Propiedades Globales De Curvas.

Def. Una curva cerrada simple en $\mathbb{R}^2$, es una curva cerrada en $\mathbb{R}^2$ tal que no tiene autointersecciones.

Retomando un resultado anterior, si $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ es una curva cerrada:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\ell} \kappa_s(u)\,du \in \mathbb{Z}$$

y más aún, si γ es simple:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\ell} \kappa_s(u)\,du = \pm 1$$

llamado Hopf's Umlaufsatz. Incluyendo el teorema de la curva de Jordan:
Si γ es curva cerrada simple, entonces $\mathcal{C}T_r\gamma = \operatorname{int}\gamma \cup \operatorname{ext}\gamma$, donde $\operatorname{int}\gamma$, $\operatorname{ext}\gamma$ son abiertos, y $\operatorname{int}\gamma \cap \operatorname{ext}\gamma = \phi$.

Retomemos algunas ideas: considere un círculo de radio r y longitud de arco ℓ:

$$A = \pi r^2 \quad y \quad \ell = 2\pi r$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{\ell^2}{4\pi}$$

Si, de alguna manera pudiéramos deformar el círculo sin autointersectarlo, y sin cambiar su longitud de arco, entonces:

$$\frac{\ell^2}{4\pi} - A \geq 0 \quad \text{(Desigualdad isoparamétrica)}.$$

Sea $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una curva cerrada simple con longitud de arco ℓ, con $\gamma(0) = \gamma(\ell)$. Entonces su área está dada por: $A(\gamma) = \iint_{\operatorname{int}(\gamma)} dx\,dy$.

Teorema (de Green).
Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones suaves, y sea γ una curva cerrada orientada positivamente, entonces:

$$\int_{\text{int}\, r}\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_r f\,dx+g\,dy$$

la orientación de la curva es positiva cuando el vector normal con signo apunta hacia int r (también la cosa de las manecillas).

Si $g=\frac{1}{2}x$ y $f=-\frac{1}{2}y$, entonces:

$$\int_{\text{int}\, r}\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_{\text{int}\, r}dx\,dy=\frac{1}{2}\int_r(-y\,dx+x\,dy)$$

Teorema 3.2.2 (Pressley).

Sea γ una curva simple cerrada, $l(\gamma)$ su longitud y $A(\gamma)$ el área de int γ, entonces:

$$A(\gamma)\leqslant\frac{l^2(\gamma)}{4\pi}$$

y la igualdad ocurre si y sólo si γ es un círculo.

Para probarla, asumimos el siguiente resultado:

Desigualdad de Wirtinger.

Sea $F:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ función suave tal que $F(0)=F(\pi)=0$. Entonces

$$\int_0^\pi\left(\frac{dF}{dt}\right)^2dt\geqslant\int_0^\pi F(t)^2\,dt$$

y la igualdad se obtiene si y sólo si $F=D\,\text{sen}$, donde $D\in\mathbb{R}$.

Dem:

Sea $G(t):=\frac{F(t)}{\text{sen}(t)}$, $\forall t\in\,]0,\pi[$. Por tanto $F(t)=G(t)\,\text{sen}(t)$. Entonces:

$$\int_0^\pi(\dot F)^2=\int_0^\pi(\dot G\,\text{sen}+G\cos t)^2=\int_0^\pi\dot G^2\,\text{sen}^2 t+2G\dot G\,\text{sen}\cos+G^2\cos^2$$

Veamos que:

$$2\int_0^\pi G\dot G\,\text{sen}\cos\ ;\quad u=\text{sen}\cos\qquad dv=G\dot G\,du$$

$$du=\cos^2-\text{sen}^2\qquad v=\frac{1}{2}G^2$$

$$\Rightarrow 2\int_0^{\pi} \dot{G}G \,\text{sen}\cos = G^2 \,\text{sen}\,t\cos t\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} G^2(\text{sen}^2 t - \cos^2 t)\,dt$$

Donde:

$$G^2 \,\text{sen}\cos\Big|_0^{\pi} = \lim_{t\to\pi^+} G^2(t)\,\text{sen}(t)\cos(t) - \lim_{t\to 0^-} G^2(t)\,\text{sen}(t)\cos(t)$$

$$= \lim_{t\to\pi^+} F^2(t)\tan(t) - \lim_{t\to 0^-} F^2(t)\tan(t)$$

$$= 0 - 0 = 0$$

Por tanto:

$$2\int_0^{\pi} \dot{G}G\,\text{sen}\cos = \int_0^{\pi} G^2(\text{sen}^2 - \cos^2)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} (\dot{F})^2 = \int_0^{\pi} \dot{G}^2\text{sen}^2 + G^2\text{sen}^2 - G^2\cos^2 + G^2\cos^2$$

$$= \int_0^{\pi} \dot{G}^2\text{sen}^2 + \int_0^{\pi} G^2\text{sen}^2$$

$$= \int_0^{\pi} \dot{G}^2\text{sen}^2 + \int_0^{\pi} F^2, \text{ como } \int_0^{\pi} \dot{G}^2\text{sen}^2 \geq 0, \text{ entonces:}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} (\dot{F})^2 \geq \int_0^{\pi} F^2$$

Notemos que la igualdad se da cuando:

$$\int_0^{\pi} \dot{G}^2\text{sen}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \dot{G}^2\text{sen}^2 \equiv 0$$

$$\Leftrightarrow \dot{G} \equiv 0$$

Por tanto:

$$\frac{F(t)}{\text{sen}(t)} = D, \quad D \in \mathbb{R} \;\; \forall t \in \,]0,\pi[$$

$$\Rightarrow F(t) = D\,\text{sen}(t), \quad \forall t \in \,]0,\pi[$$

q.e.d.

Ahora, retomando con el teorema, γ es una curva cerrada simple, $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Que sea simple es que no se autointersecta más que en T, pues al ser cerrada: $\gamma(0) = \gamma(T)$ (γ es inyectiva en $\text{int}(I)$).

Además, se pide que γ sea orientada positivamente, i.e su vector $n_s(t)$

apunta al interior de la curva.

Recordemos que:

$$A(\gamma) = \iint_{int(\gamma)} dx\,dy$$
$$= \frac{1}{2} \int_\gamma (x\,dy - y\,dx)$$

Más aún, si $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, entonces:

$$dx = \frac{dx}{dt}\,dt \quad y \quad dy = \frac{dy}{dt}\,dt$$

Por tanto:

$$A(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^T x \cdot \frac{dy}{dt}\,dt - y \cdot \frac{dx}{dt}\,dt$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^T (x \cdot \dot{y} - y \cdot \dot{x})\,dt \quad \dots (1)$$

también, recordemos que:

$$l(\gamma) = \int_0^{\pi} \|\gamma'(u)\|\,du$$

Dem:

Nota: probar que $l(\gamma)$ y $A(\gamma)$ son invariantes bajo isometrías en $\mathbb{R}^2$.

Primero, podemos asumir que γ está parametrizada por su longitud de arco s. Para hacer más conveniente las integrales, hacemos el cambio de parámetro a t:

$$t = \frac{\pi s}{l(\gamma)}, \ \forall \ s \in I$$

claramente $t \in [0, \pi]$. Con este cambio, tenemos que si γ está en función de t, entonces $\gamma(0) = \gamma(\pi)$. Asumiremos este hecho.

También, como $l(\gamma)$ y $A(\gamma)$ son invariantes bajo traslaciones, podemos trasladar a γ de tal forma que $\gamma(0) = (0,0)$. (Usando $T_{-\gamma(0)}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$).

Retomando, para la demostración del teorema, hagamos:

$$x = r\cos\theta \quad y \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\,\mathrm{sen}\,\theta\cdot\dot{\theta} \quad y \quad \dot{y} = \dot{r}\,\mathrm{sen}\,\theta + \dot{\theta}\, r\cos\theta$$

De esta forma:

$$x\dot{y} - y\dot{x} = r\dot{r}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + r^2\dot{\theta}\cos^2\theta - r\dot{r}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + r^2\dot{\theta}\,\mathrm{sen}^2\theta$$

$$= r^2\dot{\theta}$$

Con $r'(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$, $\|r'(t)\|^2 = \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)$, y:

$$\|r'(t)\|^2 = \dot{r}^2\cos^2\theta - 2r\dot{r}\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + r^2\dot{\theta}^2\mathrm{sen}^2\theta$$

$$+ \dot{r}^2\mathrm{sen}^2\theta + 2r\dot{r}\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + r^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta$$

$$= \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

Además, con el cambio $t = \frac{\pi s}{\ell(r)}$:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

$$= \left(\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right)\cdot\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

$$= 1\cdot\left(\frac{\ell(r)}{\pi}\right)^2 = \frac{\ell^2(r)}{\pi^2}$$

Por otro lado:

$$A(r) = \frac{1}{2}\int_0^\pi r^2(t)\dot{\theta}(t)\,dt$$

Considere:

$$\frac{1}{4\pi}\ell^2(r) - A(r) \quad \ldots (1)$$

Notemos que:

$$\frac{\ell^2(r)}{\pi} = \int_0^\pi \frac{\ell^2(r)}{\pi^2}\,dt = \int_0^\pi \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\,dt$$

Por tanto, en 1):

$$\frac{1}{4\pi}\ell^2(r) - A(r) = \frac{1}{4}\int_0^\pi \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\,dt - \frac{1}{2}\int_0^\pi r^2\dot{\theta}\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^\pi \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 - 2r^2\dot{\theta}\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\tilde{I}$$

Si $\tilde{I} \geq 0$, hemos terminado. Veamos que:

$$\tilde{I} = \int_0^{\pi} \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 - 2r^2\dot{\theta}\, dt$$
$$= \int_0^{\pi} \dot{r}^2 + r^2\left(\dot{\theta}^2 - 2\dot{\theta} + 1\right) - r^2\, dt$$
$$= \int_0^{\pi} r^2\left(\dot{\theta} - 1\right)^2 + \int_0^{\pi} \dot{r}^2 - r^2$$
$$\geq \int_0^{\pi} \dot{r}^2 - r^2$$

pero, como $r(0) = (0,0)$, entonces $r(0) = 0 = r(\pi)$. Por la desigualdad de Wirtinger:

$$\int_0^{\pi} \dot{r}^2 - r^2 \geq 0$$
$$\Rightarrow \tilde{I} \geq 0$$

Por tanto:

$$\frac{\ell^2(r)}{4\pi} \geq A(r)$$

la igualdad se da cuando $r = D\operatorname{sen} t$

q.e.d.

Ejercicios.

3.2.2) Aplique la desigualdad isoparamétrica a la elipse:

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1$$

Con $p, q \in \mathbb{R}^+$. Demuestre que:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{p^2\operatorname{sen}^2 t + q^2\cos^2 t}\, dt \geq 2\pi\sqrt{pq}$$

y que la igualdad se obtiene cuando $p = q$.

Sea $\alpha(t) = (p\cos t, q\operatorname{sen} t)$ la parametrización de la elipse, $\forall t \in [0, 2\pi]$. Claramente α es curva regular cerrada, pues α es inyectiva en $(0, 2\pi)$, y $\alpha(0) = (p, 0) = \alpha(2\pi)$. El área $A(\alpha)$ es:

$$A(\alpha) = \pi pq$$

La desigualdad isoparamétrica nos dice que:

$$A(\alpha) \leq \frac{\ell^2(\alpha)}{4\pi}$$

$$\Rightarrow 4\pi^2 pq \leq l^2(\alpha)$$
$$\Rightarrow 2\pi\sqrt{pq} \leq l(\alpha)$$

y, $l(\alpha)$ es:

$$l(\alpha) = \int_0^{2\pi} \|\alpha'\| = \int_0^{2\pi} \sqrt{p^2 \operatorname{sen}^2 t + q^2 \cos^2 t}\, dt$$

por lo tanto:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{p^2 \operatorname{sen}^2 t + q^2 \cos^2 t}\, dt \geq 2\pi\sqrt{pq}$$

q.e.d.

Def. Una curva cerrada simple es llamada convexa, si int γ es convexo. Convexo en el sentido de que para cualesquiera dos puntos en int γ, la recta que los une, está contenida en int(γ).

Def. Un vértice de una curva $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un punto donde su curvatura con signo K_s tiene un punto estacionario, es decir:

$$\frac{dK_s}{dt}(t_0) = 0, \text{ para algún } t_0 \in I.$$

Obs) El concepto de vértice es independiente de la parametrización de Tr γ. Como:

$$K_s(t) = \frac{x'y'' - y'x''}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}(t)$$

con $x(t) = p\cos t$ y $y(t) = q \operatorname{sen} t$. Luego:

$$x' = -p \operatorname{sen} t \qquad y' = q\cos t$$
$$x'' = -p\cos t \qquad y'' = -q \operatorname{sen} t$$

$$\Rightarrow K_s(t) = \frac{pq \operatorname{sen}^2 t + pq\cos^2 t}{(p^2 \operatorname{sen}^2 t + q^2\cos^2 t)^{3/2}} = \frac{pq}{(p^2 \operatorname{sen}^2 t - q^2 \cos^2 t)^{3/2}}$$

Calcular $K_s'(t)$.