第三章　假设检验

假设检验的基本概念见讲义§1.4.2。

只涉及一个分布的假设称为简单假设(simple hypothesis)；涉及多个分布的假设称为复合假设(composite hypothesis)。

§3.1 构造检验的方法

一、似然比方法

定义3.1.1 设 X 的分布族为 $(\mathscr{X}, \mathscr{B}_X, \mathscr{P} = \{P_\theta:\ \theta \in \Theta = \Theta_H \cup \Theta_K\})$，$\mathscr{P}$ 关于σ-有限测度ν 可控，记$p(x;\theta) = dP_\theta(x)/d\nu(x), \forall\theta \in \Theta$。对于假设检验问题 $H:\ \theta \in \Theta_H\ v.s.\ K:\ \theta \in \Theta_K$，称

$$\lambda(x) = \frac{\sup_{\theta\in\Theta_H} L(\theta;x)}{\sup_{\theta\in\Theta} L(\theta;x)}$$

为似然比检验统计量(*likelihood ratio test statistic*)，其中似然函数$L(\theta;x) = p(x;\theta),\ \theta \in \Theta$。称形为

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } \lambda(x) < c, \\ 0, & \text{if } \lambda(x) > c, \end{cases}$$

的检验为似然比检验(*likelihood ratio test, LRT*)，其中$c \in [0,1]$ 是常数。

LRT 可视为Neyman-Pearson 引理的结论在复合假设情况下的推广，构造思路直观，易于处理讨厌参数(*nuisance parameters*)，且性质良好。当UMPT 或UMPUT 存在时，LRT 往往与此类最优检验一致。在大样本情况下，LRT 有良好的渐近性质。因而，LRT 与MLE 一样应用广泛。

LRT 主要适用于参数模型。与MLE 一样，在一些特殊的场合似然比检验统计量也存在可测性问题。当不能得到原假设成立下似然比检验统计量的精确分布时，可以根据Wilks 定理导出渐近的似然比检验，其渐近性质与Wald 检验、Rao's score 检验等价。

若

$$\hat{\theta}_H = \arg\max_{\theta\in\Theta_H} L(\theta;x), \quad \hat{\theta}_{MLE} = \arg\max_{\theta\in\Theta} L(\theta;x),$$

则

$$\lambda(x) = \frac{L(\hat{\theta}_H;x)}{L(\hat{\theta}_{MLE};x)}.$$

若似然比检验统计量$\lambda(x)$ 关于统计量$G(x)$ 单调增，则LRT 亦可表达为

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } G(x) < c', \\ 0, & \text{if } G(x) > c'. \end{cases}$$

（Casella et al., p377/Th8.2.4）若 $T(X)$ 是 $\mathscr{P}$ 的充分统计量，则 $\lambda(x) = \lambda^*(T(x))$。

例3.1.1 (p375/eg 8.2.2 单参数、双边假设检验) $X_1, \cdots, X_n$ i.i.d. $N(\theta,1)$, $\theta\in\mathbb{R}$ 未知。欲检验$H:\theta=\theta_0\ v.s.\ K:\theta\neq\theta_0$，其中$\theta_0$ 是已知的常数。

例3.1.2 (p375/eg 8.2.3 单参数、单边假设检验) $X_1, \cdots, X_n$ i.i.d. $Exp(\theta,1)$，其共同的pdf 为$f(x;\theta) = e^{-(x-\theta)}I_{\theta,\infty}(x)$，其中$\theta\in\mathbb{R}$ 未知。欲检验$H:\theta\leq\theta_0\ v.s.\ K:\theta>\theta_0$，其中$\theta_0$ 是已知的常数。

例3.1.3 (p378/eg 8.2.6 含讨厌参数的假设检验) $X_1, \cdots, X_n$ i.i.d. $N(\mu,\sigma^2)$, 其中$\mu\in\mathbb{R},\sigma^2>0$ 均未知。欲检验

$$\begin{array}{lll} H_1:\mu=\mu_0 & \text{v.s.} & K_1:\mu\neq\mu_0 \\ H_2:\mu\leq\mu_0 & \text{v.s.} & K_2:\mu>\mu_0 \\ H_3:\sigma^2=\sigma_0^2 & \text{v.s.} & K_3:\sigma^2\neq\sigma_0^2 \\ H_4:\sigma^2\leq\sigma_0^2 & \text{v.s.} & K_4:\sigma^2>\sigma_0^2 \end{array}$$

其中μ_0,σ_0^2 是已知的常数。

二、并-交法与交-并法

在原假设为复合假设的情况下，有时候可以通过对简单原假设的检验来构造检验方法。并-交法与交-并法就属于这类方法。线性模型及多元分析中的许多检验法由此可得。

并-交法可能适用于解决下列形式的假设检验问题：

$$H:\ \theta \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \Theta_\gamma \quad \text{v.s.} \quad K:\ \theta \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \bar{\Theta}_\gamma,$$

其中Γ 是任意的指标集，可能有限也可能无限，取决于具体问题。若对于每一个$\gamma \in \Gamma$，已知检验

$$H_\gamma:\ \theta \in \Theta_\gamma \quad \text{v.s.} \quad K_\gamma:\ \theta \in \bar{\Theta}_\gamma$$

的拒绝域为$\{x : T_\gamma(x) \in R_\gamma\}$，那么由并-交法可得假设检验问题 H v.s. K 的拒绝域形为

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \{x : T_\gamma(x) \in R_\gamma\}.$$

特别地，若每一个 H_γ v.s. K_γ 问题的拒绝域为 $\{x : T_\gamma(x) \geq c\}$，其中 c 与 γ 无关，那么由并-交法所得 H v.s. K 的拒绝域为

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \{x : T_\gamma(x) \geq c\} = \{x : \sup_{\gamma\in\Gamma} T_\gamma(x) \geq c\}.$$

由此导出 H v.s. K 的检验统计量$T(x) = \sup_{\gamma\in\Gamma} T_\gamma(x)$。有的问题中 $T(x)$ 具有简单的形式。

例3.1.4 (p380/eg 8.2.8 双边t检验) 设$X_1, \cdots, X_n$ i.i.d. $N(\mu, \sigma^2)$, 其中$\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$ 均未知。欲检验$H : \mu = \mu_0$ v.s. $K : \mu \neq \mu_0$，其中μ_0 是给定的常数。我们可以将原假设、备择假设写成

$$H : \mu \in (-\infty, \mu_0] \cap [\mu_0, \infty) \quad \text{v.s.} \quad K : \mu \in (\mu_0, \infty) \cup (-\infty, \mu_0).$$

用似然比方法分别可得：检验$H_L : \mu \in (-\infty, \mu_0]$ v.s. $K_L : \mu \in (\mu_0, \infty)$ 的拒绝域为

$$\{x : \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \geq t_L\},$$

检验$H_U : \mu \in [\mu_0, \infty)$ v.s. $K_U : \mu \in (-\infty, \mu_0)$ 的拒绝域为

$$\{x : \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \leq t_U\}.$$

再由并-交法可得，检验 H v.s. K 的拒绝域形为

$$\{x :\ \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \leq t_U \quad \text{or} \quad \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \geq t_L\}.$$

若取$t_L = -t_U > 0$，则上述拒绝域可简化为

$$\{x : \frac{|\bar{X} - \mu_0|}{S/\sqrt{n}} \geq t_L\},$$

与LRT 相同。

例3.1.5 (Hotelling's T^2 检验) 设$X_1,\cdots,X_n$ i.i.d. $N_k(\mu,\Sigma)$, 其中$\mu\in\mathbb{R}^k,\Sigma>0$均未知。欲检验$H:\mu=\mu_0$ v.s. $K:\mu\neq\mu_0$，其中μ_0 是给定的k 维向量。我们可以将原假设、备择假设写成

$$H:\bigcap_{\gamma\in\mathbb{R}^k,\gamma\neq 0}\{\mu:\gamma'\mu=\gamma'\mu_0\}\quad \text{v.s.}\quad K:\bigcup_{\gamma\in\mathbb{R}^k,\gamma\neq 0}\{\mu:\gamma'\mu\neq\gamma'\mu_0\}.$$

对于每一个$\gamma\in\mathbb{R}^k,\gamma\neq 0$，易知 $\gamma'X_1,\cdots,\gamma'X_n$ i.i.d. $N(\gamma'\mu,\gamma'\Sigma\gamma)$，由t检验法得检验

$$H_\gamma:\gamma'\mu=\gamma'\mu_0\quad \text{v.s.}\quad K_\gamma:\gamma'\mu\neq\gamma'\mu_0$$

的拒绝域形为

$$\{x:\ \frac{n(\gamma'\bar{X}-\gamma'\mu_0)^2}{\gamma'S\gamma}\geq c\},$$

这里$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i, S=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})(X_i-\bar{X})'$，取相同的临界值 c 可使每个检验的真实水平均相同。由并-交法知，检验 H v.s. K 的拒绝域形为

$$\{x:\ T^2=\sup_{\gamma\in\mathbb{R}^k,\gamma\neq 0}\frac{n(\gamma'\bar{X}-\gamma'\mu_0)^2}{\gamma'S\gamma}\geq c\},$$

易知，$T^2=n(\bar{X}-\mu_0)'S^{-1}(\bar{X}-\mu_0)$ 即为Hotelling's T^2 检验统计量。

若假设检验问题形为

$$H:\ \theta\in\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\Theta_\gamma\quad \text{v.s.}\quad K:\ \theta\in\bigcap_{\gamma\in\Gamma}\bar{\Theta}_\gamma,$$

其中Γ 是任意的指标集，则有可能使用交-并法来构造检验。若对于每一个$\gamma\in\Gamma$，已知检验

$$H_\gamma:\ \theta\in\Theta_\gamma\quad \text{v.s.}\quad K_\gamma:\ \theta\in\bar{\Theta}_\gamma$$

的拒绝域为$\{x:T_\gamma(x)\in R_\gamma\}$，那么由交-并法可得假设检验问题 H v.s. K 的拒绝域形为

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma}\{x:T_\gamma(x)\in R_\gamma\}.$$

特别地，若每一个 H_γ v.s. K_γ 问题的拒绝域为 $\{x:T_\gamma(x)\geq c\}$，其中 c 与 γ 无关，那么由交-并法所得 H v.s. K 的拒绝域为

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma}\{x:T_\gamma(x)\geq c\}=\{x:\inf_{\gamma\in\Gamma}T_\gamma(x)\geq c\}.$$

由此导出 H v.s. K 的检验统计量 $T(x)=\inf_{\gamma\in\Gamma}T_\gamma(x)$。

例3.1.6 (p382/eg 8.2.9 Acceptance sampling) 评价室内装饰织物的质量有两个重要参数：平均断裂强度θ_1 和通过易燃性测试的概率θ_2。当 θ_1 大于50 磅及 θ_2 大于0.95 两者同时合格时，产品才被接受。因而买卖双方在交验产品时需要根据抽样测量数据检验

$$H:\theta_1\le 50 \text{ or } \theta_2\le 0.95 \quad \text{v.s.} \quad K:\theta_1>50 \text{ and } \theta_2>0.95,$$

当原假设 H 被拒绝时才接受该批产品。

设断裂强度测试样本 $X_1,\cdots,X_n$ i.i.d. $N(\theta_1,\sigma^2)$，易燃性测试样本 $Y_1,\cdots,Y_m$ i.i.d. $B(1,\theta_2)$。把检验 $H_1:\theta_1\le 50$ v.s. $K_1:\theta_1>50$ 的拒绝域 $\{\sqrt{n}(\bar{X}-50)/S\ge c_1\}$，与检验 $H_2:\theta_2\le 0.95$ v.s. $K_2:\theta_2>0.95$ 的拒绝域 $\{\sum_{i=1}^m Y_i\ge c_2\}$ 结合起来，由交-并法得 H v.s. K 的拒绝域形式为

$$\left\{(x,y):\ \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-50)}{S}\ge c_1 \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^m Y_i\ge c_2\right\}.$$

三、Bayes方法

贝叶斯统计推断依据的模型包括两个方面：

1) X 的分布族（假定关于ν 可控），即假定 $X|\theta\sim p(x;\theta),\ \theta\in\Theta$；
2) 视未知参数 θ 为随机变量（向量），假定其先验分布（一般也假定关于某λ 有密度存在）为 $\theta\sim\pi(\theta)$。

贝叶斯推断主要根据给定 $X=x$ 时 θ 的后验分布（假定关于λ 有密度）

$$\pi(\theta|x)=\frac{p(x;\theta)\pi(\theta)}{m(x)}$$

进行，其中 $m(x)=\int_\Theta p(x;\theta)\pi(\theta)d\lambda(\theta)$。

考虑下列假设检验问题

$$H:\ \theta\in\Theta_H \quad v.s. \quad K:\ \theta\in\Theta_K,$$

其中 Θ_H 与 Θ_K 是 Θ 的分割，均非空。用贝叶斯方法解决假设检验问题的思路比较直接，就是通过比较原假设与备择假设的后验概率，即

$$P(\theta\in\Theta_H|x)=\int_{\Theta_H}\pi(\theta|x)d\lambda(\theta) \quad \text{与} \quad P(\theta\in\Theta_K|x)=1-P(\theta\in\Theta_H|x)$$

两者的大小来下检验结论。通常拿两者之比与设定的某临界值比较大小来决定拒绝/接受原假设。但有人认为 θ 的后验概率中含有先验分布的信息，这部分信息是人为设定的、有主观性，最好在做假设检验时把这部分主观信息尽可能排除出去。于是人们提出了下列贝叶斯因子（Bayes Factor）的概念

$$\mathrm{BF} = \frac{P(\theta \in \Theta_H|x)/\pi(\theta \in \Theta_H)}{P(\theta \in \Theta_K|x)/\pi(\theta \in \Theta_K}),$$

并采用贝叶斯因子与设定的临界值比较大小来下检验结论。直观上，贝叶斯因子是两个假设的后验概率比与先验概率比之比，它看上去排除了主观先验的影响，主要体现了数据对于两个假设的支持程度。尤其当$\Theta_H = \{\theta_H\}$且$\Theta_K = \{\theta_K\}$ 即原假设和备择假设都是简单假设时，

$$\mathrm{BF} = \frac{P(\theta = \theta_H|x)/\pi(\theta_H)}{P(\theta = \theta_K|x)/\pi(\theta_K)} = \frac{p(x|\theta_H)}{p(x|\theta_K)},$$

贝叶斯因子就是似然比。在复合假设情况下，贝叶斯因子可视为加权似然比，即原假设、备择假设各自成立时似然函数的加权平均之比。

§3.2 UMPT(Uniformly Most Powerful Test)

设 X 的分布族为 $(\mathscr{X},\mathscr{B}_X,\mathscr{P}=\{P_\theta:\ \theta\in\Theta\})$，记

$$\mathscr{F}=\{\phi:\ \phi\text{为}(\mathscr{X},\mathscr{B}_X)\to([0,1],\mathscr{B}_{[0,1]})\text{的可测函数}\},$$

为 $(\mathscr{X},\mathscr{B}_X)$ 上所有检验函数形成的集合。称

$$\beta_\phi(\theta)=E_\theta(\phi(X)),\quad \theta\in\Theta$$

为检验函数 ϕ 的势函数。在 N-P 理论中，势函数包含了检验的全部性质。若两个检验的势函数相同，则称它们等价。

设Θ_H,Θ_K 是参数空间 Θ 的一个分割。按 N-P 原则，解决假设检验问题

$$H:\ \theta\in\Theta_H\quad \text{v.s.}\quad K:\ \theta\in\Theta_K \tag{3.2.1}$$

就相当于求解下列优化问题：

$$\begin{array}{l} \max_{\phi\in\mathscr{F}}\ E_\theta\phi(X),\ \forall\theta\in\Theta_K,\\ \text{s.t.}\quad \sup_{\theta\in\Theta_H}E_\theta\phi(X)\le\alpha. \end{array} \tag{3.2.2}$$

定义3.2.1 称满足 (3.2.2) 的解 $\phi^*(x)$ 为假设检验问题 (3.2.1) 的水平为 α 的UMPT。

仅有少数问题有UMPT。下面讨论求得UMPT 的基本思路。

- 当备择假设为简单假设时，UMPT 往往存在。

  定理3.2.1 (Lehmann,TSH,附录4) *若样本空间 $(\mathscr{X},\mathscr{B}_X)$ 是欧氏的，或 $\mathscr{B}_X$ 是可列生成的，$\{P_\theta,\theta\in\Theta\}$ 受控于某 σ-有限测度，备择假设是简单的，则 $\forall\alpha\in[0,1]$，必存在水平为 α 的UMPT。*

- 当备择假设 K 为复合假设时，$\forall\theta_1\in\Theta_K$，若 ϕ^* 是

  $$H:\ \theta\in\Theta_H\quad \text{v.s.}\quad K_1:\ \theta=\theta_1$$

  的水平为 α 的MPT，且 ϕ^* 不依赖于 θ_1，则 ϕ^* 也是 H v.s. K 的水平为 α 的UMPT；若不依赖于 θ_1 的 ϕ^* 不存在，则 H v.s. K 不存在UMPT。

- 对于检验问题

  $$H_1:\ \theta=\theta_0\quad \text{v.s.}\quad K_1:\ \theta=\theta_1\quad (\theta_0\in\Theta_H),$$

  若 ϕ^* 是 H_1 v.s. K_1 的水平为 α 的MPT，且 ϕ^* 也是 H v.s. K_1的水平为 α 的检验，则 ϕ^* 也是 H v.s. K_1 的水平为 α 的MPT。

§3.2.1 Neyman-Pearson 引理

N-P 引理解决的是当原假设、备择假设都是简单假设时MPT的求解问题，即求解 $H:\ P_0$ v.s. $K:\ P_1$ 的MPT。

先考虑$P_i,\ i=0,1$ 都是离散型概率测度的情况。设它们的分布列为

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$
P_0	$p_0(x_1)$	$p_0(x_2)$	$p_0(x_3)$	$\cdots$
P_1	$p_1(x_1)$	$p_1(x_2)$	$p_1(x_3)$	$\cdots$

若不考虑随机化检验，那么求解该问题的水平为α 的MPT，等价于求 $\{x_1, x_2, \ldots\}$ 的一个子集 S（拒绝域），满足

$$\sum_{x\in S} p_0(x) \le \alpha \quad 且 \quad \sum_{x\in S} p_1(x) = \max!.$$

若将 $p_0(x)$ 比喻为购买商品 x 的价格，$p_1(x)$ 为获得商品 x 的效用，则上述问题相当于：拿 α 元钱去选购若干件商品，要求使总的效用最大化。

直观的选购思路是：优先挑选单位效用便宜的商品，即可按

$$r(x) = \frac{p_1(x)}{p_0(x)}, \quad x = x_1, x_2, \cdots$$

从大到小的顺序去选购商品，直到花完 α 元钱为止。因此，S 具有形式：

$$S = \{x : r(x) > c\},$$

其中 c 满足 $\sum_{x\in S} p_0(x) \le \alpha$。

该思路的困难在于，上式中“=”未必能达到。有三种解决方法：

1. 买到 $\sum_{x\in S} p_0(x) < \alpha$ 时停止；
2. 打破 $r(x)$ 从大到小的购买顺序；
3. 把最后一件商品分割开来，只买一部分。

定理3.2.2 (Neyman-Pearson 引理) 设 $P_0,\ P_1$ 是两个概率测度，关于控制测度 ν 具有*pdf* $p_0,\ p_1$。对于检验问题 $H : P_0$ *v.s.* $K : P_1$, 及给定的显著性水平 $\alpha \in [0, 1]$, *i)* （存在性）∃ 检验函数 ϕ 及常数 k，使得

$$E_0\phi(X) = \alpha, \tag{3.2.3}$$

$$且 \quad \phi(x) = \begin{cases} 1, & if \quad p_1(x) > k \cdot p_0(x), \\ 0, & if \quad p_1(x) < k \cdot p_0(x). \end{cases} \tag{3.2.4}$$

ii) （充分性）若存在某 k 及 ϕ，使 (3.2.3) 和 (3.2.4)成立，则 ϕ 必是水平为 α 的*MPT*。

iii) （必要性）若 ϕ 是水平为 α 的*MPT*，则必存在常数 k，使 ϕ 满足 (3.2.4)($a.e.\ \nu$)；若 $E_1\phi(X) < 1$，则 ϕ 必满足 (3.2.3)；若 $E_1\phi(X) = 1$，则 $E_0\phi(X) \le \alpha$。

注1. 若MPT 的势函数唯一，则 (3.2.3)与 (3.2.4)充分必要。若MPT 的势函数不唯一，则满足 (3.2.3) 与 (3.2.4)的必是MPT；而MPT 一定满足 (3.2.4)，未必满足 (3.2.3)。

注2. MPT 在 $\{x : p_1(x) \neq kp_0(x)\}$ 上完全确定，在 $\{x : p_1(x) = kp_0(x)\}$ 上可以任意定，只须保证检验的水平为 α。这可以随机化决定，也可以将 $\{x : p_1(x) = kp_0(x)\}$ 作适当的分割。

证明. 不妨约定 $0 \cdot \infty = 0$。当 $\alpha = 0$ 时，若允许 $k = \infty$(即$p_0(x) > 0$的全接受)，则定理成立。当 $\alpha = 1$ 时，取 $k = -1$(即$p_1(x) > 0$的全拒绝)，则定理成立。

下面讨论 $0 < \alpha < 1$ 的情况。

i) 对于$0 \le \lambda < \infty$，记

$$\begin{aligned} \alpha(\lambda) &= P_0(p_1(X) > \lambda \cdot p_0(X)) \\ &= 1 - P_0(p_1(X) \le \lambda \cdot p_0(X)) \\ &\hat{\le} 1 - G(\lambda), \end{aligned}$$

其中

$$G(\lambda) = P_0\Big(\frac{p_1(X)}{p_0(X)} \le \lambda,\ p_0(X) > 0\Big)$$

是某个随机变量的分布函数，非降、右连续、$G(\infty) = 1$。相应地，$\alpha(\lambda)$ 非增、右连续、$\alpha(\infty) = 0$。

(a) 若$\alpha(0) > \alpha$，则存在$k \in (0, \infty)$，$\ni \alpha(k-) \geq \alpha \geq \alpha(k)$。

若$\alpha(k) = \alpha$，则取$\phi(x) = I_{(p_1(x) > k \cdot p_0(x))}$；

若$\alpha(k) < \alpha$，则取$\phi(x) = \begin{cases} 1 & , \quad p_1(x) > k \cdot p_0(x), \\ \frac{\alpha - \alpha(k)}{\alpha(k-) - \alpha(k)}, & \quad p_1(x) = k \cdot p_0(x), \\ 0 & , \quad p_1(x) < k \cdot p_0(x). \end{cases}$

(b) 若$\alpha(0) = \alpha$，则取$\phi(x) = I_{(p_1(x) > 0)}$。

(c) 若$\alpha(0) < \alpha$，则取$\phi(x) = \begin{cases} 1 & , \quad p_1(x) > 0, \\ \frac{\alpha - \alpha(0)}{1 - \alpha(0)}, & \quad p_1(x) = 0. \end{cases}$

如此构造的ϕ 必同时满足 (3.2.3)和 (3.2.4)。

ii) 设 ϕ 同时满足 (3.2.3)和 (3.2.4)，往证 ϕ 是MPT。

设 $\tilde{\phi}$ 是任一水平为 α 的检验。记

$$S^+ = \{x : \phi(x) > \tilde{\phi}(x)\},$$
$$S^- = \{x : \phi(x) < \tilde{\phi}(x)\}.$$

显然，

$$x \in S^+ \Rightarrow \phi(x) > \tilde{\phi}(x) \Rightarrow \phi(x) > 0 \Rightarrow p_1(x) \geq kp_0(x),$$
$$x \in S^- \Rightarrow \phi(x) < \tilde{\phi}(x) \Rightarrow \phi(x) < 1 \Rightarrow p_1(x) \leq kp_0(x).$$

因此，

$$[\phi(x) - \tilde{\phi}(x)][p_1(x) - kp_0(x)] \geq 0, \ \forall x \in S^+ \cup S^-.$$

由此可得

$$\begin{aligned} & \int_{S^+ \cup S^-} [\phi(x) - \tilde{\phi}(x)][p_1(x) - kp_0(x)] d\nu(x) \\ = & \int_{\mathscr{X}} [\phi(x) - \tilde{\phi}(x)][p_1(x) - kp_0(x)] d\nu(x) \\ = & \int_{\mathscr{X}} [\phi(x) - \tilde{\phi}(x)] p_1(x) d\nu(x) - k \int_{\mathscr{X}} [\phi(x) - \tilde{\phi}(x)] p_0(x) d\nu(x) \\ \geq & 0. \end{aligned}$$

所以，$E_1\phi(X) \geq E_1\tilde{\phi}(X)$，即 ϕ 是水平为 α 的MPT。

iii) 设 $\tilde{\phi}$ 是水平为 α 的MPT。

由 i)知，存在满足 (3.2.3)和 (3.2.4)的 ϕ。如 ii) 定义 S^+、S^-，令 $S = S^+ \cup S^-$，$S_1 = S \cap \{x : p_1(x) \neq kp_0(x)\}$。往证：$\mu(S_1) = 0$。

因为

$$[\phi(x) - \tilde{\phi}(x)][p_1(x) - kp_0(x)] > 0,\ \forall x \in S_1,$$

若 $\mu(S_1) > 0$，则有

$$\begin{aligned} 0 &< \int_{S_1} [\phi(x) - \tilde{\phi}(x)][p_1(x) - kp_0(x)] d\nu(x) \\ &= \int_{\mathscr{X}} [\phi(x) - \tilde{\phi}(x)][p_1(x) - kp_0(x)] d\nu(x) \\ &= E_1\phi(X) - E_1\tilde{\phi}(X) - k[E_0\phi(X) - E_0\tilde{\phi}(X)] \\ &\leq E_1\phi(X) - E_1\tilde{\phi}(X), \end{aligned}$$

即 $E_1\phi(X) > E_1\tilde{\phi}(X)$。这与 $\tilde{\phi}(X)$ 是 MPT 矛盾。因此，$\nu(S_1) = 0$，即 $\phi \neq \tilde{\phi}$ 仅在 $\{x : p_1(x) = kp_0(x)\} \cup \nu$零测集 上成立。因而证得 $\tilde{\phi}$ 必具有形式 (3.2.4) a.e.ν。

若 $E_0\tilde{\phi}(X) < \alpha$ 且 $E_1\tilde{\phi}(X) < 1$，则总可以提高某些点上的拒绝概率，使 $E_0\tilde{\phi}(X) = \alpha$ 或 $E_1\tilde{\phi}(X) = 1$。这样，一个MPT 或者达到 (3.2.3)，或者使 $E_1\phi(X) = 1$。

□

推论3.2.1 *若 ϕ 是 $H : P_0$ $v.s.$ $K : P_1$ 的水平为 α 的MPT，则必有 $E_1\phi(X) \geq \alpha$。若 $0 < \alpha < 1$ 且 $P_0 \neq P_1$，则 $E_1\phi(X) > \alpha$。*

证明. 取 $\tilde{\phi} \equiv \alpha$，它是水平为 α 的检验。由于 ϕ 是MPT，则必有 $E_1\phi(X) \geq E_1\tilde{\phi}(X) = \alpha$。

当 $0 < \alpha < 1$，$P_0 \neq P_1$时，若 $E_1\phi(X) = \alpha$，那么 $\tilde{\phi}(\cdot)$ 也是MPT，由定理 3.2.2知，$\tilde{\phi}$ 应有形式 (3.2.4)。因为 $0 < \alpha < 1$，故 $p_1(x) = kp_0(x)$ a.e. ν。这只有当 $k = 1$，$p_1(x) \equiv p_0(x)$ a.e. ν 时成立，与 $P_0 \neq P_1$ 矛盾。 □

根据定理 3.2.2寻找MPT的程序：

1. 计算 $r(x) = \dfrac{p_1(x)}{p_0(x)}$;

2. 取 $\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{if} \quad r(x) > \lambda_0, \\ \gamma, & \text{if} \quad r(x) = \lambda_0, \\ 0, & \text{if} \quad r(x) < \lambda_0, \end{cases}$ 　其中 $0 < \gamma < 1$、λ_0 待定;

3. 由 $E_0\phi(X)=\alpha$ 解出 λ_0，γ。其中 λ_0 满足

$$\begin{cases} P_0(r(X)>\lambda_0)\le\alpha, \\ P_0(r(X)\ge\lambda_0)\ge\alpha. \end{cases} \quad \text{而} \quad \gamma=\frac{\alpha-\alpha(\lambda_0)}{\alpha(\lambda_0-)-\alpha(\lambda_0)}.$$

例3.2.1 $X_1,\ldots,X_n$ i.i.d. $N(\theta,1)$。求 $H:\theta=\theta_0$ v.s. $K:\theta=\theta_1$ 的水平为 α 的MPT，其中 $\theta_1>\theta_0$。

解：不妨设 $\theta_0=0$，$\theta_1>0$。由 $X_1,\ldots,X_n$ 的联合密度

$$p(x_1,\ldots,x_n;\theta)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2\}$$

知

$$r(x)=\frac{p(x;\theta_1)}{p(x;0)}=\exp\{\theta_1\cdot n\bar{x}-\frac{n}{2}\theta_1^2\}$$

关于 $\bar{x}$ 严增，故 $r(x)>\lambda_0\Longleftrightarrow\bar{x}>c$。求 λ_0，等价于求 c 使 $P_0(\bar{X}>c)=\alpha$。

因为 H 真时，$\bar{X}\sim N(0,\frac{1}{n})$，分布是连续型的，故

$$P_0(\bar{X}\ge c)=P_0(\bar{X}>c)=\alpha \quad \text{且} \quad \sqrt{n}c=u_{1-\alpha}.$$

因此，水平为 α 的MPT为

$$\phi(x)=\begin{cases} 1, & \text{if} \quad \bar{x}\ge u_{1-\alpha}/\sqrt{n}, \\ 0, & \text{if} \quad \bar{x}<u_{1-\alpha}/\sqrt{n}. \end{cases}$$

例3.2.2 设 $X\sim Poi(\theta)$。求 $H:\theta=1$ v.s. $K:\theta=1.5$ 的水平为 α 的MPT。

解：因为

$$r(x)=\frac{p_1(x)}{p_0(x)}=\frac{1.5^x\cdot e^{-1.5}/x!}{1^x\cdot e^{-1}/x!}=1.5^x\cdot e^{-0.5}$$

关于x 严增，故

$$r(x)>\lambda_0\Longleftrightarrow x>c.$$

给定α，通过求解

$$\begin{cases} P_{\theta=1}(X>c)\le\alpha, \\ P_{\theta=1}(X\ge c)\ge\alpha, \end{cases}$$

可得 c 与 γ。比如，$\alpha=0.05$ 时，

$$\begin{cases} P_1(X>3)=0.019<0.05, \\ P_1(X\ge 3)=0.08>0.05. \end{cases}$$

因此，水平为0.05 的MPT为

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{if} \quad x > 3, \\ \frac{0.05-0.019}{0.08-0.019}, & \text{if} \quad x = 3, \\ 0, & \text{if} \quad x < 3. \end{cases}$$

注3. N-P引理导出的MPT 符合充分性原则。设 T 是充分统计量，则

$$r(x) = \frac{p(x;\theta_1)}{p(x;\theta_0)} = \frac{g_{\theta_1}(T(x)) \cdot h(x)}{g_{\theta_0}(T(x)) \cdot h(x)} = r^*(T(x)),$$

它是 T 的函数，故N-P引理导出的MPT 检验函数也是 T 的函数。

另一方面，若 $\phi(x)$ 是任一水平为 α 的检验函数，则 $\Psi(T) = E(\phi(X)|T)$ 也是水平为 α 的检验，且两者的势函数相同，即 $E_\theta \Psi(T) = E_\theta \phi(X), \forall \theta \in \Theta$。

注4. 若 $r(X)$ 的分布是连续型的，则 $P_0(r(X) > \lambda) = P_0(r(X) \geq \lambda)$，MPT 是非随机化的。反之，可能需要考虑随机化检验。

注意，X 的分布连续，但 $r(X)$ 的分布不一定连续。

例3.2.3 $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $U(0,\theta)$，$\theta > 0$。求 $H: \theta = \theta_0$ v.s. $K: \theta = \theta_1$ 的水平为 α 的MPT，其中 $\theta_1 > \theta_0$。

解:

$$r(x) = \frac{\theta_1^{-n} I_{(0 \leq x_{(n)} \leq \theta_1)}}{\theta_0^{-n} I_{(0 \leq x_{(n)} \leq \theta_0)}} = \begin{cases} \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n, & \text{if} \quad x_{(n)} \leq \theta_0, \\ \infty, & \text{if} \quad \theta_0 < x_{(n)} \leq \theta_1, \\ \text{不可能}, & \text{else}. \end{cases}$$

因此，

$$\lambda_0 = \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n, \qquad \begin{cases} P_{\theta_0}(r(X) > \lambda_0) = 0, \\ P_{\theta_0}(r(X) \geq \lambda_0) = 1. \end{cases}$$

所以水平为 α 的MPT 为

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \begin{cases} 1, & \text{if} \quad r(x) > \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n, \\ \alpha, & \text{if} \quad r(x) = \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{if} \quad x_{(n)} > \theta_0, \\ \alpha, & \text{if} \quad x_{(n)} \leq \theta_0. \end{cases} \end{aligned}$$

§3.2.2 单调似然比族

本节将N-P 引理应用于单参数单调似然比分布族，获得一些UMPT。

定义3.2.2 设 $\{p_\theta(x):\theta\in\Theta\subset\mathbb{R}\}$ 是一族pdf（关于ν）。若存在实函数 $T(x)$，对 $\forall\theta_1<\theta_2$，θ_1、$\theta_2\in\Theta$，有

(i) $p_{\theta_1}(\cdot)$ 与 $p_{\theta_2}(\cdot)$ 不同；

(ii) 似然比 $r(x)=\dfrac{p_{\theta_2}(x)}{p_{\theta_1}(x)}$ 仅依赖于 θ_1,θ_2 及 $T(x)$，且关于 $T(x)$ 单调非降。

则称该分布族关于 $T(x)$ 具有单调似然比(Monotone Likelihood Ratio, MLR)。

一、单边检验

定理3.2.3 设 $X\sim\mathscr{P}=\{p_\theta(x):\theta\in\Theta\subset\mathbb{R}\}$，$\mathscr{P}$ 关于 $T(x)$ 具有*MLR*。

i) 对于单边假设检验问题

$$H:\ \theta\le\theta_0\ v.s.\ K:\ \theta>\theta_0, \tag{3.2.5}$$

存在一个形如

$$\phi(x)=\begin{cases}1, & if\quad T(x)>c,\\ \gamma, & if\quad T(x)=c,\\ 0, & if\quad T(x)<c,\end{cases} \tag{3.2.6}$$

的水平为 α 的*UMPT*，其中 γ，c 满足

$$E_{\theta_0}\phi(X)=\alpha. \tag{3.2.7}$$

ii) 该检验的势函数 $\beta_\phi(\theta)=E_\theta\phi(X)$ 在 Θ 上单调非降，且在 $\{\theta:\ 0<\beta_\phi(\theta)<1\}$ 上严增。

iii) $\forall\theta'\in\Theta$，*i)* 中的检验 ϕ 也是 $H':\theta\le\theta'\ v.s.\ K':\ \theta>\theta'$ 的水平为 $\alpha'=\beta_\phi(\theta')$ 的*UMPT*。

iv) 若 $\tilde\phi$ 满足 $E_{\theta_0}\tilde\phi(X)=\alpha(<1)$，则

$$\beta_\phi(\theta)\le\beta_{\tilde\phi}(\theta),\quad \forall\theta\le\theta_0,\ \theta\in\Theta.$$

证明. 先证i)，ii)。任取 $\theta_1>\theta_0$，考虑检验 $H':\theta=\theta_0$ v.s. $K':\ \theta=\theta_1$。用类似于N-P 引理的方法证：对 $\forall\alpha\in(0,1)$，存在形如 (3.2.6) 且满足 (3.2.7) 的检验 $\phi(\cdot)$，它是 H' v.s. K' 的水平为 α 的MPT。

记 $\alpha(\lambda) = P_{\theta_0}(T(X) > \lambda) = 1 - P_{\theta_0}(T(X) \le \lambda)$，则必存在 $c \in (-\infty, \infty)$，使得 $\alpha(c-0) \ge \alpha \ge \alpha(c)$。取

$$\gamma = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad \alpha(c-0) = \alpha(c), \\ \frac{\alpha - \alpha(c)}{\alpha(c-0) - \alpha(c)}, & \text{else}. \end{cases}$$

则由 c，γ 得到的形如 (3.2.6)的 ϕ 必满足 (3.2.7)。

记 $\left.\frac{p_{\theta_1}(x)}{p_{\theta_0}(x)}\right|_{T(x)=c} = k$。由MLR 知，

$$r(x) < k \Longrightarrow T(x) < c, \qquad r(x) > k \Longrightarrow T(x) > c.$$

故形如 (3.2.6) 的 ϕ 必满足

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & p_{\theta_1}(x)/p_{\theta_0}(x) > k, \\ 0, & p_{\theta_1}(x)/p_{\theta_0}(x) < k. \end{cases}$$

因此，由N-P引理知，$\phi(x)$ 是 H' v.s. K' 的水平为 α 的MPT。

又因为 ϕ 与 θ_1 无关，若 ϕ 还是 H v.s. K 的水平为 α 的检验，则即可证明 ϕ 是H v.s. K 的水平为 α 的UMPT。这就转化为证ii)。

ii) $\forall \theta_1 < \theta_2$，考虑 $H'' : \theta = \theta_1$ v.s. $K'' : \theta = \theta_2$。由i) 的证明可知，ϕ 是 H'' v.s. K'' 的水平为 $\beta_\phi(\theta_1)$ 的MPT。由N-P 引理的推论3.2.1 知 $\beta_\phi(\theta_1) \le \beta_\phi(\theta_2)$；且若 $0 < \beta_\phi(\theta_1) < 1$，$P_{\theta_1}$ 与 P_{θ_2} 不同，则 $\beta_\phi(\theta_1) < \beta_\phi(\theta_2)$。

iii) 由i),ii) 的证明即得。

iv) $\forall \theta_1 < \theta_0$，记 $\tilde{\alpha} = \beta_\phi(\theta_1)$。由i), ii) 的证明知，$\phi$ 是 $\theta = \theta_1$ v.s. $\theta = \theta_0$ 的水平为 $\tilde{\alpha}$ 的MPT。若 $\tilde{\phi}$ 是任一检验，满足

$$\beta_{\tilde{\phi}}(\theta_0) = \beta_\phi(\theta_0) \quad \text{及} \quad \beta_{\tilde{\phi}}(\theta_1) < \tilde{\alpha},$$

则 $\tilde{\phi}$ 也是 $\theta = \theta_1$ v.s. $\theta = \theta_0$ 的水平为 $\tilde{\alpha}$ 的MPT。

由于 $\beta_\phi(\theta_0) = \alpha < 1$，由定理3.2.2 的iii) 知，应有 $\beta_{\tilde{\phi}}(\theta_1) = \tilde{\alpha}$，这与 $\beta_{\tilde{\phi}}(\theta_1) < \tilde{\alpha}$ 矛盾。因此 iv) 得证。 □

注1. 对于 $H : \theta = \theta_0$ v.s. $K : \theta > \theta_0$，定理 3.2.3 的结论依然成立。

注2. 对于 $H : \theta \ge \theta_0$ v.s. $K : \theta < \theta_0$，或 $H : \theta = \theta_0$ $v.s.$ $K : \theta < \theta_0$，定理 3.2.3 的结论应相应地修改为：

i) $\phi(x)=\begin{cases}1, & \text{if} \quad T(x)<c,\\ \gamma, & \text{if} \quad T(x)=c,\\ 0, & \text{if} \quad T(x)>c.\end{cases}$

ii) $\beta_\phi(\theta)$ 在 Θ 上单调非增，在 $\{\theta:\ 0<\beta_\phi(\theta)<1\}$ 上严降。

iii) 若 $\tilde{\phi}$ 满足 $E_{\theta_0}\tilde{\phi}(X)=\alpha(<1)$，则

$$\beta_\phi(\theta)\le\beta_{\tilde{\phi}}(\theta),\quad \forall\theta\ge\theta_0,\ \theta\in\Theta.$$

推论3.2.2 *设 X 关于控制测度 ν 具有pdf*

$$p_\theta(x)=B(\theta)\exp\{Q(\theta)T(x)\}h(x),\quad \theta\in\Theta\subset\mathbb{R}.$$

若 $Q(\theta)$ 在 Θ 上严增，则对给定的 $\alpha\in(0,1)$，检验问题 $H:\ \theta\le\theta_0\ v.s.\ K:\ \theta>\theta_0$ 存在形如 (3.2.6) *且满足* (3.2.7)*的 α-UMPT，该检验也满足定理 3.2.3 的ii), iii), iv)。*

注3.

a) 若 $Q(\theta)$ 严格单调降，则以 $-Q(\theta)$、$-T(x)$ 替代 $Q(\theta)$、$T(x)$；

b) 对于其他的单边检验问题，结论应作相应的修改。

例3.2.4 (1) 例3.2.1 中的 ϕ 亦是 $H:\theta\le\theta_0$ v.s. $K:\theta>\theta_0$ 的 α-UMPT；

(2) 例3.2.2 中的 ϕ 亦是 $H:\theta\le\theta_1$ v.s. $K:\theta>\theta_1$ 的 α-UMPT。

例3.2.5 设 $X_1,\dots,X_n$ i.i.d. $p_\theta(x)$，检验 $H:\theta\le\theta_0$ v.s. $K:\theta>\theta_0$。水平取 α。

(1) $p_\theta(\cdot)$ 为$N(a,\theta^2)$ 的pdf，其中 a 已知，$\theta>0$ 是未知参数。

因为 $\{p_\theta(x):\ \theta>0\}$ 是符合推论3.2.2 的指数族，由推论3.2.2 知 α-UMPT 为

$$\phi(x)=\begin{cases}1, & \text{if} \quad \sum_{i=1}^n(x_i-a)^2\ge\theta_0\chi^2_{1-\alpha}(n),\\ 0, & \text{else.}\end{cases}$$

(2) $p_\theta(x)=\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}I_{(x>0)}$，$\theta>0$。

由推论3.2.2 知 α-UMPT 为

$$\phi(x)=\begin{cases}1, & \text{if}\quad \bar{x}\geq\frac{\theta_0}{2n}\chi^2_{1-\alpha}(2n),\\ 0, & \text{else}.\end{cases}$$

(3) $p_\theta(x)=\frac{\theta^x}{x!}e^{-\theta}$，$x=0,1,2,\ldots$，$\theta>0$。

由推论3.2.2 知 α-UMPT 为

$$\phi(x)=\begin{cases}1, & \text{if}\quad \sum_{i=1}^n x_i>c,\\ \gamma, & \text{if}\quad \sum_{i=1}^n x_i=c,\\ 0, & \text{if}\quad \sum_{i=1}^n x_i<c.\end{cases}$$

其中的 c，γ 满足

$$e^{-n\theta_0}[\sum_{i=1}^{c-1}(n\theta_0)^i/i!+(1-\gamma)(n\theta_0)^c/c!]=1-\alpha.$$

例3.2.6 (超几何分布) 设 N 个产品中有 M 个次品，N 已知，M未知，需作推断。为此，不放回地抽 n 个产品检查，记其中的次品数为 X。取水平为 α，检验 $H:\ M\leq M_0$ v.s. $K:\ M>M_0$。

显然，X 服从超几何分布，pdf 为

$$p_M(x)\hat{=}P_M(X=x)=\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}},\ x=(0\vee n-(N-M)),\ldots,(M\wedge n).$$

该分布族的支撑依赖于 M，故非指数族。但可证分布族关于 x 具有MLR，因为

$$\frac{P_{M+1}(x)}{P_M(x)}=\cdots=\frac{M+1}{N+1}\cdot\frac{N-M-n+x}{M+1-x}$$

关于 x 单调增。由定理 3.2.3，$H\ v.s.\ K$ 的水平为 α 的UMPT 为

$$\phi(x)=\begin{cases}1, & \text{if}\quad x>c,\\ \gamma, & \text{if}\quad x=c,\\ 0, & \text{if}\quad x<c.\end{cases}$$

其中 γ,c 满足

$$E_{M_0}\phi(X)=\sum_{i=c+1}^{\min(M_0,n)}p_{M_0}(i)+\gamma p_{M_0}(c)=\alpha.$$

例3.2.7 样本 $X_1,\ldots,X_n$ i.i.d. $U(0,\theta)$, $\theta>0$。求检验 $H:\ \theta\le\theta_0$ v.s. $K:\ \theta>\theta_0$ 的 α-UMPT。

对于 $\forall\theta_1>\theta_0>0$，似然比

$$\frac{p_{\theta_1}(x)}{p_{\theta_0}(x)}=\begin{cases}\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n, & \text{if}\quad x_{(n)}\le\theta_0,\\ \infty, & \text{else.}\end{cases}$$

关于 $x_{(n)}$ 单调非降。因此分布族关于 $x_{(n)}$ 具有MLR。由定理 3.2.3，α-UMPT 为

$$\phi(x)=\begin{cases}1, & \text{if}\quad x_{(n)}\ge\theta_0(1-\alpha)^{\frac{1}{n}},\\ 0, & \text{else.}\end{cases}$$

注意与例3.2.3 的结论的比较。本例中的检验是非随机化检验，例3.2.3 中的检验是随机化的，但它们用来检验本例中的问题，势函数相同，因而是等价的。

二、N-P引理的推广

撇开统计意义不谈，则N-P 引理解决的无非是一个条件极值问题，它可以推广到更一般的形式。

定理3.2.4 设 $f_i,i=1,\ldots,m+1$ 是定义在欧氏可测空间 $(\mathscr{X},\mathscr{B}_X)$ 上的实值函数，且关于 σ-有限测度 ν 可积。给定常数 $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$，记

$$\mathscr{C}=\left\{\phi\text{是}(\mathscr{X},\mathscr{B}_X)\text{上的检验函数}:\ \int_{\mathscr{X}}\phi f_i d\nu=\alpha_i,\ i=1,\ldots,m\right\},$$
$$\mathscr{C}_0=\left\{\phi\text{是}(\mathscr{X},\mathscr{B}_X)\text{上的检验函数}:\ \int_{\mathscr{X}}\phi f_i d\nu\le\alpha_i,\ i=1,\ldots,m\right\}.$$

设 $\mathscr{C}\ne\varnothing$。

(i) *(充分条件)* 若存在 $\phi^*\in\mathscr{C}$ 及常数 $k_1,\ldots,k_m$，使得

$$\phi^*(x)=\begin{cases}1, & \text{若}\quad f_{m+1}(x)>\sum_{i=1}^m k_i f_i(x),\\ 0, & \text{若}\quad f_{m+1}(x)<\sum_{i=1}^m k_i f_i(x).\end{cases}\tag{3.2.8}$$

则 $\phi^*=\arg\max_{\phi\in\mathscr{C}}\int_{\mathscr{X}}\phi f_{m+1}d\nu$。

(ii) 若存在 $\phi^*\in\mathscr{C}$ 及$k_i\ge 0,i=1,\ldots,m$，使 ϕ^* 具有形式 (3.2.8)，则 $\phi^*=\arg\max_{\phi\in\mathscr{C}_0}\int_{\mathscr{X}}\phi f_{m+1}d\nu$.

(iii) （存在性与必要性）m 维空间点集

$$M = \left\{ (\int_{\mathscr{X}} \phi f_1 d\nu, \ldots, \int_{\mathscr{X}} \phi f_m d\nu) : \ \phi\text{是}(\mathscr{X}, \mathscr{B}_X)\text{上的检验函数} \right\}$$

是凸的闭集。若 $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ 是 M 的内点，则存在 $k_1, \ldots, k_m$ 及 $\phi \in \mathscr{C}$ 满足 (3.2.8)；而且 $\mathscr{C}$ 中最大化 $\int_{\mathscr{X}} \phi f_{m+1} d\nu$ 的 ϕ^* 必具有形式 (3.2.8) *a.e.* ν。

(i), (ii) 的证明类似于定理 3.2.2。(iii) 的证明较复杂，见Lehmann (1986, TSH, 97-99)。

根据定理 3.2.4，可以构造 $H: \theta \in \{\theta_1, \cdots, \theta_m\}$ v.s. $K: \theta = \theta_{m+1}$ 的MPT，关键是找到 $k_i \geq 0, i = 1, \cdots, m$。进而可以用于构造下面定理所述的双边检验的UMPT。

定理3.2.5 设 X 关于控制测度 ν 具有单参数指数型的*pdf*，即

$$p_\theta(x) = B(\theta) \exp\{Q(\theta) T(x)\} h(x), \quad \theta \in \Theta \subset \mathbb{R},$$

其中 $Q(\theta)$ 严增。则对

$$H: \theta \leq \theta_1 \ or \ \theta \geq \theta_2 \quad v.s. \quad K: \theta \in (\theta_1, \theta_2)$$

及水平 $\alpha \in (0,1)$，

(i) 存在形如

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & when \quad c_1 < T(x) < c_2, \\ \gamma_i, & when \quad T(x) = c_i, \ i = 1, 2, \\ 0, & otherwise. \end{cases} \tag{3.2.9}$$

的一个水平为 α 的*UMPT*，其中 c_1，c_2，γ_1，γ_2 满足

$$E_{\theta_i} \phi(X) = \alpha, \ i = 1, 2. \tag{3.2.10}$$

(ii) 对于任意满足 (3.2.10) 的检验函数 $\tilde{\phi}$，有势函数 $\beta_\phi(\theta) \leq \beta_{\tilde{\phi}}(\theta)$，$\forall \theta \leq \theta_1$ 或 $\theta \geq \theta_2$。

(iii) $\exists \theta_0 \in (\theta_1, \theta_2)$，$\phi$ 在 θ_0 处势最大，当 θ 偏离 θ_0 时，势函数 $\beta_\phi(\theta)$ 减小。除非存在 t_1, t_2，使得 $P_\theta(T(x) = t_1) + P_\theta(T(x) = t_2) = 1, \forall \theta$。

§3.2.3 无偏检验(Unbiased Test)

UMPT 不常有，所以通常需要考虑在满足一定限制条件的检验中寻找UMPT。无偏性是一种恰当的限制。

一、无偏性

定义3.2.3 对于检验问题 $H:\theta\in\Theta_H$ v.s. $K:\theta\in\Theta_K$，及显著性水平 $\alpha\in[0,1]$，若检验 ϕ 的势函数 $\beta_\phi(\theta)$ 满足

$$\begin{cases}\beta_\phi(\theta)\le\alpha, & \forall\theta\in\Theta_H,\\ \beta_\phi(\theta)\ge\alpha, & \forall\theta\in\Theta_K,\end{cases}$$

则称 ϕ 是水平为 α 的无偏检验(UT)。若 ϕ^* 是所有UT 中的UMPT，则称 ϕ^* 是一致最优势无偏检验(UMPUT)。

注：

1) 无偏性的直观含义：正确拒绝原假设的概率总不小于错误拒绝原假设的概率。

2) 在某种损失下，该无偏性可与风险无偏的概念联系起来。

例： 设 $X\sim N(\theta,1)$，检验$H:\theta=0$ v.s. $K:\theta\neq0$。

显然，$\phi_1(x)=I_{(x>u_{1-\alpha})}$ 是一个水平为 α 的检验。它在 $\{\theta:\ \theta>0\}$ 上势一致最优，但对于 $\theta<0$, $\beta_{\phi_1}(\theta)<\alpha$。

同样，$\phi_2(x)=I_{(x<u_\alpha)}$ 也是一个水平为 α 的检验。它在 $\{\theta:\ \theta<0\}$ 上势一致最优，但对于 $\theta>0$, $\beta_{\phi_2}(\theta)<\alpha$。因此，该检验问题不存在UMPT。

再看检验 $\phi(x)=I_{(|x|>u_{1-\alpha/2})}$。容易验证，它是一个水平为 α 的无偏检验。虽然在 $\{\theta:\ \theta>0\}$ 上它的势不如 $\phi_1(x)$，在 $\{\theta:\ \theta<0\}$ 上势不如 $\phi_2(x)$，但是它同时照顾了 $\{\theta:\ \theta>0\}$ 与 $\{\theta:\ \theta<0\}$ 处的势。而且，还可以验证，它是UMPUT。

3) 若 ϕ 是UMPT，则 ϕ 必是无偏检验，而且必是UMPUT。

4) 很多问题中，UMPUT存在，但UMPT 不存在。例如：双边检验、多参数情况下的单个参数的单边、双边检验等。

若 ϕ 是水平为 α 的UT，势函数 $\beta_\phi(\theta)$ 是 θ 的连续函数，且 Θ_H 与 Θ_K 的公共边界 ω 非空，则必有 $\beta_\phi(\theta) = \alpha,\ \forall\theta \in \omega$。一般将 ω 包含在 Θ_H 中。

定义3.2.4 若检验 ϕ 的势函数 $\beta_\phi(\theta)$ 在 $\theta \in \omega \subset \Theta$ 上保持不变，则称 ϕ 在ω 上是相似的。若 ω 是 Θ_H 与 Θ_K 的公共边界，则称 ϕ 是边界相似的(Similar on the boundary)。

引理3.2.1 *设 $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ 使任一检验的势函数连续，ω 是 Θ_H 与 Θ_K 的公共边界。若 ϕ_0 是 $\{\phi:\ \beta_\phi(\theta) = \alpha,\ \forall\theta \in \omega\}$ 中的UMPT，且它是水平为 α 的检验，则 ϕ_0 是UMPUT。*

二、单参数指数族的UMPUT

对于单参数指数族

$$p_\theta(x) = B(\theta)\exp\{\theta T(x)\}h(x),\ \theta \in \Theta \subset \mathbb{R},$$

双边检验问题

(a) $H:\ \theta \in [\theta_1, \theta_2]$ v.s. $K:\ \theta \bar{\in} [\theta_1, \theta_2]$,

(b) $H:\ \theta = \theta_0$ v.s. $K:\ \theta \neq \theta_0$

都不存在UMPT，但都有UMPUT。

定理3.2.6 *若检验ϕ 满足*

$$\beta_\phi(\theta_i) = \alpha,\ i = 1, 2, \tag{3.2.11}$$

且具有形式

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & when\quad T(x) < c_1\ or\ T(x) > c_2\ (c_1 < c_2), \\ r_i, & when\quad T(x) = c_i, i = 1, 2, \\ 0, & when\quad c_1 < T(x) < c_2, \end{cases} \tag{3.2.12}$$

则ϕ 是问题(a) 的水平为$\alpha(\in (0,1))$ 的UMPUT。

证明思路：1° 任取 $\theta_3 \bar{\in} [\theta_1, \theta_2]$，考虑 $H': \theta \in \{\theta_1, \theta_2\}$ v.s. $K': \theta = \theta_3$。

由定理 3.2.4知，若存在常数k_1, k_2（可能依赖于θ_3），使

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{when}\quad p_{\theta_3}(x) > k_1 p_{\theta_1}(x) + k_2 p_{\theta_2}(x), \\ 0, & \text{when}\quad p_{\theta_3}(x) < k_1 p_{\theta_1}(x) + k_2 p_{\theta_2}(x). \end{cases} \tag{3.2.13}$$

且 ϕ 满足 (3.2.11)，则在满足 (3.2.11) 的 H' v.s. K' 的检验中，ϕ 是MPT。

由 θ_3 的任意性及 ϕ 与 θ_3 无关知，ϕ 是 H' v.s. K 的边界相似检验中的UMPT。

2° 若再证得 ϕ 是 H v.s. K 的水平为 α 的检验，则 ϕ 是 H v.s. K 的水平为 α 的UT。(why?)

3° 对于指数族，任意检验函数的势函数都连续，因此，任意UT 必边界相似，于是证得 ϕ 是 H v.s. K 的水平为 α 的UMPUT。

证明. 1. 往证满足 (3.2.12)的检验具有形式 (3.2.13)。

对于 $\forall\theta_3\bar{\in}[\theta_1,\theta_2]$（不妨先设 $\theta_3>\theta_2$），考虑 k_1,k_2 的方程组

$$\begin{cases} B(\theta_3)e^{\theta_3 c_1} = k_1 B(\theta_1)e^{\theta_1 c_1} + k_2 B(\theta_2)e^{\theta_2 c_1}, \\ B(\theta_3)e^{\theta_3 c_2} = k_1 B(\theta_1)e^{\theta_1 c_2} + k_2 B(\theta_2)e^{\theta_2 c_2}. \end{cases}$$

系数行列式为

$$\begin{vmatrix} B(\theta_1)e^{\theta_1 c_1} & B(\theta_2)e^{\theta_2 c_1} \\ B(\theta_1)e^{\theta_1 c_2} & B(\theta_2)e^{\theta_2 c_2} \end{vmatrix} = B(\theta_1)B(\theta_2)[e^{\theta_1 c_1+\theta_2 c_2} - e^{\theta_1 c_2+\theta_2 c_1}].$$

因为 $(\theta_1 c_1+\theta_2 c_2)-(\theta_1 c_2+\theta_2 c_1)=(\theta_2-\theta_1)(c_2-c_1)>0$，所以 k_1,k_2 有唯一解，对于 $\forall\theta_3$。

记

$$H(t) = B(\theta_3)e^{(\theta_3-\theta_2)t} - k_1 B(\theta_1)e^{(\theta_1-\theta_2)t} - k_2 B(\theta_2),$$

则 $H(t)$ 关于 t 严凸，且 $H(c_1)=H(c_2)=0$。所以，

$$\begin{array}{lll} H(t)<0, & \text{when} & c_1<t<c_2; \\ H(t)>0, & \text{when} & t>c_2 \text{ or } t<c_1. \end{array}$$

故 ϕ 满足 (3.2.13)。

又易证：$k_1<0$，$k_2>0$（不全为正）。故由定理 3.2.4知，ϕ 只是满足 (3.2.11)的检验中最优的一个。

因为c_1,c_2,r_1,r_2 与 θ_3 无关，故 ϕ 是H' v.s. K 的边界相似检验中的UMPT。

2. 再证 $\beta_\phi(\theta)\le\alpha,\ \forall\theta\in[\theta_1,\theta_2]$。

任取 $\theta_3\in[\theta_1,\theta_2]$，考虑 $H'':\theta\in\{\theta_1,\theta_2\}$ v.s. $K'':\theta=\theta_3$。

取

$$\phi^*(x) = 1 - \phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{when} \quad c_1 < T(x) < c_2, \\ \gamma_i^*, & \text{when} \quad T(x) = c_i, i = 1, 2, \\ 0, & \text{when} \quad T(x) < c_1 \text{ or } T(x) > c_2, \end{cases}$$

再由1.中的方法可证，$\phi^*(x)$ 也具有 (3.2.13) 的形式，故 ϕ^* 是 H'' v.s. K'' 的水平为 $1-\alpha$ 的MPT。且有$E_{\theta_i}\phi^* = E_{\theta_i}(1-\phi) = 1-\alpha, i = 1, 2$; $E_{\theta_3}\phi^* \geq 1-\alpha \Rightarrow E_{\theta_3}\phi \leq \alpha$。

因此，ϕ 是H v.s. K 的水平为 α 的无偏检验。

由指数族的性质知，任一检验 $\tilde{\phi}$，$\beta_{\tilde{\phi}}(\theta)$ 关于 θ 连续。因此由引理 3.2.1知，ϕ 是 α-UMPUT。 □

定理3.2.7 *若检验ϕ 满足*

$$E_{\theta_0}\phi(X) = \alpha, \tag{3.2.14}$$

$$E_{\theta_0}[T(X)\phi(X)] = \alpha E_{\theta_0}T(X), \tag{3.2.15}$$

且具有形式 (3.2.12)*，则ϕ 是问题(b)的水平为α 的UMPUT*。

证明. 1° 往证：任一UT ϕ 必满足 (3.2.14)，(3.2.15)。

由指数族性质知，$\forall\theta$, $\beta_\phi(\theta)$ 必关于θ 可微。若ϕ 是(b) 的水平为α 的UT，则

(a) 由UT 的定义即知，ϕ 满足 (3.2.14)。

(b) θ_0 是$\beta_\phi(\theta)$ 的极小值点。故

$$\frac{d}{d\theta}\beta_\phi(\theta)\bigg|_{\theta=\theta_0} = 0. \tag{3.2.16}$$

而

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}\beta_\phi(\theta) &= \int_{\mathscr{X}} \frac{d}{d\theta}\left[\phi(x)B(\theta)e^{\theta T(x)} \cdot h(x)\right] d\nu(x) \\ &= \frac{B'(\theta)}{B(\theta)}E_\theta\phi(X) + E_\theta[T(X)\phi(X)], \end{aligned}$$

$$\text{又} \quad E_\theta T(X) = -\frac{B'(\theta)}{B(\theta)}, \; (\text{取 } \phi \equiv \alpha \text{ 即可得}).$$

$$\therefore \quad \frac{d}{d\theta}\beta_\phi(\theta) = E_\theta[T(X)\phi(X)] - E_\theta T(X)E_\theta\phi(X).$$

由 (3.2.16)及 (3.2.14)即得 (3.2.15)。

2° 任取$\theta_1 \neq \theta_0$，考虑$H': \ \theta = \theta_0$ v.s. $K': \ \theta = \theta_1$。取

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= B(\theta_0)e^{\theta_0 T(x)}h(x), \quad \alpha_1 = \alpha, \\
f_2(x) &= B(\theta_0)e^{\theta_0 T(x)}T(x)h(x), \quad \alpha_2 = \alpha E_{\theta_0}T(X), \\
f_3(x) &= B(\theta_1)e^{\theta_1 T(x)}h(x).
\end{aligned}$$

由定理 3.2.4知，若$\exists\phi^*$ 满足

(a) $\phi^* \in \mathscr{C} = \{\phi$ 是检验函数：$\int_{\mathscr{X}} \phi(x)f_i(x)d\nu(x) = \alpha_i, \ i = 1, 2\}$；

(b) $\exists k_1, k_2$，使ϕ^* 具有形式：

$$\phi^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{when} \quad f_3(x) > k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x), \\ 0, & \text{when} \quad f_3(x) < k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x). \end{cases} \tag{3.2.17}$$

则ϕ^* 最大化$\int_{\mathscr{X}} \phi(x)f_3(x)d\nu(x), \ \forall \phi \in \mathscr{C}$。

再证：(3.2.12)中的ϕ 满足 (3.2.17)。考虑方程组

$$\begin{cases} B(\theta_1)e^{\theta_1 c_1} = B(\theta_0)e^{\theta_0 c_1}(k_1 + c_1 k_2), \\ B(\theta_1)e^{\theta_1 c_2} = B(\theta_0)e^{\theta_0 c_2}(k_1 + c_2 k_2). \end{cases}$$

系数行列式$\propto \begin{vmatrix} 1 & c_1 \\ 1 & c_2 \end{vmatrix} = c_2 - c_1 > 0$，故$k_1, k_2$ 有唯一解。记

$$H(t) = \frac{B(\theta_1)}{B(\theta_0)} e^{(\theta_1 - \theta_0)t},$$

当$t = c_i, \ i = 1, 2$ 时，$H(t) = k_1 + k_2 t$，又$e^{(\theta_1 - \theta_0)t}$ 严凸，所以

$$\begin{aligned}
&\text{当 } t \in (c_1, c_2)\text{时}, \ H(t) < k_1 + k_2 t; \\
&\text{当 } t \bar{\in} [c_1, c_2]\text{时}, \ H(t) > k_1 + k_2 t.
\end{aligned}$$

因此，(3.2.12)中的ϕ 满足 (3.2.17)。

□

注：

1. 定理 3.2.7中，若在$\theta = \theta_0$ 处，T 的分布关于δ_0 对称，则UMPUT 为

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{when} \quad |T(x) - \delta_0| > c, \\ \gamma, & \text{when} \quad |T(x) - \delta_0| = c, \\ 0, & \text{when} \quad |T(x) - \delta_0| < c. \end{cases}$$

其中(c, γ) 由$E_{\theta_0}\phi(X) = \alpha$ 决定。

这里，只需验证$E_{\theta_0}[\phi(X)T(X)]) = \alpha E_{\theta_0}T(X)$。(因为$E_{\theta_0}[(T(X) - \delta_0)\phi(X)] = 0$)。)

2. 定理 3.2.6， 3.2.7中，若$\theta \to Q(\theta)$，$Q(\theta)$ 可微，严增，则结论依然成立。

3. $\forall \alpha \in (0,1)$，满足 (3.2.11)， (3.2.12)或者 (3.2.12)， (3.2.14)， (3.2.15) 的ϕ是否存在？（必存在，由定理 3.2.4(iii)可证。）

   也可以说明：满足 (3.2.11)形为 (3.2.12)的ϕ 中的$c_i, \gamma_i, i = 1, 2$有解；满足 (3.2.14)、(3.2.15) 形为 (3.2.12)的ϕ 中的$c_i, \gamma_i, i = 1, 2$ 有解。

例3.2.8 1. $X_i \overset{iid}{\sim} N(\theta, \sigma^2)$，$\sigma^2$已知，检验(a),(b)。$T(x) = \sum_{i=1}^n x_i$。

(a) $\phi(x) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^n x_i \le c_1 \text{ 或 } \sum_{i=1}^n x_i \ge c_2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ 其中c_1, c_2 满足：

$$\begin{cases} \Phi\left(\dfrac{c_2 - n\theta_1}{\sqrt{n}\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{c_1 - n\theta_1}{\sqrt{n}\sigma}\right) & = 1 - \alpha, \\ \Phi\left(\dfrac{c_2 - n\theta_2}{\sqrt{n}\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{c_1 - n\theta_2}{\sqrt{n}\sigma}\right) & = 1 - \alpha. \end{cases}$$

(b) $\phi(x) = I_{(\sqrt{n}|\bar{x} - \theta_0| \ge \sigma \cdot u_{1-\alpha/2})}$。

2. $X_i \overset{iid}{\sim} N(a, \theta^2)$，$a$ 已知，检验(a),(b)。

3. $X_i \overset{iid}{\sim} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} I_{(x>0)}, B(1, \theta), Poisson(\theta)$，检验(a),(b)。

§3.2.4 多参数指数族的UMPUT

很多场合，待检验的假设是针对单个参数的，但随机观测的分布却还依赖于其他一些讨厌参数(nuisance parameters)。此时即使对最简单的假设检验问题也很难找到UMPT或者UMPUT。对于指数族，这类检验问题的UMPUT 往往还是存在的，而且仍然可以从相似检验中找到。

设 X 的模型为$(\mathscr{X}, \mathscr{B}_X, \mathscr{P} = \{P_\lambda : \lambda = (\theta, \varphi), \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}, \varphi \in M\})$。考虑如下一些有关参数 θ 的假设检验问题：

$$\begin{array}{lll} H_1 : \theta = \theta_0 & \text{v.s.} & K_1 : \theta = \theta_1 \\ H_2 : \theta \le \theta_0 & \text{v.s.} & K_2 : \theta > \theta_0 \\ H_3 : \theta \ge \theta_0 & \text{v.s.} & K_3 : \theta < \theta_0 \\ H_4 : \theta = \theta_0 & \text{v.s.} & K_4 : \theta \ne \theta_1 \\ H_5 : \theta \in [\theta_0, \theta_1] & \text{v.s.} & K_5 : \theta \notin [\theta_0, \theta_1] \end{array}$$

此时 φ 就是讨厌参数。一般情况下，即使对最简单的假设检验问题 H_1 v.s. K_1，也很难找到UMPT或者UMPUT。

若存在统计量 $T = T(X)$，它对于每一个 $\theta \in \Theta$ 形成的分布子族

$$\mathscr{P}_\theta = \{P_\lambda : \lambda = (\theta, \varphi), \varphi \in M\}$$

都是充分统计量，那么给定 $T = t$ 的条件下，对于每一个 $\mathscr{P}_\theta$ 而言，X 的条件分布都与讨厌参数 φ 无关，$X|T = t$ 的条件分布只依赖于参数θ。因此可以设想根据 $X|T = t$ 的条件分布族 $\{Q_t(x;\theta) : \theta \in \Theta\}$ 去构造检验，寻找上述问题的UMP 相似检验。

记 $\omega_j = \{(\theta_j, \varphi) : \varphi \in \mathscr{M}\}, j = 0, 1$。对于 $H_1 : \theta = \theta_0$ v.s. $K_1 : \theta = \theta_1$，先在给定 $T = t$ 条件下考虑

$$\tilde{H}_1 : X|T = t \sim Q_t(x;\theta_0) \quad \text{v.s.} \quad \tilde{K}_1 : X|T = t \sim Q_t(x;\theta_1).$$

因为 $\tilde{H}_1$ 与 $\tilde{K}_1$ 都是简单假设，故由Neyman-Pearson 引理易得水平为 α 的MPT $\phi^*(x;t)$，它在所有满足

$$\int_{\mathscr{X}} \phi(x) dQ_t(x;\theta_0) = E_\lambda[\phi(X)|T = t] \le \alpha, \quad \forall \lambda \in \omega_0 \tag{3.2.18}$$

的检验函数 $\phi(x)$ 中使得下式

$$\int_{\mathscr{X}} \phi(x) dQ_t(x;\theta_1) = E_\lambda[\phi(X)|T = t], \quad \forall \lambda \in \omega_1$$

一致达到最大的一个。如果对每一个 t 都存在这样的 $\phi^*(x;t)$，那么 $\phi^*(x;T(x))$ 是否可能是 H_1 v.s. K_1 的水平为 α 的UMPT 呢？

虽然

$$E_\lambda[\phi^*(X;T(X))] = E_\lambda[E_\lambda(\phi^*(X;T(X))|T)] \leq \alpha, \quad \forall\lambda \in \omega_0,$$

但是，若检验函数 $\phi(x)$ 满足

$$E_\lambda[\phi(X)] \leq \alpha, \quad \forall\lambda \in \omega_0 \tag{3.2.19}$$

那么是否一定有

$$E_\lambda[\phi(X)] \leq E_\lambda[\phi^*(X;T(X))], \quad \forall\lambda \in \omega_1? \tag{3.2.20}$$

这不一定！只有当满足 (3.2.19) 的 $\phi(x)$ 必满足 (3.2.18) 时，才有 (3.2.20)。这个条件很难保证，所以才产生了Neyman结构的思路。当 T 对于 $\mathscr{P}_{\theta_0}$ 充分且有界完备时，任意满足

$$E_\lambda[\phi(X)] = \alpha, \quad \forall\lambda \in \omega_0$$

的检验函数 $\phi(x)$ 必满足

$$E_\lambda[\phi(X)|T=t] = \alpha \quad \text{a.s.}P_\lambda^T,\ \forall\lambda \in \omega_0.$$

那么，ϕ^* 必定是所有 ω_0 相似检验中的UMPT。

定义3.2.5 设T 是$\{P_\lambda : \lambda \in \omega\}$ 的充分统计量，若检验ϕ 满足

$$E_\lambda(\phi(X)|T=t) = \alpha\ a.e.\ P_\lambda,\ \lambda \in \omega,$$

则称ϕ 关于(T,ω) 具有Neyman结构（条件相似）。

定理3.2.8 *(1) ϕ 关于(T,ω) 具有Neyman 结构，则ϕ 关于ω 相似。*

(2) T 关于$\{P_\lambda : \lambda \in \omega\}$ 是充分的，则所有在ω 上相似的检验具有Neyman 结构的充要条件是T 有界完备。

证明. (1) 显然。

(2) 证充分性。设$\phi(x)$ 关于ω 相似，即

$$E_\lambda\phi(X) = \alpha, \quad \forall\lambda \in \omega.$$

则

$$E_\lambda\{E_\lambda[\phi(X)|T]-\alpha\}=0,\quad \forall\lambda\in\omega.$$

记$\psi(t)=E_\lambda[\phi(X)|T=t]$。显然$\psi(t)\in(0,1)$, 且与$\lambda$ 无关。又因为T 有界完备，因此

$$\psi(t)=\alpha\quad a.s.\quad P_\lambda^T,\ \forall\lambda\in\omega.$$

即

$$E_\lambda[\phi(X)|T=t]=\alpha,\quad a.s.\quad P_\lambda,\ \forall\lambda\in\omega.$$

故ϕ 关于(T,ω) 具有Neyman结构。

必要性的证明留作练习。

□

什么样的分布族 $\mathscr{P}=\{P_\lambda:\lambda=(\theta,\varphi),\theta\in\Theta\subset\mathbb{R},\varphi\in M\})$ 同时满足前面谈到的下列条件呢？

1) 存在统计量 T，它对于每一个子族 $\mathscr{P}_\theta$ 都充分；

2) T 对于边界子族 $\mathscr{P}_{\theta_0}$ 有界完备；

3) 任意检验函数 $\phi(x)$ 其势函数 $\beta_\phi(\lambda)$ 都连续，即 $\{\phi:\phi\text{是UT}\}\subset\{\phi:\phi\text{是边界相似的检验}\}$。

指数族满足这些条件。

设 $\mathscr{P}$ 关于 σ-有限测度 ν 可控，

$$p_\lambda(x)=dP_\lambda(x)/d\nu(x)=A(\theta,\varphi)\exp\{\theta\cdot U(x)+\varphi^\tau\cdot T(x)\},\tag{3.2.21}$$

其中θ 是一维的目标参数，φ 是k 维的讨厌参数，$k\geq 1$，$\lambda=(\theta,\varphi^\tau)\in\Lambda\subset\mathbb{R}^{k+1}$，$\Lambda$ 有内点。

考虑下列检验问题

$$\begin{array}{llll}
H_1: \theta\leq\theta_0 & \text{v.s.} & K_1: \theta>\theta_0\\
H_2: \theta\bar{\in}(\theta_1,\theta_2) & \text{v.s.} & K_2: \theta\in(\theta_1,\theta_2)\\
H_3: \theta\in[\theta_1,\theta_2] & \text{v.s.} & K_3: \theta\bar{\in}[\theta_1,\theta_2]\\
H_4: \theta=\theta_0 & \text{v.s.} & K_4: \theta\neq\theta_0
\end{array}$$

该指数族的性质：

1. (U,T) 是充分完备统计量，jpdf（关于μ）为

$$p_\lambda(u,t)=A(\theta,\varphi)\cdot\exp\{\theta\cdot u+\varphi^\tau\cdot t\}.$$

2. $U|T=t$ 的条件分布与φ 无关，条件pdf（关于$\mu_t(u)$）为

$$p_\theta^{U|T}(u)=A_t(\theta)\cdot\exp\{\theta\cdot u\}.$$

3. 对于任意给定的 θ'，T 是 $\{p_\lambda(\cdot):\ \lambda=(\theta',\varphi^\tau)\in\Lambda\}$ 的充分完备统计量。

上述四个检验问题的在边界

$$\omega_j=\{\lambda=(\theta_j,\varphi^\tau):\ \lambda\in\Lambda\},j=0,1,2$$

上相似的检验，均关于(T,ω_j) 具有Neyman 结构。故只须在固定$T=t$ 时，构造出条件相似的最优检验，即可获得最优相似检验。再由$\beta_\phi(\lambda)$ 的连续性可知，所得的最优相似检验也即UMPUT。

定理3.2.9 设X 具有指数型分布族 (3.2.21)，参数空间$\Lambda\in\mathbb{R}^{k+1}$，其内点集$\Lambda_0$ 非空。检验问题H_i $v.s.$ K_i, $i=1,\ldots,4$ 中的θ_j, $j=0,1,2$ 均满足：$\mathbb{R}^{k+1}$ 中的超平面$\theta=\theta_j$ 与Λ_0 有非空交集。则下列各个检验$\phi_i,i=1,\ldots,4$ 分别是H_i $v.s.$ K_i 的水平为α 的*UMPUT:*

1° $\phi_1(u,t)=\begin{cases}1, & u>c(t)\\ \gamma(t), & u=c(t)\\ 0, & u<c(t)\end{cases}$

其中$c(t),\gamma(t)$ 满足$E_{\theta_0}[\phi_1(U,T)|T=t]=\alpha$.

2° $\phi_2(u,t)=\begin{cases}1, & c_1(t)<u<c_2(t)\\ \gamma_i(t), & u=c_i(t),\ i=1,2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

其中$c_i(t),\gamma_i(t),i=1,2$ 满足$E_{\theta_i}[\phi_2(U,T)|T=t]=\alpha,i=1,2$。

3° $\phi_3(u,t)=\begin{cases}1, & u>c_2(t)\text{或}u<c_1(t)\\ \gamma_i(t), & u=c_i(t),\ i=1,2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

其中$c_i(t),\gamma_i(t),i=1,2$ 满足$E_{\theta_i}[\phi_3(U,T)|T=t]=\alpha,i=1,2$。

4° $\phi_4(u,t)$ 与ϕ_3 形式相同，其中$c_i(t),\gamma_i(t),i=1,2$ 满足

$$\begin{cases}E_{\theta_0}[\phi_4(U,T)|T=t]=\alpha,\\ E_{\theta_0}[U\cdot\phi_4(U,T)|T=t]=\alpha E_{\theta_0}[U|T=t].\end{cases}$$

证明思路：

- $E_\lambda\phi(U,T)=E_\lambda\{E_\theta[\phi(U,T)|T=t]\}$。在$T=t$ 时，$\phi(u,t)$ 是条件相似检验中的α-UMPT。
- $\beta_\phi(\lambda)$ 的连续性、θ 取定时T 的充分完备性可知：UT 必具有Neyman 结构。
- $\phi_i, i=1,\ldots,4$ 可测。

例3.2.9 $X\sim P(\lambda), Y\sim P(\mu)$，$X,Y$ 独立，比较λ,μ 的大小

解：jpdf 为

$$\begin{aligned} P(X=x,Y=y) &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{x!y!}\exp\{x\ln\lambda+y\ln\mu\} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{x!y!}\exp\{x\cdot\ln\frac{\lambda}{\mu}+(x+y)\ln\mu\}. \end{aligned}$$

记$\theta=\ln\frac{\lambda}{\mu}$，$\varphi=\ln\mu$，$U(x,y)=x$，$T(x,y)=x+y$。对于$H_i:$ v.s. K_i，$i=1,\cdots,4$，由条件分布$U|T=t$ 来求UMPUT。

$$\begin{aligned} P(U=u|T=t) &= \frac{P(U=u,T=t)}{P(T=t)}=\frac{P(U=u,Y=t-u)}{P(X+Y=t)} \\ &= \frac{\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{u!(t-u)!}\exp\{u\cdot\theta+t\cdot\varphi\}}{\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{t!}\exp\{t\cdot\ln(\mu+\lambda)\}} \\ &= \binom{t}{u}\exp\left\{u\cdot\ln\frac{\lambda}{\mu}+t\cdot\ln\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right\}, \end{aligned}$$

因此，$U|T=t\sim B\left(t,\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$。再由定理 3.2.9可得到具体的$\phi_i$。

例3.2.10 $X\sim B(m,p_1)$，$Y\sim B(n,p_2)$，X,Y 独立，比较p_1,p_2。记$q_i=1-p_i, i=1,2$。

解：jpdf 为

$$P(X=x,Y=y)=\binom{m}{x}\binom{n}{y}\cdot q_1^m q_2^n\exp\left\{x\cdot\ln\left(\frac{p_1}{q_1}\Big/\frac{p_2}{q_2}\right)+(x+y)\ln\frac{p_2}{q_2}\right\}.$$

记$\theta = \ln\left(\frac{p_1}{q_1}\Big/\frac{p_2}{q_2}\right)$，$U(x,y) = x$，$\varphi = \ln\frac{p_2}{q_2}$，$T(x,y) = x+y$。因为$\theta$ 关于p_1/p_2 严增，故比较p_1, p_2 可转化为检验H_i v.s. K_i。

当$p_1 = p_2$ 时，$U|T=t$ 的条件分布为

$$P(U=u|T=t) = \cdots = \frac{\binom{m}{u}\binom{n}{t-u}}{\binom{m+n}{t}}, \quad u = \max(0, t-n), 1, \ldots, \min(t,u),$$

即$U|T=t$ 服从超几何分布。但当$p_1 \neq p_2$ 时，$U|T=t$ 的条件分布复杂。

对于正态分布等一些连续型的指数族，直接用定理 3.2.9 求UMPUT 并不方便。若能找到$V = h(U,T)$ 满足:

1. 在$\theta = \theta_0, \theta_1, \theta_2$ 处，V 与T 独立;
2. V 在$T=t$ 时，关于U 单调。

则求UMPUT 只须涉及V 的分布，较为方便。

定理3.2.10 *对于定理 3.2.9中的分布族，若存在$V = h(U,T)$ 满足*

1. *在$\theta = \theta_0$ 处，V, T 独立，且对给定的t，V 关于U 严增，则H_1 v.s. K_1 的UMPUT存在，为*

$$\phi_1(V) = \begin{cases} 1, & \text{when} \quad V > c, \\ \delta, & \text{when} \quad V = c, \\ 0, & \text{when} \quad V < c. \end{cases}$$

   其中c, δ 不依赖于t，由$E_{\theta_0}\phi_1(V) = \alpha$ 决定。

2. *在$\theta = \theta_1, \theta_2$ 处，V, T 独立，且对给定的t，V 关于U 严增，则H_2 v.s. K_2 的UMPUT存在，为*

$$\phi_2(V) = \begin{cases} 1, & \text{when} \quad c_1 < V < c_2, \\ \delta_i, & \text{when} \quad V = c_i, \ i = 1, 2, \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

   其中c_i, δ_i 不依赖于t，由$E_{\theta_i}\phi_2(V) = \alpha$，$i = 1, 2$ 决定。

   对于H_3 v.s. K_3，UMPUT 为$\phi_3(V) = 1 - \phi_2(V)$，其中$c_i, \delta_i$ 由$E_{\theta_i}\phi_3(V) = \alpha$，$i = 1, 2$ 决定。

3. 在$\theta = \theta_0$ 处，V, T 独立，且V 是U 的线性函数，*i.e.* $V = a(t)U + b(t)$, $a(t) > 0$, $\forall t$，则H_4 *v.s.* K_4 的*UMPUT* ϕ_4 形如ϕ_3，其中c_i, δ_i 由

$$\begin{cases} E_{\theta_0}\phi_4(V) = \alpha, \\ E_{\theta_0}(V\phi_4(V)) = \alpha E_{\theta_0} V, \end{cases}$$

决定。

例3.2.11 X_i, $i = 1, \ldots n$ i.i.d. $N(\mu, \sigma^2)$，μ 为讨厌参数，欲检验$H: \ \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ v.s. $K: \ \sigma^2 > \sigma_0^2$。

解：jpdf 为

$$p_{(\mu,\sigma^2)}(x) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{\mu}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n x_i\right\}.$$

记$\theta = -\frac{1}{2\sigma^2}$，$\varphi = \frac{\mu}{\sigma^2}$，$U = \sum_{i=1}^n x_i^2$，$T = \sum_{i=1}^n x_i$。因为当$\theta$ 给定时，T 是充分、完备统计量，所以可由定理 3.2.9 或 3.2.10 求UMPUT。

取

$$V = \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right) = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = U - \left(\frac{T}{n}\right)^2,$$

其分布与μ 无关。因此在σ^2 给定时，V 与T 独立。同时，V 又是U 的线性函数，且关于U 严增，故可由定理 3.2.10 求得UMPUT。也就得到通常的χ^2 检验。

类似地，可求出关于参数μ 的t检验。对于两样本问题，可导出两均值的比较的t检验、两方差的比较F检验等常用结果。