Producto Directo De Grupos.

Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía de conjuntos no vacíos. Se define el **producto directo de $\{X_i\}_{i\in I}$**, denotado por $\prod_{i\in I} X_i$, como

$$\prod_{i\in I} X_i = \{ a : I \to \bigcup_{i\in I} X_i \mid a(i)\in X_i, \ \forall\, i\in I\}$$

Si $a\in \prod_{i\in I} X_i$, basta con saber su ley de correspondencia. Por lo cual, podemos decir que ésta está dada por

$$i \longmapsto a(i)$$

donde $a(i)\in X_i$, $\forall\, i\in I$. Si escribimos $a_i := a(i)$, $\forall\, i\in I$, entonces

$$i \longmapsto a_i$$

donde $a_i\in X_i$, $\forall\, i\in I$. Luego, basta escribir:

$$a = (a_i)_{i\in I}$$

Si $J\subseteq I$, $J\neq \emptyset$, podemos expresar

$$\prod_{i\in I} X_i = \prod_{j\in J} X_j \times \prod_{i\in I\setminus J} X_i$$

& $(a_i)_{i\in I} = \left((a_j)_{j\in J}, (a_i)_{i\in I\setminus J}\right)$. Sea ahora $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos. En el producto directo $\prod_{i\in I} G_i$, se define la operación:

$$(a_i)_{i\in I}\cdot (b_i)_{i\in I} = (a_i b_i)_{i\in I}$$

Esta operación hace de $\prod_{i\in I} G_i$ un grupo con identidad $e=(e_i)_{i\in I}$, y los inversos son: $\forall\, a=(a_i)_{i\in I}\in \prod_{i\in I} G_i$:

$$a^{-1} = (a_i)_{i\in I}^{-1} = (a_i^{-1})_{i\in I}\in \prod_{i\in I} G_i$$

Obs: Si $\{G_i\}_{i\in I}$ es una familia de grupos, entonces dos elementos $(g_i)_{i\in I}$, y $(h_i)_{i\in I}$ en $\prod_{i\in I} G_i$ son iguales, $(g_i)_{i\in I} = (h_i)_{i\in I} \iff g_i = h_i$, $\forall\, i\in I$.

Además:

1) Si G_i es abeliano $\forall\, i\in I$, entonces $\prod_{i\in I} G_i$ lo es.

2) Si $\{I_1, I_2\}$ es una partición de I, entonces

$$\prod_{i\in I} G_i \cong \left(\prod_{i\in I_1} G_i\right) \times \left(\prod_{i\in I_2} G_i\right)$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} G_1 \times G_2 \times G_3 \times G_4 &\cong G_1 \times (G_2 \times (G_3 \times G_4)) \\ &\cong (G_1 \times G_2) \times (G_3 \times G_4) \\ &\cong (G_1 \times G_2 \times G_3) \times G_4 \end{aligned}$$

3) Sea $J \subseteq I$, $J \neq \emptyset$ y $J \neq I$, y sea $H = \prod_{i\in J} G_i \times \prod_{i\in I\setminus J} \langle e_i \rangle$. Entonces, $H \triangleleft \prod_{i\in I} G_i$.

Por ejemplo, tenemos que

$$G_1 \times \langle e_2 \rangle \times \langle e_3 \rangle \times G_4 \triangleleft \prod_{i=1}^{4} G_i$$

$$G_1 \times G_2 \times \langle e_3 \rangle \times G_4 \triangleleft \prod_{i=1}^{4} G_i$$

Además, en general y por el PTI:

$$\prod_{i\in I} G_i / H \cong \prod_{i\in I\setminus J} G_i \cong \prod_{i\in J} \langle e_i \rangle \times \prod_{i\in I\setminus J} G_i$$

Teorema

Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos, H un grupo y $f_i : H \to G_i$ homomorfismos para cada $i \in I$. Entonces existe un único homomorfismo $f: H \to \prod_{i\in I} G_i$ tal que $pr_j \circ f = f_j$, $\forall\, j \in I$.

Es decir, $f = (f_i)_{i\in I}$.

Dem:

Veamos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f_j"] \arrow[dr, dashed, "f"'] & G_j \\ & \prod_{i\in I} G_i \arrow[u, "pr_j"'] \end{tikzcd}$$

Def. Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos. Se define el **producto directo débil (externo)**, escrito como:

$$\coprod_{i\in I} G_i = \left\{ (g_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} G_i \;\middle|\; g_i = e_i \ \forall\!\!\forall\ i\in I \right\}$$

donde $\forall\!\!\forall$ significa: "para cas. todo salvo posiblemente una cantidad finita".

Notemos que si I es finito:

$$\coprod_{i\in I} G_i = \prod_{i\in I} G_i$$

Además, $\coprod_{i\in I} G_i \neq \emptyset$, pues $(e_i)_{i\in I} \in \coprod_{i\in I} G_i$. Más aún, $\coprod_{i\in I} G_i$ es subgrupo de $\prod_{i\in I} G_i$, el cual es normal en $\coprod_{i\in I} G_i$.

Dem:

Proposición.

Sean $\{G_i\}_{i\in I}$ y $\{N_i\}_{i\in I}$ dos familias de grupos tales que $N_i \triangleleft G_i$, $\forall\, i\in I$. Entonces,

i) $\prod_{i\in I} N_i \triangleleft \prod_{i\in I} G_i$.

ii) $\coprod_{i\in I} N_i \triangleleft \coprod_{i\in I} G_i$.

iii) $\prod_{i\in I} G_i / \prod_{i\in I} N_i \cong \prod_{i\in I} G_i/N_i$.

iv) $\coprod_{i\in I} G_i / \coprod_{i\in I} N_i \cong \coprod_{i\in I} G_i/N_i$.

Dem:

Obs: Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de Grupos. Si cada G_i es abeliano se dice que el producto directo débil es la suma directa de $\{G_i\}_{i\in I}$, es decir, se escribe $\bigoplus_{i\in I} G_i$ en lugar de $\coprod_{i\in I} G_i$.

Teorema.

Sea G un grupo y $\{N_i\}_{i\in I}$ una familia de subgrupos normales de G, tales que:

i) $G = \langle \bigcup_{i\in I} N_i \rangle$.

ii) $N_j \cap \langle \bigcup_{\substack{i\neq j\\ i\in I}} N_i \rangle = \langle e \rangle$, $\forall\, j\in I$.

Entonces $G \cong \bigoplus_{i\in I} N_i$.

Dem:

Notemos que, $\forall\, i,j\in I$, $i\neq j$:

$$N_i\cap N_j \leq N_i \cap \langle \bigcup_{\substack{i\neq j\\ i\in I}} N_i \rangle = \langle e \rangle$$

$\Rightarrow N_i\cap N_j = \langle e \rangle$. Por lo cual:

$$\langle \bigcup_{i\in I} N_i \rangle = \{ \prod_{i\in I} g_i \mid g_i\in N_i,\ \forall\, i\in I;\ \text{pero } g_j = e\ \forall_h\, j\in I \}$$

pues, si $i\neq j$, $\forall\, a\in N_i$ y $\forall\, b\in N_j$, $ab = ba$. Notemos que si $x,y\in \langle \bigcup_{i\in I} N_i \rangle$, con $x = \prod_{i\in I} g_i$ y $y = \prod_{i\in I} h_i \Rightarrow xy = \prod_{i\in I} g_i h_i$. Además si $x = \prod_{i\in I} g_i$ y $x = \prod_{i\in I} f_i$, entonces $\prod_{i\in I} g_i = \prod_{i\in I} f_i$, luego $\forall\, i\in I$.

$$g_i f_i^{-1} = \prod_{\substack{k\in I\\ k\neq i}} g_k^{-1} f_k$$

Donde $g_i f_i^{-1}\in N_i$ y $\prod_{\substack{k\in I\\ k\neq i}} g_k^{-1} f_k \in \langle \bigcup_{\substack{k\in I\\ k\neq i}} N_k \rangle$, así $g_i f_i^{-1}\in N_i\cap \langle \bigcup_{\substack{k\in I\\ k\neq i}} N_k \rangle = \langle e \rangle$, luego $g_i = f_i$. Por tanto, x se representa de manera única como $\prod_{i\in I} g_i$ con $g_i\in N_i$, $\forall\, i\in I$.

Sea $\Phi : \bigoplus_{i\in I} N_i \to G$ dada como:

$$\forall\, (g_i)_{i\in I},\quad \Phi\left((g_i)_{i\in I}\right) = \prod_{i\in I} g_i$$

por las observaciones anteriores, Φ está bien definida y es suprayectiva. También, $\overline{\Phi}$ es homomorfismo, pues:

$\forall\, (g_i)_{i\in I}, (h_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} N_i$, $\overline{\Phi}\left((g_i)_{i\in I}(h_i)_{i\in I}\right) = \overline{\Phi}\left((g_i h_i)_{i\in I}\right)$

$$= \prod_{i\in I} g_i h_i$$

$$= \prod_{i\in I} g_i \cdot \prod_{i\in I} h_i$$

$$= \overline{\Phi}\left((g_i)_{i\in I}\right)\cdot \overline{\Phi}\left((h_i)_{i\in I}\right)$$

Finalmente, $\overline{\Phi}$ es isomorfismo. En efecto, sea $(g_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} N_i$, entonces:

$(g_i)_{i\in I} \in \operatorname{Ker}\overline{\Phi} \iff \overline{\Phi}\left((g_i)_{i\in I}\right) = e \iff \prod_{i\in I} g_i = e \iff \prod_{i\in I} g_i = \prod_{i\in I} e_i$, donde $e_i := e$, $\forall\, i\in I \iff g_i = e, \forall\, i\in I \iff (g_i)_{i\in I} = (e_i)_{i\in I}$

por tanto, $\operatorname{Ker}\overline{\Phi} = \{(e_i)_{i\in I}\}$, así $\overline{\Phi}$ es inyectiva, luego $G \overset{\overline{\Phi}^{-1}}{\cong} \bigoplus_{i\in I} N_i$.

q.e.d.

Obs) Sea G grupo y $\{N_i\}_{i\in I}$ una familia de subgrupos normales.

i) Si I es finito, con $I = \{1, 2, \dots, n\} = J_n$, entonces:

$$\bigoplus_{i\in I} N_i = N_1 \oplus \dots \oplus N_n$$
$$= \prod_{i\in I} N_i$$
$$= N_1 \times \dots \times N_n$$

ii) Si I es numerable, entonces $I = \mathbb{N}$, así:

$$\bigoplus_{i\in I} N_i = \bigoplus_{i=1}^{\infty} N_i \neq \prod_{i=1}^{n} N_i$$

iii) Si G y $\{N_i\}_{i\in I}$ satisfacen las condiciones del teorema anterior, con I finito, entonces:

$$G = N_1 N_2 \dots N_n \trianglelefteq G, \quad y$$
$$N_j \cap N_1 \dots \hat{N_j} \dots N_n = \langle e\rangle, \forall\, j\in J_n.$$
$$= N_j \cap \langle N_1 \cup \dots \cup N_{j-1} \cup N_{j+1} \cup \dots \cup N_n\rangle$$

Si $n=2$, $\Rightarrow G = N_1 N_2$ y $N_1 \cap N_2 = \langle e\rangle \Rightarrow G \cong N_1 \times N_2$.

Def. Sea G grupo y $H, N < G$ tales que $N \trianglelefteq G$, $G = HN$ y $H \cap N = \langle e \rangle$. Entonces, decimos G es el producto semidirecto de N por H, y se denota: $G = N \rtimes H = H \ltimes N$.

Ejemplos.

1) Consideremos a S_3, tenemos que $\langle \sigma \rangle < S_3$, $\langle \sigma \rangle \ntrianglelefteq S_3$; $\langle \pi \rangle \trianglelefteq S_3$. Finalmente, $S_3 = \langle \sigma \rangle \langle \pi \rangle$ con $\langle \sigma \rangle \cap \langle \pi \rangle = \langle e \rangle$. Por tanto:

$$S_3 = \langle \sigma \rangle \ltimes \langle \pi \rangle = \langle \pi \rangle \rtimes \langle \sigma \rangle$$

2) $D_n = \langle t \rangle \ltimes \langle r \rangle$.

3) Se cumple que, si $m, n \in \mathbb{Z}^+ \cap (m,n) = 1$, entonces:

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}$$

en efecto, sea $f : \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ dada como:

$$\forall a \in \mathbb{Z},\ f([a]_{mn}) = ([a]_n, [a]_m)$$

anteriormente se probó que f es biyección (probar) y f es homomorfismo. En efecto:

4) Sean $p < q$ números primos tales que $p \nmid (q-1)$. Si G es un grupo de orden pq (digamos $\mathbb{Z}/_{pq}\mathbb{Z}$), entonces G es cíclico, i.e $G \cong \mathbb{Z}/_{pq}\mathbb{Z}$. En efecto:
Consideremos los valores n_p y n_q, tenemos:

n_p) $n_p \mid |G| = pq$, $n_p \equiv 1 \bmod p$ y $(n_p, p) = 1 \Rightarrow n_p = 1$ o $n_p = q$. Si $n_p = q \Rightarrow q \equiv 1 \bmod p \Rightarrow p \mid q-1$ #c. Por tanto, $n_p = 1$.
Luego, $\exists!\, P$ p-subgrupo Sylow de $G \Rightarrow P \triangleleft G$.

n_q) $n_q \mid pq$, $n_q \equiv 1 \bmod q$. $(n_q, q) = 1 \Rightarrow n_q = 1$ o $n_q = p$. Si $n_q = p \Rightarrow p \equiv 1 \bmod q \Rightarrow q \mid p-1 \Rightarrow q \leq p-1 < p$ #c. Por tanto $n_q = 1$. Luego $\exists!\, Q$ q-subgrupo Sylow de G tal que $\Rightarrow Q \triangleleft G$.

Como $P, Q \triangleleft G \Rightarrow PQ \triangleleft G$. Notemos que $P \cap Q < P$ y $P \cap Q < Q \Rightarrow |P \cap Q| \mid p$ y $|P \cap Q| \mid q \Rightarrow |P \cap Q| = 1 \Rightarrow P \cap Q = \langle e \rangle$.
Luego:

$$|PQ| = \frac{|P||Q|}{|P \cap Q|} = |P||Q| = pq$$

Con $PQ \triangleleft G \Rightarrow PQ = G$ con $P \cap Q = \langle e \rangle \Rightarrow G \cong P \times Q \cong \mathbb{Z}/_p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/_q\mathbb{Z}$
$\cong \mathbb{Z}/_{pq}\mathbb{Z}$.

En particular, si $p = 11$ y $q = 13$, $G \cong \mathbb{Z}/_{11 \cdot 13}\mathbb{Z}$.

5) Todo grupo G de orden $11^2 \cdot 13^2$ es abeliano, pues:

n_{11}) $n_{11} \mid 11^2 \cdot 13^2$, $n_{11} \equiv 1 \bmod 11$ y $(n_{11}, 11) = 1 \Rightarrow n_{11} \mid 13^2$. Por tanto, $n_{11} = 1$ ó 13 ó 13^2.
Si $n_{11} = 13 \Rightarrow 11 \mid (13-1) = 12$ #c.
Si $n_{11} = 13^2 \Rightarrow 11 \mid 13^2 - 1 \Rightarrow n_{11} = 1 \Rightarrow \exists!\, P$ 11-subgrupo de G de Sylow tal $|P| = 11^2$.

n_{13}) De manera similar a n_{11}, $n_{13} = 1$ ó 11 ó 11^2.
Si $n_{13} = 11 \Rightarrow 13 \mid 11-1$ #c.

Si $n_{13} = 11^2 \Rightarrow 13 \mid 11^2 - 1$ #c

Portanto $n_{13} = 1 \Rightarrow \exists!\ Q$ 13-subgrupo Sylow de G.

Como $P, Q \trianglelefteq G \Rightarrow PQ \trianglelefteq G$ con $|P \cap Q| = 1 \Rightarrow |PQ| = 11^2 \cdot 13^2 \Rightarrow PQ = G$. Como P y Q son de órdenes cuadrados de primos, son abelianos, así como $G \cong P \times Q$, entonces como $P \times Q$ es abeliano, entonces G es abeliano.

q.e.d.