Notas Curso Topología Algebraica
10° Escuela Oaxaqueña de Matemáticas

Cristo Daniel Alvarado

8 de enero de 2025

Índice general

Capítulo 1

Topología Algebraica

§1.1 El grupo fundamental

Observación 1.1.1
De ahora en adelante X y Y serán espacios topológicos.

Definición 1.1.1
Sean X y Y espacios. Dos funciones continuas $f, g : X \to Y$ son **homotópicas** si $\exists H : X \times [0,1] \to Y$ continua (una **homotopía**) tal que:

$$H(x,0) = f(x) \text{ y } H(x,1) = g(x), \quad \forall x \in X$$

Escribimos que $f \simeq g$.

Definición 1.1.2
Los espacios X y Y son **homotópicamente equivalentes** si $\exists f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ funciones continuas (llamadas **equivalencias homotópicas**) tales que:

$$f \circ g \eqsim \mathbb{1}_X \quad \text{y} \quad g \circ f = \mathbb{1}_Y$$

a lo cual escribimos $X \simeq Y$.

Observación 1.1.2
$\simeq$ define una relación de equivalencia en la clase de espacios topológicos.

Demostración:
Ejercicio. ■

Proposición 1.1.1
Si X es homeomorfo a Y, entonces $X \simeq Y$.

Definición 1.1.3
Un espacio X es **contráctil** si $X \simeq \{*\}$.

Observación 1.1.3
Otra equivalencia es que $C_p : X \to X$ $x \mapsto p$ es homotópica a la identidad.

Ejemplo 1.1.1
$\mathbb{R}^n, I = [0,1], \mathbb{D}^n$ son contráctilces.

Definición 1.1.4
Un subespacio A de X es **un retracto de** X si $\exists r : X \to A$ continua tal que $r\big|_A = \mathbb{1}_A$. En este caso r es llamada una **retracción**.

Definición 1.1.5
Dos funciones son homotópicas relativas a A si para la función $H : X \times I \to Y$ es tal que:

$$H(a,t) = a, \quad \forall a \in A \forall t \in I$$

Definición 1.1.6
Un retracto A de X se llama **retracto por deformación** si $i \circ x : X \to X$ es homotópica a $\mathbb{1}_X$ relativa a A.

Ejemplo 1.1.2
X es contráctil si y sólo si $\forall p \in X$, $\{p\} \subseteq X$ es un retracto por deformación.

Ejemplo 1.1.3
$\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C} \setminus 0$ es un retracto por deformación.

Ejemplo 1.1.4
$\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C} \setminus \{p,q\}$ es un retracto por deformación (con $p \neq q$). En este caso, $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ es la suma puntuada (o wedge). En este caso:

$$\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1 / x \sim y$$

donde x está en la primer esfera y y en la segunda.

Ejemplo 1.1.5
$\underbrace{\mathbb{S}^1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}^1}_{n-\text{veces}}$ la rosa de n-pétalos es una deformación de retracción de $\mathbb{C} \setminus \{p_1, ..., p_n\}$.

Ejemplo 1.1.6
El círculo central de la banda de Möbius es retracto por deformación de X.

Surge naturalmente la siguiente pregunta:

¿Cuándo dos espacios topológicos X y Y NO son topológicamente equivalentes?

La topología algebraica nos da repuestas para este tipo de preguntas, ya que traducimos el problema a algo algebraico para luego resolverlo a partir de invariantes algebraicos.

§1.2 Caminos y Homotopías: El grupo fundamental

Definición 1.2.1
Sea X espacio topológico. Un **camino de p a q en X** (con $p,q\in X$) es una función continua $f:[0,1]\to X$ tal que $f(0)=p$ y $f(1)=q$.

Definición 1.2.2
Dos caminos $\gamma_0,\gamma_1:[0,1]\to X$ de $p\in X$ a $q\in X$ son **homotópicos** si $\exists H:[0,1]\times[0,1]\to X$ continua tal que:

$$H\Big|_{[0,1]\times\{0\}}=\gamma_0, H\Big|_{[0,1]\times\{1\}}=\gamma_1$$

y, $H\Big|_{\{0\}\times[0,1]}=p$ y $H\Big|_{\{1\}\times[0,1]}=1$.

Observación 1.2.1
En cierto sentido, la familia de caminos:

$$\left\{\gamma_t=H\Big|_{[0,1]\times\{t\}}\Big|t\in[0,1]\right\}$$

deforma al camino γ_0 en γ_1.

Proposición 1.2.1
$\simeq$ es una relación de equivalencia en el conjunto de caminos en X de p a q.

Observación 1.2.2
Escribimos $[\gamma]$ para la clase de γ.

Lema 1.2.1
Sea $\gamma:[0,1]\to X$ un camino de p a q y $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ continua. Entonces, $\gamma\simeq\gamma\circ\varphi$.

En otras palabras, reparametrizar da caminos homotópicos. Más aún, da básicamnete el mismo recorrido a diferentes velocidades.

Definición 1.2.3 (**Concatenación de caminos**)
Sean γ un camino de p a q en X y μ un camino de q a r. Definimos el camino $\gamma*\mu:[0,1]\to X$ de p a r como:

$$\gamma*\mu(t)=\begin{cases}\gamma(2t) & \text{si} \quad t\in[0,1/2]\\ \mu(2t-1) & \text{si} \quad t\in[1/2,1]\end{cases}$$

Definición 1.2.4
Sea $p\in X$, $e_p:[0,1]\to X$ dado por: $e_p(t)=p$ para todo $t\in[0,1]$ es el **camino constante** de p a p.

Lema 1.2.2
Sean $\gamma_0\simeq\gamma_1$ caminos de p a q y $\mu_0\simeq\mu_1$ caminos de q a r. Entonces: $\gamma_0*\mu_0\simeq\gamma_1*\mu_1$.

Lema 1.2.3
Sea γ camino de p a q, μ de q a r y τ de r a s. Entonces, $\gamma*(\mu*\tau)\simeq(\gamma*\mu)*\tau$.

Lema 1.2.4
Sea γ camino de p a q. Entonces:
$$\gamma * e_p \simeq \gamma \simeq e_p * \gamma$$

Definición 1.2.5
Sea γ un camino de p a q. El **camio inverso** $\overline{\gamma}:[0,1]\to X$ de q a p está dado por:
$$\overline{\gamma}(t)=\gamma(1-t),\quad \forall t\in[0,1]$$

Lema 1.2.5
$\gamma*\overline{\gamma}\simeq e_p$, $\overline{\gamma}*\gamma\simeq e_q$ y $\overline{\overline{\gamma}}=\gamma$.

Definición 1.2.6
Un camino es **cerrado/lazo** si sus extremos coinciden.

Definición 1.2.7
Decimos que γ es un **lazo basado en** $x_0\in X$ si $\gamma(0)=\gamma(1)=x_0$.

Definición 1.2.8
Sea $x_0\in X$. El **grupo fundamental de X con punto base en** x_0 es el conjunto $\pi_1(X,x_0)$ dado por:
$$\pi_1(X,x_0)=\left\{[\gamma]\middle|\gamma:[0,1]\to X\text{ es un lazo basado en }x_0\in X\right\}$$
con el producto dado por el inducido por la concatenación de caminos.

Observación 1.2.3
$*$ es asociativa, $[e_{x_0}]$ es el elemento neutro y $[\overline{\gamma}]$ es el inverso de $[\gamma]$.

Ejemplo 1.2.1
$\pi_1(\mathbb{R}^n,x_0)=\{[e_{x_0}]\}$.

Ejemplo 1.2.2
Si $U\subseteq\mathbb{R}^n$ tiene forma de estrella relativo a $x_0\in\mathbb{R}^n$, entonces $\pi_1(X,x_0)=\langle e\rangle$.

Observación 1.2.4
Veremos que:

(a) $\pi_1(\mathbb{S}^1,1)\cong\mathbb{Z}$.

(b) $\pi_1(\mathbb{S}^n,x_0)\cong\langle e\rangle$ si $n\geq 2$.

(c) $\pi_1(\mathbb{C}\setminus\{p,q\},x_0)\cong F_2$, el grupo libre en dos elementos.

Definición 1.2.9
Si X arco-conexo tal que $\pi(X, x_0) = \langle e \rangle$, X es llamdo **simplemente conexo**.

Lema 1.2.6 (**Cambio de punto base**)
Sea X espacio topológico y γ un camino de p a q. Definimos $\varphi_\gamma : \pi_1(X, p) \to \pi_1(X, q)$ dada por:

$$[\delta] \mapsto [\gamma * \delta * \overline{\gamma}]$$

Entonces, φ_γ es un homomorfismo de grupos que solo depende de la clase de homotopía de γ.

Lema 1.2.7
Se tiene que:

$$\varphi_{[\gamma]} \circ \varphi_{[\overline{\gamma}]} = \mathbb{1}_{\pi_1(X,q)}$$
$$\varphi_{[\overline{\gamma}]} \circ \varphi_{[\gamma]} = \mathbb{1}_{\pi_1(X,p)}$$

Corolario 1.2.1
$\varphi_{[\gamma]}$ es un isomorfismo de grupos.

Lema 1.2.8
Si p, q están en la misma compontente arco-conexa, entonces $\pi_1(X, p) = \pi_1(X, q)$.

§1.3 Funtorialidad

Observación 1.3.1
Podemos ver al grupo fundamental como un funtor:

$$\pi_1 : \mathrm{Top}_* \to \mathrm{Grp}$$

tal que $(X, x) \mapsto \pi_1(X, x)$.

Proposición 1.3.1
Sea $f : X \to Y$ una función continua y $\gamma : [0, 1] \to X$ un camino de p a q. Definimos $f_*(\gamma) = f \circ \gamma$.

(a) $f_*(\gamma)$ es un camino de Y que une a $f(p)$ con $f(q)$.

(b) Si $\gamma \simeq \gamma'$ entonces $f_*(\gamma) \simeq f_*(\gamma')$.

(c) γ es un camino de p a q implica que $f_*(\gamma * \mu) =$.

(d) Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son funciones continuas, entonces:

$$g_* \circ f_* = g_* \circ f_*$$

(e) $(\mathbb{1}_X)_* = \mathbb{1}_{\pi_1(X,x_0)}$.

Con lo anteroir estamos diciendo que π_1 es un funtor covariante de la categoría de espacios topológicos puntuados en la categoría de grupos.

Teorema 1.3.1
π_1 es un invariante de homeomorfismo, es decir si $X \cong Y$, entonces $\pi_1(X, x_0) \overset{f_0}{\cong} \pi_1(Y, f(x_0))$.

Lema 1.3.1
Sean $f, g : X \to Y$ y $x_0 \in X$. Si $f \simeq g$ relativas a x_0, entonces:

$$f_* = g_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi(Y, f(x_0))$$

Teorema 1.3.2
Sea $f : X \to Y$ y $y_0 = f(x_0)$. Si f es una equivalencia de homotopía, entonces $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi(Y, f(x_0))$ es un isomorfismo, es decir que π_1 es un invariante de homotopía.

Teorema 1.3.3
Si A es un retracto por deformación de X y $x_0 \in A$, entonces el mapeo inclusión $i : A \to X$ induce un homomorfismo:

$$i_* : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

Capítulo 2

Ejercicios y Problemas

§2.1 Preeliminares: el grupo fundamental

Observación 2.1.1
Durante todo el curso todas las funciones son continuas a menos que se diga explícitamente lo contrario.

Ejercicio 2.1.1
Muestre que el homomorfismo de cambio de punto base β_h depende sólo de la clase de homotopía de h.

Demostración:

■

Ejercicio 2.1.2
Sea $f : X \to Y$ una función continua. Si $\alpha, \beta : I \to X$ son caminos homotópicos muestre que los caminos $f \circ \alpha$ y $f \circ \beta$ son homotópicos.

Demostración:

■

Ejercicio 2.1.3
Si X_0 es la componente conexa por caminos del espacio X que contiene al punto base x_0, muestre que la inclusión $i : X_0 \to X$ induce un homomorfismo $i_* : \pi_1(X_0, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ dado por $[\gamma] \mapsto [i \circ \gamma]$.

Note que hay que mostrar que i_* está bien definido, es un homomorfismo y es biyectivo.

Demostración:

■

Ejercicio 2.1.4
Muestre que no existen retracciones en los siguientes casos:

(a) $X = \mathbb{R}^3$ con A cualquier subespacio homeomorfo a $\mathbb{S}^1$.

(b) $X = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$ con A su frontera $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

(c) X la banda de Möbius y A su círculo frontera.

Demostración:

■

Ejercicio 2.1.5
Muestre que cualquier homomorfismo $\pi_1(\mathbb{S}^1) \to \pi_1(\mathbb{S}^1)$ puede ser realizado como el homomorfismo inducido ψ_* de una función $\psi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$.

Demostración:

■

Ejercicio 2.1.6
Muestre que el complemento de un conjunto finito de puntos en $\mathbb{R}^n$ es simplemente conexo si $n \geq 3$.

Demostración:

■

Ejercicio 2.1.7
Calcule el grupo fundamental del espacio obtenido de dos toros $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ identificando el círculo $\mathbb{S}^1 \times \{x_0\}$ en un toro con el correspondiente círculo $\mathbb{S}^1 \times \{x_0\}$ en el otro toro.

Solución:

□

Ejercicio 2.1.8
Calcula el grupo fundamental de la botella de Klein, el plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$ y $\mathbb{S}^3$.

Solución:

□

Ejercicio 2.1.9
Calcula el grupo fundamental del complenento de un conjunto finito de puntos en $\mathbb{R}^2$.

Solución:

□

Ejercicio 2.1.10
Demuestra que $\pi_1(\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2)$ no es numerable.

Demostración:

■

Ejercicio 2.1.11
Sea X el espacio cociente obtenido de $\mathbb{S}^2$ identificando el polo norte con el polo sur. Calcula $\pi_1(X)$.

Solución:

$\square$

Ejercicio 2.1.12
El **mapping torus** T_f de una función $f : X \to X$ es el cociente obtenido de $X \times I$ identificando cada punto $(x, 0)$ con $(f(x), 1)$. En el caso $X = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ con f preservando el punto base, calcule una presentación de $\pi_1(T_f)$ en términos del homomoorfismo inducido $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(X)$.

Solución:

$\square$

Ejercicio 2.1.13
Demuestre que el subespacio de $\mathbb{R}^3$ que es la unión de esferas de radio $\frac{1}{n}$ y centro $\left(\frac{1}{n}, 0, 0\right)$ para $n = 1, 2, ...$, es simplemente conexo.

Demostración:

$\blacksquare$

Ejercicio 2.1.14
Sea X el subespacio de $\mathbb{R}^2$ que consiste de la unión de los círculos C_n de radio n y centro $(n, 0)$ para $n = 1, 2, ...$ Calcule $\pi_1(X)$.

Solución:

$\square$

Ejercicio 2.1.15
Calcula el grupo fundamental de cualquier árbol conexo.

Solución:
Es trivial. $\square$