Notas Curso Topología I
Axiomas de Numerabilidad

Cristo Daniel Alvarado

20 de mayo de 2024

Índice general

Capítulo 5

Axiomas de Numerabilidad

5.1. Conceptos Fundamentales

Observación 5.1.1
De ahora en adelante numerable será equivalente a lo sumo numerable.

Definición 5.1.1
Sea (X, τ) un espacio topológico.

1. Sean $x \in X$ y $\mathcal{U}$ una colección de vecindades de x. Diremos que $\mathcal{U}$ es un **sistema fundamental de vecindades de** x si dada $V \in \mathcal{V}(x)$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \subseteq V$. Si $\mathcal{U}$ es numerable, $\mathcal{U}$ se dice un **sistema fundamental numerable de vecindades de** x.

2. Si dado $x \in X$ existe un sistema fundamental numerable de vecindades de x, el espacio (X, τ) se dice **primero numerable**.

3. El espacio (X, τ) se dice un **espacio segundo numerable** si su topología tiene una base numerable.

4. El espacio (X, τ) se dice un **espacio separable** si existe $A \subseteq X$ tal que A es numerable y además $\overline{A} = X$ (es decir que es denso en X).

5. El espacio (X, τ) se dice un **espacio de Lindelöf** si cada cubierta abierta del espacio tiene una subcubierta numerable.

5.2. Espacios Primero Numerables

Proposición 5.2.1
Sea (X, τ) un espacio primero numerable. Si $Y \subseteq X$ entonces (Y, τ_Y) es primero numerable.

Demostración:
Sea $Y \subseteq X$. Sea $y \in Y$, en particular $y \in X$. Como (X, τ) es primero numeable, existe un sistema fundamental de vecindades de x en (X, τ), digamos $\mathcal{U}'$, es decir que para este $\mathcal{U}'$ se cumple:

$$\forall V \in \mathcal{V}(x) \exists U \in \mathcal{U}' \text{ tal que } U \subseteq V$$

Sea

$$\mathcal{U} = \left\{ Y \cap U \middle| U \in \mathcal{U}' \right\}$$

Tenemos que $U \in \mathcal{U}'$, $Y \cap U$ es una vecindad de y en (Y, τ_Y) y, como $\mathcal{U}'$ es numerable, también $\mathcal{U}$ lo es.

Sea $W \subseteq Y$ una vecindad de y en (Y, τ_Y), luego existe $V \in \tau$ tal que

$$y \in Y \cap V \subseteq W$$

Como en particular V es una vecindad de y en (X, τ), entonces existe $U \in \mathcal{U}'$ tal que

$$U \subseteq V$$

luego,

$$Y \cap U \subseteq Y \cap V \subseteq W$$

donde $Y \cap U \in \mathcal{U}$. Así, $\mathcal{U}$ es un sistema fundamental de vecindades de y en (Y, τ_Y). Como $y \in Y$ fue arbitrario, se sigue que (Y, τ_Y) es primero numerable. ■

Proposición 5.2.2
La propiedad de ser primero numerable es topológica.

Demostración:
Sean (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) espacios topológicos homeomorfos tales que (X_1, τ_1) es primero numerable. Sea $f : (X_1, \tau_1) \rightarrow (X_2, \tau_2)$ el homeomorfismo entre tales espacios. Veamos que (X_2, τ_2) es primero numeable.

En efecto, sea $x_2 \in X_2$, entonces existe un único $x_1 \in X_1$ tal que $f(x_1) = x_2$. Como (X_1, τ_1) es primero numerable, entonces existe $\mathcal{U}_1$ sistema fundamental numerable de vecindades de x_1. Sea

$$\mathcal{U}_2 = \left\{ f(U_1) \middle| U_1 \in \mathcal{U}_1 \right\}$$

Como $\mathcal{U}_1$ es numerable, $\mathcal{U}_2$ también lo es. Y, como $U_1 \in \mathcal{U}_1$ es una vecindad de x_1, entonces $f(U_1)$ es una vecindad de x_2 (por ser f homeomorfismo). Por tanto, $\mathcal{U}_2$ es una colección de vecindades de x_2. Ahora, sea $V \in \mathcal{V}(x_2)$ una vecindad de x_2. Como f es homeomorfismo entonces

$$f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x_1)$$

Luego, existe $U \in \mathcal{U}_1$ tal que

$$U \subseteq f^{-1}(V) \Rightarrow f(U) \subseteq V$$

por ser f biyección, donde $f(U) \in \mathcal{U}_2$.

Así, $\mathcal{U}_2$ es un sistema fundamental numerable de vecindades de x_2. Como el elemento x_2 fue arbitrario, se sigue que (X_2, τ_2) es primero numerable. Luego, la propiedad de ser primero numerable es topológica. ■

Proposición 5.2.3
Sean $\{(X_k, \tau_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ una familia numerable de espacios topológicos y

$$X = \prod_{k \in \mathbb{N}} X_k$$

Entonces, (X, τ_p) es primero numerable si y sólo si (X_k, τ_k) es primero numerable, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demostración:

$\Rightarrow$): Es inmediato del hecho de que la propiedad de ser primero numerable es hereditaria y topológica.

$\Leftarrow$): Suponga que (X_k, τ_k) es primero numerable para todo $k \in \mathbb{N}$. Sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$. Si $k \in \mathbb{N}$, se tiene que (X_k, τ_k) es primero numerable. Para $x_k \in X_k$ existe

$$\mathcal{U}_k = \left\{U_m^k\right\}_{m\in\mathbb{N}}$$

sistema fundamental numerable de vecindades de x_k en (X_k, τ_k). Definimos

$$\mathcal{U} = \left\{\prod_{l\in\mathbb{N}} A_l \middle| \text{ existe } I = \{i_1, ..., i_t\} \subseteq \mathbb{N} \text{ finito con } i_r < i_s \text{ si } r < s \text{ tal que} \right.$$
$$\left. l \in \mathbb{N} - I \Rightarrow A_l = X_l \text{ y } l \in I \Rightarrow A_k \in \mathcal{U}_l \right\}$$

veamos que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}(x)$ y además $\mathcal{U}$ es un sistema fundamental de vecindades de x. Sea $U = \prod_{t\in\mathbb{N}} U_t$ un básico de la topología producto tal que $x \in U$. Tenemos que existe $I \subseteq \mathbb{N}$ finito tal que

$$l \in \mathbb{N} - I \Rightarrow U_l = X_l \text{ y } l \in I \Rightarrow x_l \in U_l \in \tau_l$$

Para $l \in I$ existe $U_{m_l}^l \in \mathcal{U}_l$ tal que $x_l \in U_{m_l}^l \subseteq U_l$. Sea

$$A = \prod_{l\in\mathbb{N}} A_l$$

donde,

$$l \in \mathbb{N} - I \Rightarrow A_l = X_l \text{ y } l \in I \Rightarrow A_l = U_{m_l}^l$$

por tanto, $A \in \mathcal{U}$ y es tal que $x \in A \subseteq U$.

Veamos ahora que $\mathcal{U}$ es numerable. Sea $A = \prod_{l\in\mathbb{N}} A_l \in \mathcal{U}$, entonces existe $I \subseteq \mathbb{N}$ finito, digamos $I = \{i_1, ..., i_t\}$ (ordenados de forma estrictamente creciente y siendo todos distintos) tales que $l \in \mathbb{N}-I$ entonces $A_l = X_l$.Y, si $l \in I$ entonces $A_l = U_{m_l}^l \in \mathcal{U}_l$. Sea $(i_1, ..., i_t, m_{i_1}, ..., m_{i_t}) \in \mathbb{N}^{2t}$.

Definimos la función

$$f : \mathcal{U} \to \bigcup_{t\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^{2t}$$

(donde $\mathbb{N}^{2t}$ expresa el producto cartesiano de $\mathbb{N}$ consigo mismo $2t$-veces) tal que $A \mapsto (i_1, ..., i_t, m_{i_1}, ..., m_{i_t})$ (siendo el A de la forma en que se expresó anteriormente). Se tiene por la elección de los elementos de $\mathcal{U}$, que la función f está bien definida y es inyectiva. Por tanto, $\mathcal{U}$ es numerable.

Luego, (X, τ_p) es primero numerable. ∎

Proposición 5.2.4

Sea (X, τ) un espacio primero numerable.

1. Sea $A \subseteq X$ y $x \in X$. Entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una sucesión de puntos $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de A que converge a x.

2. Sean (X', τ') espacio topológico y $f : (X, \tau) \to (X', \tau')$ una función. Entonces, para $x \in X$, f es continua en X si y sólo si para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos en X que converge a x, se tiene que la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(x)$.

Demostración:

De (1): Se probará la doble implicación.

$\Rightarrow$): Sea $x \in \overline{A}$ y $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema fundamental numerable de vecindades de x. Entonces

$$B_1 \cap A \neq \emptyset$$

pues $x \in \overline{A}$ y B_1 es vecindad de x. Tomemos $x_1 \in B_1 \cap A$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, como

$$B_1 \cap \cdots \cap B_n$$

es vecindad de x, entonces su intersección con A es no vacía. Tome así $x_n \in B_1 \cap \cdots \cap B_n \cap A$ y constrúyase así la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Veamos que esta sucesión converge a x. En efecto, sea $U \in \tau$ tal que $x \in \tau$. Como este es un sistema fundamental de vecindades, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $B_l \subseteq U$, luego

$$x_{l+m} \in B_l \subseteq U$$

para todo $m \geq 0$. Por tanto, la sucesión converge a x.

$\Leftarrow$): Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos de A tal que $x_n \to \infty$. Tomemos $M \in \tau$ tal que $x \in M$, luego existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_{k+m} \in M$, para todo $m \geq 0$, así $M \cap A \neq \emptyset$. Por tanto, $x \in \overline{A}$.

De (2): Se probará la doble implicación.

$\Rightarrow$): Suponga que f es continua en x. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos que converge a x. Sea $V \in \tau'$ tal que $f(x) \in V$, entonces $x \in f^{-1}(V)$, donde $f^{-1}(V) \in \tau$ por ser f continua en x. Luego, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_{k+m} \in f^{-1}(V), \quad \forall m \geq 0$$

es decir que

$$f(x_{k+m}) \in f(f^{-1}(V)) \subseteq V, \quad \forall m \geq 0$$

Por tanto, $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(x)$.

$\Leftarrow$): Veamos que dado $A \subseteq X$ se cumple que $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. En efecto, sea $x \in \overline{A}$. Por 1) al ser (X, τ) primero numerable existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de A que converge a x. Entonces $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de puntos de $f(A)$ que converge a $f(x)$. Por tanto, $f(x) \in \overline{f(A)}$ (en la prueba de la suficiencia no es necesario que (X, τ) sea primero numerable, así que en este caso no se ocupa que (X', τ') sea primero numerable). Por tanto, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ ■

5.3. Espacios Segundo Numerables

Proposición 5.3.1

La propiedad de ser segundo numerable es hereditaria.

Demostración:

Sea (X, τ) un espacio topológico segundo numerable y $Y \subseteq X$ subconjunto. Veamos que (Y, τ_Y) es segundo numerable. En efecto, como (X, τ) es primero numerable, existe $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base para la topología τ que es a lo sumo numerable. Se tiene que

$$\mathcal{B}' = \left\{ Y \cap B \middle| B \in \mathcal{B} \right\}$$

es una base para τ_Y (por una proposición anterior). Como $\mathcal{B}$ es numerable, se sigue que $\mathcal{B}'$ es numerable. Por tanto, (Y, τ_Y) es segundo numerable. ■

Proposición 5.3.2
La propiedad de ser segundo numerable es topológica.

Demostración:
Sean (X,τ) y (Y,σ) espacios topológicos homeomorfos con $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ el homeomorfismo y, suponga que (X,τ) es segundo numerable y sea $\mathcal{B}=\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de τ. Entonces, la por una proposición, la colección:

$$\mathcal{B}'=\left\{f(B)\Big|B\in\mathcal{B}\right\}$$

es una base para la topología σ (por ser f homeomorfismo) la cual es a lo sumo numerable. Por tanto, (Y,σ) es segundo numerable.

Así, la propiedad de ser segundo numerable es topológica. ■

Ejercicio 5.3.1
Sea $\{(X_n,\tau_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una familia de espacios topológicos segundo numerables y, tomemos

$$X=\prod_{n=1}^{\infty}X_n$$

Entonces, (X,τ_p) es segundo numerable.

Demostración:

■

Teorema 5.3.1
Sea (X,τ) un espacio topológico.

1. Si (X,τ) es segundo numerable, entonces es primero numerable.
2. Si (X,τ) se segundo numerable, entonces el espacio es de Lindelöf.
3. Si (X,τ) es segundo numerable, entonces es separable.

Demostración:
De (1): Sea $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base para la topología τ. Tomemos $x\in X$ y defina

$$\mathcal{B}_x=\left\{B\in\mathcal{B}\Big|x\in B\right\}$$

Se tiene que $\mathcal{B}_x$ es a lo sumo numerable. Sea $U\in\tau$ tal que $x\in U$, luego como $\mathcal{B}$ es base existe $B\in\mathcal{B}$ tal que $x\in B\subseteq U$, luego $B\in\mathcal{B}_x$. Por tanto, $\mathcal{B}_x$ es un sistema fundamental de vecindades de x el cual es a lo sumo numerable. Al ser $x\in X$ arbitrario, se sigue que (X,τ) es primero numerable.

De (2): Sea $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base para la topología τ y sea $\mathcal{A}$ una cubierta abierta de X. Dado $x\in X$, como A es una cubierta existe $A_x\in\mathcal{A}$ tal que

$$x\in A_x\in\tau$$

luego, existe $B_x\in\mathcal{B}$ tal que $x\in\ B_x\subseteq A_x$. Sea

$$\mathcal{K}=\left\{m\in\mathbb{N}\Big|\exists A\in\mathcal{A}\text{ tal que }B_m\subseteq A\right\}$$

por la observación anterior, $\mathcal{K} \neq \emptyset$. Dado $k \in \mathcal{K}$ escogemos un único $A_k \in \mathcal{A}$ tal que $B_k \subseteq A_k$. Sea

$$\mathcal{A}' = \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

$\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ es una subcolección a lo sumo numerable.

Sea $x \in X$, tomemos $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A$. Por ser $\mathcal{B}$ base existe $B_i \in \mathcal{B}$ tal que

$$x \in B_i \subseteq A$$

Luego, $i \in \mathcal{K}$ por ende $x \in A_i$ siendo $A_i \in \mathcal{A}'$. Por tanto:

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

luego, (X, τ) es Lindelöf.

De (3): Sea $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ base para τ. Dado $n \in \mathbb{N}$ si $B_n \neq \emptyset$, escogemos $x_n \in B_n$ y con estos puntos formamos al conjunto numerable $A = \left\{x_n \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$.

Veamos que $\overline{A} = X$. En efecto, sea $U \in \tau$ tal que $U \neq \emptyset$, veamos que $U \cap A \neq \emptyset$. En efecto, sea $x \in U$, luego existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_m \subseteq U$. Como $B_m \cap A \neq \emptyset$ entonces $U \cap A \neq \emptyset$. Se sigue que $\overline{A} = X$. ■

Proposición 5.3.3
Sean (X, τ) un espacio segundo numerable y $\mathcal{B}$ una base para su topología τ. Entonces, $\mathcal{B}$ contiene una base numerable para τ.

Demostración:
Sea $\mathcal{B} = \{B_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una base para τ y, como (X, τ) es segundo numerable, existe $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ base a lo sumo numerable de τ.

a. Sea $\mathcal{U} \in \tau$. Definimos:

$$\mathcal{U}^* = \left\{A \in \mathcal{A} \middle| \exists U \in \mathcal{U} \text{ tal que } A \subseteq U\right\}$$

dado $A \in \mathcal{U}^*$ escogemos un único $U_A \in \mathcal{U}$ tal que $A \subseteq U_A$. Defina

$$\mathcal{U}' = \left\{U_A \in \mathcal{U} \middle| A \in \mathcal{U}^*\right\}$$

se tiene que $\mathcal{U}'$ es numerable por ser $\mathcal{A}$ numerable. Como $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$, entonces

$$\bigcup \mathcal{U}' \subseteq \bigcup \mathcal{U}$$

Veamos que se cumple la otra contención. Sea $x \in \bigcup \mathcal{U}$, luego existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$. Como $\mathcal{A}$ es una base y $U \in \tau$, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que

$$x \in A \subseteq U$$

así, $A \in \mathcal{U}^*$, luego $x \in A \subseteq U_A$ por lo cual $x \in \bigcup \mathcal{U}'$. Así,

$$\bigcup \mathcal{U}' = \bigcup \mathcal{U}$$

b. Sea $A \in \mathcal{A}$, $A \in \tau$ luego existe $\mathcal{B}_A \subseteq \mathcal{B}$ tal que

$$A = \bigcup \mathcal{B}_A$$

Por (a) existe $\mathcal{B}'_A \subseteq \mathcal{B}_A$ tal que $\mathcal{B}'_A$ es numerable y

$$A = \bigcup \mathcal{B}'_A$$

Luego, $\bigcup \left\{\mathcal{B}'_A \middle| A \in \mathcal{A}\right\}$ es un conjunto a lo sumo numerable contenida en $\mathcal{B}$ tal que es una base para τ.

Por los dos incisos anteriores, se tiene el resultado. ■

Ejemplo 5.3.1
Sea $X = \{0, 1\}$ y tomemos $\tau_D = \{X, \emptyset, \{0\}, \{1\}\}$. El espacio (X, τ_D) es segundo numerable, en particular primero numerable, Lindelöf y separable (además, metrizable pues τ_D es la topología discreta).

Ejemplo 5.3.2
Considere $X = \{0, 1\}$ y tomemos $\tau = \tau_D$. Para $r \in \mathbb{R}$ definimos $X_r = X$ y $\tau_r = \tau$. Veamos que $\left(X = \prod_{r\in\mathbb{R}} X_r, \tau_p\right)$ no es primero numerable.

Demostración:
En efecto, sea $x = (x_r)_{r\in\mathbb{R}} \in X$ tal que

$$x_r = 0, \quad \forall r \in \mathbb{R}$$

Sea $\mathcal{V} = \{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de vecindades de x. Dado $m \in \mathbb{N}$ existe un básico $B_m \in \tau_p$ tal que

$$x_m \in B_m \subseteq V_m$$

como B_m es un básico de τ_p, luego existe $J_m \subseteq \mathbb{R}$ finito tal que

$$B_m = \prod_{r\in\mathbb{R}} W_r$$

con $W_r \in \tau_r$, para cada $r \in J_m$ y $W_r = X_r$ para todo $r \in \mathbb{R} - J_m$. Por lo tanto, si

$$V_m = \prod_{r\in\mathbb{R}} K_r$$

entonces para todo $r \in \mathbb{R} - J_m$ se tiene que $K_r = X_r$. Tomemos

$$J = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} J_m$$

este conjunto es a lo sumo numerable, siendo tal que $J \subseteq \mathbb{R}$, luego $\mathbb{R} - J$ es no vacío. Sea $t \in \mathbb{R} - J$, se tiene que para todo $m \in \mathbb{N}$, $t \notin J_m$. Sea

$$U = \prod_{r\in\mathbb{R}} U_r$$

donde

$$U_r = \begin{cases} \{0\} & \text{si} \quad r = t \\ X_r & \text{si} \quad r \neq t \end{cases}$$

$U \in \tau_p$ además, $x \in U$. Se cumple además que $V_m \nsubseteq U$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Suponga que $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$V_{m_0} \subseteq U$$

Se tiene que

$$\{0, 1\} = X_t = K_t = p_t(V_{m_0}) \subseteq p_t(U) = \{0\}$$

lo cual es una contradicción. Por tanto, $\mathcal{V}$ no puede ser un sistema fundamnetal de vecindades para x, así que no es primero numerable. ■

Observación 5.3.1
En el ejemplo anterior, $\left(\prod_{r\in\mathbb{R}} U_r, \tau_p\right)$ no es segundo numerable, pues no es primero numerable. Pero, (X_r, τ_r) es segundo numerable, para todo $r \in \mathbb{R}$.

Tampoco es metrizable, siendo (X_r, τ_r) para todo $r \in \mathbb{R}$, pues metrizable implica primero numerable.

Proposición 5.3.4
Sea (X, τ) un espacio metrizable. Entonces, (X, τ) es primero numerable.

Demostración:
Sea $d : X \times X \to \mathbb{R}$ una métrica tal que $X = X_d$. Sea $x \in X$. Para $m \in \mathbb{N}$ definimos

$$B_n = B_d\left(x, \frac{1}{m}\right)$$

Entonces, $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un sistema fundamental de vecindades para x el cual es a lo sumo numerable. ■

Ejemplo 5.3.3
Sea $\mathcal{B}_l = \left\{[a,b)\middle|a, b \in \mathbb{R}\right\}$. Ya se sabe que $\mathcal{B}_l$ es una base para una topología sobre $\mathbb{R}$, la cual se denota por τ_l. A la pareja $(\mathbb{R}, \tau_l)$ se suele escribir como $\mathbb{R}_l$.

1. $\mathbb{R}_l$ es de Hausdorff (esto se deduce de forma casi inmediata).
2. $\mathbb{R}_l$ es primero numerable. En efecto, sea $r \in \mathbb{R}$, entonces el conjunto:—

$$\mathcal{V} = \left\{[r, r + \frac{1}{n})\middle|n \in \mathbb{N}\right\}$$

es un sistema fundamental de vecindades de r. En efecto, sea $U \in \tau_l$ tal que $r \in U$. Considere $[l, k) \in \mathcal{B}_l$ que cumple

$$r \in [l, k) \subseteq U$$

Entonces, $l \leq r < k$. Por la propiedad arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$r + \frac{1}{n} < k$$

luego,

$$[r, r + \frac{1}{n}) \subseteq [l, k) \subseteq U$$

luego $\mathcal{V}$ es un sistema fundamental de vecindades de r.
3. $\mathbb{R}_l$ no es segundo numerable. Sea $\mathcal{B}$ una base para τ_l. Dado $x \in \mathbb{R}$, escogemos $B_x \in \mathcal{B}$ tal que

$$x \in B_x \subseteq [x, x + 1)$$

Tenemos $x = \inf B_x$ luego dados $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$ existen $B_x, B_y \in \mathcal{B}$ tales que $B_x \neq B_y$. Por tanto, $\mathcal{B}$ no puede ser numerable, así que $\mathbb{R}_l$ no puede ser segundo numerable.
4. $\mathbb{R}_l$ es separable. Considere $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Este conjunto es numerable y denso en $\mathbb{R}_l$.

5. $\mathbb{R}_l$ es de Lindelöf. Sea $\mathcal{A}$ una cubierta de $\mathbb{R}_l$ formada por básicos. Suponga que

$$\mathcal{A} = \left\{[a_\alpha, b_\alpha)\middle|\alpha \in I\right\}$$

Sea

$$C = \bigcup_{\alpha\in I}(a_\alpha, b_\alpha)$$

Considere C como subespacio de $(\mathbb{R}, \tau_u)$. El espacio $(\mathbb{R}, \tau_u)$ es segundo numerable, luego (X, τ_{uC}) es segundo numerable. Por lo tanto, (X, τ_{uC}) es de Lindelöf. Tenemos que existe $J = \{\alpha_1, ..., \alpha_m, ...\} \subseteq I$ numerable tal que

$$C = \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_{\alpha_i}, b_{\alpha_i})$$

Sea

$$\mathcal{A}' = \left\{[a_\alpha, b_\alpha)\middle|\alpha \in J\right\}$$

Se tiene que

$$C \subseteq \bigcup_{\alpha\in J}[a_\alpha, b_\alpha)$$

Tomemos

$$D = \mathbb{R} - C$$

Veamos que D es numerable. En efecto, sea $x \in D$, luego $x \in \mathbb{R} - C$. Así, para todo $\alpha \in I$,

$$x \notin (a_\alpha, b_\alpha)$$

Luego, existe $\alpha_0 \in I$ tal que $x = a_{\alpha_0}$. Sea $q_x \in (a_{\alpha_0}, b_{\alpha_0}) \cap \mathbb{Q}$, entonces

$$(x, q_x) \subseteq C$$

Sea $f : D \to \mathbb{Q}$ la función definida por: dado $x \in D$, $x \mapsto q_x$. Veamos que f es inyectiva. Sean $x, y \in D$ con $x < y$.

I) Suponga que $q_y \leq q_x$. Se tiene que $x < y < q_x \leq q_y$ (por la elección de los q). Por tanto, $y \in (x, q_x) \subseteq C \Rightarrow y \notin D\#_c$.

II) Por (i), $q_x < q_y$. Así, f es inyectiva. Luego, D es a lo sumo numerable.

Dado $d \in D$ escogemos un único elemento $A_d \in \mathcal{A}$ tal que $d \in A$. Sea

$$\mathcal{A}'' = \left\{A_d\middle|d \in D\right\}$$

Se tiene que $\mathcal{A}'$ y $\mathcal{A}''$ son a lo sumo numerables, luego su unión también lo es y es tal que

$$\mathbb{R} \subseteq \bigcup \mathcal{A}' \cup \mathcal{A}''$$

por tanto, $\mathbb{R}_l$ es Lindelöf.