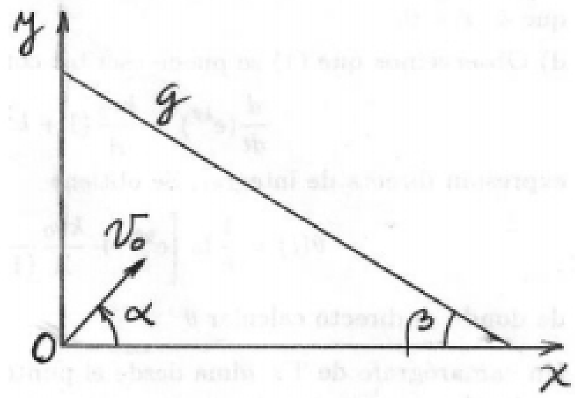
Lista 2.

1. Determine el ángulo α bajo el cual debe lanzarse desde el punto O un proyectil para que alcance la recta g en el menor tiempo posible.



R. $\alpha = (\pi/2) - \beta$

Sol.

Considere el lanzamiento del proyectil desde una posición inicial $\vec{r_0} = \vec{r}(0) = (0,0)$, a una velocidad inicial $\vec{v_0} = \vec{v}(0) = (v_0\cos\alpha, v_0 \operatorname{sen}\alpha)$. La posición $\vec{r}(t)$ del proyectil en un tiempo t se encuentra dada por:

$$\vec{r}(t) = \vec{r_0} + \vec{v_0}(t) + \frac{1}{2}t^2\vec{g}$$
$$= (v_0\cos\alpha\, t, v_0\operatorname{sen}\alpha\, t) + (0, -\tfrac{1}{2}t^2 g)$$

Donde $\vec{g} = (0,-g)$. La ecuación de la recta g en coordenadas paramétricas:

$$\vec{g}(x) = (x, -x\tan\beta + \operatorname{sen}\beta)$$

Queremos saber cuando $\vec{r}(t) = \vec{g}(x)$ para algún $t \geq 0$ y $x \in [0, \cos\beta]$. Esto es:

$$(v_0\cos\alpha\, t, v_0\operatorname{sen}\alpha\, t - \tfrac{1}{2}gt^2) = (x, -x\tan\beta + \operatorname{sen}\beta)$$

Entonces:

$$v_0\cos\alpha\, t = x \Rightarrow \dot{x} = v_0\cos\alpha$$

Para que llegue en el menor tiempo posible calculamos $\frac{\partial}{\partial t}(\vec{r} - \vec{g})$ e igualamos con cero:

$$\Rightarrow (v_0\cos\alpha - \dot{x}, v_0\operatorname{sen}\alpha - gt + \dot{x}\tan\beta) = (0,0)$$

$\Rightarrow \dot{x} = v_0\cos\alpha$, donde $\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t}$. Y

$$gt = v_0\operatorname{sen}\alpha + \dot{x}\tan\beta$$
$$= v_0\operatorname{sen}\alpha + v_0\cos\alpha\tan\beta$$
$$\Rightarrow t = \frac{v_0}{g}(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha\tan\beta)$$

Para que t sea mínimo, $\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha\tan\beta$ debe ser mínimo, lo cuál ocurre cuando:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha\tan\beta) = 0$$

$$\Rightarrow \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha\tan\beta = 0$$

$$\Rightarrow \tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha}$$

$$\Rightarrow \tan\beta\tan\alpha = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha}{\cos\beta\cos\alpha} = 1$$

$$\Rightarrow \cos\beta\cos\alpha - \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha = 0$$

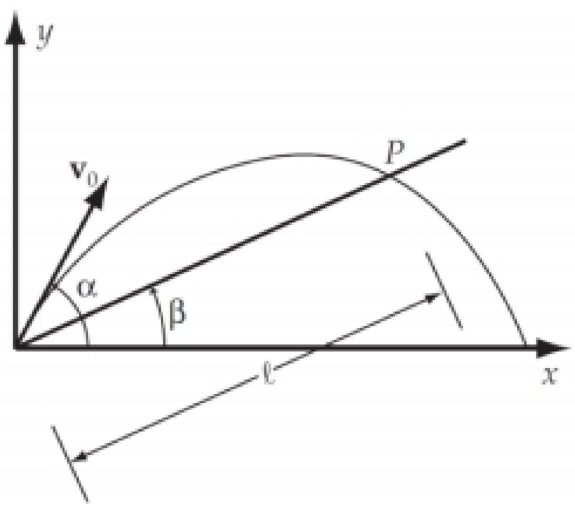
$$\Rightarrow \cos(\beta+\alpha) = 0$$

y, $\cos(\alpha+\beta) = 0$, con $0 \leq \alpha+\beta \leq \pi$, entonces $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$. Luego:

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta \;/\!/$$

$\square$

4. Se lanza un proyectil con una velocidad inicial v_o directamente sobre la ladera de una colina de pendiente β. Calcule el alcance ℓ del proyectil sobre la ladera en función del ángulo α y el máximo alcance.



R. $\ell = \frac{2v_o^2 cos\alpha\, sen(\alpha-\beta)}{g cos^2\beta}$ $\qquad \ell_{max} = \frac{v_o^2}{g(1+sen\beta)}$

MPQ

El vector posición $\vec{r}_p$ en función de t queda dado como:

$$\vec{r}_p(t) = \vec{r}_o + \vec{v}_o t + \frac{1}{2}t^2\vec{g}$$

donde $\vec{g} = (0,-g)$ y $\vec{v}_o = v_o(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$. Entonces con $\vec{r}_o = (0,0)$:

$$\vec{r}_p(t) = (v_o t\cos\alpha, v_o t\operatorname{sen}\alpha - \tfrac{1}{2}t^2 g)$$

La ecuación paramétrica que determina a la ladera es:

$$l(x) = (x, x\tan\beta),\ \forall\ x \in \mathbb{R}^+$$

Queremos $\vec{r_p}(t) = l(x)$, para algún $t \geq 0$ y $x \in \mathbb{R}^+$, i.e

$$(v_0 t\cos\alpha, v_0 t \operatorname{sen}\alpha - \tfrac{1}{2} g t^2) = (x, x\tan\beta)$$

$$\Rightarrow v_0 t\cos\alpha = x \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

Por lo cual:

$$v_0 \sin\alpha \left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right) - \frac{1}{2} g\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 = x\tan\beta$$

$$\Rightarrow x(\tan\alpha - \tan\beta) + x^2\left(-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\right) = 0$$

$\Rightarrow$ Como $x \neq 0$:

$$x\left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\right) = \tan\alpha - \tan\beta$$

$$\Rightarrow x = \frac{2v_0^2\cos^2\alpha}{g}(\tan\alpha - \tan\beta)$$

$$\Rightarrow l = \|\lambda(x)\| = \left(\frac{4v_0^4\cos^4\alpha}{g^2} + \frac{4v_0^4\cos^4\alpha}{g^2}\tan^2\beta\right)^{1/2}(\tan\alpha - \tan\beta)$$

$$= \frac{2v_0^2\cos^2\alpha}{g}\sec\beta\,(\tan\alpha - \tan\beta)$$

$$= \frac{2v_0^2}{g}\left(\frac{\cos^2\alpha\sin\alpha}{\cos\alpha\cos\beta} - \frac{\cos^2\alpha\sin\beta}{\cos^2\beta}\right)$$

$$= \frac{2v_0^2}{g}\left(\frac{\cos^2\alpha\sin\alpha\cos\beta - \cos^3\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos^2\beta}\right)$$

$$= \frac{2v_0^2}{g}\left(\frac{\cos^2\alpha\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos^2\beta}\right) = \frac{2v_0^2}{g}\cdot\frac{\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\beta}$$

Con α variando, l será máxima cuando:

$$\frac{\partial l}{\partial\alpha} = 0 \Rightarrow -\frac{2v_0^2}{g}\frac{\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\beta} + \frac{2v_0^2}{g}\cdot\frac{\cos\alpha\cdot\cos(\alpha-\beta)}{\cos^2\beta} = 0$$

$$\Rightarrow -\sin\alpha\sin(\alpha-\beta) + \cos\alpha\cos(\alpha-\beta) = 0$$

$$\Rightarrow \cos(2\alpha-\beta) = 0 \Rightarrow 2\alpha - \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}$$

Por tanto:

$$l = \frac{2v_0^2}{g}\frac{\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2})\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}-\frac{\beta}{2})}{\cos^2\beta} =$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\beta}{2} \text{ y } \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) - \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\right) \text{ y } \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\beta/2 - \sin\beta/2)$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(1 - \sin\beta)$$

$$\Rightarrow l = \frac{2v_0^2}{g}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1-\sin\beta}{\cos^2\beta}\right) = \frac{v_0^2}{g(1+\operatorname{sen}\beta)}$$

$$\therefore l = \frac{2v_0^2}{g}\frac{\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\beta} \quad y \quad l_{max} = \frac{v_0^2}{g(1+\operatorname{sen}\beta)} \;//$$

$\square$