Notas Curso Topología I
Axiomas de Numerabilidad

Cristo Daniel Alvarado

8 de mayo de 2024

Índice general

Capítulo 5

Axiomas de Numerabilidad

5.1. Conceptos Fundamentales

Observación 5.1.1
De ahora en adelante numerable será equivalente a lo sumo numerable.

Definición 5.1.1
Sea (X, τ) un espacio topológico.

1. Sean $x \in X$ y $\mathcal{U}$ una colección de vecindades de x. Diremos que $\mathcal{U}$ es un **sistema fundamental de vecindades de** x si dada $V \in \mathcal{V}(x)$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \subseteq V$. Si $\mathcal{U}$ es numerable, $\mathcal{U}$ se dice un **sistema fundamental numerable de vecindades de** x.

2. Si dado $x \in X$ existe un sistema fundamental numerable de vecindades de x, el espacio (X, τ) se dice **primero numerable**.

3. El espacio (X, τ) se dice un **espacio segundo numerable** si su topología tiene una base numerable.

4. El espacio (X, τ) se dice un **espacio separable** si existe $A \subseteq X$ tal que A es numerable y además $\overline{A} = X$ (es decir que es denso en X).

5. El espacio (X, τ) se dice un **espacio de Lindelöf** si cada cubierta abierta del espacio tiene una subcubierta numerable.

5.2. Espacios Primero Numerables

Proposición 5.2.1
Sea (X, τ) un espacio primero numerable. Si $Y \subseteq X$ entonces (Y, τ_Y) es primero numerable.

Demostración:
Sea $Y \subseteq X$. Sea $y \in Y$, en particular $y \in X$. Como (X, τ) es primero numeable, existe un sistema fundamental de vecindades de x en (X, τ), digamos $\mathcal{U}'$, es decir que para este $\mathcal{U}'$ se cumple:

$$\forall V \in \mathcal{V}(x) \exists U \in \mathcal{U}' \text{ tal que } U \subseteq V$$

Sea

$$\mathcal{U} = \left\{ Y \cap U \middle| U \in \mathcal{U}' \right\}$$

Tenemos que $U \in \mathcal{U}'$, $Y \cap U$ es una vecindad de y en (Y, τ_Y) y, como $\mathcal{U}'$ es numerable, también $\mathcal{U}$ lo es.

Sea $W \subseteq Y$ una vecindad de y en (Y, τ_Y), luego existe $V \in \tau$ tal que

$$y \in Y \cap V \subseteq W$$

Como en particular V es una vecindad de y en (X, τ), entonces existe $U \in \mathcal{U}'$ tal que

$$U \subseteq V$$

luego,

$$Y \cap U \subseteq Y \cap V \subseteq W$$

donde $Y \cap U \in \mathcal{U}$. Así, $\mathcal{U}$ es un sistema fundamental de vecindades de y en (Y, τ_Y). Como $y \in Y$ fue arbitrario, se sigue que (Y, τ_Y) es primero numerable. ■

Proposición 5.2.2
La propiedad de ser primero numerable es topológica.

Demostración:
Sean (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) espacios topológicos homeomorfos tales que (X_1, τ_1) es primero numerable. Sea $f : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$ el homeomorfismo entre tales espacios. Veamos que (X_2, τ_2) es primero numeable.

En efecto, sea $x_2 \in X_2$, entonces existe un único $x_1 \in X_1$ tal que $f(x_1) = x_2$. Como (X_1, τ_1) es primero numerable, entonces existe $\mathcal{U}_1$ sistema fundamental numerable de vecindades de x_1. Sea

$$\mathcal{U}_2 = \left\{ f(U_1) \middle| U_1 \in \mathcal{U}_1 \right\}$$

Como $\mathcal{U}_1$ es numerable, $\mathcal{U}_2$ también lo es. Y, como $U_1 \in \mathcal{U}_1$ es una vecindad de x_1, entonces $f(U_1)$ es una vecindad de x_2 (por ser f homeomorfismo). Por tanto, $\mathcal{U}_2$ es una colección de vecindades de x_2. Ahora, sea $V \in \mathcal{V}(x_2)$ una vecindad de x_2. Como f es homeomorfismo entonces

$$f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x_1)$$

Luego, existe $U \in \mathcal{U}_1$ tal que

$$U \subseteq f^{-1}(V) \Rightarrow f(U) \subseteq V$$

por ser f biyección, donde $f(U) \in \mathcal{U}_2$.

Así, $\mathcal{U}_2$ es un sistema fundamental numerable de vecindades de x_2. Como el elemento x_2 fue arbitrario, se sigue que (X_2, τ_2) es primero numerable. Luego, la propiedad de ser primero numerable es topológica. ■

Proposición 5.2.3
Sean $\{(X_k, \tau_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ una familia numerable de espacios topológicos y

$$X = \prod_{k \in \mathbb{N}} X_k$$

Entonces, (X, τ_p) es primero numerable si y sólo si (X_k, τ_k) es primero numerable, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demostración:

$\Rightarrow$): Es inmediato del hecho de que la propiedad de ser primero numerable es hereditaria y topológica.

$\Leftarrow$): Suponga que (X_k, τ_k) es primero numerable para todo $k \in \mathbb{N}$. Sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$. Si $k \in \mathbb{N}$, se tiene que (X_k, τ_k) es primero numerable. Para $x_k \in X_k$ existe

$$\mathcal{U}_k = \left\{U_m^k\right\}_{m\in\mathbb{N}}$$

sistema fundamental numerable de vecindades de x_k en (X_k, τ_k). Definimos

$$\mathcal{U} = \left\{\prod_{l\in\mathbb{N}} A_l \middle| \text{ existe } I = \{i_1, ..., i_t\} \subseteq \mathbb{N} \text{ finito con } i_r < i_s \text{ si } r < s \text{ tal que} \right.$$
$$\left. l \in \mathbb{N} - I \Rightarrow A_l = X_l \text{ y } l \in I \Rightarrow A_k \in \mathcal{U}_l\right\}$$

veamos que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}(x)$ y además $\mathcal{U}$ es un sistema fundamental de vecindades de x. Sea $U = \prod_{t\in\mathbb{N}} U_t$ un básico de la topología producto tal que $x \in U$. Tenemos que existe $I \subseteq \mathbb{N}$ finito tal que

$$l \in \mathbb{N} - I \Rightarrow U_l = X_l \text{ y } l \in I \Rightarrow x_l \in U_l \in \tau_l$$

Para $l \in I$ existe $U_{m_l}^l \in \mathcal{U}_l$ tal que $x_l \in U_{m_l}^l \subseteq U_l$. Sea

$$A = \prod_{l\in\mathbb{N}} A_l$$

donde,

$$l \in \mathbb{N} - I \Rightarrow A_l = X_l \text{ y } l \in I \Rightarrow A_l = U_{m_l}^l$$

por tanto, $A \in \mathcal{U}$ y es tal que $x \in A \subseteq U$.

Veamos ahora que $\mathcal{U}$ es numerable. Sea $A = \prod_{l\in\mathbb{N}} A_l \in \mathcal{U}$, entonces existe $I \subseteq \mathbb{N}$ finito, digamos $I = \{i_1, ..., i_t\}$ (ordenados de forma estrictamente creciente y siendo todos distintos) tales que $l \in \mathbb{N}-I$ entonces $A_l = X_l$.Y, si $l \in I$ entonces $A_l = U_{m_l}^l \in \mathcal{U}_l$. Sea $(i_1, ..., i_t, m_{i_1}, ..., m_{i_t}) \in \mathbb{N}^{2t}$.

Definimos la función

$$f : \mathcal{U} \to \bigcup_{t\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^{2t}$$

(donde $\mathbb{N}^{2t}$ expresa el producto cartesiano de $\mathbb{N}$ consigo mismo $2t$-veces) tal que $A \mapsto (i_1, ..., i_t, m_{i_1}, ..., m_{i_t})$ (siendo el A de la forma en que se expresó anteriormente). Se tiene por la elección de los elementos de $\mathcal{U}$, que la función f está bien definida y es inyectiva. Por tanto, $\mathcal{U}$ es numerable.

Luego, (X, τ_p) es primero numerable. ■

Proposición 5.2.4

Sea (X, τ) un espacio primero numerable.

1. Sea $A \subseteq X$ y $x \in X$. Entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una sucesión de puntos $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de A que converge a x.

2. Sean (X', τ') espacio topológico y $f : (X, \tau) \to (X', \tau')$ una función. Entonces, para $x \in X$, f es continua en X si y sólo si para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos en X que converge a x, se tiene que la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(x)$.

Demostración:

De (1): Se probará la doble implicación.

$\Rightarrow$): Sea $x \in \overline{A}$ y $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema fundamental numerable de vecindades de x. Entonces

$$B_1 \cap A \neq \emptyset$$

pues $x \in \overline{A}$ y B_1 es vecindad de x. Tomemos $x_1 \in B_1 \cap A$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, como

$$B_1 \cap \cdots \cap B_n$$

es vecindad de x, entonces su intersección con A es no vacía. Tome así $x_n \in B_1 \cap \cdots \cap B_n \cap A$ y construýase así la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Veamos que esta sucesión converge a x. En efecto, sea $U \in \tau$ tal que $x \in \tau$. Como este es un sistema fundamental de vecindades, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $B_l \subseteq U$, luego

$$x_{l+m} \in B_l \subseteq U$$

para todo $m \geq 0$. Por tanto, la sucesión converge a x.

$\Leftarrow$): Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos de A tal que $x_n \to \infty$. Tomemos $M \in \tau$ tal que $x \in M$, luego existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_{k+m} \in M$, para todo $m \geq 0$, así $M \cap A \neq \emptyset$. Por tanto, $x \in \overline{A}$.

De (2): Se probará la doble implicación.

$\Rightarrow$): Suponga que f es continua en x. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos que converge a x. Sea $V \in \tau'$ tal que $f(x) \in V$, entonces $x \in f^{-1}(V)$, donde $f^{-1}(V) \in \tau$ por ser f continua en x. Luego, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_{k+m} \in f^{-1}(V), \quad \forall m \geq 0$$

es decir que

$$f(x_{k+m}) \in f(f^{-1}(V)) \subseteq V, \quad \forall m \geq 0$$

Por tanto, $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(x)$.

$\Leftarrow$): Veamos que dado $A \subseteq X$ se cumple que $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. En efecto, sea $x \in \overline{A}$. Por 1) al ser (X, τ) primero numerable existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de A que converge a x. Entonces $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de puntos de $f(A)$ que converge a $f(x)$. Por tanto, $f(x) \in \overline{f(A)}$ (en la prueba de la suficiencia no es necesario que (X, τ) sea primero numerable, así que en este caso no se ocupa que (X', τ') sea primero numerable). Por tanto, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ ■

5.3. Espacios Segundo Numerables

Proposición 5.3.1

La propiedad de ser segundo numerable es hereditaria.

Demostración:

Sea (X, τ) un espacio topológico segundo numerable y $Y \subseteq X$ subconjunto. Veamos que (Y, τ_Y) es segundo numerable. En efecto, como (X, τ) es primero numerable, existe $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base para la topología τ que es a lo sumo numerable. Se tiene que

$$\mathcal{B}' = \left\{ Y \cap B \middle| B \in \mathcal{B} \right\}$$

es una base para τ_Y (por una proposición anterior). Como $\mathcal{B}$ es numerable, se sigue que $\mathcal{B}'$ es numerable. Por tanto, (Y, τ_Y) es segundo numerable. ■

Proposición 5.3.2
La propiedad de ser segundo numerable es topológica.

Demostración:
Sean (X,τ) y (Y,σ) espacios topológicos homeomorfos con $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ el homeomorfismo y, suponga que (X,τ) es segundo numerable y sea $\mathcal{B}=\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de τ. Entonces, la por una proposición, la colección:

$$\mathcal{B}'=\left\{f(B)\Big|B\in\mathcal{B}\right\}$$

es una base para la topología σ (por ser f homeomorfismo) la cual es a lo sumo numerable. Por tanto, (Y,σ) es segundo numerable.

Así, la propiedad de ser segundo numerable es topológica. ■

Ejercicio 5.3.1
Sea $\{(X_n,\tau_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una familia de espacios topológicos segundo numerables y, tomemos

$$X=\prod_{n=1}^{\infty}X_n$$

Entonces, (X,τ_p) es segundo numerable.

Demostración:

■

Teorema 5.3.1
Sea (X,τ) un espacio topológico.

1. Si (X,τ) es segundo numerable, entonces es primero numerable.
2. Si (X,τ) se segundo numerable, entonces el espacio es de Lindelöf.
3. Si (X,τ) es segundo numerable, entonces es separable.

Demostración:
De (1): Sea $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base para la topología τ. Tomemos $x\in X$ y defina

$$\mathcal{B}_x=\left\{B\in\mathcal{B}\Big|x\in B\right\}$$

Se tiene que $\mathcal{B}_x$ es a lo sumo numerable. Sea $U\in\tau$ tal que $x\in U$, luego como $\mathcal{B}$ es base existe $B\in\mathcal{B}$ tal que $x\in B\subseteq U$, luego $B\in\mathcal{B}_x$. Por tanto, $\mathcal{B}_x$ es un sistema fundamental de vecindades de x el cual es a lo sumo numerable. Al ser $x\in X$ arbitrario, se sigue que (X,τ) es primero numerable.

De (2): Sea $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base para la topología τ y sea $\mathcal{A}$ una cubierta abierta de X. Dado $x\in X$, como A es una cubierta existe $A_x\in\mathcal{A}$ tal que

$$x\in A_x\in\tau$$

luego, existe $B_x\in\mathcal{B}$ tal que $x\in\ B_x\subseteq A_x$. Sea

$$\mathcal{K}=\left\{m\in\mathbb{N}\Big|\exists A\in\mathcal{A}\text{ tal que }B_m\subseteq A\right\}$$

por la observación anterior, $\mathcal{K} \neq \emptyset$. Dado $k \in \mathcal{K}$ escogemos un único $A_k \in \mathcal{A}$ tal que $B_k \subseteq A_k$. Sea

$$\mathcal{A}' = \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

$\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ es una subcolección a lo sumo numerable. $\blacksquare$