CÁLCULO I

Máximos e Mínimos de Uma Função

Máximos e Mínimos

Definição 1

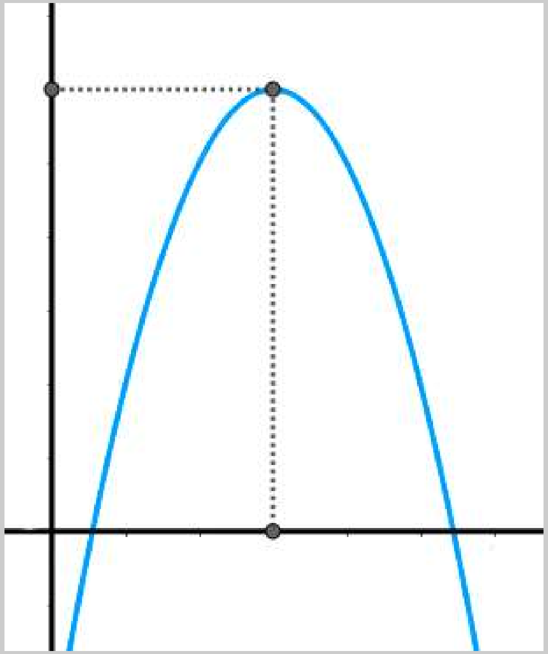
Seja $p \in D(f)$.

i. **Dizemos que p é ponto máximo global de f se, para todo $x \in D(f)$, $f(x) \leq f(p)$.**

ii. **Dizemos que p é ponto mínimo global de f se, para todo $x \in D(f)$, $f(x) \geq f(p)$.**

Máximos e Mínimos

Exemplo



Máximos e Mínimos

Definição 2

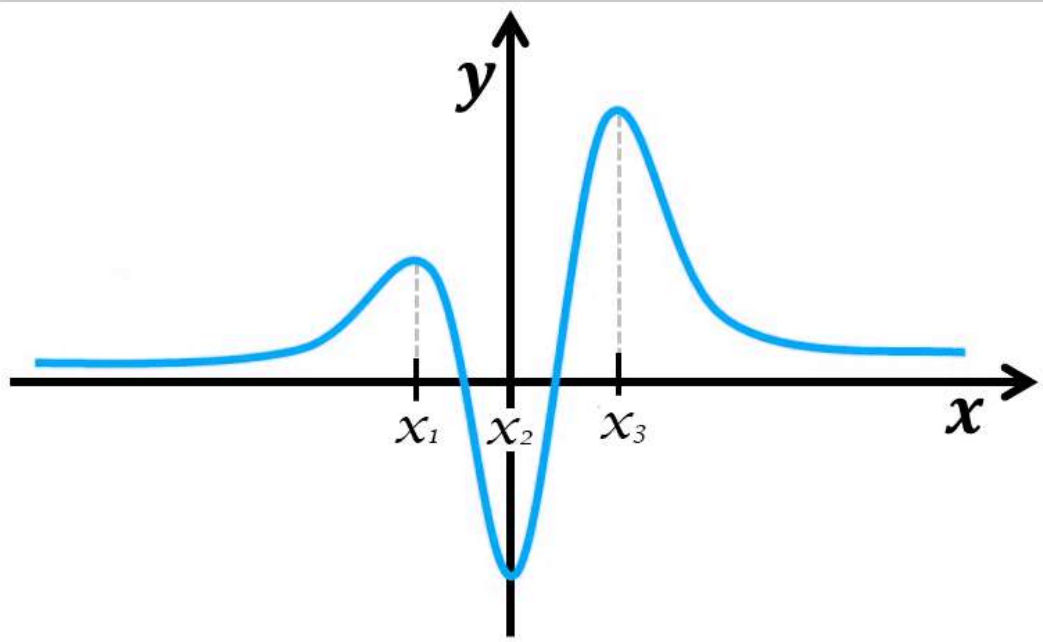
Seja $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{I}, \boldsymbol{I} \in \boldsymbol{D}(\boldsymbol{f})$.

i. **Dizemos que $\boldsymbol{p}$ é ponto máximo local de $\boldsymbol{f}$ se, para todo $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{p})$.**

ii. **Dizemos que $\boldsymbol{p}$ é ponto mínimo local de $\boldsymbol{f}$ se, para todo $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{p})$.**

Máximos e Mínimos

Exemplo



Máximos e Mínimos

Teorema 1

Seja f derivável em p. Uma condição necessária para que p seja máximo ou mínimo local é que $f'(p) = 0$.

Chamamos p de ponto crítico.

Máximos e Mínimos

Teorema 2

Seja f derivável de 2ª ordem em p e contínua em I, $p \in I$.

i. $f'(p) = 0$ **e** $f''(p) > 0$ **então** p **é mínimo local.**

ii. $f'(p) = 0$ **e** $f''(p) < 0$ **então** p **é máximo local.**

Máximos e Mínimos

Exemplo

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ ou } x = 1.$$

Máximos e Mínimos

Exemplo

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0 \leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ ou } x = 1.$$

Máximos e Mínimos

$f''(x) = 6x - 4$

$f''(1) = 6 \cdot 1 - 4 = 2 > 0 \rightarrow$ **ponto de mínimo**

$f''\left(\frac{1}{3}\right) = 6 \cdot \frac{1}{3} - 4 = -2 < 0 \rightarrow$ **ponto de máximo**

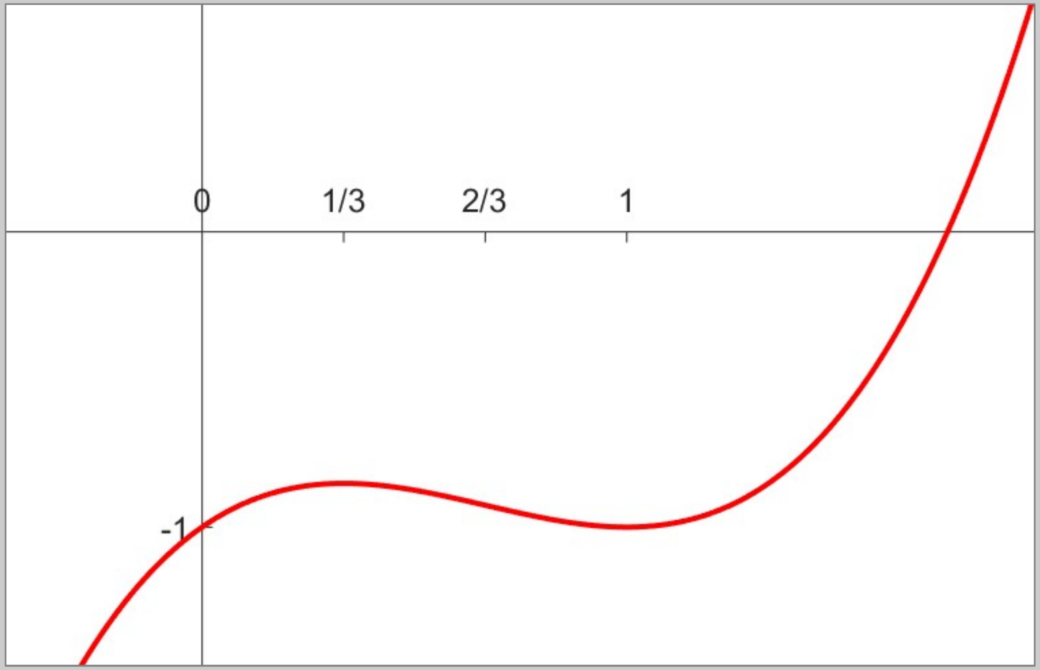
Máximos e Mínimos

$$f''(x) = 6x - 4$$

$$f''(1) = 6 \cdot 1 - 4 = 2 > 0 \rightarrow$$ **ponto de mínimo**

$$f''\left(\frac{1}{3}\right) = 6 \cdot \frac{1}{3} - 4 = -2 < 0 \rightarrow$$ **ponto de máximo**

Máximos e Mínimos



Máximos e Mínimos

Exemplo

$$f(x) = sen(x) + cos(x), x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$f'(x) = cos(x) - sen(x)$$

$$cos(x) - sen(x) = 0 \rightarrow cos(x) = sen(x)$$

$x = \frac{\pi}{4}$ é ponto crítico.

Máximos e Mínimos

Exemplo

$$f(x) = sen(x) + cos(x), x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$f'(x) = cos(x) - sen(x)$$

$$cos(x) - sen(x) = 0 \rightarrow cos(x) = sen(x)$$

$x = \frac{\pi}{4}$ é ponto crítico.

Máximos e Mínimos

Exemplo

$$f(x) = sen(x) + cos(x), x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$f'(x) = cos(x) - sen(x)$

$cos(x) - sen(x) = 0 \rightarrow cos(x) = sen(x)$

$x = \frac{\pi}{4}$ é ponto crítico.

Máximos e Mínimos

$$f'(x) = cos(x) - sen(x)$$

$$f''(x) = -sen(x) - cos(x)$$

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -sen\left(\frac{\pi}{4}\right) - cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1 - 1 = -2 < 0.$$

$x = \frac{\pi}{4}$ é ponto de máximo local.

Máximos e Mínimos

$$f'(x) = cos(x) - sen(x)$$

$$f''(x) = -sen(x) - cos(x)$$

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -sen\left(\frac{\pi}{4}\right) - cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} < 0.$$

$x = \frac{\pi}{4}$ é ponto de máximo local.

Máximos e Mínimos

Exemplo

Uma lata cilíndrica foi feita para receber 1 litro de suco. Quais as dimensões (em cm) da lata que minimizarão os custos de compra do metal?

Máximos e Mínimos

Vamos minimizar a área do metal utilizado para a produção da lata.

$$V = \pi r^2 h = 1000\ cm^3$$

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi h$$

Máximos e Mínimos

Vamos minimizar a área do metal utilizado para a produção da lata.

$$V = \pi r^2 h = 1000\ cm^3$$

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi h$$

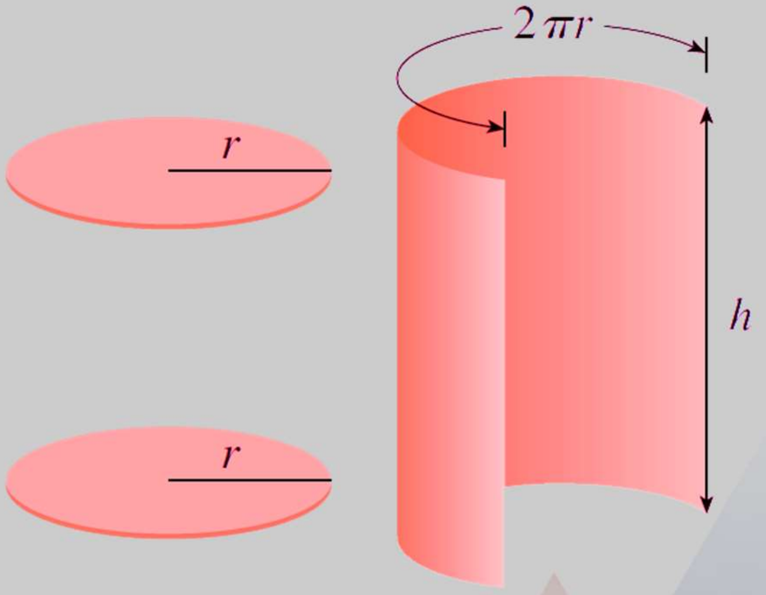
Máximos e Mínimos

Vamos minimizar a área do metal utilizado para a produção da lata.

$$V = \pi r^2 h = 1000\ cm^3$$

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$



Máximos e Mínimos

$$A \;=\; 2\pi r^2 + 2\pi r h \rightarrow A = 2\pi r^2 + 2\pi r\,\frac{1000}{\pi r^2}$$

$$A = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4(\pi r^3 - 500)}{r^2}$$

Ponto crítico: $\pi r^3 - 500 = 0 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$

Máximos e Mínimos

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h \rightarrow A = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1000}{\pi r^2}$$

$$A = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4(\pi r^3 - 500)}{r^2}$$

Ponto crítico: $\pi r^3 - 500 = 0 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$

Máximos e Mínimos

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h \rightarrow A = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1000}{\pi r^2}$$

$$A = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4(\pi r^3 - 500)}{r^2}$$

Ponto crítico: $\pi r^3 - 500 = 0 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$

Máximos e Mínimos

$$A'(r) = \frac{4(\pi r^3 \ - 500)}{r^2}$$

$$A''(r) = \frac{12\pi r^4 - 8\pi r^4 + 4000r}{r^4} = 4\pi + \frac{4000}{r^3}$$

Máximos e Mínimos

$$A''\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right) = 4\pi + \frac{4000}{\frac{500}{\pi}} = 4\pi + 8\pi = 12\pi > 0$$

Logo, é ponto de mínimo. Então:

$$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \text{ e } h = \frac{1000}{\pi \sqrt[3]{\left(\frac{500}{\pi}\right)^2}}$$

Máximos e Mínimos

$$A''\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right) = 4\pi + \frac{4000}{\frac{500}{\pi}} = 4\pi + 8\pi = 12\pi > 0$$

Logo, é ponto de mínimo. Então:

$$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \text{ e } h = \frac{1000}{\pi\sqrt[3]{\left(\frac{500}{\pi}\right)^2}}.$$

CÁLCULO I

Máximos e Mínimos de Uma Função