Teorema Fundamental.

Primer teorema fundamental del cálculo (clásica).

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo con extremos $a<b$ (se permite $a=-\infty$ y/o $b=\infty$). Son equivalentes:

i) f int. en $[a,b]$.

ii) f int. en $]a,b[$.

iii) f int. en $[a,b[$.

iv) f int. en $]a,b]$.

Si a y b son finitos, (ii) y (iii) si $b=\infty$ y (ii) y (iv) si $a=-\infty$. Y las int. en cualquiera de ellos son iguales.

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \ldots$$

Def. Sea $f : I \to \mathbb{K}$, $I \subseteq \mathbb{R}$. Se dice que f es localmente integrable en I, si f es integrable en todo compacto contenido en I.

Se tiene que f es localmente integrable en $I \iff f$ es integrable en todo subintervalo J de I compacto.

$\Rightarrow)$ ✓.

$\Leftarrow)$ Sea $K \subseteq I$ compacto. Ent. $K \subseteq [\min K, \max K] = J \subseteq I$. Si f es integrable en J (el cual es compacto) $\Rightarrow f$ int. en K, luego f int. en K.

Ejemplo.

1) Toda función continua de I en $\mathbb{K}$ es localmente int. en I. P. ej $x \mapsto \frac{1}{x}$ en $]0,\infty[$ es localmente int. pero no lo es en $[0,\infty[$.

Una propiedad se dice que es "local" si la prop. se cumple en alguna vecindad de cada punto.

Proposición.

Sea $f: I \to \mathbb{K}$. f es localmente int. en I si y sólo si $\forall\, x \in I$ $\exists\, J$ intervalo abierto en $\mathbb{R}$ tq $x \in J$ y f es int. en $J \cap I$.

Dem.

$\Rightarrow$) Suponga f localmente int. Fije $x \in I$, se tienen dos casos:

i) $x \in \mathring{I}$. Ent. $\exists\, \alpha, \beta \in I$ tq $\alpha < x < \beta$. Por hip. f es int. en $[\alpha, \beta] \subseteq I$, luego f debe serlo en $]\alpha, \beta[=]\alpha, \beta[\cap I$. $(J =]\alpha, \beta[)$.

ii) x extremo izquierdo. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta \in I$ tq $\alpha < x < \beta$. f es int. en $[x, \beta]$, luego f es int. en

$$[x, \beta[=]\alpha, \beta[\cap I \quad (J =]\alpha, \beta[).$$

El otro caso es similar.

$\Leftarrow$) Sea $K \subseteq I$ compacto. $\forall\, x \in K$ $\exists\, J_x$ int. abierto en $\mathbb{R}$ tq $x \in J_x$ y f es int. en $J_x \cap I$. Como K es compacto, $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} J_{x_i}$ para ciertos $x_1, \dots, x_n \in K$. Luego f es int. en $K = K \cap I \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} J_{x_i} \cap I$.

$\therefore f$ es int. en K.

$\square$

Def. Sean $a < b$ (donde puede que $a = -\infty$ y/o $b = \infty$). Si f es int. en $]a, b[$, se define la *integral orientada de f de b a a* como:

$$\int_b^a f = -\int_a^b f.$$

En part. $\int_a^a f = 0$.

Proposición.

Si $f: I \to \mathbb{K}$ es localmente int. en I, ent.

$$\int_\alpha^\beta f + \int_\beta^\gamma f = \int_\alpha^\gamma f, \ \forall \alpha, \beta, \gamma \in I.$$

Dem.

Se trata por casos:

i) Caso $\gamma < \alpha < \beta$. Se tiene

$$[\gamma, \beta] = [\gamma, \alpha] \cup]\alpha, \beta]$$

$$\Rightarrow \int_\gamma^\beta f = \int_\gamma^\alpha f + \int_\alpha^\beta f$$

$$\Rightarrow \int_\alpha^\beta f - \int_\gamma^\beta f = -\int_\gamma^\alpha f$$

$$\Rightarrow \int_\alpha^\beta f + \int_\beta^\gamma f = \int_\alpha^\gamma f$$

Los otros son iguales.

$\square$

Integrales indefinidas.

Def. Sea $f: I \to \mathbb{K}$ localmente int. en I. Fije $a \in I$ arbitrario. Una integral indefinida de f en I es una función $F: I \to \mathbb{K}$ de la forma

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \ \forall x \in I.$$

En el caso de que el ext. izq. de I le pertenezca a I, se acostumbrará a tomar como a este valor.

Teorema (Cont. abs. de la integral).

Si $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ es integrable, ent. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ ∍ para cada conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ med. ∍ $m(A) < \delta$ se tiene

$$\left|\int_A f\right| \leq \int_A |f| < \varepsilon$$

Dem.

Sea $\varepsilon > 0$. Suponga f es acotada, i.e $\exists M \in \mathbb{R}^+$ ∍ $|f| \leq M$. Sea $\delta = \frac{\varepsilon}{M} > 0$. Se tiene que si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es med. y $m(A) < \delta$, ent.

$$\left|\int_A f\right| \leq \int_A |f| \leq M m(A) < \varepsilon$$

Suponga que f no nec. es acotada. $\forall\, r \in \mathbb{N}$ define $f_r = |f| \chi_{A_r}$, dónde

$$A_r = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| \leq r \}$$

ent. $\{f_r\}_{r=1}^{\infty}$ es creciente de func. int. acotadas que conv. puntualmente a $|f|$. Por T.C.M. al ser todos no neg.

$$\lim_{r \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_r = \int_{\mathbb{R}^n} |f|$$

Dado $\varepsilon > 0$ $\exists\, N \in \mathbb{N}$ $\ni$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} |f| - \int_{\mathbb{R}^n} f_N \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^n} (|f| - f_N) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Como f_N es acotado, por lo ant. para $\varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ $\ni$ $A \subseteq \mathbb{R}^n$ med. implica que:

$$m(A) < \delta \Rightarrow \int_A f_N < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ent.

$$\begin{aligned}
\int_A |f| &= \int_A (|f| - f_N) + \int f_N \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} (|f| - f_N) + \int_A f_N \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

$\square$

Prop.

Si $f: I \to \mathbb{K}$ es localmente int. en I, ent. cualquier integral indefinida de f es continua.

Dem.

Sea $a \in I$ y define $F: I \to \mathbb{K}$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \ \forall\, x \in I.$$

Fije $x_0 \in I$. Por un res. ant. $\exists\, J \subseteq \mathbb{R}$ abierto $\ni$ $x_0 \in J$ y f es int. en $J \cap I$.

Sea $\varepsilon > 0$. Por la cont. abs. $\exists\, \delta > 0$ m si $A \subseteq J \cap I$ y $m(A) < \delta \Rightarrow$

$$\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f| < \varepsilon$$

en part. si $|h| < \delta$ m $x_0 + h \in J \cap I$ ent.

$$\begin{aligned} |F(x_0+h) - F(x_0)| &= \left| \int_{x_0}^{x_0+h} f \right| \\ &= \left| \int_{[x_0, x_0+h]} f \right| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

pues $m([x_0, x_0+h]) < \delta$. Así, F es cont. en x_0. Como el x_0 fue arb. en I, F es cont. en I.

$\square$

Teorema (1er t. fund. clásico).

Sea $f : I \to \mathbb{K}$ loc. int. en I. Fije $a \in I$ arbitrario y defina $F : I \to \mathbb{K}$:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt, \quad \forall\, x \in I.$$

Si f es cont. en $x_0 \in I$, ent. F es derivable en x_0 y

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

Dem.

Observamos que $\forall\, h \neq 0$ m $x + h \in I$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))\, dt \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|\, dt \right| \end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ m $t \in I$ y $|x_0 - t| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. Ent. para $0 < |h| < \delta$ m $x_0 + h \in I$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| &\leq \frac{1}{|h|} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon \right| \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

$$\therefore\ F'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

$\square$

Obs.) En particular, se ha probado este teorema para la integral de Riemman.

Corolario.

Si $f: I \to \mathbb{K}$ es continua en I, ent. toda integral indefinida es una primitiva de f.

Dem.

Inmediata de lo ant.

$\square$

Ejemplos.

1) Calcular $\frac{d}{dx}\left(\int_0^{\operatorname{sen} x} e^{t^2} dt\right)$. Notemos que $F(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} e^{t^2} d$ se escribe como:

$$h : x \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt \quad y \quad g : y \mapsto \operatorname{sen} y$$

$$\Rightarrow F(x) = h \circ g(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Luego, como h y g son diferenciables pues $t \mapsto e^{t^2}$ es cont. ent.

$$F'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Diferenciación de fun. monótonas.

Cubiertas de Vitali.

Def. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Una familia $\mathcal{I}$ de conjuntos de $\mathbb{R}$ es una cubierta de Vitali de A, si

i) Todo elemento de $\mathcal{I}$ es un intervalo con interior no vacío.

ii) $\forall x \in A$ y $\forall \varepsilon > 0$ existe $I \in \mathcal{I}$ m $x \in I$ y $l(I) < \varepsilon$ (L denota la longitud).

Las cond. ant. son equiv. a cualquiera de las dos sig.

a) $\forall \varepsilon > 0$ existe una subcubierta $\mathcal{I}_\varepsilon$ de A formada por intervalos de longitud $< \varepsilon$.

b) Cada punto de A está contenido en intervalos de $\mathcal{I}$ de longitud arbitrariamente pequeña.

Lema (de Vitali).

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ m $m^*(A) < \infty$. Si $\mathcal{I}$ es una cubierta de Vitali de A, ent. para cada $\varepsilon > 0$ existe una familia finita $\{I_1, \dots, I_N\}$ de intervalos disjuntos de $\mathcal{I}$ m

$$m^*\left(A \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{N} I_k\right)\right) < \varepsilon.$$

Dem.

Por la regularidad de la medida de Lebesgue, existe $G \subseteq \mathbb{R}$ abierto m $A \subseteq G$ y $m^*(G \setminus A) < 1 \Rightarrow m^*(G) < \infty$.

Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que todos los intervalos de $\mathcal{I}$ son cerrados y que están contenidos en G. En efecto, se reemplazan todos los elementos de $\mathcal{I}$ por su cerradura, la nueva familia será denotada por $\bar{\mathcal{I}}$. Claramente $\bar{\mathcal{I}}$ es cubierta de Vitali de A.

Ahora, se descartan los elementos de $\bar{\mathcal{I}}$ que no están cont. en G. La nueva familia de intervalos restantes $\bar{\mathcal{I}}'$ también es cubierta de Vitali de A (por un lado, porque G es abierto y por la cond. b)).

Si el resultado es cierto para $\bar{\mathcal{I}}'$, ent. debe ser cierto para $\mathcal{I}$. Se construirá inductivamente una sucesión $\{I_v\}_{v=1}^{\infty}$ de int. disj. en $\mathcal{I}$. Se escoge I_1 como cualquier elemento de $\mathcal{I}$. Suponga elegidos $I_1, \dots, I_v$ int. disj. en $\mathcal{I}$. Se define

$$K_v = \sup\{L(I) \mid I \in \mathcal{I} \text{ m } I \cap I_k = \emptyset,\ \forall k = 1, \dots, v\}$$

i.e es el supremo de las longitudes de los intervalos de $\mathcal{I}$ que son disjuntos con $I_1, \dots, I_v$.

Y $K_v = 0$ si el conjunto ant. es vacío.

Ya que todo elemento de $\mathcal{I}$ está cont. en G, necesariamente

$$K_v \leq m(G) < \infty$$

A menos que $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{v} I_k$, en cuyo caso no hay nada que probar, se afirma que $\exists$ un int. I_{v+1} que es disjunto de los ya escogidos y m

$$L(I_{v+1}) > \frac{K_v}{2}$$

En efecto, sea $x \in A \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{v} I_k\right)$. Como $\bigcup_{k=1}^{v} I_k$ es cerrado, ent. existen int. de $\mathcal{I}$ que contienen a x y son disjuntos de la unión. En part. esto prueba que $K_r > 0$ y por def. de supremo, $\exists\ I_{r+1} \in \mathcal{I}$ $\ni$ $x \in \bar{I}_{r+1}$ que es disjunto de los ant. $I_1, \dots, I_r$ y tal que

$$L(I_{r+1}) > \frac{K_r}{2} \quad \dots (1)$$

$\therefore \{I_r\}_{r=1}^{\infty}$ queda def. por inducción. Ent.

$$\sum_{r=1}^{\infty} L(I_r) = L\left(\bigcup_{r=1}^{\infty} I_r\right) \leq m(G) < \infty$$

Dado $\varepsilon > 0$ $\exists$ $N \in \mathbb{N}$ $\ni$

$$\sum_{r=N+1}^{\infty} L(I_r) < \frac{\varepsilon}{5} \quad \dots (2)$$

Se afirma que $I_1, \dots, I_N$ satisfacen la conclusión del lema. En efecto, sea $B = A \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{N} \bar{I}_k\right)$. Se probará que $m^*(B) < \varepsilon$. Sea $x \in B$, ent. $x \in A$ y $x \notin \bar{I}_i$, $\forall i = 1, \dots, N$. Como $\bigcup_{k=1}^{N} \bar{I}_k$ es cerrado y $\mathcal{I}$ es cubierta de Vitali de A, $\exists$ $I \in \mathcal{I}$ $\ni$ $x \in \bar{I}$ y:

$$\bar{I} \cap I_k = \emptyset \quad \forall k = 1, \dots, N.$$

Observe que si $H \in \mathcal{I}$ $\ni$ $H \cap \bar{I}_k = \emptyset$, $k = 1, \dots, r$, $r \in \mathbb{N}$, ent.

$$L(H) \leq K_r < 2L(I_{r+1}) \dots (3)$$

por def. de K_r y de I_{r+1}. Pero, por (2):

$$\lim_{r \to \infty} L(I_r) = 0$$

Ent. para el int. ant. $I \in \mathcal{I}$,

$$L(I) \not< 2L(I_{j+1}), \text{ para algún } j \in \mathbb{N}$$

luego I no satisface (3), i.e., $\exists$ $r \in \mathbb{N}$ $\ni$ $N < r \leq j$ y $\bar{I} \cap \bar{I}_r \neq \emptyset$. Sea n el mínimo de tales r. Ent. $N < n \leq j$ y $\bar{I} \cap \bar{I}_k = \emptyset$, $k = 1, \dots, n-1$, $\bar{I} \cap \bar{I}_n \neq \emptyset$. luego por (3):

$$L(I) \leq K_{n-1} < 2L(I_n)$$

Entonces, la distancia de x al centro del intervalo I_n es cuando mucho $L(I) + \frac{L(I_n)}{2} < \frac{5}{2}L(I_n)$. Sea J_n un intervalo del mismo centro que I_n y de longitud 5 veces la longitud de I_n, ent. $x \in J_n$, y:

$$B \subseteq \bigcup_{k=N+1}^{\infty} J_k$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow m^*(B) &\leq m\left(\bigcup_{k=N+1}^{\infty} J_k\right) \\
&= \sum_{k=N+1}^{\infty} m(J_k) \\
&= S \sum_{k=N+1}^{\infty} L(I_k) \\
&< S \cdot \frac{\varepsilon}{S} \\
&= \varepsilon .
\end{aligned}
$$

$\square$

Derivadas Laterales de Dini.

Def. Sea $f: I \to \overline{\mathbb{R}}$ y $x \in \overline{I}$. Se definen los límites superior e inferior de f en x como sigue:

$$\limsup_{y \to x} f(y) = \inf_{\delta > 0} \left(\sup_{0<|x-y|<\delta} f(y) \right)$$
$$\liminf_{y \to x} f(y) = \sup_{\delta > 0} \left(\inf_{0<|x-y|<\delta} f(y) \right)$$

y además:

$$\limsup_{y \to x^+} f(y) = \inf_{\delta > 0} \left(\sup_{0<y-x<\delta} f(y) \right).$$
$$\liminf_{y \to x^+} f(y) = \sup_{\delta > 0} \left(\inf_{0<y-x<\delta} f(y) \right).$$
$$\limsup_{y \to x^-} f(y) = \inf_{\delta > 0} \left(\sup_{0<x-y<\delta} f(y) \right).$$
$$\liminf_{y \to x^-} f(y) = \sup_{\delta > 0} \left(\inf_{0<x-y<\delta} f(y) \right).$$

Como $\delta \mapsto \sup_{0<|x-y|<\delta} f(y)$ es decreciente y $\delta \mapsto \inf_{0<|x-y|<\delta} f(y)$ es creciente, los límites al lado derecho son auténticos, p. ej.

$$\limsup_{y \to x^+} f(y) = \lim_{\delta \to 0^+} \left(\sup_{0<y-x<\delta} f(y) \right).$$
$$\liminf_{y \to x^+} f(y) = \lim_{\delta \to 0^+} \left(\inf_{0<y-x<\delta} f(y) \right).$$

Similarmente con los demás.

En general,
$$\liminf_{y \to x} f(y) \leq \liminf_{y \to x^+} f(y) \leq \limsup_{y \to x^+} f(y) \leq \limsup_{y \to x} f(y)$$

Si existe en $\overline{\mathbb{R}}$ el límite

$$\lim_{y \to x} f(y)$$

si y sólo si

$$\limsup_{y \to x} f(y) = \liminf_{y \to x} f(y)$$

y los 3 son iguales. Lo mismo para límites laterales.

Def. Sea $f: I \to \mathbb{K}$. Las derivadas superior e inferior por la derecha e izquierda de f en un punto $x \in I$:

$$D^+ f(x) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad D_+ f(x) = \liminf_{h \to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$D^- f(x) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{f(x-h)-f(x)}{-h} \qquad D_- f(x) = \liminf_{h \to 0^+} \frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$$

en $\overline{\mathbb{R}}$ (en los dos primeros casos x no es el extremo derecho de I y en los los últimos no es el extremo izquierdo).

De lo ant. se tienen

$$D_+ f(x) \leq D^+ f(x) \quad y \quad D_- f(x) \leq D^- f(x)$$

Si $D_- f(x) = D^- f(x) = D_+ f(x) = D^+ f(x)$ el valor común coincide con el de la derivada de f en $\overline{\mathbb{R}}$. Si ese valor común es finito, entonces coinciden con $f'(x)$ en el sentido usual.

Si f es creciente (resp. decreciente), todas las derivadas laterales de Dini son no neg. (resp. no positivas)

Ejemplo.

1) Sea

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{I} \end{cases}$$

Se tiene

$$D_+f(0) = \liminf_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \liminf_{h\to 0^+} \frac{f(h)}{h}$$

Para $0<\delta<1$:

$$\frac{f(h)}{h} = \begin{cases} h & \text{si } h\in \mathbb{Q}\cap(0,1] \\ 1 & \text{si } h\in \mathbb{I}\cap(0,1] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \inf_{0<h<\delta} \frac{f(h)}{h} = 0, \ \forall\, 0<\delta<1$$

$$\Rightarrow D_+f(0) = \lim_{\delta\to 0^+} \inf_{0<h<\delta} \frac{f(h)}{h} = 0$$

Similarmente $D^+f(0)=1$. Por otra parte,

$$D^-f(0) = \limsup_{h\to 0^+} \frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$$

$$= \limsup_{h\to 0^+} \frac{-f(-h)}{h}$$

$$= \limsup_{h\to 0^+} \frac{-(-h+1)}{h}$$

$$= \limsup_{h\to 0^+} \frac{h-1}{h}$$

$$= \lim_{\delta\to 0^+} \sup_{0<h<\delta} \left(1-\frac{1}{h}\right)$$

$$= \lim_{\delta\to 0^+} 1-\frac{1}{\delta}$$

$$= -\infty$$

Similarmente $D_-f(0) = -\infty$

Teorema.

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Entonces f es diferenciable c.t.p. en $[a,b]$ (f creciente) y la derivada f' definida c.t.p. en $[a,b]$ med. no neg. y vale la desigualdad:

$$\int_a^b f'(x)\,dx \le f(b)-f(a)$$

Dem.

Hay que probar que para casi toda $x\in[a,b]$ existe el límite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \dots (1)$$

Sean

$$Z = \{ x \in [a,b] \mid D_- f(x) < D^+ f(x) \}$$

$$Y = \{ x \in [a,b] \mid D^- f(x) > D_+ f(x) \}$$

$W = Z \cup Y \cup \{a,b\}$. Si $x \notin W$ si tiene que:

$$0 \leq D_+ f(x) \leq D^+ f(x) \leq D_- f(x) \leq D^- f(x) \leq D_+ f(x) \leq \infty$$

i.e. existe el límite (1) en $[0, \infty]$. Basta por tanto probar que W es desp. Se afirma que Z es desp.

En efecto, $\forall$ $c,d \in \mathbb{Q}$ m $c<d$, se define:

$$Z_{c,d} = \{ x \in [a,b] \mid D_- f(x) < c < d < D^+ f(x) \}$$

es claro que:

$$Z = \bigcup_{\substack{c,d \in \mathbb{Q} \\ c<d}} Z_{c,d}$$

luego basta probar que cada $Z_{c,d}$ es despreciable. Sea

$$\alpha = m^*(Z_{c,d})$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\alpha < \infty$ pues $Z_{c,d} \subseteq [a,b]$, $\exists$ $G \subseteq \mathbb{R}$ abierto m $Z_{c,d} \subseteq G$, $G \subseteq]a,b[$.

y

$$m(G) < \alpha + \varepsilon \quad \ldots \quad (2)$$

Para cada $x \in Z_{c,d}$,

$$D_- f(x) = \sup_{\delta > 0} \left(\inf_{0<h<\delta} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} \right) < c$$

$$\Rightarrow \forall\, \delta > 0 \text{ m } (x-\delta, x] \subseteq G \text{ se tiene que } \inf_{0<h<\delta} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} < c$$

luego, $\exists$ $0 < h_\delta < \delta$ m

$$\frac{f(x) - f(x-h_\delta)}{h_\delta} < c$$

$$\Rightarrow f(x) - f(x-h_\delta) < c h_\delta$$

La familia de intervalos $\mathcal{I}$ formada por $[x-h_\delta, x]$, $x \in Z_{c,d}$, forman una cubierta de Vitali.

Por el lema de Vitali, alguna subfamilia $I_1, \ldots, I_n$ de intervalos disjuntos en $\mathcal{I}$ satisface lo sig.

$$m^*\left(Z_{c,d} \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n} I_k \right)\right) < \varepsilon$$

Si $A = Z_{c,d} \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} I_k\right)$, ent.

$$m^*(A) > \alpha - \varepsilon$$

En efecto,

$$\alpha = m^*(Z_{c,d}) \leq m^*\left(Z_{c,d} \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n} I_k\right)\right) + m^*\left(Z_{c,d} \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} I_k\right)\right)$$
$$< \varepsilon + m^*(A)$$

$$\Rightarrow m^*(A) > \alpha - \varepsilon$$

Además, si $I_i = [x_i - h_i, x_i]$, $i = 1, \dots, n$ ent.

$$f(x_i) - f(x_i - h_i) < h_i c$$
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f(x_i) - f(x_i - h_i) < \sum_{i=1}^{n} c h_i = c \sum_{i=1}^{n} L(I_i) = c\, m\left(\bigcup_{i=1}^{n} I_i\right) \leq c\, m(G) < c(\alpha + \varepsilon)$$
$$\therefore \sum_{i=1}^{n} f(x_i) - f(x_i - h_i) < c(\alpha + \varepsilon) \quad \dots (3)$$

Sea $y \in A$ arb. Ent. $y \in \mathring{I}_i$ para algún $i \in [\![1, n]\!]$ y se cumple

$$D^+ f(y) = \inf_{\delta > 0}\left(\sup_{0 < h < \delta} \frac{f(y+h) - f(y)}{h}\right) > d$$

luego $\forall\, \delta > 0 \ni [y, y+\delta] \subseteq I_i$,

$$\sup_{0 < h < \delta} \frac{f(y+h) - f(y)}{h} > d, \text{ luego } \exists\ 0 < r_\delta < \delta \ni$$
$$\frac{f(y + r_\delta) - f(y)}{r_\delta} > d$$
$$\Rightarrow f(y + r_\delta) - f(y) > d r_\delta$$

La familia $\mathcal{J}$ de intervalos $[y, y + r_\delta]$, con $y \in A$ constituyen una cubierta de Vitali de A con la propiedad de que cada uno de ellos está contenido en algún I_i, $i = 1, \dots, n$. Por el lema de Vitali, alguna subfamilia finita $J_1, \dots, J_m$ de int. disjuntos en $\mathcal{J}$ cumple que

$$m^*\left(A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{m} J_i\right)\right) < \varepsilon$$

Sea $B = \bigcup_{i=1}^{m} J_i$. Ent.

$$m^*(B) > \alpha - 2\varepsilon$$

En efecto:

$$\alpha - \varepsilon < m^*(A) \leq m^*\left(A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{m} J_i\right)\right) + m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} J_j\right)\right)$$

$$< \varepsilon + m^*(B)$$

$$\Rightarrow m^*(B) > \alpha - 2\varepsilon \quad \ldots (4)$$

Además, si $J_j = (y_j, y_j + r_j]$, $j = 1, \ldots, m$, ent.

$$f(y_j + r_j) - f(y_j) > d r_j$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{m} f(y_j + r_j) - f(y_j) > \sum_{j=1}^{m} d r_j = d\, m\left(\bigcup_{j=1}^{m} J_j\right) = d m(B)$$

$$> d(\alpha - 2\varepsilon)$$

Pero como cada J_j está contenido en un único I_i, al sumar sobre los índices K m $J_k \subseteq I_i = (x_i - h_i, x_i]$ y usando el hecho de que f es creciente, se tiene que:

$$\sum_{K \mid J_k \subseteq I_i} [f(y_k + r_k) - f(r_K)] \leq f(x_i) - f(x_i - h_i)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f(x_i - h_i) - f(x_i) \geq \sum_{j=1}^{m} f(y_j + r_j) - f(y_j)$$

$$> d(\alpha - 2\varepsilon)$$

$$\Rightarrow c(\alpha + \varepsilon) > \sum_{i=1}^{n} f(x_i) - f(x_i - h_i) > d(\alpha - 2\varepsilon)$$

$$\therefore c(\alpha + \varepsilon) < d(\alpha - 2\varepsilon), \ \forall \ \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow d\alpha \leq c\alpha$$

pero $c < d$ y $\alpha \geq 0$, ent. $m^*(Z_{c,d}) = \alpha = 0$. $\therefore m^*(Z) = 0$. Similarmente $m^*(Y) = 0$ y así $m^*(V) = 0$.

Ent. la función

$$g(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \ldots (***)$$

está definida c.t.p. en $[a,b]$ con val. no neg. en $\overline{\mathbb{R}}$. Para evitar problemas de indeterminación, se amplía la def. de f m $f(x) = f(b)$, $\forall \ x > b$. f así ampliada sigue siendo creciente. Se afirma que g es medible (no neg.) como existe el límite, dicho límite se puede calcular por medio de una suc. punt.

$$g_v(x) = v\left(f\left(x + \tfrac{1}{v}\right) - f(x)\right), \ \forall \ v \in \mathbb{N}$$

$\forall \ x \in [a,b]$. Por el T.C.V. $f(x + \frac{1}{v})$ es med. ($\phi: x \mapsto x + \frac{1}{v}$ es C^1 ;\,s.o.). Así, g_v es med.

y por tanto g es límite c.t.p. de med. $\Rightarrow$ g med. Se afirma que:

$$\int_a^b g \leq f(b)-f(a).$$

Como $\{g_v\}_{v=1}^{\infty}$ es una suc. de med. no neg. que conv. c.t.p. a g en $[a,b]$. Por el lema de Fatou:

$$\begin{aligned}
\int_a^b g &\leq \liminf_{v\to\infty} \int_a^b g_v \\
&= \liminf_{v\to\infty} \int_a^b \left(\frac{f(x+\frac{1}{v})-f(x)}{v}\right)dx \\
&= \liminf_{v\to\infty} v\int_a^b f(x+\tfrac{1}{v})dx - v\int_a^b f(x)dx \\
&= \liminf_{v\to\infty} v\int_{a+\frac{1}{v}}^{b+\frac{1}{v}} f(x) - v\int_a^b f(x)dx \\
&= \liminf_{v\to\infty} v\left[\int_b^{b+\frac{1}{v}} f(x)dx - \int_a^{a+\frac{1}{v}} f(x)dx\right] \\
&\leq \liminf_{v\to\infty} v\left[\int_b^{b+\frac{1}{v}} f(b)dx - \int_a^{a+\frac{1}{v}} f(a)dx\right] \\
&= \liminf_{v\to\infty} v\,(b+\tfrac{1}{v}-b)f(b) - (a+\tfrac{1}{v}-a)f(a) \\
&= f(b)-f(a)
\end{aligned}$$

En part. g es int. en $[a,b]$ (g med. no neg.) luego g es finita c.t.p. en $[a,b]$, es decir:

$$g(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} < \infty$$

c.t.p. en $[a,b]$, por tanto f es dif. c.t.p. en $[a,b]$ y

$$f' = g \text{ c.t.p.}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f'(x)dx \leq f(b)-f(a).$$

$\square$

Func. de Var. Acot.

Def. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{K}$ $(a<b)$. Se define $\mathcal{D}([a,b])$ como el conjunto de todas las subdivisiones

$$\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

de $[a,b]$. Para cada $\Delta \in \mathcal{D}([a,b])$,

$$S_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

Se dice que f es de variación acotada si $\{S_\Delta(f) \mid \Delta \in \mathcal{P}([a,b])\}$ es acotado. En este caso, la variación de f en $[a,b]$ se define como:

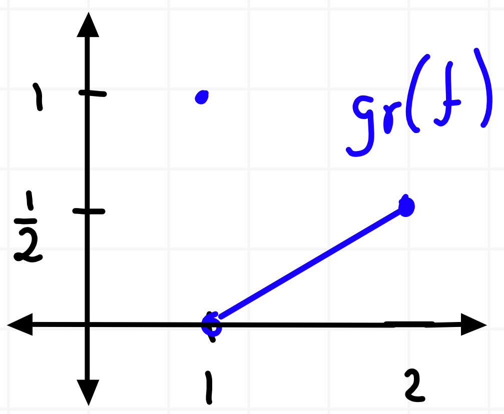
$$V_f([a,b]) = \sup\{S_\Delta(f) \mid \Delta \in \mathcal{P}([a,b])\}$$

El conjunto de func. de var. acotada en $[a,b]$ se denota por $V([a,b],\mathbb{R})$.

Obs) Toda función $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ monótona o cte. es de var. acotada.

EJEMPLOS.

1) Considere f como en la gráfica sig.



$$V_f([a,b]) = \frac{3}{2}$$

En efecto, sea $\Delta = \{1 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 2\}$ una part. de $[a,b]$.

Veamos que:

$$S_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$
$$= |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \dots + |f(x_n) - f(x_{n-1})|$$

como en $]1,2]$ es creciente, ent.

$$= 1 - f(x_1) + f(2) - f(x_1)$$
$$= \frac{3}{2} - 2f(x_1)$$

donde $x_1 \in]1,2]$. Por tanto:

$$V_f([1,2]) = \sup\{S_\Delta(f) \mid \Delta \in \mathcal{P}([a,b])\}$$
$$= \sup\left\{\frac{3}{2} - 2f(x_1) \mid \Delta \in \mathcal{P}([a,b])\right\}$$
$$= \frac{3}{2} + \inf\{2f(x_1) \mid x_1 \in]1,2]\}$$
$$= \frac{3}{2}$$

Si $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ es acotada y monótona por trozos, i.e $\exists\, a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \ni f|_{]x_{k-1},}$

x_k [es monótona, $K=1,\dots,n$, ent. f es de var. acotada (por el ejemplo ant.).

Obs) Si $f:[a,b]\to\mathbb{K}$ es de var. acotada, ent. f es acotada. En efecto, sea $\Delta=\{a<x<b\}$.

Ent.

$$S_\Delta(f)=|f(a)-f(x)|+|f(x)-f(b)|\leq V_f([a,b])$$

$$\Rightarrow |f(x)|\leq \frac{1}{2}\left(V_f([a,b])+|f(a)|+|f(b)|\right),\ \forall\ x\in\,]a,b[.$$

Proposición (Prop. de la fam. de func. de var. acotada).

i) $f\in\mathcal{V}([a,b],\mathbb{C})\iff \operatorname{Re}f,\ \operatorname{Im}f\in\mathcal{V}([a,b],\mathbb{R})$.

ii) $\mathcal{V}([a,b],\mathbb{K})$ es un esp. vect. sobre $\mathbb{K}$. De hecho, si $\alpha\in\mathbb{K}$ y $f,g\in\mathcal{V}([a,b],\mathbb{K})$, ent.

$$V_{\alpha f}([a,b])=|\alpha|V_f([a,b])$$

$$V_{f+g}([a,b])\leq V_f([a,b])+V_g([a,b])$$

iii) Si $f,g\in\mathcal{V}([a,b])$, ent. $fg\in\mathcal{V}([a,b])$ y además:

$$V_{fg}([a,b])\leq A V_f([a,b])+B V_g([a,b])$$

donde $A=\sup\{|g(x)|\mid a\leq x\leq b\}$ y $B=\sup\{|f(x)|\mid a\leq x\leq b\}$.

Dem.

De (i): Sea $\Delta=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$. Ent.

$$S_\Delta(f)=\sum_{K=1}^{n}|f(x_K)-f(x_{K-1})|$$

$$=\sum_{K=1}^{n}\left[(\operatorname{Re}f(x_K)-\operatorname{Re}f(x_{K-1}))^2+(\operatorname{Im}f(x_K)-\operatorname{Im}f(x_{K-1}))^2\right]^{1/2}$$

$$\leq\left(\sum_{K=1}^{n}|\operatorname{Re}f(x_K)-\operatorname{Re}f(x_{K-1})|+\sum_{K=1}^{n}|\operatorname{Im}(f(x_K))-\operatorname{Im}f(x_{K-1})|\right)\cdot\sqrt{2}$$

luego

$$S_\Delta(\operatorname{Re}f),\ S_\Delta(\operatorname{Im}f)\leq S_\Delta(f)\leq\sqrt{2}\left(S_\Delta(\operatorname{Re}f)+S_\Delta(\operatorname{Im}f)\right)$$

así, $f\in\mathcal{V}([a,b],\mathbb{C})\iff\operatorname{Re}f,\ \operatorname{Im}f\in\mathcal{V}([a,b],\mathbb{R})$.

De (iii): Sea $\Delta\in\mathcal{P}([a,b])$, ent.

$$V_{fg}([a,b]) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})|$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n} |f(x_k)|\cdot|g(x_k)-g(x_{k-1})| + \sum_{k=1}^{n} |g(x_{k-1})|\cdot|f(x_k)-f(x_{k-1})|$$
$$\leq A\, V_f([a,b]) + B\, V_g([a,b]).$$

$\square$

EJEMPLO.

1) Una func. puede ser de var. acotada en $[a,b]$ sin ser continua en $[a,b]$ y viceversa. Por ejemplo:

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\chi_{[\frac{1}{2},1]}(x)$ es creciente pero no es cont. en $[0,1]$. Y

$$g(x)=\begin{cases} x\,\text{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x\neq 0.\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

Claramente f es continua en $[0,1]$, pero no es de variación acotada en $[0,1]$. Se tiene lo sig.

$$g\left(\frac{1}{n\pi}\right)=0,\ \forall\ n\in\mathbb{Z} \quad y \quad g\left(\frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi}\right)=\frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi},\ \forall\ n\in\mathbb{Z}$$

Se considera la subdivisión $\Delta_m\in\mathcal{P}([0,1])$: $(\forall\ m\in\mathbb{N})$

$$\Delta_m=\left\{0=x_0<\frac{1}{(m+\frac{1}{2})\pi}=x_1<\frac{1}{(m\pi)}=x_2<\dots<\frac{1}{(1+\frac{1}{2})\pi}=x_{2m}<\frac{1}{\pi}=x_{2m+1}<x_{2m+2}=1\right\}$$

de $[0,1]$. Se tiene:

$$S_{\Delta_m}(g)\geq\sum_{k=1}^{m}\left|g\left(\frac{1}{k\pi}\right)-g\left(\frac{1}{(k+\frac{1}{2})\pi}\right)\right|$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(k+\frac{1}{2})\pi},\ \forall\ m\in\mathbb{N}.$$

$\therefore \{S_\Delta(g)\mid\Delta\in\mathcal{P}([0,1])\}$ no es acotado, luego g no es de var. acotada.

Proposición.

Si $f:[a,b]\to\mathbb{K}$ es de clase C^1 en $[a,b]$, ent. f es de var. acotada en $[a,b]$.

Dem.

Sea $\Delta\in\mathcal{P}([a,b])$, ent. $(\Delta=\{x_0=a<x_1<\dots<x_n=b\})$:

$$\Rightarrow |f(x_k)-f(x_{k-1})|\leq M\,|x_k-x_{k-1}|$$

donde $M = \sup_{a \leq t \leq b} |f'(t)|$, por el T. de Inc. finitos. Ent.

$$S_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$\leq M \cdot \sum_{k=1}^{n} |x_k - x_{k-1}|$$

$$= M(b-a) < \infty$$

$\forall \Delta \in \mathcal{D}([a,b])$, luego f es de var. acotada.

$\square$

Proposición.

Si $f:[a,b] \to \mathbb{K}$,

i) Si $f \in V([a,b])$ y $a \leq x < y \leq b$ son arb. ent. $f \in V([x,y])$ y:

$$V_f([a,b]) \geq V_f([x,y])$$

ii) Si $f \in V([a,c]) \cap V([c,b])$ donde $a<c<b$, ent. $f \in V([a,b])$ y

$$V_f([a,b]) = V_f([a,c]) + V_f([c,d])$$

Más generalmente, si $f \in V([a_{k-1}, a_k])$, $k \in [\![1,r]\!]$ donde $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_r = b$, ent. $f \in V([a,b])$ y:

$$V_f([a,b]) = \sum_{k=1}^{r} V_f([a_{k-1}, a_k])$$

Dem.

De (i): Es inmediata.

De (ii): Para la primera parte, suponga $f \in \mathcal{V}([a,c]) \cap \mathcal{V}([c,d])$. Sea

$$\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots x_{r-1} < x_{r+1} < \dots < x_{r+l} = b\} \in \mathcal{D}([a,b])$$

donde $x_{r-1} \leq c \leq x_{r+1}$. Defina $x_r = c$, ent.

$$S_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{r-1} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \sum_{k=r+2}^{r+l} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^{r+l} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$= S_{\Delta_1}(f) + S_{\Delta_2}(f)$$

$$\leq V_f([a,c]) + V_f([c,b]) < \infty, \quad \forall \Delta \in \mathcal{D}([a,b]).$$

luego $f \in \mathcal{V}([a,b])$. Y más aún:

$$V_f([a,b]) \leq V_f([a,c]) + V_f([c,b]) \quad \dots (1)$$

Sean ahora $\Delta_1 = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_r = c\}$ y $\Delta_2 = \{y_0 = c < y_1 < \dots < y_l = b\}$, ent. tomando

$$\Delta = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_r = c = y_0 < y_1 < \dots < y_l = b\}$$

se tiene que $\Delta \in \mathcal{D}([a,b])$ y:

$$S_{\Delta_1}(f) + S_{\Delta_2}(f) = \sum_{k=1}^{r} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \sum_{i=1}^{l} |f(y_i) - f(y_{i-1})|$$

$$= \sum_{k=1}^{r+l} |f(z_k) - f(z_{k-1})|$$

definiendo $z_k = x_k, \forall k \in [\![0, r]\!]$ y $z_{r+k} = y_k, \forall k \in [\![0, l]\!]$. Así:

$$= S_\Delta(f)$$

$$\leq V_f([a,b]) \quad \dots (2).$$

tomando $\Delta_1 \in \mathcal{D}([a,c])$, $\Delta_2 \in \mathcal{D}([c,b])$ arb. luego:

$$\Rightarrow V_f([a,c]) + V_f([c,b]) \leq V_f([a,b])$$

Por (1) y (2):

$$V_f([a,c]) + V_f([c,b]) = V_f([a,b]).$$

Para la otra parte, basta usar inducción sobre r.

$\square$

Def. Si $f \in V([a,b],\mathbb{K})$, ent. la función variación de f en $[a,b]$ se define como $V_f : [a,b] \to \mathbb{R}$ como:

$$V_f(x) = V_f([a,x]), \ \forall x \in [a,b]$$

Donde V_f es no neg. creciente y acotada, $V_f(b) = V_f([a,b])$. Además:

$$V_f([x,y]) = V_f(y) - V_f(x)$$

Lema.

Si $f \in V([a,b],\mathbb{K})$, ent.

$$|f(x) - f(y)| \leq V_f(x) - V_f(y), \ \forall \ x,y \in [a,b], \ x<y.$$

Dem.

Es inmediata.

$\square$

Proposición.

Sea $f \in V([a,b],\mathbb{K})$. Ent. existen los límites laterales $f(x^+), \forall x \in [a,b[$ y $f(x^-), \forall x \in]a,b]$.

Además, f es cont. por la derecha en $x \in [a,b[$ (resp. $x \in]a,b]$) si y sólo si V_f es cont. por la der. en x (resp. por la izq. en x).

Dem.

i) Se afirma que existe $f(x^+), \forall x \in [a,b[$. Sea $x \in [a,b[$. Como V_f es creciente, ent. existe $V_f(t^+)$, $\forall t \in [a,b[$. Se cumple ent. la cond. de Cauchy para la exist. de este límite, i.e $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ $\ni$ si $x + \delta < b$, ent.

$$t_1, t_2 \in]x, x+\delta[\ \text{y} \ t_1 \leq t_2 \Rightarrow 0 \leq V_f(t_2) - V_f(t_1) \leq \varepsilon$$

Por el lema ant.

$$|f(t_2) - f(t_1)| \leq \varepsilon, \ \text{si} \ t_1, t_2 \in]x, x+\delta[$$

Ent. se cumple la cond. de Cauchy para la existencia de $f(x^+)$.

ii) Se afirma que si $V_f(x^+) = V_f(x)$, ent. $f(x^+) = f(x)$. En efecto $\forall \varepsilon>0 \; \exists \delta \; m$ si $x+\delta<b$ y $t \in]x, x+\delta[$, ent. $|f(t)-f(x)| \leq V_f(t) - V_f(x) \leq \varepsilon$.

Luego $f(x^+) = f(x)$.

iii) Se afirma que si $f(x^+) = f(x)$ ent. $V_f(x^+) = V_f(x)$. Sea $\varepsilon>0$, ent. $\exists \delta>0 \; m$ si $x+\delta<b$, ent. $t \in]x, x+\delta[\Rightarrow |f(x)-f(t)| < \varepsilon$. También, $\exists \Delta = \{x_0 = x < x_1 < \dots < x_m = x+\delta\} \in D([x, x+\delta]) \; m$

$$\sum_{k=1}^{m} |f(x_k)-f(x_{k-1})| > V_f([x, x+\delta]) - \varepsilon$$
$$= V_f(x+\delta) - V_f(x) - \varepsilon$$

Ent.

$$\varepsilon > |f(x_1)-f(x)| \geq -\sum_{k=2}^{m} |f(x_k)-f(x_{k-1})| + V_f(x+\delta) - V_f(x) - \varepsilon$$
$$\geq -V_f([x_1, x+\delta]) + V_f(x+\delta) - V_f(x) - \varepsilon$$
$$= -V_f(x+\delta) + V_f(x_1) + V_f(x+\delta) - V_f(x) + \varepsilon$$
$$\Rightarrow V_f(x_1) - V_f(x) < 2\varepsilon$$

Pero V_f es creciente, luego

$$0 \leq V_f(t) - V_f(x) \leq 2\varepsilon, \; \forall t \in]x, x_1[$$
$$\therefore \; V_f(x^+) = V_f(x)$$

$\square$

Corolario.

Si $f \in V([a,b], \mathbb{K})$, ent. f es cont. en $x_0 \in [a,b] \Leftrightarrow V_f$ es cont. en x_0.

Teorema.

Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$. Ent. $f \in V([a,b], \mathbb{R}) \Leftrightarrow f$ es la dif. de func. monótonas.

Dem.

$\Leftarrow$) Es inmediata.

$\Rightarrow$) Si $f \in V([a,b],\mathbb{R})$. Define

$$g = \frac{1}{2}(V_f + f) \quad y \quad h = \frac{1}{2}(V_f - f)$$

Ent. $g+h = V_f$ y $g-h = f$. Basta pues probar que g y h son crecientes. Dados $x,y \in [a,b]$ con $x \leq y$:

$$g(y)-g(x) = \frac{1}{2}\left[V_f(y)+f(y)-V_f(x)-f(x)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[(V_f(y)-V_f(x)) + (f(y)-f(x))\right], \text{ y:}$$
$$h(y)-h(x) = \frac{1}{2}\left[(V_f(y)-V_f(x)) - (f(y)-f(x))\right]$$

Pero $|f(y)-f(x)| \leq V_f(y)-V_f(x)$, $\forall\, x \leq y$ en $[a,b]$. Ent. $g(y) \geq g(x)$ y $h(y) \geq h(x)$. $\square$

Corolario.

Si $f \in V([a,b],\mathbb{K})$, ent. f es dif. c.t.p. en $[a,b]$, y la función f' definida c.t.p. es medible en $[a,b]$.

Corolario.

Si $f \in V([a,b],\mathbb{K})$, ent el conjunto de puntos de discontinuidad de f es a lo sumo numerable.

PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL.

Proposición.

Sea $f:[a,b] \to \mathbb{K}$ integrable. Ent. la integral indefinida $F:[a,b] \to \mathbb{K}$ de f en $[a,b]$, dada por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad \forall\, x \in [a,b],$$

ent. F es continua y de variación acotada.

Dem.

Ya se sabe que F es continua en $[a,b]$. Sea $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\} \in \mathcal{D}([a,b])$.

ent.

$$S_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\,dt \right|$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f|$$
$$= \int_a^b |f| < \infty$$
$$\therefore V_F([a,b]) \leq \int_a^b |f|$$

$\square$

Lema.

Si $f:[a,b] \to \mathbb{K}$ es integrable en $[a,b]$ y

$$\int_a^x f(t)\,dt = 0, \ \forall x \in [a,b]$$

ent. $f = 0$ c.t.p. en $[a,b]$.

Dem.

Se puede suponer que $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, considerando las partes real e imaginaria de f. La prueba es por negación, suponga que $f \neq 0$ c.t.p. en $[a,b]$, i.e $\exists U \subseteq [a,b] \ni m(U) > 0$ y

$$f(x) \neq 0, \ \forall x \in U$$

Hay que hallar al menos un punto $x \in [a,b] \ni \int_a^x f = 0$. Se tiene:

$$\{x \in [a,b] \mid f(x) \neq 0\} = \{x \in [a,b] \mid f(x) > 0\} \cup \{x \in [a,b] \mid f(x) < 0\}$$

ent. al menos uno de los dos conjuntos no es despreciable. Por ejemplo el primero. Sea

$$E = \{x \in [a,b] \mid f(x) > 0\}$$

como $m(E) > 0$, por la regularidad de la medida $\exists F \subseteq E$ cerrado $\ni m(F) > 0$. Sea

$$G = \,]a,b[\, \setminus F$$

$G \subseteq [a,b]$ es abierto y:

$$\int_a^b f \neq 0$$

en cuyo caso estaría probado, o

$$\int_a^b f(t)dt = 0$$
$$= \int_F f + \int_G f \quad \ldots (1)$$

Se afirma que $\int_F f \neq 0$. En efecto:

$$F = \bigcup_{v=1}^{\infty} F_v$$

donde $F_v = \{ x \in F \mid f(x) \geq \frac{1}{v} \}, \forall v \in \mathbb{N} \}$. Como $m(F) > 0$ y $\{F_v\}_{v\in\mathbb{N}}$ es creciente, ent. $\exists$ $v \in \mathbb{N}$ $\ni$ $m(F_v) > 0$ $\left(\lim_{v\to\infty} m(F_v) = m(F) \right)$. Ent.

$$\int_F f \geq \int_{F_v} f \geq \frac{1}{v} \int_{F_v} dx = \frac{m(F_v)}{v} > 0$$

Luego por (1) $\int_G f \neq 0$. El abierto G de $\mathbb{R}$ puede ser escrito como unión a lo sumo numerable de abiertos disjuntos en $\mathbb{R}$ $\{]a_k, b_k[\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Luego

$$\int_G f = \int_{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}]a_k,b_k[} f = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_k}^{b_k} f$$

ent. $\exists$ $k \in \mathbb{N}$ $\ni$ $\int_{a_k}^{b_k} f \neq 0$ y

$$\int_{a_k}^{b_k} f = \int_a^{b_k} f - \int_a^{a_k} f \neq 0$$

así, $\int_a^{b_k} f \neq 0$ o $\int_a^{a_k} f \neq 0$.

$\square$

Proposición.

Si $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ es medible, acotada en $[a,b]$, ent. la int. indef. $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ de f en $[a,b]$ dada por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + F(a), \forall x \in [a,b]$$

es cont. diferenciable c.t.p. y

$$F'(x) = f(x), \text{ para casi todo } x \in [a,b].$$

Dem.

Como f es int. en $[a,b]$, ya se sabe que F es continua y de var. acot. en part. continua y diferenciable c.t.p. en $[a,b]$. Resta probar la fórmula.

Siendo F de var. acotada, es la diferencia de dos func. crecientes. Luego F' definida c.t.p. es medible. Resta pues probar que $F' = f$ c.t.p. en $[a,b]$. Por el lema, basta probar que:

$$\int_a^y F' - f = 0, \ \forall y \in [a,b].$$

Para evitar problemas de definición se supondrá que $f(x) = 0$, $\forall x \notin [a,b]$. Luego, $F(x) = F(b)$, $\forall x \geq b$. $\forall v \in \mathbb{N}$, sea $f_v : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada como:

$$f_v(x) = \frac{F(x+\frac{1}{v}) - F(x)}{\frac{1}{v}}, \ \forall x \in [a,b].$$

equivalentemente:

$$f_v(x) = v \int_x^{x+\frac{1}{v}} f(t)\,dt, \ \forall x \in [a,b].$$

Por hip. f es acotada, sea $M > 0 \ni |f| \leq M$, $\forall x \in [a,b]$. Se tiene:

$$\lim_{v \to \infty} f_v = F' \text{ c.t.p. en } [a,b]$$

y

$$|f_v(x)| \leq v \left|\int_x^{x+\frac{1}{v}} f(t)\,dt\right| \leq v \int_x^{x+\frac{1}{v}} M \leq M, \forall v \in \mathbb{N} \text{ y } \forall x \in [a,b]$$

Por el t. de conv. acotada:

$$\int_a^y F' = \lim_{v \to \infty} \int_a^y f_v(t)\,dt, \ \forall y \in [a,b] \ \dots (1)$$

Se calculará (1) de otra forma:

$$\begin{aligned}
\int_a^y f_v(t)\,dt &= v \int_a^y \left[F(t+\tfrac{1}{v}) - F(t)\right] dt \\
&= v \int_a^y F(t+\tfrac{1}{v})\,dt - v \int_a^y F(t)\,dt \\
&= v \left[\int_{a+\frac{1}{v}}^{y+\frac{1}{v}} F(t)\,dt - \int_a^y F(t)\,dt \right] \\
&= v \left[\int_y^{y+\frac{1}{v}} F(t)\,dt - \int_a^{a+\frac{1}{v}} F(t)\,dt \right] \\
&= v \int_y^{y+\frac{1}{v}} F(t)\,dt - v \int_a^{a+\frac{1}{v}} F(t)\,dt
\end{aligned}$$

Defina $G(z) = \int_y^z F(t)\,dt$ y $H(z) = \int_a^z F(t)\,dt$. Como F es cont. en $[a,b]$ se puede aplicar el t. Fundamental clásico, resulta:

$$\lim_{v\to\infty} v\int_y^{y+\frac{1}{v}} F(x)\,dx = \lim_{v\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{v}}\left[\int_y^{y+\frac{1}{v}} F(x)\,dx - \int_y^{y} F(x)\,dx\right]$$

$$= \lim_{v\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{v}}\left[G\left(y+\tfrac{1}{v}\right) - G(y)\right]$$

$$= G'(y)$$

$$= F(y)$$

y

$$\lim_{v\to\infty} v\int_a^{a+\frac{1}{v}} F(x)\,dx = \dots$$

$$= H'(a)$$

$$= F(a)$$

$$\therefore \lim_{v\to\infty} \int_a^y f_v(t)\,dt = F(y) - F(a)$$

$$\Rightarrow \int_a^y F'(x)\,dx = \int_a^y f(t)\,dt - \int_a^a f(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \int_a^y [F'(x) - f(x)]\,dx = 0$$

como el $y \in (a,b]$ fue arb. ent. lo ant. se cumple $\forall\, y \in [a,b]$. Luego:

$$F'(x) = f(x),\ \text{c.t.p. en } [a,b]$$

$\square$

Primer teorema fundamental del Cálculo.

Si $f:[a,b] \to \mathbb{K}$ es integrable, ent. la integral indefinida $F:[a,b] \to \mathbb{K}$ dada por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + F(a),\ \forall\, x \in [a,b] \quad \dots (1)$$

es continua, diferenciable en todo punto y:

$$F' = f,\ \text{c.t.p. en } (a,b)$$

Dem.

Considerando separadamente las partes real e imaginaria de f, se puede suponer que f es real. Suponiendo que el teorema ya estuviera demostrado para func. int. no neg.

Se tendría que la derivada

$$x \mapsto \int_a^x f^+(x)\,dx$$

Sería $f^{+'}(x)$ c.d.p. en $[a,b]$, y lo mismo con f^-. Siendo:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + F(a) = \int_a^x f^+(t)dt - \int_a^x f^-(t)dt + F(a)$$

F sería dif. c.d.p. en $[a,b]$ y:

$$F'(x) = f^+(x) - f^-(x) = f(x) \text{ c.d.p. en } [a,b]$$

Basta probar el resultado ent. suponiendo $f(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$. Por (1), F es creciente en $[a,b]$. Por un resultado ant. F es dif. c.d.p. en $[a,b]$ y su derivada F' es medible y no neg. en $[a,b]$.

Se afirma que $F'(x) \geq f(x)$ c.d.p. en $[a,b]$. Considere la suc. de truncamientos de f definido como:

$$f_v(x) = \min\{f(x), v\}, \forall x \in [a,b], v \in \mathbb{N}.$$

la suc. $\{f_v\}_{v=1}^{\infty}$ de fun. int. es creciente y cumple que

$$f_v(x) \leq f(x), \forall x \in [a,b] \quad ; \quad \lim_{v \to \infty} f_v(x) = f(x), \forall x \in [a,b]$$

Reescriba

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f - f_v + \int_a^x f_v, \forall x \in [a,b].$$

Como $f - f_v$ es int. no neg. en $[a,b]$, ent. $x \mapsto \int_a^x f - f_v$ es creciente en $[a,b]$, luego dif. c.d.p. en $[a,b]$ con derivada no neg. (donde exista). Por la prop. ant. $x \mapsto \int_a^x f_v$ es diferenciable y su derivada es f_v c.d.p. en $[a,b]$ y $\forall v \in \mathbb{N}$. Por tanto F es dif. c.d.p. y:

$$F'(x) \geq f_v(x), \text{ para casi toda } x \in [a,b].$$

Se afirma que $\int_a^b F' - f = 0$. Como $\lim_{v \to \infty} f_v(x) = f(x), \forall x \in [a,b]$, nec. $F'(x) \geq f(x)$, c.d.p. en $[a,b]$. Por lo ant.

$$\int_a^b F'(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx := F(b) - F(a)$$

Como F es creciente, un resultado ant. sobre fun. monótonas implica que

$$\int_a^b F'(x)\,dx \leq F(b)-F(a)$$

$$\therefore \int_a^b (F'(x)-f(x))\,dx = 0$$

Como $F'(x)-f(x) \geq 0$ c.t.p. nec. $F'(x)=f(x)$ c.t.p. en $[a,b]$.

$\square$

Funciones Absolutamente Continuas.

Def. Sea $F:[a,b]\to \mathbb{K}$. Se dice que F es absolutamente continua en $[a,b]$ si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ m si $\{]x_k, x_k'[\}_{k=1}^m$ es una colección finita de intervalos abiertos disjuntos contenidos en $[a,b]$ que satisfacen

$$\sum_{k=1}^m (x_k'-x_k) \leq \delta$$

ent.

$$\sum_{k=1}^m |F(x_k')-F(x_k)| \leq \varepsilon$$

Ejemplo.

1) Sea $F:[0,2]\to\mathbb{R}$ la func.

$$F(x) := \begin{cases} x^2 & \text{si } 0\leq x\leq 1. \\ 1 & \text{si } 1\leq x\leq 2. \end{cases}$$

Ent. F es abs. cont. en $[0,2]$. En efecto,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^m |F(x_k')-F(x_k)| &\leq \sum_{k=1}^m |(x_k')^2-(x_k)^2| \\ &= \sum_{k=1}^m |x_k'-x_k|\cdot|x_k'+x_k| \\ &\leq 4\sum_{k=1}^m (x_k'-x_k)\end{aligned}$$

Obs) En part. toda func. abs. continua es uniformemente continua, aunque en grl. la recíproca no es cierta.

Proposición.

i) Sea $F:[a,b]\to\mathbb{C}$. Ent. F es abs. cont. en $[a,b] \iff \mathrm{Re}F$ e $\mathrm{Im}F$ son abs. cont. en $[a,b]$.

ii) El conjunto de func. abs. cont. en $[a,b]$ es un esp. vect. sobre el campo $\mathbb{K}$ (que contiene a las ctes.).

Proposición.

Si $F:[a,b]\to\mathbb{K}$ es de clase C^1 en $[a,b]$, ent. F es abs. cont. en $[a,b]$.

Dem.

Sea $M=\max_{a\le t\le b}|F'(t)|<\infty$. Por el T. de Inc. Finitos:

$$|F(x_k')-F(x_k)|\le M|x_k'-x_k|,\ \forall k$$

$\square$

Proposición.

Si $F:[a,b]\to\mathbb{K}$ es abs. cont. ent. F es de variación acotada en $[a,b]$.

Dem.

Para $\varepsilon=1$ $\exists\ \delta>0$ que satisface la def. de cont. absoluta. Sea

$$\Delta=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}\in\mathcal{D}([a,b])$$

Sea $k\in\mathbb{N}$ m $\frac{b-a}{\delta}<k$. Añadiendo (si hace falta) los puntos siguientes: $a+\frac{j(b-a)}{k}$ $\forall j\in[\![1,k]\!]$ a la subdivisión Δ se obtiene otra subdivisión Δ' más fina que la anterior, con k subconjuntos de subintervalos, dónde los intervalos de la j-ésima subdivision son de la forma siguiente:

$$y_{j-1,0}=a+\frac{(j-1)(b-a)}{k}\le y_{j-1,1}\le\dots\le y_{j-1,m_{j-1}}\le y_{j-1,m_j}=y_{j,0}=a+\frac{j(b-a)}{k}$$

y cuya suma de longitudes satisface:

$$y_{j,0}-y_{j-1,0}=\frac{b-a}{k}<\delta$$

Por continuidad abs.

$$S_\Delta(f) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{K=1}^{m_j} |F(y_{j,K}) - F(y_{j,K-1})|$$
$$\leq \sum_{j=1}^{K} 1$$
$$= K$$

$\therefore F \in V([a,b], \mathbb{K})$.

$\square$

Corolario.

Si $F:[a,b] \to \mathbb{K}$ es abs. cont. en $[a,b]$, ent. F es dif. c.t.p. en $[a,b]$ y la función F', definida c.t.p., es medible.

Lema.

Sea $F:[a,b] \to \mathbb{K}$ abs. cont. en $[a,b]$. Si $F'(x)=0$ c.t.p. en $[a,b]$, ent. F es constante en $[a,b]$.

Dem.

Fije $t \in [a,b]$. Se probará que $F(t) = F(a)$. Por hip. $\exists\ Z \subseteq [a,t]$ desp. m si $A = [a,t] \setminus Z$, ent. $F'(x) = 0$, $\forall x \in A$, i.e

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = 0, \ \forall x \in A, \ \dots (1)$$

donde $m(A) = m([a,t]) = t-a$. Sea $\eta > 0$ arb. por (1), para cada $x \in A$ existe $\rho_x > 0$ m

$$0 < h < \rho_x \Rightarrow |F(x+h) - F(x)| \leq h\eta \ \dots (2)$$

La familia de intervalos $\mathcal{I} = \{[x, x+h] \mid 0 < h < \rho_x, x \in A\}$ es una cubierta de Vitali de A. Sea $\varepsilon > 0$ arb. $\exists\ \delta > 0$ que satisface la def. de cont. abs. en $[a,t]$. Se aplica el lema de Vitali con este $\delta > 0$ para obtener una familia finita

$$\{[x_K, y_K] \mid K \in [\![1,m]\!]\} \subseteq \mathcal{I}$$

de intervalos disjuntos en $\mathcal{I}$ m

$$m\left(A \setminus \bigcup_{k=1}^{m} [x_k, y_k]\right) \leq \delta$$

Reordenando (si hace falta), se puede suponer que $x_k < x_{k+1}$, $k=1,\dots,m-1$, donde a fortiori:

$$a = y_0 < x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \dots < x_m < y_m < x_{m+1} = t$$

Ent.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} |x_{k+1} - y_k| &= m\left(\bigcup_{k=1}^{m}]x_{k+1}, y_k[\right) \\ &\leq m\left([a,t] \setminus \bigcup_{k=1}^{m} [x_k, y_k]\right) \\ &= m\left(A \setminus \bigcup_{k=1}^{m} [x_k, y_k]\right) \\ &\leq \delta\end{aligned}$$

Por la cont. abs. de F en $[a,b]$:

$$\sum_{k=1}^{m} |F(x_{k+1}) - F(y_k)| \leq \varepsilon \quad \dots (3)$$

por otra parte:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} |F(y_k) - F(x_k)| &\leq \sum_{k=1}^{m} (y_k - x_k)\eta \\ &\leq \eta \cdot (t-a) \quad \dots (4)\end{aligned}$$

Se sigue de (3) y (4) que:

$$\begin{aligned}|F(t) - F(a)| &\leq \sum_{k=1}^{m} |F(x_{k+1}) - F(y_k)| + \sum_{k=1}^{m} |F(x_k) - F(y_k)| \\ &\leq \varepsilon + \eta(t-a)\end{aligned}$$

Siendo $\varepsilon > 0$ y $\eta > 0$ arbitrarios, se sigue que $F(t) = F(a)$.

$\square$

Proposición.

Si $f:[a,b] \to \mathbb{K}$ es integrable en $[a,b]$, ent. la integral indefinida $F:[a,b] \to \mathbb{K}$ dada por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad \forall x \in [a,b]$$

es abs. cont. en $[a,b]$.

Dem.

Sea $\varepsilon > 0$. Ya se demostró que $\exists\ \delta > 0$ m si $A \subseteq [a,b]$ es m

$$m(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f| \leq \varepsilon$$

Sean $\{[x_k, y_k] \mid k = 1, \dots, m\}$ intervalos disjuntos en $[a,b]$ m

$$\sum_{k=1}^{m} (y_k - x_k) \leq \delta$$

Sea $A = \bigcup_{k=1}^{m} [x_k, y_k] \subseteq [a,b]$ y $m(A) \leq \delta$. Se cumple:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} |F(y_k) - F(x_k)| &= \sum_{k=1}^{m} \left| \int_{x_k}^{y_k} f(t)\,dt \right| \\ &\leq \int_A |f(t)|\,dt \\ &\leq \varepsilon\end{aligned}$$

i.e. F es abs. cont. en $[a,b]$.

$\square$

EJEMPLOS.

1) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2}\,dt$ y $G(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$ son abs. continuas en todo intervalo compacto de $\mathbb{R}$, pues:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2}\,dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-t^2}\,dt + \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

Teorema (Segundo T. Fundamental).

Sea $F: [a,b] \to \mathbb{K}$ una función. Ent. F es abs. cont. en $[a,b] \iff$ existe F' c.t.p. en $[a,b]$, la función F' definida c.t.p. es int. en $[a,b]$ y se cumple:

$$\int_a^x F'(t)\,dt = F(x) - F(a),\ \forall\, x \in [a,b] \ \dots (1)$$

Dem.

$\Leftarrow$) Es inmediato de la Prop. ant.

$\Rightarrow$) F abs. cont. $\Rightarrow$ F de var. acotada $\Rightarrow F'$ está definida c.t.p. Falta probar F' int. y (1).

Notas.

1) Probar eso.