Notas curso Topología I.
Separabilidad, Filtros

Cristo Daniel Alvarado

15 de abril de 2024

Índice general

Capítulo 2

Separabilidad

2.1. Axiomas de separación

Definición 2.1.1
Sea (X,τ) un espacio topológico.

1. (X,τ) se dice un **espacio** T_0 si dados $a,b \in X$ con $a \neq b$ existe un abierto que contiene a alguno de los dos puntos, pero no contiene al otro.
2. (X,τ) se dice un **espacio** T_1 si dados $a,b \in X$ con $a \neq b$ existen $U,V \subseteq X$ abiertos tales que $a \in U$, $b \in V$ y, $a \notin V$, $b \notin U$.
3. (X,τ) se dice un **espacio** T_2 si dados $a,b \in X$ con $a \neq b$ existen $U,V \subseteq X$ abiertos tales que $a \in U$, $b \in V$ y, $U \cap V = \emptyset$. Esto es equivalente a que el espacio sea de Hausdorff.
4. (X,τ) se dice un **espacio** T_3 si dados $p \in X$ y $A \subseteq X$ cerrado tal que $p \notin A$, existen $U,V \in \tau$ tales que $p \in U$, $A \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.
5. (X,τ) se dice un **espacio** T_4 si dados $A,B \subseteq X$ cerrados y disjuntos, existen $U,V \in \tau$ tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y, $U \cap V = \emptyset$.
6. (X,τ) se dice un **espacio regular** si es un espacio T_3 y T_1.
7. (X,τ) se dice un **espacio normal** si es un espacio T_4 y T_1.

Observación 2.1.1
Notemos que:

$$T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$$

Ejemplo 2.1.1
Considere al conjunto $X = \{1,2\}$ y $\tau = \{X, \emptyset, \{1\}\}$. Afirmamos que (X,τ) es T_0, pero no es T_1 y, por ende tampoco puede ser T_2.

Ejemplo 2.1.2
Sea $(\mathbb{R}, \tau_{cf})$. Afirmamos que $(\mathbb{R}, \tau_u)$ es T_1. En efecto, sean $r,s \in \mathbb{R}$ tales que $r \neq s$. Los conjuntos $U = \mathbb{R} - \{s\}, V = \mathbb{R} - \{r\} \in \tau_{cf}$ pues sus complementos son finitos, además:

$$r \in U \quad \text{y} \quad s \in V$$

además, $r \notin V$ y $s \notin U$. Por tanto, el espacio de T_1. Pero no es T_2.

En efecto, suponga que existen $U, V \in \tau_{cf}$ abiertos tales que $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \in U$, $\frac{1}{\pi} \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. En particular, se tiene que $\mathbb{R} - U$ y $\mathbb{R} - V$ son finitos. Por tanto:

$$\begin{aligned}(\mathbb{R} - U) \cup (\mathbb{R} - V) &= \mathbb{R} - (U \cap V)\\ &= \mathbb{R}\end{aligned}$$

es finito, por tanto, $\mathbb{R}$ es finito$\#_c$.

Ejemplo 2.1.3
Considere al espacio $(\mathbb{R}, \tau_I = \{X, \emptyset\})$. Afirmamos que $(\mathbb{R}, \tau_I)$ es T_4 y T_3, pero NO es T_0, pues si $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{\pi} \in \mathbb{R}$, solo hay un abierto que contiene a alguno de los dos puntos, el cual es $\mathbb{R}$, que siempre tiene a los dos puntos. Por ende, el espacio no es T_0.

Proposición 2.1.1
T_4 y $T_1 \Rightarrow T_3$ y $T_1 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.

Demostración:
La prueba se hará más adelante. ■

2.2. Espacios T_1

Proposición 2.2.1
Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces (X, τ) es un espacio T_1 si y sólo si todo subconjunto unitario de X es cerrado.

Demostración:
Se probará la doble implicación.

$\Rightarrow)$: Suponga que (X, τ) es T_1. Sea $x \in X$. Hay que probar que $X - \{x\} \in \tau$. En efecto, sea $y \in X - \{x\}$, entonces $x \neq y$. Como el espacio es T_1 existen un par de abiertos $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $x \notin V$ y $y \notin U$.

Como $y \in V$ y $x \notin V$, entonces $y \in V \subseteq X - \{x\}$. Luego $X - \{x\}$ es unión arbitraria de abiertos, luego es abierto. Por ende, $\{x\}$ es cerrado.

$\Leftarrow)$: Suponga que todo subconjunto unitario de X es cerrado. Sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Como $\{x\}, \{y\}$ son cerrados, entonces $U = X = \{y\}$ y $V = X - \{x\}$ son abiertos y cumplen que:

$$x \in U, y \in V \quad x \notin V, y \notin U$$

por tanto, como fueron arbitrarios los dos elementos $x, y \in X$ distintos, se sigue que (X, τ) es T_1. ■

Corolario 2.2.1
Sea (X, τ) un espacio topológico. (X, τ) es T_1 si y sólo si todo subconjunto finito de X es cerrado.

Demostración:
Es inmediata de la proposición anterior. ■

Corolario 2.2.2
Sea X un conjunto finito y τ una topología definida sobre X. (X,τ) es T_1 si y sólo $\tau=\tau_D$.

Demostración:
Es inmediata de la proposición anterior. ■

Proposición 2.2.2
Sea (X,τ) un espacio topológico. Entonces, (X,τ) es T_1 si y sólo si $\tau_{cf}\subseteq\tau$.

Demostración:
Se probarán las dos implicaciones.

$\Rightarrow$) : Sea $A\in\tau_{cf}$ con $A\neq\emptyset$, luego $X-A$ es un conjunto finito. Como (X,τ) es T_1, entonces $X-A$ es cerrado (debe serlo por ser finito), luego A es abierto, es decir $A\in\tau$.

$\Leftarrow$) : Supongamos que $\tau_{cf}\subseteq\tau$. Sean $x\in X$. El conjunto $X-\{x\}$ es finito, luego $X-\{x\}\in\tau$, por ende el conjunto $\{x\}$ es cerrado. Como el x fue arbitrario, se sigue que todo conjunto unipuntual es cerrado luego, por una proposición anterior, se sigue que (X,τ) es T_1. ■

Corolario 2.2.3
La topología τ_{cf} es la topología más gruesa (o menos fina) que podemos definir sobre un conjunto para que el espacio topológico (X,τ_{cf}) sea T_1.

Demostración:
Es inmediata de la proposición anterior. ■

Proposición 2.2.3
La propiedad de ser un espacio topológico T_1 es hereditaria.

Demostración:
Sea (X,τ) un espacio topológico T_1 y, tomemos $Y\subseteq X$. Formemos así al espacio (Y,τ_Y), queremos ver que este espacio es T_1. En efecto, sea $y\in Y$, entonces:

$$\{y\}=\{y\}\cap Y$$

luego, $\{y\}\subseteq Y$ es un conjunto cerrado en (Y,τ_Y), ya que $\{y\}\subseteq X$ es un conjunto cerrado en (X,τ). Por ende, todo conjunto unipuntual es cerrado en (Y,τ_Y), luego este subespacio es T_1. ■

Proposición 2.2.4
La propiedad de ser un espacio topológico T_1 es topológica.

Demostración:
Sean (X_1,τ_1) y (X_2,τ_2) espacios topológicos homeomorfos y, suponga que (X_1,τ_1) es un espacio T_1. Sea $h:(X_1,\tau_1)\to(X_2,\tau_2)$ el homeomorfismo entre estos dos espacios. Como esta función es homeomorfismo, es una biyección cerrada y continua. Sea $x_2\in X_2$. Entonces, existe $x_1\in X_1$ tal que:

$$h(x_1)=x_2$$

luego, por ser biyección:

$$h(\{x_1\})=\{x_2\}$$

donde $\{x_1\}$ es cerado en (X_1,τ_1). Como h es cerrada entonces, $\{x_2\}$ es cerrado en (X_2,τ_2). Por tanto, todo conjunto unipuntual es cerrado en (X_2,τ_2), así (X_2,τ_2) es T_1. ■

Proposición 2.2.5
Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ una familia de espacios topológicos. Sea

$$X = \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$$

entonces, (X, τ_p) es T_1 si y sólo si (X_α, τ_α) es T_1, para todo $\alpha \in I$.

Demostración:
Se probarán las dos implicaciones.

$\Rightarrow)$: Suponga que (X, τ_p) es T_1. Como la propiedad de ser un espacio T_1 es hereditaria y topológica, entonces al tenerse que (X_α, τ_α) es homeomorfo a un subespacio de (X, τ_p), tal subespacio es T_1 y la propiedad se conserva bajo homeomorfismos luego, se tiene que (X_α, τ_α) es T_1, para todo $\alpha \in I$.

$\Leftarrow)$: Suponga que (X_α, τ_α) es T_1, para todo $\alpha \in I$. Sean $x = (x_\alpha)_{\alpha\in I}, y = (y_\alpha)_{\alpha\in I} \in X$ con $x \neq y$. Por ser diferentes, existe $\alpha_0 \in I$ tal que

$$x_{\alpha_0} \neq y_{\alpha_0}$$

Como $(X_{\alpha_0}, \tau_{\alpha_0})$ es T_1, existen $U, V \in \tau_{\alpha_0}$ tales que:

$$x_{\alpha_0} \in U, y_{\alpha_0} \in V \quad x_{\alpha_0} \notin V, y_{\alpha_0} \notin U$$

tomemos $M = \prod_{\alpha\in I} M_\alpha$ y $N = \prod_{\alpha\in I} N_\alpha$, donde:

$$M_\alpha = \begin{cases} X_\alpha & \text{si} \quad \alpha \neq \alpha_0 \\ U & \text{si} \quad \alpha = \alpha_0 \end{cases}$$

y

$$N_\alpha = \begin{cases} X_\alpha & \text{si} \quad \alpha \neq \alpha_0 \\ V & \text{si} \quad \alpha = \alpha_0 \end{cases}$$

para todo $\alpha \in I$. Entonces, $x \in M$, $y \in N$ con $N, M \in \tau_p$, pero $x \notin N$, $y \notin M$.

Por tanto, (X, τ_p) es T_1. ■

Proposición 2.2.6
Sea (X, τ) un espacio topológico, y sea

$$\Delta = \left\{(x, x)\middle| x \in X\right\}$$

entonces, (X, τ) es T_2 si y sólo si Δ es un subconjunto cerrado de $(X \times X, \tau_p)$ (da igual si es la topología producto o de caja ya que ambas coinciden).

Demostración:
Se probarán las dos implicaciones.

$\Rightarrow)$: Suponga que (X, τ) es T_2. Veamos que Δ es cerrado en $(X \times X, \tau_p)$. Tomemos $(a, b) \in X \times X$ tal que $(a, b) \notin \Delta$, luego $a \neq b$. Como (X, τ) es T_2, existen dos abiertos $U, V \in \tau$ tales que:

$$a \in U, b \in V \quad U \cap V = \emptyset$$

Sea $L = U \times V$. Se tiene que $(a, b) \in L$ y $L \in \tau_p$. Además, $\Delta \cap L = \emptyset$. En efecto, suponga que existe un elemento $(x, x) \in L$, entonces $x \in U$ y $x \in V$, luego $U \cap V \neq \emptyset \#_c$. Por tanto, $\Delta \cap L = \emptyset$. Así, el conjunto $X \times X - \Delta$ es abierto por ser unión arbitraria de abiertos, luego Δ es cerrado en $(X \times X, \tau_p)$.

$\Leftarrow$) : Suponga que Δ es cerrado en $(X \times X, \tau_p)$. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Entonces, $(x, y) \notin \Delta$, luego $(x, y) \in X \times X - \Delta$ el cual es abierto, luego existe un básico $B = U \times V$ tal que $(x, y) \in U \times V \subseteq X \times X - \Delta$, siendo $U, V \in \tau$.

Por la parte anterior, se tiene que $U \cap V = \emptyset$. Por tanto:

$$x \in U, y \in V \quad U \cap V = \emptyset$$

por ende, al ser los elementos diferentes $x, y \in X$ arbitrarios, se sigue que (X, τ) es T_2. ■

2.3. Espacios T_3

Proposición 2.3.1
Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces, el espacio es T_3 si y sólo si dado $x \in X$ y $U \in \tau$ tal que $x \in U$ existe $V \in \tau$ tal que $x \in V$ y $\overline{V} \subseteq U$.

Demostración:
$\Rightarrow$) : Suponga que (X, τ) es T_3. Sea $x \in X$ y $U \in \tau$ tal que $x \in U$, luego $x \notin X - U$, el cual es cerrado, luego por ser el espacio T_3 existen $W, V \in \tau$ abiertos disjuntos tales que:

$$x \in V \quad \text{y} \quad X - U \subseteq W$$

es claro que $V \subseteq U$ (pues, $W \subseteq X - U$ y $W \cap V = \emptyset$). Veamos que $\overline{V} \subseteq U$. En efecto, supongamos que $y \in \overline{V}$ y $y \notin U$, entonces $y \in W$, luego el conjunto $W \cap V \neq \emptyset \#_c$. Por ende, $\overline{V} \subseteq U$.

$\Leftarrow$) : Sea $x \in X$ y $F \subseteq X$ cerrado tal que $x \notin F$, entonces $x \in X - F$ el cual es abierto. Luego por hipótesis existe un cerrado $\overline{V}$ tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq X - F$.

Luego, $F \subseteq X - \overline{V}$. Tomemos $W = X - \overline{V}$. Entonces, V y W son abiertos tales que $x \in V$, $F \subseteq W$ y, $W \cap V = \emptyset$. Por tanto, (X, τ) es T_3. ■

Ejemplo 2.3.1
Considere el espacio topológico $(X = \{1, 2\}, \tau_I)$. Este espacio es T_3 pero no es T_0.

Ejemplo 2.3.2
Sea $K = \left\{ \frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$, tomemos $\mathcal{B}$ la colección de subconjuntos de $\mathbb{R}$ formada por los siguientes conjuntos:

1. Todos los intervalos abiertos (a, b).

2. Todos los conjuntos de la forma $(a, b) - K$.

Tenemos que $\mathcal{B}$ es una base para una topología sobre $\mathbb{R}$.

Sea τ_K la topología generada por la colección $\mathcal{B}$. Tenemos que $\tau_u \subseteq \tau_K$. Por ende, como $(\mathbb{R}, \tau_u)$ es T_2, se sigue que $(\mathbb{R}, \tau_K)$ también lo es.

Sean $l \notin \mathbb{R} - K$ y $L = (l - 1, l + 1) - K$. Tenemos que $l \in L$. El conjunto L es un básico y, además, $L \subseteq \mathbb{R} - \mathbb{K}$. Por tanto, $\mathbb{R} - K \in \tau_K$, luego K es un conjunto cerrado en $(\mathbb{R}, \tau_K)$.

Tenemos que $0 \notin K$. Suponga que $U, V \in \tau$ son abiertos tales que $0 \in U$, $K \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. Como $0 \in U$. Sea $B \in \mathcal{B}$ un básico tal que $x \in B \subseteq V$. Tenemos que, dado un intervalo abierto que contenga al 0, este siempre contiene puntos de K, luego B debe ser de la forma $B = (a, b) - K$.

Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} \in (a, b)$. Se tiene que $\frac{1}{m} \in K \subseteq V$, luego existe un básico (c, d) (debe ser de esta forma) tal que $\frac{1}{m} \in (c, d) \subseteq V$. Ahora, podemos suponer que $a < 0 < c < d < b$. Sea $\zeta\mathbb{R}$

tal que $\zeta < \frac{1}{m}$ y $\max\left\{c, \frac{1}{m+1}\right\} < \zeta$, luego:

$$c < \zeta < \frac{1}{m}$$

entonces, en particular, $\zeta \in (c,d)$, $\zeta \notin K$ ya que $\frac{1}{m+1} < \zeta < \frac{1}{m}$ y $\zeta \in (a,b)$. Por tanto, $\zeta \in U \cap V \#_c$. Así, $(\mathbb{R}, \tau_K)$ no es T_3.

Proposición 2.3.2
La propiedad de ser T_3 cumple:

1. Se hereda.
2. Es topológica.

Demostración:
De (1): Sea (X,τ) un espacio topológico T_3 y sea $Y \subseteq X$. Probaremos que (Y, τ_Y) es T_3. Tomemos $A \subseteq Y$ cerrado con la topología τ_Y y $p \in Y - A$.

Como A es cerrado en el subespacio, existe $C \subseteq X$ cerrado en (X,τ) tal que:

$$A = Y \cap C$$

En particular, $A \subseteq C$, es decir que $Y - C \subseteq Y - A$, luego $p \notin C$. Como (X,τ) es T_3, existen $U, V \in \tau$ disjuntos tales que:

$$p \in V \quad \text{y} \quad C \subseteq U$$

luego, los conjuntos $Y \cap U, Y \cap V \in \tau_Y$ son tales que:

$$p \in Y \cap V \quad \text{y} \quad A = Y \cap C \subseteq Y \cap U$$

siendo estos disjuntos (pues U y V lo son). Por tanto, (Y, τ_Y) es T_3.

De (2): Sean (X,τ) y (Y,σ) espacios topológicos homeomorfos, y $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ el homeomorfismo entre ambos.

Suponga que (X,τ) es T_3. Probaremos que (Y,σ) también es T_3. En efecto, sean $p \in Y$ y $F \subseteq Y$ cerrado tales que $p \notin F$, es decir que $p \in Y - F$. Sea

$$F' = f^{-1}(F)$$

y $p' = f^{-1}(p)$. Por ser homeomorfismo, se tiene que F' es cerrado en (X,τ) y, por ser inyectiva se tiene que $p' \notin F'$. Luego, como (X,τ) es T_3 existen $U', V' \in \tau$ disjuntos tales que:

$$p' \in V' \quad \text{y} \quad F' \subseteq U'$$

Sean $U = f(U')$ y $V = f(V')$, los cuales son abiertos en (Y,σ) tales que:

$$p = f(p') \in V \quad \text{y} \quad F = f(F') \subseteq U$$

siendo U, V disjuntos por serlo U', V'. Luego, (Y,σ) es T_3. ■

Proposición 2.3.3
Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ una familia de espacios topológicos, sea

$$X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$$

entonces, (X, τ_p) es T_3 si y sólo si (X_α, τ_α) es T_3, para todo $\alpha \in I$.

Demostración:
$\Rightarrow)$: Es inmediata del hecho de que la propiedad de que un espacio sea T_3 es hereditaria y topológica.

$\Leftarrow)$: Suponga que para todo $\alpha \in I$, (X_α, τ_α) es T_3. Veamos que (X, τ_p) es T_3. Sea $x \in X$ y $U \in \tau_p$ un abierto tal que $x \in U$.

Como $U \in \tau_p$, podemos encontrar un básico B, que podemos expresar como $B = \prod_{\alpha \in I} B_\alpha$, donde $B_\alpha = X_\alpha$ para casi todo salvo una cantidad finita de $\alpha \in I$, y B_α es abierto en (X_α, τ_α) para todo $\alpha \in I$.

Como cada (X_α, τ_α) es T_3, entonces para cada B_α existe $V_\alpha \in \tau_\alpha$ tal que $x_\alpha \in V_\alpha$ y $\overline{V_\alpha} \subseteq B_\alpha$, para todo $\alpha \in I$.

Si $B_\alpha = X_\alpha$, tomemos $V_\alpha = X_\alpha$, en caso contrario lo dejamos igual. Entonces, el conjunto $V = \prod_{\alpha \in I} V_\alpha$ es un básico, en particular, abierto, tal que $x \in V$, y

$$\overline{V} = \overline{\prod_{\alpha \in I} V_\alpha} = \prod_{\alpha \in I} \overline{V_\alpha} \subseteq \prod_{\alpha \in I} B_\alpha = B \subseteq U$$

por tanto, (X, τ_p) es T_3. ■

Corolario 2.3.1
Sea (X, τ) un espacio topológico.

1. Si (X, τ) es regular, entonces y $Y \subseteq X$, entonces (Y, τ_Y) es regular.
2. Si (X, τ) y (X', τ') son espacios homeomorfos y, (X, τ) es regular, entonces (X', τ') es regular.
3. Si $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ es una familia de espacios topológicos. Si $X = \prod_{\alpha \in I}$, entonces (X, τ_p) es regular si y sólo si (X_α, τ_α) es regular, para todo $\alpha \in I$.

Demostración:
Son inmediatas del hecho que la propiedad de ser T_1 y T_3 se hereda y es topológicsa y, de que esta propiedad se preserva bajo productos y elementos del producto. ■

2.4. Espacios T_4

Proposición 2.4.1
Sea $(X.\tau)$ un espacio topológico. Entonces, (X, τ) es T_4 si y sólo si dados $A \subseteq X$ cerrado y $U \in \tau$ tales que $A \subseteq U$, existe un abierto V tal que $A \subseteq V$ y $\overline{V} \subseteq U$.

Demostración:
$\Rightarrow)$: Supongamos que (X, τ) es T_4. Sean $A \subseteq X$ cerrado y $U \in \tau$ tal que $A \subseteq U$. El conjunto $B = X - U$ es un cerrado tal que $A \cap B = \emptyset$. Como el espacio (X, τ) es T_4, existen dos abiertos $V, W \in \tau$ tales que:

$$A \subseteq V \quad \text{y} \quad B \subseteq W$$

y, $V \cap W = \emptyset$. Como $V \cap W = \emptyset$, entonces $V \subseteq X - W \subseteq X - B = U$. Afirmamos que $\overline{V} \subseteq U$. En efecto, notemos que $X - W$ es un cerrado que contiene a V, por ende $\overline{V} \subseteq X - W \subseteq U$, luego $\overline{V} \subseteq U$. Con lo cual se sigue el resultado.

$\Leftarrow)$: Sean $A, B \subseteq X$ cerrados tales que $A \cap B = \emptyset$. Se tiene entonces que:

$$A \subseteq X - B$$

donde $X - B \in \tau$, luego por hipótesis existe $U \in \tau$ abierto tal que:

$$A \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq X - B$$

el conjunto $V = X - \overline{U}$ es un abierto para el cual, se tiene que $B \subseteq V$. Luego, $U, V \in \tau$ son tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. Luego el espacio es T_4. ∎

Proposición 2.4.2
Sea (X, τ) un espacio T_4 y sea $A \subseteq X$ un conjunto cerrado. Entonces, (A, τ_A) es T_4.

Demostración:
Sean $M, N \subseteq (A, \tau_A)$ cerrados tales que $M \cap N = \emptyset$. Como A es cerrado en (X, τ), entonces M, N son cerrados en (X, τ). Luego, como (X, τ) es T_4, existen dos abiertos $U', V' \in \tau$ tales que

$$M \subseteq U', \quad N \subseteq V', \quad U' \cap V' = \emptyset$$

Luego, los conjuntos $U = A \cap U', V = A \cap V' \in \tau_A$ son disjuntos tales que $M \subseteq U$ y $N \subseteq V$, ya que $M, N \subseteq A$. Así, (A, τ_A) es T_4. ∎

Lema 2.4.1
Sean (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) dos espacios topológicos homeomorfos. Entonces, si $f : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$ es el homeomorfismo entre ambos espacios, se tiene que $f(\overline{A}) = f(\overline{A})$, para todo $A \subseteq X_1$.

Demostración:
Como f es homeomorfismo, en particular es continua ∎

Proposición 2.4.3
La propiedad de ser T_4 es topológica.

Demostración:
Sean (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) espacios topológicos homeomorfos tales que (X_1, τ_1) es T_4. Sea $f : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$ el homeomorfismo entre ellos.

Veamos que (X_2, τ_2) es T_4. En efecto, sea $A \subseteq X_2$ cerrado y $U \in \tau_2$ abierto tal que $A \subseteq U$. Como f es homeomorfismo, entonces $f^{-1}(A) \subseteq X_1$ es cerrado y, $f^{-1}(U) \in \tau_1$ son tales que:

$$f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(U)$$

Luego, como (X_1, τ_1) es T_4, existe $W \in \tau_1$ tal que:

$$f^{-1}(A) \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq f^{-1}(U)$$

Sea $V = f(W)$. Como f es homeomorfismo, es una función abierta, luego $V \in \tau_2$, para la cual se cumple que:

$$A \subseteq V \subseteq U$$

pero, $f(\overline{V}) = \overline{f(V)}$ (por ser f homeomorfismo), se tiene que:

$$A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$$

por tanto, (X_2, τ_2) es T_4. ∎

Lema 2.4.2 (**Lema de Urysohn**)
Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces, (X, τ) es T_4 si y sólo si para todos $A, B \subseteq X$ cerrados disjuntos, existe una función continua $f : (X, \tau) \to ([0, 1], \tau_u)$ tal que $f(A) = \{1\}$ y $f(B) = \{0\}$.

Demostración:
$\Rightarrow)$: ...

$\Leftarrow)$: Sean $A, B \subseteq X$ cerrados disjuntos. Por hipótesis existe una función continua $f : (X, \tau) \to ([0, 1], \tau_u)$ tal que $f(A) = 1$ y $f(B) = 0$. Los conjuntos $U = f^{-1}((r, 1])$ $V = f^{-1}([0, r))$, donde $r \in (0, 1)$, son dos abiertos (ya que f es continua y $[0, r), (r, 1], \in \tau_u)$ tales que:

$$A \subseteq U \quad B \subseteq V$$

y, $U \cap V = \emptyset$. ■

Capítulo 3

Filtros

3.1. Conceptos Fundamentales

Definición 3.1.1
Sean X un conjunto no vacío y $\mathcal{F}$ una familia no vacía de subconjuntos no vacíos de X. $\mathcal{F}$ se dice que es un **filtro** si cumple lo siguiente:

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
2. Si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.
3. Si $K \subseteq X$ y $F \subseteq K$ para algún $F \in \mathcal{F}$, entonces $K \subseteq F$. (*Propiedad de absorción*).

Ejemplo 3.1.1
Sea X un conjunto no vacío. Entonces, $\{X\}$ es un filtro sobre X.

Observación 3.1.1
Si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre un conjunto no vacío X entonces, se cumple lo siguiente:

1. $\forall A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B \neq \emptyset$.
2. Si $A_1, ..., A_n \in \mathcal{F}$, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$ y es no vacía.

Ejemplo 3.1.2
Sea X un conjunto no vacío y $A \subseteq X$ no vacío. Entonces,

$$\mathcal{F}_A = \left\{ M \subseteq X \middle| A \subseteq M \right\}$$

es un filtro sobre X.

Observación 3.1.2
Si $A = \{x\}$, escribiremos $\mathcal{F}_x$ en vez de $\mathcal{F}_{\{x\}}$.

Ejemplo 3.1.3
Sea (X, τ) un espacio topológico con X. Sea

$$\xi_x = \left\{ V \subseteq X \middle| V \in \mathcal{V}(x) \right\}$$

con $x \in X$ (recordando que $\mathcal{V}(x)$ es el conjunto de todas las vecindades de x). Entonces, ξ_x es un filtro sobre X. Este filtro es llamado el **filtro de vecindades sobre el punto** x.

Demostración:
Tenemos que verificar 4 condiciones:

1. $X \in \xi_x$.
2. $\emptyset \notin \xi_x$.
3. $M, N \in \mathcal{V}(x)$ implica que $M \cap N \in \mathcal{V}(x)$.
4. Seea $L \subseteq X$ tal que $V \in \mathcal{V}(x)$ cumple que $V \subseteq L$, entonces $L \in \mathcal{V}(x)$.

Luego, ξ_x es un filtro sobre X. ■

Observación 3.1.3
Si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X, entonces $X \in \mathcal{F}$.

Proposición 3.1.1
Sean X un conjunto no vacío y $\{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de filtros sobre X. Entonces, $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha$ es un filtro en X.

Demostración:
Sea

$$\mathcal{K} = \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha$$

1. $\mathcal{K} \neq \emptyset$, pues $X \in \mathcal{F}_\alpha$, para todo $\alpha \in I$.
2. $\emptyset \notin \mathcal{K}$, pues $\emptyset \notin \mathcal{F}_\alpha$ para todo $\alpha \in I$.
3. Sean $A, B \in \mathcal{K}$, entonces $A, B \in \mathcal{F}_\alpha$ para todo $\alpha \in I$. Por ser filtros se sigue que $A \cap B \in \mathcal{F}_\alpha$ para todo $\alpha \in I$, luego $A \cap B \in \mathcal{K}$.
4. Sea $M \subseteq X$ y sea $L \in \mathcal{K}$ tal que $L \subseteq M$, entonces $L \in \mathcal{F}_\alpha$ para todo $\alpha \in I$. Como cada $\mathcal{F}_\alpha$ cumple la propiedad de absorción, se tiene que $M \in \mathcal{F}_\alpha$ para todo $\alpha \in I$, luego $M \in \mathcal{K}$.

Por los 4 incisos anteriores, se sigue que $\mathcal{K}$ es un filtro sobre X. ■

Ejemplo 3.1.4
Sea $X = \{a, b\}$ con $a \neq b$. Tomemos $\mathcal{F}_1 = \{X, \{a\}\}$ y $\mathcal{F}_2 = \{X, \{b\}\}$. Entonces $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ no es un filtro, ya que en caso contario se tendría que $\{a\} \cap \{b\} = \emptyset \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$, lo cual no puede ser.

Así, la unión de filros no necesariamente es un filtro.

Proposición 3.1.2
Si $\{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una familia de filtros sobre X tal que dados $\alpha, \beta \in I$ se tiene que

$$\mathcal{F}_\alpha \subseteq \mathcal{F}_\beta \text{ o } \mathcal{F}_\beta \subseteq \mathcal{F}_\alpha$$

entonces $\mathcal{F} = \bigcup_{\alpha\in I} \mathcal{F}_\alpha$ es un filtro.

Demostración:
En efecto, veamos que $\mathcal{F}$ es un filtro.

1. $\mathcal{F} \neq \emptyset$ ya que $X \in \mathcal{F}_\alpha$ para algún $\alpha \in I$.
2. $\emptyset \notin \mathcal{F}$, pues $\emptyset \notin \mathcal{F}_\alpha$ para todo $\alpha \in I$.
3. Sean $A, B \in \mathcal{F}$. Entonces, existen $\alpha, \beta \in I$ tales que $A \in \mathcal{F}_\alpha$ y $B \in \mathcal{F}_\beta$, entonces se tiene una de las dos contenciones:
$$\mathcal{F}_\alpha \subseteq \mathcal{F}_\beta \text{ o } \mathcal{F}_\beta \subseteq \mathcal{F}_\alpha$$
supongamos que $\mathcal{F}_\alpha \subseteq \mathcal{F}_\beta$, entonces $A, B \in \mathcal{F}_\beta$. Por tanto, $A \cap B \in \mathcal{F}_\beta$. Así, $A \cap B \in \mathcal{F}$.
4. Sea $M \subseteq X$ y $L \in \mathcal{F}$ tal que $L \subseteq M$. Como $L \in \mathcal{F}$ existe $\alpha \in I$ tal que $L \in \mathcal{F}_\alpha$, luego por la propiedad de absorción $M \in \mathcal{F}_\alpha$. Por tanto, $M \in \mathcal{F}$.

Por los cuatro incisos anteriores, se sigue que $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X. ■

Definición 3.1.2
Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Una familia no vacía $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X de X es **una base para el filtro** $\mathcal{F}$ si se cumple lo siguiente:

1. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$.
2. $\forall F \in \mathcal{F}$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq F$.

Observación 3.1.4
Observamos que

1. Si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre un conjunto X, entonces $\mathcal{F}$ es una base para sí mismo.
2. Si $\mathcal{B}$ es una base para el filtro $\mathcal{F}$ sobre X y, $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Definición 3.1.3
Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{B}$ una familia no vacía de subconjuntos no vacíos de X. Se dice que $\mathcal{B}$ es **una base de filtro en** X, si se cumple lo siguiente: Dados $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Proposición 3.1.3
Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{B}$ una base de filtro en X. Entonces:

$$\mathcal{B}^+ = \left\{ A \subseteq X \middle| \exists B \in \mathcal{B} \text{ tal que } B \subseteq A \right\}$$

es un filtro en X y este se dice **el filtro generado por la base** $\mathcal{B}$. Además, $\mathcal{B}$ es una base para $\mathcal{B}^+$.

Demostración:

Se tienen que probar dos cosas:

1. Es claro que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}^+$. Por tanto, $\mathcal{B}^+ \neq \emptyset$.
2. $\emptyset \notin \mathcal{B}^+$ es cierto pues $\emptyset \notin \mathcal{B}$, ya que $\mathcal{B}$ es una subcolección no vacía de conjuntos no vacíos.
3. Tomemos $K, M \in \mathcal{B}^+$ luego, existen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tal que $B_1 \subseteq K$ y $B_2 \subseteq M$. Por tanto, $B_1 \cap B_2 \subseteq K \cap M$. Por ser $\mathcal{B}$ base para un filtro sobre X, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq K \cap M$. Luego, $K \cap M \in \mathcal{B}^+$.
4. Sea $W \subseteq X$ y $L \in \mathcal{B}^+$ tal que $L \subseteq W$. Existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq L \subseteq W$, luego $B \subseteq W$. Por tanto, $W \in \mathcal{B}^+$.

Por los cuatro incisos anteriores, se sigue que $\mathcal{B}^+$ es un filtro sobre X. ■

Proposición 3.1.4

Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre X y $A \subseteq X$ tal que $\forall F \in \mathcal{F}$, $A \cap F \neq \emptyset$. Entonces

$$\mathcal{B} = \left\{ A \cap F \middle| F \in \mathcal{F} \right\}$$

es una base de filtro y, el filtro generado por ella $\mathcal{B}^+$ cumple lo siguiente:

1. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}^+$.
2. $A \in \mathcal{B}^+$.

Demostración:

Se deben cumplir varios incisos:

1. $\mathcal{B} \neq \emptyset$, pues el conjunto $A \cap X = A \in \mathcal{B}$ ya que $X \in \mathcal{F}$.
2. $\emptyset \notin \mathcal{B}$ ya que se contradeciría la hipótesis de que $A \cap F = \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$.
3. $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ implica que existen $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ tales que $B_1 = A \cap F_1$ y $B_2 = A \cap F_2$. Por tanto

   $$B_1 \cap B_2 = A \cap (F_1 \cap F_2)$$

   donde, $A \cap (F_1 \cap F_2) \in \mathcal{B}$ pues, $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X. Luego, tomando $B_3 = B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$, se sigue que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

por los tres incisos anteriores, se sigue que $\mathcal{B}$ es base para un filtro sobre X. Ya se tiene que $A \in \mathcal{B}^+$, pues $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}^+$.

Sea ahora $F \in \mathcal{F}$. Entonces, $F \cap A \in \mathcal{B}^+$. Por propiedad de absorción se debe tener que como $F \cap A \subseteq F$, entonces $F \in \mathcal{B}^+$. ■

Proposición 3.1.5

Sean X y Y dos conjuntos no vacíos. Sea $\mathcal{F}$ un filtro en X y $f : X \to Y$ una función. Entonces,

$$\mathcal{B} = \left\{ f(A) \middle| A \in \mathcal{F} \right\}$$

es una base de filtro en Y. En este caso, se denotará por $f(\mathcal{F})$ a $\mathcal{B}^+$, esto es $f(\mathcal{F}) = \mathcal{B}^+$.

Demostración:

Se deben verificar tres condiciones

1. $\mathcal{B} \neq \emptyset$, pues $f(X) \in \mathcal{B}$.
2. Todos los elementos de $\mathcal{B}$ son no vacíos, pues como $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X, todos sus elementos son no vacíos, así $f(F) \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$.
3. Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, entonces existen $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ tales que $B_1 = f(F_1)$ y $B_2 = f(F_2)$. Por tanto, el conjunto
$$B_3 = f(F_1 \cap F_2) \subseteq f(F_1) \cap f(F_2) = B_1 \cap B_2$$
es tal que $B_3 \in \mathcal{B}$, ya que $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.

por los incisos anteriores, se sigue que $\mathcal{B}$ es base de un filtro en Y. ■

Ejemplo 3.1.5

Considere $X = \{a, b\}$, $a \neq b$. Sea $f : X \to X$ dada como sigue:

$$f(a) = a = f(b)$$

el conjunto $\mathcal{F} = \{X, \{a\}\}$ es un filtro sobre X. la colección

$$f(\mathcal{F}) = \{\{a\}\}$$

no es un filtro en X ya que $X \notin f(\mathcal{F})$.

Proposición 3.1.6

Sean X y Y dos conjuntos no vacíos, $\mathcal{F}$ un filtro en X y $f : X \to Y$ una función. Entonces, f es una función suprayectiva si y sólo si $\left\{ f(F) \middle| F \in \mathcal{F} \right\}$ es un filtro en Y.

Demostración:

Necesidad: Suponga que f es suprayectiva. Ya se sabe que

$$\mathcal{B} = \left\{ f(F) \middle| F \in \mathcal{F} \right\}$$

es una base de filtro.

Sugerencia: $f(f^{-1}(A)) = A$. ■