Grupos y Geometría: Acciones, Dimensión y Dualidad

Plano Hiperbólico, Aplicaciones del Teorema de Svarc-Milnor y Grupos Hiperbólicos

Cristo Daniel Alvarado

Escuela Superior de Física y Matemáticas
Instituto Politécnico Nacional

24 de enero de 2025

Index

1. Plano Hiperbólico
   - Construcción del Plano Hiperbólico
   - Isometrías del Plano Hiperbólico
   - El Grupo PSL $(2, \mathbb{R})$
   - Acción de SL $(2, \mathbb{R})$ en $\mathbb{H}^2$
   - Švarc-Milnor y el plano hiperbólico
   - Grupos Fuchsianos
   - Superficies de Género $g \geq 0$
2. Espacios Hiperbólicos
   - Hiperbólicidad y δ-hiperbolicidad
   - Hiperbolicidad del Plano $\mathbb{H}^2$
   - Hiperbolicidad es invariante cuasi-isométrico
   - Grupos Hiperbólicos
   - El problema de la palabra en Grupos Hiperbólicos

El Plano Hiperbólico $\mathbb{H}^2$

Construcción del Plano Hiperbólico

Construcción del Plano Hiperbólico

Hablaremos un poco sobre el plano hiperbólico y sus propiedades.

Definición (Plano superior)

Escribimos:

$$H = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| y > 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

para el **plano superior**.

Observación

Dependiendo del contexto, veremos a H como subconjunto de $\mathbb{C}$, haciendo las identificaciones:

$$H \to \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| \Im z > 0 \right\}$$

con la aplicación biyectiva $(x, y) \mapsto x + iy$.

Construcción del Plano Hiperbólico

Definición (**Haz tangente**)

Sea M una variedad C^k-diferenciable. El **fibrado tangente** o **haz tangente** es la unión disjunta de los espacios tangentes a cada punto de la variedad, dado por:

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_pM$$

donde T_pM denota el espacio tangente a M en el punto $p \in M$.

Como el conjunto H es abierto y subconjunto de $\mathbb{R}^2$, entonces este hereda la estructura de variedad suave de $\mathbb{R}^2$. Además, como el haz tangente a $p \in \mathbb{R}^2$ es trivial, se sigue también que el haz tangente a H es trivial y por ende, podemos identificar de forma natural al espacio T_zH como el espacio tangente de $x \in H$. Además, como $T_zH \cong \mathbb{R}^2$, haremos la identificación de estos dos espacios como el mismo.

Construcción del Plano Hiperbólico

Definición (**Métrica Riemanniana**)

Una **métrica Riemanniana** en una variedad C^k-diferenciable M es una aplicación bilineal simétrica $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ en cada uno de los espacios tangentes T_pM de M.

Observación

De la definición anterior se sigue que para cada $p \in M$ se satisface:

(1) $g_p(u, v) = g_p(v, u)$ para todo $u, v \in T_pM$.

(2) $g_p(u, u) \geq 0$ para todo $u \in T_pM$.

(3) $g_p(u, u) = 0$ si y sólo si $u = 0$.

Construcción del Plano Hiperbólico

Definición (Plano Hiperbólico)

El **plano hiperbólico** $\mathbb{H}^2$ es la variedad Riemanniana (H, g_H), donde:

- $H \subseteq \mathbb{R}^2$ hereda la estructura suave de $\mathbb{R}^2$.
- Consideramos la métrica Riemanniana $g_{H,p} : T_pH \times T_pH = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$g_{H,(x,y)}(u, v) = \frac{1}{y^2}\langle u, v\rangle, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^2$$

para todo $(x, y) \in H$, donde $\langle \cdot \big| \cdot \rangle$ denota el producto interno usual de $\mathbb{R}^2$. Más aún, escribiremos $\langle \cdot \big| \cdot \rangle_{H,z}$ en vez de $g_{H,z}$ y a la norma inducida se le denotará por $\| \cdot \|_{H,z}$.

Construcción del Plano Hiperbólico

Nuestro interés ahora será hablar de las isometrías de $\mathbb{H}^2$, para lo cual tendremos que construír una métrica en este espacio.

Definición (Longitud hiperbólica de una curva)

Sea $\gamma : [a, b] \to H$ una curva suave. Se define la **longitud hiperbólica de** γ por:

$$L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|_{H,\gamma(t)}\, dt = \int_a^b \frac{\sqrt{\dot{\gamma_1}^2(t) + \dot{\gamma_2}^2(t)}}{\gamma_2(t)}\, dt$$

siendo $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$.

Isometrías de $\mathbb{H}^2$

Isometrías del Plano Hiperbólico

Resulta que con la definición anterior de longitud hiperbólica de una curva es posible inducir una métrica en el espacio H:

Proposición

La función $d_H : H \times H \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por:

$$(z, z') \mapsto \inf \left\{ L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) \middle| \gamma \text{ es una curva suave en } H \text{ que une a } z \text{ con } z' \right\}$$

es una métrica en H.

Isometrías del Plano Hiperbólico

Proposición

Sea $\gamma : [a, b] \to H$ una curva suave. Entonces:

$$L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) = L_{(H,d_H)}(\gamma)$$

donde $L_{(H,d_H)}$ es llamada la **longitud métrica** y está dada por:

$$L_{(H,d_H)} = \sup \left\{ \sum_{j=0}^{k-1} d_H(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})) \middle| \right.$$
$$\left. k \in \mathbb{N}, t_0, t_1, ..., t_k \in [a, b], t_0 < t_1 < \cdots < t_k \right\}$$

Conociendo la métrica de este espacio, nos interesa conocer ahora las geodésicas del mismo. Para ello, primero veremos quiénes son sus isometrías.

Isometrías del Plano Hiperbólico

Definición (Grupo de isometrías Riemanniano)

Una **isometría Riemanniana de** $\mathbb{H}^2$ es un difeomorfismo suave $f : H \to H$ que satisface:

$$\forall z \in H, \forall v, v' \in T_z H, \quad \langle (Df)_z(v) \big| (Df)_z(v') \rangle_{H,f(z)} = \langle v \big| v' \rangle_{H,z}$$

Proposición (Isometrías Riemannianias son isometrías)

Toda isometría Riemanniana de $\mathbb{H}^2$ es una isometría métrica de (H, d_H). En particular, existe un monomorfismo de grupos:

$$\mathrm{Isom}\left(\mathbb{H}^2\right) \to \mathrm{Isom}\left(H, d_H\right)$$

El Grupo PSL $(2, \mathbb{R})$

El Grupo $\mathrm{PSL}\left(2, \mathbb{R}\right)$

Definición

$\mathrm{SL}\left(n, \mathbb{A}\right)$ denota al espacio de todas las matrices 2×2 con entradas en $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{C}$ tales que:

$$\det(A) = 1, \quad \forall A \in \mathbb{A}$$

El Grupo $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$

Definición (Transformaciones de Möbius)

Para la matriz 2×2:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$$

definimos la **transformación de Möbius asociada** $f_A : H \to H$, dada por:

$$z \mapsto \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d}$$

El Grupo $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$

Observación

Toda transformación de Möbius está bien definida, ya que como H es el plano superior, entonces la parte real de z nunca será un número con parte imaginaria cero, así que $c \cdot z + d \neq 0$ para todo $z \in H$.

Ejemplo

La función $z \mapsto z$ es una transformación de Möbius. Al igual que la función $z \mapsto \frac{1}{z}$. En particular, todas las funciones lineales de H en H son transformaciones de Möbius.

El Grupo $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$

Proposición

Se tiene lo siguiente:

(1) f_A está bien definido y es un difeomorfismo C^∞ (o suave).

(2) Para todo $A, B \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ se tiene que $f_{A\cdot B} = f_A \circ f_B$.

(3) $f_A = f_{-A}$ para todo $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

Demostración:
De *(1)* y *(2)*: Son inmediatas.
De *(3)*: Si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$$

entonces,

$$f_A(z) = \frac{a\cdot z + b}{c\cdot z + d} = \frac{-a\cdot z + -b}{-c\cdot z + -d} = f_{-A}(z)$$

para todo $z \in H$. ■

El Grupo $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$s

Ejemplo (Generadores $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$)

Tenemos los siguientes dos tipos de transformaciones de Möbius:

- Sea $b \in \mathbb{R}$. Entonces, la transformación de Möbius asociada a la matriz:
$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$$
es la traslación horizontal $z \mapsto z + b$ en H por un factor b se denotará por T_b.
- La transformación de Möbius asociada a la matriz:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$$
es la función $z \mapsto \frac{1}{z}$ se denotará por In.

El Grupo PSL $(2, \mathbb{R})$

Ejemplo (Generadores SL $(2, \mathbb{R})$)

Se tiene que el grupo SL $(2, \mathbb{R})$ es generado por:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| b \in \mathbb{R} \right\}$$

El Grupo PSL $(2, \mathbb{R})$

Demostración:
Notemos que:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b & 1 \end{pmatrix}$$

para todo $b \in \mathbb{R}$. Así que todas las matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

está en el grupo generado por el conjunto anterior. Para terminar, basta notar que toda matriz en $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ admite una descomposición LU o UL, dependiendo del caso. ■

El Grupo $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$

Proposición (Transformaciones de Möbius son isometrías)

Si $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, entonces la transformación de Möbius asociada $f_A : H \to H$ es una isometría Riemanniana de $\mathbb{H}^2$. En particular, tenemos un monomorfismo de grupos:

$$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) / \{I, -I\} \to \mathrm{Isom}(H, d_H)$$

dado por $[A] \mapsto f_A$.

Demostración:
Por el ejemplo anterior basta con ver que T_b y In son isometrías Riemannianas de $\mathbb{H}^2$, ya que la composición de isometrías Riemannianias sigue siendo una isometría Riemanniana. ■

El Grupo $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$

Teorema (El grupo de isometrías hiperbólicas)

El grupo $\mathrm{Isom}(H, d_H)$ es generado por:

$$\left\{ f_A \middle| A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \right\} \cup \{z \mapsto -\bar{z}\}$$

En particular, toda isometría de (H, d_H) es una isometría Riemanniana suave y, $\mathrm{Isom}(H, d_H) = \mathrm{Isom}\left(\mathbb{H}^2\right)$. Además, la función:

$$\begin{aligned} \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) &\to \mathrm{Isom}(H, d_H)^+ \\ A &\mapsto f_A \end{aligned}$$

es un isomorfismo, siendo $\mathrm{Isom}(H, d_H)^+$ al grupo de todas las isometrías que preservan orientación de $\mathrm{Isom}(H, d_H)$.

El Grupo $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$

Teorema (Caracterización de las geodésicas)

Sean $z, z' \in H$ distintos.

(1) Existe una única geodésica en (H, d_H) que une a z con z'. En particular, el espacio métrico es geodésico.

(2) Hasta reparametrizaciones en $\mathbb{R}$, existe una única linea geodésica en (H, d_H) que contiene a z y z'.

Más precisamente, si $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ con $\Re(f_A(z)) = 0 = \Re(f_A(z'))$, entonces la función $f_A \circ t \mapsto i \cdot e^t$ es una línea geodésica que une a z con z' y la geodésica que va de z a z' genera esta línea.

El Grupo PSL $(2, \mathbb{R})$

Observación

Usando la descripción anterior de las geodésicas nos permite obtener una fórmula explícita para la métrica d_H en H:

$$d_H(z, z') = \operatorname{arcosh}\left(1 + \frac{|z - z'|^2}{2 \cdot \Im z \cdot \Im z}\right)$$

siendo $\operatorname{arcosh} : \mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{R}$ la función:

$$x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

Acción de $\mathsf{SL}\,(2,\mathbb{R})$ en $\mathbb{H}^2$

Acción de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ en $\mathbb{H}^2$

Proposición (Acción de SL $(2,\mathbb{R})$ en H)

Se tiene lo siguiente:

(1) El grupo $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ actúa en H vía transformaciones de Möbius, más aún, esta acción es transitiva.

(2) El grupo estabilizador de i respecto a esta acción es $\mathrm{SO}(2)$.

(3) Para todo $z, z' \in H$ existe $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ tal que:

$$f_A(z) = i \quad \text{y} \quad \Re(f_A(z')) = 0, \Im(f_A(z')) > 1$$

Acción de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ en $\mathbb{H}^2$

Demostración:

De *(1)*: Es inmediato que el grupo actúa via transformaciones de Möbius con la acción dada por:

$$(A, z) \mapsto A \cdot z = f_A(z), \quad \forall A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}), \forall z \in H$$

Veamos que esta acción es transitiva. Basta probar que para todo $z \in H$ existe un $A_z \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ tal que:

$$f_{A_z}(z) = i$$

Tomemos $x = \Re(z)$ y $y = \Im(z)$. Entonces la transformación de Möbius asociada a la matriz:

$$A_z = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{y}} & -\frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \sqrt{y} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$$

es tal que:

$$A_z \cdot z = f_{A_z}(z) = \frac{\frac{x+iy}{\sqrt{y}} - \frac{x}{\sqrt{y}}}{\sqrt{y}} = i$$

Acción de $\mathsf{SL}(2,\mathbb{R})$ en $\mathbb{H}^2$

Con lo que la acción es transitiva.
De *(2)*: Se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mathsf{SL}(2,\mathbb{R})_i &= \left\{ A \in \mathsf{SL}(2,\mathbb{R}) \,\middle|\, A \cdot i = i \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathsf{SL}(2,\mathbb{R}) \,\middle|\, a = d \text{ y } c = -b \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,\middle|\, a^2 + c^2 = 1 \right\} \\
&= \mathsf{SO}(2)
\end{aligned}$$

De *(3)*: Inmediato del inciso *(1)*.

Acción de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ en $\mathbb{H}^2$

Resulta que podemos dotar al grupo $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ con una topología. Para ello, notemos que la función:

$$f_A \mapsto (a, b, c, d)$$

es una función suprayectiva de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ en el subconjunto:

$$\left\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \middle| ad - bc = 1\right\}$$

y, es una función biyectiva al espacio cociente:

$$\left\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \middle| ad - bc = 1\right\} / \left\{(a, b, c, d) \sim (-a, -b, -c, -d)\right\}$$

Acción de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ en $\mathbb{H}^2$

Dotando al subespacio $\left\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \middle| ad - bc = 1\right\}$ con la norma usual de $\mathbb{R}^4$ resulta que el cociente también se puede dotar de una norma, así que el grupo $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ tiene una norma inducida por la norma del espacio cociente, a saber:

$$\|f_A\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Acción de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ en $\mathbb{H}^2$

Proposición

$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ es un grupo topológico con la métrica inducida por la norma:

$$\|f_A\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

Demostración:

$\blacksquare$

Švarc-Milnor y el plano hiperbólico

Švarc-Milnor y el plano hiperbólico

Lema (**Švarc-Milnor**)

Sea G un grupo actuando en un espacio métrico no vacío (X, d) por isometrías. Suponga que existen constantes $c, b \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que (X, d) es (c, d)-cuasi-geodésico y además que existe un conjunto $B \subseteq X$ con las siguientes propiedades:

- El diámetro de B es finito.
- Las traslaciones de G cubren a todo X, esto es: $\bigcup_{g \in G} g \cdot B = X$.
- El conjunto $S = \left\{ g \in G \middle| g \cdot B' \cap B' \neq \emptyset \right\}$ es finito, donde:

$$B' = B_{2 \cdot b}^{(X,d)}(B) = \left\{ x \in X \middle| \exists y \in B \text{ tal que } d(x, y) \leq 2b \right\}$$

Švarc-Milnor y el plano hiperbólico

Lema (Švarc-Milnor)

Entonces:

(1) El grupo G es generado por S; en particular, G es finitamente generado.

(2) Para todo $x \in X$, la función:

$$\begin{aligned} G &\to X \\ g &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

es una cuasi-isometría (con respecto a la métrica de palabras en G).

Švarc-Milnor y el plano hiperbólico

Observación

Notemos que para la acción de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ en el espacio métrico (H, d_H) estamos en la posibilidad de aplicar el lema anterior, solo basta verificar algunas condiciones. Las que ya se tienen son las siguientes:

(1) El espacio (H, d_H) es no vacío $(1,0)$-cuasi-geodésico, por ser geodésico.

(2) $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ actúa por isometrías en (H, d_H).

Para aplicar el lema, debemos ver que las tres condiciones del lema se cumplen para un conjunto $B \subseteq H$.

Švarc-Milnor y el plano hiperbólico

Sea $B = \{z\} \subseteq H$. Se tiene que:

(1) El diámetro de B es cero, es decir que es finito.

(2) $\bigcup_{A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})} A \cdot B = \bigcup_{A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})} A \cdot \{z\} = H$, pues la acción de $\mathrm{SL}\,(2,\mathbb{R})$ en H es transitiva.

(3) Como el espacio es $(1,0)$-cuasi-geodésico, solo hay que ver si el conjunto:

$$\left\{ A \cdot B \cap B \neq \emptyset \middle| A \in \mathrm{SL}\,(2,\mathbb{R}) \right\} = \left\{ A \cdot z = z \middle| A \in \mathrm{SL}\,(2,\mathbb{R}) \right\}$$

es finito o no. Esto ya que en este caso se tiene:

$$B' = B_{2 \cdot 0}^{(X,d)}(B) = \left\{ x \in X \middle| d(x,z) = 0 \right\} = B$$

Švarc-Milnor y el plano hiperbólico

Resulta que tal conjunto no es finito, pues si $A_z \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ es tal que:

$$f_{A_z}(z) = i$$

se tiene que:

$$A_z^{-1} \cdot \mathrm{SO}(2) \cdot A_z \subseteq \left\{ A \cdot B \cap B \neq \emptyset \middle| A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \right\}$$

pues:

$$f_{A_z^{-1} \cdot O \cdot A_z}(z) = f_{A_z^{-1}} \circ f_O \circ f_{A_z}(z) = f_{A_z^{-1}} \circ f_O(i) = f_{A_z^{-1}}(i) = z$$

con lo que el conjunto de la derecha no es finito, pues $A_z^{-1} \cdot \mathrm{SO}(2) \cdot A_z$ no lo es.

Švarc-Milnor y el plano hiperbólico

¿Cómo solucionamos este problema?

Usando subgrupos de $\mathsf{SL}(2,\mathbb{R})$ o equivalentemente, de $\mathsf{PSL}(2,\mathbb{R})$.

Grupos Fuchsianos

Grupos Fuchsianos

Definición

Un subgrupo $H < \mathrm{Isom}\,(2,\mathbb{R})^+$ es llamado **discreto** si el grupo H visto como subgrupo de $\mathrm{PSL}\,(2,\mathbb{R})$ es discreto.
En tal caso, H es llamado **grupo Fuchsiano**.

En otras palabras, un grupo Fuchsiano es un subgrupo discreto de $\mathrm{PSL}\,(2,\mathbb{R})$.

Grupos Fuchsianos

Ejemplo

El **grupo modular** $\mathrm{PSL}\,(2,\mathbb{Z})$ es un subgrupo discreto de $\mathrm{PSL}\,(2,\mathbb{R})$, por lo que es Fuchsiano.

Ejemplo

El grupo $\mathrm{PSL}\,(2,\mathbb{Q})$ es un subgrupo de $\mathrm{PSL}\,(2,\mathbb{R})$ que no es discreto, luego no es Fuchsiano.

Grupos Fuchsianos

Ejemplo

El conjunto de todas las traslaciones reales enteras $\left\{ T_n \middle| n \in \mathbb{Z} \right\}$ es un grupo Fuchsiano.

Ejemplo

El conjunto de todas las traslaciones reales $\left\{ T_r \middle| r \in \mathbb{R} \right\}$ no es un grupo Fuchsiano.

Definición (Clasificación de los elementos de PSL $(2,\mathbb{R})$)

Sea $[A] \in \mathrm{PSL}\,(2,\mathbb{R})$.

- Si $|\mathrm{Tr}\,(A)| < 2$ decimos que A es una **transformacioń elíptica**.
- Si $|\mathrm{Tr}\,(A)| = 2$ decimos que A es una **transformacioń parabólica**.
- Si $|\mathrm{Tr}\,(A)| > 2$ decimos que A es una **transformacioń hiperbólica**.

Grupos Fuchsianos

Grupos Fuchsianos

Definición (Familias localmente finitas)

Una familia $\left\{ F_i \subseteq X \middle| i \in I \right\}$ de subconjuntos un espacio métrico (X, d) es **localmente finita** si el conjunto:

$$\left\{ i \in I \middle| F_i \cap C \neq \emptyset \right\}$$

es un conjunto finito para todo $C \subseteq X$ compacto.

Definición (Acciones propiamente discontinuas)

Decimos que un grupo G actuando en un espacio métrico (X, d) **actúa propiamente de forma discontinua** si la familia $\left\{ G \cdot x \middle| x \in X \right\}$ es localmente finita.

Grupos Fuchsianos

Teorema (Caracterización de las acciones propiamente discontinuas)

Un grupo G actúa propiamente de forma discontinua sobre un espacio métrico (X, d) si y sólo si para todo $x \in X$ existe $\epsilon > 0$ tal que:

$$\left\{ g \in G \middle| g \cdot B_{\varepsilon}^{(X,d)}(x) \cap B_{\varepsilon}^{(X,d)}(x) \neq \emptyset \right\}$$

es un conjunto finito.

Grupos Fuchsianos

Teorema (Caracterización de los grupos Fuchsianos)

Sea $\Gamma < \mathrm{PSL}\left(2, \mathbb{R}\right)$. Entonces, Γ es Fuchsiano si y sólo si actúa propiamente de forma discontinua en (H, d_H).

Grupos Fuchsianos

Grupos Fuchsianos

Sea Γ un grupo Fuchsiano. Este grupo actúa por isometrías en (H, d_H).

Grupos Fuchsianos

Grupos Fuchsianos

Grupos Fuchsianos

Grupos Fuchsianos

Superficies de Género $g \geq 0$

Resulta que existe una relación profunda entre los subgrupos de isometrías del plano hiperbólico y el grupo fundamental de superficies de género g.

Teorema

Sea X un espacio conexo, localmente arco-conexo y semilocalmente simplemente conexo. Entonces X tiene admite una cubierta universal.

Superficies de Género $g \geq 0$

Definición

Una **superficie de Riemann** es un espacio topológico conexo Hausdorff M junto con una colección de cartas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ tales que:

- $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una cubierta abierta de M.
- Para todo $\alpha \in I$, $\phi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \subseteq \mathbb{C}$ es un homeomorfismo, donde V_α es un abierto de $\mathbb{C}$.
- Si $U_\alpha \cap U_\beta$ para algunos $\alpha, \beta \in I$, entonces la función $\phi_{\alpha\beta} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ es una homeomorfismo analítico complejo.

Superficies de Género $g \geq 0$

Ejemplo

$\mathbb{C}$ es una superficie de Riemann con carta $\{(\mathbb{C}, \mathbb{1}_{\mathbb{C}})\}$.

Ejemplo

La esfera $\mathbb{S}^2 \cong \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ es una superficie de Riemann (recuerde la proyección estereográfica).

Superficies de Género $g \geq 0$

Ejemplo

El plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$ es una superficie de Riemann. En efecto, basta con ver que el plano hiperbólico es un subconjunto de $\mathbb{C}$, por lo que hereda toda la estructura de variedad de Riemann.

Ejemplo

Toda superficie de género $g \geq 0$ es una superficie de Riemann.

Superficies de Género $g \geq 0$

Teorema (Teorema de uniformización de Riemann)

Toda superficie de Riemann simplemente conexa es conformemente equivalente a alguna de las tres:

- El plano complejo: $\mathbb{C}$.
- La esfera de Riemann; $\hat{\mathbb{C}}$.
- El plano hiperbólico: $\mathbb{H}^2$.

Superficies de Género $g \geq 0$

Con el teorema anterior resulta que podemos caracterizar los cubrientes universales de todas las superficies de género $g \geq 0$:

Proposición

Toda superficie de género $g \geq 0$ tiene como cubriente universal a alguno de los siguientes:

- El plano complejo: $\mathbb{C}$.
- La esfera de Riemann; $\hat{\mathbb{C}}$.
- El plano hiperbólico: $\mathbb{H}^2$.

En particular, si $g \geq 2$ entonces S_g tiene como cubriente universal a $\mathbb{H}^2$.

Superficies de Género $g \geq 0$

Espacios Hiperbólicos

Hiperbólicidad y δ-hiperbolicidad

Hablaremos ahora de una propiedad importante definida sobre espacios métricos geodésicos y cuasi-geodésicos.

Definición

Sea (X, d) un espacio métrico. Para cada $\delta > 0$ y para cada $A \subseteq X$ se define el conjunto:

$$B_\delta^{(X,d)}(A) = \left\{ x \in X \middle| \exists a \in A \text{ tal que } d(x,a) \leq \delta \right\}$$

Hiperbólicidad y δ-hiperbolicidad

Definición (Triángulos geodésicos δ-delgados)

Sea (X, d) un espacio métrico. Un **triángulo geodésico en** X es una tripleta $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ de geodésicas $\gamma_i : [0, L_i] \to X$ en X tales que:

$$\gamma_0(L_0) = \gamma_1(0), \quad \gamma_1(L_1) = \gamma_2(0), \quad \gamma_2(L_2) = \gamma_0(0)$$

Definición (Triángulos geodésicos δ-delgados)

Un triángulo geodésico es δ-**delgado** si:

$$\begin{aligned}
\operatorname{im}(\gamma_0) &\subseteq B_\delta^{(X,d)}(\operatorname{im}(\gamma_1) \cup \operatorname{im}(\gamma_2)), \\
\operatorname{im}(\gamma_1) &\subseteq B_\delta^{(X,d)}(\operatorname{im}(\gamma_0) \cup \operatorname{im}(\gamma_2)), \\
\operatorname{im}(\gamma_2) &\subseteq B_\delta^{(X,d)}(\operatorname{im}(\gamma_0) \cup \operatorname{im}(\gamma_1))
\end{aligned}$$

Hiperbólicidad y δ-hiperbolicidad

Ejemplo

Hiperbólicidad y δ-hiperbolicidad

Definición (Espacios hiperbólicos)

Sea (X, d) un espacio métrico.

(1) Sea $\delta\mathbb{R}_{\geq 0}$. Decimos que (X, d) es δ-**hiperbólico** si X es geodésico y todos los triángulos geodésicos de X son δ-delgados.

(2) (X, d) es **hiperbólico** si existe $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que (X, d) es δ-hiperbólico.

Ejemplo

Todo espacio métrico geodésico X de diámetro finito es $\operatorname{diam}(X)$-hiperbólico.

Hiperbólicidad y δ-hiperbolicidad

Ejemplo

La recta real $\mathbb{R}$ es 0-hiperbólico ya que cada triángulo geodésico en $\mathbb{R}$ es degenerado, pues estos se ven simplemente como líneas rectas.

Ejemplo

El plano euclideano $\mathbb{R}^2$ no es hiperbólico.

Hiperbólicidad y δ-hiperbolicidad

¿Coincide esta nueva noción de hiperbolicidad de espacios métricos con la definición sobre superficies?

Hiperbolicidad del Plano $\mathbb{H}^2$

Hiperbolicidad del Plano $\mathbb{H}^2$

Nuestro objetivo en esta subsección será probar el siguiente resultado:

Proposición

El plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$ (visto como espacio métrico) es un espacio métrico hiperbólico en el sentido de la definición de la sección anterior.

Antes de llegar a ello, probaremos algunos resultados adicionales y enunciaremos algunas defénciones fundamentales.

Definición (Área hiperbólica)

Sea $f : H \to \mathbb{R}_{\geq}0$ una función Lebesgue integrable. Se define la **integral de** f **sobre** $\mathbb{H}^2$ como:

$$\begin{aligned}\int_H f\, dV_H &= \int_H f(x,y)\sqrt{\det(G_{H,(x,y)})}\, dxdy \\ &= \int_H \frac{f(x,y)}{y^2}\, dxdy\end{aligned}$$

donde:

$$G_{H,,(x,y)} = \begin{pmatrix} g_{H,(x,y)}(e_1, e_1) & g_{H,(x,y)}(e_1, e_2) \\ g_{H,(x,y)}(e_2, e_1) & g_{H,(x,y)}(e_2, e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/y^2 & 0 \\ 0 & 1/y^2 \end{pmatrix}$$

siendo $e_1, e_2 \in T_{(x,y)}H = \mathbb{R}^2$ los vectores canónicos.

Hiperbolicidad del Plano $\mathbb{H}^2$

Definición (Área hiperbólica)

Si $A \subseteq H$ es un conjunto Lebesgue medible, definimos el **área hiperbólica de** A por:

$$\mu_{\mathbb{H}^2}(A) = \int_H \chi_A \, dV_H$$

siendo χ_A la función característica de A.

Hiperbolicidad del Plano $\mathbb{H}^2$

Proposición (Las isometrías preservan el área)

Sea $A \subseteq H$ un conjunto Lebesgue medible y tomemos $f \in \operatorname{Isom}(H, d_H)$. Entonces, $f(A)$ es medible y:

$$\mu_{\mathbb{H}^2}(A) = \mu_{\mathbb{H}^2}(f(A))$$

Hiperbolicidad del Plano $\mathbb{H}^2$

Proposición (Crecimiento exponencial del área hiperbólica)

Para todo $r \in \mathbb{R}_{>10}$ tenemos que:

$$\mu_{\mathbb{H}^2}(B_r^{(H,d_H)}(i)) \geq e^{\frac{r}{10}}(1 - e^{-\frac{r}{2}})$$

Demostración:

Sea $r \in \mathbb{R}_{>10}$. Se tiene que el conjunto:

$$Q_r = \left\{x + iy \middle| x \in [0, e^{r/10}], y \in [1, e^{r/2}]\right\}$$

está contenido en $B_r^{(H,d_H)}(i)$. En particular, obtenemos que:

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbb{H}^2}(B_r^{(H,d_H)}(i)) &\geq \mu_{\mathbb{H}^2}(Q_r) \\ &= \int_0^{e^{r/10}} \int_1^{e^{r/2}} \frac{dxdy}{y^2} \\ &= e^{\frac{r}{10}}(1 - e^{-\frac{r}{2}}) \end{aligned}$$

Hiperbolicidad del Plano $\mathbb{H}^2$

Definición (Área de un triángulo geodésico)

Sea Δ un triángulo geodésico en (H, d_H). Se define el **área de** Δ como:

$$\mu_{\mathbb{H}^2}(\Delta) = \mu_{\mathbb{H}^2}(A_\Delta)$$

siendo $A_\Delta \subseteq H$ el conjunto compacto encerrado por las geodésicas de Δ.

Hiperbolicidad del Plano $\mathbb{H}^2$

Teorema (Teorema de Gauß-Bonnet para triángulos hiperbólicos)

Sea Δ un triángulo geodésico en (H, d_H) con ángulos α, β, γ y suponga que la imagen de Δ no está contenida en una sola línea geodésica. Entonces:

$$\mu_{\mathbb{H}^2}(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

En particular, la suma de los ángulos de un triángulo geodésico es menor que π y el área hiperbólica está acotada por π.

Teorema (Triángulos son delgados)

Existe una constante $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que todo triángulo geodésico en (H, d_H) es C-delgado.

Demostración:
Por la proposición anterior, existe $C > 0$ tal que:

$$\mu_{\mathbb{H}^2}(B_C^{(H,d_H)}(i)) \geq 4 \cdot \pi$$

(por ejemplo $C = 26$). Tomemos $\Delta = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ un triángulo geodésico en (H, d_H) y sea $x \in \operatorname{im}(\gamma_0)$.
Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el triángulo geodésico Δ no está contenido en una sola línea geodésica. Por el inciso *(3)* de la Proposición (1.6) se sigue que podemos trasladar los puntos x a i y el final de la geodésica a un punto tal que:

$$f_A(z) = ci, \quad c > 1$$

Hiperbolicidad del Plano $\mathbb{H}^2$

Luego, del Teorema (1.2) y la Proposición () se sigue que la geodésica γ_0 es un segmento vertical que yace sobre el eje y.
Supongamos que no existe $y \in \operatorname{im}(\gamma_1) \cup \operatorname{im}(\gamma_2)$ tal que $d_H(x, y) \leq C$. Se tiene entonces que:

$$B_c^{(H,d_H)}(i) \subseteq A_\Delta \cup \operatorname{im}(\gamma_0) \cup f(A_\Delta)$$

siendo A_Δ el conjunto encerrado por las geodésicas de Δ y $f : H \to H$ la isometría $z \mapsto -\overline{z}$.
Por tanto:

$$\begin{aligned}
4 \cdot \pi &\leq \mu_{\mathbb{H}^2}(B_C^{(H,d_H)}(i)) \\
&\leq \mu_{\mathbb{H}^2}(A_\Delta \cup \operatorname{im}(\gamma_0) \cup f(A_\Delta)) \\
&= \mu_{\mathbb{H}^2}(A_\Delta) + \mu_{\mathbb{H}^2}(\operatorname{im}(\gamma_0)) + \mu_{\mathbb{H}^2}(f(A_\Delta)) \\
&= \mu_{\mathbb{H}^2}(\Delta) + \mu_{\mathbb{H}^2}(D) \\
&< 2 \cdot \pi
\end{aligned}$$

Hiperbolicidad del Plano $\mathbb{H}^2$

Lo cual es una contradicción. Por lo cual existe $y \in \operatorname{im}(\gamma_1) \cup \operatorname{im}(\gamma_2)$ tal que $d(x, y) \leq C$. En particular se sigue que:

$$\operatorname{im}(y_0) \subseteq \bigcup_{y \in \operatorname{im}(\gamma_1) \cup \operatorname{im}(\gamma_2)} B_C^{(H,d_H)}(y) \subseteq B_C^{(H,d_H)}(\operatorname{im}(\gamma_1) \cup \operatorname{im}(\gamma_2))$$

el procedimiento anterior se puede repetir para las otras geodésicas, resultando en que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{im}(\gamma_0) &\subseteq B_C^{(H,d_H)}(\operatorname{im}(\gamma_1) \cup \operatorname{im}(\gamma_2)), \\
\operatorname{im}(\gamma_1) &\subseteq B_C^{(H,d_H)}(\operatorname{im}(\gamma_0) \cup \operatorname{im}(\gamma_2)), \\
\operatorname{im}(\gamma_2) &\subseteq B_C^{(H,d_H)}(\operatorname{im}(\gamma_0) \cup \operatorname{im}(\gamma_1))
\end{aligned}$$

así que C es un triángulo geodésico C-delgado. Como el Δ triángulo geodésico fue arbitrario se sigue que el plano hiperbólico es C-hiperbólico, es decir que es hiperbólico en el sentido de espacio métrico.

Hiperbolicidad del Plano $\mathbb{H}^2$

Un resultado más general dice que...

Y, ¿para qué nos sirve la hiperbolicidad?

La hiperbolicidad es un invariante cuasi-isométrico

Hiperbolicidad es invariante cuasi-isométrico

Para llegar a probar tal cosa, debemos debilitar la definición de hiperbolicidad:

Definición (Triángulos cuasi-geodésicos δ-delgados)

Sea (X, d) un espacio métrico.

1 Un **triángulo cuasi-geodésico en** X es una tripleta $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ de $(c, b)-$cuasi-geodésicas $\gamma_i : [0, L_i] \to X$ en X tales que:

$$\gamma_0(L_0) = \gamma_1(0), \quad \gamma_1(L_1) = \gamma_2(0), \quad \gamma_2(L_2) = \gamma_0(0)$$

2 Un triángulo (c, b)-cuasi-geodésico es δ-**delgado** si:

$$\begin{aligned}
\operatorname{im}(\gamma_0) &\subseteq B_\delta^{(X,d)}(\operatorname{im}(\gamma_1) \cup \operatorname{im}(\gamma_2)),\\
\operatorname{im}(\gamma_1) &\subseteq B_\delta^{(X,d)}(\operatorname{im}(\gamma_0) \cup \operatorname{im}(\gamma_2)),\\
\operatorname{im}(\gamma_2) &\subseteq B_\delta^{(X,d)}(\operatorname{im}(\gamma_0) \cup \operatorname{im}(\gamma_1))
\end{aligned}$$

Hiperbolicidad es invariante cuasi-isométrico

Observación

De esta definición es inmediato que todo triángulo geodésico es triángulo cuasi-geodésico.

Hiperbolicidad es invariante cuasi-isométrico

Definición (Espacios cuasi-hiperbólicos)

Sea (X, d) un espacio métrico.

(1) Sean $c, b \in \mathbb{R}_{>0}$, $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Decimos que el espacio (X, d) es (c, b, δ)-**cuasi-hiperbólico** si (X, d) es (c, b)-cuasi-geodésico y todos los triángulos (c, b)-cuasi-geodésicos en X son δ-delgados.

(2) Sean $c, b \in \mathbb{R}_{>0}$. El espacio (X, d) es llamado (c, b)-**cuasi-hiperbólico** si para todo $c', b' \in \mathbb{R}_{>0}$ con $c' \geq c$ y $b' \geq b$ existe $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que (X, d) es (c', b', δ)-cuasi-hiperbólico.

(3) El espacio (X, d) es **cuasi-hiperbólico** si existen $c, b \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que (X, d) es (c, b)-cuasi-hiperbólico.

Hiperbolicidad es invariante cuasi-isométrico

Ejemplo

Todos los espacios métricos de diámetro finito son cuasi-hiperbólicos.

Observación

En general resultará muy complicado probar que un espacio es cuasi-hiperbólico usando la definición anterior, por el hecho de que pueden existir demasiadas geodésicas. Resulta que este proceso se puede hacer más sencillo usando unos resultados que se verán más adelante.

Hiperbolicidad es invariante cuasi-isométrico

Proposición (**Invariancia de la cuasi-hiperbolicidad bajo cuasi-isometrías**)

Sean (X, d) y (Y, ρ) espacios métricos.

(1) Si (Y, ρ) es cuasi-geodésico y, (X, d) y (Y, ρ) son cuasi-isométricos, entonces (X, d) es cuasi-geodésico.

(2) Si (Y, ρ) es cuasi-hiperbólico, (X, d) es cuasi-geodésico y existe un encaje cuasi-isométrico de (X, d) en (Y, ρ), entonces (X, d) es cuasi-hiperbólico.

(3) Si (X, d) y (Y, ρ) son cuasi-isométricos, entonces X es cuasi-hiperbólico si y sólo si Y es cuasi-hiperbólico.

Hiperbolicidad es invariante cuasi-isométrico

Resulta que no existe mucha diferencia entre la propiedad de hiperbolicidad y cuasi-hiperbolicidad, como lo muestra el siguiente resultado:

Teorema (Hiperbolicidad y cuasi-hiperbolicidad)

Sea (X, d) un espacio métrico geodésico. Entonces (X, d) es hiperbólico si y sólo si es cuasi-hiperbólico.

Si (X, d) es cuasi-hiperbólico, entonces es hiperbólico (ya que en particular toda geodésica es una cuasi-geodésica y por ende, todo triángulo geodésico es cuasi-geodésico).

Hiperbolicidad es invariante cuasi-isométrico

La idea para probar la otra parte de la demostración de este teorema radica en ver como podemos aproximar cuasi-geodésicas con geodésicas y por ende, aproximar cuasi-triángulos geodésicos con triángulos geodésicos.

Corolario (Invariancia cuasi-isométrica de la hiperbolicidad)

Sean (X, d) y (Y, ρ) espacios métricos.

(1) Si (Y, ρ) es hiperbólico, (X, d) es cuasi-geodésico y existe un encaje cuasi-isométrico de (X, d) en (Y, ρ), entonces X es cuasi-hiperbólico.

(2) Si (Y, ρ) es geodésico y (X, d) es cuasi-isométrico a (Y, ρ), entonces (X, d) es cuasi-hiperbólico si y sólo si (Y, ρ) es hiperbólico.

(3) Si (X, d) y (Y, ρ) son geodésicos y cuasi-isométricos, entonces (X, d) es hiperbólico si y sólo si (Y, ρ) es hiperbólico.

Hiperbolicidad es invariante cuasi-isométrico

Como algunos ejemplos de la aplicación del teorema anterior tenemos los siguientes:

Corolario (Hiperbolicidad de gráficas)

Sea X una gráfica conexa. Entonces X es cuasi-hiperbólica si y sólo si su realización geométrica $|X|$ es hiperbólica.

Demostración:

$\blacksquare$

Hiperbolicidad es invariante cuasi-isométrico

Proposición (Hiperbolicidad de árboles)

Si T es un árbol, entonces su realización geométrica $|T|$ es 0-hiperbólica. En particular, T es cuasi-hiperbólico.

Demostración:

■

¿Y PARA QUÉ SIRVE LA HIPERBOLICIDAD?

Grupos Hiperbólicos

Grupos Hiperbólicos

Debido a que la hiperbolicidad (y cuasi-hiperbolicidad) es un invariante cuasi-isométrico, resulta que podemos extender la noción de hiperbolicidad a grupos:

Definición (Grupos hiperbólicos)

Un grupo finitamente generado G es **hiperbólico** si para algún conjunto generador S de G se tiene que la gráfica de Caley $\mathrm{Cay}(G, S)$ es cuasi-hiperbólica.

Observación

Como la gráfica de Caley de un grupo G es un invariante cuasi-isométrico, es decir que si $S, S' \subseteq G$ son conjuntos finitos que generan a G, se tiene que:

$$\mathrm{Cay}\left(G, S\right) \underset{C.I.}{\sim} \mathrm{Cay}\left(G, S'\right)$$

Proposición (Hiperbolicidad es un invariante cuasi-isométrico)

Sean G y H grupos finitamente generados.

(1) Si H es hiperbólico y existen conjuntos finitos generadores S y T, de G y H, respectivamente tal que existe un encaje cuasi-isométrico entre (G, d_S) y (H, d_T), entonces G es hiperbólico.

(2) Si G y H son cuasi-isométricos, entonces G es hiperbólico si y sólo si H es hiperbólico.

Demostración:

■

Grupos Hiperbólicos

Ejemplo

Todos los grupos finitos son hiperbólicos ya que la realización geométrica de su gráfica de Caley es de diámetro finito.

Ejemplo

$\mathbb{Z}$ es hiperbólico por ser cuasi-isométrico a $\mathbb{R}$, que es un espacio métrico hiperbólico.

Grupos Hiperbólicos

Ejemplo

$\mathbb{Z}^2$ no es hiperbólico, ya que es cuasi-isométrico al plano euclideano $\mathbb{R}^2$, el cual no es hiperbólico.

Grupos Hiperbólicos

¿Y PARA QUÉ GENERALIZAR ESTA NOCIÓN A GRUPOS?

El problema de la palabra en Grupos Hiperbólicos

El problema de la palabra en Grupos Hiperbólicos

Definición

Sea $\langle S|R\rangle$ una presentación finita de un grupo. Decimos que **el problema de la palabra es soluble para la presentación** $\langle S|R\rangle$, si existe una función total computable que recibe como entrada una palabra en $(S \cup S^{-1})^*$ que decida si esta representa o no un elemento trivial en el grupo $\langle S|R\rangle$.

El problema de la palabra en Grupos Hiperbólicos

Al decir que exista una función total computable, en términos más simples estamos diciendo que existe un algoritmo que para cada entrada que demos, termina en un tiempo finito.

Observación

Otra forma de enunciar la definición anterior es que los conjuntos:

$$\left\{ w \in (S \cup S^{-1})^* \middle| w \text{ representa un elemento trivial de } \langle S | R \rangle \right\}$$

$$\left\{ w \in (S \cup S^{-1})^* \middle| w \text{ no representa un elemento trivial de } \langle S | R \rangle \right\}$$

son conjuntos computablemente enumerables.

El problema de la palabra en Grupos Hiperbólicos

Al decir que son computablemente enumerables, intuitivamente estamos diciendo que existe un algoritmo que va arrojando todos los elementos de este conjunto.

Ejemplo

La presentación $\langle x, y | \emptyset \rangle$ tiene problema de la palabra soluble, al igual que $\langle x, y | xyx^{-1}y^{-1} \rangle$.

A primera vista uno podría imaginar que todo grupo finitamente presentado tiene problema de la palabra soluble, cosa que no es cierta, como muestra el siguiente resultado:

Teorema

Existen grupos finitamente presentados tales que ninguna presentación finita de ellos tiene problema de la palabra soluble.

El problema de la palabra en Grupos Hiperbólicos

Ejemplo

El grupo: no tiene problema de la palabra soluble.

Más cosas que podemos decir sobre los grupos hiperbólicos es lo siguiente:

El problema de la palabra en Grupos Hiperbólicos

Teorema (Grupos genéricos son hiperbólicos)

En un sentido estadístico bien definido, casi todos los grupos con presentación finita representan grupos hiperbólicos.

Por lo que resulta relevante preguntarnos sobre propiedades de los grupos hiperbólicos.

El problema de la palabra en Grupos Hiperbólicos

Definición (Presentaciones de Dehn)

Una presentación finita $\langle S|R\rangle$ es una **presentación de Dehn** si existe $n \in \mathbb{N}$ y palabras $u_1, ..., u_n, v_1, ..., v_n$ tales que:

- $R = \left\{u_1 v_1^{-1}, ..., u_n v_n^{-1}\right\}$.
- Para todo $j = 1, ..., n$, la palabra v_j es más corta que u_j.
- Para topa palabra $w \in (S \cup S^{-1})^* \setminus \{e\}$ que representa un elemento neutro del grupo $\langle S|R\rangle$ existe $j = 1, ..., n$ tal que u_j es subpalabra de w.

El problema de la palabra en Grupos Hiperbólicos

Ejemplo

La presentación:

$$\langle x, y | xx^{-1}e, yy^{-1}e, x^{-1}xe, y^{-1}ye \rangle$$

es una presentacion de Dehn del grupo libre de rango 2.

Ejemplo

La presentación:

$$\langle x, y | [x, y] \rangle$$

no es una presentación de Dehn de $\mathbb{Z}^2$.

Proposición (Algoritmo de Dehn)

Si $\langle S|R\rangle$ es una presentación de Dehn, entonces el problema de la palabra es soluble para $\langle S|R\rangle$.

Demostración:
Escribimos:

$$R = \left\{u_1 v_1^{-1}, ..., u_n v_n^{-1}\right\}$$

como en la definición de presentación de Dehn. Tomemos $w \in (S \cup S^{-1})^*$ una palabra.

- Si $w = e$, entonces w representa un elemento trivial del grupo $\langle S|R\rangle$.
- Si $w \neq e$, tenemos dos casos:
  - Si ninguna de las palabras $u_1, ..., u_n$ es una subpalabra de w, entonces w no representa un elemento trivial del grupo $\langle S|R\rangle$ (por la tercera parte de la defineción de presentaciones de Dehn).

El problema de la palabra en Grupos Hiperbólicos

Demostración:

- Si $w \neq e$, tenemos dos casos:
  - Existe $j = 1, ..., n$ tal que u_j es subpalabra de w, en cuyo caso se sigue que existen palabras w', w'' tales que: $w = w' u_j w''$. Ahora, como $u_j v_j^{-1} \in R$ se sigue que los elementos:

    $$w' u_j w'' \quad \text{y} \quad w' v_j w''$$

    representan el mismo elemento en el grupo $\langle S | R \rangle$. Así que la palabra w es trivial si y sólo si la palabra $w' v_j w''$ (que es más corta) es trivial. Aplicando recursivamente el algoritmo se llega a determinar si w es la palabra trivial o no.

Este algoritmo siempre determina si la palabra w es trivial o no, por lo que el problema de la palabra es resoluble en $\langle S | R \rangle$. ■

El problema de la palabra en Grupos Hiperbólicos

Teorema (Presentaciones de Dehn en grupos hiperbólicos)

Sea G un grupo hiperbólico y S un conjunto generador de G. Entonces existe un conjunto finito $R \subseteq (S \cup S^{-1})^*$ tal que $\langle S|R \rangle$ es una presentación de Dehn y $G \cong \langle S|R \rangle$.

El problema de la palabra en Grupos Hiperbólicos

Corolario (Grupos hiperbólicos tienen problema de la palabra soluble)

Sea G grupo hiperbólico y $S \subseteq G$ un conjunto generador finito. Entonces existe una presentación finita $\langle S|R \rangle$ de G tal que el problema de la palabra es soluble.

Corolario

Todo grupo hiperbólico admite una presentación finita.

Referencias

Fin