eNote 29

Komplekse tal

I denne eNote introduceres og undersøges talmængden $\mathbb{C}$, de komplekse tal. Da $\mathbb{C}$ betragtes som en udvidelse af $\mathbb{R}$ forudsætter eNoten almindeligt kendskab til de reelle tal, herunder de elementære reelle funktioner som de trigonometriske funktioner og den naturlige eksponentialfunktion. Kendskab til vektorer i planen vil også være en fordel.

29.1 Indledning

En binom andengradsligning som

$$x^2 = 25$$

har to reelle løsninger, nemlig

$$x = 5 \;\text{ og }\; x = -5$$

idet

$$5^2 = 25 \;\text{ og }\; (-5)^2 = 25\,.$$

På tilsvarende vis har ligningen

$$x^2 = 2$$

to løsninger, nemlig

$$x = \sqrt{2} \;\text{ og }\; x = -\sqrt{2}$$

idet

$$\sqrt{2}^{\,2} = 2 \;\text{ og }\; (-\sqrt{2})^{\,2} = 2\,.$$

Med ligningen

$$x^2 = k\;,\;\; k \in \mathbb{R}$$

skal vi passe mere på, her afhænger alt nemlig af fortegnet på k. Hvis $k \geq 0$ har ligningen løsningerne

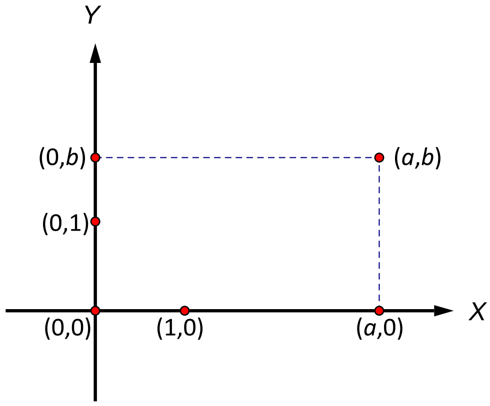
$$x = \sqrt{k} \;\text{ og }\; x = -\sqrt{k}$$

idet
$$\sqrt{k}^{\,2} = k \;\text{ og }\; (-\sqrt{k})^{\,2} = k\,.$$
Men hvis $k < 0$, har ligningen ingen løsninger, da der ikke findes reelle tal hvis kvadrat er negativt.

Men nu stiller vi os det spørgsmål, om man kunne forestille sig en større mængde af tal end de reelle, en mængde der indeholder alle de reelle tal og derudover også er løsninger til en ligning som
$$x^2 = -1\,.$$
Ligningen måtte da i analogi med de ovenstående ligninger have to løsninger
$$x = \sqrt{-1} \;\text{ og }\; x = -\sqrt{-1}\,.$$
Lad os være dristige og antage at dette faktisk er muligt, og kalde tallet $\sqrt{-1}$ for i. Ligningen
$$x^2 = -1$$
har da to løsninger, nemlig
$$x = i \;\text{ og }\; x = -i$$
idet
$$i^2 = \sqrt{-1}^{\,2} = -1 \;\text{ og }\; (-i)^2 = (-\sqrt{-1}\,)^{\,2} = -1\,.$$
Vi stiller nu det ekstra krav til det hypotetiske tal i at man skal kunne regne med det efter de samme regneregler som gælder de reelle tal. Man skal for eksempel kunne gange i med et reelt tal b og lægge denne størrelse til et andet reelt tal a til. Herved opstår en ny slags tal z af typen
$$z = a + ib\;,\;\; (a,b) \in \mathbb{R}^2\,.$$
Nedenfor beskriver vi hvordan de nævnte ambitioner kan imødekommes. Vi ser på hvordan strukturen af en sådan større talmængde må være, og hvilke lovmæssigheder den indeholder. Talmængden kalder vi *de komplekse tal* og giver den symbolet $\mathbb{C}$. Der skal altså gælde at $\mathbb{R}$ er en ægte delmængde af $\mathbb{C}$. Som allerede antydet må $\mathbb{C}$ være *to-dimensional*!

29.2 Indføring af komplekse tal

I det følgende vil vi betragte ethvert talpar $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ som et tal, et *komplekst* tal. Geometrisk vil det sige at der til ethvert punkt i (x,y)-planen svarer et unikt komplekst tal. På figur 29.1 er vist seks punkter, det vil sige seks komplekse tal.



Figur 29.1: Seks komplekse tal i (x, y)-planen.

Vi vil nu ændre skrivemåden for de komplekse tal, idet vi indsætter dem i den komplekse talplan hvis førsteakse vi kalder *realaksen* og andenakse for *imaginæraksen*. Ændringen gennemføres således:

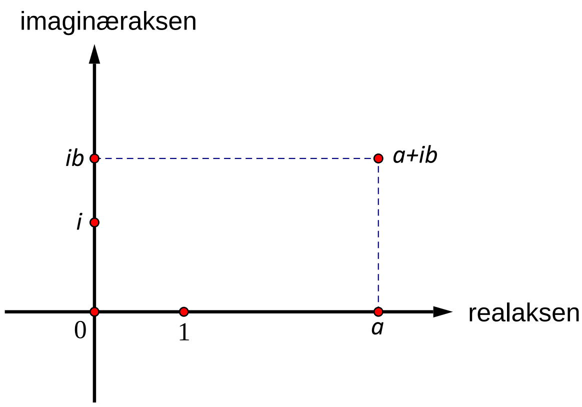
1. Alle komplekse tal af typen $(a, 0)$, det vil sige de tal der ligger på realaksen, skrives som a .

2. Det komplekse tal $(0, 1)$ skrives som i . Bogstavet i kaldes den *imaginære* enhed.

3. Alle komplekse tal af typen $(0, b)$, det vil sige de tal der ligger på imaginæraksen, skrives som $i \cdot b$ eller alternativt $b \cdot i$. Ofte udelades gangetegnet, så der blot skrives ib eller bi. Hvis $b = 0$, er $ib = 0$.

4. Alle komplekse tal af typen (a, b) skrives som $a + i \cdot b$ eller alternativt $a + b \cdot i$. Også her kan gangetegnet udelades.

På figur 29.2 ses en opdatering af situationen fra figur 29.1 med de nævnte ændringer.



Figur 29.2: Seks komplekse tal i den komplekse talplan.

|||| Definition 29.1 Komplekse tals rektangulære form

Ved et komplekst tal z forstås et talpar $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Mængden af komplekse tal betegnes $\mathbb{C}$.

Det komplekse tal $(0,1)$ tildeles symbolet i.

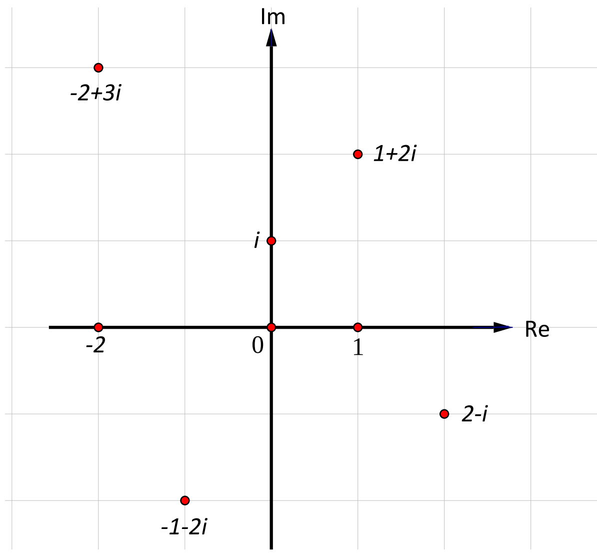
Standardskrivemåden for det komplekse tal $z = (a,b)$ er $z = a + ib$ eller alternativt $z = a + bi$. Den kaldes det komplekse tals *rektangulære* form.

Bemærk følgende forkortede skrivemåder: $(a,0)$ skrives blot som a og $(0,b)$ som $ib = bi$. Endvidere: $0i = i0 = 0$, $1i = i1 = i$, $(-1)i = i(-1) = -i$ og for $k > 0$: $(-k)i = i(-k) = -ik = -ki$.

To komplekse tal $z_1 = a_1 + ib_1$ og $z_2 = a_2 + ib_2$ kaldes ens hvis $a_1 = a_2$ og $b_1 = b_2$, og vi skriver i så fald $z_1 = z_2$.

|||| Eksempel 29.2 Den komplekse talplan

Vi indsætter de komplekse tal -2, 0, 1, i, $2 - i$, $1 + 2i$, $-2 + 3i$ og $-1 - 2i$ i den komplekse talplan:



Figur 29.3: Eksempler på komplekse tal

|||| **Definition 29.3 Realdel og Imaginærdel**

Ved *realdelen* af det komplekse tal $z = (a, b)$ forstås det reelle tal

$$\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(a + ib) = a\,, \tag{29-1}$$

og ved *imaginærdelen* forstås det reelle tal

$$\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(a + ib) = b\,. \tag{29-2}$$

Ethvert komplekst tal z kan opskrives på rektangulær form således

$$z = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z)\,.$$

|||| **Eksempel 29.4 Realværdi og Imaginærværdi**

Tre komplekse tal er givet ved:

$$z_1 = 3 - 2i\,,\ z_2 = i5\,, z_3 = 25 + i\,.$$

Vi finder realdelen og imaginærdelen af tallene:

$$\mathrm{Re}(z_1) = 3\,, \mathrm{Im}(z_1) = -2\,, \mathrm{Re}(z_2) = 0\,, \mathrm{Im}(z_2) = 5\,, \mathrm{Re}(z_3) = 25\,, \mathrm{Im}(z_3) = 1\,. \tag{29-3}$$

29.3 Regning med komplekse tal

Det karakteristiske ved de størrelser vi kalder tal, er at vi kan regne med dem i overensstemmelse med de fire klassiske regningsarter (addition, subtraktion, multiplikation og division). Vi må derfor definere disse regningsarter for de komplekse tal og starter med at indføre sum og differens.

|||| Definition 29.5 Sum og differens af komplekse tal

Lad $z_1 = a + ib$ og $z_2 = c + id$, hvor a, b, c og d er reelle tal.

Summen $z_1 + z_2$ defineres ved

$$z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)\,. \tag{29-4}$$

Differensen $z_1 - z_2$ defineres ved

$$z_1 - z_2 = (a - c) + i(b - d)\,. \tag{29-5}$$

En stor fordel ved $a + ib$ formen af komplekse tal er at man ikke behøver huske formlerne i definition 29.5! Men kan nemlig addere og subtrahere komplekse tal på samme måde som reelle tal, når blot i behandles efter de samme regler som ville gælde en reel konstant. Den indførte sum kan nemlig udregnes ved "sædvanlige" regneregler således:

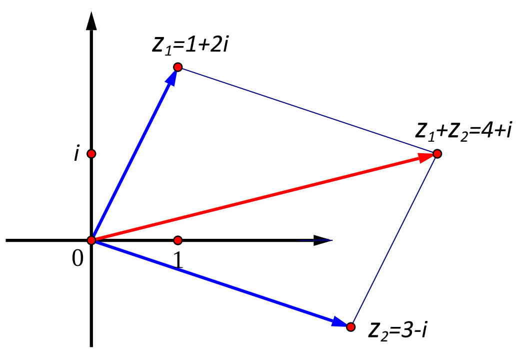
$$z_1 + z_2 = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + (ib + id) = (a + c) + i(b + d),$$

og den indførte differens tilsvarende:

$$z_1 - z_2 = (a + ib) - (c + id) = (a - c) + (ib - id) = (a - c) + i(b - d)\,.$$

|||| Eksempel 29.6

Det bemærkes at addition og subtraktion i den komplekse talplan svarer til addition og subtraktion af vektorer i planen. I figur 29.4 er et eksempel på addition ved parallelogram-metoden:



Figur 29.4: Addition ved parallelogram-metoden

|||| Definition 29.7 Multiplikation af komplekse tal

Vi definerer først kvadratet på den imaginære enhed i :

$$i^2 = i \cdot i = -1\,.$$

Lad $z_1 = a + ib$ og $z_2 = c + id$.

Produktet $z_1\, z_2$ defineres ved

$$z_1\, z_2 = z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)\,. \tag{29-6}$$

Bemærk at man strengt taget ikke behøver huske formel (29-6). Vi kan multiplicere komplekse tal på samme måde som reelle tal, når blot i behandles efter de samme regler som ville gælde en reel konstant, og det huskes at $i^2 = -1$. Det indførte produkt kan nemlig udregnes ved "sædvanlige" regneregler således:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2 bd \\ &= (ac - bd) + i(ad + bc)\,. \end{aligned}$$

|||| Definition 29.8 Division af komplekse tal

Lad $z_1 = a + ib$ og $z_2 = c + id$, hvor ikke både c og d er lig med 0.

Brøken $\dfrac{z_1}{z_2}$ defineres ved

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\,\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\,. \tag{29-7}$$

Heller ikke ved division behøver man huske formlen. Division af komplekse tal kan udføres ved hjælp af "sædvanlige" regneregler for reelle tal, når blot i behandles efter de samme regler som ville gælde en reel konstant, og det huskes at $i^2 = -1$. Den indførte division (29-7) kan nemlig udregnes således:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} \\ &= \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\,\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,. \end{aligned}$$

Efter indføringen af de fire sædvanlige regnearter for komplekse tal, kan vi nu præcisere sammenhængen mellem de reelle tal og de komplekse. Da vi har valgt at skrive tal på formen $a + i0$ som a, ligner alle de komplekse tal der ligger på realaksen, almindelige reelle tal. Realaksen er simpelthen en almindelig reel talakse. De regnearter vi har indført for komplekse tal, stemmer for alle tal på realaksen overens med de sædvanlige regnearter for reelle tal. Lad os eksemplificere dette med multiplikation.

To komplekse tal er på rektangulær form givet ved a og c. Vi udregner deres produkt ved hjælp af (29-6):

$$a \cdot c = (a + i \cdot 0)(c + i \cdot 0) = (a \cdot c - 0 \cdot 0) + i(a \cdot 0 + 0 \cdot c) = a \cdot c + i \cdot 0 = a \cdot c\,.$$

På tilsvarende vis vises at de indførte definitioner på kompleks addition, subtraktion og division på realaksen stemmer overens med de reelle.

Derfor kan de komplekse tal betragtes som en *udvidelse* eller *generalisering* af de reelle tal.

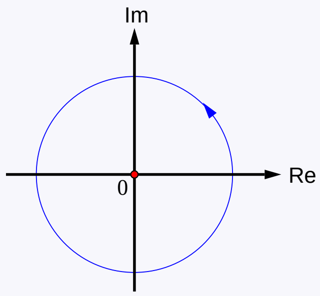
29.4 Polære koordinater

Den oplagte måde at angive et punkt i et sædvanligt (x, y)-koordinatsystem på, er naturligvis punktets retvinklede koordinater. I mange situationer er det imidlertid nyttigt at kunne bestemme et punkt ved dets *polære koordinater*, som består af punktets afstand til Origo samt punktets *retningsvinkel* fra x-aksen til forbindelseslinjen mellem Origo og punktet, idet den regnes positiv hvis den udmåles mod uret, og negativ hvis den udmåles med uret.

I det følgende indfører vi på tilsvarende vis polære koordinater for komplekse tal. Lad os først præcisere en orientering af den komplekse talplan:

|||| Definition 29.9 Orientering af den komplekse talplan

Orientering af den komplekse talplan fastlægges ved at en cirkel med centrum i tallet 0 gennemløbes *mod uret*.



Figur 29.5: Den komplekse talplans orientering

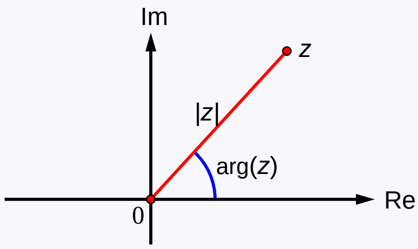
Ingredienserne i polære koordinater for et komplekst tal er tallets absolutværdi og tallets argument. Dem indfører vi nu.

|||| Definition 29.10 Absolutværdi og argument

Givet et komplekst tal z .

Ved *absolutværdien* af z forstås afstanden fra Origo til z . Absolutværdien skrives $|\,z\,|$ og kaldes også for z's *modulus* eller *numeriske værdi*.

Antag $z \neq 0$. Enhver vinkel fra realaksens positive del til forbindelseslinjen mellem Origo og z kaldes et *argument* for z og betegnes $\arg(z)$. Vinklen regnes med fortegn i overensstemmelse med orienteringen af den komplekse talplan.



Figur 29.6: Absolutværdi og argument

Et sammenhørende par

$$(\,|\,z\,|\,, \arg(z)\,)$$

af absolutværdien af z og et argument for z kaldes for *polære koordinater* for z .

Bemærk at argumentet for et tal z ikke er entydigt. Hvis man for eksempel til et valgt argument for z lægger vinklen 2π , opnår man igen en gyldig retningsvinkel for halvlinjen fra 0 til z og dermed et nyt argument for tallet. Således ses at z har uendeligt mange argumenter.

Man kan imidlertid altid vælge et argument for z som ligger i intervallet fra $-\pi$ til π. Der er tradition for at give dette argument en fortrinsstilling, det kaldes for tallets hovedargument.

|||| Definition 29.11 Hovedargument

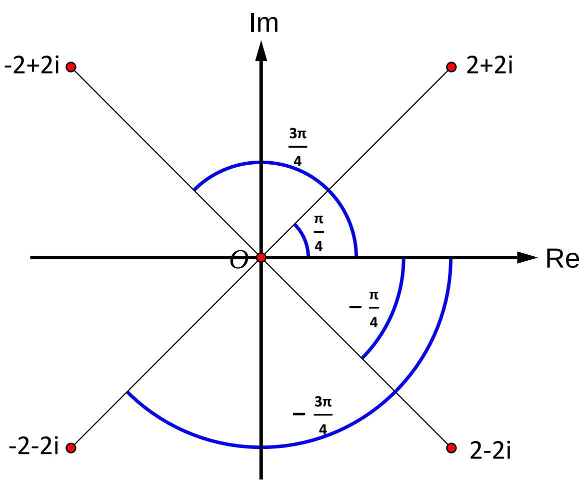
Ved *hovedargumentet* for $z \in \mathbb{C}$ betegnet $\operatorname{Arg}(z)$ forstås det entydigt bestemte argument for z som opfylder

$$\operatorname{Arg}(z) \in \,]-\pi, \pi\,] \,.$$

Det ses at samtlige argumenter for z kan fastlægges ved

$$\arg(z) = \operatorname{Arg}(z) + p \cdot 2\pi \ , \ p \in \mathbb{Z} \,. \tag{29-8}$$

|||| Eksempel 29.12 Hovedargumenter



Figur 29.7: Hovedargumenter

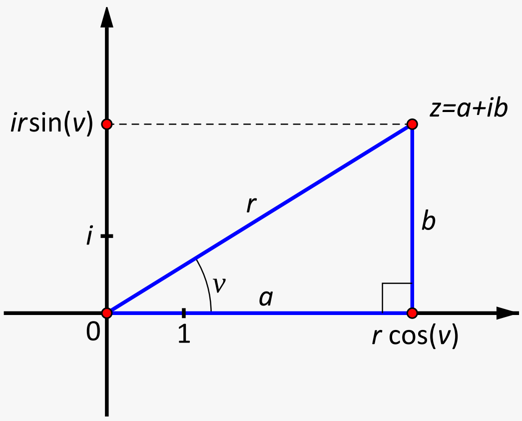
På figuren er angivet fire komplekse tal som ligger på vinkelhalveringslinjer mellem akserne. Deres hovedargumenter aflæses umiddelbart: $2 + 2i$ har hovedargumentet $\frac{\pi}{4}$, $2 - 2i$

har hovedargumentet $-\frac{\pi}{4}$, $-2+2i$ har hovedargumentet $\frac{3\pi}{4}$, og endelig har $-2-2i$ hovedargumentet $-\frac{3\pi}{4}$.

Vi har nu to forskellige fremgangsmåder til rådighed til beskrivelse af komplekse tal. Et komplekst tal kan angives på rektangulær form eller ved hjælp af dets polære koordinater. I metode 29.13 demonstreres det hvordan man kan veksle mellem de to fremgangsmåder.

|||| Metode 29.13 Rektangulære og polær koordinater

Vi betragter et komplekst tal $z \neq 0$ med rektangulær form $z = a + ib$. Antag videre at z har absolutværdien $|z| = r$ og et argument $\arg(z) = v$:



Figur 29.8: Omformning af koordinater

1. Rektangulær form fås ud fra de polære koordinater således:

$$a = r\cos(v) \text{ og } b = r\sin(v)\,. \tag{29-9}$$

2. Absolutværdien fås ud fra den rektangulære form således:

$$r = \sqrt{a^2+b^2}\,. \tag{29-10}$$

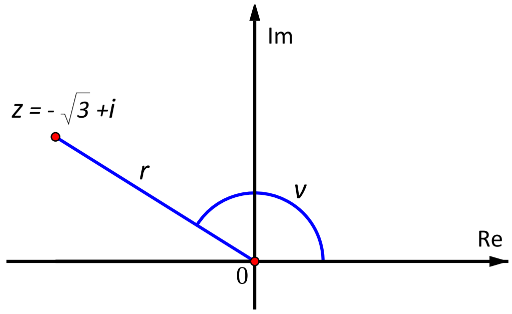
3. Et argument fås ud fra den rektangulære form således:

$$\cos(v) = \frac{a}{r} \text{ og } \sin(v) = \frac{b}{r}\,. \tag{29-11}$$

NB: Når z som på figuren i metode 29.13 er tegnet i 1. kvadrant, er det oplagt at regel (29-9) og (29-11) kommer fra velkendte sætninger om cosinus og sinus til spidse vinkler i retvinklede trekanter og (29-10) fra Pythagoras' sætning. Med de samme sætninger kan det vises at de indførte metoder gælder uanset hvilken kvadrant z ligger i.

|||| Eksempel 29.14 Fra rektangulær til polær form

Vi vil finde de polære koordinater for tallet $z = -\sqrt{3} + i$ ved hjælp af metode 29.13.



Figur 29.9: Bestemme polære koordinater

Vi bestemmer først absolutværdien:

$$r = |\,z\,| = \sqrt{(-\sqrt{3})^{\,2} + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2\,.$$

Ud fra ligningen

$$\cos(v) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

får vi to bud på et hovedargument for z, nemlig

$$v = \frac{5\pi}{6} \;\text{ og }\; v = -\frac{5\pi}{6}\,.$$

På figuren kan vi aflæse at figuren ligger i 2. kvadrant, og at det korrekte hovedargument må være det førstnævnte. Men dette kan også fastlægges uden inspektion af figuren, idet også ligningen

$$\sin(v) = \frac{1}{2}$$

skal være opfyldt. Fra denne får vi også to bud på et hovedargument for z, nemlig

$$v = \frac{\pi}{6} \;\text{ og }\; v = \frac{5\pi}{6}\,.$$

Da kun $v = \dfrac{5\pi}{6}$ opfylder begge ligninger, ser vi at $\mathrm{Arg}(z) = \dfrac{5\pi}{6}$.

Hermed har vi fundet det polære koordinatsæt for z:

$$(r, v) = \big(|\,z\,|, \mathrm{Arg}(z)\,\big) = \big(2, \frac{5\pi}{6}\big)\,.$$

Multiplikation og division af to komplekse tal på rektangulær form er lidt omstændelig som det fremgår af definition 29.7. Og endnu værre bliver det når man skal opløfte komplekse tal til høje potenser. Men hvis man benytter sig af tallenes polære form, viser det sig at disse regnearter bliver overraskende enkle. Til dette får vi brug for regneregler for absolutværdi og argument, regneregler som også er interessante i sig selv.

|||| Sætning 29.15 Regneregler for absolutværdi

Absolutværdien for produktet af to komplekse tal z_1 og z_2 fås ved

$$|\, z_1 \cdot z_2 \,| = |\, z_1 \,| \cdot |\, z_2 \,| \,. \tag{29-12}$$

Absolutværdien for kvotienten af to komplekse tal z_1 og z_2, hvor $z_2 \neq 0$, fås ved

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|\, z_1 \,|}{|\, z_2 \,|} \tag{29-13}$$

Absolutværdien af den n'te potens af et komplekst tal z fås ved:

$$|\, {z_1}^n \,| = |\, z_1 \,|^n \tag{29-14}$$

|||| Bevis

Med i næste opdatering af eNoten.

■

|||| Sætning 29.16 Regneregler for argumenter

Et argument for produktet af to komplekse tal z_1 og z_2 fås ved

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \tag{29-15}$$

Et argument for kvotienten af to komplekse tal z_1 og z_2 hvor $z_2 \neq 0$, fås ved

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \tag{29-16}$$

Et argument for den n'te potens af et komplekst tal z fås ved:

$$\arg(z^n) = n \arg(z) \tag{29-17}$$

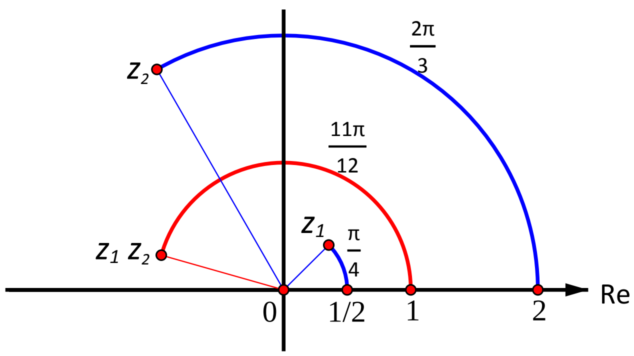
|||| Bevis

Med i næste opdatering af eNoten.

■

|||| Eksempel 29.17 Multiplikation vha. polær koordinater

To komplekse tal z_1 og z_2 er givet ved de polære koordinater $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ henholdsvis $\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$.



Figur 29.10: Multiplikation

Vi udregner produktet af z_1 og z_2 ved hjælp af deres absolutværdier og argumenter:

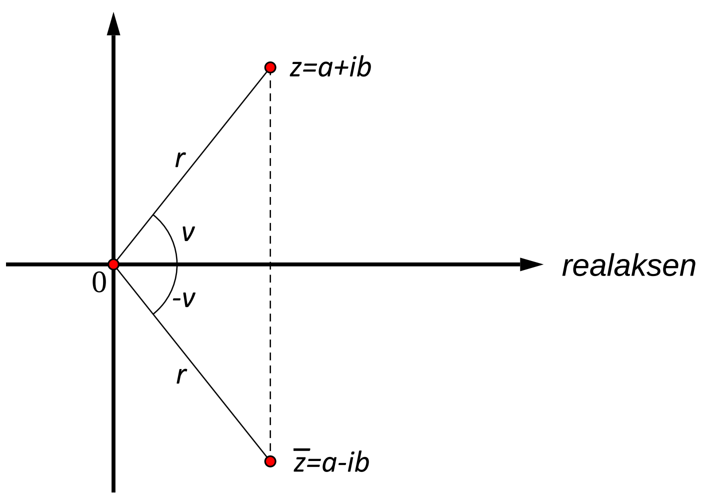
$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{11\pi}{12}$$

$z_1 z_2$ er altså det entydigt bestemte tal som har absolutværdien 1 og argumentet $\frac{11\pi}{12}$.

29.5 Konjugering af komplekse tal

At konjugere et komplekst tal svarer til at det spejles i realaksen som vist på figur 29.11.



Figur 29.11: Spejling i realaksen

|||| Definition 29.18

Ved det konjugerede tal til et komplekst tal på rektangulær form $z = a + ib$ forstås tallet $\overline{z}$ givet ved

$$\overline{z} = a - ib \tag{29-18}$$

Det er indlysende at det konjugerede tal til et konjugeret tal er det oprindelige tal selv:

$$\overline{\overline{z}} = z\,. \tag{29-19}$$

Det fremgår også klart af definitionen at konjugerede tal har samme absolutværdi og modsatte argumenter:

$$|\,\overline{z}\,| = |\,z\,| \;\text{ og }\; \arg(\overline{z}) = -\arg(z)\,. \tag{29-20}$$

Endelig bemærker vi at alle komplekse tal på realaksen er identiske med deres konjugerede tal, og at de er de eneste komplekse tal der opfylder denne egenskab. Vi kan i forlængelse heraf opstille et kriterium for om et givet tal i en en mængde af komplekse tal er reelt:

|||| Sætning 29.19 Realkriteriet

Lad A være en delmængde af $\mathbb{C}$, og lad $A_{\mathbb{R}}$ betegne den delmængde af A som består af reelle tal. Der gælder

$$A_{\mathbb{R}} = \{ z \in A \mid \overline{z} = z \} \ .$$

|||| Bevis

Lad z være et vilkårligt tal i $A \subseteq \mathbb{C}$ med rektangulær form $z = a + ib$. Der gælder da

$$\overline{z} = z \Leftrightarrow a - ib = a + ib \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow z \in A_{\mathbb{R}} \, .$$

■

For konjugering i forbindelse med de fire sædvanlige regnearter gælder der følgende meget simple regneregler

|||| Sætning 29.20 Regneregler for konjugering

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
2. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
4. $\overline{(z_2 / z_1)} = \overline{z_2} / \overline{z_1}$.

|||| Bevis

Beviset gennemføres ved simpel udregning af formlernes venstreside og højreside

■

|||| Sætning 29.21 Konjugering og absolutværdi

For et komplekst tal z gælder

$$z \cdot \bar{z} = |\, z \,|^2 \tag{29-21}$$

|||| Bevis

Vi antager at $z = a + ib$ hvor a og b er reelle. Sætningen følger da af

$$z \cdot \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |\, z \,|^2$$

■

29.6 Eksponentialfunktion med imaginær variabel

Den sædvanlige eksponentialfunktion $f(x) = \mathrm{e}^x$ med reel variabel x har som bekendt de karakteristiske egenskaber

$$\mathrm{e}^0 = 1 \quad \text{og} \quad \mathrm{e}^{x_1 + x_2} = \mathrm{e}^{x_1} \cdot \mathrm{e}^{x_2}\,. \tag{29-22}$$

Ved gentagen brug af den sidste får vi desuden egenskaben

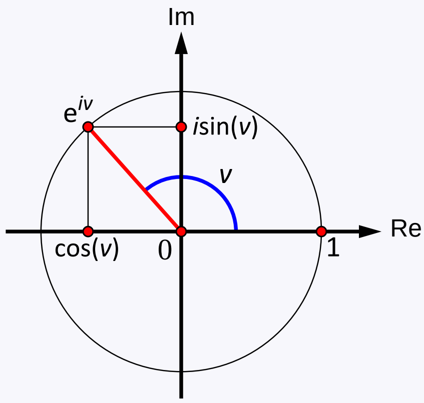
$$(\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx} \quad , n \in \mathbb{N}\,. \tag{29-23}$$

I dette afsnit vil vi indføre en eksponentialfunktion med *imaginær variabel*, som senere i denne eNote udvides til en kompleks eksponentialfunktion $f(z) = \mathrm{e}^z$ for ethvert $z \in \mathbb{C}$. Vi vil kræve at $f(z)$ stemmer overens med den reelle eksponentialfunktion når $z \in \mathbb{R}$, og at $f(z)$ besidder de samme karakteristiske egenskaber som den reelle. Men her starter vi med specialtilfældet at variablen er rent imaginær.

|||| Definition 29.22

For ethvert $v \in \mathbb{R}$ defineres funktionen e^{iv} ved

$$\mathrm{e}^{iv} = \cos(v) + i\sin(v)\,. \tag{29-24}$$



Figur 29.12: Enhedscirklen i komplekse talplan

Bemærk at tallet e^{iv} for ethvert v ligger på enhedscirklen i den komplekse talplan med centrum i 0 . Heraf følger:

$$|\,\mathrm{e}^{iv}\,| = 1\,. \tag{29-25}$$

Bemærk endvidere at argumentet for e^{iv} straks aflæses i eksponenten således:

$$\arg(\mathrm{e}^{iv}) = v\,. \tag{29-26}$$

Vi viser nu at den i definition 29.22 indførte funktion e^{iv} har egenskaber der svarer til den reelle eksponentialfunktion.

|||| Sætning 29.23 Regneregler for e^{iv}

For funktionen e^{iv} , $v \in \mathbb{R}$ gælder

1. $\mathrm{e}^{0i} = 1$
2. $\mathrm{e}^{iv_1 + iv_2} = \mathrm{e}^{i(v_1+v_2)} = \mathrm{e}^{iv_1}\mathrm{e}^{iv_2}$
3. $(\mathrm{e}^{iv})^n = \mathrm{e}^{inv}$, $n \in \mathbb{N}$

|||| Bevis

1. Der gælder oplagt $e^{i0} = \cos(0) = 1$.
2. Lad v_1 og v_2 være to reelle tal. Fra (29-12) fås
$$|\, e^{iv_1} e^{iv_2} \,| = |\, e^{iv_1} \,|\,|\, e^{iv_2} \,| = 1\,.$$
Fra (29-15) fås
$$\arg(e^{iv_1} e^{iv_2}) = \arg(e^{iv_1}) + \arg(e^{iv_2}) = v_1 + v_2\,.$$
Nu indsætter vi den fundne absolutværdi og argument for $e^{iv_1} e^{iv_2}$ i dette tals eksponentielle form:
$$e^{iv_1} e^{iv_2} = e^{i(v_1+v_2)} = e^{iv_1+iv_2}\,.$$
3. På tilsvarende vis fås fra (29-14) og (29-17) at
$$(e^{iv})^n = e^{inv}\,. \tag{29-27}$$

■

Vi kan herefter indføre en i mange sammenhænge bekvem og meget benyttet skrivemåde for komplekse tal.

|||| Sætning 29.24 Eksponentiel form

Ethvert komplekst tal z kan skrives på formen
$$z = re^{iv}\,, \tag{29-28}$$
hvor $r = |\, z \,|$ og $v = \arg(z)$. Skrivemåden kaldes tallets *eksponentielle form*.

|||| Bevis

Vi finder først absolutværdi af re^{iv}:
$$|\, re^{iv} \,| = |\, r \,|\,|\, e^{iv} \,| = r\,.$$
Dernæst et argument for re^{iv}:
$$\arg(re^{iv}) = \arg(r) + \arg(e^{iv}) = 0 + v = v\,.$$

Hermed er det vist at z og re^{iv} har samme absolutværdi og samme argument, og derfor er identiske.

■

Når komplekse tal angives på eksponentiel form, foregår multiplikation, division og potensopløftning uden videre efter sædvanlige elementære regneregler og potensregler kendt fra reelle tal. Vi giver nu et eksempel på dette i forbindelse med multiplikation, sammenlign med eksempel 29.17.

|||| Eksempel 29.25 Multiplikation på eksponentiel form

To komplekse tal er givet på eksponentiel form:

$$z_1 = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i} \;\text{ og }\; z_2 = 2\,\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{2}i}\,.$$

Produktet af tallene fås på eksponentiel form ved

$$z_1 z_2 = \Big(\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i}\Big)\Big(2\,\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{2}i}\Big) = \Big(\frac{1}{2}\cdot 2\Big)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i+\frac{3\pi}{2}i} = 1\mathrm{e}^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2})} = \mathrm{e}^{\frac{7\pi}{4}\,i}\,.$$

I det følgende vil vi vise hvordan såkaldte *binome ligninger* kan løses ved hjælp af eksponentiel form. En binom ligning er en *toleddet* polynomiumsligning med formen

$$z^n = w \tag{29-29}$$

hvor $w \in \mathbb{C}$ og $n \in \mathbb{N}$.

Vi viser først et eksempel på løsning af en binom ligning ved hjælp af eksponentiel form og opstiller derefter den generelle metode.

|||| Eksempel 29.26 Binom ligning på eksponentiel form

Find samtlige løsninger på den binome ligning

$$z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i\,. \tag{29-30}$$

Løsning:
Ideen er at vi skriver såvel z som højresiden på eksponentiel form.

Hvis z har den eksponentielle form $z = s\mathrm{e}^{iu}$, kan ligningens venstreside udregnes ved

$$z^4 = (s\mathrm{e}^{iu})^4 = s^4\,(e^{iu})^4 = s^4\,e^{i4u} \tag{29-31}$$

Højresidens absolutværdi r findes ved

$$r = |-8+8\sqrt{3}\,| = \sqrt{(-8)^2+(8\sqrt{3})^2} = 16\,.$$

Højresidens argument v opfylder:

$$\cos(v) = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2} \;\text{ og }\; \sin(v) = \frac{8\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Ved hjælp af de to ligninger kan højresidens hovedargument fastlægges til

$$v = \mathrm{Arg}(-8+8\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}\,,$$

og dermed den eksponentielle form

$$re^{iv} = 16\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}i}\,. \tag{29-32}$$

Vi indsætter nu (29-31) og (29-32) i (29-30)

$$s^4\, e^{i4u} = 16\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}i}\,.$$

Da ventresidens absolutværdi skal være lig højresidens får vi

$$s^4 = 16 \;\Leftrightarrow\; s = \sqrt[4]{16} = 2.$$

Venstresidens argument $4u$ og højresidens argument $\frac{2\pi}{3}$ skal være ens på nær et multiplum af 2π . Heraf fås

$$4u = \frac{2\pi}{3} + p2\pi \;\Leftrightarrow\; u = \frac{\pi}{6} + p\frac{\pi}{2}\,,\; p \in \mathbb{Z}\,.$$

Disse uendeligt mange argumenter svarer vel at mærke kun til *fire* halvlinjer ud fra 0, bestemt ved de argumenter der fås ved $p=0, p=1, p=2$ og $p=3$. For alle andre værdier af p vil den tilsvarende halvlinje være identisk med en af de fire nævnte. For eksempel vil halvlinjen for $p=4$ være givet ved argumentet

$$u = \frac{\pi}{6} + 4\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + 2\pi\,,$$

det vil sige samme halvlinje som svarer til $p=0$, da forskellen på argumenterne er 2π .

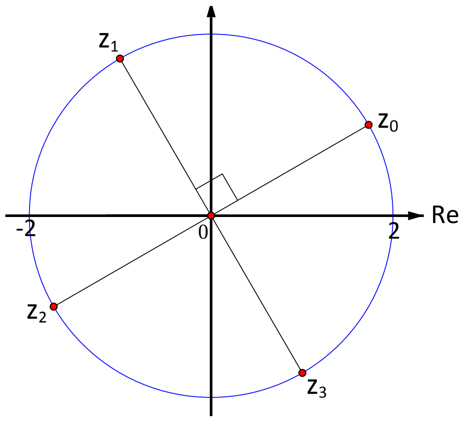
Den givne ligning (29-30) har derfor netop fire løsninger, som ligger på de nævnte fire halvlinjer i afstanden $s=2$ fra 0. Angivet på eksponentiel form:

$$z = 2\,\mathrm{e}^{i(\frac{\pi}{6}+p\frac{\pi}{2})}\,,\; p = 0\,,1\,,2\,,3\,.$$

Eller omregnet hver for sig til rektangulær form ved brug af definition 29.22

$$z_0 = \sqrt{3}+i\,,\; z_1 = -1+i\sqrt{3}\,,\; z_2 = -\sqrt{3}-i\,,\; z_3 = 1-i\sqrt{3}\,.$$

Alle løsningerne for en binom ligning ligger på en cirkel med centrum i 0 og radius lig med højresidens absolutværdi. Forbindelseslinjerne mellem Origo og løsningerne deler cirklen i lige store vinkler som det eksemplificeres på figur 29.13.



Figur 29.13: Løsningerne fra eksempel 29.26

Fremgangsmåden i eksempel 29.26 generaliserer vi i den følgende sætning. Sætningen bevises i eNote 30 om polynomier.

|||| Sætning 29.27 Binom ligning løst vha. eksponentiel form

Givet et komplekst tal w , som ikke er 0 , og som har den eksponentielle form

$$w = r\mathrm{e}^{iv} \,.$$

Den binome ligning

$$z^n = w = r\mathrm{e}^{iv} \;,\; n \in \mathbb{N} \tag{29-33}$$

har n løsninger som kan findes ved formlen

$$z = \sqrt[n]{r}\;\mathrm{e}^{i\left(\frac{v}{n}+p\frac{2\pi}{n}\right)} \;\text{ hvor }\; p = 0\,,\,1\,,\ldots,\,n-1\,. \tag{29-34}$$

29.7 Den komplekse eksponentialfunktion

Som tidligere nævnt i denne eNote er det muligt at udvide definitionsmængden for den velkendte reelle eksponentialfunktion e^x fra de reelle tal til de komplekse tal, således at den udvidede komplekse eksponentialfunktion på realaksen svarer overens med den reelle. Og således at de karakteristiske egenskaber for den reelle eksponentialfunktion overføres til den komplekse.

|||| Definition 29.28 Kompleks eksponentialfunktion

For et hvert komplekst tal z med rektangulær form $z = x + iy$ defineres den komplekse eksponentialfunktion e^z ved

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+iy} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{iy} = \mathrm{e}^x \left(\cos(y) + i \sin(y) \right) . \tag{29-35}$$

Bemærk at hvis z i (29-35) er reel, det vil sige hvis $y = 0$, så er (29-35) den sædvanlige reelle eksponentialfunktion e^x .

Bemærk at hvis $x = 0$ i (29-35), så er (29-35) den i definition 29.22 indførte eksponentialfunktion for ren imaginær variabel.

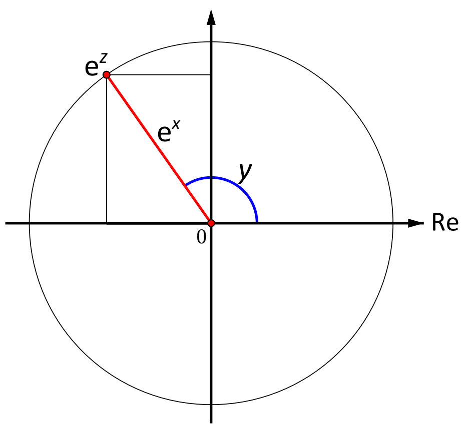
Vi betragter nu det komplekse tal e^z hvor z er et vilkårligt komplekst tal med rektangulær form $z = x + iy$ hvor ikke både x og y er lig med 0. Vi har umiddelbart fra definition 29.28 den *eksponentielle form* af e^z

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{iy} ,$$

der viser at

$$|\, \mathrm{e}^z \,| = \mathrm{e}^x \;\text{ og }\; \arg \mathrm{e}^z = y .$$

Dette giver e^z en bemærkelsesværdig placering i den komplekse talplan som vist på figur 29.14.



Figur 29.14: Geometrisk fortolkning af e^z

|||| Eksempel 29.29 Eksponentiel ligning

Bestem samtlige løsninger for ligningen

$$e^z = -\sqrt{3} + i\,. \tag{29-36}$$

Løsning:
Vi skriver først z på rektangulær form: $z = x + iy$.
I eksempel 29.14 har vi fundet at højresiden i 29-36 har absolutværdien $r = 2$ og hovedargumentet $v = \frac{5\pi}{6}$. Da venstresiden og højresiden skal have samme absolutværdi og samme argument på nær et vilkårligt multiplum af 2π fås

$$|\,e^z\,| = e^x = r = 2 \;\Leftrightarrow\; x = \ln(2)\,,$$

$$\arg(z) = y = v + p2\pi = \frac{5\pi}{6} + p2\pi\;,\; p \in \mathbb{Z}\,.$$

Samtlige løsninger for 29-36 er dermed

$$z = x + iy = \ln(2) + i(\frac{5\pi}{6} + p2\pi)\;,\; p \in \mathbb{Z}\,.$$

For de reelle trigonometriske funktioner $\cos(x)$ og $\sin(x)$ vides at der for ethvert helt tal p gælder $\cos(x + p2\pi) = \cos(x)$ og $\sin(x + p2\pi) = \sin(x)$. Hvis man forskyder grafen for $\cos(x)$ eller $\sin(x)$ med et vilkårligt multiplum af 2π, vil den derfor gå over i sig selv. Funktionerne kaldes derfor *periodiske* med *perioden* 2π.

Et lignende fænomen kan ses i eksempel 29.29 hvor den givne eksponentielle ligning har uendeligt mange løsninger der kun adskiller sig fra hinanden ved forskellige multipla af $2\pi i$. Det skyldes at den komplekse eksponentialfunktion har den imaginære periode $2\pi i$! Og dette hænger i høj grad sammen med periodiciteten af de trigonometriske funktioner.

|||| Sætning 29.30 Periodicitet af e^z

For ethvert komplekst tal z og ethvert helt tal p gælder

$$e^{z+p2\pi i} = e^z\,. \tag{29-37}$$

|||| Bevis

Antag at z har rektangulær form $z = x + iy$ og $p \in \mathbb{Z}$.

Der gælder

$$\mathrm{e}^{z+p2\pi i} = \mathrm{e}^{x+i(y+p2\pi)} = \mathrm{e}^{x}\left(\cos(y+p2\pi) + i\sin(y+p2\pi)\right)$$
$$= \mathrm{e}^{x}\left(\cos(y) + i\sin(y)\right) = \mathrm{e}^{z}.$$

Hermed er sætningen vist.

■

Vi viser nu at e^z faktisk har den karakteristiske "eksponentielle" egenskab kendt fra den reelle eksponentialfunktion og som i 29.23 blev udvidet til eksponentialfunktionen med imaginær variabel.

|||| Sætning 29.31 Regneregel for e^z

For vilkårlige komplekse tal z_1 og z_2 opfylder den komplekse eksponentialfunktion

$$\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1} \cdot \mathrm{e}^{z_2}. \tag{29-38}$$

|||| Bevis

Med i næste opdatering af eNoten.

■

29.8 Komplekse funktioner af en reel variabel

Lad c være et vilkårligt komplekst tal. Vi vil til ethvert reelt tal t knytte det komplekse tal

$$f(t) = \mathrm{e}^{ct}. \tag{29-39}$$

Denne funktion er et eksempel på de såkaldte *komplekse funktioner af en reel variabel*, som vi indfører generelt i det følgende. Derefter fokuseres specielt på typen (29-39) der har vid udbredelse i såvel teoretisk som anvendt matematik.

|||| Definition 29.32 Kompleks funktion af reel variabel

Ved en *kompleks funktion* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ af en reel variabel t forstås en funktion af typen

$$f(t) = g(t) + i \cdot h(t) \tag{29-40}$$

hvor $g(t)$ og $h(t)$ er reelle funktioner af den reelle variable t.

$f(t)$ kaldes *differentiabel* hvis $g(t)$ og $h(t)$ begge er differentiable.
Differentialkvotienten af $f(t)$ defineres ved

$$f'(t) = g'(t) + i \cdot h'(t)\,. \tag{29-41}$$

|||| Eksempel 29.33 Kompleks funktion af reel variabel

Ved udtrykket

$$f(t) = t + it^2\ ,\ t \in \mathbb{R}$$

er der defineret en kompleks funktion af en reel variabel. Den har differentialkvotienten

$$f'(t) = 1 + i(2t)\,.$$

|||| Eksempel 29.34 Kompleks funktion af reel variabel

Den i definition 29.22 indførte funktion

$$g(t) = \mathrm{e}^{it} = \cos(t) + i\sin(t)\ ,\ t \in \mathbb{R}$$

er en kompleks funktion af en reel variabel. Den har differentialkvotienten

$$g'(t) = -\sin(t) + i\cos(t)\,.$$

De sædvanlige regneregler for differentiable funktioner udvides nemt til regneregler for differentialble komplekse funktioner af reel variabel. I den følgende sætning betragter vi de såkaldte *lineære* egenskaber ved differentiation.

|||| Sætning 29.35 Regneregler for differentialkvotient

Lad $f_1(t)$ og $f_2(t)$ være komplekse funktioner af den reelle variable t, og lad c være et vilkårligt komplekst tal. Der gælder da

1. Den komplekse funktion $f_1(t) + f_2(t)$ er differentiabel med differentialkvotienten

$$(\, f_1(t) + f_2(t)\,)' = f_1'(t) + f_2'(t)\,. \tag{29-42}$$

2. Den komplekse funktion $c \cdot f_1(t)$ er differentiabel med differentialkvotienten

$$\big(\, c \cdot f_1(t)\,\big)' = c \cdot f_1'(t) \tag{29-43}$$

|||| Bevis

Lad $f_1(t) = g_1(t) + i\,h_1(t)$ og $f_2(t) = g_2(t) + i\,h_2(t)$ hvor $g_1(t)$, $h_1(t)$, $g_1(t)$ og $g_2(t)$ er differentiable reelle funktioner. Lad endvidere $c = a + ib$ være et vilkårligt komplekst tal på rektangulær form.

Sætningens første del:

$$\begin{aligned} f_1(t) + f_2(t) &= (g_1(t) + i\,h_1(t)) + (g_2(t) + i\,h_2(t)) \\ &= (g_1(t) + g_2(t)) + i\,(h_1(t) + h_2(t))\;. \end{aligned}$$

Vi får da fra definition (29-41) og brug af regneregler for differentialkvotienter af reelle funktioner:

$$\begin{aligned} (f_1(t) + f_2(t))' &= (g_1(t) + g_2(t))' + i\,(h_1(t) + h_2(t))' \\ &= \big(g_1'(t) + g_2'(t)\big) + i\,\big(h_1'(t) + h_2'(t)\big) \\ &= \big(g_1'(t) + i\,h_1'(t)\big) + i\,\big(g_2'(t) + i\,h_2'(t)\big) \\ &= f_1'(t) + f_2'(t)\,. \end{aligned}$$

Sætningens anden del:

$$\begin{aligned} c \cdot f_1(t) &= (a + ib) \cdot (g_1(t) + i\,h_1(t)) \\ &= (a\,g_1(t) - b\,h_1(t)) + i\,(a\,h_1(t) + b\,g_1(t)) \end{aligned}$$

Vi får fra definition (29-41) og brug af regneregler for differentialkvotienter af reelle funktioner:

$$\begin{aligned} (c \cdot f_1(t))' &= (a\,g_1(t) - b\,h_1(t))' + i\,(a\,h_1(t) + b\,g_1(t))' \\ &= \big(a\,g_1'(t) - b\,h_1'(t)\big) + i\,\big(a\,h_1'(t) + b\,g_1'(t)\big) \\ &= (a + ib)\,\big(g_1'(t) + h_1'(t)\big) \\ &= c \cdot f_1'(t)\,. \end{aligned}$$

Hermed er sætningen bevist.

■

Vi vender nu tilbage til funktioner af typen (29-39). Først giver vi et nyttigt resultat om deres konjugering:

|||| Sætning 29.36

For et vilkårligt komplekst tal c og ethvert reelt tal t gælder

$$\overline{\mathrm{e}^{ct}} = \mathrm{e}^{\bar{c}\,t}\,. \tag{29-44}$$

|||| Bevis

Lad $c = a + ib$ være den rektangulære form af c. Vi får da ved brug af definition 29.28 og regneregler 29.20 for konjugering:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{e}^{ct}} &= \overline{\mathrm{e}^{at+ibt}} \\
&= \overline{e^{at}\left(\cos(bt) + i\sin(bt)\right)} \\
&= \overline{e^{at}}\;\overline{\left(\cos(bt) + i\sin(bt)\right)} \\
&= e^{at}\left(\cos(bt) - i\sin(bt)\right) \\
&= e^{at}\left(\cos(-bt) + i\sin(-bt)\right) \\
&= e^{at-ibt} \\
&= e^{\bar{c}t}\,.
\end{aligned}$$

Hermed er sætningen bevist.

■

For sædvanlige reelle eksponentialfunktioner af typen

$$f(x) = \mathrm{e}^{kx}\ ,\ k \in \mathbb{R}$$

gælder der som bekendt

$$f'(x) = kf(x) = k\mathrm{e}^{kx}\,. \tag{29-45}$$

Vi slutter eNoten af med at vise at den komplekse eksponentialfunktion opfylder en differentiationsregel der helt svarer til 29-45.

|||| Sætning 29.37 Differentiation af e^{ct}

Betragt for et vilkårligt $c \in \mathbb{C}$ og for $t \in \mathbb{R}$ den komplekse funktion funktion

$$f(t) = e^{ct}\,. \tag{29-46}$$

Differentialkvotienten for $f(t)$ er bestemt ved

$$f'(t) = cf(t) = ce^{ct}\,. \tag{29-47}$$

|||| Bevis

Lad c's rektangulære form være $c = a + ib$. Vi får da ved brug af definition 29.28:

$$\begin{aligned} e^{ct} &= e^{at+ibt} \\ &= e^{at}\left(\cos(bt) + i\sin(bt)\right) \\ &= e^{at}\cos(bt) + i\left(e^{at}\sin(bt)\right) \end{aligned}$$

Endvidere får vi fra definition (29-41) og brug af regneregler for differentialkvotienter af reelle funktioner:

$$\begin{aligned} \left(e^{ct}\right)' &= ae^{at}\cos(bt) - e^{at}b\sin(bt) + i\left(ae^{at}\sin(bt) + e^{at}b\cos(bt)\right) \\ &= (a+ib)e^{at}\left(\cos(bt) + i\sin(bt)\right) \\ &= (a+ib)e^{at+ibt} \\ &= c\,e^{ct}\,. \end{aligned}$$

Hermed er sætningen bevist.

■

Hvis c i sætning 29.37 er reel, udtrykker (29-47) naturligvis blot sædvanlig differentiation af den reelle eksponentialfunktion som i (29-45). Også hvad differentiation angår er den komplekse eksponentialfunktion dermed en udvidelse af den reelle.

Hermed afsluttes indføringen af den komplekse eksponentialfunktion.