EXAMEN PARCIAL. Alvarado Cristo Daniel.

1) Show that a diffeomorphism $\varphi: S \longrightarrow \bar{S}$ is an isometry if and only if the arc length of any parametrized curve in S is equal to the arc length of the image curve by φ.

Dem:

$\Rightarrow$) Suponga que φ es una isometría. Sea $C \subseteq S$ una curva en S parametrizada por $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \to S$, i.e $\mathrm{Tr}\,\alpha = C$. Sea $t_0 \in I$, la longitud de arco de α será:

$$S_\alpha(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(\bar{t})\| d\bar{t}, \ \forall\, t \in I.$$

Donde $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_{\alpha(t)}}$, $\forall\, t \in I$. Por ser φ isometría se cumple que:

$$\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_{\alpha(t)} = \langle d\varphi_{\alpha(t)}(\alpha'(t)), d\varphi_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) \rangle_{\varphi(\alpha(t))}$$

Pero $d\varphi_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = (\varphi \circ \alpha)'(t)$, así

$$= \langle (\varphi \circ \alpha)'(t), (\varphi \circ \alpha)'(t) \rangle_{\varphi(\alpha(t))}$$

Por tanto:

$$\|\alpha'(t)\| = \|(\varphi \circ \alpha)'(t)\|, \ \forall\, t \in I$$

$$\Rightarrow S_\alpha(t) = \int_{t_0}^{t} \|(\varphi \circ \alpha)'(\bar{t})\| d\bar{t}$$

$$= S_{\varphi \circ \alpha}(t), \ \forall\, t \in I$$

Donde $S_{\varphi\circ\alpha}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función longitud de arco de la curva $\varphi \circ \alpha: I \subseteq \mathbb{R} \to \bar{S}$.

$$\therefore S_\alpha(t) = S_{\varphi \circ \alpha}(t), \ \forall\, t \in I$$

i.e la longitud de arco de α es la misma que la de $\varphi \circ \alpha$.

$\Leftarrow$) Suponga la hipótesis. Para probar que φ es difeomorfismo, basta probar (por un resultado del libro) que φ preserva la primera forma fundamental, i.e

$$I_p(w) = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)), \ \forall\, p \in S, \ y \ \forall\, w \in T_pS.$$

En efecto, sea $p \in S$ y $w \in T_pS$. Si $\alpha:]-\varepsilon, \varepsilon[\to S$ es una curva tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = w$, entonces por hipótesis:

$$S_\alpha(t) = S_{\varphi\circ\alpha}(t), \ \forall\, t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$$

$$\Rightarrow \int_{-\varepsilon}^{t} \|\alpha'(\bar{t})\| \, d\bar{t} = \int_{-\varepsilon}^{t} \|(\varphi \circ \alpha)'(\bar{t})\| \, d\bar{t}$$

Derivando ambos lados tenemos que:

$$\|\alpha'(\bar{t})\| = \|(\varphi \circ \alpha)'(\bar{t})\|, \ \forall \, \bar{t} \in]-\varepsilon, \varepsilon[$$

$$\Rightarrow \langle \alpha'(\bar{t}), \alpha'(\bar{t}) \rangle_{\alpha(t)} = \langle (\varphi \circ \alpha)'(\bar{t}), (\varphi \circ \alpha)'(\bar{t}) \rangle_{\varphi \circ \alpha(t)}, \ \forall \, t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$$

En particular, para $t = 0$:

$$\Rightarrow \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_{\alpha(0)} = \langle (\varphi \circ \alpha)'(0), (\varphi \circ \alpha)'(0) \rangle_{\varphi \circ \alpha(0)}$$

$$\Rightarrow \langle w, w \rangle_p = \langle d\varphi_p(w), d\varphi_p(w) \rangle_{\varphi(p)}$$

$$\therefore I_p(w) = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w))$$

Lo cual prueba el resultado.

q.e.d.

2) Let S_1, S_2, and S_3 be regular surfaces. Prove that

a. If $\varphi: S_1 \longrightarrow S_2$ is an isometry, then $\varphi^{-1}: S_2 \longrightarrow S_1$ is also an isometry.

b. If $\varphi: S_1 \longrightarrow S_2$, $\psi: S_2 \longrightarrow S_3$ are isometries, then $\psi \circ \varphi: S_1 \longrightarrow S_3$ is an isometry.

This implies that the isometries of a regular surface S constitute in a natural way a group, called the *group of isometries* of S.

Dem:

De a): Sea $\varphi: S_1 \to S_2$ isometría. En particular, φ es difeomorfismo, así $\varphi^{-1}: S_2 \to S_1$ es diferenciable. Sea ahora $q \in S_2$, por ser φ biyectiva, $\exists\, p \in S_1 \ni$

$$q = \varphi(p)$$

Sean ahora $v_1, v_2 \in T_q S_2 = T_{\varphi(p)} S_2$. Por ser φ difeomorfismo, se cumple (ver anexo al final)

$$d\varphi^{-1}_{\varphi(p)} \circ d\varphi_p = id_{T_p S_1}$$

$$d\varphi_p \circ d\varphi^{-1}_{\varphi(p)} = id_{T_{\varphi(p)} S_2}$$

esto es, $d\varphi_p$ es una aplicación lineal invertible y se cumple $(d\varphi_p)^{-1} = d\varphi^{-1}_{\varphi(p)}$. Así, para $v_1, v_2 \in T_{\varphi(p)} S_2$ $\exists\, w_1, w_2 \in T_p S_1 \ni$

$$d\varphi_p(w_1) = v_1 \text{ y } d\varphi_p(w_2) = v_2 \ \ldots (1)$$

$$\Rightarrow w_1 = (d\varphi_p)^{-1}(v_1) \text{ y } w_2 = (d\varphi_p)^{-1}(v_2)$$

$$\Rightarrow w_1 = d\varphi^{-1}_{\varphi(p)}(v_1) \text{ y } w_2 = d\varphi^{-1}_{\varphi(p)}(v_2)$$

Pero $\varphi(p) = q$. Por tanto:

$$w_1 = d\varphi^{-1}_q(v_1) \text{ y } w_2 = d\varphi^{-1}_q(v_2) \ \ldots (2)$$

Entonces, se tiene usando (1):

$$\langle v_1, v_2 \rangle_q = \langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)}$$

Como φ es isometría:

$$= \langle w_1, w_2 \rangle_p$$

$$= \langle d\varphi^{-1}_q(v_1), d\varphi^{-1}_q(v_2) \rangle_{\varphi^{-1}(q)}, \text{ por } (2).$$

$$\therefore \langle v_1, v_2 \rangle_q = \langle d\varphi^{-1}_q(v_1), d\varphi^{-1}_q(v_2) \rangle_{\varphi^{-1}(q)}$$

Por tanto, φ^{-1} es isometría (pues φ^{-1} es difeomorfismo ya que φ lo es).

De b): Suponga que $\varphi: S_1 \to S_2$ y $\psi: S_2 \to S_3$ son isometrías. En particular, ambos son difeomorfismos. Sea $p \in S_1$ y $w_1, w_2 \in T_p S_1$. Como:

$$d\psi_{\varphi(p)} \circ d\varphi_p = d(\psi \circ \varphi)_p \quad \text{(ver anexo al final)}$$

Entonces:

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)}$$

Por ser φ isometría. Como ψ también lo es:

$$\begin{aligned}\langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)} &= \langle d\psi_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_1)), d\psi_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_2)) \rangle_{\psi(\varphi(p))} \\ &= \langle d\psi_{\varphi(p)} \circ d\varphi_p(w_1), d\psi_{\varphi(p)} \circ d\varphi_p(w_2) \rangle_{\psi\circ\varphi(p)} \\ &= \langle d(\psi\circ\varphi)_p(w_1), d(\psi\circ\varphi)_p(w_2) \rangle_{\psi\circ\varphi(p)}\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle d(\psi\circ\varphi)_p(w_1), d(\psi\circ\varphi)_p(w_2) \rangle_{\psi\circ\varphi(p)}$$

Así, $\psi\circ\varphi$ es una isometría (pues $\psi\circ\varphi$ es difeomorfismo por ser ψ y φ difeomorfismos).

q.e.d.

3) Verify that the surfaces

$$\mathbf{x}(u, v) = (u\cos v, u\sin v, \log u),$$
$$\bar{\mathbf{x}}(u, v) = (u\cos v, u\sin v, v),$$

have equal Gaussian curvature at the points $\mathbf{x}(u, v)$ and $\bar{\mathbf{x}}(u, v)$ but that the mapping $\bar{\mathbf{x}} \circ \mathbf{x}^{-1}$ is not an isometry. This shows that the "converse" of the Gauss theorem is not true.

Sol.

Para verificar que tienen la misma curvatura Gaussiana determinemos los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental de ambas parametrizaciones.

1) $\mathbf{x}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, \log u)$.

Tenemos que:

$$X_u(u,v) = \left(\cos v, \sin v, \frac{1}{u}\right) \quad y \quad X_{uu}(u,v) = \left(0, 0, -\frac{1}{u^2}\right)$$

$$X_v(u,v) = (-u\sin v, u\cos v, 0) \quad y \quad X_{vv}(u,v) = (-u\cos v, -u\sin v, 0)$$

$$X_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0)$$

Y:

$$X_u \wedge X_v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos v & \sin v & \frac{1}{u} \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} = (-\cos v, -\sin v, u)$$

$$\therefore N(u,v) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}(-\cos v, -\sin v, u)$$

Por tanto:

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = 1 + \frac{1}{u^2} \qquad e = \langle N, X_{uu} \rangle = -\frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = 0 \qquad f = \langle N, X_{uv} \rangle = 0$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = u^2 \qquad g = \langle N, X_{vv} \rangle = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$$

Luego:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-\frac{1}{1+u^2}}{1+u^2} = -\frac{1}{(1+u^2)^2}$$

2) $\bar{\mathbf{x}}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v)$

Tenemos que:

$$\bar{X}_u(u,v) = (\cos v, \sin v, 0) \quad y \quad \bar{X}_{uu} = (0,0,0)$$
$$\bar{X}_v = (-u\sin v, u\cos v, 1) \quad y \quad \bar{X}_{vv} = (-u\cos v, -u\sin v, 0)$$
$$\bar{X}_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0)$$

Además:

$$\bar{X}_u \wedge \bar{X}_v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & 1 \end{vmatrix} = (\sin v, -\cos v, u)$$

$$\therefore \bar{N}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}(\sin v, -\cos v, u)$$

Por tanto:

$$\bar{E} = \langle \bar{X}_u, \bar{X}_u \rangle = 1 \qquad \bar{e} = \langle \bar{N}, \bar{X}_{uu} \rangle = 0$$
$$\bar{F} = \langle \bar{X}_u, \bar{X}_v \rangle = 0 \qquad \bar{f} = \langle \bar{N}, \bar{X}_{uv} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$$
$$\bar{G} = \langle \bar{X}_v, \bar{X}_v \rangle = 1+u^2 \qquad \bar{g} = \langle \bar{N}, \bar{X}_{vv} \rangle = 0$$

Luego:

$$\bar{K} = \frac{\bar{e}\bar{g} - \bar{f}^2}{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} = \frac{-\frac{1}{1+u^2}}{1+u^2} = -\frac{1}{(1+u^2)^2}$$

Por tanto, tanto $X(u)$ como $\bar{X}(u)$ tienen la misma curvatura Gaussiana punto a punto. Además el mapeo $\bar{X} \circ X^{-1} : V \subseteq X(U) \to \bar{X}(U)$ no es isometría, pues para $x \neq 0$:

$$\bar{X} \circ X^{-1}(x,y,z) = (x, y, \operatorname{atan}(\tfrac{y}{x}))$$

se tiene:

$$d(\bar{X} \circ X^{-1})_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{y}{x^2+y^2} \\ 0 & 1 & \frac{x}{x^2+y^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

la cuál no es invertible. Por ende $\bar{X} \circ X^{-1}$ no puede ser difeomorfismo, luego no puede ser isometría. $\square$

Anexo

Sea $\varphi: S_1 \to S_2$ difeomorfismo. En particular φ es difeomorfismo, así $\exists\, \varphi^{-1}: S_2 \to S_1$ diferenciable $\ni$ $\varphi^{-1} \circ \varphi = id_{S_1}$ y $\varphi \circ \varphi^{-1} = id_{S_2}$. Se probará que:

$$d\varphi^{-1}_{\varphi(p)} \circ d\varphi_p = id_{T_pS_1}$$
$$d\varphi_p \circ d\varphi^{-1}_{\varphi(p)} = id_{T_{\varphi(p)}S_2}$$

Sean $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \to S_1$ y $\beta: J \subseteq \mathbb{R} \to S_2$ curvas regulares y sean $t \in I$, $u \in J$. Veamos que:

$$\begin{aligned} d(\varphi^{-1} \circ \varphi)_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) &= (\varphi^{-1} \circ \varphi \circ \alpha)'(t) \\ &= (\varphi^{-1} \circ \varphi(\alpha(t)))' \\ &= d\varphi^{-1}_{\varphi\circ\alpha(t)}(d\varphi_{\alpha(t)}(\alpha'(t))) \\ &= d\varphi^{-1}_{\varphi\circ\alpha(t)} \circ d\varphi_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) \end{aligned}$$

De forma análoga:

$$d(\varphi \circ \varphi^{-1})_{\beta(u)}(\beta'(u)) = d\varphi_{\varphi^{-1}\circ\beta(t)} \circ d\varphi^{-1}_{\beta(u)}(\beta'(u))$$

Así, si $p \in S_1$, tenemos que:

$$d(\varphi^{-1} \circ \varphi)_p = d\varphi^{-1}_{\varphi(p)} \circ d\varphi_p$$
$$d(\varphi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} = d\varphi_p \circ d\varphi^{-1}_{\varphi(p)}$$

Como $id_{S_1}: S_1 \to S_1$ e $id_{S_2}: S_2 \to S_2$ son transformaciones lineales:

$$d(id_{S_1})_p = id_{T_pS_1} \text{ y } d(id_{S_2})_{\varphi(p)} = id_{T_{\varphi(p)}S_2}$$

Pues:

$$\begin{aligned} d(id_{S_1})_p(\alpha'(t)) &= (id_{S_1} \circ \alpha)'(t) \\ &= \alpha'(t) \\ &= id_{T_pS}(\alpha'(t)) \end{aligned}$$

$$\therefore d(id_{S_1})_p = id_{T_pS_1}$$

De forma análoga $d(id_{S_2})_p = id_{T_{\varphi(p)}S_2}$. Por lo tanto:

$$d\varphi^{-1}_{\varphi(p)} \circ d\varphi_p = id_{T_pS_1}$$

$$d\varphi_p \circ d\varphi^{-1}_{\varphi(p)} = id_{T_{\varphi(p)}S_2}$$

q.e.d.

Sean $\varphi: S_1 \to S_2$ y $\psi: S_2 \to S_3$ isometrías. Probaremos que:

$$d(\psi \circ \varphi)_p = d\psi_{\varphi(p)} \circ d\varphi_p, \ \forall p \in S_1$$

En efecto, sea $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \to S_1$ curva regular m $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = w$. Entonces:

$$\begin{aligned} d(\psi \circ \varphi)_p(w) &= (\psi \circ \varphi \circ \alpha)'(t)\big|_{t=0} \\ &= d\psi_{\varphi(p)}\left(((\varphi \circ \alpha)'(t)\big|_{t=0}\right) \\ &= d\psi_{\varphi(p)}\left(d\varphi_p(\alpha'(0))\right) \\ &= d\psi_{\varphi(p)} \circ d\varphi_p(w) \end{aligned}$$

q.e.d.

$\Rightarrow$ φ isometría $\Rightarrow \forall\ p \in S$ y $\forall\ w_1, w_2 \in T_pS$: $\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)}$

Sea C curva regular en S parametrizada por $\alpha:]-\varepsilon, \varepsilon[\to S$, su longitud de arco estará dada por:

$$s_\alpha(t) = \int_{-\varepsilon}^{t} \|\alpha'(\bar{t})\| \, d\bar{t}, \quad \forall\ t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$$

Sea $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, entonces $\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)} S$, $\alpha(t) \in S$. Por tanto

$$\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_{\alpha(t)} = \langle d\varphi_{\alpha(t)}(\alpha'(t)), d\varphi_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) \rangle_{\varphi(\alpha(t))}$$
$$= \langle (\varphi \circ \alpha)'(t), (\varphi \circ \alpha)'(t) \rangle_{\varphi(\alpha(t))}$$

$$\Rightarrow \|\alpha'(t)\| = \|(\varphi \circ \alpha)'(t)\|$$

donde $\varphi \circ \alpha:]-\varepsilon, \varepsilon[\to \bar{S}$ es curva reg. en $\bar{S}$. Por tanto:

$$s_\alpha(t) = \int_{-\varepsilon}^{t} \|\alpha'(\bar{t})\| \, d\bar{t} = \int_{-\varepsilon}^{t} \|(\varphi \circ \alpha)'(\bar{t})\| \, d\bar{t}$$
$$= s_{\varphi \circ \alpha}(t)$$

$\Leftarrow$) Sea $p \in S$ y $w_1, w_2 \in T_pS$. $\exists\ \underline{X}: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S \ /\ p \in \underline{X}(U)$ y $\underline{X}$ es par. de S.

$$w_1 = a_1 \underline{X}_u + a_2 \underline{X}_v$$
$$w_2 = b_1 \underline{X}_u + b_2 \underline{X}_v$$

$\Rightarrow \langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle a_1 \underline{X}_u + a_2 \underline{X}_v, b_1 \underline{X}_u + b_2 \underline{X}_v \rangle = \ldots \langle \underline{X}_u, \underline{X}_v \rangle$. Ver más de isometrías.

2) Sea $q \in \bar{S}$ y $v_1, v_2 \in T_q \bar{S}$. Como φ es difeomorfismo, entonces φ^{-1} lo es. Así, $\varphi^{-1}: \bar{S} \to S$ es dif. y, $\exists\ p \in S \ /\ \varphi(p) = q$.