

Capítulo 1

Anillos e Ideales

Muchos de los resultados que se usarán se han visto en el curso de Álgebra Moderna II, por lo que solo se incluirán resultados nuevos.

A lo largo de todo el documento, todo anillo será un anillo conmutativo con identidad.

1.1. Nilradical y Radical de Jacobson

Definición 1.1.1

Sea A un anillo. Un elemento $x \in A$ es llamado **nilpotente** si $x^n = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$

Observación 1.1.1

Todo elemento nilpotente es divisor de cero, sin embargo el converso no es cierto.

Proposición 1.1.1

El conjunto \mathfrak{N} de todos los elementos nilpotentes de un anillo A es un ideal, y el ideal cociente A/\mathfrak{N} no tiene elementos nilpotentes distintos de cero.

Demostración:

Veamos que \mathfrak{N} es un ideal.

(1) Sean $x, y \in \mathfrak{N}$, entonces existen $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $x^n = y^m = 0$. Por ende:

$$(x + y)^{n+m} = 0$$

pues, en el desarrollo binomial de esta expresión, todo término es de la forma $c_{(r,s)}x^ry^s$ con $c_{(r,s)} \in \mathbb{N}$ el cual además cumple que

$$r + s = n + m$$

con $r, s \in \llbracket 0, n + m \rrbracket$. Si $r < n$ entonces debe suceder que $s > m$, luego $y^s = 0$. Si $r > n$ se sigue que $x^r = 0$. En cualquier caso, todos los coeficientes de la forma $x^ry^s = 0$, lo cual prueba lo enunciado.

(2) Sea $x \in \mathfrak{N}$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n = 0$, entonces:

$$(ax)^n = a^n x^n = 0$$

por lo que $ax \in \mathfrak{N}$.

Por los dos incisos anteriores se sigue que \mathfrak{N} es un ideal de A . Sea $\mathfrak{N} + x \in A/\mathfrak{N}$ con $x \in A$ tal que

$$(\mathfrak{N} + x)^n = \mathfrak{N}$$

para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\mathfrak{N} + x^n = \mathfrak{N} \Rightarrow x^n \in \mathfrak{N}$$

luego existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(x^n)^k = 0$, esto es que $x \in \mathfrak{N}$, por lo que

$$\mathfrak{N} + x = \mathfrak{N}$$

■

Definición 1.1.2

El ideal de la proposición anterior es llamado el **nilradical de A** cuando se trabaje con varios anillos, será denotado por \mathfrak{N}_A .

Resulta que podemos caracterizar de otra manera al nilradical \mathfrak{N} :

Proposición 1.1.2

El nilradical \mathfrak{N} de A es la intersección de todos los ideales primos de A .

Demostración:

Sea \mathfrak{N}' la intersección de todos los ideales primos de A . Se tiene que este es un ideal de A .

- Si $x \in A$ es tal que $x \in \mathfrak{N}$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n = 0$. Como $0 \in \mathfrak{N}'$ y \mathfrak{N}' , entonces

$$x^n \in \mathfrak{p}$$

para todo ideal primo \mathfrak{p} de A , luego por inducción se tiene que $x \in \mathfrak{p}$, es decir que $x \in \mathfrak{N}'$.

- Sea $x \in A$ tal que $x \notin \mathfrak{N}$, probaremos que $x \notin \mathfrak{N}'$. Sea

$$\Sigma = \left\{ \mathfrak{a} \mid \mathfrak{a} \text{ es ideal de } A \text{ tal que } n \in \mathbb{N} \Rightarrow x^n \notin \mathfrak{a} \right\}$$

el conjunto Σ es no vacío, pues $\langle 0 \rangle \in \Sigma$. Sea \mathcal{C} una cadena de elementos de Σ . Como

$$\mathcal{C} = \{I_n\}_{n=1}^{\infty}$$

es tal que $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_m \subseteq \dots$, se sigue de una proposición que

$$I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

es un ideal de A , el cual debe estar en Σ . Por el Lema de Zorn, este conjunto tiene elementos maximales, digamos \mathfrak{p} . Es claro que $x^n \notin \mathfrak{p}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Veamos que \mathfrak{p} es primo.

En efecto, sean $y, z \notin \mathfrak{p}$, entonces los ideales

$$\mathfrak{p} + \langle y \rangle \text{ y } \mathfrak{p} + \langle z \rangle$$

son dos ideales de A que contienen propiamente a \mathfrak{p} , por lo que $x \in \mathfrak{p} + \langle y \rangle$ y $x \in \mathfrak{p} + \langle z \rangle$, luego existen $m, n \in \mathbb{N}$ tales que

$$x^n \in \mathfrak{p} + \langle y \rangle, \quad y \quad x^m \in \mathfrak{p} + \langle z \rangle$$

por ende,

$$x^{n+m} \in (\mathfrak{p} + \langle y \rangle)(\mathfrak{p} + \langle z \rangle) = \mathfrak{p} + \langle yz \rangle$$

por tanto, $\mathfrak{p} + \langle yz \rangle$ contiene propiamente a \mathfrak{p} , luego no puede estar en Σ , así que $yz \notin \mathfrak{p}$. Se sigue entonces que \mathfrak{p} es primo. Por tanto, $x \notin \mathfrak{N}'$.

Por los dos incisos anteriores se sigue que $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}'$.

■

Definición 1.1.3

Sea A un anillo, el **radical de Jacobson** \mathfrak{R} de A se define como la intersección de todos los ideales maximales de A . Cuando se trabaje con varios anillos, será denotado por \mathfrak{R}_A .

El radical de Jacobson (que claramente es un ideal), se caracteriza de la siguiente manera:

Proposición 1.1.3

Sea A un anillo. Entonces, $x \in \mathfrak{R}$ si y sólo si $1 - xy$ es una unidad en A para todo $y \in A$.

Demostración:

\Rightarrow) : Suponga que existe $y \in A$ tal que $1 - xy$ no es una unidad de A , entonces existe un ideal maximal que contiene a $1 - xy$, digamos \mathfrak{m} , pero $x \in \mathfrak{R}$, en particular $x \in \mathfrak{m}$ por lo que $xy \in \mathfrak{m}$ lo cual implica que $1 \in \mathfrak{m}$, lo cual no puede suceder pues \mathfrak{m} es ideal maximal.

\Leftarrow) : Suponga que existe un ideal maximal \mathfrak{m} tal que $x \notin \mathfrak{m}$. Entonces,

$$\mathfrak{m} + \langle x \rangle = \langle \mathfrak{m} + x \rangle = A = \langle 1 \rangle$$

es decir, existe $u \in \mathfrak{m}$ y $y \in A$ tales que

$$u + xy = 1$$

luego, $1 - xy$ no puede ser unidad de A . ■

Definición 1.1.4

Sea A anillo y \mathfrak{a} un ideal de A . Se define el **radical de \mathfrak{a}** como el conjunto

$$r(\mathfrak{a}) = \left\{ x \in A \mid x^n \in \mathfrak{a} \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \right\}$$

Proposición 1.1.4

Dado un anillo A un ideal \mathfrak{a} de A , se tiene que $r(\mathfrak{a})$ es un ideal de A .

Demostración:

Considere el homomorfismo natural $\pi : A \rightarrow A/\mathfrak{a}$, afirmamos que

$$r(A) = \pi^{-1}(\mathfrak{N}_{A/\mathfrak{a}})$$

donde $\mathfrak{N}_{A/\mathfrak{a}}$ es el nilradical de A/\mathfrak{a} . En efecto, veamos que: $x \in r(\mathfrak{a})$ si y sólo si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n \in \mathfrak{a}$, lo cual ocurre si y sólo si

$$(\mathfrak{a} + x)^n = \mathfrak{a} + x^n = \mathfrak{a}$$

si y sólo si $\mathfrak{a} + x$ es un elemento nilpotente de A/\mathfrak{a} , si y sólo si $\mathfrak{a} + x \in \mathfrak{N}_{A/\mathfrak{a}}$, si y sólo si $x \in \pi^{-1}(\mathfrak{N}_{A/\mathfrak{a}})$.

Lo anterior prueba la igualdad. ■

Ejercicio 1.1.1

Sea A un anillo y $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ideales de A . Se cumple lo siguiente:

- (1) $\mathfrak{a} \subseteq r(\mathfrak{a})$.
- (2) $r(r(\mathfrak{a})) = r(\mathfrak{a})$.
- (3) $r(\mathfrak{ab}) = r(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = r(\mathfrak{a}) \cap r(\mathfrak{b})$.
- (4) $r(\mathfrak{a}) = \langle 1 \rangle$ si y sólo si $\mathfrak{a} = \langle 1 \rangle$.
- (5) $r(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = r(r(\mathfrak{a}) + r(\mathfrak{b}))$.

(6) Si \mathfrak{p} es un ideal primo de A , entonces $r(\mathfrak{p}^n) = \mathfrak{p}$ para todo $n > 0$.

Demostración:

De (1): Tomemos $x \in \mathfrak{a}$, entonces $x^1 \in \mathfrak{a}$, así que $x \in r(\mathfrak{a})$.

De (2): Por el inciso anterior ya se tiene que $r(r(\mathfrak{a})) \subseteq r(\mathfrak{a})$. Ahora, si $x \in r(\mathfrak{a})$, entonces existe $1 \in \mathbb{N}$ tal que $x^1 \in r(\mathfrak{a})$, así que $x \in r(r(\mathfrak{a}))$. Se sigue así la igualdad.

De (3): Haremos la demostración por partes:

- Primero, probaremos que $r(\mathfrak{ab}) = r(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$. En efecto, sea $x \in r(\mathfrak{ab})$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$x^n \in \mathfrak{ab}$$

Por ser \mathfrak{a} y \mathfrak{b} ideales, se sigue que $x^n \in \mathfrak{a}$ y $x^n \in \mathfrak{b}$, por lo cual $x \in r(\mathfrak{a}) \cap r(\mathfrak{b})$ y $x \in r(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$.

- Si $x \in r(\mathfrak{a}) \cap r(\mathfrak{b})$, entonces existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $x^n \in \mathfrak{a}$ y $x^m \in \mathfrak{b}$, luego $x^{nm} \in \mathfrak{ab}$, lo cual implica que $x \in r(\mathfrak{ab})$.

Si $x \in r(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, así que $x^{2n} \in \mathfrak{ab}$, esto es que $x \in r(\mathfrak{ab})$.

Por ambos casos se sigue la doble igualdad.

De (6): Sea \mathfrak{p} un ideal primo de A . Procederemos por inducción sobre n .

- Por (1) se tiene que $\mathfrak{p} \subseteq r(\mathfrak{p})$. Sea $x \in r(\mathfrak{p})$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x^m \in \mathfrak{p}$. Esto implica que $x \in \mathfrak{p}$ (tal hecho se verifica usando inducción). De esta forma se sigue la igualdad.
- Supongamos que lo anterior se cumple para algún $n \in \mathbb{N}$. Sea $x \in r(\mathfrak{p}^{n+1})$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x^m \in \mathfrak{p}^{n+1} \subseteq \mathfrak{p}$, así que $x \in \mathfrak{p}$.

De ambos incisos se sigue la igualdad. ■

Observación 1.1.2

Si I y J son ideales, entonces IJ es un ideal, siendo este último definido por:

$$IJ = \left\{ \sum_{k=1}^n i_k j_k \mid i_k \in I \text{ and } j_k \in J, \forall k \in [1, n]; n \in \mathbb{N} \right\}$$

Proposición 1.1.5

El radical de un ideal \mathfrak{a} es la intersección de todos ideales primos que contienen a \mathfrak{a} .

Demostración:

Consideremos el anillo A/\mathfrak{a} . El nilradical \mathfrak{N} de A/\mathfrak{a} es la intersección de todos los ideales primos de A/\mathfrak{a} . Ahora, por el teorema de correspondencia, para cada ideal primo \mathfrak{p} de A/\mathfrak{a} existe un único ideal primo P en A tal que $\mathfrak{a} \subseteq P$.

Afirmamos que:

$$\mathfrak{N} = r(\mathfrak{a})/\mathfrak{a}$$

En efecto, sea $\mathfrak{a} + x \in \mathfrak{N}$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{a} + x^n = \mathfrak{a}$, esto es que $x^n \in r(\mathfrak{a})$.

Si $\mathfrak{a} + x \in r(\mathfrak{a})/\mathfrak{a}$, entonces $x \in r(\mathfrak{a})$, luego existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n \in \mathfrak{a}$, esto es que $\mathfrak{a} + x^n = \mathfrak{a}$, luego $\mathfrak{a} + x^n = \mathfrak{a}$, es decir que $\mathfrak{a} + x \in \mathfrak{N}$. Se sigue así la contención. ■

1.2. Ideales Primos

Sean A un anillo y $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$ ideales de A . Se define el homomorfismo:

$$\phi : A \rightarrow \prod_{i=1}^n (A/\mathfrak{a}_i)$$

Dado por: $\phi(x) = (x + \mathfrak{a}_1, \dots, x + \mathfrak{a}_n)$.

Proposición 1.2.1

Sean A un ideal y $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$ ideales de A . Entonces:
