Teorema de Cantor-Bernstein.

Sean X y Y conjuntos. Entonces $X \sim Y$ si y sólo si $X \sim Y_1$, $Y_1 \subset Y$ y $Y \sim X_1$, $X_1 \subset X$.

Dem:

$\Rightarrow$) $X \sim Y \Rightarrow X \sim Y$, $Y \subset Y$ y $Y \sim X$, $X \subset X$.

$\Leftarrow$) Suponga que $X \sim Y_1$, $Y_1 \subset Y$ y $Y \sim X_1$, $X_1 \subset X$. Entonces $\exists\, f_1 : X \to Y_1$ y $g: Y \to X_1$ funciones biyectivas. Sean $f: X \to Y$ y $g: Y \to X$, tales que $f(x) = f_1(x)$ $\forall\, x \in X$ y $g(y) = g_1(y)$ $\forall\, y \in Y$.

Claramente f y g son inyectivas y, además:

$$f(X) = Y_1 \quad y \quad g(Y) = X_1$$

Por ser f y g inyectivas, $g \circ f : X \to X$ y $f \circ g : Y \to Y$ también lo son. Sean X_2 y Y_2 dados por:

$$X_2 = g \circ f(X), \quad Y_2 = f \circ g(Y)$$

$$\Rightarrow X_2 = g(Y_1) \subset g(Y) = X_1, \quad Y_2 = f(X_1) \subset f(X) = Y_1$$

en general, para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, defina

$$X_n = g \circ f(X_{n-2}) \quad y \quad Y_n = f \circ g(Y_{n-2})$$

Probaremos que $X_n \subset X_{n-1} \subset X_{n-2}$ (resp. con Y). Procediendo por inducción sobre n.

- Para $n = 3$ se cumple, pues:

$$X_3 = g \circ f(X_1) = g(Y_2) \subset g(Y_1) = X_2$$
$$Y_3 = f \circ g(Y_1) = f(X_2) \subset f(X_1) = Y_2$$

por tanto, $X_3 \subset X_2 \subset X_1$ y $Y_3 \subset Y_2 \subset Y_1$.

- Suponga el resultado válido para $n = K$ ($K \geq 3$).
- Probaremos que se cumple para $n = K+1$. En efecto, sean:

$$X_{K+1} = g \circ f(X_{K-1}), \quad Y_{K+1} = f \circ g(Y_{K-1})$$

Claro que:

$$\overline{X}_{K+1} = g(\overline{Y}_K) \subset g(\overline{Y}_{K-1}) = \overline{X}_K$$
$$\overline{Y}_{K+1} = f(\overline{X}_K) \subset f(\overline{X}_{K-1}) = \overline{Y}_K$$

por tanto: $\overline{X}_{K+1} \subset \overline{X}_K \subset \overline{X}_{K-1}$ (al igual con $\overline{Y}$).

Aplicando el resultado, se cumple $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Lo anterior muestra que

$$\overline{X}_{2n+1} \subset \overline{X}_{2n} \subset \dots \subset \overline{X}_2 \subset \overline{X}_1 \subset \overline{X}_0 = \overline{X}$$
$$\text{y} \quad \overline{Y}_{2n+1} \subset \overline{Y}_{2n} \subset \dots \subset \overline{Y}_2 \subset \overline{Y}_1 \subset \overline{Y}_0 = \overline{Y}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Probaremos que $X_{2n} \sim \dots \sim \overline{X}_2 \sim \overline{X}_0$ y $\overline{X}_{2n+1} \sim \dots \sim \overline{X}_3 \sim \overline{X}_1$ (al igual con $\overline{Y}$) $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Procederemos por inducción sobre n:

- $n=1$. $\overline{X}_3 \sim \overline{X}_1$. En efecto. Sea $h_1 : \overline{X}_1 \to \overline{X}_3$, $h(x) = g \circ f(x)$ $\forall\, x \in \overline{X}_1$. h es biyección, en efecto, $g \circ f$ es inyectiva (luego, h lo es). Sea ahora $x' \in \overline{X}_3$. Como $g|_{\overline{Y}_2} : \overline{Y}_2 \to \overline{X}_3$ es biyectiva, $\exists\, u \in \overline{Y}_2$ tal que $g|_{\overline{Y}_2}(u) = x'$. Como $f|_{\overline{X}_1} : \overline{X}_1 \to \overline{Y}_2$ es biyectiva, $\exists\, z \in \overline{X}_1$ tal que $f|_{\overline{X}_2}(z) = u$. Luego, $\exists\, z \in \overline{X}_1$ tal que $g \circ f(z) = x'$.

  Por lo anterior, h es biyección (para mostrar que $\overline{X}_2 \sim \overline{X}_1$, se hace un proceso análogo), así: $\overline{X}_3 \sim \overline{X}_1$.
- Suponga que el resultado se cumple para $n = K$.
- Probaremos que se cumple para $n = K+1$.

Def. Sean X y Y dos conjuntos. Se dice que
$$\text{Card}\, X \leqslant \text{Card}\, Y$$
si X es equipotente a un subconjunto de Y.

Proposición aux. 2.

"$\leqslant$" es un orden total en ¿?, X un conjunto arbitrario.

Dem:

i) Sea $A \in \mathcal{P}(X)$. Como $A \sim A \subset A$, entonces $\text{Card}\, A \leqslant \text{Card}\, A$.

ii) Sean $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$ tales que $\text{Card}\, A \leqslant \text{Card}\, B$ y $\text{Card}\, B \leqslant \text{Card}\, C$. Entonces $\exists\, f: A \to B_1$, $B_1 \subset B$ y $g: B \to C_1$, $C_1 \subset C$, funciones biyectivas. Sea $g|_{B_1}: B_1 \to C_2 = g(B_1)$, $g|_{B_1}(x) = g(x)$ $\forall x \in B_1$. $g|_{B_1}$ es biyección, por tanto: $g|_{B_1} \circ f : A \to C_2$ es biyección, como $C_2 \subset C_1 \subset C$, entonces $\text{Card}\, A \leqslant \text{Card}\, C$.

iii) Sean $A, B \in \mathcal{P}(X)$ tales que $\text{Card}\, A \leqslant \text{Card}\, B$ y $\text{Card}\, B \leqslant \text{Card}\, A$. Por el teorema de Cantor-Bernstein, $A \sim B$, así $\text{Card}\, A = \text{Card}\, B$.

iv) Sean $A, B \in \mathcal{P}(X)$. Por una prop. anterior, $\text{Card}\, A \leqslant \text{Card}\, B$ o $\text{Card}\, B \leqslant \text{Card}\, A$.

Por i), ii), iii) y iv), $\leqslant$ es un orden total.

q.e.d.

Proposición.

Sean X y Y conjuntos no vacíos. Entonces:

i) $\text{Card}\, X \leqslant \text{Card}\, Y \iff \exists$ una función inyectiva de X en Y.

ii) $\text{Card}\, X \leqslant \text{Card}\, Y \iff \exists$ una función suprayectiva de Y sobre X.

Dem:

De i):

$\Rightarrow$) Suponga que $\text{Card}\, X \leqslant \text{Card}\, Y$, entonces $X \sim Y_1$, $Y_1 \subset Y$, luego, $\exists\, f: X \to Y_1$

biyectiva. Sea $g: \underline{X} \to \underline{Y}$, $g(x) = f(x)$ $\forall\, x \in \underline{X}$. Claramente g es inyectiva, como se deseaba.

$\Leftarrow$) Suponga que $\exists\, f: \underline{X} \to \underline{Y}$ inyectiva. Sea $g: \underline{X} \to f(\underline{X})$, $g(x) = f(x)$ $\forall x \in \underline{X}$. Claramente g es biyectiva (pues f es inyectiva, y al tomar la restricción del dominio, g se hace suprayectiva). Luego, como $f(\underline{X}) \subset \underline{Y}$, se tiene que $\mathrm{Card}\,\underline{X} \leqslant \mathrm{Card}\,\underline{Y}$ (pues $\underline{X} \sim f(\underline{X})$).

De ii):

$\Rightarrow$) Suponga que $\mathrm{Card}\,\underline{X} \leqslant \mathrm{Card}\,\underline{Y}$. Por i) $\exists\, f: \underline{X} \to \underline{Y}$ inyectiva. Sea $g: \underline{X} \to f(\underline{X})$ $g(x) = f(x)$ $\forall x \in \underline{X}$. Claramente g es biyectiva, por tanto, $g^{-1}: f(\underline{X}) \to \underline{X}$ está bien definida. Sea $x_0 \in \underline{X}$. Tome $h: \underline{Y} \to \underline{X}$ como sigue:

$$h(y) := \begin{cases} g^{-1}(y) & \text{si } y \in f(\underline{X}) \\ x_0 & \text{si } y \notin f(\underline{X}) \end{cases}$$

h es suprayectiva. En efecto, sea $x \in \underline{X}$. Como g^{-1} es biyectiva, $\exists\, y_0 \in f(\underline{X})$ tal que $g^{-1}(y_0) = x$, esto es $h(y_0) = x$ (pues $y_0 \in f(\underline{X})$).

$\Leftarrow$) Suponga que $\exists\, f: \underline{Y} \to \underline{X}$ suprayectiva. Como $\underline{Y} = \bigcup_{x \in \underline{X}} f^{-1}(\{x\})$, donde $\forall\, x \in \underline{X}$, $f(\{x\})$ es disjunto a $f(\{x_0\})$ $\forall\, x_0 \in \underline{X}$, $x \neq x_0$ y no vacío (son disjuntos, pues de otra forma f no sería función, y son no vacíos, pues f es suprayectiva).

De esta forma, $\forall x \in \underline{X}$, tome $y_x \in f(\{x\})$ y defina $g: \underline{X} \to \underline{Y}$, $g(x) = y_x$ $\forall\, x \in \underline{X}$. Como $y_{x'} \neq y_x$ $\forall\, x, x' \in \underline{X}$, $x \neq x'$, entonces g es inyectiva. Así, usando i) se sigue que $\mathrm{Card}\,\underline{X} \leqslant \mathrm{Card}\,\underline{Y}$.

q.e.d.

Ejemplos:

1) $\mathbb{Q}$ es numerable.

En efecto, como $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ y $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, entonces $\mathrm{Card}\,\mathbb{N} \leqslant \mathrm{Card}\,\mathbb{Q}$. Para probar que $\operatorname{Card}\mathbb{Q} \leq \operatorname{Card}\mathbb{N}$, basta con encontrar $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ suprayectiva.

Sea esa f dada por:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & \vdots & & & & & \\
\cdots & -\frac{2}{4} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{2} & -\frac{2}{1} & & & & & \\
\cdots & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{1} = f(-1) & & & & & \\
 & & & & & 0 = f(0) & & & & \\
 & & & & & & \frac{1}{1} = f(1) \to & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} \to & \frac{4}{1} \quad \cdots \\
 & & & & & & \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} \quad \cdots \\
 & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

vemos que f es suprayectiva, luego $\operatorname{Card}\mathbb{Q} \leq \operatorname{Card}\mathbb{Z} = \operatorname{Card}\mathbb{N}$. Por tanto, $\operatorname{Card}\mathbb{Q} = \operatorname{Card}\mathbb{N} \Leftrightarrow \mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$.

Lema:

Un conjunto $\overline{X}$ no vacío es a lo sumo numerable si y sólo si existe una función suprayectiva de $\mathbb{N}$ sobre $\overline{X}$.

Dem:

$\Rightarrow$) Sea $\overline{X}$ un conjunto no vacío a lo sumo numerable.

- Si $\overline{X}$ es finito, entonces $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{X} \sim J_n$, entonces $\exists\, f: J_n \to \overline{X}$ biyectiva. Sea $g: \mathbb{N} \to \overline{X}$ y $x_0 \in \overline{X}$, g dada como sigue:

$$g(m) := \begin{cases} f(m) & \text{si } m \leq n \\ x_0 & \text{si } n < m \end{cases}$$

claramente g es biyectiva, con lo que se cumple la aseveración.

- Si $\overline{X}$ es numerable, entonces $\overline{X} \sim \mathbb{N}$, así, $\exists\, f: \mathbb{N} \to \overline{X}$ biyectiva, en particular, suprayectiva, por tanto, se cumple la aseveración.

$\Leftarrow$) Suponga que $\exists\, f: \mathbb{N} \to \overline{X}$ suprayectiva. Por la prop. anterior, $\operatorname{Card}\overline{X} \leq \operatorname{Card}\mathbb{N}$, así, $\overline{X}$, al ser no vacío, o $\overline{X} \sim \mathbb{N}$ (numerable), ó $\operatorname{Card}\overline{X} < \operatorname{Card}\mathbb{N}$ ($\overline{X}$ es finito).

q.e.d.

En el caso de la proposición anterior, si $x:\mathbb{N}\to\bar{X}$ es tal función, y $x_n = x(n)$ $\forall\, n\in\mathbb{N}$, entonces $\bar{X}$ puede ser escrito en la forma:

$$\bar{X} = \{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$$