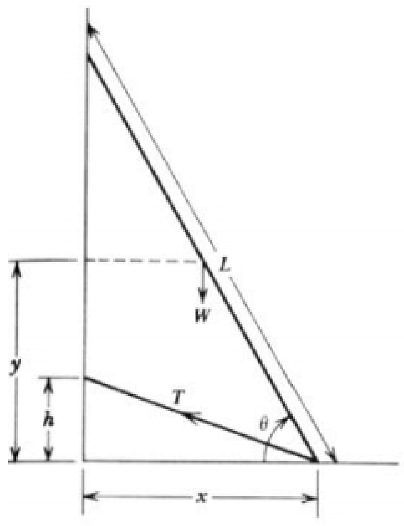
Lista Lagrange (7).

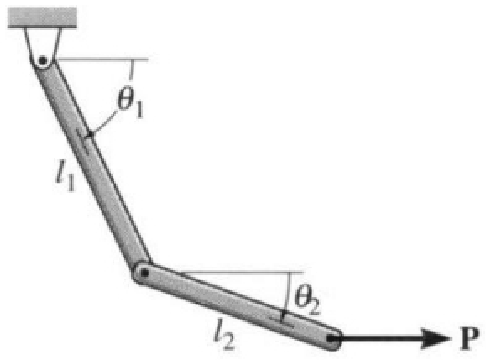
Principio del trabajo virtual

1. Una escalera uniforme de longitud L y masa M está en equilibrio a un ángulo θ con el piso. Si la pared y el piso están lisos, la escalera debe ser sostenida mediante una cuerda que asegure la parte inferior de la escalera a un punto en la pared a una altura h arriba del piso. Calcule la tensión en la cuerda.



R. $T = \frac{Mg\sqrt{h^2+L^2\cos^2\theta}}{2L\,\mathrm{sen}\theta}$

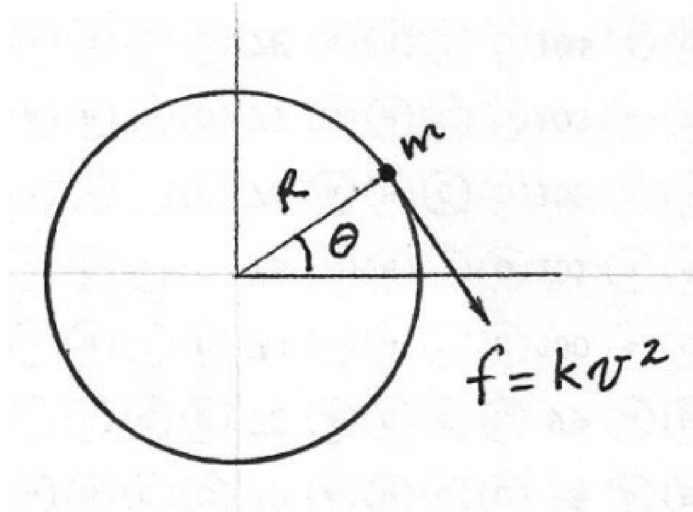
2. Use el principio de trabajo virtual para determinar la posición de equilibrio de las dos barras articuladas mostradas en la figura. Considere $l_1 = l_2$.



R. $\tan\theta_1 = \frac{3Mg}{2P}$ $\quad\tan\theta_2 = \frac{Mg}{2P}$

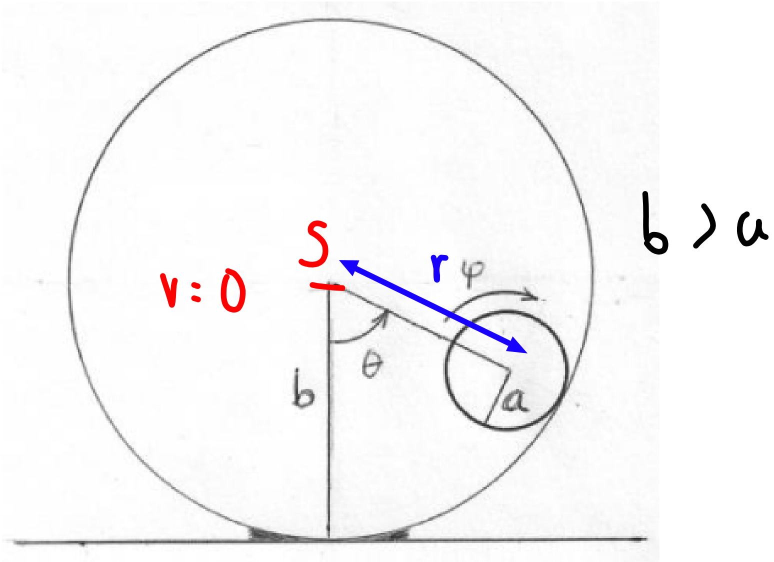
Ecuaciones de Lagrange

3. A una partícula de masa m restringida a moverse sobre un círculo horizontal liso de radio R se le da una velocidad inicial v_0. Considere que el aire produce una fuerza de fricción proporcional al cuadrado de la velocidad. Calcule la posición de la partícula en función del tiempo.



R. $\theta = \frac{m}{kR} \ln\left(1 + \frac{kv_0 t}{m}\right)$

4. Un cilindro uniforme de masa m y radio a rueda sin deslizar en el interior de un cilindro fijo de radio b con su eje de posición horizontal. Los cilindros están en contacto a lo largo de una generatriz común. Demuestre que el cilindro inferior oscila alrededor de su posición inferior como un péndulo simple de longitud $\frac{3}{2}(b-a)$.



Sol

Planteamos la Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = T - V$$
$$= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}(I_s)\cdot\dot{\varphi}^2 + mgr\cos\theta$$

Con $r = b-a$ y cumpliéndose la cond. de rodadura, siendo que $(b-a)\theta = a\varphi$, y $I_s = \frac{1}{2}ma^2$.

tenemos que:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(b-a)^2\cdot\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}ma^2\cdot\frac{(b-a)^2}{a^2}\dot{\theta}^2 + mg(b-a)\cos\theta$$
$$= m\dot{\theta}^2\left(\frac{1}{2}(b-a)^2 + \frac{1}{4}(b-a)^2\right) + mg(b-a)\cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = 2m\dot{\theta}\left(\frac{1}{2}(b-a)^2 + \frac{1}{4}(b-a)^2\right) \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = -mg(b-a)\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = \frac{3}{2}m\ddot{\theta}(b-a)^2 + mg(b-a)\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$$

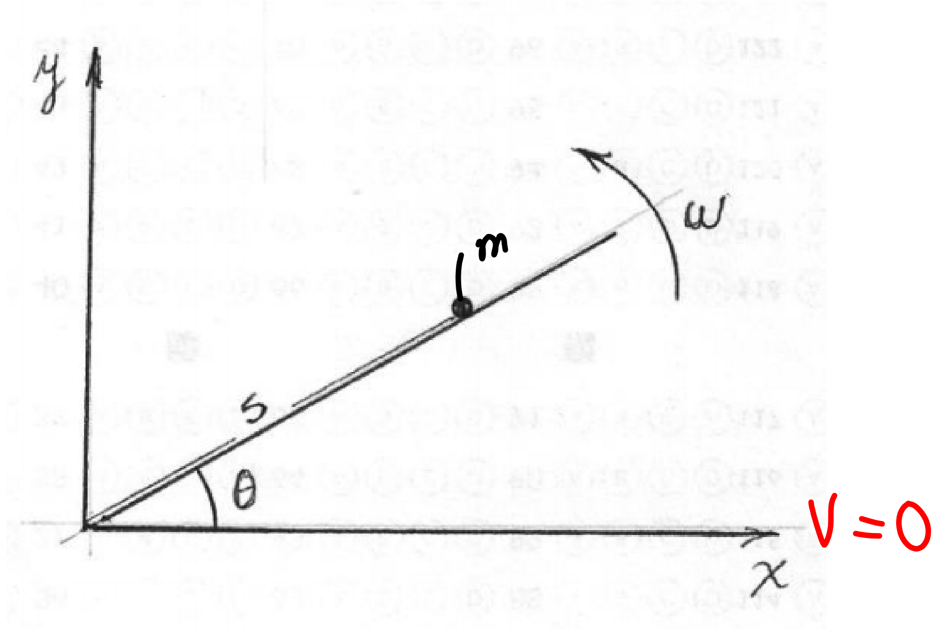
$$\Rightarrow \frac{3}{2}(b-a)^{\cancel{2}}\ddot{\theta} + g(b-a)\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\frac{3}{2}(b-a)}\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$$

que es la ec. de un péndulo de longitud $l = \frac{3}{2}(b-a)$.

$\square$

5. Una partícula se desliza sobre un plano inclinado liso cuya inclinación θ se incrementa a razón constante ω. Si al tiempo $t = 0, \theta = 0$ y $s = s_o$ y la partícula parte del reposo. Calcule la posición de la partícula en función del tiempo.



R. $s = s_0 \cosh\omega t - \frac{g}{2\omega^2}\operatorname{senh}\omega t + \frac{g}{2\omega^2}\operatorname{sen}\omega t$

Sol.

Planteemos la Lagrangiana del sistema.

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{s}^2 + s^2\dot{\theta}^2) - mgs\sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = m\dot{s} \qquad \frac{\partial L}{\partial s} = ms\dot{\theta}^2 - mg\sin\theta$$

$$\Rightarrow m\ddot{s} - ms\dot{\theta}^2 + mg\sin\theta = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ms^2\dot{\theta} \quad y \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgs\cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(ms^2\dot{\theta}) + mg\cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{s} - ms\dot{\theta}^2 + mg\sin\theta = 0 & \ldots (1) \\ \frac{d}{dt}(ms^2\dot{\theta}) = -mg\cos\theta & \ldots (2) \end{cases}$$

Como $\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \omega t = \theta - \theta_0$, con $\theta_0 = 0$ se tiene que $\theta = \omega t$. Por tanto, de (1):

$$m\ddot{s} - ms\omega^2 + mg\sin\omega t = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{s} - s\omega^2 = -g\sin\omega t \quad \ldots (3)$$

Así, basta con resolver la E.D.O. (3). Con el polinomio característico:

$$u^2 - \omega^2 = 0 \Rightarrow u = \pm\omega$$

$$\therefore S_1 = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t} \quad \ldots (4)$$

Para la otra solución, propongámos algo de la forma $S_2 = A\sin\omega t + B\cos\omega t$. Sustituyendo en (3):

$$\Rightarrow -A\omega^2\sin\omega t - B\omega^2\cos\omega t - A\omega^2\sin\omega t - B\omega^2\cos\omega t = -g\sin\omega t$$

$$\Rightarrow B = 0, \; y$$

$$2A\omega^2 \sin\omega t = g \sin\omega t$$

$$\Rightarrow A = \frac{g}{2\omega^2}$$

$$\therefore S_2 = \frac{g}{2\omega^2} \sin(\omega t) \quad \ldots (5)$$

Por (4) y (5):

$$S = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2} \sin\omega t$$

Con $s(0) = s_0$ y $\dot{S}(0) = 0$, tenemos:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = s_0 \\ \omega c_1 - \omega c_2 + \frac{g}{2\omega} = 0 \Rightarrow c_1 - c_2 = -\frac{g}{2\omega^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}\left(s_0 - \frac{g}{2\omega^2}\right), \; y$$

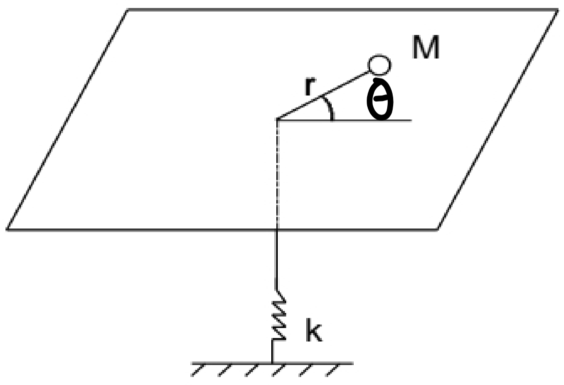
$$c_2 = \frac{1}{2}\left(s_0 + \frac{g}{2\omega^2}\right)$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2}\left(s_0 - \frac{g}{2\omega^2}\right)e^{\omega t} + \frac{1}{2}\left(s_0 + \frac{g}{2\omega^2}\right)e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t \\ &= \frac{1}{2}s_0\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right) - \frac{1}{2}\frac{g}{2\omega^2}\left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right) + \frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t \\ &= s_0 \cosh(\omega t) + \frac{g}{2\omega^2}\left(\sin(\omega t) - \sinh(\omega t)\right) \end{aligned}$$

$\square$

6. La partícula M mostrada en la figura se mueve sobre una mesa horizontal lisa y está conectada a un resorte lineal de módulo k. La fuerza en el resorte es cero cuando $r = 0$. Inicialmente $r(0) = R$, $\dot{r}(0) = 0$ y $\dot{\theta}(0) = \omega_0$. Escriba una ecuación diferencial a partir de la cual pueda determinarse $r(t)$. Calcule $\dot{r}(r)$.



R. $\dot{r}^2 = \omega_0^2 R^2 - \frac{R^4\omega_0^2}{r^2} + \frac{kR^2}{M} - \frac{kr^2}{M}$

Sol.

Planteamos la lagrangiana:

$$L = T - V$$
$$= \frac{1}{2}M(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}Kr^2$$

y obtenemos las ecs. de Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = M\dot{r} \qquad \frac{\partial L}{\partial r} = Mr\dot{\theta}^2 - Kr$$

$$\Rightarrow M\ddot{r} - Mr\dot{\theta}^2 + Kr = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = Mr^2\dot{\theta} \qquad \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\Rightarrow Mr^2\ddot{\theta} + 2Mr\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M\ddot{r} - Mr\dot{\theta}^2 + Kr = 0 & \ldots (1) \\ \frac{d}{dt}(Mr^2\dot{\theta}) = 0 & \ldots (2) \end{cases}$$

de (2) se sigue que:

$$Mr^2\dot{\theta} = \text{cte, en part.}$$
$$= M(r(0))^2\dot{\theta}(0)$$
$$= MR^2 w_0$$
$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{R^4}{r^4} w_0^2 \quad \ldots (3)$$

Sustituyendo (3) en (1):

$$\Rightarrow M\ddot{r} - \frac{MR^4 w_0^2}{r^3} + Kr = 0$$

$$\Rightarrow \dot r \frac{d\dot r}{dr} = \frac{R^4\omega_0^2}{r^3} - \frac{K}{M}r$$

$$\Rightarrow \int_{\dot r(0)}^{\dot r} \dot r \, d\dot r = \int_R^r \left(\frac{R^4\omega_0^2}{r^3} - \frac{K}{M}r\right) dr$$

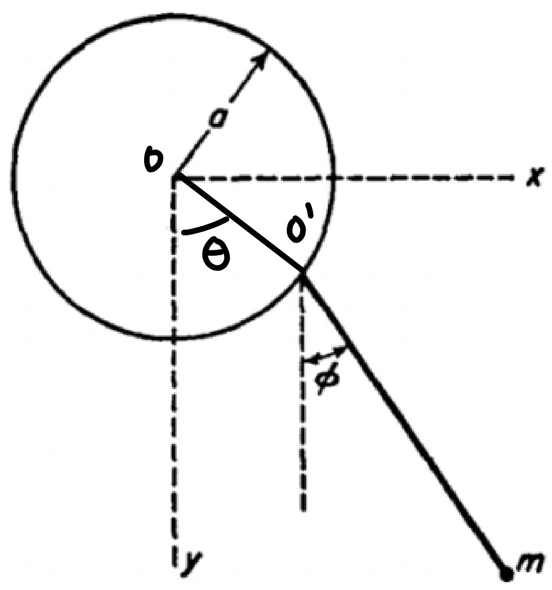
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\dot r^2(t) = \left[-\frac{R^4\omega_0^2}{2r^2} - \frac{K}{2M}r^2\right]_R^r$$

$$= -\frac{R^4\omega_0^2}{2r^2} - \frac{K}{2M}r^2 + \frac{1}{2}R^2\omega_0^2 + \frac{1}{2}\frac{K}{M}R^2$$

$$\Rightarrow \dot r^2(t) = R^2\omega_0^2 - \frac{R^4\omega_0^2}{r^2} + \frac{KR^2}{M} - \frac{Kr^2}{M}.$$

$\square$

7. El soporte O′ de un péndulo simple de longitud l y masa m se mueve con velocidad constante en una trayectoria circular de radio a y centro O. Encontrar la ecuación diferencial para ϕ suponiendo que todo el movimiento está confinado a un plano vertical y $\theta = \omega t$.



R. $\ddot\phi + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\phi = -\frac{a\omega^2}{l}\operatorname{sen}(\phi - \omega t)$

Sol.

Planteemos la lagrangiana del sistema:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2) + mgy \quad \dots (1)$$

donde $x = a\sin\omega t + l\sin\phi$, $y = a\cos\omega t + l\cos\phi$. Por tanto:

$$\dot x = a\omega\cos\omega t + \dot\phi l\cos\phi, \quad \dot y = -a\omega\sin\omega t - l\dot\phi\sin\phi$$

$$\Rightarrow \dot x^2 = a^2\omega^2\cos^2\omega t + 2al\omega\dot\phi\cos\omega t\cos\phi + \dot\phi^2 l^2\cos^2\phi$$

$$\dot y^2 = a^2\omega^2\sin^2\omega t + 2al\omega\dot\phi\sin\omega t\sin\phi + \dot\phi^2 l^2\sin^2\phi$$

Sustituyendo en (1):

$$L = \frac{1}{2}m\left(a^2\omega^2 + 2al\omega\dot\phi\cos(\omega t - \phi) + \dot\phi^2 l^2\right) + amg\cos\omega t + lmg\cos\phi$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial\dot\phi} = mal\omega\cos(\omega t - \phi) + m\dot\phi l^2; \quad \frac{\partial L}{\partial\phi} = mal\omega\dot\phi\sin(\omega t - \phi) - lmg\sin\phi$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\phi}\right) - \frac{\partial L}{\partial\phi} = -mal\omega\sin(\omega t - \phi)(\omega - \dot\phi) + m\ddot\phi l^2 - mal\omega\dot\phi\sin(\omega t - \phi) + lmg\sin\phi = 0$$

$$\Rightarrow m\ddot{\phi}l^2 + lmg\sin\phi = mal\omega\sin(\omega t - \phi)(\omega - \phi + \phi)$$

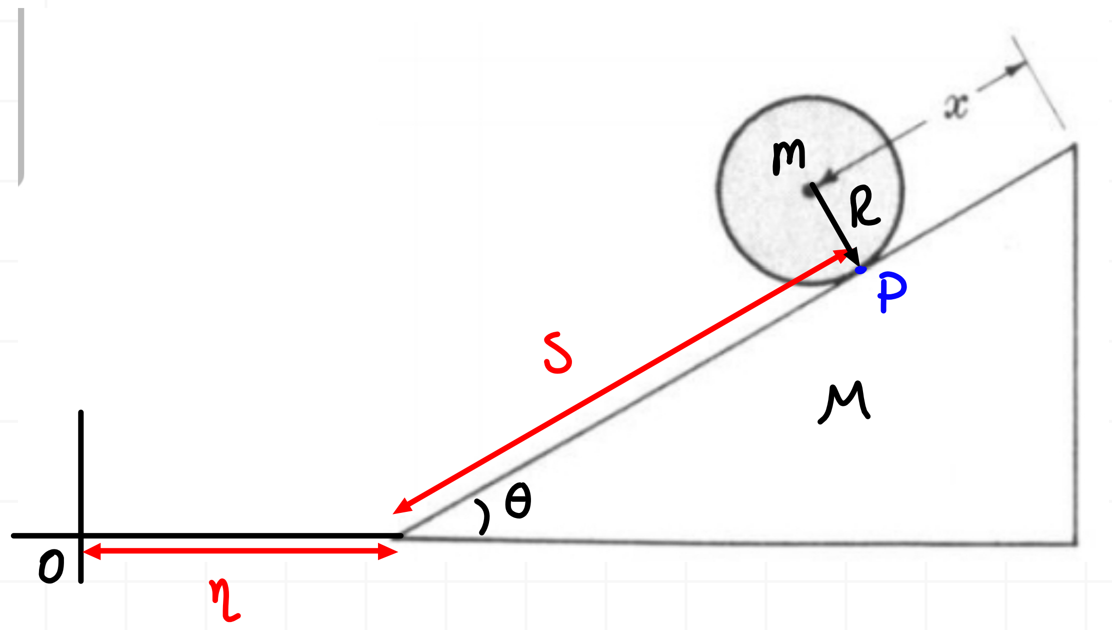
$$\Rightarrow \ddot{\phi} + \frac{g}{l}\sin\phi = \frac{a\omega^2}{l}\sin(\omega t - \phi)$$

$$\therefore \ddot{\phi} + \frac{g}{l}\sin\phi = -\frac{a\omega^2}{l}\sin(\phi - \omega t)$$

$\square$

8. Una esfera de radio R rueda hacia abajo por una cuña movible de masa M. El ángulo de la cuña es θ y es libre de deslizarse sobre una superficie horizontal lisa. El contacto entre la esfera y la cuña es perfectamente rugosa. Calcule la aceleración de la cuña.

R. $\ddot{\eta} = \frac{mg\,\text{sen}\theta\cos\theta}{\frac{7}{5}(M+m) - m\cos^2\theta}$



Sol.

Planteemos la Lagrangiana del sistema:

$$L = T - V$$

$$= \frac{1}{2}M\dot{\eta}^2 + \frac{1}{2}m\left((\dot{\eta}+\dot{s}\cos\theta)^2 + (\dot{s}\sin\theta)^2\right) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - mgs\sin\theta$$

Como el contacto es perfectamente rugoso, $\dot{s} = R\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \left(\frac{\dot{s}}{R}\right)^2$. Además $I = \frac{2}{5}mR^2$. Por tanto:

$$= \frac{1}{2}M\dot{\eta}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{\eta}^2 + 2\dot{\eta}\dot{s}\cos\theta + \dot{s}^2) + \frac{1}{5}mR^2\frac{\dot{s}^2}{R^2} - mgs\sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = m(\dot{\eta}\cos\theta + \dot{s}) + \frac{2}{5}m\dot{s} \qquad \frac{\partial L}{\partial s} = -mg\sin\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} = M\dot{\eta} + m(\dot{\eta} + \dot{s}\cos\theta) \qquad \frac{\partial L}{\partial \eta} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m(\ddot{\eta}\cos\theta + \ddot{s}) + \frac{2}{5}m\ddot{s} = -mg\sin\theta & \ldots(1) \\ M\ddot{\eta} + m(\ddot{\eta} + \ddot{s}\cos\theta) = 0 & \ldots(2) \end{cases}$$

De (2):

$$\Rightarrow \ddot{\eta}(M+m) + m\ddot{s}\cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{s} = \frac{-1}{\cos\theta}\ddot{\eta}\frac{M+m}{m} \quad \ldots(3)$$

Sustituyendo (3) en (1):

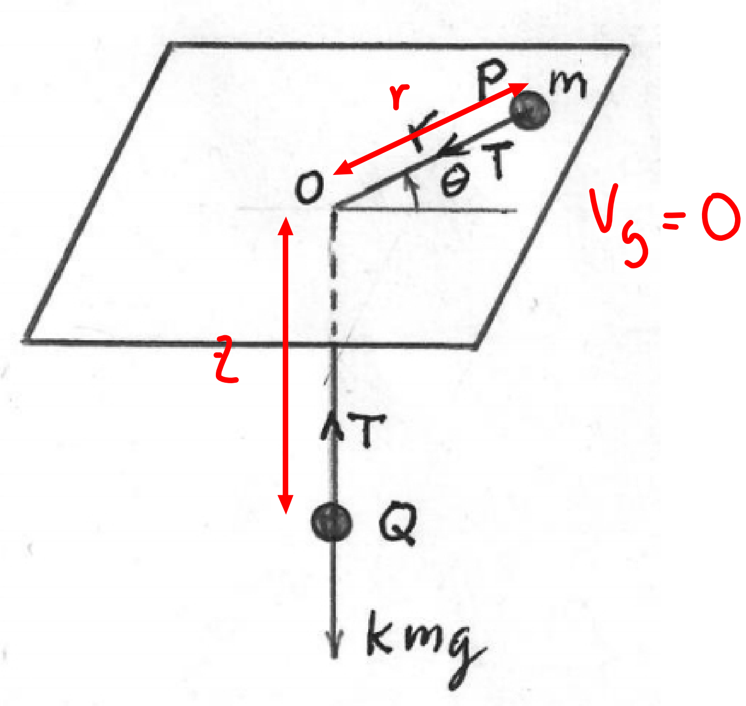
$$\Rightarrow m\left(\ddot{\eta}\cos\theta - \ddot{\eta}\cdot\frac{M+m}{m}\sec\theta\right) - \frac{2}{5}(M+m)\sec\theta\,\ddot{\eta} = -mg\sin\theta$$

$$\Rightarrow \ddot{\eta}\left(m\cos\theta - (M+m)\sec\theta - \frac{2}{5}(M+m)\sec\theta\right) = -mg\sin\theta$$

$$\Rightarrow \ddot{\eta}\left(m\cos^2\theta - \frac{7}{5}(M+m)\right) = -mg\sin\theta\cos\theta$$

$$\therefore \ddot{\eta} = \frac{mg\sin\theta\cos\theta}{\frac{7}{5}(M+m) - m\cos^2\theta}$$

9. Una partícula P de masa m se encuentra sobre una mesa horizontal lisa sujeta a una cuerda que pasa por un orificio en su superficie. El otro extremo de la cuerda soporta una partícula Q de masa km. Cuando la partícula P está a una distancia a del orificio se proyecta a partir del reposo con una rapidez $\sqrt{8ag}$ a lo largo de la mesa formando un ángulo recto con la cuerda. Demuestre que la partícula Q empezará a ascender si $k < 8$.



Sol.

La Lagrangiana del sistema es:

$$L = T - V$$
$$= \frac{1}{2}Km\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + Kmgz$$

Con $r + z = l$, l la longitud de la cuerda, tenemos que:

$$L = \frac{1}{2}Km\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m(l-z)^2\dot{\theta}^2 + Kmgz$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = Km\dot{z} + m\dot{z} = \dot{z}(K+1)m \;;\quad \frac{\partial L}{\partial z} = -m(l-z)\dot{\theta}^2 + Kmg$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(l-z)^2\dot{\theta} \;;\quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

Por tanto:

$$\begin{cases} \ddot{z}(K+1)m + m(l-z)\dot{\theta}^2 - Kmg = 0 \;\ldots (1) \\ m(l-z)^2\dot{\theta} = cte. \;\ldots (2) \end{cases}$$

De (2): como $r(0) = a = l - z(0) \Rightarrow z(0) = l - a$, y como $r(0)\dot{\theta}(0) = \sqrt{8ag}$, entonces $\dot{\theta}(0) = \sqrt{\frac{8g}{a}}$. Luego:

$$m(l-z)^2\dot{\theta} = ma^2 \cdot \sqrt{\frac{8g}{a}}$$

$$= ma\sqrt{8ag}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{8a^3g}{r^4} \quad \ldots(3)$$

Sustituyendo (3) en (1):

$$\Rightarrow -\ddot{r}m(K+1) + \frac{8a^3gm}{r^3} - Kmg = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{r} = \frac{8a^3g}{K+1}\cdot\frac{1}{r^3} - \frac{K}{K+1}g$$

En $\ddot{r}(0)$, $r(0)=a$. Por tanto:

$$\ddot{r} = \frac{8g}{K+1} - \frac{K}{K+1}g$$

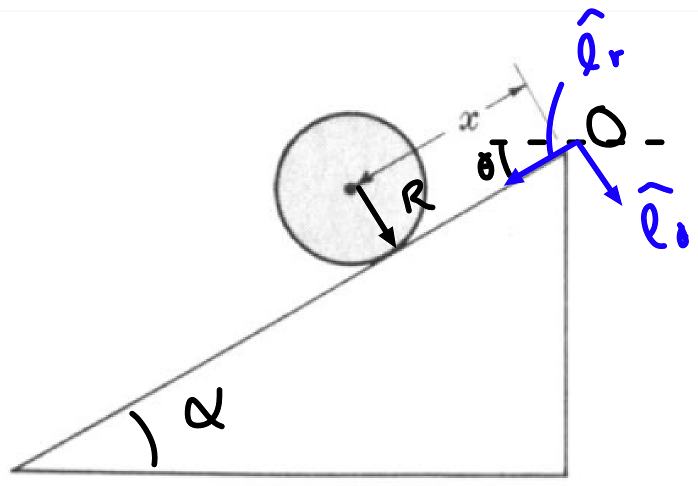
$$= \frac{(8-K)g}{K+1}$$

$$\Rightarrow \ddot{z} = \frac{(K-8)g}{K+1}; \quad \ddot{z} < 0 \Rightarrow K-8<0 \Rightarrow K<8$$

Para que la partícula comience a subir, $\ddot{z}<0$, i.e $K<8$. $\square$

Cálculo de fuerzas de restricción

10. Un aro rueda sin resbalar hacia abajo sobre un plano inclinado fijo de longitud L. Calcule la fuerza normal del plano inclinado sobre el aro.



R. N = Mg cosα

Sol.

La reestricción asociada a la normal es: $R = \theta - \alpha = 0$. Planteemos la Lagrangiana generali-

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + x^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + mgx\,\text{sen}\,\theta + \lambda(\theta-\alpha)$$

Como el aro rueda, entonces $x = R\varphi \Rightarrow \dot{\varphi}^2 = \left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2$. Además $I = MR^2$. Por tanto:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + x^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + mgx\,\text{sen}\,\theta + \lambda(\theta-\lambda)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = M\dot{x} + M\dot{x} = 2M\dot{x} \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = Mx\dot{\theta}^2 + mg\,\text{sen}\,\theta$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = Mx^2\dot{\theta} \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = mgx\cos\theta + \lambda$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2M\ddot{x} - Mx\dot{\theta}^2 - mg\,\mathrm{sen}\theta = 0 \\ 2Mx\dot{x}\dot{\theta} + Mx^2\ddot{\theta} - mg\cos\theta - \lambda = 0 \end{cases}$$

Como $\theta = \alpha$, entonces:

$$\Rightarrow \begin{cases} 2M\ddot{x} - mg\,\mathrm{sen}\,\alpha = 0 \\ mg\cos\alpha = -\lambda \end{cases}$$

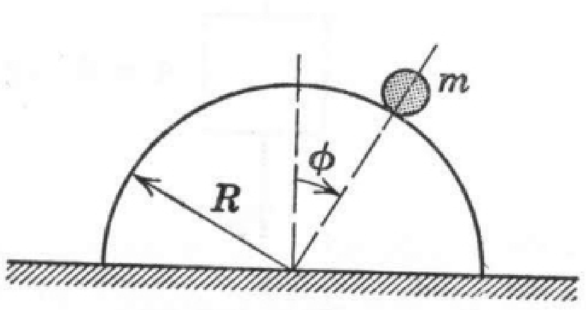
Por tanto:

$$\vec{N} = -mg\cos\alpha\left(\frac{\partial R}{\partial \vec{r}}\right)$$
$$= -mg\cos\alpha\,\hat{e}_6$$

$$\therefore N = mg\cos\alpha$$

$\square$

11. Una partícula empieza a moverse en la parte superior de una superficie hemisférica. Calcule la altura donde la partícula abandonará la superficie.



$V = 0$

R. h = 2R/3

Sol.

La reestricción asociada a la normal es: $R = r - R = 0$. La Lagrangiana generalizada será:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - mgr\cos\phi + \lambda(r - R)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = mr\dot{\phi}^2 - mg\cos\phi + \lambda$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = mgr\sin\phi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 + mg\cos\phi - \lambda = 0 \quad \ldots (1) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 2mr\dot{r} + mr^2\ddot{\phi} - mgr\sin\phi = 0 \quad \ldots (2) \end{cases}$$

Sustituyendo la reestricción $r - R = 0$ en (1) y (2) obtenemos

$$\begin{cases} -mR\dot{\phi}^2 + mg\cos\phi = \lambda \quad \ldots (3) \\ mR^2\ddot{\phi} = mgR\sin\phi \quad \ldots (4) \end{cases}$$

De (4), con $\dot\phi(0)=0$ y $\phi(0)=0$ se tiene:

$$mR^2\dot\phi\frac{d\dot\phi}{d\phi}=mgR\sin\phi$$

$$\Rightarrow \int_0^{\dot\phi} mR^2\dot\phi\, d\dot\phi=\int_0^{\phi} mgR\sin\phi\, d\phi$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mR^2\dot\phi^2=mgR(1-\cos\phi)$$

$$\Rightarrow \dot\phi^2=\frac{2g}{R}(1-\cos\phi) \quad \ldots (5)$$

Sustituyendo (5) en (3):

$$\Rightarrow -2mg(1-\cos\phi)+mg\cos\phi=\lambda$$

$$\Rightarrow \lambda=mg(3\cos\phi-2)$$

Por tanto, la fuerza normal será:

$$\vec{N}=\lambda\frac{\partial(r-R)}{\partial\vec{r}}$$

$$=mg(3\cos\phi-2)\hat{e_r}$$

Justo cuando la partícula abandona la sup. $\vec{N}=0$, i.e

$$3\cos\phi-2=0\Rightarrow\cos\phi=\frac{2}{3}$$

y la altura h a la que lo hace es:

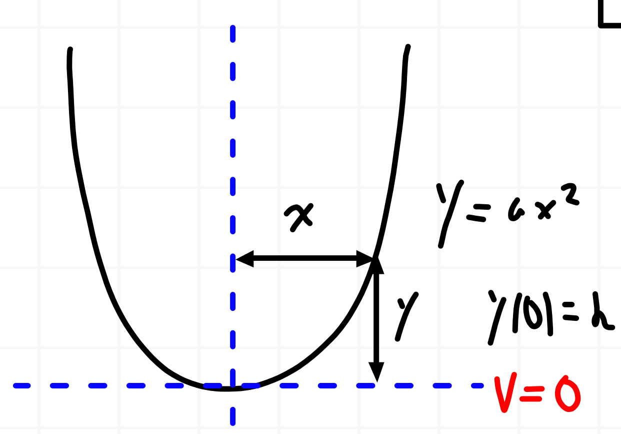
$$h=R\cos\phi$$

$$=\frac{2}{3}R$$

$\square$

12. Una partícula de masa m se desliza desde una altura h sobre una superficie parabólica lisa $y=ax^2$. Calcule la fuerza normal que la superficie le ejerce a la partícula.

R. $N_x=-\frac{2amgx(1+4ah)}{(1+4a^2x^2)^2}$; $N_y=\frac{mg(1+4ah)}{(1+4a^2x^2)^2}$



Sol.

La reestricción asociada a la normal es $R=y-ax^2=0$. Planteamos la Lagrangiana generalizada:

$$L=\frac{1}{2}m(\dot x^2+\dot y^2)-mgy+\lambda(y-ax^2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial\dot x}=m\dot x \qquad \frac{\partial L}{\partial x}=-2\lambda ax$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot y}=m\dot y \qquad \frac{\partial L}{\partial y}=-mg+\lambda$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} + 2\lambda a x = 0 \quad \dots (1) \\ m\ddot{y} + mg - \lambda = 0 \quad \dots (2) \end{cases}$$

Sustituyendo la reestricción $y - ax^2 = 0$, tenemos que:

$$\dot{y} = 2ax\dot{x} \qquad \ddot{y} = 2ax\ddot{x} + 2a\dot{x}^2$$

Luego:

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = -2\lambda a x \quad \dots (3) \\ 2amx\ddot{x} + 2am\dot{x}^2 + mg = \lambda \quad \dots (4) \end{cases}$$

Sustituyendo (3) en (4):

$$\Rightarrow 2ax(m\ddot{x}) + 2am\dot{x}^2 + mg = \lambda$$

$$\Rightarrow -4\lambda a^2 x^2 + 2am\dot{x}^2 + mg = \lambda$$

$$\Rightarrow \lambda(1 + 4a^2x^2) = 2am\dot{x}^2 + mg \quad \dots (5)$$

Sustituyendo (4) en (3):

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -2ax\left(2amx\ddot{x} + 2am\dot{x}^2 + mg\right)$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -4a^2mx^2\ddot{x} - 4a^2mx\dot{x}^2 - 2amgx$$

$$\Rightarrow m\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = -4a^2mx^2\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} - 4a^2mx\dot{x}^2 - 2amgx$$

$$\Rightarrow \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} + 4a^2x^2\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = -2ax\left(g + 2a\dot{x}^2\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\dot{x}} \frac{\dot{x}}{g + 2a\dot{x}^2}\, d\dot{x} = \int_{x_0}^{x} \frac{-2ax}{1 + 4a^2x^2}\, dx \quad \dots (6)$$

Con $x_0 = x(0) = \sqrt{\frac{h}{a}}$, pues $y(0) = h$: Resolviendo las integrales en (6):

$$\int_0^{\dot{x}} \frac{\dot{x}}{g + 2a\dot{x}^2}\, d\dot{x} = \int_g^{g+2a\dot{x}^2} \frac{du}{4au} \qquad u = g + 2a\dot{x}^2$$

$$= \frac{1}{4a}\int_g^{g+2a\dot{x}^2} \frac{du}{u} \qquad du = 4a\dot{x}\,d\dot{x}$$

$$= \frac{1}{4a}\left(\ln(g + 2a\dot{x}^2) - \ln(g)\right)$$

$$= \frac{1}{4a}\ln\left(\frac{g + 2a\dot{x}^2}{g}\right)$$

y:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{-2ax}{1+4a^2x^2}\,dx = -\frac{1}{4a}\int_{1+4a^2x_0^2}^{1+4a^2x^2} \frac{du}{u} \qquad v = 1+4a^2x^2$$

$$dv = 8a^2x\,dx$$

$$= -\frac{1}{4a}\ln\left(\frac{1+4a^2x^2}{1+4ah}\right)$$

Por tanto:

$$\frac{1}{a}\ln\left(\frac{g+2a\dot{x}^2}{g}\right) = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{1+4a^2x^2}{1+4ah}\right)$$

$$\frac{g+2a\dot{x}^2}{g} = \frac{1+4ah}{1+4a^2x^2}$$

$$\Rightarrow 2a\dot{x}^2 = g\left(\frac{1+4ah}{1+4a^2x^2} - 1\right)$$

Sustituyendo en (S):

$$\Rightarrow \lambda(1+4a^2x^2) = \frac{mg(1+4ah)}{1+4a^2x^2} - mg + mg$$

$$\Rightarrow \lambda = mg\,\frac{1+4ah}{(1+4a^2x^2)^2}$$

Con:

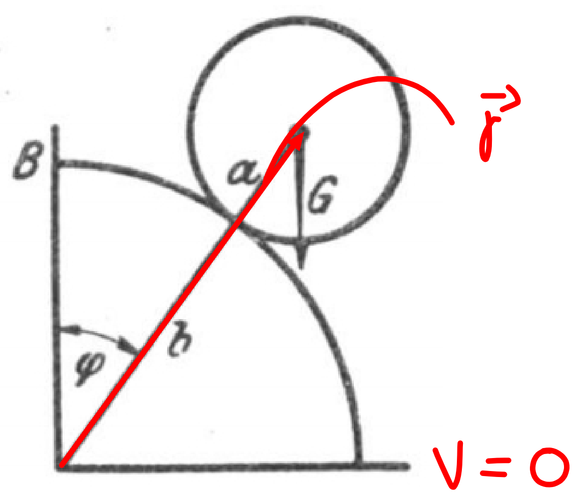
$$\vec{N} = \lambda\,\frac{\partial(y-ax^2)}{\partial \vec{r}}$$

$$= \frac{mg(1+4ah)}{(1+4a^2x^2)^2}\left(-2ax\,\hat{\imath} + \hat{\jmath}\right)$$

$$\therefore N_x = -\frac{2axmg(1+4ah)}{(1+4a^2x^2)^2} \qquad y \qquad N_y = \frac{mg(1+4ah)}{(1+4a^2x^2)^2}$$

$\square$

13. Sobre una esfera fija completamente rugosa de radio b rueda otra de radio a partiendo del reposo desde la cúspide B de la esfera fija. Calcule el ángulo φ donde se separará la esfera móvil de la fija.



R. cosφ = 10/17

Sol.

La reestricción asociada a la fuerza normal en el sistema es $R = r - (a+b) = 0$. Planteemos la Lagrangiana generalizada:

$$\mathcal{L} = T - V + \lambda(r-(a+b))$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - mgr\cos\varphi + \lambda(r-(a+b))$$

donde $I = \frac{2}{5}ma^2$ y, como rueda una encima de la otra, se cumple que $(a+b)\dot{\varphi} = a\dot{\theta}$ [1], i.e $\dot{\theta}^2 = \left(\frac{a+b}{a}\right)^2\dot{\varphi}^2$. Por tanto:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + \frac{1}{5}m(a+b)^2\dot{\varphi}^2 - mgr\cos\varphi + \lambda(r-(a+b))$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2 - mg\cos\varphi + \lambda$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} + \frac{2}{5}m(a+b)^2\dot{\varphi} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = mgr\sin\varphi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 + mg\cos\varphi - \lambda = 0 \\ 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mr^2\ddot{\varphi} + \frac{2}{5}m(a+b)^2\ddot{\varphi} - mgr\sin\varphi = 0 \end{cases}$$

Con $r = a+b$, obtenemos que:

$$\begin{cases} -m(a+b)\dot{\varphi}^2 + mg\cos\varphi = \lambda & \ldots (1) \\ \frac{7}{5}m(a+b)^2\ddot{\varphi} = mg(a+b)\sin\varphi & \ldots (2) \end{cases}$$

De (2):

$$\Rightarrow \frac{7}{5}(a+b)\ddot{\varphi} = g\sin\varphi$$

$$\Rightarrow \frac{7}{5}\int_0^{\dot{\varphi}} \dot{\varphi}\, d\dot{\varphi} = \frac{g}{a+b}\int_0^{\varphi} \sin\varphi\, d\varphi$$

Con $\dot{\varphi}(0) = 0$ y $\varphi(0) = 0$, tenemos:

$$\Rightarrow \dot{\varphi}^2 = \frac{10}{7}\frac{g}{a+b}(1-\cos\varphi) \quad \ldots (3)$$

Sustituyendo en (1):

$$\Rightarrow -m(a+b)\cdot\frac{10}{7}g\frac{(1-\cos\varphi)}{a+b} + mg\cos\varphi = \lambda$$

$$\Rightarrow mg\left(\frac{17}{7}\cos\varphi - \frac{10}{7}\right) = \lambda$$

así:

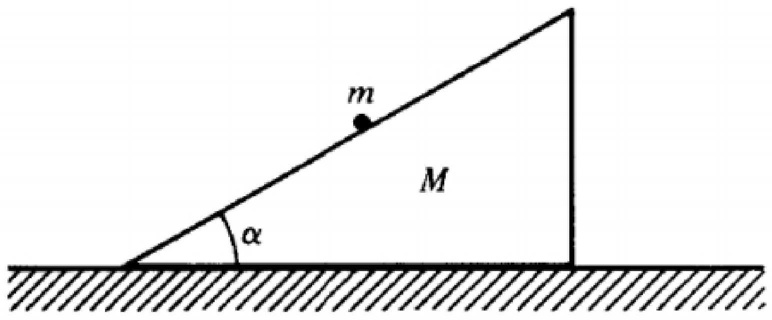
$$\vec{N} = \lambda\frac{\partial(r-(a+b))}{\partial\vec{r}}$$

$$= mg\left(\frac{17}{7}\cos\varphi - \frac{10}{7}\right)\hat{e}_r$$

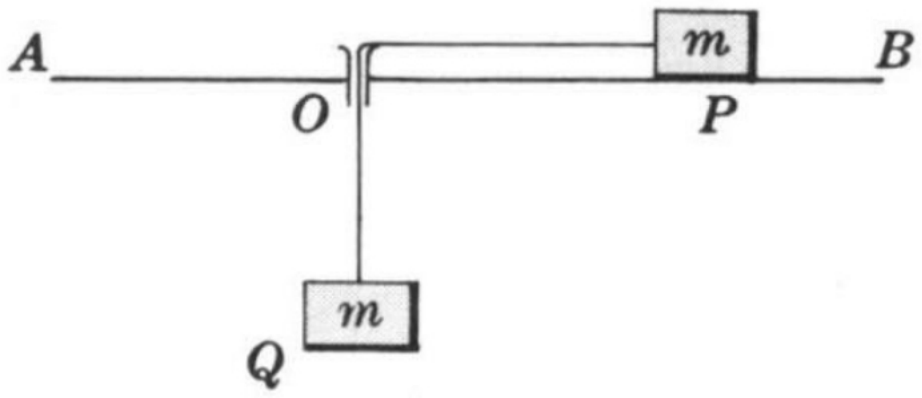
Justo cuando se despega, $\vec{N} = 0$, i.e $\cos\varphi = \frac{10}{17}$.

$\square$

14. Una partícula de masa m se desliza sin fricción sobre una cuña de ángulo α y masa M tal que puede moverse sin fricción sobre una superficie horizontal lisa. Calcule las ecuaciones de movimiento de la partícula y la cuña. También obtenga las fuerzas de restricción. ¿Existen constantes de movimiento?



15. Una cuerda de longitud l pasa a través de un pequeño orificio O hecho sobre una mesa horizontal lisa. Dos partículas de igual masa están atadas una en cada extremo de la cuerda. Una de las partículas cuelga verticalmente y la otra permanece sobre la mesa a una distancia a del orificio. La partícula P es proyectada sobre la mesa con velocidad $\sqrt{ga}$ perpendicular a la cuerda. Calcule la tensión en la cuerda y demuestre que la partícula colgante permanece en reposo. Si la partícula colgante se perturba ligeramente en la dirección vertical, calcule el periodo de las pequeñas oscilaciones.



Notas.

1) No sé porque jala con $(a+b)$ pero no con r arbitrario.