Lista 2.

2.1. Sean X y Y dos conjuntos, $f: X \to Y$ una función $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ y $\{B_\beta\}_{\beta\in J}$ dos familias de subconjuntos de X y Y, respectivamente, y $A \subset X$ y $B \subset Y$. **Demuestre** las afirmaciones siguientes:

$$f^{-1}\left[\bigcup_{\beta\in J} B_\beta\right] = \bigcup_{\beta\in J} f^{-1}(B_\beta), \quad f^{-1}\left[\bigcap_{\beta\in J} E_\beta\right] = \bigcap_{\beta\in J} f^{-1}(E_\beta), \quad f^{-1}(B^c) = [f^{-1}(B)]^c;$$

$$f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B, \qquad f^{-1}\left(f(A)\right) \supset A;$$

$$f\left[\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right] = \bigcup_{\alpha\in I} f(A_\alpha), \qquad f\left[\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right] \subset \bigcap_{\alpha\in I} f(A_\alpha).$$

Dem:

i) $f^{-1}\left(\bigcup_{\beta\in I} B_\beta\right) = \bigcup_{\beta\in I} f^{-1}(B_\beta)$.

$x \in f^{-1}\left(\bigcup_{\beta\in I} B_\beta\right) \iff \exists\ \beta_0 \in I \ \text{m}\ x \in f^{-1}(B_{\beta_0}) \iff x \in \bigcup_{\beta\in I} f^{-1}(B_\beta)$.

ii) $f^{-1}\left(\bigcap_{\beta\in I} B_\beta\right) = \bigcap_{\beta\in I} f^{-1}(B_\beta)$.

$x \in f^{-1}\left(\bigcap_{\beta\in I} B_\beta\right) \iff f(x) \in \bigcap_{\beta\in I} B_\beta \iff f(x) \in B_\beta,\ \forall\ \beta \in I \iff x \in \bigcap_{\beta\in I} f^{-1}(B_\beta)$.

iii) $f^{-1}(B^c) = [f^{-1}(B)]^c$

$x \in f^{-1}(B^c) \iff f(x) \in B^c \iff f(x) \notin B \iff x \notin f^{-1}(B) \iff x \in [f^{-1}(B)]^c$.

iv) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

2.2. Sean $f: X \to Y$ una función y $\mathcal{A}$ una σ −álgebra de subconjuntos de X. **Pruebe** que la familia

$$\mathcal{B} = \{H \subset Y | f^{-1}(H) \in \mathcal{A}\}$$

es una σ −álgebra sobre Y.

Dem:

i) $Y \in \mathcal{B}$, pues $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{A}$.

ii) Sea $B \in \mathcal{B}$, entonces $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ es σ-álgebra: $(f^{-1}(B))^c = f^{-1}(B^c) \in \mathcal{A}$. Luego $B^c \in \mathcal{B}$.

iii) Sea $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ una familia de conjuntos de $\mathcal{B}$. Entonces:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)$$

Como $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}$, pues $f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}$.

Por i) − iii), $\mathcal{B}$ es un σ-álgebra.

q.e.d.

2.3. Sean $f: D \to \overline{\mathbb{R}}$ una función, donde $D \in \mathcal{M}$ en $\mathbb{R}^n$, y H un subconjunto denso de $\mathbb{R}$. **Muestre** que si el conjunto $\{x \in D | f(x) > \alpha\}$ es medible en D para toda $\alpha \in H$, entonces f es una función medible.

Dem:

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Como H es denso en $\mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists\, \alpha_n \in H$ tal que $\alpha_n < \alpha$ y $|\alpha - \alpha_n| < \frac{1}{n}$. Como:

$$\{x \in D \mid f(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in D \mid f(x) > \alpha_n\}$$

y $\{x \in D \mid f(x) > \alpha_n\}$ es medible, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces la unión de todos es medible. Así $\{x \in D \mid f(x) > \alpha\}$ es medible. Como el α fue arbitrario, entonces f es medible.

q.e.d.

2.4. Sean $f, g: D \to \overline{\mathbb{R}}$ dos funciones continuas, donde D es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$. **Pruebe** que si $f = g$ c.t.p. en D, entonces $f(x) = g(x), \forall x \in D$.

2.5. Proporcione ejemplos de funciones $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

Dem:

Sea

$$E = \{x \in D \mid f(x) \neq g(x)\}$$

Probaremos que $E = \emptyset$. Supongamos que $E \neq \emptyset$, entonces $\exists\, x_0 \in D \ni f(x_0) \neq g(x_0)$. Sea $\varepsilon_0 = |f(x_0) - g(x_0)| > 0$. Como f y g son continuas, $\exists\, \delta > 0 \ni$ si $x \in B(x_0, \delta)$, entonces $|f(x) - g(x) - f(x_0)$

$-g(x_0)| < |f(x_0)-g(x_0)| \Rightarrow 0 < |f(x)-g(x)|$, i.e $\forall\, x \in B(x_0, \delta)$, $f(x) \neq g(x)$, luego $x \in E$.

Así: $B(x_0,\delta) \subseteq E$. A $B(x_0,\delta)$ se le puede inscribir un cubo de radio $\sqrt{2}\,\delta$, $C(x_0, \sqrt{2}\,\delta) \subseteq B(x_0, \delta)$.[1] Luego $C(x_0, \sqrt{2}\,\delta) \subseteq E$, como m es monótona:

$$0 < (\sqrt{2}\,\delta)^n = m(C(x_0, \sqrt{2}\,\delta)) \leq m(E) = 0 \;\#_c$$

Por tanto, $E = \emptyset$. Luego $f(x) = g(x)$, $\forall x \in D$.

q.e.d.

2.5. Proporcione ejemplos de funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tales que
i. $|f|$ es medible, pero f no es medible.
ii. $f^{-1}(\{\alpha\})$ es un conjunto medible, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, pero f no es medible.

Sol.

De (i): Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada como:

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\; f(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in P. \\ -1 & \text{si } x \notin P. \end{cases}$$

Donde P es el conjunto no medible. Veamos que f no es medible, pues $f^{-1}(\{1\}) = P$, pero $|f| = 1$, es medible.

De (ii): Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\; f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0,1]. \\ x & \text{si } x \in P. \\ -x & \text{si } x \in [0,1]\setminus P. \end{cases}$$

Veamos que $f^{-1}(\{\alpha\})$ es medible en $\mathbb{R}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. En efecto: sea $\alpha \in \mathbb{R}$, tenemos varios casos:

1) $\alpha \in\,]-\infty,-1[\, \cup P^- \cup ([0,1]\setminus P) \cup\,]1,+\infty[$, entonces $f^{-1}(\{\alpha\}) = \emptyset$.

2) $\alpha \in P$, entonces $f^{-1}(\{\alpha\}) = \{\alpha\}$.

3) $\alpha \in [-1,0]\setminus P^-$, entonces $f^{-1}(\{\alpha\}) = \{-\alpha\}$.

Donde $P^- = \{-x \mid x \in P\}$. En los 3 casos, $f^{-1}(\{\alpha\})$ siempre es medible. Pero:

$$f^{-1}(]0,\infty[) = P$$

Luego, f no es medible.

q.e.d.

2.6. Muestre que son medibles las funciones $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas como

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \text{ irreducibles,} \\ 0 & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

Dem:

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si $\alpha \leq 0$:

$$f^{-1}([\alpha, +\infty]) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0\} = \mathbb{R}.$$

Si $0 < \alpha \leq 1$:

$$f^{-1}([\alpha, +\infty]) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 1\} = \mathbb{Q}$$

Si $1 < \alpha$:

$$f^{-1}([\alpha, +\infty]) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 1\} = \emptyset$$

Luego, f es medible.

Sea ahora $\beta \in \mathbb{R}$.

Si $\beta \leq 0$:

$$g^{-1}([\beta, +\infty]) = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \geq \beta\} = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \geq 0\} = \mathbb{R}.$$

Si $0 < \beta < 1$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ m $\frac{1}{n_0} < \beta$, pero $\beta \leq \frac{1}{n_0 - 1}$ (pues $n_0 \neq 1$). Entonces:

$$g^{-1}([\beta, +\infty]) = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \geq \beta\} = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) > \tfrac{1}{n_0}\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \mid x = \tfrac{p}{q}, \text{ donde } 1 < q < n_0 \text{ y } p \in \mathbb{N} \text{ m } (p, q) = 1\}$$
$$= D$$

D es un conjunto finito, luego medible. Si $\beta = 1$:

$$g^{-1}([\beta, \infty]) = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \geq 1\} = \{1\} \text{ medible.}$$

y, Si $\beta > 1$:

$$g^{-1}([\beta, \infty]) = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) > 1\} = \emptyset$$

Como todos los $g^{-1}([\beta, \infty])$ son medibles, g es medible.

q.e.d.

2.7. Sea $f: D \to \overline{\mathbb{R}}$ una función, donde $D \in \mathcal{M}$ en $\mathbb{R}^n$. Para cada $M \geq 0$, se define la función $f_M: D \to \overline{\mathbb{R}}$ como

$$f_M(x) = \begin{cases} M & \text{si } f(x) > M, \\ f(x) & \text{si } |f(x)| \leq M, \\ -M & \text{si } f(x) < -M. \end{cases}$$

Pruebe que si f es medible, entonces f_M es medible.

Dem:

Sea $M \geq 0$. Probaremos que f_M es medible. Sea

$A_1 = \{x \in D \mid f(x) > M\}$, $A_2 = \{x \in D \mid |f(x)| \leq M\} = \{x \in D \mid f(x) \leq M\} \cap \{x \in D \mid f(x) \geq -M\}$

$A_3 = \{x \in D \mid f(x) < -M\}$. A_1 y A_3 son medibles, pues f es medible y $A_1 = f^{-1}(]M, \infty])$, $A_3 = f^{-1}([-\infty, -M[)$. A_2 es medible por ser intersección de medibles:

$$A_2 = f^{-1}([-M, \infty]) \cap f^{-1}([-\infty, M])$$

Así, $D = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, A_1, A_2 y A_3 son disjuntos a pares. Notemos que

$$f_M|A_1 = \underline{M}, \quad f_M|A_2 = f|A_2 \quad y \quad f_M|_{A_3} = \underline{-M}$$

$\underline{M}$ y $\underline{-M}$ son medibles por ser constante y $f|_{A_2}$ es medible por ser f y A_2 medibles. Así $f_M|_{A_i}$ es medible $\forall i \in [1, 3]$. Por tanto, f_M es medible.

q.e.d.

2.8 Sea $\{r_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ una numeración de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Defina $f_\nu: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$f_\nu(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = r_1, \dots, r_\nu, \\ 0 & \text{de otra forma,} \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

Muestre que $\{f_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones medibles en $\mathbb{R}$. ¿A cuál función f converge puntualmente la sucesión?

2.9 Sean $\{c_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales y $\{P_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ una sucesión de rectángulos acotados disjuntos en $\mathbb{R}^n$. **Demuestre** que la serie de funciones

Dem:

Sea $\nu \in \mathbb{N}$. Probaremos que f_ν es medible. En efecto, sean

$$A_1 = \{r_1, \dots, r_\nu\} \quad y \quad A_2 = \mathbb{R} \setminus A_1 = A_1^c$$

A_1 es medible por ser finito, y A_2 lo es también pues $A_2 = A_1^c$. Además $A_1 \cup A_2 = \mathbb{R}$, y se cumple:

$$f_\nu|_{A_1} = \underline{1} \quad y \quad f_\nu|_{A_2} = \underline{0}$$

Por ser $\underline{1}$ y $\underline{0}$ medibles, f_ν es medible. Veamos ahora que $\{f_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ converge puntualmente a $\chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$. En efecto, sea $x \in \mathbb{R}$. Si $x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1]$, entonces:

$$f_\nu(x) = 0, \ \forall \nu \in \mathbb{N}$$

luego:

$$\lim_{\nu \to \infty} f_\nu(x) = \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$$

Si $x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$, $\exists \nu \in \mathbb{N}$ tq $x = r_\nu$. Si $n \geq \nu$, entonces $f_n(\nu) = 1$. Luego:

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{m \to \infty} f_{\nu+m}(x)$$

$$= 1$$

$$= \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$$

q.e.d.

2.9 Sean $\{c_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales y $\{P_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ una sucesión de rectángulos acotados disjuntos en $\mathbb{R}^n$. **Demuestre** que la serie de funciones

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \mathrm{X}_{P_\nu}$$

converge puntualmente en $\mathbb{R}^n$ a alguna función f que es medible en $\mathbb{R}^n$.

2.10. Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, como

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/y^2 & \text{si } 0 < x < y < 1, \\ 1/x^2 & \text{si } 0 < y < x < 1, \\ 0 & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

Pruebe que f es medible en $\mathbb{R}^2$.

Dem:

Sean:

$$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < y < 1\}$$

$$A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < x < 1\}$$

$$A_3 = (A_1 \cup A_2)^c$$

A_1 y A_2 son abiertos y A_3 es cerrado, luego son medibles. Vemos que:

$$f(x,y)|_{A_1} = \frac{1}{y^2}\Big|_{A_1}$$

$$f(x,y)|_{A_2} = \frac{1}{x^2}\Big|_{A_2}$$

$$f(x,y)|_{A_3} = 0|_{A_3}$$

son todas medibles (por ser continuas). Por tanto, f es medible.

q.e.d.

2.11. Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x,y) = (x-y)e^{-(x-y)^2}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Pruebe que f es medible en $\mathbb{R}^2$.

Dem: f es medible por ser continua en $\mathbb{R}^2$.

q.e.d.

Pruebe que f es medible en $\mathbb{R}^2$.

2.12. Sea $f: D \to \mathbb{R}$ una función, donde $D \in \mathcal{M}$ en $\mathbb{R}^n$. Si f es medible y $f(x) \neq 0, \forall x \in D$, **demuestre** que $1/f$ es medible.

2.13. Sea D un conjunto abierto en $\mathbb{R}$. Si $f: D \to \mathbb{R}$ es diferenciable en todo punto D, **pruebe**

Dem:

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Probaremos que $1/f$ es medible.

1) $\alpha = 0$

Si $\alpha = 0$, el conjunto:

$$\{x \in D \mid \tfrac{1}{f}(x) > 0\} = \{x \in D \mid f(x) > 0\}$$

es medible.

2) $\alpha > 0$.

En este caso:

$$\{x\in D \mid \tfrac{1}{f}(x) > \alpha\} = \{x\in D \mid \tfrac{1}{\alpha} < f(x)\}$$

es medible.

3) $\alpha < 0$

El conjunto:

$$\{x\in D \mid \tfrac{1}{f}(x) > \alpha\} = \{x\in D \mid f(x) \geq 0\} \cup \{x\in D \mid f(x) < \tfrac{1}{\alpha}\}$$

es medible (por ser unión de medibles).

Por 1)-3), f es medible.

q.e.d.

demuestre que $1/f$ es medible.

2.13. Sea D un conjunto abierto en $\mathbb{R}$. Si $f: D \to \mathbb{R}$ es diferenciable en todo punto D, **pruebe** que la función derivada de f es medible en D.

2.14. Sean $f: X \to Y$ una función y $\mathcal{B}$ una σ −álgebra de subconjuntos de Y. **Demuestre** que la familia

$$\sigma(f) = f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B) | B \in \mathcal{B}\}$$

es una σ −álgebra sobre X, llamada la $\boldsymbol{\sigma}$ **−álgebra generada por** $\boldsymbol{f}$. Observe que $\sigma(f)$ es la σ −álgebra más pequeña sobre X con respecto a la cual f es medible (¿Por qué?).

i) $X \in \sigma(f)$.

Como $Y \in \mathcal{B} \Rightarrow X = f^{-1}(Y) \in \sigma(f)$. Así $X \in \sigma(f)$.

ii) $A \in \sigma(f) \Rightarrow A^c \in \sigma(f)$.

Sea $A \in \sigma(f)$, entonces $\exists\, B \in \mathcal{B}$ m $A = f^{-1}(B)$. Como $B \in \mathcal{B} \Rightarrow B^c \in \mathcal{B} \Rightarrow A^c = (f^{-1}(B))^c = f^{-1}(B^c) \in \sigma(f)$. Así $A^c \in \sigma(f)$.

iii) Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ está en $\sigma(f)$, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \sigma(f)$.

Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una familia en $\sigma(f)$. Entonces, $\forall\, A_n \in \sigma(f)$, $\exists\, B_n \in \mathcal{B}$ m $A_n = f^{-1}(B_n)$. Sea:

$$\begin{aligned} A &= \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n) \\ &= f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \quad \text{y} \quad B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B} \end{aligned}$$

Luego, $A \in \sigma(f)$.

q.e.d.

2.15. Muestre que si $\{f_v\}_{v=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones medibles de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, entonces es medible el conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n | \{f_v(x)\}_{v=1}^{\infty} \text{ converge en } \mathbb{R}\}.$$

Dem:

Probaremos que

$$A = \bigcap_{v=1}^{\infty} \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \underbrace{\left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, |f_m(x) - f_{m+1}(x)| < \tfrac{1}{v} \right\}}_{= U_{v,m}} \right) = U$$

Donde $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se define como:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{i\to\infty} f_i(x) & \text{si } x \in A. \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

$U_{v,m}$ es medible, $\forall\, v, m \in \mathbb{N}$. En efecto, sean $v, m \in \mathbb{N}$. Como f_m y f_{m+1} son medibles, entonces $|f_m - f_{m+1}|$ lo es. Luego, el conjunto:

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid |f_m(x) - f_{m+1}(x)| < \tfrac{1}{v}\} = U_{v,m}$$

es medible. Probaremos ahora que $A = U$. En efecto:

1) Sea $x \in A \Rightarrow \lim_{k \to \infty} f_k(x) = f(x)$. Entonces $\forall v \in \mathbb{N}$ $\exists N \in \mathbb{N}$ $\ni$ $m \geq N$ implica:

$$|f_m(x) - f_{m+1}(x)| < \frac{1}{v}$$

luego $x \in U$.

2) Sea $x \in U$, entonces $\forall v \in \mathbb{N}$: $x \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^n \mid |f_m(x) - f_{m+1}(x)| < \frac{1}{v}\}$

2.16. Verifique directamente que se cumple la conclusión del Teorema de Egorov para la sucesión de funciones $\{x^{\nu}X_{[0,1]}(x)\}_{\nu=1}^{\infty}$ con $D=[0,1]$. ¿Dicha sucesión converge uniformemente en $[0,1[$? Justifique.

uniformemente en $[0,1[$? Justifique.

2.17. Proporcione un ejemplo donde falle el Lema 2.44 al quitar la hipótesis de que $m(D) < \infty$.

2.18. Sea $f: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ una función y sea A un subconjunto medible de $\mathbb{R}^n$. Si la restricción

2.18. Sea $f: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ una función y sea A un subconjunto medible de $\mathbb{R}^n$. Si la restricción $f|_A$ de f a A es una función continua y $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus A$, **pruebe** que f es medible en $\mathbb{R}^n$.

2.19. Sea $f: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible. Se supone que $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash D$, donde $D \in \mathcal{M}$ en $\mathbb{R}^n$ tiene medida finita, y f toma los valores $\pm\infty$ sobre un conjunto con medida cero. Aplicando el Teorema 2.43, **muestre** que existe una sucesión $\{\psi_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ de funciones escalonadas que converge a f c.t.p. en $\mathbb{R}^n$. (Este resultado será mejorado más adelante.)

Notas:

1)