Espacios Hilbertianos

Cristo Daniel Alvarado

27 de febrero de 2024

Índice general

Capítulo 1

Espacios Hilbertianos

1.1. Conceptos básicos. Proyecciones ortogonales

Definición 1.1.1
Sea H un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$. Decimos que H es un **espacio prehilbertiano** si está dotado de una aplicación $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ con las propiedades siguientes:

1). $\forall \vec{y} \in H$ fijo, $\vec{x} \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ es una aplicación lineal de H en $\mathbb{K}$, o sea

$$\begin{aligned} \left(\vec{x_1} + \vec{x_2}\middle|\vec{y}\right) &= \left(\vec{x_1}\middle|\vec{y}\right) + \left(\vec{x_2}\middle|\vec{y}\right) \\ \left(\alpha\vec{x}\middle|\vec{y}\right) &= \alpha \cdot \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) \end{aligned}$$

para todo $\vec{x}, \vec{x_1}, \vec{x_2} \in H$ y $\alpha \in \mathbb{K}$.

2). $(\vec{y}|\vec{x}) = \overline{\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)}$, para todo $\vec{x} \in H$.

3). $\left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right) \geq 0$, para todo $\vec{x} \in H$.

4). $\left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right) = 0$ si y sólo si $\vec{x} = 0$.

Observación 1.1.1
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces 1) y 2) implican que $\forall \vec{x} \in H$ fijo, la aplicación $\vec{y} \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ de H en $\mathbb{R}$ es lineal. En este caso se dice que $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ es una **forma bilineal sobre** H.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, entonces

$$\begin{aligned} \left(\vec{x}\middle|\vec{y_1} + \vec{y_2}\right) &= \left(\vec{x}\middle|\vec{y_1}\right) + \left(\vec{x}\middle|\vec{y_2}\right) \\ \left(\vec{x}\middle|\alpha\vec{y}\right) &= \overline{\alpha}\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) \end{aligned}$$

Se dice que $\vec{y} \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ es entonces **semilineal** y que $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ es **sesquilineal** ($1\frac{1}{2}$-lineal).

La aplicación $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ se llama **producto escalar sobre** H.

Definición 1.1.2
Para todo $\vec{x} \in H$ se define la **norma de** $\vec{x}$ como: $\|\vec{x}\| = \sqrt{\left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right)}$.

Ejemplo 1.1.1
Sea $H = \mathbb{K}^n$

Ejemplo 1.1.2
Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y sea $H = L_2(S, \mathbb{K})$. Para todo $f, g \in H$ se define

$$\left(f \middle| g\right) = \int_S f\overline{g}$$

La integral existe por Hölder con $p = p^* = 2$. Este es un producto escalar sobre H y, en este caso:

$$\|f\| = \left[\int_S \left|f\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} = \mathcal{N}_2(f), \quad \forall f \in H$$

Ejemplo 1.1.3
Sea $H = l_2(\mathbb{K})$ el espacio de sucesiones en $\mathbb{K}$ que son cuadrado sumables. Se sabe que $\vec{x} = (x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{K})$ si y sólo si

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$$

$l_2(\mathbb{K})$ es un espacio prehilbertiano con el producto escalar:

$$\left(\vec{x} \middle| \vec{y}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$$

donde la serie es convergente por Hölder. En este caso:

$$\|\vec{x}\| = \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left|x_i\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} = \mathcal{N}_2(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in l_2(\mathbb{K})$$

Teorema 1.1.1 (Desigualdad de Cauchy-Schwartz)
Sea H un espacio prehilbertiano. Entonces:

1). Se cumple la desigualdad de Cauchy-Schwartz:

$$\left|\left(\vec{x} \middle| \vec{y}\right)\right| \leq \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in H$$

y, la igualdad se da si y sólo si los vectores son linealmente dependientes.

2). Se cumple la desigualdad triangular:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in H$$

y la igualdad se da si y sólo si uno de los vectores es múltiplo no negativo del otro.

Demostración:
De 1): Se supondrá que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (el caso en que sea $\mathbb{R}$ es similar y se deja como ejercicio).

Sean $\vec{x}, \vec{y} \in H$. En el caso de que alguno de los vectores sea $\vec{0}$, el resultado es inmediato (ambos miembros de la desigualdad son cero). Por lo cual, supongamos que ambos son no cero. Se tiene para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left(\vec{x} + \lambda\vec{y} \middle| \vec{x} + \lambda\vec{y}\right) \\ &= \left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right) + \overline{\lambda}\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) + \lambda\left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right) + \lambda\overline{\lambda}\left(\vec{y}\middle|\vec{y}\right) \\ &= \left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right) + \overline{\lambda\left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right)} + \lambda\left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right) + \lambda\overline{\lambda}\left(\vec{y}\middle|\vec{y}\right) \\ &= \|\vec{x}\|^2 + 2\Re\lambda\left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right) + \left|\lambda\right|^2\|\vec{y}\|^2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

En particular, para

$$\lambda(t) = \begin{cases} t\dfrac{\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)}{\left|\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)\right|} & \text{si} \quad \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) \neq 0 \\ t & \text{si} \quad \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) = 0 \end{cases}$$

con $t \in \mathbb{R}$, la desigualdad (1) se convierte en

$$0 \leq \|\vec{x}\|^2 + 2t\left|\left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right)\right| + t^2\|\vec{y}\|^2 \tag{1.2}$$

El trinomio anterior es mayor o igual a cero si y sólo si su discriminante:

$$\left|\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)\right|^2 - \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2 \leq 0$$

es decir

$$\left|\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)\right| \leq \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$$

Si $\left|\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)\right| = \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2$, entonces el trinomio en (2) tiene una raíz doble. Luego, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que

$$\left(\vec{x} + \lambda\vec{y}\middle|\vec{x} + \lambda\vec{y}\right) = 0$$

pero lo anterior solo sucede si y sólo si $\vec{x} + \lambda\vec{y} = 0$, es decir si $\vec{x}$ y $\vec{y}$ son linealmente dependientes.

De 2): Se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 &= \left(\vec{x} + \vec{y}\middle|\vec{x} + \vec{y}\right) \\ &= \|\vec{x}\| + 2\Re\left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right) + \|\vec{y}\|^2 \\ &\leq \|\vec{x}\| + 2\left|\left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right)\right| + \|\vec{y}\|^2 \\ &\leq \|\vec{x}\| + 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 \\ &= (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2 \end{aligned}$$

lo cual implica la desigualdad que se quiere probar. Ahora, la igualdad se cumple si y sólo si

$$\left|\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)\right| = \Re\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) \ \text{ y } \left|\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)\right| = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$$

la primera igualdad implica que $\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ es real (en particular, ≥ 0 por el valor absoluto) y la segunda implica que $\vec{x}$ y $\vec{y}$ son linealmente dependientes. Es decir, si y sólo si un vector es multiplo no negativo del otro. ■

Se concluye del teorema anterior que $\|\cdot\|$ es una norma sobre H. En lo sucesivo se consdierará a H como espacio normado dotado de esta norma.

Proposición 1.1.1
La aplicación $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ es una función continua del espacio normado producto $H \times H$ en $\mathbb{K}$.

Demostración:

Sean $\vec{x}, \vec{y} \in H$ y, $\{\vec{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{\vec{y_n}\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones que convergen a $\vec{x}$ y $\vec{y}$, respectivamente. Se probará que $\left\{\left(\vec{x_n}\middle|\vec{y_n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ en $\mathbb{K}$. Se tiene que

$$\begin{aligned} \left|\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) - \left(\vec{x_n}\middle|\vec{y_n}\right)\right| &\leq \left|\left(\vec{x} - \vec{x_n}\middle|\vec{y}\right)\right| + \left|\left(\vec{x_n}\middle|\vec{y} - \vec{y_n}\right)\right| \\ &\leq \|\vec{x} - \vec{x_n}\|\|\vec{y}\| + \|\vec{x_n}\|\|\vec{y} - \vec{y_n}\| \end{aligned} \tag{1.3}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\{\vec{x_n}\}$ es convergente, es acotada. Luego existe $M > 0$ tal que

$$\|\vec{x_n}\| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Se sigue de (3) que

$$\left|\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) - \left(\vec{x_n}\middle|\vec{y_n}\right)\right| \leq \|\vec{x} - \vec{x_n}\|\|\vec{y}\| + M\|\vec{y} - \vec{y_n}\|$$

y, por ende

$$\lim_{n\to\infty} \left|\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) - \left(\vec{x_n}\middle|\vec{y_n}\right)\right| = 0$$

con lo que se tiene el resultado. ■

Definición 1.1.3

Decimos que un espacio prehilbertiano se llama **Hilbertiano**, si la norma $\|\cdot\|$ hace de él un espacio normado completo (o sea, un espacio normado de Banach).

Ejemplo 1.1.4

Los espacios $L_2(S, \mathbb{K})$, $l_2(\mathbb{K})$ y todo espacio prehilbertiano de dimensión finita ($\mathbb{K}^n$) son hilbretianos (ya que, todo espacio prehilbertiano de dimensión finita es isomorfo a $\mathbb{R}^k$, para algún $k \in \mathbb{N}$).

De ahora en adelante, H denotará siempre a un espacio prehilbertiano (a menos que se indique lo contrario).

Definición 1.1.4

Sean $\vec{x}, \vec{y} \in H$. Se dice que $\vec{x}$ **y** $\vec{y}$ **son ortogonales** y se escribe $\vec{x} \perp \vec{y}$, si $\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) = 0$.

Observación 1.1.2

La condición $\vec{x} \perp \vec{y}$ para todo $\vec{x} \in H$ implica que $\vec{y} = \vec{0}$, pues en particular $\left(\vec{y}\middle|\vec{y}\right) = 0 \Rightarrow \vec{y} = \vec{0}$.

Teorema 1.1.2 (Teorema de Pitágoras)

Si $(\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n})$ es un sistema de vectores ortogonales (a pares), entonces

$$\|\vec{x_1} + \cdots + \vec{x_n}\|^2 = \|\vec{x_1}\|^2 + \cdots + \|\vec{x_n}\|^2$$

Demostración:

Se procederá por inducción sobre n. Veamos el caso $n = 2$. En este caso, veamos que

$$\begin{aligned} \|\vec{x_1} + \vec{x_2}\|^2 &= \left(\vec{x_1} + \vec{x_2}\middle|\vec{x_1} + \vec{x_2}\right) \\ &= \|\vec{x_1}\|^2 + \left(\vec{x_1}\middle|\vec{x_2}\right) + \left(\vec{x_2}\middle|\vec{x_1}\right) + \|\vec{x_2}\|^2 \\ &= \|\vec{x_1}\|^2 + \|\vec{x_2}\|^2 \end{aligned}$$

Suponga que el resultado se cumple para $n \geq 2$. Sea $\vec{x_1}, ...\vec{x_{n+1}} \in H$ un sistema de vectores ortogonales. Observemos que

$$\begin{aligned}\left(\vec{x_1} + \cdots + \vec{x_n} \middle| \vec{x_{n+1}}\right) &= \left(\vec{x_1} \middle| \vec{x_{n+1}}\right) + \cdots + \left(\vec{x_n} \middle| \vec{x_{n+1}}\right) \\ &= 0 + \cdots + 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

por lo cual, $x_{n+1} \perp \vec{x_1} + \cdots + \vec{x_n}$. Por el caso $n = 2$ se sigue que:

$$\|\vec{x_1} + \cdots + \vec{x_{n+1}}\|^2 = \|\vec{x_1} + \cdots + \vec{x_n}\|^2 + \|\vec{x_{n+1}}\|^2$$

Pero, por hipótesis de inducción:

$$\|\vec{x_1} + \cdots + \vec{x_n}\|^2 = \|\vec{x_1}\|^2 + \cdots + \|\vec{x_n}\|^2$$

Por lo cual:

$$\|\vec{x_1} + \cdots + \vec{x_{n+1}}\|^2 = \|\vec{x_1}\|^2 + \cdots + \|\vec{x_n}\|^2 + \|\vec{x_{n+1}}\|^2$$

Aplicando inducción se sigue el resultado. ■

Proposición 1.1.2 (Identidad del paralelogramo)
Para todo $\vec{x}, \vec{y} \in H$ se cumple la identidad del paralelogramo:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2)$$

Demostración:
Sean $\vec{x}, \vec{y} \in H$. Veamos que

$$\begin{aligned}\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 &= \left(\vec{x} + \vec{y} \middle| \vec{x} + \vec{y}\right) + \left(\vec{x} - \vec{y} \middle| \vec{x} - \vec{y}\right) \\ &= \|\vec{x}\|^2 + 2\Re\left(\vec{y} \middle| \vec{x}\right) + \|\vec{y}^2\| + \|\vec{x}\|^2 - 2\Re\left(\vec{y} \middle| \vec{x}\right) + \|\vec{y}\|^2 \\ &= 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2)\end{aligned}$$

■

Este resultado anterior es importante, pues en espacios donde la norma no venga de un producto escalar, no necesariamente se cumple la igualdad.

Ejemplo 1.1.5
Los vectores $\chi_{[0,1]}$ y $\chi_{[1,2]}$ son ortogonales en $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (es inmediato del producto escalar en $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$).

Ejemplo 1.1.6
Los vectores sen y cos son ortogonales en $L_2([-\pi, \pi[, \mathbb{R})$. En efecto, veamos que

$$\left(\operatorname{sen} \middle| \cos\right) = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x \cos x dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} 2x dx = 0$$

En particular, por Pitágoras se tiene que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\operatorname{sen} x + \cos x\right|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left|\operatorname{sen} x\right|^2 dx + \int_{-\pi}^{\pi} \left|\cos x\right|^2 dx$$

Ejemplo 1.1.7
Si $\vec{x} = (1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{3}, ...)$ y $\vec{x} = (1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{3},)$ son elementos de $l_2(\mathbb{R})$, se tiene que $\vec{x} \perp \vec{y}$. En efecto, veamos que

$$\begin{aligned}(\vec{x}|\vec{y}) &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} s_n\end{aligned}$$

donde $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de sumas parciales, siendo $s_{2m} = 0$ y $s_{2m-1} = \frac{1}{m}$. Por lo cual

$$(\vec{x}|\vec{y}) = \lim_{n\to\infty} s_n = 0$$

Teorema 1.1.3
Sea M un subespacio de un espaco prehilbertiano H y sea $\vec{x} \in H$.

1). Suponiendo que existe $\vec{x_0} \in M$ tal que $\vec{x} - \vec{x_0} \perp M$, es decir que $\vec{x} - \vec{x_0} \perp \vec{y}$, para todo $\vec{y} \in M$, se tiene
$$\|\vec{x} - \vec{x_0}\| < \|\vec{x} - \vec{y}\|, \quad \forall \vec{y} \in M, \vec{y} \neq \vec{x_0}$$
Así pues, si existe $\vec{x_0}$, tal vector es único y es llamado **la proyección ortogonal de $\vec{x}$ sobre M**. Además
$$d(\vec{x}, M)^2 = \|\vec{x} - \vec{x_0}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{x_0}\|^2$$

2). Recíprocamente, si existe un $\vec{x_0} \in M$ tal que $d(\vec{x}, M) = \|\vec{x} - \vec{x_0}\|$, entonces $\vec{x_0}$ es la proyección ortogonal de $\vec{x}$ sobre M. En particular, si $\vec{x} \in M$ entonces $\vec{x} = \vec{x_0}$, es decir que $\vec{x}$ es su propia proyección ortogonal sobre M.

Demostración:
De 1): Suponga que existe $\vec{x_0} \in M$ con la condición especificada. Sea $\vec{y} \in M$ distinto de $\vec{x_0}$. Como $\vec{x_0} - \vec{x} \perp \vec{x_0} - \vec{y}$, por el Teorema de Pitágoras se tiene que
$$\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\vec{x} - \vec{x_0}\|^2 + \vec{x_0} - \vec{y}^2 > \|\vec{x} - \vec{x_0}\|^2 \tag{1.4}$$
pues $\vec{x_0} \neq \vec{y}$. Así pues, $\vec{x_0}$ es único. Además $d(\vec{x}, M) = \|\vec{x} - \vec{x_0}\|$. Aplicando la ecuación 4) con $\vec{y} = \vec{0}$ se tiene que

$$\begin{aligned}\|\vec{x}\|^2 &= \|\vec{x} - \vec{x_0}\|^2 + \|\vec{x_0}\|^2 \\ \Rightarrow d(\vec{x}, M)^2 = \|\vec{x} - \vec{x_0}\|^2 &= \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{x_0}\|^2\end{aligned}$$

De 2) Si existe $\vec{x_0} \in M$ tal que $d(\vec{x}, M) = \|\vec{x} - \vec{x_0}\|$, entonces $\vec{x_0}$ debe ser la proyección ortogonal de $\vec{x}$ sobre M. En efecto, para todo $\vec{y} \in M$ y para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ se tiene

$$\begin{aligned}\|\vec{x} - (\vec{x_0} + \lambda\vec{y})\|^2 &\geq \|\vec{x} - \vec{x_0}\|^2 \\ \Rightarrow \|(\vec{x} - \vec{x_0}) - \lambda\vec{y}\|^2 &\geq \|\vec{x} - \vec{x_0}\|^2 \\ \Rightarrow \|\vec{x} - \vec{x_0}\|^2 + 2\Re[\overline{\lambda}\left(\vec{x} - \vec{x_0}|\vec{y}\right)] + |\lambda|^2\|\vec{y}\|^2 &\geq \|\vec{x} - \vec{x_0}\|^2 \\ \Rightarrow -2\Re[\lambda\left(\vec{x} - \vec{x_0}|\vec{y}\right)] + |\lambda|^2\|\vec{y}\|^2 &\geq 0\end{aligned} \tag{1.5}$$

en particular, para $\lambda = t\left(\vec{x} - \vec{x_0}|\vec{y}\right)$, con $t \in \mathbb{R}$, la ecuación anterior se transforma en:
$$|\left(\vec{x} - \vec{x_0}|\vec{y}\right)|^2 \left[-2t + t^2\|\vec{y}\|\right] \geq 0$$
para todo $t \in \mathbb{R}$. Esto exige que $\left(\vec{x} - \vec{x_0}|\vec{y}\right) = 0$, o sea que $\vec{x} - \vec{x_0} \perp \vec{y}$. ∎

Dado un subespacio M de un espacio prehilbertiano H un vector $\vec{x} \in H$, puede no existir la proyección ortogonal de $\vec{x}$ sobre M. Esto motiva la siguiente definición:

Definición 1.1.5
Un subespacio M de H se dice que es **distinguido** si para cada $\vec{x} \in H$ existe la proyección ortogonal de $\vec{x}$ sobre M.

Ejemplo 1.1.8
El subespacio ϕ_0 de las sucesiones eventualmente constantes de valor cero es un subespacio del espacio hilbretiano $l_2(\mathbb{R})$. Sea M el subespacio de ϕ_0 dado como sigue:

$$M = \{\vec{x} \in \phi_0 | x_2 = 0\}$$

Sea $\vec{x} = \left(0, \frac{1}{2^{0/2}}, \frac{1}{2^{1/2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^{3/2}}, ...\right)$. Se tiene que:

$$\begin{aligned}
d(\vec{x}, M) &= \inf_{\vec{y} \in M} \{\|\vec{x} - \vec{y}\|\} \\
&= \inf_{\vec{y} \in M} \left\{ \left[|y_1| + \sum_{i=2}^{\infty} \left| \frac{1}{2^{(i-2)/2}} - y_i \right|^2 \right]^{1/2} \right\} \\
&= 1 \\
&= \inf_{\vec{y} \in M} \left\{ \left[|y_1| + 1 + \sum_{i=3}^{\infty} \left| \frac{1}{2^{(i-2)/2}} - y_i \right|^2 \right]^{1/2} \right\} \\
&= 1
\end{aligned}$$

(pues, $y_2 = 0$). Pero $\|\vec{x} - \vec{y}\| > 1$, para todo $\vec{y} \in M$. En efecto, sea $\vec{y} \in M$, entonces $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq m$ se tiene que $y_k = 0 = y_2$. Veamos que

$$\begin{aligned}
\|\vec{x} - \vec{y}\| &= \left[|y_1| + 1 + \sum_{i=3}^{\infty} \left| \frac{1}{2^{(i-2)/2}} - y_i \right|^2 \right]^{1/2} \\
&\geq \left[1 + \sum_{i=3}^{k-1} \left| \frac{1}{2^{(i-2)/2}} - y_i \right|^2 + \sum_{i=k}^{\infty} \left| \frac{1}{2^{(i-2)/2}} - y_i \right|^2 \right]^{1/2} \\
&= \left[1 + \sum_{i=3}^{k-1} \left| \frac{1}{2^{(i-2)/2}} - y_i \right|^2 + \sum_{i=k}^{\infty} \left| \frac{1}{2^{(i-2)/2}} \right|^2 \right]^{1/2} \\
&\geq \left[1 + \sum_{i=k}^{\infty} \left| \frac{1}{2^{(i-2)/2}} \right|^2 \right]^{1/2} \\
&> [1]^{1/2} \\
&> 1
\end{aligned}$$

Luego no existe $\vec{x_0} \in M$ tal que $d(\vec{x}, M) = \|\vec{x} - \vec{x_0}\|$. Por lo tanto, no existe la proyección ortogonal de $\vec{x}$ sobre M (es decir, M no es distinguido).

Sin embargo, si $\vec{x} = (1, 1, 0, ...) \in l_2(\mathbb{R})$, entonces si existe la proyección ortogonal de $\vec{x}$ sobre

M, pues

$$\begin{aligned} d(\vec{x}, M) &= \inf_{\vec{y}\in M} \{\|\vec{x}-\vec{y}\|\} \\ &= \inf_{\vec{y}\in M} \left\{ \left[\left|1-y_1\right|^2 + 1^2 + \sum_{i=3}^{\infty} \left|y_i\right|^2 \right]^{1/2} \right\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

y $\|\vec{x}-\vec{e_1}\| = 1$, donde $\vec{e_1} \in M$. Por tanto, $\vec{e_1}$ es la proyección ortogonal de $\vec{x}$ sobre M.

Teorema 1.1.4
Si M es un subespacio completo de un espacio prehilbertiano, entonces M es distinguido. En particular todo subespacio de dimensión finita de un espacio prehilbertiano siempre es distinguido.

Demostración:
Sea $\vec{x} \in H$. Se debe probar que existe un $\vec{x_0} \in M$ tal que $d(\vec{x}, M) = \|\vec{x}-\vec{x_0}\|$. Sea $a = d(\vec{x}, M)$. Por propiedades del ínfimo existe una sucesión $\{\vec{y_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{\nu\to\infty} \|\vec{x}-\vec{y_\nu}\| = a \tag{1.6}$$

Sean $\nu, \mu \in \mathbb{N}$ arbitrarios. Por la identidad del paralelogramo se tiene que

$$\begin{aligned} 2\left(\|\vec{x}-\vec{y_\nu}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y_\mu}\|^2\right) &= \|\vec{y_\nu}-\vec{y_\mu}\|^2 + \|2\vec{x}-(\vec{y_\nu}+\vec{y_\mu})\|^2 \\ &= \|\vec{y_\nu}-\vec{y_\mu}\|^2 + 4\|\vec{x}-\frac{\vec{y_\nu}+\vec{y_\mu}}{2}\|^2 \\ &\geq \|\vec{y_\nu}-\vec{y_\mu}\|^2 + 4a^2 \end{aligned}$$

de donde

$$\|\vec{y_\nu}-\vec{y_\mu}\|^2 \leq 2\left(\|\vec{x}-\vec{y_\nu}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y_\mu}\|^2\right) - 4a^2$$

Tomando límite cuando ν, μ tienden a infinito y por (6), se tiene que

$$\lim_{\nu,\mu\to\infty} \|\vec{y_\nu}-\vec{y_\mu}\|^2 = 0$$

por tanto, $\{\vec{y_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Por ser M completo, existe $\vec{x_0} \in M$ tal que $\lim_{\nu\to\infty} \vec{y_\nu} = \vec{x_0}$. Por (6):

$$a = \lim_{\nu\to\infty} \|\vec{x}-\vec{y_\nu}\| = \|\vec{x}-\vec{x_0}\|$$

■

Ejemplo 1.1.9
¿Es distinguido el subespacio de $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dado por:

$$M = \{f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | f(x) = 0 \text{ c.t.p. en } [1,2]\}$$

?

La respuesta es que sí, ya que M es cerrado. En efecto, sea $\{f_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ una sucesión en M convergente en promedio cuadrático a una $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, es decir:

$$\lim_{\nu\to\infty} \mathcal{N}_2(f_\nu - f) = 0$$

Se sabe que existe una subsucesión de $\{f_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$, digamos $\left\{f_{\alpha(\nu)}\right\}_{\nu=1}^{\infty}$ que converge c.t.p. a f en $\mathbb{R}$. Como $f_{\alpha(\nu)} = 0$ c.t.p. en $[1,2]$, entonces $f = 0$ c.t.p. en $[1,2]$, es decir $f \in M$. Por tanto, M es distinguido.

Ahora, dada $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, ¿Cuál será la proyección ortogonal de f sobre M? Es claro que

$$f_0 = f \cdot \chi_{\mathbb{R}\setminus[1,2]} \in M$$

es la proyección ortogonal de f sobre M, y además $f - f_0 \perp M$.

Definición 1.1.6
Sea $S \subseteq H$ un conjunto arbitrario. Para este conjunto se define

$$S^{\perp} = \{\vec{x} \in H | \vec{x} \perp \vec{s}, \forall \vec{s} \in S\}$$

Es claro que $S^{\perp}$ es un subespacio cerrado de H.

Solución:
En efecto, si $\{\vec{x_\nu}\}$ es una sucesión en $S^{\perp}$ que converge a $\vec{x} \in H$, entonces

$$\left(\vec{x}\middle|\vec{s}\right) = \lim_{\nu\to\infty} \left(\vec{x_\nu}\middle|\vec{y}\right) = 0, \quad \forall \vec{s} \in S$$

por continuidad y para todo $\vec{s} \in S$. Luego $\vec{x} \in S^{\perp}$. Otra forma es definiendo una función $T_{\vec{s}} : H \to \mathbb{K}$ como

$$T_{\vec{s}}(\vec{x}) = \left(\vec{x}\middle|\vec{s}\right), \quad \forall \vec{x} \in H$$

Entonces

$$S^{\perp} = \bigcap_{\vec{s}\in S} \ker T_{\vec{s}}$$

Como $T_{\vec{s}}$ es lineal continua para todo $\vec{s} \in S$, entonces se sigue que $S^{\perp}$ es cerrado. □

Proposición 1.1.3
Un subespacio M de un espacio prehilbertiano H es distinguido si y sólo si

$$H = M \oplus M^{\perp}$$

Demostración:
$\Rightarrow$): Suponga que M es distinguido. Como $M \cap M^{\perp} = \left\{\vec{0}\right\}$, para probar que $H = M \oplus M^{\perp}$, basta probar que es la suma simplemente, es decir que $H = M + M^{\perp}$.

Sea $\vec{x} \in H$, como M es distinguido entonces existe $\vec{x_1} \in M$ tal que $\vec{x} - \vec{x_1} \perp M$, tomando $\vec{x_2} = \vec{x} - \vec{x_1}$ se tiene que $\vec{x_2} \in M^{\perp}$. Además $\vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2}$, lo que prueba el resultado.

$\Leftarrow$): Suponga que $H = M \oplus M^{\perp}$. Hay que probar que M es distinguido. Sea $\vec{x} \in H$ arbitrario. Por hipótesis existen $\vec{x_1} \in M$ y $\vec{x_2} \in M^{\perp}$ únicos tales que $\vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2}$. Se afirma que $\vec{x_1}$ es la proyección ortogonal de $\vec{x}$ sobre M.

En efecto,

$$\vec{x} - \vec{x_1} = \vec{x_2} \in M^{\perp}$$

pero $\vec{x_2} \perp M$, por tanto $\vec{x_1}$ es la proyección ortogonal. ■

Ejemplo 1.1.10
Sea $M = \left\{x \in l_2(\mathbb{R}) \middle| x(2n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}\right\}$. Afirmamos que M es distinguido, para lo cual basta ver que este subespacio es cerrado (por ser $l_(\mathbb{R})$ completo, es decir por ser un espacio Hilbertiano).

Sea $\{\vec{x_n}\}$ una sucesión en $l_2(\mathbb{R})$ que converge a $\vec{x} \in l_2(\mathbb{R})$, es decir

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mathcal{N}_2(\vec{x} - \vec{x_n}) =& 0 \\ \lim_{k\to\infty} (\vec{x}(2k) - \vec{x_n}(2k)) =& 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \vec{x}(2k) =& 0 \quad \forall x \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{1.7}$$

por lo cual, $\vec{x} \in M$. Luego, M es cerrado. Dado que M es distinguido, si $\vec{x} \in l_2(\mathbb{R}) = M \oplus M^\perp$, se tiene

$$\vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2}$$

donde $\vec{x_1} \in M$ y $\vec{x_2} \in M^\perp$ son únciso y están dados por:

$$\begin{aligned} \vec{x_1} =& (\vec{x}(1), 0, \vec{x}(3), ...) \\ \vec{x_2} =& (0, \vec{x}(2), 0, \vec{x}(4), ...) \end{aligned}$$

Corolario 1.1.1
Si M es un subespacio distinguido de H, entonces $M^\perp$ es también un subespacio distinguido.

Demostración:
Se probará que cualquier $\vec{x} \in H$ posee una proyección ortogonal sobre $M^\perp$. Por el teorema anterior:

$$\vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2}$$

con $\vec{x_1} \in M$ y $\vec{x_2} \in M^\perp$ únicos. Luego, $\vec{x} - \vec{x_2} = \vec{x_1} \in M$, por lo que cualquier vector en $M^\perp$ se cumple que $\vec{x_1} \perp \vec{y}$, para todo $\vec{y} \in M$, es decir que $\vec{x_2}$ es la proyecicón ortogonal de $\vec{x}$ sobre $M^\perp$. ■

Proposición 1.1.4
Si M es un subespacio distinguido de H, entonces $M^{\perp\perp} = M$.

Demostración:
Claramente $M \subseteq M^{\perp\perp}$. Ahora, sea $\vec{x} \in M^{\perp\perp}$, por el teorema $\vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2}$ donde $\vec{x_1} \in M$ y $\vec{x_2} \in M^\perp$ únicos.

Se tiene que

$$0 = \left(\vec{x}\middle|\vec{x_2}\right) = \left(\vec{x}\middle|\vec{x_1}\right) + \left(\vec{x_2}\middle|\vec{x_2}\right) = \left(\vec{x_2}\middle|\vec{x_2}\right)$$

es decir que $\vec{x_2} = \vec{0}$. Por tanto, $\vec{x} \in M$.

Luego, $M = M^{\perp\perp}$. ■

Corolario 1.1.2
En un espacio hilbertiano H, un subespacio es distinguido si y sólo si es cerrado.

Demostración:
Si es cerrado es inmediato que es distinguido. Ahora, si es distinguido entonces es cerrado, pues por el corolario anterior $M = M^{\perp\perp}$, donde $M^{\perp\perp}$ es cerrado por ser intersección arbitraria de cerrrados, luego M es cerrado. ■

Proposición 1.1.5
Sea H un espacio prehilbertiano y sea M un subespacio distinguido de H (que no se reduce al $\left\{\vec{0}\right\}$). $\forall \vec{x} \in H$ sea $\pi(\vec{x})$ la **proyección ortogonal de $\vec{x}$ sobre** M.

Entonces $\pi : H \to M$ es lineal continua y tal que $\|\pi\| = 1$. Además, $\pi \circ \pi = \pi$, y $\left(\pi(\vec{x})\middle|\vec{y}\right) =$

$\left(\vec{x}\middle|\pi(\vec{y})\right)$.

Demostración:

Sea $\vec{x} \in H$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Si $\alpha = 0$, el resultado es inmediato. Suponga que $\alpha \neq 0$. Se tiene que $\alpha\pi(\vec{x}) \in M$ por ser subespacio, y

$$\alpha\vec{x} - \alpha\pi(\vec{x}) = \alpha(\vec{x} - \pi(\vec{x})) \perp M$$

Luego, $\alpha\pi(\vec{x})$ es una proyección ortogonal de $\alpha\vec{x}$ sobre M, pero por unicidad de la proyección ortogonal, se tiene que $\pi(\alpha\vec{x}) = \alpha\pi(\vec{x})$.

Ahora, sean $\vec{x}, \vec{y} \in H$. Entonces, $\pi(\vec{x}) + \pi(\vec{y}) \in M$ y:

$$(\vec{x} + \vec{y}) - (\pi(\vec{x}) + \pi(\vec{x})) = (\vec{x} - \pi(\vec{x})) + (\vec{y} - \pi(\vec{y})) \perp M$$

es decir que $\pi(\vec{x}) + \pi(\vec{y})$ es una proyección ortogonal de $\vec{x} + \vec{y}$ sobre M. Por unicidad,

$$\pi(\vec{x} + \vec{y}) = \pi(\vec{x}) + \pi(\vec{y})$$

Por tanto, π es lineal.

Ahora, veamos que es continua. Se sabe que:

$$\begin{aligned}
d(\vec{x}, M)^2 &= \|\vec{x} - \pi(\vec{x})\|^2 \\
&= \|\vec{x}\|^2 - \|\pi(\vec{x})\|^2 \\
\Rightarrow \|\pi(\vec{x})\|^2 &= \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{x} - \pi(\vec{x})\|^2 \\
&\leq \|\vec{x}\|^2
\end{aligned}$$

luego, π es continua y, $\|\pi\| \leq 1$.

Sea ahora $\vec{x} \in M$, $\vec{x} \neq \vec{0}$. Entonces:

$$\|\vec{x}\| = \|\pi(\vec{x})\| \leq \|\pi\|\|\vec{x}\|$$

por tanto, $\|\pi\| \geq 1$, por lo anterior se sigue que $\|\pi\| = 1$.

Ya se sabe que $\pi \circ \pi = \pi^2 = \pi$ (por la proposición anterior).

Sean $\vec{x}, \vec{y} \in H$ arbitrarios. Entonces, $\pi(\vec{x}) \in M$ y $\vec{y} - \pi(\vec{y}) \perp M$, por lo cual

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\pi(\vec{x})\middle|\vec{y} - \pi(\vec{y})\right) \\
&= \left(\pi(\vec{x})\middle|\vec{y}\right) - \left(\pi(\vec{x})\middle|\pi(\vec{y})\right) \\
\Rightarrow \left(\pi(\vec{x})\middle|\vec{y}\right) &= \left(\pi(\vec{x})\middle|\pi(\vec{y})\right)
\end{aligned}$$

Intercambiando los papeles de $\vec{x}$ y $\vec{y}$ se obtiene que: $\left(\pi(\vec{y})\middle|\vec{x}\right) = \left(\pi(\vec{y})\middle|\pi(\vec{x})\right)$ o sea:

$$\left(\vec{x}\middle|\pi(\vec{y})\right) = \left(\pi(\vec{x})\middle|\pi(\vec{y})\right)$$

por lo cual $\left(\pi(\vec{x})\middle|\vec{y}\right) = \left(\vec{x}\middle|\pi(\vec{y})\right)$. ■

Proposición 1.1.6

Sea H prehilbertiano. Suponga que π es una aplicación lineal de H en H tal que

- $\pi^2 = \pi$.
- $\left(\pi(\vec{x})\middle|\vec{y}\right) = \left(\vec{x}\middle|\pi(\vec{y})\right), \forall \vec{x}, \vec{y} \in H$.

Entonces existe un único subespacio distinguido M de H tal que π es la proyección ortogonal de H sobre M.

Demostración:

Claramente, si M existe debe ser $M = \pi(H)$, o sea:

$$M = \pi(H) = \left\{\pi(\vec{x})\middle|\vec{x} \in H\right\}$$

Se debe probar que si $\vec{x} \in H$ es arbitrario $\vec{x} - \pi(\vec{x}) \perp M$, o sea

$$\left(\vec{x} - \pi(\vec{x})\middle|\pi(\vec{y})\right) = 0, \quad \forall \vec{y} \in H$$

Sean $\vec{x}, \vec{y} \in H$. Se tiene que:

$$\begin{aligned}\left(\vec{x} - \pi(\vec{x})\middle|\pi(\vec{y})\right) &= \left(\vec{x}\middle|\pi(\vec{y})\right) - \left(\pi(\vec{x})\middle|\pi(\vec{y})\right)\\ &= \left(\vec{x}\middle|\pi(\vec{y})\right) - \left(\vec{x}\middle|\pi(\vec{y})\right)\\ &=0\end{aligned}$$

usando las dos propiedades de π. Por tanto, $\pi(\vec{x})$ es la proyección ortogonal de $\vec{x}$, es decir que M es distinguido. La unicidad se sigue de la construcción de M. ■

1.2. Autodualidad de espacios hilbertianos

Si E es un espacio normado, E^* denota su **dual topológico** formado por todas las aplicaciones lineales continuas de E en $\mathbb{K}$. Si $W \in E^*$, se define la $\|W\|$ como

$$\|W\| = \text{ínf}\left\{a \in \mathbb{R}\middle|\|W(\vec{x})\| \leq a\|\vec{x}\|, \forall \vec{x}\right\}$$

Recuerde que E^* es siempre un espaico de Banach aunque E no lo sea.

Teorema 1.2.1 (Teorema de Riesz)
Sea H un espacio hilbertiano (no reducido a $\left\{\vec{0}\right\}$). Para cada $\vec{y} \in H$ se define una aplicación $G_{\vec{y}} : H \to \mathbb{K}$ como sigue:

$$G_{\vec{y}}(\vec{x}) = \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right), \forall \vec{x} \in H$$

Entonces, $G_{\vec{y}}$ es un funcional lineal continuo sobre H. Además, la aplicación $G : H \to H^*$ dada por:

$$\vec{y} \mapsto G_{\vec{y}}$$

es una isometría semilineal de H en H^* que es suprayectiva.

Demostración:

Se probarán varias cosas:

1). Por propiedades del producto escalar, para cada $\vec{y} \in H$ la aplicación $G_{\vec{y}} : H \to \mathbb{K}$ es lineal. Dicha aplicación lineal es continua, pues

$$\left|G_{\vec{y}}(\vec{x})\right| = \left|\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)\right| \leq \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|, \quad \forall \vec{x} \in H$$

(por Cauchy-Schwartz). Así que $G_{\vec{y}} \in H^*$. Además, $\|G_{\vec{y}}\| \leq \|\vec{y}\|$. Por otra, parte, si $\vec{y} \neq \vec{0}$, entonces

$$G_{\vec{y}}(\vec{y}) = \left(\vec{y}\middle|\vec{y}\right) = \|\vec{y}\|^2$$

pero, como el operador es continuo, se tiene que $\left|G_{\vec{y}}(\vec{y})\right| \leq \|G_{\vec{y}}\|\|\vec{y}\|$. Por lo cual, $\|\vec{y}\| \leq \|G_{\vec{y}}\|$. Así pues, $\|G_{\vec{y}}\| = \|\vec{y}\|$.

Si $\vec{y} = \vec{0}$, entonces $\|G_{\vec{y}}\| = 0 = \|\vec{y}\|$, pues $G_{\vec{y}} = 0$.

2). La aplicación $G : H \to H^*$, $\vec{y} \mapsto G_{\vec{y}}$ es semilineal, es decir que $G_{\alpha\vec{y}} = \overline{\alpha} G_{\vec{y}}$ y separa sumas. En efecto, sea $\vec{y} \in H$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Entonces:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\vec{y}}(\vec{x}) &= \left(\vec{x}\middle|\alpha\vec{y}\right) \\ &=\overline{\alpha}\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) \\ &=G_{\vec{y}}(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in H \end{aligned}$$

y además, para $\vec{z} \in H$ se tiene que

$$\begin{aligned} G_{\vec{y}+\vec{z}}(\vec{x}) &= \left(\vec{x}\middle|\vec{y}+\vec{z}\right) \\ &= \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) + \left(\vec{x}\middle|\vec{z}\right) \\ &=G_{\vec{y}}(\vec{x}) + G_{\vec{z}}(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in H \end{aligned}$$

por tanto, G es semilineal. Ahora, veamos que es isometría; sean $\vec{y_1}, \vec{y_2} \in H$, entonces:

$$\begin{aligned} \|G_{\vec{y_1}} - G_{\vec{y_2}}\| &=\|G_{\vec{y_1}+\vec{y_2}}\| \\ &=\|\vec{y_1}+\vec{y_2}\| \end{aligned}$$

así, esta función semilineal es isometría. Automáticamente G es inyectiva. Note que $\vec{y} \in (\ker G_{\vec{y}})^{\perp}$ y $G_{\vec{y}}(\vec{y}) = \|\vec{y}\|^2$.

3). Se probará la suprayectividad. Sea $W \in H^*$ tal que $W \neq 0$ (en caso contrario basta tomar $\vec{y} = \vec{0}$) se debe probar que existe $\vec{y} \in H$ tal que $W = G_{\vec{y}}$.

Por la parte (2), tal $\vec{y}$ debe cumplir que $\vec{y} \in (\ker W)^{\perp}$ y $W(\vec{y}) = \|\vec{y}\|^2$. Como $\ker W$ es un subespacio cerrado de H y H es hilbertiano, entonces $\ker W$ es distinguido. Luego:

$$H = \ker W \oplus (\ker W)^{\perp}$$

por tanto, la restricción de W a $(\ker W)^{\perp}$ es un isomorfismo de $(\ker W)^{\perp}$ sobre $\mathbb{K}$. En efecto, como $W \neq 0$ entonces existe $\vec{x} \in H$ tal que $W(\vec{x}) \neq 0$, pero podemos escribir de forma única a $\vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2}$ con $\vec{x_1} \in \ker W$ y $\vec{x_2} \in (\ker W)^{\perp}$, entonces:

$$\begin{aligned} W(\vec{x}) &=W(\vec{x_1}+\vec{x_2}) \\ &=W(\vec{x_1}) + W(\vec{x_2}) \\ &=W(\vec{x_2}) \\ &=W\big|_{(\ker W)^{\perp}}(\vec{x_2}) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Sea $\beta \in \mathbb{K}$ arbitrario, entonces:

$$W\big|_{(\ker W)^{\perp}}\left(\beta\frac{\vec{x_2}}{W(\vec{x_2})}\right) =\beta$$

por tanto la restricción es suprayectiva. Ahora si para algún $\vec{u} \in (\ker W)^{\perp}$ se tiene que $W\big|_{(\ker W)^{\perp}}(\vec{u}) = 0$, en particular $\vec{u} \in \ker W$, pero:

$$(\ker W)^{\perp} \cap \ker W = \left\{\vec{0}\right\}$$

por tanto $\vec{u} = \vec{0}$. Así la restricción es inyectiva. Luego es un isomorfismo. En particular la dimensión de $\mathbb{K}$ sobre $\mathbb{K}$ es 1, así la dimensión de $(\ker W)^{\perp}$ es 1.

Tomemos $\vec{z}$ generador de $(\ker W)^{\perp}$. El $\vec{y}$ buscado debe ser de la forma $\vec{y} = \alpha\vec{z}$ donde $\alpha \in \mathbb{K}$. Además,

$$\begin{aligned} W(\vec{y}) =& \|\vec{y}\|^2 \\ \alpha W(\vec{z}) =& \alpha^2 \|\vec{z}\|^2 \\ \Rightarrow \alpha =& \frac{\overline{W(\vec{z})}}{\|\vec{z}\|^2} \end{aligned}$$

así, debe ser

$$\vec{y} = \frac{\overline{W(\vec{z})}}{\|\vec{z}\|^2}\vec{z} \tag{1.8}$$

Verifiquemos el que vector en (1.8) es el que cumple que $W = G_{\vec{y}}$. Se tiene:

$$G_{\vec{y}}(\vec{x}) = \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$$

para todo $\vec{x} \in H$, donde este vector se descompone de forma única como $\vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2}$ con $\vec{x_1} \in \ker W$ y $\vec{x_2} \in (\ker W)^{\perp}$. Por tanto:

$$\begin{aligned} G_{\vec{y}}(\vec{x}) &= \left(\vec{x_1} + \vec{x_2}\middle|\vec{y}\right) \\ &= \left(\vec{x_1}\middle|\vec{y}\right) + \left(\vec{x_2}\middle|\vec{y}\right) \\ &= \left(\vec{x_2}\middle|\vec{y}\right) \end{aligned}$$

pero los elementos de $(\ker W)^{\perp}$ son de la forma $\beta\vec{z}$, por lo cual:

$$\begin{aligned} G_{\vec{y}}(\vec{x}) &= \left(\beta\vec{z}\middle|\vec{y}\right) \\ &= \left(\beta\vec{z}\middle|\frac{\overline{W(\vec{z})}}{\|\vec{z}\|^2}\vec{z}\right) \\ =& \beta\frac{W(\vec{z})}{\|\vec{z}^2\|}\left(\vec{z}\middle|\vec{z}\right) \\ =& \beta W(\vec{z}) \\ =& W(\beta\vec{z}) \\ =& W(\vec{x_2}) \\ =& W(\vec{x}) \end{aligned}$$

con lo que se tiene el resultado.

■

Observación 1.2.1
La demostración no cambia en vez de suponer que H es hilbertiano se supone H prehilbertiano tal que todo subespacio cerrado es distinguido (para solventar el problema que puede llegar a haber en la restricción del fucional lineal continuo W). Pero la conclusión del teorema afirma que H es (semilinealmente) isométrico al espacio de Banach H^*, luego H debe ser de Banach, es decir que es hilbertiano.

Así pues, un espacio prehilbertiano en el cual todo subespacio cerrado es distinguido es un espacio hilbertiano.

Proposición 1.2.1 (Autodualidad de L_2)
Sea S un conjunto medible en $\mathbb{R}^n$. Para cada $g \in L_2(S,\mathbb{K})$ sea φ_g el funcional lineal sobre $L_2(S,\mathbb{K})$ definido como:

$$\varphi_g(f) = \int_S fg, \quad \forall f \in L_2(S,\mathbb{K})$$

entonces, la aplicación lineal $\varphi : g \mapsto \varphi_g$ es una isometría lineal de $L_2(S, \mathbb{K})$ sobre $L_2(S, \mathbb{K})^*$.

Demostración:
Sea

$$\psi_g(f) = \int_S f\overline{g}$$

para todo $f \in L_2(S, \mathbb{K})$. Por el teorema de Riesz, $\psi : g \mapsto \psi_g$ es una isometría semilineal de $L_2(S, \mathbb{K})$ sobre $L_2(S, \mathbb{K})^*$.

Como la función η, $g \mapsto \overline{g}$ es una isometría semilineal de $L_2(S, \mathbb{K})$ sobre $L_2(S, \mathbb{K})$ y φ es la composición de η con ψ, entonces φ es una isometría lineal de $L_2(S, \mathbb{K})$ sobre $L_2(S, \mathbb{K})$. La linealidad es inmediata de las propiedades de la integral de Lebesgue.

■

¿Es posible clasificar a los espacios hilbertianos?

Consideremos las sumas de familisa de elementos en $[0, \infty]$. Se tiene que

$$[0, \infty] = [0, \infty[\cup \{\infty\}$$

todo conjunto S en $[0, \infty]$ posee un supremo, el usual si el conjunto es acotado en $[0, \infty[$ e ∞ si S no es acotado.

Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente en $[0, \infty[$, se define:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup \left\{ a_n \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$$

este límite coincide con el usual en el caso de que la sucesión sea acotada. De otra forma es igual a ∞.

Se tienen las siguientes propiedades:

1). $a + \infty = \infty + a = \infty$, para todo $a \in [0, \infty[$.

2). $a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$, para todo $a \in [0, \infty[$.

3). $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.

Definición 1.2.1
Sea $(a_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ una familia arbitraria de elementos de $[0, \infty]$. Se denota por $\mathcal{F}(\Omega)$ a la colección de **todos los subconjuntos finitos de** Ω. Toda suma:

$$\sum_{\alpha\in J} a_\alpha, \quad \forall J \in \mathcal{F}(\Omega)$$

se llama **suma parcial de la familia** $(a_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$. Al elemento de $[0, \infty]$:

$$\sum_{\alpha\in\Omega} a_\alpha = \sup \left\{ \sum_{\alpha\in J} a_\alpha \middle| J \in \mathcal{F}(\Omega) \right\}$$

se le llama **suma de la familia** $(a_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$. Se dice que $(a_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ es una **familia sumable** de números no negativos si $\sum_{\alpha\in\Omega} a_\alpha < \infty$.

Ejemplo 1.2.1

Se tiene que:

$$\sum_{t\in[0,1]} t = \infty$$

Proposición 1.2.2 (Conmutatividad general)
Si Ω' es otro conjunto de índices para indexar la familia $(a_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ y σ es una biyección de Ω sobre Ω', entonces:

$$\sum_{\alpha'\in\Omega'} a_{\sigma(\alpha')} = \sum_{\alpha\in\Omega} a_\alpha \tag{1.9}$$

Demostración:
Es inmediato del hecho de que los conjuntos de las sumas parciales de las dos familias son el mismo, por tanto al tomar el supremo se obtiene el mismo valor. ■

La ecuación (1.9) se aplica en particular al caso en el que $\Omega = \Omega'$, obteniendo una propiedad de conmutatividad general para sumas de familias en $[0,\infty]$.

Ahora, ¿se tendrá una propiedad para la asociatividad general?

Teorema 1.2.2 (Sumación por paquetes de familias)
Sea $(a_\alpha)_{\alpha\in I}$ una familia en $[0,\infty]$ y $(I_\lambda)_{\lambda\in L}$ una partición aritraria de subconjuntos de I. Si

$$\Delta = \sum_{\alpha\in I} a_\alpha \quad \text{y} \quad \Delta_\lambda = \sum_{\alpha\in I_\lambda} a_\alpha, \quad \forall\lambda\in L$$

entonces,

$$\Delta = \sum_{\lambda\in L} \Delta_\lambda$$

Demostración:
Sea $J\in\mathcal{F}(I)$ y sea

$$M = \left\{\lambda\in L \middle| I_\lambda\cap J\neq\emptyset\right\}$$

Entonces $M\in\mathcal{F}(L)$ y

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in J} a_\alpha &= \sum_{\lambda\in M}\sum_{\alpha\in J\cap I_\lambda} a_\alpha\\ &\leq \sum_{\lambda\in M}\Delta_\lambda\\ &\leq \sum_{\lambda\in Ls}\Delta_\lambda\end{aligned}$$

tomando supremo respecto a J se sigue que:

$$\Delta \leq \sum_{\lambda\in L}\Delta_\lambda \tag{1.10}$$

Sea $M\in\mathcal{F}(L)$. Fijemos arbitrariamente una $H_\lambda\in\mathcal{F}(I_\lambda)$, para todo $\lambda\in M$. Se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda\in M}\sum_{\alpha\in H_\lambda} a_\alpha &= \sum_{\alpha\in\bigcup_{\lambda\in M} H_\lambda} a_\alpha\\ &\leq\Delta\end{aligned}$$

Manteniendo a M fijo y tomando supremo con respecto a $H_\lambda \in \mathcal{F}(I_\lambda)$,resulta:

$$\sum_{\lambda \in M} \Delta_\lambda \leq \Delta$$

tomando ahora el supremo con respecto a M se obtiene que:

$$\sum_{\lambda \in L} \Delta_\lambda \leq \Delta \tag{1.11}$$

de (1.10) y (1.11) se sigue la igualdad.

■

Ejemplo 1.2.2
¿Es cierto que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$?