Espacios Hilbertianos

Cristo Daniel Alvarado

15 de febrero de 2024

Índice general

Capítulo 1

Espacios Hilbertianos

1.1. Conceptos básicos. Proyecciones ortogonales

Definición 1.1.1
Sea H un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$. Decimos que H es un **espacio prehilbertiano** si está dotado de una aplicación $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ con las propiedades siguientes:

1). $\forall \vec{y} \in H$ fijo, $\vec{x} \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ es una aplicación lineal de H en $\mathbb{K}$, o sea

$$\begin{aligned}\left(\vec{x_1}+\vec{x_2}\middle|\vec{y}\right) &= \left(\vec{x_1}\middle|\vec{y}\right)+\left(\vec{x_2}\middle|\vec{y}\right)\\ \left(\alpha\vec{x}\middle|\vec{y}\right) &= \alpha\cdot\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)\end{aligned}$$

para todo $\vec{x}, \vec{x_1}, \vec{x_2} \in H$ y $\alpha \in \mathbb{K}$.

2). $(\vec{y}|\vec{x}) = \overline{\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)}$, para todo $\vec{x} \in H$.

3). $\left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right) \geq 0$, para todo $\vec{x} \in H$.

4). $\left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right) = 0$ si y sólo si $\vec{x} = 0$.

Observación 1.1.1
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces 1) y 2) implican que $\forall \vec{x} \in H$ fijo, la aplicación $\vec{y} \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ de H en $\mathbb{R}$ es lineal. En este caso se dice que $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ es una **forma bilineal sobre** H.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, entonces

$$\begin{aligned}\left(\vec{x}\middle|\vec{y_1}+\vec{y_2}\right) &= \left(\vec{x}\middle|\vec{y_1}\right)+\left(\vec{x}\middle|\vec{y_2}\right)\\ \left(\vec{x}\middle|\alpha\vec{y}\right) &= \overline{\alpha}\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)\end{aligned}$$

Se dice que $\vec{y} \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ es entonces **semilineal** y que $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ es **sesquilineal** ($1\frac{1}{2}$-lineal).

La aplicación $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ se llama **producto escalar sobre** H.

Definición 1.1.2
Para todo $\vec{x} \in H$ se define la **norma de** $\vec{x}$ como: $\|\vec{x}\| = \sqrt{\left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right)}$.

Ejemplo 1.1.1
Sea $H = \mathbb{K}^n$

Ejemplo 1.1.2
Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y sea $H = L_2(S, \mathbb{K})$. Para todo $f, g \in H$ se define

$$\left(f|g\right) = \int_S f\overline{g}$$

La integral existe por Hölder con $p = p^* = 2$. Este es un producto escalar sobre H y, en este caso:

$$\|f\| = \left[\int_S \left|f\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} = \mathcal{N}_2(f), \quad \forall f \in H$$

Ejemplo 1.1.3
Sea $H = l_2(\mathbb{K})$ el espacio de sucesiones en $\mathbb{K}$ que son cuadrado sumables. Se sabe que $\vec{x} = (x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{K})$ si y sólo si

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$$

$l_2(\mathbb{K})$ es un espacio prehilbertiano con el producto escalar:

$$\left(\vec{x}|\vec{y}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\overline{y_i}$$

donde la serie es convergente por Hölder. En este caso:

$$\|\vec{x}\| = \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left|x_i\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} = \mathcal{N}_2(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in l_2(\mathbb{K}) \tag{1.1}$$

Teorema 1.1.1 (Desigualdad de Cauchy-Schwartz)
Sea H un espacio prehilbertiano. Entonces:

1). Se cumple la desigualda de Cauchy-Schwartz:

$$\left|\left(\vec{x}|\vec{y}\right)\right| \leq \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in H$$

y, la igualdad se da si y sólo si los vectores son linealmente dependientes.

2). Se cumple la desigualdad triangular:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in H$$

y la igualdad se da si y sólo si uno de los vectores es multiplo no negativo del otro.

Demostración:
De 1): Se supondrá que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (el caso en que sea $\mathbb{R}$ es similar y se deja como ejercicio).
Sean $\vec{x}, \vec{y} \in H$. En el caso de que alguno de los vectores sea $\vec{0}$, el resultado es inmediato (ambos dan cero). Por lo cual, supongamos que ambos son no cero. Se tiene para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left(\vec{x} + \lambda\vec{y}|\vec{x} + \lambda\vec{y}\right) \\ &= \left(\vec{x}|\vec{x}\right) + \overline{\lambda}\left(\vec{x}|\vec{y}\right) + \lambda\left(\vec{y}|\vec{x}\right) + \lambda\overline{\lambda}\left(\vec{y}|\vec{y}\right) \\ &= \|\vec{x}\|^2 + 2\Re\lambda\left(\vec{y}|\vec{x}\right) + \left|\lambda\right|^2\|\vec{y}\|^2 \end{aligned} \tag{1.2}$$

En particular, para

con $t \in \mathbb{R}$, la desigualdad (1) se convierte en

$$0 \leq \|\vec{x}\|^2 + 2t\big|\left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right)\big| + t^2\|\vec{y}\|^2 \tag{1.3}$$

El trinomio anterior es mayor o igual a cero si y sólo si su discriminante:

$$\big|\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)\big|^2 - \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2 \leq 0$$

es decir

$$\big|\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)\big| \leq \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2$$

Si $\big|\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)\big| = \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2$, entonces el trinomio en (2) tiene una raíz doble. Luego, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que

$$\left(\vec{x} + \lambda\vec{y}\middle|\vec{x} + \lambda\vec{y}\right) = 0$$

pero lo anterior solo sucede si y sólo si $\vec{x} + \lambda\vec{y} = 0$, es decir si $\vec{x}$ y $\vec{y}$ son linealmente dependientes.

De 2): Se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 &= \left(\vec{x} + \vec{y}\middle|\vec{x} + \vec{y}\right) \\
&= \|\vec{x}\| + 2\Re\left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right) + \|\vec{y}\|^2 \\
&\leq \|\vec{x}\| + 2\big|\left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right)\big| + \|\vec{y}\|^2 \\
&\leq \|\vec{x}\| + 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 \\
&= (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2
\end{aligned}$$

lo cual implica la desigualdad que se quiere probar. Ahora, la igualdad se cumple si y sólo si

$$\big|\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)\big| = \Re\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) \text{ y } \big|\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)\big| = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$$

la primera igualdad implica que $\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ es real (en particular, ≥ 0) y la segunda implica que $\vec{x}$ y $\vec{y}$ son linealmente dependientes. Es decir, si y sólo si un vector es multiplo no negativo del otro. ■

Se concluye del teorema anterior que $\|\cdot\|$ es una norma sobre H. En lo sucesivo se consdierará a H como espacio normado dotado de esta norma.

Proposición 1.1.1
La aplicación $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ es una función continua del espacio normado producto $H \times H$ en $\mathbb{K}$.

Demostración:

Sean $\vec{x}, \vec{y} \in H$ y, $\{\vec{x_n}\}$ y $\{\vec{y_n}\}$ dos sucesiones que convergen a $\vec{x}$ y $\vec{y}$, respectivamente. Se probará que $\left\{\left(\vec{x_n}\middle|\vec{y_n}\right)\right\}$ converge a $\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ en $\mathbb{K}$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\big|\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) - \left(\vec{x_n}\middle|\vec{y_n}\right)\big| &\leq \big|\left(\vec{x} - \vec{x_n}\middle|\vec{y}\right)\big| + \big|\left(\vec{x_n}\middle|\vec{y} - \vec{y_n}\right)\big| \\
&\leq \|\vec{x} - \vec{x_n}\|\|\vec{y}\| + \|\vec{x_n}\|\|\vec{y} - \vec{y_n}\| \\
&\leq \|\vec{x} - \vec{x_n}\|\|\vec{y}\| + \|\vec{x_n}\|\|\vec{y} - \vec{y_n}\|
\end{aligned} \tag{1.4}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\{\vec{x_n}\}$ es convergente, es acotada. Luego existe $M_1 > 0$ tal que

$$\|\vec{x_n}\| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Se sigue de (3) que

$$\big|\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) - \left(\vec{x_n}\middle|\vec{y_n}\right)\big| \leq \|\vec{x} - \vec{x_n}\|\|\vec{y}\| + M\|\vec{y} - \vec{y_n}\|$$

y, por ende

$$\lim_{n\to\infty} \big|\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) - \left(\vec{x_n}\middle|\vec{y_n}\right)\big| = 0$$

con lo que se tiene el resultado. ■

Definición 1.1.3
Decimos que un espacio prehilbertiano se llama **Hilbertiano**, si la norma $\|\cdot\|$ hace de él un espacio normado completo (o sea, un espacio normado de Banach).

Ejemplo 1.1.4
Los espacios $L_2(S,\mathbb{K})$, $l_2(\mathbb{K})$ y todo espacio prehilbertiano de dimensión finita ($\mathbb{K}$) eson hilbretianos (ya que, todo espacio prehilbertiano de dimensión finita es isomorfo a $\mathbb{R}^k$, para algún $k\in\mathbb{N}$).

De ahora en adelante, H denotará siempre a un espacio prehilbertiano (a menos que se indique lo contrario).

Definición 1.1.4
Sean $\vec{x},\vec{y}\in H$. Se dice que $\vec{x}$ **y** $\vec{y}$ **son ortogonales** y se escribe $\vec{x}\perp\vec{y}$, si $\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)=0$.

Observación 1.1.2
La condición $\vec{x}\perp\vec{y}$ para todo $\vec{x}\in H$ implica que $\vec{y}=\vec{0}$, pues en particular $\left(\vec{y}\middle|\vec{y}\right)=0\Rightarrow\vec{y}=\vec{0}$.

Teorema 1.1.2 (Teorema de Pitágoras)
Si $(\vec{x_1},\dots,\vec{x_n})$ es un sistema de vectores ortogonales (a pares), entonces

$$\|\vec{x_1}+\cdots+\vec{x_n}\|^2=\|\vec{x_1}\|^2+\cdots+\|\vec{x_n}\|^2$$

Demostración:
Se procederá por inducción sobre n. Veamos el caso $n=2$. En este caso, veamos que

$$\begin{aligned}\|\vec{x_1}+\vec{x_2}\|^2&=\left(\vec{x_1}+\vec{x_2}\middle|\vec{x_1}+\vec{x_2}\right)\\&=\|\vec{x_1}\|^2+\left(\vec{x_1}\middle|\vec{x_2}\right)+\left(\vec{x_2}\middle|\vec{x_1}\right)+\|\vec{x_2}\|^2\\&=\|\vec{x_1}\|^2+\|\vec{x_2}\|^2\end{aligned}$$

Suponga que los k-vectores $\vec{x_1},...\vec{x_k}$ son ortogonales. ■

Proposición 1.1.2 (Identidad del paralelogramo)
Para todo $\vec{x},\vec{y}\in H$ se cumple la identidad del paralelogramo:

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2+\|\vec{x}-\vec{y}\|^2=2(\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2)$$

Demostración:
Ejercicio. ■

Este resultado anterior es importante, pues en espacios donde la norma no venga de un producto escalar, no se cumple la igualdad.

Ejemplo 1.1.5
Los vectores $\chi_{[0,1]}$ y $\chi_{[1,2]}$ son ortogonales en $L_2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Ejemplo 1.1.6
Los vectores sen y cos son ortogonales en $L_2([-\pi,\pi[,\mathbb{R})$. En efecot, veamos que

$$\big(\operatorname{sen}\,\big|\,\cos\big) = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x \cos x dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} 2x dx = 0$$

En particular, por Pitágoras se tiene que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \big|\operatorname{sen} x + \cos x\big|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \big|\operatorname{sen} x\big|^2 dx + \int_{-\pi}^{\pi} \big|\cos x\big|^2 dx$$

Ejemplo 1.1.7
Si $\vec{x} = (1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{3}, ...)$ y $\vec{x} = (1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{3},)$ son elementos de $l_2(\mathbb{R})$, se tiene que $\vec{x} \perp \vec{y}$. En efecto, veamos que

$$\begin{aligned}(\vec{x}|\vec{y}) &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} s_n\end{aligned}$$

donde $\{s_n\}$ es la sucesión de sumas parciales, siendo $s_{2m} = 0$ y $s_{2m-1} = \frac{1}{m}$. Por lo cual

$$\big(\vec{x}\big|\vec{y}\big) = \lim_{n\to\infty} s_n = 0$$

Teorema 1.1.3
Sea M un subespacio de un espaco prehilbertiano H y sea $\vec{x} \in H$.

1). Suponiendo que existe $\vec{x_0} \in M$ tal que $\vec{x} - \vec{x_0} \perp M$, es decir que $\vec{x} - \vec{x_0} \perp \vec{y}$, para todo $\vec{y} \in M$, se tiene

$$\|\vec{x} - \vec{x_0}\| < \|\vec{x} - \vec{y}\|, \quad \forall \vec{y} \in M, \vec{y} \neq \vec{x_0}$$

Así pues, si existe $\vec{x_0}$, tal vector es único y es llamado **la proyección ortogonal de $\vec{x}$ sobre M**. Además

$$d(\vec{x}, M)^2 = \|\vec{x} - \vec{x_0}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{x_0}\|^2$$

2). Recíprocamente, si existe un $\vec{x_0} \in M$ tal que $d(\vec{x}, M) = \|\vec{x} - \vec{x_0}\|$, entonces $\vec{x_0}$ es la proyección ortogonal de $\vec{x}$ sobre M. En particular, si $\vec{x} \in M$ entonces $\vec{x} = \vec{x_0}$, es decir que $\vec{x}$ es su propia proyección ortogonal sobre M.

Demostración:

■

Dado un subespacio M de un espacio prehilbertiano H un vector $\vec{x} \in H$, puede no existir la proyección ortogonal de $\vec{x}$ sobre M. Esto motiva la siguiente definición:

Definición 1.1.5
Un subespacio M de H se dice que es **distinguido** si para cada $\vec{x} \in H$ existe la proyección ortogonal de $\vec{x}$ sobre M.

Observación 1.1.3