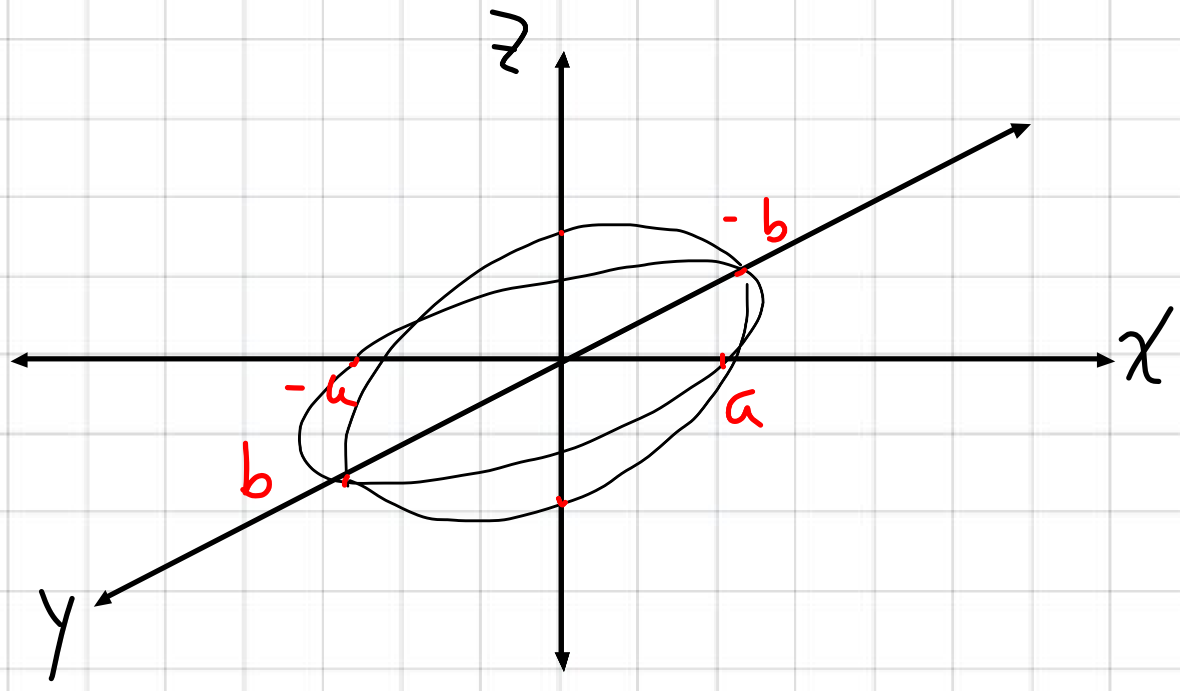
1. Calcular el volúmen del sólido limitado por el elipsoide:



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Veamos que:

$$V=2c\int_{X}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

Donde $f(x,y)=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$, $f: X\to\mathbb{R}$, donde $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\}\subset\mathbb{R}^2$. $Fr(X)$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^2$, por tanto X es J-medible. Sea: $A=[-a,a]\times[-b,b]$ una celda cerrada. Es claro que $X\subset A$. Definimos:

$$\hat{f}: A\to\mathbb{R},\quad \hat{f}(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y)\in X\\ 0 & \text{si } (x,y)\notin X\end{cases}$$

Sean $f_x(y)=\hat{f}(x,y)$, $f_x:[-b,b]\to\mathbb{R}$ y $g:[-a,a]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\int_{-b}^{b} f_x$. Por el teorema de Fubini:

$$V=2\int_{X} f=2\int_{A}\hat{f}=2\int_{-a}^{a} g(x)\,dx;\quad g(x)=\int_{-b}^{b} f_x\,dy;$$

Si $x\in[-a,a]$ y $(x,y)\in X$, entonces:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1 \Rightarrow y^2\leq b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\Rightarrow y\leq\left|b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right|\Rightarrow -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\leq y\leq b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

$\Rightarrow y\in\left[-b\sqrt{1-x^2/a^2},\ b\sqrt{1-x^2/a^2}\right]$ Luego: (Se acota la zona en la que la integral no es 0).

$$\int_{-b}^{b} f_x=\int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy=c\int_{-bA}^{bA}\sqrt{A^2-\frac{y^2}{b^2}}\,dy\ ;\ A=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

Sea $F(y)=\sqrt{A^2-y^2/b^2}=A\sqrt{1-\frac{y^2}{(Ab)^2}}$. Con $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\varphi(t)=Ab\,\mathrm{sen}\,t$, se tiene, por el teorema de cambio de variable:

$$\int_{-bA}^{bA} F(y)=\int_{\varphi(-\pi/2)}^{\varphi(\pi/2)} F=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=2A\int_0^{\pi/2}\cos t\cdot Ab\cos t\,dt=2A^2 b\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt$$

$$=2A^2 b\,\frac{\pi}{4}=2b\,\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

Luego:

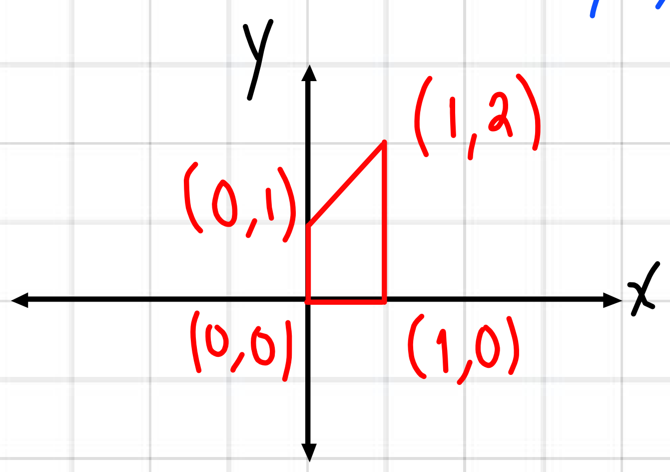
$$V = 4c\int_{-a}^{a} b\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) = 8c\int_{0}^{a} b\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$= 2\pi cb\int_0^a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = 2\pi cb\cdot\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\Big|_0^a\right)$$

$$= 2\pi cb\left(a-\frac{a}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi abc \;//$$

Ejercicio

a) $\int (1+x)\,\mathrm{sen}\,y$, X el trapezoide de vértices $(0,0),(1,0),(1,2),(0,1)$.



Veamos que $f: X \to \mathbb{R}$, donde $X = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leq x\leq 1$ y $0\leq y\leq x+1\}$. Es claro que $Fr(X)$ tiene medida nula, por tanto, es J-medible. Sea $A=[0,1]\times[0,2]$. Se tiene que $X\subset A$.

Definimos $\hat{f}: A\to\mathbb{R}$ como sigue:

$$\hat{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } x\in X \\ 0 & \text{si } x\notin X \end{cases}$$

Por tanto:

$$\int_X f = \int_A \hat{f}$$

Sean: $f_x: [0,2]\to\mathbb{R}$, $f_x(y)=\hat{f}(x,y)$ y $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\int_0^2 f_x$. Si $x\in[0,1]$, entonces $0\leq y\leq x+1$. Luego, por el teorema de Fubini:

$$\int_X f = \int_A \hat{f} = \int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1\left(\int_0^2 f_x(y)\,dy\right)dx = \int_0^1\left(\int_0^2 f_x\,dy\right)dx$$

Luego, acotando el área donde y no vale cero, si $(x,y)\in X$, entonces $0\leq x\leq 1$ y $0\leq y\leq x+1$. De esta forma:

$$\int_0^2 f_x\,dy = \int_0^{x+1}(x+1)\,\mathrm{sen}\,y\,dy = (x+1)\int_0^{x+1}\mathrm{sen}\,y\,dy = (x+1)\left(-\cos y\Big|_0^{x+1}\right)$$

$$= (x+1)(1-\cos(x+1))$$

Luego:

$$\int_X f = \int_0^1 (x+1)(1-\cos(x+1))\,dx = \int_0^1 x - x\cos(x+1) + 1 - \cos(x+1)\,dx$$

$$= \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 x\cos(x+1) + \int_0^1 1\cdot dx - \int_0^1 \cos(x+1)\,dx$$

• $\int x\cos(x+1)$

Como:

$\int uv' = uv - \int u'v$, siendo $u = x$ y $v' = \cos(x+1)$

$u' = 1$ y $v = \text{Sen}(x+1)$

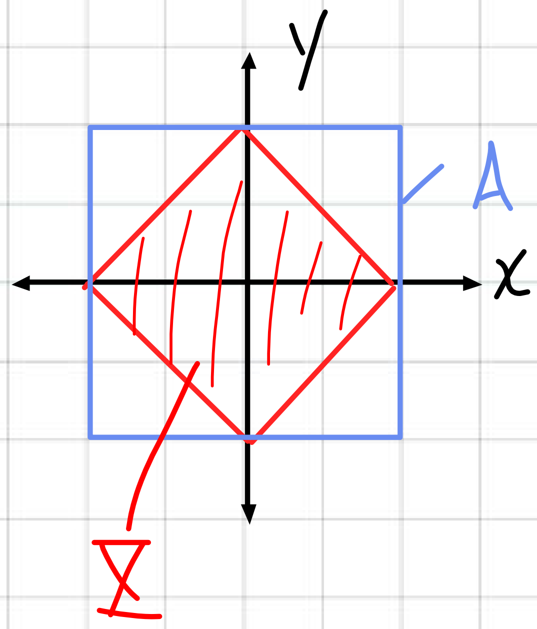
entonces:

$$\int x\cos(x+1) = x\,\text{sen}(x+1) - \int \text{sen}(x+1) = x\,\text{sen}(x+1) + \cos(x+1)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 x\cos(x+1)\,dx + \int_0^1 dx - \int_0^1 \cos(x+1)\,dx = \frac{x^2}{2} - x\,\text{Sen}(x+1) - \cos(x+1) + x - \text{Sen}(x+1)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \text{Sen}(2) - \cos(2) + 1 - \text{Sen}(2) - (-\cos(1) - \text{sen}(1)) = \frac{3}{2} - 2\,\text{Sen}(2) - \cos(2) + \cos(1) + \text{Sen}(1)$$

b) $\int_X e^{x+y}$; $X = \{(x,y) \mid |x|+|y| \leq 1\}$



$f: X \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^{x+y}$. Es claro que X es J-medible, pues su frontera tiene medida nula. Por ser f producto de funciones continuas en $\mathbb{R}^2$, $e^x \cdot e^y$, se sigue que f es integrable sobre X. Sea $A = [-1,1]\times[-1,1] \subset \mathbb{R}^2$, A es una celda cerrada y $X \subset A$. Sea $\hat{f}: A \to \mathbb{R}$ la función característica de f en A. Sean:

$f_x: [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f_x(y) = \hat{f}(x,y)$ y $g: [-1,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \int_{-1}^{1} f_x\,dy$. Como $\hat{f}$ es integrable (pues f lo es), entonces, por el teorema de Fubini, f_x es integrable, y:

$$\int_X f = \int_A \hat{f} = \int_{-1}^{1} g(x)\,dx = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f_x\,dy\right)dx = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f_x\,dy\right)dx$$

Para $\int_{-1}^{1} f_x\,dx$, veamos los puntos en los que $(x,y) \in X$, pues allí $f(x,y)$ es no cero. Si $0 \leq x \leq 1$, entonces $x-1 \leq y \leq 1-x$. Si $-1 \leq x \leq 0$, entonces $-1-x \leq y \leq 1+x$. Por tanto:

$$\int_X f = \int_0^1\left(\int_{x-1}^{1-x} f_x\,dy\right)dx + \int_{-1}^{0}\left(\int_{-1-x}^{1+x} f_x\,dy\right)dx$$

De aquí:

$$\int_{x-1}^{1-x} f_x\,dy = \int_{x-1}^{1-x} e^{x+y}\,dy = e^x \cdot \int_{x-1}^{1-x} e^y\,dy = e^x \cdot \left(e^y\Big|_{x-1}^{1-x}\right)$$

$$= e^{x}\cdot\left(e^{1-x}-e^{x-1}\right)=e^{1}-e^{2x-1} \Rightarrow \int_0^1\left(\int_{x-1}^{1-x} f_x\,dy\right)dx=\int_0^1 e-e^{2x-1}\,dx = ex-\frac{1}{2}e^{2x-1}\Big|_0^1$$

$$= e-\frac{1}{2}e-\left(-\frac{1}{2}e^{-1}\right)=\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}e^{-1}=\frac{1}{2}\left(e+e^{-1}\right)$$

Y:

$$\int_{-x-1}^{x+1} f_x\,dy=\int_{-x-1}^{x+1} e^{x+y}\,dy=e^{x}\cdot\int_{-x-1}^{x+1} e^{y}\,dy=e^{x}\left(e^{x+1}-e^{-x-1}\right)=e^{2x+1}-e^{-1}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{0}\left(\int_{-x-1}^{x+1} f_x\,dy\right)dx=\int_{-1}^{0}(e^{2x+1}-e^{-1})\,dx=\frac{1}{2}e^{2x+1}-xe^{-1}\Big|_{-1}^{0}=\left(\frac{1}{2}e-\left(\frac{1}{2}e^{-1}-(-1)e^{-1}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(e-3e^{-1}\right)$$

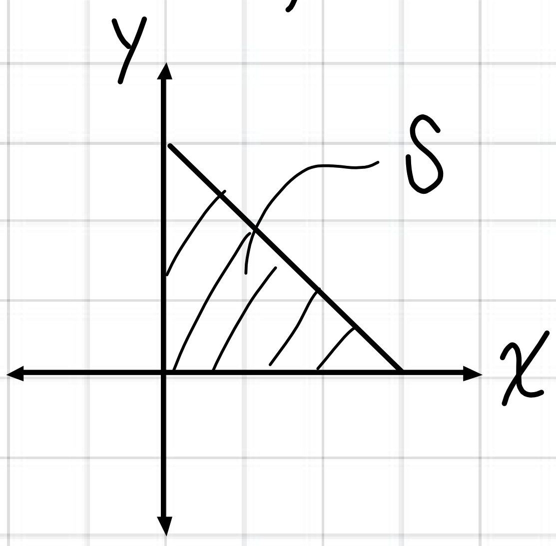
Por tanto:

$$\int_{X} e^{x+y}=\frac{1}{2}\left(e+e^{-1}\right)+\frac{1}{2}\left(e-3e^{-1}\right)=\frac{1}{2}\left(2e-2e^{-1}\right)=e-e^{-1}$$

$$=e-\frac{1}{e}$$

Ejemplo:

Considere $\int_S e^{(y-x)/(y+x)}$ siendo S el triángulo delimitado por la recta $x+y=2$ y por los ejes coordenados. $e^{(y-x)/(y+x)}$ es integrable, pues es composición de continuas.



Es claro que $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leq x\leq 2 \text{ y } 0\leq y\leq 2-x\}$. Hágase el cambio de variables $x=\frac{v-u}{2}$, $y=\frac{v+u}{2}$. Considere la función: $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $h(u,v)=\left(\frac{v-u}{2},\frac{v+u}{2}\right)$.

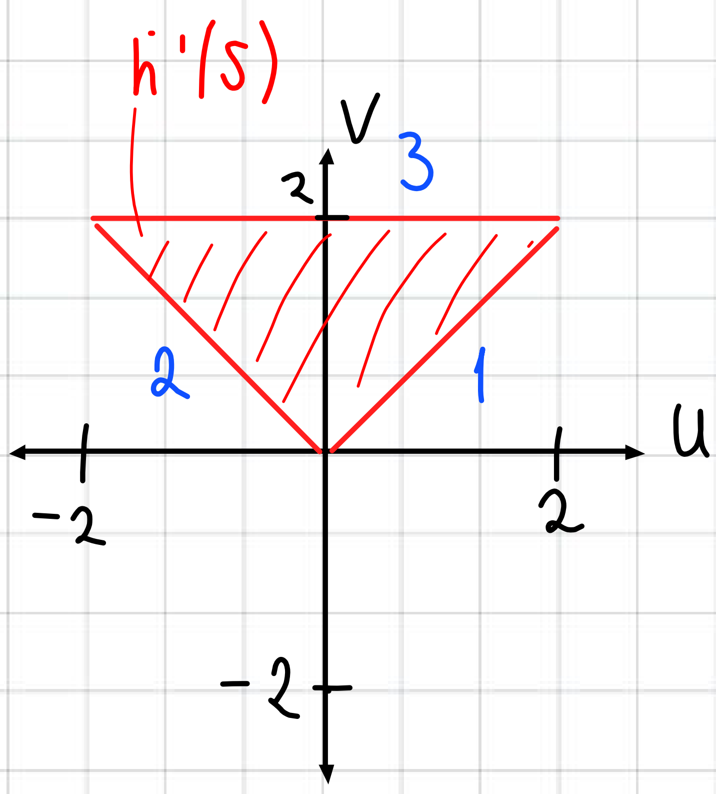
$$Dh(u,v)=\begin{pmatrix}\frac{\partial h_1}{\partial u} & \frac{\partial h_1}{\partial v}\\ \frac{\partial h_2}{\partial u} & \frac{\partial h_2}{\partial v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\Rightarrow|\det Dh(u,v)|=\left|\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right|=\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

Es claro que h es un difeomorfismo de clase C^1. La frontera de S

$$Fr(S)=\{(0,y)\in\mathbb{R}^2: 0\leq y\leq 2\}\cup\{(x,0)\in\mathbb{R}^2: 0\leq x\leq 2\}\cup\{(x,2-x)\in\mathbb{R}^2: 0\leq x\leq 2\}$$

Por ser h un difeomorfismo:

$$\begin{aligned}h^{-1}(Fr(S))=Fr(h^{-1}(S))&=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2: 0\leq \tfrac{v+u}{2}\leq 2 \text{ y } \tfrac{v-u}{2}=0\right\}\cup\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2: 0\leq \tfrac{v-u}{2}\leq 2 \text{ y } \tfrac{v+u}{2}=0\right\}\cup\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid \tfrac{v-u}{2}+\tfrac{v+u}{2}=2 \text{ y } 0\leq\tfrac{v-u}{2}\leq 2\right\}\\
&=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2: 0\leq v+u\leq 4 \text{ y } v=u\}\cup\{(u,v)\in\mathbb{R}^2: 0\leq v-u\leq 4 \text{ y } v=-u\}\cup\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid v=2 \text{ y } 0\leq 2-u\leq 4\}\\
&=\overbrace{\{(u,v)\in\mathbb{R}^2: 0\leq u\leq 2 \text{ y } v=u\}}^{1}\cup\overbrace{\{(u,v)\in\mathbb{R}^2: 0\leq v\leq 2 \text{ y } v=-u\}}^{2}\cup\underbrace{\{(u,v)\in\mathbb{R}^2: v=2 \text{ y } -2\leq u\leq 2\}}_{3}\end{aligned}$$



Por tanto, por el teorema de cambio de variable:

$$\int_S f=\int_{h(h^{-1}(S))} f=\int_{h^{-1}(S)} f\circ h\cdot|\det Dh|=\frac{1}{2}\int_{h^{-1}(S)} f\circ h$$

Tomando a la celda $A=[-2,2]\times[0,2]$, $h^{-1}(S)\subset A$, y la

Función característica de $\widehat{f\circ h}: A \to \mathbb{R}$. $f(h(u,v)) = f\left(\frac{v-u}{2}, \frac{v+u}{2}\right) = e^{u/v}$. Luego:

$$\frac{1}{2}\int_{h^{-1}(S)} e^{u/v} = \int_S f$$

Si $(u,v)\in h^{-1}(S)$, entonces: $0 \leq v \leq 2$ y $-v \leq u \leq v$. Por tanto:

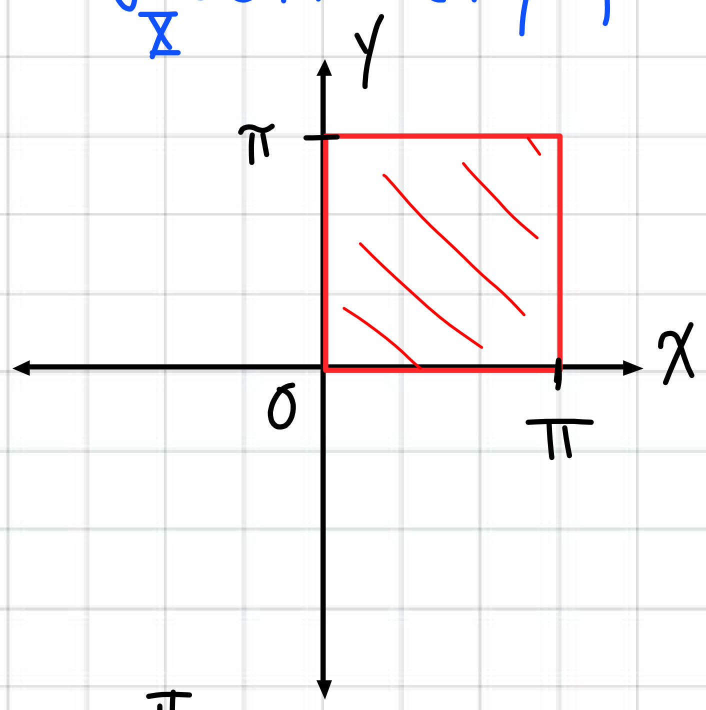
$$\frac{1}{2}\int_{h^{-1}(S)} e^{u/v} = \frac{1}{2}\int_0^2\left(\int_{-v}^{v} e^{u/v}\,du\right)dv = \frac{1}{2}\int_0^2\left(ve^{u/v}\Big|_{-v}^{v}\right)dv = \frac{1}{2}\int_0^2\left(ve - ve^{-1}\right)dv$$

$$= \frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)\cdot\int_0^2 v\,dv = \frac{1}{4}\left(e-\frac{1}{e}\right)\cdot 4 = e - \frac{1}{e}$$

$$\therefore \int_S e^{(y-x)/(y+x)} = e - \frac{1}{e}$$

1. Evalúe las siguientes integrales:

a) $\int_X \operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{sen}^2 y$; $X = [0,\pi]\times[0,\pi]$



Es claro que $\operatorname{sen}^2 x\cdot\operatorname{sen}^2 y$ es integrable sobre X, $f: X\to\mathbb{R}$, $f(x,y) = \operatorname{sen}^2 x\cdot\operatorname{sen}^2 y$, pues es producto de funciones continuas. X es una celda cerrada, por tanto, X es J-medible. Sea $f_x: [0,\pi]\to\mathbb{R}$, $f_x(y) = \operatorname{sen}^2 x\cdot\operatorname{sen}^2 y$, y $g: [0,\pi]\to\mathbb{R}$, $g(x) = \int_0^\pi f_x$. Por el teorema de Fubini, f_x es integrable, y:

$$\int_X f = \int_0^\pi g(x)\,dx = \int_0^\pi\left(\int_0^\pi f_x\right)dx = \int_0^\pi\left(\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x\cdot\operatorname{sen}^2 y\,dy\right)dx$$

Veamos que:

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x\operatorname{sen}^2 y\,dy = \operatorname{sen}^2 x\cdot\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 y\,dy = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x\cdot\int_0^\pi (1-\cos 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x\cdot\left(\int_0^\pi dx - \int_0^\pi \cos 2x\,dx\right) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x\cdot\left(\pi - \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^\pi\right)$$

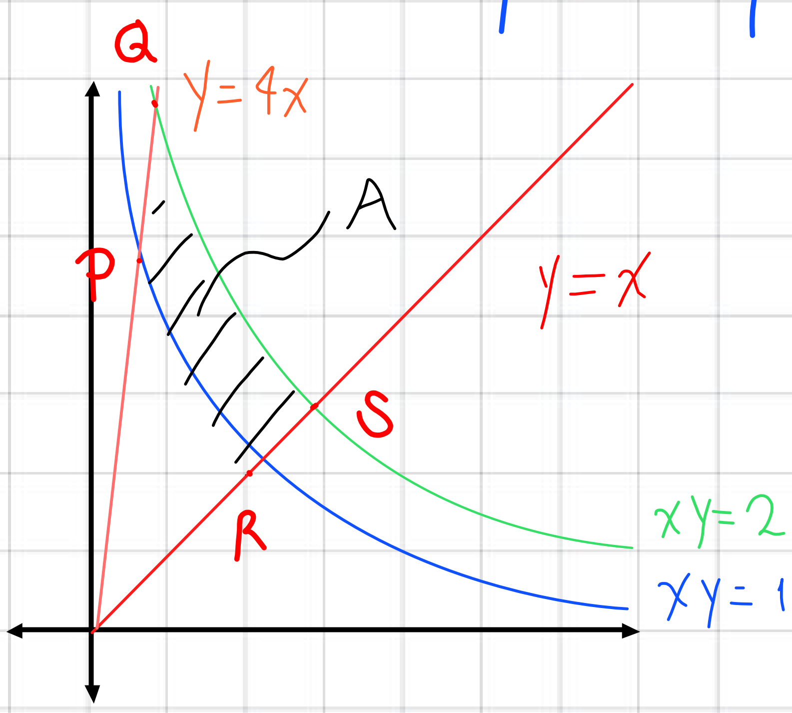
$$= \frac{1}{2}\pi\operatorname{sen}^2 x$$

Por lo tanto:

$$\int_X f = \int_0^\pi \frac{1}{2}\pi\operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{1}{2}\pi\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\therefore \int_X \sin^2 x\cdot\sin^2 y = \frac{\pi^2}{4}$$

b) $\int_S x^2y^2$; S la región acotada del primer cuadrante situada entre las hipérbolas $xy=1$ $xy=2$ y los límites, las rectas: $y=x$, $y=4x$.



Sea $f: A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2y^2$. f es integrable, pues es producto de funciones continuas. Los puntos de intersección de las rectas son: $P(1/2, 2)$, $Q(1/\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, $R(1,1)$ y $S(\sqrt{2},\sqrt{2})$.
A está dado por:

$$A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\left[\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right],\ \tfrac{1}{x}\leqslant y\leqslant 4x\right\} \cup \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\left[\tfrac{1}{\sqrt{2}},1\right],\ \tfrac{1}{x}\leqslant y\leqslant \tfrac{2}{x}\right\}$$

$$\cup \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[1,\sqrt{2}],\ x\leqslant y\leqslant \tfrac{2}{x}\right\}$$

A es J-medible, pues $Fr(A) \subset Gr\left(\frac{1}{x}\right) \cup Gr\left(\frac{2}{x}\right) \cup Gr(x) \cup Gr(4x)$, donde todas las gráficas son de medida nula, pues son gráficas de funciones continuas, así $Fr(A)$ es de medida nula y por tanto, A es J-medible. Sea $B=[0,2]\times[0,2]$. $A\subset B$, y $\hat{f}: B\to\mathbb{R}$ la función característica de f.
Sean $f_x: [0,2]\to\mathbb{R}$, $f_x(y) = \hat{f}(x,y)$ y $g: [0,2]\to\mathbb{R}$, $g(x) = \int_0^2 f_x$. Por el teorema de Fubini, f_x es integrable, y:

$$\int_A f = \int_B \hat{f} = \int_0^2 g(x)\,dx = \int_0^2\left(\int_0^2 f_x\,dy\right)dx = \int_0^2\left(\int_0^2 f_x\,dy\right)dx$$

Si $(x,y)\in A$, entonces $\hat{f}(x,y)$ no se hace cero siempre. Con $(x,y)\in A$, hay 3 casos:

- $x\in[1/\sqrt{2}, 1/2] \Rightarrow \frac{1}{x}\leqslant y\leqslant 4x$.
- $x\in[1/2, 1] \Rightarrow \frac{1}{x}\leqslant y\leqslant \frac{2}{x}$
- $x\in[1,\sqrt{2}] \Rightarrow x\leqslant y\leqslant \frac{2}{x}$

Por tanto:

$$\int_A f = \int_0^2\left(\int_0^2 f_x\,dy\right)dx = \int_{1/\sqrt{2}}^{1/2}\left(\int_{1/x}^{4x} f_x\,dy\right)dx + \int_{1/2}^{1}\left(\int_{1/x}^{2/x} f_x\,dy\right)dx + \int_{1}^{\sqrt{2}}\left(\int_{x}^{2/x} f_x\,dy\right)dx$$

De aquí:

$$\int_{1/x}^{4x} f_x\,dy = \int_{1/x}^{4x} x^2y^2\,dy = x^2\cdot\int_{1/x}^{4x} y^2\,dy = x^2\cdot\left(\frac{y^3}{3}\Big|_{1/x}^{4x}\right) = x^2\cdot\left(\frac{64}{3}x^3 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3}\right) = \frac{64}{3}x^5 - \frac{1}{3x}$$

$$\int_{1/x}^{2/x} f_x \, dy = x^2 \cdot \int_{1/x}^{2/x} y^2 dy = x^2 \cdot \left(\frac{y^3}{3} \Big|_{1/x}^{2/x} \right) = x^2 \cdot \left(\frac{8}{3} \cdot \frac{1}{x^3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^3} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{7}{x} \right) = \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\int_{x}^{2/x} f_x \, dy = \int_x^{2/x} x^2 \cdot y^2 = x^2 \cdot \int_x^{2/x} y^2 dy = x^2 \cdot \left(\frac{y^3}{3} \Big|_x^{2/x} \right) = x^2 \cdot \left(\frac{8}{3} \cdot \frac{1}{x^3} - \frac{x^3}{3} \right) = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{x} - \frac{x^5}{3}$$

Entonces:

$$\int_A f = \int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \left(\frac{64}{3} x^5 - \frac{1}{3x} \right) dx + \int_{1/\sqrt{2}}^{1} \left(\frac{7}{3} \cdot \frac{1}{x} \right) dx + \int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{8}{3} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{x^5}{3} \right) dx$$

$$= \left(\frac{64}{18} \cdot x^6 - \frac{1}{3} \ln|x| \Big|_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{7}{3} \ln|x| \Big|_{1/\sqrt{2}}^{1} \right) + \left(\frac{8}{3} \ln|x| + \frac{x^6}{18} \Big|_1^{\sqrt{2}} \right)$$

$$= \left(\frac{8}{18} - \frac{1}{3} \ln(1/\sqrt{2}) - \left[\frac{1}{18} - \frac{1}{3} \ln(1/2) \right) + \left(\frac{7}{3} \ln(1) - \frac{7}{3} \ln(1/\sqrt{2}) \right) + \left(\frac{8}{3} \ln\sqrt{2} + \frac{8}{18} - \right.$$

$$\left. \left[\frac{8}{3} \ln(1) + \frac{1}{18} \right] \right) = \left(\frac{7}{18} - \frac{1}{6} \ln(2) \right) + \left(\frac{7}{6} \ln(2) \right) + \left(\frac{8}{6} \ln(2) + \frac{7}{18} \right)$$

$$= \frac{7}{9} + \frac{7}{3} \ln(2)$$

c) $\int_S x^2-y^2$; S la región limitada por $y=\operatorname{sen}x$ y el intervalo $[0,\pi]$

Sea $f:S\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^2-y^2$. S es J-medible, pues $Fr(S)\subset Gr(\operatorname{sen}x)\cup Gr(0)$. Por ser ambas funciones continuas ($\operatorname{sen}x$ y 0), son de medida nula, así: $Fr(S)$ lo es, por tanto S es J-medible. f es integrable sobre S, pues es suma de funciones continuas. Sea $A=[0,\pi]\times[0,1]$. Es claro que $S\subset A$.

Sean $\hat{f}:A\to\mathbb{R}$ la función característica de f en A, $f_x:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_x(y)=f(x,y)$ y $g:[0,\pi]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\underline{\int_0^1} f_x$. Por el teorema de Fubini, f_x es integrable, y:

$$\int_S x^2-y^2=\int_S f=\int_A \hat{f}=\int_0^\pi g(x)\,dx=\int_0^\pi\left(\underline{\int_0^1} f_x\,dy\right)dx=\int_0^\pi\left(\int_0^1 f_x\,dy\right)dx$$

Si $(x,y)\in S$, entonces $0\leqslant x\leqslant\pi$ y $0\leqslant y\leqslant \operatorname{sen}x$. Con $(x,y)\in S$, entonces $\hat{f}(x,y)$ no es siempre cero. Así:

$$\int_0^\pi\left(\int_0^1 f_x\,dy\right)dx=\int_0^\pi\left(\int_0^{\operatorname{sen}x} f_x\,dy\right)dx=\int_0^\pi\left(\int_0^{\operatorname{sen}x} x^2-y^2\,dy\right)dx$$

Donde:

$$\int_0^{\operatorname{sen}x}(x^2-y^2)\,dy=x^2y-\frac{y^3}{3}\Big|_0^{\operatorname{sen}x}=x^2\operatorname{sen}x-\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3x$$

Luego:

$$\int_0^\pi\left(\int_0^{\operatorname{sen}x} x^2-y^2\,dy\right)dx=\int_0^\pi x^2\operatorname{sen}x\,dx-\frac{1}{3}\int_0^\pi \operatorname{sen}^3x\,dx$$

Donde:

Para $\int_0^\pi x^2\operatorname{sen}x\,dx$, sean $u=x^2$, $u'=2x$ y $v'=\operatorname{sen}x$, $v=-\cos x$

$$\Rightarrow \int_0^\pi x^2\operatorname{sen}x\,dx=-x^2\cos x\Big|_0^\pi+2\int_0^\pi x\cos x\,dx$$

Nuevamente, para $\int_0^\pi x\cos x\,dx$, sean $u=x$, $u'=1$ $v'=\cos x$, $v=\operatorname{sen}x$

$$\Rightarrow \int_0^\pi x\cos x=x\operatorname{sen}x\Big|_0^\pi-\int_0^\pi\operatorname{sen}x\,dx=x\operatorname{sen}x+\cos x\Big|_0^\pi=(-1)-(1)=-2$$

Así:

$$\int_0^\pi x^2\operatorname{sen}x\,dx=\left(-\pi^2\cos\pi\right)+2(-2)=\pi^2-4$$

Para la otra integral:

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 x\, dx = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cdot (1-\cos^2 x)\, dx = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx - \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos^2 x$$

De aquí, para $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos^2 x\, dx$, sea $u = \cos x$, entonces: $u' = -\operatorname{sen} x$, así:

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos^2 x\, dx = \int_1^{-1} \operatorname{sen} x \frac{u^2}{-\operatorname{sen} x}\, du = -\int_1^{-1} u^2\, du = \int_{-1}^{1} u^2\, du = \frac{u^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

Entonces:

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 x\, dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{3} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

Por lo tanto:

$$\int_S x^2 - y^2 = \pi^2 - 4 - \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}\right) = \pi^2 - \frac{40}{9}$$

2. Calcule $\int_C xy$ siendo $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1\}$ usando el cambio de variable $x=u^2-v^2$, $y=2uv$.

Sea $f: C\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=x\cdot y$. Es claro que C es J-medible, pues su frontera es la circunferencia de radio 1. f es continua en C, y por tanto, integrable. Sea h: $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $h(u,v)=(u^2-v^2, 2uv)$. Probaremos que h es biyectiva.

· h inyectiva

No sirve.

Podemos escribir S como: $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -\sqrt{1-x^2}\leq y\leq\sqrt{1+x^2}, x\in[-1,1]\}$

Sea $A=[-1,1]\times[-1,1]$. Es claro que $C\subset A$ y A es una celda cerrada. Sea $\hat{f}: A\to\mathbb{R}$ la función característica de f. Como f es integrable, $\hat{f}$ lo es, y:

$$\int_C f = \int_A \hat{f}$$

Sean $\hat{f}_x: [-1,1]\to\mathbb{R}$, $\hat{f}_x(y)=\hat{f}(x,y)$ y $g:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\underline{\int}_{-1}^{1}\hat{f}_x$. Por el teorema de Fubini, g es integrable, y:

$$\int_A \hat{f} = \int_{-1}^{1} g(x)\,dx = \int_{-1}^{1}\left(\underline{\int}_{-1}^{1}\hat{f}_x(y)\,dy\right)dx$$

Donde:

$$\underline{\int}_{-1}^{1}\hat{f}_x(y)\,dy = \underline{\int}_{-1}^{1}\hat{f}(x,y)\,dy = \underline{\int}_{-1}^{1} xy\,dy = x\cdot\underline{\int}_{-1}^{1} y\,dy$$

pero y es integrable, por tanto:

$$x\underline{\int}_{-1}^{1} y\,dy = x\int_{-1}^{1} y\,dy$$

Si $(x,y)\in C$, entonces $-\sqrt{1-x^2}\leq y\leq\sqrt{1-x^2}$, luego $\hat{f}(x,y)$ no es siempre cero. Por tanto:

$$x\int_{-1}^{1} y\,dy = x\cdot\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy = x\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} = x\cdot\left(\frac{1-x^2}{2}-\frac{1-x^2}{2}\right)$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \int_C f = 0.$$

3. Evalúe $\int_S dxdydz$ siendo S la esfera de radio a y centro en el origen.

Sea $h: U \to \mathbb{R}^3$, $U = \{(r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid r>0,\ 0<\theta<2\pi \text{ y } 0<\varphi<\pi\}$, $h(r,\theta,\varphi) = (r\cos\theta\,\text{sen}\varphi,\ r\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi,\ r\cos\varphi)$. h es difeomorfismo (pues es biyectiva y su derivada es continua), y:

$$\det h' = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial r} r\cos\theta\,\text{sen}\varphi & \frac{\partial}{\partial\theta} r\cos\theta\,\text{sen}\varphi & \frac{\partial}{\partial\varphi} r\cos\theta\,\text{sen}\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} r\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi & \frac{\partial}{\partial\theta} r\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi & \frac{\partial}{\partial\varphi} r\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} r\cos\varphi & \frac{\partial}{\partial\theta} r\cos\varphi & \frac{\partial}{\partial\varphi} r\cos\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta\,\text{sen}\varphi & -r\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi & r\cos\theta\,\text{sen}\varphi & r\,\text{sen}\theta\cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -r\,\text{sen}\varphi \end{vmatrix}$$

$$= \cos\theta\,\text{sen}\varphi\,(-r^2\cos\theta\,\text{sen}^2\varphi) + r\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi\,(-r\,\text{sen}\theta\,\text{sen}^2\varphi - r\,\text{sen}\theta\cos^2\varphi) + r\cos\theta\cos\varphi\,(-r\cos\theta\,\text{sen}\varphi\cos\varphi)$$

$$= -r^2\cos^2\theta\,\text{sen}^3\varphi - r^2\,\text{sen}^2\theta\,\text{sen}\varphi - r^2\cos^2\theta\,\text{sen}\varphi\cos^2\varphi = -r^2\cos^2\theta\,\text{sen}\varphi(\text{sen}^2\varphi+\cos^2\varphi) - r^2\,\text{sen}^2\theta\,\text{sen}\varphi = -r^2\,\text{sen}\varphi(\cos^2\theta+\text{sen}^2\theta) = -r^2\,\text{sen}\varphi$$

Por tanto: $|\det h'| = r^2\,\text{sen}\varphi$. Podemos extender a g de U a $\bar{U} = \{(r,\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\leq r,\ 0\leq\theta\leq 2\pi \text{ y } 0\leq\varphi\leq\pi\}$, de esta forma, para una función f integrable definida en un conjunto X J-medible:

$$\int_{\bar{X}} f = \int_X f = \int_{h^{-1}(X)} f\circ h\cdot|\det h'| = \int_{\overline{h^{-1}(X)}} f\circ h\cdot|\det h'|$$

Pues, como X es J-medible $\Rightarrow Fr(\bar{X})$ tiene medida nula $\Rightarrow \int_{\bar{X}} f = \int_{X\cup Fr(X)} f = \int_X f + \int_{X\cap Fr(X)} f + \int_{Fr(X)} f = \int_X f + 0 + \int_{Fr(X)} f$, y como $Fr(X)$ es de medida nula: $\int_{Fr(X)} f = 0$ ... (1). Luego: $\int_{\bar{X}} f = \int_X f$. Sea $S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq a^2\}$, $f: S \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z)=1$. f es integrable en S, y: $h^{-1}(S) = \{(r,\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^3 : 0\leq r\leq a,\ 0\leq\theta\leq 2\pi \text{ y } 0\leq\varphi\leq\pi\}$. Por tanto:

$$\int_S f = \int_{\overline{h^{-1}(S)}} f\circ h\cdot|\det h'| = \int_{\overline{h^{-1}(S)}} |\det h'|$$

Por el teorema de Fubini:

$$\int_{\overline{h^{-1}(S)}} r^2\,\text{sen}\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^a r^2\,\text{sen}\varphi\,dr\right)d\varphi\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\frac{a^3}{3}\,\text{sen}\varphi\,d\varphi\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{2a^3}{3}\,d\theta = \frac{4}{3}\pi a^3 \,/\!/$$

1. Evalúe $\int_S \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$ sobre el sólido formado por la flaju superior del cono $z^2 = x^2+y^2$ y el plano $z=1$.

$\int_{\mathbb{X}} 1 = c(\mathbb{X})$;

2 casos, $0 \leqslant x \leqslant 1$ y $-1 \leqslant x \leqslant 0$. Para el primero:

$0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow |x| = x$. Así, en la región donde $\hat{f}(x,y)$ no es cero, $(x,y) \in \mathbb{X}$ y $x \in [0,1] \Rightarrow x + |y| \leqslant 1 \Rightarrow |y| \leqslant 1-x \Rightarrow x-1 \leqslant y \leqslant 1-x$.

Para el segundo: $-1 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow |x| = -x$, luego: $|y| \leqslant 1+x \Rightarrow -1-x \leqslant y \leqslant 1+x$.

Por tanto:

$$\int_{\mathbb{X}} f = \int_0^1 \int_{x-1}^{1-x} dy + \int_{-1}^{0} \int_{-1-x}^{1+x} dy = \int_0^1 (1-x-x+1)\,dx + \int_{-1}^{0} (1+x+1+x)\,dx = \int_0^1 2-2x\,dx + \int_{-1}^{0} 2+2x\,dx$$

$$= \left(2x - x^2\Big|_0^1 + 2x + x^2\Big|_{-1}^{0}\right) = (1+1) = 2.$$

$4x = 1/x \Rightarrow x^2 = 1/4 \Rightarrow x = 1/2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow P(1/2, 2)$

$4x = 2/x \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x = 1/\sqrt{2} \Rightarrow y = 2\sqrt{2} \Rightarrow Q(1/\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

$x = 1/x \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow R(1,1)$

$x = 2/x \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2} \Rightarrow y = \sqrt{2} \Rightarrow S(\sqrt{2}, \sqrt{2})$