Sobre Espacios δ-hiperbólicos y aplicaciones del Teorema de Svarc-Milnor

Cristo Daniel Alvarado

21 de enero de 2025

Índice general

Capítulo 1

Modelos de geometría hiperbólica

§1.1 Construcción del plano hiperbólico

En esta sección se construirá un modelo del plano hiperbólico a partir de una variedad Riemanniana.

Definición 1.1.1 (Plano superior)
Escribimos:

$$H = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| y > 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

para el **plano superior**.

Observación 1.1.1
Dependiendo del contexto, veremos a H como subconjunto de $\mathbb{C}$, haciendo las identificaciones:

$$H \to \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| \Im z > 0 \right\}$$

con la aplicación biyectiva $(x, y) \mapsto x + iy$.

Definición 1.1.2 (Haz tangente)
Sea M una variedad C^k-diferenciable. El **fibrado tangente** o **haz tangente** es la unión disjunta de los espacios tangentes a cada punto de la variedad, dado por:

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_pM$$

donde T_pM denota el espacio tangente a M en el punto $p \in M$.

Como el conjunto H es abierto y subconjunto de $\mathbb{R}^2$, entonces este hereda la estructura de variedad suave de $\mathbb{R}^2$. Además, como el haz tangente a $p \in \mathbb{R}^2$ es trivial, se sigue también que el haz tangente a H es trivial y por ende, podemos identificar de forma natural al espacio T_zH como el espacio tangente de $x \in H$.

Además, como $T_zH \cong \mathbb{R}^2$, haremos la identificación de estos dos espacios como el mismo.

Definición 1.1.3 (**Métrica Riemanniana**)
Una **métrica Riemanniana** en una variedad C^k-diferenciable M es una aplicación bilineal simétrica $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ en cada uno de los espacios tangentes T_pM de M.

Observación 1.1.2
De la definición anterior se sigue que para cada $p \in M$ se satisface:

(1) $g_p(u, v) = g_p(v, u)$ para todo $u, v \in T_pM$.

(2) $g_p(u, u) \geq 0$ para todo $u \in T_pM$.

(3) $g_p(u, u) = 0$ si y sólo si $u = 0$.

Definición 1.1.4 (**Plano Hiperbólico**)
El **plano hiperbólico** $\mathbb{H}^2$ es la variedad Riemanniana (H, g_H), donde:

- $H \subseteq \mathbb{R}^2$ hereda la estructura suave de $\mathbb{R}^2$.
- Consideramos la métrica Riemanniana $g_{H,p} : T_pH \times T_pH = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$g_{H,(x,y)}(u, v) = \frac{1}{y^2}\langle u, v\rangle, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^2$$

  para todo $(x, y) \in H$, donde $\langle \cdot | \cdot \rangle$ denota el producto interno usual de $\mathbb{R}^2$. Más aún, escribiremos $\langle \cdot | \cdot \rangle_{H,z}$ en vez de $g_{H,z}$ y a la norma inducida se le denotará por $\| \cdot \|_{H,z}$.

Nuestro interés ahora será hablar de las isometrías de $\mathbb{H}^2$, para lo cual tendremos que construír una métrica en este espacio.

Definición 1.1.5 (**Longitud hiperbólica de una curva**)
Sea $\gamma : [a, b] \to H$ una curva suave. Se define la **longitud hiperbólica de** γ por:

$$L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|_{H,\gamma(t)}\, dt = \int_a^b \frac{\sqrt{\dot{\gamma_1}^2(t) + \dot{\gamma_2}^2(t)}}{\gamma_2(t)}\, dt$$

siendo $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$.

Proposición 1.1.1
La función $d_H : H \times H \to \mathbb{R}_{\geq}0$ dada por:

$$(z, z') \mapsto \text{ínf}\left\{L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) \middle| \gamma \text{ es una curva suave en } H \text{ que une a } z \text{ con } z'\right\}$$

es una métrica en H.

Demostración:
La simetría es inmediata, la desigualdad del triángulo se sigue de la definición. ■

Proposición 1.1.2
Sea $\gamma : [a, b] \to H$ una curva suave. Entonces:

$$L_{\mathbb{H}^2}(\gamma) = L_{(H,d_H)}(\gamma)$$

donde $L_{(H,d_H)}$ es llamada la **longitud métrica** y está dada por:

$$L_{(H,d_H)} = \sup\left\{\sum_{j=0}^{k-1} d_H(\gamma(t_j),\gamma(t_{j+1}))\middle| k\in\mathbb{N}, t_0,t_1,...,t_k\in[a,b], t_0<t_1<\cdots<t_k\right\}$$

Conociendo la métrica de este espacio, nos interesa conocer ahora las geodésicas del mismo. Para ello, primero veremos quiénes son las isometrías de este espacio.

Definición 1.1.6 (**Grupo de isometrías Riemanniano**)
Una **isometría Riemanniana de** $\mathbb{H}^2$ es un difeomorfismo suave $f : H \to H$ que satisface:

$$\forall z\in H, \forall v,v'\in T_zH,\quad \langle (Df)_z(v)\big|(Df)_z(v')\rangle_{H,f(z)} = \langle v\big|v'\rangle_{H,z}$$

Proposición 1.1.3 (**Isometrías Riemannianias son isometrías**)
Toda isometría Riemanniana de $\mathbb{H}^2$ es una isometría métrica de (H,d_H). En particular, existe un monomorfismo de grupos:

$$\mathrm{Isom}\left(\mathbb{H}^2\right)\to \mathrm{Isom}\left(H,d_H\right)$$

Demostración:

$\blacksquare$

§1.2 Grupos Fuchsianos

Definición 1.2.1
$\mathrm{SL}\left(n,\mathbb{A}\right)$ denota al espacio de todas las matrices 2×2 con entradas en $\mathbb{A}\subseteq\mathbb{C}$ tales que:

$$\det(A)=1,\quad \forall A\in\mathbb{A}$$

Definición 1.2.2 (**Transformaciones de Möbius**)
Para la matriz 2×2:

$$\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in \mathrm{SL}\left(2,\mathbb{R}\right)$$

definimos la **transformación de Möbius asociada** $f_A : H\to H$, dada por:

$$z\mapsto \frac{a\cdot z+b}{c\cdot z+d}$$

Observación 1.2.1
Toda transformación de Möbius está bien definida, ya que como H es el plano superior, entonces la parte real de z nunca será un número con parte imaginaria cero, así que $c\cdot z+d\neq 0$ para todo $z\in H$.

Ejemplo 1.2.1
La función $z\mapsto z$ es una transformación de Möbius. Al igual que la función $z\mapsto \frac{1}{z}$. En particular, todas las funciones lineales de H en H son transformaciones de Möbius.

Proposición 1.2.1
Se tiene lo siguiente:

(1) f_A está bien definido y es un difeomorfismo C^∞ (o suave).

(2) Para todo $A, B \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ se tiene que $f_{A \cdot B} = f_A \circ f_B$.

(3) $f_A = f_{-A}$ para todo $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

Demostración:
De *(1)* y *(2)*: Son inmediatas.

De *(3)*: Si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$$

entonces,

$$f_A(z) = \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d} = \frac{-a \cdot z + -b}{-c \cdot z + -d} = f_{-A}(z)$$

para todo $z \in H$. ■

Ejemplo 1.2.2 (Generadores $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$)
Tenemos los siguientes dos tipos de transformaciones de Möbius:

- Sea $b \in \mathbb{R}$. Entonces, la transformación de Möbius asociada a la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$$

es la traslación horizontal $z \mapsto z + b$ en H por un factor b se denotará por T_b.

- La transformación de Möbius asociada a la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$$

es la función $z \mapsto \frac{1}{z}$ se denotará por In.

Se tiene que el grupo $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ es generado por:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| b \in \mathbb{R} \right\}$$

Demostración:
Notemos que:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b & 1 \end{pmatrix}$$

para todo $b \in \mathbb{R}$. Así que todas las matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

está en el grupo generado por el conjunto anterior. Para terminar, basta notar que toda matriz en $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ admite una descomposición LU o UL, dependiendo del caso. ■

Proposición 1.2.2 (**Transformaciones de Möbius son isometrías**)
Si $A\in\mathrm{SL}\left(2,\mathbb{R}\right)$, entonces la transformación de Möbius asociada $f_A:H\to H$ es una isometría Riemanniana de $\mathbb{H}^2$. En particular, tenemos un monomorfismo de grupos:

$$\mathrm{PSL}\left(2,\mathbb{R}\right)=\mathrm{SL}\left(2,\mathbb{R}\right)/\left\{I,-I\right\}\to\mathrm{Isom}\left(H,d_H\right)$$

dado por $[A]\mapsto f_A$.

Demostración:

Por el ejemplo anterior basta con ver que T_b y In son isometrías Riemannianas de $\mathbb{H}^2$, ya que la composición de isometrías Riemannianias sigue siendo una isometría Riemanniana. Analicemos los dos casos:

-

$\blacksquare$

Teorema 1.2.1 (**El grupo de isometrías hiperbólicas**)
El grupo $\mathrm{Isom}\left(H,d_H\right)$ es generado por:

$$\left\{f_A\Big|A\in\mathrm{SL}\left(2,\mathbb{R}\right)\right\}\cup\left\{z\mapsto-\overline{z}\right\}$$

En particular, toda isometría de $\left(H,d_H\right)$ es una isometría Riemanniana suave y, $\mathrm{Isom}\left(H,d_H\right)=\mathrm{Isom}\left(\mathbb{H}^2\right)$. Además, la función:

Definición 1.2.3
Sea $A\in\mathrm{PSL}\left(2,\mathbb{R}\right)$, con:

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

- Si $\mathrm{Tr}\left(A\right)<2$, entonces A es llamada **elíptica**.
- Si $\mathrm{Tr}\left(A\right)=2$, entonces A es llamada **parabólica**.
- Si $\mathrm{Tr}\left(A\right)>2$, entonces A es llamada **hiperbólica**.

§1.3 Hiperbólicidad y δ-hiperbolicidad

Estudiaremos la propiedad de hiperbolicidad, que más adelante resutará de utilidad para estudiar invariantes cuasi-isométricos.

1.3.1. Espacios Hiperbólicos

Definición 1.3.1
Sea (X,d) un espacio métrico. Para cada $\delta>0$ y para cada $A\subseteq X$ se define el conjunto:

$$B_\delta^{(X,d)}(A)=\left\{x\in X\Big|\exists a\in A\text{ tal que }d(x,a)\leq\delta\right\}$$

Definición 1.3.2 (**Triángulos geodésicos δ-delgados**)
Sea (X, d) un espacio métrico.

1 Un **triángulo geodésico en** X es una tripleta $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ de geodésicas $\gamma_i : [0, L_i] \to X$ en X tales que:

$$\gamma_0(L_0) = \gamma_1(0), \quad \gamma_1(L_1) = \gamma_2(0), \quad \gamma_2(L_2) = \gamma_0(0)$$

2 Un triángulo geodésico es **δ-delgado** si:

$$\begin{aligned}
\mathrm{im}\,(\gamma_0) &\subseteq B_\delta^{(X,d)}(\mathrm{im}\,(\gamma_1) \cup \mathrm{im}\,(\gamma_2)), \\
\mathrm{im}\,(\gamma_1) &\subseteq B_\delta^{(X,d)}(\mathrm{im}\,(\gamma_0) \cup \mathrm{im}\,(\gamma_2)), \\
\mathrm{im}\,(\gamma_2) &\subseteq B_\delta^{(X,d)}(\mathrm{im}\,(\gamma_0) \cup \mathrm{im}\,(\gamma_1))
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.3.1

Definición 1.3.3
Sea (X, d) un espacio métrico.

(1) Sea $\delta\mathbb{R}_{\geq 0}$. Decimos que (X, d) es **δ-hiperbólico** si X es geodésico y todos los triángulos geodésicos de X son δ-delgados.

(2) (X, d) es **hiperbólico** si existe $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que (X, d) es δ-hiperbólico.

Ejemplo 1.3.2
Todo espacio métrico geodésico X de diámetro finito es $\mathrm{diam}\,(X)$-hiperbólico.

Ejemplo 1.3.3
La recta real $\mathbb{R}$ es 0-hiperbólico ya que cada triángulo geodésico en $\mathbb{R}$ es degenerado, pues estos se ven simplemente como líneas rectas.

Ejemplo 1.3.4
El plano euclideano $\mathbb{R}^2$ no es hiperbólico.

1.3.2. Hiperbolicidad de $\mathbb{H}^2$

Nuestro objetivo en esta subsección será probar el siguiente resultado:

Proposición 1.3.1
El plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$ es un espacio métrico hiperbólico en el sentido de la definición anterior.

Antes de llegar a ello, probaremos algunos resultados adicionales y enunciaremos algunas defenciones fundamentales.

Definición 1.3.4 (**Área hiperbólica**)

Sea $f : H \to \mathbb{R}_{\geq}0$ una función Lebesgue integrable. Se define la **integral de f sobre $\mathbb{H}^2$** como:

$$\begin{aligned}\int_H f\, dV_H &= \int_H f(x,y)\sqrt{\det(G_{H,(x,y)})}\, dxdy \\ &= \int_H \frac{f(x,y)}{y^2}\, dxdy\end{aligned}$$

donde:

$$G_{H,,(x,y)} = \begin{pmatrix} g_{H,(x,y)}(e_1,e_1) & g_{H,(x,y)}(e_1,e_2) \\ g_{H,(x,y)}(e_2,e_1) & g_{H,(x,y)}(e_2,e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/y^2 & 0 \\ 0 & 1/y^2 \end{pmatrix}$$

siendo $e_1, e_2 \in T_{(x,y)}H = \mathbb{R}^2$ los vectores coordenados usuales.

Si $A \subseteq H$ es un conjunto Lebesgue medible, definimos el **área hiperbólica de A** por:

$$\mu_{\mathbb{H}^2}(A) = \int_H \chi_A\, dV_H$$

siendo χ_A la función característica de A.

Proposición 1.3.2 (**Crecimiento exponencial del área hiperbólica**)
Para todo $r \in \mathbb{R}_{>10}$ tenemos que:

$$\mu_{\mathbb{H}^2}(B_r^{(H,d_H)}(i)) \geq e^{\frac{r}{10}}(1 - e^{-\frac{r}{2}})$$

Demostración:
Sea $r \in \mathbb{R}_{>10}$. Se tiene que el conjunto:

$$Q_r = \left\{ x + iy \middle| x \in [0, e^{r/10}], y \in [1, e^{r/2}] \right\}$$

está contenido en $B_r^{(H,d_H)}(i)$. En particular, obtenemos que:

$$\begin{aligned}\mu_{\mathbb{H}^2}(B_r^{(H,d_H)}(i)) &\geq \mu_{\mathbb{H}^2}(Q_r) \\ &= \int_0^{e^{r/10}} \int_1^{e^{r/2}} \frac{dxdy}{y^2} \\ &= e^{\frac{r}{10}}(1 - e^{-\frac{r}{2}})\end{aligned}$$

■

Teorema 1.3.1 (**Triángulos son delgados**)
Existe una constante $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que todo triángulo geodésico en (H, d_H) es C-delgado.

Figura 1. Caption.