# CÁLCULO I

## Integrais Impróprias

# Integrais Impróprias

**Até agora consideramos integrais definidas da forma**

$$\int_a^b f(x)dx,$$

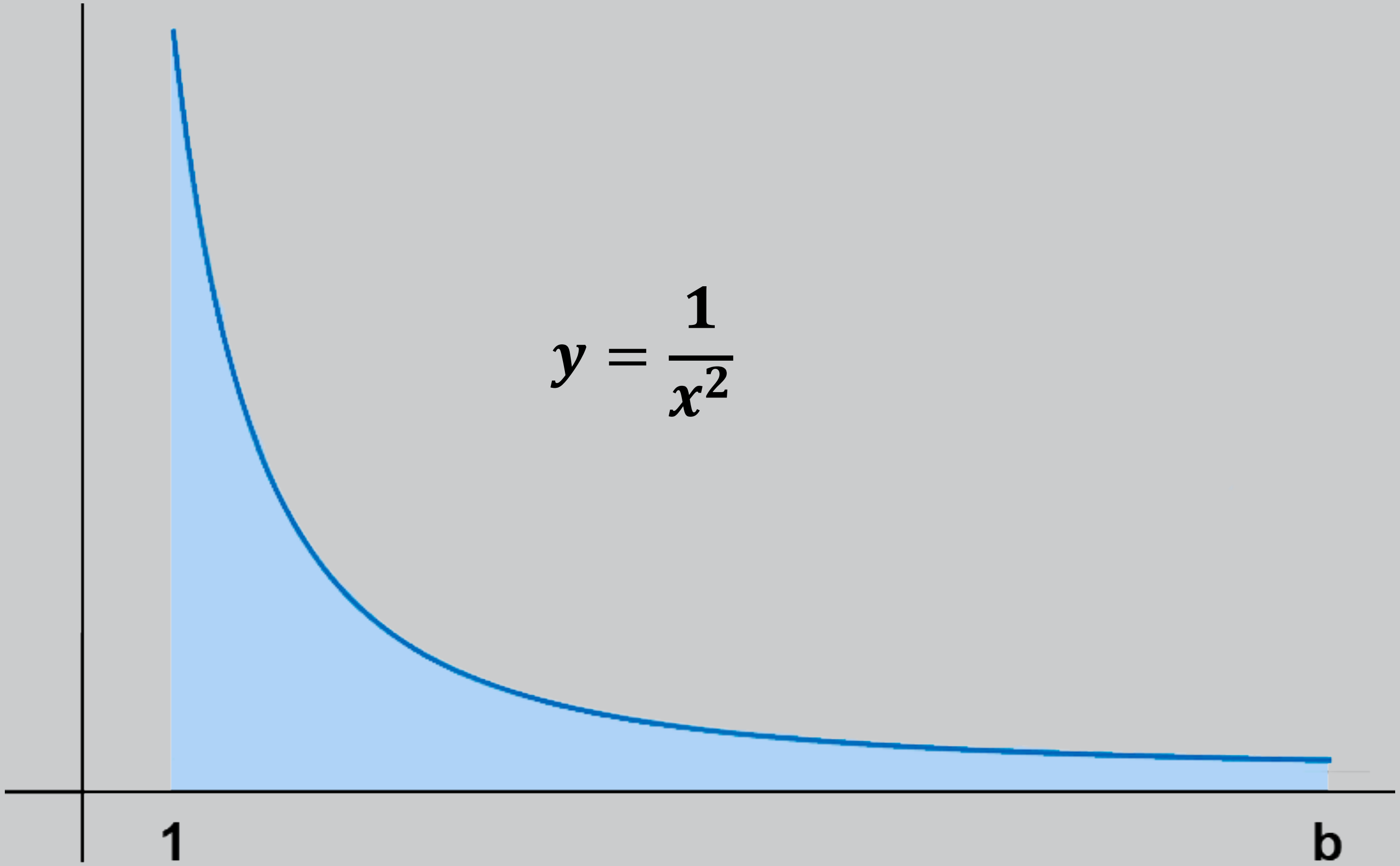
**onde o intervalo $[a, b]$ é limitado e $f$ é contínua em $[a, b]$.**

# Integrais Impróprias

**E quando $a$ e/ou $b$ são infinitos?**

**Quando o intervalo de integração é infinito, temos uma integral imprópria .**

# Integrais Impróprias



# Integrais Impróprias

**Vamos determinar a área limitada pela curva $y = \frac{1}{x^2}$, pelo eixo $x$ e pelas retas $x = 1$ e $x = b$.**

$$A(b) = \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = 1 - \frac{1}{b}$$

# Integrais Impróprias

**Como temos que:**

$$\lim_{b\to\infty} A(b) = \lim_{b\to\infty} 1 - \frac{1}{b} = 1,$$

**podemos afirmar que a área da região procurada é:**

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x^2}\,dx = 1.$$

# Integrais Impróprias

**Definição**

**Uma integral imprópria é chamada de convergente se o limite correspondente existe. Caso o limite não exista, então a integral é chamada de divergente.**

# Integrais Impróprias

**Teorema**

Se a integral imprópria $\int_1^\infty f(x)dx$ é convergente, então $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

**Condição necessária, mas não suficiente!**

# Integrais Impróprias

**Exemplo**

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx$$

- $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$
- **É divergente.**

# Integrais Impróprias

**Exemplo**

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \to \infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \to \infty} [\ln |x|]_{1}^{b} =$$

$$\lim_{b \to \infty} \ln b - \ln 1 = \infty$$

# Integrais Impróprias

**Teorema**

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$ é convergente $\Leftrightarrow \alpha > 1$

Já vimos o exemplo para $y = \frac{1}{x^2}$.

# Integrais Impróprias

**Teorema**

$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ é convergente $\Leftrightarrow \alpha > 1$

**Já vimos o exemplo para $y = \frac{1}{x^2}$ e $y = \frac{1}{x}$.**

# Integrais Impróprias

**Exemplo**

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

# Integrais Impróprias

## Exemplo

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[2\sqrt{x}\right]_1^b =$$

$$\lim_{b\to\infty} 2\sqrt{b} - 2 = \infty - 2 = \infty$$

# Integrais Impróprias

**Exemplo**

**Seja**

$$\int_0^{\infty} e^{-x}dx.$$

# Integrais Impróprias

**Exemplo**

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}[-e^{-x}]_{0}^{b} =$$

$$\lim_{b\to\infty} -\frac{1}{e^{b}} + 1 = 0 + 1 = 1.$$

# Integrais Impróprias

**Exemplo**

**Seja**

$$\int_{-\infty}^{0} e^{x} \cos x \, dx.$$

# Integrais Impróprias

## Exemplo

$$\int_{-\infty}^{0} e^{x} \cos x dx = \lim_{b \to -\infty} \int_{b}^{0} e^{x} \cos x dx$$

# Integrais Impróprias

**Exemplo**

$$\int e^{x} \cos x dx = \frac{e^{x}}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x)$$

# Integrais Impróprias

## Exemplo

$$\lim_{b \to -\infty} \int_b^0 e^x \cos x \, dx = \lim_{b \to -\infty} \left[ \frac{e^x}{2} (\text{sen } x + \cos x) \right]_b^0 =$$

$$\lim_{b \to -\infty} \frac{1}{2} - \left[ \frac{e^b}{2} (\text{sen } b - \cos b) \right] = \frac{1}{2}.$$

# CÁLCULO I

## Integrais Impróprias