

# Notas Taller Topología Algebraica

Cristo Daniel Alvarado

13 de septiembre de 2024

# Índice general

<b>2. Grupos Libres y Productos de Grupos Libres</b>	<b>2</b>
2.1. Producto Débil de Grupos . . . . .	2
2.2. Grupos Abelianos Libres . . . . .	6

# Capítulo 2

## Grupos Libres y Productos de Grupos Libres

En los capítulos siguientes será indispensable el tratar con este tipo de grupos dada la naturaleza del grupo fundamental de los espacios topológicos.

### 2.1. Producto Débil de Grupos

#### Observación 2.1.1

De ahora en adelante, el símbolo  $\forall$  significa *para casi todo salvo una cantidad finita de elementos*.

#### Observación 2.1.2

En esta parte,  $I$  no denotará al intervalo  $[0, 1]$ , sino a una indexación de una familia.

#### Definición 2.1.1

Sea  $\mathcal{G} = \{G_i\}_{i \in I}$  una familia arbitraria no vacía de grupos. Se define el **producto directo de la familia  $\mathcal{G}$**  por:

$$\prod \mathcal{G} = \left\{ x : I \rightarrow \prod_{i \in I} G_i \mid x \text{ es función} \right\}$$

y en ocasiones se denotará simplemente por  $\prod_{i \in I} G_i$ . Se dota a este conjunto de la siguiente operación: si  $x, y \in \prod \mathcal{G}$ , entonces  $x \cdot y : I \rightarrow \prod_{i \in I} G_i$  es la función tal que

$$(x \cdot y)(i) = x(i) \cdot y(i)$$

para todo  $i \in I$ , siendo la multiplicación respectiva en cada grupo.

En caso de que no lo haya hecho, queda como ejercicio al lector probar que el producto directo de una familia de grupos  $\mathcal{G}$  es un grupo dotado de la operación de la definición anterior.

#### Definición 2.1.2

Sea  $\mathcal{G} = \{G_i\}_{i \in I}$  una familia arbitraria no vacía de grupos. Se define el **producto débil de la familia  $\mathcal{G}$**  como el subgrupo de  $\prod \mathcal{G}$  dado por:

$$\prod \mathcal{G}^* = \left\{ x \in \prod \mathcal{G} \mid x(i) = e_i, \forall i \in I \right\}$$

donde  $e_i$  denota la identidad de  $G_i$  para cada  $i \in I$ .

### Proposición 2.1.1

Si  $\mathcal{G}$  es una familia arbitraria no vacía de grupos, entonces

$$\prod \mathcal{G}^* < \prod \mathcal{G}$$

es decir, que  $\prod \mathcal{G}^*$  es un subgrupo de  $\prod \mathcal{G}$ .

### Demostración:

Ejercicio. ■

### Definición 2.1.3

Sea  $\mathcal{G} = \{G_i\}_{i \in I}$  una familia no vacía de grupos. Si  $G_i$  es abeliano para cada  $i \in I$ , entonces llamaremos a  $\prod \mathcal{G}^*$  la **suma directa de los grupos**  $G_i$ . En este caso, se denotará la operación del grupo de forma aditiva y se le denotará por:

$$\prod \mathcal{G}^* = \bigoplus_{i \in I} G_i = \bigoplus \mathcal{G}$$

### Observación 2.1.3

Note que ambas definiciones coinciden si  $I$  es un conjunto finito.

### Definición 2.1.4

En las condiciones de la definición anterior, para cada índice  $i \in I$  definimos un **monomorfismo natural**  $\varphi_i : G_i \rightarrow \prod \mathcal{G}^*$  definido como sigue:  $\forall g \in G_i$  y para todo  $j \in I$ :

$$\varphi_i(g)_j(\varphi_i(g))(j) = \begin{cases} g & \text{si } i = j \\ e_j & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

En el caso en que cada  $G_i$  sea un grupo abeliano, el siguiente teorema da una caracterización importante de su producto débil y de los monomorfismos  $\varphi_i$ .

### Teorema 2.1.1

Si  $\{G_i\}_{i \in I}$  es una familia no vacía de grupos abelianos y,

$$G = \bigoplus_{i \in I} G_i$$

entonces para cualquier grupo abeliano  $A$  y cualquier familia de homomorfismos  $\{\psi_i\}_{i \in I}$  tales que

$$\psi_i : G_i \rightarrow A, \quad \forall i \in I$$

Existe un único homomorfismo  $f : G \rightarrow A$  tal que para todo  $i \in I$  el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} G_i & \xrightarrow{\varphi_i} & G \\ & \searrow \psi_i & \downarrow f \\ & & A \end{array}$$

Figura 1. Diagrama conmutativo de  $G$  y  $A$ .

esto es,  $f \circ \varphi_i = \psi_i$  para todo  $i \in I$ .

---

### **Demostración:**

Sean  $A$  un grupo abeliano y  $\{\psi_i\}_{i \in I}$  una familia de homomorfismos tales que

$$\psi_i : G_i \rightarrow A, \quad \forall i \in I$$

sea ahora  $x \in G$ , como  $x_i = e_i$ ,  $\forall i \in I$  se tiene pues al ser  $\psi_i$  homomorfismos debe suceder que  $\psi_i(x_i) = e_A$ ,  $\forall i \in I$  (siendo  $e_A$  la identidad de  $A$ ). Por lo cual la suma

$$\sum_{i \in I} \psi_i(x_i)$$

está bien definido (pues solo una cantidad finita de estos elementos es diferente de la identidad). Hacemos

$$f(x) = \sum_{i \in I} \psi_i(x_i), \quad \forall x \in G$$

Veamos que esta función está bien definida, ya se tiene por lo anterior que  $f : G \rightarrow A$ . Sea  $x \in G$ , si  $x$  se expresa como

$$x = \sum_{j=1}^n y_j \quad \text{y} \quad x = \sum_{k=1}^m z_k$$

con  $y_j, z_k \in G$  para todo  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  y para todo  $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , sea

$$I_0 = \{i_1, \dots, i_r\}$$

el subconjunto de  $I$  tal que si  $i \in I_0$ , entonces

$$y_{j_i} \neq e_i \quad \text{o} \quad z_{k_i} \neq e_i$$

para algún  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  o algún  $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$ . Veamos que

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{j=1}^n y_j\right) &= \sum_{i \in I} \psi_i \left( \left( \sum_{j=1}^n y_j \right)_i \right) \\ &= \sum_{i \in I_0} \psi_i \left( \sum_{j=1}^n y_{j_i} \right) \\ &= \sum_{i \in I_0} \sum_{j=1}^n \psi_i(y_{j_i}) \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{k=1}^m z_k\right) &= \sum_{i \in I} \psi_i \left( \left( \sum_{k=1}^m z_k \right)_i \right) \\ &= \sum_{i \in I_0} \psi_i \left( \sum_{k=1}^m z_{k_i} \right) \\ &= \sum_{i \in I_0} \sum_{k=1}^m \psi_i(z_{k_i}) \end{aligned}$$

por ende,

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{j=1}^n y_j\right) - f\left(\sum_{k=1}^m z_k\right) &= \sum_{i \in I_0} \sum_{j=1}^n \psi_i(y_{ji}) - \sum_{i \in I_0} \sum_{k=1}^m \psi_i(z_{ki}) \\
&= \sum_{i \in I_0} \left( \sum_{j=1}^n \psi_i(y_{ji}) - \sum_{k=1}^m \psi_i(z_{ki}) \right) \\
&= \sum_{i \in I_0} \left( \psi_i\left(\sum_{j=1}^n y_{ji}\right) - \psi_i\left(\sum_{k=1}^m z_{ki}\right) \right) \\
&= \sum_{i \in I_0} \left( \psi_i\left(\sum_{j=1}^n y_{ji}\right) - \psi_i\left(\sum_{k=1}^m z_{ki}\right) \right) \\
&= \sum_{i \in I_0} \left( \psi_i\left(\sum_{j=1}^n y_{ji} - \sum_{k=1}^m z_{ki}\right) \right)
\end{aligned}$$

pero  $x_i = \sum_{j=1}^n y_{ji}$  y  $x_i = \sum_{k=1}^m z_{ki}$ , por lo cual

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{j=1}^n y_j\right) - f\left(\sum_{k=1}^m z_k\right) &= 0 \\
\Rightarrow f\left(\sum_{j=1}^n y_j\right) &= f\left(\sum_{k=1}^m z_k\right)
\end{aligned}$$

Se sigue que  $f$  está bien definida. Veamos que es homomorfismo. Sean  $x, y \in G$ , entonces

$$\begin{aligned}
f(x + y) &= \sum_{i \in I} \psi_i(x_i + y_i) \\
&= \sum_{i \in I} \psi_i(x_i) + \psi_i(y_i)
\end{aligned}$$

como  $A$  es abeliano, esta suma se puede reordenar de cualquier forma, en particular:

$$\begin{aligned}
f(x + y) &= \sum_{i \in I} \psi_i(x_i) + \psi_i(y_i) \\
&= \sum_{i \in I} \psi_i(x_i) + \sum_{i \in I} \psi_i(y_i) \\
&= f(x) + f(y)
\end{aligned}$$

por lo que  $f$  es homomorfismo. Sea ahora  $i \in I$ , entonces

$$\begin{aligned}
f \circ \varphi_i(x_i) &= f(\varphi_i(x_i)) \\
&= \sum_{j \in I} \psi_j(\varphi_i(x_i)_j) \\
&= \psi_i(\varphi_i(x_i)_i) \\
&= \psi_i(x_i), \quad \forall x_i \in G_i
\end{aligned}$$

Luego,  $f \circ \varphi_i = \psi_i$  para todo  $i \in I$ . Veamos la unicidad. Para ello, recordemos antes que si  $x \in G$ , entonces

$$x = \sum_{i \in I} \varphi_i(x_i)$$

(básicamente  $x$  se expresa como la suma de sus componentes una por una vistas como elementos de  $G$ ) siendo esta suma finita y por ende, está bien definida. Si  $g : G \rightarrow A$  es otro homomorfismo tal que

$$g \circ \varphi_i = \psi_i, \quad \forall i \in I$$

se tiene que

$$\begin{aligned} g(x) &= g\left(\sum_{i \in I} \varphi_i(x_i)\right) \\ &= \sum_{i \in I} g \circ \varphi_i(x_i) \\ &= \sum_{i \in I} \psi_i(x_i) \\ &= f(x), \quad \forall x \in G \end{aligned}$$

por ende,  $f$  es único. ■

Este teorema caracteriza la suma directa de grupos abelianos, como lo muestra la siguiente proposición.

---

**Proposición 2.1.2**

Sea  $\{G_i\}_{i \in I}$  una familia de grupos abelianos y  $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$ ; sea  $G'$  un subgrupo abeliano y consideremos para cada  $i \in I$  las funciones  $\varphi'_i : G_i \rightarrow G'$  tales que la conclusión del Teorema 2.1.1 cambiando a  $G'$  por

---

**Demostración:** ■

## 2.2. Grupos Abelianos Libres

Recordemos que si  $G$  es un grupo, decimos que un conjunto  $S \subseteq G$  **genera a  $G$** , si

$$G = \left\{ s_1^{\epsilon_1} \cdots s_m^{\epsilon_m} \mid s_i \in S, \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket; m \in \mathbb{N} \right\}$$

y en tal caso, se denota  $G = \langle S \rangle$ .

**Ejemplo 2.2.1**

Si  $G$  es un grupo cíclico de orden  $n \in \mathbb{N}$ , entonces existe  $x \in G$  tal que  $G = \langle x \rangle$ , así que

$$G = \{x, x^2, \dots, x^n = e\}$$

**Definición 2.2.1**

Sea  $S$  un conjunto arbitrario. Un **grupo abeliano libre** en el conjunto  $S$  es un grupo abeliano  $F$  junto con una función  $f : S \rightarrow F$  tal que se cumple la siguiente condición:

- Para cualquier grupo abeliano y cualquier función  $\psi : S \rightarrow A$ , existe un único homomorfismo  $f : F \rightarrow A$  tal que el diagrama:

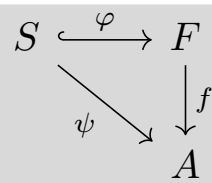


Figura 2. Diagrama conmutativo de  $F$  y  $A$ .

es conmutativo.