

|||| eNote 9

Eigenverdier og egenvektorer

Denne note indfører begreberne *eigenverdier* og *egenvektorer* for lineære afbildninger i vilkårlige generelle vektorrum og går derefter i dybden med *eigenverdier* og *egenvektorer* til kvadratiske matricer. Noten bygger derfor på viden omkring generelle vektorrum, se [eNote 7](#), på viden om algebra med matricer, se [eNote 3](#) og [eNote 4](#), og på viden om lineære afbildninger se [eNote 8](#).

9.1 Eigenverdiproblemet for lineære afbildninger

9.1.1 Indledning

I denne eNote betragter vi lineære afbildninger af typen

$$f : V \rightarrow V \quad (9-1)$$

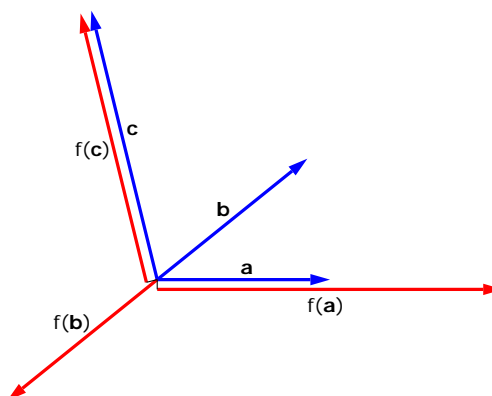
det vil sige lineære afbildninger hvor *definitionsrummet* og *dispositionsrummet* er det samme vektorrum. Dette åbner op for et særligt fænomen, at en vektor kan være identisk med sin billedvektor:

$$f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}. \quad (9-2)$$

Vektorer af denne type kaldes *fiksvektorer* for f . Mere generelt er vi på jagt efter *egenvektorer*, det vil sige vektorer som er proportionale med deres billedvektorer. Man taler i denne forbindelse om *eigenverdiproblemet*: at finde en skalar λ og en egentlig vektor \mathbf{v} som opfylder vektorligningen:

$$f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}. \quad (9-3)$$

Hvis λ er en skalar og \mathbf{v} en egentlig vektor som opfylder 9-3 kaldes proportionalitetsfaktoren λ en *eigenverdi* for f og \mathbf{v} en til λ hørende *egenvektor*. Lad os som eksempel tage en lineær afbildning $f : G_3 \rightarrow G_3$, det vil sige en lineær afbildning af mængden af rumvektorer ind sig selv, som afbilder tre givne vektorer som vist på figur 9.1.



Figur 9.1: Tre egenvektorer i rummet og deres billedvektorer.

Som antydnet på figuren 9.1 er $f(\mathbf{a}) = 2\mathbf{a}$. Derfor er 2 en egen værdi for f med tilhørende egenvektor \mathbf{a} . Da endvidere $f(\mathbf{b}) = -\mathbf{b}$, er også -1 en egen værdi for f med tilhørende egenvektor \mathbf{b} . Og da endelig $f(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$, er 1 en egen værdi for f med tilhørende egenvektor \mathbf{c} . Specielt er \mathbf{c} en fiksvektor for f .

At løse egen værdiproblemer for lineære afbildninger er en af de mest afgørende problemstillinger i ingeniørmæssige anvendelser af lineær algebra. Dette hænger snævert sammen med at en lineær afbildning, hvis afbildningsmatrix med hensyn til en given basis er en *diagonalmatrix*, er særlig enkel at overskue og arbejde med. Og her gælder der den komfortable regel, at hvis man vælger en basis bestående af egenvektorer for afbildningen, så bliver afbildningsmatricen automatisk en diagonalmatrix.

I det følgende eksempel illustrerer vi disse pointer ved hjælp af lineære afbildninger i planen.

|||| Eksempel 9.1 Egen værdier og egenvektorer i planen

Vektorrummet af vektorer i planen har symbolet $G_2(\mathbb{R})$. Vi betragter en lineær afbildning

$$f : G_2(\mathbb{R}) \rightarrow G_2(\mathbb{R}) \quad (9-4)$$

af mængden af plane vektorer ind i sig selv, som med hensyn til en given basis $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ har følgende diagonalmatrix som afbildningsmatrix:

$${}_a\mathbf{F}_a = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}. \quad (9-5)$$

Da der gælder at

$${}_af(\mathbf{a}_1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

og

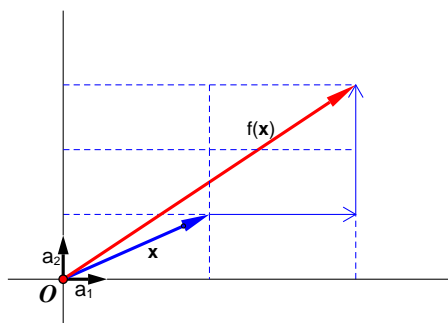
$${}_a f(\mathbf{a}_2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

har vi at $f(\mathbf{a}_1) = 2\mathbf{a}_1$ og $f(\mathbf{a}_2) = 3\mathbf{a}_2$. Begge basisvektorer er altså egenvektorer for f , idet \mathbf{a}_1 tilhører egenværdien 2, og \mathbf{a}_2 tilhører egenværdien 3. Egenværdierne er diagonalelementerne i ${}_a \mathbf{F}_a$.

Vi betragter nu en vilkårlig vektor $\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2$ og finder dens billedvektor:

$${}_a f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 3x_2 \end{bmatrix}.$$

Ved afbildningen bliver x_1 -koordinaten ganget med egenværdien 2, mens x_2 -koordinaten bliver ganget med egenværdien 3. Geometrisk betyder dette at hele planen ved afbildningen "strækkes" først med faktoren 2 i retningen \mathbf{a}_1 og dernæst faktoren 3 i retningen \mathbf{a}_2 , se virkningen på en vilkårligt valgt vektor \mathbf{x} på figur 9.2.

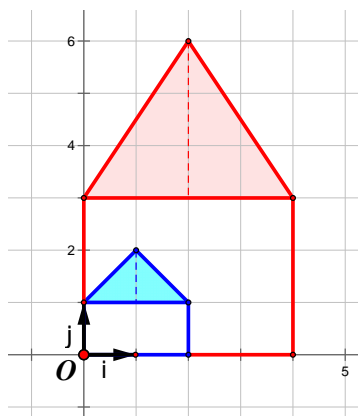


Figur 9.2: Vektoren \mathbf{x} strækkes vandret med faktor 2 og lodret med faktor 3.

På figur 9.3 har vi valgt standardbasen (\mathbf{i}, \mathbf{j}) og illustrerer hvordan den lineære afbildning g som har afbildningsmatricen

$${}_e \mathbf{G}_e = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

afbilder det "blå hus" over i det "røde hus" ved at alle stedvektorer til punkter i "blå hus" strækkes med faktoren 2 i vandret retning og med faktoren 3 i lodret retning.

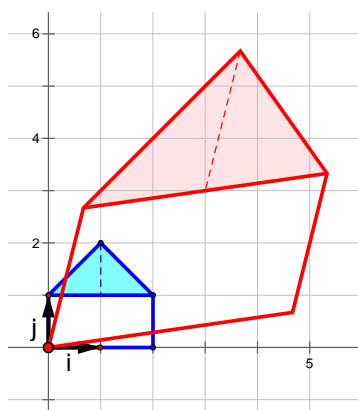


Figur 9.3: Det blå hus strækkes vandret med faktor 2 og lodret med faktor 3.

Vi undersøger nu en anden lineær afbildning h hvis afbildningsmatrix med hensyn til standardbasen ikke er en diagonalmatrix:

$${}_e\mathbf{H}_e = \begin{bmatrix} 7/3 & 2/3 \\ 1/3 & 8/3 \end{bmatrix}.$$

Her kan man ikke straks afgøre om afbildningen er sammensat af to strækninger i to givne retninger. Og man får ikke umiddelbart hints ved at afbilde det blå hus fra figur 9.4 ved hjælp af h :



Figur 9.4: Hus

Men faktisk er det også i tilfældet h muligt at vælge en basis som består af to lineært uafhængige egenvektorer for h . Lad nemlig \mathbf{b}_1 være givet ved e -koordinaterne $(2, -1)$ og \mathbf{b}_2 ved e -koordinaterne $(1, 1)$. Så gælder der

$${}_eh(\mathbf{b}_1) = \begin{bmatrix} 7/3 & 2/3 \\ 1/3 & 8/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

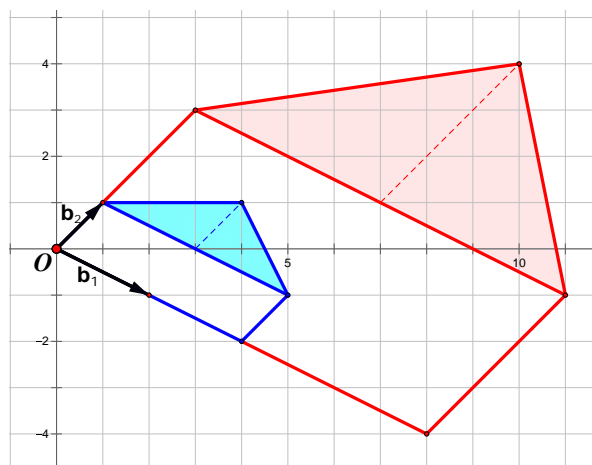
og

$${}_eh(\mathbf{b}_2) = \begin{bmatrix} 7/3 & 2/3 \\ 1/3 & 8/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Der gælder med andre ord at $h(\mathbf{b}_1) = 2\mathbf{b}_1$ og $h(\mathbf{b}_2) = 3\mathbf{b}_2$. Vi ser at \mathbf{b}_1 og \mathbf{b}_2 er egenvektorer for h , og når vi vælger $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ som basis, får afbildningsmatricen for h med hensyn til denne basis formen:

$${}_b\mathbf{G}_b = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Det viser sig dermed overraskende at afbildningsmatricen for h også kan skrives på formen (9-5). Afbildningen h er også sammensat af to strækninger med faktorerne 2 og 3. Blot er de to strækningsretninger nu bestemt ved egenvektorerne \mathbf{b}_1 og \mathbf{b}_2 . Dette ses tydeligere hvis vi afbilder et nyt blå hus hvis hovedlinjer er parallelle med b -basisvektorerne:



Figur 9.5: Det blå hus strækkes med faktor 2 hhv. faktor 3 i egenvektorenes retning

Vi har hermed eksemplificeret: Hvis man kan finde to lineært uafhængige egenvektorer for en lineær afbildning i planen er det muligt

1. at skrive dens afbildningsmatrix på diagonalform ved at vælge egenvektorerne som basis
2. at beskrive afbildningen som strækninger i egenvektorenes retninger med deres tilhørende egenværdier som strækningsfaktorer.

9.1.2 Egenværdier og deres tilhørende egenvektorer

Egenværdiproblemet for en lineær afbildning går i korthed ud på at besvare spørgsmålet: findes der egentlige vektorer hvis billedvektor er proportionale med vektoren selv. Det korte svar er at det kan man ikke svare generelt på, det afhænger af den enkelte afbildning. I det følgende forsøger vi at indkredse hvad vi faktisk kan sige generelt om egenværdiproblemet.

|||| Definition 9.2 Egenværdi og egenvektor

Lad $f : V \rightarrow V$ være en lineær afbildning af vektorrummet V ind i sig selv. Hvis der findes en egentlig vektor $\mathbf{v} \in V$ og en skalar λ , således at

$$f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}, \quad (9-6)$$

så kaldes proportionalitetsfaktoren λ for en *egenværdi* for f , mens \mathbf{v} kaldes for en *egenvektor* som hører til λ .



Hvis det ikke i definition 9.2 var krævet at der skulle findes en *egentlig* vektor som opfylder $f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$, ville enhver skalar λ være en egen værdi, idet der jo for enhver skalar λ gælder $f(\mathbf{0}) = \lambda \mathbf{0}$. Men bemærk at *hvis* λ er en egen værdi, så *er* nul-vektoren en egenvektor hørende til λ .



Tallet 0 kan godt være en egen værdi. Det kræver blot at der findes en egentlig vektor \mathbf{v} som opfylder $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, da vi så har $f(\mathbf{v}) = 0\mathbf{v}$.

Hvis en lineær afbildning f har blot én egenvektor \mathbf{v} , så har den uendeligt mange egenvektorer. Dette er en simpel konsekvens af den følgende sætning.

||| Sætning 9.3 Underrum af egenvektorer

Hvis λ er en egen værdi for en lineær afbildning $f : V \rightarrow V$, så er mængden af egenvektorer som hører til λ , et underrum i V .

||| Bevis

Lad $f : V \rightarrow V$ være en lineær afbildning af vektorrummet V ind i sig selv, og antag at λ er en egen værdi for f . Vi skal vise at mængden af egenvektorer som hører til λ , opfylder de to stabilitetskrav for underrum, se sætning 7.38. Lad k være en vilkårlig skalar, og lad \mathbf{u} og \mathbf{v} være to vilkårlige egenvektorer som hører til λ . Så gælder der under anvendelse af L_1 :

$$f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{u} + \lambda \mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}).$$

Sumvektoren $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ er dermed en egenvektor hørende til λ , og vi har hermed vist at egenvektorerne hørende til λ opfylder stabilitetskravet vedrørende addition. Endvidere gælder der under anvendelse af L_2 :

$$f(k\mathbf{u}) = kf(\mathbf{u}) = k(\lambda \mathbf{u}) = \lambda(k\mathbf{u}).$$

Hermed vist at egenvektorerne hørende til λ også opfylder stabilitetskravet vedrørende multiplikation med skalar. Samlet er det vist at mængden af egenvektorer som hører til en given egen værdi λ , er et underrum i definitionsrummet. ■

Sætning 9.3 giver anledning til den følgende definition:

||| Definition 9.4 Egenvektorrumbet

Lad $f : V \rightarrow V$ være en lineær afbildning af vektorrummet V ind i sig selv, og lad λ være en egenværdi for f .

Ved *eigenvektorrumbet* (eller kort *eigenrummet*) E_λ hørende til λ forstås underrumbet af egenvektorer som hører til λ :

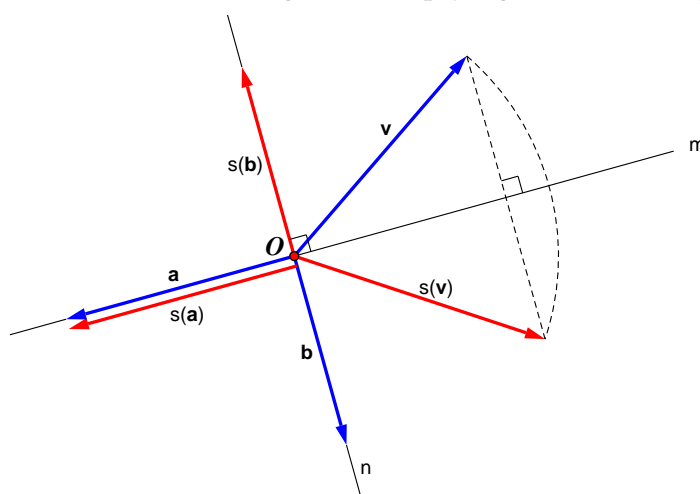
$$E_\lambda = \{\mathbf{v} \in V \mid f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}\}.$$

Hvis E_λ er endeligt-dimensionalt, kaldes $\dim(E_\lambda)$ for den *geometriske multiplicitet* af λ , betegnet $\text{gm}(\lambda)$.

I det følgende eksempel betragtes en lineær afbildning som har to egenværdier, begge med geometrisk multiplicitet 1.

||| Eksempel 9.5 Egenrum for spejling

I planen er der tegnet en ret linje m gennem Origo. Med s betegnes den lineære afbildning der afbilder en vektor \mathbf{v} , afsat ud fra Origo, i dens spejling $s(\mathbf{v})$ i m , se figur 9.5:



Figur 9.5: Egenværdiproblemet for spejling i m .

Lad \mathbf{a} være en vilkårlig egentlig vektor som ligger på m . Da der gælder

$$s(\mathbf{a}) = \mathbf{a} = 1 \cdot \mathbf{a}$$

er 1 en egenværdi for s . Egenrummet E_1 er mængden af vektorer som ligger på m .

Vi tegner nu en ret linje n gennem Origo, vinkelret på m . Lad \mathbf{b} være en vilkårlig egentlig vektor som ligger på n . Da der gælder

$$s(\mathbf{b}) = -\mathbf{b} = (-1) \cdot \mathbf{b},$$

er -1 en egen værdi for s . Egenrummet E_{-1} er mængden af vektorer som ligger på n .

At ikke alle lineære afbildninger har egen værdier og dermed egenvektorer, fremgår af det følgende eksempel.

Eksempel 9.6

Lad os undersøge egen værdiproblemet for den lineære afbildning $f : G_2 \rightarrow G_2$ som til en egentlig vektor \mathbf{v} i planen knytter dens tværvektor:

$$f(\mathbf{v}) = \widehat{\mathbf{v}}.$$

Da en egentlig vektor \mathbf{v} aldrig kan være proportional (parallel) med sin tværvektor, må der for ethvert valg af en skalar λ nødvendigvis gælde at

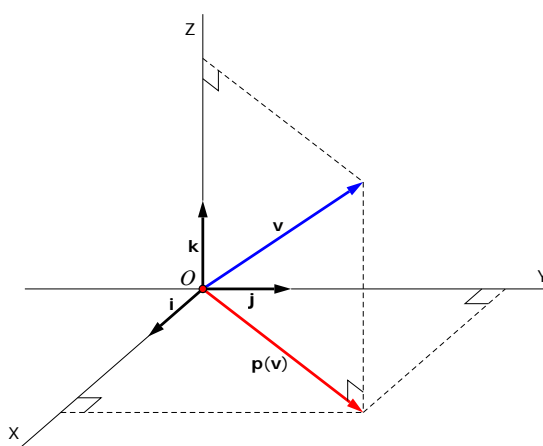
$$\widehat{\mathbf{v}} \neq \lambda \mathbf{v}.$$

Derfor findes der ikke egen værdier og dermed heller ikke egenvektorer for f .

Af den følgende opgave fremgår blandt andet at dimensionen af et egenvektorrum meget vel kan være større end 1.

Opgave 9.7

I rummet er der givet et standard $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ -koordinatsystem. Alle vektorer tænkes afsat ud fra Origo. Afbildningen p projicerer vektorer ned i (X, Y) -planen i rummet, se figur 9.6.



Figur 9.6: Egen værdiproblemet for projektion ned i (X, Y) -planen.

Det er vist i [opgave 8.26](#), at p er lineær. Bestem samtlige egen værdier og de egenrum der hører til egen værdierne, udelukkende ved hovedregning (grubling).

|||| Eksempel 9.8 Egenværdiproblem for differentiation

Vi betragter den lineære afbildning $f : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty$ som er givet ved

$$f(x(t)) = x'(t).$$

Lad λ være en vilkårlig skalar. Da der gælder

$$f(e^{\lambda t}) = \lambda e^{\lambda t},$$

er λ en egenværdi for f , og $e^{\lambda t}$ er en egenvektor som hører til λ .

Da samtlige løsninger til differentiallyigningen

$$x'(t) = \lambda x(t)$$

er givet ved $k \cdot e^{\lambda t}$, hvor k er et vilkårligt reelt tal, er egenrummet hørende til λ bestemt ved

$$E_\lambda = \{ k \cdot e^{\lambda t} \mid k \in \mathbb{R} \}.$$

9.1.3 Teoretiske pointer

Den følgende hjælpesætning giver et vigtigt resultat for lineære afbildninger af vektorrum ind i sig selv. Den gælder uanset om det betragtede vektorrum har endelig dimension eller ej.

|||| Hjælpesætning 9.9

Lad $f : V \rightarrow V$ være en lineær afbildning af et vektorrum V ind i sig selv, og antag

1. at f har en række egenværdier med tilhørende egenrum,
2. at der udvælges nogle af egenrummene, og inden for hvert af de udvalgte egenrum udvælges nogle lineært uafhængige vektorer,
3. og at alle de således udvalgte vektorer sættes sammen til ét vektorsæt v .

Så er v et lineært uafhængigt vektorsæt.

||| Bevis

Lad $f : V \rightarrow V$ være en lineær afbildning, og lad v være et vektorsæt der er sammensat i overensstemmelse med punkt 1. til 3. i hjælpesætning 9.9. Vi skal vise at v er lineært uafhængigt. Den røde tråd i beviset er at vi antager det modsatte, det vil sige at v er lineært afhængigt, og viser at dette fører til en modstrid.

Vi udtynder først v til en basis for $\text{span}\{v\}$. Der må da være mindst én vektor i v som ikke er med i basen. Vi vælger en af slagsen, lad os kalde den x . Nu skriver vi x som en linearkombination af basisvektorerne, idet vi udelader de trivielle led, det vil sige dem som har koefficienten 0:

$$x = k_1 v_1 + \cdots + k_m v_m \quad (9-7)$$

Vi kalder egenværdien der hører til x for λ , og egenværdierne hørende til v_i for λ_i . Vi kan ud fra (9-7) opnå et udtryk for λx på to forskellige måder, dels ved at gange (9-7) med λ , dels ved at finde billedet ved f af højre- og venstresiden i (9-7):

$$\begin{aligned} \lambda x &= \lambda k_1 v_1 + \cdots + \lambda k_m v_m \\ \lambda x &= \lambda_1 k_1 v_1 + \cdots + \lambda_m k_m v_m \end{aligned}$$

Ved subtraktion af den øverste ligning med den nederste medfører dette:

$$0 = k_1(\lambda - \lambda_1)v_1 + \cdots + k_m(\lambda - \lambda_m)v_m. \quad (9-8)$$

Hvis alle koefficienterne til vektorerne på højresiden af (9-8) er lig med nul, må $\lambda = \lambda_i$ for alle $i = 1, 2, \dots, m$. Men så er x og alle basisvektorerne v_i valgt fra det samme egenvektorrum, og de skulle derfor som samlet sæt være lineært uafhængige, sådan er de valgt. Dette strider mod at x er en linearkombination af basisvektorerne.

Derfor må mindst én koefficienterne i (9-8) være forskellig fra 0. Men så er nul-vektoren opskrevet som en egentlig linearkombination af basisvektorerne. Dette strider mod kravet om at en basis er lineært uafhængig.

Konklusion: antagelsen om at v er et lineært afhængigt vektorsæt, fører nødvendigvis til en modstrid. Derfor er v lineært uafhængigt. ■

||| Eksempel 9.10 Egenvektors lineære uafhængighed

En lineær afbildning $f : V \rightarrow V$ har tre egenværdier λ_1, λ_2 og λ_3 som har de geometriske multipliciteter 2, henholdsvis 1 og 3. Vektorsættet (a_1, a_2) er en basis for E_{λ_1} , (b) er en basis for E_{λ_2} , og (c_1, c_2, c_3) er en basis for E_{λ_3} . Så følger det af hjælpesætning 9.9 at hvert udvalg af de seks basisvektorer er et lineært uafhængigt vektorsæt.

Værdien af hjælpesætning 9.9 viser sig ved at den direkte fører til de følgende vigtige resultater:

||| Sætning 9.11 Generelle egenskaber

Lad V være et vektorrum med $\dim(V) = n$, og lad $f : V \rightarrow V$ være en lineær afbildning af V ind i sig selv. Der gælder:

1. Egentlige egenvektorer som hører til forskellige egenverdier for f , er lineært uafhængige.
2. f kan højst have n forskellige egenverdier.
3. Hvis f har n forskellige egenverdier, findes der en basis for V bestående af egenvektorer for f .
4. Summen af de geometriske multipliciteter af egenverdierne for f kan højst være n .
5. Hvis og kun hvis summen af de geometriske multipliciteter af egenverdierne for f er lig med n , findes der en basis for V bestående af egenvektorer for f .

||| Opgave 9.12

Det første punkt i sætning 9.11 er et simpelt specialtilfælde af hjælpesætning 9.9 og følger derfor umiddelbart af hjælpesætningen. Det andet punkt kan bevises således:

Antag at en lineær afbildning har k forskellige egenverdier. Vi vælger en egentlig vektor fra hvert af de k egenrum. Sættet af de k valgte vektorer er da i følge hjælpesætning 9.9 lineært uafhængigt, og k må derfor være mindre end eller lig med vektorrummets dimension (se hjælpesætning 7.17).

Gør på tilsvarende vis rede for hvordan de tre sidste punkter i sætning 9.11 følger af hjælpesætning 9.9.

Motiveret af sætning 9.11 indfører vi begrebet egenbasis:

||| Definition 9.13 Egenvektorbasis

Lad $f : V \rightarrow V$ være en lineær afbildning af et endeligt-dimensionalt vektorrum V ind i sig selv.

Ved en *egenvektorbasis*, eller kort *egenbasis*, for V med hensyn til f forstås en basis bestående af egenvektorer for f .

Herefter kan vi præsentere dette afsnits hovedresultat:

||| Sætning 9.14 Hovedsætning

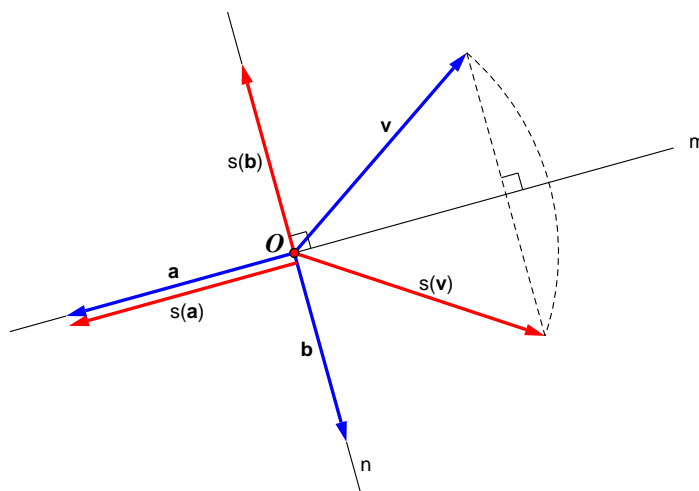
Lad $f : V \rightarrow V$ være en lineær afbildning af et n -dimensionalt vektorrum V ind i sig selv, og lad $v = (v_1, \dots, v_n)$ være en basis for V . Der gælder da:

1. Afbildningsmatricen ${}_v F_v$ for f med hensyn til v er en diagonalmatrix hvis og kun hvis v er en egenbasis for V med hensyn til f .
2. Antag at v er en egenbasis V med hensyn til f , og Λ betegne den diagonalmatrix som er afbildningsmatrix for f med hensyn til v . Rækkefølgen af diagonalelementerne i Λ er da bestemt ud fra den valgte basis således: Basisvektoren v_i hører til den egen værdi λ_i som står i den i 'te søjle i Λ .

Vi udskyder beviset for denne sætning til [eNote 10](#) om diagonalisering.

||| Eksempel 9.15 Diagonalmatrix for spejling

Lad os igen betragte situationen i eksempel 9.5, hvor vi betragtede afbildningen s som spejler vektorer afsat ud fra Origo i linjen m :



Vi fandt at \mathbf{a} er en egenvektor som hører til egen værdien 1, og at \mathbf{b} er en egenvektor som hører til egen værdien -1 . Da planen har dimensionen 2 følger det af sætning 9.14 at hvis vi vælger basen (\mathbf{a}, \mathbf{b}) , så har f den følgende afbildningsmatrix med hensyn til denne basis:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

|||| Eksempel 9.16 Lineær afbildning uden egenværdier

I eksempel 9.6 fandt vi at afbildningen "tværvektor" i (G_2, \mathbb{R}) ingen egenværdier har. Der findes derfor ingen egenbasis for afbildningen, og den kan derfor ikke beskrives ved en diagonalmatrix for denne afbildning.

|||| Eksempel 9.17 Diagonalisering af kompleks afbildning

Lad $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ være en lineær afbildning som opfylder

$$f(z_1, z_2) = (-z_2, z_1).$$

Da der gælder:

$$f(i, 1) = (-1, i) = i(i, 1) \quad \text{og} \quad f(-i, 1) = (-1, -i) = (-i)(-i, 1),$$

ses at i er en egenværdi for f med en tilhørende egenvektor $(i, 1)$, og at $-i$ er en egenværdi for f med en tilhørende egenvektor $(-i, 1)$.

Da $(i, 1)$ og $(-i, 1)$ er lineært uafhængige, er $((i, 1), (-i, 1))$ en egenbasis for \mathbb{C}^2 med hensyn til f . Afbildningsmatricen for f med hensyn til denne basis er i følge sætning 9.14

$$\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

|||| Opgave 9.18

Betragt igen situationen i eksempel 9.7. Vælg to forskellige egenbaser (baser bestående af egenvektorer for p), og bestem i hvert af de to tilfælde den diagonalmatrix som bliver afbildningsmatrix for p med hensyn til den valgte basis.

9.2 Egenværdiproblemet for kvadratiske matricer

Når en lineær afbildning $f : V \rightarrow V$ afbilder et n -dimensionalt vektorrum V ind i vektorrummet selv, bliver afbildningsmatricen for f med hensyn til en vilkårligt valgt basis a en *kvadratisk* matrix. Egenværdiproblemet $f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$ er da ækvivalent med matrixligningen:

$${}_a\mathbf{F}_a \cdot {}_a\mathbf{v} = \lambda \cdot {}_a\mathbf{v}. \quad (9-9)$$

Dette giver os anledning til formulere et egenværdiproblem for kvadratiske matricer generelt, det vil sige uden at vi nødvendigvis behøver at tænke på den kvadratiske matrix som en afbildningsmatrix. Vi vil opstille standardiserede måder at gå frem på, når man egenværdier og egenvektorer for kvadratiske matricer søges bestemt. Dermed

fås samtidigt, i kraft af (9-9), metoder til at finde egenverdier og egenvektorer for alle lineære afbildninger af vektorrum ind i sig, der kan beskrives ved hjælp af afbildningsmatricer.

Først præciserer vi hvad der forstås ved egenverdiproblemet for en kvadratisk matrix.

|||| Definition 9.19 Egenverdiproblemet for matricer

At løse egenverdiproblemet for en kvadratisk reel $n \times n$ -matrix \mathbf{A} vil sige at finde en skalar λ og en egentlig vektor $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ som opfylder ligningen:

$$\mathbf{A} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}. \quad (9-10)$$

Opfyldes denne ligning for et par af λ og $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, kaldes λ for en *egenverdi* for \mathbf{A} og \mathbf{v} en til λ hørende *egenvektor* for \mathbf{A} .

|||| Eksempel 9.20 Egenverdiproblem for kvadratisk matrix

Det ønskes undersøgt om $\mathbf{v}_1 = (2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (4, 4)$ og $\mathbf{v}_3 = (2, -1)$ er egenvektorer for \mathbf{A} givet ved

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad (9-11)$$

Til dette opstilles egenverdiproblemet, som beskrevet i definition 9.19.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \cdot \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{A} \mathbf{v}_2 &= \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix} = 2 \cdot \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{A} \mathbf{v}_3 &= \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \end{bmatrix} \neq \lambda \cdot \mathbf{v}_3. \end{aligned} \quad (9-12)$$

Af dette ses at \mathbf{v}_1 og \mathbf{v}_2 er egenvektorer for \mathbf{A} . \mathbf{v}_1 hører til egenverdien 1, og \mathbf{v}_2 hører til egenverdien 2.

Endvidere ses at \mathbf{v}_3 ikke er en egenvektor for \mathbf{A} .

|||| Eksempel 9.21 Egenværdiproblem for kvadratisk matrix

Givet matricen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Da

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

er 0 en egen værdi for \mathbf{A} og $(1, 1)$ er en til 0 hørende egenvektor for \mathbf{A} .

|||| Eksempel 9.22 Egenværdiproblem for kvadratisk matrix

Givet matricen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix},$$

er i en kompleks egen værdi for \mathbf{A} og $(-i, 1)$ er en til i hørende kompleks egenvektor for \mathbf{A} .

Til brug for de følgende undersøgelser knytter vi nogle vigtige kommentarer til definition 9.19.

Først bemærker vi at selv om den kvadratiske matrix \mathbf{A} i definition 9.19 er reel, er man ofte interesseret i ikke kun at finde reelle løsninger til ligningen (9-10), men generelt komplekse løsninger. Der søges med andre ord en skalar $\lambda \in \mathbb{C}$ og en vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$, der opfylder (9-10).

Det kan derfor være hensigtsmæssigt at opfatte venstresiden i (9-10) som en afbildning $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ givet ved:

$$f(\mathbf{v}) = \mathbf{A} \mathbf{v}.$$

Denne afbildning er lineær. Lad nemlig $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ og $k \in \mathbb{C}$. Der gælder da ifølge sædvanlige regneregler for matricer

1. $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{A} \mathbf{u} + \mathbf{A} \mathbf{v}$
2. $f(k \mathbf{u}) = \mathbf{A}(k \mathbf{u}) = k(\mathbf{A} \mathbf{u})$

Hermed er lineariteten vist. Da egen værdiproblemet $f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$ i dette tilfælde er *identisk* med egen værdiproblemet $\mathbf{A} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$, kan det sluttes at resultaterne opnået i afsnit 9.1 for egen værdiproblemet i almindelighed, umiddelbart kan overføres til egen værdiproblemet for matricer. Lad os således straks karakterisere mængden af egenvektorer der hører til en given egen værdi for en kvadratisk, reel matrix, sammenlign med sætning 9.3.

||| Sætning 9.23 Underrum af egenvektorer

Lad λ være en reel eller kompleks egenværdi for en reel $n \times n$ -matrix \mathbf{A} . Der gælder da at mængden af komplekse egenvektorer for \mathbf{A} hørende til λ , er et underrum i \mathbb{C}^n .

Hvis man kun er interesseret i reelle løsninger på egenværdiproblemet for reelle kvadratiske matricer, kan man alternativt opfatte venstresiden i (9-10) som en reel afbildning $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ givet ved:

$$f(\mathbf{v}) = \mathbf{A} \mathbf{v}.$$

Denne afbildning er naturligvis også lineær. Vi opnår herved følgende variant af sætning 9.23:

||| Sætning 9.24 Underrum af egenvektorer

Lad λ være en reel egenværdi for en reel $n \times n$ -matrix \mathbf{A} . Der gælder da at mængden af reelle egenvektorer for \mathbf{A} hørende til λ , er et underrum i \mathbb{R}^n .

I lyset af sætning 9.24 og sætning 9.24 indfører vi begrebet egenvektorum, sammenlign med definition 9.4.

||| Definition 9.25 Egenvektorum

Lad \mathbf{A} være en kvadratisk, reel matrix, og lad λ være en egenværdi for \mathbf{A} .

Underrummet af alle de til λ hørende egenvektorer kaldes *egenvektorummet* (eller kort *egenrummet*) hørende til λ og betegnes E_λ .

Efter at vi nu har opridset de grundlæggende strukturelle rammer for egenværdiproblemet for kvadratiske matricer, vil vi i de to følgende delafsnit helt elementært undersøge, hvordan man overhovedet kan gå i gang med at finde egenværdier og egenvektorer for kvadratiske matricer.

9.2.1 At finde egenværdierne for en kvadratisk matrix

Vi ønsker at bestemme de egenværdier, som hører til en reel $n \times n$ matrix \mathbf{A} . Udgangspunktet er som nævnt ligningen

$$\mathbf{A} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}, \tag{9-13}$$

I første omgang sætter vi $\lambda \mathbf{v}$ over på venstresiden af lighedstegnet, hvorefter \mathbf{v} "tages uden for parentes". Det kan gøres fordi $\mathbf{v} = \mathbf{E} \mathbf{v}$ hvor \mathbf{E} er enhedsmatricen:

$$\mathbf{A} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{A} \mathbf{v} - \lambda \mathbf{E} \mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (9-14)$$

Den sidste ligning i (9-14) svarer til et homogent lineært ligningssystem bestående af n ligninger med de n ubekendte v_1, \dots, v_n , som er elementerne i $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$. Det er dog ikke muligt straks at løse ligningssystemet, netop fordi vi ikke kender λ . Vi er nødt til at arbejde videre med ligningssystemets koefficientmatrix, som tildeles et særligt symbol:

$$\mathbf{K}_A(\lambda) = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})$$

og kaldes *den karakteristiske matrix* for \mathbf{A} .

Da det er et homogent lineært ligningssystem, som skal løses, er der som udgangspunkt to muligheder for løsningsstrukturen. Enten er den karakteristiske matrix *regulær*, og så er den eneste løsning $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Eller også er matricen *singulær*, og der vil findes uendeligt mange løsninger \mathbf{v} . Men da definition 9.19 kræver at \mathbf{v} skal være en egentlig vektor, altså en vektor forskellig for nulvektoren, må den karakteristiske matrix være singulær. For at undersøge om dette gælder, tages determinanten af den karakteristiske matrix. Den er nul netop når matricen er singulær:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0. \quad (9-15)$$

Bemærk at venstresiden i (9-15) er et polynomium med λ som variabel. Polynomiet tildeles et særligt symbol:

$$K_A(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \det(\mathbf{K}_A(\lambda))$$

og kaldes *det karakteristiske polynomium* for \mathbf{A} .

Den ligning der fremkommer når det karakteristiske polynomium sættes lig nul

$$K_A(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \det(\mathbf{K}_A(\lambda)) = 0$$

kaldes *karakterligningen* for \mathbf{A} .

Ved hjælp af udregningsmetoden for determinant kan det indses at det karakteristiske polynomium altid er et n 'te gradspolynomium. Se også de efterfølgende eksempler. Hovedpointen er at rødderne i det karakteristiske polynomium (løsningerne til karakterligningen) er egenværdierne for matricen, fordi egenværdierne netop opfylder, at den karakteristiske matrix er singulær.

Eksempel 9.26 Egenverdier for 2×2 matricer

Givet to matricer **A** og **B**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}. \quad (9-16)$$

Vi ønsker at bestemme egenverdierne for **A** og **B**.

Først betragtes **A**. Dens karakteristiske matrix opskrives:

$$\mathbf{K}_\mathbf{A}(\lambda) = \mathbf{A} - \lambda \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 3 & -1-\lambda \end{bmatrix}. \quad (9-17)$$

Nu bestemmes det karakteristiske polynomium:

$$\begin{aligned} K_\mathbf{A}(\lambda) &= \det(\mathbf{K}_\mathbf{A}(\lambda)) = \det \left(\begin{bmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 3 & -1-\lambda \end{bmatrix} \right) \\ &= (4-\lambda)(-1-\lambda) - (-2) \cdot 3 = \lambda^2 - 3\lambda + 2. \end{aligned} \quad (9-18)$$

Polynomiet har som forventet graden 2. Karakterligningen kan opskrives og løsningerne til den kan bestemmes:

$$K_\mathbf{A}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ eller } \lambda = 2. \quad (9-19)$$

Altså har **A** to egenverdier: $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 2$.

Den samme teknik bruges for at bestemme eventuelle egenverdier til **B**.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_\mathbf{B}(\lambda) &= \mathbf{B} - \lambda \mathbf{E} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-\lambda & 4 \\ -2 & 3-\lambda \end{bmatrix} \\ K_\mathbf{B}(\lambda) &= \det(\mathbf{K}_\mathbf{B}(\lambda)) = \det \left(\begin{bmatrix} -1-\lambda & 4 \\ -2 & 3-\lambda \end{bmatrix} \right) \\ &= (-1-\lambda)(3-\lambda) - 4 \cdot (-2) = \lambda^2 - 2\lambda + 5. \end{aligned} \quad (9-20)$$

Der er i dette tilfælde ingen reelle løsninger til $K_\mathbf{B}(\lambda) = 0$, fordi diskriminanten $d = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16 < 0$, og derfor har **B** ingen reelle egenverdier. Men den har to komplekse egenverdier. Vi tager den komplekse "værktøjskasse" frem: Diskriminanten kan omkrives til $d = (4i)^2$, hvilket giver de to komplekse løsninger

$$\lambda = \frac{2 \pm 4i}{2} \Leftrightarrow \lambda = 1 + 2i \text{ og } \bar{\lambda} = 1 - 2i \quad (9-21)$$

Altså har **B** to komplekse egenverdier: $\lambda_1 = 1 + 2i$ og $\lambda_2 = 1 - 2i$.

I den følgende sætning opsummeres konklusionerne i dette delafsnit.

|||| **Sætning 9.27 Det karakteristiske polynomium**

For den kvadratiske reelle $n \times n$ -matrix \mathbf{A} betragtes

1. Den karakteristiske matrix $\mathbf{K}_{\mathbf{A}}(\lambda) = \mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}$.
2. Det karakteristiske polynomium $K_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{K}_{\mathbf{A}}(\lambda)) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})$.
3. Karakterligningen $K_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$.

Der gælder:

1. Det karakteristiske polynomium er et n 'te gradspolynomium med den variable λ , og karakterligningen er tilsvarende en n 'te gradsligning med den ubekendte λ .
2. Rødderne i det karakteristiske polynomium (løsningerne for karakterligningen) er samtlige egenverdier for \mathbf{A} .

9.2.2 At finde egenvektorerne for en kvadratisk matrix

Efter at egenverdierne til en reel $n \times n$ matrix \mathbf{A} er bestemt, er det muligt at bestemme de tilhørende egenvektorer. Proceduren tager udgangspunkt i ligningen

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (9-22)$$

som vi nåede frem til i (9-14). Da egenverdierne nu er kendte, kan det til (9-22) svarende homogene lineære ligningssystem løses med hensyn til n ubekendte v_1, \dots, v_n som er elementerne i $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$. Vi skal blot indsætte egenverdierne efter tur. Som allerede nævnt er den karakteristiske matrix singulær, når den indsatte λ er en egenverdi. Derfor findes der uendeligt mange løsninger til ligningssystemet. At finde disse svarer til at finde samtlige egenvektorer \mathbf{v} der hører til λ .

I den følgende metode sammenfattes opgaven med at bestemme egenverdier og tilhørende egenvektorer for en kvadratisk matrix.

|||| Metode 9.28 Bestemmelse af egenvektorer

Samtlige (reelle eller komplekse) egenverdier λ for den kvadratiske matrix \mathbf{A} findes som løsninger til *karakterligningen* for \mathbf{A} :

$$K_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0. \quad (9-23)$$

Derefter kan egenvektorerne \mathbf{v} tilhørende hver enkelt egenverdi λ bestemmes. De er løsninger til det følgende lineære ligningssystem

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (9-24)$$

når egenverdien λ er indsat. \mathbf{E} er enhedsmatricen.

Metode 9.28 udfoldes i de følgende tre eksempler, der også giver os anledning til, i forlængelse af sætning 9.23 og sætning 9.24, at karakterisere mængden af egenvektorer der tilhører en given egenverdi.

|||| Eksempel 9.29 Egenverdiers tilhørende egenvektorer

Givet den kvadratiske matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (9-25)$$

Vi ønsker at bestemme egenverdier og egenvektorer til \mathbf{A} og bruger metode 9.28. Først findes den karakteristiske matrix:

$$\mathbf{K}_{\mathbf{A}}(\lambda) = \mathbf{A} - \lambda \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} \quad (9-26)$$

Dernæst opstilles det karakteristiske polynomium:

$$\begin{aligned} K_{\mathbf{A}}(\lambda) &= \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} \right) = (2 - \lambda)(2 - \lambda) - 1 \cdot 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3. \end{aligned} \quad (9-27)$$

Karakterligningen, som er $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$, har løsningerne $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 3$, der er samtlige reelle egenverdier til \mathbf{A} .

For at bestemme de til λ_1 hørende egenvektorer indsættes λ_1 i $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0}$, hvorefter vi løser det hertil svarende lineære ligningssystem som har totalmatricen:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E} \mid \mathbf{0}] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 - 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 - 1 & 0 \end{array} \right]. \quad (9-28)$$

Ved GaussJordan-elimination fås

$$\text{trap}(\mathbf{T}) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (9-29)$$

Der er altså uendeligt mange løsninger $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, da der kun er én ikke-triviel ligning: $v_1 + v_2 = 0$. Ønsker man blot én egentlig egenvektor tilhørende egenværdien λ_1 , kan v_2 sættes til 1, og man får egenvektoren $\mathbf{v}_1 = (-1, 1)$. Samtlige reelle egenvektorer hørende til λ_1 kan da opskrives som

$$\mathbf{v} = t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}. \quad (9-30)$$

Dette er et én-dimensionalt underrum i \mathbb{R}^2 , nemlig egenrummet som hører til egenværdien 1 som vi også kan angive således:

$$E_1 = \text{span}\{(-1, 1)\}. \quad (9-31)$$

Nu indsættes λ_2 i $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0}$, hvorefter vi løser det hertil svarende lineære ligningssystem som har totalmatricen

$$\mathbf{T} = [\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{E} \mid \mathbf{0}] = \left[\begin{array}{cc|c} 2-3 & 1 & 0 \\ 1 & 2-3 & 0 \end{array} \right]. \quad (9-32)$$

Ved GaussJordan-elimination fås

$$\text{trap}(\mathbf{T}) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (9-33)$$

Heraf ses at $\mathbf{v}_2 = (1, 1)$ er en egenvektor tilhørende egenværdien λ_2 . Samtlige reelle egenvektorer hørende til λ_2 kan opskrives som

$$\mathbf{v} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}. \quad (9-34)$$

Dette er et én-dimensionalt underrum i \mathbb{R}^2 som vi også kan angive ved:

$$E_3 = \text{span}\{(1, 1)\}. \quad (9-35)$$

Der vil nu blive ført kontrol: Når $\mathbf{v}_1 = (-1, 1)$ afbildes med \mathbf{A} , vil billedvektoren da udelukkende være en skalering (længdeændring) af \mathbf{v}_1 ?

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{v}_1. \quad (9-36)$$

Det passer! Man kan oven i købet se, at egenværdien er 1.

Nu kontrolleres \mathbf{v}_2 :

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot \mathbf{v}_2. \quad (9-37)$$

\mathbf{v}_2 er altså som forventet også en egenvektor, og egenværdien er 3.

Eksempel 9.30 Komplekse egenverdier og egenvektorer

I eksempel 9.26 er der givet en matrix \mathbf{B} med

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad (9-38)$$

som ingen reelle egenverdier har. Men vi fandt to komplekse egenverdier, $\lambda_1 = 1 + 2i$ og $\lambda_2 = 1 - 2i$.

Vi indsættes λ_1 i $(\mathbf{B} - \lambda_1 \mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0}$, hvorefter vi løser det hertil svarende lineære ligningssystem som har totalmatricen

$$\mathbf{T} = [\mathbf{B} - \lambda_1 \mathbf{E} | \mathbf{0}] = \left[\begin{array}{cc|c} -1 - (1 + 2i) & 4 & 0 \\ -2 & 3 - (1 + 2i) & 0 \end{array} \right] \quad (9-39)$$

Ved GaussJordan-elimination fås

$$\text{trap}(\mathbf{T}) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 + i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (9-40)$$

Dette svarer til én ikke-triviel ligning $v_1 + (-1 + i)v_2 = 0$, og sættes $v_2 = s$, ser vi at samtlige komplekse egenvektorer hørende til λ_1 er givet ved

$$\mathbf{v} = s \cdot \begin{bmatrix} 1 - i \\ 1 \end{bmatrix}, s \in \mathbb{C}. \quad (9-41)$$

Dette er et én-dimensionalt underrum i \mathbb{C}^2 , nemlig egenrummet hørende til egenværdien $1 + 2i$ som vi også kan angive ved:

$$E_{1+2i} = \text{span}\{(1 - i, 1)\}. \quad (9-42)$$

Tilsvarende kan samtlige komplekse løsninger hørende til λ_2 findes, de er givet ved

$$\mathbf{v} = s \cdot \begin{bmatrix} 1 + i \\ 1 \end{bmatrix}, s \in \mathbb{C}. \quad (9-43)$$

Dette er et én-dimensionalt underrum i \mathbb{C}^2 som vi også kan angive ved:

$$E_{1-2i} = \text{span}\{(1 + i, 1)\}. \quad (9-44)$$

I det følgende eksempel finder vi egenverdier og tilhørende egenrum for en 3×3 -matrix. Det viser sig at der i dette tilfælde hører et to-dimensionalt egenrum til en af egenverdierne.

Eksempel 9.31 Egenværdi med multiplicitet 2

Givet matricen \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 12 \\ 4 & -5 & 4 \\ -4 & -1 & -10 \end{bmatrix} \quad (9-45)$$

Vi ønsker i første omgang at bestemme egenværdierne til \mathbf{A} og bruger metode 9.28.

$$\det \left(\begin{bmatrix} 6-\lambda & 3 & 12 \\ 4 & -5-\lambda & 4 \\ -4 & -1 & -10-\lambda \end{bmatrix} \right) = -\lambda^3 - 9\lambda^2 + 108 = -(\lambda-3)(\lambda+6)^2 = 0 \quad (9-46)$$

Af den sidste faktorisering ses at \mathbf{A} har to forskellige egenværdier. Egenværdien $\lambda_1 = -6$ er en dobbeltrod i karakterligningen, mens egenværdien $\lambda_2 = 3$ er en enkeltrod.

Nu bestemmes egenvektorrummet tilhørende $\lambda_1 = -6$, se sætning 9.23:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} 6-(-6) & 3 & 12 & 0 \\ 4 & -5-(-6) & 4 & 0 \\ -4 & -1 & -10-(-6) & 0 \end{array} \right] \rightarrow \\ & \left[\begin{array}{ccc|c} 12 & 3 & 12 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & -4 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (9-47)$$

Her er kun én ikke-triviel ligning: $4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0$. Sættes x_1 og x_3 til de to frie parametre s og t fås samtlige reelle egenvektorer til egenværdien -6 ved:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}. \quad (9-48)$$

Dette er et to-dimensionalt underrum i \mathbb{R}^3 som vi også kan angive ved:

$$E_{-6} = \text{span}\{(1, -4, 0), (0, -4, 1)\}. \quad (9-49)$$

Det er dermed muligt at finde to lineært uafhængige egenvektorer til λ_1 . Hvad med antallet af lineært uafhængige egenvektorer for $\lambda_2 = 3$?

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} 6-3 & 3 & 12 & 0 \\ 4 & -5-3 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & -10-3 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \\ & \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 12 & 0 \\ 4 & -8 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & -13 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (9-50)$$

Her er to ikke-trivielle ligninger: $x_1 + x_2 + 4x_3 = 0$ og $x_2 + x_3 = 0$. Sættes $x_3 = s$ til den frie parameter, fås samtlige reelle egenvektorer til egenværdien 3 ved

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (9-51)$$

Dette er et én-dimensionalt underrum i \mathbb{R}^3 som vi også kan angive ved:

$$E_3 = \text{span}\{(-3, -1, 1)\}. \quad (9-52)$$

Det er altså kun muligt at finde én lineært uafhængig egenvektor til λ_2 .

||| Opgave 9.32

Givet den kvadratiske matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}. \quad (9-53)$$

1. Bestem samtlige egenværdier \mathbf{A} .
2. Bestem for hver af egenværdierne det tilhørende egenrum.
3. Opskriv mindst 3 egenvektorer tilhørende hver egenværdi. De må gerne være lineært afhængige.

9.2.3 Algebraisk og geometrisk multiplicitet

Som det fremgår af eksempel 9.31 er det både vigtigt at være opmærksom på om en egenværdi er enkeltrod eller flerdobbeltrød i karakterligningen for en kvadratisk, reel matrix og på dimensionen af det tilhørende egenrum. I dette delafsnit undersøges relationen mellem de to fænomener. Det giver anledning til de følgende definitioner.

||| Definition 9.33 Algebraisk og geometrisk multiplicitet

Lad \mathbf{A} være en kvadratisk, reel matrix, og lad λ være en egenværdi for \mathbf{A} .

1. λ siges at have *den algebraiske multiplicitet* n , når λ er en n -dobbeltrød i karakterligningen til den kvadratiske matrix \mathbf{A} . Dette betegnes $\text{am}(\lambda) = n$.
2. λ siges at have *den geometriske multiplicitet* m , når dimensionen af det til λ hørende egenvektorum er m . Dette betegnes $\text{gm}(\lambda) = m$. Der gælder med andre ord: $\dim(E_\lambda) = \text{gm}(\lambda)$.



Det er ikke altid at $\text{am}(\lambda) = \text{gm}(\lambda)$. Dette tages op i sætning 9.34.

Den følgende sætning viser nogle vigtige egenskaber vedrørende algebraisk og geometrisk multiplicitet for egenverdier for kvadratiske matricer, sammenlign med sætning 9.11.

|||| **Sætning 9.34** **Egenskaber for multipliciteter**

Givet en reel $n \times n$ -matrix \mathbf{A} .

1. \mathbf{A} har højst n forskellige reelle egenverdier, og også summen af de reelle egenverdiers algebraiske multipliciteter er højst n .
2. \mathbf{A} har højst n forskellige komplekse egenverdier, men summen af de komplekse egenverdiers algebraiske multipliciteter er lig med n .
3. Er λ en reel eller kompleks egenverdi for \mathbf{A} , gælder der:

$$1 \leq \text{gm}(\lambda) \leq \text{am}(\lambda) \leq n \quad (9-54)$$

Det vil sige, at den geometriske multiplicitet af en egenverdi mindst vil være 1, den vil være mindre eller lig med den algebraiske multiplicitet af egenverdien, som igen vil være mindre eller lig antallet af søjler og rækker i \mathbf{A} .

|||| **Opgave 9.35**

Kontroller, at alle tre punkter i sætning 9.34 er gældende for egenverdierne og egenvektorerne i eksempel 9.31.

Lad os kytte nogle kommentarer til 9.34:

Punkt 1 og 2 følger direkte af læren om polynomier. Det karakteristiske polynomium for en reel $n \times n$ -matrix \mathbf{A} er et n 'te gradspolynomium, og det har højst n forskellige reelle såvel som komplekse rødder. Endvidere er summen af de reelle rødders multiplicitet højst n , mens summen af de komplekse rødders multiplicitet er lig med n .

Vi har tidligere vist at der for enhver lineær afbildning af et n -dimensionalt vektorrum ind i sig selv gælder at summen af de geometriske multipliciteter af egenverdierne for f kan højst kan være n , se sætning 9.11. Bemærk at dette direkte kan udledes af udsagnene om multipliciteter i sætning 9.34.

Som noget nyt interessant påstås det i punkt 3 at den geometriske multiplicitet for en enkelt egenverdi kan være mindre end den algebraiske multiplicitet. Det kommer der eksempel på i det følgende opsamlende eksempel 9.36. Og videre at den geometriske

multiplicitet af en enkelt egen værdi ikke kan være større end den algebraiske. Beviset for punkt 3 i sætning 9.34 udelades.

|||| Eksempel 9.36 Goemetrisk multiplicitet mindre end algebraisk

Givet er matricen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -9 & 10 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & 6 \end{bmatrix} \quad (9-55)$$

Egen værdierne til \mathbf{A} bestemmes:

$$\det \left(\begin{bmatrix} -9-\lambda & 10 & 0 \\ -3 & 1-\lambda & 5 \\ 1 & -4 & 6-\lambda \end{bmatrix} \right) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 7\lambda - 4 = -(\lambda + 4)(\lambda - 1)^2 = 0. \quad (9-56)$$

Af faktoriseringen før sidste lighedstegn fås, at \mathbf{A} har to forskellige egen værdier: $\lambda_1 = -4$ og $\lambda_2 = 1$. Desuden er $\text{am}(-4) = 1$ og $\text{am}(1) = 2$, som det også fremgår af faktoriseringen.

Egenvektorrummet til $\lambda_1 = -4$ bestemmes ved at løse $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} -9-(-4) & 10 & 0 & 0 \\ -3 & 1-(-4) & 5 & 0 \\ 1 & -4 & 6-(-4) & 0 \end{array} \right] \rightarrow \\ & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 10 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (9-57)$$

Der er to ikke-trivielle ligninger: $v_1 - 2v_2 = 0$ og $v_2 - 5v_3 = 0$. Sættes v_3 til den frie parameter ses at samtlige til λ_1 hørende reelle egenvektorer kan angives ved

$$E_{-4} = \{ s \cdot (10, 5, 1) \mid s \in \mathbb{R} \} = \text{span}\{(10, 5, 1)\}. \quad (9-58)$$

Man har at $\text{gm}(-4) = \dim(E_{-4}) = 1$, og at en egenvektor til λ_1 er $\mathbf{v}_1 = (10, 5, 1)$. Det ses at $\text{gm}(-4) = \text{am}(-4)$.

Det tilsvarende gøres for $\lambda_2 = 1$:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} -9-1 & 10 & 0 & 0 \\ -3 & 1-1 & 5 & 0 \\ 1 & -4 & 6-1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \\ & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (9-59)$$

Her er der igen to ikke-trivielle ligninger: $v_1 - v_2 = 0$ og $3v_2 - 5v_3 = 0$. Sættes $v_3 = 3s$ at samtlige til λ_2 hørende reelle egenvektorer kan angives ved

$$E_1 = \{ s \cdot (5, 5, 3) \mid s \in \mathbb{R} \} = \text{span}\{(5, 5, 3)\}. \quad (9-60)$$

Det giver følgende resultater: $\text{gm}(1) = \dim(E_1) = 1$, og at en egenvektor til $\lambda_2 = \lambda_3$ er $\mathbf{v}_2 = (5, 5, 3)$. Desuden ses det, at $\text{gm}(1) < \text{am}(1)$.

9.2.4 Mere om den komplekse problemstilling

Vi vil bruge matricen

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}. \quad (9-61)$$

fra eksempel 9.30 til at præcisere nogle særlige fænomener for kvadratiske, reelle matricer, når deres egenværdiproblem studeres i kompleks ramme.

Vi fandt at \mathbf{B} har egenværdierne, $\lambda_1 = 1 + 2i$ og $\lambda_2 = 1 - 2i$. Der gælder således at egenværdierne er hinandens konjugerede tal. En anden bemærkelsesværdig ting i eksempel 9.30 er at hvor

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 - i \\ 1 \end{bmatrix}$$

er en egenvektor for $\lambda_1 = 1 + 2i$, der er den konjugerede vektor

$$\bar{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 1 + i \\ 1 \end{bmatrix}$$

en egenvektor for $\lambda_2 = 1 - 2i$. Begge dele er eksempler på generelle regler:

|||| Sætning 9.37 Konjugerede egenværdier og egenvektorer

For en kvadratisk, reel matrix \mathbf{A} gælder:

1. Hvis λ er en kompleks egenværdi for \mathbf{A} med rektangulær form $\lambda = a + ib$, så er også $\bar{\lambda} = a - ib$ en egenværdi for \mathbf{A} .
2. Hvis \mathbf{v} er en egenvektor for \mathbf{A} hørende til den komplekse egenværdi λ , så er den konjugerede vektor $\bar{\mathbf{v}}$ en egenvektor for \mathbf{A} hørende til den konjugerede egenværdi $\bar{\lambda}$.

|||| **Bevis**

Første del af sætning 9.37 følger af læren om polynomier. Det karakteriske polynomium for en kvadratisk, reel matrix er et polynomium med reelle koefficienter. Derom vides at rødderne for polynomiet altid optræder i konjugerende par. Anden del af beviset medtages i næste version af denne eNote. ■

Ved *sporet* for en kvadratisk matrix forstås summen af diagonalelementerne. Sporet af **B** er dermed $-1 + 3 = 2$. Læg nu mærke til at summen af egenverdierne for **B** er $(1 - i) + (1 + i) = 2$, altså det samme som sporet af **B**. Også dette er et generelt fænomen, som her anføres uden bevis:

|||| **Sætning 9.38 Sporet**

For en kvadratisk, reel matrix **A** gælder, at sporet af **A**, det vil sige summen af diagonalelementerne i **A** er lig med summen af alle (reelle som komplekse) egenverdier for **A**, idet hver egenverdi indgår i summen det antal gange som svarer til egenverdiens algebraiske multiplicitet.

|||| **Opgave 9.39**

I eksempel 9.31 fandt vi at det karakteristiske polynomium for matricen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 12 \\ 4 & -5 & 4 \\ -4 & -1 & -10 \end{bmatrix}$$

har dobbeltroden -6 og enkeltroden 3 . Eftersom at sætning 9.38 gælder i dette tilfælde.