Análise quantitativa sobre a descapitalização

Ulisses Morais
ulissesmorais27@gmail.com

9 de junho de 2023

Resumo

Muitos de nós pensam em aposentar-se e viver de renda passiva, oriunda dos investimentos e patrimônio que acumulamos ao longo da vida. Contudo, algumas questões que surgem de imediato, são: Quanto de patrimônio preciso acumular? Qual a rentabilidade necessária para me manter? Qual valor posso sacar mensalmente? O patrimônio acabará em algum momento? Se sim, em quanto tempo? Como patrimônio, renda passiva e juros se interrelacionam? Este estudo tem por objetivo responder tais questões para alguns contextos específicos. Para isso, serão empregadas algumas restrições e simplificações, a fim de facilitar o entendimento e utilizar uma matemática mais simples. Portanto, os cenários serão tratados de forma aproximada do que acontece na prática, mas cujos *insights* e resultados podem ser úteis no dia a dia do investidor ou planejador financeiro.

Conteúdo

1 Definição do cenário

Para realizarmos a análise, vamos inicialmente definir o cenário de interesse. Imagine que dispomos de um montante inicial de capital, do qual faremos retiradas periódicas mensais (em valor presente) ao longo do tempo. Sobre esse montante, incidirão as taxas de correção monetária e juro real.

Observe abaixo o fluxo de caixa representando esse cenário, com as respectivas entradas e saídas de capital. A conceituação do problema é razoavelmente simples e de fácil entendimento. No entanto, inferir como estas variáveis afetam-se mutuamente não é nada trivial.

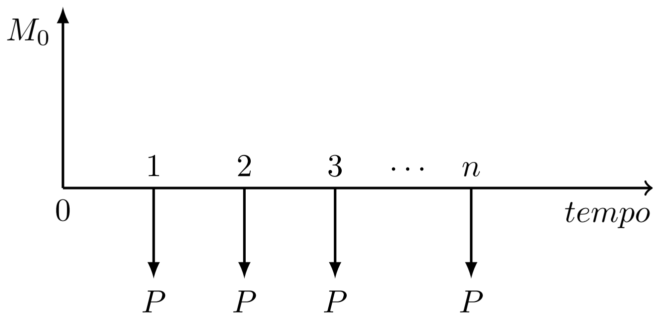

Figura 1: Representação do cenário em fluxo de caixa

2 Modelagem

A princípio, toda a modelagem será baseada levando os valores presentes para o futuro. Com isso, podemos deduzir uma relação de recorrência relativamente simples entre períodos subjacentes, da forma

$$M_n = M_{n-1}(1+f)(1+r) - P(1+f)^n, \tag{1}$$

sendo M_n o montante de capital no período n, M_{n-1} o montante de capital no período imediatamente anterior, f a correção monetária, r o juro real e P a retirada períodica. O objetivo aqui é encontrar uma equação explícita para o montante M_n, ou seja, não depender do valor do montante no período anterior.

Para isso, testar-se-ão valores de $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ em (1), no intuito de se encontrar um padrão. No início, com $n = 0$, temos apenas o montante M_0. Para $n = 1$ em (1), obtemos

$$\begin{aligned} M_1 &= M_0(1+f)(1+r) - P(1+f) \\ &= (1+f)\big[M_0(1+r) - P\big]. \end{aligned} \tag{2}$$

Para $n = 2$ em (1)

$$M_2 = M_1(1+f)(1+r) - P(1+f)^2, \tag{3}$$

e inserindo (2) em (3), resulta

$$
\begin{aligned}
M_2 &= \big[M_0(1+f)(1+r) - P(1+f)\big](1+f)(1+r) - P(1+f)^2 \\
&= (1+f)^2\left[M_0(1+r)^2 - P\big(1+(1+r)\big)\right].
\end{aligned} \tag{4}
$$

Finalmente, para $n = 3$ em (1) e rearranjando os termos,

$$
M_3 = (1+f)^3\left[M_0(1+r)^3 - P\left(1+(1+r)+(1+r)^2\right)\right]. \tag{5}
$$

Através dos resultados de (2), (4) e (5), podemos inferir a generalização de M_n, para $n \geq 1$, como

$$
M_n = (1+f)^n\left(M_0(1+r)^n - P\sum_{i=1}^{n}(1+r)^{i-1}\right). \tag{6}
$$

Observe que o termo de somatório constitui a soma dos termos de uma progressão geométrica S_n, com primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $q = (1+r)$. A soma dos n primeiros termos dessa PG é

$$
S_n = \frac{(1+r)^n - 1}{r}, \tag{7}
$$

e que substituindo (7) em (6), resulta na equação explícita

$$
M_n = \big((1+f)(1+r)\big)^n\left[M_0 - \frac{P}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right)\right]. \tag{8}
$$

3 Análise temporal

Obtida a equação que indica a variação do montante de capital ao longo do tempo, realizaremos algumas análises interessantes. Neste tópico, definiremos qual o tempo necessário para tê-lo completamente consumido.

Para tal, substituímos $M_n = 0$ em (8), resultando em

$$
\big((1+f)(1+r)\big)^T\left[M_0 - \frac{P}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^T}\right)\right] = 0. \tag{9}
$$

Resolvendo para o tempo de descapitalização T, obtemos

$$
T = -\frac{\ln\alpha}{\ln\gamma}, \tag{10}
$$

em que as variáveis α e γ são definidas como

$$
\alpha = 1 - \frac{M_0 r}{P} \qquad \text{e} \qquad \gamma = 1 + r.
$$

Pela condição de existência, o valor de α tem que ser sempre maior do que zero. Contudo, conforme esse valor aproxima-se de zero, o tempo de descapitalização tende ao infinito, ou seja, o montante de capital não acabará. Com isso, podemos resumir da seguinte forma:

$$
Mn = \begin{cases} \text{Diminui,} & \text{se } \alpha > 0 \\ \text{Constante,} & \text{se } \alpha = 0 \\ \text{Aumenta,} & \text{se } \alpha < 0 \end{cases} \tag{11}
$$

Para o caso especial em que a rentabilidade real é zero, fazendo com que o montante seja corrigido apenas pela inflação, basta calcular o limite

$$\begin{aligned} T|_{r=0} &= \lim_{r\to 0} T \\ &= \frac{M_0}{P}. \end{aligned} \tag{12}$$

4 Análise de sensibilidade

No tópico anterior, definimos o tempo de descapitalização para que o montante de capital seja nulo. No entanto, é igualmente importante sabermos como variações no montante inicial, retirada periódica e juro real afetam esse tempo, isto é, sua sensibilidade a tais fatores.

Utilizando o conceito de propagação de erros e ajustando-o para nosso caso, temos

$$\sigma_T^2 = \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^2 \sigma_r^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial M_0}\right)^2 \sigma_{M_0}^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)^2 \sigma_P^2, \tag{13}$$

sendo σ o desvio padrão. As derivadas parciais das três variáveis independentes são

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{M_0(1+r) - T\,(P - M_0 r)}{(1+r)(P - M_0 r)\ln(1+r)}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial T}{\partial M_0} = \frac{r}{(P - M_0 r)\ln(1+r)}, \tag{15}$$

$$\frac{\partial T}{\partial P} = \frac{M_0 r}{P\,(P - M_0 r)\ln(1+r)}. \tag{16}$$

Empregando as variáveis α e γ e substituindo-as em (14), (15) e (16), obtemos

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -T\left(\frac{1-\alpha}{\alpha\ln\alpha} + \frac{\gamma - 1}{\gamma\ln\gamma}\right)\frac{1}{r}, \tag{17}$$

$$\frac{\partial T}{\partial M_0} = -T\left(\frac{1-\alpha}{\alpha\ln\alpha}\right)\frac{1}{M_0}, \tag{18}$$

$$\frac{\partial T}{\partial P} = T\left(\frac{1-\alpha}{\alpha\ln\alpha}\right)\frac{1}{P}. \tag{19}$$

Por fim, inserindo (17), (18) e (19) em (13), conseguimos definir a variação do tempo de descapitalização em função das demais variações, conforme

$$\left(\frac{\sigma_T}{T}\right)^2 = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha\ln\alpha} + \frac{\gamma-1}{\gamma\ln\gamma}\right)^2\left(\frac{\sigma_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha\ln\alpha}\right)^2\left(\frac{\sigma_{M_0}}{M_0}\right)^2 + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha\ln\alpha}\right)^2\left(\frac{\sigma_P}{P}\right)^2. \tag{20}$$

4.1 Sensibilidade ao juro real

Para analisarmos a sensibilidade devido exclusivamente ao juro real, precisamos anular os efeitos oriundos dos demais fatores. Portanto, definimos $\sigma_{M_0} = 0$ e $\sigma_P = 0$ em (20), resultando em

$$\frac{\sigma_T}{T} = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha \ln \alpha} + \frac{1 - \gamma}{\gamma \ln \gamma} \right) \frac{\sigma_r}{r}. \tag{21}$$

Para valores moderados de juro real $|r| \leq 5\%$ a.m., γ fica consideravelmente próximo ao valor unitário. Dessa forma, utilizando a aproximação por série de Taylor $\ln \gamma \approx (\gamma - 1)$ em torno de $\gamma = 1$, e inserindo em (21), obtemos

$$\frac{\sigma_T}{T} \approx \Phi(\alpha) \frac{\sigma_r}{r}, \tag{22}$$

em que o fator corretivo $\Phi(\alpha)$ é definido como

$$\Phi(\alpha) = \frac{\alpha - 1}{\alpha \ln \alpha} - 1. \tag{23}$$

Plotando o gráfico do fator corretivo, conforme a figura 2, podemos observar que esse fator se aproxima de zero conforme α se aproxima do valor unitário e tem um crescimento acentuado para valores baixos de α. Um ponto relevante é que para valores de $\alpha \geq 0.29$, o fator corretivo tem efeito redutor sobre a variação do juro real, assumindo valores inferiores a 1. Todavia, para valores de $\alpha < 0.29$, o fator corretivo tem o efeito inverso, amplificando a variação do juro real e assumindo valores superiores à unidade.

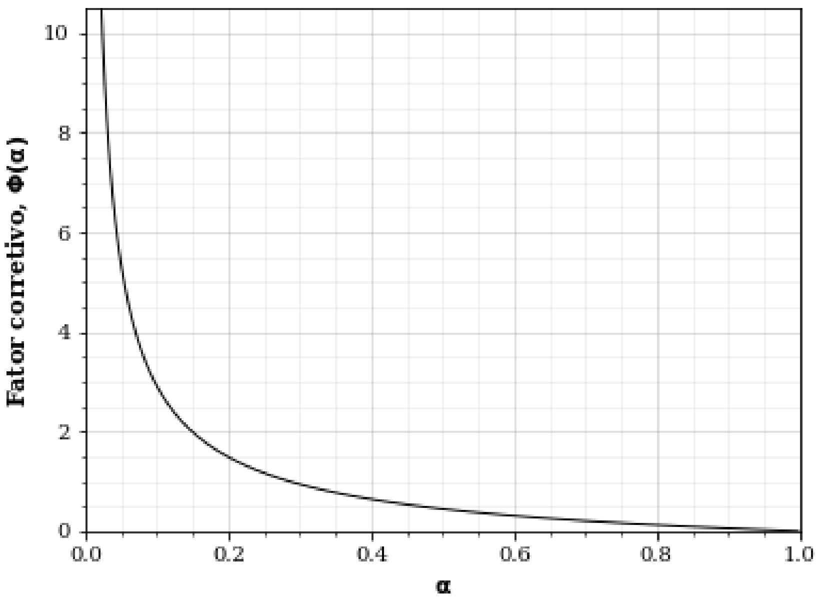

Figura 2: Gráfico do fator corretivo $\Phi(\alpha)$

4.2 Sensibilidade ao montante inicial e retirada periódica

Utilizando o mesmo raciocínio do tópico anterior e anulando os devidos fatores em (20), obtemos as sensibilidades em relação ao montante inicial e retirada periódica como

$$\frac{\sigma_T}{T} = \Gamma(\alpha)\frac{\sigma_{M_0}}{M_0}, \tag{24}$$

$$\frac{\sigma_T}{T} = -\Gamma(\alpha)\frac{\sigma_P}{P}, \tag{25}$$

em que o fator corretivo $\Gamma(\alpha)$ é definido como

$$\Gamma(\alpha) = \Phi(\alpha) + 1 = \frac{\alpha - 1}{\alpha \ln \alpha}. \tag{26}$$

Assim, plotando o gráfico deste fator corretivo, conforme a figura 3, nota-se um comportamento semelhante ao fator corretivo da figura 2. Contudo, observa-se que a curva está deslocada uma unidade acima, fazendo com que independentemente do valor de α, o fator corretivo sempre terá efeito amplificador sobre variações tanto do montante inicial, quanto da retirada periódica.

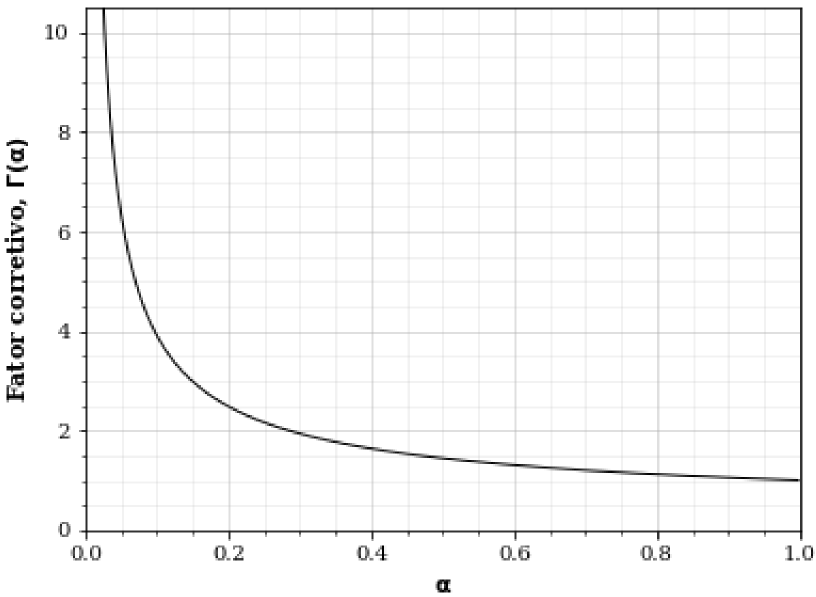

Figura 3: Gráfico do fator corretivo $\Gamma(\alpha)$

4.3 Comparação entre sensibilidades

Partindo dos resultados anteriores, podemos definir quais fatores (juro real, retirada periódica e montante inicial) são mais relevantes para o cenário em questão. Para tal finalidade, utilizaremos

$$R(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Phi(\alpha)}, \tag{27}$$

em que $R(\alpha)$ é a razão de sensibilidade. Para entendê-la mais a fundo, basta observarmos o gráfico apresentado na figura 4. Analisando-o, depreende-se que para qualquer valor de $\alpha \in]0,\ 1[$, a razão de sensibilidade é superior à unidade. Logo, variações de montante inicial e retirada periódica sempre causam efeitos mais pronunciados sobre o tempo de descapitalização do que o juro real. Ao final deste documento, em anexo, segue uma tabela com valores de referência para os fatores corretivos e razão de sensibilidade.

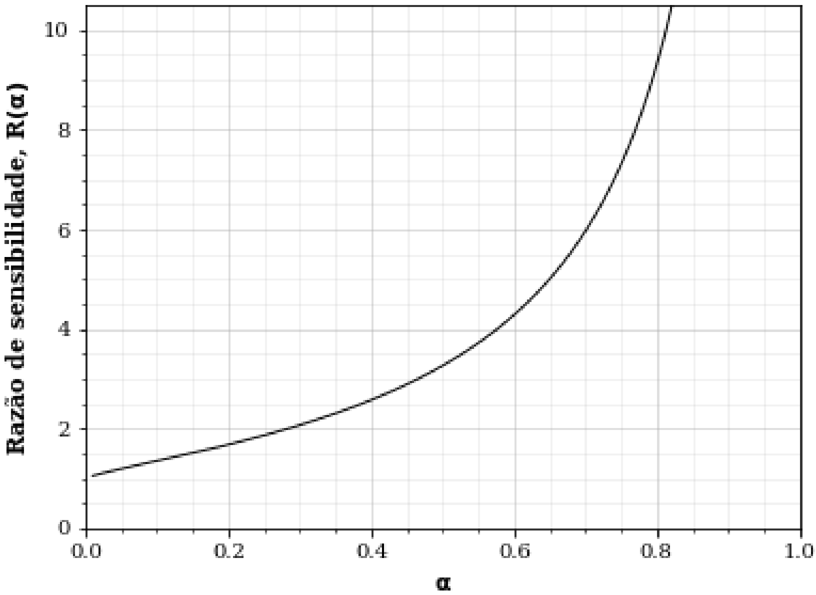

Figura 4: Gráfico da razão de sensibilidade

5 Títulos com pagamento de cupom de juros

Neste tópico, trabalharemos com o cenário em que o investidor aplicará seu capital em um título de renda fixa com pagamento periódico de cupom de juros. O objetivo aqui é demonstrar que a modelagem desenvolvida anteriormente também se aplica neste novo cenário.

Conforme abordado no tópico 1, partimos de um montante inicial M_0 que será corrigido pela inflação f e rentabilizado com uma taxa real de cupom de juros r. O equivalente em valor nominal atualizado $\widetilde{M_0}$ na data de compra será

$$\widetilde{M_0} = \beta_c \cdot M_0, \tag{28}$$

com β_c definido como

$$\beta_c = \frac{1}{cot_c},$$

em que a cot_c é a cotação de compra. Caso o investidor necessite de uma renda semestral R_s superior ao valor líquido do cupom a receber, terá que resgatar à valor de mercado uma parte do título para complementá-la. Dessa maneira, este valor a resgatar VR_n é dado por

$$VR_n = \beta_v \cdot \big(R_s(1+f)^n - cupom_n\big), \tag{29}$$

com β_v definido como

$$\beta_v = \frac{1}{cot_v},$$

em que a cot_v é a cotação de venda. Portanto, este valor resgatado corresponde a diferença entre a renda mensal R_s, corrigida pela inflação até o período n, e o cupom de juros a ser pago no mesmo período. O $cupom_n$ é expresso como

$$cupom_n = M_{n-1} \cdot (1+f)r, \tag{30}$$

em que M_{n-1} é o montante no período anterior e r a taxa do cupom semestral de juros. Portanto, definidos os parâmetros relevantes para a modelagem, podemos inferir a relação de recorrência como

$$M_n = M_{n-1} \cdot (1+f)(1+r) - VR_n - cupom_n. \tag{31}$$

Substituindo (29) e (30) em (31) e realizando algumas manipulações algébricas, obtemos

$$M_n = M_{n-1} \cdot (1+f)(1+r_{eq}) - \widetilde{P}(1+f)^n, \tag{32}$$

em que a taxa de cupom equivalente r_{eq} e a renda semestral ajustada $\widetilde{P}$ são definidas através das relações

$$r_{eq} = (1+r)(1+\lambda) - 1 \qquad \text{e} \qquad \widetilde{P} = \beta_v R_s,$$

em que λ é dado por

$$\lambda = (\beta_v - 1) \cdot \frac{r}{1+r}.$$

Observe que a relação de recorrência (32) é exatamente igual à definida em (1). Logo, a equação explícita terá a mesma forma de (8), porém ajustada pelos novos parâmetros, resultando em

$$M_n = \big((1+f)(1+r_{eq})\big)^n \left[\widetilde{M}_0 - \frac{\widetilde{P}}{r_{eq}}\left(1 - \frac{1}{(1+r_{eq})^n}\right)\right]. \tag{33}$$

Assim, fica demonstrado que um título que paga cupom periodicamente pode ser tratado de forma equivalente ao caso descrito na situação problema do tópico 1. Com isso, o tempo de descapitalização para títulos com cupom será da forma

$$T_{cp} = -\frac{\ln \alpha_{cp}}{\ln \gamma_{cp}}, \tag{34}$$

em que as variáveis α_{cp} e γ_{cp} são definidas como

$$\alpha_{cp} = 1 - \frac{\widetilde{M}_0 \cdot r_{eq}}{\widetilde{P}} \qquad \text{e} \qquad \gamma_{cp} = 1 + r_{eq}.$$

5.1 Sensibilidade a ágio ou deságio na venda

Utilizando o mesmo raciocínio do tópico 4 desenvolvido anteriormente, faremos a análise de sensibilidade do tempo de descapitalização para títulos com cupom. Contudo, focaremos apenas no ágio ou deságio na venda parcial do título, representados pelo parâmetro β_v. Assim, utilizando (13) e ajustando-a com (34), obtemos

$$\frac{\sigma_{T_{cp}}}{T_{cp}} = \left(\frac{1-\widetilde{\gamma}}{\widetilde{\gamma}\ln\widetilde{\gamma}}\right)\cdot\frac{\sigma_{\beta_v}}{\beta_v}, \tag{35}$$

em que $\widetilde{\gamma}$ é definido como

$$\widetilde{\gamma} = 1 + \beta_v r.$$

Para valores moderados $|\beta_v r| \leq 5\%$ a.m., $\widetilde{\gamma}$ fica consideravelmente próximo ao valor unitário. Dessa forma, utilizando a aproximação por série de Taylor $\ln\widetilde{\gamma} \approx (\widetilde{\gamma}-1)$ em torno de $\widetilde{\gamma}=1$, e inserindo em (35), obtemos

$$\frac{\sigma_{T_{cp}}}{T_{cp}} \approx -\frac{\sigma_{\beta_v}}{\beta_v}. \tag{36}$$

Este resultado mostra a equivalência das variações, ou seja, uma variação percentual em β_v leva a uma variação de igual magnitude no período de descapitalização, mas com efeito contrário. Por exemplo, se β_v variar em $+10\%$, então o período de descapitalização variará em aproximadamente -10%.

6 Exemplos de uso

Nos subtópicos a seguir, empregaremos as análises descritas anteriormente em exemplos práticos para o investidor. Para tal, precisamos levantar dados históricos de inflação (IPCA), juro nominal (CDI) e juro real (r), utilizando-os nos exemplos a seguir. Nesse contexto, através de suas respectivas séries históricas (com data base em 07/2000) de variação mensal, obtêm-se os gráficos da figura 5.

Em cada gráfico está discriminado o valor mensal médio de cada indicador. O juro real foi determinado tomando o CDI como juro nominal. Observe que o CDI apresenta um comportamento menos errático do que a inflação, uma vez que está intrinsecamente ligado à taxa SELIC, determinada pelo Comitê de Política Monetária (COPOM).

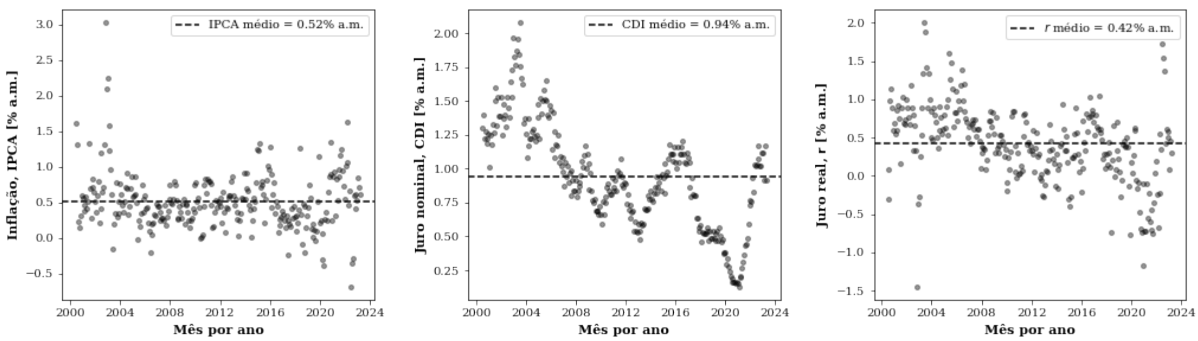

Figura 5: Séries históricas

6.1 Carteira de investimento

Um investidor pessoa física que possui o montante de R$ 500 mil, montará uma carteira de investimentos com rentabilidade média de 110% do CDI. Visando uma renda mensal líquida de R$ 4 mil, resgatará esse valor mensalmente dos seus investimentos. Ademais, considere a incidência de 15% de IR sobre os resgates. Diante do exposto, podemos utilizar a metodologioa desenvolvida anteriormente para ajudá-lo em seu planejamento financeiro.

Inicialmente, precisamos definir o juro real. Para isto, basta descontar o percentual da inflação sobre a taxa de juros nominal, conforme

$$i_{nom} = (1 + f)(1 + r) - 1.$$

Considerando o CDI médio como juros nominal, conforme fornecido pela figura 5, e ajustando a rentabilidade para 110% do CDI, obtemos $i_{nom} = 0.94 \cdot (110/100) = 1.03\%$ a.m.. Com a inflação média de 0.52% a.m., também fornecida pela figura 5, resolvemos a equação anterior para o juro real, resultando em $r = 0.51\%$ a.m..

Agora, precisamos determinar o valor da retirada periódica mensal. Levando em consideração o IR cobrado sobre o resgate, seu valor será $P = 4,000/(1-15\%) = 4,705.88$. Assim, determinados os valores pertinentes, podemos calcular os parâmetros α e γ como

$$\alpha = 1 - \frac{M_0 r}{P} = 1 - \frac{500,000 \cdot 0.51\%}{4,705.88} = 0.54 \qquad \text{e} \qquad \gamma = 1 + r = 1 + 0.51\% = 1.0051.$$

Conforme definido em (11), valores positivos de α fazem com que o montante de capital diminua ao longo do tempo, esgotando-se em um determinado período. Esse período de tempo é calculado através da equação (10), como

$$T = -\frac{\ln 0.54}{\ln 1.0051} = 120.45 \text{ meses.}$$

Portanto, em aproximadamente 10 anos, o capital será completamente consumido.

Para analisarmos a sensibilidade do período T em relação aos demais fatores, utilizamos o fator corretivo associado a cada um, sendo Φ_α para juro real e Γ_α para montante inicial e retirada periódica. Com o auxílio da tabela 1, localizada na seção Anexo, podemos obter os valores dos fatores corretivos e da razão de sensibilidade R_α como

$$\Phi(0.54) = 0.38, \qquad \Gamma(0.54) = 1.38 \qquad \text{e} \qquad R(0.54) = 3.60.$$

Isto mostra que para $\alpha = 0.54$, o juro real causa uma variação percentual de T menor do que sua própria variação. Já para o montante inicial e retirada periódica, ocorre o inverso, ou seja, causam uma variação em T maior do que as próprias variações. Para facilitar o entendimento, vamos exemplificar com duas hipóteses:

1. Variação percentual de 10% no juro real e mantendo demais fatores constantes, ou seja, como se o juro real aumentasse para $r = 0.51\% \cdot (1 + 10\%) = 0.56\%$ a.m.;

2. Variação percentual de 10% na retirada periódica e mantendo demais fatores constantes, ou seja, como se a retirada aumentasse para $P = 4,705.88 \cdot (1 + 10\%) = 5,176.47$, e que líquido de impostos resultaria numa renda mensal de 4.4 mil.

Considerando ambas as hipóteses e utilizando as relações (22) e (25), respectivamente para cada hipótese, obtemos

$$\left.\frac{\sigma_T}{T}\right|_r \approx 0.38 \cdot 10\% \approx 3.80\% \qquad \text{e} \qquad \left.\frac{\sigma_T}{T}\right|_P = -1.38 \cdot 10\% = -13.80\%.$$

Logo, o exemplo acima evidencia que para o valor de α em questão e para variações percentuais idênticas de juro real e retirada periódica, o impacto sobre o período T decorrente da retirada periódica é muito maior do que do juro real, na ordem de 3.6 vezes maior. Em outras palavras, para compensar um aumento de 10% na renda mensal, a taxa de juro real teria que aumentar em 36%, em torno de 0.70% a.m. ou 8.73% a.a. (taxa difícil de se encontrar no mercado).

6.2 Tesouro IPCA+ com juros semestrais

Um investidor quer investir o montante de R$ 1 milhão no título de renda fixa Tesouro IPCA+ 2055 com juros semestrais (NTN-B 2055), ou seja, paga cupom de juros semestralmente. Ele necessita de uma renda semestral de R$ 60 mil, dada em valor presente. Na data de aplicação de 01/06/2023, o valor nominal atualizado é de R$ 4,127.37, o preço unitário de compra é de R$ 4,339.87 e o preço unitário de venda é de R$ 4,266.97. As taxas de compra e venda do título são IPCA+5.68% e IPCA+5.80% ao ano, respectivamente.

Conforme definido pelo Tesouro Direto, a taxa bruta de cupom de juros é fixada em 6% a.a. para todos os títulos Tesouro IPCA+ com juros semestrais. As taxas que variam à mercado são as de compra e venda, mas a taxa de cupom é fixa. Portanto, o cupom de juros a ser pago é dado por

$$cupom = VNA \cdot \left((1+6\%)^{\frac{1}{2}} - 1\right) = VNA \cdot 2.9563\%.$$

em que VNA é o valor nominal atualizado da NTN-B na data de pagamento do cupom. Além disso, pode-se comprar e vender frações desse título no preço unitário de compra PU_c e preço unitário de venda PU_v. Ambos os preços são calculados pela definição

$$PU = VNA \cdot cotação\%,$$

em que a cotação é determinada pela taxa de compra ou venda. Então, utilizando-se a definição acima, obtemos a cotação de compra e venda como 105.15% e 103.38%, respectivamente. Repare que para comprar um título, ou uma fração dele, o valor a se pagar é maior do que o valor nominal atualizado. Logo, o investidor tem que pagar R$ 4,339.87 para "comprar" um VNA de R$ 4,127.37 e ter seu pagamento de cupom em cima desse VNA. Contudo, como o investidor pagou a taxa de 5.68% na compra, sendo menor do que a taxa de cupom de 6%, ocorre um *trade off*.

Assim, de posse das cotações de compra e venda, podemos calcular os parâmetros

$$\beta_c = \frac{1}{cot_c} = \frac{1}{105.15\%} = 0.951 \qquad \text{e} \qquad \beta_v = \frac{1}{cot_v} = \frac{1}{103.38\%} = 0.967,$$

e que agora nos possibilita obter o equivalente em valor nominal atualizado $\widetilde{M_0}$ e a renda semestral ajustada $\widetilde{P}$ conforme

$$\widetilde{M_0} = \beta_c \cdot M_0 = 0.951 \cdot 1 \text{ milhão} = 951 \text{ mil}$$
$$\widetilde{P} = \beta_v \cdot R_s = 0.967 \cdot 60 \text{ mil} = 58 \text{ mil}.$$

Agora, para obter λ, precisamos do valor da taxa de cupom semestral r. Conforme definido anteriormente, esta taxa é fixada em 6% a.a.. Entretanto, este é o valor bruto, sem levar em conta o imposto de renda incidente sobre o cupom e a taxa de custódia de 0.2% a.a. sobre o montante investido. Uma boa *proxy* é considerar a taxa de IR de 15% e somar a taxa de custódia como sendo 24% do IR, resultando num desconto equivalente $d_{eq} = 15\% \cdot (1+24\%) = 18.6\%$. Dessa forma, aplicamos o desconto em cima da taxa bruta de cupom, obtendo uma taxa líquida $r = 6\% \cdot (1 - 18.6\%) = 4.884\%$ a.a.. Para um valor preciso, basta averiguar a rentabilidade nominal líquida resultante de uma simulação feita no próprio site do Tesouro direto, considerando uma taxa de inflação média de 0.52% a.m. ou 6.42% a.a., conforme a figura 6 abaixo.

Tabela com o resultado da simulação

TÍTULO: TESOURO IPCA+ COM JUROS SEMESTRAIS 2055	
Valor investido líquido	R$ 1.000.000,00
Rentabilidade bruta (a.a)	12,49%
Alíquota média de imposto de renda	15,04%
Rentabilidade líquida após taxas e I.R.	11,79%

Figura 6: Simulação no site do Tesouro Direto

Dessa forma, podemos determinar r por meio da equação de juro nominal abordada no tópico anterior, resultando em

$$r = \frac{(1+i_{nom})^{\frac{1}{2}}}{(1+f)^{\frac{1}{2}}} - 1 = \frac{(1+11.79\%)^{\frac{1}{2}}}{(1+6.42\%)^{\frac{1}{2}}} - 1 = 2.492\% \text{ ao semestre.}$$

Então, o valor de λ pode ser calculado como

$$\lambda = (\beta_v - 1) \cdot \frac{r}{1+r} = (0.967 - 1) \cdot \frac{2.492\%}{1 + 2.492\%} = -8 \cdot 10^{-4},$$

e que finalmente podemos obter a taxa de cupom equivalente r_{eq} conforme

$$r_{eq} = (1+r)(1+\lambda) - 1 = (1+2.492\%)(1 - 8 \cdot 10^{-4}) - 1 = 2.41\% \text{ ao semestre.}$$

Determinados os valores, a análise agora segue a mesma lógica desenvolvida no exemplo anterior. Com isso, podemos calcular os parâmetros α_{cp} e γ_{cp} como

$$\alpha_{cp} = 1 - \frac{\widetilde{M}_0 \cdot r_{eq}}{\widetilde{P}} = 1 - \frac{951,000 \cdot 2.41\%}{58,000} = 0.60 \quad \text{e} \quad \gamma_{cp} = 1 + r_{eq} = 1 + 2.41\% = 1.0241.$$

Conforme definido em (11), valores positivos de α fazem com que o montante de capital diminua ao longo do tempo, esgotando-se em um determinado período. Esse período de tempo é calculado através da equação (34), como

$$T_{cp} = -\frac{\ln 0.60}{\ln 1.0241} = 21.45 \text{ semestres.}$$

Portanto, o capital será completamente consumido em aproximadamente 10 anos e 8 meses. Este é um dado extremamente relevante para o investidor, pois, uma vez determinado o tempo que o capital se esgotará, pode-se optar por encurtar o prazo de vencimento do título. Títulos com vencimentos mais longos apresentam maior sensibilidade às variações da taxa de venda, fazendo com que o investidor possa incorrer na venda do título com um deságio maior.

Utilizando a análise de sensibilidade, vamos supor que a taxa de venda do título alterou-se para IPCA + 6.80%. Isto faz com que a cotação de venda caia para 90%, fornecendo um novo $\beta_v = 1/0.9 = 1.11$. Portanto, houve um aumento no valor de β_v em +14.80%, em relação ao $\beta_v = 0.967$ anterior. Agora, empregando a relação (36), obtemos

$$\frac{\sigma_{T_{cp}}}{T_{cp}} \approx -\frac{\sigma_{\beta_v}}{\beta_v} \approx -14.80\%.$$

Observe que uma elevação de 1% na taxa de venda, passando de 5.80% para 6.80%, encurtou o período de descapitalização em 15%. Para prevenir esse efeito, seria mais prudente o investidor comprar o título Tesouro IPCA+ 2035, uma vez que o vencimento está próximo do prazo de duração do capital, além de que se ocorrer variações consideráveis na taxa de venda do título, o investidor poderá realizar a venda parcial sem sofrer um deságio elevado. Um ponto que pode estar se perguntando é: Com a alteração do título, então todos os valores de preços e taxas também se alteram, fazendo com que tenhamos de refazer os cálculos para este novo título, correto? Correto! Contudo, refazendo todos esses cálculos para o Tesouro IPCA+ 2035, o tempo mudou para exatos 10 anos. Veja que não houve uma alteração muito grande em relação ao tempo anterior, mas agora o investidor terá um título com um risco bem menor e com possíveis deságios bem mais moderados do que o título original.

7 Links Úteis

1. Link para consultar o Valor Nominal Atualizado (VNA) dos títulos Tesouro IPCA+ ou NTN-Bs;

2. Link para consultar taxas de compra e venda, além dos preços de compra e venda dos títulos Tesouro IPCA+;

3. Link para a simulação no Tesouro Direto, obtendo a rentabilidade líquida;

4. Link para material explicativo do próprio Tesouro Direto mostrando como se calcula a cotação dos títulos Tesouro IPCA+ com juros semestrais.

8 Anexo

Tabela com fatores corretivos e razão de sensibilidade para variados valores de α.

Tabela 1: Fatores corretivos e razão de sensibilidade

α	Φ_α	Γ_α	R_α
0.00	-	-	1.00
0.01	20.50	21.50	1.05
0.05	5.34	6.34	1.19
0.10	2.91	3.91	1.34
0.15	1.99	2.99	1.50
0.20	1.49	2.49	1.67
0.25	1.16	2.16	1.86
0.30	0.94	1.94	2.07
0.35	0.77	1.77	2.30
0.40	0.64	1.64	2.57
0.45	0.53	1.53	2.88
0.50	0.44	1.44	3.26
0.55	0.37	1.37	3.71
0.60	0.31	1.31	4.28
0.65	0.25	1.25	5.00
0.70	0.20	1.20	5.96
0.75	0.16	1.16	7.30
0.80	0.12	1.12	9.31
0.85	0.09	1.09	12.65
0.90	0.05	1.05	19.32
0.95	0.03	1.03	39.33
0.99	0.01	1.01	101.00
1.00	0.00	1.00	-