eNote 8

Lineære Afbildninger

Denne eNote undersøger en vigtig type af afbildninger mellem vektorrum, nemlig lineære afbildninger. Det vises at kernen og billedrummet for lineære afbildninger er underrum i henholdsvis definitionsrummet og dispositionsrummet. Når der er valgt basis i definitionsrummet og i dispositionsrummet, kan spørgsmål vedrørende lineære afbildninger standardiseres, idet en lineær afbildning udtrykkes som et produkt mellem en såkaldt afbildningsmatrix og koordinaterne for de vektorer der ønskes afbildet. Da afbildningsmatricer afhænger af de to valgte baser, beskrives det hvordan afbildningsmatricerne ændres når en af baserne eller de begge udskiftes med andre. Forudsætninger for eNoten er viden om lineære ligningssystemer, se eNote 2, matrixalgebra, se eNote 3 og vektorrum, se eNote 7.

8.1 Om afbildninger

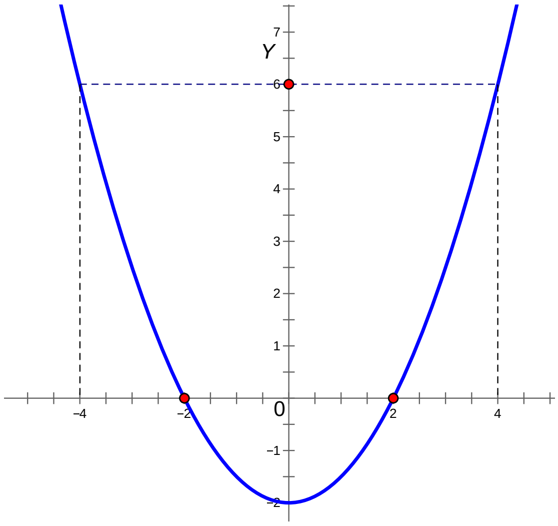
En afbildning er en forskrift f der til et element i en mængde A knytter et element i en mængde B, og forskriften skrives $f : A \rightarrow B$. A kaldes ***definitionsmængden*** og B ***dispositionsmængden***.

CPR-nummerering er en afbildning af mængden af statsborgere i Danmark ind i $\mathbb{R}^{10}$. Bemærk at der er en 10-dobbelt uendelig af elementer i dispositionsmængden $\mathbb{R}^{10}$, så vi har heldigvis kun brug for en meget lille delmængde af dem, ca. fem millioner! De elementer i $\mathbb{R}^{10}$ som på et givet tidspunkt er i brug, er ***billedmængden*** for CPR-afbildningen.

En enkel type af afbildninger er elementære funktioner af typen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Pilen udtrykker her at f til ethvert reelt tal x knytter et andet reelt tal $y = f(x)$. Betragt for eksempel den kontinuerte funktion:

$$y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2\,. \tag{8-1}$$

Her har forskriften form af en regneprocedure: Sæt tallet i anden, gang det med en halv og træk 2 fra. Elementære funktioner har en stor fordel ved at deres graf $\{\,(x,y)\,|\,y=f(x)\,\}$ kan tegnes og give et særligt overblik over afbildningen:



Figur 8.1: Graf for elementær funktion

Typiske spørgsmål i forbindelse med elementære funktioner, kommer igen i forbindelse med mere avancerede afbildninger. Lad os derfor indledningsvist kigge på nogle af de vigtigste:

1. Bestem nulpunkterne for f. Det betyder at vi skal finde alle x for hvilke $f(x)=0$. I eksemplet er svaret $x=-2$ og $x=2$.

2. Løs for et givet b ligningen $f(x)=b$. For $b=6$ er der i eksemplet to løsninger: $x=-4$ og $x=4$.

3. Bestem billedmængden (= værdimængden) for f. Vi skal finde alle de b for hvilke ligningen $f(x)=b$ har en løsning. I eksemplet er billedmængden $[\,-2;\infty\,[$.

I denne eNote ser vi på defintionsmængder, dispositionsmængder og billedmængder som er *vektorrum*. Derfor præciseres mængdebegreberne til definitions*rum*, dispositions*rum* og billed*rum*. En afbildning $f:V\to W$ knytter til enhver vektor $\mathbf{x}$ i *definitionsrummet* V en vektor $\mathbf{y}=f(\mathbf{x})$ i *dispositionsrummet* W. Alle de vektorer i W som er billede af en vektor i V udgør *billedrummet*.

|||| Eksempel 8.1 Afbildning fra vektorrum til vektorrum

En afbildning $g : \mathbb{R}^{2\times 3} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ er givet ved

$$\mathbf{Y} = g(\mathbf{X}) = \mathbf{X}\mathbf{X}^{\top} . \tag{8-2}$$

Der gælder for eksempel at

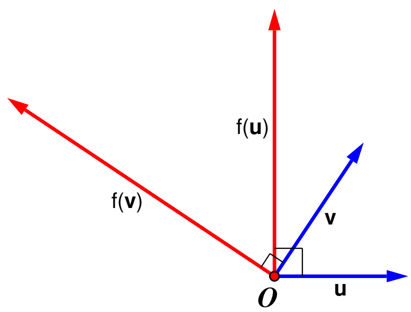
$$g\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} .$$

8.2 Eksempler på lineære afbildninger i planen

Vi undersøger i det følgende en afbildning f der har mængden af geometriske vektorer i planen som både definitionsrum og dispositionsrum. For en given geometrisk vektor $\mathbf{x}$ vil vi ved $\hat{\mathbf{x}}$ forstå dens *tværvektor*. Afbildningen f er da givet ved

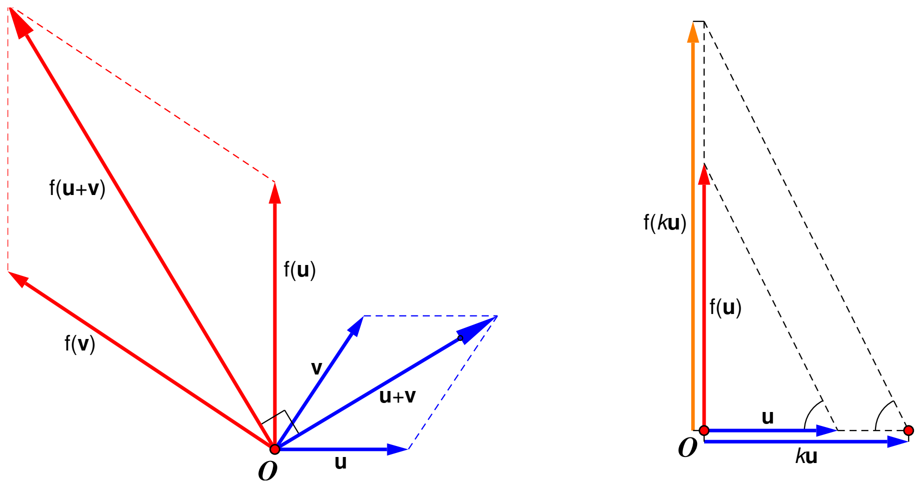
$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = 2\,\hat{\mathbf{x}} . \tag{8-3}$$

Til enhver vektor i planen er der altså knyttet dens tværvektor multipliceret (forlænget) med 2. På figur 8.2 er der tegnet to vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ og deres billeder $f(\mathbf{u})$ og $f(\mathbf{v})$.



Figur 8.2: To vektorer (blå) og deres billeder (røde).

Figur 8.2 giver anledning til et par interessante spørgsmål: Hvordan afbildes sumvektoren $\mathbf{u} + \mathbf{v}$? Mere præcist: Hvordan forholder billedvektoren $f(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ sig til de to billedvektorer $f(\mathbf{u})$ og $f(\mathbf{v})$? Og hvad er relationen mellem billedvektorerne $f(k\mathbf{u})$ og $f(\mathbf{u})$, når k er er givet reelt tal?



Figur 8.3: Konstruktion af $f(\mathbf{u}+\mathbf{v})$ og $f(k\mathbf{u})$.

Som antydet på figur 8.3 opfylder f to meget enkle regler:

$$f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) \quad \text{og} \quad f(k\mathbf{u}) = k\, f(\mathbf{u})\,. \tag{8-4}$$

Ved hjælp af af de velkendte regneregler for tværvektorer

1. $\widehat{\mathbf{u}+\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{v}}$.

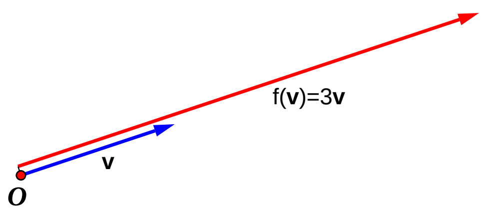
2. $\widehat{k\mathbf{u}} = k\hat{\mathbf{u}}$.

kan vi nu bekræfte påstanden (8-4) :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= 2\widehat{\mathbf{u}+\mathbf{v}} = 2(\hat{\mathbf{u}}+\hat{\mathbf{v}}) = 2\hat{\mathbf{u}} + 2\hat{\mathbf{v}} \\ &= f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})\,. \\ f(k\mathbf{u}) &= 2\widehat{k\mathbf{u}} = 2k\hat{\mathbf{u}} = k(2\hat{\mathbf{u}}) \\ &= k\, f(\mathbf{u})\,. \end{aligned}$$

|||| Opgave 8.2

En afbildning f_1 af plane vektorer er givet ved $f_1(\mathbf{v}) = 3\mathbf{v}$, se figur 8.4:

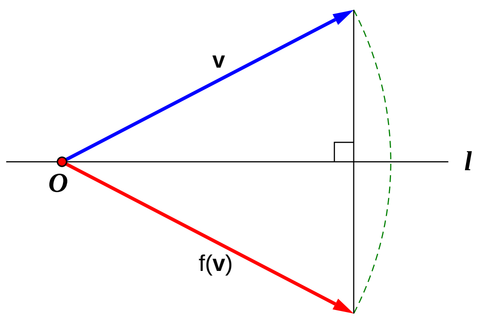


Figur 8.4: Skalering af vektor

Tegn en figur der demonstrerer at f_1 opfylder reglerne (8-4) .

|||| Opgave 8.3

I planen er der givet en linje l gennem Origo. En afbildning f_2 spejler vektorer afsat ud fra Origo i l , se figur 8.5:

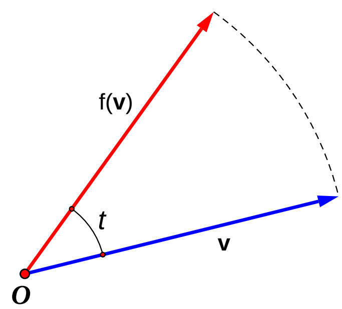


Figur 8.5: Spejling af vektor

Tegn en figur der demonstrerer at f_2 opfylder reglerne (8-4) .

|||| Opgave 8.4

En afbildning f_3 drejer vektorer afsat ud fra Origo vinklen t omkring Origo mod uret, se figur 8.6:



Figur 8.6: Drejning af vektor

Tegn en figur der demonstrerer at f_3 opfylder reglerne (8-4) .

Alle afbildninger der har været berørt i dette afsnit er *lineære*, fordi de opfylder (8-4) . Vi tager nu spørgsmålet om lineære afbildninger mellem vektorrum op til generel behandling.

8.3 Lineære afbildninger

|||| Definition 8.5 Lineær afbildning

Lad V og W være to vektorrum. En afbildning $f : V \to W$ kaldes ***lineær*** hvis den for alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ og alle skalarer k opfylder de følgende to *linearitetsbetingelser*:

$$L_1 : \quad f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})\,.$$
$$L_2 : \quad f(k\mathbf{u}) = k\,f(\mathbf{u})\,.$$

V kaldes *definitionsrummet* og W *dispositionsrummet* for f .

Ved at sætte $k = 0$ i linearitetsbetingelsen L_2 i definition 8.5 , ses det at

$$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}\,. \tag{8-5}$$

Der gælder med andre ord for enhver lineær afbildning $f : V \to W$ at nul-vektoren i V afbildes i nul-vektoren i W .

Billedet af en linearkombination bliver på en meget enkel måde en linearkombination af billederne af de vektorer der indgår i den givne linearkombination:

$$f(k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_p\mathbf{v}_p) = k_1 f(\mathbf{v}_1) + k_2 f(\mathbf{v}_2) + \ldots + k_p f(\mathbf{v}_p)\,. \tag{8-6}$$

Dette resultat fås ved gentagen anvendelse af L_1 og L_2.

|||| Eksempel 8.6 Lineær afbildning

En afbildning $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ er givet ved forskriften

$$f(x_1, x_2) = (0, x_1, x_2, x_1 + x_2)\,. \tag{8-7}$$

$\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^4$ er vektorrum, og vi undersøger om f er en lineær vektorrumsafbildning? Vi tester først venstresiden og højresiden af L_1 med vektorerne $(1,2)$ og $(3,4)$:

$$f(\,(1,2) + (3,4)\,) = f(4,6) = (0,4,6,10)\,.$$
$$f(1,2) + f(3,4) = (0,1,2,3) + (0,3,4,7) = (0,4,6,10)\,.$$

Dernæst testes L_2 med vektoren (2,3) og skalaren 5:

$$f(\,5 \cdot (2,3)\,) = f(10,15) = (0,10,15,25)\,.$$
$$5 \cdot f(2,3) = 5 \cdot (0,2,3,5) = (0,10,15,25)\,.$$

Undersøgelsen tyder på at f er lineær. Dette vises nu generelt. Først testes L_1:

$$\begin{aligned} f(\,(x_1,x_2)+(y_1,y_2)\,) &= f(x_1+y_1,x_2+y_2) = (0,x_1+y_1,x_2+y_2,x_1+x_2+y_1+y_2)\,. \\ f(x_1,x_2)+f(y_1,y_2) &= (0,x_1,x_2,x_1+x_2)+(0,y_1,y_2,y_1+y_2) \\ &= (0,x_1+y_1,x_2+y_2,x_1+x_2+y_1+y_2)\,. \end{aligned}$$

Dernæst testes L_2:

$$\begin{aligned} f(\,k\cdot(x_1,x_2)\,) &= f(k\cdot x_1,k\cdot x_2) = (0,k\cdot x_1,k\cdot x_2,k\cdot x_1+k\cdot x_2)\,. \\ k\cdot f(x_1,x_2) &= k\cdot(0,x_1,x_2,x_1+x_2) = (0,k\cdot x_1,k\cdot x_2,k\cdot x_1+k\cdot x_2)\,. \end{aligned}$$

Det ses at f opfylder begge linearitetsbetingelser og derfor er lineær.

|||| Eksempel 8.7 Afbildning som ikke er lineær

I eksempel 8.1 betragtede vi afbildningen $g:\mathbb{R}^{2\times 3}\to\mathbb{R}^{2\times 2}$ givet ved

$$\mathbf{Y}=g(\mathbf{X})=\mathbf{X}\,\mathbf{X}^{\top}\,. \tag{8-8}$$

At denne afbildning *ikke* er lineær, kan man dokumentere ved at finde et eksempel hvor enten L_1 eller L_2 ikke gælder. Nedenfor gives et eksempel på en matrix $\mathbf{X}$ som ikke opfylder $g(2\mathbf{X})=2\,g(\mathbf{X})$:

$$g\left(2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\right)=g\left(\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

Men

$$2\,g\left(\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\right)=2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

Derfor opfylder g ikke linearitetsbetingelse L_2, og g er derfor ikke lineær.

|||| Eksempel 8.8 Lineær afbildning

Der er givet en afbildning $f:P_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ ved forskriften

$$f\big(\,P(x)\,\big)=P'(1)\,. \tag{8-9}$$

Til ethvert andengradspolynomium er altså knyttet dets tangenthældning i $x=1$. Et vilkårligt andengradspolynomium P kan opskrives ved $P(x)=ax^2+bx+c$. Da $P'(x)=2ax+b$ har vi:

$$f\big(\,P(x)\,\big)=2a+b\,.$$

Hvis vi sætter $P_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ og $P_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$, får vi

$$\begin{aligned} f\big(\,P_1(x) + P_2(x)\,\big) &= f\big(\,(a_1+a_2)x^2 + (b_1+b_2)x + (c_1+c_2)\,\big) \\ &= \big(\,2(a_1+a_2) + (b_1+b_2)\,\big) \\ &= (2a_1+b_1) + (2a_2+b_2) \\ &= f\big(\,P_1(x)\,\big) + f\big(\,P_2(x)\,\big)\,. \end{aligned}$$

Endvidere for ethvert reelt tal k og ethvert andengradspolynomium $P(x)$:

$$\begin{aligned} f\big(\,k\cdot P(x)\,\big) &= f\big(\,k\cdot ax^2 + k\cdot bx + k\cdot c\,\big) \\ &= (2k\cdot a + k\cdot b) = k\cdot(2a+b) \\ &= k\cdot f\big(\,P(x)\,\big)\,. \end{aligned}$$

Det er hermed vist at f opfylder linearitetsbetingelserne L_1 og L_2, og at f dermed er en lineær afbildning.

|||| Opgave 8.9

Ved $C^\infty(\mathbb{R})$ forstås vektorrummet som består af alle funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som kan differentieres et vilkårligt antal gange. Et eksempel (blandt uendeligt mange) er funktionen $f(x) = \sin(x)$. Betragt afbildningen $\mathrm{D} : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ som til en funktion $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ knytter dens afledede:

$$\mathrm{D}\big(\,f(x)\,\big) = f'(x)\,.$$

Vis at D er en lineær afbildning.

8.4 Kerne og billedrum

Nulpunkterne for en elementær funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er alle de reelle tal x som opfylder $f(x) = 0$. Det tilsvarende begreb for lineære afbildninger kaldes *kernen*. Billedmængden (eller værdimængden) for en elementær funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er alle de reelle tal b, hvortil der findes et reelt tal x således at $f(x) = b$. Det tilsvarende begreb for lineære afbildninger kaldes *billedrummet*. Lad os straks retfærdiggøre at ordet *rum* optræder her. Kernen er et underrum i definitionsrummet og billedrummet er et underrum i dispositionsrummet. Dette vil blive uddybet nedenfor.

|||| Definition 8.10 Kerne og billedrum

Ved ***kernen*** for en lineær afbildning $f : V \rightarrow W$ forstås mængden:

$$\ker(f) = \{\, \mathbf{x} \in V \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \in W \,\} \,. \tag{8-10}$$

Ved ***billedrummet*** for f forstås mængden:

$$f(V) = \{\, \mathbf{b} \in W \mid \text{Der findes mindst et } \mathbf{x} \in V \text{ hvor } f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \,\} \,. \tag{8-11}$$

|||| Sætning 8.11 Kernen og billedrummet er underrum

Lad $f : V \rightarrow W$ være en lineær afbildning. Der gælder:

1. Kernen for f er et underrum i V.
2. Billedrummet $f(V)$ er et underrum i W.

|||| Bevis

1) Vi skal vise at kernen for f opfylder stabilitetskravene, se sætning 7.38. Antag at $\mathbf{x}_1 \in V$ og $\mathbf{x}_2 \in V$, og at k er en vilkårlig skalar. Da der (med brug af L_1) gælder:

$$f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}\,,$$

er kernen for f stabil med hensyn til addition. Da der endvidere (med brug af L_2) gælder:

$$f(k\mathbf{x}_1) = k\, f(\mathbf{x}_1) = k\,\mathbf{0} = \mathbf{0}\,,$$

er kernen for f også stabil med hensyn til multiplikation med skalar. Samlet er det dermed vist at kernen for f er et underrum i V.

2) Vi skal vise at billedrummet $f(V)$ opfylder stabilitetskravene. Antag at $\mathbf{b}_1 \in f(V)$ og $\mathbf{b}_2 \in f(V)$, og at k er en vilkårlig skalar. Der findes ifølge definitionen, se (8.10), vektorer $\mathbf{x}_1 \in V$ og $\mathbf{x}_2 \in V$ der opfylder $f(\mathbf{x}_1) = \mathbf{b}_1$ og $f(\mathbf{x}_2) = \mathbf{b}_2$. Vi skal vise at der findes et $\mathbf{x} \in V$ så $f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$. Det gør der, for vi kan blot tage $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ så gælder

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2\,.$$

Hermed er det vist at $f(V)$ er stabil med hensyn til addition. Vi skal nu på lignende måde vise at der findes et $\mathbf{x} \in V$ så $f(\mathbf{x}) = k\mathbf{b}_1$. Her vælger vi $\mathbf{x} = k\mathbf{x}_1$, så gælder der

$$f(\mathbf{x}) = f(k\mathbf{x}_1) = kf(\mathbf{x}_1) = k\mathbf{b}_1\,,$$

hvoraf det fregår at $f(V)$ er stabil med hensyn til multiplikation med skalar. Samlet er det vist at $f(V)$ er et underrum i W.

■

Men hvorfor er det så interessant at kernen og billedrummet for en lineær afbildning er underrum? Svaret er at det bliver enklere at beskrive dem, når vi ved at de har vektorrumsegenskaber og dermed på forhånd kender deres struktur. Særlig elegant er det når vi kan bestemme kernen og billedmængden ved at angive en basis for dem. Dette forsøger vi i de næste to eksempler.

|||| Eksempel 8.12 Bestemmelse af kerne og billedrum

En lineær afbildning $f : \mathbb{R}^3 \to R^2$ er givet ved forskriften:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3\,, -x_1 - 2x_2 - x_3)\,. \tag{8-12}$$

Vi ønsker at bestemme kernen for f og billedrummet $f(\mathbb{R}^3)$. Bemærk at det er oplyst at f er lineær, det behøver vi derfor ikke undersøge.

Bestemmelse af kernen:
Vi skal løse ligningen

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{8-13}$$

Dette er et lineært ligningssystem bestående af to ligninger med tre ubekendte. Det har totalmatricen

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \operatorname{trap}(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi ser at ligningssystemet har løsningsmængden

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Løsningsmængden er udspændt af to lineært uafhængige vektorer. Vi kan derfor konkludere at kernen for f er et 2-dimensionalt underrum i $\mathbb{R}^3$ som kan karakteriseres præcist ved en basis:

$$\text{Basis for kernen} : \big(\,(-2, 1, 0), (-1, 0, 1)\,\big)\,.$$

Bestemmelse af billedrummet:
Vi skal finde alle de $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ for hvilke følgende ligning har en løsning:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \tag{8-14}$$

Dette er et lineært ligningssystem bestående af to ligninger med tre ubekendte. Det har totalmatricen

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & b_1 \\ -1 & -2 & -1 & b_2 \end{bmatrix} \rightarrow \mathrm{trap}(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_1+b_2 \end{bmatrix}$$

Hvis $b_1 + b_2 = 0$, det vil sig hvis $b_1 = -b_2$, har ligningssystemet uendeligt mange løsninger. Hvis derimod $b_1 + b_2 \neq 0$ er der ingen løsninger. Alle de $\mathbf{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ som er billeder af mindst et $\mathbf{x} \in R^3$ har åbenbart formen:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi konkluderer at $f(V)$ er et 1-dimensionalt underrum i $\mathbb{R}^2$ som kan karakteriseres præcist ved en basis:

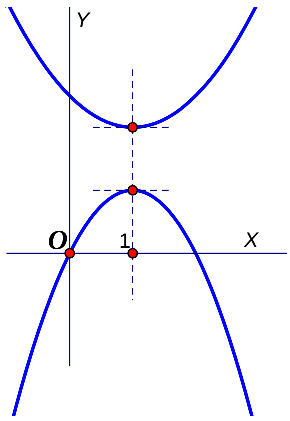
$$\text{Basis for billedrummet} : \big((-1, 1) \big).$$

|||| Eksempel 8.13 Bestemmelse af kerne og billedrum

I eksempel 8.8 blev det vist at afbildningen $f : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ givet ved forskriften

$$f\big(P(x)\big) = P'(1). \tag{8-15}$$

er lineær. Kernen for f består af alle andengradspolynomier der opfylder $P'(1) = 0$. Grafen for et par stykker af dem er vist på figur 8.7:



Figur 8.7: To vektorer i kernen

Bestemmelse af kernen:
Idet $P'(x) = 2ax + b$ får vi at $P(x) \in \ker(f)$ hvis og kun hvis

$$P'(1) = 2a + b = 0,$$

det vil sig hvis og kun hvis

$$b = -2a.$$

Et andengradspolynomium tilhører derfor kernen for f hvis og kun hvis det har forskriften

$$P(x) = ax^2 - 2ax + c = a \cdot (x^2 - 2x) + c \cdot 1\,.$$

Vi ser at kernen er udspændt af de to lineært uafhængige polynomier $(x^2 - 2x)$ og 1, og konkluderer at $(\,x^2 - 2x\,,\,1\,)$ er en basis for kernen. Hermed er $\ker(f)$ bestemt.

Bestemmelse af billedrummet:
For ethvert $k \in \mathbb{R}$ findes der andengradspolynomier $P(x)$ som opfylder $P'(1) = k$. Det gør for eksempel $P(x) = 0x^2 + kx + 0 = kx$. Vi konkluderer at billerummet $f\big(\,P_2(\mathbb{R})\,\big) = \mathbb{R}$.

8.5 Afbildningsmatrix

Alle lineære afbildninger fra et endeligt dimensionalt definitionsrum V til et endeligt dispositionsrum W lader sig beskrive ved hjælp af en *afbildningsmatrix*. Det handler dette afsnit om. Forudsætningen er blot at der vælges en basis for både V og W, og at vi overgår fra vektorregning til regning med vektorernes koordinater med hensyn til de valgte baser. Den store fordel ved dette setup er at vi kan opstille generelle regnemetoder for alle lineære afbildninger mellem endeligt-dimensionale vektorrum. Det ser vi på senere afsnit, se afsnit 8.6. Her drejer det sig hvordan man opstiller afbildningsmatricerne.

Vi begynder med at betragte en afbildning $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ som har form af et matrix-vektorprodukt:

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}\,. \tag{8-16}$$

Da det fremgår at $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ og $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ giver forskriften (8-16) mening netop når $\mathbf{A}$ er en $m \times n-$matrix. Ved at benytte regneregler for matrixprodukt, se sætning 3.13, opnår vi for ethvert valg af $\mathbf{x}_1\,, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ og enhver skalar k:

$$f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{A}\,(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}\mathbf{x}_2 = f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2)\,,$$

$$f(k\mathbf{x}_1) = \mathbf{A}\,(k\mathbf{x}_1) = k(\mathbf{A}\,\mathbf{x}_1) = kf(\mathbf{x}_1)\,.$$

Vi ser at afbildningen opfylder linearitetsbetingelserne L_1 og L_2. Enhver afbildning af formen (8-16) er derfor lineær.

|||| Eksempel 8.14 Afbildning ved hjælp af matrix

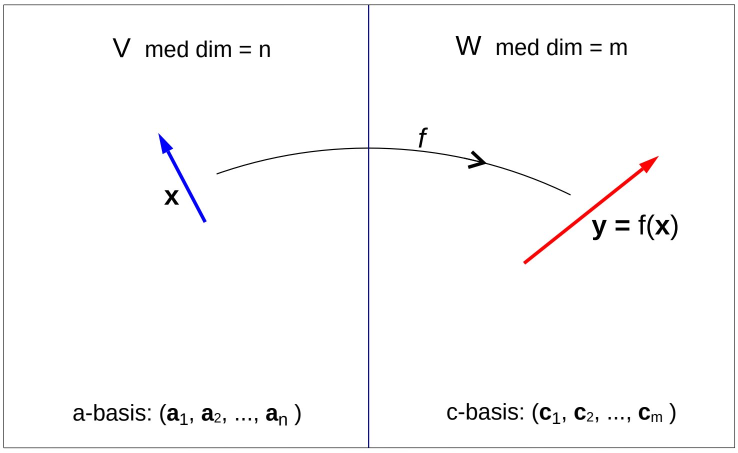
Formlen:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \\ 5x_1 + 6x_2 \end{bmatrix}$$

angiver en lineær afbildning fra vektorrummet $\mathbb{R}^2$ til vektorrummet $\mathbb{R}^3$.

Men også det modsatte gælder: Enhver lineær afbildning mellem endeligt-dimensionale vektorrum kan skrives som et matrix-vektorprodukt på formen (8-16) hvis vi erstatter $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ med deres koordinatar med hensyn til en valgt basis i definitionsrummet henholdsvis dispositionsrummet. Dette viser vi i det følgende.

Vi betragter nu en lineær afbildning $f : V \rightarrow W$ hvor V er et n-dimensionalt og W et m-dimensionalt vektorrum, se figur 8.8:



Figur 8.8: Lineær afbildning

For V er der valgt en basis a og for W en basis c. Det betyder at en given vektor $\mathbf{x} \in V$ kan skrives som en unik linearkombination af a-basisvektorerne, og at billedet $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ kan skrives som en unik linearkombination af c-basisvektorerne:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n \;\text{ og }\; \mathbf{y} = y_1\mathbf{c}_1 + y_2\mathbf{c}_2 + \cdots + y_m\mathbf{c}_m \,.$$

Det betyder at $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ er koordinatsæt for $\mathbf{x}$ med hensyn til a-basis, og at $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ er koordinatsæt for $\mathbf{y}$ med hensyn til c-basis.

Vi stiller nu spørgsmålet: Hvordan kan vi beskrive relationen mellem a-koordinatvektoren for vektor $\mathbf{x} \in V$ og c-koordinatvektoren for billedvektoren $\mathbf{y}$? Vi er med andre ord på jagt efter relationen mellem:

$$ {}_c\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \text{ og } {}_a\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} . $$

Dette udvikler vi gennem de følgende omskrivninger hvor vi først, ved hjælp af L_1 og L_2, får opskrevet $\mathbf{y}$ som en linearkombination af billederne af a-vektorerne.

$$ \begin{aligned} \mathbf{y} &= f(\mathbf{x}) \\ &= f(x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n) \\ &= x_1 f(\mathbf{a}_1) + x_2 f(\mathbf{a}_2) + \cdots + x_n f(\mathbf{a}_n) . \end{aligned} $$

Herefter kan vi undersøge koordinatvektoreren for $\mathbf{y}$ med hensyn til c-basis, idet vi først bruger koordinatsætningen, se sætning 7.30, og derefter definitionen på matrixvektorprodukt, se definition 3.7.

$$ \begin{aligned} {}_c\mathbf{y} &= {}_c\big(x_1 f(\mathbf{a}_1) + x_2 f(\mathbf{a}_2) + \cdots + x_n f(\mathbf{a}_n) \big) \\ &= x_1\, {}_cf(\mathbf{a}_1) + x_2\, {}_cf(\mathbf{a}_2) + \cdots + x_n\, {}_cf(\mathbf{a}_n) \\ &= \begin{bmatrix} {}_cf(\mathbf{a}_1) & {}_cf(\mathbf{a}_2) & \cdots & {}_cf(\mathbf{a}_n) \end{bmatrix} {}_a\mathbf{x} . \end{aligned} $$

Matricen $\begin{bmatrix} {}_cf(\mathbf{a}_1) & {}_cf(\mathbf{a}_2) & \cdots & {}_cf(\mathbf{a}_n) \end{bmatrix}$ i den sidste ligning kaldes *afbildningsmatricen* for f med hensyn til a-basis i V og c-basis i W.

Vi har hermed opnået dette vigtige resultat: Koordinatvektoren ${}_c\mathbf{y}$ kan opnås ved at man ganger afbildningsmatricen med koordinatvektoren ${}_a\mathbf{x}$. Resultaterne opsummerer vi nu i det følgende.

|||| Definition 8.15 Afbildningsmatrix

Lad $f : V \to W$ være en lineær afbildning fra et n-dimensionalt vektorrum V til et m-dimensionalt vektorrum W. Ved ***afbildningsmatricen*** for f med hensyn til basis a i V og basis c i W forstås $m \times n$-matricen:

$$ {}_c\mathbf{F}_a = \begin{bmatrix} {}_cf(\mathbf{a}_1) & {}_cf(\mathbf{a}_2) & \cdots & {}_cf(\mathbf{a}_n) \end{bmatrix} . \tag{8-17} $$

Afbildningsmatricen for f består dermed af de n c-koordinatvektorer for billederne ved f af de n a-basisvektorer i V.

Hovedopgaven for en afbildningsmatrix er naturligvis at kunne bestemme billeder i W af vektorer i V, og den legitimeres af den følgende sætning som er en opsummering af undersøgelserne ovenfor.

|||| Sætning 8.16 Hovedsætning om afbildningsmatrix

Lad V være et n-dimensionalt vektorrum med valgt basis a og W et m-dimensionalt vektorrum med valgt basis c .

1. For en lineær afbildning $f : V \to W$ gælder at hvis $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ er billedet af en vilkårlig vektor $\mathbf{x} \in V$, så gælder der:

$$ {}_{\mathrm{c}}\mathbf{y} = {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\, {}_{\mathrm{a}}\mathbf{x} \tag{8-18} $$

   hvor ${}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}$ er afbildningsmatricen for f hensyn til basis a i V og basis c i W .

2. Antag omvendt at billederne $\mathbf{y} = g(\mathbf{x})$ for en afbildning $g : V \to W$ kan fås på koordinatform ved

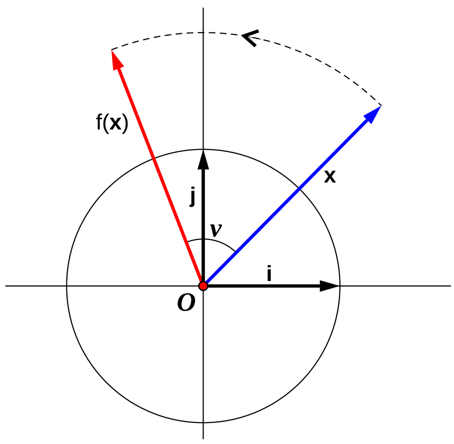
$$ {}_{\mathrm{c}}\mathbf{y} = {}_{\mathrm{c}}\mathbf{G}_{\mathrm{a}}\, {}_{\mathrm{a}}\mathbf{x} \tag{8-19} $$

   hvor ${}_{\mathrm{c}}\mathbf{G}_{\mathrm{a}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, så er g lineær, og ${}_{\mathrm{c}}\mathbf{G}_{\mathrm{a}}$ er afbildningsmatricen for g hensyn til basis a i V og basis c i W ..

Herefter følger tre eksempler på opstilling og elementær brug af afbildningsmatricer.

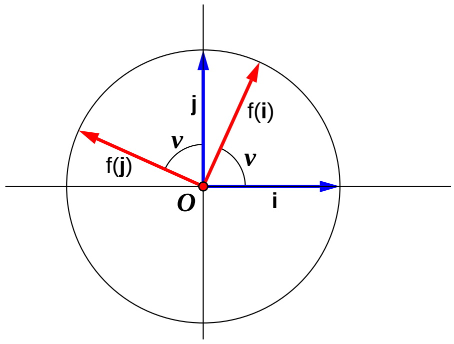
|||| Eksempel 8.17 Opstilling og brug af afbildningsmatrix

Drejning af plane vektorer afsat ud fra Origo er et enkelt eksempel på en lineær afbildning, se opgave 8.4. Lad v være en vilkårlig vinkel, og lad f være den lineære afbildning der drejer en vilkårlig vektor vinkel v omkring Origo mod uret, se figur 8.9.



Figur 8.9: Lineær drejning omkring Origo

Vi ønsker at bestemme afbildningsmatricen for f med hensyn til standardbasen for vektorer i planen. Vi har derfor brug for billederne af basisvektorerne $\mathbf{i}$ og $\mathbf{j}$, se figur 8.10.



Figur 8.10: Bestemmelse af afbildningsmatrix

Det ses at $f(\mathbf{i}) = (\cos(v), \sin(v))$ og $f(\mathbf{j}) = (-\sin(v), \cos(v))$. Den ønskede afbildningsmatrix er derfor

$$_{\mathrm{e}}\mathbf{F}_{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} \cos(v) & -\sin(v) \\ \sin(v) & \cos(v) \end{bmatrix}.$$

Koordinaterne for billedet $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ af en given vektor $\mathbf{x}$ fås dermed ud fra ligningen:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(v) & -\sin(v) \\ \sin(v) & \cos(v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

|||| Eksempel 8.18 Opstilling og brug af afbildningsmatrix

I et 3-dimensionalt vektorrum V er der valgt en basis $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$, og i et 2-dimensionalt vektorrum W er der valgt en basis $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$. En lineær afbildning $f : V \to W$ opfylder at:

$$f(\mathbf{a}_1) = 3\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2\,,\;\; f(\mathbf{a}_2) = 6\mathbf{c}_1 - 2\mathbf{c}_2 \;\text{ og }\; f(\mathbf{a}_3) = -3\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2\,. \tag{8-20}$$

Vi ønsker at finde billedet ved f af vektoren $\mathbf{v} = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \in V$ ved hjælp af afbildningsmatricen $_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}$. Afbildningsmatricen opstilles nemt da vi allerede fra (8-20) kender billederne af basisvektorerne i V:

$$_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}} = \begin{bmatrix} {_{\mathrm{c}}f(\mathbf{a}_1)} & {_{\mathrm{c}}f(\mathbf{a}_2)} & {_{\mathrm{c}}f(\mathbf{a}_3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Da $\mathbf{v}$ har koordinatsættet $(1, 2, 1)$ med hensyn til a-basis, finder vi koordinatvektoren for $f(\mathbf{v})$ således:

$$_{\mathrm{c}}f(\mathbf{v}) = {_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}}\,{_{\mathrm{a}}\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Vi har hermed fundet $f(\mathbf{v}) = 12\mathbf{c}_1 - 2\mathbf{c}_2$.

|||| Eksempel 8.19 Opstilling og brug af afbildningsmatrix

En lineær afbildning $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ er givet ved:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + x_4 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 \end{bmatrix}. \tag{8-21}$$

Lad os bestemme afbildningsmatricen for f med hensyn til standard e-basis i $\mathbb{R}^4$ og standard e-basis i $\mathbb{R}^3$. Først finder vi billederne af de fire e-basisvektorer i $\mathbb{R}^4$ ved hjælp af forskriften (8-21):

$$f(1,0,0,0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f(0,1,0,0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix},$$

$$f(0,0,1,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad f(0,0,0,1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Vi kan nu opstille afbildningsmatricen for f:

$$_{\mathrm{e}}\mathbf{F}_{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & -2 \end{bmatrix}. \tag{8-22}$$

Vi ønsker at finde billedet $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ af vektoren $\mathbf{x} = (1,1,1,1)$. Til rådighed har vi naturligvis forskriften (8-21), men vi vælger at finde billedet ved hjælp af afbildningsmatricen:

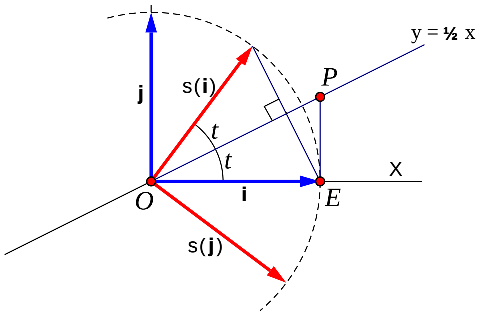
$$_{\mathrm{e}}\mathbf{y} = {_{\mathrm{e}}\mathbf{F}_{\mathrm{e}}}\, {_{\mathrm{e}}\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Vi har hermed fundet $_{\mathrm{e}}\mathbf{y} = {_{\mathrm{e}}f}(1,1,1,1) = (4,2,-2)$.

|||| Opgave 8.20

I planen er der givet et sædvanligt $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$-koordinatsystem, og alle vektorer tænkes afsat ud fra Origo. Spejling af vektorer i linjen $y = \frac{1}{2}x$ er en lineær afbildning, lad os kalde den s.

Bestem $s(\mathbf{i})$ og $s(\mathbf{j})$, opstil afbildningsmatricen ${}_{\mathrm{e}}\mathbf{S}_{\mathrm{e}}$ for s og bestem et udtryk for spejlingen af en vilkårlig plan vektor $\mathbf{v}$ med e-koordinaterne (v_1, v_2). Figur 8.11 indholder nogle hints til bestemmelse af $s(\mathbf{i})$. Gå frem på tilsvarende vis med $s(\mathbf{j})$.



Figur 8.11: Spejling af standardbasisvektorer.

8.6 Om brug af afbildningsmatricer

Afbildningsmatricer er et meget perspektivrigt redskab. Det tillader os at oversætte spørgsmål om lineære afbildninger mellem vektorrum til spørgsmål om matricer og koordinatvektorer som vi umiddelbart kan regne på. Metoderne forudsætter blot at der er valgt en basis i hvert af vektorrummene, og at den afbildningsmatrix som hører til de to baser, er opstillet. Sådan kan vi reducere spørgsmål af så forskellig karakter som at finde polynomier med visse egenskaber, at finde resultatet af en geometrisk konstruktion og at løse differentialligninger, til spørgsmål der kan undersøges ved hjælp af matrixalgebra.

Som gennemgående eksempel ser vi på en lineær afbildning $f : V \to W$ hvor V er et 4-dimensionalt vektorrum med valgt basis $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$, og hvor W er et 3-dimensionalt vektorrum med valgt basis $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$. Afbildningsmatricen for f er:

$$ {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & -4 \end{bmatrix}. \tag{8-23} $$

8.6.1 At finde kernen for f

Når man skal finde kernen for f, skal man finde alle $\mathbf{x} \in V$ som afbildes i $\mathbf{0} \in W$. Det vil sige at man skal løse vektorligningen

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\,.$$

Denne ligning er ifølge sætning 8.16 ensbetydende med matrixligningen

$$\begin{gathered}{}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\,{}_{\mathrm{a}}\mathbf{x} = {}_{\mathrm{c}}\mathbf{0} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\end{gathered}$$

som svarer til et homogene lineære ligningssystem med totalmatricen:

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & -1 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \mathrm{trap}(\mathbf{T}) = \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Det ses at løsningsmængden er udspændt af to lineært uafhængige vektorer: $(-2, 1, 1, 0)$ og $(1, -3, 0, 1)$. Lad $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ være de to vektorer i V, som er bestemt ved a-koordinater således:

$${}_{\mathrm{a}}\mathbf{v}_1 = (-2, 1, 1, 0) \;\text{ og }\; {}_{\mathrm{a}}\mathbf{v}_2 = (1, -3, 0, 1)\,.$$

Så er $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ en basis for kernen for f, og kernen for f har dimensionen 2.

Pointe: Antallet $n = 4$ af ubekendte i det løste ligningssystem er pr. definition lig med antallet af søjler i ${}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}$ som igen er lig med $\dim(V)$, se definition 8.15. Endvidere bemærkes at ligningssystemets koefficientmatrix er identisk med ${}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}$. Hvis rangen af koefficientmatricen er k, ved vi at løsningsmængden og dermed kernen er udspændt af $(n-k)$ lineært uafhængige retningsvektorer hvor k er rangen af koefficientmatricen. Derfor har vi:

$$\dim(\text{kernen}) = n - \rho\left({}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\right) = 4 - 2 = 2\,.$$

|||| Metode 8.21 Bestemmelse af kernen

I et vektorrum V er der valgt en basis a, og i et vektorrum W er der valgt en basis c. Kernen for en lineær afbildning $f : V \to W$, kan i koordinatform findes som løsningsmængden for det homogene lineære ligningssystem som har totalmatricen

$$\mathbf{T} = \left[\, {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}} \;\middle|\; {}_{\mathrm{c}}\mathbf{0} \,\right].$$

Kernen er et underrum i V, og dens dimension er bestemt ved:

$$\dim(\,\ker(f)\,) = \dim(V) - \rho\left({}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\right). \tag{8-24}$$

8.6.2 At løse vektorligningen *f(x) = b*

Hvordan kan man afgøre om en vektor $\mathbf{b} \in W$ tilhører billedrummet for en given lineære afbildning. Spørgsmålet er om der findes (mindst) et $\mathbf{x} \in V$ som afbildes i $\mathbf{b}$, og det kan udvides til hvordan man kan bestemme alle $\mathbf{x} \in V$ med denne egenskab som afbildes i $\mathbf{b}$.

Vi betragter igen den lineære afbildning $f : V \to W$ der er repræsenteret af afbildningsmatricen (8-23), og vælger som eksempel den vektor $\mathbf{b} \in W$ som har c-koordinaterne $(1, 2, 3)$. Vi skal løse vektorligningen

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}.$$

Regner vi i koordinater svarer vektorligningen til følgende matrixligning

$${}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\,{}_{\mathrm{a}}\mathbf{x} = {}_{\mathrm{c}}\mathbf{b}$$

det vil sige matrixligningen

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

som svarer til et inhomogent lineært ligningssystem med totalmatricen:

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & -1 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \end{array}\right]$$

som ved GaussJordan-elimination reduceres til

$$\operatorname{trap}(\mathbf{T}) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Da rangen af totalmatricen her er større end rangen af koefficientmatricen, har det inhomogene ligningssystem ingen løsninger. Vi har altså fundet en vektor i W som ingen "originalvektor" har i V. Bemærk at *hvis* der havde været løsninger, så kunne den skrives op på strukturformen $L_{inhom} = \mathbf{x}_0 + L_{hom}$. Det vil i denne sammenhæng sige en partikulær løsning plus kernen for f.

|||| Metode 8.22 Løsning af vektorligningen *f(x) = b*

I et vektorrum V er der valgt en basis a, og i et vektorrum W er der valgt en basis c. For en lineær afbildning $f : V \to W$, og en egentlig vektor $\mathbf{b} \in W$ kan ligningen

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

løses ved hjælp af det inhomogene lineære ligningssystem som har totalmatricen

$$\mathbf{T} = \left[\ {}_c\mathbf{F}_a \ \middle|\ {}_c\mathbf{b}\ \right]$$

Hvis der findes løsninger, og $\mathbf{x}_0$ er én af disse løsninger, kan hele løsningsmængden opskrives som:

$$\mathbf{x}_0 + \ker(f).$$

8.6.3 At bestemme billedrummet

Vi har ovenfor fundet at billedrummet for en lineær afbildning er et underrum i dispositionsrummet, se sætning 8.11. Hvordan kan dette underrum afgrænses og karakteriseres? Det mest enkle og bekvemme er at finde en basis for underrummet!

Vi betragter igen den lineære afbildning $f : V \to W$ der er repræsenteret af afbildningsmatricen (8-23). Da der er valgt basen $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$ for V, kan vi opskrive samtlige vektorer i V på én gang:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + x_4\mathbf{a}_4,$$

idet vi tænker os at x_1, x_2, x_3 og x_4 gennemløber alle tænkelige kombinationer af reelle værdier. Men så kan samtlige billeder i W af vektorer i V opskrives ved:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + x_4\mathbf{a}_4) \\ &= x_1 f(\mathbf{a}_1) + x_2 f(\mathbf{a}_2) + x_3 f(\mathbf{a}_3) + x_4 f(\mathbf{a}_4)\,, \end{aligned}$$

hvor vi har brugt L_1 og L_2, og hvor vi fortsat tænker os at x_1, x_2, x_3 og x_4 gennemløber alle tænkelige kombinationer af reelle værdier. Men så er:

$$f(V) = \operatorname{span}\{\, f(\mathbf{a}_1), f(\mathbf{a}_2), f(\mathbf{a}_3), f(\mathbf{a}_4) \,\}\ .$$

Billedrummet udspændes altså af a-basisvektorernes billeder! Men så kan vi efter ifølge metode 7.43 i eNote 7 bestemme en basis for billedrummet ved at finde de ledende 1-taller i trappeformen af

$$\begin{bmatrix} {}_c\mathbf{f}(\mathbf{a}_1) & {}_c\mathbf{f}(\mathbf{a}_2) & {}_c\mathbf{f}(\mathbf{a}_3) & {}_c\mathbf{f}(\mathbf{a}_4) \end{bmatrix}.$$

Dette er jo afbildningsmatricen for f med hensyn til de valgte baser

$${}_c\mathbf{F}_a = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

som ved GaussJordan-elimination reduceres til

$$\operatorname{trap}({}_c\mathbf{F}_a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Til de to ledende 1-taller i $\operatorname{trap}({}_c\mathbf{F}_a)$ svarer de to første søjler i ${}_c\mathbf{F}_a$. Vi konkluderer således:

Lad $\mathbf{w}_1$ og $\mathbf{w}_2$ være de to vektorer i W, som er bestemt ved c-koordinater således:

$${}_a\mathbf{w}_1 = (1, 2, 1) \;\text{ og }\; {}_a\mathbf{w}_2 = (3, 0, -1)\,.$$

Så er $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ en basis for billedrummet $f(V)$.

|||| Metode 8.23 Bestemmelse af billedrummet

I et vektorrum V er der valgt en basis a, og i et vektorrum W er der valgt en basis c. Billedrummet $f(V)$ for en lineær afbildning $f : V \to W$, kan findes ud fra

$$\mathrm{trap}({}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}) \tag{8-25}$$

på følgende måde: Hvis der i den i'te søjle i (8-25) ikke er et ledende 1-tal, så fjernes $f(\mathbf{a}_i)$ fra vektorsættet $\left(f(\mathbf{a}_1), f(\mathbf{a}_2), \ldots, f(\mathbf{a}_n)\right)$. Når dette vektorsæt på denne måde er udtyndet, udgør det en basis for $f(V)$.

Da antallet af ledende 1-taller i (8-25) er lig med antallet af basisvektorer i den valgte basis for $f(V)$, følger det at

$$\dim(f(V)) = \rho\left({}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\right). \tag{8-26}$$

8.7 Dimensionssætningen

I det foregående afsnits metode 8.21 fandt vi følgende udtryk for dimensionen af kernen for en lineær afbildning $f : V \to W$:

$$\dim(\ker(f)) = \dim(V) - \rho\left({}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\right). \tag{8-27}$$

Og i metode 8.23 et tilsvarende udtryk for billedrummet $f(V)$:

$$\dim(f(V)) = \rho\left({}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\right). \tag{8-28}$$

Ved at sammensætte (8-27) og (8-28) opnås en bemærkelsesværdig enkel sammenhæng mellem definitionsrummet, kernen og billedrummet for en lineær afbildning:

|||| Sætning 8.24 Dimensionssætningen

Lad V og W være to endeligt-dimensionale vektorrum. For en lineær afbildning $f : V \to W$ gælder:

$$\dim(V) = \dim(\ker(f)) + \dim(f(V)).$$

Her er nogle umiddelbare konsekvenser af sætning 8.24:

Billedrummet for en lineær afbildning kan aldrig have højere dimension end definitionsrummet.

Hvis kernen kun indeholder $\mathbf{0}$-vektoren, bevarer billedrummet definitionsrummets dimension.

Hvis kernen har dimensionen $p > 0$, så "forsvinder" der gennem afbildningen p dimensioner.

|||| Opgave 8.25

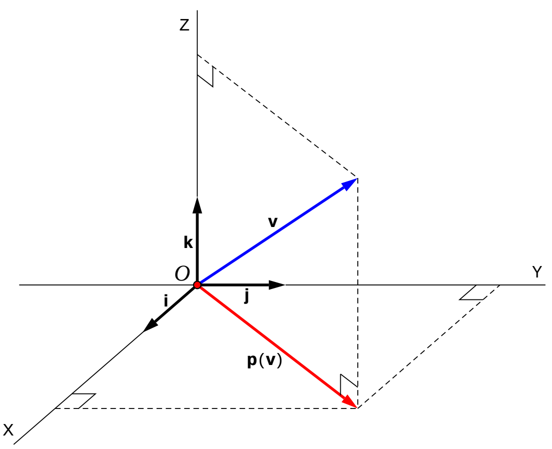
En lineær afbildning $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har med hensyn til standardbasen i $\mathbb{R}^3$ afbildningsmatricen

$$ {}_{\mathrm{e}}\mathbf{F}_{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} . $$

Det oplyses at kernen for f har dimensionen 1. Find straks, ved hovedregning, en basis for $f(V)$.

|||| Opgave 8.26

I rummet er der givet et standard $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$-koordinatsystem. Alle vektorer tænkes afsat ud fra Origo. Afbildningen p projicerer vektorer ned i (X, Y)-planen i rummet, se figur 8.12 .



Figur 8.12: Projektion ned i (X, Y)-planen

Vis at p er lineær, og opstil afbildningsmatricen ${}_{\mathrm{e}}\mathbf{P}_{\mathrm{e}}$ for p. Bestem en basis for projektionens kerne og billedrum. Tjek at dimensionssætningen er opfyldt.

8.8 Ændring af afbildningsmatricen når der skiftes basis

Afbildningsmatricen for en lineær afbildning $f : V \to W$ kan kun opstilles når der er valgt en basis i V og en basis i W. Med afbildningsmatricens symbol ${}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}$ viser vi netop at dens grundlag er en given basis a i V og en given basis c i W.

Ofte ønsker man at skifte basen i V eller basen i W. I det første tilfældes ændres koordinaterne for de vektorer $\mathbf{x} \in V$ der skal afbildes, mens koordinaterne for deres billeder $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ er uforandrede. I det andet tilfælde er omvendt. Her er koordinaterne for $\mathbf{x}$ er de samme, mens billedets koordinaterne skifter. Hvis der skiftes basis i både i V og W, så ændres koordinaterne både for $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$.

I dette afsnit opstilles metoder til at finde den nye afbildningsmatrix for f, når der skiftes basis i enten definitionsrummet, dispositionsrummet eller i dem begge. Først viser vi hvordan en vektors koordinater skifter, når der skiftes basis i vektorrummet (som nærmere beskrevet i metode 7.36 i eNote 7.)

Antag at der er i V er givet en a-basis $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$, og at der vælges en ny b-basis $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)$ i V. Hvis en vektor $\mathbf{x}$ har b-koordinatvektoren ${}_{\mathrm{b}}\mathbf{x}$, så kan dens a-koordinatvektor udregnes ved matrixvektor-produktet

$$ {}_{\mathrm{a}}\mathbf{v} = {}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}\, {}_{\mathrm{b}}\mathbf{v} \tag{8-29} $$

hvor *basisskiftematricen* ${}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}$ er givet ved

$$ {}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}} = \begin{bmatrix} {}_{\mathrm{a}}\mathbf{b}_1 & {}_{\mathrm{a}}\mathbf{b}_2 & \ldots & {}_{\mathrm{a}}\mathbf{b}_n \end{bmatrix}. \tag{8-30} $$

Vi viser nu to eksempler på brug af (8-30). I det første er det de "nye" koordinater der er givne hvorefter de "gamle" beregnes. I det andet er det omvendt: de "gamle" kendes, og de "nye" bestemmes.

|||| Eksempel 8.27 Fra nye koordinater til gamle

I et 3-dimensionalt vektorrum V er der givet en basis $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$, hvorefter der vælges en ny basis bestående af vektorerne

$$ \mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3,\ \mathbf{b}_2 = 2\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \ \text{ og } \ \mathbf{b}_3 = -3\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3\,. $$

Opgave: Bestem koordinatvektoren ${}_{\mathrm{a}}\mathbf{x}$ for $\mathbf{x} = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + 3\mathbf{b}_3$.

Løsning: Først ser vi at

$$ {}_{\mathrm{b}}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \ \text{ og } \ {}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \tag{8-31} $$

Herefter får vi

$$ {}_{\mathrm{a}}\mathbf{x} = {}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}\,{}_{\mathrm{b}}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}. \tag{8-32} $$

|||| Eksempel 8.28 Fra gamle koordinater til nye

I et 2-dimensionalt vektorrum W er der givet en basis $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$, hvorefter der vælges en ny basis bestående af vektorerne

$$ \mathbf{d}_1 = 2\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 \;\text{ og }\; \mathbf{d}_2 = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 \,. $$

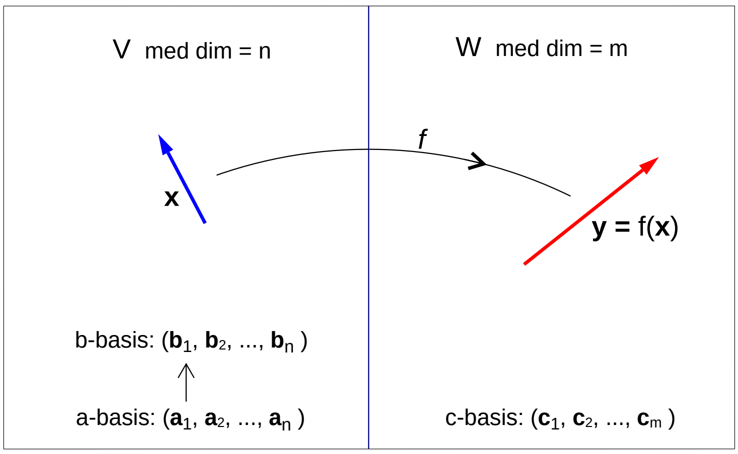
Opgave: Bestem koordinatvektoren ${}_{\mathrm{d}}\mathbf{y}$ for $\mathbf{y} = 10\mathbf{c}_1 + 6\mathbf{c}_2$.

Løsning: Først ser vi at

$$ {}_{\mathrm{c}}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix} \;\text{ og }\; {}_{\mathrm{c}}\mathbf{M}_{\mathrm{d}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow {}_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}} = ({}_{\mathrm{c}}\mathbf{M}_{\mathrm{d}})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{8-33} $$

$$ {}_{\mathrm{d}}\mathbf{y} = {}_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}}\,{}_{\mathrm{c}}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{8-34} $$

8.8.1 Basisskifte i definitionsrummet



Figur 8.12: Lineær afbildning

På figur 8.12 er der givet en lineær afbildning $f : V \to W$ som med hensyn til a-basis i V og c-basis i W har en afbildningsmatrix ${}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}$. Vi skifter basis i V fra a-basis til b-basis.

Afbildningsmatricen for f har nu symbolet ${}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{b}}$. Lad os finde den. Ligningen

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$$

oversættes til koordinater og omformes:

$${}_{\mathrm{c}}\mathbf{y} = {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\,{}_{\mathrm{a}}\mathbf{x} = {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\left({}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}\,{}_{\mathrm{b}}\mathbf{x}\right) = \left({}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\,{}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}\right){}_{\mathrm{b}}\mathbf{x}\,.$$

Heraf kan vi udlede at afbildningsmatricen for f med hensyn til b-basis i V og c-basis i W dannes ved et matrixprodukt:

$${}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{b}} = {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\,{}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}\,. \tag{8-35}$$

|||| Eksempel 8.29 Ændring af afbildningsmatrix

Vi betrager det 3-dimensionale vektorrum V som er behandlet i eksempel 8.27, og det 2-dimensionale vektorrum W som er behandlet i eksempel 8.28. En lineær afbildning $f : V \to W$ er givet ved afbildningsmatricen:

$${}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}} = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 7 \\ 6 & 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

Opgave: Bestem $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ hvor $\mathbf{x} = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + 3\mathbf{b}_3$.

Løsning: Vi afprøver to forskellige veje. 1) Vi bruger a-koordinaterne $\mathbf{x}$ som fundet i (8-31):

$${}_{\mathrm{c}}\mathbf{y} = {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\,{}_{\mathrm{a}}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 7 \\ 6 & 8 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

2) Vi ændrer afbildningsmatricen for f :

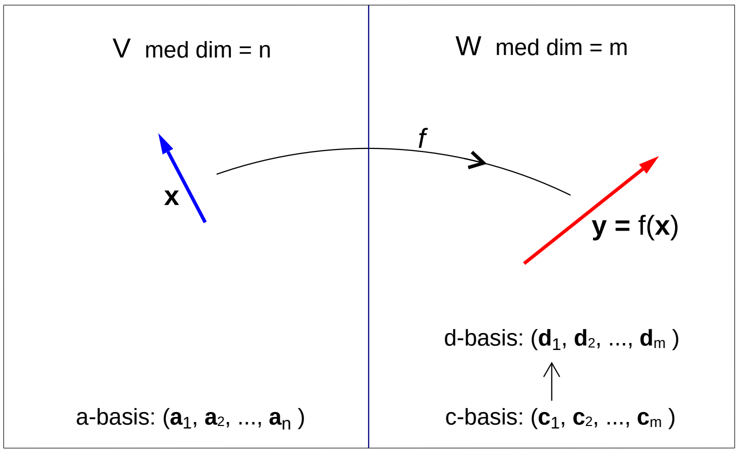
$${}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{b}} = {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\,{}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}} = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 7 \\ 6 & 8 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Så kan vi direkte bruge de givne b-koordinater for $\mathbf{x}$:

$${}_{\mathrm{c}}\mathbf{y} = {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{b}}\,{}_{\mathrm{b}}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

I begge tilfælde får vi $\mathbf{y} = 10\mathbf{c}_1 + 6\mathbf{c}_2$.

8.8.2 Basisskifte i dispositionsrummet



Figur 8.13: Lineær afbildning

På figur 8.13 er der givet en lineær afbildning $f : V \to W$ som med hensyn til a-basis i V og c-basis i W har en afbildningsmatrix ${}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}$. Vi skifter basis i W fra c-basis til d-basis. Afbildningsmatricen for f har nu symbolet ${}_{\mathrm{d}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}$. Lad os finde den. Ligningen

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$$

oversættes til matrixligningen

$$_{\mathrm{c}}\mathbf{y} = {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\,{}_{\mathrm{a}}\mathbf{x}$$

som er ensbetydende med

$$_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}}\,{}_{\mathrm{c}}\mathbf{y} = {}_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}}\left({}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\,{}_{\mathrm{a}}\mathbf{x}\right)$$

hvoraf fås

$$_{\mathrm{d}}\mathbf{y} = \left({}_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}}\,{}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\right){}_{\mathrm{a}}\mathbf{x}\,.$$

Heraf udleder vi at afbildningsmatricen for f med hensyn til a-basis i V og d-basis i W dannes ved et matrixprodukt:

$$_{\mathrm{d}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}} = {}_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}}\,{}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\,. \tag{8-36}$$

|||| Eksempel 8.30 Ændring af afbildningsmatrix

Vi betrager det 3-dimensionale vektorrum V som er behandlet i eksempel 8.27, og det 2-dimensionale vektorrum W som er behandlet i eksempel 8.28. En lineær afbildning $f : V \to W$ er givet ved afbildningsmatricen:

$$_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}} = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 7 \\ 6 & 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

Opgave: Givet vektoren $\mathbf{x} = -4\mathbf{a}_1 + 5\mathbf{a}_2 - 2\mathbf{a}_3$. Bestem billedet $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ som en linearkombination af $\mathbf{d}_1$ og $\mathbf{d}_2$.

Løsning: Vi afprøver to forskellige veje.
1) Vi bruger den givne afbildningsmatrix:

$$_{\mathrm{c}}\mathbf{y} = {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\, {}_{\mathrm{a}}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 7 \\ 6 & 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Og oversætter resultatet til d-koordinater ved hjælp af (8-34):

$$_{\mathrm{d}}\mathbf{y} = {}_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}}\, {}_{\mathrm{c}}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2) Vi ændrer afbildningsmatricen for f ved hjælp af (8-33):

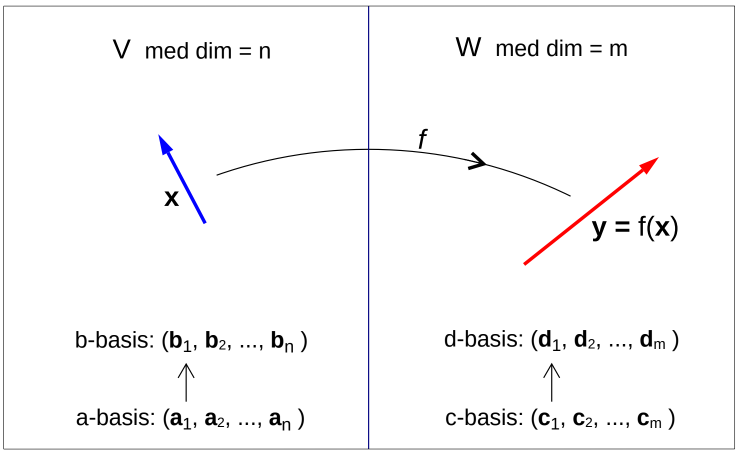
$$_{\mathrm{d}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}} = {}_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}\,\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 12 & 7 \\ 6 & 8 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Så kan vi direkte aflæse d-koordinaterne:

$$_{\mathrm{d}}\mathbf{y} = {}_{\mathrm{d}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\, {}_{\mathrm{a}}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

I begge tilfælde får vi $\mathbf{y} = 4\mathbf{d}_1 + 2\mathbf{d}_2$.

8.8.3 Basisskifte i både definitions- og dispositionsrummet



Figur 8.14: Lineær afbildning

På figur 8.14 er der er givet en lineær afbildning $f : V \to W$ som med hensyn til a-basis i V og c-basis i W har afbildningsmatricen ${}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}$. Vi skifter basis i V fra a-basis til b-basis, og i W fra c-basis til d-basis. Afbildningsmatricen for f har nu symbolet ${}_{\mathrm{d}}\mathbf{F}_{\mathrm{b}}$ .Lad os finde den. Ligningen

$$y = f(\mathbf{x})$$

svarer i koordinater til

$${}_{\mathrm{c}}\mathbf{y} = {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\,{}_{\mathrm{a}}\mathbf{x}$$

som er ensbetydende med

$${}_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}}\,{}_{\mathrm{c}}\mathbf{y} = {}_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}}\left({}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\left({}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}\,{}_{\mathrm{b}}\mathbf{x}\right)\right)$$

hvoraf fås

$${}_{\mathrm{d}}\mathbf{y} = \left({}_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}}\,{}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\,{}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}\right){}_{\mathrm{b}}\mathbf{x}\,.$$

Heraf udleder vi at afbildningsmatricen for f med hensyn til b-basis i V og d-basis i W dannes ved et matrixprodukt:

$${}_{\mathrm{d}}\mathbf{F}_{\mathrm{b}} = {}_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}}\,{}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\,{}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}\,. \tag{8-37}$$

|||| Eksempel 8.31 Ændring af afbildningsmatrix

Vi betrager det 3-dimensionale vektorrum V som er behandlet i eksempel 8.27, og det 2-dimensionale vektorrum W som er behandlet i eksempel 8.28. En lineær afbildning $f : V \to W$ er givet ved afbildningsmatricen:

$${}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}} = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 7 \\ 6 & 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

Opgave: Givet vektoren $\mathbf{x} = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + 3\mathbf{b}_3$. Bestem $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ som en linearkombination af $\mathbf{d}_1$ og $\mathbf{d}_2$.

Løsning: Vi ændrer afbildningsmatricen ved hjælp af (8-33) og (8-31):

$${}_{\mathrm{d}}\mathbf{F}_{\mathrm{b}} = {}_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}}\,{}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\,{}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & 12 & 7 \\ 6 & 8 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Så kan vi direkte bruge de givne b-koordinater og direkte aflæse d-koordinaterne:

$${}_{\mathrm{d}}\mathbf{y} = {}_{\mathrm{d}}\mathbf{F}_{\mathrm{b}}\,{}_{\mathrm{b}}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Konklusion: $\mathbf{y} = 4\mathbf{d}_1 + 2\mathbf{d}_2$.

Basisskiftet viser sig at være ganske praktisk. Med den nye afbildningsmatrix ${}_{\mathrm{d}}\mathbf{F}_{\mathrm{b}}$ er det meget nemmere at udregne billedvektorer: man lægger blot første- og tredjekoordinaten fra den givne vektor sammen og beholder andenkoordinaten!

8.8.4 Opsummering vedrørende basisskifte

Vi samler resultaterne vedrørende basisskifte i de foregående underafsnit i den følgende metode:

|||| Metode 8.32 Ændring af afbildningsmatrix ved basisskifte

I vektorrummet V er der givet en basis $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ og en ny basis $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)$. I vektorrummet W er der givet en basis $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_m)$ og en ny basis $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \ldots, \mathbf{d}_m)$.

Hvis f er en lineær afbildning $f : V \to W$ som med hensyn til a-basis i V og c-basis i W har afbildningsmatricen ${}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}$, så gælder:

1. Afbildningsmatricen for f med hensyn til b-basis i V og c-basis i W er

$$ {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{b}} = {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\, {}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}\,. \tag{8-38} $$

2. Afbildningsmatricen for f med hensyn til a-basis i V og d-basis i W er

$$ {}_{\mathrm{d}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}} = ({}_{\mathrm{c}}\mathbf{M}_{\mathrm{d}})^{-1}\, {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}} \;= {}_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}}\, {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\,. \tag{8-39} $$

3. Afbildningsmatricen for f : med hensyn til b-basis i V og d-basis i W er

$$ {}_{\mathrm{d}}\mathbf{F}_{\mathrm{b}} = ({}_{\mathrm{c}}\mathbf{M}_{\mathrm{d}})^{-1}\, {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\, {}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}} \;= {}_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_{\mathrm{c}}\, {}_{\mathrm{c}}\mathbf{F}_{\mathrm{a}}\, {}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}}\,. \tag{8-40} $$

I de tre formler har vi brugt basisskiftematricerne:

$$ {}_{\mathrm{a}}\mathbf{M}_{\mathrm{b}} = \begin{bmatrix} {}_{\mathrm{a}}\mathbf{b}_1 & {}_{\mathrm{a}}\mathbf{b}_2 & \cdots & {}_{\mathrm{a}}\mathbf{b}_n \end{bmatrix} \text{ og } {}_{\mathrm{c}}\mathbf{M}_{\mathrm{d}} = \begin{bmatrix} {}_{\mathrm{c}}\mathbf{d}_1 & {}_{\mathrm{c}}\mathbf{d}_2 & \cdots & {}_{\mathrm{c}}\mathbf{d}_m \end{bmatrix}. $$