Notas Curso Topología I
Axiomas de Numerabilidad

Cristo Daniel Alvarado

6 de mayo de 2024

Índice general

Capítulo 5

Axiomas de Numerabilidad

5.1. Conceptos Fundamentales

Observación 5.1.1
De ahora en adelante numerable será equivalente a lo sumo numerable.

Definición 5.1.1
Sea (X, τ) un espacio topológico.

1. Sean $x \in X$ y $\mathcal{U}$ una colección de vecindades de x. Diremos que $\mathcal{U}$ es un **sistema fundamental de vecindades de** x si dada $V \in \mathcal{V}(x)$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \subseteq V$. Si $\mathcal{U}$ es numerable, $\mathcal{U}$ se dice un **sistema fundamental numerable de vecindades de** x.

2. Si dado $x \in X$ existe un sistema fundamental numerable de vecindades de x, el espacio (X, τ) se dice **primero numerable**.

3. El espacio (X, τ) se dice un **espacio segundo numerable** si su topología tiene una base numerable.

4. El espacio (X, τ) se dice un **espacio separable** si existe $A \subseteq X$ tal que A es numerable y además $\overline{A} = X$ (es decir que es denso en X).

5. El espacio (X, τ) se dice un **espacio de Lindelöf** si cada cubierta abierta del espacio tiene una subcubierta numerable.

5.2. Espacios Primero Numerables

Proposición 5.2.1
Sea (X, τ) un espacio primero numerable. Si $Y \subseteq X$ entonces (Y, τ_Y) es primero numerable.

Demostración:
Sea $Y \subseteq X$. Sea $y \in Y$, en particular $y \in X$. Como (X, τ) es primero numeable, existe un sistema fundamental de vecindades de x en (X, τ), digamos $\mathcal{U}'$, es decir que para este $\mathcal{U}'$ se cumple:

$$\forall V \in \mathcal{V}(x) \exists U \in \mathcal{U}' \text{ tal que } U \subseteq V$$

Sea

$$\mathcal{U} = \left\{ Y \cap U \middle| U \in \mathcal{U}' \right\}$$

Tenemos que $U \in \mathcal{U}'$, $Y \cap U$ es una vecindad de y en (Y, τ_Y) y, como $\mathcal{U}'$ es numerable, también $\mathcal{U}$ lo es.

Sea $W \subseteq Y$ una vecindad de y en (Y, τ_Y), luego existe $V \in \tau$ tal que

$$y \in Y \cap V \subseteq W$$

Como en particular V es una vecindad de y en (X, τ), entonces existe $U \in \mathcal{U}'$ tal que

$$U \subseteq V$$

luego,

$$Y \cap U \subseteq Y \cap V \subseteq W$$

donde $Y \cap U \in \mathcal{U}$. Así, $\mathcal{U}$ es un sistema fundamental de vecindades de y en (Y, τ_Y). Como $y \in Y$ fue arbitrario, se sigue que (Y, τ_Y) es primero numerable. ■

Proposición 5.2.2
La propiedad de ser primero numerable es topológica.

Demostración:
Sean (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) espacios topológicos homeomorfos tales que (X_1, τ_1) es primero numerable. Sea $f : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$ el homeomorfismo entre tales espacios. Veamos que (X_2, τ_2) es primero numeable.

En efecto, sea $x_2 \in X_2$, entonces existe un único $x_1 \in X_1$ tal que $f(x_1) = x_2$. Como (X_1, τ_1) es primero numerable, entonces existe $\mathcal{U}_1$ sistema fundamental numerable de vecindades de x_1. Sea

$$\mathcal{U}_2 = \left\{ f(U_1) \middle| U_1 \in \mathcal{U}_1 \right\}$$

Como $\mathcal{U}_1$ es numerable, $\mathcal{U}_2$ también lo es. Y, como $U_1 \in \mathcal{U}_1$ es una vecindad de x_1, entonces $f(U_1)$ es una vecindad de x_2 (por ser f homeomorfismo). Por tanto, $\mathcal{U}_2$ es una colección de vecindades de x_2. Ahora, sea $V \in \mathcal{V}(x_2)$ una vecindad de x_2. Como f es homeomorfismo entonces

$$f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x_1)$$

Luego, existe $U \in \mathcal{U}_1$ tal que

$$U \subseteq f^{-1}(V) \Rightarrow f(U) \subseteq V$$

por ser f biyección, donde $f(U) \in \mathcal{U}_2$.

Así, $\mathcal{U}_2$ es un sistema fundamental numerable de vecindades de x_2. Como el elemento x_2 fue arbitrario, se sigue que (X_2, τ_2) es primero numerable. Luego, la propiedad de ser primero numerable es topológica. ■

Proposición 5.2.3
Sean $\{(X_k, \tau_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ una familia numerable de espacios topológicos y

$$X = \prod_{k \in \mathbb{N}} X_k$$

Entonces, (X, τ_p) es primero numerable si y sólo si (X_k, τ_k) es primero numerable, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demostración:

$\Rightarrow$): Es inmediato del hecho de que la propiedad de ser primero numerable es hereditaria y topológica.

$\Leftarrow$): Suponga que (X_k, τ_k) es primero numerable para todo $k \in \mathbb{N}$. Sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$. Si $k \in \mathbb{N}$, se tiene que (X_k, τ_k) es primero numerable. Para $x_k \in X_k$ existe

$$\mathcal{U}_k = \left\{U_m^k\right\}_{m\in\mathbb{N}}$$

sistema fundamental numerable de vecindades de x_k en (X_k, τ_k). Definimos

$$\mathcal{U} = \left\{\prod_{l\in\mathbb{N}} A_l \middle| \text{ existe } I = \{i_1, ..., i_t\} \subseteq \mathbb{N} \text{ finito con } i_r < i_s \text{ si } r < s \text{ tal que} \right.$$
$$\left. l \in \mathbb{N} - I \Rightarrow A_l = X_l \text{ y } l \in I \Rightarrow A_k \in \mathcal{U}_l\right\}$$

veamos que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}(x)$ y además $\mathcal{U}$ es un sistema fundamental de vecindades de x. Sea $U = \prod_{t\in\mathbb{N}} U_t$ un básico de la topología producto tal que $x \in U$. Tenemos que existe $I \subseteq \mathbb{N}$ finito tal que

$$l \in \mathbb{N} - I \Rightarrow U_l = X_l \text{ y } l \in I \Rightarrow x_l \in U_l \in \tau_l$$

Para $l \in I$ existe $U_{m_l}^l \in \mathcal{U}_l$ tal que $x_l \in U_{m_l}^l \subseteq U_l$. Sea

$$A = \prod_{l\in\mathbb{N}} A_l$$

donde,

$$l \in \mathbb{N} - I \Rightarrow A_l = X_l \text{ y } l \in I \Rightarrow A_l = U_{m_l}^l$$

por tanto, $A \in \mathcal{U}$ y es tal que $x \in A \subseteq U$. ■