# Exámenes Parciales Topología I Quintín

Cristo Daniel Alvarado

12 de marzo de 2024

# Índice general

# Capítulo 1

# Primer Examamen Parcial

## 1.1. Ejercicios

**Ejercicio 1.1.1**
Sean $X = \mathbb{R}$ y $\tau = \{X, \emptyset\} \cup \{B_q\}_{q \in \mathbb{Q}}$, donde $B_q = (q, \infty) \cap \mathbb{Q}$. ¿Es $(\mathbb{R}, \tau)$ un espacio topológico? Demuestre su respuesta.

**Solución:**

□

**Ejercicio 1.1.2**
¿La familia $\left\{[a, b[ \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Q}, a < b\right\}$ es base en $(X, \tau_S)$? Justifique su respuesta.

**Solución:**

□

**Ejercicio 1.1.3**
Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico y $R$ una relación de equivalencia sobre $X$, y $p : X \to X/R$ la función que a cada elemento $x \mapsto [x]$ lo asigna a su clase de equivalencia. Haga lo siguiente:

1. Demuestre que la colección de todos los conjuntos cerrados en $(X/R, \tau/R)$ es:
$$\left\{F \subseteq X/R \,\middle|\, p^{-1}(F) \text{ es cerrado en } X\right\}$$

2. Demuestre que la colección de todos los conjuntos cerrados en $(X/R, \tau/R)$ es igual a la familia:
$$\left\{p(F) \subseteq X/R \,\middle|\, F \text{ es cerrado en } (X, \tau) \text{ y } p^{-1}(p(F)) = F\right\}$$

**Solución:**

□

**Ejercicio 1.1.4**
En el espacio $(X, \tau_{cf})$ y tomando $A = (0, 1)$, obtener:

1. $\mathring{A}$.

2. $\overline{A}$.

3. $\operatorname{Fr}(A)$.

4. $\operatorname{Ext}(A) = \overset{\circ}{\widehat{X - A}}$.

**Solución:**

$\square$

**Ejercicio 1.1.5**

Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico, para cada $A \subseteq X$ definimos $\alpha(A) = \overline{\overset{\circ}{A}}$, y $\beta(A) = \overset{\circ}{\overline{A}}$. Demuestre o refute:

1. $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$, para cada $A \subseteq X$.
2. $\beta(\beta(A)) = \overline{A}$, para cada $A \subseteq X$.

**Demostración:**

$\blacksquare$

# Capítulo 2

# Segundo Examen Parcial

## 2.1. Ejercicios

**Ejercicio 2.1.1**

# Capítulo 3

# Tercer Examen Parcial

## 3.1. Ejercicios

**Ejercicio 3.1.1**

# Capítulo 4

# ETS Ordinario

## 4.1. Ejercicios

**Ejercicio 4.1.1**
Sea $A = \left\{\sin n \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$. Pruebe que $\overline{A} = [-1,1]$ en $(\mathbb{R}, \tau_u)$.

**Demostración:**
Notemos que $A = \sin(\mathbb{N})$. Sea $C = \sin(\mathbb{Z})$.

Es claro que $C \subseteq [-1,1]$ donde $[-1,1]$ es un cerrado en $(\mathbb{R}, \tau_u)$, por tanto $\overline{C} \subseteq [-1,1]$, veremos que se cumple la otra contención. Sea $x \in [-1,1]$,

- Si $x \in C$, es claro que $x \in \overline{C}$ ya que $C \subseteq \overline{C}$.
- Si $x \notin C$, como la función $t \mapsto \operatorname{sen} t$ de $\mathbb{R}$ a $[-1,1]$ es suprayectiva, entonces existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $\sin \theta = x$.

  Ahora, por la proposición 4.2.2, el conjunto

  $$B = \left\{a + 2\pi b \middle| a, b \in \mathbb{Z}\right\}$$

  es denso en $\mathbb{R}$ por ser $2\pi$ irracional. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\theta_n = a_n + 2\pi b_n \in B$ tal que $\left|\theta - \theta_n\right| < \frac{1}{n}$, es decir que la sucesión $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\theta$. Como $t \mapsto \sin t$ es continua, entonces:

  $$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left|\sin\theta - \sin\theta_n\right| &= 0 \\ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|x - \sin\left(a_n + 2\pi b_n\right)\right| &= 0 \end{aligned}$$

  pero,

  $$\begin{aligned} \sin\left(a_n + 2\pi b_n\right) &= \sin\left(a_n\right)\cos\left(2\pi b_n\right) + \cos\left(a_n\right)\sin\left(2\pi b_n\right) \\ &= \sin\left(a_n\right) \end{aligned}$$

  pues $\cos(2\pi k) = 1$ y $\sin(2\pi k) = 0$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Luego,

  $$\lim_{n\to\infty} \left|x - \sin a_n\right| = 0$$

  es decir que para $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\left|x - \sin a_n\right| < \varepsilon$, donde $a_n \in \mathbb{Z}$.

Por los dos incisos anterioes, se sigue que lo que $\overline{C} \subseteq [-1,1] \Rightarrow \overline{C} = [-1,1]$, es decir que $\sin(\mathbb{Z})$ es denso en $[-1,1]$, pero $t \mapsto \sin t$ es continua y periódica entre $[-1,1]$, por tanto de la proposición 4.2.3 se sigue que $A = \sin(\mathbb{N})$ es denso en $[-1,1]$. ■

## 4.2. Resultados Preeliminares

**Proposición 4.2.1**
Considere al grupo aditivo $(\mathbb{R}, +)$. Entonces todo subgrupo $H$ de éste es denso en la topología $(\mathbb{R}, \tau_u)$ ó es cíclico.

**Demostración:**
Se tienen que probar dos cosas:

1. Suponga que $G$ es denso. Se probará que $G$ no puede ser cíclico. En efecto, si $G$ fuera cíclico, existiría $g \in G$ tal que
$$G = \langle g \rangle$$
es claro que $g \neq 0$, pues en caso contrario se tendría que $G = \{0\}$, que no puede suceder ya que $G$ es denso en $\mathbb{R}$, así $g > 0$; además, existe $h \in G$ tal que $0 < h < g$ ya que el conjunto $]0, g[$ es abierto en $\mathbb{R}$.

   Como $G = \langle g \rangle$ existe entonces $n \in \mathbb{N}$ tal que $g = hn$ (por ser $h, g > 0$), es decir que $g \leq h\#_c$, pues $h < g$. Por tanto, $G$ no es cíclico.

2. Suponga que $G$ no es denso. Probaremos que $G$ es cíclico, sea
$$g = \text{ínf}\left\{x \in G \middle| x > 0\right\}$$
Se tienen dos casos. Afirmamos que $g > 0$. En efecto, suponga que $g = 0$, sea $U \subseteq \mathbb{R}$ abierto no vacío y, $x \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subseteq U$. Como $g = 0$, existe $g_\varepsilon \in G$ tal que $0 < g_\varepsilon < \varepsilon$, sea ahora $k \in \mathbb{Z}$ tal que:
$$kg_\varepsilon \leq x < (k+1)g_\varepsilon$$
es claro que $kg_\varepsilon \in G$, y además:
$$\begin{aligned} 0 \leq & x - kg_\varepsilon \\ < & (k+1)g_\varepsilon - kg_\varepsilon \\ = & g_\varepsilon \\ < & \varepsilon \end{aligned}$$
es decir, $\left|x - kg_\varepsilon\right| < \varepsilon$ y por ende $kg_\varepsilon \in U$. Por tanto, $G$ es denso en $\mathbb{R}\#_c$. Por tanto, $g > 0$. Veamos ahora que $g \in G$.

   Suponga que $g \notin G$, entonces existen $h_1, h_2 \in G$ positivos tales que:
$$g < h_1 < h_2 < 2g$$
(por propiedades del ínfimo), luego $h_2 - h_1 \in G$ y son tales que $0 < h_2 - h_1 < g\#_c$, pues $g$ es el ínfimo. Luego, $g \in G$.

   Sea $x \in G$, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que
$$kg \leq x < (k+1)g$$
Así, $kg \in G$ lo cual implica que $x - kg \in H$, por ende:
$$\begin{aligned} 0 \leq & x - kg \\ < & (k+1)g - kg \\ = & \; g \end{aligned}$$
al ser $g$ el ínfimo, debe suceder que $x - kg = 0$, es decir que $x = kg$. Por tanto, $G = \langle g \rangle$.

por los dos incisos anteriores, se sigue que $G$ es denso ó es cíclico. ∎

**Proposición 4.2.2**
Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces el conjunto:

$$A = \left\{ a + b\alpha \middle| a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

es denso en $\mathbb{R}$ con la topología usual.

**Demostración:**
Afirmamos que $A$ es un subgrupo de $\mathbb{R}$ el cual no es cíclico, por tanto, de la proposición anterior, se sigue que $A$ es denso en $\mathbb{R}$ con la topología usual.

Es claro que $A$ es subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$, pues si $a_1 + b_1\alpha, a_2 + b_2\alpha \in A$, se tiene que el elemento $(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\alpha \in A$ ya que $a_1 - a_2, b_1 - b_2 \in \mathbb{Z}$.

Ahora, supongamos que $A$ es cíclico, entonces existiría $a + b\alpha \in A$ positivo (lo podemos elegir positivo y no puede ser cero ya que $\alpha \in A$) tal que $A = \langle a + b\alpha \rangle$. En particular, $\alpha \in A$, por tanto, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\begin{aligned} \alpha =& m(a + b\alpha) \\ \Rightarrow (1 - mb)\alpha =& ma \end{aligned}$$

entonces, $mb = 1$, lo cual implica que $m = b = \pm 1$ (en caso contrario, un lado de la ecuación sería irracional y el otro entero), y que $a = 0$. Por tanto, $A = \langle \alpha \rangle = \langle -\alpha \rangle$, pero esto no puede suceder pues el elemento $1 + 2\alpha \notin \langle \alpha \rangle$, pero $1 + 2\alpha \in A\#_c$.

Por tanto, $A$ no es cíclico. Luego, de la proposición anterior, se sigue que $A$ es denso en $\mathbb{R}$ con la topología usual. ■

**Proposición 4.2.3**
Sea $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ función continua y periódica de período $T > 0$. Entonces, si $f(\mathbb{Z})$ es denso en $(\mathbb{R}, \tau_u)$, entonces $f(\mathbb{N})$ también lo es.

**Demostración:**
Si $T$ es racional, entonces $f(\mathbb{Z}) = T$ el cual no es denso en $[-1, 1]$, por tanto, $T$ debe ser irracional. Como $f$ es continua y acotada, entonces es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

Sea $x \in [-1, 1]$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $\left| f(m) - x \right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $f$ es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que si $\left| u - v \right| < \delta$ entones $\left| f(u) - f(v) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Si $m \in \mathbb{N}$, se tiene el resultado. Suponga que $m \leq 0$. Existen $p, q \in \mathbb{N}$ tales que

$$\left| p - Tq \right| < \delta$$

donde $p > -m$ y $q > 1/\delta$, esto pues el conjunto $]T, \infty[ \cap \mathbb{Q}$ es denso en $[T, \infty[$. Entonces:

$$\begin{aligned} \left| f(m + p) - \alpha \right| &\leq \left| f(m + p) - f(m) \right| + \left| f(m) - \alpha \right| \\ &\leq \left| f(m + (p - Tq)) - f(m) \right| + \left| f(m) - \alpha \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

con $p + m \in \mathbb{N}$. Luego $f(\mathbb{N})$ es denso en $[-1, 1]$.

■