# CONTINUIDAD.

**Def.** Sea $f$ una función de un espacio métrico $(X, d)$ a otro espacio métrico $(Y, \rho)$. Se dice que $f$ es continua en $X$ si para cualquier conjunto abierto $Y$, su imagen inversa bajo $f$:

$$f^{-1}(Y) = \{x \in X \mid f(x) \in Y\}$$

Es un conjunto abierto en $X$.

## EJEMPLOS:

1) La función identidad en $(X, d)$ es continua en $(X, d)$, $id: X \to X$.

2) Cualquier función $f: (X, d) \to (Y, \rho)$ constante es continua en $X$. En efecto, sea $y_0 \in Y$ y defina $f(x) = y_0$, $\forall x \in X$.

Sea $G$ un abierto en $Y$. Entonces:

$$f^{-1}(G) = \{x \in X \mid f(x) \in G\}$$
$$= \{x \in X \mid y_0 \in G\}$$

Si $y_0 \in G$, entonces $f^{-1}(G) = X$, el cual es abierto, si $y_0 \notin G$, $f^{-1}(G) = \phi$, el cual también es abierto. Por tanto, $f$ es continua en $X$.

3) Cualquier función de un espacio métrico discreto a un espacio métrico es continua.

En efecto, sea $f: (X, d) \to (Y, \rho)$, $(X, d)$ un espacio métrico discreto y $f$ función. Sea $G$ un abierto en $Y$, entonces:

$$f^{-1}(G) \subset X$$

Como $(X, d)$ es un espacio métrico discreto, entonces cualquier conjunto dentro es abierto, así $f^{-1}(G)$ es abierto. Por tanto $f$ es continua en $X$.

## Teorema:

Sea $f:(X,d)\to(Y,\rho)$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

i) $f$ es continua en $X$.

ii) $f(\bar{A})\subset\overline{f(A)}$, $\forall A\subset X$.

iii) $\forall H$ cerrado en $Y$, $f^{-1}(H)$ es cerrado en $X$.

Dem:

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Suponga que $f$ es continua en $X$, y sea $A\subset X$. Sea $y\in f(\bar{A})$, entonces $\exists\, x\in\bar{A}$ tal que $y=f(x)$.

Debemos probar que $y\in\overline{f(A)}$, para ello, probaremos que $\forall r>0$, $B(y,r)\cap f(A)\neq\emptyset$.

Sea $r>0$, como $B(y,r)\subset Y$ es abierta, entonces $f^{-1}(B(y,r))$ es abierto en $X$ por ser $f$ continua en $X$. Claramente $x\in f^{-1}(B(y,r))$, pues $f(x)=y\in B(y,r)$. Como $x\in\bar{A}$, entonces $f^{-1}(B(y,r))\cap A\neq\emptyset$, pues $f^{-1}(B(y,r))\in\mathcal{V}(x)$. Sea $a\in f^{-1}(B(y,r))\cap A$, entonces $f(a)\in B(y,r)$ y $f(a)\in A$, luego $B(y,r)\cap A\neq\emptyset$, así $y\in\overline{f(A)}$.

Por tanto $f(\bar{A})\subset\overline{f(A)}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Suponga que $f(\bar{A})\subset\overline{f(A)}$, $\forall A\subset X$. Sea $H\subset Y$ un cerrado, probaremos que $f^{-1}(H)$ es cerrado en $X$.

Como $f^{-1}(H)\subset X$, entonces

$$f(\overline{f^{-1}(H)})\subset\overline{f(f^{-1}(H))}$$

como $f(f^{-1}(H))\subset H$, entonces $\overline{f(f^{-1}(H))}\subset\bar{H}$, así:

$$f(\overline{f^{-1}(H)})\subset\bar{H}=H$$

pues $H$ es cerrado. Sea $x\in\overline{f^{-1}(H)}$, entonces $f(x)\in f(\overline{f^{-1}(H)})\subset H$, luego $f(x)\in H\Rightarrow x\in f^{-1}(H)$. Por tanto

$$\overline{f^{-1}(H)} \subset f^{-1}(H)$$

luego $f^{-1}(H) = \overline{f^{-1}(H)}$, por tanto, $f^{-1}(H)$ es cerrado en $X$.

(iii) $\Rightarrow$ (i)

Suponga (iii), y sea $G$ un abierto en $Y$, entonces $\complement G$ es cerrado en $Y$. Luego por hipótesis $f^{-1}(\complement G)$ es cerrado en $X$. Probaremos que

$$f^{-1}(\complement G) = \complement f^{-1}(G)$$

En efecto.

$x \in f^{-1}(\complement G) \Leftrightarrow f(x) \in \complement G \Leftrightarrow f(x) \notin G \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(G) \Leftrightarrow x \in \complement f^{-1}(G)$. Luego

$$f^{-1}(\complement G) = \complement f^{-1}(G)$$
$$\Rightarrow \complement f^{-1}(\complement G) = f^{-1}(G)$$

como $f^{-1}(\complement G)$ es cerrado en $X$, entonces $\complement f^{-1}(\complement G)$ es abierto en $X$, luego $f^{-1}(G)$ es abierto en $X$.

q.e.d.

**Def.**

Sea $f:(X,d) \to (Y,\rho)$ función y $x_0 \in X$. Se dice que $f$ es continua en $x_0$ si $\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0$ tal que

$$\forall x \in X \ni d(x,x_0) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

En términos de bolas:

$$f(B(x_0,\delta)) \subset B(f(x_0),\varepsilon) \quad \text{o}$$
$$B(x_0,\delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0),\varepsilon))$$

luego, $f^{-1}(B(f(x_0),\varepsilon))$ es una vecindad de $x_0$, pues $\exists$ un abierto $G = f^{-1}(B(f(x_0),\varepsilon))$ tal que $B(x_0,\delta) \subset G = f^{-1}(B(f(x_0),\varepsilon))$.

**Proposición:**

Sea $f:(X,d) \to (Y,\rho)$ y $x_0 \in X$. Entonces $f$ es continua en $x_0 \Leftrightarrow \forall\, V \in \mathcal{V}(f(x_0))$, $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x_0) \Leftrightarrow \forall\, V \in \mathcal{V}(f(x_0))\ \exists\, U \in \mathcal{V}(x_0) \ni f(U) \subset V$ o $U \subset$

$f^{-1}(V)$.

**Dem:**

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Suponga que $f$ es continua en $x_0$. Sea $V \in \mathcal{V}(f(x_0))$, entonces $\exists$ $G$ abierto en $\mathbb{Y}$ tal que $f(x_0) \in G \subset V$. Como $G$ es abierto $\exists\, \varepsilon > 0$ $\ni$ $B(f(x_0), \varepsilon) \subset G$. Como $f$ es continua, $\exists\, \delta > 0$ $\ni$ $B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon)) \subset f^{-1}(G) \subset f^{-1}(V)$. Luego $\exists$ $U = B(x_0, \delta)$ abierto en $\mathbb{X}$ tal que $x \in U \subset f^{-1}(V)$. Por tanto $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x_0)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Suponga (ii). Sea $V \in \mathcal{V}(f(x_0))$, entonces $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x_0)$. Tome $U = f^{-1}(V)$, entonces $f(V) = f(f^{-1}(V)) \subset V$.

(iii) $\Rightarrow$ (i)

Suponga (iii). Sea $\varepsilon > 0$. Como $B(f(x_0), \varepsilon) \in \mathcal{V}(f(x_0))$, por hipótesis $\exists$ $U \in \mathcal{V}(x_0)$ $\ni$ $U \subset f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$. Como $U$ es vecindad de $x_0$, $\exists$ $G$ abierto en $\mathbb{X}$ tal que $x_0 \in G \subset U$. Como $x_0 \in G$, $\exists\, \delta > 0$ $\ni$ $B(x_0, \delta) \subset G \subset U$. Luego $B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$. Así, $f$ es continua en $x_0$.

q.e.d.

**Teorema:**

Sea $f$ una función continua en $(\mathbb{X}, d)$ en $(\mathbb{Y}, \rho)$ y sea $x_0 \in \mathbb{X}$. Entonces $f$ es continua en $x_0$ si y sólo si para toda sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converja a $x_0$ en $\mathbb{X}$, la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(x_0)$ en $(\mathbb{Y}, \rho)$.

**Dem:**

$\Rightarrow$) Suponga que $f$ es continua en $x_0$. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión que converge a $x_0$. Probaremos que $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(x_0)$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $f$ es continua $\exists\, \delta > 0$ $\ni$ $\forall x \in \mathbb{X}$ $\ni$ $d(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Para este $\delta > 0$ $\exists\, N \in \mathbb{N}$ $\ni$ si $n \geq N$ entonces $d(x_n, x) < \delta$, por lo anterior, esto implica que $\rho(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$. Luego $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(x_0)$.

$\Leftarrow$) Suponga que $f$ no es continua en $x_0$. Se debe probar que $\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converje a $x_0$, pero $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ no converge a $f(x_0)$.

Como $f$ no es continua en $x_0$, $\exists\, \varepsilon_0 > 0 \ \sqcap\ \forall\, \delta_n = \frac{1}{n}$, $\exists\, x_n$ tal que $d(x_n, x_0) < \delta_n \Rightarrow \rho(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon_0$

Tome la sucesión formada por estos $x_n$. Claramente $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $x_0$, pero $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ no converge a $f(x_0)$.

q.e.d.

**Corolario (Principio de ampliación de identidades).**

Sean $f$ y $g$ dos funciones de un esp. métrico $(X, d)$ a $(Y, \rho)$. Si $f$ y $g$ son continuas en $(X, d)$ y toman los mismos valores en todos los puntos de algún conjunto $A$ denso en $X$, entonces $f = g$.

**Dem:**

Sea $x_0 \in X$. Como $A$ es denso en $X$, $\exists$ una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $A$ que converge a $x_0$. Como $f$ y $g$ son continuas en $x_0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x_0)$$

pero $f(x_n) = g(x_n)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, por tanto $f(x_0) = g(x_0)$.

q.e.d.

**Teorema.**

Una función $f$ de un espacio métrico $(X, d)$ a $(Y, \rho)$ es continua en $X$ si y sólo si $f$ es continua en cada punto de $X$.

**Dem:**

$\Rightarrow$) Suponga que $f$ es continua en $X$. Sea $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$. Como $B(f(x_0), \varepsilon) \subset Y$ es abierta, por ser $f$ continua $f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$ es abierto. Claramente $x_0 \in f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$, luego $\exists\, \delta > 0 \ \sqcap\ B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$, luego $f$ es continua en $x_0$. Como el $x_0$ fue arbitrario, $f$ es continua en cada punto de $X$.

$\Leftarrow$) Suponga que $f$ es continua en cada punto de $X$. Sea $G \subset Y$ abierto, probaremos que $f^{-1}(G)$ es abierto en $X$. Sea $x_0 \in f^{-1}(G)$, entonces $f(x_0) \in G$, como $G$ es abierto, $\exists\, \varepsilon > 0$ tal que $B(f(x_0), \varepsilon) \subset G$. Como $f$ es continua en $x_0$, para este $\exists\, \delta > 0$ m $B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$. Pero:

$$f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon)) \subset f^{-1}(G)$$
$$\Rightarrow B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(G)$$

Luego $f^{-1}(G)$ es abierto en $(X, d)$.

q.e.d.

**Def.** Se dice que una función $f$ de $(X, d)$ en $(Y, \rho)$ es una función lischitziana si $\exists\, K \geq 0$ tal que

$$\rho(f(x), f(y)) \leq K \cdot d(x, y),\ \forall\, x, y \in X.$$

a la propiedad anterior se le llama propiedad de lipschitz.

Toda función de lipschitz es continua.

## EJEMPLOS.

1) Considere un espacio normado $(E, N)$. Entonces la función norma $N: E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto N(x)$, $\mathbb{R}$ con la distancia usual, es continua en $(E, N)$. En efecto, como:

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x - y) \leq 1 \cdot d(x, y),\ \forall\, x, y \in X.$$

luego $N$ es de lipschitz y por tanto, $N$ es continua en $E$.

2) La función $f$ de $(l_p, N_p)$ en $(\mathbb{R}^N, N_p)$, $1 \leq p \leq \infty$, definida como

$$f(x) = (x(1), 2x(2), \ldots, Nx(N)),\ \forall\, x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in l_p$$

satisface:

$$N_p(f(x) - f(y)) = N_p(x(1) - y(1), 2(x(2) - y(2)), \ldots, N(x(N) - y(N)))$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{N} i^p \cdot |x(i) - y(i)|^p\right)^{1/p} \leq N \cdot \sum_{i=1}^{N} (|x(i) - y(i)|^p)^{1/p}$$
$$\leq N \cdot \sum_{i=1}^{\infty} (|x(i) - y(i)|^p)^{1/p} \leq N \cdot N_p(x - y)$$

$\forall\, x, y \in l_p$, con $1 \leq p < \infty$. Si $p = \infty$:

$$N_\infty(f(x)-f(y)) = \max_{1\leq i\leq N} i|x(i)-y(i)| \leq N\cdot \max_{1\leq i\leq N}|x(i)-y(i)|$$

$$\leq N \max_{i\in\mathbb{N}} |x(i)-y(i)| \leq N\cdot N_\infty(x-y),\ \forall\, x,y\in l_\infty$$

En cualquier caso $f$ es de lipschitz y por tanto, $f$ es continua en $(l_p, N_p)$, $1\leq p \leq \infty$.

3) Sea $f$ la función de $(l_2, N_2)$ en $(l_1, N_1)$ dada como:

$$f(x) = x^2,\ \forall\, x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in l_2$$

donde $x^2 = \{x^2(n)\}_{n=1}^{\infty}$. $f$ está bien definida por la definición de $l_2$. Afirmamos que $f$ es continua.

Sea $x\in l_2$ y $\varepsilon>0$. Queremos:

$$\forall\, y\in l_2 \ni N_2(x-y)<\delta \Rightarrow N_1(f(x)-f(y)) = N_1(x^2-y^2) < \varepsilon$$

Como:

$$N_1(x^2-y^2) = N_1((x+y)(x-y)) \leq N_2(x+y)\cdot N_2(x-y) \text{ (des. de Hölder).}$$
$$< N_2(x+y)\cdot\delta \leq (N_2(x)+N_2(y))\cdot\delta$$

Si hacemos que

$$N_2(x-y)<1 \Rightarrow N_2(y)-N_2(x)<1 \Rightarrow N_2(y)<1+N_2(x)$$

así:

$$N_1(x^2-y^2) < (1+2N_2(x))\cdot\delta = \varepsilon$$

Por tanto, tome $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{1+2N_2(x)}\}$. Así $f$ es continua en $x$ y el $x$ fue arbitrario. Luego $f$ es continua $\forall x\in l_2$, i.e $f$ es continua en $l_2$.

4) Considere la función $g$ de $(l_2, N_2)$ en $\mathbb{R}$ con la distancia usual dada como:

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x^2(n),\ \forall\, x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in l_2$$

$g$ es la composición de las funciones $f:(l_2,N_2)\to(l_1,N_1)$, $f(x)=x^2$ con la función norma de $(l_1,N_1)$ a $(\mathbb{R},|\cdot|)$, $h$, i.e $g=h\circ f$. Como $g$ es composición de funciones continuas, $g$ es continua.

5) La función de Dirichlet $f$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, con la distancia usual dada por:

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x\in\mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

no es continua en ningún punto de $\mathbb{R}$. Pero $f|_{\mathbb{Q}}$ del subespacio $(\mathbb{Q},|\cdot|)$ de $(\mathbb{R},|\cdot|)$ en $(\mathbb{R},|\cdot|)$ si es continua, pues

$$f|_{\mathbb{Q}}(x)=1,\ \forall x\in\mathbb{Q}$$

6) La función $f$ del subespacio $[0,1[\,\cup\,]1,2[$ de $\mathbb{R}$ con la distancia usual, dada por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } 0\leq x<1 \\ 2 & \text{si } 1<x<2\end{cases} \qquad [0,1[\,\cup\,]1,2[\,=E$$

es continua en $[0,1[\,\cup\,]1,2[$. En efecto:

Sea $\varepsilon>0$ y $x\in[0,1[\,\cup\,]1,2[$. Tenemos 2 casos:

a) $x\in[0,1[$. En este caso tome $\delta=\min\left\{1-x,1,\frac{\varepsilon}{1+2|x|}\right\}$. Como $B_E(x,\delta)\subset B_E(x,1-x)$ y $B_E(x,1-x)\subset[0,1[$, entonces $\forall\ y\in E \ni |x-y|<\delta$, entonces $f(y)=y^2$.

Con esto, veamos que

$$|x-y|<\delta\leq\frac{\varepsilon}{1+2|x|}$$

$$\Rightarrow |x-y|\,(1+2|x|)<\varepsilon$$

como $|x-y|<1\Rightarrow|y|<1+|x|$, luego

$$\begin{aligned}\Rightarrow |x^2-y^2| &= |x-y|\cdot|x+y| \\ &\leq |x-y|\cdot(|x|+|y|) \\ &< |x-y|\cdot(1+2|x|) \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

$$\Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

por tanto, $f$ es continua en $x$.

b) $x \in ]1,2[$.

Tome $\delta = x-1$. Entonces:

$$|x-y| < \delta = x-1$$
$$\Rightarrow x-y < x-1$$
$$\Rightarrow 1 < y$$

por tanto, $f(y) = f(x) = 2$, luego:

$$|f(x)-f(y)| = |2-2|$$
$$= 0 < \varepsilon$$

luego, $f$ es continua en $x$.

Por a) y b), $f$ es continua en $E$.

q.e.d.

Sin embargo, no existe ninguna función $f$ continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que sea continua en $E$.

Suponga que $\exists\, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g|_E = f$ y $g$ es continua en $\mathbb{R}$, entonces es continua en 1.

Tome $\varepsilon_0 = \max\{|g(1)-1|, |g(1)-2|\}/2 > 0$, y sea $\delta > 0$. Tenemos 2 casos

a) $\max\{|g(1)-1|, |g(1)-2|\} = |g(1)-1|$

En este caso, $\varepsilon_0 = \frac{|g(1)-1|}{2}$, tome $\delta' = \min\{\delta, 1\}$, $\exists\, x_\delta = 1 - \frac{\delta'}{2} \in E$ tal que $d(1, 1-\frac{\delta'}{2}) = \frac{\delta'}{2} \leq \frac{\delta}{2} < \delta$, y

$$|g(1) - g(1-\tfrac{\delta'}{2})| = |g(1) - (1-\tfrac{\delta'}{2})^2|$$
$$= |g(1) - 1 + \delta' - \tfrac{\delta'^2}{4}|$$

como $\delta' \leq 1$, entonces $\delta' - \frac{\delta'^2}{4} \geq 0$, luego: $(g(1) > \frac{3}{2})$

$$\geq |g(1)-1| > \frac{|g(1)-1|}{2} = \varepsilon_0$$

por lo tanto, $g$ no es continua en 1.

b) $\max\{|g(1)-1|, |g(1)-2|\} = |g(1)-2|$

En este caso $g(1) < \frac{3}{2}$, y $\varepsilon_0 = \frac{|g(1)-2|}{2}$, sea $\delta > 0$ y tome $\delta' = \min\{1, \delta\}$, entonces para este $\delta$ $\exists\, x_\delta = 1 + \frac{\delta'}{2} \in E$ tal que $d(1, x_\delta) = \frac{\delta'}{2} < \delta$, y

$$|g(1) - g(x_\delta)| = |g(1) - 2| \geq \frac{|g(1)-2|}{2} = \varepsilon_0$$

por tanto, $g$ no es continua en 1.

Tanto en a) y b), $g$ no es continua en 1.

q.e.d.

# Homeomorfismos.

**Def.** Se dice que una función $f$ de un esp. métrico $(\bar{X}, d)$ a $(\bar{Y}, \rho)$ es una aplicación abierta si para cada conjunto abierto $O$ en $\bar{X}$, $f(O)$ es un abierto en $\bar{Y}$. Se dice que $f$ es una aplicación cerrada si ocurre lo anterior con cerrados.

**Def.** Una función $f$ de un esp. métrico $(\bar{X}, d)$ en un esp. métrico $(\bar{Y}, \rho)$ se dice que es un homomorfismo si $f$ es biyectiva, y tanto $f$ como $f^{-1}$ son continuas en $\bar{X}$ y $\bar{Y}$ resp.

Además, se dice que $\bar{X}$ y $\bar{Y}$ son homeomorfos, y se escribe $\bar{X} \cong \bar{Y}$.

# Ejemplos.

1) Los subespacios $[0, \infty[$ y $[0,1[$ de $\mathbb{R}$ con la distancia usual son homeomorfos. Un homeomorfismo sería:

$$f(x) = \frac{x}{1+x}, \quad \forall x \geq 0$$

En efecto:

a) $f$ es biyectiva.

$f$ es biyectiva y su inversa es:

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1-y}, \quad \forall y \in [0,1[$$

donde:

$$f(f^{-1}(y)) = \frac{\frac{y}{1-y}}{1 + \frac{y}{1-y}} = \frac{\frac{y}{1-y}}{\frac{1}{1-y}} = y = id_y$$

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{\frac{x}{1+x}}{1-\frac{x}{1+x}} = \frac{\frac{x}{1+x}}{\frac{1}{1+x}} = x = id_X$$

b) $f$ y $f^{-1}$ son continuas.

Solo se probará que $f$ es continua. Sea $\varepsilon>0$, para este $\exists\ \delta = \min\{1/2, \varepsilon(x+1)(x+\frac{1}{2})\} > 0$ tal que:

$$\forall y \geq 0 \text{ m } |x-y| < \delta \Rightarrow x < \tfrac{1}{2}+y \text{ y } |x-y| < \varepsilon(x+1)(x+1/2)$$

$$\Rightarrow x+1/2 < y+1 \text{ y } |x+xy-y-xy| < \varepsilon(x+1)(x+1/2)$$

$$\Rightarrow \frac{|x+xy-y-xy|}{(x+1)(y+1)} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{x+xy-y-xy}{(x+1)(y+1)}\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{x}{x+1} - \frac{y}{y+1}\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

por tanto, $f$ es continua en $[0,+\infty[$.

Por a) y b), $f$ es homeomorfismo.

**Def.** Se dice que una función $f$ de un esp. métrico $(X,d)$ a $(Y,\rho)$ es una isometría si preserva distancias, es decir, se cumple:

$$\rho(f(x), f(y)) = d(x,y),\ \forall x,y \in X.$$

Si existe una isometría suprayectiva de $(X,d)$ en $(Y,\rho)$, se dice que $X$ y $Y$ son espacios isométricos, y se escribe $X \equiv Y$.

2) La función $f$ del sistema ampliado de números reales $\overline{\mathbb{R}}$ en el subespacio $[-1,1]$ de $\mathbb{R}$ con la distancia usual, es una isometría suprayectiva de $\overline{\mathbb{R}}$ sobre $[-1,1]$.

3) Si $X \equiv Y$, entonces $X \cong Y$.

**Dem.**

Suponga que $X \equiv Y$, entonces $\exists\ f$ de $(X,d)$ en $(Y,\rho)$ suprayectiva tal que

$$\rho(f(x), f(y)) = d(x,y),\ \forall\ x,y \in X$$

probaremos que $f$ es biyectiva.

a) $f$ es inyectiva.

Sean $x,y \in X$ $\ni$ $f(x)=f(y)$, entonces $\rho(f(x),f(y)) = d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x=y$

luego $f$ es inyectiva.

Por a) $f$ es biyectiva. Probaremos que es continua y $f^{-1}$ también. Como

$$\rho(f(x),f(y)) = 1 \cdot d(x,y), \ \forall\, x,y \in X$$

$f$ es de lipschitz, luego $f$ es continua. Ahora:

$$d(f^{-1}(u),f^{-1}(v)) = \rho(u,v), \ \forall\, u,v \in Y$$

luego $f^{-1}$ es de lipschitz y, $f^{-1}$ es continua.

Por lo anterior, $X \cong Y$.

q.e.d.

## MÉTRICAS EQUIVALENTES.

**Def.** Se dice que dos métricas $d$ y $\rho$ sobre un mismo conjunto $X$ son topológicamente equivalentes si inducen una misma topología sobre $X$, es decir, un conjunto $G$ es abierto en $(X,d)$ si y sólo si es abierto en $(X,\rho)$.

**Proposición.**

Sean $d$ y $\rho$ dos métricas sobre un conjunto $X$. Las afirmaciones son equivalentes:

i) Las métricas $d$ y $\rho$ son equivalentes.

ii) Toda $d$-bola contiene una $\rho$-bola del mismo centro y viceversa.

iii) La función identidad de $(X,d)$ en $(X,\rho)$ es un homeomorfismo.

**Dem:**

(i) $\Rightarrow$ (ii).

Suponga que $d$ y $\rho$ son equivalentes. Sea $r>0$ y $x \in X$. Considere los conjuntos $B_d(x,r)$ y $B_\rho(x,r)$, los cuales son abiertos en $(\mathbb{X},d)$ y $(\mathbb{X},\rho)$, respectivamente.

Como $d$ y $\rho$ son equivalentes, entonces $B_d(x,r)$ y $B_\rho(x,r)$ son abiertos en $(\mathbb{X},\rho)$ y $(\mathbb{X},d)$ resp. por tanto, $\exists\ \varepsilon,\delta>0 \ \text{m}\ B_\rho(x,\varepsilon)\subset B_d(x,r)$ y $B_d(x,\delta)\subset B_\rho(x,r)$, i.e toda $d$-bola contiene una $\rho$-bola de mismo centro y viceversa.

(ii) $\Rightarrow$ (iii).

Suponga que toda $d$-bola contiene una $\rho$-bola de mismo centro y viceversa. Probaremos que $id:(\mathbb{X},d)\to(\mathbb{X},\rho)$ es un homeomorfismo.

Claramente $id$ es biyectiva.

a) $id$ es continua en $(\mathbb{X},d)$

Sea $G\subset\mathbb{X}$ un abierto en $(\mathbb{X},\rho)$. Probaremos que $id$ es continua, para lo cual probaremos que $id^{-1}(G)$ es abierto en $(\mathbb{X},d)$.

Veamos que:

$$\begin{aligned} id^{-1}(G) &= \{x\in\mathbb{X} \mid id(x)\in G\} \\ &= \{x\in\mathbb{X} \mid x\in G\} \\ &= G \end{aligned}$$

Sea $x\in G$ arbitrario. Como $G$ es abierto en $(\mathbb{X},\rho)$, $\exists\ r_0>0 \ \text{m}\ B_\rho(x,r_0)\subset G$. Por hipótesis, $\exists\ \varepsilon>0 \ \text{m}\ B_d(x,\varepsilon)\subset B_\rho(x,r_0)$, luego $B_d(x,\varepsilon)\subset G$.

Así, $G$ es abierto en $(\mathbb{X},d)$, i.e $id$ es continua en $(\mathbb{X},d)$.

b) $id^{-1}$ es continua en $(\mathbb{X},\rho)$

Es análogo a a).

Por a) y b), $id$ es homeomorfismo.

(iii) $\Rightarrow$ (i).

Suponga que $id:(\mathbb{X},d)\to(\mathbb{X},\rho)$ es un homeomorfismo. Probaremos que

$d$ y $\rho$ son equivalentes.

$\Rightarrow$) Sea $G$ un abierto en $(\bar{X}, d)$. Como id es homeomorfismo, entonces $id^{-1}: (\bar{X}, \rho) \to (\bar{X}, d)$ es continua, luego $(id^{-1})^{-1}(G) = \{x \in \bar{X} \mid id^{-1}(x) \in G\} = \{x \in \bar{X} \mid x \in G\} = G$ es abierto en $(\bar{X}, \rho)$.

$\Leftarrow$) Sea $G$ un abierto en $(\bar{X}, \rho)$. Como id es homeomorfismo, $id: (\bar{X}, d) \to (\bar{X}, \rho)$ es continua, entonces $id^{-1}(G) = G$ es abierto en $(\bar{X}, d)$

Luego, $G$ es abierto en $(\bar{X}, d) \Leftrightarrow$ es abierto en $(\bar{X}, \rho)$, luego $d$ y $\rho$ son equivalentes.

q.e.d.

## Continuidad Uniforme.

**Def.** Sea $f$ una función de un espacio métrico $(\mathbb{X}, d)$ en $(\mathbb{Y}, \rho)$. Se dice que $f$ es uniformemente continua en $\mathbb{X}$ si $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tal que $\forall u, v \in \mathbb{X}$,

$$d(u,v) < \delta \Rightarrow \rho(f(u), f(v)) < \varepsilon$$

En particular, toda función uniformemente es continua en $\mathbb{X}$.

### Ejemplos.

1) Toda función Lipschitziana es uniformemente continua. En efecto, sea $f : (\mathbb{X}, d) \to (\mathbb{Y}, \rho)$ tal que $\exists\ K \geq 0$ tal que

$$\rho(f(x), f(y)) \leq K \cdot d(x,y),\ \forall x, y \in \mathbb{X}.$$

Sea ahora $\varepsilon > 0$. Entonces $\exists\ \delta = \frac{\varepsilon}{K+1} > 0$ tal que

$$\forall x, y \in \mathbb{X} \text{ m } \quad d(x,y) < \delta = \frac{\varepsilon}{K+1} \Rightarrow K d(x,y) < (K+1) d(x,y) < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

por tanto, $f$ es uniformemente continua en $\mathbb{X}$.

*q.e.d.*

**Def.** Se dicen que dos métricas $d$ y $\rho$ sobre un conjunto $\mathbb{X}$ son uniformemente equivalentes si la función identidad de $(\mathbb{X}, d)$ sobre $(\mathbb{Y}, \rho)$ y su inversa son funciones uniformemente continuas.

**Nota:** Si dos métricas son uniformemente equivalentes, entonces son topológicamente equivalentes.

### Proposición.

Dos métricas $d$ y $\rho$ sobre un conjunto $\mathbb{X}$ son uniformemente equivalentes si

$\exists\, \alpha, \beta > 0$ tales que

$$\alpha d(x,y) \leqslant \rho(x,y) \leqslant \beta d(x,y), \ \forall\, x,y \in X.$$

**Dem:**

Sea $id: (X,d) \to (X,\rho)$. Probaremos que $id$ e $id^{-1}$ son uniformemente continuas.

Sea $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_1 = \frac{\varepsilon}{\beta} > 0$ y $\delta_2 = \alpha\varepsilon > 0$ tales que:

$$d(x,y) < \delta_1 \Rightarrow \rho(x,y) \leqslant \beta d(x,y) < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \rho(id(x), id(y)) < \varepsilon$$

$$\rho(x,y) < \delta_2 \Rightarrow \frac{1}{\alpha}\rho(x,y) < \varepsilon$$
$$\Rightarrow d(x,y) < \varepsilon$$
$$\Rightarrow d(id^{-1}(x), id^{-1}(y)) < \varepsilon$$

por tanto, $id$ e $id^{-1}$ son uniformemente continuas, luego $d$ y $\rho$ son uniformemente equivalentes.

*q.e.d.*

**Ejemplo.**

1) Las métricas $\rho_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, sobre $\mathbb{R}^n$ son todas uniformemente equivalentes.