# CÁLCULO I

## Derivada de Funções Inversas e Implícitas

# Funções Implícitas

$$\boldsymbol{y = \sqrt{x^2 + 2}}$$

$$\boldsymbol{y = x^2 + 3x}$$

$$\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{y = f(x)}$$

# Funções Implícitas

$$x^2 + y^2 = 16$$

$$x^2 + y^3 = 3xy$$

→ **Funções implícitas**

# Funções Implícitas

$$x^2 + y^2 = 16 \quad \Longrightarrow \quad y = \pm\sqrt{16 - x^2}$$

$$x^2 + y^3 = 3xy$$

# Funções Implícitas

$$x^2 + y^2 = 16$$

$$x^2 + y^3 = 3xy \qquad \longrightarrow \qquad y = ??$$

# Funções Implícitas

$$x^2 + y^2 = 16$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + y^2\right) = \frac{d}{dx}(16) \rightarrow \frac{d}{dx}\left(x^2\right) + \frac{d}{dx}\left(y^2\right) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(y^2\right) = \frac{d}{dy}\left(y^2\right)\frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$$

# Funções Implícitas

$$x^2 + y^2 = 16$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + y^2\right) = \frac{d}{dx}(16) \rightarrow \frac{d}{dx}\left(x^2\right) + \frac{d}{dx}\left(y^2\right) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(y^2\right) = \frac{d}{dy}\left(y^2\right)\frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$$

# Funções Implícitas

$$x^2 + y^2 = 16$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + y^2\right) = \frac{d}{dx}(16) \rightarrow \frac{d}{dx}\left(x^2\right) + \frac{d}{dx}\left(y^2\right) = 0$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(y^2\right) = \frac{d}{dy}\left(y^2\right)\frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}}$$

# Funções Implícitas

$$x^2 + y^2 = 16$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + y^2\right) = \frac{d}{dx}(16) \rightarrow \frac{d}{dx}\left(x^2\right) + \frac{d}{dx}\left(y^2\right) = 0$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

# Funções Implícitas

$$x^2 + y^3 = 3xy$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^3) = \frac{d}{dx}(3xy)$$

$$\frac{d}{dx}(y^3) = \frac{d}{dy}(y^3)\frac{dy}{dx} = 3y^2\frac{dy}{dx}$$

# Funções Implícitas

$$x^2 + y^3 = 3xy$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\right) + \frac{d}{dx}\left(y^3\right) = \frac{d}{dx}(3xy)$$

$$\frac{d}{dx}\left(y^3\right) = \frac{d}{dy}\left(y^3\right)\frac{dy}{dx} = 3y^2\frac{dy}{dx}$$

# Funções Implícitas

$$x^2 + y^3 = 3xy$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\right) + \frac{d}{dx}\left(y^3\right) = \frac{d}{dx}(3xy)$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(y^3\right) = \frac{d}{dy}\left(y^3\right)\frac{dy}{dx} = 3y^2\frac{dy}{dx}}$$

# Funções Implícitas

$$x^2 + y^3 = 3xy$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^3) = \frac{d}{dx}(3xy)$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(3xy) = 3y + 3x\frac{dy}{dx}}$$

# Funções Implícitas

$$x^2 + y^3 = 3xy$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\right) + \frac{d}{dx}\left(y^3\right) = \frac{d}{dx}(3xy)$$

$$2x + 3y^2\frac{dy}{dx} = 3y + 3x\frac{dy}{dx}$$

# Funções Implícitas

$$3y^2\frac{dy}{dx} - 3x\frac{dy}{dx} = 3y - 2x$$

$$\frac{dy}{dx}(3y^2 - 3x) = 3y - 2x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3y - 2x}{3y^2 - 3x}$$

# Funções Implícitas

$$3y^2\frac{dy}{dx} - 3x\frac{dy}{dx} = 3y - 2x$$

$$\frac{dy}{dx}\left(3y^2 - 3x\right) = 3y - 2x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3y - 2x}{3y^2 - 3x}$$

# Funções Implícitas

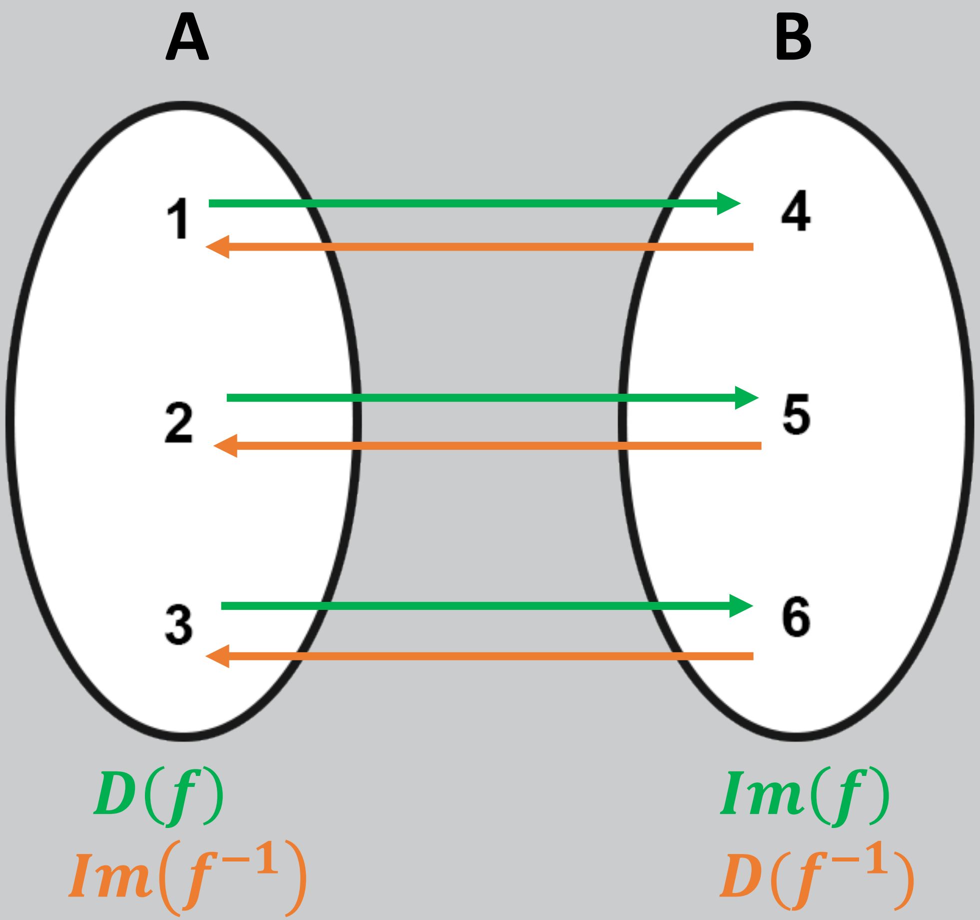
$$3y^2\frac{dy}{dx} - 3x\frac{dy}{dx} = 3y - 2x$$

$$\frac{dy}{dx}\left(3y^2 - 3x\right) = 3y - 2x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3y - 2x}{3y^2 - 3x}$$

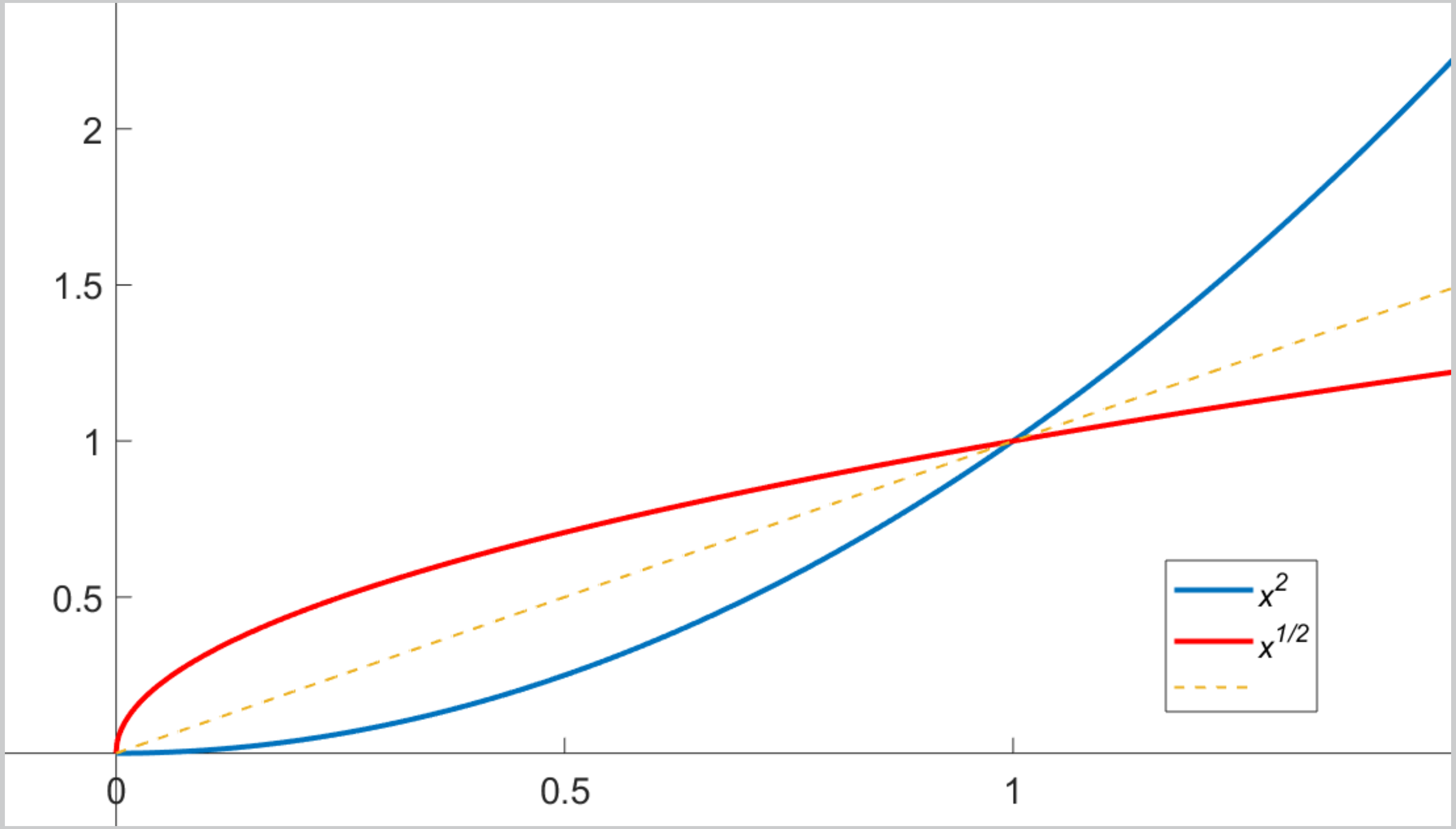
# Funções Inversas

**Seja $f: A \to B$ uma função bijetora. A função $f^{-1}: B \to A$ é chamada de inversa da função $f$, de maneira que $f(f^{-1}(y)) = y$ e $f^{-1}(f(x)) = x$.**

# Funções Inversas



# Funções Inversas



# Funções Inversas

## Teorema

**Seja $y = f(x)$ uma função definida em um intervalo $I$ e que admita uma inversa $x = g(y)$. Se $f'(x)$ existe e é diferente de zero em $I$, então $g = f^{-1}$ é derivável e vale:**

$$g'(y) = \frac{1}{f'[g(y)]}$$

# Funções Inversas

## Exemplos

$f(x) = 2x + 1$ **possui inversa** $g(y) = \frac{y}{2} - \frac{1}{2}$.

$f(g(y)) = y \to 2\left(\frac{y}{2} - \frac{1}{2}\right) + 1 = y - 1 + 1 = y$

# Funções Inversas

## Exemplos

$f(x) = 2x + 1$ possui inversa $g(y) = \frac{y}{2} - \frac{1}{2}$.

$$f\big(g(y)\big) = y \to 2\left(\frac{y}{2} - \frac{1}{2}\right) + 1 = y - 1 + 1 = y$$

# Funções Inversas

## Exemplos

$f(x) = 2x + 1$ possui inversa $g(y) = \frac{y}{2} - \frac{1}{2}$.

$$g'(y) = \frac{1}{2}$$

# Funções Inversas

**Exemplos**

$f(x) = x^3$ possui inversa $g(y) = \sqrt[3]{y}$.

$f(g(y)) = y \rightarrow (\sqrt[3]{y})^3 = y^{\frac{3}{3}} = y$

# Funções Inversas

## Exemplos

$f(x) = x^3$ **possui inversa** $g(y) = \sqrt[3]{y}$.

$$f\big(g(y)\big) = y \rightarrow (\sqrt[3]{y})^3 = y^{\frac{3}{3}} = y$$

# Funções Inversas

**Exemplos**

$f(x) = x^3$ possui inversa $g(y) = \sqrt[3]{y}$.

$$g'(y) = \frac{1}{3[g(y)]^2} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{y})^2}$$

# CÁLCULO I

## Derivada de Funções Inversas e Implícitas