

Notas curso Topología I.
Separabilidad, Filtros

Cristo Daniel Alvarado

20 de abril de 2024

Índice general

2. Separabilidad	2
2.1. Axiomas de separación	2
2.2. Espacios T_1	3
2.3. Espacios T_3	6
2.4. Espacios T_4	8
3. Filtros	13
3.1. Conceptos Fundamentales	13

Capítulo 2

Separabilidad

2.1. Axiomas de separación

Definición 2.1.1

Sea (X, τ) un espacio topológico.

1. (X, τ) se dice un **espacio** T_0 si dados $a, b \in X$ con $a \neq b$ existe un abierto que contiene a alguno de los dos puntos, pero no contiene al otro.
2. (X, τ) se dice un **espacio** T_1 si dados $a, b \in X$ con $a \neq b$ existen $U, V \subseteq X$ abiertos tales que $a \in U, b \in V$ y $a \notin V, b \notin U$.
3. (X, τ) se dice un **espacio** T_2 si dados $a, b \in X$ con $a \neq b$ existen $U, V \subseteq X$ abiertos tales que $a \in U, b \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Esto es equivalente a que el espacio sea de Hausdorff.
4. (X, τ) se dice un **espacio** T_3 si dados $p \in X$ y $A \subseteq X$ cerrado tal que $p \notin A$, existen $U, V \in \tau$ tales que $p \in U, A \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.
5. (X, τ) se dice un **espacio** T_4 si dados $A, B \subseteq X$ cerrados y disjuntos, existen $U, V \in \tau$ tales que $A \subseteq U, B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.
6. (X, τ) se dice un **espacio regular** si es un espacio T_3 y T_1 .
7. (X, τ) se dice un **espacio normal** si es un espacio T_4 y T_1 .

Observación 2.1.1

Notemos que:

$$T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$$

Ejemplo 2.1.1

Considere al conjunto $X = \{1, 2\}$ y $\tau = \{X, \emptyset, \{1\}\}$. Afirmamos que (X, τ) es T_0 , pero no es T_1 y, por ende tampoco puede ser T_2 .

Ejemplo 2.1.2

Sea (\mathbb{R}, τ_{cf}) . Afirmamos que (\mathbb{R}, τ_u) es T_1 . En efecto, sean $r, s \in \mathbb{R}$ tales que $r \neq s$. Los conjuntos $U = \mathbb{R} - \{s\}, V = \mathbb{R} - \{r\} \in \tau_{cf}$ pues sus complementos son finitos, además:

$$r \in U \quad \text{y} \quad s \in V$$

además, $r \notin V$ y $s \notin U$. Por tanto, el espacio de T_1 . Pero no es T_2 .

En efecto, suponga que existen $U, V \in \tau_{cf}$ abiertos tales que $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \in U$, $\frac{1}{\pi} \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. En particular, se tiene que $\mathbb{R} - U$ y $\mathbb{R} - V$ son finitos. Por tanto:

$$\begin{aligned}(\mathbb{R} - U) \cup (\mathbb{R} - V) &= \mathbb{R} - (U \cap V) \\ &= \mathbb{R}\end{aligned}$$

es finito, por tanto, \mathbb{R} es finito#_c.

Ejemplo 2.1.3

Considere al espacio $(\mathbb{R}, \tau_I = \{X, \emptyset\})$. Afirmamos que (\mathbb{R}, τ_I) es T_4 y T_3 , pero NO es T_0 , pues si $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1}{\pi} \in \mathbb{R}$, solo hay un abierto que contiene a alguno de los dos puntos, el cual es \mathbb{R} , que siempre tiene a los dos puntos. Por ende, el espacio no es T_0 .

Proposición 2.1.1

T_4 y $T_1 \Rightarrow T_3$ y $T_1 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.

Demostración:

La prueba se hará más adelante. ■

2.2. Espacios T_1

Proposición 2.2.1

Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces (X, τ) es un espacio T_1 si y sólo si todo subconjunto unitario de X es cerrado.

Demostración:

Se probará la doble implicación.

\Rightarrow) : Suponga que (X, τ) es T_1 . Sea $x \in X$. Hay que probar que $X - \{x\} \in \tau$. En efecto, sea $y \in X - \{x\}$, entonces $x \neq y$. Como el espacio es T_1 existen un par de abiertos $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $x \notin V$ y $y \notin U$.

Como $y \in V$ y $x \notin V$, entonces $y \in V \subseteq X - \{x\}$. Luego $X - \{x\}$ es unión arbitraria de abiertos, luego es abierto. Por ende, $\{x\}$ es cerrado.

\Leftarrow) : Suponga que todo subconjunto unitario de X es cerrado. Sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Como $\{x\}, \{y\}$ son cerrados, entonces $U = X - \{y\}$ y $V = X - \{x\}$ son abiertos y cumplen que:

$$x \in U, y \in V \quad x \notin V, y \notin U$$

por tanto, como fueron arbitrarios los dos elementos $x, y \in X$ distintos, se sigue que (X, τ) es T_1 . ■

Corolario 2.2.1

Sea (X, τ) un espacio topológico. (X, τ) es T_1 si y sólo si todo subconjunto finito de X es cerrado.

Demostración:

Es inmediata de la proposición anterior. ■

Corolario 2.2.2

Sea X un conjunto finito y τ una topología definida sobre X . (X, τ) es T_1 si y sólo $\tau = \tau_D$.

Demostración:

Es inmediata de la proposición anterior. ■

Proposición 2.2.2

Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces, (X, τ) es T_1 si y sólo si $\tau_{cf} \subseteq \tau$.

Demostración:

Se probarán las dos implicaciones.

\Rightarrow) : Sea $A \in \tau_{cf}$ con $A \neq \emptyset$, luego $X - A$ es un conjunto finito. Como (X, τ) es T_1 , entonces $X - A$ es cerrado (debe serlo por ser finito), luego A es abierto, es decir $A \in \tau$.

\Leftarrow) : Supongamos que $\tau_{cf} \subseteq \tau$. Sean $x \in X$. El conjunto $X - \{x\}$ es finito, luego $X - \{x\} \in \tau$, por ende el conjunto $\{x\}$ es cerrado. Como el x fue arbitrario, se sigue que todo conjunto unipuntual es cerrado luego, por una proposición anterior, se sigue que (X, τ) es T_1 . ■

Corolario 2.2.3

La topología τ_{cf} es la topología más gruesa (o menos fina) que podemos definir sobre un conjunto para que el espacio topológico (X, τ_{cf}) sea T_1 .

Demostración:

Es inmediata de la proposición anterior. ■

Proposición 2.2.3

La propiedad de ser un espacio topológico T_1 es hereditaria.

Demostración:

Sea (X, τ) un espacio topológico T_1 y, tomemos $Y \subseteq X$. Formemos así al espacio (Y, τ_Y) , queremos ver que este espacio es T_1 . En efecto, sea $y \in Y$, entonces:

$$\{y\} = \{y\} \cap Y$$

luego, $\{y\} \subseteq Y$ es un conjunto cerrado en (Y, τ_Y) , ya que $\{y\} \subseteq X$ es un conjunto cerrado en (X, τ) . Por ende, todo conjunto unipuntual es cerrado en (Y, τ_Y) , luego este subespacio es T_1 . ■

Proposición 2.2.4

La propiedad de ser un espacio topológico T_1 es topológica.

Demostración:

Sean (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) espacios topológicos homeomorfos y, suponga que (X_1, τ_1) es un espacio T_1 . Sea $h : (X_1, \tau_1) \rightarrow (X_2, \tau_2)$ el homeomorfismo entre estos dos espacios. Como esta función es homeomorfismo, es una biyección cerrada y continua. Sea $x_2 \in X_2$. Entonces, existe $x_1 \in X_1$ tal que:

$$h(x_1) = x_2$$

luego, por ser biyección:

$$h(\{x_1\}) = \{x_2\}$$

donde $\{x_1\}$ es cerrado en (X_1, τ_1) . Como h es cerrada entonces, $\{x_2\}$ es cerrado en (X_2, τ_2) . Por tanto, todo conjunto unipuntual es cerrado en (X_2, τ_2) , así (X_2, τ_2) es T_1 . ■

Proposición 2.2.5

Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ una familia de espacios topológicos. Sea

$$X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$$

entonces, (X, τ_p) es T_1 si y sólo si (X_α, τ_α) es T_1 , para todo $\alpha \in I$.

Demostración:

Se probarán las dos implicaciones.

\Rightarrow) : Suponga que (X, τ_p) es T_1 . Como la propiedad de ser un espacio T_1 es hereditaria y topológica, entonces al tenerse que (X_α, τ_α) es homeomorfo a un subespacio de (X, τ_p) , tal subespacio es T_1 y la propiedad se conserva bajo homeomorfismos luego, se tiene que (X_α, τ_α) es T_1 , para todo $\alpha \in I$.

\Leftarrow) : Suponga que (X_α, τ_α) es T_1 , para todo $\alpha \in I$. Sean $x = (x_\alpha)_{\alpha \in I}, y = (y_\alpha)_{\alpha \in I} \in X$ con $x \neq y$. Por ser diferentes, existe $\alpha_0 \in I$ tal que

$$x_{\alpha_0} \neq y_{\alpha_0}$$

Como $(X_{\alpha_0}, \tau_{\alpha_0})$ es T_1 , existen $U, V \in \tau_{\alpha_0}$ tales que:

$$x_{\alpha_0} \in U, y_{\alpha_0} \in V \quad x_{\alpha_0} \notin V, y_{\alpha_0} \notin U$$

tomemos $M = \prod_{\alpha \in I} M_\alpha$ y $N = \prod_{\alpha \in I} N_\alpha$, donde:

$$M_\alpha = \begin{cases} X_\alpha & \text{si } \alpha \neq \alpha_0 \\ U & \text{si } \alpha = \alpha_0 \end{cases}$$

y

$$N_\alpha = \begin{cases} X_\alpha & \text{si } \alpha \neq \alpha_0 \\ V & \text{si } \alpha = \alpha_0 \end{cases}$$

para todo $\alpha \in I$. Entonces, $x \in M, y \in N$ con $N, M \in \tau_p$, pero $x \notin N, y \notin M$.

Por tanto, (X, τ_p) es T_1 . ■

Proposición 2.2.6

Sea (X, τ) un espacio topológico, y sea

$$\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$$

entonces, (X, τ) es T_2 si y sólo si Δ es un subconjunto cerrado de $(X \times X, \tau_p)$ (da igual si es la topología producto o de caja ya que ambas coinciden).

Demostración:

Se probarán las dos implicaciones.

\Rightarrow) : Suponga que (X, τ) es T_2 . Veamos que Δ es cerrado en $(X \times X, \tau_p)$. Tomemos $(a, b) \in X \times X$ tal que $(a, b) \notin \Delta$, luego $a \neq b$. Como (X, τ) es T_2 , existen dos abiertos $U, V \in \tau$ tales que:

$$a \in U, b \in V \quad U \cap V = \emptyset$$

Sea $L = U \times V$. Se tiene que $(a, b) \in L$ y $L \in \tau_p$. Además, $\Delta \cap L = \emptyset$. En efecto, suponga que existe un elemento $(x, x) \in L$, entonces $x \in U$ y $x \in V$, luego $U \cap V \neq \emptyset$. Por tanto, $\Delta \cap L = \emptyset$. Así, el conjunto $X \times X - \Delta$ es abierto por ser unión arbitraria de abiertos, luego Δ es cerrado en $(X \times X, \tau_p)$.

\Leftarrow) : Suponga que Δ es cerrado en $(X \times X, \tau_p)$. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Entonces, $(x, y) \notin \Delta$, luego $(x, y) \in X \times X - \Delta$ el cual es abierto, luego existe un básico $B = U \times V$ tal que $(x, y) \in U \times V \subseteq X \times X - \Delta$, siendo $U, V \in \tau$.

Por la parte anterior, se tiene que $U \cap V = \emptyset$. Por tanto:

$$x \in U, y \in V \quad U \cap V = \emptyset$$

por ende, al ser los elementos diferentes $x, y \in X$ arbitrarios, se sigue que (X, τ) es T_2 . ■

2.3. Espacios T_3

Proposición 2.3.1

Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces, el espacio es T_3 si y sólo si dado $x \in X$ y $U \in \tau$ tal que $x \in U$ existe $V \in \tau$ tal que $x \in V$ y $\overline{V} \subseteq U$.

Demostración:

\Rightarrow) : Suponga que (X, τ) es T_3 . Sea $x \in X$ y $U \in \tau$ tal que $x \in U$, luego $x \notin X - U$, el cual es cerrado, luego por ser el espacio T_3 existen $W, V \in \tau$ abiertos disjuntos tales que:

$$x \in V \quad \text{y} \quad X - U \subseteq W$$

es claro que $V \subseteq U$ (pues, $W \subseteq X - U$ y $W \cap V = \emptyset$). Veamos que $\overline{V} \subseteq U$. En efecto, supongamos que $y \in \overline{V}$ y $y \notin U$, entonces $y \in W$, luego el conjunto $W \cap V \neq \emptyset$. Por ende, $\overline{V} \subseteq U$.

\Leftarrow) : Sea $x \in X$ y $F \subseteq X$ cerrado tal que $x \notin F$, entonces $x \in X - F$ el cual es abierto. Luego por hipótesis existe un cerrado \overline{V} tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq X - F$.

Luego, $F \subseteq X - \overline{V}$. Tomemos $W = X - \overline{V}$. Entonces, V y W son abiertos tales que $x \in V$, $F \subseteq W$ y, $W \cap V = \emptyset$. Por tanto, (X, τ) es T_3 . ■

Ejemplo 2.3.1

Considere el espacio topológico $(X = \{1, 2\}, \tau_I)$. Este espacio es T_3 pero no es T_0 .

Ejemplo 2.3.2

Sea $K = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$, tomemos \mathcal{B} la colección de subconjuntos de \mathbb{R} formada por los siguientes conjuntos:

1. Todos los intervalos abiertos (a, b) .
2. Todos los conjuntos de la forma $(a, b) - K$.

Tenemos que \mathcal{B} es una base para una topología sobre \mathbb{R} .

Sea τ_K la topología generada por la colección \mathcal{B} . Tenemos que $\tau_u \subseteq \tau_K$. Por ende, como (\mathbb{R}, τ_u) es T_2 , se sigue que (\mathbb{R}, τ_K) también lo es.

Sean $l \notin \mathbb{R} - K$ y $L = (l - 1, l + 1) - K$. Tenemos que $l \in L$. El conjunto L es un básico y, además, $L \subseteq \mathbb{R} - K$. Por tanto, $\mathbb{R} - K \in \tau_K$, luego K es un conjunto cerrado en (\mathbb{R}, τ_K) .

Tenemos que $0 \notin K$. Suponga que $U, V \in \tau$ son abiertos tales que $0 \in U$, $K \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. Como $0 \in U$. Sea $B \in \mathcal{B}$ un básico tal que $x \in B \subseteq U$. Tenemos que, dado un intervalo abierto que contenga al 0, este siempre contiene puntos de K , luego B debe ser de la forma $B = (a, b) - K$.

Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} \in (a, b)$. Se tiene que $\frac{1}{m} \in K \subseteq V$, luego existe un básico (c, d) (debe ser de esta forma) tal que $\frac{1}{m} \in (c, d) \subseteq V$. Ahora, podemos suponer que $a < 0 < c < d < b$. Sea $\zeta \in \mathbb{R}$

tal que $\zeta < \frac{1}{m}$ y $\max\{c, \frac{1}{m+1}\} < \zeta$, luego:

$$c < \zeta < \frac{1}{m}$$

entonces, en particular, $\zeta \in (c, d)$, $\zeta \notin K$ ya que $\frac{1}{m+1} < \zeta < \frac{1}{m}$ y $\zeta \in (a, b)$. Por tanto, $\zeta \in U \cap V \#_c$. Así, (\mathbb{R}, τ_K) no es T_3 .

Proposición 2.3.2

La propiedad de ser T_3 cumple:

1. Se hereda.
 2. Es topológica.
-

Demostración:

De (1): Sea (X, τ) un espacio topológico T_3 y sea $Y \subseteq X$. Probaremos que (Y, τ_Y) es T_3 . Tomemos $A \subseteq Y$ cerrado con la topología τ_Y y $p \in Y - A$.

Como A es cerrado en el subespacio, existe $C \subseteq X$ cerrado en (X, τ) tal que:

$$A = Y \cap C$$

En particular, $A \subseteq C$, es decir que $Y - C \subseteq Y - A$, luego $p \notin C$. Como (X, τ) es T_3 , existen $U, V \in \tau$ disjuntos tales que:

$$p \in V \quad \text{y} \quad C \subseteq U$$

luego, los conjuntos $Y \cap U, Y \cap V \in \tau_Y$ son tales que:

$$p \in Y \cap V \quad \text{y} \quad A = Y \cap C \subseteq Y \cap U$$

siendo estos disjuntos (pues U y V lo son). Por tanto, (Y, τ_Y) es T_3 .

De (2): Sean (X, τ) y (Y, σ) espacios topológicos homeomorfos, y $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ el homeomorfismo entre ambos.

Suponga que (X, τ) es T_3 . Probaremos que (Y, σ) también es T_3 . En efecto, sean $p \in Y$ y $F \subseteq Y$ cerrado tales que $p \notin F$, es decir que $p \in Y - F$. Sea

$$F' = f^{-1}(F)$$

y $p' = f^{-1}(p)$. Por ser homeomorfismo, se tiene que F' es cerrado en (X, τ) y, por ser inyectiva se tiene que $p' \notin F'$. Luego, como (X, τ) es T_3 existen $U', V' \in \tau$ disjuntos tales que:

$$p' \in V' \quad \text{y} \quad F' \subseteq U'$$

Sean $U = f(U')$ y $V = f(V')$, los cuales son abiertos en (Y, σ) tales que:

$$p = f(p') \in V \quad \text{y} \quad F = f(F') \subseteq U$$

siendo U, V disjuntos por serlo U', V' . Luego, (Y, σ) es T_3 . ■

Proposición 2.3.3

Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ una familia de espacios topológicos, sea

$$X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$$

entonces, (X, τ_p) es T_3 si y sólo si (X_α, τ_α) es T_3 , para todo $\alpha \in I$.

Demostración:

\Rightarrow) : Es inmediata del hecho de que la propiedad de que un espacio sea T_3 es hereditaria y topológica.

\Leftarrow) : Suponga que para todo $\alpha \in I$, (X_α, τ_α) es T_3 . Veamos que (X, τ_p) es T_3 . Sea $x \in X$ y $U \in \tau_p$ un abierto tal que $x \in U$.

Como $U \in \tau_p$, podemos encontrar un básico B , que podemos expresar como $B = \prod_{\alpha \in I} B_\alpha$, donde $B_\alpha = X_\alpha$ para casi todo salvo una cantidad finita de $\alpha \in I$, y B_α es abierto en (X_α, τ_α) para todo $\alpha \in I$.

Como cada (X_α, τ_α) es T_3 , entonces para cada B_α existe $V_\alpha \in \tau_\alpha$ tal que $x_\alpha \in V_\alpha$ y $\overline{V_\alpha} \subseteq B_\alpha$, para todo $\alpha \in I$.

Si $B_\alpha = X_\alpha$, tomemos $V_\alpha = X_\alpha$, en caso contrario lo dejamos igual. Entonces, el conjunto $V = \prod_{\alpha \in I} V_\alpha$ es un básico, en particular, abierto, tal que $x \in V$, y

$$\overline{V} = \overline{\prod_{\alpha \in I} V_\alpha} = \prod_{\alpha \in I} \overline{V_\alpha} \subseteq \prod_{\alpha \in I} B_\alpha = B \subseteq U$$

por tanto, (X, τ_p) es T_3 . ■

Corolario 2.3.1

Sea (X, τ) un espacio topológico.

1. Si (X, τ) es regular, entonces y $Y \subseteq X$, entonces (Y, τ_Y) es regular.
 2. Si (X, τ) y (X', τ') son espacios homeomorfos y, (X, τ) es regular, entonces (X', τ') es regular.
 3. Si $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ es una familia de espacios topológicos. Si $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$, entonces (X, τ_p) es regular si y sólo si (X_α, τ_α) es regular, para todo $\alpha \in I$.
-

Demostración:

Son inmediatas del hecho que la propiedad de ser T_1 y T_3 se hereda y es topológica y, de que esta propiedad se preserva bajo productos y elementos del producto. ■

2.4. Espacios T_4

Proposición 2.4.1

Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces, (X, τ) es T_4 si y sólo si dados $A \subseteq X$ cerrado y $U \in \tau$ tales que $A \subseteq U$, existe un abierto V tal que $A \subseteq V$ y $\overline{V} \subseteq U$.

Demostración:

\Rightarrow) : Supongamos que (X, τ) es T_4 . Sean $A \subseteq X$ cerrado y $U \in \tau$ tal que $A \subseteq U$. El conjunto $B = X - U$ es un cerrado tal que $A \cap B = \emptyset$. Como el espacio (X, τ) es T_4 , existen dos abiertos $V, W \in \tau$ tales que:

$$A \subseteq V \quad \text{y} \quad B \subseteq W$$

y, $V \cap W = \emptyset$. Como $V \cap W = \emptyset$, entonces $V \subseteq X - W \subseteq X - B = U$. Afirmamos que $\overline{V} \subseteq U$. En efecto, notemos que $X - W$ es un cerrado que contiene a V , por ende $\overline{V} \subseteq X - W \subseteq U$, luego $\overline{V} \subseteq U$. Con lo cual se sigue el resultado.

\Leftarrow) : Sean $A, B \subseteq X$ cerrados tales que $A \cap B = \emptyset$. Se tiene entonces que:

$$A \subseteq X - B$$

donde $X - B \in \tau$, luego por hipótesis existe $U \in \tau$ abierto tal que:

$$A \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq X - B$$

el conjunto $V = X - \overline{U}$ es un abierto para el cual, se tiene que $B \subseteq V$. Luego, $U, V \in \tau$ son tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. Luego el espacio es T_4 . ■

Proposición 2.4.2

Sea (X, τ) un espacio T_4 y sea $A \subseteq X$ un conjunto cerrado. Entonces, (A, τ_A) es T_4 .

Demostración:

Sean $M, N \subseteq (A, \tau_A)$ cerrados tales que $M \cap N = \emptyset$. Como A es cerrado en (X, τ) , entonces M, N son cerrados en (X, τ) . Luego, como (X, τ) es T_4 , existen dos abiertos $U', V' \in \tau$ tales que

$$M \subseteq U', \quad N \subseteq V', \quad U' \cap V' = \emptyset$$

Luego, los conjuntos $U = A \cap U', V = A \cap V' \in \tau_A$ son disjuntos tales que $M \subseteq U$ y $N \subseteq V$, ya que $M, N \subseteq A$. Así, (A, τ_A) es T_4 . ■

Lema 2.4.1

Sean (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) dos espacios topológicos homeomorfos. Entonces, si $f : (X_1, \tau_1) \rightarrow (X_2, \tau_2)$ es el homeomorfismo entre ambos espacios, se tiene que $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$, para todo $A \subseteq X_1$.

Demostración:

Como f es homeomorfismo, en particular es continua. ■

Proposición 2.4.3

La propiedad de ser T_4 es topológica.

Demostración:

Sean (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) espacios topológicos homeomorfos tales que (X_1, τ_1) es T_4 . Sea $f : (X_1, \tau_1) \rightarrow (X_2, \tau_2)$ el homeomorfismo entre ellos.

Veamos que (X_2, τ_2) es T_4 . En efecto, sea $A \subseteq X_2$ cerrado y $U \in \tau_2$ abierto tal que $A \subseteq U$. Como f es homeomorfismo, entonces $f^{-1}(A) \subseteq X_1$ es cerrado y, $f^{-1}(U) \in \tau_1$ son tales que:

$$f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(U)$$

Luego, como (X_1, τ_1) es T_4 , existe $W \in \tau_1$ tal que:

$$f^{-1}(A) \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq f^{-1}(U)$$

Sea $V = f(W)$. Como f es homeomorfismo, es una función abierta, luego $V \in \tau_2$, para la cual se cumple que:

$$A \subseteq V \subseteq U$$

pero, $f(\overline{V}) = \overline{f(V)}$ (por ser f homeomorfismo), se tiene que:

$$A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$$

por tanto, (X_2, τ_2) es T_4 . ■

Lema 2.4.2 (Lema de Urysohn)

Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces, (X, τ) es T_4 si y sólo si para todos $A, B \subseteq X$ cerrados disjuntos, existe una función continua $f : (X, \tau) \rightarrow ([0, 1], \tau_u)$ tal que $f(A) = \{1\}$ y $f(B) = \{0\}$.

Demostración:

\Rightarrow) : Para probar el resultado, debemos hacer varias cosas antes:

1. Sea

$$P = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$$

Nuestro objetivo es que para cada $p \in P$ le asignemos un conjunto abierto $U_p \subseteq X$ tal que si $p, q \in P$ son tales que

$$p < q \Rightarrow \overline{U_p} \subseteq U_q$$

de esta forma, la familia $\{U_p \mid p \in P\}$ estará simplemente ordenada de la misma forma en la que sus subíndices lo están en P . Como el conjunto P es numerable, podemos usar inducción para definir cada uno de los U_p . Ordenemos los elementos de P en una sucesión de tal forma que los números 0 y 1 son los primeros de la sucesión (denotada de ahora en adelante por $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$).

Definiremos ahora los conjuntos U_p como sigue: defina

$$U_1 = X - B$$

Como A es un cerrado contenido en U_1 , por ser (X, τ) T_4 , se tiene que existe un conjunto abierto $U_0 \subseteq X$ tal que

$$A \subseteq U_0 \quad \text{y} \quad \overline{U_0} \subseteq U_1$$

En general, sea P_n el conjunto de los primeros n números racionales en la sucesión de los elementos de P . Suponga que U_p está definido para cada $p \in P_n$ y, satisface la condición:

$$p, q \in P_n \text{ tal que } p < q \Rightarrow \overline{U_p} \subseteq U_q$$

Sea r el siguiente número racional en la sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, esto es $r = p_{n+1}$. Definiremos U_r .

Considere el conjunto

$$P_{n+1} = P_n \cup \{r\}$$

Este es un subconjunto finito del intervalo $[0, 1]$ y, tiene un orden simple derivado del orden simple $<$ de $[0, 1]$.

En un conjunto finito simplemente ordenado, todo elemento tiene un predecesor inmediato y un sucesor inmediato. El número 0 es el elemento más pequeño y, 1 es el elemento más grande de P_{n+1} y, r no es 0 o 1. Por tanto, r tiene un sucesor y un predecesor inmediato, denotados respectivamente por q y p . Los conjuntos U_p y U_q están definidos y son tales que

$$\overline{U_p} \subseteq U_q$$

por hipótesis de inducción. Como (X, τ) es T_4 , entonces existe un conjunto abierto $U_r \subseteq X$ tal que

$$\overline{U_p} \subseteq U_r \quad \text{y} \quad \overline{U_r} \subseteq U_q$$

Es claro (pues los conjuntos U_p con $p \in P_n$ están ordenados por la contención), que

$$p, q \in P_{n+1} \text{ tal que } p < q \Rightarrow \overline{U_p} \subseteq U_q$$

Usando inducción, tenemos definidos los conjuntos U_p , para todo $p \in P$.

2. Ahora que se tiene definido U_p para todo número en $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$, extenderemos esta definición a todo \mathbb{Q} , haciendo

$$\begin{aligned} U_p &= \emptyset, & p < 0 \\ U_p &= X, & 1 < p \end{aligned}$$

para todo $p \in \mathbb{Q}$. Se sigue cumpliendo que para todo $p, q \in \mathbb{Q}$

$$p < q \Rightarrow \overline{U_p} \subseteq U_q$$

3. Dado un punto $p \in X$, definamos el conjunto $\mathbb{Q}(x)$ como el conjunto de todos los números racionales $p \in \mathbb{Q}$ tales que los correspondientes U_p contengan a x , es decir:

$$\mathbb{Q}(x) = \left\{ p \in \mathbb{Q} \mid x \in U_p \right\}$$

Este conjunto no contiene a ningún número menor que 0 ya que $x \notin U_p$ para todo $p \in \mathbb{Q}^-$, además, contiene a todo número mayor que 1, pues $x \in U_p$ para todo $p \in \mathbb{Q}$, $p > 1$. Por tanto, $\mathbb{Q}(x)$ es acotado inferiormente y no vacío, luego tiene ínfimo en el intervalo $[0, 1]$. Defina

$$f(x) = \inf \mathbb{Q}(x) = \inf \left\{ p \in \mathbb{Q} \mid x \in U_p \right\}$$

4. Afirmamos que f es la función deseada. Si $x \in A$, entonces $x \in U_p$ para todo $p \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$, luego

$$f(x) = \inf \mathbb{Q}(x) = 0$$

Similarmente, si $x \in B$, entonces $x \notin U_p$ para todo $p \in \mathbb{Q}$ con $p \leq 1$. Luego, $\mathbb{Q}(x)$ consiste de todos los números racionales mayores a 1 y, por ende, $f(x) = 1$.

Probaremos que f es continua. Para ello, probaremos que se cumplen dos cosas:

- I) $x \in \overline{U_r}$ implica que $f(x) \leq r$.
- II) $x \notin U_r$ implica que $f(x) \geq r$.

Para probar (1), notemos que si $x \in \overline{U_r}$, entonces $x \in U_s$, para todo $s > r$. Entonces, $\mathbb{Q}(x)$ contiene a todos los números racionales mayores que r , así que, por definición tenemos que

$$f(x) = \inf \mathbb{Q}(x) \leq r$$

Para probar (2), notemos que si $x \notin U_r$, entonces x no está en U_s para todo $s < r$. Por tanto, $\mathbb{Q}(x)$ no contiene números racionales menores que r , por lo cual

$$f(x) = \inf \mathbb{Q}(x) \geq r$$

Ahora probaremos la continuidad de f . Sea $x_0 \in X$ y un intervalo abierto (c, d) en \mathbb{R} tal que

$$c < f(x_0) < d$$

podemos encontrar números racionales $p, q \in \mathbb{Q}$ tales que

$$c < p < f(x_0) < q < d$$

Afirmamos que el conjunto

$$U = U_q - \overline{U_p}$$

es un abierto que cumple que $f(U) \subseteq (c, d)$ y es tal que $x_0 \in U$. En efecto, notemos que $x_0 \in U_q$ pues $f(x_0) < q$ implica por (2) que $f(x_0) \in U_q$ y, como $p < f(x_0)$, implica por (1) que $f(x_0) \notin \overline{U_p}$. Por tanto, $f(x_0) \in U$.

Sea $x \in U$, entonces $x \in U_q \subseteq \overline{U_q}$, por lo cual de (1), $f(x) \leq q$ y, $x \notin \overline{U_p}$ implica que $x \notin \overline{U_p}$ por lo cual de (2) se sigue que $p \leq f(x)$. Por tanto, $f(x) \in [p, q] \subseteq (c, d)$.

Luego, $f(U) \subseteq (c, d)$. Así, f es continua en $x_0 \in X$. Como el punto fue arbitrario, se sigue que f es continua en X .

Por los 4 incisos anteriores, se sigue el resultado.

\Leftarrow) : Sean $A, B \subseteq X$ cerrados disjuntos. Por hipótesis existe una función continua $f : (X, \tau) \rightarrow ([0, 1], \tau_u)$ tal que $f(A) = 1$ y $f(B) = 0$. Los conjuntos $U = f^{-1}((r, 1])$ $V = f^{-1}([0, r))$, donde $r \in (0, 1)$, son dos abiertos (ya que f es continua y $[0, r), (r, 1] \in \tau_u$) tales que:

$$A \subseteq U \quad B \subseteq V$$

y, $U \cap V = \emptyset$. ■

Capítulo 3

Filtros

3.1. Conceptos Fundamentales

Definición 3.1.1

Sean X un conjunto no vacío y \mathcal{F} una familia no vacía de subconjuntos no vacíos de X . \mathcal{F} se dice que es un **filtro** si cumple lo siguiente:

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
2. Si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.
3. Si $K \subseteq X$ y $F \subseteq K$ para algún $F \in \mathcal{F}$, entonces $K \subseteq \mathcal{F}$. (*Propiedad de absorción*).

Ejemplo 3.1.1

Sea X un conjunto no vacío. Entonces, $\{X\}$ es un filtro sobre X .

Observación 3.1.1

Si \mathcal{F} es un filtro sobre un conjunto no vacío X entonces, se cumple lo siguiente:

1. $\forall A, B \in \mathcal{F}, A \cap B \neq \emptyset$.
2. Si $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$, entonces $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$ y es no vacía.

Ejemplo 3.1.2

Sea X un conjunto no vacío y $A \subseteq X$ no vacío. Entonces,

$$\mathcal{F}_A = \left\{ M \subseteq X \mid A \subseteq M \right\}$$

es un filtro sobre X .

Observación 3.1.2

Si $A = \{x\}$, escribiremos \mathcal{F}_x en vez de $\mathcal{F}_{\{x\}}$.

Ejemplo 3.1.3

Sea (X, τ) un espacio topológico con X . Sea

$$\xi_x = \left\{ V \subseteq X \mid V \in \mathcal{V}(x) \right\}$$

con $x \in X$ (recordando que $\mathcal{V}(x)$ es el conjunto de todas las vecindades de x). Entonces, ξ_x es un filtro sobre X . Este filtro es llamado el **filtro de vecindades sobre el punto x** .

Demostración:

Tenemos que verificar 4 condiciones:

1. $X \in \xi_x$.
2. $\emptyset \notin \xi_x$.
3. $M, N \in \mathcal{V}(x)$ implica que $M \cap N \in \mathcal{V}(x)$.
4. Sea $L \subseteq X$ tal que $V \in \mathcal{V}(x)$ cumple que $V \subseteq L$, entonces $L \in \mathcal{V}(x)$.

Luego, ξ_x es un filtro sobre X . ■

Observación 3.1.3

Si \mathcal{F} es un filtro sobre X , entonces $X \in \mathcal{F}$.

Proposición 3.1.1

Sean X un conjunto no vacío y $\{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de filtros sobre X . Entonces, $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha$ es un filtro en X .

Demostración:

Sea

$$\mathcal{K} = \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha$$

1. $\mathcal{K} \neq \emptyset$, pues $X \in \mathcal{F}_\alpha$, para todo $\alpha \in I$.
2. $\emptyset \notin \mathcal{K}$, pues $\emptyset \notin \mathcal{F}_\alpha$ para todo $\alpha \in I$.
3. Sean $A, B \in \mathcal{K}$, entonces $A, B \in \mathcal{F}_\alpha$ para todo $\alpha \in I$. Por ser filtros se sigue que $A \cap B \in \mathcal{F}_\alpha$ para todo $\alpha \in I$, luego $A \cap B \in \mathcal{K}$.
4. Sea $M \subseteq X$ y sea $L \in \mathcal{K}$ tal que $L \subseteq M$, entonces $L \in \mathcal{F}_\alpha$ para todo $\alpha \in I$. Como cada \mathcal{F}_α cumple la propiedad de absorción, se tiene que $M \in \mathcal{F}_\alpha$ para todo $\alpha \in I$, luego $M \in \mathcal{K}$.

Por los 4 incisos anteriores, se sigue que \mathcal{K} es un filtro sobre X . ■

Ejemplo 3.1.4

Sea $X = \{a, b\}$ con $a \neq b$. Tomemos $\mathcal{F}_1 = \{X, \{a\}\}$ y $\mathcal{F}_2 = \{X, \{b\}\}$. Entonces $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ no es un filtro, ya que en caso contrario se tendría que $\{a\} \cap \{b\} = \emptyset \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$, lo cual no puede ser.

Así, la unión de filtros no necesariamente es un filtro.

Proposición 3.1.2

Si $\{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia de filtros sobre X tal que dados $\alpha, \beta \in I$ se tiene que

$$\mathcal{F}_\alpha \subseteq \mathcal{F}_\beta \text{ o } \mathcal{F}_\beta \subseteq \mathcal{F}_\alpha$$

entonces $\mathcal{F} = \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha$ es un filtro.

Demostración:

En efecto, veamos que \mathcal{F} es un filtro.

1. $\mathcal{F} \neq \emptyset$ ya que $X \in \mathcal{F}_\alpha$ para algún $\alpha \in I$.
2. $\emptyset \notin \mathcal{F}$, pues $\emptyset \notin \mathcal{F}_\alpha$ para todo $\alpha \in I$.
3. Sean $A, B \in \mathcal{F}$. Entonces, existen $\alpha, \beta \in I$ tales que $A \in \mathcal{F}_\alpha$ y $B \in \mathcal{F}_\beta$, entonces se tiene una de las dos contenciones:

$$\mathcal{F}_\alpha \subseteq \mathcal{F}_\beta \text{ o } \mathcal{F}_\beta \subseteq \mathcal{F}_\alpha$$

supongamos que $\mathcal{F}_\alpha \subseteq \mathcal{F}_\beta$, entonces $A, B \in \mathcal{F}_\beta$. Por tanto, $A \cap B \in \mathcal{F}_\beta$. Así, $A \cap B \in \mathcal{F}$.

4. Sea $M \subseteq X$ y $L \in \mathcal{F}$ tal que $L \subseteq M$. Como $L \in \mathcal{F}$ existe $\alpha \in I$ tal que $L \in \mathcal{F}_\alpha$, luego por la propiedad de absorción $M \in \mathcal{F}_\alpha$. Por tanto, $M \in \mathcal{F}$.

Por los cuatro incisos anteriores, se sigue que \mathcal{F} es un filtro sobre X . ■

Definición 3.1.2

Sea \mathcal{F} un filtro sobre X . Una familia no vacía \mathcal{B} de subconjuntos de X es **una base para el filtro \mathcal{F}** si se cumple lo siguiente:

1. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$.
2. $\forall F \in \mathcal{F}$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq F$.

Observación 3.1.4

Observamos que

1. Si \mathcal{F} es un filtro sobre un conjunto X , entonces \mathcal{F} es una base para sí mismo.
2. Si \mathcal{B} es una base para el filtro \mathcal{F} sobre X y, $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Definición 3.1.3

Sea X un conjunto no vacío y \mathcal{B} una familia no vacía de subconjuntos no vacíos de X . Se dice que \mathcal{B} es **una base de filtro en X** , si se cumple lo siguiente: Dados $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Proposición 3.1.3

Sea X un conjunto no vacío y \mathcal{B} una base de filtro en X . Entonces:

$$\mathcal{B}^+ = \left\{ A \subseteq X \mid \exists B \in \mathcal{B} \text{ tal que } B \subseteq A \right\}$$

es un filtro en X y este se dice **el filtro generado por la base \mathcal{B}** . Además, \mathcal{B} es una base para \mathcal{B}^+ .

Demostración:

Se tienen que probar dos cosas:

1. Es claro que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}^+$. Por tanto, $\mathcal{B}^+ \neq \emptyset$.
2. $\emptyset \notin \mathcal{B}^+$ es cierto pues $\emptyset \notin \mathcal{B}$, ya que \mathcal{B} es una subcolección no vacía de conjuntos no vacíos.
3. Tomemos $K, M \in \mathcal{B}^+$ luego, existen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tal que $B_1 \subseteq K$ y $B_2 \subseteq M$. Por tanto, $B_1 \cap B_2 \subseteq K \cap M$. Por ser \mathcal{B} base para un filtro sobre X , existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq K \cap M$. Luego, $K \cap M \in \mathcal{B}^+$.
4. Sea $W \subseteq X$ y $L \in \mathcal{B}^+$ tal que $L \subseteq W$. Existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq L \subseteq W$, luego $B \subseteq W$. Por tanto, $W \in \mathcal{B}^+$.

Por los cuatro incisos anteriores, se sigue que \mathcal{B}^+ es un filtro sobre X . ■

Proposición 3.1.4

Sea \mathcal{F} un filtro sobre X y $A \subseteq X$ tal que $\forall F \in \mathcal{F}, A \cap F \neq \emptyset$. Entonces

$$\mathcal{B} = \left\{ A \cap F \mid F \in \mathcal{F} \right\}$$

es una base de filtro y, el filtro generado por ella \mathcal{B}^+ cumple lo siguiente:

1. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}^+$.
 2. $A \in \mathcal{B}^+$.
-

Demostración:

Se deben cumplir varios incisos:

1. $\mathcal{B} \neq \emptyset$, pues el conjunto $A \cap X = A \in \mathcal{B}$ ya que $X \in \mathcal{F}$.
2. $\emptyset \notin \mathcal{B}$ ya que se contradeciría la hipótesis de que $A \cap F = \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$.
3. $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ implica que existen $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ tales que $B_1 = A \cap F_1$ y $B_2 = A \cap F_2$. Por tanto

$$B_1 \cap B_2 = A \cap (F_1 \cap F_2)$$

donde, $A \cap (F_1 \cap F_2) \in \mathcal{B}$ pues, \mathcal{F} es un filtro sobre X . Luego, tomando $B_3 = B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$, se sigue que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

por los tres incisos anteriores, se sigue que \mathcal{B} es base para un filtro sobre X . Ya se tiene que $A \in \mathcal{B}^+$, pues $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}^+$.

Sea ahora $F \in \mathcal{F}$. Entonces, $F \cap A \in \mathcal{B}^+$. Por propiedad de absorción se debe tener que como $F \cap A \subseteq F$, entonces $F \in \mathcal{B}^+$. ■

Proposición 3.1.5

Sean X y Y dos conjuntos no vacíos. Sea \mathcal{F} un filtro en X y $f : X \rightarrow Y$ una función. Entonces,

$$\mathcal{B} = \left\{ f(A) \mid A \in \mathcal{F} \right\}$$

es una base de filtro en Y . En este caso, se denotará por $f(\mathcal{F})$ a \mathcal{B}^+ , esto es $f(\mathcal{F}) = \mathcal{B}^+$.

Demostración:

Se deben verificar tres condiciones

1. $\mathcal{B} \neq \emptyset$, pues $f(X) \in \mathcal{B}$.
2. Todos los elementos de \mathcal{B} son no vacíos, pues como \mathcal{F} es un filtro sobre X , todos sus elementos son no vacíos, así $f(F) \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$.
3. Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, entonces existen $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ tales que $B_1 = f(F_1)$ y $B_2 = f(F_2)$. Por tanto, el conjunto

$$B_3 = f(F_1 \cap F_2) \subseteq f(F_1) \cap f(F_2) = B_1 \cap B_2$$

es tal que $B_3 \in \mathcal{B}$, ya que $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.

por los incisos anteriores, se sigue que \mathcal{B} es base de un filtro en Y . ■

Ejemplo 3.1.5

Considere $X = \{a, b\}$, $a \neq b$. Sea $f : X \rightarrow X$ dada como sigue:

$$f(a) = a = f(b)$$

el conjunto $\mathcal{F} = \{X, \{a\}\}$ es un filtro sobre X . la colección

$$f(\mathcal{F}) = \{\{a\}\}$$

no es un filtro en X ya que $X \notin f(\mathcal{F})$.

Proposición 3.1.6

Sean X y Y dos conjuntos no vacíos, \mathcal{F} un filtro en X y $f : X \rightarrow Y$ una función. Entonces, f es una función suprayectiva si y sólo si $\left\{f(F) \mid F \in \mathcal{F}\right\}$ es un filtro en Y .

Demostración:

Necesidad: Suponga que f es suprayectiva. Ya se sabe que

$$\mathcal{K} = \left\{f(F) \mid F \in \mathcal{F}\right\}$$

es una base de filtro. Se tiene que por ser f suprayectiva que

$$f(f^{-1}(A)) = A, \quad \forall A \subseteq Y$$

Se cumplen tres condiciones:

1. $\mathcal{K} \neq \emptyset$ pues, $f(X) \in \mathcal{K}$.
2. Como \mathcal{F} no contiene al vacío, entonces \mathcal{K} tampoco lo contiene.
3. Sea $L \subseteq Y$ tal que existe $F \in \mathcal{F}$ con $f(F) \subseteq L$. Entonces:

$$F \subseteq f^{-1}(f(F)) \subseteq f^{-1}(L)$$

por ser \mathcal{F} un filtro, luego: $f^{-1}(L) \in \mathcal{F}$. Así, $L = f(f^{-1}(L)) \in \mathcal{K}$.

4. Sean $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$. Se tiene que $f(F_1), f(F_2) \in \mathcal{K}$. Luego:

$$F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$$

además, $f(F_1 \cap F_2) \subseteq f(F_1) \cap f(F_2)$. Luego, por la propiedad anterior se sigue que $f(F_1) \cap f(F_2) \in \mathcal{K}$ ya que $f(F_1 \cap F_2) \in \mathcal{K}$.

Por los 4 incisos anteriores se sigue que \mathcal{K} es un filtro.

Suficiencia: Es inmediata del hecho de que Y está en la familia $f(\mathcal{F})$, luego $f(X) = Y$. ■

Definición 3.1.4

Sea X un conjunto no vacío. Un **ultrafiltro** \mathcal{F} en X es un filtro maximal respecto a la inclusión.

Proposición 3.1.7

Sea X un conjunto no vacío y sea ξ un filtro en X . Entonces existe un ultrafiltro \mathcal{U} en X tal que $\xi \subseteq \mathcal{U}$.

Demostración:

Considere la familia

$$\mathcal{L} = \left\{ \xi_\alpha \mid \alpha \in I \right\}$$

de todos los filtros ξ_α en X que contienen a ξ . Esta familia es no vacía ya que $\xi \in \mathcal{L}$. Además, esta familia está parcialmente ordenada bajo la relación \subseteq . Sea \mathcal{C} una cadena de (\mathcal{L}, \subseteq) . Tomemos

$$\rho = \bigcup_{\xi \in \mathcal{C}} \xi$$

por tanto, ρ es un filtro en X (ver observación anterior para garantizar que la unión de filtros sea un filtro); además, $\xi \subseteq \rho$. Tenemos que $\rho \in \mathcal{L}$ y, por construcción para todo $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$, $\mathcal{F} \subseteq \rho$.

Por el lema de Zorn existe un elemento maximal \mathcal{U} de (\mathcal{L}, \subseteq) el cual es el ultrafiltro buscado que contiene a ξ . ■

Ejemplo 3.1.6

Sea $X = \{a, b\}$ con $a \neq b$. Tomemos al filtro

$$\mathcal{F} = \{X\}, \quad \mathcal{U}_1 = \{X, \{a\}\} \quad \mathcal{U}_2 = \{X, \{b\}\}$$

se tiene que \mathcal{F} es un filtro y, $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ son ultrafiltros en X . Además $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}_1$ y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}_2$.

Es decir, la existencia del ultrafiltro no es única.

Proposición 3.1.8

Sea ξ un ultrafiltro en el conjunto no vacío X . Entonces se cumple lo siguiente:

1. Si $A, B \subseteq X$ y $A \cup B \in \xi$, entonces alguno de los dos A, B es elemento del filtro.
2. Si $A_1, \dots, A_k \subseteq X$ tales que $\bigcup_{i=1}^k A_i \in \xi$, entonces existe $l \in \llbracket 1, k \rrbracket$ tal que $A_l \in \xi$.

Demostración:

De (1): Sean $A, B \subseteq X$ tales que $A \cup B \in \xi$. Se tienen varios casos:

1. Suponga que para todo $C \in \xi$ se tiene que $C \cap A \neq \emptyset$. Entonces, el conjunto

$$\mathcal{B} = \{C \cap A \mid A \in \xi\}$$

es una base de filtro y, \mathcal{B} cumple que $\xi \subseteq \mathcal{B}$. Por tanto, $\xi = \mathcal{B}$. Pero, $A \in \mathcal{B}$, luego $A \in \xi$.

2. Suponga que existe $C_0 \in \xi$ tal que $C_0 \cap A = \emptyset$. Entonces:

$$\begin{aligned} C \cap B &= (C \cap A) \cup (C \cap B) \\ &= C \cap (A \cup B) \end{aligned}$$

donde $C \in \xi$ y $A \cup B \in \xi$. Por tanto, $C \cap B \in \xi$. Pero, $C \cap B \subseteq B$, luego por absorción se sigue que $B \in \xi$.

De (2): Se hace usando inducción sobre k . ■

Proposición 3.1.9

Sea ξ un filtro en X . Entonces, ξ es un ultrafiltro si y sólo si para todo subconjunto $A \subseteq X$, $A \in \xi$ ó $X - A \in \xi$.

Demostración:

Necesidad: Sea $A \subseteq X$. Escribimos $X = A \cup (X - A)$. Como ξ es un filtro, entonces $X \in \xi$. Por la proposición anterior se tiene que $A \in \xi$ ó $X - A \in \xi$.

Suficiencia: Sea η un filtro en X tal que $\xi \subseteq \eta$. Tomemos $A \subseteq X$ tal que $A \in \eta$. Entonces, $X - A \notin \eta$, luego $X - A \notin \xi$. Por hipótesis, debe suceder que $A \in \xi$. De esta forma, $\xi = \eta$.

Luego, ξ es un ultrafiltro. ■

Ejercicio 3.1.1

Sean X y Y conjuntos, ξ un ultrafiltro de X y sea $f : X \rightarrow Y$ una función suprayectiva. Entonces, $f(\xi)$ es un ultrafiltro en Y .

Demostración:

Ya se tiene que $f(\xi)$ es un filtro en Y . ■

Ejemplo 3.1.7

Sea X un conjunto no vacío y sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de puntos en X , entonces

$$\rho = \{A \subseteq X \mid \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall k \geq N, x_k \in A\}$$

es un filtro en X y, se dice el **filtro asociado a la sucesión**.

Demostración:

Hay que verificar 4 condiciones:

1. $\emptyset \notin \rho$.
2. $X \in \rho$ ya que la sucesión está en X .

3. Sean $A, B \in \rho$. Entonces, existen $N, M \in \mathbb{N}$ tales que $k \geq N \Rightarrow x_k \in A$ y $k \geq M \Rightarrow x_k \in B$.
Sea

$$N_0 = \max\{N, M\} \in \mathbb{N}$$

entonces, si $k \geq N_0$ se tiene que $x_k \in A$ y $x_k \in B$, luego $x_k \in A \cap B$. Por ende, $A \cap B \in \rho$.

4. Sea $L \subseteq X$ y $A \in \rho$ tal que $A \subseteq L$. Como $A \in \rho$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N \Rightarrow x_k \in A \subseteq L$. Por ende, $L \in \rho$.

por los incisos anteriores, se sigue que ρ es un filtro en X . ■

Definición 3.1.5

Sea (X, τ) un espacio topológico. Una sucesión de puntos de X , $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se dice que **converge** a un punto $l \in X$ si para todo $U \in \tau$ tal que $l \in U$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq N$, $x_k \in U$.

Proposición 3.1.10

Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de X y sea ρ el filtro asociado a la sucesión. Sea $l \in X$, entonces $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge al punto l si y sólo si $\xi_l \subseteq \rho$.

Demostración:

Necesidad: Suponga que la sucesión converge a $l \in X$. Sea $V \in \xi_l$, entonces existe un abierto $U \subseteq X$ tal que $l \in U \subseteq V$. Como la sucesión converge a l y U es abierto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq N$ se tiene que $x_k \in U \subseteq V$. Por tanto, $V \in \rho$.

Luego, $\xi_l \subseteq \rho$.

Suficiencia: Suponga que $\xi_l \subseteq \rho$. Si $U \subseteq X$ es abierto tal que $l \in U$, entonces $U \in \xi_l \subseteq \rho$, luego existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq N$ implica que $x_k \in U$.

Así, la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a l . ■

Ejemplo 3.1.8

Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y considere la topología $\tau = \{X, \emptyset, \{1, 2\}, \{3\}\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define $X_n = 1$.

Se tiene que la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 1 y 2.

Observación 3.1.5

El punto al que converge una sucesión en un espacio topológico no necesariamente es único.