Contents

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES : ISFA 2002

EXERCICE 1

1)$\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \sim_{\infty} \frac{1}{x^2}$ ainsi la fonction $x \longmapsto \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. Et en remarquant que $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \ln(1+x^2) - 2\ln(x)$ on a $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) =_{0^+} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et par suite $x \longmapsto \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ est intégrable sur$]0,1]$. Ainsi $\int_0^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) dx$ est convergente.

2) Soient $\varepsilon, M > 0$,on intègre par parties puis : $I(\varepsilon, M) = \int_\varepsilon^M \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) dx = \int_\varepsilon^M x' \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) dx$

$I(\varepsilon; M) = \left[x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]_\varepsilon^M + 2\int_\varepsilon^M \left(\frac{x.\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}}\right) dx = \left[x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]_\varepsilon^M + 2\int_\varepsilon^M \frac{dx}{1+x^2}$ ce qui donne $I(\varepsilon, M) = M\ln\left(1+\frac{1}{M^2}\right) - \varepsilon\ln\left(1+\frac{1}{\varepsilon^2}\right) + 2\big(\text{Arctan}(M) - \text{Arctan}(\varepsilon)\big)$ et maintenant en faisant $\varepsilon \to 0$ puis $M \to \infty$ on trouve $\int_0^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) dx = 2.\frac{\pi}{2} = \pi$.

PROBLEME A

1)$\forall x \in [0,1]$, $P'(x) = \sum_{i=0}^{k} i p_i x^{i-1} \geq 0$. P est donc une fonction continue croissante et réalise ainsi une bijection de $[0,1]$ sur $[P(0), P(1)]$ et comme $P(0) = p_0$ et $P(1) = \sum_{i=0}^{k} p_i = 1$ on a notre résultat.

2.

i) $P(1) = 1$ donc $1 \in E$.

ii) Posons $\varphi(x) = P(x) - x$ ainsi $\varphi'(x) = P'(x) - 1$ puis $\varphi''(x) = P''(x) \geq 0$.Nous déduisons que φ' est croissante.

*Si $P'(1) > 1$ alors $\varphi'(1) > 0$ et $\varphi'(0) = p_1 - 1 \leq 0$ donc il existe un unique $\lambda' \in [0,1[$ tel que $\varphi'(\lambda') = 0$.Ce faisant φ est décroissante sur $[0,\lambda']$ et croissante sur $[\lambda', 1]$ où l'on a $\varphi(x) \leq 0$ car $\varphi(1) = 0$.Sur $[0,\lambda']$ on a $\varphi(\lambda') < 0$ et $\varphi(0) = p_0 \geq 0$ ainsi il existe un unique $\lambda \in [0,\lambda']$ tel que $\varphi(\lambda) = 0$.On a bien $E = \{\lambda, 1\}$.

* Si $P'(1) \leq 1$ alors $\varphi'(x) \leq 0$ donc φ est décroissante de p_0 vers 0.Si $p_0 > 0$ on a alors un unique point fixe et $E = \{1\}$.Si $p_0 = 0$ alors $E = [0,1]$,maintenant il reste à trouver le (ou les) polynômes correspondants. Dans ce cas $\sum_{i=0}^{k} p_i = 1$ maintenant s'il existe un $i > 1$ tel que $p_i > 0$ alors $P'(1) = \sum_{i=0}^{k} i p_i > \sum_{i=0}^{k} p_i = 1$ contradiction. Par suite $p_1 = 1$ et le polynôme recherché est $P(x) = x$.

3.

i) Prenons $P(x) = p_1 x + (1 - p_1)$, on a : $P_2(x) = p_1\big(p_1 x + (1-p_1)\big) + (1 - p_1)$ ainsi on trouve $P_2(x) = {p_1}^2 x + (1 - {p_1}^2)$. Et par une récurrence simple on arrive à démontrer la relation $P_n(x) = {p_1}^n x + (1 - {p_1}^n)$. D'où $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \leq p_1 < 1 \\ x \text{ si } p_1 = 1 \end{cases}$.

ii) On montrera par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$que $u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.On a d'abord que $0 \leq P(0) \leq 1$ et comme P est croissant on a $P(0) \leq P\big(P(0)\big) \leq 1$ soit $u_1 \leq u_2 \leq 1$.Maintenant supposons que pour un $n \in \mathbb{N}^*$ l'on ait $u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ et en remarquant que $u_{n+1} = P(u_n)$ et que P croît on a $P(u_n) \leq P(u_{n+1}) \leq P(1)$ soit $u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$.Nous achevons ainsi notre récurrence.$(u_n)_{n\geq 1}$ est alors une suite croissante majorée elle est donc convergente vers un point fixe de P.

*Si $P'(1) \leq 1$ P a un unique point fixe et alors $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$.

*Si $P'(1) > 1$.Distinguons des cas . Si $u_1 \leq \lambda$ on a par récurrence que $u_n \leq \lambda$.Comme les seuls points fixes de P sont λ et 1 et que $\lambda < 1$on a que $\lim_{n\to\infty} u_n = \lambda$. Si $u_1 > \lambda$ on a par récurrence que $u_n > \lambda$ mais $(u_n)_{n\geq 1}$ devant converger vers sa borne supérieure on a obligatoirement $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$. En somme $\lim_{n\to\infty} u_n = \begin{cases} \lambda \text{ si } u_1 \leq \lambda \\ 1 \text{ si } u_1 > \lambda \end{cases}$.

iii)

*Si $P'(1) \leq 1$ on a que $\forall x \in]0,1], P(x) \geq x$. De là il est facile de voir que la suite $\big(P_n(x)\big)_{n\geq 1}$ est croissante majorée par 1 ; elle converge donc vers le point fixe 1 de P.

* Si $P'(1) > 1$.On va discuter suivant les positions de x. Si $x \leq \lambda$ alors $x \leq P_1(x) \leq \lambda$ on a par récurrence que $P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq \lambda$. $\big(P_n(x)\big)_{n\geq 1}$ est croissante majorée par λ ; elle converge donc vers l'un des points fixes de P.Comme les seuls points fixes de P sont λ et 1 et que $\lambda < 1$on a que $\lim_{n\to\infty} u_n = \lambda$. Si $x >$ □ il vient $x \geq P_1(x) > \lambda$ et par récurrence que $P_n(x) \geq P_{n+1}(x) > \lambda$. mais $(P_n)_{n\geq 1}$ étant une suite décroissante minorée elle doit converger vers sa borne inférieure on a obligatoirement $\lim_{n\to\infty} u_n = \lambda$. Dans tous les cas $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = \lambda$.

PROBLEME B

PARTIE I

1.

i) En posant $n = \deg(P)$ on peut écrire $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $a_n \neq 0$. Par définition de D : $D(P)(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k\big((x+1)^k - x^k\big) = \sum_{k=1}^{n}\big(\sum_{j=0}^{k-1} a_k C_k^j x^j\big) = \sum_{j=0}^{n-1}\big(\sum_{k=j+1}^{n} a_k C_k^j\big)x^j$. $D(P)$ est bien un polynôme de terme dominant $na_n X^{n-1}$ ainsi nous concluons que

$$\deg\big(D(P)\big) = \begin{cases} \deg(P) - 1 \text{ si } \deg(P) \geq 1 \\ -\infty \text{ si } \deg(P) \in \{-\infty, 0\} \end{cases}$$

ii) On montre que D est une application linéaire puis en regardant la question précédente on voit qu'elle applique $\mathbb{R}^n[X]$ sur $\mathbb{R}^{n-1}[X]$.Pour trouver la matrice il suffit de voir que $D(1) = 0$ et que $D\big(X^k\big) = \sum_{j=0}^{k-1} C_k^j X^j$ pour $1 \leq k \leq n$. En notant $M = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n+1}}$ la matrice de D sur les bases canoniques de $\mathbb{R}^n[X]$ sur $\mathbb{R}^{n-1}[X]$. M est une matrice triangulaire supérieure définie par $a_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \geq j \\ C_{j-1}^{i-1} \text{ si } i \geq j \end{cases}$.Il est facile de voir que rang$(M) = n$ soit $\dim(Im(D)) = \dim(\mathbb{R}^{n-1}[X])$ or $Im(D) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}[X]$ ainsi $Im(D) = \mathbb{R}^{n-1}[X]$. En regardant la première colonne de D on trouve $\ker(D) = Vect(1)$.

iii) Prenons $n \in \mathbb{N}$ tel que $Q \in \mathbb{R}^{n-1}[X]$, d'après la question précédente qu'il existe $R \in \mathbb{R}^n[X]$ tel que $D(R) = Q$. Pour l'existence il est indéniable que $P = R - R(0)$ satisfait les conditions voulues. Prenons un autre P' qui vérifie les mêmes conditions que P alors $P' - P \in KerD$. Ainsi il existe un réel α tel que $P' - P = \alpha$. En prenant $x = 0$ on a $P' - P = 0$ soit $P' = P$. Ceci conclut l'existence et l'unicité.

2.

i) En regardant à la question 1.ii on voit que P_1 et P_2 sont respectivement de degré 1 et 2.Avec l'autre condition on écrit $P_1(x) = \alpha x$ et $P_2(x) = \beta x^2 + \gamma x$. Ainsi $D(P_1)(x) = \alpha$ donc $\alpha = 1$ puis $D(P_2)(x) = 2\beta x + \beta + \gamma$ ainsi $(\beta, \gamma) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.Enfin $P_1 = X$ et $P_2 = \frac{X(X-1)}{2}$.

ii) Nous raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, on vérifie à la main que la propriété est vraie pour $n = 1,2$.Maintenant supposons la propriété vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. En tenant compte de la formule $P_{n+1}(x+1) - P_{n+1}(x) = P_n(x)$. En mettant $x = 0$ on trouve $P_{n+1}(1) = 0$,puis $x = 1$ donne $P_{n+1}(2) = 0$ ...et $x = n - 1$ donne $P_{n+1}(n) = 0$. En particulier avec $x = n$ on trouve $P_{n+1}(n+1) - P_{n+1}(n) = P_n(n)$donc$P_{n+1}(n+1) = P_n(n) = 1$.Ceci achève la récurrence.

Les racines de P_n étant $0,1,\dots,n-1$ on peut écrire $P_n(X) = AX(X-1)\dots(X-n+1)$ pour un certain $A \in \mathbb{R}$. La condition $P_n(n) = 1$ donne $An! = 1$ soit $A = \frac{1}{n!}$. D'où $P_n(X) = \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}$.

iii)$\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ est une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ à degré croissant ainsi cette famille est libre et possède $n+1$ éléments or $\dim(\mathbb{R}^{n-1}[X]) = n+1$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$ .Un polynôme Q de $\mathbb{R}_n[X]$ s'écrit $Q = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i P_i$. A partir de $D(P_n) = P_{n-1}$ on déduit facilement que $D^k(P_n) = P_{n-k}$ d'où $D^k(Q) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i D^k(P_i) = \sum_{i=k}^{n} \alpha_i P_{i-k}$. En gardant à l'esprit que $P_0 = 1$ on déduit à partir de la dernière relation que $D^k(Q)(0) = \alpha_k$ pour un $k \in [\![0, n]\!]$.On réécrit et on a $P = \sum_{k=0}^{n} D^k(Q) \times P_k$.

iv) Nous procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Les cas $n = 0,1$ sont vérifiés. Nous allons que la véracité de cette propriété pour un entier n entraine l'hérédité au rang $n+1$. Mais avant il est utile de remarquer que $P_{k+1}(x) = \frac{x-k}{k+1} P_k(x)$.

$$P_{n+1}(x+y) = \frac{x+y-n}{n+1} P_k(x+y) = \frac{[(x-k) + (y-(n-k)]}{n+1} P_k(x+y)$$

$$P_{n+1}(x+y) = \left\{ \sum_{k=0}^{\square} \left(\frac{x-k}{n+1}\right) P_k(x) P_{n-k}(y) + \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{y-(n-k)}{n+1}\right) P_k(x) P_{n-k}(y) \right\}$$

$$P_{n+1}(x+y)=\left\{\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k+1}{n+1}\right)P_{k+1}(x)P_{n-k}(y)+\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n-k+1}{n+1}\right)P_k(x)P_{n-k+1}(y)\right\}$$

$$=\left\{P_{n+1}(x)+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n+1}\right)P_k(x)P_{n-k+1}(y)+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n-k+1}{n+1}\right)P_k(x)P_{n-k+1}(y)+P_{n+1}(y)\right\}$$

$$P_{n+1}(x+y)=\left\{P_{n+1}(x)+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k+n-k+1}{n+1}\right)P_k(x)P_{n-k+1}(y)+P_{n+1}(y)\right\}$$

$$P_{n+1}(x+y)=\left\{P_{n+1}(x)P_0(y)+\sum_{k=1}^{n}P_k(x)P_{n-k+1}(y)+P_0(x)P_{n+1}(y)\right\}$$

D'où $P_{n+1}(x+y)=\sum_{k=0}^{n+1}P_k(x)P_{n-k+1}(y)$ et on achève notre récurrence.

PARTIE II

1) Notons $n=\deg(f)$ on a donc $f\in\mathbb{R}_n[X]$ puis $D(f)\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $D^2(f)\in\mathbb{R}_{n-2}[X]$.En poursuivant on a $D^n(f)\in\mathbb{R}_0[X]$ et alors $D^{n+1}(f)=0$ donc $D^k(f)=0$ pour $k\geq n+1$. Nous déduisons que $\forall k\geq n+1$ on a $u_k(x)=0$, la série comporte donc un nombre fini de termes non nuls. La somme de cette série vérifie : $\sum_{k=0}^{n}u_k(x)=\sum_{k=0}^{n}D^k(f)(0)\times P_k(x)=f(x)$.

2.i) Comme $D(f)(x)=f(x+1)-f(x)$ on trouve $D^2(f)(x)=f(x+2)-2f(x+1)+f(x)$. Ainsi on montre par récurrence que $D^n(f)(x)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}C_n^i f(x+i)$. Si cette formule est vraie à l'ordre n on a alors

$$D^{n+1}(f)(x)=D\big(D^n(f)(x)\big)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}C_n^i f(x+i+1)-\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}C_n^i f(x+i)$$

$$D^{n+1}(f)(x)=\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{n+1-i}C_n^{i-1}f(x+i)+\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n+1-i}C_n^i f(x+i)$$

$$D^{n+1}(f)(x)=f(x+n+1)+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+1-i}\big(C_n^i+C_n^{i-1}\big)f(x+i)+(-1)^{n+1}f(x)$$

$D^{n+1}(f)(x)=f(x+n+1)+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+1-i}C_{n+1}^i f(x+i)+(-1)^{n+1}f(x)$ ce qui finit par donner $D^{n+1}(f)(x)=\ \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^{n+1-i}C_{n+1}^i f(x+i)$.Fin de la récurrence.

En particulier pour $x=0$ on a $D^k(f)(x)=\sum_{i=0}^{k}C_k^i(-1)^{k-i}a^i=(a-1)^k$. Finalement on trouve $u_k(x)=(a-1)^k\frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!}$.

2.ii) Le calcul donne $\frac{u_{k+1}(x)}{u_k(x)}=\frac{(a-1)(x-k)}{k+1}$ et nous trouvons $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{u_{k+1}(x)}{u_k(x)}\right|=|a-1|$. Si $|a-1|<1$ alors $\sum|u_k(x)|$ converge d'après la règle de D'Alembert ainsi la série $\sum u_k(x)$ est absolument convergente.

2.iii)Soit $|a-1|>r>1$ et comme $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{u_{k+1}(x)}{u_k(x)}\right|=|a-1|$ il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $\forall k\geq n_0$, $\left|\frac{u_{k+1}(x)}{u_k(x)}\right|>r$ donc $|u_{n_0+1}(x)|>r|u_{n_0}(x)|$. Et une récurrence immédiate montre que $\forall k\geq 1$, $|u_{k+n_0}(x)|>r^k|u_{n_0}(x)|$.Le terme général de la série étant non majoré il ne converge donc pas vers 0. De ce fait la série diverge.

3

i)$S(0)=\sum_{k=0}^{\infty}(a-1)^k\times P_k(0)=P_0(0)=1$.

$S(n+1)-S(n)=\sum_{k=1}^{\infty}(a-1)^k\big(P_k(n+1)-P_k(n)\big)$ or $\forall k\geq 1: D(P_k)=P_{k-1}$ ainsi nous déduisons $P_k(n+1)-P_k(n)=P_{k-1}(n)$. D'où $S(n+1)-S(n)=\sum_{k=1}^{\infty}(a-1)^kP_{k-1}(n)$ puis $S(n+1)-S(n)=(a-1)\sum_{k=1}^{\infty}(a-1)^kP_k(n)=(a-1)S(n)$. On obtient ainsi la relation de récurrence $S(n+1)=aS(n)$ alors $S(n)=a^nS(0)=a^n$.

ii) $S_n(x)\times S_n(y)=\big(\sum_{k=1}^{n}(a-1)^kP_k(x)\big)\big(\sum_{k=1}^{n}(a-1)^kP_k(y)\big)$

$S_n(x)\times S_n(y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}(a-1)^kP_i(x)P_{k-i}(y)+\sum_{k=n+1}^{2n}\sum_{i=k-n}^{n}(a-1)^kP_i(x)P_{k-i}(y)$

$S_n(x)\times S_n(y)=\sum_{k=0}^{n}(a-1)^kP_k(x+y)+\sum_{k=n+1}^{2n}\sum_{i=k-n}^{n}(a-1)^kP_i(x)P_{k-i}(y)$.

Aussi $S_{2n}(x+y)=\sum_{k=0}^{n}(a-1)^kP_k(x+y)+\sum_{k=n+1}^{2n}(a-1)^kP_k(x+y)$

$S_{2n}(x+y)=\sum_{k=0}^{n}(a-1)^kP_k(x+y)+\sum_{k=n+1}^{2n}\sum_{i=0}^{k}(a-1)^kP_i(x)P_{k-i}(y)$.En regardant bien les sommations on peut écrire $S_{2n}(x+y)=S_n(x)\times S_n(y)+A_n(x+y)+B_n(x+y)$ (I) avec $B_n(x,y)=\sum_{k=n+1}^{2n}\sum_{i=0}^{k-n-1}(a-1)^kP_i(x)P_{k-i}(y)=\sum_{k=n+1}^{2n}\sum_{i=0}^{k-n-1}u_i(x)u_{k-i}(y)$ et $A_n(x,y)=\sum_{k=n+1}^{2n}\sum_{i=n+1}^{k}(a-1)^kP_i(x)P_{k-i}(y)=\sum_{k=n+1}^{2n}\sum_{i=n+1}^{k}u_i(x)u_{k-i}(y)$.

Pour la suite écrivons de façon subtile en changeant les indices $B_n(x,y)=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=i+n+1}^{2n}u_i(x)u_{k-i}(y)$ et $A_n(x,y)=\sum_{i=n+1}^{2n}\sum_{k=i}^{2n}u_i(x)u_{k-i}(y)$. Ainsi $|B_n(x,y)|\leq\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=n+1}^{2n}|u_i(x)u_k(y)|\leq\big(\sum_{k=n+1}^{2n}|u_k(y)|\big)\big(\sum_{i=0}^{n-1}|u_i(x)|\big)$ et par suite $|B_n(x,y)|\leq\big(\sum_{k=n+1}^{2n}|u_k(y)|\big)\big(\sum_{i=0}^{\infty}|u_k(x)|\big)$.

$|A_n(x,y)|\leq\sum_{i=n+1}^{2n}\sum_{k=n+1}^{2n}|u_i(x)u_k(y)|\leq\big(\sum_{i=n+1}^{2n}|u_k(x)|\big)\big(\sum_{k=n+1}^{2n}|u_i(y)|\big)$ et par suite $|A_n(x,y)|\leq\big(\sum_{k=n+1}^{2n}|u_k(x)|\big)\big(\sum_{k=0}^{\infty}|u_k(y)|\big)$.

De là $\lim_{n\to\infty}A_n(x,y)=\lim_{n\to\infty}B_n(x,y)=0$ ainsi en faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation (I) on obtient $S(x+y)=S(x)S(y)$.

iii) Comme $S(x+y)=S(x)S(y)$ en prenant $x=y$ on a $S(2x)=S(x)^2$. En particulier $S(1)=S\left(\frac{1}{2}\right)^2=a$ donc $S\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{a}$. Intuitivement la relation $S(2x)=S(x)^2$ nous amène à prouver par récurrence que $S(nx)=S(x)^n$. Ceci est vrai pour $n=2$ et si $S(nx)=S(x)^n$ on a alors $S\big((n+1)x\big)=S(nx)S(x)=S(x)^{n+1}$ ainsi nous achevons la récurrence. Ceci étant $a=S(1)=S\left(q\times\frac{1}{q}\right)=S\left(\frac{1}{q}\right)^q$ donc $S\left(\frac{1}{q}\right)=a^{\frac{1}{q}}$. En outre $S\left(\frac{p}{q}\right)=S\left(\frac{1}{q}\right)^p=a^{\frac{p}{q}}$.

iv) Pour x positif on a :$1=S(0)=S(x-x)=S(-x)S(x)$ donc $S(-x)=1/S(x)$.

Remarque : Pour tout $r\in\mathbb{Q}^+$ on peut écrire $r=\frac{p}{q}$ avec $p\geq 0, q>0$. On a alors le résultat suivant $S(r)=S\left(\frac{p}{q}\right)=a^{\frac{p}{q}}=a^r$ ainsi $S(-r)=1/S(r)=a^{-r}$. On a alors le résultat important $S(r)=a^r$ pout tout $r\in\mathbb{Q}$.

v) D'abord démontrons que pour $n \geq 1$; $|P_n(h)| \leq |h|$ pour $|h| \leq 1$.On a pour un entier $i \geq 1$: $-1 \leq h \leq 1$ donc $-i-1 \leq h-i \leq 1-i$ d'où $|h-i| \leq i+1$ .Or $|P_n(h)| = \frac{|h|}{n!}\prod_{i=1}^{n-1}|h-i|$ par conséquent$|P_n(h)| \leq \frac{|h|}{n!} \times 2 \times 3 \times \dots \times n = \frac{|h|}{n!} \times n!$ soit $|P_n(h)| \leq |h|$. L'on a $S(h) - 1 = \sum_{k=1}^{\infty}(a-1)^k P_k(h)$.Sous réserve de convergence $|S(h)-1| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\left|(a-1)^k P_k(h)\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty}|h||a-1|^k \leq |h|\sum_{k=1}^{\infty}|a-1|^k$.Cette inégalité prouve que $\lim_{h\to 0} S(h) = 1 = S(0)$ ainsi S est continue en 0.Maintenant pour x, h des nombres réels $S(x+h) = S(x)S(h)$ donc $\lim_{h\to 0} S(x+h) = S(x)$ donc S est continue en x.

iv) On a $S(x) = a^x$ pour $x \in \mathbb{Q}$. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ des rationnels convergeant vers x. Mais alors $S(x) = S(x_n)S(x-x_n) = a^{x_n}S(x-x_n)$ et comme S est continue on a alors $S(x) = \lim_{n\to\infty} a^{x_n}S(x-x_n) = a^x S(0) = a^x$.Ceci conclut.

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES : ISFA 2003

PROBLEME 1

<u>QUESTION 1</u>

Notons X_M le polynôme caractéristique de M. Nous avons à l'ordre 3 la fameuse formule : $X_M(\lambda) = -\lambda^3 + \mathrm{Tr}(M)\lambda^2 - \mathrm{Tr}(\mathrm{Com}M)\lambda + \det(M)$ donc $X_M(\lambda) = -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 44\lambda + 40$. En factorisant $X_M(\lambda) = (\lambda-2)^2(10-\lambda)$, ainsi les valeurs propres de M sont 2 et 10 et les sous espaces propres sont $\mathrm{Ker}(M-2I) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$ et $\mathrm{Ker}(M-10I) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}17\\8\\7\end{pmatrix}\right\}$.

<u>QUESTION 2</u>

a) On note respectivement X_n, Y_n et Z_n les évènements le client est satisfait, indifférent et mécontent après la n-ième année. Par la formule de sommation totale :

$$\begin{cases} P(X_n) = P(X_n \setminus X_{n-1})P(X_{n-1}) + P(X_n \setminus Y_{n-1})P(Y_{n-1}) + P(X_n \setminus Z_{n-1})P(Z_{n-1}) \\ P(Y_n) = P(Y_n \setminus X_{n-1})P(X_{n-1}) + P(Y_n \setminus Y_{n-1})P(Y_{n-1}) + P(Y_n \setminus Z_{n-1})P(Z_{n-1}) \\ P(Z_n) = P(Z_n \setminus X_{n-1})P(X_{n-1}) + P(Z_n \setminus Y_{n-1})P(Y_{n-1}) + P(Z_n \setminus Z_{n-1})P(Z_{n-1}) \end{cases} \text{ soit}$$

$$\begin{cases} x_n = 0{,}6x_{n-1} + 0{,}5y_{n-1} + 0{,}4z_{n-1} \\ y_n = 0{,}2x_{n-1} + 0{,}4y_{n-1} + 0{,}2z_{n-1} \\ z_n = 0{,}2x_{n-1} + 0{,}1y_{n-1} + 0{,}4z_{n-1} \end{cases} \text{d'où } \begin{bmatrix}x_n\\y_n\\z_n\end{bmatrix} = A \times \begin{bmatrix}x_{n-1}\\y_{n-1}\\z_{n-1}\end{bmatrix} \text{ avec } A = \begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}4\\0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}2\\0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}4\end{pmatrix} = \frac{1}{10}M.$$

b) Posons $X = {}^t[x,y,z]$ on doit résoudre $AX = X$ soit $MX = 10X$ donc $X \in \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}17\\8\\7\end{pmatrix}\right\}$. Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifiant $X = {}^t[17\alpha, 8\alpha, 7\alpha]$ mais la condition $x+y+z=1$ donne $\alpha = \frac{1}{32}$. Cette équation admet une seule solution $X_\infty = {}^t\left[\frac{17}{32}, \frac{1}{4}, \frac{7}{32}\right]$. En notant $X_n = {}^t[x_n, y_n, z_n]$ si $X_n = X_\infty$ alors $X_{n+1} = AX_n = AX_\infty = X_\infty$ ainsi si une année si les proportions de satisfaits, d'indifférents et mécontents sont égaux à $\frac{17}{32}, \frac{1}{4}$ et $\frac{7}{32}$ elles restent constantes les années suivantes.

c) En remplaçant z_n par $1 - x_n - y_n$ dans le système de la question 1 on obtient $\begin{cases} x_n = \frac{x_{n-1}}{5} + \frac{y_{n-1}}{10} + \frac{2}{5} \\ y_n = \frac{y_{n-1}}{5} + \frac{1}{5} \end{cases}$ donc $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} + C$ avec $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$. En manipulant il vient : $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = B^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + (I + B + \cdots + B^{n-1})C$. Il est facile de voir que $B^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{5^n} & \frac{n}{2.5^n} \\ 0 & \frac{1}{5^n} \end{pmatrix}$,ensuite $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5^n} & \frac{n}{2.5^n} \\ 0 & \frac{1}{5^n} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{4}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right) & \frac{5}{32} - \frac{1+4n}{32.5^{n-1}} \\ 0 & \frac{5}{4}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{17}{32}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right) + \frac{3n}{8.5^n} \\ \frac{1}{4}\left(1 + \frac{3}{5^n}\right) \end{bmatrix}$.De ce fait $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{17}{32}$, $\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{4}$ puis $\lim_{n\to\infty} z_n = 1 - \frac{17}{32} - \frac{1}{4} = \frac{7}{32}$.

PROBLEME II

QUESTION 1

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que u_n est définie et que $u_n > 0$.Maintenant pour un $n \geq 2$ supposons que cette propriété est vérifiée pour tout $p \leq n$. Mais alors on a $u_{n+1} = \frac{u_n u_{n-1} + k}{u_{n-2}}$ qui est ainsi bien défini et strictement positif.

QUESTION 2

i) Par définition de α il s'en suit que $u_4 = \alpha u_2 - u_0$ et maintenant montrons par récurrence que $u_{n+4} = \alpha u_{n+2} - u_n$. Supposons que la propriété tienne pour un entier $n \in \mathbb{N}$. En additionnant les deux égalités $\begin{cases} u_{n+3}u_n = u_{n+1}u_{n+2} + k \\ u_{n+3}u_{n+4} + k = u_{n+2}u_{n+5} \end{cases}$ puis en supprimant k il vient

$u_{n+3}(u_{n+4} + u_n) = u_{n+2}(u_{n+5} + u_{n+1})$ soit $\alpha u_{n+2}u_{n+3} = u_{n+2}(u_{n+5} + u_{n+1})$.En simplifiant $u_{n+5} + u_{n+1} = \alpha u_{n+3}$ d'où $u_{n+5} = \alpha u_{n+3} - u_{n+1}$. Ceci achève la récurrence.

ii) Par calcul $u_3 = \frac{bc+k}{a}$, $u_4 = \frac{c}{a}\left(c + \frac{k}{b}\right) + \frac{k}{b}$ donc $\alpha = \frac{u_4 + u_0}{u_2} = \frac{\frac{c}{a}\left(c + \frac{k}{b}\right) + \frac{k}{b} + a}{c} = \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + k\left(\frac{1}{bc} + \frac{1}{ab}\right)$. Comme $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} - 2 = \left(\sqrt{\frac{a}{c}} - \sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2$ on a $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2$ alors $\alpha > 2$.

iii) Les suites $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ satisfont une récurrence linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $X^2 - \alpha X + 1 = 0$.Ses racines sont $\lambda = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}$ et $\mu = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}$,λ et μ sont strictement positives et aussi $\lambda < 1 < \mu$.Par conséquent il existe des réels A, B, C et D tels que $u_{2n} = A\lambda^n + B\mu^n$ et $u_{2n+1} = C\lambda^n + D\mu^n$. Il faut aussi noter que $B, D \geq 0$ car sinon la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ serait négative à partir d'un certain rang. Ainsi l'éventuelle limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est soit 0 ou $+\infty$.Notons cette limite l, si $l = 0$ en regardant à la relation $u_{n+3}u_n = u_{n+1}u_{n+2} + k$ on doit avoir $l^2 = l^2 + k$ ce qui ne se peut pas si $l = 0$.Finalement $l = +\infty$.

QUESTION 3

Vu la forme donnée à la question précédente on calcule A et B par la donnée $(u_0, u_1) = (1,2)$ et nous trouvons $u_{2n} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^n$. On calcule et on trouve $u_0 = 1, u_1 = 1, u_2 = 3, u_3 = 7, u_4 = 11$. A ce niveau on constate que $u_1 = \frac{u_0+u_2}{2}$ et $u_3 = \frac{u_2+u_4}{2}$. Maintenant démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_{2n+1} = \frac{u_{2n}+u_{2n+2}}{2}$. En remarquant que ici $\alpha = 4$ on a $u_{n+4} = 4u_{n+2} - u_n$. Supposons que pour un $n \geq 1$ la propriété est vraie pour tout $k \leq n-1$. On a $u_{2n+1} = 4u_{2n-1} - u_{2n-3}$ puis $u_{2n+1} = 4\left(\frac{u_{2n}+u_{2n-2}}{2}\right) - \left(\frac{u_{2n-2}+u_{2n-4}}{2}\right)$ d'après l'hypothèse de récurrence. Ainsi $u_{2n+1} = \frac{4u_{2n}-u_{2n-2}}{2} + \frac{4u_{2n-2}-u_{2n-4}}{2} = \frac{u_{2n}+u_{2n+2}}{2}$. Ceci achève la récurrence.

PROBLEME III

QUESTION 1

a)$\frac{1-\cos(t)}{t^{3/2}} \sim_0 2\sqrt{t}$ puis $\frac{1-\cos(t)}{t^{3/2}} =_\infty O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ et comme $t \longmapsto 2\sqrt{t}$ est intégrable sur $[0,1]$ et $t \longmapsto \frac{1}{t^{3/2}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ alors $\int_0^\infty \frac{1-\cos(t)}{t^{3/2}}dt$ est absolument convergente. Aussi $\frac{\sin(t)}{t^{3/2}} \sim_0 \frac{1}{\sqrt{t}}$ puis $\frac{\sin(t)}{t^{3/2}} =_\infty O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ et comme $t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $[0,1]$ et $t \longmapsto \frac{1}{t^{3/2}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ alors $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t^{3/2}}dt$ est absolument convergente.

b)$I_A = \int_0^A \cos(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{A^2} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}}du = \frac{1}{2}\int_0^{A^2} \frac{\sin'(u)}{\sqrt{u}}du = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(A^2)}{A} + \frac{1}{2}\int_0^{A^2} \frac{\sin(u)}{u^{3/2}}du\right)$

$J_A = \int_0^A \sin(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{A^2} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}du = \frac{1}{2}\int_0^{A^2} \frac{(1-\cos(u))'}{\sqrt{u}}du = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos(A^2)}{A} + \frac{1}{2}\int_0^{A^2} \frac{1-\cos(u)}{u^{3/2}}du\right)$.

En faisant tendre A vers $+\infty$ on voit que I et J convergent et on obtient en plus les relations $I = \int_0^\infty \cos(x^2)\,dx = \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x^{3/2}}dx$ et $J = \int_0^\infty \sin(x^2)\,dx = \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{1-\cos(x)}{x^{3/2}}dx$. Cependant la fonction $x \longmapsto \frac{1-\cos(x)}{x^{3/2}}$ étant positive non nulle alors $\int_0^\infty \frac{1-\cos(x)}{x^{3/2}}dx > 0$ d'où $J > 0$.

QUESTION 2

a) C et S sont dérivables car elles sont des intégrales de fonctions continues. On a aussi $C(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(t^2)}{t} + \frac{1}{2}\int_0^{t^2} \frac{\sin(x)}{x^{3/2}}dx\right)$ et $S(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos(t^2)}{t} + \frac{1}{2}\int_0^{t^2} \frac{1-\cos(x)}{x^{3/2}}dx\right)$. En notant $M_1 = sup_{t\geq 0}\left|\frac{\sin(t^2)}{t}\right|$ et $M_2 = sup_{t\geq 0}\left|\frac{1-\cos(t^2)}{t}\right|$ alors $\forall t \geq 0, |S(t)| \leq \frac{M_2}{2} + \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{1-\cos(x)}{x^{3/2}}dx$ et $|C(t)| \leq \frac{M_1}{2} + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x^{3/2}}dx + \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{2}{x^{3/2}}dx$. Finalement C et S sont bornées.

b) Passons en complexe en introduisant $D(t) = C(t) + \mathrm{i}S(t) = \int_0^t e^{\mathrm{i}x^2}dx$, Introduisons encore $E(t) = D^2(t) = C^2(t) - S^2(t) + 2\mathrm{i}C(t)S(t) = A(t) + \mathrm{i}B(t) = \left(\int_0^t e^{\mathrm{i}x^2}dx\right)^2$. Il s'en suit que $E'(t) = A'(t) + iB'(t) = 2e^{it^2}\int_0^t e^{ix^2}dx = 2\int_0^t e^{i(t^2+x^2)}dx$. On utilise le changement de variable $x = t\tan(\theta)$ on a $dx = \frac{t}{\cos^2(\theta)}d\theta$ et $t^2 + x^2 = t^2(1 + \tan^2(\theta)) = \frac{t^2}{\cos^2(\theta)}$. Finalement on trouve $A'(t) + iB'(t) = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{i\left(\frac{t^2}{\cos^2(\theta)}\right)}\frac{t}{\cos^2(\theta)}d\theta$. En prenant les parties réelles et imaginaires on a $A'(t) = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\left(\frac{t^2}{cos^2(\theta)}\right)\frac{t}{\cos^2(\theta)}d\theta$ et $A'(t) = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\left(\frac{t^2}{cos^2(\theta)}\right)\frac{t}{\cos^2(\theta)}d\theta$.

QUESTION 3

Posons $M(t) = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\left(\frac{t^2}{cos^2(\theta)}\right)d\theta$ et $N(t) = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(1 - \cos\left(\frac{t^2}{cos^2(\theta)}\right))\,d\theta$. On ajoute les fonctions $K_M(\theta, t) = \sin\left(\frac{t^2}{cos^2(\theta)}\right)$ et $K_N(\theta, t) = 1 - \cos\left(\frac{t^2}{cos^2(\theta)}\right)$. K_M et K_N sont continues sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \times \mathbb{R}^+$. En plus $\frac{\partial K_M}{\partial t}(\theta, t) = 2\cos\left(\frac{t^2}{cos^2(\theta)}\right)\frac{t}{\cos^2(\theta)}$ et $\frac{\partial K_N}{\partial t}(\theta, t) = 2\sin\left(\frac{t^2}{cos^2(\theta)}\right)\frac{t}{\cos^2(\theta)}$ qui sont continues sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \times \mathbb{R}^+$. Par le théorème $M(t) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} K_M(\theta, t)d\theta$ et $N(t) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} K_N(\theta, t)d\theta$ sont dérivables et $M'(t) = A'(t) = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\left(\frac{t^2}{\cos^2(\theta)}\right)\frac{t}{\cos^2(\theta)}d\theta$ et $N'(t) = B'(t) = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\left(\frac{t^2}{cos^2(\theta)}\right)\frac{t}{\cos^2(\theta)}d\theta$. Comme $M(0) = A(0) = 0$ et $N(0) = B(0) = 0$ alors $M = A$ et $N = B$. Pour conclure on a les formes intégrables $A(t) = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\left(\frac{t^2}{cos^2(\theta)}\right)d\theta$ et $B(t) = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(1 - \cos\left(\frac{t^2}{cos^2(\theta)}\right))\,d\theta$.

QUESTION 4

i) $K(t) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} R(\theta, t)d\theta$ avec $R(\theta, t) = \int_0^t \sin\left(\frac{y^2}{cos^2(\theta)}\right)dy$ et $\frac{\partial R}{\partial t}(\theta, t) = \sin\left(\frac{t^2}{cos^2(\theta)}\right)$. R et $\frac{\partial R}{\partial t}$ étant continues sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \times \mathbb{R}^+$ alors K est dérivable et $K'(t) = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\left(\frac{t^2}{cos^2(\theta)}\right)d\theta = A(t)$. $K'(t) = A(t)$ et $K(0) = 0$ alors $K(t) = \int_0^t A(u)du$. $G(u) = \frac{1}{u}\int_0^u A(t)dt = \frac{K(u)}{u}$. Le changement de variable $z = \frac{y}{\cos(\theta)}$ donne $\int_0^u \sin\left(\frac{y^2}{\cos^2(\theta)}\right)dy = \cos(\theta)\int_0^{u/\cos(\theta)}\sin^2(z)dz = \cos(\theta)\,S(u/\cos(\theta))$. Par conséquent $G(u) = \frac{1}{u}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\int_0^u \sin\left(\frac{y^2}{\cos^2(\theta)}\right)dy\right]d\theta = \frac{1}{u}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(\theta)\,S(u/\cos(\theta))d\theta$. S étant borné il existe un réel M_S tel que $\forall x \geq 0, |S(x)| \leq M_S$ donc $\forall u > 0, |G(u)| \leq \frac{\pi M_S}{4u}$ ainsi $\lim_{u\to\infty} G(u) = 0$.

ii) Comme au 4.i on introduit $L(t) = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\int_0^u(1 - \cos\left(\frac{y^2}{\cos^2(\theta)}\right)dy\right]d\theta$. De même L est dérivable et $L'(t) = B(t)$ puis $L(t) = \int_0^t B(u)du$. D'où $H(u) = \frac{1}{u}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\int_0^u(1 - \cos\left(\frac{y^2}{\cos^2(\theta)}\right)dy\right]d\theta$. On procède de même et $H(u) = \frac{1}{u}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1 - \cos(\theta)\,C(u/\cos(\theta)))d\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{u}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(\theta)\,C(u/\cos(\theta))d\theta$. Sans difficultés on achève cette section par $\lim_{u\to\infty} H(u) = \frac{\pi}{4}$.

QUESTION 5

a)Comme $\lim_{u\to\infty} f(u) = 0$ alors pour $\varepsilon > 0$ il existe un réel A tel que pour tout $x > A$, $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ Ce faisant pour $t > A$; $|F(t)| \leq \frac{\int_0^A |f(u)|du}{t} + \frac{\varepsilon(t-u)}{2t} < \frac{\int_0^A |f(u)|du}{t} + \frac{\varepsilon}{2}$. D'autre part il existe un réel B tel que pour tout $t > B$; $\frac{\int_0^A |f(u)|du}{t} < \frac{\varepsilon}{2}$. En posant $M = \max\{A, B\}$ on a alors pour tout $t > M$ l'inégalité $|F(t)| < \varepsilon$ d'où $\lim_{t\to\infty} F(t) = 0$.

b) En écrivant $F(t) = \lambda + \frac{1}{t}\int_0^t (f(u) - \lambda)du$ puis en appliquant le point précédent on a alors $\lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{t}\int_0^t (f(u) - \lambda)du\right) = 0$ donc $\lim_{t\to\infty} F(t) = \lambda$.

QUESTION 6

C et S admettent des limites en $+\infty$ qui sont I et J. Ce qui entraine que A et B admettent des limites en $+\infty$ qui sont respectivement $I^2 - J^2$ et $2IJ$. En appliquant la question 5-b deux fois on a : $I^2 - J^2 = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{t}\int_0^t A(u)du\right) = 0$ et $2IJ = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{t}\int_0^t B(u)du\right) = \frac{\pi}{4}$. Comme $I^2 - J^2 = 0$ on a $|I| = |J|$ or $IJ = \frac{\pi}{8}$ donc I et J sont de même signe alors $I = J$ et $I^2 = \frac{\pi}{8}$. En conclusion à notre problème $I = J = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$.

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES : ISFA 2004

PROBLEME I

PARTIE A : L'endomorphisme ϕ

1) En posant $u = xt$ on trouve $\phi(f)(x) = \int_0^1 f(xt)dt = \frac{\int_0^x f(u)du}{x}$.

2) On a $\phi(f)(0) = f(0)$ et aussi $f(u) = f(0) + o(1)$ donc $\int_0^x f(u)du = f(0)x + o(x)$. Par conséquent $\phi(f)(x) = f(0) + o(1)$ ainsi $\lim_{x\to 0^+} \phi(f)(x) = f(0)$ ce qui justifie que $\phi(f)$ est continue en 0.

3) ϕ est linéaire ainsi il suffit de montrer que $Ker\phi = \{0\}$. Soit $f \in \mathbb{E}$ telle que $\phi(f) = 0$ alors $f(0) = 0$ et $\int_0^x f(u)du = 0$ pour $x > 0$. En dérivant la dernière on trouve que $f(x) = 0$ pour $x > 0$ donc $f = 0$. ϕ est donc injectif.

4) Si $f \in \mathbb{E}$ telle que $\phi(f) = h$. Alors $\forall x \geq 0; \int_0^x f(u)du = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ mais $x \longmapsto \int_0^x f(u)du$ est de classe $\mathcal{C}^1$ alors $k: x \longmapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ devrait être de classe $\mathcal{C}^1$. Comme $\frac{k(x)-k(0)}{x} = \frac{k(x)}{x} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ on a ainsi $k'(0) = 0$.Or $k'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0 par conséquent k ne peut pas être de classe $\mathcal{C}^1$. h n'est donc pas élément de $\mathbb{F}$. Puisque $x\phi(f)(x) = \int_0^x f(u)du$ la caractéristique est donc $g \in \mathbb{F}$ ssi $x \longmapsto xg(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

5) Si $\phi(f) = \lambda f$ alors $f(0)(1-\lambda) = 0$ et $\int_0^x f(u)du = \lambda x f(x)$ pour $x > 0$.En dérivant on trouve $f(x) = \lambda(f(x) + xf'(x)$ comme T est injectif alors 0 n'est pas valeur propre de T. Donc $f'(x) = \left(\frac{1-\lambda}{\lambda x}\right) f(x)$ pour $x > 0$.

*Si $\lambda \neq 1$ on trouve comme solution $f(x) = Cx^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ pour $x > 0$.Et comme est définie et continue en 0 il faut que $\frac{1-\lambda}{\lambda} > 0$ donc $\lambda \in]0,1[$. Aussi $f(0) = 0$ donc $f(0)(1-\lambda) = 0$. Nous concluons que tout $\lambda \in]0,1[$ est valeur propre de T avec pour fonctions propres $x \longmapsto Cx^{\frac{1}{\lambda}-1}$ $(C \neq 0)$.

* Si $\lambda = 1$, il reste plus que la condition $f'(x) = 0$ pour $x > 0$. Ainsi 1 est valeur propre de T associée aux fonctions constantes non nulles.

En gros tout $\lambda \in]0,1]$ est valeur propre de T avec pour fonctions propres $x \longmapsto Cx^{\frac{1}{\lambda}-1}$ $(C \neq 0)$.

6.

i) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que la famille $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ est libre. Pour $n = 1$ prenons α et ß tels que $\forall x \geq 0, \alpha f_1(x) + \beta g_1(x) = 0$. En mettant $x = 1$ on trouve $\alpha = 0$ puis avec par exemple $x = \mathrm{e}$ on trouve $\beta = 0$.On a bien que (f_1, g_1) est libre. Supposons la formule établie pour $n - 1 (n \geq 2)$ ainsi prouvons qu'elle est vraie pour n.Prenons $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq n}$et $(\beta_k)_{1 \leq k \leq n}$ des réels tels que . $\forall x \geq 0; \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k(x) + \sum_{k=1}^n \beta_k g_k(x) = 0$ et en divisant par g_n on a $\forall x > 1; \sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{f_k(x)}{g_n(x)} + \sum_{k=1}^n \beta_k \frac{f_k(x)}{g_n(x)} = 0$. Si $\beta_n \neq 0$ en faisant tendre vers $+\infty$,on obtient $0 = \pm\infty$ ce qui est impossible. Donc $\beta_n = 0$ ainsi $\sum_{k=1}^n \alpha_k f_k(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k g_k(x) = 0$.A nouveau $\forall x > 1; \sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{f_k(x)}{f_n(x)} + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k \frac{f_k(x)}{f_n(x)} = 0$. Si $\alpha_n \neq 0$ en faisant tendre vers $+\infty$,on obtient $0 = \pm\infty$ ce qui est impossible. Donc $\alpha_n = 0$ puis $\forall x \geq 0; \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k f_k(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k g_k(x) = 0$ et par l'hypothèse de récurrence $\forall 1 \leq k \leq n-1, \alpha_k = \beta_k = 0$.Ceci achève la récurrence et comme $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ est libre c'est une base de $\mathbb{F}_n$ donc $\dim(\mathbb{F}_n) = 2n$.

ii) Pour montrer que ϕ_n est un endomorphisme il suffit de montrer que les $\phi(f_i)$ et les $\phi(g_i)$ sont éléments de $\mathbb{F}_n$ pour $1 \leq i \leq n$. On a $\phi(f_i)(x) = \frac{\int_0^x u^i du}{x} = \frac{1}{i+1} \frac{x^{i+1}}{x} = \frac{x^i}{i+1} = \frac{1}{i+1} f_i(x)$ et aussi $\phi(g_i)(x) = \frac{\int_0^x u^i \ln(u)du}{x} = \frac{1}{i+1} \frac{x^{i+1}\left(\ln(x) - \frac{1}{i+1}\right)}{x} = \frac{x^i \ln(x)}{i+1} - \frac{x^i}{(i+1)^2} = \frac{1}{i+1} g_i(x) - \frac{1}{(i+1)^2} f_i(x)$. En résumé pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ que $\phi(f_i) = \frac{1}{i+1} f_i$ et $\phi(g_i) = \frac{1}{i+1} g_i - \frac{1}{(i+1)^2} f_i$ donc $\phi(f_i), \phi(g_i) \in \mathbb{F}_n$. ϕ_n est donc un endomorphisme dont la matrice peut être donnée vu les relations ci-dessus. La matrice est $\Omega_{2n} = \begin{pmatrix} D_n & -E_n \\ 0 & D_n \end{pmatrix}$ où $D_n = \text{diag}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n+1}\right)$ et $E_n = \text{diag}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{(n+1)^2}\right)$.

iii) Notons $f(x) = ax + bx^2 + cx\ln(x) + dx^2\ln(x)$. Cela implique le système d' équations : $\frac{a}{2} = \frac{c}{4}, \frac{b}{3} = \frac{d}{9}, \frac{c}{2} = 1$ et $\frac{d}{3} = 1$ donc $c = 2, d = 3$ et $a = \frac{c}{2} = 1, b = \frac{d}{3} = 1$.Ainsi la solution est $f(x) = x + x^2 + 2x\ln(x) + 3x^2\ln(x)$.

PARTIE B : L'APPLICATION ϕ ET PROPRIETES DE MONOTONIE

1) Si $f \le g$ alors $\forall x \ge 0, \forall u \in [0,x]; f(u) \le g(u)$ donc $\frac{\int_0^x f(u)du}{x} \le \frac{\int_0^x g(u)du}{x}$ c'est-à-dire que $\phi(f)(x) \le \phi(g)(x)$. Finalement $\phi(f) \le \phi(g)$.

2) Si f est croissante alors pour$x \le y, \forall t \in [0,1]; f(xt) \le g(xt)$ donc$\int_0^1 f(xt)dt \le \int_0^1 f(yt)dt$ soit $\phi(f)(x) \le \phi(f)(y)$. $\phi(f)$ est donc croissante.

Si f est décroissante alors pour $x \le y, \forall t \in [0,1]; f(xt) \ge g(xt)$ donc$\int_0^1 f(xt)dt \ge \int_0^1 f(yt)dt$ soit $\phi(f)(x) \ge \phi(f)(y)$. $\phi(f)$ est donc décroissante.

3) Si f est croissante alors $\forall x \ge 0, \forall t \in [0,1]; f(xt) \le f(x)$ donc$\int_0^1 f(xt)dt \le \int_0^1 f(x)dt$ soit $\phi(f)(x) \le f(x)$. Donc $\phi(f) \le f$.

Si f est décroissante alors $\forall x \ge 0, \forall t \in [0,1]; f(xt) \ge f(x)$ donc$\int_0^1 f(xt)dt \ge \int_0^1 f(x)dt$ soit $\phi(f)(x) \ge f(x)$. Donc $\phi(f) \ge f$.

PARTIE C : ETUDE DES ITEREES DE ϕ

1. Pour unifier les notations on posera $u_0(x) = f(x)$.

i) Nous savons que $\phi(F)(0) = F(0)$ pour $F \in \mathbb{E}$. En particulier en prenant $F = \phi^n(f)$ on trouve $\phi^{n+1}(f)(0) = \phi^n(f)(0)$ soit $u_{n+1}(0) = u_n(0)$ donc $\left(u_n(0)\right)_{n\ge 0}$ est constante. On répond maintenant avec $u_n(0) = u_0(0) = f(0)$.

ii) f est croissante donc $\phi(f) = u_1$ est croissante. Ainsi on montre par récurrence que u_n est croissante. En effet si u_n est croissante alors $\phi(u_n) = u_{n+1}$ est croissante et puisque la propriété est vraie pour $n = 0,1$ ceci achève notre récurrence.

iii) Comme u_n est croissante on alors que $\phi(u_n) \le u_n$ c'est-à-dire que $u_{n+1} \le u_n$. Et donc pout tout réel x on a $u_{n+1}(x) \le u_n(x)$ donc $\left(u_n(x)\right)_{n\ge 0}$ est décroissante et aussi positive. En effet $u_n(x) \ge u_n(0) = f(0) \ge 0$.En d'autres termes $\left(u_n(x)\right)_{n\ge 0}$ est décroissante et minorée elle converge vers un réel $l(x)$. u_n étant croissante pour $x \le y$ on a donc $u_n(x) \le u_n(y)$ puis en faisant tendre n vers $+\infty$ on trouve $l(x) \le l(y)$. l est bien croissante.

iv) Par définition $\int_0^x f(u)du = x\phi(f)(x)$ et donc $f(x) = \phi(f)(x) + x\phi'(f)(x)$.Avec $f = u_n$ il vient $u_n(x) = u_{n+1}(x) + xu_{n+1}'(x)$ donc $u_n(x) - u_{n+1}(x) = xu_{n+1}'(x)$ et donc en sommant on a $\sum_{k=0}^{n-1} x u_{k+1}{}'(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(u_k(x) - u_{k+1}(x)\right) = u_0(x) - u_n(x)$ et en faisant apparaître les termes on a $x\left(u_1'(x) + \cdots + u_n'(x)\right) = f(x) - u_n(x)$.

Maintenant on introduit la fonction $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_n(x)$ et la suite $u_n(x,y) = u_n(y) - u_n(x)$ pour $0 < x < y$ ainsi $u_n(x,y) \geq 0$. Aussi $S_n{}'(x) = \frac{f(x)-u_n(x)}{x}$ donc $|S_n{}'(x)| \leq \frac{f(x)}{x}$. En outre d'après l'inégalité de la moyenne on a $\sum_{k=1}^{n} u_n(x,y) = S_n(y) - S_n(x) \leq \frac{(y-x)f(x)}{x}$ ainsi $\sum_{k=1}^{\infty} u_n(x,y)$ converge .

v) $\sum_{k=1}^{\infty} u_n(x,y)$ converge alors $\lim_{n\to\infty} u_n(x,y) = l(y) - l(x) = 0$ donc $l(y) = l(x)$. D'où l est constante sur $\mathbb{R}^{+*}$. Soit ε>0 et comme u_1 est continue il existe $x > 0$ tel que $|u_1(x) - u_n(0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ c'est-à-dire $u_1(x) - f(0) < \frac{\varepsilon}{2}$ donc $0 \leq u_n(x) - f(0) < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geq 1$ car $\left(u_n(x)\right)_{n\geq 0}$ est décroissante. Puisque $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = l$ il existe un entier $N > 0$ tel que $|l - u_N(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Par conséquent $|l - f(0)| \leq |l - u_N(x)| + |u_N(x) - f(0)| < \varepsilon$ donc $|l - f(0)| < \varepsilon$ pour tout ε>0 donc $l = f(0)$.

2.

*$u_n(0) = f(0)$.

*La fonction $x \longmapsto u_n(x)$ est décroissante.

*$\left(u_n(x)\right)_{n\geq 0}$ est croissante et majorée par $f(0)$ ainsi elle converge vers un réel $l(x)$.La fonction $x \longmapsto l(x)$ est décroissante

*Les points 2.iv et 2.v sont conservées.

3. S et I sont évidements des fonctions positives respectivement croissante et décroissante, il reste à montrer qu'elles sont continues. Pour un x positif f étant continue en x il existe un réel positif α tel que pour tout réel x' vérifiant $|x' - x| < \alpha$ on ait $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$. Donc pour $x' \in [x, x+\alpha[$; $f(x) - \varepsilon < f(x') < f(x) + \varepsilon$ c'est-à-dire $I(x) - \varepsilon < f(x') < S(x) + \varepsilon$ alors pout $t \in [0, x'[$ on a $I(x) - \varepsilon < f(t) < S(x) + \varepsilon$. En passant à la borne inférieure et supérieure on trouve $S(x') < S(x) + \varepsilon$ et $I(x) - \varepsilon < I(x')$ pour $x' \in [x, x+\alpha[$. De même pour $x' \in [x-\alpha, x[$ on a $S(x) < S(x') + \varepsilon$ et $I(x') - \varepsilon < I(x)$. En récapitulant on a dans tous les cas pour $|x' - x| < \alpha$ que $|S(x') - S(x)| < \varepsilon$ et $|I(x') - I(x)| < \varepsilon$. Nous avons bien la continuité de S et I.

Maintenant comme $I \leq f \leq S$ on a par récurrence que $\phi^n(I) \leq \phi^n(f) \leq \phi^n(S)$ et alors pour tout $x \geq 0$ et $n \geq 1$ alors $\phi^n(I)(x) \leq \phi^n(f)(x) \leq \phi^n(S)(x)$. Mais par les questions précédentes $\lim_{n\to\infty} \phi^n(S)(x) = \lim_{n\to\infty} \phi^n(I)(x) = S(0) = I(0) = f(0)$ par conséquent par le théorème des gendarmes on a que $\lim_{n\to\infty} \phi^n(f)(x) = f(0)$.

Soit $f \in \mathbb{E}$ et x un réel positif. Définissons un intervalle $I = [0, x'[$ avec $x' > x$ et $\mu = \inf_{x\in I} f(x)$ puis $g: \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) - \mu \end{cases}$. g est donc positive et $\phi^n(g)(x) = \phi^n(f)(x) - \mu$ par suite en calculant on a $\lim_{n\to\infty}\phi^n(g)(x)=g(0)=f(0)-\mu$ donc $\lim_{n\to\infty}\phi^n(f)(x)=\mu+\lim_{n\to\infty}(\phi^n(f)(x)-\mu)$ et finalement $\lim_{n\to\infty}\phi^n(f)(x)=f(0)$ pour toute fonction $f\in\mathbb{E}$.

PROBLEME II

PARTIE A : FONCTION MAJORANTE DE LA FONCTION K

1)$p_1=2$, $p_2=3$ et $p_3=5$ et $K(x)=\begin{cases}1 \text{ si } 0\le x<2\\ 2 \text{ si } 2\le x<3\\ 6 \text{ si } 3\le x<5\\ 30 \text{ si } 5\le x<6\end{cases}$. En général les points de discontinuité de K sont les nombres premiers.

2)Pour $0\le z\le y\le x$: $P(x,z)=\prod_{i/z<p_i\le x}p_i=\left(\prod_{i/y<p_i\le x}p_i\right)\left(\prod_{i/z<p_i\le y}p_i\right)=P(x,y)P(y,z)$.

3i)$C_{2n+1}^n=\frac{(2n+1)(2n)\dots(n+2)}{n!}$ Donc $n!\,C_{2n+1}^n=(2n+1)(2n)\dots(n+2)$. Pour un nombre premier p_i tel que $n+1<p_i\le 2n+1$ comme $p_i|(2n+1)(2n)\dots(n+2)$ alors $p_i|n!\,C_{2n+1}^n$ et par le lemme de Gauss $p_i|C_{2n+1}^n$. Les p_i étant premiers entre eux alors $\prod_{i/n+1<p_i\le 2n+1}p_i\,|C_{2n+1}^n$ ce qui n'est rien d'autre que $P(n+1,2n+1)|C_{2n+1}^n$.

3ii) Comme $P(n+1,2n+1)|C_{2n+1}^n$ alors $P(n+1,2n+1)\le C_{2n+1}^n$. Or $C_{2n+1}^n=\frac{C_{2n+1}^n+C_{2n+1}^{n+1}}{2}$ par suite $C_{2n+1}^n\le\frac{\sum_{k=0}^{2n+1}C_{2n+1}^k}{2}=\frac{2^{2n+1}}{2}=2^{2n}=4^n$ et enfin $P(n+1,2n+1)\le C_{2n+1}^n\le 4^n$.

4) Comme $K(x)=K([x])$ il suffit de montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ que $K(n)\le 4^n$. Nous procédons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$. Cette propriété est vraie pour $n\in\{0,1,2,3;4;5\}$. Maintenant pour un $n\ge 3$ supposons que la propriété soit vraie pour tout $k\le n-1$.Si n est pair alors il existe un entier $p\ge 1$ tel que $n=2p$ donc $K(n)=K(2p-1)$car $2p$ n'est pas un nombre premier. De là $K(n)\le 4^{2p-1}\le 4^{2p}=4^n$. Si n est impair alors il existe un entier $p\ge 1$ tel que $n=2p+1$ donc $K(n)=K(2p+1)=K(p+1)P(p+1,2p+1)$d'après l'hypothèse de récurrence et la question précédente on a $K(n)\le 4^{p+1}4^p=4^{2p+1}\le 4^n$. Fin de la récurrence d'où la conclusion.

PARTIE B : FONCTION MAJORANTE DU NOMBRE D'ENTIERS PREMIERS INFERIEURS A UN REEL X

1) Comme $K(x)\le 4^{[x]}$ pour $x\ge 2$ donc $\ln(K(x))\le 2[x]\ln(2)$ soit $S(x)\le 2x\ln(2)$.

2.

i) On introduira $p_0=1$.Et comme $K(p_i)=p_iK(p_{i-1})$ alors $S(p_i)=S(p_{i-1})+\ln(p_i)$. Ceci étant $I_k=\int_2^{p_k}S(t)f'(t)dt=\sum_{i=1}^{k-1}\int_{p_i}^{p_{i+1}}S(t)f'(t)dt=\sum_{i=1}^{k-1}S(p_i)\int_{p_i}^{p_{i+1}}f'(t)dt$

$\int_2^{p_k}S(t)f'(t)dt=\sum_{i=1}^{k-1}S(p_i)\left(f(p_{i+1})-f(p_i)\right)$ après intégration

$\int_2^{p_k}S(\square)f'(t)dt=\sum_{i=1}^{k-1}S(p_i)f(p_{i+1})-S(p_{i-1})f(p_i)-\sum_{i=1}^{k-1}\ln(p_i)\,f(p_i)$ et par télescopage

$I_k = S(p_{k-1})f(p_k) - \sum_{i=1}^{k-1}\ln(p_i)\,f(p_i) = (S(p_k) - \ln(p_k))f(p_k) - \sum_{i=1}^{k-1}\ln(p_i)\,f(p_i)$ d'où $\int_2^{p_k} S(t)f'(t)dt = S(p_k)f(p_k) - \sum_{i=1}^{k-1}\ln(p_i)\,f(p_i)$.

ii) $\int_2^x S(t)f'(t)dt = \int_2^{p_{N(x)}} S(t)f'(t)dt + \int_{p_{N(x)}}^x S(t)f'(t)dt$ et par la question précédente on a $\int_2^x S(t)f'(t)dt = S(p_{N(x)})f(p_{N(x)}) - \sum_{i=1}^{N(x)}\ln(p_i)\,f(p_i) + S(p_{N(x)})\left(f(x) - f(p_{N(x)})\right)$ et comme $S(x) = S(p_{N(x)})$ alors $\int_2^x S(t)f'(t)dt = S(x)f(x) - \sum_{i=1}^{N(x)}\ln(p_i)\,f(p_i)$ et on déduit aisément que $\sum_{i=1}^{N(x)}\ln(p_i)\,f(p_i) = S(x)f(x) - \int_2^x S(t)f'(t)dt$.

3) Avec $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$ on a $N(x) = \frac{S(x)}{\ln(x)} + \int_2^x \frac{S(t)}{t(\ln(t))^2}dt$ or $S(x) \leq 2x\ln(2)$ ce qui nous conduit à $N(x) \leq 2\ln(2)\left(\frac{x}{\ln(x)} + \int_2^x \frac{dt}{(\ln(t))^2}\right)$.

4.

i) On trouve que la fonction $g: u \longmapsto \frac{e^u}{u^2}$ est décroissante sur $[\ln(2), 2]$et croissante sur $[2, +\infty[$ ainsi il existe un unique rée u_0 tel que $u_0 > 2$ tel que $\frac{e^{u_0}}{{u_0}^2} = g(u_0) = g(\ln(2)) = \frac{2}{(\ln(2))^2}$.

ii) Pour $x > e^{u_0}$ on a $\ln(x) > u_0$ ainsi dans ce cas g est majorée par $g(\ln(x)) = \frac{x}{(\ln(x))^2}$. D'où $\int_{\ln(2)}^{\ln(x)} \frac{e^u}{u^2}du \leq \frac{x}{(\ln(x))^2}\int_{\ln(2)}^{\ln(x)} du = \frac{x}{(\ln(x))^2}(\ln(x) - \ln(2))$.

iii) Posant $u = \ln(t)$ on a $\int_{\ln(2)}^{\ln(x)} \frac{e^u}{u^2}du = \int_2^x \frac{dt}{(\ln(t))^2}$ ainsi $\int_2^x \frac{dt}{(\ln(t))^2} \leq \frac{x}{(\ln(x))^2}(\ln(x) - \ln(2)) \leq \frac{x}{\ln(x)}$

iv) Pour $x > e^{u_0}$ on a $N(x) \leq 2\ln(2)\left(\frac{x}{\ln(x)} + \int_2^x \frac{dt}{(\ln(t))^2}\right)$ donc $N(x) \leq 2\ln(2)\left(\frac{x}{\ln(x)} + \frac{x}{\ln(x)}\right)$ ce qui n'est rien d'autre que $N(x) \leq 4\ln(2)\frac{x}{\ln(x)}$.

*PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES : ISFA 2005

PROBLEME I

A-Etude de quelques propriétés de l'application $f \longmapsto I(f)$

1) Soit f une fonction positive telle que $I(f) = 0$ donc $\int_0^t \frac{F(t)}{(1+t)^2} dt = 0$. Par définition on a $F(t) = \int_0^t f(u)du$ ainsi si f est positive alors F est positive puis $t \longmapsto \frac{F(t)}{(1+t)^2}$ est continue positive. D'où $\frac{F(t)}{(1+t)^2} = 0$ et alors $F(t) = 0$ ce pour tout $t \geq 0$. Donc pour tout $t \geq 0$ alors $\int_0^t f(u)du = 0$. Ainsi on déduit que $f(u) = 0$ pour tout $u \in [0, t]$ avec t quelconque. Ainsi $f(u) = 0, \forall u \geq 0$ f est donc la fonction nulle.

2) Pour $A > 0$, $\int_0^A \frac{\mathrm{F(t)}}{(t+1)^2} dt = \int_0^A \mathrm{F(t)} \left(\frac{-1}{t+1}\right)' dt = \left[\frac{-F(t)}{t+1}\right]_0^A + \int_0^A \frac{f(t)}{t+1} dt = -\frac{F(A)}{1+A} + \int_0^A \frac{f(t)}{t+1} dt$.

($\Rightarrow$) Si $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t+1} dt$ converge alors $\int_0^A \frac{\mathrm{F(t)}}{(t+1)^2} dt = -\frac{F(A)}{1+A} + \int_0^A \frac{f(t)}{t+1} dt$ permet d'écrire puisque F est positive que $\int_0^A \frac{\mathrm{F(t)}}{(t+1)^2} dt \leq \int_0^A \frac{f(t)}{t+1} dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t+1} dt$ pour tout $A > 0$. Nous déduisons que $f \in E$ puisque $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{F(t)}}{(t+1)^2} dt$ converge.

($\Leftarrow$) Si $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{F(t)}}{(t+1)^2} dt$ converge alors $\frac{F(A)}{1+A} = \int_A^{+\infty} \frac{F(A)}{(t+1)^2} dt \leq \int_A^{+\infty} \frac{F(t)}{(t+1)^2} dt$ puisque F est croissante. Aussi $\int_0^A \frac{\mathrm{F(t)}}{(t+1)^2} dt + \frac{F(A)}{1+A} = \int_0^A \frac{f(t)}{t+1} dt$ alors $\int_0^A \frac{f(t)}{t+1} dt \leq \int_0^A \frac{\mathrm{F(t)}}{(t+1)^2} dt + \int_A^{+\infty} \frac{F(t)}{(t+1)^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{F(t)}}{(t+1)^2} dt$. Puisque A est positif quelconque alors $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t+1} dt$ converge.

Ceci achève la démonstration avec un résultat supplémentaire $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t+1} dt = \int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(t+1)^2} dt$.

3) A titre d'exemple on prend $f(t) = (1+t)\sin(t)$.

4) Avec $t = \frac{1}{u}$ on a $\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(t+1)^2} dt = \int_{+\infty}^0 \frac{F\left(\frac{1}{u}\right)\left(-\frac{1}{u^2}\right)}{\left(\frac{1}{u}+1\right)^2} du = -\int_{+\infty}^0 \frac{F\left(\frac{1}{u}\right)}{(u+1)^2} du = \int_0^{+\infty} \frac{F\left(\frac{1}{t}\right)}{(t+1)^2} dt$. Le résultat $I(f) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{F(t)+F\left(\frac{1}{t}\right)}{(t+1)^2} dt$ en découle immédiatement.

B- L'objet de cette partie est le calcul de l'intégrale $I(f)$ pour une fonction f particulière

Préliminaire

a) Pour la convergence des intégrales J et K il suffit de régler le problème en 0 car les fonctions concernées sont continues en 1. Comme $\frac{\ln(t)}{1+t} \sim_0 \ln(t)$ et $\frac{\ln(1+t)}{t} \sim_0 1$ et que $t \longmapsto \ln(t)$ est intégrable par exemple sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ on a notre conclusion.

b) $J(\varepsilon) = \int_\varepsilon^1 \frac{\ln(t)}{1+t} dt = \int_\varepsilon^1 \ln(\mathrm{t}) \ln'(1+\mathrm{t}) dt = [\ln(t)\ln(1+t)]_\varepsilon^1 + K(\varepsilon)$où $K(\varepsilon) = -\int_\varepsilon^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt$. Puis $J(\varepsilon) = K(\varepsilon) - \ln(\varepsilon)\ln(1+\varepsilon)$ or $\ln(\varepsilon)\ln(1+\varepsilon) \sim_0 \varepsilon\ln(\varepsilon)$ donc en faisant tendre $\varepsilon \to 0$ on obtient $J = K$.

c) En utilisant les séries on a $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$ sur $[0,1]$. Et en utilisant e critère des séries alternées : $\left|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}\right| \le \frac{x^{n+1}}{n}$ et en divisant cette inégalité par x on a $\left|\frac{\ln(1+x)}{x} - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{k-1}}{k}\right| \le \frac{x^n}{n} \le \frac{1}{n}$ donc $\frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{k-1}}{k}$ et cette convergence est uniforme sur $[0,1]$. On peut donc permuter $\int$ et $\sum$. Donc on écrit ensuite que

$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{t^{k-1}}{k}\right) dt = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \int_0^1 \frac{t^{k-1}}{k} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$. Mais par calcul $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}$ et puisque $K = -\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ on a bien $J = K = -\frac{\pi^2}{12}$.

1i) Pour montrer que $f \in E$ il suffit de montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t+1} dt$ converge. Ici $\frac{f(t)}{t+1} = \frac{\ln(t+1)}{t(t+1)}$ ainsi $\frac{f(t)}{t+1} \sim_0 \frac{1}{t+1}$ donc $t \longmapsto \frac{f(t)}{t+1}$ est intégrable sur $[0,1]$. Encore $\frac{f(t)}{t+1} \sim_{+\infty} \frac{\ln(t+1)}{t^2}$ puis $t^{\frac{3}{2}} \frac{f(t)}{t+1} \sim_{+\infty} \frac{\ln(t+1)}{t^{\frac{1}{2}}}$ alors $\frac{f(t)}{t+1} =_{+\infty} o\left(t^{\frac{3}{2}}\right)$ d'où $t \longmapsto \frac{f(t)}{t+1}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. Joignant ces deux résultats on a bien la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t+1} dt$ pour conclure.

1ii) On a $F(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt$ or $\frac{1}{t} =_{+\infty} o\left(\frac{\ln(1+t)}{t}\right)$ donc $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t} dt$ diverge vers $+\infty$ ce qui est évidemment le cas pour F en $+\infty$.

2) On trouve $f(x) - \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(x)}{x}$. Or $\left(F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = f(x) - \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(x)}{x}$ ainsi en intégrant il vient $F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}(\ln(x))^2 + 2F(1)$. Et puisque $t \longmapsto \frac{(\ln(t))^2}{(1+t)^2}$ et $t \longmapsto \frac{F(1)}{(1+t)^2}$ sont intégrables sur $[0,+\infty[$ on a $I(f) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{F(t)+F\left(\frac{1}{t}\right)}{(t+1)^2} dt = I(f) = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \left(\frac{\ln(t)}{t+1}\right)^2 dt + \int_0^{+\infty} \frac{F(1)}{(t+1)^2} dt$. D'où $I(f) = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \left(\frac{\ln(t)}{t+1}\right)^2 dt + F(1)$ or $F(1) = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt = -K$. Et nous avons le résultat voulu $I(f) = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \left(\frac{\ln(t)}{t+1}\right)^2 dt - K$.

3) $\int_\varepsilon^1 \left(\frac{\ln(t)}{t+1}\right)^2 dt = \int_\varepsilon^1 (\ln(t))^2 \left(\frac{-1}{t+1}\right)' dt = \left[\frac{-(\ln(t))^2}{t+1}\right]_\varepsilon^1 + 2\int_\varepsilon^1 \frac{\ln(t)}{t(t+1)} dt$ or $\frac{\ln(t)}{t(t+1)} = \frac{\ln(t)}{t} - \frac{\ln(t)}{(t+1)}$ puis en remplaçant $\int_\varepsilon^1 \left(\frac{\ln(t)}{t+1}\right)^2 dt = \left[\frac{t(\ln(t))^2}{t+1}\right]_\varepsilon^1 - 2\int_\varepsilon^1 \frac{\ln(t)}{(t+1)} dt$ puis en faisant tendre $\varepsilon \to 0$ on trouve que $\int_0^1 \left(\frac{\ln(t)}{t+1}\right)^2 dt = -2\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(t+1)} dt = -2J$.

Avec $t=\frac{1}{u}$ on a $\int_1^{+\infty}\left(\frac{\ln(t)}{t+1}\right)^2 dt=\int_1^0\left(\frac{-\ln(u)}{\frac{1}{u}+1}\right)^2\left(\frac{-1}{u^2}\right)dt=\int_0^1\left(\frac{\ln(t)}{t+1}\right)^2 dt$. Ceci nous conduit à $I(f)=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\ln(t)}{t+1}\right)^2 dt-K=I(f)=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{\ln(t)}{t+1}\right)^2 dt-K=-J-K=\frac{\pi^2}{6}$. Finalement $I(f)=\frac{\pi^2}{6}$.

PROBLEME IIII

1) A partir de la relation de récurrence $z_{n+1}=\frac{{z_n}^2}{2}$ on a $w_{n+1}={w_n}^2$ pour $w_n=\frac{u_n}{2}$.Chose qui par une récurrence simple donne $w_n={w_0}^{2^n}$

* Si $|u_0|<2$ alors $|w_0|<1$ or $w_n={w_0}^{2^n}$ ce qui prouve que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0.C'est aussi le cas de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

* Si $|u_0|=2$ alors $|w_0|=1$ or $w_n={w_0}^{2^n}$ ce qui prouve que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es constante et converge vers 1.C'est aussi le cas de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante égale à 2.

* Si $|u_0|>2$ alors $|w_0|>1$ or $w_n={w_0}^{2^n}$ ce qui prouve que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et diverge vers $+\infty$.C'est aussi le cas de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

<u>Réponse alternative</u> : Si $|u_0|<2$ alors $|w_0|<1$. Comme $w_1={w_0}^2$ il s'en suit que $w_1<|w_0|<1$. Maintenant nous montrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ que $0\leq w_{n+1}<w_n<1$. En effet si l'on a $w_n<w_{n-1}<1$ du fait que $w_n<1$ et que $w_{n+1}={w_n}^2$ alors on déduit que $0\leq w_{n+1}<w_n<1$. Par conséquent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante minorée elle converge donc cers un réel l vérifiant $l^2=l$. De ce fait $l\in\{0,1\}$ mais la suite devant converger vers sa borne inférieure alors $l=0$.

* Si $|u_0|>2$ alors $|w_0|>1$ or $w_n={w_0}^{2^n}$ ce qui prouve que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers $+\infty$.C'est aussi le cas de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

* Si $|u_0|=2$ alors $|w_0|=1$ or $w_n=1$ pour $n\geq 1$ ce qui prouve que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et converge vers 1. $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi mais reste égale à 2.

2i) Soit $L=(l,l')$ une limite éventuelle de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ce qui signifie que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers l et l'. Compte tenu de $\begin{cases}x_{n+1}=\frac{x_n^2+y_n^2}{2}\\ y_{n+1}=x_ny_n\end{cases}$ on en déduit que $\begin{cases}l=\frac{l^2+(l')^2}{2}\\ l'=ll'\end{cases}$. Avec la dernière égalité on trouve $l'=0$ ou $l=1$. Si $l'=0$ on a $l=\frac{l^2}{2}$ soit $l=0$ ou $l=2$. Si $l'=1$ on a $l^2=1$ soit $l=1$ ou $l=-1$. Les éventuelles points limites sont donc $(0,0),(2,0),(1,1)$ et $(1,-1)$.

2ii) On utilise le changement de variable suggéré avec $s_n=x_n+y_n$ et $d_n=x_n-y_n$ et on trouve alors $s_{n+1}=\frac{{s_n}^2}{2}$ et $d_{n+1}=\frac{{d_n}^2}{2}$ qui est la relation de récurrence du 1. Maintenant répondons à la question :

$*L=(0,0)$ dans ce cas $(s_n,d_n)\to(0,0)$ et donc d'après la question 1 il faut et il suffit que $|x_0-y_0|<2$ (a) et $|x_0+y_0|<2$ (b). Ainsi on se sert des droites d'équation $D_{1,2}: x-y=\pm 2$ et $D_{3,4}: x+y=\pm 2$ puis des points $A(0,2), B(2,0)$, $C(0,-2)$ et $D(-2,0)$ dans le tracé des différents domaines pour résoudre les inéquations (a) et (b). On trouve que E_L est l'intérieur du carré $ABCD$.

$*L=(2,0)$ dans ce cas $(s_n,d_n)\to(2,2)$ donc toujours d'après la question 1 on a $|x_0-y_0|=2$ et $|x_0+y_0|=2$. Ici sans difficulté on trouve que $E_L=\{A,B,C,D\}$.

$*L=(1,1)$ dans ce cas $(s_n,d_n)\to(2,0)$ donc toujours d'après la question 1 on a $|x_0-y_0|<2$ et $|x_0+y_0|=2$. Ici sans difficulté on trouve que $\square_L=]AB[\cup]CD[$. Où par exemple on utilise la définition $]AB[=[AB]\setminus\{A,B\}$.

$*L=(1,-1)$ dans ce cas $(s_n,d_n)\to(0,2)$ donc toujours d'après la question 1 on a $|x_0-y_0|=2$ et $|x_0+y_0|<2$. Ici sans difficulté on trouve que $E_L=]AD[\cup]BC[$.

3) Vu les résultats $w_n={w_0}^{2^n}$ et $w_n=\frac{u_n}{2}$ de la question 1 on déduit aisément que $u_n=2\left(\frac{u_0}{2}\right)^{2^n}$. Or $x_n=\frac{s_n+d_n}{2}$ et $y_n=\frac{s_n-d_n}{2}$ par conséquent avec les résultats $s_{n+1}=\frac{{s_n}^2}{2}$ et $d_{n+1}=\frac{{d_n}^2}{2}$ on a alors $x_n=\left(\frac{x_0+y_0}{2}\right)^{2^n}+\left(\frac{x_0-y_0}{2}\right)^{2^n}$ et $y_n=\left(\frac{x_0+y_0}{2}\right)^{2^n}-\left(\frac{x_0-y_0}{2}\right)^{2^n}$. En remarquant que pour $a>b>1$ on a $b^n=o(a^n)$. Maintenant si (x_0,y_0) n'appartient à aucun $E_L$il est évident $|x_0-y_0|>2$ et $|x_0+y_0|>2$.

*1^er cas : $x_0y_0\neq 0$

Comme $y_n=\left(\frac{{x_0}^2+2x_0y_0+{y_0}^2}{4}\right)^{2^{n-1}}-\left(\frac{{x_0}^2-2x_0y_0+{y_0}^2}{4}\right)^{2^{n-1}}$ maintenant $y_n\sim\left(\frac{{x_0}^2+2x_0y_0+{y_0}^2}{4}\right)^{2^{n-1}}$ si $x_0y_0>0$ et $y_n\sim\left(\frac{{x_0}^2+2x_0y_0+{y_0}^2}{4}\right)^{2^{n-1}}$ si $x_0y_0<0$ donc $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\begin{cases}+\infty \text{ si } x_0y_0>0\\ -\infty \text{ si } x_0y_0<0\end{cases}$ et aussi sans problèmes $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$.

*2^ème cas : $x_0y_0=0$

Si $x_0=0$ alors $x_n=2\left(\frac{y_0}{2}\right)^{2^n}$ et $y_n=0$ pour $n\geq 1$ donc $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$. Avec $y_0=0$ on a $x_n=2\left(\frac{x_0}{2}\right)^{2^n}$ et $y_n=0$ pour $n\geq 1$ donc $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$.

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES : ISFA 2006

EXERCICE

1) Vu le terme $(x^2-1)y'$ il est subtil de choisir un polynôme p de second degré. En choisissant $p=ax^2+bx+c$ on trouve $(x^2-1)p'+xp=3ax^3+2bx^2+(-2a+c)x-b=x^3-x$.Chose qui nous ramène les équations $b=0{,}3a=1$ et $-2a+c=-1$ donc $a=\frac{1}{3}$ et $c=-\frac{1}{3}$. Ainsi notre solution particulière est $p(x)=\frac{1}{3}(x^2-1)$.

2) Notons $I_0=]-\infty,-1[, I_1=]-1{,}1[$ et $I_2=]-1{,}1[$.En résolvant $(x^2-1)y'+xy=0\ (E_H)$ l'équation homogène associé sur chaque intervalle I_k on trouve comme solution $y_k=Ae^{\int\frac{-x}{x^2-1}dx}$. Comme $\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)$ alors $\int\frac{-x}{x^2-1}dx=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{|x^2-1|}}\right)+C$ et finalement $y_k=\frac{A}{\sqrt{|x^2-1|}}$.Et finalement l'ensemble solution S_k de (E) sur I_k est $S_k=\left\{x\mapsto\frac{1}{3}(x^3-x)+\frac{A}{\sqrt{|x^2-1|}}\ /\ A\in\mathbb{R}\right\}$.

3) Prenons une solution y de (E) sur tout $\mathbb{R}$, on peut écrire $\forall x\in I_k, y(x)=\frac{1}{3}(x^3-x)+\frac{A_k}{\sqrt{|x^2-1|}}$. Si par exemple $A_0\neq 0$ on trouve $\lim_{x\to 1^-} y(x)=\pm\infty$ ainsi $A_0=0$ et il en est de même pour A_1 et A_2 d'où la seule solution de (E) sur $\mathbb{R}$ est p.

PROBLEME 1

1.a) Le calcul donne ${}^tA=-A$.Comme $\det(A)=0$ on a toujours $rg(A)\leq 2$.

$rg(A)=2$ si $(a,b,c)\neq(0{,}0{,}0)$ et $rg(A)=0$ si $(a,b,c)=(0{,}0{,}0)$.

1.b) Le polynôme caractéristique de A est $X_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda(\lambda^2 + a^2 + b^2 + c^2)$.

*Si $(a, b, c) \neq (0,0,0)$ la seule valeur propre réelle de A est $\lambda = 0$ or $\dim(KerA) = 3 - rg(A) = 1$ ainsi A n'est pas diagonalisable.

*Si $(a, b, c) = (0,0,0), A = 0_3$ ainsi A est diagonalisable.

2) Si $u \in \mathcal{A}(E), \forall(x, y) \in E^2, (u(x)|y) = -(x|u(y))$ en prenant $x = y$ on a $(u(x)|x) = -(x|u(x))$ donc $2(u(x)|x) = 0$ soit $(u(x)|x) = 0$ pour tout $x \in E$. Maintenant supposons que $(u(x)|x) = 0$ pour tout $x \in E$.On a donc $\forall(x, y) \in E^2, (u(x + y)|x + y) = (u(x)|x) + (u(y)|y) + (u(x)|y) + (x|u(y)) = (u(x)|y) + (x|u(y)) = 0$ donc $\forall(x, y) \in E^2, (u(x)|y) = -(x|u(y))$ donc $u \in \mathcal{A}(E)$ ce qui achève notre résultat.

3) Notons $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ on sait que $u \in \mathcal{A}(E)$ssi $\forall(x, y) \in E^2, (u(x)|y) = -(x|u(y))$.En se rapportant à une base il faut que $\forall(i, j) \in [\![1, n]\!]^2, (u(e_i)|e_j) = -\left(e_i|u(e_j)\right)$ cependant si $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ on a $(u(e_i)|e_j) = a_{i,j}$ et $\left(e_i|u(e_j)\right) = a_{j,i}$ on finit par aboutir à $u \in \mathcal{A}(E)$ssi $\forall(i, j) \in [\![1, n]\!]^2, a_{i,j} = -a_{ji}$ donc ssi ${}^tA = -A$.

4) Sans difficultés $\mathcal{A}(E)$ est un espace vectoriel. Maintenant en notant $E_{kl} = (\delta_{ki}\delta_{jl})_{1\leq i,j\leq n}$ la base canonique $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ appartenant à $\mathcal{A}(E)$ on peut écrire que $A = \sum_{1\leq l<k\leq n} a_{kl}(E_{kl} - E_{lk})$ ainsi $(E_{kl} - E_{lk})_{1\leq l<k\leq n}$ est une base de $\mathcal{A}(E)$ or cette base contient $\frac{n(n-1)}{2}$ éléments d'où $\dim(\mathcal{A}(E)) = \frac{n(n-1)}{2}$.

5.a)$\forall x \in E, (u(x)|x) = (a|x)(b|x) - (b|x)(a|x) = 0$ ainsi $u \in \mathcal{A}(E)$.

5.b) On peut écrire $u(x) = \|a\|\|b\|((e_1|x)e_2 - (e_2|x)e_1)$ ainsi $(e_k) = 0$ si $3 \leq k \leq n$, $u(e_1) = \|a\|\|b\|e_2$et $u(e_2) = \|a\|\|b\|e_1$ alors $U = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A_2 & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix}$ par blocs avec $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\|a\|\|b\| \\ \|a\|\|b\| & 0 \end{pmatrix}$,le polynôme caractéristique est $(-\lambda)^{n-2}(\lambda^2 + \|a\|^2\|b\|^2)$.

6a) Soit λ une valeur propre réelle de u associé au vecteur propre x on a $(u(x)|x) = \lambda(x|x) = 0$

Comme $(x|x) > 0$ on a alors $\lambda = 0$ d'où la seule valeur propre possible pour u est 0.

6b) La seule valeur propre réelle possible étant 0,si u est diagonalisable il doit donc être l'endomorphisme nul sinon il n'est pas diagonalisable.

6c) $\forall(x, y) \in E^2, (u \circ u(x)|y) = -(u(x)|u(y)) = -(-(x|u \circ u(y))) = (x|u \circ u(y))$ donc $u \circ u$ est un endomorphisme symétrique réel.

6d) Soit λ une valeur propre complexe de u associé au vecteur propre x,on notera $\bar{x}$ son conjugué c'est-à-dire le vecteur dont les composantes sont les conjugués de celles de x.Ainsi$(x|u(\bar{x})) = (x|\overline{u(x)}) = (x|\overline{\lambda x}) = \bar{\lambda}(x|\bar{x})$ et $(x|u(\bar{x})) = -(u(x)|\bar{x}) = -\lambda(x|\bar{x})$ et par conséquent $\bar{\lambda} = -\lambda$, λ est donc imaginaire pur d'où la conclusion.

7a) Il est classique que chaque polynôme de degré impair admet une racine réelle or ici puisque n est impair alors le polynôme caractéristique de u étant de degré n admet nécessairement une racine réelle. Nous savons d'après la question 6a) que cette racine est 0 qui est aussi valeur propre de u d'où $\det(u) = 0$.

7b) Soit $x \in Keru$ et $y \in Im(u)$.Par définition de $Im(u), \exists x' \in E$ tel que $y = u(x')$,nous avons ainsi $(x|y) = (x|u(x')) = -(u(x)|x') = -(0|x') = 0$.Nous concluons que $Ker(u)$ et $Im(u)$ sont orthogonaux.

7c) Nous savons que v est un endomorphisme sur $Im(u)$ ainsi pour montrer qu'il est bijectif il suffit de montrer qu'il est injectif. Pour se faire prenons $x \in Ker(v)$ on a donc $u(x) = 0$ ainsi $x \in Keru \cap Im(u)$ or $Keru \cap Im(u) = 0$ car $Ker(u)$ et $Im(u)$ sont orthogonaux alors $x = 0$. Autrement dit v est injectif donc bijectif.

7d) On a $\dim(Imu)$ est pair car s'il était impair on aurait d'après la question 7.a que $\det(v) = 0$ ce qui serait contradictoire avec le résultat du 7.c,le rang de u est donc pair.

8) Les éventuelles valeurs propres de u sont 0 et les imaginaires pur $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ .Nous savons que $rg(u)$ est pair ainsi on peut écrire que $rg(u) = 2p$ pour un certain entier p. Cela nécessite que $N = 2p$ et que le polynôme caractéristique de u soit de la forme $(-1)^n X^{n-2p} \prod_{k=1}^{2p}(X - \lambda_k)$. Ce polynôme étant à coefficients réels si λ est une racine $\bar{\lambda}$ l'est ainsi en réarrangeant les indices on peut supposer que $\lambda_{k+p} = \bar{\lambda}_k = -ia_k$ pour $1 \leq k \leq p$ et des réels $a_1, a_2, \dots, a_p$.Le polynôme caractéristique est donc $\mathcal{X}_u = (-1)^n X^{n-2p} \prod_{k=1}^{2p}(X - \lambda_k) = (-1)^n X^{n-2p} \prod_{k=1}^{p}(X - \lambda_k)(X - \bar{\lambda}_k)$

$\mathcal{X}_u = (-1)^n X^{n-2p} \prod_{k=1}^{p}(X^2 + |\lambda_k|^2) = (-1)^n X^{n-2p} \prod_{k=1}^{p}(X^2 + {a_k}^2)$ ce qu'il fallait démontrer.

PROBLEME 2

A. règle de Cauchy

1a) On a $k \in]L, 1[$ et posons $\varepsilon = k - L$.Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = L$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $\left|\sqrt[n]{u_n} - L\right| < \varepsilon$ donc $\sqrt[n]{u_n} < L + \varepsilon = k$.Il existe donc$n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0 \Rightarrow u_n < k^n$.

1b) Pour $n \geq n_0, u_n < k^n$ et comme $k < 1, \sum k^n$ converge ce qui nous permet de conclure que $\sum u_n$ converge.

2a) On a $L > 1$et posons $\varepsilon = L - 1$.Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = L$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $\left|\sqrt[n]{u_n} - L\right| < \varepsilon$ donc $\sqrt[n]{u_n} > L - \varepsilon = 1$ .Il existe donc$n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0 \Rightarrow u_n > 1$.

2b) Pour $n \geq n_0, u_n > 1$ et comme$\sum 1$ diverge alors $\sum u_n$ diverge.

3) En prenant les suites $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$ on a $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{v_n} = 1$ cependant $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge alors que $\sum_{n\geq 1} v_n$ diverge.

4) On applique la règle de Cauchy

*Pour $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ on a $\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\mathrm{e}}$ et comme $\frac{1}{\mathrm{e}} < 1$ on a alors que $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ converge.

* Pour $a_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2+n}$ on a $\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \mathrm{e}$, et comme $\mathrm{e} > 1$ on a alors que $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2+n}$ diverge.

B.COMPARAISON AVEC LA REGLE DE D'ALEMBERT

5. Notons $u_n = w_n - w_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ mais alors $\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n} = \frac{w_n - w_0}{n}$ ainsi d'après le théorème de Césaro on a que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{w_n - w_0}{n} = l$ et comme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{w_0}{n} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{w_n}{n} = l$.

6) Etant donné que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} = l$ on a $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(u_n) - \ln(u_{n-1}) = \ln(l)$.En appliquant le résultat de la question 5 à $\ln(u_n)$ on trouve $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(u_n)}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(\sqrt[n]{u_n}\right) = \ln(l)$ en utilisant la fonction exp on obtient ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$.

7) Nous avons $\sqrt[2p]{u_{2p}} = \sqrt{3}$, $\sqrt[2p+1]{u_{2p+1}} = 3^{\frac{p}{2p+1}}$, $\frac{u_{2p+1}}{u_{2p}} = 1$ $\frac{u_{2p+2}}{u_{2p+1}} = 3$ ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 3$ alors que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n-1}}$ n'existe pas. Ainsi la réciproque n'est pas vérifiée.

C.APPLICATION AUX SERIES ENTIERES

8) Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| l$.Si $|x| < \frac{1}{l}$, la série $\sum a_n x^n$ est absolument convergente et si $|x| > \frac{1}{l}$, la série $\sum |a_n| |x|^n$ est divergente ainsi le rayon de convergence de cette série entière est $R = \frac{1}{l}$.

9.a) On applique le résultat de la question 8

*Pour $a_n = 2^n$on a $\sqrt[n]{a_n} = 2$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 2$ .Le rayon de convergence de $\sum 2^n x^n$ est $R = \frac{1}{2}$.

*Pour $a_n = n^{(-1)^n}$on trouve que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ .Le rayon de convergence de $\sum n^{(-1)^n} x^n$ est $R = 1$.

9.b) Notons R_a le rayon de convergence de $\sum a^{n^2} x^n$. Pour $a_n = a^{n^2}$on a $\sqrt[n]{a_n} = a^n$ donc

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 0 \text{ si } a < 1 \\ 1 \text{ si } a = 1 \\ +\infty \text{ si } a > 1 \end{cases} \text{ donc } R_a = \begin{cases} +\infty \text{ si } a < 1 \\ 1 \text{ si } a = 1 \\ 0 \text{ si } a > 1 \end{cases}$$

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES : ISFA 2007

EXERCICE 1

1) On a $\dim(F) \leq 3$, en regardant la matrice Mformée par les vecteurs V_1, V_2 et V_3 on remarque une sous matrice d'ordre 3 en rouge inversible $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & c \end{pmatrix}$ en effet $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$.Donc $\dim(F) = 3$ mais (V_1, V_2, V_3) étant un système libre il est une base de de F. F étant un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ il existe une forme linéaire φ telle que $F = Ker\varphi$.En écrivant $\varphi = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t$, après calcul on prend $\alpha = -a - c - 1$, $\beta = -1$, $\gamma = a + c$ et $\delta = -1$. Par conséquent on a $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / -(a + c + 1)x - \beta y + (a + c)z - t = 0\}$.

2) Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A , elle est équivalente à la matrice A' dont les colonnes sont $C_1, C_1 + C_2, C_3 - aC_2 - aC_1$. On a $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & b \\ -1 & 0 & c + a \end{pmatrix}$ nous voyons que

$rg(A) \geq 2$ pour que f soit injective il faut que $rg(A) = 2$ ce qui est équivalent $b = 0$ et $c = -a$.

Si une matrice B vérifie $AB = 0$ alors toutes les colonnes de B sont dans $KerA = Vect\left\{\begin{pmatrix} a \\ a \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ dans ce cas -ci. Donc A est de la forme $\begin{pmatrix} \alpha a & \beta a & \gamma a \\ \alpha a & \beta a & \gamma a \\ -\alpha & -\beta & -\gamma \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

3) Lorsque $b = 1$, f est injective donc l'équation $AX = Y$ admet au plus une solution pour $Y \in \mathbb{R}^4$ donné. Pour qu'il y ait une solution il faut que $Y \in Im(A) = F$ ainsi si $Y = {}^t(x, y, z, t)$ on doit avoir l'équation $-(a + c + 1)x - \beta y + (\square + c)z - t = 0$.

EXERCICE 2

1) Après une heure on a $\frac{a}{2}$ de la substance A, entre la première et la deuxième heure $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a}{4}$ de la substance A se transforme. Et par une récurrence immédiate entre la $(n-1)$-ème heure et la n-ème heure il se transforme encore $\frac{a}{2^n}$ de la substance A. Au total après une heure il s'est transformé une proportion $S_n = \frac{a}{2} + \frac{a}{2^2} + \cdots + \frac{a}{2^n} = \frac{a}{2}\left(a + \frac{a}{2} + \cdots + \frac{a}{2^{n-1}}\right) = \frac{a}{2}\left(\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}\right) = a\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$. On vérifie que $S_4 = a\left(1 - \frac{1}{2^4}\right) = a\left(1 - \frac{1}{16}\right) = \frac{15}{16}a$.

2) Notons aussi $a(t)$ la quantité de la substance A restante à l'instant t. On a le système $\begin{cases} a(t) + x(t) + y(t) = 0 \\ x'(t) = ka(t) \\ y'(t) = la(t) \end{cases}$ avec $a(0) = a, x(0) = y(0) = 0$ et $k, l \in \mathbb{R}$ .En sommant les deux dernières $x'(t) + y'(t) = (k + l)a(t)$ on a aussi $a'(t) + x'(t) + y'(t) = 0$ en dérivant la première. On en déduit que $a'(t) + (k + l)a(t) = 0$ d'où $a(t) = ae^{-(k+l)t}$. Comme $a(1) = \frac{a}{2}$ alors $k + l = \ln(2)$ et $a(t) = \frac{a}{2^t}$ .Il reste $\begin{cases} x'(t) = k\frac{a}{2^t} \\ y'(t) = l\frac{a}{2^t} \end{cases}$ puis $\begin{cases} x(t) = \frac{ka}{\ln(2)}\left(1 - \frac{1}{2^t}\right) \\ y(t) = \frac{la}{\ln(2)}\left(1 - \frac{1}{2^t}\right) \end{cases}$ en tenant compte des conditions initiales, aussi $x(1) = \frac{a}{8}$ et $y(1) = \frac{3a}{8}$ donc $k = \frac{\ln(2)}{4}$ et $l = \frac{3\ln(2)}{4}$.
Enfin $x(t) = \frac{a}{4}\left(1 - \frac{1}{2^t}\right)$ et $y(t) = \frac{3a}{4}\left(1 - \frac{1}{2^t}\right)$.

EXERCICE 3

1) Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la base de $\mathbb{R}^2$. Maintenant $\frac{\partial\|\overrightarrow{OM}\|}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial\|\overrightarrow{OM}\|}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ donc pour $M \neq O(0,0)$ on a : $grad\left(\|\overrightarrow{OM}\|\right) = \frac{x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$

2) D'après la question précédente $grad\left(f(M)\right) = \frac{\overrightarrow{AM}}{\|\overrightarrow{AM}\|} + \frac{\overrightarrow{BM}}{\|\overrightarrow{BM}\|} + \frac{\overrightarrow{CM}}{\|\overrightarrow{CM}\|}$ pour M différent de A, B, C. Comme $\forall M \in \mathbb{R}^2, df_M(H) = \left(grad\left(f(M)\right) \middle| H\right)$ alors f est différentiable si $M \in \mathbb{R}^2 \setminus \{A, B; C\}$. Remarquons que $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AM}}{\|\overrightarrow{AM}\|}$, $\vec{v} = \frac{\overrightarrow{BM}}{\|\overrightarrow{BM}\|}$ et $\vec{w} = \frac{\overrightarrow{CM}}{\|\overrightarrow{CM}\|}$ sont des vecteurs unitaires donc dans une base orthonormée $(\vec{u}, \vec{z})$ on peut écrire

$\vec{u}(1,0), \vec{v}(\cos(\theta), \sin(\theta))\vec{w}(\cos(\theta+\varphi), \sin(\theta+\varphi))$. Comme$\sin(\theta) + \sin(\theta+\varphi) = 2\sin\left(\theta + \frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ pour annuler le gradient il suffit de résoudre $\begin{cases} 1+\cos(\theta)+\cos(\theta+\varphi) = 0 \\ 2\sin\left(\theta+\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0 \end{cases}$

Si $\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0$ alors $1+\cos(\theta)+\cos(\theta+\varphi) = 1+\cos(\theta)-\cos(\theta) = 1 = 0$ contadiction, donc $\sin\left(\theta+\frac{\varphi}{2}\right) = 0$.Autrement $\varphi \equiv -2\theta[2\pi]$ donc $1+\cos(\theta)+\cos(\theta+\varphi) = 1 + 2\cos(\theta) = 0$ ainsi $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$ d'où $(\theta,\varphi) = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ ou $(\theta,\varphi) = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ modulo 2π .Pour faire simple le seul point qui point qui annule le gradient est le point M vérifiant la condition angulaire $\widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{AMC} = 120°$. Ceci tient si le triangle ABC n' a aucun angle de mesure 120° car sinon ce point-là sera l'un de A, Bou C où le gradient n'est pas défini.

Remarque : ce point M est appelé le point de Torricelli du triangle ABC.

3) Notons Δ le compact formé de l'union de l'intérieur et du pourtour du triangle ABC. Ainsi la fonction f atteint son maximum et son minimum sur Δ.Ici le point de Torricelli coïncide avec le centre G de ABC mais alors $f(G) = 3\frac{l}{\sqrt{3}} = l\sqrt{3}$ et sur la frontière $f(A) = f(B) = f(C) = 2l$. Donc $\inf_\Delta(f) = l\sqrt{3}$ et ainsi $\sup_\Delta(z) = (2-\sqrt{3})l$ atteint au point G. En outre $\inf_\Delta(z) = 0$ atteint en seulement A, B et C.

EXERCICE 4

1.a) Par définition g est continue sur $]0,+\infty[$, il reste à prouver qu'elle est continue en 0.Comme $f(t) = f(0) + o(1)$ on a $tf(t) = tf(0) + o(t)$ puis en intégrant $\int_0^x tf(t)dt = \frac{x^2}{2}f(0) + o(x^2)$. Ainsi au voisinage de 0 on a $g(x) = \frac{f(0)}{2} + o(1)$ donc $\lim_{x\to 0^+} g(x) = g(0)$ ce qui conclut.

1.b) T est évidemment linéaire et d'après la question 1.a on a que pour $f \in E$ l'on a $T[f] \in E$ donc T est un endomorphisme. Nous voyons que toute fonction de $Im(T)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$, et comme toute fonction de E n'est pas dérivable on prouve bien que T n'est pas surjectif. Soit $f \in E$ telle que $T[f] = 0$ alors $f(0) = 1$ et $\int_0^x tf(t)dt = 0$ pour $x > 0$.En dérivant la dernière on trouve que $tf(t) = 0$ soit $f(t) = 0$ pour $x > 0$ donc $f = 0$.T est donc injectif.

Si $T[f] = \lambda f$ alors $f(0)\left(\frac{1}{2} - \lambda\right) = 0$ et $\int_0^x tf(t)dt = \lambda x^2 f(x)$ pour $x > 0$.En dérivant on trouve $xf(x) = \lambda(2xf(x) + x^2 f'(x))$ comme T est injectif alors 0 n'est pas valeur propre de T. Donc $f'(x) = \left(\frac{1-2\lambda}{\lambda x}\right)f(x)$ pour $x > 0$.

*Si $\lambda \neq \frac{1}{2}$ on trouve comme solution $f(x) = Cx^{\frac{1-2\lambda}{\lambda}}$ pour $x > 0$.Et comme est définie et continue en 0 il faut que $\frac{1-2\lambda}{\lambda} > 0$ donc $\lambda \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. Aussi $f(0) = 0$ donc $f(0)\left(\frac{1}{2} - \lambda\right) = 0$. Nous concluons que tout $\lambda \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ est valeur propre de T avec pour fonctions propres $x \mapsto Cx^{\frac{1-2\lambda}{\lambda}}$ $(C \neq 0)$.

* Si $\lambda = \frac{1}{2}$, il reste plus que la condition $f'(x) = 0$ pour $x > 0$. Ainsi $\frac{1}{2}$ est valeur propre de T associée aux fonctions constantes non nulles.

2.a)H_n est linéaire, il reste que pour un $f \in E$, $H_n[f]$ soit continue en 0 pour que H_n soit un endomorphisme. De $t^n f(t) = t^n f(0) + o(t^n)$ il vient que $\int_0^x \square^n f(t)dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} f(0) + o(x^{n+1})$ d'où $H_n[f](x) = \frac{n}{n+1} f(0) + o(1)$. Il faut prendre $H_n[f](0) = \frac{n}{n+1} f(0)$.

2.b) Pour $x > 0, T[f](x) = \frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)dt$ donc $T[f](x) \leq \frac{m(A,f)}{x^2}\int_0^x tdt$ d'où $T[f](x) \leq \frac{m(A,f)}{2}$ pour tout $x \in]0, A]$.Ceci étant vrai pour $x = 0$ on a alors $m(A, T[f]) = \frac{m(A,f)}{2}$.

En particulier l'on a $m(A, T^{(n)}[f]) \leq \frac{m(A,T^{(n)}[f])}{2}$ et une récurrence simple donne la relation $m(A, T^{(n)}[f]) \leq \frac{m(A,T[f])}{2^n}$. Pour $f \in E^+$ et $x > 0$ on peut prendre un A positif tel que $x \leq A$ donc $T^{(n)}[f](x) \leq m(A, T^{(n)}[f]) \leq \frac{m(A,T[f])}{2^n}$ donc $\lim_{n\to\infty} T^{(n)}[f](x) = 0$.

Ce résultat est valable pour $f \in E$ en raisonnant avec $m(A, |f|)$.

2.c) $H_n[f](x) - \frac{n}{n+1} f(x) = \frac{n}{x^{n+1}}\int_0^x t^n f(t)dt - \frac{n}{x^{n+1}}\int_0^x t^n f(x)dt = \frac{n}{x^{n+1}}\int_0^x t^n (f(t) - f(x))dt$. f étant continue en x: $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ tel que $\forall t \in]\alpha, x]$ on ait $|f(t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pour la suite on fixe x et on note $M_\alpha = \sup_{t\in[0,\alpha]}|f(t) - f(x)|$ donc d'après la relation de Chasles on a : $\int_0^x t^n (f(t) - f(x))dt = \int_0^\alpha t^n (f(t) - f(x))dt + \int_\alpha^x t^n (f(t) - f(x))dt$. Par conséquent il vient $\left|\int_0^x t^n (f(t) - f(x))dt\right| < M_\alpha . \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} + \frac{\varepsilon}{2(n+1)}(x^{n+1} - \alpha^{n+1}) < \square_\alpha . \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} + \frac{\varepsilon}{2(n+1)} x^{n+1}$ ainsi $\left|\frac{n}{x^{n+1}}\int_0^x t^n (f(t) - f(x))dt\right| < M_\alpha \left(\frac{\alpha}{x}\right)^{n+1} + \frac{\varepsilon}{2}$ or $\lim_{n\to\infty} M_\alpha \left(\frac{\alpha}{x}\right)^{n+1} = 0$ donc il existe un entier N tel que pour $n > N$: $\left|\frac{n}{x^{n+1}}\int_0^x t^n (f(t) - f(x))dt\right| < \varepsilon$ soit $\lim_{n\to\infty} H_n[f](x) - \frac{n}{n+1} f(x) = 0$.En écrivant $H_n[f](x) = \frac{n}{n+1} f(x) + \left(\square_n[f](x) - \frac{n}{n+1} f(x)\right)$ il apparait que $\lim_{n\to\infty} H_n[f](x) = f(x)$.

Vu la démonstration ce résultat est valable pour f élément de E.

3a) On va montrer que pour $f \in E^+$ tel que $\int_0^\infty f(t)dt$ converge que $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x tf(t)dt = 0$. Comme $x \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x tf(t)dt$ est continue il suffit de montrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_0^n tf(t)dt = 0$. En notant $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ il vient $\frac{1}{n}\int_0^n tf(t)dt = \frac{1}{n}\int_0^n tF'(t)dt = F(n) - \frac{1}{n}\int_0^n F(t)dt$ en intégrant par parties. On sait que $\lim_{n\to\infty} F(n) = \int_0^\infty f(t)dt$,F étant croissante on a donc

$\frac{F(0)+\cdots+F(n-1)}{n} \leq \frac{1}{n}\int_0^n F(t)dt \leq \frac{F(1)+\cdots+F(n)}{n}$ or d'après le théorème de la moyenne de Césaro que $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{F(0)+\cdots+F(n-1)}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{F(1)+\cdots+F(n)}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} F(n) = \int_0^\infty f(t)dt$ d'où la conclusion. Aussi $\frac{1}{x^n}\int_0^x t^n f(t)dt \leq \frac{1}{x^n}\int_0^1 t^n f(t)dt + \frac{1}{x^n}\int_0^1 x^{n-1} tf(t)dt \leq \frac{1}{x^n}\int_0^1 t^n f(t)dt + \frac{1}{x}\int_0^x tf(t)dt$ donc $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n}\int_0^x t^n f(t)dt = 0$.

Soient $\varepsilon, A > 0$;maintenant en intégrant par parties on obtient :

$\int_\varepsilon^A H_n[f](x)dx = \int_\varepsilon^A \left(\frac{1}{x^n}\right)' \left(\int_0^x t^n f(t)dt\right)dx = \left[-\frac{1}{x^n}\int_0^x t^n f(t)dt\right]_\varepsilon^A + \int_\varepsilon^A f(x)dx$.Avec $\varepsilon \to 0$ il vient $\int_0^A H_n[f](x)\square x = \int_0^A \left(\frac{1}{x^n}\right)' \left(\int_0^x t^n f(t)dt\right)dx = \int_0^A f(x)dx - \frac{1}{A^n}\int_0^A t^n f(t)dt$. D'après ce qui précède en faisant $A \to \infty$ il vient $\int_0^\infty H_n[f](x)dx = \int_0^\infty f(x)dx = I$.

3.b) En remarquant que $T[f] = H_1[f]$ alors$\int_0^\infty T[f](x)dx$ converge et que $\int_0^\infty T[f](x)dx = I$. Maintenant montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\int_0^\infty T^{(n)}[f](x)dx = I$. Ce qui est chose évidente car $T^{(n)}[f] = T\left[T^{(n-1)}[f]\right] = H_1\left[T^{(n-1)}[f]\right]$, puis on déduit que si c'est vrai pour $n-1$ alors $\int_0^\infty T^{(n)}[f](x)dx = \int_0^\infty T^{(n-1)}[f](x)dx = I$.On achève notre récurrence.

Remarque : la question est plutôt rapprocher en les commentant les questions 2.a ,2.b ,3.a et 3.b

Ici on se restreint aux fonctions $f \in E^+$ tel que $\int_0^\infty f(x)dx$ est non nulle. Les questions 2.a et 2.b montrent que les suites $\left(T^{(n)}[f]\right)_{n\geq 1}$ et $(H_n[f])_{n\geq 1}$ convergent simplement respectivement vers la fonction nulle et la fonction f. Cependant $\left(\int_0^\infty T^{(n)}[f](x)dx\right)_{n\geq 1}$ et $\left(\int_0^\infty H_n[f](x)dx\right)_{n\geq 1}$ convergent toutes les deux vers $\int_0^\infty f(x)dx$.Ceci prouve que $\left(T^{(n)}[f]\right)_{n\geq 1}$ ne satisfait pas à l'hypothèse de domination sinon d'après le théorème de convergence dominée elle convergerait vers 0. D'autre part on peut vérifier que $\left(\int_0^\infty H_n[f](x)dx\right)_{n\geq 1}$ vérifie l'hypothèse de domination $\forall x > 0 : H_n[f](x) \leq \frac{1}{x^2}\int_0^1 f(t)dt + H_1[f](x)$.

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES OPTION A : ISFA 2007

EXERCICE 1 : REDUCTION DES MATRICES DE RANG 1

1)$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 1 et diagonalisable car elle est semblable à $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec pour matrice de passage $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang

1 et non diagonalisable. En effet son polynôme caractéristique est $X_{C_2}(\lambda) = -\lambda^3$ ainsi si C_2 est diagonalisable, elle serait diagonalisable à la matrice nulle donc égale à la matrice nulle ce qui est absurde.

2.a) Si A est une matrice de rang 1 on a alors $\dim(kerA) = n-1$,on peut prendre $(u_i)_{1\leq i\leq n-1}$ comme base de $Ker(A)$.En complétant cette base pour former une base $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ de $\mathbb{R}^n$, on peut donc trouver $a_1, a_2, \dots, a_n$ tel que $Au_n = \sum_{k=1}^{n} a_k u_k$.Dans la base $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ la matrice de A s'écrit $B = \begin{pmatrix} 0 & . & 0 & a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_2 \\ & & & \vdots \\ 0 & . & 0 & a_n \end{pmatrix}$ qui est donc semblable à A.

2.b) la matrice A est trigonalisable car elle est semblable à la matrice B qui est triangulaire supérieure.

2.c) Comme $A \sim B$ on a $Tr(A) = Tr(B) = a_n$. Si $a_n \neq 0$ on trouve que $X_B(\lambda) = (-\lambda)^{n-1}(a_n - \lambda)$ et que $\dim(kerB) = n-1$ puis $\dim(\ker(B - a_n I)) = 1$ car $\ker(B - a_n I) = Vect(w)$ avec $w = {}^t(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Dans ce cas B donc A est diagonalisable. Si $a_n = 0$ on a $X_B(\lambda) = (-\lambda)^n$ alors que $\dim(kerB) = n-1$ d'où B donc A n'est pas diagonalisable. Finalement A est diagonalisable si et seulement si $Tr(A) \neq 0$.

3) Comme $Tr(u) = rg(u) = 1$ d'après la question 2 .c) u est diagonalisable et on peut trouver une base $\mathcal{B}$ telle que $P = Mat_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{diag}(0, \dots, 0,1)$ .Ainsi $Pr^2 = Pr = \mathrm{diag}(0, \dots, 0,1)$ ou encore $u^2 = u$ c'est-à-dire que u est un projecteur.

4.a)$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ avec $e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ on a : $Ae_1 = Ae_2 = Ae_3 = 0$ et $Ae_4 = 4e_4$. A est donc diagonalisable en s'appuyant sur la base (e_1, e_2, e_3, e_4) .Avec $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, on a $A = PDP^{-1}$.

4b) Avec les mêmes notations qu'à la question 4.a) on reconnaît immédiatement que $A = 2006I + J$. Ainsi A est diagonalisable avec $A = PD_1P^{-1}$ où

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D_1 = 2006I + D = \begin{pmatrix} 2006 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2006 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2006 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2010 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 2

1) En intégrant par parties :$\int_0^1 (t-1)f''(t)dt = [(t-1)f'(t)]_0^1 - \int_0^1 f'(t)dt = 1 - [f(t)]_0^1 = 1$

2) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz $\left(\int_0^1 (f''(t))^2 dt\right)\left(\int_0^1 (t-1)^2 dt\right) \geq \left(\int_0^1 (t-1) f''(t) dt\right)^2$ puis en remplaçant par leurs valeurs : $\frac{1}{3}\left(\int_0^1 (f''(t))^2 dt\right) \geq 1$ soit $\int_0^1 (f''(t))^2 dt \geq 3$ et ce pour tout f élément de E.

3) Soit un réel k tel que l'équation différentielle $y'' = k(t-1)$ ait une solution dans E. En intégrant deux fois on obtient : $y' = \frac{k}{2}(t-1)^2 + C$ puis que $y = \frac{k}{6}(t-1)^3 + C(t-1) + D$ avec $C, D \in \mathbb{R}$. Comme $y(1) = 0$ on a $D = 0$ et en retranscrivant que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$ alors $\begin{cases} \frac{k}{6} + C \\ \frac{k}{2} + C = 1 \end{cases}$ puis $k = 3$ et $C = -\frac{1}{2}$. On a notre réponse car nous avons obtenu un seul couple solution (k, y) avec $k = 3$ et $y = \frac{1}{2}(t-1)^3 - \frac{1}{2}(t-1)$ $(y \in E)$.

4) Il y'a égalité dans l'inégalité de la question 2 si les fonctions f'' et $t \mapsto t-1$ sont colinéaires.Il devrait exister k un réel tel que $f'' = k(t-1)$, nous savons d'après la question précédente qu'on doit avoir $k = 3$ et $f = \frac{1}{2}(t-1)^3 - \frac{1}{2}(t-1)$. D'où $\inf_{f \in E}\left(\int_0^1 (f''(t))^2 dt\right) = 3$, cette borne inférieure est atteinte en $f = \frac{1}{2}(t-1)^3 - \frac{1}{2}(t-1)$.

PROBLEME : UN THEOREME DE HARDY-LITTLEWOOD

1a)$\forall X \in]-1,1[\,, \frac{1}{1-X} = \sum_{n=0}^{+\infty} X^n$ puis en dérivant $\frac{1}{(1-X)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)X^n$.En particulier on écrit $\forall x \in]-1,1[\,, \frac{1}{(1-x^2)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^{2n}$ d'où $\frac{1-x}{(1-x^2)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^{2n+1}$.Ainsi $\forall x \in]-1,1[\,, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_{2n} = n+1$ et $a_{2n+1} = -n-1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. f est donc développable en série entière au voisinage de 0.

1b) $\forall x \in]-1,1[\,, (1-x)f(x) = \frac{4}{(1+x)^2}$ donc $\lim_{x \to 1^-}(1-x)f(x) = 1$ c'est-à-dire que f vérifie (1) Toutefois comme $\sum_{k=0}^{2n+1} a_k = 0$ il est évident que f ne vérifie pas (2) .

2.a) Pour tout $X > 0$,il existe un entier N tel que $\sum_{n=0}^{N} a_n > X$.Comme le polynôme $\sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ converge vers $\sum_{n=0}^{N} a_n$ en 1^-, il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $\forall x \in]\alpha, 1[$, $X < \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \leq f(x)$.Par conséquent $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$.

2.b)

i) Comme $\alpha_n \sim b_n$ alors $\alpha_n - b_n = o(\alpha_n)$ donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_0$ l'on ait $|\alpha_n - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}\alpha_n$.

ii) $\forall x \in]0,1[$, $|f(x) - g(x)| = |\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha_n - b_n)x^n| \leq \sum_{n=0}^{n_0-1}|\alpha_n - b_n|x^n + \sum_{n=n_0}^{+\infty}|\alpha_n - b_n|x^n$. Comme pour tout $n \leq n_0 - 1$, $x^n \leq 1$ et pour tout $n \geq n_0$, $|\alpha_n - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}\alpha_n$ on obtient donc que $\forall x \in]0,1[$, $|f(x) - g(x)| \leq \sum_{n=0}^{n_0-1}|\alpha_n - b_n| + \frac{\varepsilon}{2}f(x)$

iii) Comme $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $\forall x \in]\alpha, 1[, \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n - b_n| < \frac{\varepsilon}{2} f(x)$. Finalement $\forall x \in]\alpha, 1[, |\square(x) - g(x)| < \varepsilon f(x)$ d'où $f(x) \sim g(x)$ au voisinage de 1^- .

2.c) Comme $a_n \sim l$ on en déduit que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \sim \sum_{n=0}^{+\infty} l x^n$ ce qui est aussi $f(x) \sim \frac{l}{1-x}$ au voisinage de 1^-.

3.a) Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ il est facile de voir que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est le produit de Cauchy des suites $(c_n = 1)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donc $\frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$. Son rayon de convergence est 1 car $S_n \sim n + 1$.

3.b) Puisque $S_n \sim n + 1$ on a $\frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \sim \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n$ soit $\frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \sim \frac{1}{(1-x)^2}$ au voisinage de 1^-.

3.c) On a obtenu à la question précédente que $\frac{f(x)}{1-x} \sim \frac{1}{(1-x)^2}$ donc $(1-x)f(x) \sim 1$ au voisinage de 1^- Nous concluons que $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)f(x) = 1$.

4) Si $g \in \mathcal{B}, \forall x \in [0,1], a_n x^n g(x^n) \leq \|g\|_\infty a_n x^n$ et comme la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge on en déduit aisément que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n g(x^n)$ converge.

5.a) $S(g_k)(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n x^{nk} = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n(k+1)} = \left(\frac{1-x}{1-x^{k+1}}\right)\left[(1 - x^{k+1}) f(x^{k+1})\right]$ or $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)f(x) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 1^-} \left[(1 - x^{k+1}) f(x^{k+1})\right] = \lim\limits_{X\to 1^-} (1-X)f(X) = 1$ après changement de variables $X = x^k$. Par dérivation on a $\lim\limits_{x\to 1^-} \left(\frac{1-x^{k+1}}{1-x}\right) = k + 1$ et par suite $\lim\limits_{x\to 1^-} S(g_k)(x) = \frac{1}{k+1}$ mais aussi $\int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1}$. D'où $l(g_k) = \int_0^1 x^k dx$.

5.b) $\forall f, g \in E$ et $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a $S(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda S(f)(x) + \mu S(g)(x)$. Les limites en 1^- de $S(f)$ et $S(g)$ existant il en est de même pour $\lambda f + \mu g$ donc $\lambda f + \mu g \in E. E$ est bien un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. En passant aux limites dans la relation précédente il vient : $l(\lambda f + \mu g) = \lambda l(f) + \mu l(g)$ ainsi l est une application linéaire.

5.c) $\forall g \in E, \forall x \in [0,1], |S(g)(x)| \leq \|g\|_\infty (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ en faisant tendre x vers 1^- on a $|l(g)| \leq \|g\|_\infty$.Cette inégalité prouve que l est bornée sur le disque unité ainsi l est continue et $|||l||| \leq 1$.Nous avons égalité $|l(g)| = \|g\|_\infty$ avec $g = g_0$ donc $|||l||| = 1$.

6) $\forall k \in \mathbb{N}, l(g_k) = \int_0^1 g_k(x)dx$ or l et $f : f \in E \longmapsto \int_0^1 f(x)dx$ sont des applications linéaires et $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$ donc $\forall P \in \mathbb{R}[X], l(P) = \int_0^1 P(x)dx$.Maintenant prenons une fonction continue $g \in E$,d'après le théorème de Weierstrass il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynôme convergent uniformément vers f. $l(g) - \int_0^1 g(x)dx = l(g - g_n) + l(g_n) - \int_0^1 g(x)dx$ soit $l(g) - \int_0^1 g(x)dx = l(g - g_n) + \int_0^1 (g_n(x) - g(x))dx$ puis il vient sans difficultés $\left|l(g) - \int_0^1 g(x)dx\right| \leq 2\|g - g_n\|_\infty$.Comme $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}$ vérifiant $\|g - g_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ et donc $\forall \varepsilon > 0, \left|l(g) - \int_0^1 g(x)dx\right| < \varepsilon$ d'où $l(g) = \int_0^1 g(x)dx$.

7.a) Introduisons les points $A_\varepsilon\left(\frac{1}{e}-\varepsilon,0\right)$, $B\left(\frac{1}{e},0\right)$, $C\left(\frac{1}{e},e\right)$ et $D\left(\frac{1}{e}+\varepsilon,h\left(\frac{1}{e}+\varepsilon\right)\right)$.Après avoir représenté les fonctions h,a_ε et b_ε et par les calculs d'aires par intégrales on en déduit que $\int_0^1 b_\varepsilon(x)dx=\int_0^1 h(x)dx+\text{Aire}(ABC)$ et $\int_0^1 a_\varepsilon(x)dx=\int_0^1 h(x)dx-\text{Aire}(BCD)$.Mais le miracle est que $\text{Aire}(BCD)=\ \text{Aire}(ABC)=\frac{\text{base}\times\text{hauteur}}{2}=\frac{e\varepsilon}{2}$ ainsi avec $\lambda=\frac{e}{2}$ on conclut que $\int_0^1 b_\varepsilon(x)dx=\int_0^1 h(x)dx+\lambda\varepsilon$ et $\int_0^1 a_\varepsilon(x)dx=\int_0^1 h(x)dx-\lambda\varepsilon$.

7.b) Du fait que $a_\varepsilon\leq h\leq b_\varepsilon$ il est évident que $\forall x\in[0,1], S(a_\varepsilon)(x)\leq S(h)(x)\leq S(b_\varepsilon)(x)$. Puisque $\lim_{x\to1^-}S(a_\varepsilon)(x)=l(a_\varepsilon)$ et $\lim_{x\to1^-}S(b_\varepsilon)(x)=l(b_\varepsilon)$, il existe $\alpha\in]0,1[$ tel que $\forall x\in]\alpha,1[, |S(a_\varepsilon)(x)-l(a_\varepsilon)|\leq\varepsilon$ et $|S(b_\varepsilon)(x)-l(b_\varepsilon)|\leq\varepsilon$, en particulier $S(b_\varepsilon)(x)\leq l(b_\varepsilon)+\varepsilon$ et $l(a_\varepsilon)-\varepsilon\leq S(a_\varepsilon)(x)$.En joignant tout ceci il existe bien $\alpha\in]0,1[$ tel que

$\forall x\in]\alpha,1[, l(a_\varepsilon)-\varepsilon\leq S(a_\varepsilon)(x)\leq S(h)(x)\leq S(b_\varepsilon)(x)\leq l(b_\varepsilon)+\varepsilon$.

7.c)L'inégalité de la question précédente montre que $S(h)$ admet une limite en 1^- ainsi $h\in E$. Maintenant par les encadrements extrêmes nous concluons que $l(a_\varepsilon)-\varepsilon\leq l(h)\leq l(b_\varepsilon)+\varepsilon$ pour tout $\varepsilon\in\left]0,\frac{1}{e}\right[$.On a $l(b_\varepsilon)=\int_0^1 b_\varepsilon(x)dx=\int_0^1 h(x)dx+\lambda\varepsilon=1+\lambda\varepsilon$ de même $l(a_\varepsilon)=1-\lambda\varepsilon$. En faisant tendre ε vers 0 alors on trouve $l(h)=0$.

7.d) On a $\sum_{n=0}^{+\infty}a_ne^{-\frac{n}{N}}h\left(e^{-\frac{n}{N}}\right)=\sum_{n=0}^{N}a_ne^{-\frac{n}{N}}h\left(e^{-\frac{n}{N}}\right)+\sum_{n=N+1}^{+\infty}a_ne^{-\frac{n}{N}}h\left(e^{-\frac{n}{N}}\right)$, remarquons que par définition de h on a $h\left(e^{-\frac{n}{N}}\right)=e^{\frac{n}{N}}$ pour $n\leq N$ et $h\left(e^{-\frac{n}{N}}\right)=0$ pour $n>N$.Ainsi on trouve $\sum_{n=0}^{+\infty}a_ne^{-\frac{n}{N}}h\left(e^{-\frac{n}{N}}\right)=\sum_{n=0}^{N}a_n=S_N$ donc $S(h)\left(e^{-\frac{1}{N}}\right)=\left(1-e^{-\frac{1}{N}}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}a_ne^{-\frac{n}{N}}h\left(e^{-\frac{n}{N}}\right)=\left(1-e^{-\frac{1}{N}}\right)S_N$ .On a obtenu $S(h)\left(e^{-\frac{1}{N}}\right)=\left(1-e^{-\frac{1}{N}}\right)S_N$ or $\lim_{N\to\infty}S(h)\left(e^{-\frac{1}{N}}\right)=l(h)=1$ donc $\left(1-e^{-\frac{1}{N}}\right)S_N\sim1$ soit $S_N\sim\frac{1}{1-e^{-\frac{1}{N}}}$.Comme $1-e^{-\frac{1}{N}}=\frac{1}{N}+o\left(\frac{1}{N}\right)$ c'est-à-dire $1-e^{-\frac{1}{N}}\sim\frac{1}{N}$ d'où la conclusion $S_N\sim N$.

8) Posons $v_n=\frac{u_n}{l}$ et $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$. Il vient $v_n\sim1$au voisinage de $+\infty$ donc$\sum_{n=0}^{+\infty}v_nx^n\sim\frac{1}{1-x}$ et alors $(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\sim1$ au voisinage de 1^-. Ainsi d'après le théorème énoncé en début d'énoncé on a $\frac{S_n}{l}\sim n$ ou encore $\frac{S_n}{l}\sim n+1$ d'où $\frac{S_n}{n+1}\sim l$ ce qui achève la démonstration du théorème de Césario.

9) Comme $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{k}$ on a d'après le théorème de Césaro que $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}\sqrt[k]{k}}{n}\right)=1$. Alors $\sum_{k=1}^{n}\sqrt[k]{k}\sim n$ puis $u_n\sim\frac{1}{n}$ donc $\sum_{n\geq1}u_n$ diverge.

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES OPTION A : ISFA 2008

PROBLEME 1 : RELATION DE RECURRENCE

I.1) Pour $n \in \mathbb{N}$, sur $D(0,r)$: $\sum_{k=0}^{n} u_n z^n + o(z^n) = g_u(z) = g_v(z) = \sum_{k=0}^{n} v_n z^n + o(z^n)$, au voisinage de 0.Et par unicité du développement limité en 0 on a que: $\forall k \in [0,n], u_k = v_k$, en particulier nous avons donc $u_n = v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I.2.a) Pour $u_n = 1$ on a $r_u = 1$ et il est connu que $\sum_{k=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$

Pour $u_n = n$ on a $r_u = 1$ et $\sum_{k=0}^{\infty} nz^n = z(\sum_{k=0}^{\infty} z^n)' = \frac{z}{(1-z)^2}$

$$\text{I. 2. b)} \frac{1}{\sqrt{1-4z}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-4)^n C_n^{-\frac{1}{2}} z^n \text{ où } C_n^{-\frac{1}{2}} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}-k\right)}{n!} = (-1)^n \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{2^n n!}$$

$$C_n^{-\frac{1}{2}} = (-1)^n \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)(2k)}{2^n n! \prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{(2n)!}{(-4)^n (n!)^2} = \frac{C_{2n}^n}{(-4)^n} \text{ alors } \frac{1}{\sqrt{1-4z}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n}^n z^n$$

I.3.a) A partir de la relation de récurrence $nu_n = 2nu_{n-1} + 1$ pour $n \geq 1$ et $u_0 = 0$;on trouve $u_1 = 1$.Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2^n - 1$. Maintenant supposons que cela soit vrai pour $n-1 \in \mathbb{N}$ $(n \geq 1)$.Comme $nu_n = 2nu_{n-1} + 1$ on a donc $nu_n \leq 2n(2^{n-1}-1)+1$

$nu_n \leq n2^n - 2n + 1 \leq n2^n - n$, d'où $u_n \leq 2^n - 1$, les premiers cas se vérifiant à la main cela achève notre récurrence. On écrit mieux $u_n \leq 2^{□}$ ainsi $r_u \geq \frac{1}{2}$ donc g_u est définie sur $D\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

I.3.b) Nous réécrivons la relation de récurrence comme $(n+1)u_{n+1} = 2nu_n + 2u_n + 1$ pour $n \geq 0$.En multipliant cette relation par z^n on obtient et en sommant pour $n \geq 0$, il vient

$$\sum_{n\geq 0}(n+1)u_{n+1}z^n = \sum_{n\geq 0} 2nu_n z^n + \sum_{n\geq 0} 2u_n z^n + \sum_{n\geq 0} z^n \text{ or } \sum_{n\geq 0}(n+1)u_{n+1}z^n = g_u'(z) \text{ et}$$

$$\sum_{n\geq 0} nu_n z^n = z\left(\sum_{n\geq 0} nu_n z^{n-1}\right) = zg_u'(z) \text{ donc } g_u'(z) = 2z\, g_u'(z) + 2g_u(z) + \frac{1}{1-z} \text{ et on arrange}$$

Pour avoir $(1-2z)g_u'(z) = 2g_u(z) + \frac{1}{1-z}$

I.3.c) L'équation homogène associé à cette équation différentielle est $(1-2z)g_u'(z) = 2g_u(z)$.En

résolvant sur $D\left(0,\frac{1}{2}\right)$ on trouve , $h(z) = Ae^{\int\frac{2dz}{1-2z}} = \frac{A}{1-2z}$ avec $A \in \mathbb{R}$. Cherchons une solution

particulière de la forme $\frac{A(z)}{1-2z}$, on obtient à $A'(z) = \frac{1}{1-z}$ on choisit $A(z) = -\ln(1-z)$. Enfin on a: $g_u(v) = -\dfrac{\ln(1-2z)}{1-2z} + \dfrac{A}{1-2z}$, comme $g_u(0) = u_0 = 0$, $A = 0$ et $g_u(v) = -\dfrac{\ln(1-2z)}{1-2z}$.

Or $\sum_{n\geq 0} 2^n z^n = \dfrac{1}{1-2z}$ et $\sum_{n\geq 1} \dfrac{z^n}{n} = -\ln(1-z)$, ainsi $g_u(v)$ est le produit de Cauchy de ses deux

séries entières d'où $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} . 2^{n-k} = 2^n \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2^k k}$. Ce qui est le résultat voulu

I. 3. d) Comme $\sum_{n\geq 1} \dfrac{z^n}{n} = -\ln(1-z)$, avec $z = \dfrac{1}{2}$ il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2^k k}\right) = -\ln\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) = \ln(2)$.

De là on trouve $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k k} \sim \ln(2)$, on conclut avec $u_n \sim 2^n \ln(2)$.

II.1) On le fait à la main et on trouve : $T_0 = 1, T_1 = 1$ et $T_2 = 2$

II.2 Démontrons par récurrence que $T_N \leq 4^N$.Ceci est manifestement vrai pour les cas de bases. Maintenant supposons que l'hypothèse soit vraie pour un $N \geq 2$.Remarquons qu'un arbre binaire de $N+1$ nœuds internes possède 4 derniers nœuds externes dont deux par sous –arbres. En supprimant deux d'un sous-arbre on obtient un arbre de N nœuds internes. Aussi pour un arbre de N nœuds internes en éclatant un des derniers nœuds externes en deux nouveaux on obtient un arbre à $N+1$ nœuds internes , cependant un nœud pouvant être compté 2 fois on en déduit que $T_{N+1} \leq 4T_N$. Avec l'hypothèse de récurrence on trouve $T_{N+1} \leq 4^{N+1}$. Nous pouvons écrire $r_T \geq \frac{1}{4}$, c'est-à-dire que S_T a un rayon de convergence non nul.

II.3) Pour un $N > 0$, remarquons qu'en dessous du premier nœud interne lorsque le sous-arbre gauche contient k noeuds internes ,celui du gauche contient $N-k-1$ nœuds internes $(0 \leq k \leq n-1)$, chose qui peut se faire de $T_k T_{N-k-1}$ manières. Ces cas étant disjoints on a donc

$$T_N = \sum_{k=0}^{n-1} T_k T_{N-k-1} \text{ en changeant les indices il vient } T_N = \sum_{k=1}^{n} T_{k-1} T_{N-k}.$$

II. 4)Posons $R_N = \sum_{k=0}^{n} T_k T_{N-k}$, R_N est bien un produit de Cauchy et $\sum_{N\geq 0} R_N z^N = {S_T}^2(z)$. On peut

ecrire $T_N = R_{N-1}$ pour $N \geq 1$et $\sum_{N\geq 1} R_N z^N = \sum_{N\geq 1} R_{N-1} z^N = z \sum_{N\geq 0} R_N z^N$ soit $S_T(z) - T_0 = z{S_T}^2(z)$

Comme $T_0 = 1$, on déduit l'équation différentielle $z{S_T}^2(z) - S_T(z) + 1 = 0$.C'est une équation de degré 2 en $S_T(z)$ et on trouve$S_T(z) = \frac{1+\sqrt{1-4z}}{2z}$ ou $S_T(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}$ sur $D\left(0, \frac{1}{4}\right)$.Par souci de continuité en $z = 0$, on garde $S_T(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}$. Mais $\frac{1-\sqrt{1-4z}}{2}$ étant une primitive de $\frac{1}{\sqrt{1-4z}}$ s'annulant en 0, alors $\frac{1-\sqrt{1-4z}}{2} = \sum_{N\geq 0} \frac{1}{N+1} C_{2N}^{N} z^{N+1}$ puis $\frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z} = \sum_{N\geq 0} \frac{1}{N+1} C_{2N}^{N} z^N = S_T(z)$.

Enfin $T_N = \frac{1}{N+1} C_{2N}^N$.

PROBLEME 2 : ANALYSE EN COMPOSANTES PRINCIPALES

I.1) On peut écrire $X = (x_i^j)_{1\leq i,j\leq n}$alors ${}^tX = (x_j^i)_{1\leq i,j\leq n}$.Posons ${}^tXX = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$,un calcul élémentaire donne $a_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} x_k^i x_k^j = {}^tx^i x^j = \langle x^i, x^j\rangle_n = v_{i,j}$,soit $V = {}^tXX$.

I.2) ${}^tV = {}^t({}^tXX) = {}^tXX = V$.$V$ est donc symétrique. Montrons qu'elle est positive

$\forall y \in \mathbb{R}^p, \langle Vy, y\rangle_p = {}^t({}^tXXy)y = ({}^ty\,{}^tX)(Xy) = {}^t(Xy)({}^tXy) = \|Xy\|_n^2 \geq 0$. Soit λ une valeur propre de Vet y un vecteur propre associé, on a $\|Xy\|_n^2 = \langle \lambda y, y\rangle_n = \lambda\|y\|_n^2$ donc $\lambda \geq 0$.Prenons

λ, μ des valeurs propres distinctes de V associé au vecteur y et w de $\mathbb{R}^p$ .Par symétrie on peut écrire $\lambda\langle y, w\rangle_p = \langle Vy, w\rangle_p = \langle y, Vw\rangle_p = \lambda\langle y, w\rangle_p$ soit $(\lambda - \mu)\langle y, w\rangle_p = 0$ ou $\langle y, w\rangle_p = 0$ autrement dit y et w sont orthogonaux.

I. 3) $I = \sum_{i=1}^{p} \|x^i\|_n^2 = \sum_{i=1}^{p} \langle x^i, x^i\rangle_n = \sum_{i=1}^{n} v_{i,i} = Tr(V)$

II.1) Soit P_F un k-projecteur sur son image F.On complète une base $(u_1, \dots, u_k)$ de F pour avoir pour $\langle \quad , \quad \rangle_p$ c'est-à-dire que $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$.Comme $P_F(X) = \sum_{\square=1}^{q} x_i u_i$ et alors l'on a $\|P_F(X)\|_p^2 = \sum_{i=1}^{q} x_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ donc $\|P_F(X)\|_p \leq 1$ avec égalité pou par exemple $X = u_1$. D'où $\|P_F\|_p = 1$

II.2) Sans difficultés ${}^t\tilde{X} = P\,{}^tX$ et comme le projecteur P est symétrique on déduit en que $\tilde{X} = X\,{}^tP = XP$.Le reste est trivial puisque $\tilde{V} = {}^t\tilde{X}\tilde{X} = (P\,{}^tX)(XP) = P({}^tXX)P = PVP$.En plus $Tr(\tilde{V}) = Tr(PVP) = Tr(VP^2) = Tr(VP)$ car $P^2 = P$.

II.3.a) Par définition de l'orthogonalité et de la somme directe on a que $P_{F\oplus G}(x) = P_F(x) + P_G(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^p$.Ainsi $P_{F\oplus G} = P_F + P_G$ et par suite $I_{F\oplus G} = Tr(VP_{F\oplus G})$ s'écrit en remplaçant $I_{F\oplus G} = I_F + I_G$.

II.3.b) Puisque nous sommes en dimension finie il suffit de montrer que $\mathcal{E}_k$ est un fermé borné. D'après la question II.1 on a que $\forall P \in \mathcal{E}_k, \|P\|_p = 1$ ainsi $\mathcal{E}_k$ est borné. Maintenant montrons qu'il est fermé. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{E}_k$ convergeant vers$P$.Aussi $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}; \forall x \in \mathbb{R}^p$ on a $P_n(\lambda x + \mu y) = \lambda P_n(x) + \mu P_n(y)$,en faisant tendre n vers l'infini on obtient $P(\lambda x + \mu y) = \lambda P(x) + \mu P(y)$ ainsi P est linéaire. En plus $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^p, {P_n}^2(x) = P_n(x)$ et $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N$on ait $\|P - P_n\|_p < \varepsilon$. Mais alors $P^2(x) - P(x) = \left(P^2(x) - {P_n}^2(x)\right) - \left(P(x) - P_n(x)\right)$ donc $\|P^2(x) - P(x)\|_p < 3\varepsilon\|x\|_p$; ε étant un nombre positif quelconque $P^2(x) = P(x)$ et P est un projecteur ainsi $\mathcal{E}_k$ est un fermé et donc un compact.

L'application $I: \begin{cases} \mathcal{E}_k \to \mathbb{R} \\ P \longmapsto Tr(VP) \end{cases}$ est une application linéaire en dimension finie elle est donc continue sur le compact $\mathcal{E}_k$ ainsi elle atteint son maximum sur $\mathcal{E}_k$ en un espace F.

II.3.c) Raisonnons par l'absurde et prenons un sous espace d'inertie maximale F_{k+1} de dimension $k+1$.Soit $(w_1, w_2, \dots, w_{k+1})$ une base orthonormale de F_{k+1} ,au plus $k-1$ de ces vecteurs sont éléments d'un F_k donc au moins deux ne le sont pas : nommons les w_k et w_{k+1}.En posant $G_k = Vect\{(w_1, w_2, \dots, w_k)\}$ on a donc $F_{k+1} = G_k \oplus Vect(w_{k+1})$. Et maintenant considérons $\tilde{F}_{k+1} = F_k \oplus Vect(w_{k+1})$.Par définition de F_{k+1} on a $I_{\tilde{F}_{k+1}} \leq I_{F_{k+1}}$.D'après la question II.3.a on a $I_{\tilde{F}_{k+1}} = I_{F_k} + I_{Vect(w_{k+1})}$ et $I_{F_{k+1}} = I_{G_k} + I_{Vect(w_{k+1})}$ or $I_{G_k} < I_{F_k}$. De là nous tirons que

$I_{F_{k+1}} < I_{\tilde{F}_{k+1}} \leq I_{F_{k+1}}$ une contradiction et nous avons notre résultat.

III.1) On peut écrire $\forall x \in \mathbb{R}^p, x = \lambda(x)a + q(x)$ avec $\langle a, q(x)\rangle_p = 0$ ainsi $\langle a,, x\rangle_p = \lambda(x)\langle a, a\rangle_p$ et $\lambda(x) = \frac{\langle a,x\rangle_p}{\|a\|_p^2}$ soit $P_a x = \frac{\langle a,x\rangle_p}{\|a\|_p^2} a$. En posant $v_1 = \frac{a}{\|a\|}$ on complète pour former une base $(v_1, \dots, v_p)$ de$\mathbb{R}^p$.Dans cette base si nous posons $PV = (c_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ on a $c_{i,i} = 0$ pour $1 \leq i \leq 2$ et

$$c_{1,1} = \frac{\langle a,a\rangle_p}{\|a\|_p^2} \cdot \frac{\langle a,Va\rangle_p}{\|a\|_p^2} = \frac{\langle a,Va\rangle_p}{\|a\|_p^2}. \text{Comme } I_a = Tr(PV) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} \text{ et } I_a = \frac{\langle a,Va\rangle_p}{\|a\|_p^2}.$$

III.2) V étant une matrice symétrique elle est donc diagonalisable. Soient $(\lambda_i)_{1\leq i\leq p}$ les valeurs propres de Vassociées respectivement à la base orthonormée$(z_i)_{1\leq i\leq p}$, on prend $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_p$. Avec $x = \sum_i^p \alpha_i z_i$, $Vx = \sum_i^p \lambda_i \alpha_i z_i$ et $\|Vx\|_p = \sqrt{\sum_{i=1}^p \lambda_i^2 \alpha_i^2} \leq \lambda_1 \sqrt{\sum_{i=1}^p \alpha_i^2} = \lambda_1 \|x\|_p$,il y'a égalité si x est un vecteur propre associé à λ_1 donc $\|V\|_p = \lambda_1$. Maintenant revenons à notre problème

$$I_a = \frac{\langle a,Va\rangle_p}{\|a\|_p^2} \leq \frac{\|a\|_p \|Va\|_p}{\|a\|_p^2} \leq \frac{\|\square\|_p \|V\|_p \|a\|_p}{\|a\|_p^2} \leq \|V\|_p. \text{Il y'a égalité si } a \text{ et } Va \text{ sont colinéaires et}$$

a est valeur propre de V et compte tenu de l'avant dernière égalité elle est associé à $\|V\|_p = sup_i(\lambda_i)$.

III.3) En conservant les notations de la question III.2 on peut choisir comme sous espace d'inertie maximale $F_k = Vect(z_i)_{1\leq i\leq k}$.

PREMIERE DE MATHEMATIQUES : ISFA 2009

EXERCICE1

1. Soit un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on peut l'écrire comme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.cependant nous voyons que le coefficient de X^{n+1} dans $T(P)$ est $a_{n+1} = (3+2n-n^2)a_n = (3-n)(1+n)a_n$.Par conséquent T est stable si $(3-n)(1+n) = 0$ soit si $n = 3$ qui est la seule valeur recherchée.

2. Soit P un vecteur propre attribué à la valeur propre λ.Si nous choisissons n tel que $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on doit avoir $T(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ ainsi d'après la première question nous déduisons que $P \in \mathbb{R}_3[X]$.On écrit $P = \sum_{k=0}^{3} a_k X^k$ on trouve alors après calcul $P = \sum_{k=0}^{3} b_k X^k$ où $b_0 = 8a_0, b_1 = 3a_1 + 3a_0$, $b_2 = 4a_1$et $b_1 = -a_3 + 3a_2$. Comme $T(P) = \lambda P$ on $8a_0 = \lambda a_0$.

Si $a_0 \neq 0$ on trouve $\lambda = 8$ et après résolution des équations $b_k = \lambda a_k$ on trouve sans difficulté $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \text{Vect}(10,6,3,1)$.

Si $a_0 = 0$ et $a_1 \neq 0$ l'équation $b_1 = \lambda a_1$ donne $\lambda = 3$ puis en résolvant les autres équations on trouve que $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \text{Vect}(0,3,4,3)$.

Si $a_0 = 0$, $a_1 = 0$ et $a_2 \neq 0$ l'équation $b_2 = \lambda a_2$ donne $\lambda = 0$ puis en résolvant les autres équations on trouve que $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \text{Vect}(0,0;1,3)$.

Si $a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 0$ et $a_3 \neq 0$ l'équation $b_3 = \lambda a_3$ donne $\lambda = -1$ et finalement $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \text{Vect}(0,0;0,1)$.

Pour résumer

*$\lambda = -1$ est valeur propre de T avec pour vecteurs propres μX^3 avec $\mu \in \mathbb{R}$.

*$\lambda = 0$ est valeur propre de T avec pour vecteurs propres $\mu(3X^3 + X^2)$ avec $\mu \in \mathbb{R}$.

*$\lambda = 3$ est valeur propre de T avec pour vecteurs propres $\mu(3X^3 + 4X^2 + 3X)$ avec $\mu \in \mathbb{R}$.

*$\lambda = 8$ est valeur propre de T avec pour vecteurs propres $\mu(X^3 + 3X^2 + 6X + 10)$ avec $\mu \in \mathbb{R}$.

3)T n'est pas injectif car il possède 0 comme valeur propre.

EXERCICE 2

1) Une récurrence immédiate montre que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n > 0$. En prenant la relation de récurrence $v_{n+1} = \frac{v_n}{2(1+\sqrt{1+v_n})}$ on a sans difficulté $v_{n+1} < \frac{v_n}{2} < v_n$ et encore par récurrence nous en déduisons que $v_n < \frac{v_0}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Par conséquent la suite$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0.

2)$\forall x > 0, f(x) = \frac{x}{2(1+\sqrt{1+x})} = \frac{\sqrt{1+x}-1}{2}$ donc par calcul on dérive f puis on trouve$f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{1+x}}$. Puis $f(x)(f(x)+1) = \left(\frac{x}{2(1+\sqrt{1+x})}\right)\left(\frac{\sqrt{1+x}+1}{2}\right) = \frac{x}{4}$ et on conclut par $\frac{2f'(x)}{\sqrt{f(x)(f(x)+1)}} = \frac{2}{4\sqrt{1+x}}\sqrt{\frac{4}{x}}$, ce qui se réécrit que $\forall x > 0, \frac{2f'(x)}{\sqrt{f(x)(f(x)+1)}} = \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}}$.On a $2w_{n+1} = \int_0^{v_{n+1}} \frac{2dt}{\sqrt{t(1+t)}}$ avec le changement de variable $t = f(u)$ il vient $2w_{n+1} = \int_0^{v_n} \frac{2f'(u)}{\sqrt{f(u)(f(u)+1)}} \square u = \int_0^{v_n} \frac{du}{\sqrt{u(1+u)}} = w_n$ CQFD. Maintenant en regardant que $w_{n+1} = \frac{w_n}{2}$ on a alors $w_n = \frac{w_0}{2^n}$. En remarquant que la primitive $\ln(\sqrt{t}+\sqrt{1+t})$ de $\frac{1}{\sqrt{t(1+t)}}$ est aussi égale à $\text{Argsh}(\sqrt{t}), w_n = \int_0^{v_n} \frac{dt}{\sqrt{t(1+t)}} = [\text{Argsh}(\sqrt{t})]_0^{v_n} = \text{Argsh}(\sqrt{v_n})$ donc $v_n = \text{sh}^2(w_n)$.Nos dernières réponses sont $w_n = \frac{\text{Argsh}(\sqrt{v_0})}{2^n}$. Ensuite $v_n = \text{sh}^2\left(\frac{\text{Argsh}(\sqrt{v_0})}{2^n}\right)$ donc $v_n \sim \left(\frac{\text{Argsh}(\sqrt{v_0})}{2^n}\right)^2$.

PROBLEME

Partie A

1) On a l'équation différentielle $f(x) - \int_0^x (x-t)f(t)dt = g(x)$ (1).L'équation (1) montre que f est continue ce qui implique $\int_0^x (x-t)f(t)dt$ est dérivable puisque g est dérivable on a que f est dérivable. Mais si f est dérivable $\int_0^x (x-t)f(t)dt$ est deux fois dérivables or g est deux fois dérivables ce qui entraine que f est deux fois dérivables.

Maintenant on réécrit $f(x) - x\int_0^x f(t)dt + t\int_0^x f(t)dt = g(x)$ on dérive on obtient la relation $f'(x) - \int_0^x f(t)dt = g'(x)$ (1')on dérive encore puis $f''(x) - f(x) = g''(x)$ (2) CQFD.

Pour déduire les solutions des cas ci-dessous. Notons d'abord que $Ae^x + Be^{-x}$ s'écrit aussi $(A+B)sh(x) + (A-B)chx$. Ainsi il est judicieux de prendre une solution de la forme $f(x) = Cch(x) + Dsh(x)$ ce faisant $C = f(0)$ et $D = f'(0)$.

*Si g est la fonction nulle on a $f(0) = g(0) = 0$ et $f'(0) = g'(0) = 0$ ainsi la solution est la fonction nulle.

* Si g est la fonction constante $x \longmapsto D$ on a $f(0) = g(0) = D$ et $f'(0) = g'(0) = 0$, la solution est donc la fonction $f: x \longmapsto D\text{ch}(x)$.

* Si g est la fonction polynomiale $x \longmapsto Ex + D$ on a $f(0) = g(0) = D$et $f'(0) = g'(0) = E$, la solution est donc la fonction $f: x \longmapsto D\mathrm{ch}(x) + E\mathrm{sh}(x)$.

Supposons que l'équation (1)admet deux solutions f_1 et f_2 pour un g donné .Dans ce cas $f_1 - f_2$ est solution de (1) pour $g = 0$,or pour $g = 0$ la seule solution à (1) est la fonction nulle donc $f_1 - f_2 = 0$ soit$f_1 = f_2$.Nous avons donc au plus une solution.

2)Cherchons une solution particulière à (2) de la forme $\varphi(x) = A(x)e^x + B(x)e^{-x}$ par la méthode de variations des constantes. On obtient le système d'équations ci-dessous $\begin{cases} A'(x)e^x + B'(x)e^{-x} = 0 \\ A'(x)e^x + B'(x)e^{-x} = g''(x) \end{cases}$ puis $\begin{cases} A'(x) = \frac{1}{2}e^{-x}g''(x) \\ B'(x) = -\frac{1}{2}e^{-x}g''(x \end{cases}$ on prend $\begin{cases} A(x) = \frac{1}{2}\int_0^x e^{-t}g''(t)dt \\ B(x) = -\frac{1}{2}\int_0^x e^{t}g''(t)dt \end{cases}$.

Ainsi $\varphi(x) = \frac{e^x}{2}\int_0^x e^{-t}g''(t)dt - \frac{e^{-x}}{2}\int_0^x e^{t}g''(t)dt$ ce qui justifie que toute fonction de la forme $f(x) = \frac{e^x}{2}\left[\int_0^x e^{-t}g''(t)dt + k_A\right] - \frac{e^{-x}}{2}\left[\int_0^x e^{t}g''(t)dt + k_B\right]$ est solution ce qui répond à la question. Pour être solution il faut vérifier les conditions à l'origine qui sont en regardant aux équations (1) et (1') : $f(0) = g(0)$ et $f'(0) = g'(0)$.

En prenant $g(x) = e^x, f(x) = \frac{e^x}{2}\left[\int_0^x dt + k_A\right] - \frac{e^{-x}}{2}\left[\int_0^x e^{2t}dt + k_B\right] = \frac{xe^x}{2} + ae^x + be^{-x}$ avec $a = \frac{2k_A - 1}{4}$ et $\square = \frac{1-2k_B}{4}$. En tenant compte des conditions à l'origine on obtient le système $\begin{cases} a + b = 1 \\ \frac{1}{2} + a - b = 1 \end{cases}$ donc $(a,b) = \left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$.

La solution est $g(x) = \frac{xe^x}{2} + \frac{3}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{-x} = \frac{xe^x}{2} + \mathrm{ch}(x) + \frac{1}{2}\mathrm{sh}(x)$.

PARTIE B

2) Il est évident que A est une application linéaire ainsi il suffit de montrer que $KerA = \{0\}$. Prenons f tel que $A(f) = 0$ c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R}, A(f)(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt = 0$ .En dérivant on obtient que $\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x f(t)dt = 0$ on dérive encore et $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ d'où la conclusion.

3) En double intégrant par parties $\int \square g'' = fg' - f'g + \int fg''$.Maintenant en prenant deux fonctions f et g tels que :$f(x) = 0$, $f'' = 0$ et $g'(0) = g(0) = 0$ alors on obtient alors$\int_0^x fg''(t)dt = [fg'(t) - f'g(t)]_0^x + \int_0^x f''(t)g(t)dt = -f'g(x)$. $(*)$

Posons $G_2(x) = \int_0^x \frac{1}{3!}(x-t)^3 f(t)dt$ on a $G_2{}'(x) = \int_0^x \frac{1}{2!}(x-t)^2 f(t)dt$ puis $G_2{}''(x) = A(f)(x)$.

Ainsi d'après la relation $(*)$ il vient :

$$A_2(f)(x) = \int_0^x (x-t)A(f)(t)dt = \int_0^x (x-t)G_2{}''(t)dt = G_2(x) = \int_0^x \frac{1}{3!}(x-t)^3 f(t)dt\,.$$

Maintenant montrons par récurrence que $A_n(f)(x) = \int_0^x \frac{1}{(2n-1)!}(x-t)^{2n-1}f(t)dt$.

Posons $G_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{1}{(2n+1)!}(x-t)^{2n+1} f(t)dt$ on a $G_{2n+1}{}'(x) = \int_0^x \frac{1}{(2n)!}(x-t)^{2n} f(t)dt$ puis $G_{2n+1}{}''(x) = A_n(f)(x)$.

Ainsi d'après la relation $(*)$ il vient :

$$A_{n+1}(f)(x) = \int_0^x (x-t)A_n(f)(x)dt = \int_0^x (x-t)A_{n+1}{}''(f)(t)dt = A_{n+1}(x)$$
$$= \int_0^x \frac{1}{(2n+1)!}(x-t)^{2n+1} f(t)dt\,.$$

Ceci achève notre récurrence.

4) Pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ on a $\left|f(x) - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k\right| \le \frac{|x|^N}{N!} \sup_{[0,x]}|f|$ d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange. Ainsi en prenant $f = \text{sh}$ et $N = 2n-1$ on obtient l'inégalité. $\left|sh(u) - \sum_{k=1}^n \frac{u^{2k-1}}{(2k-1)!}\right| \le \frac{ch(u)|u|^{2n}}{(2n)!}$.

On trouve par définition de U_n : $U(f)(x) - U_n(f)(x) = \int_0^x \left(sh(x-t) - \sum_{k=1}^n \frac{(x-t)^{2k-1}}{(2k-1)!}\right) f(t)dt$ et $|U(f)(x) - U_n(f)(x)| \le \int_0^x \left|\left(sh(x-t) - \sum_{k=1}^n \frac{(x-t)^{2k-1}}{(2k-1)!}\right) f(t)\right| dt \le \int_0^x \frac{ch(x-t)|x-t|^{2n}}{(2n)!} |f(t)|dt$ d'o ù $|U(f)(x) - U_n(f)(x)| \le \frac{ch(x)|x|^{2n}}{(2n)!} \int_0^x |f(t)|dt$ comme voulu. Maintenant an fixant x et en faisant tendre n vers $+\infty$ alors $U(f)(x) = \lim_{n\to\infty} U_n(f)(x) = \sum_{n=1}^\infty A_n(f)(x)$ ainsi $U = \sum_{n=1}^\infty A_n$. On a donc pour $f \in E$:

$(U \circ A)(f) = U(A)(f) = \sum_{n=1}^\infty A_n\big(A(f)\big) = \sum_{n=1}^\infty A_{n+1}(f) = (\sum_{n=1}^\infty A_n(f)) - A = U(f) - A(f)$. Sous réserve de convergence

$(A \circ U)(f) = A\big(U(f)\big) = A(\sum_{n=1}^\infty A_n(f)) = \sum_{n=1}^\infty A(A_n(f)) = \sum_{n=1}^\infty A_{n+1}(f) = U(f) - A(f)$.

Nous venons de prouver que $U \circ A = A \circ U = U - A$.

5)*$(I - A) \circ (I + U) = I + U - A - A \circ U = I + U - A - (U - A) = I$

$(I + U) \circ (I - A) = I + U - A - U \circ A = I + U - A - (U - A) = I$. Ainsi d'après le théorème de la bijection on a que $I - A$ et $I + U$ sont des bijections réciproques.

*L'équation (1) s'écrit $(I - A)(f) = g$ d'où $f = (I + U)(g)$ est la solution de (1).

*Calcul de f pour la fonction paire g

Remarquons que $U(g)(x) = \int_0^x sh(x-t)g(t)dx = \int_0^x sh(t)g(x-t)dt$ et $\int xsh = xch - sh$.

Pour $x \le -2, f(x) = \int_0^{-2} sh(x-t)g(t)dt = -\int_x^{x+2} sh(t)g(x-t)dt$ et avec la définition de g

$f(x) = \int_x^{x+1}(x-t)sh(t)dt - \int_{x+1}^{x+2}(2+x-t)sh(t)dt = 2sh(x+1) - shx - sh(x+2)$

Pour $-2 \le x \le -1, f(x) = \int_0^x sh(x-t)g(t)dt = \int_0^{-1} sh(x-t)g(t)dt + \int_{-1}^x sh(x-t)g(t)dt$ et

$f(x) = \int_x^{x+1} (x-t)sh(t)dt - \int_{x+1}^{0} (2+x-t)sh(t)dt = 2sh(x+1) - shx - x - 2$

Pour $-1 \leq x \leq 0, f(x) = \int_0^x sh(x-t)g(t)dt = \int_0^x sh(t)g(x-t)dt = \int_0^x sh(t)(t-x)dt$ puis

$f(x) = -shx + x$

Pour $0 \leq x \leq 1, f(x) = \int_0^x sh(x-t)g(t)dt = \int_0^x sh(t)g(x-t)dt = \int_0^x sh(t)(x-t)dt$ puis

$f(x) = shx - x$

Pour $1 \leq x \leq 2, f(x) = \int_0^x sh(x-t)g(t)dt = \int_0^1 sh(x-t)g(t)dt + \int_1^x sh(x-t)g(t)dx$ et

$f(x) = \int_{x-1}^{x} (x-t)sh(t)dx + \int_0^{x-1} (2-x+t)sh(t)dx = sh(x) - 2sh(x-1) + x - 2$

Pour $x \geq 2, f(x) = \int_0^2 sh(x-t)g(t)dt = \int_{x-2}^{x} sh(t)g(x-t)dt$ et avec la définition de g

$f(x) = \int_{x-1}^{x} (x-t)sh(t)dt + \int_{x-2}^{x-1} (2+t-x)sh(t)dt = sh(x) - 2sh(x-1) + sh(x-2)$. On peut remarquer que la solution f est une fonction paire.

*PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUESZ : ISFA 2010

1. Intégration

a) $\displaystyle\int_{\_\theta}^{\theta} \frac{x}{\cos(x)} dx = 0$, par imparité évidente de la fonction sous l'intégrale

b)On intègre par parties $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin(x)dx = [-x\cos(x)]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos(x)dx = [-x\cos(x) + \sin(x)]_0^{\pi} = \pi$

c)Avec $u = x^2$, $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1+u}\, du = \left[\frac{(1+u)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^1 = \frac{2^{\frac{3}{2}} - 1}{3}$

2. Diagonalisation et exponentielle d'une matrice

1) le polynôme caractéristique de M est $P_M(X) = (X-1)^2(X-2)^2$ après quelques développements élémentaires. La condition cherchée est $\dim\ker(M - I_4) = 2$ et

$\dim \mathrm{Ker}(M - 2I_4) = 2$.En d'autres termes $M - I_4$ et $M - 2I_4$ sont de rang 2.On a

$M - 2I_4 = \begin{pmatrix} -1 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $M - 2I_4$ est évidemment de rang 2

En regardant les colonnes 1 et 2. $M - I_4$ possède une sous-matrice (en rouge) d'ordre2),elle est de rang 2 si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = c + a - b = 0$, soit $a = b - c$ ce qui est la condition recherchée.

2) En notant C_1, C_2, C_3 et C_4 les colonnes de $M - I_4$ puis $C'_1, C'_2, 'C_3$ et C'_4 les colonnes de $M - 2I_4$

Les relations $C_1 = 0$, $C_2 - C_3 + C_4 = 0, bC_1 + C_3 = cC_1 + C_4 = 0$.Il est facile de voir que 1 est valeur propre de vecteurs propres $\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ et 2 pour vecteurs propres $\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

3)M est semblable à $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $M = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4) On sait que le classique $M = PDP^{-1}$ entraine $M^n = PD^nP^{-1}$.Donc sous réserve de convergence

$$\exp(M) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{PD^nP^{-1}}{n!} = P\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n}{n!}\right)P^{-1} = P\exp(D)P^{-1}$$

5)$D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $D^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$. Par récurrence $D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$.Si c'est le cas pour un k≥1 alors $D^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{k+1} \end{pmatrix}$

On achève la récurrence.

6)On a $\exp(D) = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & -b & -c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7)$\exp(M) = P\exp(D)P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -a & -b & -c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et au final

$$\exp(M)=\begin{pmatrix} e & a(e^2-e) & b(e^2-e) & c(e^2-e) \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & e^2-e & e^2 & 0 \\ 0 & e-e^2 & 0 & e^2 \end{pmatrix}$$

Nombres complexes et arithmétique

On notera $\bar{z}=a-ib$ le conjugué de $z=a+ib$

PARTIE1

1) Soit z un entier de gauss inversible,$\exists z' \in \mathcal{G}, zz'=1$ donc $N(z)N(z')=1$ ensuite $N(z)=1$ car $N(z), N(z') \in \mathbb{N}^*$.Réciprpquement si $N(z)=1$ en réécrivant comme $z\bar{z}=1$ on voit que z est inversible

2)Prenons $z\in\mathcal{G}$ tel que $N(z)$ soit premier ordinaire .Raisonnons par l'absurde en supposant que z n'est pas $\mathcal{G}$-premier. On peut donc écrire $z=rs$ avec $r,s \in \mathcal{G}$ avec r et s non inversibles donc $N(r)>1$ et $N(s)>1$, par conséquent $N(z)=N(r)N(s)$ ne plus être premier ordinaire. D'oū le résultat.

3)$13=(3+2i)(3-2i)$ et $17=(4+i)(4-i)$ en sont deux exemples .

4) Soit p un nombre premier ordinaire qui s'écrit $p=a^2+b^2$;p n'est pas $\mathcal{G}$-premier et on peut écrire comme : $p=(a+ib)(a-ib)$ avec $(a+ib)$ et $(a-ib)$ $\mathcal{G}$-premiers.

*DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES OPTION A : ISFA 2011

1 .Intégration

a)Pour $x\in[0;2]$; $\max(\ln(1+x^2),1)=1 \Leftrightarrow \ln(1+x^2)\leq 1 \Leftrightarrow x\leq\sqrt{e-1}$ .D'après la relation de Chasles sans difficultés on écrit

$\int_0^2 \max(\ln(1+x^2),1)\,dx=\int_0^{\sqrt{e-1}} dx+\int_{\sqrt{e-1}}^2 \ln(1+x^2)\,dx$. En intégrant par parties on obtient

$\int \ln(1+x^2)\,dx=\int x'\ln(1+x^2)\,dx=x\ln(1+x^2)-2\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$ or $\frac{x^2}{1+x^2}=1-\frac{x^2}{1+x^2}$ alors

$\int \ln(1+x^2)\,dx=x\ln(1+x^2)-2x+2\mathrm{Arctan}x+C\ (C\in\mathbb{R})$, le calcul se conclut facilement par

$$\int_0^2 \max(\ln(1+x^2),1)\,dx=[x]_0^{\sqrt{e-1}}+[x\ln(1+x^2)-2x+2\mathrm{Arctan}x]_{\sqrt{e-1}}^2=2\ln5-4-2\sqrt{e-1}$$

$+2\mathrm{Arctan}2-2\mathrm{Arctan}\sqrt{e-1}$ s

b) Pour $x \in [0;2]$, on définit la suite récursive $u_1(x)=\sqrt{x}\,,u_n(x)=\sqrt{x+u_{n-1}(x)}$ $(n>1)$. Intuitivement le point fixe positif de la fonction implicite vérifie $l(x)=\sqrt{x+l(x)}$;on calcule puis

$l(x)=\dfrac{1+\sqrt{1+4x}}{2}$. De l'inégalité $2\sqrt{x}<1+\sqrt{1+4x}$, il vient $u_1(x)<l(x)$ et une récurrence immédiate donne que $u_n(x)<l(x)$.En effet si $u_{n-1}(x)<l(x)$ on a $u_n(x)<\sqrt{x+l(x)}=l(x)$.Le polynome $T_x(X)=-X^2+X+x$ étant positif pour $X\in[0;l(x)]$;et puisque $u_n(x)\in[0;l(x)]$ alors

$u_n(x)=\sqrt{x+u_{n-1}(x)}\ >\sqrt{u_{n-1}(x)^2}=u_{n-1}(x)$.Ainsi la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$est croissante majorée et donc converge exactement vers $l(x)$ .Par définition de $u_n(x)$ on peut remarquer que

$$u_n(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{\ldots+\sqrt{x}}}};\text{ on calcule }\int_0^1\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}dx=\left[\frac{x}{2}+\frac{(1+4x)^{\frac{3}{2}}}{12}\right]_0^1=\frac{5+5^{\frac{3}{2}}}{12}$$

$$\int_0^1\lim_{n\to\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{\ldots+\sqrt{x}}}}\,dx=\frac{5+5^{\frac{3}{2}}}{12}$$

2)

$\forall x\in[\pi;2\pi], |\sin(nx)|\le 1,$ ainsi $\displaystyle\int_\pi^{2\pi}\frac{|\sin(nx)|}{x}dx\le\int_\pi^{2\pi}\frac{1}{x}dx=\ln\left(\frac{2\pi}{\pi}\right)=\ln 2$. En posant $x=nu$

$$\int_\pi^{2\pi}\frac{|\sin(nx)|}{x}dx=\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{|\sin(u)|}{u}du=\sum_{k=n}^{2n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin(u)|}{u}du=\sum_{k=n}^{2n-1}\int_0^\pi\frac{|\sin(v)|}{v+k\pi}dv\ (v=u+k\pi)$$

$$\int_\pi^{2\pi}\frac{|\sin(nx)|}{x}dx\ge\sum_{k=n}^{2n-1}\int_0^\pi\frac{|\sin(v)|}{\pi+k\pi}dv=\left(\frac{1}{\pi}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\right)\int_0^\pi|\sin(v)|dv=\frac{2}{\pi}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$$

Ce qui est clairement la deuxième inégalité.

2-<u>Equation aux dérivées partielles</u>

Notons $D=[0;10]\times\mathbb{R}$

a) $\frac{\partial v}{\partial t}(t,x)=\gamma'(t)x^2+\varphi'(t)x+\rho'(t)$; $\frac{\partial v}{\partial x}(t,x)=2x\gamma(t)+\varphi(t)$; $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x)=2\gamma(t)$

b) $\forall x\in\mathbb{R}, v(10,x)=x^2-x=\gamma(10)x^2+\varphi(10)x+\rho(10)$ ainsi $\gamma(10)=1,\varphi(10)=-1,\rho(10)=0$

c) $-\gamma'(t)x^2-\varphi'(t)x-\rho'(t)+\max_{a\in\mathbb{R}}\left[-(x+2a)\left(2x\gamma(t)+\varphi(t)\right)-a^2\gamma(t)\right]=0;\forall(t,x)\in D$

d)En étudiant le polynôme de second degré $T(x)=\alpha x^2+\beta x+c$;on trouve sans difficultés

$\max_{x\in\mathbb{R}} T(x) = T\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right) = \frac{4\alpha c-\beta^2}{4\alpha}$. En posant $G(a) = -\frac{\partial v}{\partial t}(t,x)(x+2a) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x)\frac{a^2}{2}$, mieux

$G(a) = -a^2\gamma(t) - 2a(2x\gamma(t)+\varphi(t)) - x\gamma(t)(2x\gamma(t)+\varphi(t))$; avec le point précédent on trouve

$$m(v) = \max_{a\in\mathbb{R}} G(a) = \frac{(2x\gamma(t)+\varphi(t)^2 - x\gamma(t)(2x\gamma(t)+\varphi(t))}{\gamma(t)} = 2x^2\gamma(t) + 3x\varphi(t) + \frac{\varphi^2(t)}{\gamma(t)}$$

L'équation 1 devient alors $(2\gamma(t)-\gamma'(t))x^2(3\varphi(t)-\varphi'(t))x + \left(\frac{\varphi^2(t)}{\gamma(t)} - \rho'(t)\right) = 0, \forall(t,x) \in$ D .

e)la nouvelle équation étant polynomiale les coefficients en x^2 et x s'annulent ainsi les équations différentielles sont $\begin{cases}\gamma'(t) = 2\gamma(t)\\ \varphi'(t) = 3\varphi(t)\end{cases}$

f)la détermination de γ et φ est classique et l'on trouve $\begin{cases}\gamma(t) = e^{2(t-10)}\\ \varphi(t) = -e^{3(t-10)}\end{cases}$

Maintenant on a $\rho(t) = \frac{\varphi^2(t)}{\gamma(t)} = e^{7(t-10)}$ soit $\rho(t) = \frac{e^{7(t-10)}-1}{7}$

$$\text{g) } v(t,x) = e^{2(t-10)}x^2 - e^{3(t-10)}x + \frac{e^{7(t-10)}-1}{7}$$

3-<u>Polynôme</u>

1)D'après la formule du binôme de Newton l'on a

$A = (X+1)^{2n} - 1 = \sum_{k=1}^{2n} C_{2n}^k X^k = X\sum_{k=1}^{2n} C_{2n}^k X^{k-1}$, ainsi $A = XB$ oū $B = \sum_{k=1}^{2n} C_{2n}^k X^{k-1}$. Le coefficient

Dominant est 1 et le terme constant est $b_0 = 2n$

2) Notons $(z_k)_{0\le k\le 2n-1}$les racines de A .Un z_k vérifie $(z_k+1)^{2n} = 1$ soit $z_k = -1 + e^{i\frac{k\pi}{n}}$,ce qui est sans problème car on a $z_0 = 0$. $z_k = -1 + e^{i\frac{k\pi}{n}} = e^{i\frac{k\pi}{2n}}\left(e^{i\frac{k\pi}{2n}} - e^{-i\frac{k\pi}{2n}}\right) = 2i\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)e^{i\frac{k\pi}{2n}}$, on garde

$z_k = 2i\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)e^{i\frac{k\pi}{2n}} = -2\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) + i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

3)$P_n = \prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\pi - \frac{k\pi}{2n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{(2n-k)\pi}{2n}\right)$ quand k parcourt $[\![1, n-1]\!]$ alors,

$2n-k$ parcourt $[\![n+1, 2n-1]\!]$ ainsi $P_n = \prod_{k=n+1}^{2n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$. La suite devient plus simple avec

$Q_n = \prod_{k=1}^{2n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \cdot \prod_{k=n+1}^{2n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) . \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ d'oū $Q_n = P_n^2$. Pour $1 \le k \le n-1$

$0 < \frac{k\pi}{2n} < \frac{\pi}{2}$ donc $0 < \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) < 1$, ensuite $P_n > 0$ et on conclut que $P_n = \sqrt{Q_n}$.

4) Par les relations racines-coefficient (formule de Viète) l'on peut écrire $\prod_{k=1}^{2n-1} z_k = -2n$.Encore

$$\prod_{k=1}^{2n-1} z_k = \prod_{k=1}^{2n-1} 2i\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)e^{i\frac{k\pi}{2n}} = Q_n(2i)^{2n-1}e^{i\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{2n-1}k} = 2^{2n-1}Q_n i^{4n-2} = -2^{2n-1}Q_n$$

$$\prod_{k=1}^{2n-1} z_k = -2n = -2^{2n-1}Q_n \text{ donc } Q_n = \frac{n}{2^{2(n-1)}} \text{ donc } P_n = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$

5) $\frac{1}{A} = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{\alpha_k}{X - z_k}$, on a $\alpha_k = \lim_{X\to z_k} \frac{X - z_k}{A} = \frac{1}{A'(z_k)} = \frac{1}{2n(z_k+1)^{2n-1}} = \frac{z_k + 1}{2n} = \frac{e^{i\frac{k\pi}{n}}}{2n}$. On écrit

$$\frac{1}{A} = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{e^{i\frac{k\pi}{n}}}{2n(X - z_k)}$$

6)Pour un polynôme scindé P à racines $(x_k)_{1\le k\le n}$ on a $\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X - x_k}$. Pour $P = A\prod_{k=1}^{n}(X - x_k)$

on a $\ln|P| = \ln|A| + \sum_{k=1}^{n} \ln|X - x_k|$,puis en dérivant on obtient le résultat voulu. Ici on obtient

$$-\frac{P'(2)}{P(2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k - 2} \text{ avec } P = \sum_{k=0}^{n} X^k = \frac{X^{n+1} - 1}{X - 1}, P' = \frac{nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1}{(X-1)^2}$$

$$\frac{P'}{P} = \frac{nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1}{(X-1)(X^{n+1} - 1)} \text{ soit } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k - 2} = -\frac{n2^{n+1} - (n+1)2^n + 1}{2^{n+1} - 1} = -\frac{(n-1)2^n + 1}{2^{n+1} - 1}$$

4 Matrices

I-1)En calculant de deux manières

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \sigma(A) = n\sigma(A) = \sum_{k=1}^{n^2} k = \frac{n^2(1+n^2)}{2} = n\sigma(A) \text{ d'oū } \sigma(A) = \frac{n(1+n^2)}{2}$$

I-2) Raisonnons par l'absurde et prenons $(a_{i,j})_{1\le i,j\le 2}$un carré magique d'ordre 2.Par définition on écrit $\sigma(A) = a_{1,1} + a_{1,2} = a_{1,1} + a_{2,1}$ donc $a_{1,2} = a_{2,1}$ (contradiction) .CQFD

II-1) élémentaire

II-2-a) On constate que $\sigma(J_n) = n$ qui est bien magique .Enfin la bien connue relation $J_n^2 = nJ_n$ donne à la suite d'une récurrence $J_n^p = n^{p-1}J_n$.Notons $\varphi_i(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}$ et $\psi_j(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}$

$$AJ_n = \begin{pmatrix} \varphi_1(A) & \varphi_1(A) & \cdots & \varphi_1(A) \\ \varphi_2(A) & \varphi_2(A) & \cdots & \varphi_2(A) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_n(A) & \varphi_n(A) & \cdots & \varphi_n(A) \end{pmatrix}, J_nA = \begin{pmatrix} \psi_1(A) & \psi_2(A) & \cdots & \psi_n(A) \\ \psi_1(A) & \psi_2(A) & \cdots & \psi_n(A) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \psi_1(A) & \psi_2(A) & \cdots & \psi_n(A) \end{pmatrix} \text{ oū } A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$$

$AJ_n = J_nA = \lambda J_n \Leftrightarrow \forall 1 \le i,j \le n; \varphi_i(A) = \psi_j(A) = \lambda \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}_n$. Ici λ représente $\sigma(A)$.

II-2-b) $\mathcal{P}_n$est évidemment un sous espace vectoriel. On a aussi $I_n \in \mathcal{P}_n$.Il reste à vérifier qu'il est stable par produit.$\forall A, B \in \mathcal{P}_n$: $\begin{cases} ABJ_n = \sigma(B)AJ_n = \sigma(A)\sigma(B)J_n \\ J_nAB = \sigma(A)J_nB = \sigma(A)\sigma(B)J_n \end{cases}$ Ainsi $AB \in \mathcal{P}_n$.

$\mathcal{Q}_n$ N'est pas une sous-algèbre car $I_n \notin \mathcal{Q}_n$.

II-2-c)D'après ce qui précède $\sigma(AB) = \sigma(A)\sigma(B)$.Aussi $\sigma(I_n) = 1$ et σ étant déjà une forme linéaire elle est bien un morphisme d'algèbres.

II-2-d) De $J_nA = \sigma(A)J_n$ on a $J_nA = \sigma(A)J_nA^{-1}$ donc $\sigma(A) \neq 0$ sinon on aurait $J_n = 0_n$.

Aussi $1 = \sigma(I_n) = \sigma(AA^{-1}) = \sigma(A)\sigma(A^{-1})$ donc $\sigma(A^{-1}) = \frac{1}{\sigma(A)}$.

III-1) $\mathcal{P}_n(\mathbb{Q})$et $\mathcal{Q}_n(\mathbb{Q})$sont des $\mathbb{Q}-$ev.Pour répondre à notre question il suffit de montrer que tout élément A de $\mathcal{P}_n(\mathbb{Q})$ s'écrit de façon unique $A = M + rI_n + sM_n; M \in \mathcal{Q}_n(\mathbb{Q})$ et $r, s \in \mathbb{Q}$.On prend $M = A - rI_n - sM_n$, en écrivant $Tr(M) = Tr(M_nM) = \sigma(M)$ avec $\varepsilon = Tr(M_n) \in \{0,1\}$

$$\sigma(A) - s - r = Tr(A) - nr - \varepsilon s = Tr(M_nA) - \varepsilon r - ns \text{ , soit } \begin{cases} r - s = \dfrac{Tr(A) - Tr(M_nA)}{n - \varepsilon} \\ (n-1)r + (\varepsilon - 1)s = Tr(A) - \sigma(A) \end{cases}$$

L'unicité de l'écriture énoncée ci-dessus réside dans l'unicité du couple (r, s) chose constatée car le système d'équation induit est de Cramer à coefficients rationnels.

III-2) Evidemment $\mathcal{P}_n(\mathbb{Q})$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel (comme au I-1) et on montre qu'il est stable par multiplication comme au II-3-b) et puisque $I_n \in \mathcal{P}_n(\mathbb{Q})$, on en déduit que $\mathcal{P}_n(\mathbb{Q})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$.

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES OPTION A : ISFA 2012

PARTIE

1)a) $\forall t \in \mathbb{R}, a^2 - 2a\cos(t) + 1 = (a - \cos t)^2 + \sin^2(t) \ge 0$.Mais $a^2 - 2a\cos(t) + 1 = 0$ donne avec la seconde écriture $\sin(t) = 0$ et $a = \cos(t) = \pm 1$:ce qui est exclus. C'est le résultat voulu.

b)Comme $\forall t \in \mathbb{R}, a^2 - 2a\cos(t) + 1 > 0$,la fonction $\lambda_a : \begin{cases} [0;\pi] \to \mathbb{R} \\ t \longmapsto \ln(a^2 - 2a\cos(t) + 1) \end{cases}$ est continue.

donc $I_a = \int_0^{\pi} \ln(a^2 - 2a\cos(t) + 1)dt$ est bien définie comme l'intégrale d'unefonction continue sur un segment.

c)$I_a = \int_0^{\pi} \ln(a^2 - 2a\cos(t) + 1)dt = I_a = \int_0^{\pi} \ln\left[a^2\left(1 - \frac{2}{a}\cos(t) + \frac{1}{a^2}\right)\right]dt$

$I_a = \int_0^{\pi} \ln\left[\left(1 - \frac{2}{a}\cos(t) + \frac{1}{a^2}\right)\right]dt + \int_0^{\pi} 2\ln|a|dt = I_{1/a} + 2\pi\ln|a|$

2a) Notons $(\zeta_k)_{0\le k\le 2n-1}$les racines de $X^{2n} - 1$ .On a $\zeta_k = e^{i\frac{k\pi}{n}}$ et $\overline{\zeta_k} = \zeta_{2n-k}$.Sans problèmes

$$X^{2n} - 1 = \prod_{k=0}^{2n-1}(X - \zeta_k) = (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{n-1}(X - \zeta_k)(X - \overline{\zeta_k}) =$$

$$(X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{n-1}(X^2 - 2\mathrm{Re}(\zeta_k)X + |\zeta_k|^2) = (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X^2 - 2X\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right)$$

2b)La question précédente donne que $\prod_{k=1}^{n-1}\left(a^2 - 2a\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right) = \frac{a^{2n}-1}{(a-1)(a+1)}$,il s'en suit que

$$\prod_{k=1}^{n}\left(a^2 - 2a\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right) = (a+1)^2\prod_{k=1}^{n-1}\left(a^2 - 2a\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right) = \frac{(a+1)(a^{2n}-1)}{(a-1)}$$

3a) Soit $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\lambda_a\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(a^2 - 2a\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right)\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{(a+1)(a^{2n}-1)}{(a-1)}\right)$, a_n est

Somme de Riemann donc $\lim_{n\to\infty} a_n = I_a$.On calcule maintenant cette limite en écrivant

$a_n = \frac{1}{n}\ln(a+1) + \frac{1}{n}\ln\left(\frac{a^{2n}-1}{a-1}\right)$, Or $\lim_{n\to\infty}\frac{a^{2n}-1}{a-1} = \frac{1}{1-a}$ ainsi $\lim_{n\to\infty} a_n = I_a = 0$ pour $|a| < 1$

3b)Pour $|a| > 1$, $I_a = \underbrace{I_{1/a}}_{=0,\text{car } |1/a|<1} + 2\pi\ln|a| = 2\pi\ln|a|$ soit $I_a = 2\pi\ln|a|$ quand $|a| > 1$.

Une formule plus générale est $I_a = 2\pi\ln[\max(1;|a|)]$.

4) Notons $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 \neq y^2\}$ .Soit $(x;y) \in U$, nécessairement l'un de x^2ou y^2 est non nul .Dans la suite nous prendrons y^2 non nul. On procède comme à la question 1.

$\forall t \in \mathbb{R}, x^2 - 2xy\cos(t) + y^2 = y^2\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{y}\right)\cos(t) + 1\right] > 0$, car $\frac{x}{y} \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$. Ainsi

$\lambda_a : \begin{cases} [0;\pi] \to \mathbb{R} \\ t \longmapsto \ln(x^2 - 2\,xy\cos(t) + y^2) \end{cases}$ est continue ; donc $I_{x,y} = \int_0^{\pi} \ln(x^2 - 2\,xy\cos(t) + y^2)dt$ est

Bien définie comme l'intégrale d'une fonction continue sur un segment. De la relation

$\ln(x^2 - 2\,xy\cos(t) + y^2) = 2\ln|y| + \ln\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{y}\right)\cos(t) + 1\right]$ on a que $I_{x,y} = I_{x/y} + 2\pi\ln|y|$

donc $I_{x,y} = 2\pi\ln\left[\max\left(1;\left|\frac{x}{y}\right|\right)\right] + 2\pi\ln|y| = 2\pi\ln\left[|y|\max\left(1;\left|\frac{x}{y}\right|\right)\right] = 2\pi\ln[\max(|x|,|y|)] = I_{x,y}$

PARTIE 2

5a) Posons $m = \min(x^2, y^2)$ et $M = \max(x^2, y^2)$.$[x^2, y^2] \cup [y^2, x^2] = [m, M] \cup [M, m] = [m, M]$ car $[M, m] = \emptyset$. $\forall\theta \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$,On peut par définition de m et M écrire que

$m\cos^2(\theta) + m\sin^2(\theta) \le x^2\cos^2(\theta) + y^2\sin^2(\theta) \le M\cos^2(\theta) + M\sin^2(\theta)$ or il est clair que $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ donc $m \le x^2\cos^2(\theta) + y^2\sin^2(\theta) \le M$ .Ceci répond à la question.

5b) Soit la fonction $f_{x,y}(\theta) = x^2\cos^2(\theta) + y^2\sin^2(\theta)$, pour $\theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.On peut ramener D_F aux valeurs (x, y) pour les quelles $\int_{\left]0;\frac{\pi}{2}\right[} \ln(f_{x,y})$ soit définie. On voit bien que $(0,0) \notin D_F$.Maintenant pour $(x, y) \neq (0,0)$ on a $f_{x,y}(\theta) > 0$ sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$;dans ce cas $\ln(f_{x,y})$ est continue sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et alors $\int_{\left]0;\frac{\pi}{2}\right[} \ln(f_{x,y})$ est bien définie ;d'où $D_F = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

6) Si $(x; y) \in D_F$ alors $(x, y) \neq (0; 0)$, par symétrie $(y, x) \neq (0; 0)$ donc $(x; y) \in D_F$. Soit$(x; y) \in D_F$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(x^2\cos^2(\theta) + y^2\sin^2(\theta))d\theta = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln\left(x^2\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) + y^2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)\right)d\delta \text{ avec } \theta = \frac{\pi}{2} - \delta$$

$$F(x, y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(x^2\cos^2(\theta) + y^2\sin^2(\theta))d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(y^2\cos^2(\delta) + x^2\sin^2(\delta))d\delta = F(y; x)$$

7)1^{er}cas : $u \ge 1$ $(\ln u \ge 0)$

$t \le v$ donc $\ln(t) \le \ln(v)$ alors $\ln(t) \le \ln(v) + \ln(u)$ ou encore $|\ln(t)| \le |\ln(u)| + |\ln(v)|$

$2^{è}$cas: $v \ge 1$ et $t \le 1$ $(|\ln(u)| = -\ln(u)\,, |\ln(t)| = -\ln(t)$ et $|\ln(v)| = \ln(v))$

avec $u \le t$ on a $\frac{u}{t} \le 1 \le v$ donc $\ln\left(\frac{u}{t}\right) \le \ln(v)$ donc $-\ln(t) \le -\ln(u) + \ln(v)$ comme désiré

$3^{è}$cas: $v \ge 1, t \ge 1$ et $u \le 1$ $(|\ln(u)| = -\ln(u)\,, |\ln(t)| = \ln(t)$ et $|\ln(v)| = \ln(v))$

de $t \le 1$, $ut \le t \le v$ et $t \le \frac{v}{u}$ d'oū $\ln(t) \le -\ln(u) + \ln(v)$ qui est notre résultat.

$4^{è}$cas: $u \le 1$ $(|\ln(u)| = -\ln(u)\,, |\ln(t)| = \ln(t)$ et $|\ln(v)| = \ln(v))$

$t \in [u; v]$ donc $\exists\lambda \in [0; 1]$ tel que $t = \lambda u + (1 - \lambda)v$. Or sur $[0; 1]$ la fonction $|\ln| = -\ln$ est convexe donc $|\ln(t)| = |\ln(\lambda u + (1 - \lambda)v)| \le \lambda|\ln(u)| + (1 - \lambda)|\ln(v)| \le |\ln(u)| + |\ln(v)|$.

8a)Sans difficultés nous voyons que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right], {x_n}^2\cos^2(\theta)+y^2\sin^2(\theta) \in [y^2\sin^2(\theta), y^2]$

Pour la borne supérieure comme $x_n \le y$ on a : ${x_n}^2\cos^2(\theta)+y^2\sin^2(\theta) \le y^2\cos^2(\theta)+y^2\sin^2(\theta)$.

En appliquant le point précédent on trouve que

$\left|\ln\left({x_n}^2\cos^2(\theta)+y^2\sin^2(\theta)\right)\right| \le |\ln(y^2)| + \left|\ln\left(y^2\sin^2(\theta)\right)\right| = 2[\ln|y| + \ln|y\sin\theta|]$

8b) Soit $(x_n)_{n\ge 0}$ une suite convergent vers 0.On définit ainsi la suite $(f_n)_{n\ge 0}$ de fonctions par

$f_n:\begin{cases} \left]0;\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R} \\ \theta \longmapsto \ln\left({x_n}^2\cos^2(\theta)+y^2\sin^2(\theta)\right)\end{cases}$.Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$: $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \ge N, |u_n| \le y$. Notons

$g(\theta) = 2[\ln|y| + \ln|y\sin\theta|]$. $(f_n)_{n\ge N}$ Converge simplement vers f telle $f(\theta) = 2\ln|y\sin\theta|$.On a aussi $\forall n \ge N, |f_n| \le g$ et g est intégrable car $\ln|y\sin\theta| \sim_0 \ln((|y|\theta)$. Ainsi d'après le théorème de

convergence dominée on a $\lim\limits_{n\to\infty} F_y(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(\theta)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\ln|y\sin\theta|d\theta = F_y(0).$ Par suite

d'après la caractérisation séquentielle de la limite F_y est continue en 0.

9a) On va considérer la fonction $Y_\eta:\begin{cases}[\eta; y]\times\left]0;\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R} \\ (x,\theta) \longmapsto \ln(x^2\cos^2(\theta)+y^2\sin^2(\theta))\end{cases}$ un calcul simple donne

$\frac{\partial Y_\eta}{\partial\theta}(x;y) = \frac{2x\cos^2(\theta)}{x^2\cos^2(\theta)+y^2\sin^2(\theta)}$. Il convient de majorer $\frac{\partial Y_\eta}{\partial\theta}$ qui était inconnu sous un trait.

$$\text{Si } \eta \in]0,y], x \in]\eta, y] \text{ et } \theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right] \text{ on a } \frac{\partial Y_\eta}{\partial\theta}(x;y) \le \frac{2}{x^2\cos^2(\theta)+x^2\sin^2(\theta)} = 2\frac{1}{x} \le 2\frac{1}{\eta}$$

9b)On voit que Y_η est continue par rapport à x et y ,puis intégrable. En plus $\frac{\partial Y_\eta}{\partial\theta}$ vérifie l'hypothèse de domination et est continue. D'après le théorème de dérivation sous le signe on a F_y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle $]\eta, y]$ avec $\eta>0$; d'où F_y est dérivable sur $]0,y]$.

9c) $\frac{1}{(y^2X^2+x^2)(X^2+1)} = \frac{\lambda}{y^2X^2+x^2} + \frac{\mu}{y^2X^2+x^2}$ avec $\lambda = \frac{y^2}{y^2-x^2}$ et $\mu = -\frac{1}{y^2-x^2}$

9d) Avec le théorème de dérivation sous le signe avec Y_η tel que $x \in]\eta, y]$ et $\eta>0$;il vient

$$\forall x \in]0,y[: F'_y(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial Y_\eta}{\partial\theta}(x;y)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x\cos^2(\theta)}{x^2\cos^2(\theta)+y^2\sin^2(\theta)}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x}{x^2+y^2\tan^2(\theta)}d\theta$$

posant $X=\tan\theta$, $F'_y(x)=\int_0^{\infty}\frac{2x}{(y^2X^2+x^2)(X^2+1)}dx=2x\int_0^{\infty}\left(\frac{\lambda}{y^2X^2+x^2}+\frac{\mu}{y^2X^2+x^2}\right)dx$

$$F'_y(x)=\frac{2x}{y^2-x^2}\left[\frac{y}{x}\text{Arctan}\left(\frac{y}{x}X\right)-\text{Arctan}x\right]_0^{\infty}=\frac{\pi x}{y^2-x^2}\left(\frac{y}{x}-1\right)=\frac{\pi}{x+y}$$

10a) $F'_y(x)=\frac{\pi}{x+y}$ donc$\forall x\in\,]0,y[$: $F_y(x)=\pi\ln(x+y)+C$ $(C\in\mathbb{R})$.En faisant tendre x vers y on trouve $\pi\ln(2y)+C=\pi\ln(y)$ soit $C=-\pi\ln 2$ et $F_y(x)=\pi\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)$.Maintenant prenons $(x;y)\in D_F$, sans perte de généralité on peut supposer que $|x|\le|y|$ alors on trouve

$F(x,y)=F_{|y|}(|x|)=\pi\ln\left(\frac{|x|+|y|}{2}\right)$

10b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos(t))\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos^2(t))\,dt=\frac{1}{2}F(1,0)=\frac{1}{2}F(0,1)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin(t))\,dt=-\frac{\pi}{2}\ln(2)$

PARTIE III

11a) Cette condition est licite , puisque $a+b>0$ ainsi donc $\rho=\frac{b-a}{b+a}$ est bien défini. On a aussi $-1=\frac{-b-a}{b+a}<\rho=\frac{b-a}{b+a}<\frac{b+a}{b+a}=1$ ou aussi $\rho\in\,]-1,1[$.

11b)Il est évident que $\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0 & \text{si } k=2n+1\\(-1)^n & \text{si } k=2n\end{cases}$. Comme $\rho^k\frac{\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k}=o(\rho^k)$, la série converge

$$\text{et on obtient : } 2\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\frac{\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k}=\sum_{n=1}^{\infty}\rho^{2n}\frac{(-1)^n}{n}=-\ln(1+\rho^2)=\ln\left(\frac{(a+b)^2}{2(a^2+b^2)}\right)$$

12)Il est trivial de montrer que $f(x)=\ln(a^2\cos^2(x)+b^2\sin^2(x))$ est π-périodique, ce qui prouve bien que ce choix est licite . On calcule et $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\ln\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)$.

13a) On sait que $\forall x\in\mathbb{R}, a^2\cos^2(x)+b^2\sin^2(x)>0$.En appliquant les théorèmes généraux f est dérivable et $f'(x)=\frac{(b^2-a^2)\sin(2x)}{a^2\cos^2(x)+b^2\sin^2(x)}$. Elle est même de classe $\mathcal{C}^1$ donc la série de Fourrier de f' converge vers f', ainsi trouvons là. Combinant les formules d'Euler on a que

$$f'(x)=\frac{2(b^2-a^2)(e^{4ix}-1)}{i[(a^2-b^2)e^{4ix}+2(a^2+b^2)e^{2ix}+(a^2-b^2)]}=\frac{2(1-e^{4ix})}{i(e^{2ix}-\rho)\left(e^{2ix}-\frac{1}{\rho}\right)}$$

$f'(x)=2\left(\frac{1-e^{4ix}}{i}\right)\left(\frac{1}{\rho-\frac{1}{\rho}}\right)\left(\frac{e^{-2ix}}{1-\rho e^{-2ix}}+\frac{\rho}{1-\rho e^{-2ix}}\right)$, Par quelques développements simples

$$A=2\left(\frac{1-e^{4ix}}{i}\right)\left(\frac{e^{-2ix}}{1-\rho e^{-2ix}}+\frac{\rho}{1-\rho e^{-2ix}}\right)=2\left(\frac{1-e^{4ix}}{i}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\rho^k e^{-2i(k+1)x}+\rho^{k+1}e^{-2ikx}\right)$$

$$A=\frac{2}{i}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k(e^{2ikx}-e^{-2ikx})=4\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\sin(2kx)\ \text{d'ou}\ f'(x)=4\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\sin(2kx)$$

Ce qui est la série de Fourrier de f'.

13b) a)Soit $f_k(x)=-2\frac{\rho^k\cos(2kx)}{k}$, alors $f_k'(x)=4\rho^k\sin(2kx)$. La série $g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ converge

Simplement car $f_k(x)=o(\rho^k)$, et $\sum f_k{}'$ converge simplement car normalement convergente. En effet $\forall x\in\mathbb{R}, f_k{}'(x)\le 4\rho^k$.Par suite g est de classe $\mathcal{C}^1$ et $g'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k{}'(x)=f'(x)$.Ainsi $f=g+C\ (C\in\mathbb{R})$.Ecrivons

$$f(x)=C-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^k\cos(2kx)}{k},\text{en mettant } x=\frac{\pi}{4}\text{ on a : }\ln\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)=C-\ln\left(\frac{(a+b)^2}{2(a^2+b^2)}\right).\text{De là}$$

$$C=2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right).\text{Et la reponse est } f(x)=C=2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^k\cos(2kx)}{k}\quad(\mathrm{I})$$

14a) f est π-périodique donc on a : $f(x)=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n(f)\cos(2nx)+b_n(f)\sin(2nx)]$ .Par suite ses coefficients de Fourrier sont : $\begin{cases}a_0(f)=4\ln\left(\frac{a+b}{2}\right), a_n(f)=-2\,\frac{\rho^k}{k}\ \text{pour } n\ge 1\\ \qquad\qquad b_n(f)=0\end{cases}$

14b)f étant de classe $\mathcal{C}^1$ donc sa série de Fourrier est normalement convergente ainsi en peut permuter $\sum$et $\int$ dans (I).Comme aussi on a $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2kx)\,dx=\left[\frac{\sin(2kx)}{2k}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=0$,il s'écrit donc

$$F(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx-2\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\rho^k\cos(2kx)}{k}dx=\pi\ln\left(\frac{a+b}{2}\right).\text{Résultat qui}$$

Est conforme au 10a)

15)D'après la formule de Parseval on est à mesure d'écrire

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f^2(x)dx=\frac{a_0(f)^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}a_k(f)^2=4\ln^2\left(\frac{a+b}{2}\right)+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^{2k}}{k^2}=2\left(2\ln^2\left(\frac{a+b}{2}\right)+\sigma(\rho^2)\right)$$

$$\int_0^{\pi}f^2(x)dx=2.\pi.\left(2\ln^2\left(\frac{a+b}{2}\right)+\sigma(\rho^2)\right)$$

16a) Ecrivons $\sigma(x)=\sum_{k=1}^{\infty}u_kx^k$ avec $u_k=\frac{1}{k^2}$. σ(x) est une série entière , d'après la règle de D'Alembert comme $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{k+1}}{u_k}=1$, son rayon de convergence est R=1 .En étudiant au bord du disque de convergence ,il y'a convergence en x=1 car il est donné que $\sigma(1)=\frac{\pi^2}{6}$ et en x=-1 d'après le critère spécial des suites alternées .L'ensemble de définition de σ est :$D_\sigma = [-1,1]$.

16b) Puisqu'il y'a convergence sur le bord du disque de convergence σ est continue sur D_σ.

16c)$\sigma(-1) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k^2} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = -\frac{1}{2}\sigma(1) = -\frac{\pi^2}{12}$

17a)$\forall x \in]0,\pi[, \lim_{n\to\infty} g_n(x) = 4[\ln(\sin(x)]^2$. Ainsi la suite $(g_n)_{n\geq1}$ converge simplement vers la fonction $g:\begin{cases}]0,\pi[\to \mathbb{R} \\ x \longmapsto 4[\ln(\sin(x)]^2 \end{cases}$.

17b) La fonction sin étant concave sur l'intervalle $[0,\pi]$, elle donc en dessous de ses tangentes dont la première bissectrice :sa tangente en 0.Par conséquent $\forall x \in]0,\pi[, \sin(x) \leq x$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0,\pi[\ g_n(x) \leq [\ln(1+\sin^2(x)]^2 \leq [\ln(1+x^2)]^2 \leq 4[\ln(1+x)]^2$$

18) $(g_n)_{n\geq1}$ est une suite de fonctions continues et intégrables sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ convergent simplement vers g et vérifiant la condition de domination. Donc d'après le théorème de convergence dominée on a $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_n(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\ln(\sin(x)]^2dx$.D'où l'existence de

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\ln(\sin(x)]^2dx$. En posant $x = \frac{\pi}{2} - u$, on trouve $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}}[\ln(\sin(x))]^2dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}[\ln(\cos(u))]^2du$

Comme $0 \leq 2(\ln(\sin(t))\ln(\cos(t))) \leq [\ln(\sin(t))]^2 + [\ln(\cos(t))]^2$, on a l'existence de $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\ln(\sin(t))\ln(\cos(t)))dt$.Commençons les calculs ,,par translation et parité on a

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}}[\ln(\cos(u))]^2du =_{u=v-\frac{\pi}{2}}= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}[\ln(\sin(x))]^2dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}[\ln(\sin(x))]^2dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\ln(\sin(x))]^2dx$$

$$\text{Pour } (a,b) = (0,1) \text{on a: } \int_0^{\pi}[\ln(\sin^2(x))]^2dx = 4\int_0^{\pi}[\ln(\sin(x))]^2dx = 2.\pi.\left(2\ln^2(2) + \sigma(1)\right)$$

On en déduit que $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}}[\ln(\sin(t))]^2dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}[\ln(\cos(t))]^2dt = \frac{\pi}{4}.\left(2\ln^2(2) + \frac{\pi^2}{6}\right)$. D'autre part :

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right)\right]^2dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left[\ln\left(\frac{\sin(t)}{2}\right)\right]^2dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}[\ln(\sin(t)) + \ln(\cos t)]^2dt = 2J + 2K$$

$$L = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\ln(\sin(t))]^2dt - \int_0^{\pi}\ln(2).\ln(\sin(t))\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln^2(2)dt = \frac{\pi}{4}.\left(8\ln^2(2) + \frac{\pi^2}{6}\right); \text{après}$$

$$\text{avoir vu que } \int_0^{\pi}\ln(\sin(t))\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos(t))\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin(t))\,dt = -\pi\ln(2) \text{ dans le calcul.}$$

De $L = 2J + 2K$ soit $K = \frac{L}{2} - J$, enfin $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln(\sin(t)) \ln(\cos(t)))dt = \frac{\pi}{4}.\left(2\ln^2(2) - \frac{\pi^2}{6}\right)$.

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES : ISFA 2013

Partie1 : intégrales impropres de référence et matrices associées

1) Comme $\lim_{t\to+\infty} t^{n+2}e^{-t^2} = 0$ alors $t^n e^{-t^2} =_{+\infty} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ ainsi $\forall x \in \mathbb{R}\ t \longmapsto t^n e^{-t^2}$ est intégrable sur $[x, +\infty[$ d'où la convergence de $E_n(x) = \int_x^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$.

2. a)En posant $u = -t$: $\int_{-\infty}^{0} e^{-u^2} du = -\int_{+\infty}^{0} e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. D'aprèsla relation de Chasles $E_0(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt + \int_x^0 e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \int_x^0 e^{-t^2} dt$ or d'après le calcul précédent on trouve que $\lim_{x\to-\infty} \int_x^0 e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ par conséquent $\lim_{x\to-\infty} E_0(x) = \sqrt{\pi}$.

2b) La fonction $t \longmapsto e^{-t^2}$est continue elle admet donc une primitive sur $\mathbb{R}$ que nous notons F. A la question 2a) nous avons trouvé que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ ainsi F admet des limites a en $+\infty$.Ce faisant : $E_0(x) = a - F(x)$ alors $E_0'(x) = -F'(x) = -e^{-x^2}$ et de là $E_0''(x) = 2xe^{-x^2}$.Ainsi on a que E_0'' est positive sur $\mathbb{R}_+$ et négative sur $\mathbb{R}_-$ et on finit par conclure sur sa concavité. $E_0(x) + E_0(-x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt + \int_{-x}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt + \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$, d'où le point $\Omega\left(0, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$ est centre de symétrie de E_0.

3.a)$E_{n+2}(x) = \int_x^{+\infty} t^{n+2} e^{-t^2} dt = \int_x^{+\infty} t^{n+1}\left(-\frac{e^{-t^2}}{2}\right)' dt = \left[-\frac{t^{n+1}e^{-t^2}}{2}\right]_x^{+\infty} + \frac{n+1}{2}.\int_x^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$; après intégration par parties et encore $E_{n+2}(x) = \frac{x^{n+1}e^{-x^2}}{2} + \frac{n+1}{2} E_n(x)$ (I).

3.b)Par définition les fonctions E_n sont strictement positives .En mettant $x = 0$ dans (I) on a : $\forall p \in \mathbb{N}, E_{n+2p}(0) = \frac{n+1}{2} E_{n+2p-1}(0)$ et par un télescopage produit on trouve alors

$$E_{n+2p}(0) = \left(\prod_{k=1}^{p} \frac{E_{n+2k}(0)}{E_{n+2k-2}(0)}\right) E_n(0) = \left(\prod_{k=1}^{p} \frac{n+2k-1}{2^p}\right) E_n(0)\ (II).$$ En posant $n = 0$, alors

$$E_{2p}(0)=\left(\prod_{k=1}^{p}\frac{2k-1}{2^p}\right)\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\left(\prod_{k=1}^{p}\frac{2k(2k-1)}{2k.2^p}\right).\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{(2p)!}{p!\,2^{2p}}.\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{(2p)!}{p!\,2^{2p+1}}\sqrt{\pi}\ \text{comme voulu.}$$

3b) $E_1(0)=\int_0^{+\infty}t^1e^{-t^2}dt=\int_0^{+\infty}\left(-\frac{e^{-t^2}}{2}\right)'dt=\left[-\frac{e^{-t^2}}{2}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{2}$,en prenant $n=1$ dans (II) alors

$$E_{2p+1}(0)=\left(\prod_{k=1}^{p}\frac{2k}{2^p}\right).\frac{1}{2}=\frac{p!\,2^p}{2^p}.\frac{1}{2}=\frac{p!}{2}\ \text{ce qui est le résultat démandé.}$$

4a)$M_2=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{\pi}}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{\pi}}{4}\end{pmatrix}$ et son polynôme caractéristique est $X_M(\lambda)=\lambda^2-3\frac{\sqrt{\pi}}{4}\lambda+\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$ et son discriminant est $\Delta=\frac{\pi}{16}+1$.Ainsi les valeurs propres sont $\lambda_{1,2}=\frac{3\sqrt{\pi}\pm\sqrt{\pi+16}}{8}$ qui sont positives.

4b)$\forall i,j\in[\![1;n]\!]^2, M_n[i,j]=M_n[j,i]=E_{i+j-2}(0)$ ainsi M_n est symétrique, elle est donc diagonalisable sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

4c) Posons ${}^tY=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ ainsi

$${}^tYM_nY=\sum_{1\le i,j\le n}a_ia_jE_{i+j-2}(0)=\int_0^{+\infty}\left(\sum_{1\le i,j\le n}a_ia_jt^{i+j-2}\,e^{-t^2}\right)dt=\int_0^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}a_it^{i-1}e^{-\frac{t^2}{2}}\right)^2dt$$

Ainsi ${}^tYM_nY\ge 0$.Ainsi pour $Y\neq 0$ alors ${}^tYM_nY>0$.Et maintenant si nous prenons Y un vecteur propre de M_n associé à la valeur propre λ alors $0<{}^tYM_nY=\lambda\,{}^tYY$ d'où $\lambda>0$.On conclut que toutes les valeurs propres de M_n sont strictement positives.

Partie 2 : approximations polynomiales usuelles.

1a)$\forall P\in\mathbb{R}[X], e^t-P(t)\sim_{+\infty}e^t$ par suite $(e^t-P(t))^2e^{-t^2}\sim_{+\infty}e^{2t-t^2}$ et comme $t\mapsto e^{2t-t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ ainsi il en est de même pou $t\mapsto(e^t-P(t))^2e^{-t^2}$ donc l'intégrable $d(P)=\int_0^{+\infty}(e^t-P(t))^2e^{-t^2}dt$ est intégrable.

1b) Pour simplifier les notations écrivons :$P_n=\{d(P),P\in\mathbb{R}_n[X]\}$ ainsi $\forall a\in P_n, a\ge 0$. P_n étant non vide et minoré il admet donc une borne inférieure d'où l'existence de u_n.Comme $A_n\subseteq A_{n+1}$,alors $\forall a\in P_n, a\ge u_{n+1}$ et par définition$u_n\ge u_{n+1}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée par 0 ;elle est donc convergente.

2) Courbe :ok. Il est facile de voir que les tangentes en 0 aux fonctions exp, R_2 et S_2 n'est que la première bissectrice.

3a)Par concavité du ln on a évidement $\forall x>-1, \ln(1+x)\le x$ à cause de la tangente en 0.Et alors $\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)\le\frac{1}{1+x}-1=-\frac{x}{1+x}$ soit $\frac{x}{1+x}\le\ln(1+x)$ donc $\frac{x}{1+x}\le\ln(1+x)\le x$.En prenant $x=\frac{t}{n}$ dans l'inégalité précédente on trouve :$\frac{t}{1+\frac{t}{n}}\le n\ln\left(1+\frac{t}{n}\right)\le t$.

3b) De $n\ln\left(1+\frac{t}{n}\right)\leq t$ il vient $\left(1+\frac{t}{n}\right)^n\leq e^t$soit $e^t-\left(1+\frac{t}{n}\right)^n\geq 0$ (a).D'autre part il vient : $n\ln\left(1+\frac{t}{n}\right)\geq\frac{t}{1+\frac{t}{n}}\geq t\left(1-\frac{t}{n}\right)=t-\frac{t^2}{n}\geq t+\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right)$ donc $\left(1+\frac{t}{n}\right)^n\geq e^t\left(1-\frac{t^2}{n}\right)$ .Ainsi on retrouve $e^t-\left(1+\frac{t}{n}\right)^n\leq\frac{t^2e^t}{n}$ (b).En combinant (a) et (b) on a notre résultat $0\leq e^t-\left(1+\frac{t}{n}\right)^n\leq\frac{t^2e^t}{n}$.

3c)En exploitant 3b) on trouve $0\leq d(R_n)\leq\frac{A}{n^2}$ avec $A=\int_0^{+\infty}t^4e^{2t-t^2}dt$.En appliquant le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty}d(R_n)=0$.

3d) L'idée est de montrer que $R_n\leq S_n$ sur $\mathbb{R}_+$.Maintenant en éclatant R_n il suffit de montrer que $\forall k\in[\![0,n]\!];\frac{C_n^k}{n^k}\leq\frac{1}{k!}$ Soit $\forall k\in[\![0,n]\!],C_n^k\leq\frac{n^k}{k!}$ Chose qui sera démontrée par récurrence. Les cas $n=0{,}1{,}2$ se vérifient à la main. Prenons un $n\in\mathbb{N}$ pour laquelle l'hypothèse de récurrence est vraie. En remarquant que $C_{n+1}^{k+1}=\frac{k+1}{n+1}C_n^k$ il vient $\forall k\in[\![0,n]\!],C_{n+1}^{k+1}\leq\frac{k+1}{n+1}\frac{n^k}{k!}$ Il suffit alors de démontrer que$\frac{k+1}{n+1}\frac{n^k}{k!}\leq\frac{(n+1)^{k+1}}{(k+1)!}$ Ce qui est équivalent à $(k+1)^2\leq\frac{(n+1)^{k+2}}{n^k}$ et même évident. Le

Cas $k=0$ étant trivial on achève notre récurrence .On a même mieux $R_n\leq S_n\leq exp$ ce qui donne sans controverse $0\leq u_n\leq d(S_n)\leq d(R_n)$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}d(R_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

4a) D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange on a $\forall n\geq 2,\forall x\geq 0,|e^x-S_{n-1}(x)|\leq\frac{x^n}{n!}e^x$ ainsi $d(S_{n-1})\leq\frac{1}{(n!)^2}\int_0^{+\infty}t^{2n}e^{2t-t^2}dt$ (c), aussi en remarquant que $t^{2n}e^{2t-t^2}=\left(te^{\frac{-2t}{n}}\right)^{2n}e^{6t-t^2}$ et en étudiant $\varphi(t)=te^{\frac{-2t}{n}}$ on trouve $max_{\mathbb{R}_+}\varphi=\varphi\left(\frac{n}{2}\right)=\frac{n}{2}e^{-1}$.En combinant ces deux idées à l'inégalité (c) on trouve $d(S_{n-1})\leq\frac{1}{(n!)^2}\int_0^{+\infty}t^{2n}e^{2t-t^2}dt\leq\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{2n}e^{-2n}}{(n!)^2}\int_0^{+\infty}e^{6t-t^2}dt$

4b) D'après la formule de Stirling on a $n!\sim\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}\sqrt{2\pi n}$ ce qui implique que $\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{2n}e^{-2n}}{(n!)^2}\sim\frac{2^{-2(n-1)}}{8\pi n}$ d'où $d(S_{n-1})=o\left(2^{-2(n-1)}\right)$ ou en ré indiçant $d(S_n)=o(2^{-2n})$.

Partie 3: approximations polynomiales optimales

1.a) Nous connaissons le produit scalaire $\varphi_1:\begin{cases}E^2(\mathbb{R},\mathbb{R})\to\mathbb{R}\\(f,g)\mapsto\int_0^{+\infty}f(t)g(t)e^{-t^2}dt\end{cases}$ et la forme quadratique définie positive qui lui est associée $q_1:\begin{cases}E(\mathbb{R},\mathbb{R})\to\mathbb{R}\\f\mapsto\int_0^{+\infty}f^2(t)e^{-t^2}dt\end{cases}$.Ici $E(\mathbb{R},\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions f telles que$\int_0^{+\infty}f^2(t)e^{-t^2}dt$ converge. De là il est évident que $q:(x_0,x_1,\dots,x_n)\mapsto\int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^n x_kt^k\right)^2e^{-t^2}dt$ est une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^{n+1}$ comme étant isomorphe à la restriction de q_1 sur $\mathbb{R}_n[X]$.

1.b) Pour alléger les notations , notons $X = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ et $P = \sum_{k=0}^{n} x_k t^k$ et $\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} {x_k}^2}$

Ainsi $\phi_n(X) = q_1(exp - P) = q_1(\text{ex}) - 2\varphi_1(exp, P) + q_1(P)$.D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz $\varphi_1(exp, P) \leq \sqrt{q_1(\text{ex})q_1(P)}$ ainsi $\phi_n(X) \geq \left(\sqrt{q_1(P)} - \sqrt{q_1(ex)}\right)^2$.$q$ étant une forme quadratique définie positive en dimension finie il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle on peut écrire $q_1(P) = q(X) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k {a_k}^2$ où $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ sont les coordonnées de X dans $\mathcal{B}$.Maintenant comme $\|X\|_2$ tend vers $+\infty$ alors l'un des x_i et alors l'un des a_i tend vers $+\infty$.Par conséquent $q_1(P)$ tend vers $+\infty$ car les λ_k sont strictement positives. Ainsi par encadrement , $\phi_n(X)$ tend vers $+\infty$.

1.c) $\mathbb{R}_n[X]$ est connexe par arcs car convexe et fermé car en dimension finie. Ainsi comme ϕ_n est continue alors $\phi_n(\mathbb{R}_n[X])$ est un intervalle fermé. D'après la question 1b) cet intervalle est non majoré ainsi $\phi_n(\mathbb{R}_n[X]) = [c, +\infty[$ où $c = \inf\left(\phi_n(\mathbb{R}_n[X])\right) = u_n$ soit $\phi_n(\mathbb{R}_n[X]) = [u_n, +\infty[$ .On en déduit $\exists P_n \in \mathbb{R}_n[X], d(P_n) = u_n$. Ici $P_n = \sum_{k=0}^{n} x_k t^k$ où $(x_0, x_1, \dots, x_n) = {\phi_n}^{-1}(u_n)$.

2) Prenons $P = A$ un polynôme constant .On a :$d(P) = \int_0^{+\infty} (e^t - A)^2 e^{-t^2} dt$ est un polynôme du second degré : $d(P) = \alpha A^2 - 2\beta A + \gamma = R(A)$,avec $\gamma = \int_0^{+\infty} e^{2t-t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{1-(t-1)^2} dt = e^1 \int_{-1}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \exp(1) E_0(-1)$,

$\beta = \int_0^{+\infty} e^{t-t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{\frac{1}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2} dt = e^{\frac{1}{4}} \int_{-\frac{1}{4}}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \exp\left(\frac{1}{4}\right) E_0\left(-\frac{1}{4}\right)$ et $\alpha = E_0(0)$.Cette fonction polynômiale atteint son minimum en $a = \frac{\beta}{\alpha}$ et $\inf(S(a)) = \gamma - \frac{\beta^2}{\alpha}$.maintenant on répond et on a $P_0 = \frac{\exp\left(\frac{1}{4}\right) E_0\left(-\frac{1}{4}\right)}{E_0(0)}$ et $u_0 = \exp(1) E_0(-1) - \frac{\exp\left(\frac{1}{2}\right)(\left(E_0\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2}{E_0(0)}$.

3a) Il est facile de voir que chaque fonction partielle vérifie les hypothèses de dérivation sous le signe ainsi chaque dérivée partielle est continue d'où ϕ_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$.En plus

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial x_i}(x_0, x_1, \dots, x_n) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial \left(e^t - \left(\sum_{k=0}^{n} x_k t^k\right)\right)^2}{\partial x_i} e^{-t^2} dt = -2 \int_0^{+\infty} t^i \left(e^t - \left(\sum_{k=0}^{n} x_k t^k\right)\right) e^{-t^2} dt$$

3b)Soit $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ un point critique de ϕ_n .Alors $\forall 1 \leq i \leq n+1, \frac{\partial \phi_n}{\partial x_{i-1}}(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$ et$\sum_{k=0}^{n} \int_0^{+\infty} x_k t^{i+k-1} e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} t^{i-1} e^{t-t^2} dt = \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^{+\infty} x_{k-1} t^{i+k-2} e^{-t^2} dt$ ce qu'on réécrit comme $\forall 1 \leq i \leq n+1, \sum_{k=1}^{n+1} M_{n+1}[i,k] x_{k-1} = \int_0^{+\infty} t^{i-1} e^{t-t^2} dt$ (d) ; ce qui est un système de Cramer de matrice M_{n+1}. ϕ_n admet donc un unique point critique solution d'un système de Cramer de matrice M_{n+1}.

3c) En considérant l'espace normé $\left(\mathbb{R}^{n+1}; \sqrt{q(.)}\right)$, $\mathbb{R}^{n+1}$est un ouvert ainsi ϕ_n atteint son minimum en un point intérieur qui est donc un point critique. Comme ϕ_n admet un unique point critique ; elle admet son minimum en un unique vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$.En remontant avec les polynômes $\exists!\, P_n \in \mathbb{R}_n[X], d(P_n) = u_n$.

3d)la relation (d) de la question $3b)$ montre que A_n vérifie $M_{n+1} A_n = B$. Et si $B = (b_0, b_1, \dots, b_n)$

On a $\forall 1 \leq i \leq n+1, b_i = \int_0^{+\infty} t^{i-1} e^{t-t^2} dt = \int_0^{+\infty} t^{i-1} e^{\frac{1}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2} dt = e^{\frac{1}{4}} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\infty} \left(t+\frac{1}{2}\right)^{i-1} e^{-t^2} dt$

$b_i = e^{\frac{1}{4}} \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i-1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1-k} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\infty} t^k e^{-t^2} dt = e^{\frac{1}{4}} \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i-1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1-k} E_k\left(-\frac{1}{2}\right)$. Et $A_n = {M_{n+1}}^{-1} B$ avec B défini comme dans l'énoncé.

Partie 4 : développement en série de polynômes orthogonaux.

1a) Nous allons montrer que la somme $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$ est directe. Considérons $f \in \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$, on peut écrire $f = \sum_{k=1}^{i} \alpha_k e^{n_k x} = \sum_{k=1}^{j} \beta_k x^{m_k}$ avec $(n_k)_{1 \leq k \leq i}$et $(m_k)_{1 \leq k \leq j}$ des suites croissantes. Ainsi $e^{-n_i x} f = \sum_{k=1}^{i} \alpha_k e^{(n_k - n_i)x} = \sum_{k=1}^{j} \beta_k e^{-n_i x} x^{m_k}$ et en faisant tendre vers $+\infty$,on obtient $\lim_{x \to +\infty} e^{-n_i x} f = \alpha_i = 0$.Et ainsi de suite on obtient que $\forall 1 \leq k \leq i, \alpha_k = 0$,soit $f = 0$. De là on tire que $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \{0\}$:la somme est alors directe.

1b)$\mathcal{E}$ est un sous espace vectoriel de $E(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ainsi $b = \varphi_{1|\mathcal{E}}$ est un produit scalaire.

1c) En prenant par exemple $f(t) = e^{t^2}$et $g(t) = 1$ des fonctions de $\mathcal{C}$,on ne peut pas calculer $b(f, g)$.

2). On construit par récurrence sur N une suite de polynômes $(U_n)_{0 \leq n \leq N}$ à partir de la base canonique par le procédé de Schmidt. On prend tout simplement $U_0 = 1$ pour $N = 0$.Et maintenant supposons le résultat établi pour un $N \in \mathbb{N}$, pour la suite on prend $U_{N+1} = x^{N+1} - \sum_{k=0}^{N} \frac{b(x^{N+1}, U_k)}{\|U_k\|^2} U_k$; comme $\forall k \leq N, \deg(U_k) = k$ alors $\deg(U_{N+1}) = N+1$ et U_{N+1} est unitaire .En plus $\forall k \leq N$: $b(U_k, U_{N+1}) = b(x^{N+1}, U_{N+1}) - \frac{b(x^{N+1}, U_{N+1})}{\|U_k\|^2} \|U_k\|^2 = 0$.

On finit par achever la récurrence et en étendant on construit une famille infinie $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui satisfait les conditions de l'énoncé. Maintenant montrons l'unicité de cette suite, prenons $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une autre suite de polynômes solution. On va montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\forall k \leq n; U_k = V_k$.Ceci est évident pour $n = 0$ car$U_0 = V_0 = 1$. En la supposant vrai pour $n \in \mathbb{N}$, on a alors $\forall k \leq n$: $b(U_k, U_{n+1} - V_{n+1}) = 0$ or $(U_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et $U_{n+1} - V_{n+1} \in \mathbb{R}_n[X]$ ainsi $U_{n+1} - V_{n+1} = 0$ soit $U_{n+1} = V_{n+1}$. Ceci achève la récurrence et on alors l'unicité.

3.a)P_n est le projeté orthogonal de exp sur$\mathbb{R}_n[X]$ au sens du produit scalaire $b(.,.)$.Et comme $(H_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$,par les formules de projection on trouve

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} b(H_k, \exp)H_k .$$

3.b) On sait que les sommes partielles de cette série vérifient :$P_n = \sum_{k=0}^{n} c_k H_k$, ainsi il suffit de montrer que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers exp. En effet $\|exp - P_k\|^2 = u_k$ donc $\lim_{n \to +\infty} \|exp - P_k\| = 0$ et on conclut que$\sum_{k \geq 0} c_k H_k$ converge et sa somme est la fonction exponentielle.

3c) En remarquant que $\sum_{n=0}^{N} c_n{}^2 = \left\|\sum_{n=0}^{N} c_n H_n\right\|^2$ et que $\sum_{n\geq 0} c_n H_n$ converge vers exp dans $(\mathcal{E}, \|\ \ \|)$ on voit que $\sum_{n\geq 0} c_n{}^2$ converge et sa somme est $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n{}^2 = \|exp\|^2 = \int_0^{+\infty} e^{2t-t^2} dt$. D'après la question 1c) de la partie 3 on trouve $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n{}^2 = \exp(1)\, E_0(-1)$.

3d) On peut aussi écrire que $c_n = \frac{\|exp\|^2 + \|H_n\|^2 - \|exp - P_k\|^2}{2} \geq \frac{\|exp\|^2 - \|exp - P_k\|^2}{2}$. En prenant un nombre arbitraire ε vérifiant $0 < \varepsilon < \|exp\|^2$;$\exists N \in \mathbb{N}, \left(n > N \Rightarrow c_n > \frac{\varepsilon}{2}\right)$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \|exp - P_k\| = 0$. $\sum_{n\geq 0} c_n$ n'est pas convergente.

*DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES OPTION A:ISFA 2013

PARTIE I

1.a) Par définition de f_T,on a que $\forall k \in N_p, \forall t \in K, {f_T}^{(k)}(t) = f^{(k)}(t+T)$;puisque f est de classe $\mathcal{C}^p$ on en déduit de l'égalité précédente que $\forall k \in N_p, {f_T}^{(k)}$ est continue d'où f_T est de classe $\mathcal{C}^p$.En particulier $\forall t \in K, {f_T}^{(p)}(t) = f^{(p)}(t+T) = \left(f^{(p)}\right)_T(t)$ ainsi $(f_T)^{(p)} = \left(f^{(p)}\right)_T$.

1.b) On a $(f_T)^{(p)} = \left(f^{(p)}\right)_T$ et si f est T-périodique alors$(f)^{(p)} = \left(f^{(p)}\right)_T$ par conséquent $(f)^{(p)}$ est T-périodique.

2) Soit λ une valeur propre de D et f un vecteur propre associé à λ. On a alors l'équation différentielle $f' = \lambda f$ et la solution de cette équation est $Vect(F_\lambda)$ où $F_\lambda: \lambda \longmapsto e^{\lambda t}$. Ainsi tout élément λ de ℝ est valeur propre de D avec pour vecteurs propres associés $Vect(F_\lambda)$.

PARTIE II

3) Soit y un élément de S. On a donc $y^{(n)} = -\frac{1}{\alpha_n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k y^{(k)}\right)$,à partie de cette égalité nous voyons que si y est de classe $\mathcal{C}^{n+p}$ alors y est de classe $\mathcal{C}^{n+p+1}$.Le cas fondamental $p = 0$ étant vrai on vient de montrer par récurrence que $\forall k \geq n, y$ est de classe $\mathcal{C}^k$ d'où y est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Maintenant l'équation différentielle (E) étant singulière alors $\dim(S) = n$.En plus on a que $\forall k \in \square_n^*; \sum_{p=0}^n \alpha_p {\phi_k}^{(p)} = \left(\sum_{p=0}^n \alpha_p {r_k}^p\right)\phi_k = 0$ donc la famille $(\phi_k)_{1 \leq k \leq n}$ est ensemble de vecteurs solutions de (E),aussi cette famille est libre car famille de vecteurs propres de l'endomorphisme D. S étant de dimension n alors$(\phi_k)_{1 \leq k \leq n}$ en est une base. D'où $S = \oplus_{k=1}^n S_k$

4) Soit $f \in S; \exists (\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \in K^n, f = \sum_{k=0}^n \lambda_k \phi_k$ donc $p_k(f) = \lambda_k \phi_k$ pour un $k \in N_n^*$.En remplaçant f par f_T on $p_k(f_T) = \lambda_k (\phi_k)_T$ car $f_T = \sum_{k=0}^n \lambda_k (\phi_k)_T$.Comme $p_k(f) = \lambda_k \phi_k$ on en déduit que $\left(p_k(f)\right)_T = \lambda_k (\phi_k)_T$ d'où $p_k(f_T) = \left(p_k(f)\right)_T$.