Lista 1 de Ejercicios Lógica Matemática: Lógica Proposicional

Cristo Daniel Alvarado

18 de septiembre de 2024

1.1. Ejercicios

Definición 1.1.1
Una **conectiva booleana n-aria** es una función $B:\{T,F\}^n\to\{T,F\}$.

Observación 1.1.1
La idea de la función anterior es que se codifique una tabla de verdad.

Ejercicio 1.1.1
Considere la conectiva booleana dada por:

$$\begin{array}{ll} B(T,T,T)=F, & B(F,T,T)=F, \\ B(T,T,F)=F, & B(F,T,F)=T, \\ B(T,F,T)=F, & B(F,F,T)=T, \\ B(T,F,F)=T, & B(F,F,F)=T, \end{array}$$

escriba una fórmula bien formada, utilizando el conjunto de conectivas $\{\neg,\wedge,\vee\}$ que realice esta función booleana.

Solución:
Sea $B:\{T,F\}^3\to\{T,F\}$ dada por:

$$B(p_1,p_2,p_3)=(p_1\wedge\neg p_2\wedge\neg p_3)\vee(\neg p_1\wedge p_2\wedge\neg p_3)\vee(\neg p_1\wedge\neg p_2\wedge p_3)\vee(\neg p_1\wedge\neg p_2\wedge\neg p_3)$$

se verifica rápidamente que ésta función B satiface lo deseado. □

Ejercicio 1.1.2
Muestre que el conjunto de conectivas $\{\perp,\Rightarrow\}$ es completo (donde $\perp$ es la conectiva 0-aria con valor constante F).

Demostración:
Basta con ver que si φ y ψ son fórmulas, entonces $\neg\varphi$ y $\varphi\Rightarrow\psi$ se pueden expresar con conectivas $\{\perp,\Rightarrow\}$.

En efecto, ya se tiene la implicación. Veamos que:

$$\neg\varphi\equiv\perp\Rightarrow\varphi$$

para un modelo m se tiene que:

φ	$\perp$	$\perp\Rightarrow\varphi$	$\neg\varphi$
T	F	F	F
F	F	T	T

es decir, que en cualquier caso $\overline{m}(\neg\varphi)=\overline{m}(\perp\Rightarrow\varphi)$. Se sigue entonces la equivalencia. Como $\{\neg,\Rightarrow\}$ es un conjunto completo de conectivas, también lo debe ser pues $\{\perp,\Rightarrow\}$. ■

Ejercicio 1.1.3
Reescriba las siguientes fórmulas en notación polaca a notación usual:

a. $\neg\neg\Rightarrow\vee\wedge p_3p_8\neg p_{10}\neg\vee p_1p_5$.

b. $\wedge\neg\Rightarrow p_3\vee p_4p_1\iff\vee\neg p_{10}\iff p_{15}p_{18}q$.

c. $\wedge \Rightarrow p_3 \wedge p_2 p_1 \neg \vee \wedge p_4 p_5 \neg p_{10}$.

Solución:

Veamos que

1. $\neg\neg \Rightarrow \vee \wedge p_3 p_8 \neg p_{10} \neg \vee p_1 p_5 \equiv \neg\neg(((p_3 \wedge p_8) \vee \neg p_{10}) \Rightarrow \neg(p_1 \vee p_5))$.
2. $\wedge\neg \Rightarrow p_3 \vee p_4 p_1 \iff \vee \neg p_{10} \iff p_{15} p_{18} q \equiv (\neg(p_3 \Rightarrow (p_4 \vee p_1))) \wedge ((\neg p_{10} \vee (p_{15} \iff p_{18})) \iff q)$.
3. $\wedge \Rightarrow p_3 \wedge p_2 p_1 \neg \vee \wedge p_4 p_5 \neg p_{10} \equiv (p_3 \Rightarrow (p_2 \vee p_1)) \wedge \neg((p_4 \wedge p_5) \vee \neg p_1 0)$.

□

Ejercicio 1.1.4

Demuestre que toda fórmula bien formada (en el formato de clase, es decir, en notación polaca) en la que no aparezca el símbolo $\neg$ debe tener longitud impar.

Demostración:

Procederemos por inducción del número de implicaciones $\Rightarrow$, digamos n, en la cadena de la fórmula φ.

- Si $n = 0$, entonces $\varphi \equiv p_1$, siendo p_1 una variable. Luego la longitud de φ es 1 que es impar.
- Si $n = 1$, entonces $\varphi \equiv \Rightarrow p_1 p_2$, siendo p_1 y p_2 variables. Luego la longitud de φ es 3 que es impar.
- Suponga que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \in [\![0, n]\!]$ se cumple que toda FBF que no contenga a $\neg$ y con una cantidad de implicaciones k tiene longitud impar.

  Sea φ una fórmula bien formada que no contenga $\neg$ y que tiene $n + 1$ implicaciones, es decir que es de la forma:

  $$\varphi \equiv \Rightarrow \psi_1 \psi_2$$

  donde ψ_1, ψ_2 son FBF. Como φ tiene $n + 1$ implicaciones, entonces debe suceder que ψ_1 y ψ_2 contengan entre 0 y n implicaciones. Por hipótesis de inducción, tanto ψ_1 como ψ_2 tienen longitud impar, luego φ tiene longitud la suma de estos dos impares (que es un par) más 1 (la primera implicación). Por tanto, φ tiene longitud impar.

Por inducción se sigue el resultado. ■

Ejercicio 1.1.5

Sea φ una fórmula bien formada. Sea c la cantidad de veces que aparece el símbolo $\Rightarrow$ en la fórmula φ, y sea s la cantidad de veces que aparecen variables en la fórmula φ (en donde, si alguna variable aparece varias veces, se cuentan cada una de sus apariciones por separado). Demuestre que

$$s = c + 1$$

Demostración:

■

Ejercicio 1.1.6
Sea φ una fórmula bien formada, y suponga que todos los símbolos de la variable que aparecen en φ se encuentran entre $p_1, ..., p_n$. Supóngase que m, m' son dos modelos que satisfacen $m(p_i) = m'(p_i)$ para todo $i \in [\![1, n]\!]$. Demuestre que

$$\overline{m}(\varphi) = \overline{m}'(\varphi)$$

Demostración:

$\blacksquare$

Ejercicio 1.1.7
Demuestre o refute