Lema 1. Sean $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $T(x)=\alpha x+\beta$ con $\alpha\neq 0$, $I\subset\mathbb{R}$ un intervalo compacto; $J=T(I)$; $f:J\to\mathbb{R}$ acotada, entonces:

$$\overline{\int_J} f = |\alpha|\cdot \overline{\int_I} f\circ T$$

Corolario.

Sean $I\subset\mathbb{R}$, I, $T(I)$ contenidos en $[a,b]$, $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $T(x)=\alpha x+\beta$ con $\alpha\neq 0$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada que se anula fuera de $T(I)$. Entonces:

$$\overline{\int_a^b} f = |\alpha|\cdot\overline{\int_a^b} f\circ T$$

Lema 2.

Sean U,V abiertas en $\mathbb{R}^m$, $h:U\to V$ un homeomorfismo. Sea $X\subset\mathbb{R}^m$ tal que $\overline{X}\subset U$, entonces $h(Fr(X))=Fr(h(X))$.

Def. $f:X\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ se dice localmente Lipschitziana si $\forall\, x\in X$ existe una vecindad de x, V_x, y existe $K_x>0$ tales que $\|f(x)-f(y)\|\leq K_x\|x-y\|$ $\forall\, x,y\in X$, f se dice Lipschitziana.

Proposición 12.

Sea $f:X\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ localmente Lipschitziana; si X tiene medida nula, entonces $f(X)$ tiene medida nula.

Notas.

Def. Una función f se dice de clase C^r si las primeras r derivadas existen y son continuas. Una función se dice suave ó de clase C^∞ si es de clase C^r $\forall r \in \mathbb{N}$.

Proposición P1.

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f: A \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en A. Entonces f es continua y $\forall x_0 \in A$ $\exists M > 0, \delta_0 > 0$ tales que: $\forall x \in A, \|x - x_0\| < \delta_0$ implica que $\|f(x) - f(x_0)\| \leq M \cdot \|x - x_0\|$.

Dem.

Para probar la continuidad, basta con probar la propiedad de Lipschitz localmente. Sea $\varepsilon = 1 > 0$. Como f es diferenciable, para este ε $\exists$ $\delta_0 > 0$ tal que:

$$\forall x \in A, \|x - x_0\| < \delta_0 \Rightarrow \|f(x) - f(x_0) - Df(x_0) \cdot (x - x_0)\| \leq \varepsilon \cdot \|x - x_0\| = \|x - x_0\| \quad (i)$$

Por ser $Df(x_0)$ una T. Lineal, es de Lipschitz, entonces $\exists$ $M_0 \geq 0$ tal que

$$\forall x \in A, \quad \|Df(x_0) \cdot (x)\| \leq M_0 \|x\| \quad (ii)$$

Por tanto, de (i) y (ii) se tiene que:

$$\|f(x) - f(x_0)\| - \|Df(x_0) \cdot (x - x_0)\| \leq \|x - x_0\|$$

$$\Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| \leq (M_0 + 1) \cdot \|x - x_0\|$$

Sea $M = M_0 + 1 \geq 0$, entonces:

$$\forall x \in A, \|x - x_0\| < \delta_0 \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| \leq M \cdot \|x - x_0\|$$

Por tanto, f es localmente de Lipschitz, así f es continua. ■

Corolario: Sea $f: U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 en el abierto U. Si X tiene medida nula, entonces $f(X)$ tiene medida nula.

Dem:

Como f es de clase C^1, es localmente Lipschitziana, entonces, por la proposición 12, $f(X)$ tiene medida nula. ■

Def. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $f: A \to \mathbb{R}^m$. Se dice que f es un homomorfismo si es una biyección tal que f y f^{-1} son continuas.

Def. Sean U, V abiertos en $\mathbb{R}^n$, $f: U \to V$ es un difeomorfismo de clase C^1 si f es un homeomorfismo y, f, f^{-1} son diferenciables y continuas.

Lema 3.

Sean U, V abiertos en $\mathbb{R}^m$, $h: U \to V$ un difeomorfismo de clase C^1. Sea X un conjunto tal que $\overline{X} \subset U$. Si X es J-medible, $h(X)$ es J-medible.

Dem:

Por el lema anterior, por ser h un difeomorfismo, es un homomorfismo, entonces por el Lema 2, $h(Fr(X)) = Fr(h(X))$. Asimismo, por el corolario anterior, si Y es de medida nula, entonces $h(Y)$ es de medida nula. Como X es J-medible y $\overline{X} \subset U$, $Fr(X) \subset U$, así $Fr(X)$ tiene medida nula. Luego, $h(Fr(X))$ tiene medida nula, por tanto $Fr(h(X))$ tiene medida nula. Finalmente, $h(X)$ es J-medible. □

Lema 4.

Sean $h: U \to V$ difeomorfismo de clase C^1, U, V abiertos en $\mathbb{R}^n$, X un conjunto tal que $\overline{X} \subset U$, X J-medible; $f: h(X) \to \mathbb{R}$. $f \circ h: X \to \mathbb{R}$ es integrable si y sólo si f es integrable (f integrable sobre $h(X)$, J-medible por el Lema 3 y $f \circ h$ integrable sobre X, J-medible)

Dem.

Sean $D_{f\circ h}$, D_f los conjuntos de puntos en los que $f \circ h$ y f son discontinuas. Probaremos que: ($D_{f\circ h}$ es de medida nula $\Leftrightarrow$ D_f es de medida nula). Para ello, probaremos que $D_{f\circ h} = h^{-1}(D_f)$.

Sea $x \in D_{f\circ h}$, entonces, $\exists \{x_n\} \to x$ tal que $\{(f\circ h)(x_n)\}$ no converge a $(f\circ h)(x)$. Luego $\{f(h(x_n))\}$ no converge a $f(h(x))$. Como h es un difeomorfismo, es un homomorfismo, luego h es continua en todo punto de su dominio. Entonces, como $\{x_n\} \to x$, se tiene que $\{h(x_n)\} \to h(x)$. Por tanto $\{h(x_n)\}$ es una sucesión convergente a $h(x)$ tal que $\{f(h(x_n))\}$ no converge a $f(h(x))$. Por tanto, $x \in D_{f\circ h} \Rightarrow h(x) \in D_f \Leftrightarrow x \in h^{-1}(D_f)$. Entonces $D_{f\circ h} \subset h^{-1}(D_f)$.

Sea ahora $x \in h^{-1}(D_f)$, luego $h(x) \in D_f$. Por tanto, $\exists$ una sucesión $\{y_n\} \to h(x)$ tal que $\{f(y_n)\}$ no converge a $f(h(x))$. Como h es un difeomorfismo, h^{-1}

es continua. Luego, como $\{y_n\} \subset V$ convergente a $h(x)$, entonces $\{h^{-1}(y_n)\}$ Converge a $h^{-1}(h(x)) = x$. Por ser h biyectiva, $\forall\, y_n,\ n \in \mathbb{N},\ \exists\, x_n \in U$ tal que $y_n = h(x_n)$. Por tanto $\{h(x_n)\}$ converge a $h(x)$ y $\{x_n\}$ converge a x. Así, $\{f(y_n)\}$ no converge a $f(h(x))$. $\{f(y_n)\} = \{f(h(x_n))\}$. Así, existe $\{x_n\}$ tal que $\{x_n\} \to x$ y $\{f(h(x_n))\}$ no converge a $f(h(x))$. Luego $x \in D_{f\circ h}$. Así $h^{-1}(D_f) \subset D_{f\circ h}$.

Por tanto: $D_{f\circ h} = h^{-1}(D_f)$. Como h^{-1} es de clase C^1, si D_f tiene medida nula entonces $D_{f\circ h}$ tiene medida nula. El recíproco se cumple pues $D_f = h(D_{f\circ h})$.

Por tanto: f integrable $\Leftrightarrow$ $f\circ h$ es integrable. $\square$

Def. Sean Y, X conjuntos tales que $Y \subset X \subset \mathbb{R}^n$. Se dice que Y es denso en X si $\overline{X} \subset \overline{Y}$.

Lema 5.

Sea $X \subset \mathbb{R}^n$, entonces existe un subconjunto numerable de X denso en X.

Dem.

Ejercicio.

Sea $A\subset E^m$, $c\in int(A)$, $f,g: A\to E^n$ diferenciables en c. Entonces la función $h: A\to \mathbb{R}$, $x\mapsto \langle f(x),g(x)\rangle$ es diferenciable en c, y $Dh(c)\cdot(u)=\langle Df(c)(u), g(c)\rangle+\langle f(c), Dg(c)(u)\rangle$.

Dem.

Sea $\varepsilon>0$. Como f y g son diferenciables, para este ε $\exists\, \delta_1,\delta_2>0$ tales que:
Para $c\in A$, si $x\in A$ y $\|c-x\|<\delta$ entonces $\|f(x)-f(c)-Df(c)(x-c)\|\leq \frac{\varepsilon}{4(\|g(c)\|+1)}\|x-c\|$ y $\|g(x)-g(c)-Dg(x-c)\|\leq\frac{\varepsilon}{4(\|f(c)\|+1)}\|x-c\|$.

Luego:

$$\|h(x)-h(c)-Dh(c)\cdot(x-c)\|=\|\langle f(x),g(x)\rangle-\langle f(c),g(c)\rangle-\langle Df(c)\cdot(x-c), g(c)\rangle-\langle f(c),Dg(c)\cdot(x-c)\rangle$$

$$=\|\langle f(x),g(x)\rangle-\langle f(c)+Df(c)\cdot(x-c),g(c)\rangle-\langle f(c),Dg(c)\cdot(x-c)\rangle\|$$

$$=\|\langle f(x),g(x)\rangle+\langle f(c),g(x)\rangle-\langle f(c),g(x)\rangle-\langle f(c)+Df(c)(x-c),g(c)\rangle-\langle f(c),Dg(c)\cdot(x-c)\rangle\|$$

$$=\|\langle f(x)-f(c),g(x)\rangle+\langle f(c),g(x)-Dg(c)\cdot(x-c)\rangle-\langle f(c)+Df(c)\cdot(x-c),g(c)\rangle\|$$

$$=\|\langle f(x)-f(c),g(x)\rangle+\langle f(x),g(c)\rangle-\langle f(x),g(c)\rangle+\langle f(c),g(x)-Dg(c)\cdot(x-c)\rangle-\langle f(c)+Df(c)\cdot(x-c),g(c)\rangle\|$$

$$=\|\langle f(x)-f(c)+\langle f(x)-f(c)-Df(c)\cdot(x-c),g(c)\rangle+\langle f(c),g(x)-Dg(c)(x-c)\rangle-\langle f(x),g(c)\rangle+\langle f(c),g(c)\rangle-\langle f(c),g(c)\rangle\|$$

$$=\|\langle f(x)-f(c),g(x)\rangle+\langle f(c)-f(x),g(c)\rangle+\langle f(x)-f(c)-Df(c)\cdot(x-c)\rangle+\langle f(c),g(x)-g(c)-Dg(x-c)\rangle\|$$

$$=\|\langle f(x)-f(c),g(x)\rangle-\langle f(x)-f(c),g(c)\rangle+\langle f(x)-f(c)-Df(c)\cdot(x-c),g(c)\rangle+\langle f(c),g(x)-g(c)-Dg(c)\cdot(x-c)\rangle\|$$

$$=\|\langle f(x)-f(c),g(x)-g(c)\rangle+\langle f(x)-f(c)-Df(c)(x-c),g(c)\rangle+\langle f(c),g(x)-g(c)-Dg(c)\cdot(x-c)\rangle\|$$

$$\leq\langle f(x)-f(c),g(x)-g(c)\rangle+\|f(x)-f(c)-Df(c)(x-c)\|\cdot\|g(c)\|$$

$$+\|f(c)\|\cdot\|g(x)-g(c)-Dg(c)\cdot(x-c)\|$$
$$\leq \langle f(x)-f(c), g(x)-g(c)\rangle + \left(\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}\right)\|x-c\|$$
$$= \langle f(x)-f(c), g(x)-g(c)\rangle + \frac{\varepsilon}{2}\|x-c\|$$

Además:

$\langle f(x)-f(c), g(x)-g(c)\rangle \leq \|f(x)-f(c)\|\cdot\|g(x)-g(c)\| \leq \left(\frac{\varepsilon}{4}\|x-c\|+\|Df(c)\cdot(x-c)\|\right)\left(\frac{\varepsilon}{4}\|x-c\|+\|Dg(c)\cdot(x-c)\|\right) \leq \left(\frac{\varepsilon}{4}\|x-c\|+M\|x-c\|\right)\left(\frac{\varepsilon}{4}\|x-c\|+M'\|x-c\|\right) \leq \left(\frac{\varepsilon}{4}+M\right)^2\cdot\|x-c\|^2$

Donde, se supone sin pérdida de generalidad que $M \geq M'$. M cumple que: $M \leq \frac{\varepsilon}{K}$ para algún $K \in \mathbb{N}$. Así:

$\left(\frac{\varepsilon}{4}+M\right)^2\cdot\|x-c\|^2 \leq \left(\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{K}\right)^2\cdot\|x-c\|^2 \leq \left(\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{K}\right)^2\cdot\delta\|x-c\|.$

Proposición Auxiliar.

Sea $A \subset E^n$ abierto, convexo, $f: A \to E^m$ diferenciable, $a, b \in A$. Entonces $\exists\, c \in A$ tal que: $\|f(b) - f(a)\| \leq \|Df(c) \cdot (b-a)\|$.

Dem:

Suponga que $f(a) \neq f(b)$ (de otra forma la conclusión es inmediata). Sea:

$$v = \frac{f(b) - f(a)}{\|f(b) - f(a)\|}$$

Considere la función $H: A \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle f(x), v \rangle$ ($\langle\ \rangle$ es el p. int en E^m). Se tiene que: $H(b) - H(a) = \langle f(b), v \rangle - \langle f(a), v \rangle = \langle f(b) - f(a), v \rangle$

$$\Rightarrow H(b) - H(a) = \frac{\langle f(b) - f(a), f(b) - f(a) \rangle}{\|f(b) - f(a)\|}$$

$$= \|f(b) - f(a)\|$$

El teorema del valor medio implica que $\exists\, c \in A$ tal que: $H(b) - H(a) = DH(c)(b-a)$

Por el ejercicio previo: $DH(c) \cdot (u) = \langle Df(c) \cdot (u), v \rangle$. Luego: $H(b) - H(a) = \langle Df(c) \cdot (b-a), v \rangle$. Por Cauchy-Schwartz:

$$\langle Df(c) \cdot (b-a), v \rangle \leq \|Df(c) \cdot (b-a)\| \cdot \|v\|$$

Pero v es unitario. Luego

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|Df(c) \cdot (b-a)\|.$$

$\square$

Teorema del valor medio.

Sea U un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, y $f: U \to \mathbb{R}$ una función diferenciable sobre todo U. Sean $x, y \in U$, si U es convexo, entonces $\exists\, z \in U$ tal que:

$$f(y) - f(x) = Df(z) \cdot (y-x) = \langle \nabla f(z), y - x \rangle.$$

(z en particular, está en la recta que une a x y y).

Ejercicio.

Sea $f\in\mathcal{L}(E^n,E^m)$. Se define $\|f\|=\sup\{\|f(x)\|: x\in E^n \wedge \|x\|\leqslant 1\}$.

Note que el conjunto enunciado es compacto y f es continua por ser t. lineal. Luego $\|f(x)\|$ también es continua. Así, el supremo está bien definido.

Probar que $\|\ \|:\mathcal{L}(E^n,E^m)\to\mathbb{R}$ es una norma y que $\|f(x)\|\leqslant\|f\|\cdot\|x\|,\ \forall x\in E^n$.

Dem.

Probaremos que: $\|\ \|:\mathcal{L}(E^n,E^m)\to\mathbb{R}$ es una norma. Sea $f\in\mathcal{L}(E^n,E^m)$:

- $\|f\|\geqslant 0\ \forall f\in\mathcal{L}(E^n,E^m)$.

$\|f\|=\sup\{\|f(x)\|: x\in E^n \text{ y } \|x\|\leqslant 1\}$, $\|f(x)\|\geqslant 0\ \forall x\in E^n$. Por tanto 0 es cota inferior del conjunto. Así $\|f\|\geqslant 0$.

- $\|f\|=0 \Leftrightarrow f=0$

$\Rightarrow$) Suponga que $\|f\|=0$, entonces $0=\sup\{\|f(x)\|: x\in E^n \text{ y } \|x\|\leqslant 1\}$, luego $f(x)=0\ \forall x\in E^n$. Sea $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ una base de E^n tal que $\|e_i\|=1\ \forall i\in\mathbb{N}_n$. Sea ahora $y\in E^n$, y es de la forma: $y=c_1e_1+c_2e_2+\dots+c_ne_n$. Así entonces $f(y)=f(c_1e_1+c_2e_2+\dots+c_ne_n)=c_1f(e_1)+c_2f(e_2)+\dots+c_nf(e_n)$. Como $\|e_i\|=1\ \forall i\in\mathbb{N}_n$, $f(e_i)=0\ \forall i\in\mathbb{N}_n$ luego $f(y)=0\ \forall y\in E^n$. Así $f=0$.

$\Leftarrow$) Es inmediato.

- $\|f+g\|\leqslant\|f\|+\|g\|\ \forall f,g\in\mathcal{L}(E^n,E^m)$

Sean $f,g\in\mathcal{L}(E^n,E^m)$, entonces $\|f+g\|=\sup\{\|(f+g)(x)\|: x\in E^n \text{ y } \|x\|\leqslant 1\}$. Sea $x\in E^n$, $\|x\|\leqslant 1$, luego: $\|(f+g)(x)\|=\|f(x)+g(x)\|\leqslant\|f(x)\|+\|g(x)\|\leqslant\sup\{\|f(x)\|: x\in E^n \text{ y } \|x\|\leqslant 1\}+\sup\{\|g(x)\|: x\in E^n \text{ y } \|x\|\leqslant 1\}=\|f\|+\|g\|$. Por tanto, $\|f\|+\|g\|$ es cota superior del conjunto $\{\|(f+g)(x)\|: x\in E^n \text{ y } \|x\|\leqslant 1\}$, así $\|f+g\|\leqslant\|f\|+\|g\|$.

- $\|\alpha f\|=|\alpha|\cdot\|f\|\ \forall\alpha\in\mathbb{R}$

Sea $\alpha\in\mathbb{R}$, entonces: $\|\alpha f\|=\sup\{\|\alpha f(x)\|: x\in E^n \text{ y } \|x\|\leqslant 1\}=\sup\{|\alpha|\cdot\|f(x)\|: x\in E^n \text{ y } \|x\|\leqslant 1\}=|\alpha|\cdot\sup\{\|f(x)\|: x\in E^n \text{ y } \|x\|\leqslant 1\}=|\alpha|\cdot\|f\|$

Por lo anterior, $\|\ \|:\mathcal{L}(E^n,E^m)\to\mathbb{R}$, es una norma en $\mathcal{L}(E^n,E^m)$.

Probaremos ahora que $\|f(x)\|\leqslant\|f\|\cdot\|x\|$. Sea $f\in\mathcal{L}(E^n,E^m)$ y $x\in E^n$, y $\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$ una base para E^n tal que $\|\alpha_i\|=1\ \forall i\in\mathbb{N}_n$. Como $x\in E^n$, existen $c_1,c_2,\dots,c_n$ tales que:

$$x = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_n\alpha_n$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}\|f(x)\| = \|f(c_1\alpha_1 + \ldots + c_n\alpha_n)\| &= \|c_1 f(\alpha_1) + \ldots + c_n f(\alpha_n)\| \\ &\leqslant \|c_1 f(\alpha_1)\| + \ldots + \|c_n f(\alpha_n)\| \\ &= |c_1| \cdot \|f(\alpha_1)\| + \ldots + |c_n| \cdot \|f(\alpha_n)\| \\ &\leqslant (|c_1| + \ldots + |c_n|) \cdot \|f\|\end{aligned}$$

Pues, $\|\alpha_i\| \leqslant 1 \ \forall \ i \in \mathbb{N}_n$, luego: $\|f(\alpha_i)\| \leqslant \|f\|$.

Corolario.

Con la hipótesis del ejercicio anterior, si $\exists M$ tal que $\|Df(x)\| \leq M \ \forall x \in A$, entonces $\|f(b)-f(a)\| \leq M \cdot \|b-a\| \ \forall a,b \in A$.

Dem.

Por el ejercicio anterior y la proposición previa:

$$\|f(b)-f(a)\| \leq \|Df(c)\cdot(b-a)\| \leq \|Df(c)\| \cdot \|b-a\| \leq M \cdot \|b-a\|. \qquad \square$$