Lista Extensiones Normales AM III

Cristo Daniel Alvarado

Diciembre de 2023

Capítulo 3

Ejercicios

3.1. Extensiones Normales

Ejercicio 3.1.1
Sea E/F una extensión de campos. Denotamos por $\mathrm{Aut}(E)$ (resp. $\mathrm{Aut}_F(E)$) al conjunto de todos los automorfismos (resp. F-automorfismos) de E. Demuestre que $\mathrm{Aut}(E)$ es un grupo con la compsición de funciones, y que $\mathrm{Aut}_F(E)$ es un subgrupo de $\mathrm{Aut}(E)$.

Demostración:
Claramente el resultado se tiene de que $\mathrm{Aut}(E)$ es un grupo con la composición de funciones. Veamos que $\mathrm{Aut}_F(E)$ es un subgrupo. En efecto, el conjunto $\mathrm{Aut}_F(E)$ es no vacío pues $\mathrm{id}_E \in \mathrm{Aut}_F(E)$. Ahora, sean $f, g \in \mathrm{Aut}(E)$, se tiene que

$$f(\alpha) = \alpha = g(\alpha), \quad \forall \alpha \in F. \tag{3.1}$$

donde $f, g \in \mathrm{Aut}(E)$. En particular, se tiene que $f \circ g^{-1}$ es un elemento de $\mathrm{Aut}(E)$. Y además:

$$\begin{aligned} g^{-1}(\alpha) =& g^{-1}(g(\alpha)) \\ =& \alpha, \quad \forall \alpha \in F \end{aligned} \tag{3.2}$$

es decir, g^{-1} es un F-automorfismo de E. Por tanto

$$\begin{aligned} f \circ g^{-1}(\alpha) =& f(g^{-1}(\alpha)) \\ =& f(\alpha) \\ =& \alpha, \quad \forall \alpha \in F \end{aligned} \tag{3.3}$$

entonces, $f \circ g^{-1} \in \mathrm{Aut}_F(E)$. Luego, $\mathrm{Aut}_F(E) < \mathrm{Aut}(E)$. ■

Ejercicio 3.1.2
Calcule $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q})$ y $\mathrm{Aut}_K(K(X))$ donde $K(X)$ es el campo de funciones racionales en la variable X sobre K.

Demostración:
Calculemos los dos

- Si $f \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q})$, se tiene que f deja fijo a $\mathbb{Q}$. Sea $i \in \mathbb{I}$ un número irracional. Como f es homomorfismo, debe suceder que

$$\begin{aligned} f(a + i) &= f(a) + f(i) \\ &= a + f(i), \quad \forall a \in \mathbb{Q} \\ \Rightarrow f(i) &= a - f(a + i), \quad \forall a \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

y,

$$f(i^r) = f(i)^r, \quad \forall r \in \mathbb{Q}$$

Como f es automorfismo, debe suceder que $f(i) \in \mathbb{I}$. Analicemos a $\sqrt{2}$: por la segunda condición debe suceder que

$$f(2) = f(\sqrt{2})^2 = 2 \Rightarrow f(\sqrt{2}) = \pm\sqrt{2}$$

En particular, considere un polinomio $g(X) = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n \in \mathbb{Q}[X]$ irreducbile sobre $\mathbb{R}$. Se tiene que para todo $f \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q})$:

$$\begin{aligned} g^f(X) &= f(a_0 + a_1X + ... + a_nX^n) \\ &= f(a_0) + f(a_1)X + ... + f(a_n)X^n \\ &= a_0 + a_1X + ... + a_nX^n \end{aligned}$$

es decir, que si i es algebraico sobre $\mathbb{Q}$, entonces i es mapeado bajo f en alguna otra de sus raíces. Pero como la extensión $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ no es trascendente, entonces existe un elemento $\pi \in \mathbb{R}$ trascendente sobre $\mathbb{Q}$, para el cual no se sabe que ocurre.

- (sucede algo con las indeterminadas).

■

Ejercicio 3.1.3
Sea E el campo de descomposición de un polinomio $f(X) \in F[X]$ con $\deg(f) = n \geq 1$, donde E/F es extensión de campos. Pruebe que $[E : F]$ divide a $n!$. Más aún, el grupo $\mathrm{Aut}_F(E)$ está encajado en el grupo simétrico S_n de grado n.

Demostración:
Expresamos a f como producto de polinomios irreducibles:

$$f(X) = g_1(X) \cdots g_m(X)$$

donde $g_i(X)$ es un polinomio de grado menor o igual a n, para todo $i \in [\![1, n]\!]$. Sean $u_{i,1}, ..., u_{i,m_i}$ las raíces de $g_i(X)$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{m} m_i \leq n$$

Al ser E el campo de descomposición de f, se tiene que

$$E = F(S)$$

donde $S = \left\{ u_{i,t} \in E \middle| i \in [\![1, n]\!], t \in [\![1, m_i]\!] \right\}$.

Si f es de grado $n = 1$, es claro que su única raíz debe estar en F, luego $[E : F] = 1$, es decir que $1 = n \mid n! = 1$.

Suponga que se cumple el resultado para $1, ..., k$. Veamos que se cumple para $k + 1$. En efecto, si f es irreducible de grado $k + 1$, entonces

$$\begin{aligned} [E : F] &= [F(v_1, ..., v_{k+1}) : F] \\ &= [F(v_1, ..., v_{k+1}) : F(v_1, ..., v_k)] \cdot ... \cdot [F(v_1) : F] \end{aligned}$$

Como E es el campo de descomposición de $f(X)$, entonces expresamos a $E = F(u_1, \ldots, u_n)$, donde $u_1, \ldots, u_m \in E$ son las raíces distintas del polinomio $f(X)$ (siendo $m \leq n$). Expresamos a f como producto d ■

Ejercicio 3.1.4
Sean α, β algebraicos sobre F, y sean $f(X) = \text{irr}(\alpha, F, X)$ y $g(X) = \text{irr}(\beta, F, X)$ tales que $\deg(f)$ y $\deg(g)$ son primos relativos. Demuestre que g es irreducible sobre $F(\alpha)[X]$.

Demostración:
Por un ejercicio de la lista anterior, se tiene que

$$[F(\alpha, \beta) : F(\alpha)] = [F(\beta) : F]$$

por ser $\deg(f)$ y $\deg(g)$ primos relativos (en realidad, se tiene que $[F(\alpha, \beta) : F] = [F(\alpha) : F][F(\beta) : F]$, esto implica la igualdad de arriba). Por tanto, si g no fuera irreducible sobre $F(\alpha)$, se tendría que

$$[F(\alpha, \beta) : F(\alpha)] = [F(\alpha)(\beta) : F(\alpha)] < [F(\beta) : F]$$

pues, en este caso se tendría que $h(X) = \text{irr}(\beta, F(\alpha), X) | g(X)$, con $\deg(h) < \deg(g)$, lo cual contradice la ecuación anterior. Por tanto, g es irredicible sobre $F(\alpha)$. ■

Ejercicio 3.1.5
Sea α una raíz del polinomio $X^6 + X^3 + 1$ sobre $\mathbb{Q}$. Encunetre todos los homomorfismos de $\mathbb{Q}(\alpha)$ en $\mathbb{C}$.(Sugerencia: El polinomio es factor del polinomio $X^9 - 1$).

Demostración:
■

Ejercicio 3.1.6
Encunetre el campo de descomposición de los siguientes polinmoios sobre $\mathbb{Q}$, y el grado de tales campos de descomposición sobre $\mathbb{Q}$.

1. $X^3 - 2$.
2. $X^2 + X + 1$.
3. $X^5 - 7$.
4. $(X^3 - 2)(X^2 - 2)$.
5. $X^6 + X^3 + 1$.

Demostración:
■

Ejercicio 3.1.7
Sea α un númmero real tal que es raíz del polinomio $X^4 - 5 = 0$. Demuestre lo siguiente

1. $\mathbb{Q}(i\alpha)$ es una extensión normal sobre $\mathbb{Q}$.
2. $\mathbb{Q}(\alpha + i\alpha)$ es una extensión normal sobre $\mathbb{Q}(i\alpha)$, pero no sobre $\mathbb{Q}$.

Demostración:
■

Ejercicio 3.1.8
Encuentre el campo de descomposición del polinomio $X^{p^s} - 1$ sobre el campo finito $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ de p elementos, con p número primo.

Demostración:

$\blacksquare$

Ejercicio 3.1.9
Sea E/F una extensión algebraica. Demuestre que E/F es extensión normal si, y sólo si cada F-homomorfismo $\sigma : E \to N$, donde N es cualquier extensión normal de F que contiene a E, se tiene que $\sigma(E) = E$.

Demostración:

Probaremos las dos implicaciones.

$\Rightarrow$): Suponga que E/F es una extensión normal

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, dash] \\ F \arrow[d, dash] \\ K \end{tikzcd}$$

Figura 3.1: Torre de Campos

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetuer.

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus. ■

Ejercicio 3.1.10
Sea E/F una extensión algebraica. Demuestre que si $[E : F] = 2$, entonces E/F es extensión normal.

Demostración:

■

Ejercicio 3.1.11
Sean E/F una extensión normal, $f(X)$ un polinomio con coeficientes en F el cual es irredicible sobre $F[X]$. Sean $g(X)$ y $h(X)$ polinomios mónicos con coeficientes en E irreducibles sobre $E[X]$ los cuales son factores de $f(X)$. Pruebe que existe un F-automorfismo de E tal que $g^{\phi}(X) = h(X)$.

Demostración:

■

Ejercicio 3.1.12
Sea E/F extensión algebraica. Demuestre que la extensión E/F es normal si, y sólo si para cada polinomio irreducible $f(X) \in F[X]$, los factores irreducibles de $f(X)$ en $E[X]$ tienen el mismo grado.

Demostración:

■