CÁLCULO I

Limites

Propriedades do Limite

Seja $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$ **e assumindo** $\lim_{x \to a} \boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{A}$ **e** $\lim_{x \to a} \boldsymbol{g(x)} = \boldsymbol{B}$**,**

temos:

- $\lim_{x \to a} \boldsymbol{f(x) + g(x) = A + B}$
- $\lim_{x \to a} \boldsymbol{c \cdot f(x) = c \cdot A}$
- $\lim_{x \to a} \boldsymbol{f(x) \cdot g(x) = A \cdot B}$
- $\lim_{x \to a} \frac{\boldsymbol{f(x)}}{\boldsymbol{g(x)}} = \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}}$**, desde que** $\boldsymbol{B \neq 0}$**.**

Propriedades do Limite

Exemplo

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 + 1}{5} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{5} \cdot (x^2 + 1) = \frac{1}{5} \cdot 10 = 2$$

- $\lim_{x \to 1} 3x^5 + 4x = \lim_{x \to 1} 3x^5 + \lim_{x \to 1} 4x = 3 + 4 = 7$

Teorema do Confronto/Sanduíche

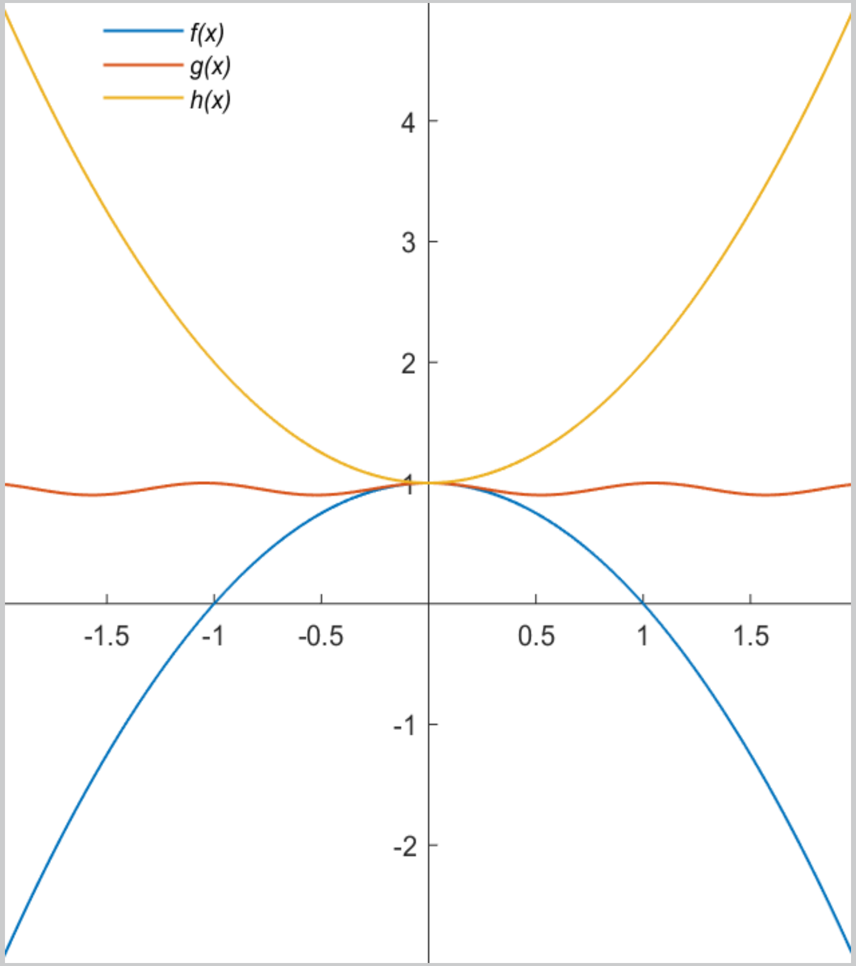
Sejam f, g e h três funções tais que:

$$\boldsymbol{f(x) \leq g(x) \leq h(x), x \neq a}.$$

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L = \lim\limits_{x \to a} h(x)$, então

$$\lim_{x \to a} \boldsymbol{g(x) = L}.$$

Teorema do Confronto/Sanduíche



Teorema do Confronto - Consequência

Sejam duas funções f e g com mesmo

domínio, tais que, $\lim_{x \to p} f(x) = 0$ e $g(x)$ é uma

função limitada, ou seja, $|g(x)| \leq M, M > 0$.

Então:

$$\lim_{x \to p} f(x) \cdot g(x) = 0$$

Teorema do Confronto - Consequência

Exemplo

$$\lim_{x \to 0} x \cdot cos(x)$$

Teorema do Confronto - Consequência

Exemplo

$$\lim_{x \to 0} x \cdot cos(x) = 0$$

0

Limitada entre 1 e -1

Limite Fundamental

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} = 1}$$

Exemplo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\ 3x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{3}{3} \cdot \frac{sen\ 3x}{x} = \lim_{x \to 0} 3 \cdot \frac{sen\ 3x}{3x} = 3$$

Limite Fundamental

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\mathbf{sen}\ \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}} = \mathbf{1}}$$

Exemplo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathbf{sen}\ 3x}{\boldsymbol{x}} =$$

Limite Fundamental

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\boldsymbol{sen\ x}}{\boldsymbol{x}} = \mathbf{1}}$$

Exemplo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\ 3x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{3}{3} \cdot \frac{sen\ 3x}{x} =$$

Limite Fundamental

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\,x}{x} = 1$$

Exemplo:

$$3x = u$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\,3x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{3}{3} \cdot \frac{sen\,3x}{x} = \lim_{x \to 0} 3 \cdot \frac{sen\,3x}{3x} = 3$$

Propriedades do Limite

Seja $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$ e assumindo $\lim_{x \to +\infty} \boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{A}$ e $\lim_{x \to +\infty} \boldsymbol{g(x)} = \boldsymbol{B}$, temos:

- $\lim_{x \to +\infty} \boldsymbol{f(x) + g(x)} = \boldsymbol{A + B}$
- $\lim_{x \to +\infty} \boldsymbol{c \cdot f(x)} = \boldsymbol{c \cdot A}$
- $\lim_{x \to +\infty} \boldsymbol{f(x) \cdot g(x)} = \boldsymbol{A \cdot B}$
- $\lim_{x \to +\infty} \boldsymbol{\frac{f(x)}{g(x)}} = \boldsymbol{\frac{A}{B}}$, **desde que $\boldsymbol{B \neq 0}$.**

Propriedades do Limite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^5 + x^4 + 1}{3x^5 + x - 1} = ??$$

Propriedades do Limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5 + x^4 + 1}{3x^5 + x - 1} = ??$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5\left[1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^5}\right]}{x^5\left[3 + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^5}\right]}$$

Propriedades do Limite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^5 + x^4 + 1}{3x^5 + x - 1} = ??$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^5 \left[1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^5}\right]}{x^5 \left[3 + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^5}\right]} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^5}}{3 + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^5}} = \frac{1}{3}$$

Mais propriedades no Infinito

Somas de Limites ($c \in \mathbb{R}$)

- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
- $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- $c + (+\infty) = +\infty$
- $c + (-\infty) = -\infty$

Mais propriedades no Infinito

Produtos de Limites ($c \in \mathbb{R}$)

- $(+\infty).(+\infty) = +\infty$
- $(-\infty).(-\infty) = +\infty$
- $c.(+\infty) = \begin{cases} +\infty, c > 0 \\ -\infty, c < 0 \end{cases}$
- $c.(-\infty) = \begin{cases} -\infty, c > 0 \\ +\infty, c < 0 \end{cases}$

Indeterminações

- $+\infty - (+\infty)$
- $-\infty - (-\infty)$
- $0 \cdot \infty$
- $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$
- $\mathbf{1}^{\infty}$, $\mathbf{0}^{\mathbf{0}}$, $\infty^{\mathbf{0}}$

Propriedades no Infinito

Exemplo

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - 3}{x + 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2\left(2 - \frac{3}{x^2}\right)}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to -\infty} x.2 = -\infty$$

Propriedades no Infinito

Exemplo

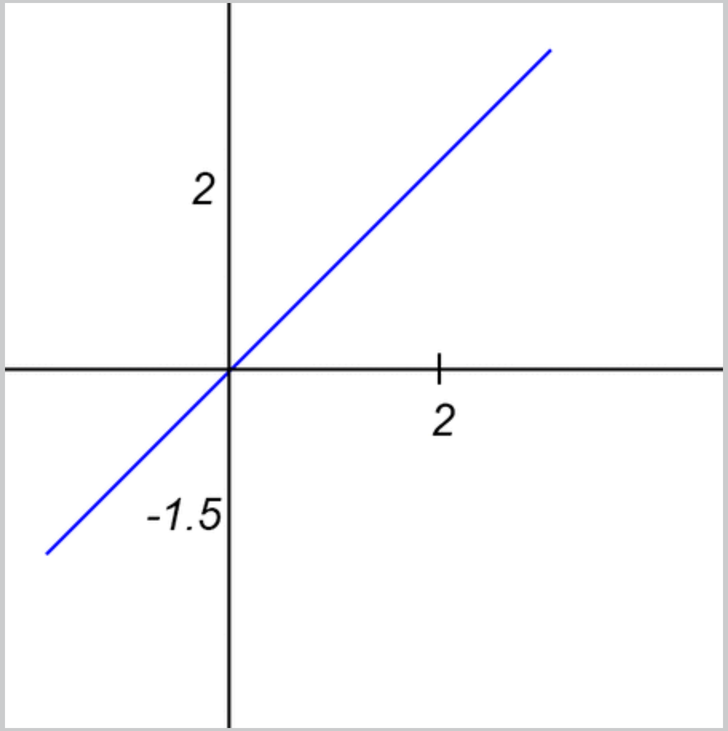
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - 3}{x + 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2\left(2 - \frac{3}{x^2}\right)}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to -\infty} x.2 = -\infty$$

Propriedades no Infinito

Exemplo

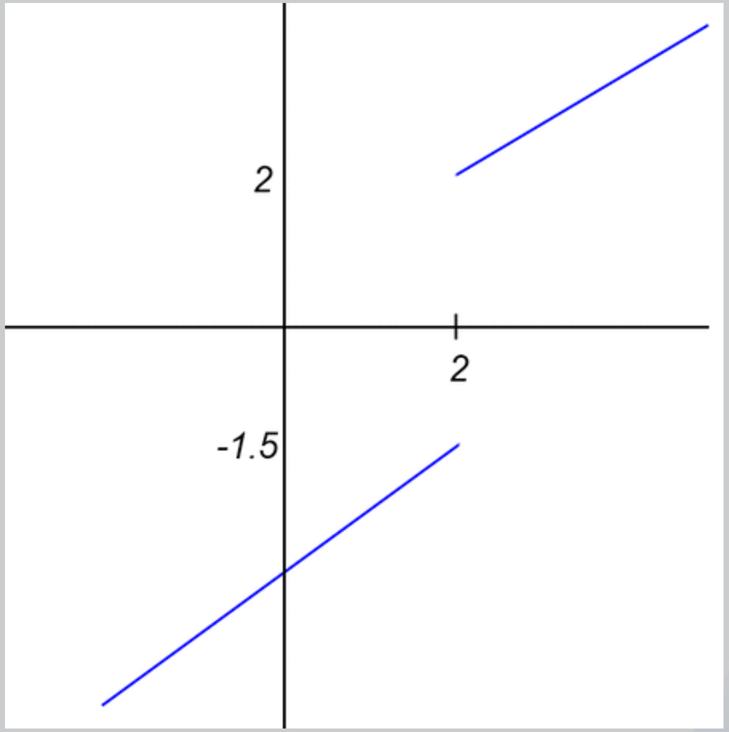
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - 3}{x + 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2\left(2 - \frac{3}{x^2}\right)}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to -\infty} x \,.\, 2 = -\infty$$

Limites Laterais



Caso 1

Limites Laterais



Caso 2

Teorema

O limite $\lim_{x \to a} f(x)$ **existe e é igual a** L **se, e somente se, os limites laterais** $\lim_{x \to a^+} f(x)$ **e** $\lim_{x \to a^-} f(x)$ **existirem e ambos forem iguais a** L**.**

Limites Laterais

Exemplo

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = ?$$

Limites Laterais

Exemplo

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} = ?$$

$$.\ x > 0 \ \rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$$

Limites Laterais

Exemplo

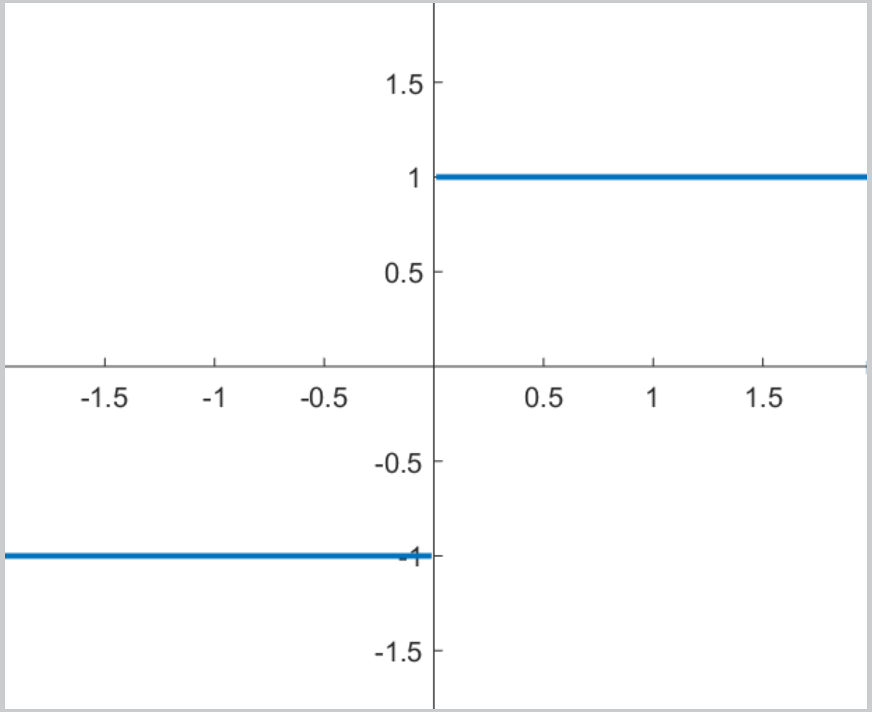
$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} = ?$$

$$.\ x > 0 \ \rightarrow \ \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$$

$$.\ x < 0 \rightarrow \lim_{x \to 0^-} \frac{|-x|}{-x} = \frac{x}{-x} = -1$$

Limites Laterais

Exemplo



CÁLCULO I

Limites