Notas Complementarias de Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

13 de octubre de 2024

Índice general

Capítulo 5

Transformación de Laplace

5.1. Introducción

La trasnformación de Laplace surge como una forma de convertir ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO's), en ecuaciones algebraicas. Una vez resuelta la ecuación algebraica, mediante la transformación inversa de Laplace, uno puede recuperar la solución original de nuestra ecuación diferencial.

La transforamción de Laplace nos da información sobre la naturaleza de las ecuaciones en las que estamos trabajando. Puede ser vista como una *conversión entre el tiempo y el dominio de frecuencia.* Por ejemplo, considere la siguiente ecuación diferencial:

$$mx''(t) = cx'(t) + kx(t) = f(t)$$

Podemos pensar a t como el parámetro de tiempo y $f(t)$ como la señal de salida. La transformación de Laplace convierte la ecuación diferencial establecida en el tiempo en una ecuación algebraica (donde no se ven involucradas derivadas de ningún orden), donde la nueva variable independiente s es la *frecuencia*.

5.2. Definición y primeros ejemplos

Definición 5.2.1
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función medible. Se define la **transformada de Laplace** de f, denotada por $F = \mathcal{L}\{f\}$ en el punto $s \in \mathbb{R}$ como:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

siempre que la integral de la derecha sea *finita*.

Observación 5.2.1
Para una función medible $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, puede que la transformada de Laplace no siempre esté bien definida en todo $\mathbb{R}$ (en general, esto no va a ocurrir).

En ocasiones también se denota por la letra mayúscula de la función a su transformada de Laplace.

Ejemplo 5.2.1

Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(t) = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces

$$F(s) = \frac{1}{s}$$

para todo $s > 0$.

Solución:

En efecto, sea $s > 0$. Se tiene que

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st}\, dt \end{aligned}$$

donde la integral de la derecha existe si y sólo si $s > 0$. Siguiendo:

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\, dt \\ &= -\frac{e^{-st}}{s}\Big|_{t=0}^{t=\infty} \\ &= -\frac{e^{-st}}{s}\Big|_{t=0}^{t=\infty} \\ &= \frac{1}{s} - 0 \\ &= \frac{1}{s} \end{aligned}$$

para todo $s > 0$. $\square$

Ejercicio 5.2.1
Calcule la transformada de Laplace de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $t \mapsto e^{-at}$, con $a \in \mathbb{R}$.

Solución:

Sea $s \in \mathbb{R}$. Veamos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} e^{-at}\, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-(s+a)t}\, dt \end{aligned}$$

donde la integral existe si y sólo si $s + a > 0$. Por ende, para $s > -a$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f\}(s) &= \int_0^\infty e^{-(s+a)t}\, dt \\ &= -\frac{e^{-(s+a)t}}{s+a}\Big|_0^\infty \\ &= \frac{1}{s+a} \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 5.2.1
Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones tales que existe $\mathcal{L}\{f\}$ y $\mathcal{L}\{g\}$ en el punto $s \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\mathcal{L}\{\alpha f + \beta g\}(s) = \alpha \mathcal{L}\{f\}(s) + \beta \mathcal{L}\{g\}(s)$$

es decir, si D_F y D_G son los dominios de las respectivas transformaciones de Laplace de f y g, entonces el dominio de la trasnformación de Laplace de la suma de $f+g$ es $D_F \cap D_G$ y, el operador $\mathcal{L}$ es lineal.

Demostración:

■