Tercer Examen Geometría Diferencial III

Cristo Daniel Alvarado

15 de febrero de 2024

Índice general

Capítulo 1

Examen

1.1. Ejercicio 1

Ejercicio 1.1.1 (Pullback de una forma diferencial)
Considere $U \subseteq]0, \infty[\times]0, \pi[\times]0, 2\pi[$ abierto en el espacio (ρ, ϕ, θ) de $\mathbb{R}^3$. Defina $F : U \to \mathbb{R}^3$ dada como

$$(x, y, z) = F(\rho, \phi, \theta) = (\rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi \sin\theta, \rho \cos\phi)$$

pruebe que $F^*(dx \wedge dy \wedge dz) = \rho^2 \sin\phi \, d\rho \wedge d\phi \wedge d\theta$.

Demostración:
Primeramente, veamos que

$$F^*(dx \wedge dy \wedge dz) = F^*dx \wedge F^*dy \wedge F^*dz$$

pues F es un mapeo C^∞ entre las variedades U y $\mathbb{R}^2$. Por la Proposición 18.11 se sigue la identidad de arriba. Pero, el producto wedge conmuta con la diferencial exterior, por lo cual

$$F^*dx = d(F^*x), \quad F^*dy = d(F^*y) \quad \text{y } F^*dz = d(F^*z) \tag{1.1}$$

siendo $x, y, z : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ las funciones coordenadas de $\mathbb{R}^3$. Con esto en mente, analicemos cada una de las diferenciales exteriores de (1.1).

(I) Notemos que $F^*x = x \circ F$, por lo cual

$$\begin{aligned} d(F^*x) &= d(x \circ F) \\ &= d(F_1) \end{aligned}$$

donde $F_1 : U \to \mathbb{R}$ es la función tal que $((\rho, \phi, \theta)) \mapsto x \circ F((\rho, \phi, \theta)) = \rho \sin\phi \cos\theta$, para todo $(\rho, \phi, \theta) \in U$. Por lo cual

$$\begin{aligned} d(F^*x) &= d(\rho \sin\phi \cos\theta) \\ &= \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho \sin\phi \cos\theta)d\rho + \frac{\partial}{\partial\phi}(\rho \sin\phi \cos\theta)d\phi + \frac{\partial}{\partial\theta}(\rho \sin\phi \cos\theta)d\theta \\ &= \sin\phi \cos\theta d\rho + \rho \cos\phi \cos\theta d\phi - \rho \sin\phi \sin\theta d\theta \\ \Rightarrow d(F^*x) &= \sin\phi \cos\theta d\rho + \rho \cos\phi \cos\theta d\phi - \rho \sin\phi \sin\theta d\theta \end{aligned}$$

(II) De forma similar al inciso (I), se tiene que

$$\begin{aligned} d(F^*y) &= d(y \circ F) \\ &= d(F_2) \end{aligned}$$

donde $F_2 : U \to \mathbb{R}$ es la función tal que $((\rho,\phi,\theta)) \mapsto y \circ F((\rho,\phi,\theta)) = \rho \sin\phi \sin\theta$, para todo $(\rho,\phi,\theta) \in U$. Luego

$$\begin{aligned}
d(F^*y) &= d(\rho\sin\phi\sin\theta)\\
&= \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\sin\phi\sin\theta)d\rho + \frac{\partial}{\partial\phi}(\rho\sin\phi\sin\theta)d\phi + \frac{\partial}{\partial\theta}(\rho\sin\phi\sin\theta)d\theta\\
&= \sin\phi\sin\theta d\rho + \rho\cos\phi\sin\theta d\phi + \rho\sin\phi\cos\theta d\theta\\
\Rightarrow d(F^*y) &= \sin\phi\sin\theta d\rho + \rho\cos\phi\sin\theta d\phi + \rho\sin\phi\cos\theta d\theta
\end{aligned}$$

(III) De forma similar al inciso (I), se tiene que

$$\begin{aligned}
d(F^*z) &= d(z\circ F)\\
&= d(F_3)
\end{aligned}$$

donde $F_3 : U \to \mathbb{R}$ es la función tal que $((\rho,\phi,\theta)) \mapsto z \circ F((\rho,\phi,\theta)) = \rho\cos\phi$, para todo $(\rho,\phi,\theta) \in U$. Luego

$$\begin{aligned}
d(F^*z) &= d(\rho\cos\phi)\\
&= \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\cos\phi)d\rho + \frac{\partial}{\partial\phi}(\rho\cos\phi)d\phi + \frac{\partial}{\partial\theta}(\rho\cos\phi)d\theta\\
&= \cos\phi d\rho - \rho\sin\phi d\phi\\
\Rightarrow d(F^*z) &= \cos\phi d\rho - \rho\sin\phi d\phi
\end{aligned}$$

Por los tres incisos anteriores, se sigue que

$$\begin{aligned}
F^*(dx\wedge dy\wedge dz) = {}&(\sin\phi\cos\theta d\rho + \rho\cos\phi\cos\theta d\phi - \rho\sin\phi\sin\theta d\theta)\\
&\wedge(\sin\phi\sin\theta d\rho + \rho\cos\phi\sin\theta d\phi + \rho\sin\phi\cos\theta d\theta)\wedge(\cos\phi d\rho - \rho\sin\phi d\phi)
\end{aligned}$$

Computemos $(\sin\phi\sin\theta d\rho + \rho\cos\phi\sin\theta d\phi + \rho\sin\phi\cos\theta d\theta)\wedge(\cos\phi d\rho - \rho\sin\phi d\phi)$:

$$\begin{aligned}
&(\sin\phi\sin\theta d\rho + \rho\cos\phi\sin\theta d\phi + \rho\sin\phi\cos\theta d\theta)\wedge(\cos\phi d\rho - \rho\sin\phi d\phi)\\
&= (\rho\cos^2\phi\sin\theta d\phi\wedge d\rho + \rho\sin\phi\cos\phi\cos\theta d\theta\wedge d\rho) + (-\rho\sin^2\sin\theta\phi d\rho\wedge d\phi - \rho^2\sin^2\phi\cos\theta d\theta\wedge d\phi)\\
&= (-\rho\cos^2\phi\sin\theta d\rho\wedge d\phi - \rho\sin\phi\cos\phi\cos\theta d\rho\wedge d\theta) + (-\rho\sin^2\phi\sin\theta d\rho\wedge d\phi + \rho^2\sin^2\phi\cos\theta d\phi\wedge d\theta)\\
&= -\rho\sin\theta d\rho\wedge d\phi - \rho\sin\phi\cos\phi\cos\theta d\rho\wedge d\theta + \rho^2\sin^2\phi\cos\theta d\phi\wedge d\theta
\end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}
\Rightarrow &(\sin\phi\cos\theta d\rho + \rho\cos\phi\cos\theta d\phi - \rho\sin\phi\sin\theta d\theta)\\
&\wedge(\sin\phi\sin\theta d\rho + \rho\cos\phi\sin\theta d\phi + \rho\sin\phi\cos\theta d\theta)\wedge(\cos\phi d\rho - \rho\sin\phi d\phi)\\
&= (\sin\phi\cos\theta d\rho + \rho\cos\phi\cos\theta d\phi - \rho\sin\phi\sin\theta d\theta)\\
&\wedge(-\rho\sin\theta d\rho\wedge d\phi - \rho\sin\phi\cos\phi\cos\theta d\rho\wedge d\theta + \rho^2\sin^2\phi\cos\theta d\phi\wedge d\theta)\\
&= \rho^2\sin\phi\sin^2\theta d\theta\wedge d\rho\wedge d\phi - \rho^2\sin\phi\cos^2\phi\cos^2\theta d\phi\wedge d\rho\wedge d\theta + \rho^2\sin^3\phi\cos^2\theta d\rho\wedge d\phi\wedge d\theta\\
&= \rho^2\sin\phi\sin^2\theta d\rho\wedge d\phi\wedge d\theta + \rho^2\sin\phi\cos^2\phi\cos^2\theta d\rho\wedge d\phi\wedge d\theta + \rho^2\sin^3\phi\cos^2\theta d\rho\wedge d\phi\wedge d\theta\\
&= \rho^2\sin\phi\sin^2\theta d\rho\wedge d\phi\wedge d\theta + \rho^2\sin\phi\cos^2\theta\left[\cos^2\phi + \sin^2\phi\right]d\rho\wedge d\phi\wedge d\theta\\
&= \rho^2\sin\phi\sin^2\theta d\rho\wedge d\phi\wedge d\theta + \rho^2\sin\phi\cos^2\theta d\rho\wedge d\phi\wedge d\theta\\
&= \rho^2\sin\phi\left[\sin^2\theta + \cos^2\theta\right]d\rho\wedge d\phi\wedge d\theta\\
&= \rho^2\sin\phi\, d\rho\wedge d\phi\wedge d\theta
\end{aligned}$$

por tanto

$$F^*(dx\wedge dy\wedge dz) = \rho^2\sin\phi\, d\rho\wedge d\phi\wedge d\theta$$

□

1.2. Ejercicio 2

Ejercicio 1.2.1 (**Pullback de una forma diferencial**)
Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función dada por

$$F(x,y) = (u,v) = (x^2 + y^2, xy)$$

Compute $F^*(u\,du + v\,dv)$.

Demostración:
Como el pullback es lineal, se tiene entonces que

$$F^*(u\,du + v\,dv) = F^*(u\,du) + F^*(v\,dv)$$

Determinemos $F^*(u\,du)$ y $F^*(v\,dv)$.

(I) Veamos que

$$\begin{aligned} F^*(u\,du) &= F^*(u \wedge du) \\ &= (F^*u) \wedge (F^*du) \\ &= (F^*u) \wedge d(F^*u) \end{aligned}$$

pues, podemos ver a la 1-forma $u\,du$ como el producto wedge de una 0-forma con una 1-forma. De esta manera, por propiedades del pullback, se sigue la primera y segunda igualdad. Para la tercera, se cumple ya que el producto wedge conmuta con la diferencial exterior.

Computemos F^*u:

$$F^*u = u \circ F$$

es decir, F^*u es la función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ tal que $(x,y) \mapsto u \circ F(x,y) = u(x^2+y^2, xy) = x^2 + y^2$. De esta forma, se tiene que

$$\begin{aligned} d(F^*u) &= d(x^2+y^2) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)\,dx + \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)\,dy \\ &= 2x\,dx + 2y\,dy \\ \Rightarrow d(F^*u) &= 2x\,dx + 2y\,dy \end{aligned}$$

Por lo cual

$$\begin{aligned} F^*(u\,du) &= (F^*u) \wedge d(F^*u) \\ &= (x^2+y^2) \wedge (2x\,dx + 2y\,dy) \\ &= (2x^3 + 2xy^2)\,dx + (2x^2y + 2y^3)\,dy \end{aligned}$$

(II) Como en el inciso (I), se tiene que

$$\begin{aligned} F^*(v\,dv) &= F^*(v \wedge dv) \\ &= (F^*v) \wedge (F^*dv) \\ &= (F^*v) \wedge d(F^*v) \end{aligned}$$

siendo $F^*v = v \circ F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $(x,y) \mapsto xy$. Por lo cual

$$\begin{aligned} d(F^*v) &= \frac{\partial}{\partial x}(xy)\,dx + \frac{\partial}{\partial y}(xy)\,dy \\ &= y\,dx + x\,dy \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\Rightarrow F^*(v\,dv) &= (F^*v) \wedge d(F^*v)\\ &= (xy) \wedge (y\,dx + x\,dy)\\ &= xy^2\,dx + x^2y\,dy\end{aligned}$$

Por el inciso (I) y (II), se sigue que

$$\begin{aligned}F^*(u\,du + v\,dv) =& F^*(u\,du) + F^*(v\,dv)\\ &= \big[(2x^3 + 2xy^2)\,dx + (2x^2y + 2y^3)\,dy\big] + \big[xy^2\,dx + x^2y\,dy\big]\\ &= (2x^3 + 3xy^2)\,dx + (2y^3 + 3x^2y)\,dy\\ &= (2x^2 + 3y^2)x\,dx + (2y^2 + 3x^2)y\,dy\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\therefore F^*(u\,du + v\,dv) = (2x^2 + 3y^2)x\,dx + (2y^2 + 3x^2)y\,dy$$

□

1.3. Ejercicio 3

Ejercicio 1.3.1 (Pullback de una forma diferencial por una curva)
Sea ω la 1-forma dada por

$$\omega = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Defina $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$. Compute $c^*\omega$.

Demostración:
Observemos que

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} \\ &= -\frac{y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy \\ &= -\frac{y}{x^2 + y^2} \wedge\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2} \wedge\, dy\end{aligned}$$

(viendo a la 1-forma ω como el producto wedge de una 0-forma con una 1-forma). Por tanto:

$$\begin{aligned}c^*\omega =& c^*\left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \wedge\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2} \wedge\, dy\right) \\ =& c^*\left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \wedge\, dx\right) + c^*\left(\frac{x}{x^2 + y^2} \wedge\, dy\right) \\ =& c^*\left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right) \wedge c^*(dx) + c^*\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) \wedge c^*(dy) \\ =& c^*\left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right) \wedge d(c^*x) + c^*\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) \wedge d(c^*y)\end{aligned}$$

donde

(I) Para el primer elemento se tiene que

$$c^*\left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right) \circ c$$

por lo cual,

$$\begin{aligned}c^*\left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right)(t) &= \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right) \circ c(t) \\ &= \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right)(\cos t, \sin t) \\ &= -\frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \\ &= -\sin t\end{aligned}$$

(II) Para el segundo se tiene

$$\begin{aligned}d(c^*x) &= d(x \circ c) \\ &= d(x(\cos t, \sin t)) \\ &= d(\cos t) \\ &= -\sin t\, dt\end{aligned}$$

(III) Para el tercero se tiene

$$c^*\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\circ c$$

por lo cual

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\circ c(t) &= \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)(\cos t, \sin t)\\ &= \frac{\cos t}{\cos^2 t+\sin^2 t}\\ &= \cos t\end{aligned}$$

(IV) Para el cuarto se tiene

$$\begin{aligned}d\left(c^*y\right) &= d\left(y\circ c\right)\\ &= d\left(y(\cos t, \sin t)\right)\\ &= d\left(\sin t\right)\\ &= \cos t\, dt\end{aligned}$$

Por los incisos (I)-(IV), se sigue que

$$\begin{aligned}c^*\omega =& c^*\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)\wedge d\left(c^*x\right)+c^*\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\wedge d\left(c^*y\right)\\ &= (-\sin t)(-\sin t\, dt)+(\cos t)(\cos t\, dt)\\ &= \sin^2 t\, dt+\cos^2 t\, dt\\ &= dt\\ \Rightarrow c^*\omega =& dt\end{aligned}$$

$\square$

1.4. Ejercicio 4

Ejercicio 1.4.1 (**Una forma que no se desvanece sobre una hípersuperficie suave**)
Resuelva los siguientes incisos.

(a) Sea $f(x,y)$ una función C^∞ en $\mathbb{R}^2$ y asuma que 0 es valor regular de f. Por el teorema del valor regular, el conjunto cero M de $f(x,y)$ es una subvariedad 1-dimensional de $\mathbb{R}^2$. Construya una 1-forma que no se anula en M.

(b) Sea $f(x,y,z)$ una función C^∞ en $\mathbb{R}^3$ y asuma que 0 es valor regular de f. Por el teorema del valor regular, el conjunto cero M de $f(x,y,z)$ es una subvariedad 2-dimensional de $\mathbb{R}^3$. Sean f_x, f_y y f_z las derivadas parciales de f con respecto a x, y y z, respectivamente. Muestre que las igualdades

$$\frac{dx\wedge dy}{f_z}=\frac{dy\wedge dz}{f_x}=\frac{dz\wedge dx}{f_y}$$

son válidas en M siempre y cuando estas tengan sentido, y por tanto juntas dan una 2-forma sobre M que no se desvanece en ninguna parte.

(c) Generalice este problema al conjunto de nivel regular de $f(x^1,\dots,x^{n+1})$ en $\mathbb{R}^{n+1}$.

Demostración:
Recordemos una proposición y el teorema del valor regular

Proposición 1.8.23
Para una función real valuada $f:M\to\mathbb{R}$, donde M es una variedad, se tiene que $p\in M$ es un punto crítico de M, si y sólo si relativo a alguna carta $(U,x^1,\dots,x^n)$ que contiene a p, todas la derivadas parciales de f satisfacen

$$\frac{\partial f}{\partial x^j}(p)=0,\quad \forall j=1,\dots,n.$$

Teorema 1.9.9 (**Teorema del valor regular**)
Sea $F:N\to M$ un mapeo C^∞ entre variedades, donde $\dim N=n$ y $\dim M=m$. Entonces el conjunto de nivel no vacío $F^{-1}(c)$, donde $c\in M$, es una subvariedad regular de N con dimensión $n-m$.

De (I): En este caso, $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}$ son variedades suaves, y

$$\begin{aligned} M&=f^{-1}(0)\\ &=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|f(x,y)=0\right\}\end{aligned}$$

siendo M el conjunto cero de $f(x,y)$. Observemos que

$$f(x,y)=0,\quad \forall (x,y)\in M$$

Por lo cual, tomando diferencial exterior de ambos lados, se sigue que

$$\begin{aligned} &df(x,y)=0\\ \Rightarrow\ &f_x(x,y)\,dx+f_y(x,y)\,dy=0,\quad \forall(x,y)\in M\end{aligned}$$

donde $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ y $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$. Considere los conjuntos

$$U_x = \{(x,y) \in M | f_x(x,y) \neq 0\} \text{ y } U_y = \{(x,y) \in M | f_y(x,y) \neq 0\}$$

se tiene que en $U_x \cap U_y$:

$$\begin{aligned} f_x\,dx + f_y\,dy &= 0 \\ \Rightarrow f_x\,dx &= -f_y\,dy \end{aligned} \tag{1.2}$$

Defina así la 1-forma ω como sigue

$$\omega(x,y) = \begin{cases} f_x(x,y)\,dx \text{ si } (x,y) \in U_x \\ -f_y(x,y)\,dy \text{ si } (x,y) \in U_y \end{cases} \tag{1.3}$$

para todo $(x,y) \in M$. Por (1.2), está 1-forma está bien definida en M, ya que las 1-formas $-f_y\,dy$ y $f_x\,dx$ coinciden en $U_x \cap U_y$. Veamos que ω es C^∞ y no se anula en M. Para ello, consideremos las cartas de $\mathbb{R}^2$. Sean

$$\begin{aligned} U_x^+ &= \{(x,y), \in M | f_x(x,y) > 0\} \\ U_x^- &= \{(x,y), \in M | f_x(x,y) < 0\} \\ U_y^+ &= \{(x,y), \in M | f_y(x,y) > 0\} \\ U_y^- &= \{(x,y), \in M | f_y(x,y) < 0\} \end{aligned} \tag{1.4}$$

Es claro que $U_x = U_x^+ \cup U_x^-$ y $U_y = U_y^+ \cup U_y^-$. Notemos que, como 0 es un valor regular de f, entonces todo punto de $f^{-1}(0) = M$ es un punto regular. Por tanto, de la Proposición (8.23) se tiene que para todo punto $p \in M$, alguna de las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) = f_x(p), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(p) = f_y(p)$$

no se anula. Es decir, que p se encuentra en alguno de los conjuntos de (1.4). Luego, M está totalmente contenida en la unión de estos conjuntos. Por tanto, ω no se anula en M.

Y, claramente ω es C^∞, pues las funciones f_x y f_y lo son. Así, la 1-forma buscada es ω.

De (II): En este caso, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}$ son variedades suaves, y

$$\begin{aligned} M &= f^{-1}(0) \\ &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | f(x,y,z) = 0\big\} \end{aligned}$$

siendo M el conjunto cero de $f(x,y,z)$. Observemos que

$$\begin{gathered} df(x,y,z) = 0 \\ \Rightarrow f_x(x,y,z)\,dx + f_y(x,y,z)\,dy + f_z(x,y,z)\,dz = 0, \quad \forall (x,y,z) \in M \end{gathered} \tag{1.5}$$

por tanto, en M se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} f_y\,dy \wedge dx + f_z\,dz \wedge dx &= 0 \\ f_x\,dx \wedge dy + f_z\,dz \wedge dy &= 0 \\ f_x\,dx \wedge dz + f_y\,dy \wedge dz &= 0 \end{aligned}$$

(haciendo el producto wedge de (1.5) con dx, dy y dz). Las igualdades anteriores son equivalentes a

$$\begin{aligned} -f_y\,dx \wedge dy + f_z\,dz \wedge dx = 0 &\Rightarrow f_y\,dx \wedge dy = f_z\,dz \wedge dx \\ f_x\,dx \wedge dy - f_z\,dy \wedge dz = 0 &\Rightarrow f_x\,dx \wedge dy = f_z\,dy \wedge dz \\ -f_x\,dz \wedge dx + f_y\,dy \wedge dz = 0 &\Rightarrow f_x\,dz \wedge dx = f_y\,dy \wedge dz \end{aligned}$$

por tanto
$$\frac{dx\wedge dy}{f_z}=\frac{dz\wedge dx}{f_y}\text{ y }\frac{dx\wedge dy}{f_z}=\frac{dy\wedge dz}{f_x}$$
(siempre que $f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z)\neq 0$, con $(x,y,z)\in M$). Luego
$$\frac{dx\wedge dy}{f_z}=\frac{dy\wedge dz}{f_x}=\frac{dz\wedge dx}{f_y}\tag{1.6}$$

Sean
$$\begin{aligned} U_x&=\{(x,y,z)\in M|f_x(x,y,z)\neq 0\}\\ U_y&=\{(x,y,z)\in M|f_y(x,y,z)\neq 0\}\\ U_z&=\{(x,y,z)\in M|f_z(x,y,z)\neq 0\}\end{aligned}\tag{1.7}$$
como en el inciso (I), es claro que M está contenida en la unión de estos conjuntos (ya que al ser 0 valor regular de f, todos los puntos de M son regulares y por ende, alguna de las derivadas parciales no se anula en $p\in M$). Definamos
$$\omega(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{dy\wedge dz}{f_x(x,y,z)} & \text{si } (x,y,z)\in U_x\\ \dfrac{dz\wedge dx}{f_y(x,y,z)} & \text{si } (x,y,z)\in U_y\\ \dfrac{dz\wedge dx}{f_y(x,y,z)} & \text{si } (x,y,z)\in U_z\end{cases}\tag{1.8}$$

Por (1.7), es claro que ω es una 2-forma está bien definida en M, pues en la intersección de 2 conjuntos de (1.6), se cumplen las igualdades en (1.7). Y además es C^∞, pues cada una de las funciones f_x, f_y y f_z lo es.

De (III): Sea f una función C^∞ en $\mathbb{R}^{n+1}$ y suponga que $c\in\mathbb{R}$ es un valor regular de f. Entonces por el teorema del valor regular, el conjunto $M=f^{-1}(c)$ es una subvariedad n-dimensional de $\mathbb{R}^{n+1}$. Construya una n-forma que no se anula en M.

Para ello, notemos que si $(x^1,\dots,x^{n+1})\in M$, donde
$$\begin{aligned} M=&f^{-1}(c)\\ =&\big\{(x^1,\dots,x^{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}|f(x^1,\dots,x^{n+1})=c\big\}\end{aligned}$$
entonces
$$\begin{aligned} f(x^1,\dots,x^{n+1})&=c\\ \Rightarrow df(x^1,\dots,x^{n+1})&=0\\ \Rightarrow f_{x^1}(x^1,\dots,x^{n+1})dx_1+\cdots+f_{x^{n+1}}(x^1,\dots,x^{n+1})dx_{n+1}&=0\end{aligned}$$
Si $I=(i_1,i_2,\dots,i_{n-1})$ es un multi-índice creciente de $n+1$ de longitud $n-1$, se tiene que haciendo el producto wedge de la igualdad de arriba con $dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{n-1}}$:
$$f_{x^{j_1}}(x^1,\dots,x^{n+1})dx_{j_1}\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{n-1}}+f_{x^{j_2}}(x^1,\dots,x^{n+1})dx_{j_2}\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{n-1}}=0$$
donde j_1 y j_2 son tales que no están en I. Por tanto
$$f_{x^{j_1}}(x^1,\dots,x^{n+1})dx_{j_1}\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{n-1}}=-f_{x^{j_2}}(x^1,\dots,x^{n+1})dx_{j_2}\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{n-1}}\tag{1.9}$$

Con esto, de forma similar al inciso (II), se obtienen igualdades que relacionan a f_{x^i} con f_{x^j}, siendo $i,j\in\{1,\dots,n+1\}$ con $i<j$, dadas por
$$\begin{aligned} f_{x^i}(x^1,\dots,x^{n+1})\,dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_j}\wedge\cdots\wedge dx_{n+1}&=f_{x^j}(x^1,\dots,x^{n+1})\,dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_{n+1}\\ \Rightarrow\frac{dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_j}\wedge\cdots\wedge dx_{n+1}}{f_{x^j}(x^1,\dots,x^{n+1})}&=\frac{dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_{n+1}}{f_{x^i}(x^1,\dots,x^{n+1})}\end{aligned}\tag{1.10}$$

(siempre que las derivadas parciales no se anulen). Definimos así a la n-forma ω, como

$$\omega(x^1,\ldots,x^{n+1}) = \frac{dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_{n+1}}{f_{x^i}(x^1,\ldots,x^{n+1})} \tag{1.11}$$

si $(x^1,\ldots,x^{n+1}) \in U_{x^i}$, donde

$$U_{x^i} = \left\{(x^1,\ldots,x^{n+1}) \in M | f_{x_1}(x^1,\ldots,x^{n+1}) \neq 0\right\}, \quad \forall i = 1,\ldots,n+1$$

Por (1.10) esta n-forma está bien definida, y por la proposición (8.23), como c es valor regular de f, entonces $M \subseteq \bigcup_{i=1}^{n+1} U_{x^i}$ (si $p \in M$, entonces alguna de las derivadas parciales de f no se anula en p). De esta forma, como las funciones f_{x^i} son C^∞, se sigue que ω es una n-forma C^∞ que no se anula en M.

$\square$