Lista Extensiones Normales AM III

Cristo Daniel Alvarado

Diciembre de 2023

Capítulo 3

Ejercicios

3.1. Extensiones Normales

Ejercicio 3.1.1
Sea E/F una extensión de campos. Denotamos por $\mathrm{Aut}(E)$ (resp. $\mathrm{Aut}_F(E)$) al conjunto de todos los automorfismos (resp. F-automorfismos) de E. Demuestre que $\mathrm{Aut}(E)$ es un grupo con la compsición de funciones, y que $\mathrm{Aut}_F(E)$ es un subgrupo de $\mathrm{Aut}(E)$.

Demostración:
Claramente el resultado se tiene de que $\mathrm{Aut}(E)$ es un grupo con la composición de funciones. Veamos que $\mathrm{Aut}_F(E)$ es un subgrupo. En efecto, el conjunto $\mathrm{Aut}_F(E)$ es no vacío pues $\mathrm{id}_E \in \mathrm{Aut}_F(E)$. Ahora, sean $f, g \in \mathrm{Aut}(E)$, se tiene que

$$f(\alpha) = \alpha = g(\alpha), \quad \forall \alpha \in F. \tag{3.1}$$

donde $f, g \in \mathrm{Aut}(E)$. En particular, se tiene que $f \circ g^{-1}$ es un elemento de $\mathrm{Aut}(E)$. Y además:

$$\begin{aligned} g^{-1}(\alpha) =& g^{-1}(g(\alpha)) \\ =& \alpha, \quad \forall \alpha \in F \end{aligned} \tag{3.2}$$

es decir, g^{-1} es un F-automorfismo de E. Por tanto

$$\begin{aligned} f \circ g^{-1}(\alpha) =& f(g^{-1}(\alpha)) \\ =& f(\alpha) \\ =& \alpha, \quad \forall \alpha \in F \end{aligned} \tag{3.3}$$

entonces, $f \circ g^{-1} \in \mathrm{Aut}_F(E)$. Luego, $\mathrm{Aut}_F(E) < \mathrm{Aut}(E)$. $\square$

Ejercicio 3.1.2
Calcule $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q})$ y $\mathrm{Aut}_K(K(X))$ donde $K(X)$ es el campo de funciones racionales en la variable X sobre K.

Demostración:

$\square$

Ejercicio 3.1.3
Sea E el campo de descomposición de un polinomio $f(X) \in F[X]$ con $\deg(f) = n \geq 1$. Pruebe que $[E : F]$ divide a $n!$. Más aún, el grupo $\mathrm{Aut}_F(E)$ está encajado en el grupo simétrico S_n de grado n.

Demostración:

Como E es el campo de descomposición de $f(X)$, entonces expresamos a $E = F(u_1, \ldots, u_n)$, donde $u_1, \ldots, u_n \in E$ son las raíces del polinomio $f(X)$. $\square$

Ejercicio 3.1.4
Sean α, β algebraicos sobre F, y sean $f(X) = \operatorname{irr}(\alpha, F, X)$ y $g(X) = \operatorname{irr}(\beta, F, X)$ tales que $\deg(f)$ y $\deg(g)$ son primos relativos. Demuestre que g es irreducible sobre $F(\alpha)[X]$.

Demostración:

$\square$

Ejercicio 3.1.5
Sea α una raíz del polinomio $X^6 + X^3 + 1$ sobre $\mathbb{Q}$. Encunetre todos los homomorfismos de $\mathbb{Q}(\alpha)$ en $\mathbb{C}$.(Sugerencia: El polinomio es el facto del polinomio $X^9 - 1$).

Demostración:

$\square$

Ejercicio 3.1.6
Encunetre el campo de descomposición de los siguientes polinmoios sobre $\mathbb{Q}$, y el grado de tales campos de descomposición sobre $\mathbb{Q}$.

1. $X^3 - 2$.
2. $X^2 + X + 1$.
3. $X^5 - 7$.
4. $(X^3 - 2)(X^2 - 2)$.
5. $X^6 + X^3 + 1$.

Demostración:

$\square$

Ejercicio 3.1.7
Sea α un númmero real tal que es raíz del polinomio $X^4 - 5 = 0$. Demuestre lo siguiente

1. $\mathbb{Q}(i\alpha)$ es una extensión normal sobre $\mathbb{Q}$.
2. $\mathbb{Q}(\alpha + i\alpha)$ es una extensión normal sobre $\mathbb{Q}(i\alpha)$, pero no sobre $\mathbb{Q}$.

Demostración:

$\square$

Ejercicio 3.1.8
Encuentre el campo de descomposición del polinomio $X^{p^s} - 1$ sobre el campo finito $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ de p elementos, con p número primo.

Demostración:

□

Ejercicio 3.1.9
Sea E/F una extensión algebraica. Demuestre que E/F es extensión normal si, y sólo si cada F-homomorfismo $\sigma : E \to N$, donde N es cualquier extensión normal de F que contiene a E, se tiene que $\sigma(E) = E$.

Demostración:

□