1 Épreuve de Mathématiques

1.1 Partie I : Une distance entre lois de variables aléatoires

Q1a. Vu que X et Y sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, les séries $\sum_n \mathbf{P}([X = n])$ et $\sum_n \mathbf{P}([Y = n])$ sont convergentes (En effet $\sum_n^{+\infty} \mathbf{P}([X = n]) = \sum_n^{+\infty} \mathbf{P}([Y = n]) = 1$.) Maintenant comme :

$$|\mathbf{P}([X = n]) - \mathbf{P}([Y = n])| \leq \mathbf{P}([X = n]) + \mathbf{P}([Y = n])$$

Il est alors clair que $\sum_n |\mathbf{P}([X = n]) - \mathbf{P}([Y = n])|$ converge.

Q1b. Caractérisons $d(X, Y)$:

$$\begin{aligned} d(X,Y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_n^{+\infty} |\mathbf{P}([X = n]) - \mathbf{P}([Y = n])| = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \mathbf{P}([X = n]) = \mathbf{P}([Y = n]), \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

En d'autres termes $d(X, Y) = 0$ ssi X et Y ont la même loi. Cependant dire que X et Y ont la même loi ne veut pas dire qu'elles sont égales. Pour s'en convaincre prenons $N \in \mathbb{N}$ et considérons les variables aléatoires X et Y telles que $X \sim \mathscr{B}(N, \frac{1}{2})$ et $Y = N - X$. On peut aisément voir que $Y \sim \mathscr{B}(N, \frac{1}{2})$.

$$\mathbf{P}([Y = k]) = \mathbf{P}([X = N - k]) = \frac{C_N^{N-k}}{2^N} = \frac{C_N^k}{2^N} = \mathbf{P}([X = k])$$

Dans cet exemple ci X et Y ont la même sans être égales. En effet $X = Y$ est équivalent à $X = Y = \frac{N}{2}$; chose contradictoire !

Q1c. En appliquant l'inégalité triangulaire :

$$|\mathbf{P}([X = n]) - \mathbf{P}([Z = n])| \leq |\mathbf{P}([X = n]) - \mathbf{P}([Y = n])| + |\mathbf{P}([Y = n]) - \mathbf{P}([Z = n])|$$

En sommant cette inégalité sur $\mathbb{N}$ on obtient bien :

$$d(X, Z) \leq d(X, Y) + d(Y, Z)$$

Q2a. Par définition des ensembles A, il vient que : $|\mathbf{P}([X = k]) - \mathbf{P}([Y = k])| = \mathbf{P}([X = k]) - \mathbf{P}([Y = k])$ pour $k \in A$. Donc en sommant sur k dans A, il vient que $\mathbf{P}([X \in A]) \geq \mathbf{P}([Y \in A])$. On a également

$|\mathbf{P}([X=n])-\mathbf{P}([Y=n])| = \mathbf{P}([Y=n])-\mathbf{P}([X=n])$ pour $n \in A^c$ [1]. On a aussi $\mathbf{P}([X \in A^c]) = 1-\mathbf{P}([X \in A])$.

A présent nous répondons à la question :

$$\begin{aligned}
d(X,Y) &= \frac{1}{2}\sum_{n}^{+\infty} |\mathbf{P}([X=n])-\mathbf{P}([Y=n])| \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n\in A} |\mathbf{P}([X=n])-\mathbf{P}([Y=n])| + \frac{1}{2}\sum_{n\in A^c} |\mathbf{P}([X=n])-\mathbf{P}([Y=n])| \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n\in A} \mathbf{P}([X=n])-\mathbf{P}([Y=n]) - \frac{1}{2}\sum_{n\in A^c} \mathbf{P}([X=n])-\mathbf{P}([Y=n]) \\
&= \frac{\mathbf{P}([X\in A])-\mathbf{P}([Y\in A])}{2} - \frac{\mathbf{P}([X\in A^c])-\mathbf{P}([Y\in A^c])}{2} \\
&= \frac{\mathbf{P}([X\in A])-\mathbf{P}([Y\in A])}{2} - \frac{1-\mathbf{P}([X\in A])-1+\mathbf{P}([Y\in A])}{2} \\
&= \mathbf{P}([X\in A])-\mathbf{P}([Y\in A]) \\
&= |\mathbf{P}([X\in A])-\mathbf{P}([Y\in A])|
\end{aligned}$$

Q2b. Par définition de A, en prenant U, V respectivement des parties de A et A^c il vient alors que $\mathbf{P}([X\in U]) \geq \mathbf{P}([Y\in U])$ et $\mathbf{P}([Y\in V]) \geq \mathbf{P}([X\in V])$. En outre si U' est telle que $U \subset U' \subset A$ alors :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([X\in U'])-\mathbf{P}([Y\in U']) &= (\mathbf{P}([X\in U])-\mathbf{P}([Y\in U])) + \underbrace{(\mathbf{P}([X\in U'\setminus U])-\mathbf{P}([Y\in U'\setminus U]))}_{\geq 0} \\
&\geq \mathbf{P}([X\in U])-\mathbf{P}([Y\in U])
\end{aligned}$$

Pareillement pour V' est une autre partie de A^c telle que $V \subset V'$ alors

$$\mathbf{P}([Y\in V'])-\mathbf{P}([X\in V']) \geq \mathbf{P}([Y\in V])-\mathbf{P}([X\in V])$$

A présent nous sommes suffisamment armés pour achever cette question :

$$\begin{aligned}
|\mathbf{P}([X\in B])-\mathbf{P}([Y\in B])| &= |(\mathbf{P}([X\in B\cap A])-\mathbf{P}([Y\in B\cap A]))-(\mathbf{P}([Y\in B\cap A^c])-\mathbf{P}([X\in B\cap A^c]))| \\
&\leq \max\big(\mathbf{P}([X\in B\cap A])-\mathbf{P}([Y\in B\cap A]), \mathbf{P}([Y\in B\cap A^c])-\mathbf{P}([X\in B\cap A^c])\big) \\
&\leq \max\big(\mathbf{P}([X\in A])-\mathbf{P}([Y\in A]), \mathbf{P}([Y\in A^c])-\mathbf{P}([X\in A^c])\big) \\
&= \max(\mathbf{P}([X\in A])-\mathbf{P}([Y\in A]), 1-\mathbf{P}([Y\in A])-1+\mathbf{P}([X\in A])) \\
&= \max(\mathbf{P}([X\in A])-\mathbf{P}([Y\in A]), \mathbf{P}([X\in A])+\mathbf{P}([Y\in A])) \\
&= \mathbf{P}([X\in A])-\mathbf{P}([Y\in A]) \\
&= d(X,Y)
\end{aligned}$$

1. Pareillement $\mathbf{P}([Y\in A^c]) \geq \mathbf{P}([X\in A^c])$

Q3a. La fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$ étant convexe elle est au dessus de ses tangentes particulièrement la tangente au point $x = 0$:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x &\geq f(0) + f'(0)(x-0) \\ &= 1 + 1 \times (x-0) \\ &= 1 + x \end{aligned}$$

(Avec égalité ssi $x = 0$).

Q3b. Pour tout entier $k \geq 2$, on a : $\mathbf{P}([X = k]) = 0 < \mathbf{P}([Y = k])$. Donc dans notre cas $A \subset \{0, 1\}$. Maintenant on sait que $\mathbf{P}([X = 0]) = 1 - p$, $\mathbf{P}([Y = 0]) = \mathrm{e}^{-p}$ puis $\mathbf{P}([X = 1]) = p$ et $\mathbf{P}([Y = 1]) = p\mathrm{e}^{-p}$.

**Cas 1* : Si $p = 0$

on voit que toutes ces probabilités sont égales et $A = \{0, 1\}$ donc

$d(X, Y) = \mathbf{P}([X \in A]) - \mathbf{P}([Y \in A]) = 0 = p(1 - \mathrm{e}^{-p})$

*Cas 2 : Si $p \in]0, 1]$

Dans ce cas on a bien $\mathrm{e}^{-p} > 1 - p$ et $p > p\mathrm{e}^{-p}$ donc $A = \{1\}$ et

$d(X, Y) = \mathbf{P}([X = 1]) - \mathbf{P}([Y = 1]) = p - p\mathrm{e}^{-p} = p(1 - \mathrm{e}^{-p})$

Donc dans tous les cas on a bien $d(X, Y) = p(1 - \mathrm{e}^{-p})$. De ce qui précède :

$$d(X, Y) = p(1 - \mathrm{e}^{-p}) \leq p(1 - (1 - p)) = p^2.$$

Résultat Intermédiaire : Avant d'aborder la suite, nous allons montrer un résultat qui nous sera très utile aux questions Q4 et Q5.

Proposition Soit X une variable aléatoire à valeurs entières positives. On définit la matrice M_X de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ de terme général $M_{X,ij} = \mathbb{P}([X = j - i])$. Alors pour toute autre variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}$:$M_X M_Y = M_{X+Y}$

Preuve : On utilise simplement la définition du produit matriciel :

$$\begin{aligned} M_{X+Y,ij} &= \sum_{k=1}^{N} M_{X,ik} M_{X,kj} \\ &= \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}([X = k - i])\mathbb{P}([Y = j - k]) \\ &= \sum_{k=i}^{j} \mathbb{P}([X = k - i])\mathbb{P}([Y = j - k]) \\ &= \sum_{k=0}^{j-i} \mathbb{P}([X = k])\mathbb{P}([Y = j - i - k]) \\ &= \mathbb{P}([X + Y = j - i]) \end{aligned}$$

Corollaire : Soient $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ et indépendantes alors :

$$M_{\sum_{i=1}^n X_i} = \prod_{i=1}^n M_{X_i}$$

Preuve : Elle découle d'une récurrence immédiate. Supposant la formule vraie pour $n-1$:

$$\begin{aligned} M_{\sum_{i=1}^n X_i} &= M_{X_1+\sum_{i=2}^n X_i} \\ &= M_{X_1} M_{\sum_{i=2}^n X_i} \\ &= M_{X_1} \prod_{i=2}^n M_{X_i} \\ &= \prod_{i=1}^n M_{X_i} \end{aligned}$$

Q4a. En remarquant que $P_i = M_{X_i}$, d'après la proposition ci-dessus on a $P_1P_2 = M_{X_1+X_2}$. Ainsi sa première ligne contient les éléments $(\mathbf{P}([X_1+X_2 = j-1])_{1\leq j\leq N}$. Comme X_1+X_2 charge que les points 0,1,2 ; plus explicitement la première ligne est constituée de $\mathbf{P}([X_1+X_2=0]$, $\mathbf{P}([X_1+X_2=1]$, $\mathbf{P}([X_1+X_2=2]$ suivi de termes nuls.

Q4b. Pareillement $\prod_{k=1}^n P_k = \prod_{k=1}^n M_{X_k} = M_{\sum_{k=1}^n X_k} = M_{U_n}$. Ainsi sa première ligne contient les éléments $(\mathbf{P}(U_n = j-1])_{1\leq j\leq N}$. Comme U_n charge que les points $0,1,\ldots,n$; plus explicitement la première ligne est constituée de $\mathbf{P}(U_n=0]$, $\mathbf{P}([U_n=1]\ldots,\mathbf{P}([U_n=n]$ suivi de termes nuls.

Q5a. On applique la formule du binôme de Newton tout en manipulant habilement l'opérateur $\sum$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^r \frac{Q_i^k}{k!} &= \sum_{K=0}^r \frac{p_i^K (R-I)^K}{K!} \\ &= \sum_{K=0}^r \frac{p_i^K}{K!} \sum_{j=0}^K (-1)^{K-j} C_K^j R^j \\ &= \sum_{K=0}^r \frac{p_i^K}{K!} \sum_{j=0}^K (-1)^{K-j} \frac{K!}{j!(K-j)!} R^j \\ &= \sum_{K=0}^r p_i^K \sum_{j=0}^K (-1)^{K-j} \frac{1}{j!(K-j)!} R^j \\ &= \sum_{j=0}^r \sum_{K=j}^r (-1)^{K-j} \frac{1}{j!(K-j)!} p_i^K R^j \\ &= \sum_{j=0}^r \sum_{k=0}^{r-j} (-1)^k \frac{1}{j!k!} p_i^{k+j} R^j \quad (K=k+j) \\ &= \sum_{j=0}^r \frac{p_i^j}{j!} \left(\sum_{k=0}^{r-j} \frac{(-1)^k p_i^k}{k!} \right) R^j \end{aligned}$$

Q5b. R est une matrice de Jordan, il est alors facile de voir qu'elle est nilpotente d'ordre N. Ceci implique

$$\begin{aligned}\forall r \geq N, \sum_{k=0}^{r} \frac{Q_i^k}{k!} &= \sum_{j=0}^{r} \frac{p_i^j}{j!} \left(\sum_{k=0}^{r-j} \frac{(-1)^k p_i^k}{k!} \right) R^j \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{p_i^j}{j!} \left(\sum_{k=0}^{r-j} \frac{(-1)^k p_i^k}{k!} \right) R^j\end{aligned}$$

Et encore...

$$\begin{aligned}\exp Q_i &= \lim_{r\to+\infty} \sum_{k=0}^{r} \frac{Q_i^k}{k!} \\ &= \lim_{r\to+\infty} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{p_i^j}{j!} \left(\sum_{k=0}^{r-j} \frac{(-1)^k p_i^k}{k!} \right) R^j \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{p_i^j}{j!} \lim_{r\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{r-j} \frac{(-1)^k p_i^k}{k!} \right) R^j \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{p_i^j \mathrm{e}^{-p_i}}{j!} R^j\end{aligned}$$

Mais pour faire la jonction avec la question suivante on prouve maintenant que $M_{Y_i} = \exp Q_i$. Mais il est facile de le terme général de R^j est $R_{kl}^j = \mathbf{1}_{[l-k=j]}$. Le terme général $t_{i,kl}$ de $\exp Q_i$ est alors :

$$\begin{aligned}t_{i,kl} &= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{p_i^j \mathrm{e}^{-p_i}}{j!} \mathbf{1}_{[l-k=j]} \\ &= \frac{p_i^{l-k} \mathrm{e}^{-p_i}}{(l-k)!} \mathbf{1}_{[l-k\geq 0]} \\ &= \mathbf{P}([Y_i = l-k])\end{aligned}$$

Q5c. D'après la proposition ci-dessus on a $\prod_{k=1}^{n} \exp Q_k = \prod_{k=1}^{n} M_{Y_k} = M_{\sum_{k=1}^{n} Y_k} = M_{V_n}$. Ainsi sa première ligne contient les éléments $(\mathbf{P}(V_n = j-1])_{1\leq j\leq N}$. Comme V_n charge tous les entiers ; plus explicitement la première ligne est constituée de $\mathbf{P}(V_n = 0], \mathbf{P}([V_n = 1]\ldots, \mathbf{P}([V_n = N]$.

Q6a. Notons $C = AB$, Pour tout $i \leq N$ on a :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N} |a_{ij} + b_{ij}| &\leq \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}| + |b_{ij}| \\ &\leq \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}| + \sum_{j=1}^{N} |b_{ij}| \\ &\leq ||A|| + ||B||\end{aligned}$$

Par conséquent $||A+B|| \leq ||A||+||B||$. On a également :

$$\begin{array}{rcl} \sum_{j=1}^{N} || & = & \sum_{j=1}^{N} |\sum_{k=1}^{N} a_{ik} b_{kj}| \\ & \leq & \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} |a_{ik}|.|b_{kj}| \\ & = & (\sum_{k=1}^{N} |a_{ik}|)(\sum_{j=1}^{N} |b_{kj}|) \\ & \leq & ||A||.||B|| \end{array}$$

D'où $||AB|| \leq ||A||.||B||$.

Q6b. Soit $i \leq n$, la somme c_l des éléments de la l-ième ligne de $\exp Q_i$ est :

$$c_l = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(Y_i = j-l) = \sum_{j=0}^{N-l} \mathbf{P}(Y_i = j) \leq 1$$

Par conséquent $||\exp Q_i|| \leq 1$. Pareillement on prouve que $||P_i|| \leq 1$ ou même mieux $||\prod_{i\in J} P_i|| \leq 1$ avec J une partie de l'intervalle entier $[1,N]$.

Q6c. On prouve l'identité par récurrence. Le cas $n=1$ est immédiat. A présent supposons la relation vrai à l'ordre $n-1$ et prouvons l'hérédité.

$$\begin{array}{rcl} ||\prod_{i=1}^{n} P_i - \prod_{i=1}^{n} \exp Q_i|| & = & ||(P_1 - \exp Q_1)(\prod_{i=2}^{n} P_i) + \exp Q_1(\prod_{i=2}^{n} P_i - \prod_{i=2}^{n} \exp Q_i)|| \\ & \leq & ||P_1 - \exp Q_1||.\underbrace{||\prod_{i=2}^{n} P_i||}_{(\leq 1)} + \underbrace{||\exp Q_1||}_{(\leq 1)}.||\prod_{i=2}^{n} P_i - \prod_{i=2}^{n} \exp Q_i|| \\ & \leq & ||P_1 - \exp Q_1|| + ||\prod_{i=2}^{n} P_i - \prod_{i=2}^{n} \exp Q_i|| \\ & \leq & ||P_1 - \exp Q_1|| + \sum_{i=2}^{n} ||P_i - \exp Q_i|| \\ & = & \sum_{i=1}^{n} ||P_i - \exp Q_i|| \end{array}$$

Q6d. Si vous vous souvenez nous avons déjà utilisé les propriétés des matrices R^j à la question Q5b. Se basant dessus on a caractérisé $\exp Q_i$. Maintenant appelons d_k la somme des valeurs absolues des éléments de la k-ième ligne de $P_i - \exp Q_i$:

$$\begin{aligned} d_k &= \sum_{n=1}^{N} |\mathbf{P}([X_i = n-k]) - \mathbf{P}([Y_i = n-k])| \\ &= \sum_{n=0}^{N-k} |\mathbf{P}([X_i = n]) - \mathbf{P}([Y_i = n])| \\ &= 2 \times \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} |\mathbf{P}([X_i = n]) - \mathbf{P}([Y_i = n])| \\ &= 2d(X_i, Y_i) \\ &\leq 2p_i^2 \end{aligned}$$

Donc on a bien $||P_i - \exp Q_i|| \leq 2p_i^2$.

Q7a. Notons e_k la somme des valeurs absolues des éléments de la k-ième ligne de $\prod_{i=1}^n P_i - \prod_{i=1}^n Q_i$. En procédant comme précédemment :

$$e_k = \sum_{i=0}^{N-k} |\mathbf{P}([U_n = i]) - \mathbf{P}([V_n = i])|$$

Donc on déduit que :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N-1} |\mathbf{P}([U_n = i]) - \mathbf{P}([V_n = i])| &= ||\prod_{i=1}^{n} P_i - \prod_{i=1}^{n} \exp Q_i|| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} ||P_i - \exp Q_i|| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} 2p_i^2 \end{aligned}$$

En faisant $N \to +\infty$ on obtient $2d(U_n, V_n) \leq \sum_{i=1}^n 2p_i^2$ d'où

$$d(U_n, V_n) \leq \sum_{i=1}^{n} p_i^2$$

Q7b. En prenant $p_i = \frac{\lambda}{n}$ on obtient alors

$$d(U_n, V_n) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda^2}{n^2} = \frac{\lambda^2}{n} \to 0$$

ce qui veut dire que U_n et V_n ont asymptotiquement les mêmes lois. Maintenant vu que $U_n \sim \mathscr{B}(n, \frac{\lambda}{n})$ et $V_n \sim \mathscr{P}(n\frac{\lambda}{n}) \equiv \mathscr{P}(\lambda)$, notre propriété d'approximation est prouvée.

1.2 Partie II : Records d'une permutation

Q1 : En posant $\gamma_n = H_n - \ln(n)$ on montre que $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée.

$$\begin{aligned}\gamma_{n+1} - \gamma_n &= (H_{n+1} - H_n) - (\ln(n+1) - \ln(n)) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

Mais puisque $\ln(1+x) \geq \frac{x}{1+x}$ on a donc $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \geq \frac{1/n}{1+1/n} = \frac{1}{n+1}$. Par conséquent $\gamma_{n+1} \leq \gamma_n$ et la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. Par ailleurs, il est connu que $x \geq \ln(1+x)$, il s'en suit alors :

$$\begin{aligned}\gamma_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{n}) - \ln(n) \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k)}_{\text{télescopage}} - \ln(n) \\ &= \ln(n+1) - \ln(n) = \ln(1+\frac{1}{n}) \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

Notre suite est aussi minorée d'où le résultat.

Q2. Toutes les réponses sont dans ce tableau

σ	$R_3(\sigma)$	$\mathbf{P}(\{\sigma\})$
(1,2,3)	3	$\frac{1}{6}$
(2,3,1)	2	$\frac{1}{6}$
(3,1,2)	1	$\frac{1}{6}$
(2,1,3)	2	$\frac{1}{6}$
(3,2,1)	1	$\frac{1}{6}$
(1,3,2)	2	$\frac{1}{6}$
$\mathbf{P}([R_3=1]) = \frac{1}{3}$	$\mathbf{P}([R_3=2]) = \frac{1}{2}$	$\mathbf{P}([R_3=3]) = \frac{1}{6}$
$\mathbf{E}(R_3) = \frac{11}{6}$	$\mathbf{V}(R_3) = \frac{17}{36}$	

Q3. En fait $[R_n = 1]$ regroupe toutes les permutations vérifiant $\sigma_1 = n$. On sait déjà que 1 est record, donc s'il existe $j \neq 1$ tel que $\sigma_j = n$ alors j serait un autre record, ce qui est contradictoire ! Ainsi $\text{Card}([R_n = 1]) = (n-1)!$. Il est aussi évident que $[R_n = n]$ est la seule permutation croissante $(1, 2, \ldots, n)$. Autrement on pourrait trouver $i < j$ tel que $\sigma_i > \sigma_j$. Dans ce cas j n'est pas un record et alors $R_n \leq$

$n-1$, Contradiction ! D'où Card($[R_n = 1]$) $= (n-1)!$. En divisant ces cardinaux par $n!$

$$\mathbf{P}([R_n = 1]) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \quad \mathbf{P}([R_n = n]) = \frac{1}{n!}$$

Q4a. Soit σ une permutation qui n'a que deux records en 1 et p. Notons $A_p^{(2)}$ le nombre de telles permutations. Ici on prouve qu'on a nécessairement $\sigma_p = n$. En effet soit soit j tel que $\sigma_j = n$. On ne peut avoir $j < p$ sinon p ne serait pas un record, ni $j > p$ sinon j serait un autre record portant le nombre de records à au moins 3. Ainsi $j = p$. Maintenant par définition d'un record les nombres $\sigma_1, \dots, \sigma_{p-1}$ sont choisis quelconques dans l'intervalle entier $[1, n-1]$ excepté le fait que le plus grand d'entre eux soit σ_1 [2] ce qui nous donne $(p-2)!C_{n-1}^{p-1}$ choix. Maintenant quand aux éléments $\sigma_{p+1}, \dots, \sigma_n$ ils peuvent être tirés de façon quelconque parmi les nombres restants ce qui donne $(n-p)!$ manières. En gros $A_p^{(2)} = (n-p)!(p-2)!C_{n-1}^{p-1}$

Q4b. Le second record pouvant être atteint en un point p entre 2 et n, on a d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([R_n = 2]) &= \frac{1}{n!}\sum_{p=2}^{n} A_p^{(2)} \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{p=2}^{n} (n-p)!(p-2)!C_{n-1}^{p-1} \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{p=2}^{n} (n-p)!(p-2)!\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{n!}\sum_{p=2}^{n} \frac{(p-2)!}{(p-1)!} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p-1} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \quad (k = p-1)
\end{aligned}$$

Q4c. En utilisant Q1 et Q4b :

$$\mathbf{P}([R_n = 2]) = \frac{H_{n-1}}{n} \sim \frac{\ln(n-1)}{n} \sim \frac{\ln(n)}{n}$$

Q5a. T_i est une loi de Bernoulli par définition, reste à savoir calculer $\mathbf{P}([T_i = 1])$. Pour une permutation ayant i pour record, il est clair que $\sigma_i \geq i$. Maintenant si $\sigma_i = l$ est fixé (avec $l \geq i$), les nombres $\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}$ sont choisis quelconques dans l'intervalle entier $[1, l-1]$ ce qui nous donne $(i-1)!C_{l-1}^{i-1}$

2. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\sigma_k = \max(\sigma_i)_{i<p}$ avec $k > 1$. Alors k est un autre record pour σ portant le nombre de recors à au moins trois. Contradiction !

choix. Maintenant quand aux éléments $\sigma_{i+1},\dots,\sigma_n$ ils peuvent être tirés de façon quelconque parmi les nombres restants ce qui donne $(n-i)!$ manières.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([T_i=1]) &= \frac{1}{n!}\sum_{l=i}^{n}(n-i)!(i-1)!C_{l-1}^{i-1}\\
&= \frac{1}{n!}(n-i)!(i-1)!C_n^i\\
&= \frac{1}{n!}(n-i)!(i-1)!\frac{n!}{i!(n-i)!}\\
&= \frac{(i-1)!}{i!}\\
&= \frac{1}{i}
\end{aligned}$$

Q5b. Il va sans dire que : $R_n=\sum_{i=1}^n T_i$ donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(R_n) &= \sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}(T_i)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}([T_i=1])\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\\
&= H_n
\end{aligned}$$

Par conséquent $\mathbf{E}(R_n)\sim\ln(n)$.

Q6a. Notons $A^{(ij)}$ l'ensemble des permutations de $\mathscr{S}_n$ ayant exactement trois records atteints en $1,i$ et j. On note aussi $A_k^{(ij)}$ l'ensemble des permutations de $A^{(ij)}$ vérifiant $\sigma_j=k$. Maintenant il est clair que si j est un record d'une permutation σ alors $\sigma_j\geq j$, chose qui permet d'affirmer que $A^{(ij)}=\cup_{k=j}^n A_k^{(ij)}$. Cette union consistant en des ensembles disjoints alors

$$\mathrm{Card}(A^{(ij)})=\sum_{k=j}^{n}\mathrm{Card}(A_k^{(ij)})$$

Maintenant pour un élément typique de $A_k^{(ij)}$, il vient que pour tout $(i',j')<(i-1,j-1)$ on a $\sigma_{i'}<\sigma_i$, $\sigma_{j'}<\sigma_j$ et $\sigma_j=k$. Pour arriver à dénombrer de telles permutations il nous suffit de savoir compter comment choisir des éléments $c_1,c_2,\cdots,c_j$ de l'intervalle entier $[1,n]$ tel que pour tout $(i',j')<(i-1,j-1)$ on a $c_{i'}<c_i$, $c_{j'}<c_j$ et $c_j=k$. Notons ce nombre $B_k^{(ij)}$. En effet pour construire $A_k^{(ij)}$, il nous suffit de prendre $c_1,c_2,\cdots,c_j$ comme ci-dessus et poser $c_m=\sigma_m$ pour $m\leq j$ et prendre les autres éléments de l'intervalle entier $[1,n]$ qui ne sont pas dans $\{c_i|1\leq i\leq m\}$ et les repartir de façon quelconque entre les $\sigma_{j+1},\sigma_{j+2},\cdots,\sigma_n$, chose qui peut bien entendu se faire de $(n-j)!$ manières. En

gros on a prouvé que $\mathrm{Card}(A_k^{(ij)}) = B_k^{(ij)}(n-j)!$, reste maintenant à calculer $B_k^{(ij)}$. Dans $B_k^{(ij)}$ le choix de $c_j = k$ est fixé. On voit bien que tous les c_l restant sont inférieurs à k, ils sont alors pris dans l'intervalle entier $[1, k-1]$ chose qui peur se faire de C_{k-1}^{j-1} manières. Dès qu'ils sont tiré, l'élément c_i ne peut être pris que parmi les termes de rang variant entre i et $j-1$ quand ils sont rangés dans l'ordre croissant. A présent supposons que c_i est le terme de rang l. Maintenant pour les éléments c_m, avec $m \leq i-1$ ils ont pris parmi les $l-1$ plus petits et peuvent être disposées librement ce qui fait $(i-1)!C_{l-1}^{i-1}$ choix. Les éléments restants sont les c_m, avec $i+1 \leq m \leq j-1$ et ils peuvent aussi être disposés librement ce qui fait encore $(j-i-1)!$ possibilités. D'où

$$
\begin{aligned}
B_k^{(ij)} &= C_{k-1}^{j-1}\sum_{l=i}^{j-1}(i-1)!C_{l-1}^{i-1}(j-i-1)! \\
&= \left(C_{k-1}^{j-1}(i-1)!(j-i-1)!\right)\sum_{l=i}^{j-1}C_{l-1}^{i-1} \\
&= \left(C_{k-1}^{j-1}(i-1)!(j-i-1)!\right)C_{(j-1-1)+1}^{i-1+1} \\
&= \left(C_{j-1}^{i}(i-1)!(j-i-1)!\right)C_{k-1}^{j-1} \\
&= \left(\frac{(j-1)!}{i!(j-i-1)!}(i-1)!(j-i-1)!\right)C_{k-1}^{j-1} \\
&= \frac{1}{i}(j-1)!C_{k-1}^{j-1}
\end{aligned}
$$

On calcul notre cardinal initial

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Card}(A^{(ij)}) &= \sum_{k=j}^{n} B_k^{(ij)}(n-j)! \\
&= \sum_{k=j}^{n}\frac{1}{i}(j-1)!C_{k-1}^{j-1}(n-j)! \\
&= \sum_{k=j}^{n}\frac{1}{i}(j-1)!C_{k-1}^{j-1}(n-j)! \\
&= \frac{1}{i}\underbrace{\sum_{k=j}^{n}(j-1)!C_{k-1}^{j-1}(n-j)!}_{=n!/j} \\
&= \frac{n!}{ij}
\end{aligned}
$$

Donc on est prêt à conclure [3]

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([T_i = 1] \cap [T_j = 1]) &= \frac{\mathrm{Card}(A^{(ij)})}{n!} \\
&= \frac{1}{ij} \\
&= \mathbf{P}([T_i = 1]) \times \mathbf{P}([T_j = 1])
\end{aligned}$$

Q6b. Comme $R_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$ et que les T_i sont indépendantes

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(R_n) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(T_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}([T_i = 1])(1 - \mathbf{P}([T_i = 1])) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\left(1 - \frac{1}{i}\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}\right) \\
&= H_n - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}
\end{aligned}$$

Comme $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^2} < +\infty$ par conséquent $\mathbf{V}(R_n) \sim \ln(n)$.

Q7. Dire que $\sigma \in [R_n = k]$ revient à dire que σ à $k-1$ records autres que 1, disons $i_2, \ldots, i_k$. Par conséquent en sommant sur ces nombres :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([R_n = k]) &= \sum_{2 \le i_2 < i_3 < \ldots < i_k \le n} \mathbf{P}\left(\left(\cap_{l=2}^{k} [T_{i_l} = 1]\right) \cap \left(\cap_{j \notin \{i_2, \ldots, i_k\}} [T_j = 0]\right)\right) \\
&= \sum_{2 \le i_2 < i_3 < \ldots < i_k \le n} \left(\prod_{l=2}^{k} \mathbf{P}([T_{i_l} = 1])\right) \times \left(\prod_{j \notin \{i_2, \ldots, i_k\}} \mathbf{P}([T_j = 0])\right) \\
&= \sum_{2 \le i_2 < i_3 < \ldots < i_k \le n} \left(\prod_{l=2}^{k} \frac{1}{i_l}\right) \times \left(\prod_{j \notin \{i_2, \ldots, i_k\}} \left(1 - \frac{1}{j}\right)\right) \\
&= \sum_{2 \le i_2 < i_3 < \ldots < i_k \le n} \frac{1}{i_2} \frac{1}{i_3} \cdots \frac{1}{i_k} \prod_{j \notin \{i_2, \ldots, i_k\}} \left(1 - \frac{1}{j}\right)
\end{aligned}$$

3. Dans notre cas l'indépendance des évènements $[T_i = 1]$ et $[T_j = 1]$ suffit pour conclure à l'indépendance de T_i et T_j.

Q8a. D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([R_n = 3]) &= \sum_{2\le i_2<i_3\le n} \frac{1}{i_2}\frac{1}{i_3} \prod_{j\notin\{i_2,i_3\}} \frac{j-1}{j} \\
&= \sum_{2\le i_2<i_3\le n} \frac{1}{i_2}\frac{1}{i_3}\frac{i_2}{i_2-1}\frac{i_3}{i_3-1} \prod_{j=2}^{n} \frac{j-1}{j} \\
&= \sum_{2\le i_2<i_3\le n} \frac{1}{i_2-1}\frac{1}{i_3-1} \underbrace{\prod_{j=2}^{n} \frac{j-1}{j}}_{\text{télescopage}} \\
&= \sum_{2\le i_2<i_3\le n} \frac{1}{i_2-1}\frac{1}{i_3-1}\frac{2-1}{n} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{1\le i<j\le n-1} \frac{1}{i}\frac{1}{j} \quad (i = i_2-1, j = i_3-1)
\end{aligned}$$

Q8b. En continuant un peu les calculs

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([R_n = 3]) &= \frac{1}{n}\sum_{1\le i<j\le n-1} \frac{1}{i}\frac{1}{j} \\
&= \frac{1}{2n}\left\{\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right)^2 - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}\right\} \\
&= \frac{1}{2n}\left\{H_{n-1}^2 - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}\right\}
\end{aligned}$$

Comme $\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i^2} < +\infty$ par conséquent

$$\mathbf{P}([R_n = 3]) \sim \frac{\ln^2(n-1)}{2n} \sim \frac{1}{2}\frac{\ln^2(n)}{n}$$

1.3 Partie III : Deux résultats asymptotiques

Q1a. Soit $\sigma \in \left[|\frac{R_n}{\ln n} - 1| \ge \epsilon\right]$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\sigma \in \left[|\frac{R_n}{\ln n} - \frac{H_n}{\ln n}| < \frac{\epsilon}{2}\right]$ pour n suffisamment grand. Comme $H_n \sim \ln n$, alors pour n suffisamment grand il vient que $|\frac{H_n}{\ln n} - 1| < \frac{\epsilon}{2}$. Par conséquent :

$$|\frac{R_n(\sigma)}{\ln n} - 1| \le |\frac{R_n(\sigma)}{\ln n} - \frac{H_n}{\ln n}| + |\frac{H_n}{\ln n} - 1| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

i.e. $\sigma \in \left[|\frac{R_n}{\ln n} - 1| < \epsilon\right]$, contradiction ! D'où $\sigma \in \left[|\frac{R_n}{\ln n} - \frac{H_n}{\ln n}| \ge \frac{\epsilon}{2}\right]$.On a donc prouvé que :

$$\left[|\frac{R_n}{\ln n} - 1| \ge \epsilon\right] \subset \left[|\frac{R_n}{\ln n} - \frac{H_n}{\ln n}| < \frac{\epsilon}{2}\right]$$

Q1bi. D'après Q5b. on sait que $\mathbf{E}(R_n) = H_n$. En appliquant l'inégalité de Markov :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\left[|\frac{R_n}{\ln n} - \frac{H_n}{\ln n}| < \epsilon\right]\right) &\leq \frac{1}{\epsilon^2}\mathbf{V}\left(\frac{R_n}{\ln n}\right) \\ &= \frac{1}{\epsilon^2}\frac{\mathbf{V}(R_n)}{\ln^2 n} \\ &\sim \frac{1}{\epsilon^2}\frac{1}{\ln n} \end{aligned}$$

On a a donc prouvé que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left[|\frac{R_n}{\ln n} - \frac{H_n}{\ln n}| < \epsilon\right]\right) = 0$$

Q1bii D'après Q1a. on a alors :

$$\mathbf{P}\left(\left[|\frac{R_n}{\ln n} - 1| \geq \epsilon\right]\right) \leq \mathbf{P}\left(\left[|\frac{R_n}{\ln n} - \frac{H_n}{\ln n}| < \frac{\epsilon}{2}\right]\right) \to_{n\to+\infty} = 0$$

Q2a. Prenons $X \sim \mathscr{B}(p)$

$$G_X(t) = (1-p) + tp = 1 + p(t-1)$$

Q2b. Prenons $Y \sim \mathscr{P}(\lambda)$

$$\begin{aligned} G_Y(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k t^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(\lambda t)^k}{k!} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda+\lambda t} = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)} \end{aligned}$$

Q2c. Ce résultat est vraiment classique !!!

$$\begin{aligned} G_{S_n}(t) &= \mathbf{E}(t^{S_n}) \\ &= \mathbf{E}(t^{\sum_{k=1}^n X_k}) \\ &= \mathbf{E}(\prod_{k=1}^n t^{X_k}) \\ &= \prod_{k=1}^n \mathbf{E}(t^{X_k}) \quad (\text{ car } X_i \perp X_j \Rightarrow t^{X_i} \perp t^{X_j}) \\ &= \prod_{k=1}^n G_{X_k}(t) \end{aligned}$$

Q2d. Il suffit d'appliquer le résultat tout en se souvenant que $T_i \sim \mathscr{B}(1/i)$:

$$\begin{aligned}\forall t \in [0,1], G_{W_n}(t) &= \prod_{i=m+1}^{2m} G_{T_i}(t) \\ &= \prod_{i=m+1}^{2m} \left(1 + \frac{t-1}{i}\right)\end{aligned}$$

Q2e. Définissons une quantité h_m qui nous sera utile dans la suite

$$h_m = \sum_{i=m+1}^{2m} \frac{1}{i} = H_{2m} - H_m = (\ln(2m) + \gamma) - (\ln(m) + \gamma) + o(1) = \ln(2) + o(1)$$

Un autre résultat intermédiaire est que pour tout $x \in]-1,0]$:

$$|\ln(1+x) - x| \leq \frac{x^2}{2}$$

Nous sommes maintenant prêt. Pour tout $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}|\ln\left(G_{W_n}(t)\right) - (t-1)h_m| &= |\sum_{i=m+1}^{2m} \ln\left(1 + \frac{t-1}{i}\right) - \frac{t-1}{i}| \\ &\leq \sum_{i=m+1}^{2m} |\ln\left(1 + \frac{t-1}{i}\right) - \frac{t-1}{i}| \\ &\leq \frac{(t-1)^2}{2} \sum_{i=m+1}^{2m} \frac{1}{i^2} \to 0\end{aligned}$$

Ainsi d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \to +\infty} \ln\left(G_{W_n}(t)\right) = (t-1)\ln 2$$

Par continuité de l'exponentielle

$$\lim_{n \to +\infty} G_{W_n}(t) = \mathrm{e}^{(t-1)\ln 2}$$

On reconnaît bien la fonction génératrice de la loi de Poisson $\mathscr{P}(\ln 2)$. Par conséquent la suite de terme général W_n converge en loi vers la loi de Poisson $\mathscr{P}(\ln 2)$.

2 Épreuve à option (A) : Mathématiques

2.1 Partie 1 :premiers exemples

Q1ai. Notons $\mathscr{P}_a(x)$ le projeté orthogonal de x sur la droite D engendrée par a. Comme $D \oplus D^\perp = \mathbb{R}^3$ donc on peut écrire $x = \mu a + y$ avec $\langle y, a\rangle = 0$. Ceci implique encore $\langle x, a\rangle = \mu\|a\|^2 + \langle y, a\rangle = \mu\|a\|^2$. On déduit que $\mu = \frac{\langle x,a\rangle}{\|a\|^2}$. Finalement

$$\mathscr{P}_a(x) = \frac{\langle x, a\rangle}{\|a\|^2} a$$

Q1aii. La matrice H étant symétrique elle est diagonalisable. En notant λ_i ses valeurs propres pour $i = 1,2,3$, on peut écrire $\mathrm{Ker}(H-\lambda_1 I_3) \oplus \mathrm{Ker}(H-\lambda_2 I_3) \oplus \mathrm{Ker}(H-\lambda_3 I_3) = \mathbb{R}^3$. Si on appelle C_1, C_2 et C_3 les colonnes de H on peut voir aisément que $C_1 + 2C_2 + C_3 = 0$ ainsi 0 est valeur propre de H avec multiplicité 1. On peut alors noter que $\lambda_0 = 0$. Dans ce cas ci on peut prouver que $\mathrm{Ker}(H-\lambda_2 I_3) \oplus \mathrm{Ker}(H-\lambda_3 I_3) = \mathrm{Im}(h)$. En effet pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire $x = x_1 + x_2 + x_3$ avec $x_i \in \mathrm{Ker}(H-\lambda_i I_3)$. On a alors $h(x) = \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$. Et réciproquement $h(\frac{y_2}{\lambda_2} + \frac{y_3}{\lambda_3}) = y_2 + y_3$ pour $y_2 \in \mathrm{Ker}(H-\lambda_2 I_3)$ et $y_3 \in \mathrm{Ker}(H-\lambda_3 I_3)$. On vient donc de prouver que $\mathrm{Ker}(h) \oplus \mathrm{Im}(h) = \mathbb{R}^3$ en plus $\mathrm{Ker}(h)$ et $\mathrm{Im}(h)$ sont orthogonaux car les $\mathrm{Ker}(H-\lambda_i I_3)$ le sont. En conséquence $\mathrm{Ker}(h)$ et $\mathrm{Im}(h)$ sont des supplémentaires orthogonaux.

Q1aiii. On a prouvé à la question précédente que $\mathrm{Ker}(h) = \mathrm{Vec}(a)$ avec $a = (1,2,1)'$. On note p_H la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(h)$. Et puisque $\mathrm{Ker}(h)$ et $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{R}^3$ sont des supplémentaires orthogonaux alors $p_H(x) = x - \mathscr{P}_a(x)$. Poussant les calculs un peu plus loin :

$$\begin{aligned} p_H(x) &= x - \frac{\langle x, a\rangle}{\|a\|^2} a \\ &= x - a\frac{a^t x}{\|a\|^2} \\ &= \left(I_3 - \frac{aa^t}{\|a\|^2}\right) x \end{aligned}$$

La matrice de p_H dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est alors :

$$I_3 - \frac{aa^t}{\|a\|^2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

Q1bi. On note que la matrice $H = (H_{ij})$ est symétrique donc

$$\mathrm{tr}(h \circ h) = \mathrm{tr}(H^2) = \mathrm{tr}(HH^t) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} H_{ij}^3 = 93$$

Q1bii. On sait que 0 est valeur propre de h et notons μ et λ ses autres valeurs propres. On tire aisément que $\lambda + \mu = \mathrm{tr}(H) = 9$ et $\lambda^2 + \mu^2 = \mathrm{tr}(H^2) = 93$. On sait que $\lambda\mu = \frac{(\lambda+\mu)^2-(\lambda^2+\mu^2)}{2} = \frac{81-93}{2} = -6$. λ et μ sont donc les zéros du polynôme $r^2 - 9r - 6$ à savoir $\frac{9\pm\sqrt{105}}{2}$. En conclusion :

$$\mathrm{Sp}(h) = \left\{0, \frac{9+\sqrt{105}}{2}, \frac{9-\sqrt{105}}{2}\right\}$$

Q2a. En remarquant que le terme (i, j) de $H_\varphi^{(n)}$ est celui de $H_\tau^{(n)}$ par $(-1)^{i+j-2}$; L'on peut déduire qu'on peut passer de $H_\tau^{(n)}$ à $H_\varphi^{(n)}$ en multipliant d'abord les $j-$ème colonnes de $H_\tau^{(n)}$ par $(-1)^{j-1}$ puis les $i-$ème lignes de $H_\tau^{(n)}$ par $(-1)^{i-1}$. Par conséquent $H_\varphi^{(n)} = PH_\tau^{(n)}P$ avec

$$P = \mathrm{diag}(1, -1, \cdots, (-1)^{j-1}, \cdots, (-1)^{n-1})$$

On remarque aisément que $P^{-1} = P$ ainsi $H_\varphi^{(n)} = PH_\tau^{(n)}P^{-1}$, du coup $H_\varphi^{(n)}$ et $H_\tau^{(n)}$ sont semblables.

Q2bi. Appelons C_j la j-ième colonne de $H_\tau^{(n)}$. On remarque aisément que pour tout $i, j \leq n$, $\tau(i+j-1) - \tau(i+j-2) = \tau(i+j) - \tau(i+j-1) = 1$. Ce qui veut dire que $C_{j+1} - C_j = C_{j+2} - C_{j+1}$ ou de façon équivalente $C_{j+2} = 2C_{j+1} - C_j$. Se basant sur la dernière relation on voit récursivement que $C_j \in \mathrm{Vec}(C_1, C_2) = \mathrm{Vec}(g(e_1), g(e_2))$. Il ressort évidente que le système $(g(e_1), g(e_2))$ est libre donc $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vec}(g(e_1), g(e_2))$ ou encore $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vec}(g(e_2) - g(e_1), g(e_1))$. On pose maintenant $f_2 = g(e_1) = \sum_{k=1}^n ke_k$ et $f_1 = g(e_2) - g(e_1) = \sum_{k=1}^n (k+1)e_k - \sum_{k=1}^n ke_k = \sum_{k=1}^n e_k$. Ainsi l'image de g est le sous espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ engendré par les deux vecteurs :

$$\begin{cases} f_1 = \sum_{k=1}^n e_k \\ f_2 = \sum_{k=1}^n ke_k \end{cases}$$

Q2bii. A la question précédente on a établi $g(e_{j+1}) - f(e_j) = g(e_{j+2}) - g(e_{j+1})$ par conséquent on peut donc déduire que $g(e_{j+1}) - g(e_j) = f_1$. A présent calculons $g(e_j)$:

$$g(e_j) = g(e_1) + \sum_{k=1}^{j-1} g(e_{k+1}) - g(e_k) = f_2 + (j-1)(g(e_2) - g(e_1)) = f_2 + (j-1)f_1$$

On est prêt maintenant à sortir la matrice de $g_{|F}$ dans la base (f_1, f_2) :

$$g(f_1) = \sum_{k=1}^{n} g(e_k) = \sum_{k=1}^{n} (f_2 + (k-1)f_1) = f_1(\sum_{k=1}^{n} k - 1) + nf_2 = \frac{\mathbf{n(n-1)}}{\mathbf{2}} f_1 + \mathbf{n} f_2$$

$$g(f_2) = \sum_{k=1}^{n} k g(e_k) = \sum_{k=1}^{n} (k f_2 + (k^2 - k) f_1) = f_1(\sum_{k=1}^{n} k^2 - k) + (\sum_{k=1}^{n}) f_2 = \frac{\mathbf{n(n^2-1)}}{\mathbf{3}} f_1 + \frac{\mathbf{n(n+1)}}{\mathbf{2}} f_2$$

Où on a utilisé

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (k^2 - k) &= (\sum_{k=1}^{n} k^2) - (\sum_{k=1}^{n} k) \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3} - 1\right) \\
&= \frac{n(n+1)}{2}\frac{2(n-1)}{3} \\
&= \frac{n(n^2-1)}{3}
\end{aligned}$$

La matrice G de $g_{|F}$ dans la base (f_1, f_2)

$$G = \begin{bmatrix} \frac{n(n-1)}{2} & \frac{n(n^2-1)}{3} \\ n & \frac{n(n+1)}{2} \end{bmatrix}$$

Q2c. Soit $\mathscr{F}$ une base de $\mathrm{Ker}(g)$ (évidemment composée de $(n-2)$ vecteurs). Maintenant soit $\mathscr{C}$ la base de $\mathbb{R}^n$ formée de $\mathscr{F}$, f_1 et f_2. Alors la matrice de g dans $\mathscr{C}$ est alors $H = \mathrm{diag}(0, G)$. Les valeurs propres de H sont donc 0 (multiplicité $n-2$), et les valeurs propres de G. Ainsi diagonalisons G. Ces valeurs propres sont donc les zéros de $\kappa(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(G)\lambda + \det(G)$. On laisse le lecteur établir que : $\kappa(\lambda) = \lambda^2 - n^2\lambda - \frac{n^2(n^2-1)}{12}$. les zéros en questions sont $\lambda_{1,2} = \frac{n^2 \pm n\sqrt{\frac{4n^2-1}{3}}}{2}$. Maintenant il est clair que H

est équivalente à $H_\tau^{(n)}$ donc à $H_\varphi^{(n)}$, d'où :

$$\mathrm{Sp}(H_\varphi^{(n)}) = \mathrm{Sp}(H_\tau^{(n)}) = \mathrm{Sp}(H) = \left\{ 0, \frac{n^2 + n\sqrt{\frac{4n^2-1}{3}}}{2}, \frac{n^2 - n\sqrt{\frac{4n^2-1}{3}}}{2} \right\}$$

Q3ai. En vertu des résultats sur la croissance comparée $\lim_{t\to+\infty} t^2(\sum_{i=1}^n c_i t^{i-1})^2 \mathrm{e}^{-t} = 0$. De façon équivalente $(\sum_{i=1}^n c_i t^{i-1})^2 \mathrm{e}^{-t} =_{+\infty} o(\frac{1}{t^2})$. Et comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrale au voisinage de $+\infty$ il en est de même pour $t \mapsto (\sum_{i=1}^n c_i t^{i-1})^2 \mathrm{e}^{-t}$ d'où la convergence de :

$$\int_0^{+\infty} (\sum_{i=1}^n c_i t^{i-1})^2 \mathrm{e}^{-t} dt$$

Q3aii. On calcule ...

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} (\sum_{i=1}^n c_i t^{i-1})^2 \mathrm{e}^{-t} dt &= \int_0^{+\infty} (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j t^{i+j-2}) \mathrm{e}^{-t} dt \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^{+\infty} c_i c_j t^{i+j-2} \mathrm{e}^{-t} dt \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j \psi(i+j-2) \end{aligned}$$

avec $\psi(k) = \int_0^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t} dt$. En vertu des mêmes arguments que la question précédente $\psi(k)$ est bien défini. Nous allons la calculer de façon récursive tout en gardant à l'esprit que $\psi(0) = 1$ [4].

$$\begin{aligned} \psi(k) &= \int_0^{+\infty} t^k (-\mathrm{e}^{-t})' dt \\ &= \left[-t^k \mathrm{e}^{-t} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -k t^{k-1} \mathrm{e}^{-t} dt \\ &= k\psi(k-1) \end{aligned}$$

On peut alors conclure que $\psi(k) = k! = \varphi(k)$. Nous pouvons maintenant achever comme suit :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} (\sum_{i=1}^n c_i t^{i-1})^2 \mathrm{e}^{-t} dt &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j \psi(i+j-2) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j \varphi(i+j-2) \\ &= C^t H_\varphi^{(n)} C \end{aligned}$$

4. $\psi(0) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} dt = \left[-\mathrm{e}^{-t} \right]_0^{+\infty} = 1$

Q3b. De ce qui précède $C^t H_\varphi^{(n)} C > 0$ pour tout vecteur C non nul de $\mathbb{R}^n$. Par conséquent $H_\varphi^{(n)}$ est une matrice symétrique définie positive, elle est donc diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

Q4. Ici $\varphi(k) = 1/(k+1)$. On procède comme suit :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (\sum_{i=1}^n c_i t^{i-1})^2 dt &= \int_0^1 (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j t^{i+j-2}) dt \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^1 c_i c_j t^{i+j-2} dt \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j \frac{1}{i+j-1} \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j \varphi(i+j-2) \\
&= C^t H_\varphi^{(n)} C
\end{aligned}$$

On en déduit que $C^t H_\varphi^{(n)} C > 0$ pour tout vecteur C non nul de $\mathbb{R}^n$. Par conséquent $H_\varphi^{(n)}$ est une matrice symétrique définie positive, elle est donc diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

2.2 Partie 2 :Les formes bilinéaires Delta n

Q1a. L'espace vectoriel des formes bilinéaires de $E_n \times E_n$ à la même dimension que les matrices symétriques de $\mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ c'est à dire $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Q1b. Il est évident (d'accord ?) :

- √ Pour tout $A, B \in E_n$, $\Delta_n(A,B) = \Delta(B,A)$
- √ Pour tout $A \in E_n$, l'application $X \mapsto \Delta_n(A,X)$ est linéaire

Q1c. Posons $C = AB = \sum_{k=0}^{2n} c_k X^k$ avec $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ et $a_l = b_l = 0$ pour tout $l > n$.

$$\begin{aligned}
\delta_n(AB) &= \sum_{k=0}^{2n} c_k \varphi(k) \\
&= \sum_{k=0}^{2n} \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \varphi(k) \\
&= \sum_{i=0}^{2n} \sum_{k=i}^{2n} a_i b_{k-i} \varphi(k) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=i}^{n+i} a_i b_{k-i} \varphi(k) \quad (a_l = b_l = 0 \text{ pour tout } l > n) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_i b_j \varphi(i+j) \quad (j = k-i) \\
&= \Delta_n(A, B)
\end{aligned}$$

Q1d. Prenons une forme bilinéaire Δ de $E_n \times E_n$ et une forme linéaire δ de E_{2n} tel que $\Delta(A, B) = \delta(AB)$. Enfin notons Γ la matrice de Δ et φ l'application liée à δ de sorte $\Delta(A, B) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_i b_j \Gamma_{i+1,j+1}$ et $\delta(Q) = \sum_{k=0}^{2n} c_k \varphi(k)$. Maintenant en appliquant $\Delta(A, B) = \delta(AB)$ avec $A = X^i$ et $B = X^j$ on obtient $\Gamma_{i+1,j+1} = \varphi(i+j)$. Écrit autrement on a donc $\Gamma_{i,j} = \varphi(i+j-2)$ pour tout i, j dans l'intervalle entier $[1, n+1]$. Considérons les matrice de B_k de $\mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définies par $B_k = (\delta_{i+j-2,k})_{1 \le i,j \le n+1}$ où $k \le 2n$ et δ désigne le symbole de Kronecker. Du coup par définition des $\Gamma_{i,j}$ on peut aisément écrire $\Gamma = \sum_{k=0}^{2n} \varphi(k) B_k$. Ceci prouve bien l'espace des formes bilinéaires symétriques de $E_n \times E_n$ qui peuvent s'écrire $(A, B) \mapsto \delta(AB)$ avec δ forme linéaire sur E_{2n} est bien de dimension $2n+1$.

Q2a. Posons $Q = \sum_{k=0}^{2n} c_k X^k$, on a :

$$\begin{aligned}
\delta_n(Q) &= \sum_{k=0}^{2n} c_k \mathbf{E}(Y^k) \\
&= \mathbf{E}\left(\sum_{k=0}^{2n} c_k Y^k \right) \\
&= \mathbf{E}(Q(Y))
\end{aligned}$$

Q2b. Dans cette section il suffit de trouver une condition sur n et d pour que $(\Delta_n(A, A) = 0 \Leftrightarrow A = 0)$ ou de façon équivalente $(\delta_n(A^2) = 0 \Leftrightarrow A = 0)$. Ici nous prouvons que la condition est $d > n$. Supposons que $d > n$. Puis prenons un polynôme A de E_n tel que $\delta_n(A^2) = 0$. Ceci veut dire que $\mathbf{E}(A^2(Y)) = 0$. On en déduit que $A^2(Y) = 0$ ou encore $A(Y) = 0$. Plus formellement on vient de prouver que $\forall k \le d, A(y_k) = 0$. Ceci veut dire que $A = 0$ sinon A aurait plus de n racines (en réalité d racines avec $d > n$).

Ceci prouve maintenant la première partie. A présent supposons que $d \leq n$, nous allons exhiber un polynôme non nul $\tilde{A}$ tel que $\delta_n(\tilde{A}^2) = 0$. En effet on prend $\tilde{A} = \prod_{i=1}^{d}(X - y_i)$. Ceci achève la deuxième partie de la preuve et la condition recherchée est bien $d > n$.

Q3ai. On vérifie aisément que :

$$\begin{aligned}
\Delta_2(a_2X^2 + a_1X + a_0, b_2X^2 + b_1X + b_0) &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{i-1}b_{j-1}\frac{1}{i+j-1} \\
&= a_0b_0 + a_1b_1\frac{1}{3} + a_2b_2\frac{1}{5} + 2\left(a_0b_1\frac{1}{2} + a_0b_2\frac{1}{3} + a_1b_2\frac{1}{4}\right) \\
&= \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \\
&= C_A^t H_\varphi^{(3)} C_B
\end{aligned}$$

Q3aii. On voit bien que $H_\varphi^{(3)}$ est la matrice de Δ_2 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. D'après Q4 de la première partie $H_\varphi^{(3)}$ est définie positive donc Δ_2 est définie positive. Notons $\|.\|_\varphi$ la norme associée à ce produit scalaire.

Q3b. On note $e_1 = 1, \quad e_2 = X, \quad e_3 = X^3$ et $\mathscr{B}_2' = (e_1', e_2', e_3')$. Par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt on a :

$$e_1' = \frac{e_1}{\|e_1\|} \quad e_2' = \frac{e_2 - \Delta(e_2, e_1')e_1'}{\|e_2 - \Delta(e_2, e_1')e_1'\|} \quad e_3' = \frac{e_3 - \Delta(e_3, e_1')e_1' - \Delta(e_3, e_2')e_2'}{\|e_3 - \Delta(e_3, e_1')e_1' - \Delta(e_3, e_2')e_2'\|}$$

On trouve

$$e_1' = 1, \quad e_2' = \sqrt{12}\left(X - \frac{1}{2}\right), \quad e_3' = \sqrt{180}\left(X^2 - X + \frac{1}{6}\right)$$

Q3ci. Vu que $N = \text{Pass}(\mathscr{B}_2', \mathscr{B}_2)$ on a :

$$N = \text{mat}_{\mathscr{B}_2}\mathscr{B}_2' = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-\sqrt{12}}{2} & \sqrt{180} \\ 0 & \sqrt{12} & -\sqrt{180} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{180}}{6} \end{bmatrix}$$

N est bien triangulaire.

Q3cii. Vu que $M = \text{Pass}(\mathscr{B}_2, \mathscr{B}_2')$ alors $M^t H_\varphi^{(3)} M$ est la matrice du produit scalaire Δ_2 dans la base $\mathscr{B}_2'$). Or la base $\mathscr{B}_2'$) est orthonormale pour le produit scalaire Δ_2 donc $M^t H_\varphi^{(3)} M = I_3$. Par définition N et

M sont inverses, ainsi en multipliant la dernière relation par N^t à gauche et N à droite on obtient clairement que $H_\varphi^{(3)} = N^t N$.

Q3cii. Considérons la base $\mathscr{B}_n = (1, X, \cdots, X^n)$ et la $\mathscr{B}'_n$ obtenue à partir de $\mathscr{B}_n$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt. On note $M_n = \text{Pass}(\mathscr{B}_n, \mathscr{B}'_n)$ et $N_n = \text{Pass}(\mathscr{B}'_n, \mathscr{B}_n)$. Par définition N_n est bien triangulaire supérieure puisque par construction $e'_j \in \text{Vec}(e_1, \cdots, e_j)$ pour $j \leq n+1$ (avec $e_j = X^{j-1}$). Vu que $M_n = \text{Pass}(\mathscr{B}_n, \mathscr{B}'_n)$ alors $M_n^t H_\varphi^{(n)} M_n$ est la matrice du produit scalaire Δ_n dans la base $\mathscr{B}'_n$). Or la base $\mathscr{B}'_n$) est orthonormale pour le produit scalaire Δ_n donc $M_n^t H_\varphi^{(3)} M_n = I_n$. Par définition N_n et M_n sont inverses, ainsi en multipliant la dernière relation par N_n^t à gauche et N_n à droite on obtient clairement que $H_\varphi^{(n)} = N_n^t N_n$. Il suffit donc de prendre $T^{(n)} = N_n$.

2.3 Partie 3 :polynômes positifs et matrices de moments

Q1a. Soit P un polynôme positif. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une racine α du polynôme P qui soit de multiplicité impaire. Nous allons montrer que le polynôme P change de signe. En outre on sait que si P admet une racine complexe $z = a + ib$, le conjugué $\bar{z}$ est aussi un zéro de P avec la même multiplicité que z. De sorte que P est divisible par le polynôme $(X - z)(X - \bar{z}) = X^2 - 2\text{Re}(z)X + |z|^2 = X^2 - 2aX + a^2 + b^2$. En notant $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ les racines réelles de multiplicité impaire. On voit que P peut s'écrire sous la forme :

$$P = \lambda \left(\prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_i) \right) \left(\prod_{j=1}^{m} (X - \alpha_i)^{2\beta_j} \right) \left(\prod_{k=1}^{l} (X^2 - 2a_k X + a_k^2 + b_k^2)^{\gamma_k} \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}^*$$

où $m \geq p$ est le nombre de toutes les racines réelles, l le nombre de racines complexes. γ_k est l'ordre de multiplicité de la k-ième racine complexe. En vertu de cette égalité on peut conclure que P a le même signe que $\lambda \prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_i)$ qui quant à lui change de signe (indépendamment de λ). Il en est donc de même pour P. Contradiction ! par conséquent toute racine réelle d'un polynôme positif doit avoir un ordre de multiplicité pair.

Remarque : Se basant sur cette question on déduit que tout polynôme positif P a la forme ci-dessous :

$$P = \kappa^2 \left(\prod_{j=1}^{m} (X - \alpha_i)^{2\beta_j} \right) \left(\prod_{k=1}^{l} (X^2 - 2a_k X + a_k^2 + b_k^2)^{\gamma_k} \right), \quad \kappa \in \mathbb{R}^*$$

Q1b. De ce qui précède un polynôme positif de degré 2 a nécessairement la forme : $P = \kappa^2(X^2 - 2aX + a^2 + b^2)$. On achève la question car on peut écrire : $P = (\kappa(X - a))^2 + (\kappa b)^2$.

Q1c. C'est un classique :

$$\begin{aligned}(AC+BD)^2+(AD-BC)^2 &= A^2C^2+2ACBD+B^2D^2+A^2D^2-2ABCD+B^2C^2\\ &= A^2C^2+B^2D^2+A^2D^2+B^2C^2\\ &= (A^2+B^2)(C^2+D^2)\end{aligned}$$

Remarque 2 : On peut étendre le résultat en prouvant que pour tout entier n qu'on exhiber des polynômes E_n et F_n tel que $\prod_{i=1}^n (A_i^2+B_i^2)=E_n^2+F_n^2$. On prouve le résultat par récurrence sur n. Le cas $n=1$ est immédiat vu qu'on pose $E_1=A_1$ et $F_1=B_1$. Maintenant supposons qu'elle est vraie à l'ordre $n-1$ et prouvons l'hérédité au rang n :

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^n (A_i^2+B_i^2) &= \left(\prod_{i=1}^{n-1}(A_i^2+B_i^2)\right)(A_n^2+B_n^2)\\ &= (E_{n-1}^2+F_{n-1}^2)(A_n^2+B_n^2)\\ &= (E_{n-1}A_n+F_{n-1}B_n)^2+(E_{n-1}B_n-F_{n-1}A_n)^2\end{aligned}$$

Fin de la récurrence avec $E_n=E_{n-1}A_n+F_{n-1}B_n$ et $F_n=E_{n-1}B_n-F_{n-1}A_n$. C.Q.F.D.

Q1d. En se servant de la remarque de Q1, on peut écrire P sous la forme :

$$P=\kappa^2\left(\prod_{j=1}^m (X-\alpha_i)^{2\beta_j}\right)\left(\prod_{k=1}^l ((X-a_k)^2+b_k^2)^{\gamma_k}\right)$$

En utilisant la remarque de la question précédente il existe des polynômes E,F tel que :

$$\prod_{k=1}^l ((X-a_k)^2+b_k^2)^{\gamma_k}=E^2+F^2$$

D'où

$$P=(GE)^2+(GF)^2,\quad \text{avec } G=\kappa\prod_{j=1}^m (X-\alpha_i)^{\beta_j}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Q1e. On sait pour tout $A\in E_n$, $\Delta_n(A,A)=\delta_n(A^2)$. Par conséquent Δ_n est un produit scalaire ssi $\delta_n(A^2)>0$ pour tout $A\in E_n$ non nul. A présent supposons que Δ_n est un produit scalaire. Maintenant pour tout $P\in E_n$ polynôme positif on peut trouver des polynômes non tous nuls A,B de E_n tel que $P=A^2+B^2$ donc $\delta_n(P)=\delta_n(A^2)+\delta_n(B^2)>0$. Réciproquement supposons que $\delta_n(P)>0$ pou tout polynôme positif $P\in E_{2n}$. Alors pour tout $A\in E_n$ non nul, A^2 est un polynôme positif de E_{2n} donc $\delta_n(A^2)>0$.

Q2a. Par définition P_n est orthogonal à Vec$(P_0,\cdots,P_j)$ pour tout $j < n$. Maintenant $(P_i)_{0\leq i\leq n}$ forme une famille de polynômes à degré échelonné partant de 0 à n. par conséquent $(P_0,\cdots,P_j)$ est une base de E_j donc Vec$(P_0,\cdots,P_j) = E_j$. En conséquence P_n est orthogonal à E_j pour tout $j < n$. En particulier pour $j = n-2$, P_n est orthogonal à E_{n-2} ou à tout polynôme de degré inférieur ou égal à $n-2$.
Q2b. On prouve dans un premier temps que toutes les racines de P_n sont réelles. Raisonnons par l'absurde et supposons que P_n admet une racine complexe z. En outre on sait que si P_n admet une racine complexe $z = a+ib$, le conjugué $\bar{z}$ est aussi un zéro de P avec la même multiplicité que z. De sorte que P_n est divisible par le polynôme $Q = (X-z)(X-\bar{z}) = X^2-2\mathrm{Re}(z)X+|z|^2 = X^2-2aX+a^2+b^2$, Q est bien sûr un polynôme positif. Par conséquent on peut écrire que $P_n = Q\tilde{P}_n$ avec $\tilde{P}_n \in E_{n-2}$. Le produit de deux polynômes positifs étant positif $Q\tilde{P}_n^2$ est alors positif. On a alors :

$$\begin{aligned}
0 &= \Delta_n(P_n,\tilde{P}_n)\\
&= \Delta_n(Q\tilde{P}_n,\tilde{P}_n)\\
&= \delta_n(Q\tilde{P}_n^2)\\
&> 0
\end{aligned}$$

Contradiction ! Par conséquent toutes les racines de P_n sont réelles. Il reste maintenant à prouver que toutes ses racines réelles sont simples. Raisonnons par l'absurde et supposons que P_n admet une racine d'ordre au moins 2, α. Dans ce cas on peut écrire $P_n = (X-\alpha)^2\bar{P}_n$ avec $\bar{P}_n \in E_{n-2}$. En utilisant les mêmes arguments que précédemment :

$$\begin{aligned}
0 &= \Delta_n(P_n,\bar{P}_n)\\
&= \Delta_n((X-\alpha)^2\bar{P}_n,\bar{P}_n)\\
&= \delta_n((X-\alpha)^2\tilde{P}_n^2)\\
&> 0
\end{aligned}$$

Contradiction ! D'où toutes les racines de P_n sont réelles et simples, i.e. P_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.
Q3a. Prenons des réels $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i = 0$. En évaluant la somme précédente en α_k on trouve $\lambda_k = 0$. Par conséquent $(L_1,L_2,\cdots,L_n)$ est une famille libre maximale de E_{n-1} elle en est donc une base. Posons $H = \sum_{i=1}^n L_i$. Le polynôme $H-1$ est de degré au plus $n-1$ mais vaut zéros en n points distincts à savoir $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$. Par conséquent il est nul, i.e. $H = \sum_{i=1}^n L_i = 1$.

Q3bi. Prenons $Q \in E_{2n-1}$. Effectuons la division euclidienne de Q par P_n. Alors il existe un unique couple de polynômes (A, R) tel que $Q = P_n A + R$. il est clair que $\deg(R) < \deg(P_n) = n$ donc $\deg(R) \leq n-1$ soit $R \in E_{n-1}$. Par ailleurs $\deg(Q) = \deg(A) + \deg(P_n) = \deg(A) + n$ d'où $\deg(A) = \deg(Q) - n \leq 2n-1-n = n-1$, i.e. $A \in E_{n-1}$.

Q3bii. Toujours avec les mêmes notations de la question précédente l'on a nécessairement $R(\alpha_i) = Q(\alpha_i)$ puisque les α_i sont les zéros de P_n. En utilisant la base $(L_1, L_2, \cdots, L_n)$ on se souvient que $R = \sum_{i=1}^n R(\alpha_i)L_i$ donc $R = \sum_{i=1}^n Q(\alpha_i)L_i$. Maintenant par définition de P_n il vient que : $\delta_n(P_n A) = \Delta_n(P_n, A) = 0$ (P_n étant orthogonal à A). Enfin :

$$\begin{aligned}
\delta_n(Q) &= \delta_n\left(P_n A + \sum_{i=1}^n Q(\alpha_i)L_i\right) \\
&= \underbrace{\delta_n(P_n A)}_{=0} + \delta_n\left(\sum_{i=1}^n Q(\alpha_i)L_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^n Q(\alpha_i)\delta_n(L_i)
\end{aligned}$$

Q3c. L'idée ici est de prouver que $\delta_n(L_i) = \delta_n(L_i^2)$. Remarquons pour $i \neq j$ le polynôme $X - \alpha_i$ divise L_j et qu'il existe un réel μ_i tel que $\mu_i(X-\alpha_i)L_i = P_n$. On peut aussi poser $R_j^{(i)} = \frac{L_j}{X-\alpha_i}$. On montre que $\delta_n(L_i L_j) = 0$:

$$\begin{aligned}
\delta_n(L_i L_j) &= \frac{1}{\mu_i}\delta_n\left(\mu_i(X-\alpha_i)L_i \frac{L_j}{X-\alpha_i}\right) \\
&= \frac{1}{\mu_i}\delta_n(P_n R_j^{(i)}) \\
&= \frac{1}{\mu_i}\Delta_n(P_n, R_j^{(i)}) \\
&= 0 \text{ (car } R_j^{(i)} \in E_{n-2})
\end{aligned}$$

On est prêt à achever :

$$\begin{aligned}
\delta_n(L_i) &= \delta_n(L_i(\sum_{i=1}^n L_i = 1)) \\
&= \delta_n(L_i^2) + \sum_{j \neq i} \delta_n(L_i L_j) \\
&= \delta_n(L_i^2) \\
&> 0(\text{ D'après Q1e. })
\end{aligned}$$

Ceci prouve $p_1, p_2, \cdots, p_n$ sont strictement positifs. Nous prouvons maintenant que leur somme est égale à 1 :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} p_i &= \sum_{i=1}^{n} \delta_n(L_i) \\
&= \delta_n\left(\sum_{i=1}^{n} L_i\right) \\
&= \delta_n(1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Q4a. Considérons une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ prenant n valeurs distinctes $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ avec les probabilités respectives $\delta_n(L_1), \delta_n(L_2), \cdots, \delta_n(L_n)$ strictement positives. Évidemment de ce qui précède $\sum_{k=1}^{n} \delta_n(L_k) = 1$. On montre que cette variable aléatoire Z convient. Pour tout k appartenant à l'intervalle entier $[1, 2n-1]$:

$$\begin{aligned}
\varphi(k) &= \delta_n(X^k) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k \delta_n(L_i) \\
&= \mathbf{E}(Z^k)
\end{aligned}$$

Q4b. Ici on montre que le nombre minimal de valeurs prises par Z est n. Maintenant appelons ce entier minimal n_φ. D'après la question précédente on peut exhiber une v.a. Z à n valeurs satisfaisant ladite condition donc $n_\varphi \leq n$. Maintenant il reste à montrer que $n_\varphi \geq n$. Pour cela il suffit de prouver que pour tout entier $p < n$ on ne peut pas trouver une v.a. prenant au plus p valeurs et satisfaisant notre condition d'intérêt. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'une telle v.a. Z_p existe et qu'elle charge les points $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ avec les probabilités respectives $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_p$ positives (pas nécessairement strictement positives). En gros on voit que le vecteur $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p, \pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_p)$ de $\mathbb{R}^{2p}$ est solution du système non linéaire à $2n$ équations :

$$(\mathscr{S}) : \frac{1}{k+1} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^k \pi_i, \quad 0 \leq k \leq 2n-1$$

Considérons le polynôme $Q=\prod_{i=1}^{p}(X-\alpha_i)$. Si on note que $Q=X^n-\sum_{i=1}^{p}b_iX^{p-i}$. Par conséquent $(\mathscr{S})$ implique $(1/k)_{1\leq k\leq 2n}$ sont les termes de la récurrence linéaire :

$$u_n=\sum_{i=1}^{p}b_i u_{n-i}$$

Par conséquent en notant $v_i=(\frac{1}{i},\frac{1}{i+1},\cdots,\frac{1}{i+p})$. On a un clairement :

$$v_{p+1}=\sum_{i=1}^{p}b_i v_{p+1-i}$$

En d'autres termes le système $(v_1,\cdots,v_{p+1})$ est lié. Ceci est absurde puisque les $(v_i)_{1\leq i\leq p+1}$ sont les colonnes de la matrice inversible $H_{\varphi}^{(p+1)}$ et donc ils forment un système libre [5] . Notre hypothèse est donc prouvée et $n_{\varphi}=n$.

5. Il est à noter que $2p+1<2n$.

J'espère que cette Solution vous aidera et Bonne Chance pour votre Concours.

Contactez moi à l'adresse de haut de page en cas de questions.

Également avertissez moi si vous soupçonnez une quelconque erreur.

Cordialement Ulrich GOUE