Notas Extensiones Separables AM III

Cristo Daniel Alvarado

Diciembre de 2023

Índice general

Capítulo 4

Extensiones Separables

4.1. Resultados preeliminares

Para enunciar lo que es una extensión separable, se necesitarán demostrar algunos resultados preeliminares para enunciarlo de forma adecuada.

Proposición 4.1.1
Sea F un campo y $f(X) \in F[X]$ un polinomio no constante. Si

1. $\operatorname{car}(F) = 0$, entonces $f'(X) \neq 0$.
2. $\operatorname{car}(F) = p > 0$, entonces $f'(X) = 0$ si y sólo si $\exists g(X) \in F[X]$ tal que $f(X) = g(X^p)$.

Demostración:
En ambos casos, para la demostración se requiere de usar el polinomio $f'(X)$. Expresamos

$$f(X) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad n \geq 1,\ a_n \neq 0 \tag{4.1}$$

De (1): Se tiene que

$$f'(X) = \cdots + n a_n x^{n-1}$$

donde $na_n \neq 0$ ya que $\operatorname{car}(F) = 0$. Por tanto, $f'(X) \neq 0$.

De (2): Se probará el si, sólo si.

$\Leftarrow$): Supongamos que $\exists\ g(X) \in F[X]$ tal que $f(X) = g(X^p)$. Expresamos a $g(X) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$, donde $b_m \neq 0$. Entonces

$$\begin{aligned} f(X) =& g(X^p) \\ =& b_0 + b_1 X^p + \cdots + b_m X^{pm} \\ \Rightarrow f'(X) =& pb_1 X^{p-1} + \cdots + pmb_m X^{pm-1} \\ =& 0 \cdot X^{p-1} + \cdots + 0 \cdot X^{pm-1} \\ =& 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$): Supongamos que $f'(X) = 0$, donde $f'(X) = \sum_{i=1}^{m} i a_i x^{i-1}$, entonces $ia_i = 0$, para todo $i = 1, \cdots, m$. Si $a_i \neq 0$ para algún i, entonces debe suceder que $i \cdot 1 = i = 0$, por lo cual $\operatorname{car}(F) = p \mid i$. Luego si $a_i \neq 0$, existe $m_i \in \mathbb{N}$ tal que $i = pm_i$. Escribiendo a $f(X)$ con todos sus términos no cero, se tiene que

$$\begin{aligned} f(X) =& a_0 + a_{pm_1} X^{pm_1} + \cdots + a_{pm_n} X^{pm_n} \\ =& a_0 + a_{pm_1} (X^p)^{m_1} + \cdots + a_{pm_n} (X^p)^{m_n} \\ =& g(X^p) \end{aligned}$$

donde $g(X) = a_0 + a_{pm_1}X + \cdots + a_{pm_n}X^{m_n}$, siendo $a_{pm_n} \neq 0$, pues $f(X) \neq 0$ ■

De este teorema anterior y de un teorema del capítlo pasado, se deduce de forma inmediata el siguiente corolario:

Corolario 4.1.1
Sea F un campo y $f(X) \in F[X]$ un polinomio irreducible. Si

1. $\mathrm{car}(F) = 0$, entonces todas las raíces de $f(X)$ son simples.
2. $\mathrm{car}(F) = p > 0$, entonces $f(X)$ tiene una raíz simple si y sólo si, $\exists g(X) \in F[X]$ tal que $f(X) = g(X^p)$.

Demostración:
Es inmediata de la proposición anterior. ■

El siguiente teorema tiene como objetivo caracterizar las extensiones separables, enunciando un resultado importante para su definición.

Teorema 4.1.1
Sea F un campo con $\mathrm{car}(F) = p > 0$. Sea $f(X) \in F[X]$ un polinomio irreducible, y $e \in \mathbb{N}^*$ tal que $f(X) \in F[x^{p^e}]$, pero $f(X) \notin F[x^{p^{e+1}}]$. Sea $\Psi(X) \in F[X]$ el polinomio tal que $f(X) = \Psi(X^{p^e})$. Entonces

1. $\Psi(X)$ es un polinomio irredicible en $F[X]$.
2. Todas las raíces de $\Psi(X)$ son simples.
3. Todas las raíces de $f(X)$ tienen la misma multiplicidad, a saber, p^e.
4. Si $m = \deg(\Psi)$, entonces $\deg(f) = p^e m$.

Demostración:
De (1): Supongamos que $\Psi(X)$ es descomponible, entonces existen $g(X), h(X) \in F[X]$ con grados ≥ 1 tales que

$$\begin{aligned} \Psi(X) =& g(X)h(X) \\ \Rightarrow f(X) =& g(X^p)h(X^p) \\ =& g_1(X)h_1(X) \end{aligned}$$

donde $g_1(X) = g(X^p)$ y $h_1(X) = h(X^p)$ con grados ≥ 1, lo cual implicaría que $f(X)$ es reducible. Luego $\Psi(X)$ tiene que ser irredicible.

De (2): Supongamos que $\Psi(X)$ admite una raíz multiple, entonces $\exists$ $g(X) \in F[X]$ tal que $\Psi(X) = g(X^p)$. Así

$$\begin{aligned} f(X) =& \Psi(X^{p^e}) \\ =& g(X^{p^{e+1}}) \\ \in& F[x^{p^{e+1}}] \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\Psi(X)$ debe tenera todas sus raíces simples.

De (3): Sea $m = \deg(\Psi)$. Sean $\beta_1, \cdots, \beta_m \in \bar{F}$ todas las raíces de $\Psi(X)$ en alguna cerradura algebraica de F. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \Psi(X) =& a\,(x-\beta_1)\cdots(x-\beta_m) \\ \Rightarrow f(X) =& \Psi(X^{p^e}) \\ =& a\left(x^{p^e}-\beta_1\right)\cdots\left(x^{p^e}-\beta_m\right) \end{aligned}$$

Donde $a \in F$ es alguna constante. Ahora, para cada $i = 1, \cdots, m$ sea $\alpha_i \in \bar{F}$ una raíz del polinomio $X^{p^e} - \beta_i = 0$, esto es $\beta_i = \alpha^{p^e}$. Notemos que si $i \neq j$, debe suceder que $\alpha_i \neq \alpha_j$. Por tanto

$$asd$$

De (4): Es inmediata. ■

Se deduce de forma inmediata el siguiente corolario.

Corolario 4.1.2
Sea F campo y $f(X) \in F[X]$ un polinomio irredicible. Entonces todas las raíces de $f(X)$ tienen la misma multiplicidad. Si $\mathrm{car}(F) = 0$, la multiplicidad de estas raíces es 1, y si $\mathrm{car}(F) = p > 0$, tienen multiplicidad p^e, para algún $e \in \mathbb{N}^*$ (este e se obtiene del teorema anterior).

4.2. Extensiones separables

Ahora estamos en las condiciones de enunciar la definición de separabilidad.

Definición 4.2.1
De acuerdo con las notaciones del teorema anterior y de su demostracion, tenemos que el número $\deg(\Psi)$ es llamado **el grado de separabilidad de** f, y al entero no negativo e es llamado **el grado de inseparabilidad de** f.

En otras palabras, podemos ver que el grado de separabilidad de f es el número de raíces distintas de f.

Definición 4.2.2
Sea F un campo y $\bar{F}$ una cerradura algebraica de F. Si $\alpha \in \bar{F}$ y $f(X) = \mathrm{irr}(\alpha, F, X)$, entonces se define **el grado de separabilidad de** α, como el grado de separabilidad de f, y al exponente e de inseparabilidad de f, será el **exponente de inseparabilidad de** α.

En el caso en que $\mathrm{car}(F) = 0$, el exponente y grado de inseparabilidad de f y α no tienen sentido en estar definidos, pues en ambos casos su valor siempre será de 1.

En cualquier caso, si $\alpha \in \bar{F}$ se denota al grado de separabilidad de α como

$$[F(\alpha) : F]_s \tag{4.2}$$

En el caso de que $\mathrm{car}(F) = 0$, se tiene que

$$[F(\alpha) : F]_s = [F(\alpha) : F] = \deg(\mathrm{irr}(\alpha, F, X)) \tag{4.3}$$

y, si $\mathrm{car}(F) = p > 0$, entonces

$$[F(\alpha) : F]_s = \frac{[F(\alpha) : F]}{p^e} \tag{4.4}$$

Proposición 4.2.1
Sea F un campo, $\bar{F}$ una cerradora algebraica de F y $\alpha \in \bar{F}$. Entonces, $[F(\alpha) : F]_s = N$, donde $N \in \mathbb{N}$ es el número de F-homomorfismos de $F(\alpha)$ en $\bar{F}$.

Demostración:
Sea $f(X) = \mathrm{irr}(\alpha, F, X)$. Tomemos $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \bar(F)$ las raíces distintas de $f(X)$. Se tiene por definición que

$$m = [F(\alpha) : F]_S$$

Sea $\phi : F(\alpha) \to \bar(F)$ un F-homomorfismo. Sabemos que ϕ está completamente detemrinada por su acción sobre α, teniendo que $\phi(\alpha)$ es raíces de $f(X)$, esto es debe ser que $\phi(\alpha) = \alpha_i$, con $i \in [\![1, m]\!]$. luego, a lo más tenemos m F-homomorfismos de $F(\alpha)$ en $\bar{F}$, con lo cual se tiene el resultado. ■

Definición 4.2.3
Sea E/F una extensión algebraica. Se define **el grado de separabilidad de E sobre F** como la cardinalidad del conjunto de F-homomorfismos que van de E en $\bar{F}$, donde $\bar{F}$ es una cerradura algebraica de F que contiene a E. Tal cardinal es denotado por $[E : F]_s$.

De resultados de capítulo anterior, se deduce de forma inmediata el siguiente teorema.

Teorema 4.2.1
Sea E/F una extensión finita y K un campo intermedio de la extensión E/F. Entonces

$$[E : F]_s = [E : K]_s [K : F]_s \tag{4.5}$$

Demostración:
Es inmediata de un teorema anterior. ■

Definición 4.2.4
Sea F un campo y $\alpha \in \bar{F}$. Decimos que α **es separable sobre** F si $[F(\alpha) : F]_s = [F(\alpha) : F]$. Si E/F es una extensión algebraica, entonces se dice que E/F **es separable** o E **es separable sobre** F, si todo elemento de E es separable sobre F.

Veremos ahora algunas caracterizaciones de las extensiones separables.

Observación 4.2.1
Sea F camop y $\bar{F}$ cerradura algebraica de F.

1. Si $\alpha \in \bar{F}$, entonces α es separable sobre F si y sólo si $f(X) = \mathrm{irr}(\alpha, F, X)$ es tal que todas sus raíces son simples. Cuando esto ocurra decimos que $f(X)$ **es separable sobre** F.
2. Si $g(X) \in F[X]$, decimos que $g(X)$ **es separable sobre** F si todos sus factores irreducibles son separables sobre F.

Proposición 4.2.2
Sea E/F una extensión finita con $\mathrm{car}(F) = p > 0$. Entonces existe un elemento $t \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$[E : F] = p^t [E : F]_s \tag{4.6}$$

En particular, si $p \nmid [E : F]$, enotnces $[E : F] = [E : F]_s$.

Demostración:

Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in E$ tales que $E = F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Consideraremos la torre de campos $F \subseteq F(\alpha_1) \subseteq \cdots \subseteq F(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \subseteq F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Sea e^i es exponente de inseparabilidad de α_i sobre $F(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})$, con $i \in [\![2, n]\!]$ y e_1 el grado de inseparabilidad de α_1 sobre F. Entonces

$$\begin{aligned}[E : F]_s =& [F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : F(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})]_s \cdot \cdots \cdot [F(\alpha_1) : F]_s \\ =& \frac{1}{p^{e_n}} [F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : F(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})] \cdot \cdots \cdot \frac{1}{p^{e_1}} [F(\alpha_1) : F] \\ \Rightarrow [E : F] =& p^{e_1 + e_2 + \cdots + e_n} [E : F]_s\end{aligned}$$

tomando $t = e_1 + \cdots + e_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ se sigue el resultado. ■

Observación 4.2.2

Si E/F es una extensión finita y $\operatorname{car}(F) = 0$, entonces $[E : F] = [E : F]_s$.

Proposición 4.2.3

Sea E/F una extension de campos con $\operatorname{car}(F) = p > 0$ y $\alpha \in E$ algebraico sobre F. Sea e el exponente de inseparabilidad de α sobre F. Entonces

1. α^{p^e} es separable sobre F.
2. Las siguientes condiciones son equivalentes:
   I) α es separable sobre F.
   II) $[F(\alpha) : F]_s = [F(\alpha) : F]$.
   III) $e = 0$.
   IV) $F(\alpha) = F(\alpha^p)$.

Demostración:

De (1): Sea $f(X) = \operatorname{irr}(\alpha, F, X)$ y $\psi(x) \in F[X]$ tal que $\psi(X^{p^e}) = f(X)$, pero $f(X) \notin F[X^{p^{e+1}}]$. Sabemos que $\psi(X)$ es irreducible sobre F y que todas sus raíces son simples, donde

$$0 = f(\alpha) = \psi(\alpha^{p^e})$$

esto es, α^{p^e} es raíz de $\psi(X)$, por lo cual $\psi(X) = \operatorname{irr}(\alpha^{p^e}, F, X)$. Por tanto, α^{p^e} es separable sobre F.

De (2): Es claro que I) $\iff$ II) $\iff$ III). Probaremos que I) $\iff$ IV). Antes, notemos que

$$F \subseteq F(\alpha^p) \subseteq F(\alpha)$$

I)$\Rightarrow$ IV): Sea $f(X) = \operatorname{irr}(\alpha, F, X)$. Tenemos que $g(X) = X^p - \alpha^p \in F(\alpha^p)[X]$ y α es raíz de $g(X)$. Por lo cual $\operatorname{irr}(\alpha, F(\alpha^p), X) \mid g(X)$ y $\operatorname{irr}(\alpha, F(\alpha^p), X) \mid f(X)$ en $F(\alpha^p)[X]$.

Entonces, como todas las raíces de $f(X)$ son simples, las raíces de $h(X) = \operatorname{irr}(\alpha, F(\alpha^p), X)$ también lo son; además $h(X) \mid X^p - \alpha^p = (X - \alpha)^p \Rightarrow h(X) = (x - \alpha) \Rightarrow \alpha \in F(\alpha^p)$. Por tanto, $F(\alpha) = F(\alpha^p)$.

IV)$\Rightarrow$ I): Recíprocamente, supongamos que $F(\alpha) = F(\alpha^p)$ pero α no es separable sobre F. Siendo $f(X) = \operatorname{irr}(\alpha, F, X)$, tenemos que $f(X) \in F[X^p]$, esto es, existe $g(X) \in F[X]$ tal que $f(X) = g(X^p)$ donde $\deg(f) = p \cdot \deg(g) > \deg(g)$.

Notemos que $g(X)$ tiene por raíz a α^p, pues $g(\alpha^p) = f(\alpha) = 0$, de esta forma $\operatorname{irr}(\alpha^p, F, X) \mid g(X) \Rightarrow [F(\alpha^p) : F] = \deg(\operatorname{irr}(\alpha^p, F, X)) = \deg(g) < \deg(f) = [F(\alpha) : F]$, luego $F(\alpha^p) \subsetneq F(\alpha)$, lo cual es una contradicción. Por tanto, α es separable sobre F.

■

Proposición 4.2.4
Sea E/F una extensión finita. Entonces E/F es separable si y sólo si $[E:F]_s = [E:F]$.

Demostración:
$\Rightarrow$) : Suponga que E/F es separable. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in E$ tales que $F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = E$. Consideremos la torre de campos:

$$F \subsetneq F(\alpha_1) \subsetneq \cdots \subsetneq F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = E$$

para cada $i \in [\![2, n]\!]$, tenemos que α_i es separable y, por ende, lo es sobre $F(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})$. Luego,

$$\begin{aligned}
[E:F]_s =& [F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : F(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})]_s \cdot \cdots \cdot [F(\alpha_1):F]_s \\
=& [F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : F(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})] \cdot \cdots \cdot [F(\alpha_1):F] \\
=& [E:F]
\end{aligned}$$

$\Leftarrow$) : Sea $\alpha \in E$ arbitrario. Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
[E:F(\alpha)]_s \cdot [F(\alpha):F]_s =& [E:F]_s \\
=& [E:F] \\
=& [E:F(\alpha)] \cdot [F(\alpha):F]
\end{aligned}$$

donde $[E:F(\alpha)]_s \leq [E:F(\alpha)]$ y $[F(\alpha):F]_s \leq [F(\alpha):F]$. Por la igualdad anterior debe suceder que

$$[F(\alpha):F] = [F(\alpha):F]$$

esto es, que α es separable sobre F. Como el α fue arbitrario, entonces se sigue que la extensión E/F es una extensión separable.

■

Observación 4.2.3
Sea $F \subseteq K \subseteq E$ una torre de campos y $\alpha \in E$ separable sobre F. Entonces α es separable sobre K. Más generalmente, sean E/F y K/F extensiones de campos y $\alpha \in E$ separable sobre F. Si α es elemento de un campo L extensión de K, entonces α es separable sobre K.

Proposición 4.2.5
Sea E/F una extensión de campos y $S \subseteq E$ tal que $E = F(S)$. Sea.

$$K = \{\alpha \in E | \alpha \text{ es separable sobre } F\} \tag{4.7}$$

Entonces

1. K es un subcampo intermedio de la extensión E/F.
2. E/F es separable si y sólo si α es separable sobre F, para todo $\alpha \in S$.

Demostración:
De (1): Probaremos que K es campo y que $F \subseteq K \subseteq E$. En efecto, sea $\alpha \in F$, se tiene que α es algebraico sobre F, con polinomio irreducible $f(X) = X - \alpha$, el cual tiene todas sus raíces distintas, por lo cual α es separable sobre F. Entonces $F \subseteq K \subseteq E$. Sean ahora $\alpha, \beta \in K \neq \emptyset$, pues $F \subseteq K$. Consideremos el campo intermedio de la extensión E/F, $F(\alpha, \beta)$. Se tiene entonces la torre de campos

$$F \subseteq F(\alpha) \subseteq F(\alpha, \beta) \subseteq E$$

Como β es separable sobre F, lo es sobre $F(\alpha)$, luego como el grado de separabilidad es multiplicativo, se tiene que

$$\begin{aligned}[F(\alpha,\beta):F]_s &= [F(\alpha,\beta):F(\alpha)]_s\,[F(\alpha):F]_s \\ &= [F(\alpha,\beta):F(\alpha)]\,[F(\alpha):F] \\ &= [F(\alpha,\beta):F]\end{aligned}$$

por lo cual, la extensión $F(\alpha,\beta)/F$ es separable, luego los elementos $\alpha-\beta, \alpha\beta, \alpha^{-1} \in F(\alpha,\beta)$ son separables sobre F. Por tanto, K es campo y por lo anterior, es subcampo intermedio de la extensión E/F.

De (2): Veamos que

$\Rightarrow$): Es inmediata, pues si E/F es separable todo elemento de E es separable sobre F. En particular todo elemento de S es separable sobre F.

$\Leftarrow$): Supongamos que α es separable sobre F, para todo $\alpha \in S$. Por (1) se tiene que $S \subseteq K$ y $F \subseteq K$, pero como K es subcampo de E, se tiene que $F(S) \subseteq K$, por lo cual $F(S) = E = K$. Así, todos los elementos de E son separables sobre F, es decir E/F es una extensión separable. ∎

Definición 4.2.5
El campo K de la definición (4.7) es llamado **la cerradura separable** o de la extensión E/F o simplemente de E/F, o de F en E.

Si consideramos la extensión $\bar{F}/F$, entonces la cerradura separable de F en $\bar{F}$ simplemente se dice es la **cerradura separable de F**.

Observación 4.2.4
Si E/F es una extensión algebraica de tal manera que $E \subseteq \bar{F}$, entonces la cerradura separable de F en E, K, es la intersección de la cerradura separable de F con E.

Observación 4.2.5
En la literatura no existe notación establecida para referirse a la cerradura normal. En este momento nosotros acordaremos la siguiente. Sobre la extensión E/F, se denotará a la cerradura separable de F en E por:

$$F_{S,E/F} \quad \text{o} \quad F^{E}_{S,F}$$

Cuando la extensión es $\bar{F}/F$ será

$$F_S$$

y a veces a la cerradura algebraica se le denota por $\bar{F} = F^a$.

Proposición 4.2.6
Sea E/F una extensión normal & F_S la cerrradura separable de E/F. Entonces, la extensión F_S/F es normal.

Demostración:
Sea $\alpha \in F_S$ con $f(X) = \operatorname{irr}(\alpha, F, X)$, y $\beta \in \bar{F}$ tal que α y β son F-conjugados, es decir que ambos son raíces del polinomio $f(X)$. Como la extensión E/F es normal, entonces $\beta \in E$, donde $\operatorname{irr}(\beta, F, X) = f(X)$ es separable sobre F, pues α es separable sobre F, es decir, β es separable sobre F. Luego $\beta \in F_S$. Por tanto, la extensión F_S/F es normal. ∎

Observación 4.2.6
Si F es campo, la extensión $\bar{F}/F$ es normal, por lo cual las extensiones $\bar{F}/F_S$ y F_S/F son ambas normales (siendo F_S la cerradura separable de F).

Proposición 4.2.7
Sea E/F una extensión finita. y F_S la cerradura separable de F en E. Entonces,

$$[F_S : F] = [E : F]_s \tag{4.8}$$

Demostración:
Tenemos dos casos:

- Si $\operatorname{car}(F) = 0$, entonces la extensión E/F es separable y por tanto $F_S = E$. Por tanto

$$\begin{aligned}[F_S : F] &= [E : F] \\ &= [E : F]_s\end{aligned}$$

- Si $\operatorname{car}(F) = p > 0$. Tenemos que

$$\begin{aligned}[E : F]_S &= [E : F_S]_S [F_S : F]_S \\ &= [E : F_S]_S [F_S : F]\end{aligned}$$

  Para probar el resultado, basta con probar que $[E : F_S]_S = 1$. Recordemos que $[E : F_S]_S$ es el cardinal de F_S-homomorfismos de E en $\bar{F} = \bar{F}_S$. Sea entonces $f : E \to \bar{F}$ un F_s-homomorfismo. Sea $\alpha \in E$. Si $\alpha \in F_S$m entonces $f(\alpha) = \alpha$. Si $\alpha \notin F_S$, se tiene por defición de F_S que α no es separable sobre F.

  Sea $f(X) = \operatorname{irr}(\alpha, F, X)$, y tomemos $e \in \mathbb{N}^*$ su exponente de inseparabilidad. Por un resultado anterior sucede que α^{p^e} es separable sobre F, es decir $\alpha^{p^e} \in F_S$. Luego,

$$\begin{aligned} f(\alpha^{p^e}) &= \alpha^{p^e} \\ \Rightarrow (\alpha - f(\alpha))^{p^e} &= \alpha^{p^e} - f(\alpha)^{p^e} \\ &= 0 \\ \Rightarrow f(\alpha) - \alpha &= 0 \\ \Rightarrow f(\alpha) &= \alpha \end{aligned}$$

  Es decir, $f = \mathrm{id}_E$. Por tanto $[E : F_S] = 1$. Así por la ecuación anterior

$$[E : F]_S [F_S : F]$$

■

Teorema 4.2.2
La clase de extensiones separables es una clase distinguida.

Demostración:
De (a): Sea $F \subseteq K \subseteq E$ una torre de campos. Probaremos que E/F es separable si, y sólo si E/K y K/F son separables.

$\Rightarrow$): Supongamos que E/F es separable. Sabemos ya que E/K es separable. Pero, por otro lado, es claro que la extensión K/F es separable.

$\Leftarrow$): Supongamos que las extensiones E/K y K/F son separables. Sea $\alpha \in E$ arbitrario y tomemos $f(X) = \text{irr}(\alpha, K, X)$, digamos

$$f(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_{m-1}X^{m-1} + X^m \in K[X]$$

Tenemos que $f(X)$ es separable sobre K, es decir todas las raíces de $f(X)$ son simples. Consideremos la torre de campos:

$$F \subseteq F(a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}) \subseteq F(a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, \alpha)$$

donde $F(a_0, a_1, \ldots, a_{m-1})/F$ es finita y separable, al igual que $F(a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, \alpha)/F(a_0, a_1, \ldots, a_{m-1})$. Notemos que $f(X) = \text{irr}(\alpha, F(a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}), X)$. Entonces

$$\begin{aligned}
[F(a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, \alpha) : F] &= [F(a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, \alpha) : Fa_0, a_1, \ldots, a_{m-1}]\,[F(a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}) : F] \\
&= [F(a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, \alpha) : Fa_0, a_1, \ldots, a_{m-1}]_s\,[F(a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}) : F]_s \\
&= [F(a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, \alpha) : F]_s
\end{aligned}$$

es decir, $F(a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, \alpha)/F$ es una extensión separable, en particular se tiene que α es separable sobre F. Por ser el α arbitrario en E, se sigue que E/F es una extensión separable.

De (b): Sean E/F y K/F extensiones separables, dónde E/F es separable y, E y K subcampos de un campo común L. Como $K(E) = KE$, entonce basta ver que los elementos de E son separables sobre K, lo cual ya se tiene.

Entonces, KE/F es una extensión separable. ■

Corolario 4.2.1
Sean E/F y K/F extensiones separables, con E y K subcamopos de un campo común L. Entonces, KE/F es separable.

Demostración:
Es inmediato de la proposición teorema. ■

Definición 4.2.6
Sea F un campo. Se dice que F **es perfecto** si toda extensión algebraica de F es separable.

Observación 4.2.7
Todo campo de caracterísitica 0 es perfecto (ya que toda extensión algebraica de un campo con caracterísica 0 sigue teniendo característica 0, es decir que la extensión siempre va a ser separable).

Definición 4.2.7
Sea F campo de caracerística $p > 0$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Se define la función $\phi_n : F \to F$, $\alpha \mapsto \alpha^{p^n}$.

Se tiene que ϕ_n es un homomorfismo, llamado **el homomorfismo de Fröbenius de grado** n. Para $n = 1$ se dice simplemente que ϕ_1 es el homomorfismo de Fröbenius, y se denota por ϕ.

Teorema 4.2.3
Sea F un campo de caracterísitca $p > 0$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. F es perfecto.
2. Toda extensión finita de F es separable.
3. Todo polinomio irreducible sobre F es separable.
4. Todo polinomio sobre F es separable.

5. El homomorfismo de Fröbenius es un automorfismo de F.

Demostración:

(1) $\Rightarrow$ (2): Es inmediato.

(2) $\Rightarrow$ (3): Sea $f(X) \in F[X] \backslash F$ irreducible y sea $\alpha \in \bar{F}$ una raíz de $f(X)$. Por hipótesis, $F(\alpha)$ es una extensión separable de F, luego α es separable sobre F. Como $f(X)$ es asociado con $\operatorname{irr}(\alpha, F, X)$, entonces f es separable sobre F.

(3) $\iff$ (4): Es inmediato.

(4) $\Rightarrow$ (5): Es claro que $\phi : F \to F$ es un monorfismo. Sea $\alpha \in F$ y considérese $f(X) = X^p - \alpha \in F[X]$. Sea $\beta \in \bar{F}$ una raíz de $f(X)$ y sea $g(X) = \operatorname{irr}(\beta, F, X)$, el cual es separable y divide a $f(X)$. Pero $f(X) = X^p - \alpha^p = (X - \alpha)^p$, así β es la única raíz de $f(X)$, por lo que también lo es de $g(X)$. Por tanto, $g(X) = X - \beta \in F[X]$.

Luego, $\beta \in F$. Así pues, ϕ es suprayectiva, luego es un automorfismo de F.

(5) $\Rightarrow$ (1): Sea E/F una extensión algebraica. Sean $\alpha \in E$ y $f(X) = \operatorname{irr}(\alpha, F, X)$, cuyas raíces tienen multiplicidad p^e, con $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, siendo e el exponente de inseparabilidad de α. Suponiendo que $e \geq 1$, entonces α es raíz múltiple de $f(X)$, por lo que existe $g(x) \in F[X]$ tal que $f(X) = g(X^p)$. Sea

$$g(X) = b_0 + b_1 X + \cdots + b_m X^m$$

Por hipótesis, para todo $i \in \{0, \ldots, m\}$ existe $c_i \in F$ tal que $b_i = c_i^p$. Pero, esto implica que

$$f(X) = c_0^p + c_0^p X^p + \cdots c_m^p X^{mp} = (c_0 + c_1 X + \cdots + c_m X^m)^p$$

lo cual contradice el hecho de que $f(X)$ sea irredicible. Por tanto, $e = 0$, luego α es separable sobre sobre F y, en consecuencia, E/F es una extensión separable. ∎

Teorema 4.2.4
Todo campo finito es perfecto.

Demostración:

Considerando el homomorfismo de Fröbenius $\phi : F \to F$, se tiene que ϕ es inyectivo, por lo cual $\big|\phi(F)\big| = \big|F\big|$. Pero, como F es finito, entonces $\phi(F) = F$, luego ϕ es automorfismo de F. Así pues, F es perfecto. ∎

Definición 4.2.8
Sea E/F una extensión de campos y α inseparable sobre F. Entonces $f(X) = \operatorname{irr}(\alpha, F, X)$ es de la forma $f(X) = (X - \alpha_1)^{p^e} \cdot \ldots \cdot (X - \alpha_m)^{p^e}$ con $e \geq 1$, Se dice que α es **puramente inseparable sobre** F si y sólo si existe $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $\alpha^{p^t} \in F$.

4.3. Extesiones puramente inseparables

Definición 4.3.1
Sea E/F una extensión de campos con $\operatorname{car}(F) = p > 0$ y $\alpha \in E$. Decimos que α **es puramente inseparable** si existe $t \in \mathbb{Z}$, $t \geq 0$ tal que $\alpha^{p^t} \in F$. La extensión E/F **es p.i.** si todo elemento de E es p.i. sobre F.

Observación 4.3.1
Si E/F es una extensión de campos, entonces todos los elementos de F son p.i. (separables) sobre F.

Proposición 4.3.1
Sea E/F una extensión de campos con $\text{car}(F) = p > 0$. Sea

$$K := \{\alpha \in E | \alpha \text{ es puramente inseparable sobre } F\}$$

(por la observación anterior, $K \neq \emptyset$). Entonces, K es subcampo de E que contiene a F.

Demostración:
Es claro que $K \neq \emptyset$ y $F \subseteq K \subseteq E$. Sean $\alpha, \beta \in K$, y $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tales que

$$\alpha^{p_1^t}, \beta^{p_2^t} \in F$$

Sea $t = \text{máx}\{t_1, t_2\}$. Por lo cual $\alpha^{p^t}, \beta^{p^t} \in F$, así

$$(\alpha - \beta)^{p^t} = \alpha^{p^t} - \beta^{p^t} \in F$$
$$(\alpha\beta)^{p^t} = \alpha^{p^t}\beta^{p^t} \in F$$
$$\left(\alpha^{-1}\right)^{p^t} = \left(\alpha^{p^t}\right)^{-1} \in F \text{ donde } \alpha \neq 0$$

por lo cual K es campo intermedio de la extensión E/F. ■

Proposición 4.3.2
Sea E/F una extensión algebraica, con $\text{car}(F) = p > 0$. Sea $S \subseteq E$ tal que $E = F(S)$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. E/F es puramente inseparable.
2. Todo elemento de S es puramente inseparable sobre F.
3. Los elementos de E que son puramente inseparables y separables sobre F son exactamente los de F.
4. Si $\phi : E \to \bar{F}$ es un F-homomorfismo, entonces $\phi(\alpha) = \alpha$, para todo $\alpha \in E$.

Demostración:
(1) $\Rightarrow$ (2): Es inmediato.

(2) $\Rightarrow$ (3): Sea $\alpha \in E$ tal que es puramente inseparable sobre F y separable sobre F, y $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ el exponente de inseparablilidad de α sobre F.

Tenemos que α^{p^e} es separable sobre F (por una proposición anterior). Por otro lado, sea $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $\alpha^{p^e} \in F$. Podemos suponer que $t \geq e$. Luego, α es raíz del polinomio $g(X) = X^{p^t} - \alpha^{p^t} = (X - \alpha)^{p^t}$, por lo cual $f(X) | g(X)$, donde $f(X) = \text{irr}(\alpha, F, X)$.

Así $f(x) = (X - \alpha)^{p^t}$. Como α es separable sobre F, se tiene que $e = 0$, es decir que $f(X) = X - \alpha \in F[X]$, en particular, $\alpha \in F$.

(3) $\Rightarrow$ (4): Sea $\phi : E \to \bar{F}$ un F-homomorfismo arbitrario, y $\alpha \in E$, con $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ su exponente de inseparabilidad. Sabemos que α^{p^e} es separable sobre F. Por hipótesis, $\alpha^{p^e} \in F$. Por lo cual

$$\phi(\alpha^{p^e}) = \alpha^{p^e}$$
$$\Rightarrow (\phi(\alpha) - \alpha)^{p^e} = \left(\phi\alpha^{p^e}\right) - \alpha^{p^e} = 0$$
$$\Rightarrow \phi(\alpha) = \alpha$$

(4) $\Rightarrow$ (1): sea $\alpha \in E$ arbitrario. Probaremos que existe $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $\alpha^{p^t} \in F$. Sea $\beta \in \bar{F}$ un F-conjugado de α. Sabemos que existe un F-isomorfismo $\psi : F(\alpha) \to F(\beta)$ tal que $\psi(\alpha) = \beta$. Extendemos ψ a un F-homomorfismo $\phi : E \to \bar{F}$. Por hipótesis, se tiene que $\phi(\gamma) = \gamma$, para todo $\gamma \in E$, en particular $\beta = \psi(\alpha) = \phi(\alpha) = \alpha$. Luego, si $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ es el exponente de inseparabilidad de α, entonces

$$\begin{aligned} f(X) =& \operatorname{irr}(\alpha, F, X) \\ =& (X - \alpha)^{p^e} \\ =& X^{p^e} - \alpha^{p^e} \in F[X] \end{aligned}$$

por tanto $\alpha^{p^e} \in F$. Luego α es p.i. sobre F. ■

Definición 4.3.2
Si E/F es una extensión algebraica con $\operatorname{car}(F) = p > 0$, entonces la **cerradura puramente inseparable** de la extensión E/F o de E en F, es el campo intermedio de todos los elementos $\alpha \in R$ tal que son puramente inseparables sobre F.

Observación 4.3.2
Si E/F es finita, entonces E/F es p.i. $\iff$ $[E : F]_S = 1$.

Observación 4.3.3
Sea E/F una extensión algebraica la cual es p.i. y separable. Entonces, tenemos que $E = F$.

Teorema 4.3.1
La clase de extensiones p.i. forman una clase distinguida.

Demostración:
(a): Sea $F \subseteq K \subseteq E$ una torre de campos con $\operatorname{car}(F) = p > 0$. Supóngase que E/F es puramente inseparable. Sea $\alpha \in E$, entonces existe $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $\alpha^{p^t} \in F \subseteq K$, por tanto E/K es puramente inseparable.

Por otro lado, es claro que todos los elementos de K son p.i. sobre F, por lo cual K/F es puramente inseparable.

Recíprocamente, suponga que E/K y K/F son p.i. Sea $\alpha \in E$,entonces existe $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $\alpha^{p^r} \in K$. Pero para este elemento existe $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $(\alpha^{p^r})^{p^s} \in F$, es decir $\alpha^{p^{r+s}} \in F$. Por tanto, E/F es puramente inseparable.

(b): Sean E/F y K/F extensiones de campos con $\operatorname{car}(F) = p > 0$, donde E y K son subcampos de un campo común L. Supóngase que la extensión E/F es p.i. Probaremos que la extensión EK/K es p.i.

Tenemos que $EK = K(E)$. Si $\alpha \in E$, entonces existe $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $\alpha^{p^t} \in F \subseteq K$. Por tanto, EK/K es p.i.

Por (a) y (b), se sigue que la clase de extensiones p.i. es una clase distinguida. ■

Corolario 4.3.1
Sean E/F y K/F extensiones de campos tales que $\operatorname{car}(F) = p > 0$, donde K y E son subcampos de un campo común L. Si E/F y K/F son p.i., entonces EK/F es p.i.

Demostración:
Es inmediato del teorema anterior. ■

Sea E/F una extensión algebraica con $\text{car}(F) = p > 0$, y sean F_i y F_s las cerraduras p.i. y separables, respectivamente. Entonces tenemos el siguiente diagrama:

donde $F_i \cap F_s = F$.

Proposición 4.3.3
En las condiciones de las notaciones anteriores, tenemos lo siguiente

1. E/F_s es p.i.

2. E/F_i es separable si y sólo si $E = F_iF_s$.

Demostración:
De (1): Sea $\alpha \in E$, y $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ su expontente de inseparabilidad sobre F. Sabemos que α^{p^e} es separable sobre F, por lo cual $\alpha \in F_s$. De esta forma, E/F_s es puramente inseparable.

De (2):

$\Rightarrow$): Supóngase que E/F_i es separable, entonces E/F_iF_s es separable y p.i., por lo cual $E = F_iF_s$.

$\Leftarrow$): Es inmediata. ■

Proposición 4.3.4
Sea F un campo cualquiera tal que $\text{car}(F) = p > 0$. Sea $\bar(F)$ su cerradura algebraica y F_i la cerradura p.i. de F en $\bar{F}$. Tenemos lo siguiente

1. El campo F_i es perfecto.

2. $F_i \cap F_s = F$ y $F_iF_s = \bar{F}$, dónde F_s es la cerradura separable de F en $\bar{F}$.

3. Si K es un campo perfecto tal que $F \subseteq K$, con $K \subseteq \bar{F}$, entonces $F_i \subseteq K$.

Demostración:
De (1): Probemos que $F_i^p = F_i$, donde

$$F_i^p = \{\alpha^p | \alpha \in F_i\}$$

ya se tiene que $F_i^p \subseteq F_i$. Sea $\alpha \in F_i$, y $\beta \in \bar{F}$ tal que $\alpha = \beta^p$. Luego, existe $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $\beta^{p^{t+1}} = \alpha^{p^t} \in F$, por lo cual $\beta \in F_i$. Asi $\alpha = \beta^p \in F_i$.

Por tanto, $F_i = F_i^p$. Luego, F_i es un campo perfecto.

De (2): Ya sabemos que $F_i \cap F_s = F$. Para la otra igualdad, como F_i es un campo perfecto, entonces la extensión $\bar{F}/F_i$ es separable, lo cual implica que $F_iF_s = \bar{F}$.

De (3): Sea K un campo intermedio de la extensión $\bar{F}/F$ el cual es perfecto. Probemos que $F_i \subseteq K$. Sea $\alpha \in F_i$. Consideremos la extensión $K(\alpha)/K$, esta extensión es separable; por otro lado, existe un elemento $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $\alpha^{p^t} \in F \subseteq K$, luego la extensión $K(\alpha)/K$ es p.i., así $K(\alpha) = K$ lo cual implica que $\alpha \in K$.

Por ende, $F_i \subseteq K$. ■

Corolario 4.3.2
Sea F un campo con $\text{car}(F) = p > 0$. Entonces, la intersección de cualquier familia de subcampos

de $\bar{F}$ que contienen a F es un campo perfecto.

Demostración:

Es inmediata. ■

Definición 4.3.3

Sea E/F una extensión finita arbitraria. Se define **el grado de inseparabilidad de la extensión** E/F como:

$$[E:F]_i := \frac{[E:F]}{[E:F]_s}$$

Notemos que si $\operatorname{car}(F) = 0$, entonces $[E:F]_i = 1$. Si $\operatorname{car}(F) = p > 0$, entonces $[E:F]_i = p^t$, para algún $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Observación 4.3.4

Sea E/F una extensión finita. Si K es un campo intermedio de la extensión E/F, entonces

$$[E:F]_i = [E:K]_i \cdot [K:F]_i$$

Si E/F es una extensión finita con $\operatorname{car}(F) = p > 0$, entonces E/F es p.i. si y sólo si $[E:F] = [E:F]_i$.

Observación 4.3.5

Sea E/F una extensión finita con $\operatorname{car}(F) = p > 0$. Si $p \nmid [E:F]$ entonces $[E:F]_i = 1$, es decir la extensión E/F es separable.

Proposición 4.3.5

Sea F un campo, $\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta \in \bar{F}$ tales que $\alpha_1, ..., \alpha_n$ son separables sobre F. Si F es infinito entonces, existe $\theta \in F(\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta)$ tal que:

$$F(\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta) = F(\theta)$$

Demostración:

Procederemos por inducción sobre n. Para $n = 1$, suponemos que tenemos la extensión $F(\alpha_1, \beta)/F$ donde α_1 es separable sobre F y β simplemente es algebraico sobre F. Denotemos por $f(X) = \operatorname{irr}(\alpha_1, F, X)$ y $g(X) = \operatorname{irr}(\beta, F, X)$, con $m = \deg f$ y $k = \deg g$.

Sean $\delta_1, ..., \delta_m$ y $\beta_1, ..., \beta_r$ las raíces distintas de $f(X)$ y $g(X)$, respectivamente, donde $r \leq k$. Consideremos las ecuaciones lineales siguientes:

$$\delta_1 X + \beta_1 = \delta_i X + \beta_j$$

con $i \in [\![2, m]\!]$ y $j \in [\![1, r]\!]$. Si δ_1 fuera la única raíz de $f(X)$, esto es $m = 1$, entonces $f(X) = X - \delta_1 \in F[X]$, luego $\alpha_1 = \delta_1 = \in F$. Por ende, $F(\alpha_1, \beta) = F(\beta)$. Así, basta tomar $\theta = \beta$.

Supongamos que δ_1 no es la única raíz de $f(X)$, es decir que $m \geq 2$. Hacemos $\delta_1 = \alpha_1$ y $\beta_1 = \beta$. Se tiene que las ecuaciones anteriores están bien determinadas.

Elegimos un elemento $a \in F$ tal que

$$\begin{aligned} a\delta_1 + \beta_1 &\neq a\delta_i + \beta_j \\ \Rightarrow a\alpha_1 + \beta &\neq a\delta_i + \beta_j \end{aligned}$$

para todo $i \in [\![1,m]\!]$ y para todo $j \in [\![1,r]\!]$. Tal elemento existe ya que F es infinito. Definimos

$$\theta = a\delta_1 + \beta \in F(\alpha_1, \beta)$$

probemos que $F(\alpha_1,\beta) = F(\theta)$. Por lo de arriba se sigue que $F(\theta) \subseteq F(\alpha_1,\beta)$. Basta probar que $\alpha_1, \beta \in F(\theta)$. Para ello, consideremos el polinomio $h(X) = g(\theta - aX) \in F(\theta)[X]$.

Notemos que $h(\alpha_1) = g(a\alpha_1 + \beta_1 - a\alpha_1) = g(\beta) = 0$ y,

$$\begin{aligned} h(\delta_i) &= g(\theta - a\delta_i) \\ &= g((a\delta_1 + \beta_1) - a\delta_i) \\ &\neq 0, \quad \forall i \in [\![2,m]\!] \end{aligned}$$

pues, $(a\delta_1 + \beta_1) - a\delta \not= \beta_j$ para todo $j \in [\![1,m]\!]$, es decir que nunca puede ser alguna raíz de g. Así pues, h y f tienen solamente una raíz en común, a saber, α_1, donde $h(X), f(X) \in F(\theta)[X]$.

Sea $d(X) \in F(\theta)[X]$ el máximo común divisor de $h(X)$ y $f(X)$ (el cual existe pues este anillo es dominio euclideano), donde

$$d(X) = l(X)h(X) + t(X)f(X)$$

siendo $l(X), t(X) \in F(\theta)[X]$. Notemos de la ecuación anterior que

$$d(\alpha_1) = 0$$

y, toda raíz de $d(X)$ es raíz de $f(X)$ y $h(X)$ (pues es el M.C.D.) pero, como $f(X)$ y $h(X)$ tienen a α_1 como única raíz, entonces $d(X)$ solo tiene como raíz a α_1. Por ende,

$$d(X) = X - \alpha_1$$

(el coeficiente lider es 1 ya que $f(X)$ es separable y $d(X) \mid f(X)$). Por tanto,

$$X - \alpha_1 = l(X)h(X) + t(X)f(X) \in F(\theta)[X]$$

por tanto, $\alpha_1 \in F(\theta)$. En particular, como $a \in F$ entonces $a\alpha \in F(\theta)$, luego

$$\beta = (a\alpha + \beta) - a\alpha = \theta - a\alpha \in F(\theta)$$

por tanto, $\alpha_1, \beta \in F(\theta)$. Finalmente se tiene que

$$F(\theta) = F(\alpha_1, \beta)$$

De aquí que la proposición se cumple para $n = 1$. Suponga que se cumple para algún $n \in \mathbb{N}$, probaremos que se cumple para $n+1$. En efecto, sean $\alpha_1, ..., \alpha_{n+1} \in \bar{F}$ separables sobre F y $\beta \in \bar{F}$ algebraico.

Por hipótesis de inducción, existe $\theta_1 \in F(\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta)$ tal que

$$F(\theta_1) = F(\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta)$$

y, por el caso $n = 1$ existe $\theta \in F(\alpha_1, ..., \alpha_{n+1}, \beta)$ tal que

$$F(\theta) = F(\alpha_{n+1}, \theta_1)$$

luego,

$$\begin{aligned} F(\theta) &= F(\alpha_{n+1}, \theta_1) \\ &= F(\theta_1)(\alpha_{n+1}) \\ &= F(\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta)(\alpha_{n+1}) \\ &= F(\alpha_1, ..., \alpha_{n+1}, \beta) \\ \Rightarrow F(\theta) &= F(\alpha_1, ..., \alpha_{n+1}, \beta) \end{aligned}$$

lo que prueba el caso $n+1$. ■

Corolario 4.3.3
Sea F un campo perfecto. Entonces, toda extensión E/F finita es simple.

Demostración:
Es inmediata. ■

Corolario 4.3.4
Si F es un campo de característica cero, entonces toda extensión E/F finita es simple.

Demostración:
Todo campo de característica cero es perfecto. ■

Ejemplo 4.3.1
Toda extensión $E/\mathbb{Q}$ finita es simple. En particular, $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})=\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$. En este caso, $\alpha_1=\sqrt{2}$ y $\beta=\sqrt{3}$ (en realidad da igual cual elijamos ya que cualquiera de estos dos elementos son separables sobre $\mathbb{Q}$ por ser este de característica cero). Así,

$$\alpha_1=\delta_1=\sqrt{2}\quad \text{y}\quad \delta_2=-\sqrt{2}$$

además,

$$\beta=\beta_1=\sqrt{3}\quad \text{y}\quad \beta_2=-\sqrt{3}$$

uno de los posibles $a\in\mathbb{Q}$ que nos sirven es $a=1$, ya que las ecuaciones que tenemos son:

$$\begin{cases} \sqrt{2}X+\sqrt{3} & =-\sqrt{2}X+\sqrt{3} \\ \sqrt{2}X+\sqrt{3} & =-\sqrt{2}X-\sqrt{3} \end{cases}$$

siendo $X=a=1$ el que hace que no se cumpla la ecuación. Luego es por ello que tomamos $\theta=1\cdot\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

Lema 4.3.1
Para $n\in\mathbb{N}$:

$$n=\sum_{d|n \text{ y } d\geq 1}\varphi(d)$$

donde φ es la función de Euler.

Demostración:
Ejercicio. ■

Lema 4.3.2
Sea G un grupo abeliano finito y multiplicativo tal que la ecuación $X^m=e$ tiene a lo más m soluciones en G. Entonces, G es grupo cíclico.

Demostración:
Ejercicio. ■

Proposición 4.3.6
Si F es un campo, entonces F^* es un grupo multiplicativo y cada subgrupo finito de F^* es cíclico.

Demostración:

Se sigue del lema anterior. ■

Teorema 4.3.2 (**Teorema del elemento primitivo**)

Toda extensión finita y separable de campos es simple.

Demostración:

Sea E/F una extensión finita y separable. Si F es un campo infinito, tenemos que E/F es f.g. con elementos separables y F finito. Por tanto, E/F es simple.

Si F es finito, E también es finito. Más aún,

$$|E| = n|F|$$

entonces, E^* es grupo multiplicativo abeliano y finito. Luego por una proposición anterior, es cíclico (visto como grup multiplicativo). Sea $\theta \in E^*$ tal que

$$\begin{aligned} E^* &= \langle \theta \rangle \\ &= \left\{ \theta^t \middle| t \in \mathbb{N} \right\} \end{aligned}$$

luego, $E = F(\theta)$. Así, la extensión E/F es simple.

■

Observación 4.3.6

El θ de la proposición anterior es llamado **elemento primitivo**.

Capítulo 5

Teoría de Galois Finita

5.1. Conceptos Fundamentales

Observación 5.1.1
Sea E/F una extensión de campos, $\alpha \in E$, $f(X) \in E[X]$ tal que $f(\alpha) = 0$ y $\varphi : \overline{F} \to \overline{F}$ es un F-homomorfismo. Entonces, $f(\varphi(\alpha)) = 0$

Demostración:
En efecto, notemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(0) \\ &= \varphi(f(\alpha)) \\ &= f^{\varphi}(\varphi(\alpha)) \\ &= f(\alpha) \end{aligned}$$

por ser φ un F-homomorfismo. ■

De esta observación anterior se deduce que todo F-homomorfismo manda raíces en raíces.

Observación 5.1.2
Sea F un campo, $f(X) \in F[X] \backslash F$. Supóngase que $\deg(f(X)) = n \geq 1$. Entonces, se tiene que en $\overline{F}$:

$$f(X) = \lambda(X - \alpha_n) \cdot ... \cdot (X - \alpha_n)$$

donde $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \overline{F}$ con $\lambda \in F$ el coefciente lider de $f(X)$. Luego, los coeficientes de $f(X)$ son los siguientes:

$$\begin{aligned} a_n &= \lambda \\ a_{n-1} &= -\lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \\ a_{n-2} &= \lambda \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \\ &\vdots \\ a_{n-k} &= (-1)^k \lambda \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_k} \end{aligned}$$

con $k \in [\![1, n]\!]$, donde $f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0$. Luego, si $\varphi : \overline{F} \to \overline{F}$ es un F-automorfismo (basta con que sea F-homomorfismo, pues la extensión $\overline{F}/F$ es normal y en extensiones normales todo F-homomorfismo es un F-automorfismo), entonces

$$\begin{aligned} f(X) &= f^{\varphi}(X) \\ &= \lambda(X-\varphi(\alpha_1))\cdot \ldots \cdot (X-\varphi(\alpha_n)) \\ &= \lambda(X-\alpha_1)\cdot \ldots \cdot (X-\alpha_n) \\ &= f(X) \end{aligned}$$

así que φ lo que hace es permutar las raíces de $f(X)$. En particular:

$$\{\varphi(\alpha_1), ..., \varphi(\alpha_n)\} = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$$

Observación 5.1.3
Sea $f(X) \in F[X]\backslash F$. $f(X)$ es separable si sus factores irreducibles son separables. Si $f(X)$ es irredicible, $f(X)$ es separable si y sólo si todas sus raíces son simples.

Observación 5.1.4
Si F es un campo tal que $\mathrm{car}(F) = 0$, entonces todo polinomio en $f[X]$ es separable.

Observación 5.1.5
Si F es campo tal que $\mathrm{car}(F) = p > 0$ y si $f(X) \in F[X]$ es irredicible, entonces $f(X) = \lambda(X-\alpha_1)^{p^e}\cdot \ldots \cdot (X-\alpha_t)^{p^e}$, donde $e \geq 0$ es el exponente de inseparabilidad de $f(X)$.

Observación 5.1.6
Una extensión E/F es separable si y sólo si todo elemento de $\alpha \in E$ es separable sobre F si y sólo si para todo $\alpha \in E$, $f(X) = \mathrm{irr}(\alpha, F, X)$ es separable.

Observación 5.1.7
La extensión E/F es normal si y sólo si E es el campo de descomposición de una familia de polinomios $\{f_i(X)\}_{i\in I}$ con coeficientes en F (es decir, que $E = F(S)$ donde S es la unión de los S_i con $i \in I$, siendo S_i el conjunto de raíces de $f_i(X)$ para todo $i \in I$).

Definición 5.1.1
Sea F un campo. Se tiene que $\mathrm{Aut}\,(E)$ es grupo con la composición. Si $G < \mathrm{Aut}\,(F)$, se define el **campo fijo de F por G** como:

$$F^G = \left\{\alpha \in F \middle| \sigma(\alpha) = \alpha, \quad \forall \sigma \in G\right\}$$

Observación 5.1.8
En las condiciones de la definición anterior, notemos que $\emptyset \neq F^G \subseteq F$. Más aún F^G es subcampo de F.

Demostración:
Sean $\alpha, \beta \in F^G$ y $\sigma \in G$, entonces:

$$\sigma(\alpha-\beta) = \sigma(\alpha) - \sigma(\beta) = \alpha - \beta$$

Además,

$$\sigma(\alpha\cdot\beta) = \sigma(\alpha)\cdot\sigma(\beta) = \alpha\cdot\beta$$

y,

$$1 = \sigma(1) = \sigma(\alpha\cdot\alpha^{-1}) = \sigma(\alpha)\cdot\sigma(\alpha^{-1}) = \alpha\cdot\sigma(\alpha^{-1})$$

por ende, $\sigma(\alpha^{-1}) = \alpha^{-1}$. Por ser $\sigma \in G$ arbitrario se sigue $\alpha-\beta, \alpha\cdot\beta, \alpha^{-1} \in F^G$ y, por ende, que F^G es subcampo de F. ■

Definición 5.1.2
Si E/F es una extensión de campos, entonces denotamos por

$$\mathrm{Aut}_F(E) = \left\{ \sigma \in \mathrm{Aut}(E) \middle| \sigma \text{ deja fijo a } F \right\}$$

Se tiene que $\mathrm{Aut}_F(E) < \mathrm{Aut}(E)$. Decimos que E/F es de **Galois** si E/F es normal y separable. Cuando esto ocurre, expresmos:

$$\mathrm{Gal}(E/F) = \mathrm{Aut}_F(E)$$

y es llamado el **grupo de Galois de** E/F.

Proposición 5.1.1
Sea E/F una extensión de campos y $G = \mathrm{Aut}_F(E)$. Entonces, $F \subseteq E^G \subsetneq E$ es una torre de campos y, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. E/F es de Galois.
2. E es el campo de descomposición sobre F de una familia de polinomios separables (también sobre F).
3. $E^G = F$.

Demostración:
Por definición de E^G ya se tiene que $F \subseteq E^G \subsetneq E$ es torre de campos.

Es claro que (1) $\iff$ (2).

(1) $\Rightarrow$ (3) : Suponga que E/F es de Galois. Notemos que se tiene la torre de campos

$$F \subseteq E^G \subseteq E$$

Sea $\alpha \in E^G$ con $f(X) = \mathrm{irr}(\alpha, F, X)$. Sea $\beta \in E$ un F-conjugado de α (es decir que son raíces del mismo polinomio $f(X)$). Entonces, $\beta \in E$. Sea $\varphi : F(\alpha) \to F(\beta)$ un F-isomorfismo tal que $\varphi(\alpha) = \beta$. Extendemos a φ a un F-homomorfismo $\sigma : E \to \overline{F}$ de E en $\overline{F}$. Por normalidad, esta extensión es un F-automorfismo de E, luego

$$\sigma \in G$$

así,

$$\beta = \varphi(\alpha) = \sigma(\alpha) = \alpha$$

pues, $\alpha \in E^G$. Puesto que E/F es separable, entonces $f(X) = X - \alpha \in F[X]$, luego $\alpha \in F$. Por tanto, $E^G = F$.

(3) $\Rightarrow$ (1): Suponga que $E^G = F$. Sea $\alpha \in E$ y $f(X) = \mathrm{irr}(\alpha, F, X)$. Definamos:

$$A = \left\{ \sigma(\alpha) \middle| \sigma \in G \right\}$$

A es un subconjunto de E no vacío. Notemos que A es un conjunto de raíces de $f(X)$ de E. Luego, A es finito. así:

$$|A| \leq \deg(f(X))$$

tomemos $m = |A|$ y

$$A = \{\sigma_1(\alpha), ..., \sigma_m(\alpha)\}$$

Sea $\theta \in G$. Tenemos que

$$|\{(\theta \circ \sigma_1)(\alpha), ..., (\theta \circ \sigma_m)(\alpha)\}| = m$$

(por ser biyección) con el conjunto de adentro tal que $\{(\theta \circ \sigma_1)(\alpha), ..., (\theta \circ \sigma_m)(\alpha)\} \subseteq A$, así

$$A = \{(\theta \circ \sigma_1)(\alpha), ..., (\theta \circ \sigma_m)(\alpha)\}$$

es decir que θ permuta a los elementos de A para todo $\theta \in G$. Definimos

$$g(X) = (X - \sigma_1(\alpha)) \cdot ... \cdot (X - \sigma_m(\alpha)) \in E[X]$$

Por lo anterior para cada $\theta \in G$,

$$g^\theta(X) = g(X)$$

por tanto, $g(X) \in E^G[X] = F[X]$ donde $g(\alpha) = 0$. Por tanto, $f(X) \mid g(X) \Rightarrow f(X)$ es separable sobre F y todas las raíces de $f(X)$ están en E (más aún, $g(X) = f(X)$). De esta forma se sigue E/F es normal y separable, es decir, de Galois. ■

Proposición 5.1.2
Sea E/F una extensión de campos y $G = \mathrm{Aut}_F(E)$. Si E/F es normal, entonces

1. E^G/F es puramente inseparable.
2. Si F_S es la cerradura separable de F en E, entonces $E^G F_S = E$ y $E^G \cap F_S = F$.
3. Si $\alpha \in E^G \backslash F$, entonces $\mathrm{car}(F) = p > 0$ y existe $t > 1$ tal que $\alpha^{p^t} \in F$.

Demostración:

■

Observación 5.1.9
En el caso de que E^G/F sea puramente inseparable y $\mathrm{car}(F) = 0$, entonces la extensión también sería separable. Por ende, la única forma en que suceda esto es que $E^G = F$.

Proposición 5.1.3
Sea E/F una extensión finita. Entonces,

1. $|\mathrm{Aut}_F(E)| \leq [E : F]$.
2. $|\mathrm{Aut}_F(E)| = [E : F]$ si y sólo si E/F es de Galois.

Demostración:
De (1): Ya se tiene que

$$|\mathrm{Aut}_F(E)| \leq [E : F]_S \leq [E : F]$$

pues $[E : F]_S$ es el número de F-homomorfismos de E en $\overline{F}$ que dejan fijo a F.

De (2): Veamos que

$$\begin{aligned} |\mathrm{Aut}_F(E)| = [E : F] &\iff |\mathrm{Aut}_F(E)| = [E : F]_S = [E : F] \\ &\iff |\mathrm{Aut}_F(E)| = [E : F]_S = [E : F] \\ &\iff E/F \text{ es normal y separable} \\ &\iff E/F \text{ es de Galois} \end{aligned}$$

pues, si $|\mathrm{Aut}_F(E)| = [E : F]_S$, entonces todo F-homomorfismo de E en $\overline{F}$ es un F-automorfimso de E. Y, si los dos índices coinciden se tiene que E/F es separable. ■

Proposición 5.1.4
Sea E/F una extensión separable tal que existe $n \in \mathbb{N}$ que cumple

$$\forall \alpha \in E, [F(\alpha), F] \leq n$$

Entonces, E/F es finita y $[E : F] \leq n$.

Demostración:
Sea $\beta \in E$ tal que

$$[F(\alpha) : F] \leq [F(\beta) : F], \quad \forall \alpha \in E$$

En particular, $[F(\beta) : F] \leq n$. Afirmamos que $E = F(\beta)$. En efecto, supóngase que $E \neq F(\beta)$. Sea $\alpha \in E$ tal que $\alpha \notin F(\beta)$, luego

$$F \subseteq F(\beta) \subsetneq F(\alpha, \beta) \subseteq E$$

es una torre de campos de tal manera que $E(\alpha, \beta)/F$ es separable y finita (por ser finitamente generada y ser algebraica). Por el teorema del elemento primitivo existe $\theta \in F(\alpha, \beta)$ tal que

$$F(\alpha, \beta) = F(\theta)$$

luego,

$$[F(\beta) : F] < [F(\theta) : F] \#_c$$

por la elección de $\beta \in E$. Por tanto, $F(\beta) = E$. Luego

$$[E : F] \leq n$$

donde E/F es finita. ■

Teorema 5.1.1 (Teorema de Artín)
Sea E un campo arbitrario y G un grupo finito de automorfismos de F. Entonces, E/E^G es una extensión de Galois finita tal que

$$\mathrm{Aut}_{E^G}(E) = G$$

y, $[E : E^G] = |G|$.

Demostración:
Sea $\alpha \in E$ y

$$A_\alpha = \left\{ \sigma(\alpha) \middle| \sigma \in G \right\} \subseteq E$$

Tenemos que $|A_\alpha| \leq |G| < \infty$. Si $m = |A_\alpha|$, expresamos

$$A_\alpha = \{\sigma_1(\alpha), ..., \sigma_m(\alpha)\}$$

Notemos que para todo $\theta \in G$:

$$\{\theta(\sigma_1(\alpha)), ..., \theta(\sigma_m(\theta))\} = A_\alpha$$

es decir, los elementos de G permitan a los elementos de A_α. Definimos

$$g(X) = (X - \sigma_1(\alpha)) \cdot ... \cdot (X - \sigma_m(\alpha)) \in E[X]$$

si $\theta \in G$, se tiene que

$$g^\theta(X) = g(X)$$

(por la observación anterior). Luego, $g(X) \in E^G[X]$. Si $f_\alpha(X) = \mathrm{irr}(\alpha, E^G, X)$, entonces $f_\alpha(X) \mid g(X)$ en $E^G[X]$. Luego, $f_\alpha(X)$ es separable (pues todas las raíces de $g(X)$ son simples) y todos los E^G conjugados de α pertenecen a E. Por lo tanto, E/E^G es normal y separable con

$$[E^G(\alpha) : E^G] = \deg(f_\alpha(X)) \leq m = |A_\alpha| \leq |G|$$

Por tanto, de la proposición anterior se sigue que

$$[E : E^G] \leq |G|$$

pues la extensioń E/E^G es de Galois finita. Además,

$$|\mathrm{Aut}_{E^G}(E)| = [E : E^G] \leq |G| \leq |\mathrm{Aut}_{E^G}(E)|$$

pues, $G \subseteq \mathrm{Aut}_{E^G}(E)$. Por tanto,

$$\mathrm{Aut}_{E^G}(E) = G$$

y, $[E : E^G] = |G|$. ■

Teorema 5.1.2 (**Teorema Fundamental de la Teoría de Galois finita**)
Sea E/F una extensión finita de Galois, con $G = \mathrm{Gal}(E/F)$. Entonces,

i. Si K es un campo intermedio de la extensión E/F, entonces E/K es de Galois, y si $H = \mathrm{Gal}(E/K)$ se tiene que $K = E^H$ y $[E : K] = |H|$.

ii. Si $H < G$ entonces E/E^H es de Galois con $\mathrm{Gal}\left(E/E^H\right) = H$ y $[E : E^H] = |H|$.

iii. Existe una biyección entre el conjunto de campo intermedios de la extensión E/F y el conjunto de subgrupos de G, a saber:

$$K \mapsto \mathrm{Gal}(E/K)$$

cuya inversa está dada por la correspondencia:

$$H \mapsto E^H$$

iv. Si K es un campo intermedio de la extensión E/F y $\sigma \in G$, entonces $\sigma(K)$ es un campo intermedio de la extensión E/F y $\mathrm{Gal}(E/\sigma(K)) = \sigma^{-1}\mathrm{Gal}(E/K)\,\sigma$ ($\sigma(K)$ es llamado el **conjugado de** K).

v. Sea K un campo intermedio de la extensión E/F. Entonces, K/F es de Galois si y sólo si $\mathrm{Gal}(E/K) \lhd G$. Si K/F es normal entonces la función

$$\begin{aligned} \psi : G &\to \mathrm{Gal}(K/F) \\ \sigma &\mapsto \sigma\big|_K \end{aligned}$$

es un epimorfismo tal que $\ker(\Psi) = \mathrm{Gal}(E/K)$, es decir

$$\mathrm{Gal}(E/F)/\mathrm{Gal}(E/K) = G/\mathrm{Gal}(E/K) \cong \mathrm{Gal}(K/F)$$

Demostración:
De (i) y (ii): Es inmediato del teorema de Artín y de un resultado anterior.

De (iii): Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de campos intermedios de la extensión E/F, y $\mathcal{G}$ el conjunto de subgrupos de G. Denotemos por

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{C} &\to \mathcal{G} \\ K &\mapsto \mathrm{Gal}(E/K) \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}\Psi : \mathcal{G} &\to \mathcal{C}\\ H &\mapsto E^H\end{aligned}$$

Tenemos que para cada $K \in \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned}\Psi \circ \Phi(K) &= \Psi(\Phi(K))\\ &= \Psi(\mathrm{Gal}\,(E/K))\\ &= E^{\mathrm{Gal}(E/K)}\\ &= K\\ &= 1_{\mathcal{C}}(K)\\ \therefore \Psi \circ \Phi &= 1_{\mathcal{C}}\end{aligned}$$

Por otro lado, sea $H \in \mathcal{G}$, entonces

$$\begin{aligned}\Phi \circ \Psi(H) &= \Phi(\Psi(H))\\ &= \Phi(E^H)\\ &= \mathrm{Gal}\left(E/E^H\right)\\ &= H\\ &= 1_{\mathcal{G}}(H)\\ \therefore \Phi \circ \Psi &= 1_{\mathcal{G}}\end{aligned}$$

luego Φ y Ψ son biyecciones siendo una la inversa de la otra.

De (iv): Sea K un campo intermedio de la extensión E/F y $\sigma \in G$. Entonces, es inmediato que $\sigma(K)$ es campo intermedio de la extensión E/F, pues

$$F = \sigma(F) \subseteq \sigma(K) \subseteq \sigma(E) = E$$

Luego, $E/\sigma(K)$ es de Galois. Probemos que:

$$\mathrm{Gal}\,(E/\sigma(K)) = \sigma \mathrm{Gal}\,(E/K)\,\sigma^{-1}$$

es decir, por (iii):

$$\begin{aligned}E^{\mathrm{Gal}(E/\sigma(K))} &= E^{\sigma \mathrm{Gal}(E/K)\sigma^{-1}}\\ \iff \sigma(K) &= E^{\sigma \mathrm{Gal}(E/K)\sigma^{-1}}\end{aligned}$$

Sea $\beta \in E$ y elegimos $\alpha \in E$ tal que $\beta = \sigma(\alpha)$ (por ser σ un F-automorfismo de E). Supóngase que $\beta \in \sigma(K)$, entonces $\alpha \in K$, y para cada $\theta \in \mathrm{Gal}\,(E/K)$ se tiene:

$$\begin{aligned}(\sigma \circ \theta \circ \sigma^{-1})(\beta) &= \sigma(\theta(\sigma^{-1}(\beta)))\\ &= \sigma(\theta(\alpha))\\ &= \sigma(\alpha)\\ &= \beta\end{aligned}$$

pues $\alpha \in K$ y θ deja fijo a K. Por tanto, $\beta \in E^{\sigma \mathrm{Gal}(E/K)\sigma^{-1}}$. Así.

$$\sigma(K) \subsetneq E^{\sigma \mathrm{Gal}(E/K)\sigma^{-1}}$$

Por otro lado, si $\beta \in E^{\sigma \mathrm{Gal}(E/K)\sigma^{-1}}$ entonces

$$\begin{aligned}\sigma \circ \theta \circ \sigma^{-1}(\beta) &= \beta, \quad \forall \theta \in \mathrm{Gal}\,(E/K)\\ \Rightarrow \sigma(\theta(\alpha)) &= \sigma(\alpha), \quad \forall \theta \in \mathrm{Gal}\,(E/K)\\ \Rightarrow \theta(\alpha) &= \alpha, \quad \forall \theta \in \mathrm{Gal}\,(E/K)\\ \Rightarrow \alpha \in E^{\mathrm{Gal}(E/K)} &= K\\ \Rightarrow \beta = \sigma(\alpha) &\in \sigma(K)\end{aligned}$$

por tanto, $E^{\sigma \mathrm{Gal}(E/K)\sigma^{-1}} \subseteq \sigma(K)$.

De ambas contenciones se sigue que

$$\sigma(K) = E^{\sigma \mathrm{Gal}(E/K)\sigma^{-1}}$$

es decir que

$$\mathrm{Gal}\,(E/\sigma(K)) = \sigma \mathrm{Gal}\,(E/K)\,\sigma^{-1}$$

De (v): Probaremos la doble implicación.

$\Rightarrow$) : Suponga que K/F es normal (es decir, que es de Galois pues es lo único que falta). Probaremos que para todo $\sigma \in G$:

$$\sigma \mathrm{Gal}\,(E/K)\,\sigma^{-1} = \mathrm{Gal}\,(E/K)$$

ya se sabe que

$$\sigma \mathrm{Gal}\,(E/K)\,\sigma^{-1} = \mathrm{Gal}\,(E/\sigma(K))\,, \quad \forall \sigma \in G$$

pero, como $\sigma\big|_K : K \to \overline{F}$ es un F-homomorfismo que deja fijo a F, se tiene que $\sigma\big|_K$ es un F-automorfismo de K en K (por ser K/F normal), luego se tiene que

$$\sigma \mathrm{Gal}\,(E/K)\,\sigma^{-1} = \mathrm{Gal}\,(E/K)\,, \quad \forall \sigma \in G$$

así, $\mathrm{Gal}\,(E/K) \lhd G$.

$\Leftarrow$) : Suponga que $\mathrm{Gal}\,(E/K) \lhd G$. Sea θ un F-homomorfismo de K en F. Probemos que $\theta(K) = K$, es decir que θ es un F-automorfismo de K. Para esto, extendemos θ a un F-automorfismo de E (pues E/F es de Galois, en particular normal) y la denotamos por σ. Se tiene que $\sigma \in G$ y,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Gal}\,(E/K) &= \sigma \mathrm{Gal}\,(E/K)\,\sigma^{-1} \\
&= \mathrm{Gal}\,(E/\sigma(K)) \\
\Rightarrow \Phi(K) &= \Phi(\sigma(K)) \\
\Rightarrow K &= \sigma(K) \\
\Rightarrow K &= \theta(K)
\end{aligned}$$

Por tanto, K/F es normal.

Por otro lado, supongamos que K/F es normal, y tomamos la función $\psi : G \to \mathrm{Gal}\,(K/F)$ tal que $\sigma \mapsto \sigma\big|_K$. Esta función está bien definida. Hay que verificar tres cosas:

- σ **es homomorfismo**: Sean $\sigma, \sigma_1 \in G$, entonces

$$\begin{aligned}
\psi(\sigma \circ \sigma_1) &= (\sigma \circ \sigma_1)\big|_K \\
&= (\sigma\big|_K) \circ (\sigma_1\big|_K), \text{ pues la extensión } K/F \text{ es normal} \\
&= \psi(\sigma) \circ \psi(\sigma_1)
\end{aligned}$$

- $\ker(\psi) = \mathrm{Gal}\,(E/K)$: Sea $\sigma \in G$. Veamos que

$$\begin{aligned}
\sigma \in \ker(\psi) &\iff \psi(\sigma) = 1_K \\
&\iff \sigma\big|_K = 1_K \\
&\iff \sigma(\alpha) = \alpha, \quad \forall \alpha \in K \\
&\iff \sigma \in \mathrm{Gal}\,(E/K) \\
\therefore \ker(\psi) &= \mathrm{Gal}\,(E/K)
\end{aligned}$$

- ψ **es epimorfismo**: Por supuesto,

$$\psi(G) < \mathrm{Gal}\,(K/F)$$

y debemos probar que son iguales. Sea $\theta \in \mathrm{Gal}\,(K/F)$, extendemos θ a un F-automorfismo de E digamos σ, se tiene que

$$\psi(\sigma) = \sigma\big|_K = \theta$$

luego, $\psi(\sigma) \in \psi(G)$. De forma inmediata se sigue la igualdad.

Por el P.T.I, ψ induce un isomorfismo $\overline{\psi} : G/\mathrm{Gal}\,(E/K) \to \mathrm{Gal}\,(K/F)$ tal que $\sigma\mathrm{Gal}\,(E/K) \mapsto \psi(\sigma) = \sigma\big|_K$. ■

Proposición 5.1.5
Sea E/F una extensión de Galois finita, y K, L campos intermedios de la extensión E/F. Denotemos por $H = \mathrm{Gal}\,(E/K)$ e $I = \mathrm{Gal}\,(E/L)$. Enotnces,

I. $K \subseteq L$ si y sólo si $I \subseteq K$.

II. $\mathrm{Gal}\,(E/KL) = I \cap H$.

III. $E^{\langle H \cup I \rangle} = E^H \cap E^I$.

Demostración:
De (i): Supóngase que $K \subseteq L$. is $\sigma \in I = \mathrm{Gal}\,(E/L)$ entonces $\sigma(\alpha) = \alpha$ para todo $\alpha \in L$ donde $K \subseteq L$, luego $\sigma(\alpha) = \alpha$ para todo $\alpha \in K$, es decir que $\sigma \in H = \mathrm{Gal}\,(e/k)$. Así, $I \subseteq H$.

Recíprocamente se tiene que $I \subseteq H$. Por demostrar que $E^H = K \subseteq L = E^I$. En efecto, sea $\alpha \in E^H$ entonces, $\sigma(\alpha) = \alpha$ para todo $\sigma \in H$, donde $I \subseteq H$,luego $\sigma(\alpha) = \alpha$ para todo $\sigma \in I$. Así, $\sigma \in E^I = L$. Por tanto, $K \subseteq L$.

De (ii): Debemos probar que $\mathrm{Gal}\,(E/KL) = \mathrm{Gal}\,(E/K) \cap \mathrm{Gal}\,(E/L)$. Si $\sigma \in \mathrm{Gal}\,(E/K) \cap \mathrm{Gal}\,(E/L)$ entonces $\sigma(\alpha) = \alpha$ para todo $\alpha \in K$ y que $\sigma(\beta) = \beta$ para todo $\beta \in L$. Luego $\sigma(\gamma) = \gamma$ para todo $\gamma \in KL$. Por tanto, $\sigma \in \mathrm{Gal}\,(E/KL)$. Así, $H \cap I \subseteq \mathrm{Gal}\,(E/KL)$.

La recíproca es inmediata pues $K, L \subseteq KL$. Se sigue entonces que

$$\mathrm{Gal}\,(E/KL) = H \cap I$$

De (iii): Si $\alpha \in E^{\langle H \cup I \rangle}$, luego $\sigma(\alpha) = \alpha$ para todo $\sigma \in \langle H \cup I \rangle$. En particular, $\sigma(\alpha) = \alpha$ para todo $\sigma \in I$ y $\theta(\alpha) = \alpha$ para todo $\theta \in I$. Por tanto, $\alpha \in E^H \cap E^I$. Se sigue entonces que $E^{\langle H \cup I \rangle} \subseteq E^H \cap E^I$.

Para la otra contención, si $\alpha \in E^H \cap E^I$ entonces $\sigma(\alpha) = \alpha$ para todo $\sigma \in H$ y $\theta(\alpha) = \alpha$ para todo $\theta \in I$. Recordemos ahora que

$$\langle H \cup I \rangle = \left\{ \gamma \in \mathrm{Gal}\,(E/F) \,\middle|\, \gamma = \gamma_1^{\epsilon_1} \circ \cdots \circ \gamma_t^{\epsilon_t} \text{ donde } \gamma_i \in H \cup I, \epsilon_i \in \{-1, 1\} \text{ con } t \in \mathbb{N} \right\}$$

Por tanto,

$$\gamma(\alpha) = \alpha, \quad \forall \gamma \in \langle H \cup I \rangle$$

Se sigue que

$$E^H \cap E^I \subseteq E^{\langle H \cup I \rangle}$$

Por la otra contención se sigue la igualdad. ■

Observación 5.1.10
Si E/F es una extensión de Galois finita con $G = \mathrm{Gal}(E/F)$, entonces $E^G = F$ y $E^{\langle e\rangle} = E$ (siendo e la identidad de G).

$$\begin{array}{ccccc} E & = & E^{\langle e\rangle} & \longleftarrow & \langle e\rangle \\ | & & & & \cap \\ L & = & E^I & \longleftarrow & I \\ | & & & & \cap \\ K & = & E^H & \longleftarrow & H \\ | & & & & \cap \\ F & = & E^G & \longleftarrow & G \end{array}$$

Proposición 5.1.6
Sean E/K y F/K extensiones de campos con E y F contenidos en un campo común L. Supóngase que la extensión E/K es de Galois finita, Entonces, las extensiones FE/F y $E/E\cap F$ son extensiones de Galois finitas cuyos grupos de Galois son isomorfos. En particular, se tiene que $[FE:F] \mid [E:K]$.

Demostración:
Observemos antes el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & L & & \\ & & \uparrow & & \\ & & FE & & \\ & \nearrow & & \nwarrow & \\ E & & & & F \\ & \nwarrow & & \nearrow & \\ & & E\cap F & & \\ & & \uparrow & & \\ & & K & & \end{array}$$

Es claro que las extensiones FE/F y $F/E\cap F$ son de Galois dinitas. Probemos que

$$\mathrm{Gal}(FE/F) \cong \mathrm{Gal}(E/E\cap F)$$

Sea $\varphi : \mathrm{Gal}(FE/F) \to \mathrm{Gal}(E/E\cap F)$ tal que $\sigma \mapsto \sigma\big|_E$. Es claro que σ está bien definida por ser la extensión $E/E\cap F$ normal y dado que deja fijo a los elementos de F, deja fijos a los de $E\cap F$. Es claro que φ es homomorfismo. Dado $\sigma \in \mathrm{Gal}(FE/F)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma \in \ker(\varphi) &\iff \varphi(\sigma) = e \\ &\iff \sigma\big|_E = 1_E \\ &\iff \sigma(\alpha) = \alpha, \quad \forall \alpha \in E \\ &\iff \sigma(\alpha) = \alpha, \quad \forall \alpha \in E \text{ pues } \sigma \text{ deja fijo a todo } F \\ &\iff \sigma = 1_{FE} \end{aligned}$$

por tanto, $\ker(\varphi) = \langle e\rangle$. Sea $H = \varphi(\mathrm{Gal}(FE/F)) < \mathrm{Gal}(E/E\cap F)$. Probaremos que $H = \mathrm{Gal}(E/E\cap F)$, es decir

$$E^H = E\cap F$$

Es claro que $E \cap F \subseteq E^H$. Sea $\alpha \in E^H \subseteq E$, entonces

$$\begin{aligned}
\theta(\alpha) &= \alpha, \quad \forall \theta \in H \\
\Rightarrow \exists \sigma \in \mathrm{Gal}\,(FE/F) \text{ tal que } \sigma\big|_E = \theta \text{ y } \sigma(\alpha) &= \alpha, \quad \forall \theta \in H \\
\Rightarrow \sigma(\alpha) &= \alpha, \quad \forall \sigma \in H \\
\Rightarrow \alpha \in FE^{\mathrm{Gal}(FE/F)} &= F \\
\Rightarrow \alpha &\in E \cap F
\end{aligned}$$

pues φ es una función inyectiva. Por tanto,

$$E^H \subseteq E \cap F$$

Se sigue que $E^H = E \cap F$. Así pues,

$$\mathrm{Gal}\,(FE/F) \overset{\varphi}{\cong} \mathrm{Gal}\,(E/E \cap F)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
[E:K] &= [E : E \cap F][E \cap F : K] \\
&= |\mathrm{Gal}\,(E/E \cap F)|\,[E \cap F : K] \\
&= |\mathrm{Gal}\,(FE/F)|\,[E \cap F : K] \\
&= [FE : F][E \cap F : K] \\
\Rightarrow [FE : F] &\;\big|\; [E : K]
\end{aligned}$$

■

Proposición 5.1.7
Sean E/K y F/K extensiones de Galois finitas contenidas en un campo común. Entonces, EF/K es una extensión de Galois finita, donde

$$\mathrm{Gal}\,(EF/K) \hookrightarrow \mathrm{Gal}\,(E/K) \times \mathrm{Gal}\,(F/K)$$

si $E \cap F = K$, entonces

$$\mathrm{Gal}\,(EF/K) \cong \mathrm{Gal}\,(E/K) \times \mathrm{Gal}\,(F/K)$$

Demostración:
Es claro que EF/K es de Galois finita. Definimos $\varphi : \mathrm{Gal}\,(EF/K) \to \mathrm{Gal}\,(E/K) \times \mathrm{Gal}\,(F/K)$ dada por:

$$\sigma \mapsto (\sigma\big|_E, \sigma\big|_F)$$

es claro que φ está bien definida (por ser las extensiones E/K y F/K son de Galois, en particular normales) y es homomorfismo. Sea $\sigma \in \mathrm{Gal}\,(EF/K)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\sigma \in \ker(\varphi) &\iff \varphi(\sigma) = e \\
&\iff (\sigma\big|_E, \sigma\big|_F) = (1_E, 1_F) \\
&\iff \sigma(\alpha) = \alpha, \quad \forall \alpha \in EF \\
&\iff \sigma = 1_{EF}
\end{aligned}$$

por tanto, $\ker(\varphi) = \langle e \rangle$. Por lo tanto, φ es monomorfismo.

Por otro lado, suponemos que $E \cap F = K$ y probemos que φ es isomorfismo. Sea $\sigma_1 \in \mathrm{Gal}\,(E/K) \cong \mathrm{Gal}\,(EF/F)$, con lo cual existe $\sigma \in \mathrm{Gal}\,(EF/F)$ tal que

$$\sigma\big|_E = \sigma_1 \quad \text{y} \quad \sigma\big|_F = 1_F$$

de manera similar, si $\sigma_2 \in \mathrm{Gal}\,(F/K) \cong \mathrm{Gal}\,(EF/E)$, existe $\theta \in \mathrm{Gal}\,(EF/E)$ tal que

$$\theta\big|_E = \sigma_2 \quad \text{y} \quad \sigma\big|_E = 1_E$$

Así que, si $(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathrm{Gal}\,(E/K) \times \mathrm{Gal}\,(F/K)$ se tiene que $\sigma, \theta \in \mathrm{Gal}\,(EF/K)$ y,

$$\begin{aligned}
\varphi(\sigma \circ \theta) &= \varphi(\sigma) \circ \varphi(\theta) \\
&= (\sigma\big|_E, \sigma\big|_F) \circ (\theta\big|_E, \theta\big|_F) \\
&= (\sigma_1, 1_F) \circ (1_E, \sigma_2) \\
&= (\sigma_1, \sigma_2)
\end{aligned}$$

así, φ es epimorfismo. Se sigue que $\mathrm{Gal}\,(EF/K) \overset{\varphi}{\cong} \mathrm{Gal}\,(E/K) \times \mathrm{Gal}\,(F/K)$. ■

Corolario 5.1.1
Sean E_i/K extensiones de Galois finitas con $i \in [\![1, n]\!]$ donde G_i es el grupo de Galois de la extensión E_i/K para todo $i \in [\![1, n]\!]$. Si para todo $j \in [\![2, n]\!]$ se tiene que

$$(E_1 \cdots E_{j-1}) \cap E_j = K$$

entonces, $E_1 \cdots E_j/K$ es una extensión de Galois finita tal que

$$\mathrm{Gal}\,(E_1 \cdots E_n/K) \cong G_1 \times \cdot \times G_n$$

Demostración:
La demostración es por inducción sobre n aplicando la proposición anterior. ■

Proposición 5.1.8
Sea E/K una extensión de Galois tal que el grupo de Galois de E/K se puede expresar como un producto directo de grupos de la forma $G_1 \times \cdot \times G_n$. Entonces, existen n extensiones de Galois finitas $E_1/K, ..., E_n/K$ tales que

$$\mathrm{Gal}\,(E_i/K) = G_i$$

y, para todo $j \in [\![2, n-1]\!]$:

$$(E_1 \cdots E_j) \cap E_j = K$$

y

$$E = E_1 \cdots E_n$$

Demostración:
Para cada $i \in [\![1, n]\!]$ tomemos:

$$H_i = G_1 \times \cdots \times G_{i-1} \times \langle e_i \rangle \times \cdots \times G_n$$

Se tiene que $H_i \lhd G_1 \times \cdots \times G_n$, y $E_i = E^{H_i}$. Tenemos que las extensiones E/E_i, y E_i/K son de Galois finitas tales que:

$$\mathrm{Gal}\,(E_i/K) \cong G/H_i \cong G_i$$

Además,

$$E_1 \cap E_2 = E^{H_1} \cap E^{H_2} = E^{\langle H_1 \cup H_2 \rangle} = E^G = K$$

con lo cual $\mathrm{Gal}\,(E_1E_2/K) \cong G_1 \times G_2$. También,

$$E_1E_2 \cap E_3 = E^{H_1}E^{H_2} \cap E^{H_3} = E^{H_1 \cap H_2} \cap E^{H_3} = E^{\langle H_1 \cap H_2, H_3 \rangle} = E^G = K$$

luego, $\mathrm{Gal}\,(E_1E_2E_3/K) \cong G_1 \times G_2 \times G_3$. Por inducción, tenemos que para todo $j \in [\![2, n]\!]$:

$$(E_1 \cdots E_{j-1}) \cap E_j = K$$

y, $E_1 \cdots E_j/K$ es de Galois tal que

$$\mathrm{Gal}\,(E_1 \cdots E_j/K) \cong G_1 \times \cdots \times G_j$$

En particular,

$$\mathrm{Gal}\,(E \cdots E_n/K) \cong G_1 \times \cdots \times G_n = \mathrm{Gal}\,(E/K)$$

es decir que $E = E \cdots E_n$. ■

Si tenemos una extensión E/F normal y finita, sabemos que al ser normal, E debe ser el campo de descomposición de una familia de polinomios con coeficientes en F. Al ser finita, debe ser una cantidad finita de polinomios, por lo que podemos tomar el producto de todos y al final se tiene que E es campo de descomposición de un polinomio.

Si más aún la extensión E/F es separable, entonces al ser normal y finita, debe tenerse f es separable, es decir que su descomposición en polinomos irreducibles sea tal que cada uno de éstos sea separable, esto es que tenga raíces simples.

Esto anterior motiva a la siguiente definición.

Definición 5.1.3
Sea F un campo y $f(X) \in F(X)\backslash F$. Denotamos por $\overline{F}$ la cerradura algebraica de F. Sean $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \overline{F}$ todas las raíces distintas de $f(X)$ y sea E el campo de descomposición de $f(X)$ sobre F, es decir

$$E = F(\alpha_1, ..., \alpha_m)$$

Así que, E/F es una extensión normal. Denotemos por

$$G = \mathrm{Aut}_F\,(E) = \mathrm{Aut}\,(E/F)$$

G es llamado el **grupo de automorfismos de** $f(X)$ **sobre** F y en ocasiones se denota por $G(f)$ ó G_f. Si $f(X)$ es separable, entonces decimos que G_f es el **grupo de Galois del polinomio** $f(X)$.

Definición 5.1.4
Sea $n \in \mathbb{N}$ y $G < S_n$ (siendo S_n el grupo simétrico de grado n). Decimos que G es **transitivo** si para todo $i, j \in [\![1, n]\!]$ existe $\sigma \in G$ tal que $\sigma(i) = j$.

Teorema 5.1.3
Sea F un campo, $f(X) \in F[X]\backslash F$, $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \overline{F}$ las raíces distintas de $f(X)$, $E = F(\alpha_1, ..., \alpha_m)$, $n = \deg(f)$ y $G = G_f = \mathrm{Aut}_F\,(E)$. Entonces:

I. G es isomorfo a un subgrupo de S_m para algún $m \in \mathbb{N}$.

II. Si $f(X)$ es irreducible y separable, entonces $n \;\big|\; |G|$ y G es isomorfo a un subgrupo transitivo del grupo simétrico S_n.

Demostración:
De (i): Consideremos $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \overline{F}$ las raíces distintas de $f(X)$. Si $\sigma \in G$ entonces σ permuta al conjunto $\{\alpha_1, ..., \alpha_m\}$, luego σ puede ser considerado como un elemento de S_m.

Definimos:

$$\begin{aligned} \Phi : G &\to S_m \\ \sigma &\mapsto \sigma\big|_{\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}} \end{aligned}$$

es claro que Φ es un homomorfismo. Sea $\sigma \in G$, entonces

$$\begin{aligned} \sigma \in \ker(\Phi) &\iff \Phi(\sigma) = e \\ &\iff \sigma\big|_{\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}} = id_{\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}} \\ &\iff \sigma(\alpha_i) = \alpha_i, \quad \forall i \in [\![1, m]\!] \\ &\iff \sigma(\beta) = \beta, \quad \forall \beta \in E \\ &\iff \sigma = id_E \end{aligned}$$

por tanto, $\ker(\Phi) = \langle e \rangle$. Así, $\Phi : G \to S_m$ es monomorfismo.

De (ii): Bajo estas condiciones la extensión E/F es de Galois (por ser normal y ser $f(X)$ separable) y finita (por ser algebraica y finitamente generada), donde

$$\mathrm{Gal}\,(E/F) = G = G_f$$

Además, $m = n$. Por (i) tenemos que G es isomorfo a un subgrupo de S_n, es decir $G \hookrightarrow S_n$. tal que $\sigma \mapsto \sigma\big|_{\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}}$.

Sea α una raíz de $f(X)$, entonces se tiene que $F(\alpha)$ es un campo intermedio de la extensión E/F con $[F(\alpha) : F] = \deg(\mathrm{irr}(\alpha, F, X)) = \deg(f(X)) = n$. Luego,

$$|G| = |\mathrm{Gal}\,(E/F)| = [E : F] = [E : F(\alpha)] \cdot [F(\alpha) : F] = n \cdot [E : F(\alpha)]$$

por tanto, $n \,\big|\, |G|$. Finalmente, sean α_i y α_j raíces de $f(X)$ ($i, j \in [\![1, n]\!]$). Notemos que por hipótesis, α_i y α_j son F-conjugados. Luego, existe un F-isomorfismo $\varphi : F(\alpha_i) \to F(\alpha_j)$ tal que $\varphi(\alpha_i) = \alpha_j$.

Extendemos φ a un F-homomorfismo σ de E en $\overline{F}$. Como E/F es normal, entonces σ es un F-automorfismo de E tal que $\sigma\big|_{\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}}(\alpha_i) = \sigma(\alpha_i) = \varphi(\alpha_i) = \alpha_j$.

Por tanto, G es transitivo. ■

Observación 5.1.11
Notemos que la función Φ no necesariamente es isomorfismo, ya que todo elemento $\sigma \in G$ sólo permuta a F-conjungados, y puede que $f(X)$ sea producto de polinomios irreducibles, luego no todas las raíces de $f(X)$ serán F-conjugadas.

Proposición 5.1.9
En las condiciones del teorema anterior, suponemos que $\deg(f(X)) = 2$ con $f(X)$ irreducible y separable de $F[X]$. Entonces $G \cong S_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Demostración:
Inmediata del teorema anterior. ■

Ejemplo 5.1.1
Considere un campo F y sea $f(X)$ el polinomio tal que $\deg(f(X)) = 2$. Se tienen dos casos:

I. $f(X) = \lambda(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)$. Se tienen dos casos.

  i) $\alpha_1 \in F$ implica que $\alpha_2 \in F$ (vea le desarrollo del producto en $f(X)$).

II. $f(X) = \lambda(X - \alpha)^2$. Notemos que

$$f(X) = \lambda X - 2\lambda\alpha X + \lambda\alpha^2$$

si $\text{car}(F) \neq 2$, forzosamente debe suceder que $\alpha \in F$. En cambio, si $\text{car}(F) = 2$, puede suceder que $\alpha \notin F$, pero debe suceder que $\alpha^2 \in F$, esto es que α sea puramente inseparable sobre F.

Observación 5.1.12
Recordemos que S_3 está generado por los elementos

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

es decir,

$$S_r = \left\langle \sigma, \pi \middle| |\sigma| = 2, |\pi| = 2, \pi\sigma = \sigma\pi^2 \right\rangle = \left\{ e, \sigma, \pi, \pi^2, \sigma\pi, \sigma\pi^2 \right\}$$

donde $|\sigma| = |\sigma\pi| = |\sigma\pi^2| = 2$ y $|\pi| = |\pi^2| = 3$, luego los cubgrupos de S_3 son:

$$\langle e \rangle, \langle \sigma \rangle, \langle \sigma\pi \rangle, \langle \sigma\pi^2 \rangle \text{ y } \langle \pi \rangle$$

Los primeros tres no pueden ser transitivos, el tercero ya que

$$\sigma\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

tampoco el cuarto, pues

$$\sigma\pi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

y para el quinto

$$\pi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

si es grupo transitivo, pues $\langle \pi \rangle = \{e, \pi, \pi^2\}$ (se verifica rápidamente).

Luego, los únicos subgrupos transitivos de S_3 son $\langle \pi \rangle$ y S_3.

Corolario 5.1.2
En las condiciones del teorema anterior, si $f(X)$ es un polinomio irreducible y separable de grado 3, entonces su grupo de automorfismos debe ser isomorfo a $\langle \pi \rangle$ o a S_3.

Demostración:
Inmediato de la observación anterior. ∎