

# Notas Curso Topología II

Cristo Daniel Alvarado

18 de septiembre de 2024

# Índice general

<b>1. Metrizabilidad</b>	<b>2</b>
1.1. Introducción . . . . .	2
1.2. Lema de Urysohn e implicaciones . . . . .	8
1.3. Espacios $T_{3,5}$ y Completamente Regulares . . . . .	14
1.4. El Teorema de Metrizabilidad de Urysohn . . . . .	16
1.5. Espacios Paracompactos . . . . .	18

# Capítulo 1

## Metrizabilidad

### 1.1. Introducción

¿Cuándo un espacio topológico es metrizable? Supongamos que tenemos un espacio topológico  $(X, \tau)$ , queremos una métrica  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\tau_d = \tau$ .

La respuesta a esta pregunta es que no siempre será posible encontrar tal métrica. Por ejemplo, tome cualquier espacio topológico que no sea  $T_1$ .

- Pável Urysohn 1898-1924. El Lema de Urysohn fue publicado en 1924 póstumo a la muerte de su autor.
- Primera guerra mundial 28 de julio de 1914 a 11 de noviembre de 1918, inició con el asesinato del Archiduque Francisco de Austria.
- Segunda guerra mundial 1939 a 1945, cuando Hitler invade Polonia.
- En 1950 Bing, Nagata y Morita resuelven el problema de metrizabilidad de espacios topológicos.

Lo que veremos a continuación tiene como base fundamental el siguiente lema:

---

**Lema 1.1.1 (Lema de Urysohn)**

Sea  $(X, \tau)$  espacio topológico. Entonces,  $(X, \tau)$  es  $T_4$  si y sólo si dados  $A, B \subseteq X$  cerrados disjuntos existe una función continua  $f : X \rightarrow [0, 1]$  tal que

$$f(A) = \{0\} \quad \text{y} \quad f(B) = \{1\}$$

---

Este lema se probó en el curso pasado.

---

**Proposición 1.1.1**

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico segundo numerable. Entonces

1.  $(X, \tau)$  es primero numerable.
  2.  $(X, \tau)$  es de Lindelöf.
  3.  $(X, \tau)$  es separable.
-

**Demostración:**

Sea  $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  una base numerable para  $\tau$ .

De (1): Sea  $x \in X$ . Tomemos

$$\mathcal{B}_x = \{B_n \in \mathcal{B} \mid x \in B_n\}$$

este es un conjunto no vacío pues al ser  $\mathcal{B}$  base, existe  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B$ . Además es a lo sumo numerable por ser subcolección de  $\mathcal{B}$ .

Sea  $U \subseteq X$  abierto tal que  $x \in U$ . Como  $\mathcal{B}$  es base de  $\tau$ , existe  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B \subseteq U$ , luego  $B \in \mathcal{B}_x$ . Por tanto,  $\mathcal{B}_x$  es un sistema fundamental de vecindades de  $x$ . Al ser el  $x$  arbitrario, se sigue que  $(X, \tau)$  es primero numerable.

De (2): Sea  $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$  una cubierta abierta de  $(X, \tau)$ . Dado  $x \in X$  existe  $A_\alpha \in \mathcal{A}$  tal que  $x \in A_\alpha$ , como  $A_\alpha \in \tau$ , existe  $B_x \in \mathcal{B}$  tal que

$$x \in B_x \subseteq A_\alpha$$

Sea

$$\mathcal{K} = \left\{n \in \mathbb{N} \mid \exists A_\alpha \in \mathcal{A} \text{ tal que } B_n \subseteq A_\alpha\right\}$$

por la observación anterior, esta colección es no vacía. Dado  $k \in \mathcal{K}$  escogemos un único  $A_{\alpha_k}$  tal que

$$B_k \subseteq A_{\alpha_k}$$

Sea

$$\mathcal{A}' = \{A_{\alpha_k}\}_{k \in \mathcal{K}}$$

se tiene que  $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$  es numerable. Sea  $x \in X$ , Como  $\mathcal{A}$  es cubierta, existe  $A' \in \mathcal{A}$  tal que

$$x \in A' \in \tau$$

luego, al ser  $\mathcal{B}$  base existe  $B_n \in \mathcal{B}$  tal que

$$x \in B_n \subseteq A'$$

Se sigue pues que  $x \in A_{\alpha_n}$ . Por ende,  $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{\alpha_n}$ . Así,  $\mathcal{A}$  posee una subcubierta a lo sumo numerable. Se sigue que al ser la cubierta abierta arbitraria que el espacio  $(X, \tau)$  es Lindelöf.

De (3): Ejercicio. ■

**Proposición 1.1.2**

Si  $(X, \tau)$  es metrizable, entonces los conceptos de espacio de Lindelöf, espacio separable y espacio segundo numerable son equivalentes.

**Demostración:**

Probaremos que Lindelöf implica separabilidad que implica segunda numerabilidad.

Suponga que  $(X, \tau)$  es metrizable, entonces existe una métrica  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\tau_d = \tau$ .

- Suponga que  $(X, \tau)$  es Lindelöf. Sea  $n \in \mathbb{N}$  y tomemos

$$\mathcal{U}_n = \left\{B_d\left(x, \frac{1}{n}\right) \mid x \in X\right\}$$

$\mathcal{U}_n$  es una cubierta abierta de  $(X, \tau)$ . Como el espacio de Lindelöf, existe  $\mathcal{V}_n$  a lo sumo numerable tal que

$$\mathcal{V}_n = \left\{B_d\left(y, \frac{1}{n}\right) \mid y \in Y_n\right\}$$

siendo  $Y_n \subseteq X$  un conjunto a lo sumo numerable, de tal suerte que  $\mathcal{V}_n$  es subcubierta de  $\mathcal{U}_n$ . Sea

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$$

este es un conjunto a lo sumo numerable. Sea  $U \in \tau$  con  $U \neq \emptyset$ . Como  $U \neq \emptyset$ , existe  $x \in U$ , así existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $B_d(x, \varepsilon) \subseteq U$ . Sea  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{m} < \varepsilon$ . Tenemos que  $\mathcal{V}_m$  es una cubierta de  $X$ , luego existe  $y \in Y_m$  tal que

$$x \in B_d\left(y, \frac{1}{m}\right)$$

Por tanto,  $y \in B_d\left(x, \frac{1}{m}\right) \subseteq B(x, \varepsilon) \subseteq U$ , así  $y \in U$ . Pero como  $y \in Y_m$  se tiene que  $y \in A$ . Por ende

$$U \cap A \neq \emptyset$$

lo que prueba el resultado.

- Suponga que  $(X, \tau)$  es separable, entonces existe  $A \subseteq X$  subconjunto denso a lo sumo numerable. Sea

$$\mathcal{B} = \left\{ B_d\left(a, \frac{1}{n}\right) \mid a \in A \text{ y } n \in \mathbb{N} \right\}$$

Si probamos que  $\mathcal{B}$  es base para  $\tau$ , se probará el resultado (pues  $\mathcal{B}$  es a lo sumo numerable). Sea  $x \in X$  y  $\varepsilon > 0$ . Tomemos  $m \in \mathbb{N}$  tal que

$$\frac{2}{m} < \varepsilon$$

como  $\bar{A} = X$ , entonces existe  $a \in A$  tal que  $a \in B_d\left(x, \frac{1}{m}\right)$ . Entonces

$$x \in B_d\left(a, \frac{1}{m}\right) \subseteq B_d\left(x, \frac{2}{m}\right) \subseteq B_d(x, \varepsilon)$$

por tanto,  $\mathcal{B}$  es una base para la topología  $\tau$ , luego el espacio  $(X, \tau)$  es segundo numerable. ■

### Ejemplo 1.1.1

Considere el espacio topológico  $(\mathbb{R}, \leq)$ . Entonces el conjunto

$$\mathcal{B}_l = \left\{ [a, b) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

es una base para una topología sobre  $\mathbb{R}$ . La topología generada por esta base la denotamos por  $\tau_l$  y se dice **la topología del límite inferior**.

### Ejemplo 1.1.2

El espacio  $(\mathbb{R}, \tau_l)$  es  $T_2$ . Dados  $a, b \in \mathbb{R}$  se tiene que si  $a < x < b$ .

$$(a, b) = \bigcup \left\{ [x, b) \mid a < x < b \right\}$$

por tanto,  $\tau_u \subseteq \tau_l$ , luego  $(\mathbb{R}, \tau_l)$  es  $T_2$  pues con la topología usual lo es.

Más aún,  $(\mathbb{R}, \tau_l)$  es primero numerable.

**Demostración:**

En efecto, sea  $x \in \mathbb{R}$ . Afirmamos que la colección

$$\left\{ [x, x + 1/n) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

es un sistema fundamental de vecindades de  $x$ , por lo que este espacio es primero numerable. ■

**Ejemplo 1.1.3**

El espacio  $(\mathbb{R}, \tau_l)$  no es segundo numerable.

**Demostración:**

Sea  $\mathcal{B}$  una base para  $\tau_l$ . Para  $x \in \mathbb{R}$  escogemos  $B_x \in \mathcal{B}$  tal que

$$x \in B_x \subseteq [x, x + 1)$$

Se tiene que  $x = \inf B_x$ . Para  $x, y \in \mathbb{R}$  se tiene que  $B_x \neq B_y$  (pues si fueran iguales, tendrían el mismo ínfimo). Por tanto la colección  $\mathcal{B}$  es no numerable.

Así, el espacio  $(\mathbb{R}, \tau_l)$  no es segundo numerable. ■

**Ejemplo 1.1.4**

El espacio  $(\mathbb{R}, \tau_l)$  es separable.

**Demostración:**

Tome  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ . ■

**Ejemplo 1.1.5**

$(\mathbb{R}, \tau_l)$  es normal.

**Demostración:**

Sean  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  cerrados tales que  $A \cap B = \emptyset$ . Sea  $a \in A$ , entonces  $a \notin B = \overline{B}$ . Existe pues  $x_a \in \mathbb{R}$  tal que

$$[a, x_a) \subseteq \mathbb{R} - B$$

(por ser el conjunto de la derecha abierto). Entonces

$$A \subseteq \bigcup_{a \in A} [a, x_a) = U \in \tau_l$$

y

$$B \subseteq \bigcup_{b \in B} [b, x_b) = V \in \tau_l$$

Si  $U \cap V \neq \emptyset$ , entonces existe  $a \in A$  y  $b \in B$  tales que

$$[a, x_a) \cap [b, x_b) \neq \emptyset$$

Si  $a < b$  entonces  $b \in [a, x_a)$ , lo cual es una contradicción. Por tanto,  $U \cap V = \emptyset$ . Así, el espacio  $(\mathbb{R}, \tau_l)$  es normal. ■

**Proposición 1.1.3**

Si  $(X, \tau)$  es metrizable, entonces  $(X, \tau)$  es normal.

**Demostración:**

Sea  $d$  una métrica definida sobre  $X$  tal que  $\tau_d = \tau$ . Como  $(X, \tau)$  es metrizable, entonces es  $\mathbb{T}_2$  y por lo tanto es  $T_1$ . Veamos que  $(X, \tau)$  es  $T_4$ .

Sean  $A, B \subseteq X$  cerrados disjuntos con  $A \cap B \neq \emptyset$ . Sea  $a \in A$ , entonces  $a \in X - B \in \tau$ . Entonces existe  $\varepsilon_a > 0$  tal que

$$B_d(a, \varepsilon_a) \subseteq X - B$$

Sea

$$U = \bigcup_{a \in A} B_d\left(a, \frac{\varepsilon_a}{2}\right) \in \tau$$

es claro que  $A \subseteq U$ . De forma análoga se construye  $V$ :

$$V = \bigcup_{b \in B} B_d\left(b, \frac{\varepsilon_b}{2}\right) \in \tau$$

es tal que  $B \subseteq V$ . Suponga que  $U \cap V \neq \emptyset$ . Entonces existe  $a \in A$  y  $b \in B$  tales que

$$B_d\left(a, \frac{\varepsilon_a}{2}\right) \cap B_d\left(b, \frac{\varepsilon_b}{2}\right) \neq \emptyset$$

se tiene que  $d(a, b) < d(a, x) + d(x, b) < \frac{\varepsilon_a}{2} + \frac{\varepsilon_b}{2} < \max\{\varepsilon_a, \varepsilon_b\}$ . Por tanto,  $a \in B_d(b, \varepsilon_b)$  o  $b \in B_d(a, \varepsilon_a)$ , lo cual contradice la elección de estas bolas. Por tanto,  $U \cap V = \emptyset$ .

Así, el espacio  $(X, \tau)$  es  $T_4$ . ■

**Corolario 1.1.1**

Si  $(X, \tau)$  es metrizable, entonces es regular.

**Demostración:**

Inmediato del hecho que normalidad implica regularidad. ■

**Proposición 1.1.4**

Si  $(X, \tau)$  es metrizable, entonces  $(X, \tau)$  es primero numerable.

**Demostración:**

Sea  $d$  una métrica definida sobre  $X$  tal que  $\tau = \tau_d$ . Sea  $x \in X$ , considere

$$\mathcal{V} = \left\{ B_d\left(x, \frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

entonces  $\mathcal{V}$  es una colección numerable de vecindades de  $X$  y es fundamental (por construcción). Por tanto,  $(X, \tau)$  es primero numerable. ■

**Proposición 1.1.5**

Sea  $(X, \tau)$  un espacio  $T_3$  y de Lindelöf, entonces  $(X, \tau)$  es  $T_4$

**Demostración:**

Sean  $A, B \subseteq X$  cerrados disjuntos. Sea  $a \in A \subseteq X - B \in \tau$ . Como  $(X, \tau)$  es  $T_3$ , existe  $U_a \in \tau$  tal que

$$a \in U_a \subseteq \overline{U_a} \subseteq X - B$$

Por ser  $(X, \tau)$  de Lindelöf y ser  $A \subseteq X$  cerrado, tenemos que  $(A, \tau_A)$  es de Lindelöf. Se tiene que

$$A \subseteq \bigcup_{a \in A} U_a$$

donde  $U_a \in \tau$  y  $\overline{U_a} \cap B \neq \emptyset$ . Existe pues  $\{U_{a_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  tales que

$$A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_{a_n} U_{a_n}$$

y cumplen que

$$\overline{U_{a_n}} \cap B = \emptyset, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

De forma análoga podemos encontrar una familia  $\{V_{b_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  de abiertos tales que

$$V \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_{b_n} V_{b_n}$$

y que cumplan:

$$\overline{V_{b_n}} \cap A = \emptyset, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Sea  $m \in \mathbb{N}$ . Se define

$$U_m = U_{a_m} - \bigcup_{l=1}^m \overline{V_{b_l}} \in \tau$$

y  $V_m$  se define de forma similar: ■

#### Observación 1.1.1

Por el ejemplo de  $(\mathbb{R}, \tau_l)$ , se sigue que el recíproco de esta proposición anterior no es cierta.

#### Observación 1.1.2

Del ejemplo anterior se deduce de forma inmediata que el recíproco del teorema anterior no es cierto.

El objetivo de los siguientes resultados va a ser el de probar estos siguientes dos teoremas:

---

#### Teorema 1.1.1 (Teorema de Urysohn)

Si  $(X, \tau)$  es un espacio normal y segundo numerable, entonces es metrizable.

---



---

#### Teorema 1.1.2 (Teorema de Tychonoff)

Si  $(X, \tau)$  es un espacio regular y segundo numerable, entonces es metrizable.

---

los cuales caracterizan en su totalidad a los espacios metrizables.

Notemos antes que se cumple lo siguiente (dados los resultados probados anteriormente):

$$\text{Metrizabilidad} \Rightarrow \text{Normalidad} \Rightarrow \text{Regularidad}$$

pero, más adelante se verá que

$$\text{Metrizabilidad} \not\Rightarrow \text{Segunda numerabilidad}$$

y,

$$\text{Normalidad y primero numerabilidad} \not\Rightarrow \text{Metrizabilidad}$$



**Definición 1.1.1**

Para todo  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  se define:

$$\mathcal{D}_n = \left\{ 0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \dots, \frac{2^n - 1}{2^n}, 1 \right\}$$

y con ello, se construye el subconjunto de  $\mathbb{Q}$ :

$$\mathcal{D} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}_n$$

**Proposición 1.1.6**

Sea  $[0, 1]$  como subespacio de  $(\mathbb{R}, \tau_u)$ , entonces  $\mathcal{D}$  es denso en  $([0, 1], \tau_{u[0,1]})$ .

**Demostración:**

Es inmediata. ■

## 1.2. Lema de Urysohn e implicaciones

**Lema 1.2.1 (Lema de Urysohn)**

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. Entonces,  $(X, \tau)$  es  $T_4$  si y sólo si para todos  $A, B \subseteq X$  cerrados disjuntos, existe una función continua  $f : (X, \tau) \rightarrow ([0, 1], \tau_u)$  tal que  $f(A) = \{1\}$  y  $f(B) = \{0\}$ .

**Demostración:**

$\Rightarrow$ ) : Para probar el resultado, debemos hacer varias cosas antes:

1. Sea

$$P = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$$

Nuestro objetivo es que para cada  $p \in P$  le asignemos un conjunto abierto  $U_p \subseteq X$  tal que si  $p, q \in P$  son tales que

$$p < q \Rightarrow \overline{U_p} \subseteq U_q$$

de esta forma, la familia  $\{U_p \mid p \in P\}$  estará simplemente ordenada de la misma forma en la que sus subíndices lo están en  $P$ . Como el conjunto  $P$  es numerable, podemos usar inducción para definir cada uno de los  $U_p$ . Ordenemos los elementos de  $P$  en una sucesión de tal forma que los números 0 y 1 son los primeros de la sucesión (denotada de ahora en adelante por  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ ).

Definiremos ahora los conjuntos  $U_p$  como sigue: defina

$$U_1 = X - B$$

Como  $A$  es un cerrado contenido en  $U_1$ , por ser  $(X, \tau)$   $T_4$ , se tiene que existe un conjunto abierto  $U_0 \subseteq X$  tal que

$$A \subseteq U_0 \quad \text{y} \quad \overline{U_0} \subseteq U_1$$

En general, sea  $P_n$  el conjunto de los primeros  $n$  números racionales en la sucesión de los elementos de  $P$ . Suponga que  $U_p$  está definido para cada  $p \in P_n$  y, satisface la condición:

$$p, q \in P_n \text{ tal que } p < q \Rightarrow \overline{U_p} \subseteq U_q$$

Sea  $r$  el siguiente número racional en la sucesión  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ , esto es  $r = p_{n+1}$ . Definiremos  $U_r$ .

Considere el conjunto

$$P_{n+1} = P_n \cup \{r\}$$

Este es un subconjunto finito del intervalo  $[0, 1]$  y, tiene un orden simple derivado del orden simple  $<$  de  $[0, 1]$ .

En un conjunto finito simplemente ordenado, todo elemento tiene un predecesor inmediato y un sucesor inmediato. El número 0 es el elemento más pequeño y, 1 es el elemento más grande de  $P_{n+1}$  y,  $r$  no es 0 o 1. Por tanto,  $r$  tiene un sucesor y un predecesor inmediato, denotados respectivamente por  $q$  y  $p$ . Los conjuntos  $U_p$  y  $U_q$  están definidos y son tales que

$$\overline{U_p} \subseteq U_q$$

por hipótesis de inducción. Como  $(X, \tau)$  es  $T_4$ , entonces existe un conjunto abierto  $U_r \subseteq X$  tal que

$$\overline{U_p} \subseteq U_r \quad \text{y} \quad \overline{U_r} \subseteq U_q$$

Es claro (pues los conjuntos  $U_p$  con  $p \in P_n$  están ordenados por la contención), que

$$p, q \in P_{n+1} \text{ tal que } p < q \Rightarrow \overline{U_p} \subseteq U_q$$

Usando inducción, tenemos definidos los conjuntos  $U_p$ , para todo  $p \in P$ .

2. Ahora que se tiene definido  $U_p$  para todo número en  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ , extenderemos esta definición a todo  $\mathbb{Q}$ , haciendo

$$\begin{aligned} U_p &= \emptyset, & p < 0 \\ U_p &= X, & 1 < p \end{aligned}$$

para todo  $p \in \mathbb{Q}$ . Se sigue cumpliendo que para todo  $p, q \in \mathbb{Q}$

$$p < q \Rightarrow \overline{U_p} \subseteq U_q$$

3. Dado un punto  $p \in X$ , definamos el conjunto  $\mathbb{Q}(x)$  como el conjunto de todos los números racionales  $p \in \mathbb{Q}$  tales que los correspondientes  $U_p$  contengan a  $x$ , es decir:

$$\mathbb{Q}(x) = \left\{ p \in \mathbb{Q} \mid x \in U_p \right\}$$

Este conjunto no contiene a ningún número menor que 0 ya que  $x \notin U_p$  para todo  $p \in \mathbb{Q}^-$ , además, contiene a todo número mayor que 1, pues  $x \in U_p$  para todo  $p \in \mathbb{Q}$ ,  $p > 1$ . Por tanto,  $\mathbb{Q}(x)$  es acotado inferiormente y no vacío, luego tiene ínfimo en el intervalo  $[0, 1]$ . Defina

$$f(x) = \inf \mathbb{Q}(x) = \inf \left\{ p \in \mathbb{Q} \mid x \in U_p \right\}$$

4. Afirmamos que  $f$  es la función deseada. Si  $x \in A$ , entonces  $x \in U_p$  para todo  $p \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ , luego

$$f(x) = \inf \mathbb{Q}(x) = 0$$

Similarmente, si  $x \in B$ , entonces  $x \notin U_p$  para todo  $p \in \mathbb{Q}$  con  $p \leq 1$ . Luego,  $\mathbb{Q}(x)$  consiste de todos los números racionales mayores a 1 y, por ende,  $f(x) = 1$ .

Probaremos que  $f$  es continua. Para ello, probaremos que se cumplen dos cosas:

- I)  $x \in \overline{U_r}$  implica que  $f(x) \leq r$ .
- II)  $x \notin U_r$  implica que  $f(x) \geq r$ .

Para probar (1), notemos que si  $x \in \overline{U}_r$ , entonces  $x \in U_s$ , para todo  $s > r$ . Entonces,  $\mathbb{Q}(x)$  contiene a todos los números racionales mayores que  $r$ , así que, por definición tenemos que

$$f(x) = \inf \mathbb{Q}(x) \leq r$$

Para probar (2), notemos que si  $x \notin U_r$ , entonces  $x$  no está en  $U_s$  para todo  $s < r$ . Por tanto,  $\mathbb{Q}(x)$  no contiene números racionales menores que  $r$ , por lo cual

$$f(x) = \inf \mathbb{Q}(x) \geq r$$

Ahora probaremos la continuidad de  $f$ . Sea  $x_0 \in X$  y un intervalo abierto  $(c, d)$  en  $\mathbb{R}$  tal que

$$c < f(x_0) < d$$

podemos encontrar números racionales  $p, q \in \mathbb{Q}$  tales que

$$c < p < f(x_0) < q < d$$

Afirmamos que el conjunto

$$U = U_q - \overline{U}_p$$

es un abierto que cumple que  $f(U) \subseteq (c, d)$  y es tal que  $x_0 \in U$ . En efecto, notemos que  $x_0 \in U_q$  pues  $f(x_0) < q$  implica por (2) que  $f(x_0) \in U_q$  y, como  $p < f(x_0)$ , implica por (1) que  $f(x_0) \notin \overline{U}_p$ . Por tanto,  $f(x_0) \in U$ .

Sea  $x \in U$ , entonces  $x \in U_q \subseteq \overline{U}_q$ , por lo cual de (1),  $f(x) \leq q$  y,  $x \notin \overline{U}_p$  implica que  $x \notin \overline{U}_p$  por lo cual de (2) se sigue que  $p \leq f(x)$ . Por tanto,  $f(x) \in [p, q] \subseteq (c, d)$ .

Luego,  $f(U) \subseteq (c, d)$ . Así,  $f$  es continua en  $x_0 \in X$ . Como el punto fue arbitrario, se sigue que  $f$  es continua en  $X$ .

Por los 4 incisos anteriores, se sigue el resultado.

$\Leftarrow$ ) : Sean  $A, B \subseteq X$  cerrados disjuntos. Por hipótesis existe una función continua  $f : (X, \tau) \rightarrow ([0, 1], \tau_u)$  tal que  $f(A) = 1$  y  $f(B) = 0$ . Los conjuntos  $U = f^{-1}((r, 1])$   $V = f^{-1}([0, r))$ , donde  $r \in (0, 1)$ , son dos abiertos (ya que  $f$  es continua y  $[0, r), (r, 1] \in \tau_u$ ) tales que:

$$A \subseteq U \quad B \subseteq V$$

y,  $U \cap V = \emptyset$ . ■

### Ejemplo 1.2.1

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico  $T_4$  y  $A, B \subseteq X$  cerrados disjuntos y considere al espacio  $(A \cup B, \tau_{A \cup B})$ . Sea  $g : (A \cup B, \tau_{A \cup B}) \rightarrow ([0, 1], \tau_u)$  la función definida como

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A \\ 1 & \text{si } x \in B \end{cases}, \quad \forall x \in A \cup B$$

esta función es continua. Como  $(X, \tau)$  es  $T_4$ , por el Lema de Urysohn existe  $G : (X, \tau) \rightarrow ([0, 1], \tau_u)$  función continua tal que  $G(A) = \{0\}$  y  $G(B) = \{1\}$ . Se tiene pues que  $G$  es una extensión continua de la función  $g$ .

### Ejercicio 1.2.1

Pruebe que

$$\frac{1}{3} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} = 1$$

y,

$$\frac{1}{3} \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Demostración:**

■

---

**Proposición 1.2.1**

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico  $T_4$  y sea  $A \subseteq X$  cerrado. Tomemos  $r \in \mathbb{R}^+$  y considere  $[-r, r]$  dotado de la topología usual. Si  $f : (A, \tau_A) \rightarrow ([-r, r], \tau_u)$  es una función continua, entonces existe una función continua  $g : (X, \tau) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$  tal que

- I.  $\forall x \in X, |g(x)| \leq \frac{r}{3}$ .
- II.  $\forall a \in A, |f(a) - g(a)| \leq \frac{2r}{3}$ .

---

**Demostración:**

Definimos  $I_1 = [-r, -r/3]$ ,  $I_2 = [-r/3, r/3]$  e  $I_3 = [r/3, r]$ . Hacemos  $B = f^{-1}(I_1)$  y  $C = f^{-1}(I_3)$ . Como  $f$  es continua entonces  $B$  y  $C$  son dos cerrados en  $(A, \tau_A)$ , al ser  $A$  cerrado en  $X$ , se sigue que  $B$  y  $C$  son cerrados en  $X$  y además son disjuntos. Por el Lema de Urysohn existe una función continua  $g : (X, \tau) \rightarrow ([-r/3, r/3], \tau_u)$  tal que

$$g(B) = \{-r/3\} \text{ y } g(C) = \{r/3\}$$

además, para todo  $x \in X$  se cumple que  $|g(x)| \leq \frac{r}{3}$ .

Tenemos lo siguiente: sea  $a \in A$ , entonces:

- Si  $a \in B$  se tiene que  $f(a) \in I_1$  y  $g(a) = -r/3$ , por lo cual  $f(a), g(a) \in I_1$ , lo cual implica que

$$|f(a) - g(a)| \leq \frac{2r}{3}$$

- Si  $a \in C$  se tiene que  $f(a) \in I_3$  y  $g(a) = r/3$ , por lo cual  $f(a), g(a) \in I_3$ , lo cual implica que

$$|f(a) - g(a)| \leq \frac{2r}{3}$$

- $a \notin B \cup C$ , entonces  $f(a) \in I_2$  y ya se sabe que  $g(a) \in I_2$ , lo cual implica que

$$|f(a) - g(a)| \leq \frac{2r}{3}$$

viendo a  $g$  como una función de  $(X, \tau)$  en  $(\mathbb{R}, \tau_u)$  se tiene el resultado.

■

---

**Teorema 1.2.1 (Teorema de extensión de Tietze)**

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico  $T_4$ . Considere  $[a, b]$  como subespacio de  $(\mathbb{R}, \tau_u)$  con  $a, b \in \mathbb{R}$  tales que  $a < b$ . Si  $f : (A, \tau_A) \rightarrow ([a, b], \tau_u)$  es una función continua, entonces existe una función continua  $F : (X, \tau) \rightarrow ([a, b], \tau_u)$  tal que para todo  $a \in A$

$$F(a) = f(a)$$

**Demostración:**

La función  $h : ([a, b], \tau_u) \rightarrow ([-1, 1], \tau_u)$  definida como

$$h(x) = \frac{2x - a - b}{b - a}, \quad \forall x \in [a, b]$$

es un homeomorfismo.

Si para la función continua  $h \circ f : (A, \tau_A) \rightarrow ([-1, 1], \tau_u)$  existe una función continua  $H : (X, \tau) \rightarrow ([-1, 1], \tau_u)$  tal que para todo  $a \in A$ ,  $H(a) = (h \circ f)(a)$ , entonces  $h^{-1} \circ H : (X, \tau) \rightarrow ([a, b], \tau_u)$  es una función continua tal que

$$(h^{-1} \circ H)(a) = f(a), \quad \forall a \in A$$

Tomando  $F = h^{-1} \circ H$  se tiene el resultado. Por tanto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $f : (A, \tau_A) \rightarrow ([-1, 1], \tau_u)$ . Podemos usar el resultado anterior para  $r = 1$ .

1. Tenemos por la proposición anterior que existe una función continua  $g_1 : (X, \tau) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$  tal que

- $\forall x \in X, |g_1(x)| \leq \frac{1}{3}$ .
- $\forall a \in A, |f(a) - g_1(a)| \leq \frac{2}{3}$ .

2. Consideremos la función continua  $f - g_1 : (A, \tau_A) \rightarrow ([-2/3, 2/3], \tau_u)$  (esto por (1)). Para  $r = \frac{2}{3}$  existe una función continua  $g_2 : (X, \tau) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$  tal que

- $\forall x \in X, |g_2(x)| \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$ .
- $\forall a \in A, |(f - g_1)(a) - g_2(a)| = |(f - g_1 - g_2)(a)| \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$ .

3. Suponga construidas funciones continuas  $g_1, \dots, g_n : (X, \tau) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$  con  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq 2$  tales que

- $\forall x \in X, |g_i(x)| \leq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}$ , para todo  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .
- $\forall a \in A, |f(a) - \sum_{i=1}^n g_i(a)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ .

Entonces, por la proposición anterior para la función  $f - \sum_{i=1}^n g_i : (A, \tau_A) \rightarrow \left([- \left(\frac{2}{3}\right)^n, \left(\frac{2}{3}\right)^n], \tau_u\right)$  existe una función continua  $g_{n+1} : (X, \tau) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$  tal que

- $\forall x \in X, |g_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$ .
- $\forall a \in A, |(f - \sum_{i=1}^n g_i)(a) - g_{n+1}(a)| \leq \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ .

por inducción tenemos definida una sucesión de funciones  $\{g_i : (X, \tau) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)\}_{i=1}^{\infty}$  que cumple las condiciones anteriores para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Defina

$$G_k = \sum_{i=1}^k g_i$$

sean  $m, k \in \mathbb{N}$ ,  $x \in X$ . Se tiene que

$$\begin{aligned}
 |G_{n+k}(x) - G_n(x)| &= \left| \sum_{i=n+1}^{n+k} g_i(x) \right| \\
 &\leq \sum_{i=n+1}^{n+k} |g_i(x)| \\
 &\leq \frac{1}{3} \sum_{i=n+1}^{n+k} \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \\
 &< \frac{1}{3} \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \\
 &= \left(\frac{2}{3}\right)^n
 \end{aligned}$$

por ende, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq N$  se cumple que

$$\left| \sum_{i=n+1}^{n+k} g_i(x) \right| < \varepsilon, \quad \forall x \in X$$

y para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Luego, dado  $x \in X$  la serie  $\sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)$  es convergente y así podemos definir una función  $g : (X, \tau) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$  tal que

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)$$

Veamos que la función  $g : (X, \tau) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$  es continua. Para todo  $m \in \mathbb{N}$ ,  $G_m$  es continua y para  $x \in X$ ,  $k, n \in \mathbb{N}$  con  $n < k$  se tiene

$$\begin{aligned}
 |G_{n+k}(x) - G_n(x)| &= \left| \sum_{i=n+1}^{n+k} g_i(x) \right| \\
 &< \left(\frac{2}{3}\right)^n
 \end{aligned}$$

para  $n$  fijo y  $k \rightarrow \infty$  tenemos que para todo  $x \in X$ :

$$|g(x) - G_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

por tanto,  $G_n$  converge uniformemente a  $g$ , por ende  $g$  es continua.

Además, para todo  $a \in A$

$$\begin{aligned}
 |f(a) - G_n(a)| &= \left| f(a) - \sum_{i=1}^n g_i(a) \right| \\
 &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^n
 \end{aligned}$$

por tanto, para todo  $a \in A$ ,  $f(a) = g(a)$ . Tomando  $F = g$  se tiene el resultado. ■

### Observación 1.2.1

Considere  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  como subespacio de  $(\mathbb{R}, \tau_u)$ . Sea  $h : (\mathbb{R}, \tau_u) \rightarrow ((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \tau_u)$  la función definida como:

$$h(x) = \arctan(x), \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

el cual es un homeomorfismo. Como a su vez el intervalo  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  es homeomorfo a  $(-1, 1)$  como

subespacios de  $(\mathbb{R}, \tau_u)$ , tenemos que

$$(\mathbb{R}, \tau_u) \cong ((-1, 1), \tau_u)$$

### Observación 1.2.2

Además, si  $(X, \tau)$  es un espacio topológico y  $f : (X, \tau) \rightarrow ((-1, 1), \tau_u)$  es una función continua, entonces la función  $F : (X, \tau) \rightarrow ([-1, 1], \tau_u)$  definida por

$$F(x) = f(x), \quad \forall x \in X$$

es una función continua.

### Proposición 1.2.2

Sea  $(X, \tau)$  un espacio  $T_4$  y tomemos  $A \subseteq X$  cerrado. Si  $f : (A, \tau_A) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$  es una función continua, entonces existe una función continua  $F : (X, \tau) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$  tal que

$$F(a) = f(a), \quad \forall a \in A$$

### Demostración:

Podemos considerar a la función  $f : (A, \tau_A) \rightarrow ([-1, 1], \tau_u)$  con  $f(A) \subseteq (-1, 1)$  (esto por las observaciones anteriores). Por el Teorema de extensión de Tietze existe una función continua  $\tilde{F} : (X, \tau) \rightarrow ([-1, 1], \tau_u)$  tal que

$$\tilde{F}(a) = f(a), \quad \forall a \in A$$

Definimos

$$D = \tilde{F}^{-1}(\{-1\}) \cup \tilde{F}^{-1}(\{1\})$$

este es un conjunto cerrado (pues  $\tilde{F}$  es continua). Se tiene que  $A \subseteq X$  es un cerrado tal que  $f(A) \subseteq (-1, 1)$ , luego entonces

$$A \cap D = \emptyset$$

Por el Lema de Urysohn existe una función continua  $g : (X, \tau) \rightarrow ([0, 1], \tau_u)$  tal que

$$g(D) = \{0\} \quad \text{y} \quad g(A) = \{1\}$$

definimos  $F = g \cdot \tilde{F}$ , esta es una función con dominio  $(X, \tau)$  y contradominio  $(\mathbb{R}, \tau_u)$ . Por ser producto de funciones continuas, esta es una función continua. Además, como para todo  $x \in X$ ,  $g(x) \in [0, 1]$ , se tiene que

$$|F(x)| = |g(x) \cdot \tilde{F}(x)| \leq |\tilde{F}(x)| \leq 1, \quad \forall x \in X$$

- Si  $x \in D$ , entonces  $g(x) = 0$ , esto es que  $F(x) = 0$ .
- Si  $x \notin D$ , entonces  $\tilde{F}(x) \in (-1, 1)$ , luego  $|F(x)| < 1$ , se sigue que  $F(x) \in (-1, 1)$ .

Luego,  $F : (X, \tau) \rightarrow ((-1, 1), \tau_u)$  es una función continua tal que

$$F(a) = g(a) \cdot \tilde{F}(a) = 1 \cdot \tilde{F}(a) = f(a), \quad \forall a \in A$$

Luego  $F$  es la función continua buscada. ■

## 1.3. Espacios $T_{3,5}$ y Completamente Regulares

**Definición 1.3.1**

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. Decimos que  $(X, \tau)$  es **un espacio**  $T_{3,5}$  si dados  $A \subseteq X$  cerrado no vacío y  $x \notin A$ , existe una función  $f : (X, \tau) \rightarrow ([0, 1], \tau_u)$  tal que  $f$  es continua y

$$f(A) = \{1\} \quad \text{y} \quad f(x) = 0$$

**Definición 1.3.2**

Un espacio topológico  $(X, \tau)$  que es  $T_{3,5}$  y  $T_1$  se llama **espacio completamente regular** (también llamado **espacio de Tychonoff**).

**Ejemplo 1.3.1**

Sea  $(X = \{0, 1\}, \tau_I = \{X, \emptyset\})$ . Este espacio es  $T_{3,5}$  por vacuidad y no es  $T_1$ .

**Proposición 1.3.1**

La propiedad de ser un espacio  $T_{3,5}$  se hereda.

**Demostración:**

Sea  $(X, \tau)$  un espacio  $T_{3,5}$  y  $Y \subseteq X$ . Sea  $A \subseteq Y$  un conjunto cerrado no vacío de  $(Y, \tau_Y)$ . Sea  $y \in Y - A$ . Recordemos que

$$\overline{A}^Y = A = \overline{A} \cap Y$$

(siendo  $\overline{A}^Y$  la cerradura de  $A$  en  $Y$  y,  $\overline{A}$  la cerradura de  $A$  en  $X$ ) donde en particular  $y \in X - \overline{A}$ . Tenemos pues que existe una función continua  $f : (X, \tau) \rightarrow ([0, 1], \tau_u)$  tal que

$$f(\overline{A}) = \{1\} \quad \text{y} \quad f(y) = 0$$

Entonces, la función  $f|_Y : (Y, \tau_Y) \rightarrow ([0, 1], \tau_u)$  es una función continua tal que

$$f|_Y(a) = f(a) = 1, \quad \forall a \in A$$

pues  $A \subseteq \overline{A}$ , y  $f|_Y(y) = f(y) = 0$ . Se sigue entonces que  $(Y, \tau_Y)$  es un espacio  $T_{3,5}$ . ■

**Corolario 1.3.1**

La propiedad de ser completamente regular se hereda.

**Demostración:**

Inmediata del hecho de que las propiedades  $T_{3,5}$  y  $T_1$  son hereditarias. ■

**Ejercicio 1.3.1**

La propiedad de ser  $T_{3,5}$  es topológica.

**Demostración:****Corolario 1.3.2**

La propiedad de ser completamente regular es topológica.

**Demostración:**

Es inmediata del ejercicio anterior y de que la propiedad de ser  $T_1$  es topológica. ■



---

**Proposición 1.3.2**

Si  $(X, \tau)$  es un espacio topológico  $T_{3,5}$ , entonces  $(X, \tau)$  es un espacio  $T_3$ .

---

**Demostración:**

Sea  $A \subseteq X$  cerrado y  $x \in X - A$  con  $A \neq \emptyset$ . Al ser  $(X, \tau)$  espacio  $T_{3,5}$ , existe pues una función continua  $f : (X, \tau) \rightarrow ([0, 1], \tau_u)$  tal que

$$f(A) = \{1\} \quad \text{y} \quad f(x) = 0$$

Sean  $U = f^{-1}([0, 1/2))$  y  $V = f^{-1}((1/2, 1])$ , al ser  $f$  función continua se tiene que  $U, V \in \tau$  son disjuntos para los que se cumple que

$$x \in U \quad \text{y} \quad A \subseteq V$$

por tanto,  $(X, \tau)$  es  $T_3$ . ■

---

**Proposición 1.3.3**

Si  $(X, \tau)$  es un espacio normal, entonces es completamente regular.

---

**Demostración:**

Suponga que  $(X, \tau)$  es  $T_4$  y  $T_1$ . Sean  $A \subseteq X$  cerrado no vacío y  $x \in X - A$ . Como  $(X, \tau)$  es  $T_1$ , el conjunto  $B = \{x\}$  es cerrado para el que se cumple que  $A \cap B = \emptyset$  siendo ambos conjuntos cerrados. Luego, por el Lema de Urysohn al ser  $(X, \tau)$  un espacio  $T_4$  existe una función continua  $f : (X, \tau) \rightarrow ([0, 1], \tau_u)$  tal que

$$f(A) = \{1\} \quad \text{y} \quad f(B) = \{0\}$$

la segunda condición es equivalente a que  $f(x) = 0$ .

Por tanto,  $(X, \tau)$  es  $T_{3,5}$ . ■

Nos preguntamos ahora que sucede con el producto de espacios regulares.

---

**Proposición 1.3.4**

Sea  $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in I}$  una familia de espacios topológicos y tomemos  $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ . Entonces,  $(X, \tau_p)$  es completamente regular si y sólo si  $(X_\alpha, \tau_\alpha)$  lo es, para todo  $\alpha \in I$ .

---

**Demostración:**

$\Rightarrow$ ): Suponga que  $(X, \tau_p)$  es completamente regular, como la propiedad de ser completamente regular es hereditaria y topológica, se sigue de forma inmediata que  $(X_\alpha, \tau_\alpha)$  es completamente regular, para todo  $\alpha \in I$ .

$\Leftarrow$ ): ■

## 1.4. El Teorema de Metrizabilidad de Urysohn

**Definición 1.4.1**

Considere el espacio de sucesiones  $l_2(\mathbb{R})$  de sucesiones dos convergentes, es decir que  $\{x_n\}_{n=1}^\infty \in l_2(\mathbb{R})$  si y sólo si

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$$

Se define una métrica  $\rho$  sobre  $l_2(\mathbb{R})$  dada por:

$$\rho(x, y) = \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2 \right]^{1/2}$$

Se define el **Cubo de Hilbert** como el subespacio métrico de  $l_2(\mathbb{R})$  dado por:

$$\mathcal{H} = \left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mid |x_n| < \frac{1}{n} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \right\}$$

---

**Teorema 1.4.1 (Teorema de metrización de Urysohn)**

Todo espacio regular  $(X, \tau)$  y segundo numerable es metrizable.

---

**Demostración:**

Tenemos que la suma

$$\sum_{i=1}^{\infty} h_i(x)^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} < \infty$$

es convergente para todo  $x \in X$ . Por tanto, podemos definir una función  $h : X \rightarrow \mathcal{H}$  dada por:

$$h(x) = (h_1(x), \dots, h_n(x), \dots), \quad \forall x \in X$$

Veamos que

1.  $h$  es inyectiva. Sean  $x, y \in X$  puntos distintos. Se tiene que  $x \in X - \{y\}$ , como el espacio es  $T_1$  este conjunto es abierto. Por la observación anterior existen  $(B_{j_i}, B_{k_i}) \in \mathcal{L}$  tales que

$$x \in B_{j_i} \subseteq \overline{B_{j_i}} \subseteq B_{k_i} \subseteq X - \{y\}$$

por ende,  $x \in \overline{B_{j_i}}$  y  $y \in X - B_{k_i}$ . Por ende

$$h_i(x) = 0 \quad \text{y} \quad h_i(y) = \frac{1}{i}, \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

por ende,  $h_i(x) \neq h_i(y)$ , se sigue que  $h(x) \neq h(y)$ .

2.  $h : (X, \tau) \rightarrow (\mathcal{H}, \tau_\rho)$  es continua. Sea  $x_0 \in X$  y  $\varepsilon > 0$ , encontremos  $U \in \tau$ , con  $x_0 \in U$  tla que  $h(U) \subseteq B_\rho(h(x_0), \varepsilon)$ , es decir que para todo  $x \in U$ ,

$$\rho(h(x_0), h(x)) < \varepsilon$$

Sea  $N \in \mathbb{N}$  tal que dado  $x \in X$ :

$$\sum_{n=N}^{\infty} |h_n(x_0) - h_n(x)|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}$$

Además, para todo  $m \in \{1, \dots, N\}$ , la función  $h_m : (X, \tau) \rightarrow ([0, 1/m], \tau_u)$  es continua, podemos encontrar  $W_m \in \tau$  tal que  $x_0 \in W_m$  y además, para todo  $x \in W_m$ ,

$$|h_m(x) - h_m(x_0)|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2N}$$

En particular se tiene que

$$x_o \in \bigcap_{m=1}^N W_m = W \in \tau$$

Sea  $x \in W$ :

$$\begin{aligned}
\rho(h(x), h(x_0)) &= \left| \sum_{n=1}^N |h_n(x) - h_n(x_0)|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} |h_n(x) - h_n(x_0)|^2 \right|^{1/2} \\
&\leq \left| \sum_{n=1}^N \frac{\varepsilon^2}{2N} + \frac{\varepsilon^2}{2} \right|^{1/2} \\
&= \left[ \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} \right]^{1/2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

lo que prueba la continuidad de  $h$  en  $x_0$ , que al ser arbitrario, se sigue que  $h$  es continua en  $X$ .

3.  $h : (X, \tau) \rightarrow (h(X), \tau_\rho)$  es abierta. Sea  $A \in \tau$ . Tomemos  $x \in h(A)$ , sea  $a \in A$  tal que

$$h(a) = x$$

por la observación anterior existe  $(B_{m_i}, B_{n_i}) \in \mathcal{L}$  con

$$a \in B_{m_i} \subseteq \overline{B_{m_i}} \subseteq B_{n_i} \subseteq A$$

por tanto, tenemos que  $h_i(a) = 0$  y  $h_i(X - A) = \{\frac{1}{i}\}$ . Por tanto,

$$y \in h(X - A) = h(X) - h(A)$$

se cumple que

$$\rho(x, y) \geq \frac{1}{i}$$

luego,  $y \notin B_\rho(x, 1/i)$ . Se sigue que

$$B_\rho(x, 1/i) \subseteq h(A)$$

se sigue entonces que  $h : (X, \tau) \rightarrow (h(X), \tau_\rho)$ .

De los tres incisos anteriores, se sigue que  $h : (X, \tau) \rightarrow (h(X), \tau_\rho)$  es un homeomorfismo y como  $(h(X), \tau_\rho)$  es metrizable, entonces  $(X, \tau)$  es metrizable. ■

#### Ejercicio 1.4.1

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico segundo numerable, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1.  $(X, \tau)$  es completamente regular.
2.  $(X, \tau)$  es normal.
3.  $(X, \tau)$  es metrizable.

**Demostración:** ■

## 1.5. Espacios Paracompactos

### Observación 1.5.1

El concepto de espacio paracompacto fue definido por Dieudonné en 1944.

### Definición 1.5.1

Sea  $(X, \tau)$  espacio topológico,  $x \in X$  y  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  una familia de subconjuntos de  $X$ .

1. La familia  $\mathcal{U}$  es **punto finita en**  $x \in X$ , si existe un subconjunto finito  $K$  de  $I$  tal que para todo  $\alpha \notin K$ ,  $x \notin U_\alpha$ .
2. La familia  $\mathcal{U}$  es **localmente finita en**  $x \in X$  si existe una vecindad  $V$  de  $x$  y un subconjunto finito  $J \subseteq I$  tales que para todo  $\alpha \notin J$ ,

$$V \cap U_\alpha = \emptyset$$

3. La familia  $\mathcal{U}$  es **punto (resp. localmente) finita en el espacio**  $(X, \tau)$  si  $\mathcal{U}$  es punto (resp. localmente) finita en cada uno de los pntos de  $X$ .
4. La familia  $\mathcal{U}$  es  **$\sigma$ -localmente finita** si  $\mathcal{U}$  se puede escribir como una unión numerable de colecciones localmente finitas.

### Observación 1.5.2

Se tiene lo siguiente:

1. Si  $\mathcal{U}$  es localmente finita, entonces  $\mathcal{U}$  es punto-finita.
2. Si  $\mathcal{U}$  es una colección finita, entonces  $\mathcal{U}$  es localmente finita.

En los siguientes ejemplos, considere  $(\mathbb{R}, \tau_u)$ .

### Ejemplo 1.5.1

Sea  $\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Esta colección no es punto finita en 0, luego tampoco es localmente finita en 0.

### Ejemplo 1.5.2

Considere la colección de intervalos  $\{(n, n+2)\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Esta es una colección localmente finita en  $(\mathbb{R}, \tau)$ . Sea  $r \in \mathbb{R}$ , existe  $m \in \mathbb{Z}$  tal que:

$$m \leq r < m+1$$

Considere el entero  $n = m - 1$ , se tiene que

$$n < r < n+2$$

### Ejemplo 1.5.3

Dado  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $A_n = (0, 1/n)$ . Se tiene que  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es punto finita, pero no es localmente finita.

Sea  $r \in \mathbb{R}$ . Podemos suponer que  $r \in (0, 1)$  (ya que la colección solo contiene puntos de este conjunto) (es el único caso que genera problemas), luego existe  $N_r \in \mathbb{N}$  tal que

$$\frac{1}{m} \leq r, \quad \forall m \geq N_r$$

Sea  $J_r = \{1, \dots, N_r\}$ . Se tiene que

$$r \notin A_m \quad \forall m \notin J_r$$

así que  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es punto finita, pero claramente no es localmente finita (observe que sucede con cualquier vecindad de 0).

### Ejemplo 1.5.4 (\*\*)

Sea  $n \in \mathbb{N}$ , definimos  $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$  y  $B_n = \mathbb{R} - A_n = (-\infty, -1/n] \cup [1/n, \infty)$ . Tenemos que  $B_n = \overline{B_n}$ .

Sea  $m \in \mathbb{N}$  con  $m \geq 2$ , esto es que  $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{2}$ . Se tiene que  $\frac{1}{2} \in B_m$ . Por tanto,

$$\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

no es punto finita en  $\frac{1}{2}$ .

Por otro lado, se tiene que  $0 \notin B_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , por lo cual

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \subsetneq \mathbb{R}$$

sin embargo,

$$\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n} = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{R} - A_n)} = \overline{\mathbb{R} - \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n} = \overline{\mathbb{R} - \{0\}} = \mathbb{R}$$

por ende,

$$\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n} \subsetneq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{B_n} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

### Observación 1.5.3

Sea  $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ . Escribimos  $\overline{\mathcal{A}} = \{\overline{A_\alpha}\}_{\alpha \in I}$ .

### Proposición 1.5.1

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. Tomemos  $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$  una colección de subconjuntos de  $X$  que es localmente finita en  $(X, \tau)$ . Entonces, se cumple lo siguiente:

1. Sea  $J \subseteq I$  y sea  $\mathcal{B} = \{B_\alpha\}_{\alpha \in J} \subseteq \mathcal{P}(X)$  tal que para todo  $\alpha \in J$ ,  $B_\alpha \subseteq A_\alpha$ . Entonces,  $\mathcal{B}$  es localmente finita.