Tema 3: Lógica de Primer Orden

Lógica Matemática (Licenciatura en Física y Matemáticas)

Prof. David Fernández Bretón

1. Traduzca cada una de las siguientes fórmulas de primer orden a español ordinario, utilizando los símbolos de predicado unario A, B e I para representar "es un autor", "es un libro", y "es interesante", respectivamente; por otra parte, el símbolo de predicado binario C debe ser interpretado como "es más caro que". Finalmente, el símbolo de función unario P representa a la función que recibe como entrada un libro, y arroja como salida a su autor.
   (a) $(\forall x)(B(x) \to (\exists y)(A(y) \wedge y = P(x)))$,
   (b) $(\forall x)(\forall y)((B(x) \wedge B(y) \wedge I(x) \wedge \neg I(y)) \to C(x, y))$,
   (c) $(\forall x)(B(x) \to ((\exists y)(B(y) \wedge C(x, y)) \to I(x)))$.

2. Dada cada uno de los siguientes enunciados en español, identifique el universo de discurso apropiado, así como los símbolos adecuados de constante, de función y de relación (especificando la aridad de cada uno de ellos) para poder escribir simbólicamente una traducción a la lógica de primer orden.
   (a) Todo número primo debe ser impar.
   (b) Si hay al menos una manzana, entonces hay al menos una manzana podrida.
   (c) Todo número complejo z tal que $z = \overline{z}$ pertenece al conjunto $\mathbb{R}$.

3. Considere el llamado **lenguaje de la aritmética de Peano**, el cual consta de un símbolo de constante 1, un símbolo de relación binaria $<$, un símbolo de relación unaria S y dos símbolos de función binaria $+, \cdot$. Determine cuáles de las siguientes sucesiones de símbolos denotan términos y/o fórmulas bien formadas (o bien, de manera más precisa, cuáles de los siguientes podrían convertirse en términos y/o fórmulas bien formadas módulo algunas abreviaturas).
   (a) $v_1 < (v_2 + S(v_3))$,
   (b) $S(v_5 + (S(S(1)) + v_{27}))$,
   (c) $S(v_9 + S((\forall 1)(1 + S(1) = v_{56})))$,
   (d) $(\forall v_{48})(S(v_{48} + 1) \cdot S(S(S(1))) = v_{23})$.

4. Sea $\mathscr{L}$ un lenguaje de primer orden con cuatro símbolos de relación unaria P, Q, S, T, así como símbolos de relación binaria B, C, D y símbolos de constante c, d. Construya demostraciones formales de validez para cada uno de los siguientes argumentos.
   (a) $(\exists x)(\forall y)(P(x) \leftrightarrow Q(y))$
   $\therefore (\forall y)(\exists x)(P(x) \leftrightarrow Q(y))$
   (b) $(\forall x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(y))$
   $\therefore (\exists y)(\forall x)(P(x) \wedge Q(y))$
   (c) $(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \to ((\forall x)(P(x)) \to (\forall x)(Q(x)))$
   (d) $(\forall x)(P(x) \to \varphi) \leftrightarrow ((\exists x)(P(x)) \to \varphi)$
   (e) $(\exists x)(P(x) \wedge \varphi) \leftrightarrow ((\exists x)(P(x)) \wedge \varphi)$
   (f) $(\forall x)(\exists y)(P(x) \to Q(y)) \to ((\forall x)(P(x)) \to (\exists y)(Q(y)))$
   (g) $(\exists x)(P(x) \to \varphi) \leftrightarrow ((\forall x)(P(x)) \to \varphi)$
   (h) $(\exists x)(P(x) \vee \varphi) \leftrightarrow ((\exists x)(P(x)) \vee \varphi)$
   (i) $((\exists x)(P(x)) \to (\exists x)(Q(x))) \to (\exists x)(P(x) \to Q(x))$
   (j) $((\exists x)(P(x)) \vee (\exists x)(Q(x))) \leftrightarrow (\exists x)(P(x) \vee Q(x))$
   (k) $(\forall x)(P(x) \vee \varphi) \leftrightarrow ((\forall x)(P(x)) \vee \varphi)$

(l) $(\forall x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(y)) \leftrightarrow (\exists y)(\forall x)(P(x) \wedge Q(y))$

(m) $((\exists x)(P(x) \to (\exists y)(Q(y))) \leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(P(x) \to Q(y))$

(n) $((\forall x)(P(x) \to (\exists y)(Q(y))) \leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(P(x) \to Q(y)))$

(o) $(\forall x)(P(x) \to (\exists y)(Q(y))) \leftrightarrow (\exists y)((\exists x)(P(x)) \to Q(y))$

(p) $(\forall x)(\exists y)(P(x) \vee Q(y)) \leftrightarrow (\exists y)(\forall x)(P(x) \vee Q(y)))$

(q) $(\forall x)((\exists y)(B(y,x)) \to (\forall z)(B(x,z)))$
$\therefore (\forall y)(\forall z)(B(y,z) \to B(z,y))$

(r) $(\forall x)(B(c,x) \to C(x,d))$
$(\exists x)(C(x,d)) \to (\exists y)(C(d,y))$
$\therefore (\exists x)(B(c,x)) \to (\exists y)(C(d,y))$

(s) $(\forall x)(B(x) \to (\forall y)(C(y) \to D(x,y)))$
$(\exists x)(B(x) \wedge (\exists y)(\neg D(x,y)))$
$\therefore (\exists x)(\neg(C(x)))$

(t) $(\forall x)(P(x) \to ((\exists y)(B(x,y)) \to (\exists z)(B(z,x))))$
$(\forall x)((\exists z)(B(z,x)) \to B(x,x))$
$\neg(\exists x)(B(x,x))$
$\therefore (\forall x)(P(x) \to (\forall y)(\neg B(x,y)))$

(u) $(\forall x)(P(x) \to (\forall y)(Q(y) \to B(x,y)))$
$(\forall x)(S(x) \to (\forall y)(B(x,y) \to T(y)))$
$\therefore (\exists x)(P(x) \wedge S(x)) \to (\forall y)(Q(y) \to T(y))$

(v) $(\forall x)(x = x)$

(w) $(\forall x)(\forall y)(x = y \to y = x)$

(x) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x = y \to (y = z \to x = z))$

(y) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall w)(x = z \to (y = w \to (P(x,y) \to P(z,w))))$

(z) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall w)(x = z \to (y = w \to f(x,y) = f(z,w)))$

5. Sea $\mathscr{L}$ el lenguaje de primer orden cuyo único símbolo no lógico es un símbolo de relación unaria P. Demuestre o refute las siguientes afirmaciones:

   (a) $(\forall v_1)(P(v_1)) \vDash P(v_2)$,
   (b) $P(v_2) \vDash (\forall v_1)(P(v_1))$,
   (c) $(\forall v_1)(P(v_1)) \vDash (\exists v_1)(P(v_1))$,
   (d) $\vDash (\exists v_5)(P(v_5)) \to (\forall v_6)(P(v_6))$,
   (e) $\vDash (\exists v_5)(P(v_5) \to (\forall v_6)(P(v_6)))$.

6. Sea $\mathscr{L}$ el mismo lenguaje del problema anterior.

   (a) Caracterice a los modelos que satisfacen el enunciado $(\forall x)(\forall y)(x = y)$,
   (b) caracterice a los modelos que satisfacen el enunciado $(\exists x)(\exists y)(\neg(x = y) \wedge (\forall z)(z = x \vee z = y))$,
   (c) caracterice a los modelos que satisfacen el enunciado $(\forall x)(\neg P(x))$.

7. Sea φ una fórmula (de algún lenguaje de primer orden $\mathscr{L}$), y sea $\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\} = \mathrm{Free}(\varphi)$ (supongamos, para que todo esté bien definido, que $i_1 < \cdots < i_k$). Definimos la **cerradura universal** de φ como la oración $(\forall v_{i_k}) \cdots (\forall v_{i_1})(\varphi)$.

   (a) Escriba una definición formal de la cerradura universal de una fórmula (*sugerencia*: inducción sobre el número de variables libres).
   (b) Demuestre que, para cualquier conjunto de enunciados Σ, se cumple que $\Sigma \vDash \varphi$ si y sólo si $\Sigma \vDash \psi$, en donde ψ es la cerradura universal de φ.

8. Considere el lenguaje de primer orden $\mathscr{L}$ cuyo único símbolo no lógico es uno de relación binaria, P. Demuestre que, de entre los siguientes tres enunciados, no hay dos de ellos que tengan al otro como consecuencia lógica.

   (a) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(P(x,y) \to (P(y,z) \to P(x,z)))$,
   (b) $(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \to (P(y,x) \to x = y))$,
   (c) $(\forall x)(\exists y)(P(x,y)) \to (\exists y)(\forall x)(P(x,y))$.

9. Sea $\mathscr{L}$ el lenguaje de primer orden cuyos símbolos no lógicos son un símbolo de función unaria F, y un símbolo de relación binaria P. Demuestre que $\vDash x = y \to (P(z, F(x)) \to P(z, F(y)))$.