Notas Introduction to Commutative Algebra

Cristo Daniel Alvarado

15 de octubre de 2024

Índice general

Capítulo 1

Anillos e Ideales

Muchos de los resultados que se usarán se han visto en el curso de Álgebra Moderna II, por lo que solo se incluirán resultados nuevos.

A lo largo de todo el documento, todo anillo será un anillo conmutativo con identidad.

1.1. Nilradical y Radical de Jacobson

Definición 1.1.1
Sea A un anillo. Un elemento $x \in A$ es llamado **nilpotente** si $x^n = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$

Observación 1.1.1
Todo elemento nilpotente es divisor de cero, sin embargo el converso no es cierto.

Proposición 1.1.1
El conjunto $\mathfrak{N}$ de todos los elementos nilpotentes de un anillo A es un ideal, y el ideal cociente $A/\mathfrak{N}$ no tiene elmentos nilpotentes distintos de cero.

Demostración:
Veamos que $\mathfrak{N}$ es un ideal.

(1) Sean $x, y \in \mathfrak{N}$, entonces existen $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $x^n = y^m = 0$. Por ende:

$$(x+y)^{n+m} = 0$$

pues, en el desarrollo binomial de esta expresión, todo término es de la forma $c_{(r,s)}x^r y^s$ con $c_{(r,s)} \in \mathbb{N}$ el cual además cumple que

$$r + s = n + m$$

con $r, s \in [\![0, n+m]\!]$. Si $r < n$ entonces debe suceder que $s > m$, luego $y^s = 0$. Si $r > n$ se sigue que $x^r = 0$. En cualquier caso, todos los coeficientes de la forma $x^r y^s = 0$, lo cual prueba lo enunciado.

(2) Sea $x \in \mathfrak{N}$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n = 0$, entonces:

$$(ax)^n = a^n x^n = 0$$

por lo que $ax \in \mathfrak{N}$.

Por los dos incisos anteriores se sigue que $\mathfrak{N}$ es un ideal de A. Sea $\mathfrak{N}+x\in A/\mathfrak{N}$ con $x\in A$ tal que

$$(\mathfrak{N}+x)^n=\mathfrak{N}$$

para algún $n\in\mathbb{N}$, entonces:

$$\mathfrak{N}+x^n=\mathfrak{N}\Rightarrow x^n\in\mathfrak{N}$$

luego existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $(x^n)^k=0$, esto es que $x\in\mathfrak{N}$, por lo que

$$\mathfrak{N}+x=\mathfrak{N}$$

■

Definición 1.1.2
El ideal de la proposición anterior es llamado el **nilradical de** A cuando se trabaje con varios anillos, será denotado por $\mathfrak{N}_A$.

Resulta que podemos caracterizar de otra manera al nilradical $\mathfrak{N}$:

Proposición 1.1.2
El nilradical $\mathfrak{N}$ de A es la intersección de todos los ideales primos de A.

Demostración:
Sea $\mathfrak{N}'$ la intersección de todos los ideales primos de A. Se tiene que este es un ideal de A.

- Si $x\in A$ es tal que $x\in\mathfrak{N}$, entonces existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $x^n=0$. Como $0\in\mathfrak{N}'$ y $\mathfrak{N}'$, entonces

  $$x^n\in\mathfrak{p}$$

  para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de A, luego por inducción se tiene que $x\in\mathfrak{p}$, es decir que $x\in\mathfrak{N}'$.

- Sea $x\in A$ tal que $x\notin\mathfrak{N}$, probaremos que $x\notin\mathfrak{N}'$. Sea

  $$\Sigma=\left\{\mathfrak{a}\middle|\mathfrak{a}\text{ es ideal de }A\text{ tal que }n\in\mathbb{N}\Rightarrow x^n\notin\mathfrak{a}\right\}$$

  el conjunto Σ es no vacío, pues $\langle 0\rangle\in\Sigma$. Sea $\mathcal{C}$ una cadena de elementos de Σ. Como

  $$\mathcal{C}=\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$$

  es tal que $I_1\subseteq I_2\subseteq\cdots\subseteq I_m\subseteq\cdots$, se sigue de una proposición que

  $$I=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$$

  es un ideal de A, el cual debe estar en Σ. Por el Lema de Zorn, este conjunto tiene elementos maximales, digamos $\mathfrak{p}$. Es claro que $x^n\notin\mathfrak{p}$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Veamos que $\mathfrak{p}$ es primo.
  En efecto, sean $y,z\notin\mathfrak{p}$, entonces los ideales

  $$\mathfrak{p}+\langle y\rangle\text{ y }\mathfrak{p}+\langle z\rangle$$

  son dos ideales de A que contienen propiamente a $\mathfrak{p}$, por lo que $x\in\mathfrak{p}+\langle y\rangle$ y $x\in\mathfrak{p}+\langle z\rangle$, luego existen $m,n\in\mathbb{N}$ tales que

  $$x^n\in\mathfrak{p}+\langle y\rangle,\quad\text{y}\quad x^m\in\mathfrak{p}+\langle z\rangle$$

  por ende,

  $$x^{n+m}\in(\mathfrak{p}+\langle y\rangle)(\mathfrak{p}+\langle z\rangle)=\mathfrak{p}+\langle yz\rangle$$

  por tanto, $\mathfrak{p}+\langle yz\rangle$ contiene propiamente a $\mathfrak{p}$, luego no puede estar en Σ, así que $yz\notin\mathfrak{p}$. Se sigue entonces que $\mathfrak{p}$ es primo. Por tanto, $x\notin\mathfrak{N}'$.

Por los dos incisos anteriores se sigue que $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}'$. ■

Definición 1.1.3
Sea A un anillo, el **radical de Jacobson $\mathfrak{R}$ de A** se define como la intersección de todos los ideales maximales de A. Cuando se trabaje con varios anillos, será denotado por $\mathfrak{R}_A$.

El radical de Jacobson (que claramente es un ideal), se caracteriza de la siguiente manera:

Proposición 1.1.3
Sea A un anillo. Entonces, $x \in \mathfrak{R}$ si y sólo si $1 - xy$ es una unidad en A para todo $y \in A$.

Demostración:
$\Rightarrow)$: Suponga que existe $y \in A$ tal que $1 - xy$ no es una unidad de A, entonces existe un ideal maximal que contiene a $1 - xy$, digamos $\mathfrak{m}$, pero $x \in \mathcal{R}$, en particular $x \in \mathfrak{m}$ por lo que $xy \in \mathfrak{m}$ lo cual implica que $1 \in \mathfrak{m}$, lo cual no puede suceder pues $\mathfrak{m}$ es ideal maximal.

$\Leftarrow)$: Suponga que existe un ideal maximal $\mathfrak{m}$ tal que $x \notin \mathfrak{m}$. Entonces,

$$\mathfrak{m} + \langle x \rangle = \langle \mathfrak{m} + x \rangle = A = \langle 1 \rangle$$

es decir, existe $u \in \mathfrak{m}$ y $y \in A$ tales que

$$u + xy = 1$$

luego, $1 - xy$ no puede ser unidad de A. ■

Definición 1.1.4
Sea A anillo y $\mathfrak{a}$ un ideal de A. Se define el **radical de $\mathfrak{a}$** como el conjunto

$$r(\mathfrak{a}) = \left\{ x \in A \middle| x^n \in \mathfrak{a} \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \right\}$$

Proposición 1.1.4
Dado un anillo A un ideal $\mathfrak{a}$ de A, se tiene que $r(\mathfrak{a})$ es un ideal de A.

Demostración:
Considere el homomorfismo natural $\pi : A \to A/\mathfrak{a}$, afirmamos que

$$r(A) = \pi^{-1}\left(\mathfrak{N}_{A/\mathfrak{a}}\right)$$

donde $\mathfrak{N}_{A/\mathfrak{a}}$ es el nilradical de $A/\mathfrak{a}$. En efecto, veamos que: $x \in r(\mathfrak{a})$ si y sólo si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n \in \mathfrak{a}$, lo cual ocurre si y sólo si

$$(\mathfrak{a} + x)^n = \mathfrak{a} + x^n = \mathfrak{a}$$

si y sólo si $\mathfrak{a}+x$ es un elemento nilpotente de $A/\mathfrak{a}$, si y sólo si $\mathfrak{a}+x \in \mathfrak{N}_{A/\mathfrak{a}}$, si y sólo si $x \in \pi^{-1}\left(\mathfrak{N}_{A/\mathfrak{a}}\right)$.

Lo anterior prueba la igualdad. ■

Ejercicio 1.1.1
Sea A un anillo y $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ideales de A. Se cumple lo siguiente:

(1) $\mathfrak{a} \subseteq r(\mathfrak{a})$.

(2) $r(r(a)) = r(\mathfrak{a})$.

(3) $r(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = r(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = r(\mathfrak{a}) \cap r(\mathfrak{b})$.

(4) $r(\mathfrak{a}) = \langle 1 \rangle$ si y sólo si $\mathfrak{a} = \langle 1 \rangle$.

(5) $r(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = r(r(\mathfrak{a}) + r(\mathfrak{b}))$.

(6) Si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de A, entonces $r(\mathfrak{p}^n) = \mathfrak{p}$ para todo $n > 0$.

Demostración:

■

Proposición 1.1.5
El radical de un ideal $\mathfrak{a}$ es la intersección de todos ideales primos que contienen a $\mathfrak{a}$.

Demostración:
Considere $A/\mathfrak{a}$. ■

1.2. Ejercicios

Proposición 1.2.1
Todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A es ideal primo de A.

Demostración:
En efecto, se tiene que $A/\mathfrak{m}$ es campo, en particular es dominio entero (por no tener divisores de cero), luego $\mathfrak{m}$ es ideal primo. ∎

Ejercicio 1.2.1
En el anillo $A[x]$, el radical de Jacobson es igual al nilradical.

Demostración:
Como todo ideal maximal es un ideal primo, se tiene la contención:

$$\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{R}$$

sea ahora $f(x) \in \mathfrak{R}$ se tiene que

$$1 - f(x)g(x) \text{ es unidad de } A[x] \text{ para todo } g(x) \in A[x]$$

en particular, $1 - xf(x)$ es unidad de $A[x]$, luego si $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$. Debe suceder entonces que los coeficientes de:

$$1 - xf(x) = -a_n x^{n+1} - a_{n-1}x^n - \cdots - a_0 x + 1$$

sean tales que a_i es nilpotente para todo $i \in [\![0, n]\!]$, luego $f(x)$ es elemento nilpotente de $A[x]$.

Se sigue entonces la igualdad. ∎

Ejercicio 1.2.2
Sea A un anillo y sea $A[[x]]$ el anillo de series de potencias formales con coeficientes en A. Pruebe que:

1 f es unidad de ...

Demostración:
∎

Ejercicio 1.2.3

Demostración:
∎

Ejercicio 1.2.4
Sea A un anillo tal que para todo $x \in A$ existe $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ tal que $x^n = x$. Pruebe que todo ideal primo de A es maximal.

Demostración:

Sea $\mathfrak{p}$ un ideal propio primo de A. Probaremos que $A/\mathfrak{p}$ es campo. En efecto, no tiene divisores de cero, pues si

$$\mathfrak{p} + xy = (\mathfrak{p} + x)(\mathfrak{p} + y) = \mathfrak{p}$$

con $x, y \notin \mathfrak{p}$, entonces $xy \in \mathfrak{p}\#_c$. Por tanto, no tiene divisores de cero. Hay que ver que todo elemento no cero es invertible. Sea $x \in A \setminus \mathfrak{p}$. Se tiene que existe $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$ tal que

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} + x^n &= \mathfrak{p} + x \\ \Rightarrow (\mathfrak{p} + x)\left(\left(\mathfrak{p} + x^{n-1}\right) - (\mathfrak{p} + 1)\right) &= \mathfrak{p} \end{aligned}$$

como no hay divisores de cero, debe suceder que

$$\mathfrak{p} + x^{n-1} = \mathfrak{p} + 1$$

por ende, al ser $n > 1$, se tiene que $n - 1 > 0$, así que:

$$(\mathfrak{p} + x)\left(\mathfrak{p} + x^{n-2}\right) = \mathfrak{p} + 1$$

con $n - 2 \geq 0$. Luego $\mathfrak{p} + x$ es invertible. Así que $A/\mathfrak{p}$ es campo, es decir que $\mathfrak{p}$ es ideal maximal. ■

1.3. Referencias

- *Introduction to Commutative Algebra*, M. F. Atiyah y I. G. MacDonald, University of Oxford.