Notas Taller Topología Algebraica

Cristo Daniel Alvarado

6 de septiembre de 2024

Índice general

2. Grupos Libres y Productos de Grupos Libres **2**

2.1. Producto Débil de Grupos 2

2.2. Generadores y Relaciones 3

Capítulo 2

Grupos Libres y Productos de Grupos Libres

En los capítulos siguientes será indispensable el tratar con este tipo de grupos dada la naturaleza del grupo fundamental de los espacios topológicos.

2.1. Producto Débil de Grupos

Observación 2.1.1
De ahora en adelante, el símbolo $\forall\!\!\!\forall$ significa *para casi todo salvo una cantidad finita de elementos.*

Observación 2.1.2
En esta parte, I no denotará al intervalo $[0, 1]$, sino a una indexación de una familia.

Definición 2.1.1
Sea $\mathcal{G} = \{G_i\}_{i\in I}$ una familia arbitraria no vacía de grupos. Se define el **producto directo de la familia** $\mathcal{G}$ por:

$$\prod \mathcal{G} = \left\{ x : I \to \prod_{i\in I} G_i \middle| x \text{ es función} \right\}$$

y en ocasiones se denotará simplemente por $\prod_{i\in I} G_i$. Se dota a este conjunto de la siguiente operación: si $x, y \in \prod \mathcal{G}$, entonces $x \cdot y : I \to \prod_{i\in I} G_i$ es la función tal que

$$(x \cdot y)(i) = x(i) \cdot y(i)$$

para todo $i \in I$, siendo la multiplicación respectiva en cada grupo.

En caso de que no lo haya hecho, queda como ejercicio al lector probar que el producto directo de una familia de grupos $\mathcal{G}$ es un grupo dotado de la operación de la definición anterior.

Definición 2.1.2
Sea $\mathcal{G} = \{G_i\}_{i\in I}$ una familia arbitraria no vacía de grupos. Se define el **producto débil de la familia** $\mathcal{G}$ como el subgrupo de $\prod \mathcal{G}$ dado por:

$$\prod \mathcal{G}^* = \left\{ x \in \prod \mathcal{G} \middle| x(i) = e_i,\ \forall\!\!\!\forall\, i \in I \right\}$$

donde e_i denota la identidad de G_i para cada $i \in I$.

Proposición 2.1.1
Si $\mathcal{G}$ es una familia arbitraria no vacía de grupos, entonces

$$\prod \mathcal{G}^* < \prod \mathcal{G}$$

es decir, que $\prod \mathcal{G}^*$ es un subgrupo de $\prod \mathcal{G}$.

Demostración:
Ejercicio. ■

Definición 2.1.3
Sea $\mathcal{G} = \{G_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía de grupos. Si G_i es abeliano para cada $i \in I$, entonces llamaremos a $\prod \mathcal{G}^*$ la **suma directa de los grupos** G_i. En este caso, se denotará la operación del grupo de forma aditiva y se le denotará por:

$$\prod \mathcal{G}^* = \bigoplus_{i\in I} G_i = \bigoplus \mathcal{G}$$

Observación 2.1.3
Note que ambas definiciones coinciden si I es un conjunto finito.

Definición 2.1.4
En las condiciones de la definición anterior, para cada índice $i \in I$ definimos un **monomorfismo natural** $\varphi_i : G_i \to \prod \mathcal{G}^*$ definido como sigue: $\forall g \in G_i$ y para todo $j \in I$:

$$(\varphi_i(g))(j) = \begin{cases} g & \text{si} \quad i = j \\ e_j & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

En el caso en que cada G_i sea un grupo abeliano, el siguiente teorema da una caracterización importante de su producto débil y de los monomorfismos φ_i.

Teorema 2.1.1
Si $\{G_i\}_{i\in I}$ es una familia no vacía de grupos abelianos y,

$$G = \bigoplus_{i\in I} G_i$$

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[r, hook, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & G \arrow[d, "f"] \\ & A \end{tikzcd}$$

2.2. Generadores y Relaciones

Definición 2.2.1
Sea F un grupo y $X \subseteq F$ un grupo, decimos que F es un **grupo libre con base** X, si para cada grupo G y para cada función $f : X \to G$, existe un único homomorfismo $\varphi : F \to G$ extensión de F tales que el diagrama