Ejercicios Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

5 de marzo de 2024

Índice general

1. Espacios Hilbertianos **2**
1.1. Ejercicios 2

Capítulo 1

Espacios Hilbertianos

1.1. Ejercicios

Ejercicio 1.1.1
Pruebe lo siguiente:

I. Sean H, H' espacios hilbertianos y sea T una aplicación lineal continua de H en H'. **Demuestre** que existe una única aplicación lineal $\widetilde{T} : H' \to H$ tal que

$$\left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'}\right) = \left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right), \quad \forall\vec{x} \in H \text{ y } \forall\vec{x'} \in H'$$

Pruebe también que $\widetilde{T}$ es continua, $\widetilde{\widetilde{T}} = T$ y $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$. El operador $\widetilde{T}$ se llama la **adjunta de** T.

II. **Demuestre** las reglas:

$$\widetilde{T_1 + T_2} = \widetilde{T}_1 + \widetilde{T}_2 \quad \text{y} \quad \widetilde{\alpha T} = \overline{\alpha}\widetilde{T}$$

III. Sea H'' un tercer espacio hilbertiano. Sean T una aplicación lineal continua de H en H' y U una aplicación lineal continua de H' en H''. **Pruebe** que:

$$\widetilde{U \circ T} = \widetilde{T} \circ \widetilde{U}$$

Demostración:
De (i): Se probarán dos cosas:

- **Unicidad**. Suponga que existen $S, W : H' \to H$ tales que:

$$\left(\vec{x}\middle|S\vec{x'}\right) = \left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) \quad \text{y} \quad \left(\vec{x}\middle|W\vec{x'}\right) = \left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right), \quad \forall\vec{x} \text{ y } \vec{x'} \in H'$$

entonces, se tiene que para $\vec{x'} \in H'$ fijo:

$$\begin{aligned} \left(\vec{x}\middle|S\vec{x'}\right) &= \left(\vec{x}\middle|W\vec{x'}\right) \\ \Rightarrow \left(\vec{x}\middle|S\vec{x'}\right) - \left(\vec{x}\middle|W\vec{x'}\right) &= 0 \\ \Rightarrow \left(\vec{x}\middle|S\vec{x'} - W\vec{x'}\right) &= 0 \forall\vec{x} \in H \end{aligned} \tag{1.1}$$

Por tanto, $S\vec{x'} = W\vec{x'}$. Como el $\vec{x'} \in H'$ fue arbitrario, se sigue que $S = W$.

- **Existencia**. Para cada $\vec{x'} \in H'$, sea $L_{\vec{x'}} : H \to \mathbb{K}$ definida como sigue:

$$L_{\vec{x'}}(\vec{x}) = \left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right)$$

Afirmamos que $L_{\vec{x'}}$ es lineal continuo. En efecto, si $\vec{x}, \vec{y} \in H$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} L_{\vec{x'}}(\vec{x} + \alpha\vec{y}) &= \left(T(\vec{x} + \alpha\vec{y})\middle|\vec{x'}\right) \\ &= \left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) + \alpha\left(T\vec{y}\middle|\vec{x'}\right) \\ &= L_{\vec{x'}}(\vec{x}) + \alpha L_{\vec{x'}}(\vec{y}) \end{aligned}$$

luego es lineal, y es continuo ya que

$$\begin{aligned} \left|L_{\vec{x}}(\vec{x'})\right| &= \left|\left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right)\right| \\ &\leq \|T\vec{x}\|\|\vec{x'}\| \\ &\leq (\|T\|\|\vec{x'}\|)\|\vec{x}\| \end{aligned}$$

donde la primera desigualdad es por Cauchy-Schwarts, y la segunda es por el hecho de que T es un funcional lineal continuo. Por tanto: $\|L_{\vec{x'}}\| \leq \|T\|\|\vec{x'}\|$. Luego, $L_{\vec{x'}}$ es lineal continuo, i.e. $L_{\vec{x'}} \in H^*$.

Por el teorema de Riesz, como la aplicación $G : H \to H^*$ es suprayectiva, para $\vec{x'} \in H'$ existe $\widetilde{T}\vec{x'} \in H$ tal que $L_{\vec{x'}} = G_{\widetilde{T}\vec{x'}}$, es decir que:

$$L_{\vec{x'}}\vec{x} = \left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'}\right) = G_{\widetilde{T}\vec{x'}}\vec{x}, \quad \forall \vec{x} \in H$$

Afirmamos que la aplicación $\widetilde{T} : H' \to H$ está bien definida y es lineal. En efecto, si $\widetilde{T}\vec{x'_1}, \widetilde{T}\vec{x'_2} \in H$ son tales que $L_{\vec{x'}} = G_{\widetilde{T}\vec{x'_1}}$ y $L_{\vec{x}} = G_{\widetilde{T}\vec{x'_1}}$, entonces:

$$\left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'_1}\right) \quad \text{y} \quad \left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'_2}\right), \quad \forall \vec{x} \in H$$

entonces:

$$\begin{aligned} \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'_1}\right) &= \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'_2}\right), \quad \forall \vec{x} \in H \\ \Rightarrow \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'_1} - \widetilde{T}\vec{x'_2}\right) &= 0 \quad \forall \vec{x} \in H \\ \Rightarrow \widetilde{T}\vec{x'_1} - \widetilde{T}\vec{x'_2} &= \vec{0} \\ \Rightarrow \widetilde{T}\vec{x'_1} &= \widetilde{T}\vec{x'_2} \end{aligned}$$

por tanto, $\widetilde{T} : H' \to H$ está bien definida. Comprobemos ahora la linealidad, sean $\vec{x'}, \vec{y'} \in H'$, entonces:

$$\begin{aligned} &\left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'}\right), \left(T\vec{x}\middle|\vec{y'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{y'}\right) \text{ y } \left(T\vec{x}\middle|\vec{x'} + \vec{y'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}(\vec{x'} + \vec{y'})\right) \quad \forall \vec{x} \in H \\ \Rightarrow &\left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) + \left(T\vec{x}\middle|\vec{y'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'}\right) + \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{y'}\right) \text{ y } \left(T\vec{x}\middle|\vec{x'} + \vec{y'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}(\vec{x'} + \vec{y'})\right) \quad \forall \vec{x} \in H \\ \Rightarrow &\left(T\vec{x}\middle|\vec{x'} + \vec{y'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'} + \widetilde{T}\vec{y'}\right) \text{ y } \left(T\vec{x}\middle|\vec{x'} + \vec{y'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}(\vec{x'} + \vec{y'})\right) \quad \forall \vec{x} \in H \\ \Rightarrow &\left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'} + \widetilde{T}\vec{y'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}(\vec{x'} + \vec{y'})\right) \quad \forall \vec{x} \in H \\ \Rightarrow &\left(\vec{x}\middle|(\widetilde{T}\vec{x'} + \widetilde{T}\vec{y'}) - \widetilde{T}(\vec{x'} + \vec{y'})\right) = 0 \quad \forall \vec{x} \in H \\ \Rightarrow &(\widetilde{T}\vec{x'} + \widetilde{T}\vec{y'}) - \widetilde{T}(\vec{x'} + \vec{y'}) = 0 \\ \Rightarrow &\widetilde{T}\vec{x'} + \widetilde{T}\vec{y'} = \widetilde{T}(\vec{x'} + \vec{y'}) \end{aligned}$$

y, si $\alpha \in \mathbb{K}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\left(T\vec{x}\middle|\alpha\vec{x'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}(\alpha\vec{x'})\right) \text{ y } \left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'}\right) \quad \forall\vec{x} \in H\\
\Rightarrow&\overline{\alpha}\left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}(\alpha\vec{x'})\right) \text{ y } \overline{\alpha}\left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) = \overline{\alpha}\left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'}\right) \quad \forall\vec{x} \in H\\
\Rightarrow&\overline{\alpha}\left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}(\alpha\vec{x'})\right) \text{ y } \overline{\alpha}\left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\alpha\widetilde{T}\vec{x'}\right) \quad \forall\vec{x} \in H\\
\Rightarrow&\left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}(\alpha\vec{x'})\right) = \left(\vec{x}\middle|\alpha\widetilde{T}\vec{x'}\right) \quad \forall\vec{x} \in H\\
\Rightarrow&\left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}(\alpha\vec{x'})\right) - \left(\vec{x}\middle|\alpha\widetilde{T}\vec{x'}\right) = 0 \quad \forall\vec{x} \in H\\
\Rightarrow&\left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}(\alpha\vec{x'}) - \alpha\widetilde{T}\vec{x'}\right) = 0 \quad \forall\vec{x} \in H\\
\Rightarrow&\widetilde{T}(\alpha\vec{x'}) - \alpha\widetilde{T}\vec{x'} = \vec{0}\\
\Rightarrow&\widetilde{T}(\alpha\vec{x'}) = \alpha\widetilde{T}\vec{x'}
\end{aligned}$$

por tanto $\widetilde{T}$ es lineal. Además, se cumple para todos $\vec{x} \in H$ y $\vec{x'} \in H'$ que:

$$\left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'}\right)$$

Veamos ahora que es continua, en efecto, por Cauchy-Schwartz se tiene que para todo $\vec{x'} \in H' \setminus \left\{\vec{0}\right\}$:

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{T}\vec{x'}\|^2 &= \left(\widetilde{T}\vec{x'}\middle|\widetilde{T}\vec{x'}\right)\\
&= \left(T(\widetilde{T}\vec{x'})\middle|\vec{x'}\right)\\
&\leq \left|\left(T(\widetilde{T}\vec{x'})\middle|\vec{x'}\right)\right|\\
&\leq \|T(\widetilde{T}\vec{x'})\|\|\vec{x'}\|\\
&\leq \|T\|\|\widetilde{T}\vec{x'}\|\|\vec{x'}\|
\end{aligned}$$

si $\vec{x'} \in \ker\widetilde{T}$ es claro que

$$0 = \|\widetilde{T}\vec{x'}\| \leq \|T\|\|\vec{x'}\|$$

y, en caso de que no esté, por la ecuación anterior se sigue que:

$$\Rightarrow \|\widetilde{T}\vec{x'}\| \leq \|T\|\|\vec{x'}\|$$

En cuyo caso se sigue que $\widetilde{T}$ es continua y tal que $\|\widetilde{T}\| \leq \|T\|$. Para ver la igualdad se intercambian los papeles de T y $\widetilde{T}$ en las desigualdades anteriores, con lo que se obtiene que $\|T\| \leq \|\widetilde{T}\|$.

Y, para ver que $\widetilde{\widetilde{T}}$, notemos que para todo $\vec{x} \in H$ y $\vec{x'} \in H'$

$$\left(\widetilde{\widetilde{T}}\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'}\right) = \left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right)$$

por ende

$$\left(\widetilde{\widetilde{T}}\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) = \left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right)$$

pero, por unicidad de la adjunta debe suceder que $\widetilde{\widetilde{T}} = T$.

De (ii): Probaremos las dos igualdades.

I. $\widetilde{T_1 + T_2} = \widetilde{T}_1 + \widetilde{T}_2$. Tenemos que:

$$\left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}_1\vec{x'}\right) = \left(T_1\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) \quad \text{y} \quad \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}_2\vec{x'}\right) = \left(T_2\vec{x}\middle|\vec{x'}\right), \quad \forall\vec{x} \in H, \vec{x'} \in H'$$

por tanto

$$\begin{aligned}
&\left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}_1\vec{x'}\right) + \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}_2\vec{x'}\right) = \left(T_1\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) + \left(T_2\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) \quad \forall\vec{x} \in H, \vec{x'} \in H' \\
\Rightarrow &\left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}_1\vec{x'} + \widetilde{T}_2\vec{x'}\right) = \left(T_1\vec{x} + T_2\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) \quad \forall\vec{x} \in H, \vec{x'} \in H' \\
\Rightarrow &\left(\vec{x}\middle|(\widetilde{T}_1 + \widetilde{T}_2)\vec{x'}\right) = \left((T_1 + T_2)\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) \quad \forall\vec{x} \in H, \vec{x'} \in H'
\end{aligned}$$

de la unicidad de la adjunta, se sigue que $\widetilde{T_1 + T_2} = \widetilde{T}_1 + \widetilde{T}_2$.

II. $\widetilde{\alpha T} = \overline{\alpha}\widetilde{T}$. Es similar al caso anterior.

De los dos incisos anteriores se sigue el resultado.

De (iii): Se tiene que:

$$\left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'}\right) = \left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) \quad \text{y} \quad \left(\vec{x'}\middle|\widetilde{U}\vec{x''}\right) = \left(U\vec{x'}\middle|\vec{x''}\right), \quad \forall\vec{x} \in H, \vec{x'} \in H', \vec{x''} \in H''$$

debemos probar que:

$$\left(\vec{x}\middle|(\widetilde{T} \circ \widetilde{U})\vec{x''}\right) = \left((U \circ T)\vec{x}\middle|\vec{x''}\right) \quad \forall\vec{x} \in H, \vec{x''} \in H''$$

para usar la unicidad y de forma inmediata dedudcir el resultado. Sean $\vec{x} \in H$ y $\vec{x''} \in H''$. Como $\widetilde{U}\vec{x''} T\vec{x} \in H'$, tenemos que:

$$\left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}(\widetilde{U}\vec{x''})\right) = \left(T\vec{x}\middle|\widetilde{U}\vec{x''}\right) \quad \text{y} \quad \left(T\vec{x}\middle|\widetilde{U}\vec{x''}\right) = \left(U(T\vec{x})\middle|\vec{x''}\right)$$

por tanto:

$$\begin{aligned}
&\left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}(\widetilde{U}\vec{x''})\right) = \left(U(T\vec{x})\middle|\vec{x''}\right) \\
\Rightarrow &\left(\vec{x}\middle|(\widetilde{T} \circ \widetilde{U})\vec{x''}\right) = \left((U \circ T)\vec{x}\middle|\vec{x''}\right)
\end{aligned}$$

lo cual prueba el resultado al ser los vectores arbitrarios.

■

Ejercicio 1.1.2

Sea H un espacio hilbertiano complejo. A toda aplicación lineal continua T de H en H se le asocia la aplicación $Q_T : H \to \mathbb{C}$ (llamada **forma hermitiana**) definida por:

$$Q_T(\vec{x}) = \left(T\vec{x}\middle|\vec{x}\right), \quad \forall\vec{x} \in H$$

Haga lo siguiente:

I. **Establezca** la fórmula:

$$\left(T\vec{x}\middle|\vec{y}\right) = \frac{1}{4}\left[Q_T(\vec{x} + \vec{y}) - Q_T(\vec{x} - \vec{y}) + iQ_T(\vec{x} + i\vec{y}) - iQ_T(\vec{x} - i\vec{y})\right]$$

II. **Muestre** que

$$Q_{\widetilde{T}}(\vec{x}) = \overline{Q_T(\vec{x})}, \quad \forall\vec{x} \in H$$

y que $Q_T(\vec{x})$ es real, $\forall\vec{x} \in H$, si y sólo si T es autoadjunto (es decir, que $T = \widetilde{T}$).

Solución:

Establezcamos ambos incisos:

De (i): Sean $\vec{x},\vec{y}\in H$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
Q_T(\vec{x}+\vec{y}) &= \big(T(\vec{x}+\vec{y})\big|\vec{x}+\vec{y}\big)\\
&= \big(T(\vec{x})+T(\vec{y})\big|\vec{x}+\vec{y}\big)\\
&= \big(T(\vec{x})+T(\vec{y})\big|\vec{x}\big)+\big(T(\vec{x})+T(\vec{y})\big|\vec{y}\big)\\
&= \big(T(\vec{x})\big|\vec{x}\big)+\big(T(\vec{y})\big|\vec{x}\big)+\big(T(\vec{x})\big|\vec{y}\big)+\big(T(\vec{y})\big|\vec{y}\big)\\
&=Q_T(\vec{x})+\big(T(\vec{y})\big|\vec{x}\big)+\big(T(\vec{x})\big|\vec{y}\big)+Q_T(\vec{y})
\end{aligned}$$

por lo cual,

$$\begin{aligned}
Q_T(\vec{x}-\vec{y}) =&Q_T(\vec{x})+\big(T(-\vec{y})\big|\vec{x}\big)+\big(T(\vec{x})\big|-\vec{y}\big)+Q_T(-\vec{y})\\
=&Q_T(\vec{x})-\big(T(\vec{y})\big|\vec{x}\big)-\big(T(\vec{x})\big|\vec{y}\big)+Q_T(\vec{y})
\end{aligned}$$

Luego:

$$Q_T(\vec{x}+\vec{y})-Q_T(\vec{x}-\vec{y}) = 2\left(\big(T(\vec{y})\big|\vec{x}\big)+\big(T(\vec{x})\big|\vec{y}\big)\right)$$

y, por ende:

$$\begin{aligned}
iQ_T(\vec{x}+i\vec{y})-iQ_T(\vec{x}-i\vec{y}) &= 2i\left(\big(T(i\vec{y})\big|\vec{x}\big)+\big(T(\vec{x})\big|i\vec{y}\big)\right)\\
&= 2i\left(i\big(T(\vec{y})\big|\vec{x}\big)-i\big(T(\vec{x})\big|\vec{y}\big)\right)\\
&= 2\left(-\big(T(\vec{y})\big|\vec{x}\big)+\big(T(\vec{x})\big|\vec{y}\big)\right)
\end{aligned}$$

Finalmente, se sigue que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\left[Q_T(\vec{x}+\vec{y})-Q_T(\vec{x}-\vec{y})+iQ_T(\vec{x}+i\vec{y})-iQ_T(\vec{x}-i\vec{y})\right] =&\frac{1}{4}\left[4\big(T(\vec{x})\big|\vec{y}\big)\right]\\
=&\big(T(\vec{x})\big|\vec{y}\big)
\end{aligned}$$

lo cual establece la fórmula.

De (ii): Sea $\vec{x}\in H$, entonces:

$$\begin{aligned}
Q_{\widetilde{T}}(\vec{x}) &= \left(\widetilde{T}\vec{x}|\vec{x}\right)\\
&= \left(\widetilde{T}\vec{x}|\vec{x}\right)\\
&= \overline{\left(\vec{x}|\widetilde{T}\vec{x}\right)}\\
&= \overline{(T\vec{x}|\vec{x})}\\
&= \overline{Q_T(\vec{x})}
\end{aligned}$$

Para la otra parte, veamos que:

$$\begin{aligned}
Q_T(\vec{x})\in\mathbb{R},\forall\vec{x}\in H &\iff Q_T(\vec{x})=\overline{Q_T(\vec{x})},\forall\vec{x}\in H\\
&\iff Q_T(\vec{x})=Q_{\widetilde{T}}(\vec{x}),\forall\vec{x}\in H\\
&\iff \big(T\vec{x}\big|\vec{x}\big)=\left(\widetilde{T}\vec{x}\big|\vec{x}\right),\forall\vec{x}\in H\\
&\iff \big(T\vec{x}\big|\vec{x}\big)-\left(\widetilde{T}\vec{x}\big|\vec{x}\right)=0,\forall\vec{x}\in H\\
&\iff \left(T\vec{x}-\widetilde{T}\vec{x}\big|\vec{x}\right)=0,\forall\vec{x}\in H\\
&\iff \left(\left[T-\widetilde{T}\right]\vec{x}\big|\vec{x}\right)=0,\forall\vec{x}\in H
\end{aligned}$$

Veamos que $\left(\left[T-\widetilde{T}\right]\vec{x}\middle|\vec{x}\right)=0,\forall\vec{x}\in H$ si y sólo si $T=\widetilde{T}$.

$\Rightarrow$) Suponga que $\left(\left[T-\widetilde{T}\right]\vec{x}\middle|\vec{x}\right)=0,\forall\vec{x}\in H$. Esto es inmediato, pues se tiene que: $Q_{T-\widetilde{T}}(\vec{x})=0$, para todo $\vec{x}\in H$, luego

$$\left(\left[T-\widetilde{T}\right]\vec{x}\middle|\vec{y}\right)=0,\quad\forall\vec{x},\vec{y}\in H$$

en particular para $\vec{x}$ fijo, $\left(\left[T-\widetilde{T}\right]\vec{x}\middle|\vec{y}\right)=0$ para todo $\vec{y}\in H$, luego $\left[T-\widetilde{T}\right]\vec{x}=\vec{0}$. Como fue arbitrario se sigue entonces que $T=\widetilde{T}$.

$\Leftarrow$) Suponga que $T=\widetilde{T}$. De forma inmediata se sigue que $\left(\left[T-\widetilde{T}\right]\vec{x}\middle|\vec{x}\right)=0,\forall\vec{x}\in H$.

□

Ejercicio 1.1.3
Sea A un endomorfismo lineal continuo de un espacio prehilbertiano H. Defina $Q_A:H\to\mathbb{K}$ como:

$$Q_A(\vec{x})=\left(A\vec{x}\middle|\vec{x}\right),\quad\forall\vec{x}\in H$$

Sea

$$\alpha=\sup\left\{\frac{\left|Q_A(\vec{x})\right|}{\|\vec{x}\|^2}\middle|\vec{x}\in H,\vec{x}\neq\vec{0}\right\}$$

I. **Pruebe** que $\alpha\leq\|A\|$.

II. Al suponer A autoadjunto, **demuestre** la igualdad opuesta. Luego, si A es autoadjunto se tiene que

$$\|A\|=\sup\left\{\frac{\left|Q_A(\vec{x})\right|}{\|\vec{x}\|^2}\middle|\vec{x}\in H,\vec{x}\neq\vec{0}\right\}$$

Indicación. Compruebe que $\forall\vec{x}\in H$ y $\forall\lambda>0$,

$$\left(A\vec{x}\middle|A\vec{x}\right)=\frac{1}{4}\left(Q_A(\lambda\vec{x}+\lambda^{-1}A\vec{x})-Q_A(\lambda\vec{x}-\lambda^{-1}A\vec{x})\right)$$

de ahí obtenga que $\|A\vec{x}\|^2\leq\frac{\alpha}{2}\left(\lambda^2\|\vec{x}\|^2+\frac{1}{\lambda^2}\|A\vec{x}\|^2\right)$ y elija λ convenientemente.

Demostración:

Demostremos cada inciso.

De (i): Basta con ver que $\|A\|$ es cota superior del conjunto al que se le quiere sacar el supremo. Para ello, notemos que al ser A lineal continuo, se tiene que:

$$\left|\left(A\vec{x}\middle|\vec{x}\right)\right|\leq\|A\vec{x}\|\|\vec{x}\|\leq\|A\|\|\vec{x}\|^2$$

para todo $\vec{x}\in H$. En particular, para $\vec{x}\neq\vec{0}$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{\left|\left(A\vec{x}\middle|\vec{x}\right)\right|}{\|\vec{x}\|^2}&\leq\|A\|\\ \Rightarrow\frac{\left|Q_A(\vec{x})\right|}{\|\vec{x}\|^2}&\leq\|A\|\end{aligned}$$

luego, $\|A\|$ es cota superior del conjunto. Por tanto $\alpha\leq\|A\|$.

De (ii): Suponga que A es autoadjunto. Sean $\vec{x}\in H$ y $\lambda>0$. Entonces:

$$\begin{aligned}Q_A(\lambda\vec{x}+\lambda^{-1}A\vec{x})&=\left(A(\lambda\vec{x}+\lambda^{-1}A\vec{x})\middle|\lambda\vec{x}+\lambda^{-1}A\vec{x}\right)\\&=\left(\lambda A\vec{x}+\lambda^{-1}(A\circ A)\vec{x}\middle|\lambda\vec{x}+\lambda^{-1}A\vec{x}\right)\\&=\left(\lambda A\vec{x}+\lambda^{-1}(A\circ A)\vec{x}\middle|\lambda\vec{x}\right)+\left(\lambda A\vec{x}+\lambda^{-1}(A\circ A)\vec{x}\middle|\lambda^{-1}A\vec{x}\right)\\&=\left(\lambda A\vec{x}\middle|\lambda\vec{x}\right)+\left(\lambda^{-1}(A\circ A)\vec{x}\middle|\lambda\vec{x}\right)+\left(\lambda A\vec{x}\middle|\lambda^{-1}A\vec{x}\right)+\left(\lambda^{-1}(A\circ A)\vec{x}\middle|\lambda^{-1}A\vec{x}\right)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}Q_A(\lambda\vec{x}-\lambda^{-1}A\vec{x}) &= \big(A(\lambda\vec{x}-\lambda^{-1}A\vec{x})\big|\lambda\vec{x}-\lambda^{-1}A\vec{x}\big)\\ &= \big(\lambda A\vec{x}-\lambda^{-1}(A\circ A)\vec{x}\big|\lambda\vec{x}-\lambda^{-1}A\vec{x}\big)\\ &= \big(\lambda A\vec{x}-\lambda^{-1}(A\circ A)\vec{x}\big|\lambda\vec{x}\big)-\big(\lambda A\vec{x}-\lambda^{-1}(A\circ A)\vec{x}\big|\lambda^{-1}A\vec{x}\big)\\ &= \big(\lambda A\vec{x}\big|\lambda\vec{x}\big)-\big(\lambda^{-1}(A\circ A)\vec{x}\big|\lambda\vec{x}\big)-\big(\lambda A\vec{x}\big|\lambda^{-1}A\vec{x}\big)+\big(\lambda^{-1}(A\circ A)\vec{x}\big|\lambda^{-1}A\vec{x}\big)\end{aligned}$$

por tanto:

$$\begin{aligned}Q_A(\lambda\vec{x}+\lambda^{-1}A\vec{x})-Q_A(\lambda\vec{x}-\lambda^{-1}A\vec{x}) =& 2(\big(\lambda^{-1}(A\circ A)\vec{x}\big|\lambda\vec{x}\big)+\big(\lambda A\vec{x}\big|\lambda^{-1}A\vec{x}\big))\\ =& 2(\big((A\circ A)\vec{x}\big|\vec{x}\big)+\big(A\vec{x}\big|A\vec{x}\big))\\ =& 2(\big(A\vec{x}\big|A\vec{x}\big)+\big(A\vec{x}\big|A\vec{x}\big))\\ =& 4\,\big(A\vec{x}\big|A\vec{x}\big)\end{aligned}$$

pues, A es autoadjunto. Luego:

$$\big(A\vec{x}\big|A\vec{x}\big)=\frac{1}{4}(Q_A(\lambda\vec{x}+\lambda^{-1}A\vec{x})-Q_A(\lambda\vec{x}-\lambda^{-1}A\vec{x}))$$

por tanto:

$$\begin{aligned}\|A\vec{x}\|^2 =& \frac{1}{4}\big|Q_A(\lambda\vec{x}+\lambda^{-1}A\vec{x})-Q_A(\lambda\vec{x}-\lambda^{-1}A\vec{x})\big|\\ \leq& \frac{1}{4}(\big|Q_A(\lambda\vec{x}+\lambda^{-1}A\vec{x})\big|+\big|Q_A(\lambda\vec{x}-\lambda^{-1}A\vec{x})\big|)\\ =& \frac{1}{4}(\frac{\|\lambda\vec{x}+\lambda^{-1}A\vec{x}\|^2}{\|\lambda\vec{x}+\lambda^{-1}A\vec{x}\|^2}\big|Q_A(\lambda\vec{x}+\lambda^{-1}A\vec{x})\big|+\frac{\|\lambda\vec{x}-\lambda^{-1}A\vec{x}\|^2}{\|\lambda\vec{x}-\lambda^{-1}A\vec{x}\|^2}\big|Q_A(\lambda\vec{x}-\lambda^{-1}A\vec{x})\big|)\\ \leq& \frac{1}{4}(\alpha\|\lambda\vec{x}+\lambda^{-1}A\vec{x}\|^2+\alpha\|\lambda\vec{x}-\lambda^{-1}A\vec{x}\|^2)\\ =& \frac{\alpha}{4}(\big(\lambda\vec{x}+\lambda^{-1}A\vec{x}\big|\lambda\vec{x}+\lambda^{-1}A\vec{x}\big)+\big(\lambda\vec{x}-\lambda^{-1}A\vec{x}\big|\lambda\vec{x}-\lambda^{-1}A\vec{x}\big))\\ =& \frac{\alpha}{4}(\big(\lambda\vec{x}+\lambda^{-1}A\vec{x}\big|\lambda\vec{x}\big)+\big(\lambda\vec{x}+\lambda^{-1}A\vec{x}\big|\lambda^{-1}A\vec{x}\big)+\big(\lambda\vec{x}-\lambda^{-1}A\vec{x}\big|\lambda\vec{x}\big)-\big(\lambda\vec{x}-\lambda^{-1}A\vec{x}\big|\lambda^{-1}A\vec{x}\big))\\ =& \frac{\alpha}{4}(\lambda^2\,\big(\vec{x}\big|\vec{x}\big)+\big(A\vec{x}\big|\vec{x}\big)+\big(\vec{x}\big|A\vec{x}\big)+\lambda^{-2}\,\big(A\vec{x}\big|A\vec{x}\big)+\lambda^2\,\big(\vec{x}\big|\vec{x}\big)-\big(A\vec{x}\big|\vec{x}\big)-\big(\vec{x}\big|A\vec{x}\big)+\lambda^{-2}\,\big(A\vec{x}\big|A\vec{x}\big))\\ =& \frac{\alpha}{2}(\lambda^2\,\big(\vec{x}\big|\vec{x}\big)+\lambda^{-2}\,\big(A\vec{x}\big|A\vec{x}\big))\\ =& \frac{\alpha}{2}(\lambda^2\|\vec{x}\|^2+\lambda^{-2}\|A\vec{x}\|^2)\end{aligned}$$

por Cauchy-Schwartz y usando la definición de α. Por tanto, si consideramos que $\alpha>0$:

$$\begin{aligned}\|A\vec{x}\|^2 &\leq \frac{\alpha}{2}(\lambda^2\|\vec{x}\|^2+\lambda^{-2}\|A\vec{x}\|^2)\\ \Rightarrow \left(1-\frac{\alpha}{2\lambda^2}\right)\|A\vec{x}\|^2 &\leq \frac{\alpha\lambda^2}{2}\|\vec{x}\|^2\\ \Rightarrow \frac{2\lambda^2-\alpha}{2\lambda^2}\|A\vec{x}\|^2 &\leq \frac{\alpha\lambda^2}{2}\|\vec{x}\|^2\\ \Rightarrow \|A\vec{x}\|^2 &\leq \frac{2\alpha\lambda^4}{2(2\lambda^2-\alpha)}\|\vec{x}\|^2\\ \Rightarrow \|A\vec{x}\|^2 &\leq \frac{\alpha\lambda^4}{2\lambda^2-\alpha}\|\vec{x}\|^2\end{aligned}$$

tomemos $\lambda > 0$ tal que:

$$\begin{aligned}
\alpha^2 = \frac{\alpha\lambda^4}{2\lambda^2 - \alpha} &\iff \alpha = \frac{\lambda^4}{2\lambda^2 - \alpha} \\
&\iff \alpha(2\lambda^2 - \alpha) = \lambda^4 \\
&\iff 0 = \lambda^4 - 2\alpha\lambda^2 + \alpha^2 \\
&\iff 0 = \left(\lambda^2 - \alpha\right)^2 \\
&\iff 0 = \left(\lambda^2 - \alpha\right)^2 \\
&\iff 0 = \lambda^2 - \alpha \\
&\iff \sqrt{\alpha} = \lambda
\end{aligned}$$

de esta forma:

$$\begin{aligned}
\|A\vec{x}\|^2 &\leq \alpha^2\|\vec{x}\|^2 \\
\|A\vec{x}\| &\leq \alpha\|\vec{x}\|
\end{aligned}$$

es decir que $\|A\| \leq \alpha$ y por ende $\alpha = \|A\|$, esto si $\alpha > 0$. Si $\alpha = 0$, entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{\left|Q_A(\vec{x})\right|}{\|\vec{x}\|^2} =&0 \quad \forall \vec{x} \in H \\
\Rightarrow \left|Q_A(\vec{x})\right| =&0 \quad \forall \vec{x} \in H \\
\Rightarrow \left(A\vec{x}\middle|\vec{x}\right) =&0 \quad \forall \vec{x} \in H
\end{aligned}$$

pero, por (i) de 1.4 se sigue que $A = 0$, pues $\left(A\vec{x}\middle|\vec{y}\right) = 0$ para todo $\vec{x}, \vec{y} \in H\backslash\left\{\vec{0}\right\}$. En este caso $\alpha = 0 = \|A\|$. En cualquier caso, se concluye que $\alpha = \|A\|$. ■

Ejercicio 1.1.4
Muestre que todo endomorfismo continuo T de un espacio hilbertiano H se expresa únicamente en la forma:

$$T = A + iB$$

donde A y B son endomorfismos autoadjuntos de H.

Demostración:
Tomemos $A = \frac{1}{2}(T + \widetilde{T})$ y $B = \frac{1}{2i}(T - \widetilde{T})$, siendo $\widetilde{T} : H \to H$ la adjunta de T. Es claro que $T = A + iB$ y, que tanto A como B son adjuntos, pues:

$$\begin{aligned}
\widetilde{A} =& \widetilde{\frac{1}{2}(T + \widetilde{T})} \\
=& \frac{1}{2}\widetilde{(T + \widetilde{T})} \\
=& \frac{1}{2}(\widetilde{T} + \widetilde{\widetilde{T}}) \\
=& \frac{1}{2}(T + \widetilde{T}) \\
=& A
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\widetilde{B} =& \widetilde{\frac{1}{2i}(T-\widetilde{T})}\\
=& \widetilde{\frac{-i}{2}(T-\widetilde{T})}\\
=& \overline{-\frac{i}{2}}\widetilde{(T-\widetilde{T})}\\
=& \frac{i}{2}(\widetilde{T}-\widetilde{\widetilde{T}})\\
=& -\frac{1}{2i}(\widetilde{T}-T)\\
=& \frac{1}{2i}(T-\widetilde{T})\\
=& B
\end{aligned}$$

además, son endomorfismos (pues van de H en H). Veamos que éstos son únicos. En efecto, si $A', B' : H \to H$ son lineales adjuntos tales que

$$T = A' + iB'$$

se tiene que:

$$i(B' - B) = A - A'$$

en particular, son continuos, por lo cual podemos tomar la adjunta de ambos lados:

$$\begin{aligned}
& i\widetilde{(B' - B)} = \widetilde{A - A'}\\
\Rightarrow & -i\widetilde{(B' - B)} = A - A'\\
\Rightarrow & -i(B' - B) = A - A'\\
\Rightarrow & -i(B' - B) = i(B' - B)
\end{aligned}$$

ya que son adjuntos. Por tanto $B' - B = 0 \Rightarrow B' = B$, con lo cual $A = A'$. ■

Ejercicio 1.1.5
Sea H un espacio prehilbertiano. **Construya** un espacio hilbertiano $\hat{H}$ y una inyección lineal $j : H \to \hat{H}$ tal que

$$\left(j\vec{x}\middle|j\vec{y}\right) = \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right), \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in H.$$

y que $j(H)$ sea denso en $\hat{H}$. El espacio hilbertiano $\hat{H}$ se llama la **completación** del espacio prehilibertiano H. **Formule y demuestre** un teorema de unicidad de esta completación.

Demostración:
Sea

$$\hat{H} = \left\{ \{\vec{x_n}\}_{n=1}^{\infty} \,\middle|\, \{\vec{x_n}\}_{n=1}^{\infty} \text{ es sucesión de Cauchy en } H \right\}$$

se definen sobre $\hat{H}'$ dos operaciones, para todo $\hat{x}' = \{\vec{x_n}\}_{n=1}^{\infty}, \hat{y}' = \{\vec{y_n}\}_{n=1}^{\infty} \in \hat{H}'$ y $\alpha \in K$:

$$\hat{x}' + \hat{y}' = \{\vec{x_n} + \vec{y_n}\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{y} \quad \alpha\hat{x}' = \{\alpha\vec{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$$

Con estas operaciones $\hat{H}'$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Definimos una relación $\sim$ en $\hat{H}'$ dada como sigue:

$$\hat{x}' \sim \hat{y}' \iff \lim_{n\to\infty} \|\vec{x_n} - \vec{y_n}\| = 0$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma inducida por el producto interno sobre H. Tomemos $\hat{0}' = \left\{\vec{0}\right\}_{n=1}^{\infty} \in \hat{H}'$, y sea:

$$\hat{K} = \left\{\hat{x'} \in \hat{H}' \middle| \hat{x'} \sim \hat{0}'\right\}$$

Afirmamos que $\hat{K}$ es subespacio vectorial de $\hat{H}$. En efecto, sean $\hat{x'} = \{\vec{x_n}\}_{n=1}^{\infty}, \hat{y'} = \{\vec{y_n}\}_{n=1}^{\infty} \in \hat{K}'$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces:

$$\begin{aligned}
0 \leq& \lim_{n\to\infty} \|\vec{x_n} + \alpha\vec{y_n} - \vec{0}\| \\
=& \lim_{n\to\infty} \|\vec{x_n} + \alpha\vec{y_n}\| \\
\leq& \lim_{n\to\infty} \|\vec{x_n}\| + \lim_{n\to\infty} \|\alpha\vec{y_n}\| \\
=& \lim_{n\to\infty} \|\vec{x_n}\| + \lim_{n\to\infty} \left|\alpha\right| \cdot \|\vec{y_n}\| \\
=& \lim_{n\to\infty} \|\vec{x_n} - \vec{0}\| + \left|\alpha\right| \lim_{n\to\infty} \|\vec{y_n} - \vec{0}\| \\
=& 0 + \left|\alpha\right| \cdot 0 \\
=& 0
\end{aligned}$$

por tanto, $\hat{x'} + \alpha\hat{y'} \in \hat{K}'$. Así $\hat{K}'$ es espacio vectorial. Tomemos

$$\hat{H} = \hat{H}'/\hat{K}'$$

el espacio vectorial cociente, cuyos elementos los denotaremos por $\hat{x} = [\hat{x'}] = \hat{x'} + \hat{K}'$. Definimos un producto escalar en $\hat{H}$ como sigue; para cada $\hat{x}, \hat{y} \in H$:

$$\left(\hat{x}\middle|\hat{y}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\vec{x_n}\middle|\vec{y_n}\right)$$

$\blacksquare$

Ejercicio 1.1.6
Si E es un espacio vectorial complejo, la adición de elementos de E y la multiplicación de elementos de E por números reales, hacen de E un espacio vectorial real que se designa por $E_{\mathbb{R}}$.

I. Sea H un espacio prehilbertiano complejo. Se designa por $\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ un producto escalar en H. **Muestre** que la aplicación:

$$(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} = \Re\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$$

hace de $H_{\mathbb{R}}$ un espacio prehilbertiano real para el que se cumple:

$$\left(i\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} = \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}}$$

Pruebe la relación:

$$\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) = \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + i\left(\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} \tag{1.2}$$

II. Sea H un espacio vectorial complejo. Se supone que $H_{\mathbb{R}}$ está provisto de un producto escalar $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}}$ que hace de $H_{\mathbb{R}}$ un espacio prehilbertiano real. Se supone también que $\left(i\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} = \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}}$, para todo $\vec{x}, \vec{y} \in H$. Se define en H un producto $\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ por la fórmula (1.1). **Demuestre** que $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ es un producto escalar complejo que hace de H un espacio prehilbertiano complejo.

Demostración:
De (i): Hay que verificar que se cumplen cuatro condiciones:

I. Para todo $\vec{y} \in H_{\mathbb{R}}$ fijo, la aplicación $\vec{x} \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}}$ es lineal de $H_{\mathbb{R}}$ en $\mathbb{R}$. En efecto, sea $\vec{y} \in H_{\mathbb{R}}$. Si $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x} \in H_{\mathbb{R}}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\left(\vec{x_1} + \vec{x_2}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} &= \Re\left(\vec{x_1} + \vec{x_2}\middle|\vec{y}\right) \\
&= \Re[\left(\vec{x_1}\middle|\vec{y}\right) + \left(\vec{x_2}\middle|\vec{y}\right)] \\
&= \Re\left(\vec{x_1}\middle|\vec{y}\right) + \Re\left(\vec{x_2}\middle|\vec{y}\right) \\
&= \left(\vec{x_1}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + \Re\left(\vec{x_2}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}}
\end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}
\left(\alpha\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} &= \Re\left(\alpha\vec{x}\middle|\vec{y}\right) \\
&= \Re\alpha\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) \\
&= \alpha\Re\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) \\
&= \alpha\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}}
\end{aligned}$$

con lo cual, la aplicación es lineal.

II. $\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} = \overline{\left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right)_{\mathbb{R}}} = \left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right)_{\mathbb{R}}$, para todo $\vec{x}, \vec{y} \in H_{\mathbb{R}}$. En efecto, sean $\vec{x}, \vec{y} \in H_{\mathbb{R}}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} &= \Re\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) \\
&= \Re\overline{\left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right)} \\
&= \Re\left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right) \\
&= \left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right)_{\mathbb{R}} \\
&= \overline{\left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right)_{\mathbb{R}}}
\end{aligned}$$

pues, el producto escalar toma valores reales.

III. $\left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right)_{\mathbb{R}} \geq 0$, para todo $\vec{x} \in H_{\mathbb{R}}$. En efecto, como $\left(\cdot\middle|\cdot\right)$ es un producto escalar sobre H, se cumple que $\left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right) \geq 0$, por ende $\left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right)_{\mathbb{R}} = \left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right) \geq 0$.

IV. Sea $\vec{x} \in H_{\mathbb{R}}$, entonces $\left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right)_{\mathbb{R}} = 0$ si y sólo si $\vec{x} = \vec{0}$. La vuelta es inmediata, suponga que $\left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right)_{\mathbb{R}} = 0$, como $\left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right)_{\mathbb{R}} = \Re\left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right) = \left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right)$, se sigue que $\vec{x} = \vec{0}$.

con lo cual, por los 4 incisos anteriores se sigue que $\left(\cdot\middle|\cdot\right)_{\mathbb{R}}$ es un producto escalar sobre $H_{\mathbb{R}}$, es decir que $H_{\mathbb{R}}$ es un espacio prehilbertiano real.

Verifiquemos que se cumple que:

$$\left(i\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} = \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}}, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in H_{\mathbb{R}}$$

en efecto, si $\vec{x}, \vec{y} \in H_{\mathbb{R}}$, entonces:

$$\begin{aligned}
\left(i\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} &= \Re\left(i\vec{x}\middle|i\vec{y}\right) \\
&= \Re(i \cdot (-i))\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) \\
&= \Re(-(-1))\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) \\
&= \Re\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) \\
&= \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}}
\end{aligned}$$

con lo que se verifica la igualdad. Probemos la relación. Sean $\vec{x}, \vec{y} \in H$, se tiene entonces que:

$$\begin{aligned}
\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) &= \Re\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) + i\Im\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) \\
&= \Re\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) + i\Re(-i\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)) \\
&= \Re\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) + i\Re(\bar{i}\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)) \\
&= \Re\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) + i\Re(\left(\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)) \\
&= \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + i\left(\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}}
\end{aligned}$$

lo cual prueba la relación.

De (ii): Hay que verificar que se cumplen cuatro condiciones:

I. Para todo $\vec{y} \in H$ fijo, la aplicación $\vec{x} \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ es lineal de H en $\mathbb{C}$. En efecto, sea $\vec{y} \in H$. Si $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x} \in H$ y $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\left(\vec{x_1}+\vec{x_2}\middle|\vec{y}\right) &= \left(\vec{x_1}+\vec{x_2}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + i\left(\vec{x_1}+\vec{x_2}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}}\\ &= \left(\vec{x_1}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + \left(\vec{x_2}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + i\left(\vec{x_1}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + i\left(\vec{x_2}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}}\\ &= (\left(\vec{x_1}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}}\, i\left(\vec{x_1}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}}) + (\left(\vec{x_2}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + i\left(\vec{x_2}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}})\\ &= \left(\vec{x_1}\middle|\vec{y}\right) + \left(\vec{x_2}\middle|\vec{y}\right)\end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}\left(\alpha\vec{x}\middle|\vec{y}\right) &= \left(\alpha\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + i\left(\alpha\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}}\\ &= \left([a+ib]\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + i\left([a+ib]\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}}\\ &= \left(a\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + \left(ib\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + i\left(a\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + i\left(ib\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}}\\ &= a\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + b\left(i\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + ia\left(\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + ib\left(i\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}}\\ &= a\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} - b\left(\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + ia\left(\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + ib\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}}\\ &= (a+ib)\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + (ia-b)\left(\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}}\\ &= (a+ib)\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + i(a+ib)\left(\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}}\\ &= \alpha\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + i\alpha\left(\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}}\\ &= \alpha(\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + i\left(\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}})\\ &= \alpha\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)\end{aligned}$$

por tanto, es lineal de H en $\mathbb{C}$.

II. Sean $\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) = \overline{\left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right)}$, para todo $\vec{x}, \vec{y} \in H$. En efecto, si $\vec{x}, \vec{y} \in H$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) &= \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + i\left(\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}}\\ &= \left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right)_{\mathbb{R}} + i\left(i\vec{x}\middle|-\vec{y}\right)_{\mathbb{R}}\\ &= \left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right)_{\mathbb{R}} - i\left(\vec{y}\middle|i\vec{x}\right)_{\mathbb{R}}\\ &= \overline{\left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right)_{\mathbb{R}} + i\left(\vec{y}\middle|i\vec{x}\right)_{\mathbb{R}}}\\ &= \overline{\left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right)}\end{aligned}$$

III. $\left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right) \geq 0$ para todo $\vec{x} \in H$. En efecto, si $\vec{x} \in H$, se tiene primeramente que:

$$\begin{aligned}\left(\vec{x}\middle|i\vec{x}\right) &= \left(i\vec{x}\middle|-\vec{x}\right)\\ &= -\left(i\vec{x}\middle|\vec{x}\right)\\ &= -\left(\vec{x}\middle|i\vec{x}\right)\\ \Rightarrow \left(\vec{x}\middle|i\vec{x}\right) &= 0\end{aligned}$$

por tanto,

$$\begin{aligned}\left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right) &= \left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right)_{\mathbb{R}} + i\left(\vec{x}\middle|i\vec{x}\right)_{\mathbb{R}}\\ &= \left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right)_{\mathbb{R}}\\ &\geq 0\end{aligned}$$

donde $\left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right)_{\mathbb{R}} \geq 0$. Luego se tiene el resultado.

IV. Sea $\vec{x} \in H$. Entonces, $\left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right) = 0$ si y sólo si $\vec{x} = \vec{0}$. La vuelta es inmediata. Suponga que $\left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right) = 0$, entonces:

$$0 = \left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right) = \left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right)_{\mathbb{R}}$$

usando lo obtenido en (iii), pero $\left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right) = 0$ implica $\vec{x} = \vec{0}$, luego $\vec{x} = \vec{0}$ con lo que se tiene el resultado.

por los cuatro incisos se sigue que $\left(\cdot\middle|\cdot\right)$ es un producto escalar complejo sobre H que hace de él un espacio prehilbertiano complejo. ■

Ejercicio 1.1.7
Haga lo sugiente:

I. **Muestre** que en todo espacio prehilbertiano real se cumple

$$\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) = \frac{1}{4}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2\right)$$

y en todo espacio prehilbertiano complejo se cumple

$$\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) = \frac{1}{4}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 + i\|\vec{x}+i\vec{y}\|^2 - i\|\vec{x}-i\vec{y}\|^2\right)$$

II. Sea E un espacio vectorial normado real en el que se verifica la identidad del paralelogramo:

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2)$$

Pruebe que se puede definir de manera única un producto escalar $\left(\cdot\middle|\cdot\right)$ sobre E que hace de E un espacio prehilbertiano real para el cual $\|\vec{x}\|^2 = \left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right)$, $\forall \vec{x} \in E$.

Indicación. Defina $\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ por la primera fórmula del inciso (i). Usando la fórmula del paralelogramo compruebe que $\left(\vec{x}\middle|2\vec{y}\right) = 2\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$. Transforme $\left(\vec{x_1}\middle|\vec{y_1}\right) + \left(\vec{x_2}\middle|\vec{y_2}\right)$ por la identidad del paralelogramo y deduzca la fórmula $\left(\vec{x_1}\middle|\vec{y}\right) + \left(\vec{x_2}\middle|\vec{y}\right) = \left(\vec{x_1}+\vec{x_2}\middle|\vec{y}\right)$.

III. Misma pregunta que en (ii) en el caso de ser E espacio vectorial complejo.

Indicación. Use (ii) y el problema 1.6.

Solución:
De (i): Sea H un espacio prehilbertiano real, y sean $\vec{x}, \vec{y} \in H$, se tiene entonces que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2\right) &= \frac{1}{4}\left(\left(\vec{x}+\vec{y}\middle|\vec{x}+\vec{y}\right) - \left(\vec{x}-\vec{y}\middle|\vec{x}-\vec{y}\right)\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right) + \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) + \left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right) + \left(\vec{y}\middle|\vec{y}\right) - \left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right) + \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) + \left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right) - \left(\vec{y}\middle|\vec{y}\right)\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(2\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) + 2\left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right)\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(4\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)\right)\\
&= \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)
\end{aligned}$$

para un espacio prehilbertiano complejo, sean $\vec{x}, \vec{y} \in H$. Por el ejercicio 1.1.6 (i) se tiene que:

$$\begin{aligned}
\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) &= \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + i\left(\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}}\\
&= \frac{1}{4}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|_{\mathbb{R}}^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|_{\mathbb{R}}^2\right) + i\frac{1}{4}\left(\|\vec{x}+i\vec{y}\|_{\mathbb{R}}^2 - \|\vec{x}-i\vec{y}\|_{\mathbb{R}}^2\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 + i\|\vec{x}+i\vec{y}\|^2 - i\|\vec{x}-i\vec{y}\|^2\right)
\end{aligned}$$

pues, $\|\cdot\|_{\mathbb{R}} = \|\cdot\|$.

De (ii). Defina:

$$\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) = \frac{1}{4}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2\right), \quad \forall \vec{x},\vec{y} \in H$$

veamos que $(\vec{x},\vec{y}) \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ verifica las cuatro condiciones para ser producto escalar real sobre H:

Notemos antes que si $\vec{x},\vec{y} \in H$:

$$2\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) = \frac{1}{4}\left(2\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - 2\|\vec{x}-\vec{y}\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - 2\|\vec{x}-\vec{y}\|^2\right)$$

I. Sea $\vec{y} \in H$. Hay que ver que la función $\vec{x} \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ es lineal. En efecto, sean $\vec{x},\vec{x_1},\vec{x_2} \in H$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, tenemos que:

$$\left(\vec{x_1}+\vec{x_2}\middle|\vec{y}\right) = \frac{1}{4}\left(\|\vec{x_1}+\vec{x_2}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x_1}+\vec{x_2}-\vec{y}\|^2\right)$$

$\square$

Ejercicio 1.1.8

Para todo $s \in \mathbb{R}$ sea $u_s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la función definida por:

$$u_s(x) = e^{isx}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sea X el espacio vectorial complejo compuesto de todas las combinaciones lineales finitas de estas funciones u_s, $\forall f,g \in X$ se define:

$$\left(f\middle|g\right) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} f\overline{g}.$$

Pruebe que esta definición tiene sentido y que la aplicación $(f,g) \mapsto \left(f\middle|g\right)$ es un producto escalar que hace de X un espacio prehilbertiano.

Sea H el espacio prehilbertiano, completación del espacio prehilbertiano X (ver problema 1.5). **Muestre** que H es un espacio hilbertiano no separable y que la familia $(u_s)_{s\in\mathbb{R}}$ es un sistema ortonormal maximal en H.

Demostración:

Para la primera parte, notemos que por linealidad de la integral, basta probar que este mapeo tiene sentido para las funciones u_s. Sean $r,s \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\begin{aligned}\left(u_s\middle|u_r\right) &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} u_s(x)\overline{u_r(x)}dx \\ &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} e^{isx}\overline{e^{irx}}dx \\ &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} e^{isx}e^{-irx}dx \\ &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} e^{i(s-r)x}dx\end{aligned}$$

si $s = r$, entonces

$$\begin{aligned}
\left(u_s \middle| u_r\right) &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} dx \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} 2R \\
&= \lim_{R\to\infty} 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

si $s \neq r$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\left(u_s \middle| u_r\right) &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\frac{e^{i(s-r)x}}{i(s-r)}\Big|_{x=-R}^{x=R} \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\frac{e^{i(s-r)R} - e^{-i(s-r)R}}{i(s-r)} \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\frac{\cos((s-r)R) + i\,\mathrm{sen}((s-r)R) - \cos(-(s-r)R) - i\sin(-(s-r)R)}{i(s-r)} \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\frac{\cos((s-r)R) + i\,\mathrm{sen}((s-r)R) - \cos((s-r)R) + i\sin((s-r)R)}{i(s-r)} \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\frac{2i\sin((s-r)R)}{i(s-r)} \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{\sin((s-r)R)}{(s-r)R} \\
&= 0
\end{aligned}$$

(usar teorema del emparedado para verificar que ese es el límite). Por tanto, $\left(\cdot \middle| \cdot\right)$ está bien definida.

Veamos ahora que esa aplicación es un producto escalar sobre X. En efecto, se deben verificar cuatro condiciones:

I. Sea $g \in X$ fijo, hay que ver que la aplicación $f \mapsto \left(f \middle| g\right)$ es lineal. En efecto, sean $f, f_1, f_2 \in X$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\left(f_1 + f_2 \middle| g\right) &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} (f_1 + f_2)\overline{g} \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} f_1\overline{g} + f_2\overline{g} \\
&= \lim_{R\to\infty} \left(\frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} f_1\overline{g} + \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} f_2\overline{g}\right) \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} f_1\overline{g} + \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} f_2\overline{g} \\
&= \left(f_1 \middle| g\right) + \left(f_2 \middle| g\right)
\end{aligned}$$

pues, ambos límites existen. Además:

$$\begin{aligned}
\left(\alpha f \middle| g\right) &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} \alpha f\overline{g} \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{\alpha}{2R}\int_{-R}^{R} f\overline{g} \\
&= \alpha \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} f\overline{g} \\
&= \alpha \left(f \middle| g\right)
\end{aligned}$$

por tanto, esa aplicación es lineal.

II. $\big(g\big|f\big) = \overline{\big(f\big|g\big)}$, para todo $f, g \in X$. En efecto, sean $f, g \in X$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\overline{\big(f\big|g\big)} &= \overline{\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} f\overline{g}} \\
&= \lim_{R\to\infty} \overline{\frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} f\overline{g}} \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} \overline{f\overline{g}} \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} \overline{f}g \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} g\overline{f} \\
&= \big(g\big|f\big)
\end{aligned}$$

con lo que se tiene el resultado.

III. $\big(f\big|f\big) \geq 0$, para todo $f \in X$. En efecto, sea $f \in X$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\big(f\big|f\big) &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} f\overline{f} \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} \big|f\big|^2 \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

pues $\big|f\big|^2 \geq 0$.

IV. $\big(f\big|f\big) = 0$ si y sólo si $f = 0$. La vuelta es inmediata, suponga que $\big(f\big|f\big) = 0$, digamos que $f = \lambda_1 u_{s_1} + ... + \lambda_n u_{s_n}$ donde $\lambda_i \in \mathbb{C}$ y $s_i \in \mathbb{R}$ para todo $i \in [|1, n|]$, se tiene entonces que:

$$\begin{aligned}
\big(f\big|f\big) &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} f\overline{f} \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} (\lambda_1 u_{s_1} + ... + \lambda_n u_{s_n})\overline{\lambda_1 u_{s_1} + ... + \lambda_n u_{s_n}} \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} (\lambda_1 u_{s_1} + ... + \lambda_n u_{s_n})(\overline{\lambda_1} u_{-s_1} + ... + \overline{\lambda_n} u_{-s_n}) \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} (\lambda_1 u_{s_1} + ... + \lambda_n u_{s_n})(\overline{\lambda_1} u_{-s_1} + ... + \overline{\lambda_n} u_{-s_n}) \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i u_{s_i}\overline{\lambda_j} u_{-s_j} \\
&= \lim_{R\to\infty} \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i\overline{\lambda_j}\frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} u_{s_i} u_{-s_j} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i\overline{\lambda_j} \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} u_{s_i} u_{-s_j}
\end{aligned}$$

sean $i, j \in [|1, n|]$, se tienen dos casos, $i \neq j$ o $i = j$. Por lo analizado anteriormente si $i \neq j$ se sigue que

$$\lambda_i\overline{\lambda_j} \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} u_{s_i} u_{-s_j} = 0$$

y, si $i = j$:

$$\lambda_i \overline{\lambda_i} \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} u_{s_i} u_{-s_i} = \left|\lambda_i\right|^2$$

Por tanto:

$$\left(f\middle|f\right) = \sum_{i=1}^{n} \left|\lambda_i\right|^2 = 0$$

esto ocurre si y sólo si $\lambda_i = 0$ para todo $i \in [|1, n|]$, es decir si $f = 0$.

por los cuatro incisos anteriores, se sigue que $\left(\cdot\middle|\cdot\right)$ es un producto escalar sobre X que lo hace un espacio prehilbertiano.

Para la segunda parte, al inicio ya se vió que $(u_s)_{s\in\mathbb{R}}$ es un sistema O.N. de vectores en X. Para ver que no es separable, considere la familia de bolas:

$$\mathcal{B} = \left\{B_s\middle|s \in \mathbb{R}^+\right\}$$

donde $B_s = \left\{f \in H\middle|\|f - u_s\| < \frac{1}{2}\right\}$, para todo $s \in \mathbb{R}^+$. Afirmamos que estas bolas son disjuntas a pares, en efecto, sean $s, r \in \mathbb{R}^+$ con $s \neq r$. Si $f \in B_s$ y $f \in B_r$, entonces:

$$\|f - u_s\| < \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \|f - u_r\| < \frac{1}{2} \Rightarrow \|u_s - u_r\| \leq \|u_s - f\| + \|f - u_r\| < 1$$

pero,

$$\begin{aligned}
\left(u_s - u_r\middle|u_s - u_r\right) &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} (u_s - u_r)\overline{(u_s - u_r)} \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} (u_s - u_r)(u_{-s} - u_{-r}) \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} (u_s u_{-s} - u_s u_{-r} - u_r u_{-s} + u_{-s} u_{-r}) \\
&= 1 + 0 + 0 + 1 \\
&= 2 \\
\Rightarrow \|u_s - u_r\| &= \sqrt{2}
\end{aligned}$$

el cual no es menor que 1, por tanto tal f no puede existir, así $B_s \cap B_r = \emptyset$. Con lo que $\mathcal{B}$ es una familia no numerable de bolas abiertas disjuntas a pares, por una proposición de análisis I debe suceder que H no es separable.

Veamos que $(u_s)_{s\in\mathbb{R}}$ es O.N. maximal. Ya se vió que es O.N., veamos que es maximal. Por el teorema de Parserval al ser H hilbertiano, basta con ver que:

$$\overline{\mathcal{L}\left((u_s)_{s\in\mathbb{R}}\right)} = H$$

esto es inmediato, pues $\mathcal{L}\left((u_s)_{s\in\mathbb{R}}\right) = X$ ya que el conjunto de la izquierda es el generado por todas las combinaciones lineales finitas de elementos de $(u_s)_{s\in\mathbb{R}}$, y el conjunto $i(X)$ es denso en H (usando la notación del ejercicio 1.1.5), luego se tiene que:

$$\overline{i(X)} = H \Rightarrow \overline{\mathcal{L}\left((u_s)_{s\in\mathbb{R}}\right)} = H$$

pues, $i(u_s) = u_s$. Por tanto, $(u_s)_{s\in\mathbb{R}}$ es O.N. maximal. ■

Ejercicio 1.1.9
Sea H un espacio hilbertiano de dimensión infinita. **Demuestre** que existe una aplicación continua inyectiva γ de $[0, 1]$ en H (un **camino simple** en H) tal que si $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 1$, los vectores $\gamma(b) - \gamma(a)$ y $\gamma(d) - \gamma(c)$ son ortogonales.

Indicación. Tome $H = L_2([0,1], \mathbb{K})$ y considere funciones características de ciertos subconjuntos de $[0,1]$.

Demostración:

Consideremos primero $H = L_2([0,1], \mathbb{K})$. Sea $\gamma : [0,1] \to H$ dada por:

$$\gamma(x) = \chi_{[0,x]}, \quad \forall x \in [0,1]$$

es claro que γ es inyectiva. Además, si $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 1$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\gamma(b) - \gamma(a) &= \chi_{[0,b]} - \chi_{[0,a]}\\ &= \chi_{]a,b]}\end{aligned}$$

y, $\gamma(d) - \gamma(c) = \chi_{]c,d]}$. Por tanto:

$$\begin{aligned}\big(\gamma(b) - \gamma(a)\big|\gamma(d) - \gamma(c)\big) &= \int_0^1 \chi_{]a,b]}\overline{\chi_{]c,d]}}\\ &= \int_0^1 \chi_{]a,b]}\chi_{]c,d]}\\ &= 0\end{aligned}$$

por tanto, $\gamma(b) - \gamma(a)$ y $\gamma(d) - \gamma(c)$ son ortogonales. ■

Ejercicio 1.1.10

Sea $\{\vec{x_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de un espacio hilbertiano H. La sucesión $\{\vec{x_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$ se llama **martingala** (en el sentido amplio) si, $\forall \nu \in \mathbb{N}$, $\vec{x_\nu}$ es el vector de $\mathcal{L}(\vec{x_1}, ..., \vec{x_\nu})$ menos alejado de $\vec{x_{\nu+1}}$.

I. Sea $\{\vec{x_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$ una martingala. Se definen:

$$\vec{y_1} = \vec{x_1} \quad \text{e} \quad \vec{y_\nu} = \vec{x_\nu} - \vec{x_{\nu-1}}, \quad \forall \nu \geq 2.$$

Muestre que los vectores $\vec{y_\nu}$ son ortogonales a pares y que $\{\|\vec{x_\nu}\|\}_{\nu=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente de números no negativos.

II. Sea $\{\vec{y_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$ una sucesión de vectores en H ortogonales a pares. Se define

$$\vec{x_\nu} = \sum_{k=1}^{\nu} \vec{y_k}, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

Pruebe que $\{\vec{y_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$ es una martingala.

Demostración:

De (i): Procederemos por inducción sobre ν. Para $\nu = 2$ el resultado se cumple, pues ■

Ejercicio 1.1.11

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ una función medible, integrable en todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ de medida finita. Si

$$\int f = 0, \quad \forall \text{ rectángulo acotado } P,$$

demuestre que $f = 0$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$.

Indicación. Redúzcase a un corolario del lema de los promedios.

Demostración:

■

Ejercicio 1.1.12 (**Funciones de Hermite**)
Por inducción se ve inmediatamente que

$$D^n e^{-x^2} = (-1)^n H_n(x) e^{-x^2}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

donde $(-1)H_n$ es un polinomio de grado n. Estos polinomios $(-1)H_n$ se llaman **polinomios de Hermite**. Se definen las **funciones de Hermite** φ_n por:

$$\varphi_n(x) = H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

equivalentemente,

$$\varphi_n(x) = (-1)^n e^{-\frac{x^2}{2}} D^n e^{-x^2}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

I. **Demuestre** que las funciones de Hermite satisfacen la relación:

$$\varphi_n''(x) = (x^2 - 2n - 1)\varphi_n(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Indicación. Exprese a $\varphi_n''(x)$ mediante $D^n e^{-x^2}$, $D^{n+1} e^{-x^2}$ y $D^{n+2} e^{-x^2}$ y calcule $D^{n+2} e^{-x^2} = D^{n+1}(-2xe^{-x^2})$ por la fórmula de Leibniz para la derivada $n+1$-enésima de un producto de factores.

II. **Muestre** que las funciones de Hermite consistituyen un sistema ortogonal en el espacio hilbertiano $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{K})$

Indicación. Del inciso (i) se sigue que $\varphi_n''\varphi_m - \varphi_m''\varphi_n = 2(m-n)\varphi_n\varphi_m$.

III. **Pruebe** la relación

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x).$$

Indicación. Exprese $H_n'(x)$ mediante $D^n e^{-x^2}$ y $D^{n+1} e^{-x^2}$. Calcule $D^{n+1} e^{-x^2} = D^n(-2xe^{-x^2})$ por la fórmula de Leibniz.

IV. **Demuestre** que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^2(x) dx = 2n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{n-1}^2(x) dx$$

y deduzca que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^2(x) dx = \pi^{1/2} 2^n n!.$$

Luego el sistema de funciones:

$$\Psi_n = \frac{1}{\pi^{1/2} 2^n n!} \varphi_n$$

es un sistema ortonormal en $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ (En un ejercicio posterior se probará que dicho sistema ortonormal es, de hecho, maximal).

Indicación. Integre por partes

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^2(x) dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) D^n e^{-x^2} dx$$

y use (iii).

Demostración:

De (i): Sea $n \in \mathbb{N}$. Veamos que:

$$\begin{aligned}
\varphi_n'(x) &= \frac{d}{dx}\left((-1)^n e^{-\frac{x^2}{2}D^n e^{-x^2}}\right)\\
&= (-1)^n \frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{x^2}{2}} D^n e^{-x^2}\right)\\
&= (-1)^n \left[\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) D^n e^{-x^2} + e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d}{dx}\left(D^n e^{-x^2}\right)\right]\\
&= (-1)^n \left[-xe^{-\frac{x^2}{2}} D^n e^{-x^2} + e^{-\frac{x^2}{2}} D^{n+1} e^{-x^2}\right]
\end{aligned}$$

por tanto:

$$\begin{aligned}
\varphi_n''(x) &= (-1)^n \frac{d}{dx}\left[-xe^{-\frac{x^2}{2}} D^n e^{-x^2} + e^{-\frac{x^2}{2}} D^{n+1} e^{-x^2}\right]\\
&= (-1)^n \left[\frac{d}{dx}(-xe^{-\frac{x^2}{2}}) D^n e^{-x^2} - xe^{-\frac{x^2}{2}} D^{n+1} e^{-x^2} + \frac{d}{dx}(e^{-\frac{x^2}{2}}) D^{n+1} e^{-x^2} + e^{-\frac{x^2}{2}} D^{n+2} e^{-x^2}\right]\\
&= (-1)^n \left[(x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}} D^n e^{-x^2} - xe^{-\frac{x^2}{2}} D^{n+1} e^{-x^2} - xe^{-\frac{x^2}{2}} D^{n+1} e^{-x^2} + e^{-\frac{x^2}{2}} D^{n+2} e^{-x^2}\right]\\
&= (-1)^n \left[(x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}} D^n e^{-x^2} - 2xe^{-\frac{x^2}{2}} D^{n+1} e^{-x^2} + e^{-\frac{x^2}{2}} D^{n+2} e^{-x^2}\right]
\end{aligned}$$

■