Grupos Topológicos

Cristo Daniel Alvarado

16 de abril de 2024

Índice general

Capítulo 1

Teoría de Grupos

1.1. Fundamentos

Capítulo 2

Topología

2.1. Espacios Topológicos

En esta parte se hará un breve recordatorio de los resultados más relevantes de la parte de espacios topológicos.

Definición 2.1.1
Un **espacio topológico** es una pareja (X, τ) que consiste en un conjunto X y una familia τ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:

1). $\emptyset, X \in \tau$.

2). Si $U_1, U_2 \in \tau$, entonces $U_1 \cap U_2 \in \tau$.

3). Si $\mathcal{F} \subseteq \tau$, entonces

$$\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \in \tau$$

A los miembros de τ se les conoce como **conjuntos abiertos** en X. La familia τ es una **topología** en X.

Definición 2.1.2
Sea X un espacio topológico y $x \in X$. Si U es un subconjunto abierto de X tal que $x \in U$, diremos que U **es una vecindad de** x.

Como resultado de lo anterior, se tiene que un subconjunto $V \subseteq X$ es abierto si para todo $x \in V$ existe una vecindad U_x contenida en V.

Definición 2.1.3
Sea X un espacio topológico. Una **base** del espacio topológico X es una familia $\mathcal{B} \subseteq \tau$ tal que todo subconjunto abierto no vacío de X es unión de elementos de $\mathcal{B}$.

Proposición 2.1.1
Sea X un espacio topológico. Una familia $\mathcal{B} \subseteq \tau$ es una base del espacio si y sólo si para todo punto $x \in X$ y para cualquier vecindad V de x existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U \subseteq V$.

El objetivo de la base de un espacio topológico es la de disminuir el número de elementos de la familia τ, y de que esta familia más pequeña cumple propiedaes más generales que, resultan útiles para resultados posteriores.

Proposición 2.1.2
Sea X un espacio topológico. Una base $\mathcal{B}$ de X tiene las propiedades siguientes:

B1). Para cualesquier $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ y todo punto $x \in U_1 \cap U_2$ existe un $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$.

B2). Para todo $x \in X$ existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U$, es decir $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$.

Además, si una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X cumple B1) y B2), entonces existe una única topología τ en X para la cual $\mathcal{B}$ es una base.

Definición 2.1.4
Si (X, τ) es un espacio topológico que posee una base numerable $\mathcal{B}$, se dice que X es **segundo numerable**.

Una familia $\mathcal{P} \subseteq \tau$ es una **sub-base** de un espacio topológico (X, τ) si la familia de todas las intersecciones finitas $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_k$, donde $U_i \in \mathcal{P}$ para $i = 1, \ldots, k$, es una base de (X, τ).

Definición 2.1.5
Una familia $\mathcal{B}(x)$ de vecindades de x es una **base local** en $x \in X$ en el espacio topológico (X, τ), si para toda vecindad V de x existe $U \in \mathcal{B}(x)$ tal que $x \in U \subseteq V$.

Observe que si $\mathcal{B}$ es una base de (X, τ), la familia $\mathcal{B}(x)$ consistente en todos los elementos de $\mathcal{B}$ que contienen a x es una base local para x en (X, τ). Por otro lado, si para todo $x \in X$ contamos con una base local $\mathcal{B}(x)$ para x, enotnces $\mathcal{B} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}(x)$ es un base de (X, τ).

Definición 2.1.6
Sea (X, τ) un espacio topológico y supongamos que para todo $x \in X$ tenemos una base local $\mathcal{B}(x)$ en x; la familia

$$\big\{\mathcal{B}(x) \big| x \in X\big\}$$

es un **sistema de vecindades** para el espacio topológico (X, τ).

Proposición 2.1.3
Sea X un espacio topológico. Entonces, cualquier sistema de vecindades para el espacio X tiene las siguientes propiedades:

BP1). Para toda $x \in X$, $\mathcal{B}(x) \neq \emptyset$ y para toda $U \in \mathcal{B}(x)$, $x \in U$.

BP2). Si $U_1 \in \mathcal{B}(x)$, $U_2 \in \mathcal{B}(y)$ y $z \in U_1 \cap U_2$, existe un $U \in \mathcal{B}(z)$ tal que $U \subseteq U_1 \cap U_2$.

Definición 2.1.7
Si (X, τ) es un espacio topológico tal que todo punto $x \in X$ posee una base local en x numerable, decimos que X es un espacio **primero numerable**.

Definición 2.1.8
Sea (X, τ) un espacio topológico. Decimos que un subconjunto $F \subseteq X$ es **cerrado**, si $X \backslash F \in \tau$, es decir, si su complemento relativo a X es abierto. De forma inmediata se deducen las propiedades siguientes:

C1). El conjunto X es cerrado, lo mismo con $\emptyset$.

C2). La unión de dos conjuntos cerrados es cerrada.

C3). La intersección de cualquier familia de conjuntos cerrados es cerrada.

De ahora en adelante, cada que se mencione al conjunto X, se entenderá que es el espacio topológico (X, τ). Si no hay ambiguedad, no se mencionará la topología τ.

Ahora se procederá a definir dos conjuntos importantes para todo subconjunto $A \subseteq X$, con el objetivo de relacionar a éste con algún elemento de la topología τ.

Definición 2.1.9
Sea $A \subseteq X$. Considere la familia $\mathcal{C}_A$ de todos los conjuntos cerrados que contienen a A. La intersección

$$\overline{A} = \bigcap_{E \in \mathcal{C}_A} E$$

es la **cerradora** o **clausura de** A. Es claro que $\overline{A}$ es un conjunto cerrado.

Proposición 2.1.4
Sea X un espacio topológico; enotnces

1). $A \subseteq \overline{A}$.

2). Si $A \subseteq B$, entonces $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

3). Si $x \in \overline{A}$, entonces para toda vecindad U de x se cumple que

4). $U \cap A \neq \emptyset$.

5). $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

6). $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

7). $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Definición 2.1.10
El **interior** de un subconjunto $A \subseteq X$ de un espacio topológico X es la unión de todos los subconjuntos abiertos contenidos en A, o en forma equivalente, el abierto más grande contenido en A. El interior de A se denota como $\text{Int}A$ y es claramente un conjunto abierto.

Algunas propiedades del interior de un conjunto son las siguientes:

Proposición 2.1.5
Sea X un espacio topológico, enotnces

1). Para todo $A \subseteq X$ se cumple que $\text{Int}A = X \setminus \overline{X \setminus A}$.

2). $\text{Int}X = X$.

3). $\text{Int}A \subseteq A$.

4). $\text{Int}A \cap B = \text{Int}A \cap \text{Int}B$.

5). $\text{IntInt}A = \text{Int}A$.

Bajo esta perspectiva, podemos considerar a la cerradura e interior de un conjunto como operadores que actúan sobre los subconjuntos de un espacio topológico. Ahora definiremos un operador más en un espacio topológico:

Definición 2.1.11
Un punto $x \in X$ de un espacio topológico X es un **punto de acumulación** de un conjunto $A \subseteq X$, si $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$; el conjunto de todos los puntos de acumulación de A es el **conjunto derivado** de A y se denota por A^d.

A los puntos de A^d se les conoce como **puntos no aislados** del conjunto A. Un punto x es **aislado** en X si y sólo si el conjunto $\{x\}$ es abierto.

Algunas de las propiedades del conjunto derivado son las siguientes:

Proposición 2.1.6
Sean X un espacio topológico, $x \in X$ y $A \subseteq X$. Entonces,

D1). El punto x pertenece a A^d si y sólo si toda vecindad de x contiene al menos un punto de A distinto de x.

D2). $\overline{A} = A \cup A^d$.

D3). Si $A \subseteq B$, entonces $A^d \subseteq B^d$.

D4). $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$.

D5). $\bigcup_{i \in I} A_i^d \subseteq \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^d$.

Ahora se definirán varios conceptos importantes en la topología general.

Definición 2.1.12
Sea X un espacio topológico.

1). Un conjunto $A \subseteq X$ es **denso** en X si $\overline{A} = X$.

2). Un conjunto $A \subseteq X$ es **denso en ninguna parte** en X, si $X \setminus \overline{A}$ es denso en X.

3). Un conjunto $A \subseteq X$ es **denso en sí mismo** si $A = A^d$.

Entre las propiedades de subconjuntos de espacios relativas a la definición anterior se cuentan las siguientes:

Proposición 2.1.7
Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces, se cumplen los 3 incisos siguientes:

1). Un conjunto A es denso en X si y sólo si todo subconjunto abierto no vacío de X interseca a A.

2). El conjunto A es denso en ningun a parte en X si y sólo si todo abierto no vacío de X contiene un abuerto no vacío ajeno a A.

3). Si A es denso en X, entonces para todo abierto $U \subseteq X$ tenemos que $\overline{U} = \overline{U \cap A}$.

Definición 2.1.13
Decimos que un espacio X es **separable** si contiene un conjunto denso numerable.

2.2. Funciones y homeomorfismos

Ahora, definiremos dos conceptos de gran transendencia en la topología general: la continuidad de funciones y el homeomorfismo.

Definición 2.2.1
Sean (x, τ) y (Y, σ) espacios topológicos; una función de X en Y es **continua** si $f^{-1}(U) \in \tau$, para todo $U \in \sigma$, es decir que la imagen inversa de todo abierto en Y es abierta en X.

A continuación se presentan varios criterios de continuidad:

Proposición 2.2.1
Para una función $f : X \to Y$ de un espacio X en Y, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1). La función f es continua.

2). Las imágenes inversas de miembros de una sub-base $\mathcal{P}$ en Y son abiertas en X.

3). Las imágenes inversas de miembros de una base $\mathcal{B}$ en Y son abiertas en X.

4). Imágenes inverssa de conjuntos cerrados en Y son cerados en Y.

5). Para todo $A \subseteq X$ tenemos que $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

6). Para todo $B \subseteq Y$ tenemos que $f^{-1}(\mathrm{Int}B) \subseteq \mathrm{Int}f^{-1}(B)$.

7). Para todo $B \subseteq Y$ tenemos que $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.

Una función f del espacoi X al espacio Y es **continua en el punto** $x \in X$ si para toda vecindad V de $f(x)$ existe una vecindad U de x tal que $f(U) \subseteq V$. Claramente, una función f de X a Y es continua si y sólo si es continua en cada punto $x \in X$.

Definición 2.2.2
Un subconjunto de G de un espacio X es un **conjunto** G_δ si G es la intersección de una familia numerable de conjuntos abiertos en X.

Un subconjunto F de un espacio X es un conjunto **conjunto** F_σ si F es la unión de una familia numerable de cerrados en X.

Observación 2.2.1
Observe que si f es una función continua de X a Y, entonces para cualquier conjunto $B \subseteq Y$ que sea G_δ (respectivamente, F_σ), la imagen inversa $f^{-1}(B)$ es un G_δ (respectivamente, F_σ) en X.

Definición 2.2.3
Una función continua $f : X \to Y$ es **cerrada** (respectivamente, **abierta**) si para todo subconjunto cerrado (respectivamente, abierto) $A \subseteq X$, su imagen directa $f(A)$ es cerrada (respectivamente, cerrada) en Y.

Ahora analizaremos la clase de funciones continuas que son homeomorfismos.

Definición 2.2.4
Una función continua $f : X \to Y$ es un **homeomorfismo** si f es una biyección y su inversa $f^{-1} : Y \to X$ es continua.

Si existe un homeomorfismo entre los espacios X y Y, diremos que X es **homeomorfo** a Y. La presencia de tal homeomorfismo hace topológicamente indistinguibles a los espacios X y Y. Note que la relación de ser homeomorfos es una relación de equivalencia en la clase de todos los espacios topológicos.

Otra clase importante de funciones la conforman las llamadas funciones cociente, que se definen a continuación.

Definición 2.2.5
Una función f de un espacio topológico (X, τ) sobre otro espacio topológico (Y, σ) es una **función cociente** si un conjunto V es abuerto en Y si y sólo si su imagen inversa $f^{-1}(V)$ es abierta en X.

Observación 2.2.2
Es inmediato que toda función cociente biyectiva es un homeomorfismo.

Proposición 2.2.2
Sean X y Y espacios topológicos. Entonces

1). Toda función continua y abierta de X sobre Y es cociente.

2). Toda función cerrada de X sobre Y es cociente.

2.3. Axiomas de separación

Por si sola, la definición de espacio topológico es muy general y pocos son los resultados interesantes que se pueden probar en todo espacio topológico. Para solventar este problema, se requiere de imponer ciertas reestricciones para que se puedan desarrollar resultados más interesantes. Básicamente lo que sigue es para establecer formas de separar puntos y conjuntos cerrados en espacios.

Definición 2.3.1
Espacios T_i:

1). Un espacio topológico X es un **Espacio** T_0 si para toda pareja de puntos distintos $x_1, x_2 \in X$ existe un abierto que contiene uno de los puntos pero no el otro.

2). Un espacio X es un **Espacio** T_1 si para toda pareja de puntos distintos $x_1, x_2 \in X$ existe un abierto U tal que $x_1 \in U$ y $x_2 \notin U$. Obseve que también existe un abierto V que contiene a x_2 pero no a x_1.

La diferencia entre un espacio T_0 y T_1 radica en que, en los T_0 no puedes elegir cual punto cumple la condición de estar en el abierto, y en el T_1 esto es posible.

3). Un espacio X es un **espacio** T_2 o **Haussdorff** si para toda pareja de puntos distintos $x_1, x_2 \in X$ existen conjuntos abiertos ajenos U_1 y U_2 en X tales que $x_1 \in U_1$ y $x_2 \in U_2$.

Lema 2.3.1
Para cualquier pareja de funciones continuas f, g de un espacio X en un espacio Hausdorff Y, el conjunto
$$\left\{x \in X \middle| f(x) = g(x)\right\}$$
es cerrado en X.

Definición 2.3.2
Un espacio X es T_3 o **regular** si es T_1 y para toda $x \in X$ y todo cerrado $F \subseteq X$ tal que $x \notin F$ existen abiertos U_1, U_2 en X tales que $x \in U_1$, $F \subseteq U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Claramente todo espacio regular es Hausdorff. No obstante, los espacios regulares tienen una propiedad aún más importante.

Proposición 2.3.1
Si X es un espacio T_1, entonces X es regular si y sólo si para todo punto $x \in X$ y toda vecindad V de x existe una vecindad U de x tal que $\overline{U} \subseteq V$.

Una clase aún más particular de espacios topológicos son los espacios Tikhonov.

Definición 2.3.3
Un espacio X es un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$ o **completamente regular** si para todo $x \in X$ y para todo cerrado $F \subseteq X$ tal que $x \notin F$ existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ con la propiedad de que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$ para todo $y \in F$. Si además el espacio X es T_1, entonces X es **completamente regular** o **Tikhonov**.

Teorema 2.3.1
Todo espacio Tikhonov es regular.

Definición 2.3.4
Un espacio topológico X es un espacio T_4 o **normal** si X es T_1 y para toda pareja de cerrados ajenos $A, B \subseteq X$ existen abiertos ajenos U_A y U_B tales que $A \subseteq U_A$ y $B \subseteq U_B$.

Observación 2.3.1
Si un espacio X es T_1, entonces es normal si y sólo si para todo conjunto cerrado $F \subseteq X$ y todo abierto $V \subseteq X$ que contiene a F existe un abierto $U \subseteq X$ tal que $F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V$.Claramente todo espacio normal es regular. El hecho de que todo espacio normal es Tikhonov se deduce del siguiente teorema.

Teorema 2.3.2 (Lema de Urysohn)
Para cada pareja de subconjuntos cerrados ajenos A, B de un espacio normal X existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in A$ y $f(x) = 1$ para todo $x \in B$.

Observación 2.3.2
Todo espacio segundo numerable y regular es normal. Lo mismo ocurre con todo espacio regular y numerable.

Corolario 2.3.1
Un subconjunto A de un espacio normal X es un cerrado G_δ si y sólo si existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $A = f^{-1}(0)$.

Definición 2.3.5

- Dos subconjuntos A, B de un espacio topológico X están **completamente separados** si existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ para $x \in A$ y $f(x) = 1$ para $x \in B$.
- Un subconjunto A de un espacio X es **funcionalmente cerrado** (también llamado **conjunto nulo**) si $A = f^{-1}(0)$ para alguna función continua $f : X \to [0,1]$. El complemento de un conjunto funcionalmente cerrad oes un conjunto **funcionalmente abierto** (también llamado **conjunto cocero**).
- Un espacio topológico X es **perfectamente normal** si X es normal y todo subconjunto cerrado de X es un G_δ. Claramente un espacio normal X es perfectamente normal si y sólo si todo subconjunto abierto de X es un F_σ.

2.4. Convergencia

El concepto de sucesión convergente es de los más antiguos en topología general. Sin embargo, tiene carencias el enunciar el concepto de un espacio topológico simplemente en estos términos, pues no resulta la definición general. Sin embargo, este concepto puede definirse en cualquier espacio topológico. A continuación se verá la definición del mismo.

Definición 2.4.1
Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de un espacio X **converge a un punto** $x \in X$ si para cada vecindad V de x existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \in V$, para todo $k \geq m$.

Una forma de generalizar el concepto de convergencia de sucesiones es por medio de filtros.

Definición 2.4.2
Sea A un conjunto y $\mathcal{F}$ una familia no vacía de subconjuntos de A. La familia $\mathcal{F}$ es dice que es un **filtro** cuando:

1). $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

2). Si $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$, entonces $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}$.

3). Si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B$, entonces $B \in \mathcal{F}$.

Un filtro $\mathcal{F}$ en A es un **filtro maximal** o un **ultrafiltro** si para todo filtro $\mathcal{F}'$ en A tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ se cumple que $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$.

Una familia no vacía de subconjuntos $\mathcal{B}$ de un conjunto A es una **base de filtro** si $\emptyset \notin \mathcal{B}$ y para toda pareja $A, B \in \mathcal{B}$ existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $C \subseteq A \cap B$.

Definición 2.4.3
Sea $\mathcal{F}$ un filtro de subconjuntos de un espacio topológico X. Un punto $x \in X$ es un **punto límite** de $\mathcal{F}$ si toda vecindad de x pertenece a $\mathcal{F}$. En tal caso, decimos que $\mathcal{F}$ **converge a** x. La convergencia de una base filtro $\mathcal{B}$ a un punto $x \in X$ se define de forma similar.

Un punto $x \in X$ es un **punto de adherencia** de un filtro $\mathcal{F}$ (de una base de filtro $\mathcal{B}$) si toda vecindad de x interseca todos los elementos de $\mathcal{F}$ (todos los elementos de $\mathcal{B}$).

En la siguiente propsición usaremos como $\lim \mathcal{F}$ al conjunto formado por todos los puntos límite de un filtro $\mathcal{F}$.

Proposición 2.4.1
El punto $x \in X$ pertenece a la cerradura $\overline{A}$, donde A es un subconjunto de un espacio X si y sólo si existe una base filtro consistente de subconjuntos de A que converge a X

Una función f de un espacio topológico X a un espacio topológico Y es continua si y sólo si para cada base filtro $\mathcal{G}$ en el espacio X y la base filtro

$$f(\mathcal{G}) = \{f(A)|A \in \mathcal{G}\}$$

en el espacio Y se cumple que

$$f(\lim \mathcal{G}) = \lim f(\mathcal{G})$$

Un espacio topológico X es Hausdorff si y spolo si todo filtro en X tiene a lo más un punto límite.

El problema de la definición de espacio topológico en términos de sucesiones es que, no todo espacio topológico puede describirse de esta manera. Por lo cual se definirán dos tipos de espacios que sí dependen, en su definición, de cierto tipo de convergencia.

Definición 2.4.4
Un espacio topológico X es **secuencial** si un conjunto $A \subseteq X$ es cerrado si y sólo si junto con cualquier sucesión A contiene sus puntos límite.

Un espacio X es **Fréchet-Urysohn** si para todo $A \subseteq X$ y todo $x \in \overline{A}$ existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de A que converge a x.

Es fácil ver que todo espacio primero numerable es Fréchet-Urysohn, y estos últimos son secuenciales.

2.5. Subespacios

Todo espacio tooplógico da lugar a numerosos espacios nuevos: cualquier subconjunto del espacio se puede ver como un espacio con la topología definida a continuación.

Definición 2.5.1
Sean (X, τ) un espacio topológico y $M \subseteq X$. En M consideramos la familia $\{U \cap M|U \in \tau\}$, la cual define una topología en M. Visto con esta topología, M se convierte en un espacio topológico y decimos que M es un **subespacio** de X.

El concepto de subespacio da lugar a que ciertas propiedades topológicas se vuelvan relativas. Por ejemplo, si X es un espacio y Y un subespacio, un subconjunto $A \subseteq Y$ puede ser cerrado respecto a Y, pero no serlo resepcto a X. De hecho, Y siempre es cerrado respecto a Y, pero puede no serlo respecto a X.

Es fácil probar que si X es un espacio y Y es un subespacio de X, entonces la cerradura de un subconjunto $A \subseteq Y$ respecto a Y es $\overline{A}^Y = \overline{A}^X \cap Y$.

Definición 2.5.2
Una función $f : X \to Y$ es un **encaje homeomórfico** si $f : X \to f(X)$ es un homeomorfismo. Si para un espacio X existe un encaje homeomórfico $f : X \to Y$, decimos que X **se encaja en**

Y.

A continuación se presenta un teorema de extensión de funciones continuas en espacios normales.

Teorema 2.5.1 (Teorema de Tietze-Urysohn)
Toda función continua de un subespacio cerrado M de un espacio normal X a $[0, 1]$ (respectivamente, $\mathbb{R}$) se puede extender a una función continua de X a $[0, 1]$ (respectivamente, $\mathbb{R}$).

2.6. Espacios Producto

Suponga que se tiene una familia de espacios $\{X_i | i \in I\}$; considere el producto cartesiano de la familia dado por:

$$X = \prod_{i \in I} X_i$$

y una familia τ de subconjuntos $U \subseteq X$ tales que $U = \prod_{i \in I} U_i$, donde $U_i = X_i$, con excepción de a lo sumo un número finito de índices $i_1, ..., i_n \in I$ y U_{i_k} es abierto en X_{i_k} para $k \in [|1, n|]$. Se verifica que la familia τ es una base para una topología en X. Esta topología es llamada **topología de Tikhonov para el producto cartesiano** X. Los elementos de esta base se conocen como abiertos **básicos** y la base misma es la **base canónica** en X.

Si $U = \prod_{i=1}^{\infty} U_i$ es un abierto básico $U \subseteq X$, definimos el conjunto $\operatorname{coord}(U)$ com el conjunto de índices $i \in I$ tales que $U_i \neq X$.

Los elementos del producto X son puntos de la forma $\{x_i | i \in I\}$, donde $x_i \in X_i$, para todo $i \in I$.

Para $i \in I$, la función $p_i : X \to X_i$ es la **proyección de** X **sobre** X_i si $p_i(x) = x_i$. En forma más general, si $J \subseteq I$, entonces $p_J : X \to \prod_{i \in J} X_i$ es la **proyección de** X **sobre** X_J, donde $p_J(x_i)_{i \in I} = (x_i)_{i \in J}$.

Si $X_i = Y$ para toda $i \in I$, entonces el producto X se denota como Y^I o Y^κ si $|I| = \kappa$.

Definición 2.6.1
Sea $\left\{X_i \middle| i \in I\right\}$ un conjunto de espacios topológicos. En el producto $X = \prod_{i \in I} X_i$ considere un punto p, es decir $p = (x_i)_{i \in I}$. Definimos el **soporte de un punto** $x \in X$ **respecto a** p como:

$$\operatorname{supp}(x) = \left\{i \in I \middle| x_i \neq p_i\right\}$$

El σ-producto (Σ-producto) denotado como $\sigma(p)$ ($\Sigma(p)$) en X se define de la siguiente manera:

$$\sigma(p) = \left\{x \in X \middle| |\operatorname{supp}(x)| < \aleph_0\right\}$$

y

$$\Sigma(p) = \left\{x \in X \middle| |\operatorname{supp}(x)| \leq \aleph_0\right\}$$

Entre las propiedades de los σ-productos (Σ-productos), se encuentran las siguientes:

Proposición 2.6.1
Sea $\left\{X_i \middle| i \in I\right\}$ un conjunto de espacios y $X = \prod_{i \in I} X_i$ su producto cartesiano con la topología de Tikhonov. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

1). Para todo $p \in X$, $\sigma(p)$ y $\Sigma(p)$ son densos en X.

2). Si $x, y \in Y$ son tales que $|\left\{i \in I \middle| x_i \neq y_i\right\}| \geq \aleph_0$, entonces $\sigma(x) \cap \sigma(y) = \emptyset$. Si $|\left\{i \in I \middle| x_i \neq y_i\right\}| > \aleph_0$, entonces $\Sigma(x) \cap \Sigma(y) = \emptyset$.

Existe un criterio para determinar la continuidad de funciones con valores en espacios producto:

Teorema 2.6.1
Una función f de un espacio X a un producto cartesiano $Y = \prod_{i\in I} Y_i$ con la topología de Tikhonov es continua si y sólo si la composición $p_i \circ f$ es continua para toda $i \in I$.

Una cosa importante es que los productos cartesianos con la topología de Tikhonov preservan los axiomas de separación:

Teorema 2.6.2
Cualquier producto de espacios T_j es un espacio T_j para $j \in [|1, 3|] \cup \{3\frac{1}{2}\}$. Si el espacio producto $X = \prod_{i\in I} X_i$ es no vacío y T_j, entonces para cada $i \in I$, X_i es un espacio T_j para $j \in [|1, 4|] \cup \{3\frac{1}{2}\}$.

Definición 2.6.2
Sean κ un cardinal infinito y $\{X_i \big| i \in I\}$ una familia de conjuntos, $X = \prod_{i\in I} X_i$ el producto cartesiano, Y un conjunto, $A \subseteq X$ y $f : X \to Y$.

1). Si existe $J \subseteq I$ tal que $A = p_J^{-1}(p_J(A))$ y tal que $|J| < \kappa$, entonces se dice que A **depende de** J y que A **depende de** $\leq \kappa$ **coordenadas**.

2). Si existe $J \subseteq I$ tal que $f(p) = f(q)$ siempre que $p, q \in X$ y $p_J(p) = p_J(q)$, entonces decimos que f **depende de** J, y si además $|J| \leq \kappa$, diremos que f **depende de** $\leq \kappa$ **coordenadas**.

Tenemos el siguiente teorema de factorización de funciones continuas definidas en productos. En él, $w(X)$ y $d(X)$ significan **peso** y **densidad** del espacio topológico X (ver el apéndice C).

Teorema 2.6.3
Sean κ un cardinal infinito, $\{X_i \big| i \in I\}$ un conjunto de espacios tales que $d(X_i) \leq \kappa$, y $f : \prod_{i\in I} X_i \to Y$ una función continua, donde Y es un espacio Hausdorff con $w(Y) \leq \kappa$. Entonces f depende de $\leq \kappa$ coordenadas.

Una de las técnicas más importantes para encajar espacios en espacios producto se basa en el uso de funciones del espacio a los espacios que forman el producto; dichas funciones deben cumplir ciertos requerimientos para garantizar la posibildad del encaje.

Definición 2.6.3
Suponga que X es un espacio, $\{Y_i \big| i \in I\}$ una familia de espacios y $\mathcal{F} = \{f_i \big| i \in I\}$ una familia de funciones tales que $f_i : X \to Y_i$. Decimos que la familia $\mathcal{F}$ **separa puntos de** X si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existe una función $f_i \in \mathcal{F}$ con la propiedad $f_i(x) \neq f_i(y)$. Si para todo $x \in X$ y para todo subconjunto cerrado $F \subseteq X$ tal que $x \notin F$ existe una función $f_i \in \mathcal{F}$ que cumple con $f_i(x) \notin \overline{f_i(F)}$, entonces diremos que la familia $\mathcal{F}$ **separa puntos de cerrados**.

Si tenemos un conjunto de funciones como en la definición anterior, podemos definir una nueva función que permite encajar el espacio X en el producto $\prod_{i\in I} Y_i$.

Definición 2.6.4
Sean X un espacio y $\{f_i \big| i \in I\}$ un conjunto de funciones tales que $f_i : X \to Y_i$. Definimos el **producto diagonal** $f : X \to \prod_{i\in I} Y_i = \Delta_{i\in I} f_i$ mediante la fórmula $f(x) = (f_i(x))_{i\in I}$.

Definición 2.6.5
Sean X un esapcio y $\{f_i \big| i \in I\}$ una familia de funciones tales que $f_i : X \to Y_i$. Si cada f_i es continua, el producto diagonal $f = \Delta_{i\in I} f_i$ es continuo.

El siguiente teorema describe una forma de obtener encajes de espacios en productos cartesianos.

Teorema 2.6.4 (Teorema Diagonal)
Si $\mathcal{F} = \{f_i : X \to Y_i \big| i \in I\}$ es una familia de funciones continuas que separa puntos de X, entonces la función diagonal $f = \Delta_{i\in I} f_i$ es inyectiva. Más aún, si la familia $\mathcal{F}$ separa puntos y conjuntos cerrados de X, entonces f es un encaje.

Existen otras topologías que se peuden definir en el producto cartesiano de uan familia infinita de esapcios. A continuación describimos algunas de estas topologías.

Definición 2.6.6
Suponga que $\{X_i \big| i \in I\}$ es un conjunto de espacios y $X = \prod_{i\in I} X_i$ su producto cartesiano. Los conjuntos de la forma $U = \prod_{i\in I} U_i$ son **cajas abiertas** si U_i es abierto en X_i, para cada $i \in I$. La topología generada en X que tiene como base todas las posibles cajas abiertas U es la **topología caja**.

Esta topología fue la primera que se consideró en un producto de espacios. No obastante, esta topología no preserva algunas de las propiedades importantes; por ello es que es más usada la topología de Tikhonov.

Existe una gran variedad de topologías más finas que la topología de Tikhonov pero contenidas en la topología caja:

Definición 2.6.7
Sean λ, κ cardinales con $\lambda < \kappa$ y $\{X_\alpha \big| \alpha < \kappa\}$ una famila de espacios. Considere el producto cartesiano $X = \prod \alpha < \kappa X_\alpha$. Los conjunto sde la forma $U = \prod_{\alpha<\kappa} U_\alpha$ con $U_\alpha = X_\alpha$ para toda $\alpha < \kappa$ con excepción de no más de λ coordenadas, forman la base de una topología τ para X. Esta topología es la **topología λ-caja**.

2.7. Espacios compactos

Los espacios compactos constituyen una de las clases de espacios topológicos que más se han estudiado. Se presentan sus principales propiedades:

Definición 2.7.1
Sea X un espacio topológico. Una familia de conjuntos $\mathcal{U} = \{U_\alpha \big| \alpha < \beta\}$ es una **cubierta** de X si $X = \bigcup_{\alpha<\beta} U_\alpha$. Si los elementos U_α de la familia son abiertos, entonces la cubierta $\mathcal{U}$ es una **cubierta abierta**. Una familia de conjuntos $\mathcal{F} = \{F_\alpha \big| \alpha < \beta\}$ tiene la **propiedad de la intersección finita** si $\bigcap \{F_i \big| i \in K\} \neq \emptyset$ para todo subconjunto finito $K \subseteq \beta$.

Definición 2.7.2
Un espacio topológico es **compacto** si X es Hausdorff y toda cybuerta abierta de X tiene una subcubierta abierta finita.

Observación 2.7.1
En forma equivalente, un espacio Hausdorff es compacto si toda familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos cerrados de X que tenga la propiedad de la intersección finita cumple con $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

Teorema 2.7.1
Si A es un subespacio compacto de un espacio regular X, entonces para todo subconjunto cerrado B ajeno a A existen conjuntos abiertos ajenos $U, V \subseteq X$ tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.

Más aún, si B es compacto, es suficiente con exigir que X sea Hausdorff para obtener la misma conclusión.

Entre las propiedades más significativas de los espacios compactos se encuentran las siguientes. La notación $nw(X)$ representa el peso de red del espacio X (ver apéndice C).

Teorema 2.7.2
Sean X y Y espacios topológicos con X compacto. Entonces:

1). Todo subespacio compacto de un espacio Hausforff es cerrado.

2). Todo espacio compacto es normal.

3). Si existe una función continua sobre $f : X \to Y$, Y es Hausdorff, entonces Y es compacto.

4). Toda función continua de un espacio compacto sobre un espacio Hausdorff es cerrada.

5). $nw(X) = w(X)$.

6). $w(X) \leq |X|$.

7). Y es compacto si y sólo si todo filtro en Y tiene un punto de adherencia.

Uno de los teoremas más importantes en topología general es el segundo teorema de Tikhonov relativo al producto de espacios compactos. De hecho, este teorema es equivalente al axioma de elección:

Teorema 2.7.3 (Teorema de Tikhonov)
El producto cartesiano $X = \prod_{i \in I} X_i$ de espacios no vacíos, con la topología de Tikhonov, es compacto si y sólo si cada espacio X_i es compacto para todo $i \in I$.

Con el uso del teorema diagonal se puede probar el siguiente resultado conocido como primer teorema de Tikhonov:

Teorema 2.7.4 (Primer Teorema de Tikhonov)
Si X es un espacio de Tikhonob y $\kappa = w(X)$, entonces X se puede encajar en el producot I^κ, donde I es el intervalo unitario $I = [0, 1]$ con la topología usual.

Un resultado de gran utilidad en análisis es lo siguiente:

Teorema 2.7.5
Toda función $f : X \to \mathbb{R}$, donde X es compacto, es acotada y alcanza su máximo y su mínimo.

Ahora introducimos nuevas clases de espacios, relacionadsa de alguna manera con la clase de los espacios compactos.

Definición 2.7.3
Un espacio topológico Hausdorff X es **localmente compacto** si para todo $x \in X$ existe una vecindad abierta U tal que su cerradura $\overline{U}$ es compacta.

Los espacios localmente compactos no se comportan bien en los productos, es decir, el producto de una familia arbitraria de espacios localmente compactos no es por fuerza localmente compacto.

Teorema 2.7.6
El producto cartesiano $X = \prod i \in IX_i$, donde $X_i \neq \emptyset$ para $i \in I$, es localmente compacto si y sólo si todos los espacios X_i son localmente compactos y existe un subconjunto finito $J \subseteq I$ tal que X_i es compacto para todo $i \in I \backslash J$.

Definición 2.7.4
Un espacio X es **Lindelöf** o tiene la **propiedad de Lindelöf** si X es regular y toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta abierta numerable.

Entre las propiedades de los espacios de Lindelöf se cuentan las que ahora describimos:

Proposición 2.7.1
Se cumple lo siguiente:

1). Todo espacio regular segundo numerable es Lindelöf.

2). Todo espacio de Lindelöf es normal.

Definición 2.7.5
Un espacio X es **numerablemente compacto** si X es Hausdorff y toda cubierta abierta numerable de X posee una subcubierta finita.

En forma equivalente, el espacio X es numerablemente compacto si todo subconjunto infinito $F \subseteq X$ tiene un punto de acumulación.

Es inmediato que todo espacio es compacto si y sólo si es numerablemente compacto y Lindelöf. Un ejemplo de un espacio numerablemete compacto no compacto lo proporciona el siguiente caso particular de un Σ-producto.

Teorema 2.7.7
Sea $\{X_i \big| i \in I\}$ una familia de espacios compactos. En el producto cartesiano $X = \prod_{i \in I} X_i$ considere un punto arbitrario p. Entonces el Σ-producto $\Sigma(p)$ tiene la propiedad de que todo subconjunto numerable $F \subseteq \Sigma(p)$ tiene cerradura compacta y, por lo tanto, $\Sigma(p)$ es numerablemente compacto.

La compactificación de un espacio ha resultado una de las principales herramientas de la topología general.

Definición 2.7.6
Una pareja (Y, c), donde Y es un espacio compacto y $c : X \to Y$ es un encaje de X en Y tal que $\overline{c(X)} = Y$ es una **compactificación** del espacio X.

Ejemplo 2.7.1
Una de las compactificaciones más simples e importantes es la compactificación unipuntual, que se obtiene al añadir un punto z a un espacio no compacto localmente compacto X. Sea $X' = X \cup \{z\}$. Si τ es la topología de X, definimos la topología τ' en X' mediante la unión de τ con la familia de subconjuntos $C \subseteq X'$ tales que $z \in C$ y $X' \backslash C$ es un subconjunto cerrado y compacto de X.

2.8. Espacios métricos

La clase de los espacios metrizables y la clase de los espacios compactos son las dos categorías de espacios fundamentales en la topología general. De hecho, muchas de las definiciones y resultados en la topología han sido motivados por alguna característica de los espacios métricos.

Definición 2.8.1
Un **espacio métrico** es una pareja (X, ρ) que consiste en un conjunto X y una función ρ definida en el conjunto $X \times X$, que toma valores reales no negativos y que cumple con:

M1). $\rho(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

M2). $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ para cualesquiera $x, y \in X$.

M3). $\rho(x, z) \leq \rho(x + y) + \rho(y, z)$ para cualesquier $x, y, z \in X$.

Una función ρ definida en el conjunto $X \times X$, que toma valores reales no negativos, satisface las condiciones (M2), (M3) y la condición:

M1'). $\rho(x, x) = 0$ para todo $x \in X$.

es llamada **pseudométrica**.

La métrica ρ de un espacio métrico genera una topología mediante la asignación a cada punto $x \in X$ de una familia de vecindades abiertas $\{B_d(x, 1/n) \big| n \in \mathbb{N}\}$, donde $B(x, 1/n) = \{y \in X \big| \rho(x, y) < 1/n\}$. En particular, los espacios métricos son primero numerables.

La definición de espacio métrico conduce en forma natural al concepto de un espacio metrizable.

Definición 2.8.2
Un espacio topológico X se dice que es **metrizable** si existe una métrica ρ en el conjunto X tal que la topología generada por esta métrica ρ coincide con la topología original en X.

Teorema 2.8.1
Un punto x pertenece a la cerradura $\overline{A}$ de un conjunto $A \subseteq X$ con respecto a la topología inducida en X por una métrica ρ si y sólo si existe una sucesión de puntos de A que converge a x.

En particular, todo espacio metrizable es Fréchet-Urysohn. La combinación de compacidad-metrizabilidad implica propiedades muy especiales.

Teorema 2.8.2
Sea X un espacio metrizable. as siguientes condiciones son equivalentes:

1). El espacio X es compacto.

2). El espacio X es numerablemente compacto.

Teorema 2.8.3
Todo espacio compacto metrizable es separable.

No cualquier producto de espacios metrizables es metrizable. Sin embargo, con una cantidad numerable de factores el producto sí es metrizable.

Teorema 2.8.4
Sea

$$\left\{X_n \middle| n < \omega\right\}$$

una familia de espacios metrizables y sea ρ_n una métrica en el espacio X_n, acotada por 1. Entonces, la topología inducida en el conjunto $X = \prod_{n<\omega} X_n$ por la métrica ρ definida por:

$$\rho(x, y) = \sum_{n<\omega} \frac{1}{2^n} \rho_n(x_n, y_n)$$

siendo $x = (x_n)_{n<\omega}, y = (y_n)_{n<\omega} \in X$, coincide con la topología de Tikhonov.

Existen varios criterios para determinar si un espaci oes metrizable. Entre ellos se encunetran los siguientes:

Teorema 2.8.5
Un espacio compacto es metrizable si y sólo si es un espacio segundo numerable.
Un espacio segundo numerable es metrizable si y sólo si es un espacio regular.

2.9. Conexidad

En esta sección describimos las principales propiedades de la importante clase de los espacios conexos, así como varias clases de espacios disconexos.

Definición 2.9.1
Un espacio X es **conexo** si no es posible representarlo como unión de dos subespacios no vacíos abiertos, cerrados y ajenos.

En forma equivalente, un espacio X es conexo si los únicos subespacios abiertos y cerrados de X son el vacío y X mismo. La conexidad se preserva respecto a imágenes continuas, es decir, si X es un espacio conexo y $f : X \to Y$ una funció ncontinua sobre Y, enotnces Y es conexo.

Teorema 2.9.1
Todo espacio Tikhonov conexo con al menos dos puntos tiene cardinalidad no menor que $\aleph_1$.

Teorema 2.9.2
Si la familia $\left\{C_i \middle| i \in I\right\}$ de subespacios conexos de un espaci otiene intersección no vacía, entonces la unioń $\bigcup_{i\in I} C_i$ es conexa.
Si un subespacio C de un espacio X es conexo, entonces todo subespacio A de X que satisfaga $C \subseteq A \subseteq \overline{C}$ también es conexo.

La conexidad se comporta bien respecto a los productos, es decir:

Teorema 2.9.3
El producto cartesiano $X = \prod_{i \in I} X_i$ de espacios no vacíos es conexo si y sólo si cada X_i es conexo.

Definición 2.9.2
La **componente de un punto** x en un espacio topológico X es la unión de todos los subespacios conexos de X que contienen a X.

La **casi componente de un punto** x eun un espacio X es la intersección de todos los subespacios abiertos-cerrados de X que contienen a x.

Observación 2.9.1
Las componentes de dos puntos distintos de un espacio X coinciden o son ajenas. Lo mismo ocurre con las casi componentes. Las componentes y las casi componentes son subespacios cerrados. La componente de un punto x de un espacio X está contenida en la casi componente de x. en espacios compactos ambas componentes coinciden.

Teorema 2.9.4
En un espacio compacto X la componente de un punto $x \in X$ es igual a la casi componente de x.

Un espacio no conexo puede presentar varios grados de disconexidad.

Definición 2.9.3
Un espacio X es **hereditariamente disconexo** o **totalmente disconexo** si X no contiene subespacios conexos con más de un punto.

Un espacio X es de **dimensión cero** si X es no vacío, T_1 y tiene una base que consiste en conjuntos abiertos-cerrados.

Observación 2.9.2
En un espacio totalmente disconexo las componentes de los puntos tienen cardinalidad 1. Todo espacio de dimensión cero es totalmente disconexo.

Teorema 2.9.5
Tood espacio no vacío totalmente disconexo y localmente compacto es de dimensión cero.

Total disconexidad y dimensión ccero son equivalentes en la clase de los espacios localmente compactos.

Definición 2.9.4
Un espacio X es **localmente conexo** si para todo $x \in X$ y para toda vecindad U de x existe un conjunto conexo $C \subseteq U$ tal que $x \in \mathrm{Int} C$.

Teorema 2.9.6
Si X es un espacio loclamente conexo, entonces

1). Las componentes de todos los puntos de X son abiertas.

2). las comñponentes de los puntos de X coinciden con las casi componentes.

3). Todo subespacio de X abierto es localmente conexo.

El producto de una familia de espacios localmente conexos no es necesariamente localmente conexo. Sin embargo:

Teorema 2.9.7
El prodcuto cartesiano $\prod_{i\in I} X_i$ con $X_i \neq \emptyset$ para todo $i \in I$ es localmente conexo si y sólo si todos los espacios X_i son localmente conexos y existe un conjunto finito $J \subseteq I$ tal que X_i es conexo si $i \in I \backslash J$.

Capítulo 3

Funciones Cardinales

El objetivo de las funciones cardinales es aquel de extender conceptos conocidos en topología general, como la propiedad de ser primero o segundo numerable. Estas funciones permiten realizar comparaciones cuantitativas entre algunas propiedades topológicas.

Definición 3.0.1
Una **función cardinal** es una función definida en la clase de todos los espacios topológicos que toma valores en la clase de todos los cardinales y asigna a todo espacio topológico X un número cardinal $f(X)$ tla que $f(X) = f(Y)$ para cualquier par X, Y de espacios homeomórficos.

Observación 3.0.1
En la definición anterior, técnicamente lo que tenemos no es una función, ya que las funciones sólo están deifnidas de un conjunto en un conjunto, pero, considerando los axiomas de NBG (con o sin el axioma de elección), uno puede formar funciones que vayan de una clase en otra (de hecho, propiamente dicho, las funciones son subclases del producto cartesiano de dos clases).

Ejemplo 3.0.1
El ejemplo más obvio de esta función cardinal es la cardinalidad usual de un espacio topológico X.

Nosotros a lo largo del libro tenemos interés en espacios infinitos y, por lo tanto, es más adecuado si obligamos que estas funciones SÓLO tomen valores infinitos.

A continuación, se presentan algunas funciones cardinales que son de utilidad práctica.

Definición 3.0.2
El **peso** de un espacio topolgíco X, está definido por:

$$w(X) = \min \left\{ |\mathcal{B}| \middle| \mathcal{B} \text{ es una base de } X \right\} + \aleph_0$$

Observación 3.0.2
La cardinalidad y el peso de un espacio topológico no presentan una relación simple entre sí, es decir, no es cierto que alguno de los dos sea mayor o igual que el otro.

En espacios compactos o metrizables sí ocurre que $w(X) \leq |X|$.

Ocasionalmente, (por ejemplo, para esapcios numerables que no son primero numerables) se cumple que $|X| \leq w(X)$.

Y, en general, para espacios regulares X se tiene que $|X| \leq 2^{w(X)}$.

Definición 3.0.3
Se define una función denominada **densidad** de X como:

$$d(X) = \text{mín}\left\{|D| \middle| D \text{ es un subconjunto denso en } X\right\} + \aleph_0$$

para cada espacio topológico X.

Definición 3.0.4
Sea X un espacio topológico. Una familia $\mathcal{U}$ de abiertos no vacíos es llamada **familia celular** si estos abiertos son mutuamente ajenos (o ajenos a pares).

Con la definición anterior, se introduce la siguiente definición:

Definición 3.0.5
Sea X un espacio topológico. Se define la **celularidad de** X, como:

$$c(X) = \sup\left\{|\mathcal{V}| \middle| \mathcal{V} \text{ es una familia celular en } X\right\} + \aleph_0$$

si $c(X) = \aleph_0$, decimos que X **satisface la ccc**, o que **tiene la propiedad de Souslin**.

A partir de las definiciones anteriores, se ve de forma inmediata que:

$$c(X) \leq d(X) \leq w(X)$$

donde puede ocurrir que $c(X) < d(X)$.

La noción de espacio de Lindelöf da lugar a una nueva función cardinal.

Definición 3.0.6
Sea X un espacio topológico. Se define el **número de Lindelöf** $l(X)$ de un espacio X como el número cardinal más pequeño κ tal que toda cubierta abierta tiene una subcubierta de cardinalidad no mayor a κ

De la definición anterior se deduce de forma inmediata que un espaci oes Lindelöf si y sólo si $l(X) \leq \aleph_0$. Cualquier espacio compacto o σ-compacto es de Lindelöf.

Ahora se describirán varias funciones cardinales relativas a propiedades de bases y bases locales o similares.

Definición 3.0.7
Una **red** en un espacio topológico X es una familia $\mathcal{N}$ de subconjuntos de X tales que todo conjunto abierto no vacío en X es la unión de elementos de $\mathcal{N}$.

Observación 3.0.3
Una red es casi lo mismo que una base; la diferencia consiste en que los miembros de la red no son abiertos necesariamente. En particular, toda base es una red. Un ejemplo de red para un espacio X es:

$$\left\{\{p\} \middle| p \in X\right\}$$

Es fácil probar que un espacio con una red numerable es separable. En cambio, el recíproco es falso.

Un hecho muy importante relativo a redes es que un espacio compacto con una red de cardilaidad κ tiene una base de cardinalidad κ.

Definición 3.0.8
Se define el **peso de red de un espacio** X como:

$$nw(X) = \text{mín}\left\{|\mathcal{N}|\middle|\mathcal{N} \text{ es una red en } X\right\} + \aleph_0$$

Observación 3.0.4
En resumen, se verifica que $nw(X) \leq |X|$ para todo espacio X, y $w(X) = nw(X)$ para todo espacio compacto X.

Definición 3.0.9
Una **π-base en** X es una familia $\mathcal{V}$ de abiertos no vacíos en X tales que si U es abierto y no vacío en X, entonces $V \subseteq U$ para alguna $V \in \mathcal{V}$. El **π-peso de** X se define a como:

$$\pi w(X) = \text{mín}\left\{|\mathcal{V}|\middle|\mathcal{V} \text{ es una } \pi\text{-base en } X\right\} + \aleph_0$$

Observación 3.0.5
Se tiene que

$$d(X) \leq \pi w(X) \leq w(X)$$

En general, el peso de red y el π-peso no se pueden comparar directamente; hay ejemplos de espacios X tales que $nw(X) < \pi w(X)$ y otros espacios Y tales que $\pi w(Y) < nw(Y)$. Sin embargo, siempre se cumple que $d(X) \leq \pi w(X)$.

Hasta ahora se ha definido funciones globales, es decir, que nos dan información de todo el espacio. A continuación definiremos funciones cardinales que nos dan información de propiedades locales de espacios.

Definición 3.0.10
Sean X un espacio, $\mathcal{V}$ una familia de abiertos no vacíos en X y $p \in X$. Entonces, $\mathcal{V}$ es una **π-base local en** p si para cada vecindad U de p existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V \subseteq U$.

Finalmente, si $\cap\left\{V\middle|V \in \mathcal{V}\right\} = \{p\}$, decimos que $\mathcal{V}$ es una **seudobase** para p. Con esto, podemos definir las siguientes funciones cardinales:

$$\chi(p, X) = \text{mín}\left\{|\mathcal{V}|\middle|\mathcal{V} \text{ es una base local en } p\right\};$$
$$\pi\chi(p, X) = \text{mín}\left\{|\mathcal{V}|\middle|\mathcal{V} \text{ es una } \pi\text{-base local en } p\right\};$$
$$\psi(p, X) = \text{mín}\left\{|\mathcal{V}|\middle|\mathcal{V} \text{ es una seudobase para } p\right\};$$

El **carácter**, el **π-carácter** y el **seudocarácter** se definen respectivamente como sigue:

$$\chi(X) = \sup\left\{\chi(p, X)\middle|p \in X\right\} + \aleph_0;$$
$$\pi\chi(X) = \sup\left\{\pi\chi(p, X)\middle|p \in X\right\} + \aleph_0;$$
$$\psi(X) = \sup\left\{\psi(p, X)\middle|p \in X\right\} + \aleph_0;$$

la **estrechez o el ajuste de un punto** x en un espacio topológico X es el cardinal infinito más pequeño τ con la propiedad de que si $x \in \overline{C}$, $C \subseteq X$, existe $F \subseteq C$ tal que $x \in \overline{F}$ y $|F| \leq \tau$.

Este número cardilan se denota como $t(x, X)$. La **estrechez o el ajuste de un espacio** X es el supremo de todos los números $t(x, X)$ para $x \in X$; este número cardinal se denota por $t(X)$.

Observación 3.0.6
Se verifica que $t(X) \leq \chi(X)$. Además, X es primero numerable si y sólo si $\chi(X) = \aleph_0$.

Definición 3.0.11
Diremos que X tiene **π-carácter numerable** si $\pi\chi(X) = \aleph_0$, **seudocarácter numerable** si $\psi(X) = \aleph_0$ y **estrechez numerable** si $t(X) = \aleph_0$. Observe que el seudocarácter está definido solo para espacios T_1.

La cardinalidad de los conjuntos abiertos no vacíos en un espacio da lugar a la función cardinal **grado de dispersión** de un espacio X, que se define como

$$\Delta(X) = \text{mín}\left\{|U| \middle| U \text{ es abierto y no vacío en } X\right\} + \aleph_0$$

3.1. Relaciones cardinales básicas

Una vez definidas las principales funciones cardinales, podemos encontrar algunos invariantes y desigualdades cardinales asociadas con espacios topológicos. Comenzaremos con algunas cotas para la cardinalidad de un espacio.

Uno de los resultados más importantes es el siguiente teorema:

Teorema 3.1.1 (**Teorema de Arkhangel'skii**)
Si X es un espacio Hausdorff, entonces $|X| \leq 2^{l(X)\cdot\chi(X)}$. En particular, todo espacio Lindelöf primero numerable tiene cardilaidad a lo sumo $2^{\aleph_0}$.

El teorema anterior se puede generalizar a

$$|X| \leq 2^{l(X)\cdot\psi(X)\cdot t(X)}$$

para todo espacio Hausdorff.

En el caso de espacios regulares tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.1.2
Si X es regular, entonces

$$|X| \leq 2^{d(X)\cdot\psi(X)}$$

En particular, todo espacio regular es separable con seudocarácter numerable tiene cardilaidad no mayor que $\mathfrak{c}$.

Si X es Hausdorff, Pospisil demostró la siguiente desigualdad:

Teorema 3.1.3
Para todo espacio Hausdorff X se cumple que

$$|X| \leq d(X)^{\chi(X)}$$

En particular, todo espacio Hausdorff primero numerable con un subconjunto denso de cardinalidad no mayor que $\mathfrak{c}$ tiene una cardinalidad que no excede a $\mathfrak{c}$.

Usando la celularidad y el carácter, podemos obtener una cota en la cardinalidad de un espacio Hausdorff.

Teorema 3.1.4
Si X es un espacoi Hausdorff, entonces $|X| \leq 2^{c(X)\chi(X)}$. En particular, todo espacio primero numerable, con la propiedad de Souslin, tiene una cardinalidad que no supera a $\mathfrak{c}$.

En cuanto a los espacios que tienen propiedades relacionadas con la compacidad, contamos con los siguientes eventos,

Un resultado muy importante para espacios localmente compactos es el teorema de Cech-Popsil relativo a la cardilanidad de espacios compactos.

Teorema 3.1.5 (**Teorema de Cech-Popsil**)
Sea X un espacio localmente compacto tal que $\chi(x, X) \geq \kappa \geq \aleph_0$ para todo $x \in X$; entonces, $|X| \geq 2^{\kappa}$.

Con este resultado y uno anterior se obtiene el teorema siguiente:

Corolario 3.1.1
Todo espacio compacto, primero numerable es numerable o tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$.

En espacios localmnte compactos se alcanza la igualdad entre el peso y el peso de red.

Teorema 3.1.6
Sea X un espacio localmente compacto; entonces, $nw(X) = w(X)$.

Al relacionar el número de Lindelöf y el peso de red, obtenemos lo siguiente:

Teorema 3.1.7
Para todo espacio X se cumple que $l(X) \leq nw(X)$. Además, $l(Y) \leq nw(X)$ para todo subespacio $Y \subseteq X$.

Con respecto a espacios producto, se tiene el siguiente resultado fundamental:

Teorema 3.1.8 (**Teorema de Hewitt-Marczewski-Pondiczery**)
Si κ es un cardinal infinito, $d(X_i) \leq \kappa$ para todo $i \in I$ y $|I| \leq 2^{\kappa}$, entonces $d\left(\prod_{i \in I} X_i\right) \leq \kappa$.

Como corolario obtenemos

Corolario 3.1.2
El producto de a lo sumo $\mathfrak{c}$ espacios separables es separable.

La celularidad no necesariamente se preserva en prodcutos. Sin embargo, si la densidad de los factores está acotada, la situación mejora notablemente.

Teorema 3.1.9
Si $d(X) \leq \kappa \geq \aleph_0$ para toda $i \in I$, entonces $c\left(\prod_{i \in I} X_i\right) \leq \kappa$.

Respecto a espacios métricos se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.1.10
Para todo espacio métrizable X y cualquier cardinal κ, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1). $w(X) \leq \kappa$.

2). $nw(X) \leq \kappa$.

3). $d(X) \leq \kappa$.

4). $l(X) \leq \kappa$.

5). $c(X) \leq \kappa$.