

# Lista Ejercicios Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

20 de junio de 2024

# Índice general

1. Lista 4
------------

2
---

# Capítulo 1

## Lista 4

### Ejercicio 1.0.1

Haga lo siguiente:

- i. Sea  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ . Defina  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  como:

$$P(x_1, \dots, x_n) = e^{-\sum_{k=1}^n |x_k|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Fije  $\nu \in \mathbb{N}$ , **demuestre** la fórmula:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x) P\left(\frac{x}{\nu}\right) dx = (2\nu)^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{(1 + \nu^2 x_1^2) \cdots (1 + \nu^2 x_n^2)} dx_1 \cdots dx_n$$

- ii. **Deduzca** que si  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \cap \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  y  $\mathcal{F}f \geq 0$ , entonces  $\mathcal{F}f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ .

*Sugerencia.* Aplique el teorema de Beppo-Levi.

### Demostración:

De (i): Defina  $g(x) = P\left(\frac{x}{\nu}\right)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Veamos que  $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ . En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} P\left(\frac{x}{\nu}\right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} P\left(\frac{x_1}{\nu}, \dots, \frac{x_n}{\nu}\right) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{k=1}^n \left|\frac{x_k}{\nu}\right|} dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{\nu} \sum_{k=1}^n |x_k|} dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x_1|}{\nu}} \cdots e^{-\frac{|x_n|}{\nu}} dx_1 \cdots dx_n \\ &= \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x_1|}{\nu}} dx_1\right) \cdots \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x_n|}{\nu}} dx_n\right)}_{n\text{-veces}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|t|}{\nu}} dt\right)^n \\ &< \infty \end{aligned}$$

Usando Fubini para funciones medibles no negativas. Por tanto, por el Teorema de transferencia se sigue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x) P\left(\frac{x}{\nu}\right) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x) g(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \mathcal{F}g(x) dx \end{aligned}$$

Calculemos  $\mathcal{F}g(x)$ . Como  $g(x) = P\left(\frac{x}{\nu}\right)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , entonces

$$\mathcal{F}g(x) = \nu^n \mathcal{F}P(\nu x)$$

(por una proposición), donde

$$\begin{aligned} \mathcal{F}P(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y \rangle} P(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i \sum_{k=1}^n x_k y_k} e^{-\sum_{k=1}^n |y_k|} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{k=1}^n (|y_k| + i x_k y_k)} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y_1| - i x_1 y_1} \cdots e^{-|y_n| - i x_n y_n} dy_1 \cdots dy_n \\ &= \underbrace{\left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y_1| - i x_1 y_1} dy_1 \right) \cdots \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y_n| - i x_n y_n} dy_n \right)}_{n\text{-veces}} \\ &= \underbrace{\left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t| - i x_1 t} dt \right) \cdots \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t| - i x_n t} dt \right)}_{n\text{-veces}} \\ &= \mathcal{F}h(x_1) \cdots \mathcal{F}h(x_n) \end{aligned}$$

donde  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es la función tal que  $t \mapsto e^{-|t|}$  y, se sabe que

$$\mathcal{F}h(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}P(x) &= \frac{2^n}{(1+x_1^2) \cdots (1+x_n^2)} \\ \Rightarrow \mathcal{F}P(\nu x) &= \frac{2^n}{(1+\nu^2 x_1^2) \cdots (1+\nu^2 x_n^2)} \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x) P\left(\frac{x}{\nu}\right) dx &= \nu^n \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \mathcal{F}P(\nu x) dx \\ &= \nu^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2^n f(x_1, \dots, x_n)}{(1+\nu^2 x_1^2) \cdots (1+\nu^2 x_n^2)} dx_1 \cdots dx_n \\ &= (2\nu)^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{(1+\nu^2 x_1^2) \cdots (1+\nu^2 x_n^2)} dx_1 \cdots dx_n \end{aligned}$$

De (ii): Para cada  $\nu \in \mathbb{N}$  defina la función  $g_\nu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  como sigue:

$$g_\nu(x) = \mathcal{F}f(x) P\left(\frac{x}{\nu}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Esta es una sucesión creciente de funciones en  $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ , pues si  $\nu \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\nu+1} \sum_{k=1}^n |x_k| &\leq \frac{1}{\nu} \sum_{k=1}^n |x_k|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\
\Rightarrow -\frac{1}{\nu} \sum_{k=1}^n |x_k| &\leq -\frac{1}{\nu+1} \sum_{k=1}^n |x_k|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\
\Rightarrow e^{\frac{1}{\nu} \sum_{k=1}^n |x_k|} &\leq e^{-\frac{1}{\nu+1} \sum_{k=1}^n |x_k|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\
\Rightarrow P\left(\frac{x}{\nu}\right) &\leq P\left(\frac{x}{\nu+1}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\
\Rightarrow \mathcal{F}f(x)P\left(\frac{x}{\nu}\right) &\leq \mathcal{F}f(x)P\left(\frac{x}{\nu+1}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\
\Rightarrow g_\nu &\leq g_{\nu+1}
\end{aligned}$$

pues,  $\mathcal{F}f \geq 0$ . Además, como  $f \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ , entonces

$$f \leq \mathcal{N}_\infty(f) \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n$$

luego,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} g_\nu(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x)P\left(\frac{x}{\nu}\right) dx \\
&= (2\nu)^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{(1 + \nu^2 x_1^2) \cdots (1 + \nu^2 x_n^2)} dx_1 \cdots dx_n
\end{aligned}$$

Hagamos el cambio de variable  $(y_1, \dots, y_n) = (\frac{x_1}{\nu}, \dots, \frac{x_n}{\nu})$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
(2\nu)^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{(1 + \nu^2 x_1^2) \cdots (1 + \nu^2 x_n^2)} dx_1 \cdots dx_n &= (2\nu)^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\nu y_1, \dots, \nu y_n)}{(1 + y_1^2) \cdots (1 + y_n^2)} \frac{dy_1 \cdots dy_n}{\nu^n} \\
&= 2^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\nu y_1, \dots, \nu y_n)}{(1 + y_1^2) \cdots (1 + y_n^2)} dy_1 \cdots dy_n \\
&= 2^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathcal{N}_\infty(f)}{(1 + y_1^2) \cdots (1 + y_n^2)} dy_1 \cdots dy_n \\
&= 2^n \mathcal{N}_\infty(f) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dy_1 \cdots dy_n}{(1 + y_1^2) \cdots (1 + y_n^2)} \\
\Rightarrow \left| \int_{\mathbb{R}^n} g_\nu(x) \right| &= 2^n \mathcal{N}_\infty(f) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dy_1 \cdots dy_n}{(1 + y_1^2) \cdots (1 + y_n^2)}
\end{aligned}$$

pues  $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dy_1 \cdots dy_n}{(1+y_1^2) \cdots (1+y_n^2)} < \infty$  y  $\int_{\mathbb{R}^n} g_\nu(x) \geq 0$ . Por tanto, por Beppo-Levi se sigue que existe una función  $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  tal que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} g_\nu = g \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n$$

Pero, también se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{\nu \rightarrow \infty} g_\nu(x) &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{F}f(x)P\left(\frac{x}{\nu}\right) \\
&= \mathcal{F}f(x) \lim_{\nu \rightarrow \infty} P\left(\frac{x}{\nu}\right) \\
&= \mathcal{F}f(x)P(0, \dots, 0) \\
&= \mathcal{F}f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

Entonces  $\mathcal{F}f = g$  c.t.p. en  $\mathbb{R}^n$ , luego  $\mathcal{F}f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ . Más aún,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x) dx &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} 2^n \mathcal{N}_\infty(f) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dy_1 \cdots dy_n}{(1 + y_1^2) \cdots (1 + y_n^2)} \\
&= 2^n \mathcal{N}_\infty(f) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dy_1 \cdots dy_n}{(1 + y_1^2) \cdots (1 + y_n^2)}
\end{aligned}$$

**Ejercicio 1.0.2 (Problema 2 Lista 6 Análisis Matemático II)**

Pruebe que si  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ , entonces

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f \right| = \int_{\mathbb{R}^n} |f|$$

si y sólo si existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  fijo tal que  $f = e^{i\alpha} |f|$  c.t.p. en  $\mathbb{R}^n$ .

*Sugerencia.* Suponiendo que  $\left| \int_{\mathbb{R}^n} f \right| = \int_{\mathbb{R}^n} |f|$ , existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $\int_{\mathbb{R}^n} f = e^{i\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f|$ . Escriba

$$e^{-i\alpha} f = g + ih$$

donde  $g$  y  $h$  son funciones reales.

**Demostración:**

**Ejercicio 1.0.3**

Sea  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ . Se supone que  $f(x) > 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . **Pruebe** que si  $x \neq 0$ , entonces

$$\mathcal{F}f(0) > |\mathcal{F}f(x)|$$

*Sugerencia.* Una vez que ha demostrado  $|\mathcal{F}f(x)| \leq \mathcal{F}f(0)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , Para demostrar la desigualdad estricta para  $x \neq 0$  proceda por reducción al absurdo y use el Problema 2 de la Lista 6 de Análisis Matemático II.

**Demostración:**

Notemos que como  $f(x) > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , se tiene en particular que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

Sea  $x \in \mathbb{R}^n$ . Primero probaremos que

$$\mathcal{F}f(0) \geq |\mathcal{F}f(x)|$$

es decir:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle 0|y\rangle} f(y) dy &\geq \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y) dy \right| \\ \iff \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy &\geq \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y) dy \right| \\ \iff \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy &\geq \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y) dy \right| \end{aligned}$$

pues  $f(x) > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Veamos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y) dy \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-i\langle x|y\rangle} f(y)| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-i\langle x|y\rangle}| |f(y)| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy \end{aligned} \tag{1.1}$$

lo que prueba el resultado. Para la desigualdad estricta suponga que existe  $x \in \mathbb{R}^n$  no cero tal que

$$\mathcal{F}f(x) = \mathcal{F}f(0)$$

esto es

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y) dy \right| &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-i\langle x|y\rangle} f(y)| dy \end{aligned}$$

Por el ejercicio anterior existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  fijo tal que

$$e^{-i\langle x|y\rangle} f(y) = e^{i\alpha} |f(y)| = e^{i\alpha} f(y)$$

para casi todo  $y \in \mathbb{R}^n$ . En particular, tenemos que

$$f(y) (e^{-i\langle x|y\rangle} - e^{i\alpha}) = 0$$

para casi todo  $y \in \mathbb{R}^n$ . Como  $f(y) > 0$  para todo  $y \in \mathbb{R}^n$ , entonces

$$e^{-i\langle x|y\rangle} - e^{i\alpha} = 0$$

nuevamente para casi todo  $y \in \mathbb{R}^n$ . Como las dos funciones involucradas son continuas y coinciden c.t.p. en  $\mathbb{R}^n$ , debe tenerse pues que

$$e^{-i\langle x|y\rangle} = e^{i\alpha}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

lo cual ocurre si y sólo si

$$e^{i(\langle x|y\rangle + \alpha)} = 1, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

es decir que

$$\langle x|y\rangle + \alpha = 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

como  $x \neq 0$  en particular se tiene que

$$\langle x|x\rangle = -\alpha$$

y, además (tomando  $y = 2x$ ):

$$2\langle x|x\rangle = -\alpha$$

pero esto sólo puede suceder si  $\langle x|x\rangle = 0$ , es decir que  $x = 0_{\#c}$ . Luego entonces

$$|\mathcal{F}f(x)| < \mathcal{F}f(0)$$

■

#### Ejercicio 1.0.4

Haga lo siguiente:

- Sean  $a > 0$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ . **Pruebe** que la función  $x \mapsto (\cos \lambda x)/(x^2 + a^2)$  es integrable en  $[0, \infty[$ . **Muestre** que si  $\lambda \neq 0$ , la función  $x \mapsto (x \sin \lambda x)/(x^2 + a^2)$  no es integrable en  $[0, \infty[$ , pero existe la integral impropia

$$\int_0^{\rightarrow\infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2} dx$$

*Sugerencia.* Muestre que

$$\left| \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2} \right| \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \left| \frac{\sin \lambda x}{x} \right|$$

Para probar la existencia de la integral impropia use los criterios de Abel.

- Recuerde que la función  $x \mapsto (2a)/(x^2 + a^2)$  es la transformada de Fourier de la función  $x \mapsto e^{-a|x|}$ . Usando el teorema de inversión de Fourier, **demuestre** que

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-a|\lambda|}$$

iii. Usando el inciso (ii), calcule la integral impropia

$$\int_0^{\rightarrow\infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2} dx$$

*Sugerencia.* Para  $\lambda \neq 0$  defina

$$\Phi(\lambda) = \int_0^{\rightarrow\infty} \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} dx$$

**Calcule**  $\Phi'(\lambda)$  primero suponiendo  $\lambda > \lambda_0$ , donde  $\lambda_0 > 0$  es arbitrario fijo, de forma análoga para  $\lambda < 0$  y finalmente para  $\lambda = 0$ .

### Demostración:

De (i): Para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  defina

$$f(x) = \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2}$$

Afirmamos que  $f$  es integrable en  $[0, \infty[$ . Para ello, veamos que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |f| &= \int_0^\infty \frac{|\cos \lambda x|}{x^2 + a^2} dx \\ &\leq \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + a^2} \end{aligned}$$

donde la función de la derecha es integrable en tal intervalo. Por tanto,  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

Sea ahora  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\lambda \neq 0$ . Afirmamos que la función

$$g(x) = \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$  no es integrable en  $[0, \infty[$ . En efecto, veamos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2} \right|}{\left| \frac{\sin \lambda x}{x} \right|} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{x^2}{x^2 + a^2} \right| \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{1 + \frac{a^2}{x^2}} \right| \\ &= \frac{1}{1 + 0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

por tanto,

$$\left| \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2} \right| \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \left| \frac{\sin \lambda x}{x} \right|$$

Luego entonces, por la proposición 8.53 Análisis Matemático II:

$$\left| \frac{\sin \lambda x}{x} \right| \underset{x \rightarrow \infty}{=} O \left( \left| \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2} \right| \right)$$

donde la función  $x \mapsto \left| \frac{\sin \lambda x}{x} \right|$  no es integrable en  $[0, \infty[$ , luego tampoco puede serlo  $g$  (siendo que ambas funciones son integrables en todo subconjunto acotado de  $\mathbb{R}$ ).

Veamos que si existe la integral impropia

$$\int_0^{\rightarrow\infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2}$$



En efecto, defina para cada  $x \in [0, \infty[$  las funciones:

$$G(x) = \int_0^x \sin \lambda x \, dx \quad \text{y} \quad f(x) = \frac{x}{x^2 + a^2}$$

se tienen dos cosas:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  (es claro de la definición de  $f$ ).
- $G$  es una función acotada en  $[0, \infty[$ , pues para cada  $x \in [0, \infty[$ :

$$\begin{aligned} |G(x)| &= \left| \int_0^x \sin \lambda x \, dx \right|, \text{ haciendo el cambio de variable } u = \lambda x \\ &= \left| \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^{\lambda x} \sin u \, du \right| \\ &= \left| \frac{1}{\lambda} \cdot \left[ -\cos u \right]_0^{\lambda x} \right| \\ &= \left| \frac{1}{\lambda} \cdot [-\cos \lambda x + \cos 0] \right| \\ &\leq \frac{2}{|\lambda|} \end{aligned}$$

Por tanto, del primer criterio de Abel se sigue que la integral impropia

$$\int_0^{\rightarrow \infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2}$$

es convergente.

De (ii): Sea  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función dada por

$$h(x) = e^{-a|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

se sabe por un ejercicio de las notas que

$$\mathcal{F}h(x) = \frac{2a}{x^2 + a^2}$$

la función  $h$  cumple la condición de Dini en todo punto  $\lambda \in \mathbb{R} \neq 0$  (también lo hace en cero, pero no es relevante), por lo cual se tiene que

$$h(\lambda) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R e^{i\lambda x} \mathcal{F}h(x) \, dx$$

es decir,

$$\begin{aligned} e^{-a|\lambda|} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R e^{i\lambda x} \mathcal{F}h(x) \, dx \\ &= \frac{2a}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \int_{-R}^R \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx + i \int_{-R}^R \frac{\sin \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx \right] \\ &= \frac{a}{\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \int_{-R}^0 \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx + \int_0^R \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx + i \int_{-R}^0 \frac{\sin \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx + i \int_0^R \frac{\sin \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx \right] \\ &= \frac{a}{\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \int_0^R \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx + \int_0^R \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx - i \int_0^R \frac{\sin \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx + i \int_0^R \frac{\sin \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx \right] \\ &= \frac{2a}{\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx \\ &= \frac{2a}{\pi} \int_0^{\rightarrow \infty} \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx \end{aligned}$$

pero, de (i) se sabe que  $x \mapsto \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2}$  es integrable en  $[0, \infty[$ , por tanto coincide su valor con el de la integral impropia, así:

$$\begin{aligned} e^{-a|\lambda|} &= \frac{2a}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} dx \\ \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} dx &= \frac{\pi}{2a} e^{-a|\lambda|} \end{aligned}$$

De (iii): Por la parte anterior, para todo  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tiene que

$$\Phi(\lambda) = \int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-a|\lambda|} = \frac{\pi}{2a} e^{-a|\lambda|}$$

Si todo funciona bien, por el Teorema de derivación para funciones definidas por integrales impropias, se tendría para  $\lambda > 0$ :

$$\begin{aligned} - \int_0^{\rightarrow \infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2} dx &= \Phi'(\lambda) \\ &= -\frac{\pi}{2} e^{-a\lambda} \\ &= -\frac{\pi}{2} e^{-a|\lambda|} \\ \Rightarrow \int_0^{\rightarrow \infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2} dx &= \frac{\pi}{2} e^{-a|\lambda|} \end{aligned}$$

y, para  $\lambda < 0$ :

$$\begin{aligned} - \int_0^{\rightarrow \infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2} dx &= \Phi'(\lambda) \\ &= \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\pi}{2a} e^{-a(-\lambda)} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} e^{a\lambda} \\ &= \frac{\pi}{2} e^{-a|\lambda|} \\ \Rightarrow \int_0^{\rightarrow \infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2} dx &= -\frac{\pi}{2} e^{-a|\lambda|} \end{aligned}$$

es decir que

$$\int_0^{\rightarrow \infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2} dx = \text{Sgn}(\lambda) \cdot \frac{\pi}{2} e^{-a|\lambda|}$$

■

### Ejercicio 1.0.5

Sea  $H$  una matriz simétrica real  $n \times n$  positiva definida, es decir, la forma cuadrática  $\langle x | Hx \rangle$  sobre  $\mathbb{R}^n$  es positiva definida. Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  la función

$$f(x) = e^{-\langle Hx | x \rangle}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

**Demuestre** que  $f$  es integrable y que

$$\mathcal{F}f(x) = \frac{\pi^{n/2}}{(\det H)^{1/2}} e^{-\frac{1}{4} \langle H^{-1}x | x \rangle}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

*Sugerencia.*  $f$  es medible. Para ver que es integrable, pruebe que  $\langle Hx | x \rangle \geq m \|x\|^2$ , donde

$$m = \min_{x \in S} \{ \langle Hx | x \rangle \} > 0$$

con  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ . Se sabe de álgebra que existe una matriz ortogonal  $U$  tal que  $U^{-1}HU = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , donde  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  son números estrictamente positivos. En la integral  $\mathcal{F}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} e^{-\langle Hy|y\rangle} dy$  haga el cambio de variable  $y = Uz$  siendo tal que  $|\det U| = 1$ ,  $\langle Ur|Us\rangle = \langle r|s\rangle$  (y lo análogo para  $U^{-1}$ ) y observe que  $(1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_n) = U^{-1}H^{-1}U$ .

### Demostración:

Veamos que  $f$  es medible (más aún, es continua). En efecto, considere la matriz  $H$  dada por

$$H = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \dots & h_{1,n-1} & h_{1,n} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \dots & h_{2,n-1} & h_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{n,1} & h_{n,2} & \dots & h_{n,n-1} & h_{n,n} \end{bmatrix}$$

Se tiene entonces que para cada  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned} \langle Hx|x\rangle &= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^n y_k x_k \end{aligned}$$

donde

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \dots & h_{1,n-1} & h_{1,n} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \dots & h_{2,n-1} & h_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{n,1} & h_{n,2} & \dots & h_{n,n-1} & h_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

es decir que

$$y_k = \sum_{i=1}^n h_{k,i} x_i$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \langle Hx|x\rangle &= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^n h_{k,i} x_i \right) x_k \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n x_k x_i h_{k,i} \end{aligned}$$

siendo la aplicación  $x \mapsto \langle Hx|x\rangle$  una aplicación polinomial de  $n$ -variables, luego es continua. Así, la composición con  $t \mapsto e^{-t}$  es continua, es decir que la función  $f$  es continua en  $\mathbb{R}^n$ , luego medible.

Ahora, sea ahora

$$m = \inf_{x \in S} \{\langle Hx|x\rangle\}$$

donde  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ . Afirmamos que  $m > 0$ . En el caso que  $m = 0$ , como la función  $x \mapsto \langle Hx|x\rangle$  es continua de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}$ , se tendría que alcanzaría su máximo y mínimo en el compacto  $S$ , luego existiría  $x_0 \in S$  tal que

$$\langle Hx_0|x_0\rangle = 0$$

lo cual contradeciría el hecho de que  $H$  es positiva definida. Por tanto,  $m > 0$ . Más aún,

$$m = \inf_{x \in S} \{\langle Hx|x\rangle\} = \min_{x \in S} \{\langle Hx|x\rangle\}$$

Sea  $x \in \mathbb{R}^n$  no cero, se tiene que

$$\begin{aligned}\langle Hx|x \rangle &= \langle H \left( \|x\| \cdot \frac{x}{\|x\|} \right) \|x\| \cdot \frac{x}{\|x\|} \rangle \\ &= \|x\|^2 \langle H \left( \frac{x}{\|x\|} \right) | \frac{x}{\|x\|} \rangle \\ &\geq m\|x\|^2 \\ \Rightarrow -\langle Hx|x \rangle &\leq -m\|x\|^2\end{aligned}$$

Considere la función  $x \mapsto e^{-m\|x\|^2}$  de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}$ . Se tiene que

$$0 \leq f(x) = e^{-m\langle Hx|x \rangle} \leq e^{-m\|x\|^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

siendo  $x \mapsto e^{-m\|x\|^2}$  integrable en  $\mathbb{R}^n$ , luego  $f$  lo es en  $\mathbb{R}^n$ . Así, la transformada de Fourier  $\mathcal{F}f$  está definida en todo  $\mathbb{R}^n$ .

Sea  $x \in \mathbb{R}^n$ , entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{F}f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y \rangle} f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y \rangle} \cdot e^{-\langle Hy|y \rangle} dy\end{aligned}$$

Se sabe por un resultado de álgebra lineal que existen una matriz  $D$   $n \times n$  diagonal con entradas en la diagonal positivas, y una matriz ortogonal  $U$  (también  $n \times n$ ) con  $|\det U| = 1$  tal que

$$U^{-1}HU = D \Rightarrow HU = UD$$

siendo

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Hagáse el cambio de variable  $y = Uz$ , se tiene en la integral anterior que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y \rangle} \cdot e^{-\langle Hy|y \rangle} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|Uz \rangle} \cdot e^{-\langle HUZ|Uz \rangle} dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|Uz \rangle} \cdot e^{-\langle U Dz|Uz \rangle} dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|Uz \rangle} \cdot e^{-\langle Dz|z \rangle} dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle U^{-1}x|U^{-1}Uz \rangle} \cdot e^{-\langle Dz|z \rangle} dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle U^{-1}x|z \rangle} \cdot e^{-\langle Dz|z \rangle} dz\end{aligned}$$

considere la función  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $x \mapsto e^{-\langle Dz|z \rangle}$  (esta función es integrable pues los elementos de la matriz diagonal  $D$  son números positivos), por lo anterior se tiene que

$$\mathcal{F}f(x) = \mathcal{F}g(U^{-1}x)$$

donde

$$\begin{aligned}\mathcal{F}g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|z\rangle} g(z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|z\rangle} \cdot e^{-\langle Dz|z\rangle} dz\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}Dz &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 z_1 \\ \lambda_2 z_2 \\ \vdots \\ \lambda_n z_n \end{bmatrix}\end{aligned}$$

por tanto

$$\langle Dz|z\rangle = \lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_n z_n^2$$

luego, usando Fubini se sigue que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\sum_{k=1}^n x_k z_k - \sum_{k=1}^n \lambda_k z_k^2} dz_1 \dots dz_n \\ &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_1 z_1 - \lambda_1 z_1^2} dz_1 \right) \dots \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_n z_n - \lambda_n z_n^2} dz_n \right) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathcal{F}g_i(x_i)\end{aligned}$$

donde

$$g_i(u) = e^{-\lambda_i u^2}, \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

para cada  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Se sabe por un ejercicio de las notas que

$$\mathcal{F}g_i(x_i) = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_i}} e^{-\frac{x_i^2}{4\lambda_i}}, \quad \forall x_i \in \mathbb{R}$$

para todo  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Por tanto:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}g(x) &= \prod_{i=1}^n \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_i}} e^{-\frac{x_i^2}{4\lambda_i}} \\ &= \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\lambda_1 \dots \lambda_n}} e^{-\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{\lambda_k}}\end{aligned}$$

recordemos que

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\lambda_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

y,

$$\det H = \det(UDU^{-1}) = \det U \cdot \det D \cdot \det U^{-1} = \lambda_1 \dots \lambda_n$$

por ende

$$\langle D^{-1}x|x\rangle = \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{\lambda_k}$$

así,

$$\mathcal{F}g(x) = \frac{\pi^{n/2}}{(\det H)^{1/2}} e^{-\frac{1}{4}\langle D^{-1}x|x\rangle}$$

Por lo tanto, recordando que

$$\begin{aligned} U^{-1}HU &= D \Rightarrow U^{-1}H^{-1}U = D^{-1} \\ &\Rightarrow U^{-1}H^{-1} = D^{-1}U^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f(x) &= \mathcal{F}g(U^{-1}x) \\ &= \frac{\pi^{n/2}}{(\det H)^{1/2}} e^{-\frac{1}{4}\langle D^{-1}U^{-1}x|U^{-1}x\rangle} \\ &= \frac{\pi^{n/2}}{(\det H)^{1/2}} e^{-\frac{1}{4}\langle U^{-1}H^{-1}x|U^{-1}x\rangle} \\ &= \frac{\pi^{n/2}}{(\det H)^{1/2}} e^{-\frac{1}{4}\langle H^{-1}x|x\rangle} \\ \Rightarrow \mathcal{F}f(x) &= \frac{\pi^{n/2}}{(\det H)^{1/2}} e^{-\frac{1}{4}\langle H^{-1}x|x\rangle} \end{aligned}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , como se quería demostrar. ■

### Ejercicio 1.0.6

Recuerde que si  $f = \chi_{[-a,a]}$ , entonces

$$\mathcal{F}f(x) = \frac{2 \sin ax}{x}, \quad \forall x \neq 0$$

**Deduzca** la fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin ax}{x} \right)^2 dx = \pi a$$

### Demostración:

Notemos que  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \cap \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ , por lo cual

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2 f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \mathcal{F}f(x) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \cdot \frac{2 \sin ax}{x} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin ax}{x} \end{aligned}$$

así, por la identidad de Parseval se cumple

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}_2 f)^2(x) dx &= \langle \mathcal{F}_2 f | \mathcal{F}_2 f \rangle \\
 &= \langle f | f \rangle \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-a,a]}(x) dx \\
 &= 2a \\
 \Rightarrow \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin ax}{x} \right)^2 dx &= 2a \\
 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin ax}{x} \right)^2 dx &= \pi a
 \end{aligned}$$

■

### Ejercicio 1.0.7

Haga lo siguiente:

- i. Sea  $f(x) = \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) \chi_{[-a,a]}(x)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . **Pruebe** que

$$\mathcal{F}f(x) = a \left( \frac{\sin \frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}} \right)^2$$

- ii. Usando  $\mathcal{F}_2 f$  **muestre** la fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin ax}{x} \right)^4 dx = \frac{2}{3} \pi a^3$$

- iii. **Calcule** la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin ax}{x} \right)^3 dx$$

*Sugerencia.* Escriba  $f(x) = \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) \chi_{[-a,a]}(x)$  y  $g(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Aplique la identidad de Parseval

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_2 f \mathcal{F}_2 g = \langle \mathcal{F}_2 f | \mathcal{F}_2 g \rangle = \langle f | g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f g$$

para deducir el resultado.

**Solución:**

De (i): Sea  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , tenemos que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} f(y) dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} \left(1 - \frac{|y|}{a}\right) \chi_{[-a,a]}(y) dy \\
 &= \int_{-a}^a e^{-ixy} \left(1 - \frac{|y|}{a}\right) dy \\
 &= \int_{-a}^0 e^{-ixy} \left(1 - \frac{|y|}{a}\right) dy + \int_0^a e^{-ixy} \left(1 - \frac{|y|}{a}\right) dy \\
 &= \int_{-a}^0 e^{-ixy} \left(1 + \frac{y}{a}\right) dy + \int_0^a e^{-ixy} \left(1 - \frac{y}{a}\right) dy \\
 &= - \int_a^0 e^{ixu} \left(1 - \frac{u}{a}\right) du + \int_0^a e^{-ixy} \left(1 - \frac{y}{a}\right) dy \\
 &= \int_0^a e^{ixy} \left(1 - \frac{y}{a}\right) dy + \int_0^a e^{-ixy} \left(1 - \frac{y}{a}\right) dy \\
 &= \int_0^a (e^{ixy} + e^{-ixy}) \cdot \left(1 - \frac{y}{a}\right) dy \\
 &= 2 \int_0^a \left(1 - \frac{y}{a}\right) \cos xy dy \\
 &= 2 \left[ \int_0^a \cos xy dy - \frac{1}{a} \int_0^a y \cos xy dy \right]
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \int_0^a \cos xy dy &= \frac{1}{x} \int_0^{ax} \cos u du \\
 &= \frac{1}{x} \sin u \Big|_0^{ax} \\
 &= \frac{\sin ax}{x}
 \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}
 \int_0^a y \cos xy dy &= \int_0^{ax} \frac{u}{x} \cos u \frac{du}{x} \\
 &= \frac{1}{x^2} \int_0^{ax} u \cos u du \\
 &= \frac{1}{x^2} [ax \sin ax + \cos ax - 1]
 \end{aligned}$$



Por tanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f(x) &= 2 \left[ \int_0^a \cos xy \, dy - \frac{1}{a} \int_0^a y \cos xy \, dy \right] \\
&= 2 \left[ \frac{\sin ax}{x} - \frac{ax \sin ax}{ax^2} - \frac{\cos ax}{ax^2} + \frac{1}{ax^2} \right] \\
&= 2 \left[ \frac{\sin ax}{x} - \frac{\sin ax}{x} + \frac{1 - \cos ax}{ax^2} \right] \\
&= \frac{1 - \cos ax}{\frac{ax^2}{2}} \\
&= a \cdot \frac{2 \sin^2 \left( \frac{ax}{2} \right)}{\frac{a^2 x^2}{2}} \\
&= a \cdot \frac{\sin^2 \frac{ax}{2}}{\frac{a^2 x^2}{4}} \\
&= a \cdot \left( \frac{\sin \frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}} \right)^2
\end{aligned}$$

De (ii): Notemos que  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , por lo cual

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_2 f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}f(x) \\
&= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left( \frac{\sin \frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}} \right)^2
\end{aligned}$$

por lo cual, usando la identidad de Parseval se sigue que

$$\begin{aligned}
\frac{a^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin \frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}} \right)^4 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \right)^2 \left( \frac{\sin \frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}} \right)^4 dx \\
&= \langle \mathcal{F}_2 f | \mathcal{F}_2 f \rangle \\
&= \langle f | f \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left( 1 - \frac{|x|}{a} \right)^2 \chi_{[-a, a]}(x) \, dx \\
&= \int_{-a}^a \left( \frac{a - |x|}{a} \right)^2 dx \\
&= 2 \int_0^a \left( \frac{a - x}{a} \right)^2 dx
\end{aligned}$$

cambiamos de variable la primera integral, haciendo  $u = \frac{x}{2} \Rightarrow 2du = dx$ , por tanto:

$$\begin{aligned}
\frac{a^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin \frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}} \right)^4 dx &= \frac{a^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin ax}{ax} \right)^4 dx \\
&= \frac{1}{a^2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin ax}{x} \right)^4 dx
\end{aligned}$$

y, haciendo el cambio de variable en la última integral a  $y = a - x \Rightarrow dy = -dx$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^a \left( \frac{a-x}{a} \right)^2 dx &= - \int_a^0 \frac{y^2}{a^2} dy \\ &= \frac{1}{a^2} \int_0^a y^2 dy \\ &= \frac{1}{a^2} \left[ \frac{y^3}{3} \right]_0^a \\ &= \frac{a^3}{3a^2} \\ &= \frac{a}{3} \end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2 \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin ax}{x} \right)^4 dx &= \frac{2a}{3} \\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin ax}{x} \right)^4 dx &= \frac{2}{3} \pi a^3 \end{aligned}$$

De (iii): Sea  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función  $g = \chi_{[-a,a]}$ . Se sabe por el inciso anterior que

$$\mathcal{F}_2 g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ax}{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

y, del inciso (i) y considere la función  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $h(x) = f(2x) = f\left(\frac{x}{\frac{1}{2}}\right)$ . Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2 f(2x) &= \frac{1}{2} \mathcal{F}_2 f(x) \\ \Rightarrow 2 \mathcal{F}_2 f(2x) &= \mathcal{F}_2 f(x) \\ \Rightarrow 2 \mathcal{F}_2 h(x) &= \mathcal{F}_2 f(x) \end{aligned}$$

Notemos además que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}_2 f | \mathcal{F}_2 g \rangle &= 2 \langle \mathcal{F}_2 h | \mathcal{F}_2 g \rangle \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_2 h(x) \mathcal{F}_2 g(x) dx \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_2 f(2x) \mathcal{F}_2 g(x) dx \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\sin \frac{2ax}{2}}{\frac{2ax}{2}} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ax}{x} dx \\ &= \frac{2}{\pi a} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin ax}{x} \right)^3 dx \end{aligned}$$

y, por la identidad de Parseval

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}_2 f | \mathcal{F}_2 g \rangle &= \langle f | g \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x) dx \\
&= \int_{-a}^a \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) dx \\
&= 2 \int_0^a \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) dx \\
&= 2 \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right) dx \\
&= 2 \left[ x - \frac{x^2}{2a} \right]_0^a \\
&= 2 \left[ a - \frac{a^2}{2a} \right] \\
&= 2 \left[ \frac{a}{2} \right] \\
&= a
\end{aligned}$$

Por ende,

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\pi a} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin ax}{x} \right)^3 dx &= a \\
\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin ax}{x} \right)^3 dx &= \frac{\pi a}{2}
\end{aligned}$$

(falta multiplicar por un factor de 2/3 según Wolfram). □

### Ejercicio 1.0.8

Sea  $n \geq 2$  y  $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  la función  $x \mapsto r(x) = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ . Sea  $f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{C}$  una función tal que  $f \circ r$  es integrable en  $\mathbb{R}^n$ .

- i. **Pruebe** que la transformada de Fourier  $\mathcal{F}(f \circ r)$  es una función radial.

*Sugerencia.* Si  $U$  es una matriz ortogonal  $n \times n$ , se tiene que  $\mathcal{F}(f \circ r)(Ux) = \mathcal{F}(f \circ r)(x)$ . Dados  $x, y \in \mathbb{R}^n$  tales que  $\|x\| = \|y\|$ , siempre existe una matriz ortogonal  $U$  tal que  $Ux = y$ .

- ii. **Muestre** que se cumple la **fórmula de Bochner**

$$\mathcal{F}(f \circ r)(x) = 2(n-1)\omega_{n-1} \int_0^\infty v_n(u\|x\|)f(u)u^{n-1} du, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

donde  $\omega_{n-1}$  es el volumen de la bola euclídeana de radio uno en  $\mathbb{R}^{n-1}$  y  $v_n$  se define por la fórmula

$$v_n(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t \cos \theta) \sin^{n-2} \theta d\theta$$

*Sugerencia.* Según el inciso (i),

$$\mathcal{F}(f \circ r)(x) = \mathcal{F}(f \circ r)(\|x\|, 0, \dots, 0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\|y\|) e^{-i\|x\|y_1} dy_1 \cdots dy_n$$

Transforme esta integral por el Teorema de Fubini y exprese la integral con respecto a  $y_2, \dots, y_n$  como una integral simple. La doble integral resultante se transforma a coordenadas polares.

**Solución:**

De (i): Ya se sabe que  $f \circ r$  es una función radial (de la definición es claro este hecho). Como  $f \circ r$  es integrable en  $\mathbb{R}^n$ , entonces la transformada de Fourier de  $f \circ r$  está definida para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Sean  $x, y \in \mathbb{R}^n$  tales que  $\|x\| = \|y\|$ . Para probar que  $\mathcal{F}(f \circ r)$  es una función radial, basta con ver que

$$\mathcal{F}(f \circ r)(x) = \mathcal{F}(f \circ r)(y)$$

En efecto, como  $\|x\| = \|y\|$  por álgebra lineal se sabe que existe una matriz ortogonal  $n \times n$  con determinante 1 tal que  $x = Uy$ . Por lo cual, por el teorema de cambio de variable haciendo  $z = Uw$ , se sigue que:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f \circ r)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|z \rangle} f \circ r(z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|Uw \rangle} f \circ r(Uw) dw \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle UU^{-1}x|Uw \rangle} f \circ r(w) dw \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle y|w \rangle} f \circ r(w) dw \\ &= \mathcal{F}(f \circ r)(y) \end{aligned}$$

por tanto,  $\mathcal{F}(f \circ r)$  es una función radial.

De (ii): Sea  $x \in \mathbb{R}^n$ , veamos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f \circ r)(x) &= \mathcal{F}(f \circ r)(\|x\|, 0, \dots, 0) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle (\|x\|, 0, \dots, 0) | (y_1, \dots, y_n) \rangle} f \circ r(y_1, \dots, y_n) dy_1 \cdots dy_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\|x\|y_1} f(\|y\|) dy_1 \cdots dy_n \end{aligned}$$

Cambiando a coordenadas polares, resulta que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f \circ r)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\|x\|y_1} f(\|y\|) dy_1 \cdots dy_n \\ &= \int_{\Omega} e^{-i\|x\|\rho \cos \varphi_1} f(\rho) \rho^{n-1} \sin^{n-2} \varphi_1 \cdots \sin \varphi_{n-2} d\rho d\varphi_1 \cdots d\varphi_{n-1} \end{aligned}$$

donde

$$\Omega = \left\{ (\rho, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \mid \rho \geq 0, 0 \leq \varphi_1, \dots, \varphi_{n-2} \leq \pi, -\pi \leq \varphi_{n-1} \leq \pi \right\}$$

Por Fubini se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f \circ r)(x) &= \int_{\Omega} e^{-i\|x\|\rho \cos \varphi_1} f(\rho) \rho^{n-1} \sin^{n-2} \varphi_1 \cdots \sin \varphi_{n-2} d\rho d\varphi_1 \cdots d\varphi_{n-1} \\ &= \int_0^\infty \rho^{n-1} f(\rho) d\rho \int_0^\pi e^{-i\|x\|\rho \cos \varphi_1} \sin^{n-2} \varphi_1 d\varphi_1 \int_{\Omega'} \sin^{n-3} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2} d\varphi_2 \cdots d\varphi_{n-1} \end{aligned}$$

donde

$$\Omega' = \left\{ (\varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-2} \mid 0 \leq \varphi_2, \dots, \varphi_{n-2} \leq \pi, -\pi \leq \varphi_{n-1} \leq \pi \right\}$$

Pero, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega'} \sin^{n-3} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2} d\varphi_2 \cdots d\varphi_{n-1} &= (1-0) \int_{\Omega'} \sin^{(n-1)-2} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2} d\varphi_2 \cdots d\varphi_{n-1} \\
&= (n-1) \left( \frac{\rho^{n-1}}{n-1} \Big|_0^1 \right) \int_{\Omega'} \sin^{(n-1)-2} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2} d\varphi_2 \cdots d\varphi_{n-1} \\
&= (n-1) \left( \int_0^1 \rho^{n-2} d\rho \right) \int_{\Omega'} \sin^{(n-1)-2} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2} d\varphi_2 \cdots d\varphi_{n-1} \\
&= (n-1) \int_0^1 \rho^{n-2} d\rho \int_{\Omega'} \sin^{(n-1)-2} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2} d\varphi_2 \cdots d\varphi_{n-1}
\end{aligned}$$

donde

$$\omega_{n-1} = \int_0^1 \rho^{n-2} d\rho \int_{\Omega'} \sin^{(n-1)-2} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2} d\varphi_2 \cdots d\varphi_{n-1}$$

es el volumen de la  $n-1$  esfera en  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Por tanto:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f \circ r)(x) &= \int_0^\infty \rho^{n-1} f(\rho) d\rho \int_0^\pi e^{-i\|x\|\rho \cos \varphi_1} \sin^{n-2} \varphi_1 d\varphi_1 \int_{\Omega'} \sin^{n-3} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2} d\varphi_2 \cdots d\varphi_{n-1} \\
&= (n-1)\omega_{n-1} \int_0^\infty \rho^{n-1} f(\rho) d\rho \int_0^\pi e^{-i\|x\|\rho \cos \varphi_1} \sin^{n-2} \varphi_1 d\varphi_1 \\
&= (n-1)\omega_{n-1} \int_0^\infty u^{n-1} f(u) du \int_0^\pi e^{-i\|x\|u \cos \phi} \sin^{n-2} \phi d\phi
\end{aligned}$$

y, para  $u \in [0, \infty[$ :

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi e^{-i\|x\|u \cos \phi} \sin^{n-2} \phi d\phi &= \int_0^\pi (\cos(\|x\|u \cos \phi) - i \sin(\|x\|u \cos \phi)) \sin^{n-2} \phi d\phi \\
&= \int_0^\pi \cos(\|x\|u \cos \phi) \sin^{n-2} \phi d\phi - i \int_0^\pi \sin(\|x\|u \cos \phi) \sin^{n-2} \phi d\phi
\end{aligned}$$

Analicemos ambas integrables. Sea  $u \in [0, \infty[$ :

■ Afirmamos que

$$\int_0^\pi \cos(\|x\|u \cos \phi) \sin^{n-2} \phi d\phi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\|x\|u \cos \theta) \sin^{n-2} \theta d\theta$$

■ Afirmamos que

$$\int_0^\pi \sin(\|x\|u \cos \phi) \sin^{n-2} \phi d\phi = 0$$

Por los dos incisos anteriores, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f \circ r)(x) &= (n-1)\omega_{n-1} \int_0^\infty u^{n-1} f(u) du \int_0^\pi e^{-i\|x\|u \cos \phi} \sin^{n-2} \phi d\phi \\
&= 2(n-1)\omega_{n-1} \int_0^\infty u^{n-1} f(u) du \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\|x\|u \cos \theta) \sin^{n-2} \theta d\theta \\
&= 2(n-1)\omega_{n-1} \int_0^\infty v_n(u\|x\|) f(u) u^{n-1} du
\end{aligned}$$

donde

$$v_n(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t \cos \theta) \sin^{n-2} \theta d\theta, \quad \forall t \in [0, \infty[$$

□

**Ejercicio 1.0.9**

Haga lo siguiente:

- i. Sea  $h : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{C}$  una función integrable en  $[0, \infty[$ . Sea  $a > 0$ , **demuestre** que existe la integral impropia

$$\int_a^{\rightarrow \infty} \frac{dx}{x} \int_0^\infty h(y) \sin xy \, dy$$

*Sugerencia.* Justifique la inversión del orden de las integraciones.

- ii. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{si } |x| < e \\ \frac{\text{sgn}(x)}{\log|x|} & \text{si } |x| \geq e \end{cases}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Muestre que, para  $a > 0$  no existe la integral impropia

$$\int_a^{\rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \, dx$$

De este hecho y del inciso (i) **deduzca** que no existe  $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  tal que  $f = \mathcal{F}g$ . Así pues, la transformación de Fourier no es una aplicación suprayectiva de  $L_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  en  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

**Solución:**

De (i): Considere la función  $f : [a, \infty[ \times [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$f(x, y) = \frac{h(y) \sin xy}{x}, \quad \forall (x, y) \in [a, \infty[ \times [0, \infty[$$

Veamos que se cumplen tres condiciones:

- $\forall \beta \in [a, \infty]$ ,  $f$  es integrable en  $[a, \beta] \times [0, \infty[$ , pues

$$\begin{aligned} |f(x, y)| &= \left| \frac{h(y) \sin xy}{x} \right| \\ &\leq \frac{1}{a} |h(y)| \cdot |\sin xy| \\ &\leq \frac{1}{a} |h(y)|, \quad \forall (x, y) \in [a, \beta] \times [0, \infty[ \end{aligned}$$

donde la función  $(x, y) \mapsto \frac{1}{a} |h(y)|$  es integrable en  $[a, \beta] \times [0, \infty[$  ya que  $h$  es integrable y  $[a, \beta]$  es un conjunto de medida finita.

- Sea  $y \in [0, \infty[$ . Afirmamos que la integral impropia

$$\int_a^{\rightarrow \infty} f(x, y) \, dx$$

es convergente. En efecto, si  $y = 0$  el resultado se tiene pues  $f(x, 0) = 0$  para todo  $x \in [a, \infty[$ .

Para  $M > a$  y  $y > 0$  tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_a^M f(x, y) dx &= \int_a^M \frac{h(y) \sin xy}{x} dx \\
&= h(y) \int_a^M \frac{\sin xy}{x} dx, \text{ haciendo el cambio de variable } u = xy \\
&= h(y) \int_{ay}^{My} \frac{\sin u}{\frac{u}{y}} \frac{du}{y} \\
&= h(y) \int_{ay}^{My} \frac{\sin u}{u} du
\end{aligned}$$

como la integral impropia

$$\int_0^{\rightarrow\infty} \frac{\sin u}{u} du$$

es convergente, en particular lo es

$$\int_a^{\rightarrow\infty} \frac{\sin u}{u} du$$

se sigue que también lo es  $\int_a^{\rightarrow\infty} f(x, y) dx$ .

- Tomemos  $\beta_0 > a$ , se tiene que para todo  $\beta > \beta_0$ :

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^\beta f(x, y) dx \right| &\leq \left| \int_a^\beta \frac{h(y) \sin xy}{x} dx \right| \\
&\leq \left| h(y) \int_{ya}^{y\beta} \frac{\sin u}{u} du \right| \\
&\leq |h(y)| \left| \int_{ya}^{y\beta} \frac{\sin u}{u} du \right|
\end{aligned}$$

como

$$\int_{ya}^{\rightarrow\infty} \frac{\sin u}{u} du$$

es convergente para todo  $y > 0$ , entonces para  $\varepsilon = 1$  existe  $M > a$  tal que

$$\left| \int_{ya}^{yM} \frac{\sin u}{u} du - \frac{\pi}{2} \right| < 1 \Rightarrow \left| \int_{ya}^{yM} \frac{\sin u}{u} du \right| < 1 + \frac{\pi}{2}$$

Luego, si  $\beta_0 = M$ , tenemos que

$$\beta > \beta_0 \Rightarrow \left| \int_a^\beta f(x, y) dx \right| < \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) |h(y)|$$

para todo  $y \in [0, \infty[$  (en particular cuando  $y = 0$ , el valor de la integral de la derecha es cero), donde la función de la derecha es integrable en  $[0, \infty[$ .

Por el teorema de intercambio de integrales impropias, se sigue que

$$\begin{aligned}
\int_a^{\rightarrow\infty} \frac{dx}{x} \int_0^\infty h(y) \sin xy dy &= \int_a^{\rightarrow\infty} dx \int_0^\infty \frac{h(y) \sin xy}{x} dy \\
&= \int_0^\infty dy \int_a^{\rightarrow\infty} \frac{h(y) \sin xy}{x} dx \\
&= \int_0^\infty h(y) dy \int_{ya}^{\rightarrow\infty} \frac{\sin u}{u} du \\
\Rightarrow \left| \int_a^{\rightarrow\infty} \frac{dx}{x} \int_0^\infty h(y) \sin xy dy \right| &\leq \int_0^\infty \left| h(y) dy \int_{ya}^{\rightarrow\infty} \frac{\sin u}{u} du \right| \\
&= \int_0^\infty |h(y)| \left| \int_{ya}^{\rightarrow\infty} \frac{\sin u}{u} du \right| dy
\end{aligned}$$

Donde la función

$$y \mapsto \int_{ya}^{\rightarrow \infty} \frac{\sin y}{u} du, \quad \forall y \in [0, \infty[$$

es acotada (*probar*). Luego, se sigue que existe la integral impropia:

$$\int_a^{\rightarrow \infty} \frac{dx}{x} \int_0^\infty h(y) \sin xy dy$$

De (ii): Sea  $a > 0$ . Veamos primero que la función  $x \mapsto f(x)$  es continua en  $\mathbb{R}$ , más aún, se tiene que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

(es inmediato de la definición de  $f$ ), por lo cual  $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . Por esta razón, basta con analizar el caso en que  $a \geq e$ . Veamos que para  $M > a$

$$\begin{aligned} \int_a^M \frac{f(x)}{x} dx &= \int_a^M \frac{dx}{x \log x}, \text{ haciendo el cambio de variable } u = \log x \Rightarrow dx = x du \\ &= \int_{\log a}^{\log M} \frac{du}{u} \\ &= \log |u| \Big|_{\log a}^{\log M} \\ &= \log |\log M| - \log |\log a| \end{aligned}$$

por tanto,

$$\int_a^{\rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M \frac{f(x)}{x} dx = \infty$$

Ahora, suponga que existe  $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  tal que

$$f = \mathcal{F}g$$

Entonces,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} g(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \cos xy dy + i \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \sin xy dy \end{aligned}$$

en particular, para  $x \neq 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(y) \cos xy}{x} dy + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(y) \sin xy}{x} dy \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{g(y) \cos xy}{x} dy + \int_0^{\infty} \frac{g(y) \cos xy}{x} dy + i \left( \int_{-\infty}^0 \frac{g(y) \sin xy}{x} dy + \int_0^{\infty} \frac{g(y) \sin xy}{x} dy \right) \\ &= \int_0^{\infty} \frac{g(-y) \cos -xy}{x} dy + \int_0^{\infty} \frac{g(y) \cos xy}{x} dy + i \left( \int_0^{\infty} \frac{g(-y) \sin -xy}{x} dy + \int_0^{\infty} \frac{g(y) \sin xy}{x} dy \right) \end{aligned}$$

veamos que  $g$  impar casi en todo  $\mathbb{R}$ . Se tiene que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} g(y) dy &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} g(y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} g(y) dy &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} g(-y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} [g(y) - g(-y)] dy &= 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$



en particular, se cumple para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . Como el sistema  $\{e^{-ixk}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  es total en  $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , debe suceder que  $g(y) - g(-y) = 0$  para casi todo  $y \in \mathbb{R}$ . Por tanto,  $g$  es impar c.t.p. en  $\mathbb{R}$ . Luego,

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \int_0^\infty \frac{g(-y) \cos -xy}{x} dy + \int_0^\infty \frac{g(y) \cos xy}{x} dy + i \left( \int_0^\infty \frac{g(-y) \sin -xy}{x} dy + \int_0^\infty \frac{g(y) \sin xy}{x} dy \right) \\ &= - \int_0^\infty \frac{g(y) \cos xy}{x} dy + \int_0^\infty \frac{g(y) \cos xy}{x} dy + i \left( \int_0^\infty \frac{g(y) \sin xy}{x} dy + \int_0^\infty \frac{g(y) \sin xy}{x} dy \right) \\ &= 2i \int_0^\infty \frac{g(y) \sin xy}{x} dy \end{aligned}$$

Para  $a > 0$  se tiene que

$$\int_a^{\rightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} dx$$

no es convergente, pero por (i), se tiene que

$$\int_a^{\rightarrow\infty} 2i dx \int_0^\infty \frac{g(y) \sin xy}{x} dy = 2i \int_a^{\rightarrow\infty} dx \int_0^\infty \frac{g(y) \sin xy}{x} dy$$

si lo es, pues la función  $g$  es integrable en  $[0, \infty[$ , lo cual contradice la igualdad a la que se llegó anteriormente. Por tanto,  $f$  no puede ser la transformada de Fourier de ninguna función en  $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .  $\square$

### Ejercicio 1.0.10

Haga lo siguiente:

- i. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una función integrable en  $\mathbb{R}$ . Se supone que existe una función  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  localmente integrable en  $\mathbb{R}$  tal que

$$f(x) = f(0) + \int_0^x \varphi, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad |\varphi(x)| \underset{|x| \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{1}{|x|^m}\right)$$

donde  $m > 2$ . **Pruebe** que

$$|f(x)| \underset{|x| \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{1}{|x|^{m-1}}\right)$$

y que, para todo  $x \in \mathbb{R}$ , existen las sumas

$$\Phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(x+k) \quad \text{y} \quad F(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+k)$$

siendo la convergencia absoluta y uniforme en  $[-1, 1]$ , luego en  $\mathbb{R}$ . **Muestre** finalmente que

$$F(x) = F(0) + \int_0^x \Phi, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- ii.  $F$  es una función periódica de periodo uno. **Demuestre** que los coeficientes de Fourier de  $F$  respecto al sistema O.N.  $(e^{2\pi i n t})_{n \in \mathbb{Z}}$  son

$$\int_0^1 F(x) e^{-2\pi i n x} dx = \mathcal{F}f(2\pi n), \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

**Deduzca la fórmula Sumatoria de Poisson**

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}f(x+k), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- iii. Aplicando la fórmula sumatoria de Poisson a la función  $x \mapsto e^{-\alpha|x|}$  para  $\alpha > 0$ , obtenga el desarrollo

$$\coth x = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2\pi^2}, \quad \forall x \geq 0$$

Se define la **función theta** por

$$\Theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}, \quad \forall x > 0$$

Aplicando la fórmula sumatoria de Poisson a la función  $x \mapsto e^{-\alpha x^2}$  para  $\alpha > 0$ , **pruebe** la identidad

$$\Theta(x) = \sqrt{\frac{1}{x}} \Theta\left(\frac{1}{x}\right), \quad \forall x > 0$$

### Solución:

De (i): Como

$$|\varphi(x)|_{|x| \rightarrow \infty} = O\left(\frac{1}{|x|^m}\right)$$

entonces existen  $M \geq 0$  y  $A > 0$  tales que

$$|x| > M \Rightarrow |\varphi(x)| \leq \frac{A}{|x|^m}$$

Al ser  $f$  integrable, se tiene que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

Por tanto, de la definición de  $f$  tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left( f(0) + \int_0^u \varphi(t) dt \right) \\ &= f(0) + \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u \varphi(t) dt \\ \Rightarrow f(0) &= - \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u \varphi(t) dt \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{u \rightarrow -\infty} \left( f(0) + \int_0^u \varphi(t) dt \right) \\ &= f(0) - \lim_{u \rightarrow \infty} \int_u^0 \varphi(t) dt \\ \Rightarrow f(0) &= - \lim_{u \rightarrow -\infty} \int_u^0 \varphi(t) dt \end{aligned}$$

por ende,

$$\begin{aligned} f(x) &= - \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u \varphi(t) dt + \int_0^x \varphi(t) dt \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left[ - \int_0^u \varphi(t) dt + \int_0^x \varphi(t) dt \right] \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \int_x^u \varphi(t) dt \end{aligned}$$

si  $x \geq 0$ . Si  $x < 0$  tenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= - \lim_{u \rightarrow -\infty} \int_u^0 \varphi(t) dt + \int_0^x \varphi(t) dt \\ &= \lim_{u \rightarrow -\infty} \left( - \int_u^0 \varphi(t) dt - \int_x^0 \varphi(t) dt \right) \\ &= - \lim_{u \rightarrow -\infty} \int_u^x \varphi(t) dt \end{aligned}$$

Si  $|x| > M$ , tenemos dos casos:

- $x > M$ , se tiene

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \lim_{u \rightarrow \infty} \int_x^u \varphi(t) dt \right| \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left| \int_x^u \varphi(t) dt \right| \\ &\leq \lim_{u \rightarrow \infty} \int_x^u |\varphi(t)| dt \\ &\leq A \lim_{u \rightarrow \infty} \int_x^u \frac{dt}{|t|^m} \\ &= A \lim_{u \rightarrow \infty} \int_x^u t^{-m} dt \\ &= A \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{t^{1-m}}{1-m} \Big|_x^u \\ &= \frac{A}{1-m} \lim_{u \rightarrow \infty} t^{1-m} \Big|_x^u \\ &= \frac{A}{1-m} \lim_{u \rightarrow \infty} [u^{1-m} - x^{1-m}] \\ &= \frac{A}{m-1} x^{1-m} \\ &= \frac{A}{m-1} \cdot \frac{1}{|x|^{m-1}} \\ \therefore |f(x)| &\leq \frac{A}{m-1} \cdot \frac{1}{|x|^{m-1}} \end{aligned}$$

- $-x < -M$ , de forma análoga se sigue que

$$|f(x)| \leq \frac{A}{m-1} \cdot \frac{1}{|x|^{m-1}}$$

De los dos incisos anteriores se concluye que

$$|x| > M \Rightarrow |f(x)| \leq \frac{A}{m-1} \cdot \frac{1}{|x|^{m-1}}$$

por ende,

$$|f(x)| \underset{|x| \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{1}{|x|^{m-1}}\right)$$

La convergencia absoluta de ambas sumas se sigue de forma inmediata de el hecho que

$$|f(x)| \underset{|x| \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{1}{|x|^{m-1}}\right) \quad \text{y} \quad |\varphi(x)| \underset{|x| \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{1}{|x|^m}\right)$$

veamos que es uniforme en  $[-1, 1]$ . En efecto, sea  $\varepsilon > 0$ , debemos encontrar un  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq N$  implique

$$\sup_{x \in [-1, 1]} \left| \Phi(x) - \sum_{k=-n}^n \varphi(x+k) \right| \leq \varepsilon$$

en otras palabras

$$\sup_{x \in [-1, 1]} \left| \sum_{k \in U_n} \varphi(x+k) \right| \leq \varepsilon$$

donde

$$\begin{aligned} U_n &= \left\{ y \in \mathbb{Z} \mid y \leq -n \text{ ó } n \leq y \right\} \\ &= (]-\infty, -n] \cup [n, \infty[) \cap \mathbb{Z} \end{aligned}$$

es decir que

$$\sup_{x \in [-1, 1]} \left| \sum_{k=-\infty}^{-n} \varphi(x+k) + \sum_{k=n}^{\infty} \varphi(x+k) \right| \leq \varepsilon$$

En efecto, existe  $M_1 \geq 0$  tal que

$$|x| \geq M_1 \Rightarrow \frac{A}{|x|^m} \leq \varepsilon$$

sea  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $N \geq \max \{M, M_1\}$ , entonces si  $n \geq N$  (la idea está en ver la convergencia absoluta de  $\sum_{k=-\infty}^{-n} \varphi(x+k)$ ).

De (ii): Veamos primero que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 F(x) e^{-2\pi i n x} dx &= \int_0^1 \left( F(0) + \int_0^x \Phi(y) dy \right) e^{-2\pi i n x} dx \\
&= \int_0^1 \left( F(0) + \int_0^x \Phi(y) dy \right) e^{-2\pi i n x} dx \\
&= \int_0^1 F(0) dx + \int_0^1 dx \int_0^x \Phi(y) e^{-2\pi i n x} dy \\
&= F(0) + \int_0^1 dx \int_0^x \Phi(y) e^{-2\pi i n x} dy \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) + \int_0^1 dx \int_0^x \Phi(y) e^{-2\pi i n x} dy \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) + \int_0^1 dy \int_{1-y}^1 \Phi(y) e^{-2\pi i n x} dx \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) + \int_0^1 \Phi(y) dy \int_{1-y}^1 e^{-2\pi i n x} dx \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) + \int_0^1 \Phi(y) dy \int_{1-y}^1 e^{-2\pi i n x} dx \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) + \int_0^1 \Phi(y) \left[ \frac{e^{-2\pi i n x}}{-2\pi i n} \Big|_{1-y}^1 \right] dy \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) + \int_0^1 \Phi(y) \left[ \frac{e^{-2\pi i n} - e^{-2\pi(1-y)n}}{-2\pi i n} \right] dy \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) + \int_0^1 \Phi(y) \left[ \frac{1 - e^{-2\pi i n} e^{-2\pi i n y}}{-2\pi i n} \right] dy \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) + \int_0^1 \Phi(y) \left[ \frac{1 - e^{-2\pi i n y}}{-2\pi i n} \right] dy \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) - \frac{1}{2\pi i n} \int_0^1 \Phi(y) [1 - e^{-2\pi i n y}] dy \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) - \frac{1}{2\pi i n} \int_0^1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(y+k) [1 - e^{-2\pi i n y}] dy
\end{aligned}$$

(suponiendo que todo sale bien) y,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f(2\pi n) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i n x} f(x) dx \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} e^{-2\pi i n x} f(x) dx \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} \left( f(0) + \int_0^x \varphi(y) dy \right) e^{-2\pi i n x} dx \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} f(0) e^{-2\pi i n x} dx + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} dx \int_0^x \varphi(y) e^{-2\pi i n x} dy
\end{aligned}$$

De (iii): Considere la función  $h_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $x \mapsto e^{-\alpha|x|}$ , se sabe que

$$\mathcal{F}h_1(x) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

**Ejercicio 1.0.11**

Haga lo siguiente:

- i. Sea  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  tal que  $f(x) = 0$  para todo  $x < 0$ . Para todo  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $\Im z \leq 0$  se define

$$\mathcal{F}f(z) = \int_0^\infty e^{-izx} f(x) dx$$

**Pruebe** que esta definición tiene sentido, que  $\mathcal{F}f$  es continua en el semiplano cerrado  $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im z \leq 0\}$  y holomorfa en el semiplano abierto  $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im z < 0\}$ .

*Sugerencia.* El teorema de derivación de funciones definidas por integrales continúa siendo válido al sustituir el intervalo  $I$  por un abierto de  $\mathbb{C}$ .

- ii. Sean  $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  tales que  $f(x) = g(x) = 0$ ,  $\forall x < 0$ . **Muestre** que para todo  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $\Im z \leq 0$  se tiene

$$\mathcal{F}(f * g)(z) = \mathcal{F}f(z)\mathcal{F}g(z)$$

- iii. Sean  $f, g$  como en el inciso (ii). Se supone además que  $\mathcal{F}(f * g) = 0$  c.t.p. en  $\mathbb{R}$ . **Demuestre** que  $f = 0$  c.t.p. en  $\mathbb{R}$  o bien  $g = 0$  c.t.p. en  $\mathbb{R}$ .

*Sugerencia.* Deduzca de (i) y (ii) que  $\mathcal{F}f = 0$  o bien  $\mathcal{F}g = 0$ .

**Solución:**

De (i): Sea  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $\Im z \leq 0$ . Se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |e^{-izx} f(x)| dx &= \int_0^\infty |e^{-ix(\Re z + i\Im z)} f(x)| dx \\ &= \int_0^\infty |e^{-ix\Re z} e^{x\Im z} f(x)| dx \\ &= \int_0^\infty |e^{-ix\Re z}| e^{x\Im z} |f(x)| dx \\ &= \int_0^\infty |f(x)| e^{x\Im z} dx \end{aligned}$$

donde  $x \geq 0$  y  $\Im z \leq 0$ , luego  $e^{x\Im z} \leq 1$ , para todo  $x \in [0, \infty[$ . Así

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |e^{-izx} f(x)| dx &\leq \int_0^\infty |f(x)| dx \\ &= \int_{-\infty}^\infty |f(x)| dx \end{aligned}$$

pues  $f(x) = 0$  para todo  $x < 0$ . Como  $f$  es integrable, se sigue entonces que  $\mathcal{F}f(z)$  está bien definida, para todo  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $\Im z \leq 0$ .

Veamos que  $\mathcal{F}f$  es una función continua en el semiplano cerrado

$$\mathcal{I} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z \leq 0\}$$

En efecto, considere la función  $g : \mathbb{R} \times \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$g(x, z) = e^{-izx} f(x)$$

para todo  $(x, z) \in \mathbb{R} \times \mathcal{I}$ . Claramente  $g$  está bien definida. Se tiene lo siguiente:

- Para todo  $z \in \mathbb{C}$ ,  $g^z(x) = e^{-izx}f(x)$  es integrable en  $\mathbb{R}$  (se probó en el punto anterior), se define así

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \mathcal{F}f(z) \\ &= \int_{\mathbb{R}} g^z(x) dx \\ &= \int_0^\infty e^{-izx} f(x) dx\end{aligned}$$

- Para toda  $x \in \mathbb{R}$ , la función  $g_x : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $z \mapsto e^{-izx}f(x)$  es continua en  $z_0 \in \mathcal{I}$ , para todo  $z_0$ .
- Existe  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  tal que

$$\begin{aligned}|g(x, z)| &= |e^{-izx}f(x)| \\ &\leq |f(x)|\end{aligned}$$

para todo  $(x, z) \in \mathbb{R} \times \mathcal{I}$ .

entonces, por el teorema de continuidad de funciones definidas por integrales, se sigue que  $\Phi$  es continua en  $z_0 \in \mathcal{I}$ , para todo  $z_0$ , esto es que  $\mathcal{F}f$  es continua en  $\mathcal{I}$ .

Para ver que es holomorfa en el semiplano abierto

$$\mathring{\mathcal{I}} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \Im z < 0 \right\}$$

considere nuevamente a la función  $g : \mathbb{R} \times \mathring{\mathcal{I}} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que

$$g(x, z) = e^{-izx}f(x)$$

Veamos que

- Para toda  $z \in \mathring{\mathcal{I}}$ , la función  $x \mapsto g^z(x) = g(x, z)$  es integrable, se define así

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \mathcal{F}f(z) \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(x, z) dx \\ &= \int_0^\infty e^{-izx} f(x) dx\end{aligned}$$

para todo  $z \in \mathring{\mathcal{I}}$ .

- Sea  $x \in \mathbb{R}$ , como  $z \mapsto e^{-izx}$  es holomorfa en  $\mathring{\mathcal{I}}$ , entonces existe la derivada de la función  $g_x : \mathring{\mathcal{I}} \rightarrow \mathbb{C}$ , dada por

$$\begin{aligned}g'_x(z) &= \lim_{w \rightarrow z} \frac{g_x(z) - g_x(w)}{z - w} \\ &= \lim_{w \rightarrow z} \frac{e^{-izx}f(x) - e^{-iwx}f(x)}{z - w} \\ &= f(x) \lim_{w \rightarrow z} \frac{e^{-izx} - e^{-iwx}}{z - w} \\ &= -ixf(x)e^{-izx}\end{aligned}$$

- Para todo  $(x, z) \in \mathbb{R} \times \overset{\circ}{\mathcal{I}}$  se cumple que

$$\begin{aligned}
|g'_x(z)| &= |-ixf(x)e^{-izx}| \\
&= |xe^{-izx}| |f(x)| \\
&= |xe^{-ix(\Re z + i\Im z)}| |f(x)| \\
&= |xe^{-ix\Re z} e^{x\Im z}| |f(x)| \\
&= |xe^{x\Im z}| |f(x)|
\end{aligned}$$

donde

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{x\Im z} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{-x\Im z}}$$

que es de la forma  $\frac{\infty}{\infty}$ , por L'Hopital se sigue que

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{x\Im z} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{-x\Im z}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{-\Im z e^{-x\Im z}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

pues el segundo límite existe. Así, existe  $M > 0$  tal que

$$x \geq M \Rightarrow |xe^{x\Im z}| < 1$$

y, como la función  $x \mapsto |xe^{x\Im z}|$  es continua en  $[0, M]$ , es acotada, luego existe  $A_0 \geq 1$  tal que

$$|xe^{x\Im z}| \leq A_0, \quad \forall x \in [0, M]$$

Por ende,

$$|xe^{x\Im z}| \leq \max\{A_0, 1\} = B_0, \quad \forall x \in [0, \infty[$$

se sigue entonces que

$$|g'_x(z)| \leq B_0 |f(x)|$$

(pues  $f$  es nula fuera de  $[0, \infty[$ ), siendo  $f$  integrable.

Por los tres incisos anteriores y el teorema de derivación de funciones definidas por integrales, se sigue que  $\Phi$  es holomorfa en  $\overset{\circ}{\mathcal{I}}$  y su valor es

$$\Phi'(z) = -i \int_0^\infty xe^{-izx} f(x) dx$$

De (ii):

De (iii):

□

### Ejercicio 1.0.12

Haga lo siguiente:

- Sea  $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . Se define para todo  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$F(z) = \int_{-\infty}^\infty e^{-izx - \frac{x^2}{2}} \overline{f(x)} dx$$

**Pruebe** que  $F$  es holomorfa en  $\mathbb{C}$  y que, para todo  $n \in \mathbb{N}$  y para todo  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$F^{(n)}(z) = (-i)^n \int_{-\infty}^\infty x^n e^{-izx - \frac{x^2}{2}} \overline{f(x)} dx$$

*Sugerencia.* La misma que la del Problema 11.



- ii. Se supone que  $f$  es ortogonal a todas las funciones de Hermite. Muestre que  $F = 0$  y **deduzca** que  $f = 0$  c.t.p. en  $\mathbb{R}^n$ .

Así pues, el sistema de funciones de Hermite normalizadas es un sistema ortonormal maximal en  $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

*Sugerencia.* Observe que  $F^{(n)}(0) = 0$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . La condición  $F = 0$  implica que la transformada de Fourier de la función integrable  $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}} \overline{f(x)}$  es cero.

### Solución:

De (i): Defina  $h : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por:

$$h(x, z) = e^{-izx - \frac{x^2}{2}} \overline{f(x)}$$

Veamos que se cumple lo siguiente:

- Sea  $z \in \mathbb{C}$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \left| e^{-izx - \frac{x^2}{2}} \overline{f(x)} \right| &= \left| e^{-ix(\Re z + i\Im z)} e^{-\frac{x^2}{2}} \overline{f(x)} \right| \\ &= \left| e^{-ix\Re z} \right| \left| e^{x\Im z - \frac{x^2}{2}} \right| \left| \overline{f(x)} \right| \\ &= \left| e^{x\Im z - \frac{x^2}{2}} \right| |f(x)|, \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

donde por Hölder, se tiene que  $x \mapsto \left| e^{x\Im z - \frac{x^2}{2}} \right| |f(x)|$  está en  $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , pues  $x \mapsto e^{x\Im z - \frac{x^2}{2}}$  está en  $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , al igual que  $f$ .

- Sea  $x \in \mathbb{R}$ . Es claro que la función

$$z \mapsto e^{-izx - \frac{x^2}{2}} \overline{f(x)}$$

es diferenciable en  $\mathbb{C}$  (pues  $z \mapsto e^{-izx - \frac{x^2}{2}}$ ) lo es, con derivada:

$$\frac{\partial h}{\partial z}(x, z) = (-i)x e^{-izx - \frac{x^2}{2}} \overline{f(x)}$$

Se tiene entonces que  $F$  está bien definida, para todo  $z \in \mathbb{R}$ .

- Para  $z \in \mathbb{C}$  se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial h}{\partial z}(x, z) \right| &= \left| (-i)x e^{-izx - \frac{x^2}{2}} \overline{f(x)} \right| \\ &= \left| x e^{x\Im z - \frac{x^2}{2}} \right| |f(x)| \end{aligned}$$

sea  $a > 0$ , tenemos que para todo  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $\Im z < a$ :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial h}{\partial z}(x, z) \right| &= \left| x e^{x\Im z - \frac{x^2}{2}} \right| |f(x)| \\ &= e^{x\Im z} \left| x e^{-\frac{x^2}{2}} \right| |f(x)| \\ &\leq e^{ax} \left| x e^{-\frac{x^2}{2}} \right| |f(x)| \\ &= \left| x e^{ax - \frac{x^2}{2}} \right| |f(x)| \end{aligned}$$

donde la función de la derecha es integrable en  $\mathbb{R}$  y no depende de  $z$ .

Por el teorema de derivación de funciones definidas por integrales, se tiene que  $F$  es holomorfa en el semiplano abierto

$$\Omega_a = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \Im z < a \right\}$$

para todo  $a > 0$ . Luego al ser el  $a > 0$  arbitrario, se sigue que  $F$  es holomorfa en  $\mathbb{C}$ . En particular:

$$F^{(1)} = (-i) \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-izx - \frac{x^2}{2}} \overline{f(x)} dx, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Más aún, como  $F$  es holomorfa en  $\mathbb{C}$ , tiene todas sus derivadas de todos sus órdenes y, por inducción se prueba de forma análoga al procedimiento anterior que

$$F^{(n)} = (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-izx - \frac{x^2}{2}} \overline{f(x)} dx, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

De (ii): Como  $f$  es ortogonal a todas las funciones de Hermite, se tiene que

$$\langle \varphi_n | f \rangle = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \overline{f(x)} dx = 0$$

donde  $H_n$  es un polinomio de grado  $n$ . Como se cumple para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces

$$(-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}} \overline{f(x)} dx = 0$$

es decir, que

$$F^{(n)} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por ser  $F$  holomorfa en  $\mathbb{C}$ , admite expansión en serie de Taylor alrededor del 0, así:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} z^n, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

(ya que el hecho de que  $F$  sea holomorfa en  $\mathbb{C}$  implica que  $F$  es analítica, luego admite tal representación en serie de potencias). En particular, se tiene que

$$F(z) = F(0), \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

□

### Ejercicio 1.0.13

Haga lo siguiente:

- i. **Demuestre** la fórmula.

$$D_x^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2} dy = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} D_y^n e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2} dy$$

- ii. Se consideran las funciones de Hermite

$$\varphi(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} D^n e^{-x^2}$$

**Pruebe** que  $\mathcal{F}_2 \varphi_n = (-1)^n \varphi_n$ . Así pues, las funciones de Hermite son vectores propios para el operador  $\mathcal{F}_2$ .

*Sugerencia.* Transforme  $\mathcal{F}_2\varphi_n$  por la “fórmula de integración por partes de orden  $n$ ”.

$$\int_a^b f^{(n)} g = \left[ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^{(n-k-1)} g^{(k)} \right] + (-1)^n \int_a^b f g^{(n)}$$

(al suponer  $f^{(n)}$  y  $g^{(n)}$  continuas en  $[a, b]$ ). Después, use la fórmula del inciso (i).

### Solución:

Considere la función  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$f(y, x) = e^{-y^2} e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2}$$

Se cumple para  $f$  lo siguiente:

- Sea  $y \in \mathbb{R}$ , entonces la función  $x \mapsto f_y(x) = f(x, y) = e^{-y^2} e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2}$  es de clase  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}$  (por ser composición de funciones clases  $C^\infty$ ). Más aún, se tiene que

$$D_x^n \left( e^{-y^2} e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2} \right) = e^{-y^2} D_x^n e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2}$$

- Para todo  $x \in \mathbb{R}$ , las funciones  $y \mapsto e^{-y^2} D_x^n e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2}$  son integrables en  $\mathbb{R}$ , con  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . En efecto, procederemos por inducción sobre  $n$ . Sea  $x \in \mathbb{R}$ :

- El caso  $n = 0$  y  $n = 1$  son inmediatos, pues para todo  $y \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} e^{-y^2} D_x^0 e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2} &= e^{-y^2 + \frac{1}{2}(y-ix)^2} \\ &= e^{-y^2 + \frac{1}{2}(y^2 - 2iyx - x^2)} \\ &= e^{-y^2 + \frac{1}{2}y^2 - iyx - \frac{1}{2}x^2} \\ &= e^{-\frac{y^2}{2} - iyx - \frac{x^2}{2}} \\ &= e^{-\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2}} e^{-iyx} \\ \Rightarrow \left| e^{-y^2} D_x^0 e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2} \right| &\leq e^{-\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2}} \\ &= e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} \end{aligned}$$

donde la función  $y \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}}$  es integrable en  $\mathbb{R}$ . y,

$$e^{-y^2} D_x^1 e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2} =$$

- Suponga que para algún  $n \in \mathbb{N}$ , las funciones

$$y \mapsto e^{-y^2} D_x^n e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2} \quad \text{y} \quad y \mapsto e^{-y^2} D_x^{n-1} e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2}$$

son integrables en  $\mathbb{R}$ . Veamos que se cumple para  $n + 1$ . En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned}
D_x^{n+1} \left( e^{-y^2} e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2} \right) &= e^{-y^2} D_x^{n+1} e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2} \\
&= D_x^n \left( D_x e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2} \right) \\
&= e^{-y^2} D_x^n \left( e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2} D_x \left[ \frac{1}{2} (y-ix)^2 \right] \right) \\
&= e^{-y^2} D_x^n \left( e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2} D_x \left[ \frac{1}{2} (y-ix)^2 \right] \right) \\
&= e^{-y^2} D_x^n \left( e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2} (-i)[y-ix] \right) \\
&= e^{-y^2} \left[ (-i) D_x^n \left( [y-ix] e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2} \right) \right] \\
&= e^{-y^2} \left[ (-i)y D_x^n \left( e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2} \right) - D_x^n \left( x e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2} \right) \right] \\
&= e^{-y^2} \left[ (-i)y D_x^n \left( e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2} \right) - \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} D_x^{n-k} \left( e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2} \right) D_x^k(x) \right] \\
&= e^{-y^2} \left[ (-i)y D_x^n \left( e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2} \right) - x D_x^n e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2} - D_x^{n-1} e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2} \right]
\end{aligned}$$

usando la fórmula de Leibniz para la derivada de un producto.

□