exemplo 4

$$\int \sqrt{1 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + c$$

$$\boxed{\cos u = \sqrt{1 - x^2}}$$

$$= \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\operatorname{sen} u \cos u + c$$

$$\boxed{u = \operatorname{arc\,sen} x} \qquad \boxed{x = \operatorname{sen} u}$$

Técnicas de Integração

Exemplo 4

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen} x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c$$

$$x = \operatorname{sen} u,\ u \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow x \in \left]-1, 1\right[$$

Técnicas de Integração

Exemplo 4

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen} x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c$$

$$x = \operatorname{sen} u, u \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow x \in \left]-1, 1\right[$$

CÁLCULO I

Técnicas de Integração
Parte III