第二章　点估计

§2.4 同变估计(Equivariant Estimator)

同变估计，也称为不变估计(Invariant Estimator)。有些统计问题形式上具有某种“对称性”的特点，根据“同变性原则”，就要求估计量或决策满足一定的限制条件。与无偏性类似，同变性也是缩小搜索最优估计或决策范围的一种方法，但是同变性与无偏性的适用场合不同。

§2.4.1 位置参数的同变估计

设r.vec. $X = (X_1, \ldots, X_n)$ 关于Lebesgue 测度有jpdf 族

$$\mathscr{P} = \{f(x_1 - \xi, \ldots, x_n - \xi):\ \xi \in (-\infty, \infty),\ f(\cdot)\text{已知}\}.$$

则$\mathscr{P}$ 是一个单参数位置族，ξ 为未知的位置参数。考虑ξ 的估计。

若对X 作平移变换

$$X' = g_c(X) = (X_1 + c, \cdots, X_n + c), \tag{2.4.1}$$

其中$c \in (-\infty, \infty)$，记此变换为g_c，则X' 的jpdf 为

$$f((x_1' - c) - \xi, \ldots, (x_n' - c) - \xi) = f(x_1' - \xi', \ldots, x_n' - \xi'),$$

其中

$$\xi' = \xi + c. \tag{2.4.2}$$

显然，由$\xi \in \mathbb{R}$ 知$\xi' \in \mathbb{R}$，X' 的jpdf 族仍为$\mathscr{P}$。因此，我们称$\mathscr{P}$ 关于平移变换g_c 不变；这对$\forall c \in \mathbb{R}$ 都成立。

由于分布族$\mathscr{P}$ 关于任意平移变换不变，用X' 估计ξ' 与用X 估计ξ 两个问题完全对称，因此考虑使用满足下列条件的估计量是很自然的：

$$\delta(X') = \delta(X_1 + c, \cdots, X_n + c) = \delta(X) + c,\ \forall c \in (-\infty, \infty). \tag{2.4.3}$$

称满足(2.4.3) 的估计量δ 为位置参数ξ 的同变估计量。

将估计参数ξ 作为一个统计决策问题来考虑。取行动空间$\mathbb{A} = \mathbb{R}$ 是自然的。如果损失函数满足如下不变性：对$\forall c$，"以a 估计ξ"与"以$a' = a + c$ 估计$\xi' = \xi + c$"损失相同，即

$$L(\xi', a') = L(\xi + c, a + c) = L(\xi, a),\ \forall c \in (-\infty, \infty).$$

这等价于

$$L(\xi, a) = \rho(a - \xi),$$

其中$\rho(\cdot)$ 是$(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ 上的非负实函数。这就形成了如下所述的求解同变决策的问题。

位移不变估计问题： 对$\forall c \in (-\infty, \infty)$ 分布族$\mathscr{P}$ 在变换(2.4.1), (2.4.2) 下不变，行动空间为$\mathbb{A} = \mathbb{R}$，损失函数形为$\rho(a - \xi)$，要求在满足(2.4.3) 的所有同变估计中，求解位置参数ξ 的最优估计。

可用与寻找UMVUE 类似的思路去寻找此位移不变估计问题的解：

(1) 表示出所有同变估计；

(2) 从中找出风险一致最小的。

定理2.4.1 (Shao J. p251/prop 4.3) *对于位移不变估计问题，*

(1) 若δ_0 是ξ 的同变估计，则δ 是ξ 的同变估计的充分必要条件为：δ 满足

$$\delta(x) = \delta_0(x) + u(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

其中$u(x)$ 满足：$u(x + c) = u(x),\ \forall c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$。

(2) 满足(1)中条件的$u(X)$ $\Longleftrightarrow$

$$\begin{array}{ll} u(x) = const, & if \quad n = 1; \\ u(x) \text{ 是 } x_i - x_n, i = 1, \ldots, n-1 \text{的函数}, & if \quad n > 1. \end{array}$$

(3) δ 是ξ 的同变估计$\Longleftrightarrow \delta(x) = \delta_0(x) - v(y)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$，其中$y = (x_1 - x_n, \ldots, x_{n-1} - x_n)$，$v(\cdot)$ 是$(\mathbb{R}^{n-1}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^{n-1}})$ 上的实函数。

证明. *(1)*“$\Leftarrow$”. $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall c \in \mathbb{R}$,

$$\delta(x+c) = \delta_0(x+c) + u(x+c) = \delta_0(x) + c + u(x) = \delta(x) + c,$$

故δ 是同变估计。其余结论易证。 □

定理2.4.2 (Shao J. p252/prop 4.4) 若δ 为位移不变估计问题的同变估计量，则$Var_\xi(\delta)$, $bias_\xi(\delta)$, $R(\xi, \delta)$ 都与ξ 无关。

证明.

$$\begin{aligned}
bias_\xi(\delta) &= E_\xi\delta(X) - \xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x) f(x-\xi) d\lambda(x) - \xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x'+\xi) f(x') d\lambda(x') - \xi \quad \text{(积分变换)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x') \cdot f(x') d\lambda(x') \quad \text{(同变性)} \\
&= E_{\xi=0}\delta(X).
\end{aligned}$$

其余两项类似可证。 □

定理2.4.2 说明，位移不变估计问题中同变估计的风险函数是常数，寻找风险一致最小的同变估计难度大大降低，而且往往存在、唯一。

定理2.4.3 (Shao J. p253/Th4.5(i)) 设$X \sim \mathscr{P}$, $Y = (Y_1, \ldots, Y_n), Y_i = X_i - X_n, i = 1, \ldots, n-1$。对于位移不变估计问题，若存在$\xi$ 的同变估计δ_0，$R(0, \delta_0) < \infty$，且对$\forall y$，$\exists v = v^*(y)$ 最小化

$$E_0[\rho(\delta_0(X) - v)|Y = y],$$

则$\delta^*(X) = \delta_0(X) - v^*(Y)$ 为ξ 的最优同变估计*(MREE)*。

证明. 由定理 2.4.1知，位置参数的任一同变估计δ 可表示为

$$\delta(X) = \delta_0(X) - v(Y),$$

且

$$
\begin{aligned}
R(\xi,\delta) &= E_\xi\ \rho[\delta_0(X)-v(Y)-\xi] \\
&= E_{\xi=0}\ \rho[\delta_0(X)-v(Y)] \\
&= \int_{\mathscr{Y}} E_{\xi=0}\left\{\rho[\delta_0(X)-v(y)]|Y=y\right\} dP_0^Y(y).
\end{aligned}
$$

$\because \quad R_\xi(\delta_0)<\infty,$

$\therefore \quad E_0\left\{\rho[\delta_0(X)]|Y=y\right\}<\infty\ a.s.\ P_0^Y.$

因此对固定的y，最小化$E_0\left\{\rho[\delta_0(X)-v]|Y=y\right\}$ 是可行的$a.s.\ P_0^Y$。 □

由定理2.4.3可知，求解位置参数的最优同变估计，可归结为求$E\rho(X-a)$ 的极小值问题。由讲义§2.1.4 中定理2.1.7及推论2.1.1，可获得凸损失下MREE的如下一些结果。

推论2.4.1 (Shao J. p253/th4.5(ii, iii)) *在定理 2.4.3条件下，*

(i) 若ρ 凸、非单调，则ξ 的*MREE*存在；若ρ 严凸、非单调，则*MREE*唯一。

(ii) 若对于P_0 有$\delta_0(X)$ 与Y 相互独立，且当$v=v^*$ 时$E_0[\rho(\delta_0(X)-v)]$ 达到最小，则$\delta^*(X)=\delta_0(X)-v^*$ 是ξ 的*MREE*；若ρ 是凸的偶函数，且对于P_0，$\delta_0(X)$ 的分布关于c 对称，则$v^*=c$。

证明. 由定理 2.4.3及讲义§2.1.4 中定理2.1.7及推论2.1.1即证。 □

推论2.4.2 *在定理 2.4.3的条件下，*

1. 若$\rho(a-\xi)=(a-\xi)^2$，则$v^*(y)=E_0[\delta_0(X)|Y=y]$;
2. 若$\rho(a-\xi)=|a-\xi|$，则$v^*(y)=Med_0[\delta_0(X)|Y=y]$;
3. (非凸情形) $0\le\rho(t)\le M$，$\forall t$；$\rho(t)\to M$ 当$t\to\infty$；则ξ 的*MREE*存在。

例2.4.1 ($n=1$时位置参数的同变估计) 由定理 2.4.1知，$n=1$时，$U(X)$ 是常数，而X 本身就是位置参数的同变估计，所有同变估计形为$X-v$, $\forall v\in(-\infty,\infty)$。求MREE 即求$v^*=\mathrm{argmin}_{v\in\mathbb{R}}E_0\rho(X-v)$。

1. $\rho=(a-\xi)^2$，MREE $\quad X-E_0(X)$;

2. $\rho=|a-\xi|$，MREE $\quad X-Med_0(X)$;

3. $\rho=\begin{cases}1, & |a-\xi|>k\\ 0, & |a-\xi|\le k\end{cases}$，MREE对应的$v$ 使$P_0(|X-v|\le k)$最大化。

例2.4.2 (Shao J. p254/Example 4.11) 设$X_1,\ldots,X_n$ i.i.d. $N(\xi,\sigma^2)$，σ^2已知。$\delta_0=\bar{X}$ 为ξ 同变估计，且$\bar{X}$ 充分完备。Y 的分布与ξ 无关。由Basu定理知，$\bar{X}$ 与Y 相互独立，对$\forall\xi$。由推论2.4.1(ii) 知，若

$$v^*=\operatorname{argmin}_{v\in\mathbb{R}}E_0\rho(\bar{X}-v),$$

则$\bar{X}-v^*$ 是ξ 的MREE。又因当$\xi=0$ 时$\bar{X}\sim N(0,\frac{1}{n}\sigma^2)$，分布关于0 对称，若$\rho(\cdot)$ 是偶函数，则$v^*=E_0\bar{X}=0$，因此$\bar{X}$ 为MREE。

定理2.4.4 (Pitman 估计，Shao J. p253/Th4.6) *在定理 2.4.3条件下，若*$L(\xi,a)=(a-\xi)^2$*，则*ξ *的MREE* δ^* *满足下式：*

$$\delta^*(x)=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}uf(x_1-u,\ldots,x_n-u)du}{\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1-u,\ldots,x_n-u)du},\quad \forall x\in\mathbb{R}^n.$$

且该MREE 是唯一的、无偏的。

证明. 显然，X_n 是ξ 的一个同变估计，若$R(\xi,X_n)<\infty$，则由上述两个推论知，$X_n-E_0(X_n|Y)$ 是ξ 唯一的MREE。如果ξ 存在一个风险有限的同变估计，则可证明$R(\xi,X_n)<\infty$(why?)。因为$(X_1,\ldots,X_n)\overset{1:1}{\longleftrightarrow}(Y_1,\ldots,Y_n)$，其中$Y_i=X_i-X_n,\quad i=1,\ldots,n-1$，$Y_n=X_n$，故$(Y,Y_n)$ 的jpdf 为

$$p(y_1,\ldots,y_n)=f(y_1+y_n,\ldots,y_{n-1}+y_n,y_n),$$

$Y_n|Y_1=y_1,\ldots,Y_{n-1}=y_{n-1}$ 的条件pdf 为

$$\frac{f(y_1+y_n,\ldots,y_{n-1}+y_n,y_n)}{\int_{-\infty}^{\infty}f(y_1+t,\ldots,y_{n-1}+t,t)dt},\quad y_n\in\mathbb{R}.$$

因此，

$$\begin{aligned}
x_n-E_0[X_n|Y=y] &= x_n-E_0[Y_n|Y=y]\\
&= x_n-\int_{-\infty}^{\infty}t\frac{f(y_1+t,\ldots,y_{n-1}+t,t)}{\int_{-\infty}^{\infty}f(y_1+t,\ldots,y_{n-1}+t,t)dt}dt\\
&= \frac{\int_{-\infty}^{\infty}(x_n-t)f(y_1+t,\ldots,y_{n-1}+t,t)dt}{\int_{-\infty}^{\infty}f(y_1+t,\ldots,y_{n-1}+t,t)dt}\\
&\overset{u=x_n-t}{=} \frac{\int_{-\infty}^{\infty}uf(x_1-u,\ldots,x_n-u)du}{\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1-u,\ldots,x_n-u)du}.
\end{aligned}$$

唯一性由推论2.4.1可得，无偏性由定理2.4.2可得。 □

例2.4.3 (Shao J. p254/Example 4.13) 设$X_i, i = 1, \ldots, n$ i.i.d. $U(\xi - \frac{b}{2}, \xi + \frac{b}{2})$，其中$b$ 已知，ρ 凸、偶。求ξ 的MREE。

显然，

$$f(x_1 - \xi, \ldots, x_n - \xi) = \begin{cases} b^{-n}, & \text{if } \xi - \frac{b}{2} \leq x_{(1)} \leq x_{(n)} \leq \xi + \frac{b}{2}, \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

由定理2.4.4 知，平方损失下ξ 的MREE δ^* 满足：

$$\delta^*(x) = \int_{x_{(n)} - \frac{b}{2}}^{x_{(1)} + \frac{b}{2}} u du \left(\int_{x_{(n)} - \frac{b}{2}}^{x_{(1)} + \frac{b}{2}} du \right)^{-1} = \frac{1}{2}(x_{(1)} + x_{(n)}), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

易证，在ρ 凸、偶的情况下，$\delta^*(X) = \frac{1}{2}(X_{(1)} + X_{(n)})$ 均是ξ 的MREE （作练习）。

注：对于位移不变估计问题，

a) MREE常常存在，即使ρ 非凸；

b) 即使凸损失，MREE 也往往随损失函数变而变；

c) 无须考虑随机化估计；

d) 平方损失下Pitman 估计常常容许(只要$E_0|\delta^*|^3 < \infty$, Stein, 1959)，而UMVUE往往不容许；

e) UMVUE主要适用于指数族，而MREE不是；

f) 对于位置族，UMVUE常常不存在。

推论2.4.3 *对于位移不变估计问题，若取平方损失，则在定理2.4.3 条件下有：*

1. *若δ 是同变估计，偏倚$bias_\xi(\delta) = b$，则$\delta - b$ 是同变估计、无偏估计、风险小于$\delta(X)$。*

2. *MREE 存在、唯一且无偏。*

3. *若UMVUE 存在且为同变估计，则为MREE。*

§2.4.2 一般的不变估计问题

前面讨论了位置族中的不变估计问题及相应最优同变估计的求法。本节将讨论一般的不变估计问题。从统计决策角度看，估计问题的不变性主要体现在两个方面：

1. 对样本作某些变换，概率模型（分布族）保持不变；
2. 对变换前后形式对称的待估参数采用形式对称的值去估计时，损失不变。

严格定义一个不变估计问题（更一般地，不变决策问题），涉及到建立该统计决策问题的$(\mathscr{X},\Theta,\mathbb{A})$ 三个空间上的*变换群*的概念。

定义2.4.1 (分布族的不变性) 设X 的模型为$(\mathscr{X},\mathscr{B}_X,\mathscr{P}=\{P_\theta,\theta\in\Theta\})$。

i) 设g 是$\mathscr{X}\to\mathscr{X}$ 上的一一对应的可测变换，若对$\forall\theta\in\Theta$，$X'=gX$ 的分布仍是$\mathscr{P}$ 中的一员，设为$P_{\theta'}$，且当θ 遍历Θ时，θ' 亦遍历Θ，则称分布族$\mathscr{P}$ 在变换g 下不变；

ii) 设$\mathscr{C}$ 是$\mathscr{X}\to\mathscr{X}$ 上的一一对应的可测变换族，若对$\forall g\in\mathscr{C}$，i) 都成立，则称$\mathscr{P}$ 在变换族$\mathscr{C}$ 下不变。

通常研究某个变换族下的、而不是单个变换下的不变估计问题，因为若对估计所加的约束不够，往往得不到有用的结果。从数学角度考虑，往往要求所研究的变换族是一个*群*。

定义2.4.2 (群) 若非空集合G 满足下列四个条件：

(1) 在G 上定义了一个“乘法”运算且G 对此乘法运算封闭，i.e. $\forall a,b\in G$，存在唯一的$c\in G$，$\ni c=a\cdot b$；

(2) 该乘法满足结合律$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$；

(3) G 中存在“单位元”，记为e，满足$a\cdot e=e\cdot a=a,\forall a\in G$；

(4) $\forall a\in G$，存在逆元$a^{-1}\in G$，使$a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=e$。

则称G 关于该乘法构成一个*群*(group)。

基本性质：e 唯一；$\forall a, a^{-1}$ 唯一。

若G 是一个群，且$\forall a, b \in G$ 有$a \cdot b = b \cdot a$，则称G 为*交换群*(commutative group)。

定义在某个空间上的一些一一对应变换关于复合运算构成的群，常称为*变换群*(group of transformations).

例2.4.4 群的例子。

1. $\mathbb{R}$ 关于通常的加法构成群，单位元：0，逆元：$-a$；$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 关于通常的乘法构成群，单位元：1，逆元：$\frac{1}{a}$。这两个也都是交换群。
2. *位移变换群* $G = \{g_a : \ g_a(x) = x + a, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ a \in \mathbb{R}\}$。

   显然，$\forall g_a \in G$ 是$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 上的一一对应变换，G 上的复合运算为：

   $$g_{a_1} \cdot g_{a_2}(x) = g_{a_1}(g_{a_2}(x)) = g_{a_1}(x + a_2) = x + (a_1 + a_2) = g_{a_1+a_2}(x).$$

   容易验证，G关于复合运算封闭，满足结合律，存在单位元$g_0(x) = x$，对$\forall g_a \in G$ 存在逆元$g_{-a} = x - a$。因此，G 构成一个变换群。
3. *尺度变换群* $G = \{g_a : \ g_a(x) = a \cdot x, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ a \neq 0\}$。

   同样容易验证，$\forall g_a$ 是$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 上的一一对应变换，G 关于复合运算满足群的四个条件，因此G 也是一个变换群。
4. *仿射变换群* $G = \{g_{A,b} : \ g_{A,b}(x) = Ax + b, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ |A| \neq 0, \ b \in \mathbb{R}^n\}$。

   $\forall g_{A,b}$ 是$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 上的一一对应变换，G 关于复合运算

   $$g_{A_1,b_1} \cdot g_{A_2,b_2}(x) = g_{A_1A_2, A_1b_2+b_1}(x)$$

   构成一个变换群。

- 若$\mathscr{P}$ 在变换族$\mathscr{C}$ 下不变，则

  $$G(\mathscr{C}) = \{g_1^{\pm} \cdots g_i^{\pm} : \ g_i \in \mathscr{C}, \ i = 1, \ldots, m, 1 \leq m < \infty\}$$

  为由$\mathscr{C}$ 生成的一个群，且$\mathscr{P}$ 在$G(\mathscr{C})$ 下不变。

  证明. $\forall g, g_1 \in \mathscr{C}$，它们都是$\mathscr{X} \to \mathscr{X}$ 上一一对应的可测变换，容易验证：

(1) g^{-1} 也是$\mathscr{X} \to \mathscr{X}$ 上的一一对应变换，且$g^{-1}(\mathscr{B}_X) = \mathscr{B}_X = g(\mathscr{B}_X)$，亦可测；$g \cdot g_1$，$g^{-1} \cdot g_1$，$g \cdot g_1^{-1}$，$g^{-1} \cdot g_1^{-1}$ 都是一一对应的可测变换。

(2) $G(\mathscr{C})$ 关于复合运算封闭，满足群的四个条件，是一个群。

(3) 若$\mathscr{P}$ 关于g, g_1 不变，则$\mathscr{P}$ 关于$g^{-1}, g \cdot g_1$ 不变。

□

- 若$\mathscr{P}$ 关于变换g 不变，当$X \sim P_\theta$ 时，有$gX \sim P_{\theta'}, \forall \theta \in \Theta$。若$\mathscr{P}$ 可辨识（即$\forall \theta_1 \neq \theta_2 \Rightarrow P_{\theta_1} \neq P_{\theta_2}$），则由$g$ 在Θ 上导出了一个一一对应的函数$\bar{g}$, i.e. $\theta' = \bar{g}\theta$.

证明. 由$\mathscr{P}$ 关于g 不变，知$\forall \theta \in \Theta$，$\exists \theta' = \bar{g}\theta \in \Theta$，使对$\forall A \in \mathscr{B}_X$，有$P_\theta(gX \in A) = P_{\bar{g}\theta}(X' \in A)$。

$\forall \theta_1, \theta_2 \in \Theta$，若$\bar{g}\theta_1 = \bar{g}\theta_2$，则$P_{\bar{g}\theta_1}(X' \in A) = P_{\bar{g}\theta_2}(X' \in A), \forall A \in \mathscr{B}_X$。

$\Rightarrow \; P_{\theta_1}(gX \in A) = P_{\theta_2}(gX \in A), \; \forall A \in \mathscr{B}_X$

$\Rightarrow \; P_{\theta_1}(X \in g^{-1}(A)) = P_{\theta_2}(X \in g^{-1}(A)), \forall A \in \mathscr{B}_X$

又g 是一一对应变换，A 遍历$\mathscr{B}_X$时，$g^{-1}(A)$ 也遍历$\mathscr{B}_X$。

$\Rightarrow \theta_1 = \theta_2 \qquad \therefore \bar{g}$ 是一一变换。 □

- 重要公式：

$$P_\theta\{gX \in A\} = P_{\bar{g}\theta}\{X \in A\}, \quad \forall A \in \mathscr{B}_X.$$
$$E_\theta \phi(gX) = E_{\bar{g}\theta}\phi(X), \quad \forall \text{任意可积实函数} \phi.$$

- 若$\mathscr{P}$ 在变换群G 下不变，则$\bar{G} = \{\bar{g}: \; g \in G\}$构成一个群。

证明. 1. $\bar{G}$关于复合运算封闭。

$\forall \bar{g}_1, \bar{g}_2 \in \bar{G}$，可证$\bar{g}_1\bar{g}_2 = \overline{g_1 g_2}$，$g_1, g_2 \in G$。

2. 复合运算满足结合律。

3. $\bar{G}$ 有单位元$\bar{g}_e$，g_e 是G 中的单位元。

4. $\forall \bar{g} \in \bar{G}$，$\exists$ 逆元$\bar{g}^{-1} = \overline{g^{-1}}$。

□

例2.4.5 1. $\mathscr{P} = \{f(x-\xi) = f(x_1-\xi,\dots,x_n-\xi)$为$(\mathbb{R}^n,\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n})$上的$pdf$: $f(\cdot)$已知, $\xi\in\mathbb{R}\}$.

$G=\{g_a:\ g_a(x)=x+a,\ x\in\mathbb{R}^n,\ a\in\mathbb{R}\}$.

$\forall g_a\in G,\ X'=g_aX\sim f(x-(\xi+a))\in\mathscr{P}$.

$\bar{g}_a\xi=\xi+a,\quad \bar{G}=\{\bar{g}_a:\ \bar{g}_a\xi=\xi+a,\ a\in\mathbb{R}\}$.

2. $\bar{G}$ 与G 不一定同构。

例如，$\mathscr{P}=\{N_n(0,\sigma^2I_n),\ \sigma^2>0\}$，$G=\{g_A:\ g_A(X)=AX,\ A$是$n$阶正交阵$\}$。

$X\sim N_n(0,\sigma^2I_n)$，则$g_AX=A\cdot X\sim N_n(0,\sigma^2I_n)\in\mathscr{P}$，即$\bar{g}_A\sigma^2=\sigma^2$。

因此$\bar{g}_A\equiv\bar{g}_e,\qquad \bar{G}=\{\bar{g}_e\}$。

- 考虑在$\mathscr{P}$ 下，$h(\theta)$ 的不变估计问题。

  假定$\forall g\in G$，$h(\bar{g}\theta)$ 都是$h(\theta)$ 的函数，记之为

$$h(\bar{g}\theta)=g^*h(\theta). \tag{2.4.4}$$

  若记$\mathscr{H}=\{h(\theta):\ \theta\in\Theta\}$，可证：

  1. g^* 是$\mathscr{H}\to\mathscr{H}$ $1:1$变换；
  2. 若$\mathscr{P}$ 在变换群G 下不变，则$G^*=\{g^*:\ g\in G\}$ 构成一个群。

例2.4.6 (并非所有的$h(\theta)$均满足上述要求。) 设$X=(X_1,\dots,X_m)$, $Y=(Y_1,\dots,Y_n)$，jpdf为

$$f(x-\xi,y-\eta)=f(x_1-\xi,\dots,x_m-\xi,y_1-\eta,\dots,y_n-\eta),\quad \xi,\eta\in\mathbb{R}.$$

该分布族在变换

$$g_{a,b}(x,y)=(x+a,y+b)$$

下不变，相应的$\bar{g}_{a,b}(\xi,\eta)=(\xi+a,\eta+b)$。

1. 考虑$\Delta=\xi-\eta$ 的估计，则

$$\Delta(\bar{g}_{a,b}(\xi,\eta))=\xi+a-(\eta+b)=(\xi-\eta)+(a-b)=\Delta+(a-b)=g^*(\Delta).$$

2. 若欲估计$h(\xi,\eta)=\xi^2+\eta^2$，则$h(\bar{g}_{a,b}(\xi,\eta))=(\xi+a)^2+(\eta+b)^2$ 不再是$h(\xi,\eta)$的函数。

- 若以$\delta(X)$ 去估计$h(\theta)$，则有两种方式去估计$g^*h(\theta)$：

  (1) $g^*\delta(X)$;

  (2) $\delta(g(X))$。

定义2.4.3 若$\mathscr{P}$ 在变换群G 下不变；$\forall g\in G$，$h(\theta)$ 满足(2.4.4)。若估计量δ满足：$\delta(gX)=g^*(\delta(X)),\forall g\in G$，则称$\delta$ 为$h(\theta)$ 的同变估计。

- 假定损失函数具有不变性：用$a'=g^*a$ 估计$g^*h(\theta)$ 与用a 估计$h(\theta)$ 损失相同，i.e. 损失函数L 满足

$$L(\bar{g}\theta,g^*a)=L(\theta,a),\quad \forall\theta\in\Theta,\ \forall a\in\mathbb{A},\ \forall g\in G.$$

定义2.4.4 (不变决策问题, Shao J. p119/Def 2.9) 若一个决策问题满足：

(i) 分布族$\mathscr{P}$ 在变换群G 下不变；$\forall g\in G$，导出参数空间Θ 上的$1:1$变换$\bar{g}$.

(ii) 对于$\forall g\in G$, $\forall a\in\mathbb{A}$，存在唯一$g^*a\in\mathbb{A}$，使得损失函数满足$L(\bar{g}\theta,g^*a)=L(\theta,a)$, $\forall\theta\in\Theta$.

则称该问题为在变换群G 下的不变决策问题。满足$\delta(gX)=g^*(\delta(X)),\forall g\in G$的决策函数$\delta$ 称为同变决策。

定理2.4.5 若δ 是一个不变决策问题的同变决策，则δ 的风险满足

$$R(\bar{g}\theta,\delta)=R(\theta,\delta),\quad \forall\theta\in\Theta,\ \forall g\in G.$$

证明.

$$\begin{aligned}R(\bar{g}\theta,\delta)&=E_{\bar{g}\theta}L(\bar{g}\theta,\delta(X))\\&=E_\theta L(\bar{g}\theta,\delta(g(X)))\\&=E_\theta L(\bar{g}\theta,g^*\delta(X))\\&=E_\theta L(\theta,\delta(X))\\&=R(\theta,\delta),\quad \forall\theta\in\Theta,\ \forall g\in G.\end{aligned}$$

□

定义2.4.5 G为定义在集合S上的变换群。

1. 对$s_1, s_2 \in S$，若$\exists g \in G$，$\ni gs_1 = s_2$，则称s_1, s_2等价；
2. 所有与某一个给定点等价的点构成的集合称为G 的一条轨道；
3. 若G 只有一条轨道，则称G 为S 上的可迁群(transitive)。

推论2.4.4 *(1) 任一同变决策的风险函数在$\bar{G}$ 的一条轨道上保持不变；*

(2) 若$\bar{G}$ 为可迁群，则任一同变决策的风险函数均为常数。

例2.4.7 (可迁群与不可迁群) 1) 例 2.4.5中， 1可迁， 2不可迁。

2) 例 2.4.6中，$\bar{G}$可迁。

若任一同变决策的风险函数为常数，则MRE 决策通常存在；且不必考虑随机化估计。

例2.4.8 (同变估计的困难) 在两个不同的变化群G_1, G_2 下，可导出两个不同的MREE δ_1, δ_2。

设$(X_1, X_2) \sim N_2(0, \Sigma)$, $(Y_1, Y_2) \sim N_2(0, \Delta\Sigma)$，两者相互独立，其中未知参数$\Delta > 0, \Sigma$正定。考虑$\Delta$ 的估计。记

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y_1' \\ Y_2' \end{pmatrix} = cA \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} : \ A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \ a_1, a_2, b, c \neq 0 \right\}.$$

对于$\forall a_1, a_2, b, c$，有$\begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \end{pmatrix} \sim N_2(0, \Sigma'), \begin{pmatrix} Y_1' \\ Y_2' \end{pmatrix} \sim N_2(0, \Delta'\Sigma')$，其中$\Delta' = c^2\Delta$.

$\therefore \mathscr{P}$关于G_1不变。待估参数$h(\Delta, \Sigma) = \Delta$。

$\because h(\Delta', \Sigma') = c^2 \cdot \Delta = c^2 \cdot h(\Delta, \Sigma)$，

$\therefore h(\cdot)$ 具有同变性，导出$a' = c^2 \cdot a$。

若L 满足不变性 $L(c^2\Delta, c^2 a) = L(\Delta, a), \forall \Delta, a, c \iff L(\Delta, a) = \rho(\frac{a}{\Delta})$。

在G_1下，Δ 的同变估计δ 应满足：$\delta(X', Y') = c^2 \cdot \delta(X, Y)$。

$\therefore \delta$ 只能形为$\delta(X, Y) = kY_2^2/X_2^2$，$k$是常数。

若取变换群为

$$G_2=\left\{\begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} Y_1' \\ Y_2' \end{pmatrix}=cA\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}:\ A=\begin{pmatrix} 0 & b \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix},\ a_1,a_2,b,c\neq 0\right\}.$$

则Δ 的同变估计形为$\delta(X,Y)=kY_1^2/X_1^2$，k是常数。

MREE 通常不是U.E.，但往往是风险无偏的。

定理2.4.6 *若$\bar{G}$ 可迁，G^* 可交换，则$MREE$ 风险无偏。*

证明. 设δ 为MREE。因为$\forall\theta,\theta'\in\Theta,\exists\bar{g}\in\bar{G},\ni\theta=\bar{g}\theta'$，由不变性知

$$E_\theta L(\theta',\delta(X))=E_\theta L(\theta,g^*\delta(X)).$$

由于G^*可交换，故$g^*\delta(X)$ 也是同变估计。又δ 是MREE，故

$$E_\theta L(\theta',\delta(X))=E_\theta L(\theta,g^*\delta(X))\geq E_\theta L(\theta,\delta(X)),\quad \forall\theta,\theta'\in\Theta.$$

□

例2.4.9 (反例。) 设$X\sim N(\xi,\sigma^2)$，ξ,σ未知，估计ξ。取损失函数为$L_1(\xi,\sigma;a)=\left(\frac{a-\xi}{\sigma}\right)^2$。

(1) $G_1=\{g_c:g_cX=X+c,c\in\mathbb{R}\}$。由§4.4.1知，$X$ 是G_1 下的MREE，但X不是风险无偏的（须验证）。

虽然$\bar{G}_1=\{\bar{g}_c:\bar{g}_c(\xi,\sigma)=(\xi+c,\sigma),c\in\mathbb{R}\}$非可迁，但若损失改为$L_2=(a-\xi)^2$，那$X$ 就风险无偏。故$\bar{G}$ 可迁是充分但非必要条件。

(2) $G_2=\{g_{k,c}(x)=kX+c:\ k>0,c\in\mathbb{R}\}$。在$(G_2,L_1)$下，$X$ 仍是MREE，但非风险无偏。因为$G_2^*=\{g_{k,c}^*a=ka+c:\ k>0,c\in\mathbb{R}\}$，不可交换。

§2.4.3 位置-尺度族(Location-Scale Families)

位置-尺度族是一类常用的统计模型，也是讨论不变估计的典型分布族。本节讨论该分布族下的不变估计问题。

若随机向量$X=(X_1,\ldots,X_n)$ 关于Lebesgue 测度具有jpdf

$$\frac{1}{\tau^n}f\Big(\frac{x_1-\xi}{\tau},\cdots,\frac{x_n-\xi}{\tau}\Big), \tag{2.4.5}$$

其中$f(\cdot)$ 是一已知的pdf，ξ,τ 分别为位置参数与尺度参数，$\xi\in\mathbb{R}$，$\tau>0$。X 的分布族$\mathscr{P}$ 是一类位置-尺度族。

固定τ，则(2.4.5) 可视为$(x_1-\xi,\ldots,x_n-\xi)$ 的函数

$$g_\tau(x_1-\xi,\ldots,x_n-\xi),\quad \xi\in(-\infty,\infty), \tag{2.4.6}$$

形成§4.4.1 中所述的位置族。

固定$\xi=0$，则(2.4.5) 形成尺度族，记为$\mathscr{P}_0$。

本节首先讨论$\mathscr{P}_0$ 下的同变估计，再结合(2.4.6) 下的同变估计，讨论(2.4.5) 下的不变估计问题。

一、尺度族下的同变估计

可证，$\mathscr{P}_0$ 在尺度变换群

$$G_0=\{g_b(\cdot):\ g_b(x)=b\cdot x, x\in\mathbb{R}^n,\ b>0\}$$

下不变，G_0 导出Θ 上的变换群

$$\bar G_0=\{\bar g_b(\cdot):\ \bar g_b(\tau)=b\cdot\tau,\tau>0,\ b>0\}.$$

考虑$h(\tau)=\tau^r$ 的不变估计问题，取行动空间$\mathbb{A}=\mathbb{R}^+$。

因为$\forall b>0$，

$$h(\bar g_b(\tau))=h(b\tau)=b^r\tau^r=b^rh(\tau),$$

所以待估参数$h(\tau)=\tau^r$ 具有同变性，由$\bar g_b(\cdot)$ 导出行动空间上的相应变换为

$$g_b^* a=b^r a.$$

故$h(\tau)=\tau^r$ 的同变估计δ 应满足

$$g^*(\delta(X))=\delta(gX),\quad \forall g\in G_0,$$

即

$$b^r\cdot\delta(X)=\delta(bX),\quad \forall b>0.$$

G_0 下τ 的常见同变估计量有：

样本标准差	$\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X})^2/(n-1)}$,
平均绝对偏差	$\sum_{i=1}^n \lvert X_i-\bar{X}\rvert/n$,
极差	$X_{(n)}-X_{(1)}$,

等等。

估计$h(\tau)=\tau^r$ 的问题要构成一个不变决策问题，则损失函数L 应满足不变性：

$$L(\bar{g}_b\tau,g_b^*a)=L(b\tau,b^ra)=L(\tau,a),\quad \forall b>0,\tau>0,a>0.$$

这等价于L 具有形式

$$L(\tau,a)=\gamma\Big(\frac{a}{\tau^r}\Big).$$

例如，$\forall p\geq 1$，

$$L(\tau,a)=\Big|\frac{a-\tau^r}{\tau^r}\Big|^p$$

均有不变性，但$L(\tau,a)=(a-\tau^r)^2$ 没有不变性。

$\bar{G}_0$ 是参数空间$(0,\infty)$ 上的可迁群，由推论 2.4.4 知，任一同变估计的风险函数是常数，因此MRIE一般能求得。求解方法与§4.4.1类似，分两步：

(1) 给出所有同变估计；

(2) 从中求出MREE。

定理2.4.7 (Shao J. p256/prop 4.5) *设$X\sim\mathscr{P}_0$，$\delta_0(X)$ 是τ^r 在G_0 下的同变估计。记$Z=(Z_1,\ldots,Z_n)$，其中$Z_i=X_i/X_n$，$i=1,\ldots,n-1$，$Z_n=X_n/|X_n|$。则$\delta(X)$ 是τ^r 在G_0 下的同变估计$\Longleftrightarrow$ 存在统计量$w(Z)$，使得$\delta(X)=\delta_0(X)/w(Z)$。*

证明. 因为 $\delta(bx)=b^r\delta(x),\ \forall x\in\mathbb{R}^n,\forall b>0\ \Longleftrightarrow$
$\delta(x)=\delta_0(x)/u(x)$，其中$u(x)$ 满足$u(bx)=u(x),\forall x,\forall b>0$。

对$\forall x$，取$b=\frac{1}{|x_n|}$，则

$$u(x)=u(bx)=u(\frac{x_1}{x_n}\cdot\frac{x_n}{|x_n|},\cdots,\frac{x_{n-1}}{x_n}\cdot\frac{x_n}{|x_n|},\frac{x_n}{|x_n|})=u(z)\widehat{=}w(z).$$

因为$\forall P \in \mathscr{P}_0, P(X_n \neq 0) = 1$，$Z$ 以概率1 有意义，因此δ 是同变估计$\Longleftrightarrow$ $\delta(X) = \delta_0(X)/w(Z)$。 □

定理2.4.8 (p256/Th4.8) *设X, Z 如定理 2.4.7 所述，损失函数形为$\gamma(\frac{a}{\tau^r})$，且对于τ^r 存在一个风险有限的同变估计δ_0。*

(i) *若对每个给定的z，存在$w = w^*(z)$ 最小化*

$$E_{\tau=1}\Big[\gamma\Big(\frac{\delta_0(X)}{w}\Big)\Big|Z = z\Big],$$

则τ^r 的MREE存在，且$\delta^*(X) = \delta_0^*(X)/w^*(Z)$ 为τ^r 的一个MREE。

(ii) *若$\rho(v) = \gamma(e^v)$ 是凸的、非单调的，则τ^r 的MREE存在；若ρ 严凸，则MREE唯一。*

证明. (i) 由定理2.4.7 知，τ^r 的任一同变估计$\delta(X)$ 均可表示为$\delta_0(X)/w(Z)$，其风险函数为

$$\begin{aligned}
R(\tau, \delta) &= E_\tau\gamma\Big[\frac{\delta_0(X)/w(Z)}{\tau^r}\Big] \\
&= E_{\tau=1}\gamma\big(\delta_0(X)/w(Z)\big) \\
&= \int E_{\tau=1}\Big[\gamma\big(\delta_0(X)/w(Z)\big)\Big|Z = z\Big]dP^Z_{\tau=1}(z).
\end{aligned}$$

对每个z，取$w = w^*(z)$ 最小化

$$E_{\tau=1}\Big[\gamma\big(\delta_0(X)/w\big)\Big|Z = z\Big].$$

记$\delta^*(X) = \delta_0(X)/w^*(Z)$，则$\delta^*(X)$ 依然是同变估计，且

$$R(\tau, \delta^*) \leq R(\tau, \delta), \quad \forall \text{ 同变估计 } \delta.$$

因为δ_0 风险有限，故至少$w = 1$ 时，$E_{\tau=1}[\gamma(\delta_0(X))|Z = z] < \infty,\ a.s.$，因此上述最优化可行。

(ii) 由定理2.1.7 知，若$\rho(\cdot)$ 是$(-\infty, \infty)$ 上的凸函数、非单调，且$\phi(a) = E[\rho(X - a)]$ 在某些a 处有限，则$\phi(a)$ 可取得最小值；若ρ 严凸，则最小值点唯一。

这里要求

$$w^*(z) = \underset{w}{\operatorname{argmin}} E_{\tau=1}[\gamma(\delta_0(X)/w)|Z=z]$$
$$= \underset{w}{\operatorname{argmin}} E_{\tau=1}\big[\gamma(e^{\log\delta_0(X)-\log w})\big|Z=z\big],$$

若$\rho(v)$ 凸、非单调，则由定理2.1.7 即可证得结论。

这里要求$\delta_0(X)$ 是正的。若$\delta_0(X)$ 非恒正，则取其正部，也是同变估计。且MREE必然几乎处处大于0。(留作作业) □

推论2.4.5 (Shao J. p257/Cor 4.1) *在定理2.4.8 的条件下，设*$L(\tau,a)=\left|\frac{a}{\tau^r}-1\right|^p$，

(1) $p\geq 1$ *时，*$\rho(v)=|e^v-1|^p$ *严凸，因此*τ^r *存在唯一的MREE。*

(2) $p=2$*时，唯一的MREE为*

$$\delta_2^*(X)=\frac{\delta_0(X)\cdot E_{\tau=1}[\delta_0(X)|Z]}{E_{\tau=1}[\delta_0^2(X)|Z]}$$
$$=\frac{\int_0^\infty v^{n+r-1}f(vx_1,\ldots,vx_n)dv}{\int_0^\infty v^{n+2r-1}f(vx_1,\ldots,vx_n)dv}.$$

该估计也称为Pitman 估计。

(3) $p=1$ *时，唯一的MREE为*$\delta_1^*(X)=\delta_0(X)/w^*(Z)$*，其中*$w^*(Z)$ *满足*

$$E_{\tau=1}\{\delta_0(X)I_{[\delta_0(X)\geq w^*(z)]}|Z=z\}=E_{\tau=1}\{\delta_0(X)I_{[\delta_0(X)\leq w^*(z)]}|Z=z\},$$

称为$\delta_0(X)$ *的尺度中位数。*

证明. 证明 2.4.5, 2.4.5，关键在于求解$E\left|\frac{T}{c}-1\right|^p$的最小值点，$p=1,2$，其中$T$是某一个取正值的随机变量。

Pitman 估计的证明思路：取$\delta_0(X)=|X_n|^r$，求条件分布$X_n|Z$。

因为$(X_1,\ldots,X_n)\xleftrightarrow{1:1}(Z_1,\ldots,Z_{n-1},X_n)$，可以算出条件密度$(X_n|Z_1,\cdots,Z_{n-1})$，然后分两种情况计算$X_n|Z$：

$$\begin{cases} f(x_n,Z_n=1|z_1,\ldots,z_{n-1})/P(Z_n=1|z_1,\ldots,z_{n-1}),\\ f(x_n,Z_n=-1|z_1,\ldots,z_{n-1})/P(Z_n=-1|z_1,\ldots,z_{n-1}).\end{cases}$$

□

例2.4.10 当$n=1$ 时，$Z=X/|X|=\pm1$，X^r 是τ^r 的一个同变估计，因此所有的同变估计形为

$$\delta(X)=X^r/w(Z)=\begin{cases} AX^r, & \text{如果 } X>0,\\ BX^r, & \text{否则.}\end{cases}$$

其中A,B 任意。

在$L(\tau,a)=\left(\frac{a}{\tau^r}-1\right)^2$ 时，τ^r 的MREE为：

$$X^r\frac{E_{\tau=1}(X^r|Z)}{E_{\tau=1}(X^{2r}|Z)}=\begin{cases} X^rE_{\tau=1}(X^r|X>0)/E_{\tau=1}(X^{2r}|X>0), & \text{if } \ X>0,\\ X^rE_{\tau=1}(X^r|X<0)/E_{\tau=1}(X^{2r}|X<0), & \text{else.}\end{cases}$$

损失函数$L_p(\tau,a)=\left|\frac{a}{\tau}-1\right|^p(p\geq1)$ 的缺点在于：

$$\text{当 } \ a\to0,\ L_p\to1;\qquad \text{但当 } \ a\to\infty,\ L_p\to\infty.$$

对于高估与低估的惩罚严重不对称。因此，James & Stein (1961) 提出Stein 损失函数：

$$L_s(\tau,a)=\frac{a}{\tau^r}-\log\frac{a}{\tau^r}-1.$$

可见，当$a\to0$ or ∞ 时，$L_s\to\infty$。

推论2.4.6 *在定理 2.4.8 的条件下，若取Stein 损失，则τ^r 的唯一MREE为*

$$\delta_s^*=\delta_0(X)/E_{\tau=1}(\delta_0(X)|Z).$$

与δ_2^* 相比，$\delta_2^*/\delta_s^*=E_1^2[\delta_0(X)|Z]/E_1[\delta_0^2(X)|Z]\leq1$，所以$\delta_2^*\leq\delta_s^*$ $a.s.\mathscr{P}_0$。

例2.4.11 (Shao J. p257/Example 4.14) $X_1,\ldots,X_n$ i.i.d. $N(0,\sigma^2)$，其中σ 为尺度参数，估计σ^2。

取$\delta_0(X)=\sum_{i=1}^n X_i^2$，它是不变估计，且充分、完备。

而$Z=(X_1/X_n,\ldots,X_{n-1}/X_n,X_n/|X_n|)$ 的分布与σ 无关，由Basu定理知，对于$\forall\sigma$，δ_0 与Z 相互独立。故求MREE，只须解：

$$\underset{w}{\text{argmin}}E_{\sigma=1}\gamma(\delta_0(X)/w).$$

在L_2 下，$\delta_2^*=\delta_0E_{\sigma=1}(\delta_0)/E_{\sigma=1}(\delta_0^2)=\delta_0/(n+2)=\sum_{i=1}^n X_i^2/(n+2)$；

在L_s 下，$\delta_s^*=\sum_{i=1}^n X_i^2/n$，与UMVUE 一致。

Brown(1968)指出，在尺度不变估计问题中，Stein损失是唯一的一个使得UMVUE 与MREE 一致的损失函数。

由于$\bar{G}_0$ 可迁，G_0^* 可交换，因此MREE 风险无偏。

二、位置-尺度族下的同变估计

位置－尺度族$\mathscr{P}$ 关于仿射变换群

$$G = \{g_{c,b}(x) : g_{c,b}(x) = c \cdot \mathbb{1}_n + bx, x \in \mathbb{R}^n,\ c \in \mathbb{R}, b > 0\}$$

不变。G 导出的参数空间$\Theta = \{(\xi, \tau) : \xi \in \mathbb{R}, \tau > 0\}$ 上的变换群

$$\bar{G} = \{\bar{g}_{c,b} : \bar{g}_{c,b}(\xi, \tau) = (c + b\xi, b\tau),\ c \in \mathbb{R}, b > 0\}.$$

$\bar{G}$ 可迁。

$\mathscr{P}$ 在变换子群$G_0 = \{g_{c,b} \in G, c = 0\}$ 下也不变，但$\bar{G}_0$ 不可迁；

$\mathscr{P}$ 在变换子群$G_1 = \{g_{c,b} \in G, b = 1\}$ 下也不变，但$\bar{G}_1$ 也不可迁。

1. 考虑G 下$h(\xi, \tau) = \tau^r$ 的同变估计。

   因为对于$\forall g_{c,b} \in G$，

   $$h(\bar{g}_{c,b}(\xi, \tau)) = h(c + b\xi, b\tau) = b^r \cdot \tau^r = b^r \cdot h(\xi, \tau),$$

   因此，$h(\xi, \tau)$ 满足同变性，导出的形式同变的估计值为：

   $$g_{c,b}^* a = b^r \cdot a.$$

   所以，τ^r 的同变估计δ 应满足

   $$\delta(c\mathbb{1}_n + bx) = b^r \cdot \delta(x),\ \forall c \in \mathbb{R}, b > 0, x \in \mathbb{R}^n.$$

   可证，具有不变性的损失函数仍然形为：

   $$L((\xi, \tau), a) = \gamma\Big(\frac{a}{\tau^r}\Big).$$

   再来讨论不变估计δ 的一般形式及MREE的求法。

   取$b = 1$，δ 应满足

   $$\delta(c \cdot \mathbb{1}_n + x) = \delta(x),\ \forall c, x,$$

$\Longleftrightarrow \delta$ 是$Y=(Y_1,\ldots,Y_{n-1})$ 的函数，其中$Y_i=X_i-X_n, i=1,\ldots,n-1$。

Y 的jpdf 为：

$$\frac{1}{\tau^n}\int_{-\infty}^{\infty} f\Big(\frac{y_1+t}{\tau},\ldots,\frac{y_{n-1}+t}{\tau},\frac{t}{\tau}\Big)dt=\frac{1}{\tau^{n-1}}\int_{-\infty}^{\infty} f\Big(\frac{y_1}{\tau}+u,\ldots,\frac{y_{n-1}}{\tau}+u,u\Big)du,$$

这形成一个尺度族，尺度参数为τ。G 下的同变估计δ 都是该尺度族下的同变估计。由定理 2.4.7知，τ^r 的同变估计形为

$$\delta(X)=\delta_0(Y)/w(Z),$$

其中$\delta_0(Y)$ 是该尺度族下的一个具体的同变估计，$Z_i=Y_i/Y_{n-1}, i=1,\ldots,n-2$，$Z_{n-1}=Y_{n-1}/|Y_{n-1}|$。

再由定理 2.4.8，对每个z，若

$$w^*(z)=\underset{w}{\operatorname{argmin}} E_{\tau=1}\Big[\gamma\Big(\frac{\delta_0(Y)}{w}\Big)|Z=z\Big],$$

则$\delta^*(X)=\delta_0(Y)/w^*(Z)$ 即为τ^r 的MRIE。

由于$\bar{G}$ 可迁，G^* 可交换，因此MREE 风险无偏。

例2.4.12 (a) $X_1,\ldots,X_n$ i.i.d. $N(\xi,\sigma^2)$，估计σ^2，取损失为L_2。

统计量$(\bar{X},\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2)$ 充分、完备，与Z 独立。而$\delta_0(X)=\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2$ 是G 下的同变估计。

求σ^2 的MREE 只须求解

$$\underset{w}{\operatorname{argmin}} E_{\sigma=1}\gamma(\delta_0(X)/w).$$

对于L_2，$\delta_2^*(X)=\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2/(n+1)$；

对于L_s，$\delta_s^*(X)=\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2/(n-1)$。

(b) $X_1,\ldots,X_n$ i.i.d. $U(\xi-\frac{\tau}{2},\xi+\frac{\tau}{2})$，估计$\tau$。

$(X_{(1)},X_{(n)})$ 与Z 独立，$R=X_{(n)}-X_{(1)}$ 是G 下的同变估计。

对于L_2，$\delta^*(X)=R\cdot\frac{n+2}{n}$。

2. 考虑G 下$h(\xi,\tau)=\xi$ 的同变估计。

因为对于$\forall g_{c,b}\in G$，

$$h(\bar{g}_{c,b}(\xi,\tau))=h(c+b\xi,b\tau)=c+b\xi=c+b\cdot h(\xi,\tau),\ \forall c,b>0,$$

故$h(\xi,\tau)$ 具有同变性。导出行动空间上的相应变换为

$$g^*_{c,b}a = c + b\cdot a.$$

因此，同变估计应满足

$$\delta(c\mathbb{1}_n + bx) = c + b\cdot\delta(x),\ \forall c, b, x.$$

损失不变$\Longleftrightarrow$ 损失形为$L((\xi,\tau),a)=\rho\left(\frac{a-\xi}{\tau}\right)$.

固定τ，jpdf 可视为$g_\tau(x_1-\xi,\ldots,x_n-\xi)$ 形成位置族。

引理2.4.1 *对于位置族$\{g_\tau:\ \xi\in(-\infty,\infty)\}$ 及损失函数$\rho\left(\frac{a-\xi}{\tau}\right)$，若关于位移变换群存在$\xi$ 的一个$MREE\ \ \delta^*$，且*

(a) δ^* 与τ 无关，

(b) δ^* 是G 下的同变估计，

则δ^* 为ξ 在G 下的$MREE$。

证明. 显然，任一G 下的同变估计δ，必是τ 已知时，分布族$\{g_\tau\}$ 在G_1 下的同变估计。而

$$R((\xi,\tau),\delta^*)\le R((\xi,\tau),\delta),\ \forall\xi,\forall G\text{下的同变估计}\delta.$$

又δ^* 与τ 无关，则上述不等式对$\forall\tau$ 成立。且δ^* 是G 下的同变估计。因此，δ^* 是G 下ξ 的MREE。 □

例2.4.13 (Shao J. p259/Example 4.16, 4.17) 设损失函数ρ 是凸的偶函数。

(a) $X_1,\ldots,X_n$ i.i.d. $N(\xi,\sigma^2)$。
   $\forall\sigma$，$\delta^*=\bar X$ 是ξ 在G_1 下的MREE，又是ξ 在G 下的同变估计、与σ 无关。所以，$\delta^*=\bar X$ 是ξ 在G 下的MREE。

(b) $X_1,\ldots,X_n$ i.i.d. $U(\xi-\frac{\tau}{2},\xi+\frac{\tau}{2})$.
   $\forall\tau$，$\delta^*=\frac{1}{2}[X_{(1)}+X_{(n)}]$ 是G_1 下的MREE，也是ξ 在G 下的MREE。

定理2.4.9 (Shao J. p259/Th4.9, Cor4.2) 设δ_0 是ξ 在G 下的一个同变估计，δ_1 是τ 的一个估计，仅取正值，且满足

$$\delta_1(c+bx)=b\delta_1(x),\forall c,b>0,x.$$

则

(a) δ 为ξ 在G 下的同变估计$\Longleftrightarrow$

$$\delta(X)=\delta_0(X)-w(Z)\cdot\delta_1(X),$$

其中$Z=(Z_1,\ldots,Z_{n-1}),Z_i=\frac{X_i-X_n}{X_{n-1}-X_n},i=1,\ldots,n-2,Z_{n-1}=\frac{X_{n-1}-X_n}{|X_{n-1}-X_n|}$。

(b) 对于每个z，若

$$w^*(z)=\underset{w}{argmin}E_{(0,1)}\{\rho[\delta_0(X)-w\delta_1(X)]|Z=z\},$$

则$\delta_0(X)-w^*(Z)\delta_1(X)$ 为ξ 的$MREE$。

(c) 若$\rho\left(\frac{a-\xi}{\tau}\right)=\left(\frac{a-\xi}{\tau}\right)^2$，则

$$w^*(Z)=\frac{E_{(0,1)}[\delta_0(X)\delta_1(X)|Z=z]}{E_{(0,1)}[\delta_1^2(X)|Z=z]}.$$

例2.4.14 $X_1,\ldots,X_n$ i.i.d. $E(\xi,\tau)$，X_1 的pdf为$p(x)=\frac{1}{\tau}\exp(\frac{x-\xi}{\tau})I(x>0)$。

取$\delta_0=X_{(1)}$，$\delta_1=\sum_{i=1}^n(X_i-X_{(n)})$，它们是充分完备统计量；$Z$ 的分布与(ξ,τ) 无关，是辅助统计量。因此，Z 与(δ_0,δ_1) 独立，$\forall\xi,\tau$。

当取损失为$\rho=\left(\frac{a-\xi}{\tau}\right)^2$ 时，

$$w^*(z)\equiv w^*=\frac{E_{(0,1)}(\delta_0\delta_1)}{E_{(0,1)}(\delta_1^2)}=\frac{1}{n^2},$$

G 下ξ 的MREE 为$X_{(1)}-\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n(X_i-X_{(1)})$。

而ξ 的UMVUE 为$X_{(1)}-\dfrac{1}{n(n-1)}\displaystyle\sum_{i=1}^n(X_i-X_{(1)})$。

估计ξ 时，虽然$\bar{G}$ 可迁、同变估计的风险函数为常数，但因G^* 非可交换群，因此MREE 往往不是风险无偏的。

注：有时因G 过大，同变性对于估计所加的限制过多，以致于会将一些合适的估计也排除在外。此时，可适当放松要求，比如考虑在某个变换子群G_0 下的同变估计。但是，一般情况下$\bar{G}_0$ 往往不可迁，因而不变估计的风险非常数，这使得相应的MREE 不易获得。