Título o Nombre de las notas

Cristo Daniel Alvarado

23 de octubre de 2025

Índice general

Lista de Códigos

Capítulo 1

Conjuntos Convexos

1.1. Propiedades Básicas

Definición 1.1.1 (**Conjunto Convexo**)
Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío. Decimos que C es un conjunto convexo si $[a, b] \subseteq C$, donde:

$$[a, b] = \left\{ ta + (1-t)b \middle| t \in [0, 1] \right\}$$

Ejemplo 1.1.1
El conjunto $\mathbb{R}^n$ es convexo. También lo son $[a, b] \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\{a\}$, para todo $a, b \in \mathbb{R}^n$.

Los conjuntos convexos resultan relevantes pues justamente en vecindades convexas podemos definir conceptos como derivadas direccionales, gradientes, etc...

Una propiedad que podemos definir en un conjunto convexo es el siguiente:

Definición 1.1.2 (**Punto Extremo**)
Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo. Decimos que un punto $x \in C$ es **punto extremo de** C si no existen $y, z \in C$ tales que $x \in (y, z)$, donde:

$$(y, z) = \left\{ ty + (1-t)z \middle| t \in (0, 1) \right\}$$

Ejemplo 1.1.2
El conjunto $(-\infty, a] \subseteq \mathbb{R}^n$ dado por:

$$(-\infty, a] = \left\{ ta \in \mathbb{R}^n \middle| t \leq 1 \right\}$$

es convexo y tiene como único punto extremo a a. También, $[a, b]$ tiene como puntos extremos a a y b.

En cambio, el conjunto (a, b) es convexo pero no tiene puntos extremos.

Lema 1.1.1
Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ subconjunto convexo y sea $x \in C$ tal que x no es extremo. Entonces, existen $y, z \in C$ tales que:

$$x = \frac{y+z}{2}$$

Demostración:
Como $x \in C$ no es extremo, existen $y_0, z_0 \in C$ y $t \in (0,1)$ tales que:

$$x = ty_0 + (1-t)z_0$$

Si $t = \frac{1}{2}$ hemos terminado. En caso contrario, sea $s = \max\{t, 1-t\}$. Se tienen dos casos:

- $s = t$, tomemos $y = y_0$ y $z = \frac{1-t}{t}z_0 + \left(1 - \frac{1-t}{t}\right)x$ (se verifica rápidamente que ambos están en C, pues están en $[y_0, z_0]$), entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{y+z}{2} &= \frac{y_0 + \frac{1-t}{t}z_0 + \left(1 - \frac{1-t}{t}\right)x}{2} \\
&= \frac{y_0 + \frac{1-t}{t}z_0 + \left(1 - \frac{1-t}{t}\right)(ty_0 + (1-t)z_0)}{2} \\
&= \frac{y_0 + \frac{1-t}{t}z_0 + \left(t - \frac{1-t}{t}t\right)y_0 + \left(1 - t - \frac{1-t}{t}(1-t)\right)z_0}{2} \\
&= \frac{2ty_0 + 2(1-t)z_0}{2} \\
&= ty_0 + (1-t)z_0 \\
&= x
\end{aligned}$$

- $s = 1-t$, tomemos $z = z_0$ y $y = \frac{t}{1-t}y_0 + \left(1 - \frac{t}{1-t}\right)x$ (se verifica rápidamente que ambos están en C, pues están en $[y_0, z_0]$), haciendo el procedimiento análogo al caso anterior, se llega a que $\frac{y+z}{2} = x$.

Por ambos incisos se sigue el resultado. ■

Teorema 1.1.1 (Propiedades Básicas de los Puntos Extremos)
Si $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es acotado, convexo y cerrado, entonces C tiene al menos un punto extremo. Más aún, si C tiene más de un punto, entonces debe tener al menos dos puntos extremos.

Demostración:
Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado, cerrado y convexo. Consideremos la función $f : C \times C \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x,y) = \|x - y\|$$

f es una función continua en un conjunto compacto, por lo que alcanza su máximo en algún punto $(x_0, y_0) \in C \times C$. Tenemos dos casos:

- $f(x_0, y_0) = 0$: Se sigue que $x_0 = y_0$, luego C tiene un punto. Se sigue así que C tiene al menos un punto extremo.

- $f(x_0, y_0) > 0$: Afirmamos que x_0 y y_0 son puntos extremos de C. Supongamos que alguno de ellos no es un punto extremo, digamos x_0, entonces por el lema anterior existen $x_1, x_2 \in C$ tales que:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Si alguno de estos dos puntos es extremo, hemos terminado, por lo que supongamos que ninguno de estos dos es extremo. Por la identidad del paralelogramo y ya que f alcanza su máximo en (x_0, y_0), se tiene que:

$$\begin{aligned} 2\|x_0 - y_0\|^2 &\geq \|x_1 - y_0\|^2 + \|x_2 - y_0\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\|x_1 + x_2 - 2y_0\|^2 + \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|^2 \\ &= 2\|x_0 - y_0\|^2 + \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|^2 \end{aligned}$$

Por tanto, $\|x_1 - x_2\|^2 = 0$, lo cual implica que $x_1 = x - 2$, lo cual es una contradicción. Por tanto, x_0 es un punto extremo de C. Análogamente, se prueba que y_0 es un punto extremo de C.

Por los dos incisos se sigue el resultado. ■

Uno de los resultados más fundamentales en la teoría es el siguiente:

Teorema 1.1.2
Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto convexo, cerrado y acotado. Entonces, si C tiene m puntos extremos, digamos $x_1, \ldots, x_m$, cualquier punto $x \in C$ como:

$$x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i, \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, m$$

La prueba requiere elementos de análisis funcional y demás herramientas avanzadas, por lo que no se presenta aquí. Sin embargo, este resultado puede consultarse en la siguiente monografía: Teorema de Krein-Milman. En esta monografía se presenta una versión más general del teorema (en espacios topológicos localmente convexos).