Lema de Duhamel

Sea $f:\mathbb{X}\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ integrable, $\mathbb{X}$ J-medible. Si para cada descomposición $D=\{\mathbb{X}_1,\dots,\mathbb{X}_k\}$ de $\mathbb{X}$, existen números $\eta_i=\eta_i(D),\dots,\eta_k=\eta_k(D)$ tales que $\lim_{\|D\|\to 0}\eta_i=0\ \forall i\in\mathbb{N}_k$, entonces: $\int_{\mathbb{X}} f=\lim_{\|D\|\to 0}\sum(f(x_i)+\eta_i)\cdot c(\mathbb{X}_i)$, donde $D^*=(D,(x_i))$ es una descomposición puntuada de $\mathbb{X}$.

Dem:

Sea $\varepsilon>0$. Si $c(\mathbb{X})\neq 0$, como $\lim_{\|D\|\to 0}\eta_i=0\ \forall i\in\mathbb{N}_k$, tome $\frac{\varepsilon}{c(\mathbb{X})}>0$, para el cual $\exists\,\delta_i$ tal que si $\|D\|<\delta_i$, entonces $|\eta_i|<\frac{\varepsilon}{c(\mathbb{X})}$, $\forall i\in\mathbb{N}_k$. Tome $\delta=\min\{\delta_i\,|\,i\in\mathbb{N}_k\}$, luego, si $\|D\|<\delta$, entonces $|\eta_i|<\frac{\varepsilon}{c(\mathbb{X})}\ \forall i\in\mathbb{N}_k$. Así:

$$\left|\sum_{i=1}^{k}\eta_i c(\mathbb{X}_i)\right|\leq\sum_{i=1}^{k}|\eta_i|c(\mathbb{X}_i)<\frac{\varepsilon}{c(\mathbb{X})}\cdot\sum_{i=1}^{k}c(\mathbb{X}_i)=\frac{\varepsilon}{c(\mathbb{X})}\cdot c(\mathbb{X})=\varepsilon$$

Por tanto: $\lim_{\|D\|\to 0}\sum_{i=1}^{k}\eta_i\cdot c(\mathbb{X}_i)=0$. De esta forma:

$$\begin{aligned}\lim_{\|D\|\to 0}\sum_{i=1}^{k}(f(x_i)+\eta_i)\cdot c(\mathbb{X}_i)&=\lim_{\|D\|\to 0}\sum_{i=1}^{k}f(x_i)\cdot c(\mathbb{X}_i)+\lim_{\|D\|\to 0}\sum_{i=1}^{k}\eta_i c(\mathbb{X}_i)\\&=\lim_{\|D\|\to 0}\sum(f,D^*)+0\\&=\int_{\mathbb{X}}f+0\\&=\int_{\mathbb{X}}f.\end{aligned}$$

Si $c(\mathbb{X})=0$, hay que probar unas cosas.

Proposición auxiliar.

Sean $\mathbb{X},\mathbb{Y}\subset\mathbb{R}^n$ J-medibles, $\mathbb{Y}\subset\mathbb{X}$. Si $c(\mathbb{X})=0$, entonces $c(\mathbb{Y})=0$.

Dem:

Como $c(\mathbb{X})=0$, entonces, si $A\subset\mathbb{R}^n$ es una celda cerrada que contiene a $\mathbb{X}$: $c(\mathbb{X})=\int_A\chi_{\mathbb{X}}$. Como $\mathbb{X}\subset A$ y $\mathbb{Y}\subset\mathbb{X}$, se sigue que $\mathbb{Y}\subset A$. Luego: $c(\mathbb{Y})=\int_A\chi_{\mathbb{Y}}$. Probaremos que $\chi_{\mathbb{Y}}(x)\leq\chi_{\mathbb{X}}(x)\ \forall x\in A$.

Sea $x\in A$, tenemos 3 posibilidades:

- $x\in A\setminus\mathbb{X}$

$x\in A\setminus\mathbb{X}\Rightarrow x\notin\mathbb{X}\Rightarrow x\notin\mathbb{X}$ y $x\notin\mathbb{Y}\Rightarrow\chi_{\mathbb{Y}}(x)=0\leq 0=\chi_{\mathbb{X}}(x)$.

- $x\in\mathbb{X}\setminus\mathbb{Y}$

$x\in\mathbb{X}\setminus\mathbb{Y}\Rightarrow x\in\mathbb{X}$ y $x\notin\mathbb{Y}\Rightarrow\chi_{\mathbb{Y}}(x)=0\leq 1=\chi_{\mathbb{X}}(x)$.

- $x\in\mathbb{X}\cap\mathbb{Y}$

$x\in\mathbb{X}\cap\mathbb{Y}\Rightarrow\chi_{\mathbb{Y}}(x)=1\leq 1=\chi_{\mathbb{X}}(x)$

Por tanto: $\chi_Y(x) \leqslant \chi_X(x)\ \forall x \in A$. Luego:

$$0 \leqslant c(Y) \leqslant \int_A \chi_Y \leqslant \int_A \chi_X = c(X) = 0$$

Por tanto: $c(Y)=0$. $\square$

Con esta proposición, ya podemos proceder en el caso en que $c(X)=0$.

Como $D=\{X_1,\dots,X_K\}$ es una descomposición de X, entonces $X_i \subset X\ \forall i \in \mathbb{N}_K$, luego $c(X_i)=0\ \forall i \in \mathbb{N}_K$. Para el $\varepsilon>0\ \exists \delta_i>0$ tal que si $\|D\|<\delta_i$, entonces $|\eta_i|<\varepsilon$. Tome $\delta=\min\{\delta_i \mid i\in\mathbb{N}_K\}$. Si $\|D\| < \delta$, entonces:

$$\left|\sum_{i=1}^{K} \eta_i c(X_i)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{K} |\eta_i| c(X_i) = \sum_{i=1}^{K} \eta_i \cdot 0 = 0 < \varepsilon$$

Por tanto: $\lim_{\|D\|\to 0} \sum_{i=1}^{K} \eta_i c(X_i) = 0$. Se procede análogamente a arriba. $\square$

Teorema (Cambio de variable).

Sea $h: U \to V$ un difeomorfismo de clase C^1, U,V abiertos en $\mathbb{R}^m$. Sean $X \subset U$ J-medible y compacto, $f: h(U) \to \mathbb{R}$ integrable, entonces $f\circ h: U \to \mathbb{R}$ es integrable y $\int_{h(X)} f = \int_X f\circ h\, |\det Dh|$.

Dem:

Probaremos primero que $f\circ h$ es integrable. Sean D_f y $D_{f\circ h}$, los conjuntos de puntos en que f y $f\circ h$ no son continuas, respectivamente. Entonces $D_{f\circ h} = h^{-1}(D_f)$ ... (1)

Como f es integrable, D_f tiene medida nula. h^{-1} es de clase C^1, por lo que el corolario anterior a la proposición 12 implica que $h^{-1}(D_f)$ tiene medida nula, i.e. $D_{f\circ h}$ tiene medida nula. Por tanto $f\circ h$ es integrable.

Para probar la igualdad, supongamos que $f \geqslant 0$. Sea $\{X_1,\dots,X_n\}$ una descomposición puntuada de X.

Como:

$$\bigcup_{i=1}^{n} h(X_i) = h\left(\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right) = h(X)$$

y $h(X_i)$ es J-medible, pues X_i lo es $\forall i \in \mathbb{N}_n$ y h es un difeomorfismo de clase C^1, se sigue que $\{h(X_1),\dots,h(X_n)\}$ es una descomposición de $h(X)$. Sea $(\{X_1,\dots,X_n\},(x_i))$ una descomposición puntuada de X, es claro que $(\{h(X_1),\dots,h(X_n)\}, h(x_i))$ es una descomposición puntuada de $h(X)$. Entonces:

$$\int_{h(X)} f = \lim_{\|D'\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(h(x_i))\cdot c(h(X_i)) \quad \text{(Teorema 15)}$$

$(D' = \{h(X_1),\dots,h(X_n)\})$.

Dada la descomposición puntuada $(D,(x_i))$, de X, $D=\{X_1,\dots,X_n\}$. Para cada $i \in \mathbb{N}_n$, sea $T_i = Dh(x_i)$ y sea $N_i = \sup\{\|T_i^{-1}\circ Dh(x)\| \mid x \in X_i\}$ (se usa la norma de la T. lineal). (T_i^{-1} está bien definido, pues T_i es biyectiva);

Sea $x\in \overline{X}$. Es claro que: $\|T_i^{-1}\circ Dh(x)\|\leqslant \|T_i^{-1}\|\cdot\|Dh(x)\|$.... (2)

Sean $\eta_i=\eta_i(D)=N_i-1$, $\varphi: U\times U\to \mathbb{R}$

$$(x,y)\mapsto \|Dh(y)^{-1}\circ Dh(x)\| = \sup\{\|Dh(y)^{-1}\circ Dh(x)\cdot(z)\| : z\in\mathbb{R}^m \text{ y } \|z\|\leqslant 1\}$$

Entonces:

$$\forall x\in\overline{X},\ \varphi(x,x)=\|Dh(x)^{-1}\circ Dh(x)\| = \sup\{\|Dh(x)^{-1}\circ Dh(x)\cdot(z)\| : z\in\mathbb{R}^m \text{ y } \|z\|\leqslant 1\}$$

$$= \sup\{\|I_{\mathbb{R}^m}(z)\| : z\in\mathbb{R}^m \text{ y } \|z\|\leqslant 1\}$$

$$= \sup\{\|z\| : z\in\mathbb{R}^m \text{ y } \|z\|\leqslant 1\}$$

$$= 1.$$

Y φ es continua... (3)

Por lo tanto, por un lema, se sigue que $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0$ tal que si $\|x-y\|<\delta$, $x,y\in\overline{X}$, entonces: $|\varphi(x,y)-1|<\varepsilon$. Sea $\varepsilon>0$

Como $\|D\|=\max\{d_1,\dots,d_k\}$, con $d_i=\sup\{\|x-y\| : x,y\in\overline{X}_i\}$, si $\|D\|<\delta$, entonces, para $\overline{X}_i$, $x,y\in\overline{X}_i$: $\|x-y\|\leqslant \sup\{\|x-y\| : x,y\in\overline{X}_i\}=d_i<\delta$, $\forall\, i\in\mathbb{N}_n$. Luego: $\forall\, x,y\in\overline{X}_i$, $\|x-y\|<\delta$, luego $|\varphi(x,y)-1|<\varepsilon$. Por tanto:

$$-\varepsilon<\varphi(x,y)-1<\varepsilon$$

$$\Rightarrow -\varepsilon+1<\varphi(x,y)<\varepsilon+1$$

$$\Rightarrow |\varphi(x,y)|<\varepsilon+1 \qquad \forall\, x,y\in\overline{X}_i$$

por tanto, $\varepsilon+1$ es cota superior de $\{|\varphi(x,y)| : x,y\in\overline{X}_i\}=\{\|Dh^{-1}(y)\circ Dh(x)\| : x,y\in\overline{X}_i\}$. Así:

$$1\leqslant N_i=\sup\{\|T_i^{-1}\circ Dh(x)\| : x\in\overline{X}_i\}\leqslant \sup\{\|Dh^{-1}(y)\circ Dh(x)\| : x,y\in\overline{X}_i\}\leqslant\varepsilon+1$$

(4)

Luego:

$$-\varepsilon+1\leqslant 1\leqslant N_i\leqslant\varepsilon+1$$

Pero $N_i\geqslant 0$. Entonces:

$$-\varepsilon+1\leqslant N_i\leqslant\varepsilon+1$$

$$\Rightarrow |N_i-1|\leqslant\varepsilon$$

Pero $N_i-1=\eta_i=\eta_i(D)$. Luego:

$$|\eta_i|\leqslant\varepsilon \text{ si } \|D\|<\delta$$

Por tanto: $\lim_{\|D\|\to 0}\eta_i=0$.

Por el corolario anterior al teorema de cambio de variable en el caso lineal:

$$c(h(X_i)) = c(T_i \circ T_i^{-1}(h(X_i))) = |\det T_i| \cdot c(T_i^{-1}(h(X_i)))$$

Como $T_i^{-1} \circ h$ es un difeomorfismo de clase C^1 ... (5):

$$c(T_i^{-1} \circ h(X_i)) \leq N_i^m c(X_i) = (\eta_i + 1)^m c(X_i)$$

Siendo que $f \geq 0$, se tiene por el Lema de Duhamel:

$$\int_{h(X)} f = \lim_{\|D\| \to 0} \sum (D^*, f) = \lim_{\|D\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(h(x_i)) \cdot c(h(X_i))$$

$$\leq \lim_{\|D\| \to 0} \sum_{i=1}^{k} f(h(x_i)) \cdot |\det T_i| (\eta_i + 1)^m c(X_i)$$

$$= \lim_{\|D\| \to 0} \sum_{i=1}^{k} (f \circ h(x_i) \cdot |\det Dh(x_i)| + \hat{\eta}_i) c(X_i)$$

Donde $\hat{\eta}_i = \eta_i^m + \dots + m\eta_i$. Luego: $\lim_{\|D\| \to 0} \hat{\eta}_i = 0$. Así:

$$= \int_X f \circ h \cdot |\det Dh|$$

Considerando $h^{-1}: h(X) \to X$ y observando que si $x = h^{-1}(y)$ entonces por el teorema de la función inversa: $D(h^{-1})(y) = [Dh(h^{-1}(y))]^{-1} = [Dh(x)]^{-1}$. Por lo cual: $|\det Dh(x)| \cdot |\det D(h^{-1})(y)| = 1$.

(1) Sea $x \in D_{f \circ h} \subset \mathbb{X}$.

$$x \in D_{f\circ h} \Leftrightarrow \exists\, \varepsilon > 0 \text{ } \pi \text{ } \forall\, \delta > 0 \text{ existe } x_\delta \text{ tal que si } \|x - x_\delta\| < \delta$$
$$\text{entonces } \|f(h(x)) - f(h(x_\delta))\| \geqslant \varepsilon.$$

(2) Si $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal, $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in \mathbb{R}^n \text{ y } \|x\| \leqslant 1\}$.
Esta satisface:
i) $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, $\|T(x)\| \leqslant \|T\|\|x\|$. (probado)
ii) $\|T \circ L\| \leqslant \|T\| \cdot \|L\|$ $\forall\, T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$.
Dem:
Sean $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ y $x \in \mathbb{R}^k$ tal que $\|x\| \leqslant 1$. Entonces:
$$\|T \circ L(x)\| = \|T(L(x))\| \leqslant \|L(x)\| \cdot \|T\| \leqslant \|x\| \cdot \|L\| \cdot \|T\| \leqslant \|L\| \cdot \|T\|.$$
Luego, $\|L\| \cdot \|T\|$ es cota superior de $\{\|T \circ L(x)\| : x \in \mathbb{R}^k \text{ y } \|x\| \leqslant 1\}$. Por tanto:
$$\|T \circ L\| \leqslant \|L\| \cdot \|T\|$$
q.e.d.

(3) φ es continua. Como $\varphi(x,y) = \|Dh^{-1}(y) \circ Dh(x)\|$, al ser $Dh(x)$ y $Dh^{-1}(y)$ continuas, entonces, su composición también es continua. Así $Dh^{-1}(y) \circ Dh(x)$ es continua. Luego, $\|\ \|: \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, por ser continua, se sigue que $\|\ \| \circ (Dh^{-1}(y) \circ Dh(x))$ también es continua.
Puntualizando mejor. Como h es de clase C^1, $Dh: U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ es continua.
Como $Dh: U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ es continua. $T_i^{-1} = Dh^{-1}(x_i) : \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ es continua. Así:
$$\|T_i^{-1} \circ Dh\| : U \to \mathbb{R} \text{ es continua.}$$
$$x \mapsto \|T_i^{-1} \circ Dh(x)\|$$
(1) $x \in D_{f\circ h} \Leftrightarrow \exists\ \{x_k\} \to x \subset \mathbb{X}$ tal que $\{f \circ h(x_k)\} \not\to f(h(x))$. Pero h es continua. Luego tome $y_k = h(x_k)$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$, luego $\{y_k\} \to h(x)$ y $\{f(y_k)\} \not\to f(y)$.

Suponga que $\mathrm{int}(\overline{X}_i \cap \overline{X}_j) \neq \emptyset$. Luego para $x \in \ldots$ $\exists\, \varepsilon > 0 \;\ni\; E_\varepsilon(x) \subset \mathrm{Int}(\overline{X}_i \cap \overline{X}_j)$ pero h es continua y $E_\varepsilon(x)$ es abierto. Así: $h(E_\varepsilon(x)) \subset h(\overline{X}_i) \cap h(\overline{X}_j)$. Por tanto. $h(E_\varepsilon(x)) \subset \mathrm{int}(h(\overline{X}_i) \cap h(\overline{X}_j)) \neq \emptyset$, lo que es una contradicción. Luego $\mathrm{int}(\overline{X}_i \cap \overline{X}_j) = \emptyset$.

Nota: probar que T_i^{-1} es invertible.

$Dh(x)^{-1}$ existe, pues $Dh(x)$ es invertible $\forall\, x \in \overline{X}$