eNote 13

Lineære 2. ordens differentialligninger med konstante koefficienter

I forlængelse af eNote 11 og eNote 12 om differentialligninger, kommer nu denne eNote omkring 2. ordens differentialligninger. Dele af bevisførelser m.m. læner sig op af de foregående noter, hvorfor det forudsættes, at man har kendskab til dem. Endvidere benyttes de komplekse tal.

Lineære 2. ordens differentialligninger med konstante koefficienter har følgende udseende:

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = q(t), \quad t \in I, q : I \to \mathbb{R} \tag{13-1}$$

$a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ er konstante koefficienter til $x(t)$ henholdsvis $x'(t)$. Højresiden $q(t)$ er en kontinuert reel funktion, hvis definitionsmængde er et interval I (som undertiden er hele $\mathbb{R}$). Differentialligningen kaldes homogen hvis $q(t) = 0$ for alle $t \in I$ og i modsat fald inhomogen.

At denne type differentialligning er lineær, vises ved at dens venstreside opfattet som en afbildning $f : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ givet ved

$$f\big(\,x(t)\,\big) = x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) \tag{13-2}$$

opfylder linearitetskravene L_1 og L_2. Den fremgangsmetode der benyttes i denne eNote til at løse den inhomogene differentialligning, udnytter denne egenskab.

|||| **Metode 13.1 Løsninger og deres struktur**

1. Den fuldstændige løsningsmængde L_{hom} for en homogen lineær 2. ordens differentialligning
$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0, \quad t \in I \tag{13-3}$$
hvor $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, kan bestemmes ved hjælp af sætning 13.2.

2. Den fuldstændige løsningsmængde L_{inhom} for en inhomogen lineær 2. ordens differentialligning
$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = q(t), \quad t \in I, q : I \to \mathbb{R}, \tag{13-4}$$
hvor $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, kan ved hjælp af sætning 11.4 opdeles i to:

   (a) Først bestemmes den fuldstændige løsningsmængde L_{hom} til den *tilsvarende homogene differentialligning*. Denne fremkommer ved at man i (13-4) erstatter $q(t)$ med 0.

   (b) Dernæst bestemmes en partikulær løsning $x_0(t)$ til (13-4) for eksempel ved at gæt. Se angående dette afsnit 13.2.

   Den fuldstændige løsning har da følgende struktur
$$L_{inhom} = x_0(t) + L_{hom}\,. \tag{13-5}$$

13.1 Den homogene differentialligning

Vi betragter nu den lineære homogene 2. ordens differentialligning
$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{13-6}$$
hvor a_0 og a_1 er reelle konstanter. Vi ønsker at bestemme den fuldstændige løsningsmængde. Det kan gøres ved hjælp af eksakte formler, som afhængiger af ligningens udseende.

|||| Sætning 13.2 Løsning til den homogene ligning

Den homogene differentialligning

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{13-7}$$

har den såkaldte ***karakterligning***

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0. \tag{13-8}$$

Typen af rødder til denne ligning afgør udseendet af den fuldstændige løsningsmængde L_{hom} til den homogene differentialligning.

- **To forskellige reelle rødder** λ_1 og λ_2 giver løsningen

$$x(t) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + c_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-9}$$

- **To komplekse rødder** $\lambda = \alpha \pm \beta i$ giver den reelle løsning

$$x(t) = c_1 \mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_2 \mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-10}$$

- **Dobbeltroden** λ giver løsningen

$$x(t) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda t} + c_2 t \mathrm{e}^{\lambda t}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-11}$$

For alle tre tilfælde gælder, at de respektive funktioner for alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ udgør den fuldstændige løsningsmængde L_{hom}.

I afsnit 12.4 gennemgås teorien for at omforme netop denne type differentialligning til et system af 1. ordens differentialligninger. Det er en brugbar metode her. Systemet vil da se således ud:

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{13-12}$$

hvor $x_1(t) = x(t)$ og $x_2(t) = x_1'(t) = x'(t)$. Vi kan nu bruge teorien i det nævnte afsnit til at løse problemet.

|||| Bevis

Den homogene 2. ordens lineære differentialligning (13-7) omformes til et 1. ordens differentialligningsystem:

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{13-13}$$

hvor $x_1(t) = x(t)$ er den søgte løsning, som udgør den fuldstændige løsningsmængde. Bevisførelsen tager udgangspunkt i sætningerne og metoderne i afsnit 12.1. Til det skal man bruge egenværdierne til systemmatricen $\mathbf{A}$:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0, \tag{13-14}$$

hvilket netop er karakterligningen tilhørende differentialligningen, og λ er egenværdier til systemmatricen $\mathbf{A}$. Røddernes udseende i denne ligning er afgørende for løsningen $x(t) = x_1(t)$, hvilket giver følgende tre delbeviser:

Første del
Karakterligningen har to forskellige reelle rødder: λ_1 og λ_2. Ved hjælp af metode 12.4 findes derved to lineært uafhængige løsninger $\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{v}_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t}$ og $\mathbf{u}_2(t) = \mathbf{v}_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$, hvor $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er egenvektorer tilhørende de to egenværdier respektivt. Den fuldstændige løsning er da udspændt af:

$$\mathbf{x}(t) = k_1 \mathbf{u}_1(t) + k_2 \mathbf{u}_2(t) = k_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + k_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2, \tag{13-15}$$

for alle $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Førstekoordinaten $x_1(t) = x(t)$ er den søgte løsning:

$$x_1(t) = x(t) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + c_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}, \tag{13-16}$$

der for alle de arbitrære konstanter $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ udgør den fuldstændige løsningsmængde. c_1 og c_2 er to nye indførte arbitrære konstanter og de er produktet mellem k-konstanterne og egenvektorernes førstekoordinat: $c_1 = k_1 v_{1_1}$ og $c_2 = k_2 v_{2_1}$.

Anden del
Karakterligningen har det komplekse rodpar $\lambda = \alpha + \beta i$ og $\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$. Den fuldstændige løsningsmængde er mulig at finde med metode 12.5.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= k_1 \mathbf{u}_1(t) + k_2 \mathbf{u}_2(t) \\ &= k_1 \mathrm{e}^{\alpha t} \left(\cos(\beta t) \mathrm{Re}(\mathbf{v}) - \sin(\beta t) \mathrm{Im}(\mathbf{v}) \right) + k_2 \mathrm{e}^{\alpha t} \left(\sin(\beta t) \mathrm{Re}(\mathbf{v}) + \cos(\beta t) \mathrm{Im}(\mathbf{v}) \right) \\ &= \mathrm{e}^{\alpha t} \cos(\beta t) \cdot (k_1 \mathrm{Re}(\mathbf{v}) + k_2 \mathrm{Im}(\mathbf{v})) + \mathrm{e}^{\alpha t} \sin(\beta t) \cdot (-k_1 \mathrm{Im}(\mathbf{v}) + k_2 \mathrm{Re}(\mathbf{v})). \end{aligned} \tag{13-17}$$

$\mathbf{v}$ er en egenvektor tilhørende λ og k_1 og k_2 er arbitrære konstanter. Førstekoordinaten $x_1(t) = x(t)$ er den søgte løsning, og er med ovenstående givet ved

$$x_1(t) = x(t) = c_1 \mathrm{e}^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 \mathrm{e}^{\alpha t} \sin(\beta t). \tag{13-18}$$

For alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ udgør $x(t)$ den fuldstændige løsningsmængde. c_1 og c_2 er to nye indførte arbitrære konstanter, som er givet ved $c_1 = k_1 \mathrm{Re}(v_1) + k_2 \mathrm{Im}(v_1)$ og $c_2 = -k_1 \mathrm{Im}(v_1) +$

$k_2\mathrm{Re}(v_1)$. v_1 er førstekoordinaten til $\mathbf{v}$.

Tredje del
Karakterligningen har dobbeltroden λ. Pga. systemmatricens udseende (matricen er ækvivalent med en øvre trekantsmatrix) er det muligt at se, at den geometriske multiplicitet af det tilhørende egenvektorrum er 1, og det er da muligt at bruge metode 12.7 til at finde den fuldstændige løsning.

$$\mathbf{x}(t) = k_1\mathbf{u}_1(t) + k_2\mathbf{u}_2(t) = k_1\mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v} + k_2(t\mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v} + \mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{b}) = \mathrm{e}^{\lambda t}(k_1\mathbf{v} + k_2\mathbf{b}) + k_2 t\mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{v}, \quad (13\text{-}19)$$

hvor $\mathbf{v}$ er en egenvektor tilhørende λ, $\mathbf{b}$ er løsning til ligningssystemet $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{b} = \mathbf{v}$ og k_1, k_2 er to arbitrære konstanter. Udtages førstekoordinaten, fås

$$x(t) = c_1\mathrm{e}^{\lambda t} + c_2 t\mathrm{e}^{\lambda t}, \quad (13\text{-}20)$$

der for alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ udgør den fuldstændige løsningsmængde. c_1 og c_2 er to nye indførte arbitrære konstanter, givet ved $c_1 = k_1v_1 + k_2b_1$ og $c_2 = k_2v_1$, hvor v_1 er førstekoordinaten i $\mathbf{v}$, ligesom b_1 er førstekoordinaten i $\mathbf{b}$.
Alle de tre forskellige tilfælde af rødder i karakterligningen er nu gennemgået, og sætningen er derfor bevist.

Læg mærke til, at det også er muligt at nå frem til karakterligningen ved at gætte på en løsning til differentialligningen med formen $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$. Man får da følgende:

$$x''(t) + a_1x'(t) + a_0x(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2\mathrm{e}^{\lambda t} + a_1\lambda\mathrm{e}^{\lambda t} + a_0\mathrm{e}^{\lambda t} = 0 \quad (13\text{-}21)$$

Divideres denne ligning igennem med $\mathrm{e}^{\lambda t}$, der er forskelligt fra nul for ethvert t, fremkommer karakterligningen.

■

|||| Eksempel 13.3 Løsning til homogen ligning

Givet den homogene differentialligning

$$x''(t) + x'(t) - 20x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (13\text{-}22)$$

som har karakterligningen

$$\lambda^2 + \lambda - 20 = 0. \quad (13\text{-}23)$$

Vi ønsker at bestemme den fuldstændige løsningsmængde L_{hom} til denne homogene differentialligning.

Karakterligningen har rødderne $\lambda_1 = -5$ og $\lambda = 4$, idet $-5 \cdot 4 = -20$ og $-(-5+4) = 1$ er karakterligningens koefficienter. Derfor er den fuldstændige løsningsmængde til den homogene differentialligning

$$L_{hom} = \left\{ c_1\mathrm{e}^{-5t} + c_2\mathrm{e}^{4t}, t \in \mathbb{R} \;\middle|\; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}, \quad (13\text{-}24)$$

som er fundet ved hjælp af sætning 13.2.

|||| Eksempel 13.4 Løsning til homogen ligning

Givet er den homogene 2. ordens differentialligning med konstante koefficienter

$$x''(t) - 8x'(t) + 16x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-25}$$

Vi ønsker at bestemme L_{hom}, som er den fuldstændige løsningsmængde til denne homogene differentialligning. Karakterligningen er

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 4)^2 = 0 \tag{13-26}$$

Vi har altså dobbeltroden $\lambda = 4$, og den fuldstændige løsningsmængde er udgjort af følgende funktioner for alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

$$x(t) = c_1 e^{4t} + c_2 t e^{4t}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-27}$$

Resultatet er bestemt ved hjælp sætning 13.2.

Som det ses er det forholds trivielt at bestemme løsningen til den homogene differentialligning. Det er oven i købet muligt at bestemme differentialligningen, hvis man har løsningen, altså "gå baglæns". Det illustreres i nedenstående eksempel.

|||| Eksempel 13.5 Fra løsning til ligning

Løsningen til en differentialligning kendes:

$$x(t) = c_1 e^{2t} \cos(7t) + c_2 e^{2t} \sin(7t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{13-28}$$

som for de arbitrære konstanter c_1, c_2 udgør den fuldstændige løsningsmængde.

Siden løsningen udelukkende indeholder led med arbitrære konstanter, må differentialligningen være homogen. Endvidere ses, at løsningsstrukturen ligner den i ligning (13-10) i sætning 13.2. Det betyder, at karakterligningen til den 2. ordens differentialligning har to komplekse rødder: $\lambda = 2 \pm 7i$. Karakterligningen sættes op:

$$\begin{aligned}(\lambda - 2 + 7i)(\lambda - 2 - 7i) = (\lambda - 2)^2 - (7i)^2 = \\ \lambda^2 - 4\lambda + 4 + 49 = \lambda^2 - 4\lambda + 53 = 0\end{aligned} \tag{13-29}$$

Direkte ud fra karakterligningens koefficienter kan differentialligningen opstilles:

$$x''(t) - 4x'(t) + 53x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-30}$$

Det ses også af sætning 13.2.

13.2 Den inhomogene ligning

I dette afsnit ønsker vi at bestemme en partikulær løsning $x_0(t)$ til den inhomogene differentialligning

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = q(t), \quad t \in I, q : I \to \mathbb{R}. \tag{13-31}$$

Vi ønsker at finde en partikulær løsning, fordi den indgår i den fuldstændige løsningsmængde L_{inhom} sammen med den fuldstændige løsningsmængde L_{hom} til den tilsvarende homogene differentialligning jævnfør metode 13.1.

I denne eNote bruges ikke nogen konkret løsningsformel, i stedet bruges forskellige metoder, alt efter formen af $q(t)$. Generelt kan man sige, at den partikulære løsning $x_0(t)$ har en form som ligner $q(t)$, hvilket fremgår af følgende metoder. Læg mærke til, at disse metoder dækker nogle ofte forekommende former på $q(t)$, men ikke alle.

Endvidere vil et begrebet *superpositionsprincippet* blive behandlet. Superposition er en grundlæggende egenskab ved lineære ligninger og lineære differentialligninger. Pointen er at opsplitte en differentialligning i flere, hvor venstresiderne er ens, mens summen af højresiderne er lig den oprindelige differentiallignings højreside. Hvis den oprindelige differentialligning har højresiden $q(t) = \sin(2t) + 2t^2$, kan det være en ide, at opdele differentialligningen i to, hvor højresiderne bliver $q_1(t) = \sin(2t)$ henholdsvis $q_2(t) = 2t^2$. De to differentialligninger er nemmere at bestemme partikulære løsninger til. En partikulær løsning til den egentlige differentialligning vil da være summen af de to partikulære løsninger.

Slutteligt vil *den komplekse gættemetode* blive introduceret. Den komplekse gættemetode kan bruges, hvis højresiden $q(t)$ i differentialligningen er realdelen af et simplere komplekst udtryk. Det kunne for eksempel være, at $q(t) = \mathrm{e}^t \sin(3t)$, som er realdelen af $-i\mathrm{e}^{(1+3i)t}$. Det er nemmere at finde en løsning til en differentialligning, hvor højresiden er simpel, og derfor løses den tilsvarende komplekse ligning i stedet. Løsningerne til den reelle differentialligning og den tilsvarende komplekse differentialligning er nært forbundet.

13.2.1 Generelle løsningsmetoder

|||| Metode 13.6 Polynomium

En partikulær løsning $x_0(t)$ til den inhomogene differentialligning

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = q(t), \quad t \in I, \tag{13-32}$$

hvor q er et n-te grads polynomium, er også et polynomium af højst grad n:

$$x_0(t) = b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \ldots + b_1 t + b_0, \quad t \in I, \tag{13-33}$$

hvor $b_0, b_1, \ldots, b_n$ bestemmes ved indsættelse af udtrykket for $x_0(t)$ som løsning i den inhomogene differentialligning.

|||| Eksempel 13.7 Polynomium

Givet er den inhomogene 2. ordens differentialligning med konstante koefficienter

$$x''(t) - 3x'(t) + x(t) = 2t^2 - 16t + 25, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-34}$$

Vi ønsker at bestemme en partikulær løsning $x_0(t)$ til den inhomogene differentialligning. Da højresiden er et andengradspolynomium, er denne løsning også et polynomium af højst grad 2 jævnfør metode 13.6, altså er

$$x_0(t) = b_2 t^2 + b_1 t + b_0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-35}$$

Koefficienterne bestemmes ved at indsætte udtrykket i differentialligningen sammen med $x_0'(t) = 2b_2 t + b_1$ og $x_0''(t) = 2b_2$.

$$\begin{aligned} 2b_2 - 3(2b_2 t + b_1) + b_2 t^2 + b_1 t + b_0 = 2t^2 - 16t + 25 \Leftrightarrow \\ (b_2 - 2)t^2 + (-6b_2 + b_1 + 16)t + (2b_2 - 3b_1 + b_0 - 25) = 0 \Leftrightarrow \\ b_2 - 2 = 0 \;\text{ og }\; -6b_2 + b_1 + 16 = 0 \;\text{ og }\; 2b_2 - 3b_1 + b_0 - 25 = 0 \end{aligned} \tag{13-36}$$

Den første ligning giver nemt $b_2 = 2$, hvilket indsat i den anden ligning giver $b_1 = -4$. Slutteligt giver dette i den sidste ligning, at $b_0 = 9$. Derfor er en partikulær løsning til ligning (13-34) givet ved

$$x_0(t) = 2t^2 - 4t + 9, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-37}$$

|||| Metode 13.8 Trigonometrisk

En partikulær løsning $x_0(t)$ til den inhomogene differentialligning

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = q(t), \quad t \in I, \tag{13-38}$$

hvor $q(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$, har samme form:

$$x_0(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t), \quad t \in I, \tag{13-39}$$

hvor A og B bestemmes ved at indsætte udtrykket for $x_0(t)$ som løsning i den inhomogene differentialligning.

Det er også muligt at bestemme en partikulær løsning til en differentialligning som den i metode 13.8 ved hjælp af *den komplekse gættemetode*. Se derfor eventuelt afsnit 13.2.3.

|||| Eksempel 13.9 Trigonometrisk

Givet er differentialligningen

$$x''(t) + x'(t) - x(t) = -20\sin(3t) + 6\cos(3t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-40}$$

En partikulær løsning $x_0(t)$ til differentialligningen ønskes bestemt. Ved hjælp af metode 13.8 er en partikulær løsning

$$x_0(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) = A\sin(3t) + B\cos(3t). \tag{13-41}$$

Vi har desuden

$$\begin{aligned} x_0'(t) &= 3A\cos(3t) - 3B\sin(3t) \\ x_0''(t) &= -9A\sin(3t) - 9B\cos(3t) \end{aligned} \tag{13-42}$$

Dette indsættes i differentialligningen.

$$\begin{aligned} (-9A\sin(3t) - 9B\cos(3t)) + (3A\cos(3t) - 3B\sin(3t)) - (A\sin(3t) + B\cos(3t)) \\ = -20\sin(3t) + 6\cos(3t) \Leftrightarrow \\ (-9A - 3B - A + 20)\sin(3t) + (-9B + 3A - B - 6)\cos(3t) = 0 \Leftrightarrow \\ -9A - 3B - A + 20 = 0 \text{ og } \; -9B + 3A - B - 6 = 0 \end{aligned} \tag{13-43}$$

Dette er to ligninger med to ubekendte. Indsættes $A = -\frac{3}{10}B + 2$ fra den første ligning i den anden fås

$$-9B + 3\left(-\frac{3}{10}B + 2\right) - B - 6 = 0 \Leftrightarrow -10B - \frac{9}{10}B = 0 \Leftrightarrow B = 0 \tag{13-44}$$

Af dette fås $A = 2$, og en partikulær løsning til differentialligningen er da

$$x_0(t) = 2\sin(3t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-45}$$

Læg mærke til at tallet $\omega = 3$ er det samme under både cosinus og sinus i eksempel 13.9, hvilket også er det eneste metode 13.8 faciliterer. Hvis der optræder to forskellige tal er metode 13.8 ikke brugbar, for eksempel $q(t) = 3\sin(t) + \cos(10t)$. Det er *superpositionsprincippet* eller *den komplekse gættemetode* til gengæld, og dette bliver beskrevet i afsnit 13.2.2 og afsnit 13.2.3.

|||| Metode 13.10 Eksponentialfunktion

En partikulær løsning $x_0(t)$ til den inhomogene differentialligning

$$x''(t) + a_1x'(t) + a_0x(t) = q(t), \quad t \in I, \tag{13-46}$$

hvor $q(t) = \beta e^{\alpha t}$ og $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, er også en eksponentialfunktion:

$$x_0(t) = \gamma e^{\alpha t}, \quad t \in I, \tag{13-47}$$

hvor γ bestemmes ved indsættelse af udtrykket for $x_0(t)$ som løsning i den inhomogene differentialligning. Det præciseres, at α ikke må være rod i differentialligningens karakterligning.

Som det kommenteres til sidst i metode 13.10 må eksponenten α ikke være rod i karakterligningen. Hvis det er tilfældet vil gættet være en løsning til den tilsvarende homogene differentialligning jævnfør sætning 13.2. Dette er et gennemgående "problem" i alle ordener af differentialligninger.

|||| Eksempel 13.11 Eksponentialfunktion

Givet er differentialligningen

$$x''(t) + 11x'(t) + 5x(t) = -20e^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-48}$$

Vi ønsker at bestemme en partikulær løsning $x_0(t)$ til differentialligningen. Ifølge metode 13.10 er en partikulær løsning givet ved $x_0(t) = \gamma e^{\alpha t} = \gamma e^{-t}$. Vi ved endnu ikke om $\alpha = -1$ er rod i karakterligningen, men hvis det går godt med at finde γ, er den ikke. Vi har $x_0'(t) = -\gamma e^{-t}$ og $x_0''(t) = \gamma e^{-t}$, og dette indsættes i differentialligningen:

$$\gamma e^{-t} + 11(-\gamma e^{-t}) + 5\gamma e^{-t} = -20e^{-t} \Leftrightarrow -5\gamma = -20 \Leftrightarrow \gamma = 4 \tag{13-49}$$

Det er altså lykkedes at bestemme γ, og derfor haves en partikulær løsning til differentialligningen:

$$x_0(t) = 4\mathrm{e}^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-50}$$

|||| Metode 13.12 Uheldig eksponentialfunktion

En partikulær løsning $x_0(t)$ til den inhomogene differentialligning

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = q(t), \quad t \in I, \tag{13-51}$$

hvor $q(t) = \beta\mathrm{e}^{\lambda t}$, $\beta \in \mathbb{R}$ og λ er rod i differentialligningens karakterligning, har følgende form:

$$x_0(t) = \gamma t\mathrm{e}^{\lambda t}, \quad t \in I, \tag{13-52}$$

hvor γ bestemmes ved indsættelse af udtrykket for $x_0(t)$ som løsning i den inhomogene differentialligning.

|||| Eksempel 13.13 Uheldig eksponentialfunktion

Givet er differentialligningen

$$x''(t) - 7x'(t) + 10x(t) = -3\mathrm{e}^{2t}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-53}$$

Vi ønsker at bestemme en partikulær løsning til differentialligningen. Vi prøver først at bruge metode 13.10, og gætter på en løsning af formen $x_0(t) = \gamma\mathrm{e}^{\alpha t} = \gamma\mathrm{e}^{2t}$. Man har da $x_0'(t) = 2\gamma\mathrm{e}^{2t}$ og $x_0''(t) = 4\gamma\mathrm{e}^{2t}$, hvilket ved indsættelse i differentialligningen giver

$$4\gamma\mathrm{e}^{2t} - 7\cdot 2\gamma\mathrm{e}^{2t} + 10\gamma\mathrm{e}^{2t} = -3\mathrm{e}^{2t} \Leftrightarrow 0 = -3 \tag{13-54}$$

Det ses at γ ikke optræder i den sidste ligning, og at ligningen iøvrigt er usand. Derfor må $\alpha = \lambda$ være rod i det karakterligningen. Karakterligningen ser således ud:

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \tag{13-55}$$

Denne andengradsligning har rødderne 2 og 5, da $2\cdot 5 = 10$ og $-(2+5) = -7$. Det passer altså, at $\alpha = 2$ er rod.

På grund af overstående bruges nu metode 13.12, og vi gætter på en løsning af formen $x_0(t) = \gamma t\mathrm{e}^{\lambda t} = \gamma t\mathrm{e}^{2t}$. Vi har da

$$\begin{aligned} x_0'(t) &= \gamma\mathrm{e}^{2t} + 2\gamma t\mathrm{e}^{2t} \\ x_0''(t) &= 2\gamma\mathrm{e}^{2t} + 2\gamma\mathrm{e}^{2t} + 4\gamma t\mathrm{e}^{2t} = 4\gamma\mathrm{e}^{2t} + 4\gamma t\mathrm{e}^{2t} \end{aligned} \tag{13-56}$$

Dette indsættes i differentialligningen for at bestemme γ.

$$\begin{aligned} 4\gamma e^{2t} + 4\gamma t e^{2t} - 7(\gamma e^{2t} + 2\gamma t e^{2t}) + 10\gamma t e^{2t} &= -3e^{2t} \Leftrightarrow \\ (4\gamma - 14\gamma + 10\gamma)t + (4\gamma - 7\gamma + 3) &= 0 \Leftrightarrow \\ \gamma &= 1 \end{aligned} \tag{13-57}$$

Det er nu lykkedes at finde γ, og derfor er en partikulær løsning til differentialligningen

$$x_0(t) = te^{2t}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-58}$$

13.2.2 Superpositionsprincippet

Inden for alle typer af lineære differentialligninger findes konceptet ***superpositionsprincippet***. Vi gennemgår det her for 2. ordens lineære differentialligninger med konstante koefficienter. Superpositionsprincippet bruges her til at bestemme en partikulær løsning til den inhomgene differentialligning, når højresiden ($q(t)$) er en kombination (addition) af flere typer af funktioner, f.eks. en sinusfunktion lagt sammen med et polynomium.

|||| Sætning 13.14 Superpositionsprincippet

Hvis $x_{0_i}(t)$ er en partikulær løsning til den inhomogene differentialligning

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = q_i(t) \tag{13-59}$$

for ethvert $i = 1, \ldots, n$, er

$$x_0(t) = x_{0_1}(t) + x_{0_2}(t) + \ldots + x_{0_n}(t) \tag{13-60}$$

en partikulær løsning til

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = q(t) = q_1(t) + q_2(t) + \ldots + q_n(t), \tag{13-61}$$

hvor højresiderne q og $q_1, q_2, \ldots, q_n$ er kontinuerte funktioner i et interval I.

|||| Bevis

Superposition er en følge af at differentialligningerne er lineære. Vi gennemfører her et generelt bevis for alle typer af lineære differentialligninger.

Venstresiden af en differentialligning kaldes $f(x(t))$. Vi opstiller nu n differentialligninger:

$$f(x_{0_1}(t)) = q_1(t),\ f(x_{0_2}(t)) = q_2(t),\ \ldots,\ f(x_{0_n}(t)) = q_n(t) \tag{13-62}$$

hvor $x_{0_1}, x_{0_2}, \ldots, x_{0_n}$ er partikulære løsninger til de respektive inhomogene differentialligninger. Vi definerer nu $x_0 = x_{0_1} + x_{0_2} + \ldots + x_{0_n}$ og indsætter denne i venstresiden:

$$\begin{aligned} f(x_0(t)) &= f(x_{0_1}(t) + x_{0_2}(t) + \ldots + x_{0_n}(t)) \\ &= f(x_{0_1}(t)) + f(x_{0_2}(t)) + \ldots + f(x_{0_n}(t)) \\ &= q_1(t) + q_2(t) + \ldots + q_n(t) \end{aligned} \tag{13-63}$$

På højresiden fås en sum af funktionerne $q_1, q_2, \ldots, q_n$, som kaldes for q. Sætningen er da bevist.

■

|||| Eksempel 13.15 Superposition

Givet er den inhomgene differentialligning

$$x''(t) - x'(t) - 3x(t) = 9e^{4t} + 3t - 14, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-64}$$

Vi ønsker at bestemme en partikulær løsning $x_0(t)$ til differentialligningen. Det ses, at højresiden er en kombination af en eksponentialfunktion ($q_1(t) = 9e^{4t}$) og et polynomium ($q_2(t) = 3t - 14$). Derfor bruges superpositionsprincippet 13.14 og differentialligningen opsplittes i to dele.

$$x''(t) - x'(t) - 3x(t) = 9e^{4t} = q_1(t) \tag{13-65}$$

$$x''(t) - x'(t) - 3x(t) = 3t - 14 = q_2(t) \tag{13-66}$$

Først behandles ligning (13-65), hvortil vi skal bruge metode 13.10. En partikulær løsning er da af formen $x_{0_1}(t) = \gamma e^{\alpha t} = \gamma e^{4t}$. Vi har $x'_{0_1}(t) = 4\gamma e^{4t}$ og $x''_{0_1}(t) = 16\gamma e^{4t}$. Dette indsættes i ligningen.

$$16\gamma e^{4t} - 4\gamma e^{4t} - 3\gamma e^{4t} = 9e^{4t} \Leftrightarrow \gamma = 1 \tag{13-67}$$

Derfor er $x_{0_1}(t) = e^{4t}$.

Nu behandles ligning (13-66), hvor en partikulær løsning er et polynomium af højst grad 1, jf. metode 13.6, altså er $x_{0_2}(t) = b_1 t + b_0$. Derfor er $x'_{0_2}(t) = b_1$ og $x''_{0_2}(t) = 0$. Dette indsættes i differentialligningen.

$$0 - b_1 - 3(b_1 t + b_0) = 3t - 14 \Leftrightarrow (-3b_1 - 3)t + (-b_1 - 3b_0 + 14) = 0 \tag{13-68}$$

Vi har således to ligninger med to ubekendte, og vi finder, at $b_1 = -1$, og derfor er $b_0 = 5$. Altså er en partikulær løsning $x_{0_2}(t) = -t + 5$. Den samlede partikulære løsning til (13-64) findes da som summen af de to allerede fundne partikulære løsninger til de to opsplittede ligninger:

$$x_0(t) = x_{0_1}(t) + x_{0_2}(t) = \mathrm{e}^{4t} - t + 5, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-69}$$

13.2.3 Den komplekse gættemetode

Den komplekse gættemetode benyttes når det er bekvemt at omskrive differentialligningens højreside til en kompleks højreside, således at den givne reelle højreside er realdelen af den komplekse.

Er højresiden for eksempel $2\mathrm{e}^{2t}\cos(3t)$, og man til denne lægger $i(-2\mathrm{e}^{2t}\sin(3t))$, fås

$$2\mathrm{e}^{2t}(\cos(3t) - i\sin(3t)) = 2\mathrm{e}^{(2-3i)t}\,. \tag{13-70}$$

Her gælder der klart nok at $\mathrm{Re}(2\mathrm{e}^{(2-3i)t}) = 2\mathrm{e}^{2t}\cos(3t)$. Man finder nu en kompleks partikulær løsning til differentialligningen med den komplekse højreside. Den ønskede reelle partikulære løsning til den oprindelige differentialligning er da realdelen af den fundne komplekse løsning.

Bemærk at denne metode kan kun benyttes fordi differentialligningen er lineær. Det er netop lineariteten der sikrer at realdelen af den fundne komplekse løsning er den ønskede reelle løsning. Dette vises ved at vi opfatter differentialligningens venstreside som en lineær afbildning $f(z(t))$ i mængden af komplekse funktioner af en reel variabel og bruger følgende generelle sætning:

|||| Sætning 13.16

Der er givet en lineær afbildning $f : (C^\infty(\mathbb{R}), \mathbb{C}) \to (C^\infty(\mathbb{R}), \mathbb{C})$ og ligningen

$$f(z(t)) = s(t)\,. \tag{13-71}$$

Hvis vi sætter $z(t)$ og $s(t)$ på rektangulær form ved $z(t) = x(t) + i \cdot y(t)$ og $s(t) = q(t) + i \cdot r(t)$, så gælder der at (13-71) sand hvis og kun hvis

$$f(x(t)) = q(t) \quad \text{og} \quad f(y(t)) = r(t)\,. \tag{13-72}$$

|||| Bevis

Givet er funktionen $z(t)$ og Lad den lineære afbildning f og funktionerne $z(t)$ og $s(t)$ være givet som i sætning 13.16. Som følge af egenskaberne ved lineære afbildninger, se definition 11.2, gælder der følgende:

$$\begin{aligned} f(z(t)) = s(t) \Leftrightarrow \\ f(x(t) + i \cdot y(t)) = q(t) + i \cdot r(t) \Leftrightarrow \\ f(x(t)) + i \cdot f(y(t)) = q(t) + i \cdot r(t) \Leftrightarrow \\ f(x(t)) = q(t) \;\text{ og }\; f(y(t)) = r(t)\,. \end{aligned} \tag{13-73}$$

Sætningen er dermed bevist.

■

|||| Metode 13.17 Den komplekse gættemetode

En partikulær løsning $x_0(t)$ til den reelle inhomogene differentialligning

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = q(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{13-74}$$

hvor a_0 og a_1 er reelle koefficienter og

$$q(t) = \mathrm{Re}\Big((a+bi)\mathrm{e}^{(\alpha+\omega i)t}\Big) = a\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\omega t) - b\mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\omega t), \tag{13-75}$$

bestemmes i første omgang ved at finde den tilsvarende komplekse partikulære løsning til følgende komplekse differentialligning

$$z''(t) + a_1 z'(t) + a_0 z(t) = (a+bi)\mathrm{e}^{(\alpha+\omega i)t}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{13-76}$$

Den komplekse partikulære løsning har formen $z_0(t) = (c+di)\mathrm{e}^{(\alpha+\omega i)t}$, hvor c og d bestemmes ved indsættelse af $z_0(t)$ i differentialligningen (13-76).

Efterfølgende er en partikulær løsning til differentialligningen (13-74) givet ved

$$x_0(t) = \mathrm{Re}(z_0(t))\,. \tag{13-77}$$

En afgørende grund til at man benytter den komplekse gættemetoder, er at det er så enkelt at differentiere eksponentialfuntionen, selv når den er kompleks.

|||| Eksempel 13.18 Den komplekse gættemetode

Givet er en 2. ordens inhomogene differentialligning:

$$x''(t) - 2x'(t) - 2x(t) = 19\mathrm{e}^{4t}\cos(t) - 35\mathrm{e}^{4t}\sin(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-78}$$

Vi ønsker at bestemme en partikulær løsning til denne differentialligning. Det er oplagt at bruge *den komplekse gættemetode* i metode 13.17. Det ses i første omgang at der gælder følgende omkring højresiden:

$$q(t) = 19\mathrm{e}^{4t}\cos(t) - 35\mathrm{e}^{4t}\sin(t) = \mathrm{Re}\Big((19+35i)\mathrm{e}^{(4+i)t}\Big). \tag{13-79}$$

Vi skal nu i stedet finde en kompleks partikulær løsning til denne differentialligning

$$z''(t) - 2z'(t) - 2z(t) = (19+35i)\mathrm{e}^{(4+i)t}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-80}$$

ved at gætte på at $z_0(t) = (c+di)\mathrm{e}^{(4+i)t}$ er en løsning. Vi har også

$$\begin{aligned} z_0'(t) &= (c+di)(4+i)\mathrm{e}^{(4+i)t} = (4c-d+(c+4d)i)\,\mathrm{e}^{(4+i)t} \quad \text{og} \\ z_0''(t) &= (4c-d+(c+4d)i)(4+i)\mathrm{e}^{(4+i)t} = (15c-8d+(8c+15d)i)\mathrm{e}^{(4+i)t} \end{aligned} \tag{13-81}$$

Disse udtryk indsættes i den komplekse differentialligning for at bestemme c og d:

$$\begin{aligned} (15c-8d+(8c+15d)i)\mathrm{e}^{(4+i)t} - 2(4c-d+(c+4d)i)\mathrm{e}^{(4+i)t} - 2(c+di)\mathrm{e}^{(4+i)t} \\ = (19+35i)\mathrm{e}^{(4+i)t} \;\Leftrightarrow \\ 15c-8d+(8c+15d)i - 2(4c-d+(c+4d)i) - 2(c+di) = 19+35i \;\Leftrightarrow \\ 5c-6d+(6c+5d)i = 19+35i \;\Leftrightarrow \\ 5c-6d = 19 \;\text{ og }\; 6c+5d = 35 \end{aligned} \tag{13-82}$$

Dette er to ligninger med to ubekendte. Ligningssystemets totalmatrix opskrives:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & -6 & 19 \\ 6 & 5 & 35 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{6}{5} & \frac{19}{5} \\ 0 & \frac{61}{5} & \frac{61}{5} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]. \tag{13-83}$$

Vi har altså at $c = 5$ og $d = 1$, hvilket giver $z_0(t) = (5+i)\mathrm{e}^{(4+i)t}$. En partikulær løsning til differentialligning (13-78) er derfor

$$x_0(t) = \mathrm{Re}(z_0(t)) = \mathrm{Re}\Big((5+i)\mathrm{e}^{(4+i)t}\Big) = 5\mathrm{e}^{4t}\cos(t) - \mathrm{e}^{4t}\sin(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-84}$$

13.3 Eksistens og entydighed

Vi formulerer her en sætning om ***eksistens og entydighed*** for differentialligninger af 2. orden med konstante koefficienter. Vi har behov for to *begyndelsesværdibetingelser*, funktionens værdi og den aflededes værdi i den valgte begyndelsesværdi.

|||| Sætning 13.19 Eksistens og entydighed

Til ethvert talsæt (t_0, x_0, v_0) (*dobbelt begyndelsesværdibetingelse*), findes netop én løsning $x(t)$ til differentialligningen

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = q(t), \quad t \in I, q : I \to \mathbb{R}, \tag{13-85}$$

således at

$$x(t_0) = x_0 \quad \text{og} \quad x'(t_0) = v_0, \tag{13-86}$$

hvor $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}$ og $v_0 \in \mathbb{R}$.

|||| Eksempel 13.20 Eksistens og entydighed

Givet differentialligningen

$$x''(t) - 5x'(t) - 36x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-87}$$

Det ses at differentialligningen er homogen. Den har karakterligningen

$$\lambda^2 - 5\lambda - 36 = 0. \tag{13-88}$$

Vi ønsker at bestemme en funktion $x(t)$, som er løsning til differentialligningen og har begyndelsesværdibetingelsen $(t_0, x_0, v_0) = (0, 5, 6)$. Karakterligningen har rødderne $\lambda_1 = -4$ og $\lambda_2 = 9$, da $-4 \cdot 9 = -36$ og $-(9 + (-4)) = 5$ er ligningens koefficienter. Derfor er den fuldstændige løsningsmængde til den homogene differentialligning (ved hjælp af sætning 13.2) udspændt af følgende funktioner for alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

$$x(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{9t}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-89}$$

Man har da

$$x'(t) = -4c_1 e^{-4t} + 9c_2 e^{9t} \tag{13-90}$$

Indsættes begyndelsesværdibetingelsen ($x(0) = 5$ og $x'(0) = 6$) i de to ligninger, kan man løse for (c_1, c_2).

$$\begin{aligned} 5 &= c_1 + c_2 \\ 6 &= -4c_1 + 9c_2 \end{aligned} \tag{13-91}$$

da $\mathrm{e}^0 = 1$. Indsættes $c_2 = 5 - c_1$ i den anden ligning fås

$$6 = -4c_1 + 9(5 - c_1) = -13c_1 + 45 \Leftrightarrow c_1 = \frac{6-45}{-13} = 3 \tag{13-92}$$

Derfor er $c_2 = 5 - 3 = 2$, og den betingede løsning er

$$x(t) = 3\mathrm{e}^{-4t} + 2\mathrm{e}^{9t}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{13-93}$$

Læg mærke til, at man godt kan bestemme en entydig og betinget løsning til en homogen differentialligning, som i dette tilfælde. Højresiden behøver ikke være forskellig fra nul. Den fuldstændige løsningsmængde til differentialligningen er nemlig $L_{inhom} = L_{hom}$, da $x_0(t) = 0$.

Herunder er et eksempel som gennemgår hele løsningsproceduren for en inhomogen differentialligning med en dobbelt begyndelsesværdibetingelse. Efter det kommer et eksempel, hvor formålet er at finde en differentialligning, hvor den fuldstændige løsningsmængde er opgivet. Den falder derfor i tråd med eksempel 13.5, og nu er der også en højreside forskellig fra nul.

|||| Eksempel 13.21 Opsamlende eksempel

Givet differentialligningen

$$x''(t) + 6x'(t) + 5x(t) = 20t^2 + 48t + 13, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-94}$$

Vi bestemmer den fuldstændige løsningsmængde L_{inhom}. Derefter skal den betingede løsning $x(t)$ som opfylder begyndelsesværdibetingelserne $(t_0, x_0, v_0) = (0, 5, -8)$, bestemmes.

Først løses den tilsvarende homogene differentialligning, og karakterligningen ser således ud:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0 \tag{13-95}$$

Denne har rødderne $\lambda_1 = -5$ og $\lambda_2 = -1$, da $(\lambda+5)(\lambda+1) = \lambda^2 + 6\lambda + 5$. Da disse rødder er reelle og forskellige, jævnfør sætning 13.2, er den fuldstændige homogene løsningsmængde givet ved

$$L_{hom} = \left\{ c_1\mathrm{e}^{-5t} + c_2\mathrm{e}^{-t}\ , t \in \mathbb{R} \;\middle|\; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}. \tag{13-96}$$

Nu bestemmes en partikulær løsning til den inhomogene ligning. Da højresiden er et andengradspolynomium gætter vi på, at $x_0(t) = b_2t^2 + b_1t + b_0$, ved hjælp af metode 13.6. Vi har da, at $x_0'(t) = 2b_2t + b_1$ og $x_0''(t) = 2b_2$. Dette indsættes i differentialligningen.

$$\begin{aligned} 2b_2 + 6(2b_2t + b_1) + 5(b_2t^2 + b_1t + b_0) = 20t^2 + 48t + 13 \Leftrightarrow \\ (5b_2 - 20)t^2 + (12b_2 + 5b_1 - 48)t + (2b_2 + 6b_1 + 5b_0 - 13) = 0 \Leftrightarrow \\ 5b_2 - 20 = 0 \;\text{ og }\; 12b_2 + 5b_1 - 48 = 0 \;\text{ og }\; 2b_2 + 6b_1 + 5b_0 - 13 = 0 \end{aligned} \tag{13-97}$$

Den første ligning giver nemt $b_2 = 4$. Indsættes det i den anden ligning fås ved lidt hovedregning $b_1 = 0$. Til sidst i den tredje ligning får man $b_0 = 1$. En partikulær løsning til den inhomogene differentialligning er derfor

$$x_0(t) = 4t^2 + 1, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-98}$$

Ifølge struktursætningen, for eksempel metode 13.1, er den fuldstændige løsningsmængde til den inhomogene differentialligning givet ved

$$L_{inhom} = x_0(t) + L_{hom} = \left\{ 4t^2 + 1 + c_1 \mathrm{e}^{-5t} + c_2 \mathrm{e}^{-t}, t \in \mathbb{R} \;\middle|\; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\} \tag{13-99}$$

Vi bestemmer nu den løsning der opfylder de givne begyndelsesværdibetingelser. En vilkårlig løsning har formen

$$x(t) = 4t^2 + 1 + c_1 \mathrm{e}^{-5t} + c_2 \mathrm{e}^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-100}$$

Nu bestemmes den afledede.

$$x'(t) = 8t - 5c_1 \mathrm{e}^{-5t} - c_2 \mathrm{e}^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-101}$$

Indsættes $x(0) = 5$ og $x'(0) = -8$ fås de to ligninger

$$\begin{aligned} 5 &= \quad c_1 + c_2 + 1 \\ -8 &= -5c_1 - c_2 \end{aligned} \tag{13-102}$$

Indsættes $c_1 = 4 - c_2$ fra den første ligning i den anden fås

$$-8 = -5(4 - c_2) - c_2 \Leftrightarrow -8 + 20 = 4c_2 \Leftrightarrow c_2 = 3 \tag{13-103}$$

Det giver $c_1 = 1$, og den betingede løsning er derfor

$$x(t) = \mathrm{e}^{-5t} + 3\mathrm{e}^{-t} + 4t^2 + 1, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-104}$$

|||| Eksempel 13.22 Fra løsning til ligning

Givet den fuldstændige løsning til en lineær 2. ordens differentialligning med konstante koefficienter:

$$L_{inhom} = \left\{ c_1 \mathrm{e}^{-2t} + c_2 \mathrm{e}^{2t} - \tfrac{1}{2}\sin(2t), t \in \mathbb{R} \;\middle|\; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\} \tag{13-105}$$

Det er nu formålet at opstille differentialligningen, som generelt har dette udseende:

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = q(t) \tag{13-106}$$

Vi skal altså bestemme a_1, a_0 og $q(t)$.

I første omgang splittes løsningen op i en partikulær løsning og den fuldstændige homogene løsningsmængde:

$$x_0(t) = -\tfrac{1}{2}\sin(2t),\ t \in \mathbb{R} \quad \text{og} \quad L_{hom} = \left\{\, c_1 \mathrm{e}^{-2t} + c_2 \mathrm{e}^{2t}\ t \in \mathbb{R} \,\middle|\, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \,\right\} \tag{13-107}$$

Nu betragtes den fuldstændige homogene løsning. Udseendet på denne stemmer overens med den første situation i sætning 13.2. Karakterligningen har altså to reelle rødder, og de er $\lambda_1 = -2$ og $\lambda_2 = 2$. Karakterligningen er derfor

$$(\lambda + 2)(\lambda - 2) = \lambda^2 - 4 = 0 \tag{13-108}$$

Dette afgør koefficienterne på venstresiden af differentialligningen: $a_1 = 0$ og $a_0 = -4$. Differentialligningen ser altså indtil videre således ud:

$$x''(t) - 4x(t) = q(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-109}$$

Da $x_0(t)$ er en partikulær løsning til den inhomogene differentialligning kan højresiden $q(t)$ bestemmes ved at indsætte $x_0(t)$. Vi har, at $x_0''(t) = 2\sin(2t)$.

$$\begin{aligned} x_0''(t) - 4x_0(t) &= q(t) \ \Leftrightarrow \\ 2\sin(2t) - 4(-\tfrac{1}{2}\sin(2t)) &= q(t) \ \Leftrightarrow \\ 4\sin(2t) &= q(t) \end{aligned} \tag{13-110}$$

Nu er samtlige ukendte i differentialligningen bestemt:

$$x''(t) - 4x(t) = 4\sin(2t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13-111}$$

I dette notesystem beskæftiger vi os ikke med systemer af 2. ordens homogene lineære differentialligninger med konstante koefficienter. Det skal dog tilføjes at vi allerede med den gennemgåede teori og lidt snilde kan løse sådanne problemer. Hvis vi har et system af 2. ordens homogene differentialligninger, kan vi betragte hver differentialligning for sig. Ved hjælp af afsnit 12.4 kan en sådan ligning omformes til 2 ligninger af 1. orden. Gøres det med alle differentialligningerne i systemet, ender vi med dobbelt så mange differentialligninger, nu af 1. orden. Dette nye system kan vi løse med den gennemgåede teori i eNote 12. Systemer af 2. ordens homogene lineære differentialligninger findes mange steder i mekanisk fysik, kemi, elektromagnetisme m.fl.

13.4 Opsummering

I denne note skrives lineære 2. ordens differentialligninger med konstante koefficienter, som generelt har dette udseende:

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = q(t) \tag{13-112}$$

- Disse differentialligninger løses ved først at bestemme den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene differentialligning og derefter lægge den sammen med en partikulær løsning til den inhomogene differentialligning, se metode 13.1.

- Den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene differentialligning bestemmes ved at finde rødderne til differentialligningens *karakterligning*:

  $$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{13-113}$$

  Der er principielt tre udfald, se sætning 13.2.

- En partikulær løsning bestemmes ved at "gætte" på en løsning, som har samme udseende som højresiden $q(t)$. Er $q(t)$ for eksempel et polynomium er $x_0(t)$ også et polynomium af højst samme grad. I noten gives mange eksempler på udseender, se afsnit 13.2.

- Specielt findes *den komplekse gættemetode* til at bestemme den partikulære løsning $x_0(t)$. Den komplekse gættemetode kan bruges, når højresiden har dette udseende:

  $$q(t) = \mathrm{Re}\Big((a+bi)\mathrm{e}^{(\alpha+\omega i)t}\Big) = a\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\omega t) - b\mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\omega t). \tag{13-114}$$

  Løsningen bestemmes da ved at omdanne differentialligningen til den tilsvarende komplekse form, se metode 13.17.

- Endvidere introduceres *superpositionsprincippet*, som er et generelt princip, der findes indenfor alle typer af lineære differentialligninger. Ideen er at to partikulære løsninger kan lægges sammen. Når de sættes ind i differentialligningen vil de ikke have nogen indflydelse på hinanden, hvorfor højresiden ligeså vil kunne deles i to led, der hver tilhører en af de to løsninger. Det kan bruges til at bestemme partikulære løsning, når højresiden er en sum af for eksempel en sinusfunktion og et polynomium. Se for eksempel eksempel 13.15.

- Endvidere formuleres en *eksistens- og entydighedssætning*, se sætning 13.19. Her står at man med to særlige *begyndelsesværdibetingelser* kan bestemme en entydig og betinget løsning til en 2. ordens differentialligning.