eNote 17

Taylor's approksimationsformler for funktioner af én variabel

I eNote 14 og eNote 16 er det vist hvordan funktioner af én og to variable kan approksimeres med førstegradspolynomier i ethvert (udviklings-)punkt og at graferne for de approksimerende førstegradspolynomier netop er henholdsvis tangenter og tangentplaner til de tilhørende grafer for funktionerne. I denne eNote vil vi vise, hvordan funktionerne kan approksimeres endnu bedre med polynomier af højere grad. Sådanne approksimationer har enormt mange anvendelser – det er meget nemmere at regne med polynomier end med andre funktioner, så hvis approksimationen til en funktion er tilstrækkelig god, så kan man bruge og regne videre med det approksimerende polynomium i stedet for funktionen selv og så iøvrigt håbe på, at den fejl man derved begår er tilstrækkelig lille. Men hvad betyder tilstrækkelig god *og* tilstrækkelig lille*? Og hvordan afhænger det af graden på det approksimerende polynomium? Det finder du svarene på i denne eNote.*

17.1 Højere-ordens afledede

Vi vil først se på funktioner $f(x)$ af én variabel x i et åbent interval i de reelle tal. Vi vil også antage, at funktionen kan differentieres vilkårligt mange gange, altså at alle de afledede funktioner eksisterer for ethvert x i intervallet: $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $f'''(x_0)$, $f^{(4)}(x_0)$, $f^{(5)}(x_0)$, osv. hvor $f^{(4)}(x_0)$ betyder den 4. afledede af $f(x)$ i x_0. Disse højere afledede skal vi bruge til at konstruere (koefficienterne i) de approksimerende polynomier.

Definition 17.1

Hvis en funktion $f(x)$ kan differentieres vilkårligt mange gange i ethvert punkt x i et givet åbent interval I så siger vi, at funktionen er ***glat*** i intervallet I.

|||| Eksempel 17.2 Højere-ordens afledede af nogle elementære funktioner

Her er nogle højere-ordens afledede af nogle kendte glatte funktioner:

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(4)}(x)$	$f^{(5)}(x)$
e^x	e^x	e^x	e^x	e^x	e^x
x^2	$2x$	2	0	0	0
x^3	$3x^2$	$6x$	6	0	0
x^4	$4x^3$	$12x^2$	$24x$	24	0
x^5	$5x^4$	$20x^3$	$60x^2$	$120x$	120
$(x-x_0)^5$	$5\cdot(x-x_0)^4$	$20\cdot(x-x_0)^3$	$60\cdot(x-x_0)^2$	$120\cdot(x-x_0)$	120
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$

(17-1)

Læg mærke til, at

1. Den n'te afledede $f^{(n)}(x)$ af funktionen $f(x) = (x-x_0)^n$ er

$$f^{(n)}(x) = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 2\cdot 1 = n! \quad , \tag{17-2}$$

   hvor $n!$ (n fakultet) er den korte skrivemåde for produktet af heltallene fra og med 1 til og med n, jævnfør tabel 17.2, hvor $n!$ optræder med $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$.

2. Ved gentagen differentiation af $\cos(x)$ fås det samme "sæt" af funktioner periodisk med perioden 4: Hvis $f(x) = \cos(x)$, så er

$$f^{(p)}(x) = f^{(p+4)}(x) \quad \text{for alle } p \geq 1 \quad . \tag{17-3}$$

   Det samme gælder for $f(x) = \sin(x)$.

3. Ved gentagen differentiation af den hyperbolske cosinusfunktion $\cosh(x)$ fås igen det samme "sæt" af funktioner periodisk med perioden 2: Hvis $f(x) = \cosh(x)$ fås

$$f^{(p)}(x) = f^{(p+2)}(x) \quad \text{for alle } p \geq 1 \quad . \tag{17-4}$$

   Det samme gælder for den hyperbolske sinusfunktion $f(x) = \sinh(x)$.

|||| Eksempel 17.3 De afledede af en knap så elementær funktion

En funktion $f(x)$ kan eksempelvis være givet ved et integral (som i dette tilfælde ikke kan udtrykkes ved de sædvanlige elementære funktioner):

$$f(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,dt \quad . \tag{17-5}$$

Men vi kan sagtens differentiere og finde de højere afledede af funktionen for ethvert x:

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \quad , \quad f''(x) = -2 \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-x^2} \quad , \quad f'''(x) = -2 \cdot \mathrm{e}^{-x^2} + 4 \cdot x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x^2} \quad \text{osv.} \tag{17-6}$$

|||| Eksempel 17.4 De afledede af en ukendt funktion

Vi antager at en funktion $f(x)$ er givet som løsning til en differentialligning med begyndelsesbetingelser i x_0:

$$f''(x) + 3f'(x) + 7f(x) = q(x) \quad , \quad \text{hvor} \quad f(x_0) = 1 \quad , \quad \text{og} \quad f'(x_0) = -3 \tag{17-7}$$

hvor $q(x)$ er en given glat funktion af x. Vi kan igen rimelig let finde de højere afledede af funktionen i x_0 ved at benytte begyndelsesbetingelserne direkte og ved at *differentiere differentialligningen*. Følgende fås fra begyndelsesbetingelserne og fra differentialligningen selv:

$$f'(x_0) = -3 \quad , \quad f''(x_0) = q(x_0) - 3f'(x_0) - 7f(x_0) = q(x_0) + 2 \quad . \tag{17-8}$$

Den tredje (og de højere) afledede af $f(x)$ fås derefter ved at differentiere begge sider af differentialligningen. F.eks. får vi ved at differentiere én gang:

$$f'''(x) + 3f''(x) + 7f'(x) = q'(x) \quad , \tag{17-9}$$

hvoraf vi får:

$$\begin{aligned} f'''(x_0) &= q'(x_0) - 3f''(x_0) - 7f'(x_0) \\ &= q'(x_0) - 3 \cdot (q(x_0) + 2) - 7 \cdot (-3) \\ &= q'(x_0) - 3q(x_0) + 15 \quad . \end{aligned} \tag{17-10}$$

17.2 Approksimation med polynomier

Ideen med det følgende går nu ud på at finde det polynomium, f.eks. det andengrads-polynomium, som bedst approksimerer en given glat funktion $f(x)$ i og omkring et givet x_0 i funktionens definitionsmængde $\mathcal{D}m(f)$.

Vi prøver derfor at skrive $f(x)$ på følgende måde:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0)^2 + R_{2,x_0}(x) \quad , \tag{17-11}$$

hvor a_0, a_1, og a_2 er passende konstanter der skal vælges således at ***restfunktionen*** $R_{2,x_0}(x)$ er så lille som muligt i og omkring x_0. Restfunktionen kan vi udtrykke ved $f(x)$ og det polynomium, som vi afprøver:

$$R_{2,x_0}(x) = f(x) - a_0 - a_1 \cdot (x - x_0) - a_2 \cdot (x - x_0)^2 \quad , \tag{17-12}$$

og det er denne funktion, der skal være så tæt på at være 0 som muligt når x er tæt på x_0 sådan at forskellen mellem funktionen $f(x)$ og andengradspolynomiet bliver så lille som muligt – i det mindste tæt på x_0.

Det første naturlige krav er derfor at:

$$R_{2,x_0}(x_0) = 0 \quad \text{svarende til at} \quad f(x_0) = a_0 \quad , \tag{17-13}$$

hvorved a_0 nu er bestemt.

Det næste naturlige krav, er at grafen for restfunktionen har vandret tangent i x_0 således at tangenten til restfunktionen derefter er identisk med x aksen:

$$R'_{2,x_0}(x_0) = 0 \quad \text{sådan at} \quad f'(x_0) = a_1 \quad , \tag{17-14}$$

hvorved a_1 er bestemt.

Det næste krav til restfunktionen er derefter:

$$R''_{2,x_0}(x_0) = 0 \quad \text{svarende til at} \quad f''(x_0) = 2 \cdot a_2 \quad , \tag{17-15}$$

hvorved også $a_2 = \frac{1}{2} f''(x_0)$ dermed er bestemt og fastlagt.

Vi har dermed fundet

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + R_{2,x_0}(x) \tag{17-16}$$

hvor restfunktionen $R_{2,x_0}(x)$ tilfredsstiller følgende krav som gør den meget lille omkring x_0:

$$R_{2,x_0}(x_0) = R'_{2,x_0}(x_0) = R''_{2,x_0}(x_0) = 0 \quad . \tag{17-17}$$

Hvis vi på tilsvarende måde havde ønsket at finde et approksimerende n'te grads polynomium for den samme funktion $f(x)$ havde vi fundet:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n + R_{n,x_0}(x) \quad , \tag{17-18}$$

hvor restfunktionen $R_{n,x_0}(x)$ er en glat funktion der tilfredsstiller alle kravene:

$$R_{n,x_0}(x_0) = R'_{n,x_0}(x_0) = \cdots = R^{(n)}_{n,x_0}(x_0) = 0 \quad . \tag{17-19}$$

Det er herefter rimeligt at forvente, dels at disse krav til restfunktionen kan opfyldes og dels at de tilsammen betyder, at restfunktionen selv må 'ligne' og være lige så lille som en potens af $(x - x_0)$ tæt ved x_0.

Det er præcis indholdet af følgende hjælpesætning:

|||| Hjælpesætning 17.5 Restfunktioner

Restfunktionen $R_{n,x_0}(x)$ kan udtrykkes ud fra $f(x)$ på to ret forskellige måder, og vi skal benytte dem begge i det følgende:

$$R_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1} \quad , \tag{17-20}$$

hvor $\xi(x)$ ligger imellem x og x_0 i intervallet I.

Den anden fremstilling er følgende som indeholder en epsilonfunktion:

$$R_{n,x_0}(x) = (x - x_0)^n \cdot \varepsilon_f(x - x_0) \quad , \tag{17-21}$$

hvor $\varepsilon_f(x - x_0)$ er en epsilonfunktion af $(x - x_0)$.

|||| Bevis

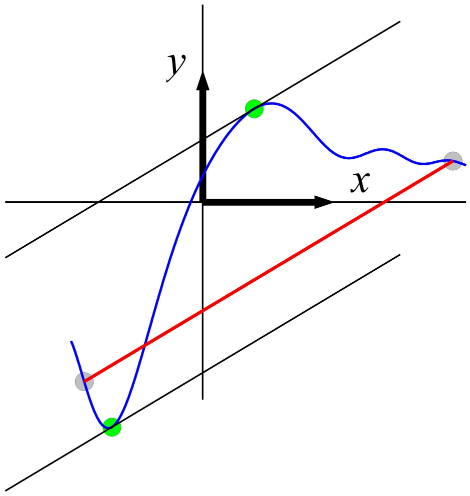
Vi vil nøjes med at indse den første påstand (17-20) i det allersimpleste tilfælde, nemlig for $n = 0$, dvs. følgende: I intervallet mellem (et fastholdt) x og x_0 findes altid en værdi ξ således at følgende gælder:

$$R_{0,x_0}(x) = f(x) - f(x_0) = \frac{f'(\xi)}{(1)!} \cdot (x - x_0) \quad . \tag{17-22}$$

Men dette er blot en iklædning af ***middelværdisætningen***: Hvis en glat funktion har værdierne henholdsvis $f(a)$ og $f(b)$ i endepunkterne af et interval $[a, b]$, så har grafen for $f(x)$ et sted en tangent som er parallel med det linjestykke der forbinder de to punkter $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$, se figur 17.1.

Den anden fremstilling (17-21) følger af den første (17-20) ved at observere, at $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$ er en epsilonfunktion af $(x - x_0)$, da $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ er begrænset og da $(x - x_0)^{n+1}$ selv er en epsilonfunktion.

■



Figur 17.1: To punkter på den blå graf-kurve for en funktion forbindes med et linjestykke (rød). Middelværdisætningen siger så, at der findes mindst ét sted (i det viste tilfælde præcis to steder, markeret med grønt) på kurven mellem de givne punkter hvor hældningskoefficienten $f'(x)$ for tangenten (sort) til kurven er præcis den samme som hældningskoefficienten for det rette linjestykke.

|||| Definition 17.6 Approksimerende polynomium

Lad $f(x)$ betegne en glat funktion i et interval I. Polynomiet

$$P_{n,x_0}(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n \qquad (17\text{-}23)$$

kaldes det ***approksimerende polynomium*** af n'te grad for funktionen $f(x)$ med udviklingspunkt x_0.

Opsamlende har vi derfor:

|||| Sætning 17.7 Taylor's formler

Enhver glat funktion $f(x)$ kan for ethvert n opdeles i et approksimerende polynomium af grad n og en restfunktion således:

$$f(x) = P_{n,x_0}(x) + R_{n,x_0}(x) \quad , \tag{17-24}$$

hvor restfunktionen kan udtrykkes på følgende måder:

$$\begin{aligned} R_{n,x_0}(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1} \quad \text{for et } \xi(x) \text{ mellem } x \text{ og } x_0 \\ &\text{og} \\ R_{n,x_0}(x) &= (x-x_0)^n \cdot \varepsilon_f(x-x_0) \quad . \end{aligned} \tag{17-25}$$

Det er især Taylor's grænseformel (hvor restfunktionen udtrykkes med en epsilonfunktion) vi vil gøre brug af i det følgende. Vi nævner den version eksplicit:

|||| Sætning 17.8 Taylor's grænseformel

Lad $f(x)$ betegne en glat funktion i et åbent interval I som indeholder et givet x_0. Så gælder der for alle x i intervallet og for ethvert helt tal $n \geq 0$ følgende

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n + (x-x_0)^n \cdot \varepsilon_f(x-x_0) \quad ,$$

hvor $\varepsilon_f(x-x_0)$ betegner en epsilonfunktion af $(x-x_0)$, dvs. $\varepsilon_f(x-x_0) \to 0$ for $x \to x_0$.

|||| Eksempel 17.9 Et polynomiums approksimerende polynomier

Man kunne forledes til at tro, at ethvert polynomium er sit eget approksimerende polynomium fordi ethvert polynomium må da være den bedste approksimation til sig selv. Her er et eksempel der viser, at det ikke er *så* simpelt. Vi ser på tredjegradspolynomiet

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \quad . \tag{17-26}$$

Polynomiet $f(x)$ har følgende ret forskellige approksimerende polynomier - i afhængighed af valg af *udviklingspunkt* x_0 og *udviklingsgrad* n:

$$\begin{aligned}
P_{7,x_0=0}(x) &= 1 + x + x^2 + x^3 \\
P_{3,x_0=0}(x) &= 1 + x + x^2 + x^3 \\
P_{2,x_0=0}(x) &= 1 + x + x^2 \\
P_{1,x_0=0}(x) &= 1 + x \\
P_{0,x_0=0}(x) &= 1 \\
P_{7,x_0=1}(x) &= 1 + x + x^2 + x^3 \\
P_{3,x_0=1}(x) &= 1 + x + x^2 + x^3 \\
P_{2,x_0=1}(x) &= 2 - 2 \cdot x + 4 \cdot x^2 \\
P_{1,x_0=1}(x) &= -2 + 6 \cdot x \\
P_{0,x_0=1}(x) &= 4 \\
P_{7,x_0=7}(x) &= 1 + x + x^2 + x^3 \\
P_{3,x_0=7}(x) &= 1 + x + x^2 + x^3 \\
P_{2,x_0=7}(x) &= 344 - 146 \cdot x + 22 \cdot x^2 \\
P_{1,x_0=7}(x) &= -734 + 162 \cdot x \\
P_{0,x_0=7}(x) &= 400 \quad .
\end{aligned} \tag{17-27}$$

|||| Opgave 17.10 Rest-funktioner for polynomier

For funktionen $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ betragtes følgende to opdelinger i approksimerende polynomier og tilhørende restfunktioner:

$$\begin{aligned}
f(x) &= P_{2,x_0=1}(x) + R_{2,x_0=1}(x) \quad \text{og} \\
f(x) &= P_{1,x_0=7}(x) + R_{1,x_0=7}(x) \quad ,
\end{aligned} \tag{17-28}$$

hvor de to approksimerende polynomier $P_{2,x_0=1}(x)$ og $P_{1,x_0=7}(x)$ allerede er angivet i eksempel 17.9. Bestem de to restfunktioner $R_{2,x_0=1}(x)$ og $R_{1,x_0=7}(x)$ udtrykt på begge de to måder som er vist i 17-25: For hver af de to restfunktioner angives de respektive udtryk for $\xi(x)$ og for $\varepsilon(x - x_0)$.

|||| Eksempel 17.11 Taylor's grænseformel med udviklingspunkt $x_0 = 0$

Her er nogle ofte benyttede funktioner med deres respektive approksimerende polynomier (og tilhørende restfunktioner udtrykt med epsilonfunktioner) med det fælles udviklingspunkt $x_0 = 0$ og vilkårlig høj grad:

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \cdot \varepsilon(x) \\
e^{x^2} &= 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} + x^{2n} \cdot \varepsilon(x) \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n} \cdot \varepsilon(x) \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1} \cdot \varepsilon(x) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n!} + x^n \cdot \varepsilon(x) \\
\ln(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n!} - x^n \cdot \varepsilon(x) \\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot x^{n-1} + x^n \cdot \varepsilon(x) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} + x^n \cdot \varepsilon(x)
\end{aligned}
\tag{17-29}
$$

Bemærk, at der i Taylor's grænseformel altid afsluttes med en epsilonfunktion og med en potens af x der er præcis den samme som den sidste potens der benyttes i det foranstående approksimerende polynomium.

17.3 Kontinuerte udvidelser

Funktionen $f(x) = \sin(x)/x$ er ikke defineret i $x = 0$. Vi vil undersøge, om vi kan udvide funktionen til at have en værdi i 0, således at den udvidede funktion er kontinuert i 0. Dvs. vi vil finde en værdi a, således at a-udvidelsen

$$
\widetilde{f} = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{for} \quad x \neq 0 \\ a & \text{for} \quad x = 0 \end{cases} \tag{17-30}
$$

er kontinuert i $x = 0$, dvs. således at

$$
\frac{\sin(x)}{x} \to a \quad \text{for} \quad x \to 0 \quad . \tag{17-31}
$$

En direkte anvendelse af Taylor's grænseformel optræder ved bestemmelse af grænseværdier for sådanne brøker $f(x)/g(x)$ hvor begge funktionerne, altså tælleren $f(x)$

og nævneren $g(x)$, går imod 0 for x gående imod 0. Hvad sker der med brøken når x går imod 0? Vi illustrerer med en række eksempler. Bemærk, at selv om tæller-funktionen og nævner-funktionen begge er kontinuerte i 0, så behøver brøken ikke selv at være det.

|||| Eksempel 17.12 Grænseværdier for funktionsbrøker

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{x + x^1 \cdot \varepsilon(x)}{x} = 1 + \varepsilon(x) \to 1 \quad \text{for} \quad x \to 0 \quad . \tag{17-32}$$

$$\frac{\sin(x)}{x^2} = \frac{x - \frac{1}{3!}x^3 + x^3 \cdot \varepsilon(x)}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{3!} + x \cdot \varepsilon(x) \quad , \tag{17-33}$$

som ikke har nogen grænseværdi for $x \to 0$. Derfor findes der ikke nogen kontinuert udvidelse i dette tilfælde.

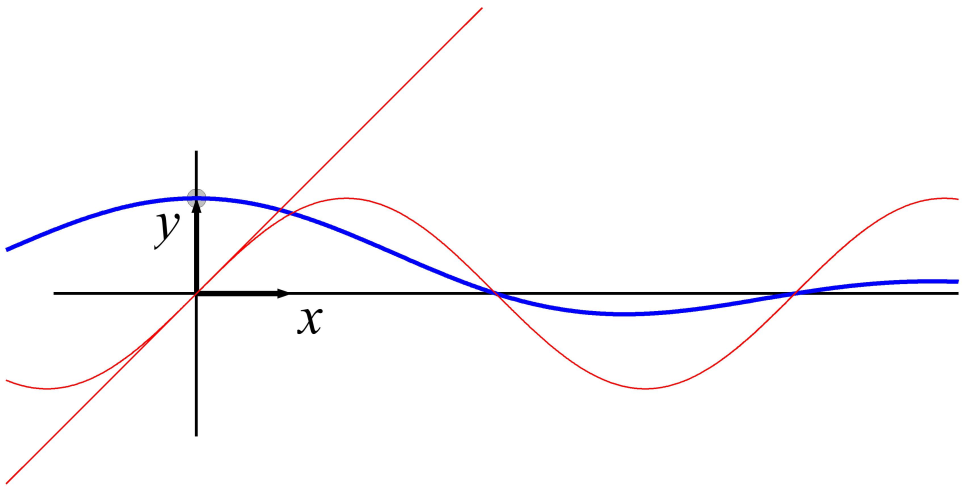
$$\frac{\sin(x^2)}{x^2} \to 1 \quad \text{for} \quad x \to 0 \quad \text{fordi} \quad \frac{\sin(u)}{u} \to 1 \quad \text{for} \quad u \to 0 \quad . \tag{17-34}$$

$$\frac{\sin(x) - x}{x^2} = \frac{x - \frac{1}{3!}x^3 + x^3 \cdot \varepsilon(x) - x}{x^2} = -\frac{x}{3!} + x \cdot \varepsilon(x) \to 0 \quad \text{for} \quad x \to 0 \quad . \tag{17-35}$$

$$\frac{\sin(x) - x}{x^3} = \frac{x - \frac{1}{3!}x^3 + x^3 \cdot \varepsilon(x) - x}{x^3} = -\frac{1}{3!} + \cdot\varepsilon(x) \to -\frac{1}{6} \quad \text{for} \quad x \to 0 \quad . \tag{17-36}$$

Ved bestemmelse af sådanne grænseværdier udvikles de approksimerende polynomier i tæller og nævner til så høje grader at grænseværdien "fremkommer" ved division i tæller og nævner med en potens af x.

Her er et lidt mere kompliceret eksempel:



Figur 17.2: Funktionen $f(x) = \sin(x)/x$ (blå) sammen med tællerfunktionen $\sin(x)$ (rød) og nævnerfunktionen x (også rød). Funktionen $f(x)$ er kontinuert i $x = 0$ netop når den tildeles værdien 1 der.

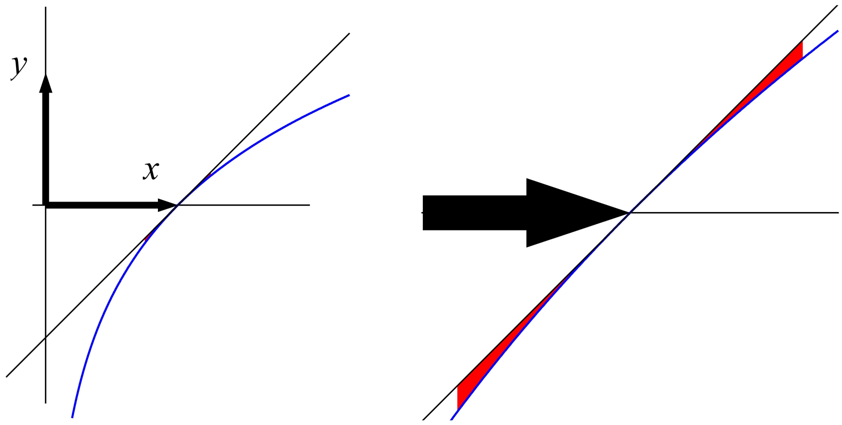
|||| Eksempel 17.13 Grænseværdi for funktionsbrøk

$$
\begin{aligned}
\frac{2\cos(x) - 2 + x^2}{x \cdot \sin(x) - x^2} &= \frac{2 \cdot (1 - \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{4!} \cdot x^4 + x^4 \cdot \varepsilon_1(x)) - 2 + x^2}{x \cdot (x - \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 + x^5 \cdot \varepsilon_2(x)) - x^2} \\
&= \frac{2 - x^2 + \frac{1}{12} \cdot x^4 + 2 \cdot x^4 \cdot \varepsilon_1(x) - 2 + x^2}{x^2 - \frac{1}{3!} \cdot x^4 + \frac{1}{5!} \cdot x^6 + x^6 \cdot \varepsilon_2(x) - x^2} \\
&= \frac{\frac{1}{12} \cdot x^4 + 2 \cdot x^4 \cdot \varepsilon_1(x)}{-\frac{1}{3!} \cdot x^4 + \frac{1}{5!} \cdot x^6 + x^6 \cdot \varepsilon_2(x)} \\
&= \frac{\frac{1}{12} + 2 \cdot \varepsilon_1(x)}{-\frac{1}{6} + \frac{1}{5!} \cdot x^2 + x^2 \cdot \varepsilon_2(x)} \\
&\to -\frac{1}{2} \quad \text{for} \quad x \to 0 \quad ,
\end{aligned}
\tag{17-37}
$$

idet tælleren går imod $\frac{1}{12}$ for $x \to 0$ og nævneren går imod $-\frac{1}{6}$ for $x \to 0$.

17.4 Vurdering af restfunktionerne

Hvor stor er den fejl man begår ved at benytte det approksimerende polynomium (som er let at regne med) i stedet for funktionen selv (som kan være kompliceret at beregne) i et givet (typisk lille) interval omkring udviklingspunktet? Det kan restfunktionen selvfølgelig give et svar på. Vi giver her et par eksempler der viser, hvordan restfunktionsudtrykket kan benyttes til sådanne fejl-vurderinger for givne funktioner.



Figur 17.3: Funktionen $f(x) = \ln(x)$ fra eksempel 17.14 (blå), det approksimerende første-gradspolynomium (sort) med udviklingspunkt $x_0 = 1$ og den tilhørende restfunktion (rød) illustreret som forskellen mellem $f(x)$ og det approksimerende polynomium i intervallet $\left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$. Til højre er zoomet ind på figuren omkring punktet $(1, 0)$.

|||| Eksempel 17.14 Approksimation af elementær funktion

Logaritmefunktionen $\ln(x)$ er defineret for positive værdier af x. Vi approksimerer med det approksimerende førstegrads-polynomium med udviklingspunkt i $x_0 = 1$ og vil vurdere restleddet i et passende lille interval omkring $x_0 = 1$, dvs. udgangspunktet er følgende:

$$f(x) = \ln(x) \quad , \quad x_0 = 1 \quad , \quad n = 1 \quad , \quad x \in \left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right] \quad . \tag{17-38}$$

Ifølge Taylor's formel med restfunktion har vi - idet vi udvikler i udviklingspunktet $x_0 = 1$ hvor $f(1) = 0$ og $f'(1) = 1$ og bruger $f''(x) = -1/x^2$ for alle x i definitionsmængden:

$$f(x) = \ln(x) = \ln(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(\xi)}{2!} \cdot (x-1)^2 = x - 1 - \frac{1}{2 \cdot \xi^2} \cdot (x-1)^2 \tag{17-39}$$

for en værdi af ξ imellem x og 1. Vi har altså hermed fundet:

$$P_{1,x_0=1}(x) = x - 1 \quad , \quad \text{og} \quad R_{1,x_0=1}(x) = -\frac{1}{2 \cdot \xi^2} \cdot (x-1)^2 \quad . \tag{17-40}$$

Den *numeriske værdi af restfunktionen* i det givne interval kan nu vurderes for alle x i det givne interval - også selvom vi ikke ved ret meget om hvor ξ ligger i intervallet udover at ξ ligger imellem x og 1:

Vi har

$$|R_{1,x_0=1}(x)| = |-\frac{1}{2\cdot\xi^2}\cdot(x-1)^2| \leq |\frac{1}{2\cdot\xi^2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2| \quad , \tag{17-41}$$

idet minus-tegnet kan fjernes fordi vi kun ser på den numeriske værdi og idet $(x-1)^2$ jo klart er størst (med værdien $(1/4)^2$) for $x = 3/4$ og for $x = 5/4$ i intervallet. Derudover er ξ *mindst* og dermed $(1/\xi)^2$ *størst* i intervallet for $\xi = 3/4$. (Bemærk at vi ikke bruger her, at ξ ligger imellem x og 1 - vi bruger kun, at ξ ligger i intervallet!) Det vil sige, at

$$|R_{1,x_0=1}(x)| \leq |\frac{1}{32\cdot\xi^2}| \leq |\frac{1}{32\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2}| = \frac{1}{18} \quad , \tag{17-42}$$

således at vi dermed har vist, at

$$|\ln(x)-(x-1)| \leq \frac{1}{18} \quad \text{for alle} \quad x \in \left[\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right] \quad . \tag{17-43}$$

Man kan med nogen ret spekulere over, hvorfor restfunktions-vurderingen af en så simpel funktion som $f(x) = \ln(x)$ i eksempel 17.14 skal være så bøvlet, når det er tydeligt for enhver (!), at den røde restfunktion i det tilfælde antager sin største numeriske (absolut-)værdi i et af endepunkterne i det aktuelle interval, se figur 17.3 – en påstand som vi endda kan vise med en helt almindelig funktionsundersøgelse.

Ved at differentiere restfunktionen får vi jo:

$$R'_{1,x_0=1}(x) = \frac{d}{dx}\left(\ln(x) - (x-1)\right) = \frac{1}{x} - 1 \quad , \tag{17-44}$$

som netop er mindre end 0 for $x > 1$ (sådan at $R_{1,x_0=1}(x)$ til højre for $x = 1$ er negativ og aftagende fra værdien 0 i $x = 1$) og større end 0 for $x < 1$ (sådan at $R_{1,x_0=1}(x)$ til venstre for $x = 1$ er negativ og voksende op mod værdien 0 i $x = 1$). Men problemet er, at vi *i princippet ikke ved* hvad værdien af $\ln(x)$ faktisk er – hverken i $x = 3/4$ eller i $x = 5/4$ medmindre vi bruger Maple eller et andet værktøj til hjælp. Restfunktions-vurderingen benytter *kun* de definerende egenskaber ved $f(x) = \ln(x)$, dvs. $f'(x) = 1/x$ og $f(1) = 0$, og vurderingen giver værdierne (også i endepunkterne af intervallet) med en (numerisk) fejl på højst $1/18$ i dette tilfælde.

Hvis vi faktisk får serveret den oplysning, at $\ln(3/4) = -0.2877$ og $\ln(5/4) = 0.2223$ så har vi selvfølgelig dermed også en direkte vurdering af den største værdi af $|R_{1,x_0=1}(x)|$ i intervallet $\left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$:

$$\begin{aligned} |R_{1,x_0=1}(x)| &\leq \max\{|-0.2877 + 0.25|\,,\,|0.2223 - 0.25|\} \\ &= 0.0377 < 1/18 = 0.0556 \quad . \end{aligned} \tag{17-45}$$

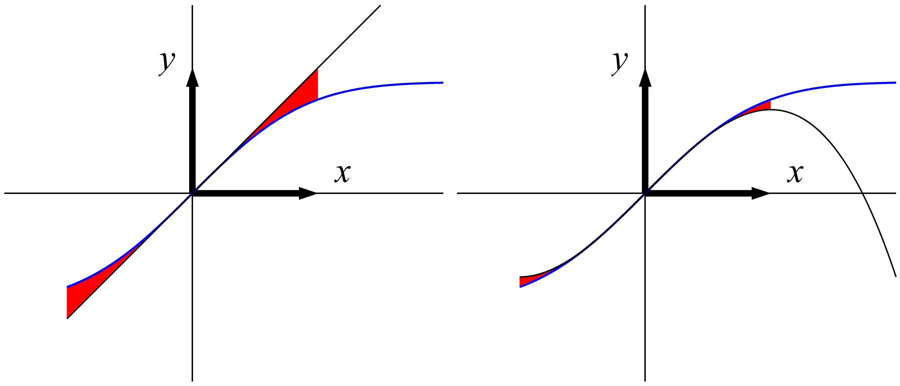
Med den almindelige funktionsanalyse får vi altså en noget bedre vurdering af restfunktionen – men kun fordi vi i forvejen kan vurdere værdien af funktionen i endepunkterne.

|||| Opgave 17.15 Approksimation af en ikke-elementær funktion

Givet funktionen fra eksempel 17.3:

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt \tag{17-46}$$

Der ønskes en vurdering af størrelsen af forskellen mellem $f(x)$ og funktionens approksimerende førstegradspolynomium $P_{1,x_0=0}(x)$ med udviklingspunkt i $x_0 = 0$. Opgaven går altså ud på at bestemme den største absolut-værdi som restfunktionen $|R_{1,x_0=0}(x)|$ antager i intervallet $[-1, 1]$.



Figur 17.4: Funktionen $f(x)$ fra eksempel 17.15 (blå), de approksimerende første- og tredjegrads-polynomier (sorte) med udviklingspunkt $x_0 = 0$ og de tilhørende restfunktioner (røde) i intervallet $[-1, 1]$.

Vink: Benyt de tidligere fundne højere afledede af $f(x)$ evalueret i $x_0 = 0$, jvf. eksempel 17.3: $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(x) = -2 \cdot x \cdot e^{-x^2}$. Se figur 17.4.

|||| Eksempel 17.16 Approksimation af ukendt (men elementær) funktion

Givet funktionen fra eksempel 17.4, dvs. funktionen tilfredsstiller følgende differentialligning med begyndelsesbetingelser:

$$f''(x) + 3f'(x) + 7f(x) = x^2 \quad , \quad \text{hvor} \quad f(0) = 1 \quad , \quad \text{og} \quad f'(0) = -3 \quad , \tag{17-47}$$

hvor vi har antaget, at højresiden i ligningen er $q(x) = x^2$ og at udviklingspunktet er $x_0 = 0$. Derved får vi nu:

$$f'(0) = -3 \quad , \quad f''(0) = 2 \quad , \quad f'''(0) = 15 \quad . \tag{17-48}$$

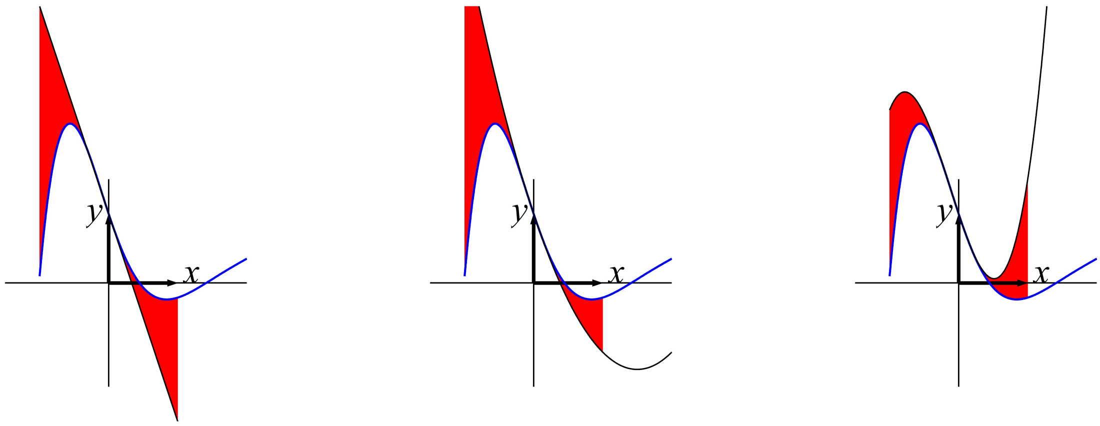
Vi har

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{6} \cdot x^3 + x^3 \cdot \varepsilon(x) \\ &= 1 - 3 \cdot x + x^2 + \frac{5}{2} \cdot x^3 + x^3 \cdot \varepsilon(x) \quad , \end{aligned} \tag{17-49}$$

således at det approksimerende tredjegrads-polynomium for $f(x)$ med udviklingspunkt $x_0 = 0$ er

$$P_{3,x_0=0}(x) = 1 - 3 \cdot x + x^2 + \frac{5}{2} \cdot x^3 \quad . \tag{17-50}$$

Bemærk, at $P_{3,x_0=0}(x)$ tilfredsstiller begyndelsesbetingelserne i (17-47) men polynomiet $P_{3,x_0=0}(x)$ er ikke en løsning til selve differentialligningen!



Figur 17.5: Funktionen $f(x)$ fra eksempel 17.16 (blå) og de approksimerende første-, anden-, og tredjegrads-polynomier (sorte) med udviklingspunkt $x_0 = 0$. De tilhørende respektive restfunktioner (røde) er illustreret som forskellene mellem $f(x)$ og de approksimerende polynomier.

17.5 Funktionsundersøgelser

En meget vigtig egenskab ved kontinuerte funktioner er følgende, som betyder at der er styr på hvor store og små værdier en kontinuert funktion kan antage på et interval, når blot intervallet er tilstrækkelig pæn:

|||| Sætning 17.17 Hovedsætning for kontinuerte funktioner af én variabel

Lad $f(x)$ betegne en funktion som er kontinuert i hele sin definitionsmængde $\mathcal{D}m(f) \subset \mathbb{R}$. Lad $I = [\,a\,,\,b\,]$ være et begrænset, afsluttet, og sammenhængende interval i $\mathcal{D}m(f)$.

Så er værdimængden for funktionen $f(x)$ i intervallet I også et begrænset, afsluttet, og sammenhængende interval $[\,A\,,\,B\,] \subset \mathbb{R}$. Vi kan skrive således:

$$\mathcal{V}m(f_{|_I}) = f(I) = \{f(x)\,|\,x \in I\} = [\,A\,,\,B\,] \quad , \tag{17-51}$$

hvor der tillades den mulighed at $A = B$ og det sker jo præcis når $f(x)$ er konstant i hele intervallet I.

|||| Definition 17.18 Globalt minimum og globalt maksimum

Når en funktion $f(x)$ har værdimængden $\mathcal{V}m(f_{|_I}) = f(I) = [\,A\,,\,B\,]$ på et interval $I = [a, b]$ siger vi, at

1. A er den ***globale minimumværdi*** for $f(x)$ i I, og hvis $f(x_0) = A$ for $x_0 \in I$ så er x_0 et ***globalt minimumpunkt*** for $f(x)$ i I.

2. B er den ***globale maksimumværdi*** for $f(x)$ i I, og hvis $f(x_0) = B$ for $x_0 \in I$ så er x_0 et ***globalt maksimumpunkt*** for $f(x)$ i I.

En velkendt og vigtig opgave går ud på at finde de globale maksimum- og minimum-værdier for givne funktioner $f(x)$ i givne intervaller og at bestemme de x-værdier for hvilke disse maksimum- og minimum-værdier *antages* altså minimum- og maksimum-punkterne. For at løse den opgave er følgende en uvurderlig hjælp – se figur 17.6:

|||| Hjælpesætning 17.19 Maksima og minima i stationære punkter

Lad x_0 være en global maksimum- eller minimum-værdi for $f(x)$ i I. Antag, at x_0 ikke er et endepunkt for intervallet I og at $f(x)$ er differentiabel i x_0.
Så er x_0 et ***stationært punkt*** for $f(x)$ i betydningen: $f'(x_0) = 0$.

|||| Bevis

Vi antyder argumentet. Da $f(x)$ er antaget differentiabel, har vi:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) + (x - x_0)\cdot\varepsilon_f(x - x_0) \\ &= f(x_0) + (x - x_0)\cdot\left(f'(x_0) + \varepsilon_f(x - x_0)\right) \quad . \end{aligned} \tag{17-52}$$

Hvis vi nu antager, at $f'(x_0)$ er positiv, så er parentesen $(f'(x_0) + \varepsilon_f(x - x_0))$ også positiv for x tilstrækkelig tæt på x_0 (idet $\varepsilon_f(x - x_0) \to 0$ for $x \to x_0$), men så er $(x - x_0)\cdot(f'(x_0) + \varepsilon_f(x - x_0))$ også positiv for x tilstrækkeligt tæt på x_0 og dermed er $f(x) > f(x_0)$ for sådanne $x > x_0$, og $f(x) < f(x_0)$ for sådanne $x < x_0$. Derfor kan $f(x_0)$ ikke være hverken maksimum-værdi eller minimumværdi for $f(x)$. Tilsvarende konklusion fås med antagelsen $f'(x_0) < 0$. Hvis x_0 er en global maksimum- eller minimum-værdi for $f(x)$ i I må den antagelse derfor medføre, at $f'(x_0) = 0$.

■

Hermed har vi følgende undersøgelsesmetode til rådighed:

|||| Metode 17.20 Undersøgelsesmetode

Lad $f(x)$ være en kontinuert funktion og $I = [a, b]$ et interval i definitionsmængden $\mathcal{D}m(f)$.

Maksimum- og minimum-værdierne for funktionen $f(x)$, $x \in I$, altså A og B i værdimængden $[A, B]$ for $f(x)$ i I findes ved at finde og sammenligne funktionsværdierne i følgende punkter:

1. Interval-endepunkterne (randpunkterne a og b for intervallet I).
2. Undtagelsespunkter, dvs. de punkter i det åbne interval $]a, b[$ hvor funktionen *ikke* er differentiabel.
3. De stationære punkter, dvs. samtlige de punkter x_0 i det åbne interval $]a, b[$ hvor $f'(x_0) = 0$.

Ved denne undersøgelsesmetode findes naturligvis ikke blot de globale maksimum- og minimum-værdier men også de x-værdier i I for hvilke det globale maksimum og det globale minimum antages, altså maksimum- og minimum-punkterne i det aktuelle interval.

|||| Eksempel 17.21 En kontinuert funktion undersøges

En kontinuert funktion $f(x)$ er defineret for alle x på følgende måde:

$$f(x) = \begin{cases} 0.75 & \text{for} \quad x \leq -1.5 \\ 0.5 + (x+1)^2 & \text{for} \quad -1.5 \leq x \leq 0 \\ 1.5 \cdot (1 - x^3) & \text{for} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1 & \text{for} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{for} \quad x > 2 \end{cases} \tag{17-53}$$

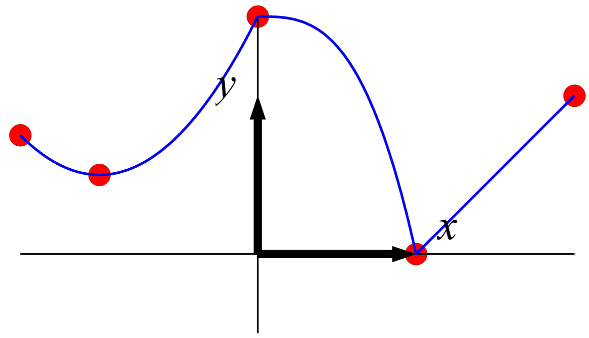
Se figur 17.6, hvor vi kun betragter funktionen i intervallet $I = [-1.5, 2.0]$. Der er to undtagelspunkter, hvor funktionen ikke er differentiabel: $x_0 = 0$ og $x_0 = 1$. Der er ét stationært punkt i $]-1.5, 2.0[$ hvor $f'(x_0) = 0$ nemlig $x_0 = -1$. Og endelig er der de to randpunkter, intervalendepunkterne $x_0 = -1.5$ og $x_0 = 2$ som skal undersøges.

Vi har derfor følgende kandidater til globale maksimum- og minimumværdier for $f(x)$ i I:

$x_0 =$	-1.5	-1	0	1	2
$f(x_0) =$	0.75	0.5	1.5	0	1

(17-54)

Vi aflæser konkluderende heraf, at maksimumværdien for $f(x)$ er $B = 1.5$ som antages i maksimumpunktet $x_0 = 0$. Minimumværdien er $A = 0$ som antages i minimumpunktet $x_0 = 1$. Der er ikke andre maksimum- og minimum-punkter for $f(x)$ i I.



Figur 17.6: Den kontinuerte funktion $f(x)$ fra eksempel 17.21 (blå). På grafen er markeret (med rødt) de 5 punkter som skal undersøges specielt med henblik på at bestemme værdimængden for $f(x)$ i intervallet $[-1.5, 2]$, jvf. metode 17.20.

|||| Definition 17.22 Lokale minima og lokale maksima

Lad $f(x)$ betegne en funktion på et interval $I = [a, b]$ som indeholder et givet $x_0 \in]a, b[$.

1. Hvis $f(x) \geq f(x_0)$ for alle x i en (gerne lille) omegn om x_0, så kaldes $f(x_0)$ en ***lokal minimumværdi*** for $f(x)$ i I, og x_0 er et ***lokalt minimumpunkt*** for $f(x)$ i I. Hvis der faktisk gælder $f(x) > f(x_0)$ for alle x i omegnen fraregnet x_0 selv, så kaldes $f(x_0)$ en ***egentlig lokal minimumværdi***.

2. Hvis $f(x) \leq f(x_0)$ for alle x i en (gerne lille) omegn om x_0, så kaldes $f(x_0)$ en ***lokal maksimumværdi*** for $f(x)$ i I, og x_0 er et ***lokalt maksimumpunkt*** for $f(x)$ i I. Hvis der faktisk gælder $f(x) < f(x_0)$ for alle x i omegnen (fraregnet x_0 selv), så kaldes $f(x_0)$ en ***egentlig lokal maksimumværdi***.

Hvis den funktion vi vil undersøge er glat i sine stationære punkter, så kan vi kvalificere metoden 17.20 endnu bedre, idet det approksimerende polynomium af grad 2 med udviklingspunkt i det stationære punkt kan hjælpe med at afgøre, om værdien af $f(x)$ i det stationære punkt er en kandidat til at være en maksimumværdi eller minimumværdi.

|||| Hjælpesætning 17.23 Lokal analyse i et stationært punkt

Lad $f(x)$ være en glat funktion og antag, at x_0 er et stationært punkt for $f(x)$ i et interval $I =]a, b[$. Så gælder følgende:

1. Hvis $f''(x_0) > 0$ så er $f(x_0)$ en egentlig lokal minimumværdi for $f(x)$.
2. Hvis $f''(x_0) < 0$ så er $f(x_0)$ en egentlig lokal maksimumværdi for $f(x)$.
3. Hvis $f''(x_0) = 0$ så er dette ikke tilstrækkelig information til at sikre, at $f(x_0)$ er lokal minimumværdi eller lokal maksimumværdi.

|||| Opgave 17.24

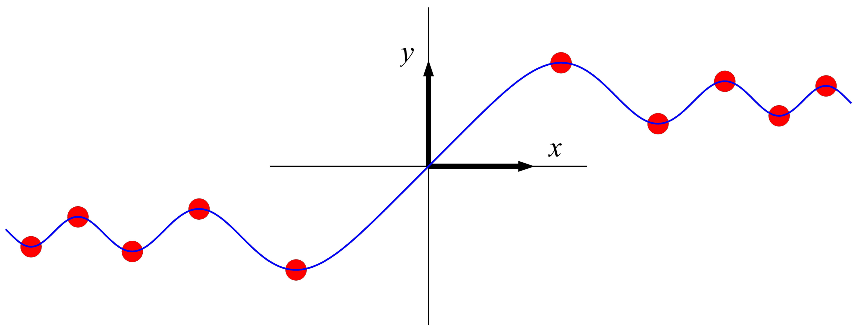
Bevis hjælpesætningen 17.23 ved at bruge Taylors grænseformel med det approksimerende andengrads-polynomium fro $f(x)$ og udviklingspunkt x_0. Husk, at x_0 er et stationært punkt, således at $f'(x_0) = 0$.

|||| Eksempel 17.25 Lokale maksima og minima

Den kontinuerte funktionen $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 0.75 & \text{for} \quad x \leq -1.5 \\ 0.5 + (x+1)^2 & \text{for} \quad -1.5 \leq x \leq 0 \\ 1.5 \cdot (1 - x^3) & \text{for} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1 & \text{for} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{for} \quad x \geq 2 \end{cases} \tag{17-55}$$

er vist i figur 17.6. I intervallet $I = [-1.5, 2.0]$ har funktionen de egentlige lokale minimumværdier 0.5 og 0 i de respektive egentlige lokale minimumpunkter $x_0 = -1$ og $x_0 = 1$ og funktionen har en egentlig lokal maksimumværdi 1.5 i det egentlige lokale maksimumpunkt $x_0 = 0$. Hvis vi udvider intervallet til $J = [-7, 7]$ og bemærker at funktionsværdierne per definition er konstante udenfor intervallet I fås de nye lokale maksimum-værdier 0.75 og 1 for $f(x)$ i J – ingen af dem er *egentlige* lokale maksimumværdier. Alle $x_0 \in]-7, -1.5]$ og alle $x_0 \in [2, 7[$ er lokale maksimumpunkter for $f(x)$ i J men ingen af dem er *egentlige* lokale maksimumpunkter. Alle x_0 i det *åbne interval* $x_0 \in]-7, -1.5[$ og alle x_0 i det *åbne interval* $x_0 \in]2, 7[$ er iøvrigt også lokale minimumpunkter for $f(x)$ i J men ingen af dem er *egentlige* lokale minimumpunkter.



Figur 17.7: Egentlige lokale maksima og egentlige lokale minima for funktionen fra eksempel 17.26 er her antydet på grafen for funktionen. For en ordens skyld bemærkes: De lokale maksimum- og minimum-punkter for funktionen er de markerede røde graf-punkters x-koordinater og de lokale maksimum- og minimum-værdier for funktionen er de markerede røde graf-punkters y-koordinater.

|||| Eksempel 17.26 En ikke-elementær funktion

Funktionen $f(x)$

$$f(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,dt \tag{17-56}$$

har stationære punkter i de værdier af x_0 som tilfredsstiller:

$$f'(x_0) = \cos(x_0^2) = 0 \quad , \quad \text{dvs.} \quad x_0^2 = \frac{\pi}{2} + p \cdot \pi \quad \text{hvor } p \text{ er et helt tal} \quad . \tag{17-57}$$

Da vi også har, at

$$f''(x) = -2 \cdot x \cdot \sin(x^2) \quad , \tag{17-58}$$

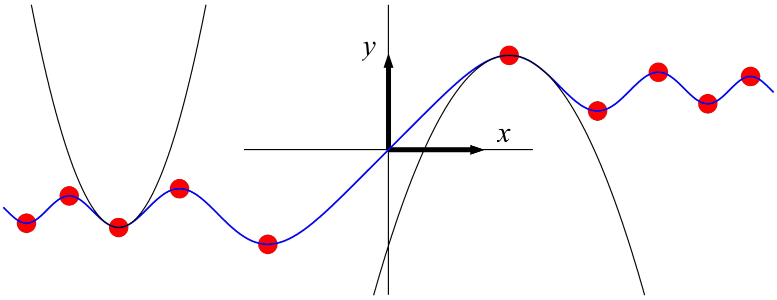
sådan at der i de angivne stationære punkter gælder

$$f''(x_0) = -2 \cdot x_0 \cdot (-1)^p \quad . \tag{17-59}$$

Heraf følger – via lemma 17.23 – at hvert andet stationært punkt x_0 langs x-aksen er et egentligt lokalt maksimumpunkt for $f(x)$ og de øvrige stationære punkter er egentlige lokale minimumpunkter. Se figur 17.7. I figur 17.8 er vist graferne (parabler) for et par af de approksimerende andengradspolynomier for $f(x)$ med udviklingspunkter i udvalgte stationære punkter.

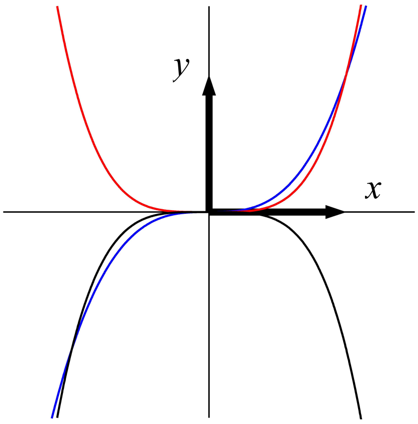
|||| Eksempel 17.27 Når approksimation til grad 2 ikke er nok

Som angivet i hjælpesætning 17.23 kan man ikke ud fra $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ slutte, at funktionen har lokalt maksimum eller minimum i x_0. Det viser de tre simple funktioner



Figur 17.8: Grafen for funktionen i eksempel 17.26 og to approksimerende parabler med udviklingspunkter i to stationære punkter, som er henholdsvis et egentligt lokalt minimumpunkt og et egentligt lokalt maksimumpunkt for $f(x)$.

i figur 17.9 med al ønskelig tydelighed: $f_1(x) = x^4$, $f_2(x) = -x^4$ og $f_3(x) = x^3$. Alle tre funktioner har stationært punkt i $x_0 = 0$ og alle har $f''(x_0) = 0$, men $f_1(x)$ har et egentligt lokalt minimumpunkt i 0, $f_2(x)$ har et egentligt lokalt maksimumpunkt i 0, og $f_3(x)$ har hverken et lokalt minimimumpunkt eller et lokalt maksimumpunkt i 0.



Figur 17.9: Tre elementære funktioner med approksimerende andengrads-polynomium $P_{2,x_0=0}(x) = 0$ for alle x. Funktionerne er henholdsvis: $f_1(x) = x^4$ (rød), $f_1(x) = -x^4$ (sort), og $f_3(x) = x^3$ (blå).

17.6 Opsummering

I denne eNote har vi studeret hvordan man kan approksimere glatte funktioner med polynomier.

- Enhver glat funktion $f(x)$ på et interval I kan opdeles i et approximerende n'te-grads-polynomium $P_{n,x_0}(x)$ med udviklingspunkt x_0 og en tilhørende restfunktion $R_{n,x_0}(x)$ således:

$$f(x) = P_{n,x_0}(x) + R_{n,x_0}(x) \quad , \tag{17-60}$$

  hvor polynomiet og restfunktionen i Taylor's grænseformel skrives således:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n + (x - x_0)^n \cdot \varepsilon_f(x - x_0) \quad ,$$

  hvor $\varepsilon_f(x - x_0)$ betegner en epsilonfunktion af $(x - x_0)$, dvs. $\varepsilon_f(x - x_0) \to 0$ for $x \to x_0$.

- Taylor's grænseformel kan benyttes til at finde kontinuerte udvidelser af brøkfunktioner ved at finde (om muligt) deres grænseværdier for $x \to x_0$ hvor x_0 er de værdier hvor nævner-funktionen er 0 således at brøkfunktionen i udgangspunktet ikke er defineret i x_0:

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{x + x^1 \cdot \varepsilon(x)}{x} = 1 + \varepsilon(x) \to 1 \quad \text{for} \quad x \to 0 \quad . \tag{17-61}$$

- Vurdering af restfunktionen giver en øvre grænse for den største numeriske forskel mellem en given funktion og det approksimerende polynomium af en passende grad og med et passende udviklingspunkt i et givet undersøgelsesinterval. En sådan vurdering kan også foretages for funktioner, som måske kun "kendes" via en differentialligning eller som et ikke-elementært integral:

$$|\ln(x) - (x - 1)| \leq \frac{1}{18} \quad \text{for alle} \quad x \in \left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right] \quad . \tag{17-62}$$

- Taylor's grænseformel med approksimerende anden-grads-polynomium benyttes til effektiv funktionsundersøgelse, herunder bestemmelse af værdimængde, globale og lokale maksima og minima for givne funktioner.