

||| eNote 12

Lineære 1. ordens differentialligningssystemer

Denne eNote beskriver 1. ordens differentialligningssystemer og viser, hvordan de kan løses. eNoten er i forlængelse af [eNote 11](#), der beskriver lineære differentialligninger generelt. Det er derfor en god idé at have læst den først. Desuden bruges egenverdier og -vektorer i løsningsproceduren, se [eNote 9](#) og [eNote 10](#).

Vi vil her kigge på lineære koblede homogene differentialligninger af 1. orden med konstante koefficienter (se eventuelt forklaring [12.1](#)). En sådan samling af **koblede differentialligninger** kaldes et **differentialligningssystem**. Et differentialligningssystem af 1. orden med n ligninger ser principielt således ud:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) \end{aligned} \quad (12-1)$$

I systemets venstreside er differentialkvotienterne af de n ukendte funktioner $x_1(t)$, $x_2(t)$, \dots , $x_n(t)$ linet op. Mens hver højreside er en linearkombination af de n ukendte funktioner. Koefficienterne (a 'erne) er reelle konstanter. I matrix-format kan systemet skrives således:

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (12-2)$$

Endnu mere kompakt skrives det

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (12-3)$$

A kaldes *systemmatricen*. Det er nu målet at løse et sådant differentiaalligningssystem, altså bestemme $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$.

|||| Forklaring 12.1 Hvad er et differentiaalligningssystem?

Differentiaalligningssystemer er samlinger af differentiaalligninger. Grunden til, at man ikke betragter differentiaalligningerne enkeltvis, er, at de ikke kan løses hver for sig, fordi de samme ukendte funktioner optræder i flere ligninger. Altså er ligningerne *koblede*. En enkelt differentiaalligning fra et system kan for eksempel se således ud:

$$x_1'(t) = 4x_1(t) - x_2(t) \quad (12-4)$$

Det er ikke muligt at bestemme hverken $x_1(t)$ eller $x_2(t)$, da der er to ukendte funktioner, men kun én differentiaalligning.

For at kunne løse et sådant system fuldt ud, skal man have lige så mange ligninger, som man har ukendte funktioner (med deres tilhørende afledede). Den anden ligning i systemet kunne derfor være:

$$x_2'(t) = -6x_1(t) + 2x_2(t) \quad (12-5)$$

Vi har nu lige så mange ligninger (to), som vi har ukendte funktioner (to), og det er nu muligt at bestemme både $x_1(t)$ og $x_2(t)$.

For overskuelighedens skyld skriver man differentiaalligningssystemer på matrix-form. Systemet ovenfor ser således ud:

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (12-6)$$

Ser man bort fra, at det er vektorer og matricer, der opereres med, ligner ligningssystemet noget, vi har set før: $x'(t) = A \cdot x(t)$, som man allerede kunne løse i gymnasiet. Løsningen til denne differentiaalligning er triviel: $x(t) = ce^{At}$, hvor c er en arbitrær konstant. Nedenfor finder vi ud af, at løsningen til det tilsvarende system af differentiaalligninger er sammenlignelig med $x(t) = ce^{At}$.

Vi løser nu differentiaalligningssystemet i følgende sætning. Sætningen indeholder forudsætninger, der ikke altid er opfyldte. De særtilfælde hvor sætningen ikke gælder, undersøges senere. Beviset for sætningen indeholder en meget kendt og brugt metode, kaldet *diagonaliseringsmetoden*.

||| Sætning 12.2

Et lineært differentiaalligningssystem bestående af n ligninger med i alt n ukendte funktioner er givet ved

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (12-7)$$

Hvis \mathbf{A} har n lineært uafhængige egenvektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ tilhørende (ikke nødvendigvis forskellige) egenverdier, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, er systemets fuldstændige løsningsmængde bestemt ved

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \mathbf{v}_n, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (12-8)$$

hvor c_1, c_2, \dots, c_n er vilkårlige komplekse konstanter:



Læg mærke til, at det ikke altid er muligt, at finde n lineært uafhængige egenvektorer. Derfor kan man ikke altid bruge sætning 12.2 til løsning af differentiaalligningssystemer af 1. orden.

I sætningen er angivet den fuldstændige komplekse løsningsmængde for differentiaalligningssystemet. Den fuldstændige reelle løsningsmængde kan derefter findes som den reelle delmængde af den komplekse løsningsmængde.

||| Bevis

Vi gætter på, at en løsning til differentiaalligningssystemet $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ er en vektor \mathbf{v} ganget på $e^{\lambda t}$, hvor λ er en konstant, så $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}$. Vi har da den differentierede

$$\mathbf{x}'(t) = \lambda e^{\lambda t} \mathbf{v}. \quad (12-9)$$

Sættes dette udtryk for $\mathbf{x}'(t)$ ind i ligning (12-7) sammen med udtrykket for $\mathbf{x}(t)$ fås:

$$\lambda e^{\lambda t} \mathbf{v} = \mathbf{A} e^{\lambda t} \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{v} - \lambda \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{v} = 0 \quad (12-10)$$

$e^{\lambda t}$ er forskellig for nul for ethvert $t \in \mathbb{R}$, hvorfor det kan divideres ud. Denne ligning er et egenverdiproblem. λ er en egenverdi til \mathbf{A} og \mathbf{v} er den tilhørende egenvektor. De kan begge bestemmes. Det er nu lykkedes os at finde ud af, at $e^{\lambda t} \mathbf{v}$ er én løsning til differentiaalligningssystemet, når λ er en egenverdi og \mathbf{v} den tilhørende egenvektor til \mathbf{A} .

Til at bestemme den fuldstændige løsningsmængde bruges den såkaldte *diagonaliseringsmetode*:

Vi antager, at $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{n \times n}$ har n lineært uafhængige (reelle eller komplekse) egenvektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ hørende til egenverdierne $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Vi indfører nu den regulære matrix \mathbf{V} , som indeholder alle egenvektorerne:

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n] \quad (12-11)$$

Endvidere indføres funktionen \mathbf{y} , så $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$, således at

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{V}\mathbf{y}(t) \quad (12-12)$$

Vi har da, at $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{V}\mathbf{y}'(t)$. Indsættes disse udtryk for $\mathbf{x}(t)$ og $\mathbf{x}'(t)$ i ligning (12-7), fås

$$\mathbf{V}\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{y}(t) \Leftrightarrow \mathbf{y}'(t) = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{y}(t) = \mathbf{\Lambda}\mathbf{y}(t), \quad (12-13)$$

hvor $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ er en diagonalmatrix med egenverdierne tilhørende \mathbf{A} .

Vi har nu ligningen $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{\Lambda}\mathbf{y}(t)$, der kan skrives på følgende måde:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= \lambda_1 y_1(t) \\ y_2'(t) &= \lambda_2 y_2(t) \\ &\vdots \\ y_n'(t) &= \lambda_n y_n(t) \end{aligned} \quad (12-14)$$

da $\mathbf{\Lambda}$ kun har elementer forskellig fra nul i diagonalen. Dette ligningssystem er ikke koblet: I hver ligning optræder kun én funktion og dens afledede. Derfor kan man løse dem enkeltvis, og den fuldstændige løsningsmængde til hver ligning er $y(t) = ce^{\lambda t}$ for alle $c \in \mathbb{C}$. Samlet giver det den fuldstændige løsningsmængde bestående af nedenstående funktioner for alle $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{C}$:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (12-15)$$

Da vi nu har løsningen $\mathbf{y}(t)$ kan vi også finde løsningen $\mathbf{x}(t) = \mathbf{V}\mathbf{y}(t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n] \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \\ &= c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \mathbf{v}_n. \end{aligned} \quad (12-16)$$

Vi har nu fundet den fuldstændige komplekse løsningsmængde til ligningssystemet i ligning (12-7) som består af funktionerne $\mathbf{x}(t)$ for alle $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{C}$.

■

||| **Eksempel 12.3**

Der er givet differentialligningssystemet

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= x_1(t) + 2x_2(t) \\x_2'(t) &= 3x_1(t)\end{aligned}\tag{12-17}$$

som på matrixform skrives som

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t).\tag{12-18}$$

Det kan vises, at \mathbf{A} har egenverdierne $\lambda_1 = 3$ og $\lambda_2 = -2$ med de tilhørende egenvektorer $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$ og $\mathbf{v}_2 = (2, -3)$ (prøv selv!). Derfor er den fuldstændige reelle løsningsmængde til differentialligningssystemet givet ved nedenstående funktioner for alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}\tag{12-19}$$

Løsningen er fundet ved brug af sætning 12.2. En anden måde at opskrive løsningsmængden på er ved at skille ligningssystemet ad, så

$$\begin{aligned}x_1(t) &= c_1 e^{3t} + 2c_2 e^{-2t} \\x_2(t) &= c_1 e^{3t} - 3c_2 e^{-2t}\end{aligned}\tag{12-20}$$

udgør løsningsmængden, hvor $t \in \mathbb{R}$, for alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

12.1 To koblede differentialligninger

Givet et lineært homogent 1. ordens differentialligningssystem med konstante koefficienter med n ligninger og n ukendte funktioner

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad t \in \mathbb{R}\tag{12-21}$$

Hvis systemmatricen \mathbf{A} har n lineært uafhængige egenvektorer, kan systemets reelle løsningsmængde findes ved hjælp af sætning 12.2. Hvis egenverdierne er reelle, kan den reelle løsningsmængde umiddelbart opskrives efter sætningens formel (12-8), hvor de n tilhørende lineært uafhængige egenvektorer er reelle, og de arbitrære konstanter angives som reelle. Hvis systemmatricen har egenverdier som ikke er reelle, kan den reelle løsningsmængde findes ved at uddrage den reelle delmængde af den komplekse løsningsmængde. Også i dette tilfælde vil løsningsmængden kunne opskrives som en linearkombination af n lineært uafhængige reelle løsninger til differentialligningssystemet.

Tilbage har vi særtilfældet, hvor systemmatricen ikke har n lineært uafhængige egenvektorer. Også her vil den reelle løsningsmængde være en linearkombination af n lineært uafhængige reelle løsninger til differentialligningssystemet. Her kan diagonaliseringsmetoden af gode grunde ikke benyttes, og man må bruge andre metoder.

I dette afsnit gennemgår vi de nævnte tre tilfælde for systemer der består af $n = 2$ koblede differentialligninger med 2 ukendte funktioner.

|||| Metode 12.4

Den fuldstændige reelle løsningsmængde til differentialligningssystemet

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (12-22)$$

bestående af $n = 2$ ligninger med 2 ukendte funktioner, kan opskrives som

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{u}_1(t) + c_2 \mathbf{u}_2(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (12-23)$$

hvor \mathbf{u}_1 og \mathbf{u}_2 er reelle lineært uafhængige partikulære løsninger og $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Bestem først egenværdierne til \mathbf{A} . For rødderne i det karakteristiske polynomium \mathbf{A} foreligger der tre muligheder:

- **To reelle enkelttrødder.** I så fald har begge egenværdier λ_1 og λ_2 algebraisk multiplicitet 1 og geometrisk multiplicitet 1, og vi kan sætte

$$\mathbf{u}_1(t) = e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 \quad \text{og} \quad \mathbf{u}_2(t) = e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2, \quad (12-24)$$

hvor \mathbf{v}_1 og \mathbf{v}_2 er egentlige egenvektorer tilhørende λ_1 og λ_2 respektivt.

- **To komplekse rødder.** De to egenværdier λ og $\bar{\lambda}$ er da hinandens konjugerede komplekse tal. Vi bestemmer da \mathbf{u}_1 og \mathbf{u}_2 ved hjælp af metode 12.5.
- **En dobbeltrod.** Her har egenværdien λ algebraisk multiplicitet 2. Hvis den geometriske multiplicitet af λ er 1, bestemmes \mathbf{u}_1 og \mathbf{u}_2 ved hjælp af metode 12.7.

Ved den første mulighed i metode 12.4 med to forskellige reelle egenværdier, kan man udmiddelbart benytte sætning 12.2, idet de arbitrære konstanter vælges som reelle, se eksempel 12.3.

Nu følger metoden, der tager sig af tilfældet med to komplekse egenværdier.

|||| Metode 12.5

To lineært uafhængige reelle løsninger til differentialligningssystemet

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (12-25)$$

hvor \mathbf{A} har det komplekse egenverdipar $\lambda = \alpha + \beta i$ og $\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$ med tilhørende egenvektorer \mathbf{v} og $\bar{\mathbf{v}}$, er

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1(t) &= \operatorname{Re}\left(e^{\lambda t} \mathbf{v}\right) = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) \operatorname{Re}(\mathbf{v}) - \sin(\beta t) \operatorname{Im}(\mathbf{v})) \\ \mathbf{u}_2(t) &= \operatorname{Im}\left(e^{\lambda t} \mathbf{v}\right) = e^{\alpha t} (\sin(\beta t) \operatorname{Re}(\mathbf{v}) + \cos(\beta t) \operatorname{Im}(\mathbf{v})) \end{aligned} \quad (12-26)$$

Beviset medtages i næste version af denne eNote.

|||| Eksempel 12.6

Givet differentialligningssystemet

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (12-27)$$

Vi ønsker at bestemme den fuldstændige reelle løsningsmængde.

Egenverdierne er bestemt til $\lambda = 1 + i$ henholdsvis $\bar{\lambda} = 1 - i$ med de tilhørende egenvektorer $\mathbf{v} = (-i, 1)$ henholdsvis $\bar{\mathbf{v}} = (i, 1)$. Det ses, at der er to komplekse egenverdier og dertil to komplekse egenvektorer. Med $\lambda = 1 + i$ have

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \operatorname{Re}(\mathbf{v}) + i \operatorname{Im}(\mathbf{v}) \quad (12-28)$$

Bruges metode 12.5 har vi da de to løsninger:

$$\mathbf{u}_1(t) = e^t \left(\cos(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \sin(t) \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = e^t \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} \quad (12-29)$$

$$\mathbf{u}_2(t) = e^t \left(\sin(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \cos(t) \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = e^t \begin{bmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} \quad (12-30)$$

Den fuldstændige reelle løsningsmængde til differentialligningssystemet (12-27) er da givet ved følgende funktioner for alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{u}_1(t) + c_2 \mathbf{u}_2(t) = e^t \left(c_1 \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} \right), \quad t \in \mathbb{R} \quad (12-31)$$

fundet ved hjælp af metode 12.4.

Endelig beskrives metoden der kan bruges, hvis systemmatricen har egenværdien λ med $\text{am}(\lambda) = 2$ og $\text{gm}(\lambda) = 1$, dvs. hvor diagonalisering ikke mulig.

|||| Metode 12.7

Hvis systemmatricen \mathbf{A} til differentialligningssystemet

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (12-32)$$

har en egenværdi λ med algebraisk multiplicitet 2, men det tilhørende egenvektorum kun har geometrisk multiplicitet 1, findes to lineært uafhængige løsninger til differentialligningssystemet af formen:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1(t) &= e^{\lambda t} \mathbf{v} \\ \mathbf{u}_2(t) &= te^{\lambda t} \mathbf{v} + e^{\lambda t} \mathbf{b}, \end{aligned} \quad (12-33)$$

hvor \mathbf{v} er egenvektoren tilhørende egenværdien λ , og \mathbf{b} er løsning til nedenstående lineære ligningssystem:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{b} = \mathbf{v} \quad (12-34)$$

|||| Bevis

Det er åbenlyst, at den ene løsning til differentialligningssystemet er $\mathbf{u}_1(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}$. Det svære er at finde endnu en løsning.

Vi gætter på en løsning af formen

$$\mathbf{u}_2(t) = te^{\lambda t} \mathbf{v} + e^{\lambda t} \mathbf{b} = e^{\lambda t} (t\mathbf{v} + \mathbf{b}), \quad (12-35)$$

hvor \mathbf{v} er en egenvektor tilhørende λ . Vi har da

$$\mathbf{u}_2'(t) = (e^{\lambda t} + \lambda te^{\lambda t})\mathbf{v} + \lambda e^{\lambda t} \mathbf{b} = e^{\lambda t} ((1 + \lambda t)\mathbf{v} + \lambda \mathbf{b}) \quad (12-36)$$

Vi kontrollerer, om $\mathbf{u}_2(t)$ er en løsning ved at indsætte det i $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2'(t) &= \mathbf{A}\mathbf{u}_2(t) \Leftrightarrow \\ (1 + \lambda t)\mathbf{v} + \lambda \mathbf{b} &= \mathbf{A}(t\mathbf{v} + \mathbf{b}) \Leftrightarrow \\ t(\lambda \mathbf{v} - \mathbf{A}\mathbf{v}) + (\mathbf{v} + \lambda \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{b}) &= \mathbf{0} \Leftrightarrow \\ \lambda \mathbf{v} - \mathbf{A}\mathbf{v} &= \mathbf{0} \wedge \mathbf{v} + \lambda \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{b} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (12-37)$$

Den første ligning kan nemt omformes til $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$, og den ses at være sand, da \mathbf{v} er en egenvektor tilhørende λ . Den anden ligning omformes:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} + \lambda \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{b} &= \mathbf{0} \Leftrightarrow \\ \mathbf{A}\mathbf{b} - \lambda \mathbf{b} &= \mathbf{v} \Leftrightarrow \\ (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{b} &= \mathbf{v} \end{aligned} \quad (12-38)$$

Hvis \mathbf{b} opfylder det foreskrevne ligningssystem, vil $\mathbf{u}_2(t)$ også være en løsning til differentiaalligningssystemet. Vi har nu fundet to løsninger, og vi skal finde ud af, om de er lineært uafhængige. Dette gøres ved et normalt linearitetskriterium: Hvis ligningen $k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$ kun har løsningen $k_1 = k_2 = 0$ er \mathbf{u}_1 og \mathbf{u}_2 lineært uafhængige.

$$\begin{aligned} k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 &= \mathbf{0} \Rightarrow \\ k_1e^{\lambda t}\mathbf{v} + k_2(te^{\lambda t}\mathbf{v} + \mathbf{b}e^{\lambda t}) &= \mathbf{0} \Leftrightarrow \\ t(k_2\mathbf{v}) + (k_1\mathbf{v} + k_2\mathbf{b}) &= \mathbf{0} \Leftrightarrow \\ k_2\mathbf{v} = \mathbf{0} \wedge k_1\mathbf{v} + k_2\mathbf{b} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (12-39)$$

Da \mathbf{v} er en egenvektor, er den forskellig fra nulvektoren, og derfor er $k_2 = 0$ ifølge den første ligning. Den anden ligning er derved blevet reduceret til $k_1\mathbf{v} = \mathbf{0}$, og med samme argument haves $k_1 = 0$. Derfor er de løsninger lineært uafhængige, og metoden er nu bevist. ■

|||| Eksempel 12.8

Givet differentialligningssystemet

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 16 & -1 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t). \quad (12-40)$$

Egenværdierne bestemmes for \mathbf{A} :

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) &= \begin{vmatrix} 16 - \lambda & -1 \\ 4 & 12 - \lambda \end{vmatrix} = (16 - \lambda)(12 - \lambda) + 4 \\ &= \lambda^2 - 28\lambda + 196 = (\lambda - 14)^2 = 0 \end{aligned} \quad (12-41)$$

Der er altså kun én egenværdi, nemlig $\lambda = 14$, selvom det er et 2×2 -system. Egenvektorerne bestemmes:

$$\mathbf{A} - 14\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 16 - 14 & -1 \\ 4 & 12 - 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12-42)$$

Man har da egenvektoren $(\frac{1}{2}, 1)$, eller $\mathbf{v} = (1, 2)$. Vi må altså konstatere, at egenværdien λ har algebraisk multiplicitet 2, men at det tilhørende vektorrum har geometrisk multiplicitet 1. For at bestemme to uafhængige løsninger til differentiaalligningssystemet kan metode 12.7 bruges.

Først løses følgende ligningssystem:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{b} = \mathbf{v} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (12-43)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12-44)$$

Dette giver $\mathbf{b} = (1, 1)$, hvis den frie variabel sættes til 1. De to løsninger er da

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1(t) &= e^{14t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}_2(t) &= te^{14t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + e^{14t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{12-45}$$

Ved hjælp af metode 12.4 kan den fuldstændige løsningsmængde bestemmes til at være følgende funktioner for alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{u}_1(t) + c_2 \mathbf{u}_2(t) = c_1 e^{14t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{14t} \left(t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).\tag{12-46}$$

12.2 n-dimensionalt løsningsrum

I det foregående afsnit har vi betragtet koblede systemer bestående af to lineære ligningssystemer med to ukendte funktioner. Løsningsrummet er to-dimensionalt, idet det kan opskrives som en linearkombination af to lineært uafhængige løsninger. Dette kan generaliseres til vilkårlige systemer med $n \geq 2$ koblede lineære differentialligninger med n ukendte funktioner: Løsningsmængden er en linearkombination af netop n lineært uafhængige løsninger. Dette formuleres i generel form i følgende sætning.

|||| Sætning 12.9

Givet det lineære homogene 1. ordens differentialligningssystem med konstante reelle koefficienter

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad t \in \mathbb{R},\tag{12-47}$$

bestående af n ligninger og med i alt n ukendte funktioner. Den fuldstændige reelle løsningsmængde til systemet er n -dimensionalt kan opskrives ved

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{u}_1(t) + c_2 \mathbf{u}_2(t) + \cdots + c_n \mathbf{u}_n(t),\tag{12-48}$$

hvor $\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_2(t), \dots, \mathbf{u}_n(t)$ er lineært uafhængige reelle løsninger til differentialligningssystemet, og $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

Herunder er et eksempel med et koblet system af tre differentialligninger, der eksemplificerer sætning 12.9.

||| **Eksempel 12.10 Advanced**

Givet differentialligningssystemet

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} -9 & 10 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (12-49)$$

Vi ønsker at bestemme den fuldstændige reelle løsningsmængde til differentialligningssystemet. Egenverdierne og egenvektorene kan bestemmes og er som følger:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = -4 & : \mathbf{v}_1 = (10, 5, 1) \\ \lambda_2 = 1 & : \mathbf{v}_2 = (5, 5, 3) \end{aligned}$$

Desuden har λ_2 algebraisk multiplicitet 2, men det tilhørende egenvektorrum har geometrisk multiplicitet 1. Fordi $n = 3$ skal vi bruge 3 lineært uafhængige løsninger til at danne den fuldstændige løsningsmængde, som set i sætning 12.9. Egenverdierne betragtes hver for sig:

1) Den første egenverdi, $\lambda_1 = -4$, har både geometrisk og algebraisk multiplicitet lig 1. Det giver netop én løsning

$$\mathbf{u}_1(t) = e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 = e^{-4t} \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (12-50)$$

2) Den anden egenverdi, $\lambda_2 = 1$, har algebraisk multiplicitet 2, men geometrisk multiplicitet 1. Derfor kan vi bruge metode 12.7 til at finde to løsninger. Først bestemmes \mathbf{b} :

$$(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E})\mathbf{b} = \mathbf{v}_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (12-51)$$

En partikulær løsning til dette ligningssystem er $\mathbf{b} = (0, \frac{1}{2}, 1)$. Med denne viden har vi yderligere to lineært uafhængige løsninger til differentialligningssystemet:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2(t) &= e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 = e^t \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}_3(t) &= te^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 + e^{\lambda_2 t} \mathbf{b} = te^t \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12-52)$$

Det er op til læseren at vise, at de tre løsninger er lineært uafhængige.

Ifølge metode 12.9 er den fuldstændige reelle løsningsmængde udgjort af følgende linearkombination for alle $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{x}_1(t) + c_2 \mathbf{x}_2(t) + c_3 \mathbf{x}_3(t) \quad (12-53)$$

Dette giver altså

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{-4t} \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^t \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} + c_3 \left(t e^t \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right) \quad (12-54)$$

hvor $t \in \mathbb{R}$ og alle $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

12.3 Eksistens og entydighed af løsninger

Ifølge struktursætningen 12.9 indeholder den fuldstændige løsningsmængde til et differentialligningssystem med n ligninger n arbitrære konstanter. Hvis man har n *begyndelsesværdibetingelser*, så kan konstanterne bestemmes, og vi får da en entydig løsning. Dette formuleres i følgende *eksistens- og entydighedssætning*.

||| Sætning 12.11

Et 1. ordens differentialligningssystem bestående af n ligninger og n ukendte funktioner med konstante koefficienter er givet ved

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad t \in I. \quad (12-55)$$

For ethvert $t_0 \in I$ og ethvert talsæt $\mathbf{y}_0 = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ findes der netop én løsning $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ der opfylder begyndelsesværdibetingelsen

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{y}_0, \quad (12-56)$$

hvilket vil sige at

$$x_1(t_0) = y_1, \quad x_2(t_0) = y_2, \quad \dots, \quad x_n(t_0) = y_n. \quad (12-57)$$

Beviset udelades.

||| Eksempel 12.12

I eksempel 12.3 fandt vi den fuldstændige løsningsmængde til differentialligningssystemet

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (12-58)$$

nemlig

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (12-59)$$

Vi ønsker nu at bestemme den entydige løsning $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$ som opfylder begyndelsesværdibetingelsen $\mathbf{x}(0) = (x_1(0), x_2(0)) = (6, 6)$. Dette giver ligningssystemet

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} = c_1 e^0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^0 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad (12-60)$$

Med sædvanlig GaussJordan-elimination fås

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (12-61)$$

Man får altså løsningen $(c_1, c_2) = (6, 0)$, og den entydige og betingede løsning er derfor

$$\mathbf{x}(t) = 6e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (12-62)$$

hvilket er det samme som at

$$x_1(t) = 6e^{3t} \quad x_2(t) = 6e^{3t}. \quad (12-63)$$

I dette særtilfælde er de to funktioner altså identiske.

12.4 Omformning af lineære n -te ordens homogene differentialligninger til et 1. ordens differentialligningssystem

Med lidt snilde er det muligt at omforme en vilkårlig homogen n -te ordens differentialligning med konstante koefficienter til et differentialligningssystem, som kan løses ved hjælp af denne note.

Metode 12.13

En n -te ordens lineær differentialligning,

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + a_{n-2}x^{(n-2)}(t) + \dots + a_1x'(t) + a_0x(t) = 0 \quad (12-64)$$

for $t \in \mathbb{R}$, kan omformes til et 1. ordens differentialligningssystem, og systemet vil se således ud:

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}'(t) \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (12-65)$$

og $x_1(t) = x(t)$.

Beviset for denne omskrivning er simpelt og giver god forståelse for omformningen.

Bevis

Lad der være givet en n -te ordens differentialligning som i ligning (12-64). Vi indfører n funktioner på denne måde:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x(t) \\ x_2(t) &= x_1'(t) = x'(t) \\ x_3(t) &= x_2'(t) = x''(t) \\ &\vdots \\ x_{n-1}(t) &= x_{n-2}'(t) = x^{(n-2)}(t) \\ x_n(t) &= x_{n-1}'(t) = x^{(n-1)}(t) \end{aligned} \quad (12-66)$$

Disse nye udtryk indsættes i differentialligningen (12-64):

$$x_n'(t) + a_{n-1}x_n(t) + a_{n-2}x_{n-1}(t) + \dots + a_1x_2(t) + a_0x_1(t) = 0 \quad (12-67)$$

Denne ligning kan sammen nu med ligningerne (12-66) skrives op på matrixform.

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}'(t) \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (12-68)$$

Metoden er nu bevist. ■

||| **Eksempel 12.14**

Givet en lineær differentialligning af 3. orden med konstante koefficienter:

$$x'''(t) - 4x''(t) - 7x'(t) + 10x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (12-69)$$

Vi ønsker at bestemme den fuldstændige løsningsmængde. Derfor indføres funktionerne

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x(t) \\ x_2(t) &= x'_1(t) = x'(t) \\ x_3(t) &= x'_2(t) = x''(t) \end{aligned} \quad (12-70)$$

På denne måde kan vi omskrive differentialligningen til

$$x'_3(t) - 4x_3(t) - 7x_2(t) + 10x_1(t) = 0 \quad (12-71)$$

Og vi kan da samle de tre sidste ligninger i et ligningssystem.

$$\begin{aligned} x'_1(t) &= x_2(t) \\ x'_2(t) &= x_3(t) \\ x'_3(t) &= -10x_1(t) + 7x_2(t) + 4x_3(t) \end{aligned} \quad (12-72)$$

Det skrives på matrixform på denne måde:

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & 7 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (12-73)$$

Egenverdierne bestemmes til at være $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ og $\lambda_3 = 5$. Den fuldstændige løsningsmængde til differentialligningssystemet er ifølge sætning 12.2 givet ved følgende funktioner for alle de arbitrære konstanter $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{-2t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^t \mathbf{v}_2 + c_3 e^{5t} \mathbf{v}_3, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (12-74)$$

hvor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ er respektive egenvektorer.

Vi skal imidlertid kun bruge løsningsmængden til $x_1(t) = x(t)$, hvorfor den tages ud af systemet. Desuden indfører vi nu tre nye arbitrære konstanter $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$, der skal gøre det ud for produkterne mellem c 'erne og egenvektorerens førstekoordinat. Resultatet bliver således

$$x(t) = x_1(t) = k_1 e^{-2t} + k_2 e^t + k_3 e^{5t}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (12-75)$$

Dette udgør den fuldstændige løsningsmængde til differentialligningen (12-69). Hvis førstekoordinaten i \mathbf{v}_1 er 0 sættes $k_1 = 0$, i modsat fald kan k_1 være et vilkårligt reelt tal. På samme måde med k_2 og k_3 .