# Notas Teoría Geométrica de Grupos
# 10° Escuela Oaxaqueña de Matemáticas

Cristo Daniel Alvarado

15 de enero de 2025

# Índice general

# Capítulo 1

# Teoría Geométrica de Grupos

## §1.1 Introducción

En los capítulos anteriores hemos hablado sobre

**Definición 1.1.1**
Un grupo discreto $G$ es tal que está dotado de la topología discreta.

## §1.2 Aplicaciones de espacios cubrientes

**Teorema 1.2.1**
Dado un espacio cubriente de $X$, $p:\widetilde{X}\to X$, se tiene que $\pi_1(X)\curvearrowright\widetilde{X}$ vía transformaciones de Deck.

**Teorema 1.2.2**
Un grupo $G$ actúa de manera libre en un árbol si y sólo si $G$ es grupo libre.

**Demostración:**

$\Rightarrow)$ : Supongamso que $G$ actúa de manera libre en un árbol $T$. Considere la función proyección $p:T\to T/G$. Afirmamos que $p$ es una función cubriente, en efecto...

Se tien que $T/G$ es una gráfica, por lo cual:

$$\pi_1(T/G)\cong F_n$$

para algún $n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$. Usando transormaciones de Deck deducimos que:

$$\pi_1(T/G)\cong G$$

por lo cual $G$ es libre.

$\Leftarrow)$ : Supongamos que $G$ es grupo libre, entonces existe un conjunto $S$ tal que $G=F(S)$. Notemos que:

$$F(S)\cong\pi_1\left(X=\bigvee_{s\in S}\mathbb{S}^1\right)$$

Se tiene que este espacio admite un cubrente universal, digamos $p : \widetilde{X} \to X$. Por un teorema, $\widetilde{X}$ es una gráfica y, por ser una gráfica tal que su grupo fundamental es trivial, entonces debe ser un árbol. También se probó que:

$$\mathrm{Deck}(\widetilde{X}) \to \widetilde{X}$$

actúa sobre este árbol (mediante $f \in \mathrm{Deck}(\widetilde{X})$). ■

**Observación 1.2.1**
Completar lo anterior formalmente y unir todo con las notas anteriores.

**Proposición 1.2.1**
El grupo libre $F_2$ contiene como subgrupo de índice finito a $F_n$, para todo $n \geq 2$.

**Demostración:**

■

La explicación de la proposición anterior es que,

**Ejercicio 1.2.1**
Encontrar un cubriente $\widetilde{X}$ de $X$ con $\pi_1(X) = F_2$ tal que $\pi_1(\widetilde{X}) = F_1$.

## §1.3 Producto Semidirecto de Grupos

**Definición 1.3.1**
Sean $G$ y $H$ grupos, y sea $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(G)$ un morfismo de grupos.

Definimos el **producto semidirecto** $G \rtimes_\varphi H$, como el grupo en $G \times H$ con la operación dada por:

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = \big(g_1\varphi_{h_1}(g_1^{-1}), h_1h_2\big)$$

**Proposición 1.3.1**
Probar que dados dos grupos $G$ y $H$, su producto semidirecto es un grupo.

**Demostración:**
Ejercicio. ■

**Ejemplo 1.3.1**
Sean $G$ y $H$ grupos, y tomemos $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(H)$ el homomorfismo trivial. Entonces:

$$G \rtimes_\varphi H \cong G \times H$$

**Ejemplo 1.3.2**
Si $K$ es la botella de Klein, entonces:

$$\pi_1(K) \cong \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$$

**Demostración:**
Recordemos que:

$$\pi_1(K) \cong \langle a, b | aba = b^{-1} \rangle$$

y, observemos que todo homomorfismo $f : \mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$ solo tiene de dos:

$$\varphi(1) = \pm \mathbb{1}_{\mathbb{Z}}$$

completar la demostración. ■

**Ejercicio 1.3.1**
Pruebe que $D_\infty \cong \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$.

**Demostración:**
Recordemos que:

$$D_\infty = \mathrm{Aut}(\mathbb{R})$$

tomando los automorfismos de $\mathbb{R}$ como gráfica (con nodos los enteros $\mathbb{Z}$). ■

## §1.4 Grupos finitamente generados y Gráfica de Caley

**Definición 1.4.1**
Un grupo $G$ se dice **finitamente generado** si existe un conjunto $S \subseteq G$ finito tal que $G = \langle S \rangle$.

**Ejemplo 1.4.1**
$\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$ es finitamente generado.

**Definición 1.4.2**
Sea $G$ un grupo finitamente generado, y sea $S \subseteq G$ un conjunto finito de generadores de $G$. La **gráfica de Caley**, denotada por $\mathrm{Cay}(G, S)$ se define como una gráfica en la que:

- Los vértices son elementos de $G$, es decir, $V(\mathrm{Cay}(G, S)) = G$.
- Las aristas se construyen de la siguiente manera: para cada vértice $g \in G$ y cada $s \in S \cup S^{-1} \setminus \{1\}$, se dibuja una arista entre $g$ y $gs$.

**Ejemplo 1.4.2**
Considere $G = \mathbb{Z}$ y $S = \{1\}$. Entonces, la gráfica de Caley estará dada por la gráfica de $\mathbb{R}$ con $\mathbb{Z}$ los vértices de la gráfica.

**Ejemplo 1.4.3**
Considere $G = \mathbb{Z}$ y $S = \{2, 3\}$ ¿cuál es la gráfica de Caley?

**Solución:**
Resulta que:

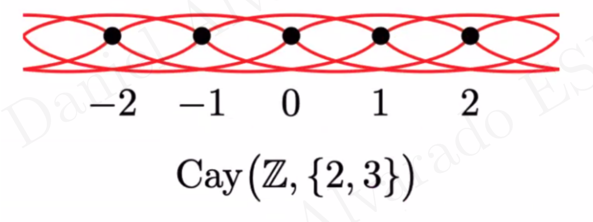



Figura 1. Caption.

es la gráfica de Caley de esta cosa, que es diferente de la gráfica del ejemplo anterior. $\square$

---

**Proposición 1.4.1**
La gráfica de Caley Caley$(G, S)$, para un grupo generado $G$ y un conjunto generador $S$, tiene las siguientes propiedades:

- Es arco-conexa (o conexa).
- Es localmente finita, es decir que cada vértice tiene solamente un conjunto finito de puntos como vecinos.

---

## §1.5 Gráfica de Caley como espacio métrico

**Definición 1.5.1**
Dado un grupo $G$ finitamente generado por un conjunto $S$, definimos la **métrica de palabras** $d_S(g, h)$ entre dos elementos $g, h \in G$ como la longitud mínima de una palabra en los generadores $S \cup S^{-1}$ que representa a $g^{-1}h$.

**Observación 1.5.1**
De ahora en adelante consideraremos a $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclideana.

**Definición 1.5.2**
Sean $X$ y $Y$ espacios métricos. Una función $f : X \to Y$ se dice que es un encaje **isométrico** si:

$$d(x, y) = \rho(f(x), f(y)), \quad \forall x, y \in X$$

**Definición 1.5.3**
Sean $X$ y $Y$ espacios métricos. Una función $f : X \to Y$ se dice que es un **encaje bilipschitz** si existe $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que:

$$\frac{1}{L} d_X(x, y) \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y)$$

Decimos que $f$ es una **equivalencia bilipschitz** si existe una función $g : Y \to X$ encaje bilipschitz tal que:

$$g \circ f = \mathbb{1}_X \quad \text{y} \quad f \circ g = \mathbb{1}_Y$$

**Definición 1.5.4**
Sea $f : X \to Y$ una función. Decimos que $f$ es un **encaje quasi-isométrico** si:

$$\frac{1}{c}d_X(x,y) - b \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq c d_X(x,y) + b$$

con $c \geq 1$ y $d \geq 0$.

**Ejemplo 1.5.1**
Consideremos a $\mathbb{R}$ con la métrica euclideana y tomemos el encaje $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$. Queremos encontrar constates $c \geq 1$ y $b \geq 0$ tales que:

$$\frac{1}{c}|n-m| - b \leq |i(n) - i(m)| \leq c|n-m| + b$$

para todo $n, m \in \mathbb{Z}$. Podemos elegir $b = 0$ y $c = 1$, con lo cual sucede que:

$$|n-m| \leq |i(n) - i(m)| \leq |n-m|$$

para todo $n, m \in \mathbb{Z}$.

**Ejemplo 1.5.2**
Consideremos la función parte entera $x \mapsto \lfloor x \rfloor = \text{máx}\left\{n \in \mathbb{Z} \middle| n \leq x\right\}$. Afirmamos que $\lfloor \cdot \rfloor$ es un encaje quasi-isométrico.

**Demostración:**
En efecto, sean $x, y \in \mathbb{R}$, debemos encontrar $c \geq 1$ y $b \geq 0$ tales que:

$$\frac{1}{c}|x-y| - b \leq |\lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor| \leq c|x-y| + b$$

Tomemos $c = b = 1$. En efecto, sean $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene que:

$$|x-y| \leq |\lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor| + 1$$

y, de forma análoga:

$$|\lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor| \leq |x-y| + 1$$

con lo que se tienen las desigualdades deseadas. ■

**Definición 1.5.5**
Sea $f : X \to Y$ un $(c, b)$-encaje quasi-isométrico.

*(a)* Decimos que una función $f' : X \to Y$ está a **distancia fintia de** $f$ si existe una constante $k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que:
$$d_Y(f(x), f'(x)) \leq k, \quad \forall x \in X$$

*(b)* Decimos que $f$ es una **quasi-isometría** si existe un encaje quasi-isométrico $g : Y \to X$ tal que $f \circ g$ está a distancia finita de $\mathbb{1}_Y$ y $g \circ f$ lo está de $\mathbb{1}_X$.

*(c)* Si $X$ es quasi-isométrico a $Y$, escribimos $X \underset{C.I.}{\sim} Y$.

**Definición 1.5.6**
Sea $f : X \to Y$. Decimos que $f$ tiene una **imagen quasi-densa** si existe $k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que:

$$\forall y \in Y \exists x \in X d_Y(y, f(x)) \leq k$$

**Teorema 1.5.1** (**Caracterización de Quasi-isometrías**)
Una función $f : X \to Y$ es una quasi-isometría si y sólo si $f$ es un encaje isométrico con imagen quasi-densa.

**Demostración:**
$\Rightarrow$) : Supongamos que $f : X \to Y$ es un encaje C.I. Veamos que $f$ es encaje quasi-isométrico y que $\operatorname{im}(f) \subseteq Y$ es quasi-densa.

Claramente es encaje quasi-isométrico. Ahorra, por ser encaje C.I. existe una función $g : Y \to X$ encaje quasi-isométrico tal que:

$$d_Y(f \circ g, \mathbb{1}_Y) \leq k$$

para aklgún $k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Entonces, si $y \in Y$ existe $x = g(y) \in X$ tal que:

$$d_Y(f(x), y) \leq k$$

por lo que la imagen de $f$ es quasi-densa.

$\Leftarrow$) : Supongamos que $f : X \to Y$ es un $(c, b)$ encaje quasi-isométrico con imagen quasi-densa, es decir que:

$$\frac{1}{c} d_X(x, y) - b \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq c d_X(x, y) + b$$

$\forall x, y \in X$. Y además, existe $c^* \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $\forall y \in Y$ existe $x \in X$ tal que:

$$d_Y(f(x), y) \leq c^*$$

Tomemos $k = \max\{c, c^*, b\} \geq 1$. Entonces:

$$\frac{1}{k} d_X(x, y) - k \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq k d_X(x, y) + k$$

y,

$$d_Y(f(x), y) \leq k$$

Sea $y \in Y$, tomemos un $x_y \in X$ tal que:

$$d_Y(f(x_y), y) \leq k$$

hagamos $g(y) = x_y$ para todo $y \in Y$. ■

**Ejemplo 1.5.3**
Todo espacio métrico $X$ de diámetro finito es quasi-isométrico al espacio de un punto.

**Definición 1.5.7**
Sea $G$ un grupo actuando en una gráfica $(V, E)$, esto es, tenemos un homomorfismo $\varphi : G \to \operatorname{Aut}(V, E)$. La acción $\varphi$ es **libre** si para todo $g \in G \setminus \{e\}$:

$$\forall v \in V, \varphi_g(v) \neq v$$

y,

$$\forall \{v, w\} \in E, \varphi_g(\{v, w\}) = \{\varphi_g(v), \varphi_g(w)\} \neq \{v, w\}$$

**Ejemplo 1.5.4**
Suponga que $G = \langle S \rangle$, entonces tenemos una acción:

$$\varphi : G \to \operatorname{Aut}(V, E)$$

tal que $g \mapsto g \cdot h$.

**Observación 1.5.2**
La acción se reestringe a:

$$\varphi : G \to \operatorname{Aut}(G)$$

tal que $g \mapsto \varphi_g$. Afirmamos que esta acción es libre.

**Demostración:**
En efecto, se tiene que:

$$\begin{aligned} \varphi_g(h) = h &\iff g \cdot h = h \\ &\iff g = e \end{aligned}$$

así que la acción es libre. ■

**Definición 1.5.8**
Una acción $G \curvearrowright X$ es **transitiva** si $\forall x \in X$ tenemos que:

$$\mathcal{O}_x = \left\{ gx \middle| g \in X \right\} = X$$

**Proposición 1.5.1**
Sea $G$ un grupo y $S \subseteq G$ un conjunto generador de $G$. Entonces, la acción $\varphi : G \to \operatorname{Aut}(\operatorname{Cay}(G, S))$ dada por:

$$g \mapsto (h \mapsto g \cdot h)$$

es libre si y sólo si no contiene involuciones, es decir que no existe $s \in S$ tal que $s^2 = e$.

**Demostración:**
Sabemos que la acción $\varphi$ se reestringe a $G$ y es libre.

$\Rightarrow)$ : Supo

$\Leftarrow)$ : Supongamos que $\varphi$ no es libre, entonces existe una arista $\{v, w\}$ tal que:

$$g \cdot \{v, w\} = \{v, w\}$$

para algún $g \in G \setminus \{e\}$. Tenemos dos casos:

- $g \cdot v = v\#_c$, cosa que no puede suceder ya que la acción es libre sobre $G$.
- $g \cdot v = w$, por lo que $g \cdot w = v$, así que:

$$v = g \cdot w = g(g \cdot v) = g^2 \cdot v \Rightarrow g^2 = e$$

con lo que se sigue que $G$ tiene involuciones. ■

**Proposición 1.5.2**
Sea $G$ un grupo finitamente generado. Entonces, la gráfica de Caley es única hasta quasi-isometrías.

**Demostración:**
Sean $S$ y $S'$ conjuntos finitos generadores de $G$. Probaremos que:

$$\mathbb{1} : \text{Cay}\,(G, S) \to \text{Cay}\,(G, S')$$

es una equivalencia bilipschitz. Sea:

$$n = \text{máx}\left\{ d(e, s) \middle| s \in S' \right\}$$

Notemos que $n$ existe ya que el conjunto de la derecha es finito. ■

**Definición 1.5.9**
Dos grupos $G$ y $H$ son **quasi-isométricos** si $\text{Cay}\,(G, S) \underset{C.I.}{\sim} \text{Cay}\,(H, T)$.

**Ejemplo 1.5.5**
Todos los grupos finitos son quasi-isométricos.

¿Cómo clasificar grupos hasta quasi-isometrías?

La primera respuesta es construír invariantes quasi-isométricos.

# Capítulo 2

# Ejercicios y Problemas

## §2.1 Introducción a la teoría geométrica de grupos

**Ejercicio 2.1.1**
Utilizando la teoría de cubrientes demuestra que:

*(1)* Todo subgrupo de índice finito en un grupo finitamente generado es finitamente generado.

*(2)* Todo subgrupo de índice finito en un grupo finitamente presentado es finitamente presentado.

**Demostración:**
De *(1)*: Sea $G$ un grupo finitamente generado y $H < G$ tal que $[G : H] < \infty$.

■

**Ejercicio 2.1.2**
Demuestra que en el producto semidirecto $N \rtimes_\varphi H$, $H$ es un subgrupo normal si y sólo si $\varphi$ es el homomorfismo trivial.

**Demostración:**
Recordemos que el producto semidirecto $N \rtimes_\varphi H$ es el grupo $N \times H$ dotado de la operación:

$$(n, h)(n', h') = (n\varphi_h(n'), hh')$$

donde $\varphi : H \to \operatorname{Aut}(N)$ es un homomorfismo tal que $h \mapsto \varphi_h$. El elemento neutro de este grupo es $(e_N, e_H)$, donde cada elemento tiene como inverso:

$$(n, h)^{-1} = \left((\varphi_{h^{-1}}(n))^{-1}, h^{-1}\right)$$

Sean $(n_1,h_1)\in N\rtimes_\varphi H$ y $h\in H$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
(n_1,h_1)(e_N,h)(n_1,h_1)^{-1} &= (n_1,h_1)(e_N,h)\left((\varphi_{h_1^{-1}}(n_1))^{-1},h_1^{-1}\right)\\
&= (n_1\varphi_{h_1}(e_N),h_1h)\left((\varphi_{h_1^{-1}}(n_1))^{-1},h_1^{-1}\right)\\
&= (n_1\varphi_{h_1}(e_N),h_1h)\left((\varphi_{h_1^{-1}}(n_1))^{-1},h_1^{-1}\right)\\
&= (n_1e_N,h_1h)\left((\varphi_{h_1^{-1}}(n_1))^{-1},h_1^{-1}\right)\\
&= (n_1,h_1h)\left((\varphi_{h_1^{-1}}(n_1))^{-1},h_1^{-1}\right)\\
&= \left(n_1\varphi_{h_1h}\left((\varphi_{h_1^{-1}}(n_1))^{-1}\right),h_1hh_1^{-1}\right)\\
&= \left(n_1\varphi_{h_1h}\left((\varphi_{h_1^{-1}}(n_1^{-1}))\right),h_1hh_1^{-1}\right)\\
&= \left(n_1\varphi_{h_1hh_1^{-1}}\left(n_1^{-1}\right),h_1hh_1^{-1}\right)
\end{aligned}$$

pues, $\varphi_{h_1}(e_N)=e_N$ y por ser $h\mapsto\varphi_h$ homomorfismo.

$\Rightarrow$): Suponga que $H$ es un subgrupo normal de $N\rtimes_\varphi H$, esto es que el grupo $H$ visto como subgrupo de $N\rtimes_\varphi H$:

$$H=\left\{(e_N,h)\middle|h\in H\right\}$$

es subgrupo normal de $N\rtimes_\varphi H$. Como es normal, se sigue que:

$$(n_1,h_1)(e_N,h)(n_1,h_1)^{-1}\in H$$

para todo $(n_1,h_1)\in N\rtimes_\varphi H$ y $h\in H$, por lo que:

$$\left(n_1\varphi_{h_1hh_1^{-1}}\left(n_1^{-1}\right),h_1hh_1^{-1}\right)\in H$$

nuevamente, para todo $(n_1,h_1)\in N\rtimes_\varphi H$ y $h\in H$. En particular:

$$n_1\varphi_{h_1hh_1^{-1}}\left(n_1^{-1}\right)=e_N$$

por lo que para todo $n\in N$ y $h\in H$:

$$n^{-1}\varphi_h(n)=e_N\Rightarrow\varphi_h(n)=n$$

es decir, que $\varphi_h=\mathbb{1}_H$, por lo que $h\mapsto\varphi_h$ es el homomorfismo trivial.

$\Leftarrow$) : Suponga que $\varphi$ es trivial, se sigue que:

$$\begin{aligned}
(n_1,h_1)(e_N,h)(n_1,h_1)^{-1} &= \left(n_1\varphi_{h_1hh_1^{-1}}\left(n_1^{-1}\right),h_1hh_1^{-1}\right)\\
&= (n_1\mathbb{1}_H(n_1^{-1}),h_1hh_1^{-1})\\
&= (n_1n_1^{-1},h_1hh_1^{-1})\\
&= (e_N,h_1hh_1^{-1})\in H
\end{aligned}$$

para todo $(n_1,h_1)\in N\rtimes_\varphi H$ y $h\in H$, por lo que $H$ es normal en $N\rtimes_\varphi H$. ■

**Ejercicio 2.1.3**
Demuestra que el grupo diédrico infinito $D_\infty$ es isomorfo tanto al producto libre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}*\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ como al producto semidirecto $\mathbb{Z}\rtimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

**Demostración:**

Recordemos que:

$$D_\infty = \left\langle r, s \middle| s^2 = 1, srs = r^{-1} \right\rangle$$

Probaremos que es isomorfo a ambos grupos.

- Observemos que el producto semidirecto $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ es tal que el homomorfismo $\varphi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \text{Aut}(\mathbb{Z})$ tiene dos opciones, o es el trivial, ya que:

$$\varphi(0) = \mathbb{1}_\mathbb{Z}$$

y $\varphi(1) = -\mathbb{1}_\mathbb{Z}$, o:

$$\varphi(x) = \mathbb{1}_\mathbb{Z}, \quad \forall x \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Analicemos ambos casos:

  - Si $\varphi$ no es trivial, se sigue que:

$$\begin{aligned}
(x_1, y_1)(x_2, y_2) &= (x_1 + \varphi_{y_1}(x_2), y_1 + y_2) \\
&= \begin{cases} (x_1 + \mathbb{1}_\mathbb{Z}(x_2), 0 + y_2) & \text{si} \quad y_1 = 0 \\ (x_1 - \mathbb{1}_\mathbb{Z}(x_2), 1 + y_2) & \text{si} \quad y_1 = 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} (x_1 + x_2, y_2) & \text{si} \quad y_1 = 0 \\ (x_1 - x_2, 1 + y_2) & \text{si} \quad y_1 = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Afirmamos que en este caso, $D_\infty \cong \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En efecto, considere la función $f : D_\infty \to \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dada por:

$$f(r) = (1, 0) \quad \text{y} \quad f(s) = (0, 1)$$

Como $D_\infty$ admite una presentación, $f$ se puede extender a un homomorfismo. Veamos que este homomorfismo es inyectivo y suprayectivo.

    - $f$ **es inyectiva**: Sea $s^{\epsilon_1} r^n s^{\epsilon_2} \in D_\infty$ con $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \{0, 1\}$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que:

$$f(s^{\epsilon_1} r^n s^{\epsilon_2}) = 0$$

entonces:

$$\begin{aligned}
f(s^{\epsilon_1} r^n s^{\epsilon_2}) &= (0, \epsilon_1)(n, 0)(0, \epsilon_2) \\
&= (0, \epsilon_1)(n, \epsilon_2) \\
&= \begin{cases} (n, \epsilon_2) & \text{si} \quad \epsilon_1 = 0 \\ (-n, 1 + \epsilon_2) & \text{si} \quad \epsilon_1 = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

en cualquier caso, debe tenrse que $n = 0$, por lo cual $\epsilon_2 = 0$ si $\epsilon_1 = 0$ y $\epsilon_2 = 1 = \epsilon_1$, en cualquier caso se sigue que:

$$s^{\epsilon_1} r^n s^{\epsilon_2} = 1$$

por lo que $\ker(f) = \langle 1 \rangle$.

    - $f$ **es suprayectiva**: Sea $(m, \epsilon) \in \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Veamos que:

$$f(r^m s^\epsilon) = (m, \epsilon)$$

es el elemento deseado.

Por ambos incisos se sigue que $f$ es isomorfismo.

- Veamos que el producto libre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ está dado por:

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \left\langle x, y \middle| x^2 = 1 \text{ y } y^2 = 1 \right\rangle$$

pues, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \left\langle x \middle| x^2 = 1 \right\rangle$. Los elementos de este grupo son sucesiones alternantes $xyxy\cdots$ o $yxyx\cdots$ de los elementos $x$ y $y$. Considere la función $f : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to D_\infty$ dada por:

$$f(x) = r \quad \text{y} \quad f(y) = s$$

esta es función y más aún, puede ser extendida a un homeomorfismo ya que como el producto libre admite presentación basta con definirlo sobre los elementos de la base (usando además las propiedades de grupos libres).

Por ende, veamos que es inyectiva y sobreyectiva:

  - $f$ **es inyectiva**: Sea $z \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ tal que $f(z) = 0$. Se tienen cuatro casos:

    *(a)* $z = xy\cdots xy$ sea $m$ el número de veces que aparece $r$ en este producto. Se sigue que $f(z) = f(x)f(y)\cdots f(x)f(y) = rs\cdots rs$. En esencia, todos los elementos están alternando y, usando el hecho de que en $D_\infty$ se cumple:

    $$rs = sr^{-1}$$

    podemos reducir todo lo anterior a algo de la forma $s^\epsilon(r^{-1})^n$ con $\epsilon \in \{0,1\}$ y $n \in \mathbb{N}$. Se sigue así que:

    $$f(z) = s^\epsilon r^n = 0$$

    y eso es cero si y sólo si $\epsilon = 0$ y $n = 0$. Pero $n$ está dado por el número de veces que cambiamos $r$ a la derecha, que fueron $m$-veces, es decir que $m = n$. Así que $m = 0$. Por tanto, $z = 0$.

    *(b)* Los otros casos son $z = xy\cdots yx$, $z = yx\cdots yx$ y $z = yx\cdots xy$, donde se procede de forma análoga al ejemplo anterior.

    $f$ **es sobreyectiva**. Sea $u \in D_\infty$. Por las propiedades de este grupo este elemento se expresa como:

    $$s^{\epsilon_1}r^n s^{\epsilon_2}$$

    donde $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \{0,1\}$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Veamos por casos:

    ◦

$\blacksquare$

**Definición 2.1.1**
Sea $G$ un grupo finitamente generado, y sea $S \subseteq G$ un conjunto finito de generadores de $G$. La **gráfica de Caley**, denotada por $\mathrm{Cay}(G,S)$ se define como una gráfica en la que:

- Los vértices son elementos de $G$, es decir, $V(\mathrm{Cay}(G,S)) = G$.
- Las aristas se construyen de la siguiente manera: para cada vértice $g \in G$ y cada $s \in S \cup S^{-1} \setminus \{1\}$, se dibuja una arista entre $g$ y $gs$.

**Ejercicio 2.1.4**
Esboza la gráfica de Caley del producto libre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

**Solución:**

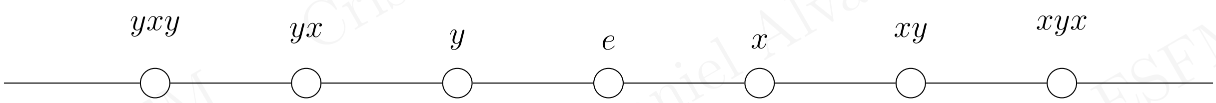
Primero, un conjunto de generadores de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle x, y \big| x^2 = y^2 = 1\rangle$ es:

$$S = \{x, y\} = S \cup S^{-1}$$

Considere el elemento $e$. De este elemento parten dos aristas, una hacia $x$ y otra hacia $y$.

Luego, de $x$ se dibuja una arista hacia $xy$ y otra hacia $e$, que ya estaba. De $y$ se dibuja una hacia $yx$ y otra hacia $e$, que ya estaba.

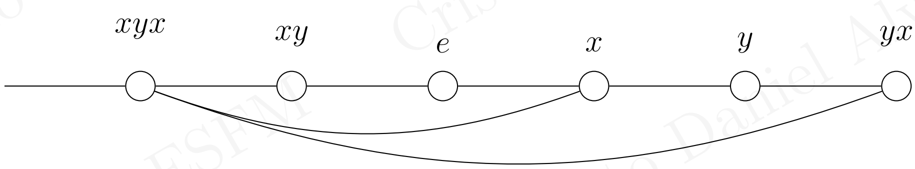
En síntesis, esto se vería como una recta con centro $e$ y los elementos $x$ y $y$ sus vecinos, luego se ponen como vecinos los elementos $xy$ y $yx$, alternando.




Otro conjunto de generadores es:

$$S = \{x, xy\} \Rightarrow S \cup S^{-1} = \{x, xy, yx\}$$

en este caso, va a cambiar la gráfica y quedará de la siguiente manera:




□

**Ejercicio 2.1.5**
Haga lo siguiente:

*(1)* Demuestra que existen conjuntos generadores finitos $S$ de $\mathbb{Z}$ y $T$ de $D_\infty$ tales que $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}, S) \cong \mathrm{Cay}(D_\infty, T)$.

*(2)* Demuestra que existen conjuntos generadores finitos $S$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y $T$ de $D_\infty$ tales que $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Cay}(D_\infty, T)$.

**Demostración:**

De *(1)*: Como $D_\infty \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, entonces por el ejercicio anterior un conjunto infinito de generadores que sirve es:

$$S = \{1\}$$

y $T = \{x, y\}$.

De *(2)*: ■

## §2.2 Quasi-isometrías

**Ejercicio 2.2.1**
Toda función a una distancia finita de un encaje quasi-isométrico es un encaje quasi-isométrico.

**Demostración:**
Sean $X$ y $Y$ espacios métricos y $f, g : X \to Y$ funciones tales que $f$ es una $(c, d)$-encaje quasi-isométrico y la distancia entre ambas funciones es finita, es decir que existe $k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que:

$$d_Y(f(x), g(x)) \leq k, \quad \forall x \in X$$

Por ser $f$ encaje quasi-isométrico se cumple que:

$$\frac{1}{c} d_X(x.y) - b \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq c d_X(x, y) + b$$

Ahora, veamos que:

$$\begin{aligned} d_Y(f(x), f(y)) &\leq d_Y(f(x), g(x)) + d_Y(g(x), g(y)) + d_Y(g(y), f(y)) \\ &\leq 2k + d_Y(g(x), g(y)) \\ \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) &\leq d_Y(g(x), g(y)) + 2k \end{aligned}$$

de forma análoga:

$$\begin{aligned} d_Y(f(x), f(y)) &\geq d_Y(g(x), f(y)) - d_Y(f(x), g(x)) \\ &\geq d_Y(g(x), g(y)) - d_Y(g(y), f(y)) - d_Y(f(x), g(x)) \\ &\geq d_Y(g(x), g(y)) - 2k \\ \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) &\geq d_Y(g(x), g(y)) - 2k \end{aligned}$$

Por ende,

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} d_X(x, y) - b &\leq d_Y(f(x), f(y)) \\ &\leq d_Y(g(x), g(y)) + 2k \\ \Rightarrow \frac{1}{c} d_X(x, y) - (b + 2k) &\leq d_Y(g(x), g(y)) + 2k \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned} d_Y(g(x), g(y)) - 2k &\leq d_Y(f(x), f(y)) \\ &\leq c d_X(x, y) + b \\ \Rightarrow d_Y(g(x), g(y)) &\leq c d_X(x, y) + (b + 2k) \end{aligned}$$

para todo $x, y \in X$. Por tanto, $g$ es un $(c, b + 2k)$-encaje quasi-isométrico. ■

**Ejercicio 2.2.2**
Toda función a distancia finita de una quasi-isometría es una quasi-isometría.

**Demostración:**
Sean $f, g : X \to Y$ funciones tales que $f$ es quasi-isometría y,

$$d_Y(f(x), g(x)) \leq k_2, \quad \forall x \in X$$

para algún $k_1 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Como $f$ es quasi-isometría, por un teorema $f$ es encaje quasi-isométrico y tiene imagen quasi densa. Veamos que $g$ también lo cumple. En efecto, por el ejercicio anterior $g$ es encaje quasi-isométrico. Veamos que tiene imagen quasi-densa.

Sea $y \in Y$, entonces por tener $f$ imagen quasi-densa, existe $x \in X$ y $k_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tales que:

$$d_Y(y, f(x)) \leq k$$

por tanto:

$$d_Y(y, g(x)) \leq d_Y(y, f(x)) + d(f(x), g(x)) \leq k_1 + k_2$$

donde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Así que $g$ tiene imagen quasi-densa.

Por un teorema se sigue que $g$ es quasi-isometría. ■

**Ejercicio 2.2.3**
Sean $X, Y, Z$ espacios métricos y sean $f, f' : X \to Y$ funciones que están a distancia finita entre ellas.

*(a)* Si $g : Z \to X$ es función, entonces $f \circ g$ y $f' \circ g$ están a distancia finita entre sí.

*(b)* Si $g : Y \to Z$ es un encaje quasi-isométrico, entonce $g \circ f$ y $g \circ f'$ también están a distancia finita entre sí.

**Demostración:**
De *(a)*: Suponga que $g$ es función. Como $f$ y $f'$ están a distancia finita entre ellas, existe $k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que:

$$d_Y(f(x), f'(x)) \leq k, \quad \forall x \in X$$

por ende, para todo $z \in Z$:

$$d_Y(f \circ g(z), f' \circ g(z)) = d_Y(f(g(z)), f'(g(z))) \leq k$$

así que $f \circ g$ y $f' \circ g$ están a distancia finita entre ellas.

De *(b)*: Suponga que $g$ es $(c, d)$-encaje quasi-isométrico, entonces:

$$\frac{1}{c} d_Y(y_1, y_2) - b \leq d_Z(g(y_1), g(y_2)) \leq c d_Y(y_1, y_2) + b, \quad \forall y_1, y_2 \in Y$$

entonces, se tiene que:

$$d_Z(g \circ f(x), g \circ f'(x)) = d_Z(g(f(x)), g(f'(x))) \leq c d_Y(f(x), f'(x)) + b, \quad \forall x \in X$$

Como $f$ y $f'$ están a distancia finita entre ellas, existe $k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que:

$$d_Y(f(x), f'(x)) \leq k, \quad \forall x \in X$$

así que:

$$d_Z(g \circ f(x), g \circ f'(x)) \leq ck + b$$

donde $ck + b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Por tanto, las funciones $g \circ f$ y $g \circ f'$ están a distancia finita entre ellas. ■

**Ejercicio 2.2.4**
La composición de encajes quasi-isométricos son encajes quasi-isométricos.

**Demostración:**

Sean $X, Y, Z$ espacios métricos y $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ $(c, b)$ y $(c', b')$ encajes quasi-isométricos, respectivamente, es decir:

$$\frac{1}{c}d_X(x_1, x_2) - b \leq d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq cd_X(x_1, x_2) + b, \quad \forall x_1, x_2 \in X$$

y,

$$\frac{1}{c'}d_Y(y_1, y_2) - b' \leq d_Z(g(y_1), g(y_2)) \leq c'd_Y(y_1, y_2) + b', \quad \forall y_1, y_2 \in Y$$

Veamos que la composición también es encaje quasi-isométrico. En efecto, sean $x_1, x_2 \in X$, se tiene que:

$$\begin{aligned} d_Z(g \circ f(x_1), g \circ f(x_2)) &= d_Z(g(f(x_1)), g(f(x_2))) \\ &\leq c'd_Y(f(x_1), f(x_2)) + b' \\ &\leq (c'c)d_X(x_1, x_2) + (b + b') \end{aligned}$$

y, de forma análoga:

$$\begin{aligned} d_Z(g \circ f(x_1), g \circ f(x_2)) &= d_Z(g(f(x_1)), g(f(x_2))) \\ &\geq \frac{1}{c'}d_Y(f(x_1), f(x_2)) - b' \\ &\geq \frac{1}{c'c}d_X(x_1, x_2) - (b + b') \end{aligned}$$

para todo $x_1, x_2 \in X$. Por tanto:

$$\frac{1}{c'c}d_X(x_1, x_2) - (b + b') \leq d_Z(g \circ f(x_1), g \circ f(x_2)) \leq (c'c)d_X(x_1, x_2) + (b + b'), \quad \forall x_1, x_2 \in X$$

así que, $g \circ f$ es un $(cc', b + b')$-encaje quasi-isométrico. ■

**Ejercicio 2.2.5**
La composición de quasi-isometrías son quasi-isometrías.

**Demostración:**

Sean $X, Y, Z$ espacios métricos y, $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ quasi-isometrías, en particular por un teorema, estas son encajes quasi-isométricos y tienen imágenes quasi-densas.

Por ser encajes quasi-isométricos, del ejercicio anterior se sigue que $g \circ f : X \to Z$ es un encaje quasi-isométrico. Veamos que tiene imagen quasi-densa. Como $f$ y $g$ tienen imagen quasi-densa, existen $k_1, k_2 \in \mathbb{R}_{\geq}$ tales que:

$$\forall y \in Y \exists x \in X(d_Y(y, f(x)) \leq k_1)$$

y,

$$\forall z \in Z \exists y \in Y(d_Z(z, g(y)) \leq k_2)$$

Por tanto, para $z \in Z$ existe $y \in Y$ tal que:

$$d_Z(z, g(y)) \leq k_2$$

y, para $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que

$$d_Y(y, f(x)) \leq k_1$$

Así que,

$$\begin{aligned} d_Z(z, g \circ f(x)) &= d_Z(z, g(f(x))) \\ &\leq d_Z(z, g(y)) + d_Z(g(y), g(f(x))) \\ &\leq k_1 + \left( \frac{1}{c'} d_Y(y, f(x)) + b' \right) \\ &\leq k_1 + \frac{k_2}{c'} + b' \end{aligned}$$

donde $k_1 + \frac{k_2}{c'} + b' \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y siendo $g$ un $(c', b')$-encaje quasi-isométrico.

Por ende, $g \circ f$ tiene imagen quasi-densa. Por un teorema anterior se sigue que $g \circ f$ es quasi-isometría. ■

## §2.3 Gráfica de Caley y Acciones de Grupos

**Ejercicio 2.3.1**
Demuestra que el grupo libre $F_n$ actúa libremente en su gráfica de Caley. Además, demuestra que todo subgrupo de $F_n$ es un grupo libre.

**Demostración:**
Considere el grupo libre $F_n$:

$$F_n = \langle x_1, ..., x_n \rangle$$

Tomemmos $S = \{x_1, ..., x_n\}$. Así que $\mathrm{Cay}\,(F_n, S)$ es la gráfica de Caley de $F_n$. Veamos que la acción:

$$(g, h) \mapsto gh$$

de $G$ en la gráfica $\mathrm{Cay}\,(F_n, S)$ es libre. Por una proposición basta con ver que el grupo $G$ no contiene involuciones, es decir que:

$$s^2 \neq e, \quad \forall s \in S$$

En efecto, si tal cosa ocurriese, existiría $i = 1, ..., n$ tal que:

$$x_i^2 = e \Rightarrow x_i = x_i^{-1}$$

pero, como $F_n$ es grupo libre en los elementos $x_1, .., x_n$, forzosamente se tiene que:

$$x_i \neq x_i^{-1}$$

por tanto $x_i = x_i^{-1}$ y $x_i \neq x_i^{-1} \#_c$. Así que $s^2 \neq e$ para todo $s \in S$, es decir que $F_n$ no tiene involuciones, por lo que la acción de $F_n$ en $\mathrm{Cay}\,(F_n, S)$ es libre.

Para la otra parte, sea $H$ un subgrupo de $F_n$. Afirmamos que $H$ es libre. En efecto, recordemos que un grupo $G$ actúa de manera libre en un árbol si y sólo si $G$ es grupo libre.

En particular, $F_n$ es grupo libre, por lo que $F_n$ actúa de manera libre en un árbol, digamos $T$.

En particular, como $F_n$ actúa libre sobre $T$ se tiene que:

$$\forall v \in V, g \cdot v \neq v$$

y,

$$\forall \{v, w\} \in E, g \cdot \{v, w\} \neq \{v, w\}$$

para todo $g \in F_n \setminus \{e\}$. Por ser $H$ subgrupo de $F_n$, se sigue que:

$$\forall v \in V, h \cdot v \neq v$$

y,

$$\forall \{v, w\} \in E, g \cdot \{v, w\} \neq \{v, w\}$$

para todo $g \in H \setminus \{e\}$. Por tanto, $H$ actúa de manera libre en el árbol $T$, así que $H$ es grupo libre. ■

**Ejercicio 2.3.2**
Demuestra que los siguientes subgrupos son cuasi-isométricos: $D_\infty$, $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}$.

**Demostración:**
Los grupos $D_\infty$, $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}$ son finitamente generados, por lo que su gráfic ade Caley es única hasta cuasi-isometrías.

Primero, veamos que $D_\infty \underset{C.I.}{\sim} \mathbb{Z}$. Como $D_\infty \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, entonces ya se sabe por un ejercicio anterior que los conjuntos:

$$S=\{x,y\}\subseteq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad \text{y} \quad T=\{1\}\subseteq \mathbb{z}$$

con $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle x,y \big| x^2=y^2=1\rangle$, son tales que:

$$\mathrm{Cay}\,(D_\infty,S)\cong \mathrm{Cay}\,(\mathbb{Z},T)$$

en particular, como son isomorfos como gráficas, son cuasi-isométricos, es decir que:

$$\mathrm{Cay}\,(D_\infty,S)\underset{C.I.}{\sim} \mathrm{Cay}\,(\mathbb{Z},T)$$

por lo que $D_\infty \underset{C.I.}{\sim} \mathbb{Z}$.

Ahora, veamos que $D_\infty \underset{C.I.}{\sim} \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Para ello, recordemos que:

$$D_\infty=\langle r,s\big| s^2=1 \text{ y } srs=r^{-1}\rangle$$

Por otro ejercicio, se sabe que los conjuntos:

$$S=\{(1,0),(0,1)\}\subseteq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad \text{y} \quad T=\{r,s\}\subseteq D_\infty$$

son tales que:

$$\mathrm{Cay}\,(D_\infty,T)\cong \mathrm{Cay}\,(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},S)$$

por tanto, al igual que en la parte anterior, se sigue que:

$$\mathrm{Cay}\,(D_\infty,T)\underset{C.I.}{\sim} \mathrm{Cay}\,(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},S)$$

es decir que $D_\infty \underset{C.I.}{\sim} \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. ■

**Ejercicio 2.3.3**
Demuestra que un grupo infinito no puede ser quasi-isométrico a un grupo finito.

**Demostración:**
Sea $G$ un grupo infinito y $H$ un grupo finito. Como es finito y todos los grupos finitos son quasi-isométricos, se tiene que:

$$H\underset{C.I.}{\sim}\langle e\rangle$$

por lo que existe uno conjunto $S_1\subseteq H$ tal que:

$$\mathrm{Cay}\,(H,S_1)\underset{C.I.}{\sim} \mathrm{Cay}\,(\langle e\rangle,\{e\})$$

Si $G\underset{C.I.}{\sim} H$, entonces existirían conjuntos $T\subseteq G$ y $S_2\subseteq H$ tales que:

$$\mathrm{Cay}\,(G,T)\underset{C.I.}{\sim} \mathrm{Cay}\,(H,S_2)$$

Por ser $H$ finitamente generado se sigue que su gráfica de Caley es única hasta quasi-isometrías, es decir que:

$$\mathrm{Cay}\,(H, S_2) \underset{C.I.}{\sim} \mathrm{Cay}\,(H, S_1)$$

por tanto, usando la transitividad de la relación $\underset{C.I.}{\sim}$ se sigue que:

$$\mathrm{Cay}\,(G, T) \underset{C.I.}{\sim} \mathrm{Cay}\,(\langle e\rangle, \{e\})$$

Así que existe un encaje cuasi-isométrico $f : \mathrm{Cay}\,(\langle e\rangle, \{e\}) \to \mathrm{Cay}\,(G, T)$ con imagen cuasi-densa. La gráfica de $\mathrm{Cay}\,(\langle e\rangle, \{e\})$ consta de un solo punto y ninguna arista.

Por tener imagen cuasi-densa existe $k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que para todo $g \in G$ existe $e \in \langle e\rangle$ que cumple:

$$d_G(g, f(e)) \leq k$$

Sea $m = \lceil k\rceil + 1$. Considere $g \in G$ y tomemos:

$$n_g = \text{mín}\left\{n \in \mathbb{N}\middle| g = t_1^{\epsilon_1} \cdots t_n^{\epsilon_n}; t_i \in T, \epsilon_i \in \{-1, 1\}\right\}$$

Este mínimo existe ya que el conjunto es no vacío (pues $G$ es generado por $T$). Veamos que:

$$\sup\left\{n_g \in \mathbb{N}\middle| g \in G\right\} = \infty$$

En efecto, en caso contrario de que fuese finito, digamos $N$, todo elemento de $G$ estaría en el conjunto:

$$G = \left\{t_1^{\epsilon_1} \cdot t_l^{\epsilon_l}\middle| t_i \in T, \epsilon_i \in \{-1, 1\}, l \leq N\right\}$$

siendo el conjunto de la derecha un conjunto finito (por ser $T$ finito) y el de la izquierda infinito (ya que $G$ es infinito). Por ende, $\sup\left\{n_g \in \mathbb{N}\middle| g \in G\right\} = \infty$. En particular, para $m \in \mathbb{N}$ existe un elemento $g \in G$ tal que:

$$n_g \geq m$$

es decir, que la distancia mínima de $e$ a $g$ es mayor o igual a $m$. Veamos que:

$$d(g, f(e)) \geq d(g, e) - d(e, f(e)) \geq d(g, e) = n_g \geq m = \lceil k\rceil + 1 > k$$

por tanto:

$$d(g, f(e)) > k$$

pues, $d(e, f(e)) \geq 0$. Por ende, para $g \in G$ no existe $x \in \langle e\rangle$ tal que:

$$d(g, f(x)) \leq k$$

lo cual es una contradicción ya que $f$ tiene imagen cuasi-densa$\#_c$. Por tanto, $G$ no puede ser cuasi-isométrico a $H$. ■

---

**Lema 2.3.1 (Lema de Svarc-Milnor)**
Sea $G$ un grupo actuando por isometrías en un espacio métrico (no vacío) propio y geodésico $(X, d)$. Además, supongamos que esta acción es propia y cocompacta. Entonces, $G$ es finitamente geneardo y, para todo $x \in X$, el mapeo $\varphi : G \to X$ dado por:

$$g \mapsto \varphi_g(x)$$

es una cuasi-isometría.

---

**Observación 2.3.1**
Recordemos que:

$$SL(2,\mathbb{Z}) = \left\{ A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}) \middle| \det(A) = 1 \right\}$$

Un espacio métrico propio es aquel en el que todas las bolas cerradas son compactas.

**Definición 2.3.1**
Una acción $G \times X \to X$ de un grupo $G$ en un espacio toplógico es **propia** si para todo subconjunto compacto $B \subseteq X$, el conjunto:

$$\left\{ g \in G \middle| g \cdot B \cap B \neq \emptyset \right\}$$

es finito.

**Definición 2.3.2**
Una acción $G \times X \to X$ de un grupo $G$ en un espacio topológico $X$ es **cocompacta** si el espacio cociente $G/X$ es compacto respecto a la topología cociente.

**Observación 2.3.2**
Analicemos los elementos de $SL(2\mathbb{Z})$. Si:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$$

entonces, se tiene que $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ son tales que:

$$ad - bc = 1$$

Por lo que es tal que el máximo común divisor de todos los elementos involucrados es 1 (salvo $a$ y $d$, y $b$ y $c$). Una matriz en este espacio es generada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$$

con $a, b \in \mathbb{Z}$. Por tanto, todas las matrices son de la forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+ab & a \\ b & 1 \end{bmatrix}$$

en general, un elemento $A$ de $SL(2,\mathbb{Z})$ es de la forma:

$$\begin{bmatrix} 1 + s_1 \cdot s_n \cdot l_1 \cdots l_m & s_1 \cdot s_n \\ l_1 \cdots l_m & 1 \end{bmatrix}$$

con $s_i, l_j \in \mathbb{Z}$.

**Ejercicio 2.3.4**
Para cada una de las siguientes acciones de grupos, nombra una de las condiciones del lema de Svarc-Milnor que se cumple y una que no:

*(a)* La acción de $SL(2,\mathbb{Z})$ en $\mathbb{R}^2$ dada por la multiplicación de matrices.

*(b)* La acción de $\mathbb{Z}$ en $X = \left\{ (r^3, s) \middle| r, s \in \mathbb{Z} \right\}$ (con respecto a la métrica inducida de la métrica

euclideana en $\mathbb{R}^2$) que está dada por:

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}\times X &\to X\\ (n,(r^3,s)) &\mapsto (r^3,n+s)\end{aligned}$$

**Solución:**

De *(a)*: Considere la acción de $SL(2,\mathbb{Z})$ en $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$(A,(x_1,x_2))\mapsto A\cdot\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

El espacio $\mathbb{R}^2$ con la topología usual es geodésico y propio. Además, la acción es por isometrías (ya que las transformaciones con determinante 1 preservan las distancias). Veamos si la acción es propia y cocompacta.

El espacio cociente está dado por:

$$SL(2,\mathbb{Z})/\mathbb{R}^2=\left\{SL(2,\mathbb{Z})\cdot(x_1,x_2)\Big|x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

el espacio $SL(2,\mathbb{Z})/\mathbb{R}^2$ tiene como generadores:

$$\begin{bmatrix} 1 & a\\ 0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 & 0\\ b & 1\end{bmatrix},a,b\in\mathbb{Z}$$

por lo que basta con ver que pasa con estos generadores. Se tiene que:

$$\begin{bmatrix} 1 & a\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1+ax_2\\ x_2\end{bmatrix}$$

y,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0\\ b & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1\\ bx_1+x_2\end{bmatrix}$$

para todo $a,b\in\mathbb{Z}$. Veamos que la acción no es propia. Tomemos el compacto $B=B(0,1)$, se tiene que:

$$A\cdot B=B,\quad \forall A\in SL(2,\mathbb{Z})$$

por lo que el conjunto:

$$\left\{A\in SL(2,\mathbb{Z})\Big|A\cdot B\cap B\neq\emptyset\right\}$$

no es finito.

De *(b)*: Se tiene que el espacio $X$ es geodésico (con la métrica inducida de $\mathbb{R}^2$) y es propio. Además, la acción es por isometrías (pues la traslación preserva la distancia). Veamos si la acción es propia y cocompacta.

El espacio cociente está dado por:

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}/X&=\left\{\mathbb{Z}\cdot x\Big|x\in X\right\}\\ &=\left\{\mathbb{Z}\cdot(r^3,s)\Big|r,s\in\mathbb{Z}\right\}\\ &=\left\{(r^3,\mathbb{Z}+s)\Big|r,s\in\mathbb{Z}\right\}\\ &=\left\{(r^3,\mathbb{Z})\Big|r\in\mathbb{Z}\right\}\\ &\cong\mathbb{Z}\end{aligned}$$

donde:

$$(r^3,\mathbb{Z})=\left\{(r^3,n)\Big|n\in\mathbb{Z}\right\}$$

Por tanto, $\mathbb{Z}/X$ no es compacto ya que $\mathbb{Z}/X\cong\mathbb{Z}$, el cual no es compacto. Así que la acción no es cocompacta. $\square$