Notas Curso Topología I
Axiomas de Numerabilidad

Cristo Daniel Alvarado

5 de junio de 2024

Índice general

Capítulo 5

Axiomas de Numerabilidad

5.1. Conceptos Fundamentales

Observación 5.1.1
De ahora en adelante numerable será equivalente a lo sumo numerable.

Definición 5.1.1
Sea (X, τ) un espacio topológico.

1. Sean $x \in X$ y $\mathcal{U}$ una colección de vecindades de x. Diremos que $\mathcal{U}$ es un **sistema fundamental de vecindades de** x si dada $V \in \mathcal{V}(x)$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \subseteq V$. Si $\mathcal{U}$ es numerable, $\mathcal{U}$ se dice un **sistema fundamental numerable de vecindades de** x.

2. Si dado $x \in X$ existe un sistema fundamental numerable de vecindades de x, el espacio (X, τ) se dice **primero numerable**.

3. El espacio (X, τ) se dice un **espacio segundo numerable** si su topología tiene una base numerable.

4. El espacio (X, τ) se dice un **espacio separable** si existe $A \subseteq X$ tal que A es numerable y además $\overline{A} = X$ (es decir que es denso en X).

5. El espacio (X, τ) se dice un **espacio de Lindelöf** si cada cubierta abierta del espacio tiene una subcubierta numerable.

5.2. Espacios Primero Numerables

Proposición 5.2.1
Sea (X, τ) un espacio primero numerable. Si $Y \subseteq X$ entonces (Y, τ_Y) es primero numerable.

Demostración:
Sea $Y \subseteq X$. Sea $y \in Y$, en particular $y \in X$. Como (X, τ) es primero numeable, existe un sistema fundamental de vecindades de y en (X, τ), digamos $\mathcal{U}'$, es decir que para este $\mathcal{U}'$ se cumple:

$$\forall V \in \mathcal{V}(y) \exists U \in \mathcal{U}' \text{ tal que } U \subseteq V$$

Sea

$$\mathcal{U} = \left\{ Y \cap U \middle| U \in \mathcal{U}' \right\}$$

Tenemos que $U \in \mathcal{U}'$, $Y \cap U$ es una vecindad de y en (Y, τ_Y) y, como $\mathcal{U}'$ es numerable, también $\mathcal{U}$ lo es.

Sea $W \subseteq Y$ una vecindad de y en (Y, τ_Y), luego existe $V \in \tau$ tal que

$$y \in Y \cap V \subseteq W$$

Como en particular V es una vecindad de y en (X, τ), entonces existe $U \in \mathcal{U}'$ tal que

$$U \subseteq V$$

luego,

$$Y \cap U \subseteq Y \cap V \subseteq W$$

donde $Y \cap U \in \mathcal{U}$. Así, $\mathcal{U}$ es un sistema fundamental de vecindades de y en (Y, τ_Y). Como $y \in Y$ fue arbitrario, se sigue que (Y, τ_Y) es primero numerable. ■

Proposición 5.2.2
La propiedad de ser primero numerable es topológica.

Demostración:
Sean (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) espacios topológicos homeomorfos tales que (X_1, τ_1) es primero numerable. Sea $f : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$ el homeomorfismo entre tales espacios. Veamos que (X_2, τ_2) es primero numeable.

En efecto, sea $x_2 \in X_2$, entonces existe un único $x_1 \in X_1$ tal que $f(x_1) = x_2$. Como (X_1, τ_1) es primero numerable, entonces existe $\mathcal{U}_1$ sistema fundamental numerable de vecindades de x_1. Sea

$$\mathcal{U}_2 = \left\{ f(U_1) \middle| U_1 \in \mathcal{U}_1 \right\}$$

Como $\mathcal{U}_1$ es numerable, $\mathcal{U}_2$ también lo es. Y, como $U_1 \in \mathcal{U}_1$ es una vecindad de x_1, entonces $f(U_1)$ es una vecindad de x_2 (por ser f homeomorfismo). Por tanto, $\mathcal{U}_2$ es una colección de vecindades de x_2. Ahora, sea $V \in \mathcal{V}(x_2)$ una vecindad de x_2. Como f es homeomorfismo entonces

$$f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x_1)$$

Luego, existe $U \in \mathcal{U}_1$ tal que

$$U \subseteq f^{-1}(V) \Rightarrow f(U) \subseteq V$$

por ser f biyección, donde $f(U) \in \mathcal{U}_2$.

Así, $\mathcal{U}_2$ es un sistema fundamental numerable de vecindades de x_2. Como el elemento x_2 fue arbitrario, se sigue que (X_2, τ_2) es primero numerable. Luego, la propiedad de ser primero numerable es topológica. ■

Proposición 5.2.3
Sean $\{(X_k, \tau_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ una familia numerable de espacios topológicos y

$$X = \prod_{k \in \mathbb{N}} X_k$$

Entonces, (X, τ_p) es primero numerable si y sólo si (X_k, τ_k) es primero numerable, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demostración:

$\Rightarrow$): Es inmediato del hecho de que la propiedad de ser primero numerable es hereditaria y topológica.

$\Leftarrow$): Suponga que (X_k, τ_k) es primero numerable para todo $k \in \mathbb{N}$. Sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$. Para $x_k \in X_k$ existe

$$\mathcal{U}_k = \left\{U_m^k\right\}_{m\in\mathbb{N}}$$

sistema fundamental numerable de vecindades de x_k en (X_k, τ_k). Definimos

$$\mathcal{U} = \left\{\prod_{l\in\mathbb{N}} A_l \middle| \text{ existe } I = \{i_1, ..., i_t\} \subseteq \mathbb{N} \text{ finito con } i_r < i_s \text{ si } r < s \text{ tal que}\right.$$
$$\left. l \in \mathbb{N} - I \Rightarrow A_l = X_l \text{ y } l \in I \Rightarrow A_k \in \mathcal{U}_l\right\}$$

veamos que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}(x)$ y además $\mathcal{U}$ es un sistema fundamental de vecindades de x. Sea $U = \prod_{t\in\mathbb{N}} U_t$ un básico de la topología producto tal que $x \in U$. Tenemos que existe $I \subseteq \mathbb{N}$ finito tal que

$$l \in \mathbb{N} - I \Rightarrow U_l = X_l \text{ y } l \in I \Rightarrow x_l \in U_l \in \tau_l$$

Para $l \in I$ existe $U_{m_l}^l \in \mathcal{U}_l$ tal que $x_l \in U_{m_l}^l \subseteq U_l$. Sea

$$A = \prod_{l\in\mathbb{N}} A_l$$

donde,

$$l \in \mathbb{N} - I \Rightarrow A_l = X_l \text{ y } l \in I \Rightarrow A_l = U_{m_l}^l$$

por tanto, $A \in \mathcal{U}$ y es tal que $x \in A \subseteq U$.

Veamos ahora que $\mathcal{U}$ es numerable. Sea $A = \prod_{l\in\mathbb{N}} A_l \in \mathcal{U}$, entonces existe $I \subseteq \mathbb{N}$ finito, digamos $I = \{i_1, ..., i_t\}$ (ordenados de forma estrictamente creciente y siendo todos distintos) tales que $l \in \mathbb{N} - I$ entonces $A_l = X_l$.Y, si $l \in I$ entonces $A_l = U_{m_l}^l \in \mathcal{U}_l$. Sea $(i_1, ..., i_t, m_{i_1}, ..., m_{i_t}) \in \mathbb{N}^{2t}$.

Definimos la función

$$f : \mathcal{U} \to \bigcup_{t\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^{2t}$$

(donde $\mathbb{N}^{2t}$ expresa el producto cartesiano de $\mathbb{N}$ consigo mismo $2t$-veces) tal que $A \mapsto (i_1, ..., i_t, m_{i_1}, ..., m_{i_t})$ (siendo el A de la forma en que se expresó anteriormente). Se tiene por la elección de los elementos de $\mathcal{U}$, que la función f está bien definida y es inyectiva. Por tanto, $\mathcal{U}$ es numerable.

Luego, (X, τ_p) es primero numerable. ■

Proposición 5.2.4
Sea (X, τ) un espacio primero numerable.

1. Sea $A \subseteq X$ y $x \in X$. Entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una sucesión de puntos $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de A que converge a x.

2. Sean (X', τ') espacio topológico y $f : (X, \tau) \to (X', \tau')$ una función. Entonces, para $x \in X$, f es continua en X si y sólo si para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos en X que converge a x, se tiene que la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(x)$.

Demostración:

De (1): Se probará la doble implicación.

$\Rightarrow$): Sea $x \in \overline{A}$ y $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema fundamental numerable de vecindades de x. Entonces

$$B_1 \cap A \neq \emptyset$$

pues $x \in \overline{A}$ y B_1 es vecindad de x. Tomemos $x_1 \in B_1 \cap A$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, como

$$B_1 \cap \cdots \cap B_n$$

es vecindad de x, entonces su intersección con A es no vacía. Tome así $x_n \in B_1 \cap \cdots \cap B_n \cap A$ y constrúyase así la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Veamos que esta sucesión converge a x. En efecto, sea $U \in \tau$ tal que $x \in \tau$. Como este es un sistema fundamental de vecindades, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $B_l \subseteq U$, luego

$$x_{l+m} \in B_l \subseteq U$$

para todo $m \geq 0$. Por tanto, la sucesión converge a x.

$\Leftarrow$): Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos de A tal que $x_n \to \infty$. Tomemos $M \in \tau$ tal que $x \in M$, luego existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_{k+m} \in M$, para todo $m \geq 0$, así $M \cap A \neq \emptyset$. Por tanto, $x \in \overline{A}$.

De (2): Se probará la doble implicación.

$\Rightarrow$): Suponga que f es continua en x. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos que converge a x. Sea $V \in \tau'$ tal que $f(x) \in V$, entonces $x \in f^{-1}(V)$, donde $f^{-1}(V) \in \tau$ por ser f continua en x. Luego, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_{k+m} \in f^{-1}(V), \quad \forall m \geq 0$$

es decir que

$$f(x_{k+m}) \in f(f^{-1}(V)) \subseteq V, \quad \forall m \geq 0$$

Por tanto, $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(x)$.

$\Leftarrow$): Veamos que dado $A \subseteq X$ se cumple que $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. En efecto, sea $x \in \overline{A}$. Por 1) al ser (X, τ) primero numerable existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de A que converge a x. Entonces $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de puntos de $f(A)$ que converge a $f(x)$. Por tanto, $f(x) \in \overline{f(A)}$ (en la prueba de la suficiencia no es necesario que (X, τ) sea primero numerable, así que en este caso no se ocupa que (X', τ') sea primero numerable). Por tanto, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ ■

5.3. Espacios Segundo Numerables

Proposición 5.3.1
La propiedad de ser segundo numerable es hereditaria.

Demostración:
Sea (X, τ) un espacio topológico segundo numerable y $Y \subseteq X$ subconjunto. Veamos que (Y, τ_Y) es segundo numerable. En efecto, como (X, τ) es primero numerable, existe $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base para la topología τ que es a lo sumo numerable. Se tiene que

$$\mathcal{B}' = \left\{ Y \cap B \middle| B \in \mathcal{B} \right\}$$

es una base para τ_Y (por una proposición anterior). Como $\mathcal{B}$ es numerable, se sigue que $\mathcal{B}'$ es numerable. Por tanto, (Y, τ_Y) es segundo numerable. ■

Proposición 5.3.2
La propiedad de ser segundo numerable es topológica.

Demostración:

Sean (X, τ) y (Y, σ) espacios topológicos homeomorfos con $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ el homeomorfismo y, suponga que (X, τ) es segundo numerable y sea $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de τ. Entonces, la por una proposición, la colección:

$$\mathcal{B}' = \left\{f(B)\middle|B \in \mathcal{B}\right\}$$

es una base para la topología σ (por ser f homeomorfismo) la cual es a lo sumo numerable. Por tanto, (Y, σ) es segundo numerable.

Así, la propiedad de ser segundo numerable es topológica. ■

Ejercicio 5.3.1

Sea $\{(X_n, \tau_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una familia de espacios topológicos segundo numerables y, tomemos

$$X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$$

Entonces, (X, τ_p) es segundo numerable.

Demostración:

■

Teorema 5.3.1

Sea (X, τ) un espacio topológico.

1. Si (X, τ) es segundo numerable, entonces es primero numerable.
2. Si (X, τ) se segundo numerable, entonces el espacio es de Lindelöf.
3. Si (X, τ) es segundo numerable, entonces es separable.

Demostración:

De (1): Sea $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base para la topología τ. Tomemos $x \in X$ y defina

$$\mathcal{B}_x = \left\{B \in \mathcal{B}\middle|x \in B\right\}$$

Se tiene que $\mathcal{B}_x$ es a lo sumo numerable. Sea $U \in \tau$ tal que $x \in U$, luego como $\mathcal{B}$ es base existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$, luego $B \in \mathcal{B}_x$. Por tanto, $\mathcal{B}_x$ es un sistema fundamental de vecindades de x el cual es a lo sumo numerable. Al ser $x \in X$ arbitrario, se sigue que (X, τ) es primero numerable.

De (2): Sea $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base para la topología τ y sea $\mathcal{A}$ una cubierta abierta de X. Dado $x \in X$, como A es una cubierta existe $A_x \in \mathcal{A}$ tal que

$$x \in A_x \in \tau$$

luego, existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in \ B_x \subseteq A_x$. Sea

$$\mathcal{K} = \left\{m \in \mathbb{N}\middle|\exists A \in \mathcal{A} \text{ tal que } B_m \subseteq A\right\}$$

por la observación anterior, $\mathcal{K} \neq \emptyset$. Dado $k \in \mathcal{K}$ escogemos un único $A_k \in \mathcal{A}$ tal que $B_k \subseteq A_k$. Sea

$$\mathcal{A}' = \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

$\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ es una subcolección a lo sumo numerable.

Sea $x \in X$, tomemos $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A$. Por ser $\mathcal{B}$ base existe $B_i \in \mathcal{B}$ tal que

$$x \in B_i \subseteq A$$

Luego, $i \in \mathcal{K}$ por ende $x \in A_i$ siendo $A_i \in \mathcal{A}'$. Por tanto:

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

luego, (X, τ) es Lindelöf.

De (3): Sea $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ base para τ. Dado $n \in \mathbb{N}$ si $B_n \neq \emptyset$, escogemos $x_n \in B_n$ y con estos puntos formamos al conjunto numerable $A = \left\{x_n \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$.

Veamos que $\overline{A} = X$. En efecto, sea $U \in \tau$ tal que $U \neq \emptyset$, veamos que $U \cap A \neq \emptyset$. En efecto, sea $x \in U$, luego existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_m \subseteq U$. Como $B_m \cap A \neq \emptyset$ entonces $U \cap A \neq \emptyset$. Se sigue que $\overline{A} = X$. ■

Proposición 5.3.3
Sean (X, τ) un espacio segundo numerable y $\mathcal{B}$ una base para su topología τ. Entonces, $\mathcal{B}$ contiene una base numerable para τ.

Demostración:
Sea $\mathcal{B} = \{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una base para τ y, como (X, τ) es segundo numerable, existe $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ base a lo sumo numerable de τ.

a. Sea $\mathcal{U} \in \tau$. Definimos:

$$\mathcal{U}^* = \left\{A \in \mathcal{A} \middle| \exists U \in \mathcal{U} \text{ tal que } A \subseteq U\right\}$$

dado $A \in \mathcal{U}^*$ escogemos un único $U_A \in \mathcal{U}$ tal que $A \subseteq U_A$. Defina

$$\mathcal{U}' = \left\{U_A \in \mathcal{U} \middle| A \in \mathcal{U}^*\right\}$$

se tiene que $\mathcal{U}'$ es numerable por ser $\mathcal{A}$ numerable. Como $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$, entonces

$$\bigcup \mathcal{U}' \subseteq \bigcup \mathcal{U}$$

Veamos que se cumple la otra contención. Sea $x \in \bigcup \mathcal{U}$, luego existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$. Como $\mathcal{A}$ es una base y $U \in \tau$, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que

$$x \in A \subseteq U$$

así, $A \in \mathcal{U}^*$, luego $x \in A \subseteq U_A$ por lo cual $x \in \bigcup \mathcal{U}'$. Así,

$$\bigcup \mathcal{U}' = \bigcup \mathcal{U}$$

b. Sea $A \in \mathcal{A}$, $A \in \tau$ luego existe $\mathcal{B}_A \subseteq \mathcal{B}$ tal que

$$A = \bigcup \mathcal{B}_A$$

Por (a) existe $\mathcal{B}'_A \subseteq \mathcal{B}_A$ tal que $\mathcal{B}'_A$ es numerable y

$$A = \bigcup \mathcal{B}'_A$$

Luego, $\bigcup \left\{\mathcal{B}'_A \middle| A \in \mathcal{A}\right\}$ es un conjunto a lo sumo numerable contenida en $\mathcal{B}$ tal que es una base para τ.

Por los dos incisos anteriores, se tiene el resultado. ■

Ejemplo 5.3.1
Sea $X=\{0,1\}$ y tomemos $\tau_D=\{X,\emptyset,\{0\},\{1\}\}$. El espacio (X,τ_D) es segundo numerable, en particular primero numerable, Lindelöf y separable (además, metrizable pues τ_D es la topología discreta).

Ejemplo 5.3.2
Considere $X=\{0,1\}$ y tomemos $\tau=\tau_D$. Para $r\in\mathbb{R}$ definimos $X_r=X$ y $\tau_r=\tau$. Veamos que $\left(X=\prod_{r\in\mathbb{R}}X_r,\tau_p\right)$ no es primero numerable.

Demostración:

En efecto, sea $x=(x_r)_{r\in\mathbb{R}}\in X$ tal que

$$x_r=0,\quad \forall r\in\mathbb{R}$$

Sea $\mathcal{V}=\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de vecindades de x. Dado $m\in\mathbb{N}$ existe un básico $B_m\in\tau_p$ tal que

$$x_m\in B_m\subseteq V_m$$

como B_m es un básico de τ_p, luego existe $J_m\subseteq\mathbb{R}$ finito tal que

$$B_m=\prod_{r\in\mathbb{R}}W_r$$

con $W_r\in\tau_r$, para cada $r\in J_m$ y $W_r=X_r$ para todo $r\in\mathbb{R}-J_m$. Por lo tanto, si

$$V_m=\prod_{r\in\mathbb{R}}K_r$$

entonces para todo $r\in\mathbb{R}-J_m$ se tiene que $K_r=X_r$. Tomemos

$$J=\bigcup_{m\in\mathbb{N}}J_m$$

este conjunto es a lo sumo numerable, siendo tal que $J\subseteq\mathbb{R}$, luego $\mathbb{R}-J$ es no vacío. Sea $t\in\mathbb{R}-J$, se tiene que para todo $m\in\mathbb{N}$, $t\notin J_m$. Sea

$$U=\prod_{r\in\mathbb{R}}U_r$$

donde

$$U_r=\begin{cases}\{0\} & \text{si}\quad r=t\\ X_r & \text{si}\quad r\neq t\end{cases}$$

$U\in\tau_p$ además, $x\in U$. Se cumple además que $V_m\nsubseteq U$ para todo $m\in\mathbb{N}$. Suponga que $\exists m_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$V_{m_0}\subseteq U$$

Se tiene que

$$\{0,1\}=X_t=K_t=p_t(V_{m_0})\subseteq p_t(U)=\{0\}$$

lo cual es una contradicción. Por tanto, $\mathcal{V}$ no puede ser un sistema fundamnetal de vecindades para x, así que no es primero numerable. ■

Observación 5.3.1
En el ejemplo anterior, $\left(\prod_{r\in\mathbb{R}} U_r, \tau_p\right)$ no es segundo numerable, pues no es primero numerable. Pero, (X_r, τ_r) es segundo numerable, para todo $r \in \mathbb{R}$.

Tampoco es metrizable, siendo (X_r, τ_r) para todo $r \in \mathbb{R}$, pues metrizable implica primero numerable.

Proposición 5.3.4
Sea (X, τ) un espacio metrizable. Entonces, (X, τ) es primero numerable.

Demostración:
Sea $d : X \times X \to \mathbb{R}$ una métrica tal que $X = X_d$. Sea $x \in X$. Para $m \in \mathbb{N}$ definimos

$$B_n = B_d\left(x, \frac{1}{m}\right)$$

Entonces, $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un sistema fundamental de vecindades para x el cual es a lo sumo numerable. En efecto, sea $U \in \tau$ tal que $x \in U$. Entonces, como el sistema de bolas abiertas forma una base para la topología τ se tiene que existe $r > 0$ tal que

$$B(x, r) \subseteq U$$

Por la propiedad arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < r$. Así,

$$B\left(x, \frac{1}{n}\right) \subseteq U$$

siendo $B(x, \frac{1}{n})$ un elemento del sistema fundamental de vecindades. ■

Ejemplo 5.3.3
Sea $\mathcal{B}_l = \left\{[a, b)\middle| a, b \in \mathbb{R}\right\}$. Ya se sabe que $\mathcal{B}_l$ es una base para una topología sobre $\mathbb{R}$, la cual se denota por τ_l. A la pareja $(\mathbb{R}, \tau_l)$ se suele escribir simplemente como $\mathbb{R}_l$.

1. $\mathbb{R}_l$ es de Hausdorff (esto se deduce de forma casi inmediata).
2. $\mathbb{R}_l$ es primero numerable. En efecto, sea $r \in \mathbb{R}$, entonces el conjunto:

$$\mathcal{V} = \left\{[r, r + \frac{1}{n})\middle| n \in \mathbb{N}\right\}$$

es un sistema fundamental de vecindades de r. En efecto, sea $U \in \tau_l$ tal que $r \in U$. Considere $[l, k) \in \mathcal{B}_l$ que cumpla

$$r \in [l, k) \subseteq U$$

Entonces, $l \leq r < k$. Por la propiedad arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$r + \frac{1}{n} < k$$

luego,

$$[r, r + \frac{1}{n}) \subseteq [l, k) \subseteq U$$

Así, $\mathcal{V}$ es un sistema fundamental de vecindades de r.

3. $\mathbb{R}_l$ no es segundo numerable. Sea $\mathcal{B}$ una base para τ_l. Dado $x \in \mathbb{R}$, escogemos $B_x \in \mathcal{B}$ tal que

$$x \in B_x \subseteq [x, x+1)$$

Tenemos $x = \text{ínf}\, B_x$ luego dados $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$ existen $B_x, B_y \in \mathcal{B}$ tales que $B_x \neq B_y$. Por tanto, $\mathcal{B}$ no puede ser numerable, así que $\mathbb{R}_l$ no puede ser segundo numerable.

4. $\mathbb{R}_l$ es separable. Considere $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Este conjunto es numerable y denso en $\mathbb{R}_l$.

5. $\mathbb{R}_l$ es de Lindelöf. Sea $\mathcal{A}$ una cubierta de $\mathbb{R}_l$ formada por básicos. Suponga que

$$\mathcal{A} = \left\{ [a_\alpha, b_\alpha) \middle| \alpha \in I \right\}$$

Sea

$$C = \bigcup_{\alpha \in I} (a_\alpha, b_\alpha)$$

Considere C como subespacio de $(\mathbb{R}, \tau_u)$. El espacio $(\mathbb{R}, \tau_u)$ es segundo numerable, luego (X, τ_{uC}) es segundo numerable. Por lo tanto, (X, τ_{uC}) es de Lindelöf. Tenemos que existe $J = \{\alpha_1, ..., \alpha_m, ...\} \subseteq I$ numerable tal que

$$C = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_{\alpha_i}, b_{\alpha_i})$$

Sea

$$\mathcal{A}' = \left\{ [a_\alpha, b_\alpha) \middle| \alpha \in J \right\}$$

Se tiene que

$$C \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} [a_\alpha, b_\alpha)$$

Tomemos

$$D = \mathbb{R} - C$$

Veamos que D es numerable. En efecto, sea $x \in D$, luego $x \in \mathbb{R} - C$. Así, para todo $\alpha \in I$,

$$x \notin (a_\alpha, b_\alpha)$$

Luego, existe $\alpha_0 \in I$ tal que $x = a_{\alpha_0}$. Sea $q_x \in (a_{\alpha_0}, b_{\alpha_0}) \cap \mathbb{Q}$, entonces

$$(x, q_x) \subseteq C$$

Sea $f : D \to \mathbb{Q}$ la función definida por: dado $x \in D$, $x \mapsto q_x$. Veamos que f es inyectiva. Sean $x, y \in D$ con $x < y$.

   I) Suponga que $q_y \leq q_x$. Se tiene que $x < y < q_x \leq q_y$ (por la elección de los q). Por tanto, $y \in (x, q_x) \subseteq C \Rightarrow y \notin D \#_c$.

   II) Por (i), $q_x < q_y$. Así, f es inyectiva. Luego, D es a lo sumo numerable.

Dado $d \in D$ escogemos un único elemento $A_d \in \mathcal{A}$ tal que $d \in A$. Sea

$$\mathcal{A}'' = \left\{ A_d \middle| d \in D \right\}$$

Se tiene que $\mathcal{A}'$ y $\mathcal{A}''$ son a lo sumo numerables, luego su unión también lo es y es tal que

$$\mathbb{R} \subseteq \bigcup \mathcal{A}' \cup \mathcal{A}''$$

por tanto, $\mathbb{R}_l$ es Lindelöf.

6. $\mathbb{R}_l^2 = \mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$ no es de Lindelöf. Sea

$$\mathcal{L} = \left\{ (x, -x) \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$$

Afirmamos que $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}_l^2$ es cerrado. Sea

$$\mathcal{A} = \{\mathbb{R} - \mathcal{L}\} \bigcup \left\{ [a, b) \times [-a, d) \middle| a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Se tiene que $\mathcal{A}$ es una cubierta abierta de $\mathbb{R}_l^2$. Además, para $U = [a, b) \times [-a, d)$ tenemos que $U \cap \mathcal{L} = \{(a, -a)\}$. Luego, para todo $a \in \mathbb{R}$

$$\{(a, -a)\} \in {\tau_l^2}_{\mathcal{L}}$$

pero entonces $\mathcal{A}$ no puede tener una subcolección numerable que cubra a $\mathbb{R}_l^2$.

7. $\mathbb{R}_l^2$ es separable pues $\mathbb{Q}^2 \subseteq \mathbb{R}_l^2$ es numerbale y denso.

8. $\mathcal{L}$ como subespacio de $\mathbb{R}_l^2$ no es separable. Sea $A \subseteq \mathcal{L}$ numerable. Se tiene que ${\tau_l^2}_{\mathcal{L}}$ coincide con la topología discreta. Luego $\mathcal{L} - A$ es abierto, así $\mathcal{A}$ es cerrado (todo esto en la topología del subespacio), así A no es denso en $(L,)$. Por tanto, el espacio no puede ser separable.

Capítulo 6

Espacios Conexos

6.1. Conceptos Fundamentales

Definición 6.1.1
Sea (X, τ) un espacio topológico.

a. Una **partición de** X es una pareja formada por dos conjuntos abiertos U, V no vacíos tales que $U \cap V = \emptyset$ y $X = U \cap V$.

b. Dos subconjuntos A, B de X se dicen **mutuamente separados** en (X, τ) si $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$.

c. (X, τ) se llama un **espacio conexo** si no existe una partición de X y, en caso contrario lo llamaremos **espacio disconexo**. Si $A \subseteq X$ se dice que A es un **conjunto conexo** si (A, τ_A) es conexo.

Ejemplo 6.1.1
Dado $(X, \tau_I = \{X, \emptyset\})$ es un conjunto conexo.

Ejemplo 6.1.2
Sea X un conjunto con al menos dos puntos distintos. Entonces, (X, τ_D) no es conexo.

Ejemplo 6.1.3
Sean τ_1 y τ_2 dos topologías definidas sobre el conjunto X tales que $\tau_2 \subseteq \tau_1$. Si (X, τ_1) es conexo, entonces (X, τ_2) también lo es.

Demostración:

■

Ejemplo 6.1.4
Sea $X = \{a, b, c\}$ y considere la topología $\tau = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b\}\}$. Entonces, (X, τ) es conexo.

Pero, $A = \{a, c\}$ es un conjunto tal que $(A, \tau_A = \{A, \emptyset, \{a\}, \{c\}\})$ no es conexo.

Por tanto, la propiedad de ser conexo no se hereda.

Proposición 6.1.1
Sea $(\mathcal{L}, \prec)$ un conjunto ordenado tal que:

1. Dados $x, y \in \mathcal{L}$ tales que $x \prec y$, existe $z \in \mathcal{L}$ que cumple $x \prec z \prec y$.
2. Todo subconjunto no vacío de $\mathcal{L}$ acotado superiormente tiene mínima cota superior.

Entonces, al considerar $(\mathcal{L}, \tau_{\prec})$ tenemos que en $\mathcal{L}$, el mismo $\mathcal{L}$, cada intervalo abierto, cerrado, semi-abierto y cualquier rayo, son conjuntos conexos

Demostración:
Sea $Y \subseteq \mathcal{L}$ tal que $Y = \mathcal{L}$ o Y es un intervalo o Y es un rayo.

Tenemos que dados $p, q \in Y$ con $p \prec q$ se cumple que $[p, q] \subseteq Y$, es decir que Y es un conjunto convexo. Mostremos que Y es conexo.

Sean $A, B \subseteq Y$ tales que $A, B \in \tau_{\prec Y}$ son ambos no vacíos y $A \cap B \neq \emptyset$. Mostraremos que $A \cup B$ es un subconjunto propio de Y, es decir que

$$A \cup B \subsetneq Y$$

Sean $a \in A$ y $b \in B$. Podemos suponer que $a \prec b$. Como Y es convexo, entonces $[a, b] \subseteq Y$. Sea

$$A_0 = A \cap [a, b] \neq \emptyset$$

y

$$B_0 = B \cap [a, b] \neq \emptyset$$

Entonces A_0, B_0 son dos conjuntos abiertos no vacíos en $([a, b], \tau_{\prec[a,b]})$. Para todo $x \in A_0$ se tiene que $x \prec b$. Existe pues $c \in \mathcal{L}$ tal que c es la mínima cota superior de A_0. Probemos que $c \in [a, b]$ y que $c \notin A \cup B$.

1. $c \notin A_0$. Suponga que $c \in A_0$, entonces $a \preceq c \prec b$. Como A_0 es abierto en $[a, b]$ existe $d \in \mathcal{L}$ tal que $[c, d) \subseteq A_0$ y $c \prec d$. Como $c \prec d$ entonces existe $y \in \mathcal{L}$ tal que $c \prec y \prec d$. Luego $y \in A_0 \#_c$. Por tanto, $c \notin A_0$.
2. $c \in [a, b]$. Sea $y_0 \in A_0 = A \cap [a, b]$. Por la parte anterior se tiene que $y \prec c \preceq b$, luego $c \in [y_0, b] \subseteq [a, b]$.
3. $c \notin A$.
4. $c \notin B_0$. Suponga que $c \in B_0 = B \cap [a, b]$, entonces $a \prec c$. B_0 es abierto en $[a, b]$, luego existe $d \in [a, b]$ tal que $d \prec c$ y $(d, c] \subseteq B_0$. Existe entonces $x \in A_0$ tal que $d \prec x \prec c$, luego $x \in A$ y $x \in B$ pues $(d, c] \subseteq B_0 \#_c$. Luego, $c \notin B_0$.
5. $c \notin B$.

Entonces, $c \notin A \cup B$. Así, $A \cup B$ no puede formar una partición de Y, es decir que Y es conexo. ■

Corolario 6.1.1
Consideremos $(\mathbb{R}, \tau_u)$, entonces cada intervalo, cada rayo y el mismo conjunto $\mathbb{R}$ son subconjuntos conexos de $(\mathbb{R}, \tau_u)$.

Demostración:
Es inmediato del teorema anterior. ■

Proposición 6.1.2
Sea C un subconjunto de $(\mathbb{R}, \tau_u)$. Entonces, C es conexo si y sólo si C es un intervalo o C es un rayo o $C = \mathbb{R}$ o $C = \emptyset$ o $C = \{r\}$ con $r \in \mathbb{R}$.

Demostración:
$\Rightarrow)$: Sea $C \subseteq \mathbb{R}$ tal que $C \neq \mathbb{R}$, $C \neq \emptyset$, C no es un intervalo ni un rayo ni un conjunto unipuntual. Entonces, existen $a, b \in C$ y un punto $x \in \mathbb{R} - C$ tal que

$$a < x < b$$

Sea

$$A = \left\{c \in C \middle| c < x\right\} \quad \text{y} \quad B = \left\{c \in C \middle| x < c\right\}$$

tanto A como B son conjuntos no vacíos. Otra forma de expresarlos es como:

$$A = (-\infty, x) \cap C \quad \text{y} \quad B = (x, \infty) \cap C$$

A y B son dos conjuntos no vacíos abiertos en (C, τ_{uC}) tales que $A \cap B = \emptyset$. Además, $A \cup B = C$. Luego C no es conexo.

$\Leftarrow)$: Es inmediata del teorema anterior. ■

Observación 6.1.1
Sea (X, τ) un espacio toplógico no conexo. Entonces, existen $U, V \in \tau - \{\emptyset\}$ tales que

$$U \cap V = X \quad X = U \dot{\cup} V$$

por ende, $U = X - V$ y $V = X - U$ son cerrados disjuntos tales que

$$\mathring{U} = U = \overline{U}$$

Análogamente

$$\mathring{V} = V = \overline{V}$$

Además, $U \cap \overline{V} = \overline{U} \cap V = \emptyset$. También, $\text{Fr}(U) = \text{Fr}(V) = \emptyset$.

Proposición 6.1.3
Sea (X, τ) un espacio topológico, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. (X, τ) es conexo.
2. Los únicos subconjuntos de X que son a la vez abiertos y cerrados son X y $\emptyset$.
3. Los únicos subconjuntos de X con frontera vacía son X y $\emptyset$.

Demostración:
(1) $\Rightarrow$ (2): Sea $A \subseteq X$ tal que A es abierto y cerrado a la vez, es decir que $A, X - A \in \tau$. Suponga que $A \neq X, \emptyset$, se tiene pues que

$$X = A \cup (X - A) \quad \text{y} \quad A \cap (X - A) = \emptyset$$

siendo $A, X - A \neq \emptyset$. Luego esto implicaría que (X, τ) no es conexo$\#_c$. Por tanto, $A = \emptyset$ o $A = \mathbb{R}$.

(2) $\Rightarrow$ (3) : Sea $A \subseteq X$ tal que $\mathrm{Fr}(A) = \emptyset$. Entonces,

$$\emptyset = \mathrm{Fr}(A) = \overline{A} - \mathring{A} \Rightarrow \mathring{A} = \overline{A}$$

luego A es cerrado y abierto en (X, τ). Por tanto, $A = X$ o $A = \emptyset$.

(3) $\Rightarrow$ (1) : Suponga que $U, V \in \tau$ son tales que

$$U \cap V = \emptyset \quad \text{y} \quad U \cup V = X$$

Se tiene que $U = X - V$ y $V = X - U$ donde se sigue que U, V son cerrados en (X, τ). Así,

$$\overline{U} = U = \mathring{U} \quad \text{y} \quad \overline{V} = V = \mathring{V}$$

por tanto, $\mathrm{Fr}(U) = \emptyset$, es decir que $U = \emptyset$ y $V = X$, o $U = X$ y $V = \emptyset$. Luego, (X, τ) es conexo. ■

Definición 6.1.2
Sea (X, τ) un espacio topológico. Dos conjuntos $U, V \in \tau$ se dicen **mutuamente separados** si $U \cap \overline{V} = \overline{U} \cap V = \emptyset$.

Definición 6.1.3
Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $Y \subseteq X$. Una pareja A, B de subconjuntos de X mutuamente separados en (X, τ) es una **separación de Y en (X, τ)** si

$$Y = A \cup B, \quad Y \cap A \text{ y } Y \cap B \neq \emptyset$$

Proposición 6.1.4
Sean (X, τ) un espacio topológico y $Y \subseteq X$. Entonces (Y, τ_Y) es conexo si y sólo si no existe una separación de Y en X.

Demostración:

$\Rightarrow$) : Suponga que $A, B \subseteq X$ son una separación de Y en (X, τ). Tenemos que

$$\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$$

también,

$$Y = A \cup B \quad Y \cap A \neq \emptyset \text{ y } Y \cap B \neq \emptyset$$

Se tiene pues que

$$\begin{aligned} \overline{A} \cap Y &= \overline{A} \cap (A \cup B) \\ &= (\overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap B) \\ &= A \end{aligned}$$

análogamente se prueba que $\overline{B} \cap Y = B$. Por tanto, A, B forman una partición de $(Y, \tau_Y) \#_c$. Por tanto, (Y, τ_Y) es conexo.

$\Leftarrow$) : Suponga que (Y, τ_Y) no es conexo. Entonces existen $A, B \in \tau_Y$ con $A, B \neq \emptyset$ tales que

$$A \cap B = \emptyset \quad \text{y} \quad A \cup B = Y$$

Luego A y B son conjuntos abiertos y cerrados en (Y, τ_Y).

$$A = \overline{A} \cap Y \quad \text{y} \quad B = \overline{B} \cap Y$$

Siendo tales que

$$\emptyset = A \cap B = (\overline{A} \cap Y) \cap B = \overline{A} \cap (Y \cap B) = \overline{A} \cap B$$

de forma análoga $A \cap \overline{B} = \emptyset$. Así, A y B forman una separación de Y en (X, τ). ■

Corolario 6.1.2
Sea (X,τ) un espacio topológico. Entonces, (X,τ) es conexo si y sólo si no existen $A,B\subseteq X$ no vacíos tales que

$$X=A\cup B\quad A\cap\overline{B}=\emptyset=\overline{A}\cap B$$

Demostración:
Inmediata de la proposición anterior. ■

Proposición 6.1.5
Sea (X,τ) un espacio topológico y sean $Y,Z\subseteq X$ tales que $Y\subseteq Z$. Si U,V es una separación de Z en (X,τ) y Y es conexo, entonces $Y\subseteq U$ ó $Y\subseteq V$.

Demostración:
Se tiene que $Y\subseteq U\cup V$. Sea

$$U_1=Y\cup U\quad \text{y}\quad V_1=Y\cap V$$

entonces,

$$Y=U_1\cup V_1$$

Como $U\cap\overline{V}=\emptyset=\overline{U}\cap V$, entonces

$$\begin{aligned}\overline{U_1}\cap V_1&=\overline{Y\cap U}\cap(Y\cap V)\\&\subseteq\overline{U}\cap(Y\cap V)\\&=(\overline{U}\cap V)\cap Y\\&=\emptyset\\ \Rightarrow\overline{U_1}\cap V_1&=\emptyset\end{aligned}$$

de forma análoga se obtiene que $U_1\cap\overline{V_1}=\emptyset$. Como Y es conexo entonces $U_1=\emptyset$ o $V_1=\emptyset$, es decir que $Y\subseteq V$ o $Y\subseteq U$. ■

Proposición 6.1.6
Sea (X,τ) un espacio topológico y $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de subconjuntos conexos de X tales que

$$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\neq\emptyset$$

Entonces $\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$ es conexo.

Demostración:
Sea $A=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$. Supongamos que A no es conexo, entonces existe una separación $U,V\in\tau$ de A en X. Tomemos $\beta\in I$. Como $A_\beta\subseteq A$ y A_β es conexo, entonces por la proposición anterior se tiene que:

$$A_\beta\subseteq U\quad \text{ó}\quad A_\beta\subseteq V$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $A_\beta\subseteq U$. Como $\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\subseteq A_\beta$, entonces para todo $\gamma\in I$ se tiene que $A_\gamma\cap U\neq\emptyset$, luego por ser cada A_γ conexo debe suceder que:

$$A_\gamma\subseteq U$$

para todo $\gamma\in I$. Por tanto:

$$A=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\subseteq U$$

así, $A\cap V=\emptyset\#_c$pues U y V forman una separación de A. Por tanto A debe ser conexo. ■

Proposición 6.1.7
Sean (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) espacios topológicos tales que existe una función continua y suprayectiva $f : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$. Si (X_1, τ_1) es conexo, entonces (X_2, τ_2) también lo es.

Demostración:
Sea $A \subseteq X_2$ tal que $A, X_2 - A \in \tau_2$. Suponga que $A \neq \emptyset$, para probar que (X_2, τ_2) es conexo basta con ver que $A = X_2$. En efecto, veamos que como f es suprayectiva entonces $f^{-1}(A) \neq \emptyset$ y, al ser f continua se tiene que

$$f^{-1}(A) \in \tau_1$$

Pero,

$$f^{-1}(X_2 - A) = X_1 - f^{-1}(A)$$

donde $X_2 - A \in \tau_2$, luego $X_1 - f^{-1}(A) \in \tau_1$. Por ser (X_1, τ_1) conexo, al ser $f^{-1}(A) \neq \emptyset$ debe tenerse pues que:

$$f^{-1}(A) = X_1$$

(pues $f^{-1}(A)$ y $X_1 - f^{-1}(A)$ están en τ_1). Por tanto

$$A = f(f^{-1}(A)) = f(X_1) = X_2$$

lo que prueba el resultado. ■

Corolario 6.1.3
La propiedad de ser conexo es topológica.

Demostración:
Es inmediata del teorema anterior. ■

Proposición 6.1.8
Sea (X, τ) un espacio topológico, y sea $Y = \{a, b\}$ dotado de la topología discreta $\tau_D = \{\emptyset, T, \{a\}, \{b\}\}$. Entonces (X, τ) conexo si y sólo si no es posible definir una función $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_D)$ que sea suprayectiva y continua.

Demostración:
$\Rightarrow)$: Suponga que se puede definir tal función, entonces por la proposición anterior se seguiría que (Y, τ_D) es conexo$\#_c$, pues $Y = \{a\} \cup \{b\}$ siendo $\{a\}, \{b\} \in \tau_D$ tales que $\{a\} \cap \{b\} = \emptyset$. Por tanto, no es posible definir una función con tales propiedades.

$\Leftarrow)$: Suponga que (X, τ) no es conexo, entonces existen $U, V \in \tau - \{\emptyset\}$ tales que

$$X = U \cup V \quad \text{y} \quad U \cap V = \emptyset$$

defina $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_D)$ como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{si} \quad x \in U \\ b & \text{si} \quad x \in V \end{cases}, \quad \forall x \in X.$$

se tiene que $f^{-1}(\{a\}) = U$, $f^{-1}(\{b\}) = V$, luego f es continua. Además por definición f es suprayectiva. Lo anterior prueba la contrapositiva. ■

Proposición 6.1.9
Sean (X, τ) un espacio topológico, $A, B \subseteq X$ tales que $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$. Si A es conexo, entonces B es conexo.

Demostración:
Suponga que B no es conexo. Podemos definir una función $f : (B, \tau_B) \to (Y, \tau_D)$ continua y suprayectiva, donde $Y = \{a, b\}$. Como $B \subseteq \overline{A}$ se tiene que:

$$\overline{A}^B = \overline{A} \cap B = B$$

Por lo cual $f\left(\overline{A}^B\right) = f(B) = Y$, por ser f continua,

$$Y = f\left(\overline{A}^B\right) \subseteq \overline{f(A)} = f(A) \Rightarrow f(A) = Y$$

Tenemos pues que $f\big|_A : (A, \tau_A) \to (Y, \tau_D)$ es una función continua (por ser reestricción) y suprayectiva. Por ende, A no es conexo$\#_c$. Por tanto, B es conexo. ■

Corolario 6.1.4
Sea (X, τ) es un espacio topológico. Si $A \subseteq X$ es conexo, entonces $\overline{A}$ es conexo.

Demostración:
Es inmediato del teorema anterior. ■

Teorema 6.1.1 (**Teorema del valor medio**)
Sea (X, τ) un espacio conexo, $(Y, \prec)$ un conjunto ordenado y $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_\prec)$ una función continua. Si $a, b \in X$ y $\gamma \in Y$ es tal que:

$$f(a) \prec \gamma \prec f(b)$$

entonces existe $c \in X$ tal que $f(x) = \gamma$.

Demostración:
Suponga que no existe $c \in X$ tal que $f(c) = \gamma$ ■

Proposición 6.1.10
Sean (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) dos espacios conexos. Entonces $(X_1 \times X_2, \tau_p)$ es un espacio conexo.

Demostración:
Entonces, para todo $x \in X_1$, tenemos que $T_x = (X_1 \times \{b\}) \cup (\{x\} \times X_2)$ es un conexo.

Además, para todo $x \in X_1$, $(a, b) \in T_x$ (recordando que $a \in X_1$ es arbitrario fijo), luego $\bigcup_{x \in X_1} T_x$ es conexo. Veamos que

$$\bigcup_{x \in X_1} T_x = X_1 \times X_2$$

En efecto, sea $(p, q) \in X_1 \times X_2$, entonces $(p, q) \in T_p \subseteq \bigcup_{x \in X_1} T_x$.

Se sigue entonces que $(X_1 \times X_2, \tau_p)$ es conexo. ■

Ejercicio 6.1.1
Si $\{(X_1, \tau_1), ..., (X_n, \tau_n)\}$ son espacios topológicos conexos, entonces

$$X = \prod_{i=1}^{n} X_i$$

dotado de la topología producto es un espacio conexo.

Sugerencia. Se puede demostrar que $(X_1 \times ... \times X_{n-1}) \times X_n$ es homeomorfo a $X_1 \times ... \times X_n$.

Demostración:

■

Proposición 6.1.11
Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ una familia arbitraria de espacios topológicos y sea

$$X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$$

Entonces (X, τ_p) es conexo si y sólo si para todo $\alpha \in I$, (X_α, τ_α) es un espacio conexo.

Demostración:

$\Rightarrow)$: Sea $\alpha \in I$ y considere la función $p_\alpha : (X, \tau_p) \to (X_\alpha, \tau_\alpha)$. Esta función es continua y suprayectiva, se sigue entonces que (X_α, τ_α) es conexo.

$\Leftarrow)$: Sea $b = (b_\alpha)_{\alpha \in I} \in X$ elemento arbitrario fijo de X y, sea $J = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subseteq I$. Definimos

$$X_J = \left\{ (x_\alpha)_{\alpha \in I} \in X \middle| x_\alpha = b_\alpha \text{ para } \alpha \notin J \right\}$$

Se tiene que $X_J \neq \emptyset$ pues $b \in X_J$. Podemos escribir X_J como

$$X_J = \prod_{\alpha \in I} Y_\alpha$$

donde

$$Y_\alpha = \begin{cases} \{b_\alpha\} & \text{si} \quad \alpha \notin J \\ X_\alpha & \text{si} \quad \alpha \in J \end{cases}$$

Sea $X' = \prod_{i=1}^{\infty} X_{\alpha_i}$. Definamos $\varphi : (X', \tau_p) \to (X_J, \tau_{p_{X_J}})$ tal que

$$(x_{\alpha_1}, ..., x_{\alpha_n}) \mapsto (y_\alpha)_{\alpha \in I}$$

donde

$$y_\alpha = \begin{cases} b_\alpha & \text{si} \quad \alpha \notin J \\ x_\alpha & \text{si} \quad \alpha \in J \end{cases}$$

1. φ **es suprayectiva**. Veamos que $\varphi(X') = X_J$. En efecto, sea $\zeta = (\zeta_\alpha)_{\alpha \in I} \in X_J$, es decir que si $\alpha \notin J$ se tiene que $\zeta_\alpha = b_\alpha$, luego:

$$\varphi((\zeta_{\alpha_1}, ..., \zeta_{\alpha_n})) = \zeta$$

se concluye que $\varphi(X') = X_J$.

2. φ **es continua**. Sea $U = \prod_{\alpha\in I} U_\alpha$ un básico de (X, τ_p), es decir que $U_\alpha \in \tau_\alpha$ para todo $\alpha \in I$ (y coincide con X_α para casi todo $\alpha \in I$ salvo una cantidad finita). Tomemos

$$U' = U \cap X_J \in \tau_{p_{X_J}} - \{\emptyset\}$$

Se tiene que $U' \in \tau_{p_{X_J}}$, más aún:

$$\begin{aligned} U' &= \left(\prod_{\alpha\in I} U_\alpha\right) \cap \left(\prod_{\alpha\in I} Y_\alpha\right) \\ &= \prod_{\alpha\in I} (U_\alpha \cap Y_\alpha) \end{aligned}$$

donde

$$U_\alpha \cap Y_\alpha = \begin{cases} \{b_\alpha\} & \text{si} \quad \alpha \notin J \\ U_\alpha & \text{si} \quad \alpha \in J \end{cases}, \quad \forall \alpha \in I$$

Por tanto

$$\varphi^{-1}(U') = \prod_{\alpha\in J} U_\alpha \in \tau_{p_{X'}}$$

luego φ es una función continua.

Por el ejercicio anterior se tiene que $(X', \tau_{p_{X'}})$ es conexo, entonces (X_J, τ_p) es conexo (por ser φ continua y suprayectiva).

Sea

$$\mathcal{F} = \left\{ J \subseteq I \,\middle|\, J \text{ es un conjunto finito} \right\}$$

Para todo $J \in \mathcal{F}$, X_J es conexo por lo probado anteriormente para el cual $b \in X_J$. Por ende, el conjunto

$$\bigcup_{J\in\mathcal{F}} X_J = Y$$

es conexo en (X, τ_p). Veamos que

$$\overline{Y} = X$$

En efecto, sea $W = \prod_{\alpha\in I} W_\alpha$ un básico de τ_p con $W \neq \emptyset$. Se tiene que para todo $\alpha \in I$, $W_\alpha \in \tau_\alpha$ y además existe $K \in \mathcal{F}$ tal que si $\alpha \notin K$, $W_\alpha = X_\alpha$.

Para $\alpha \in K$, $x_\alpha \in X_\alpha$ y definimos

$$y_\alpha = \begin{cases} x_\alpha & \text{si} \quad \alpha \in K \\ b_\alpha & \text{si} \quad \alpha \notin K \end{cases}, \quad \forall \alpha \in I$$

Entonces $y = (y_\alpha)_{\alpha\in I} \in X_K \cap W$ lo que implica que $Y \cap W \neq \emptyset$. Luego $\overline{Y} = X$ y así, (X, τ_p) es conexo. ■

Definición 6.1.4
Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $p \in X$. Tomemos

$$\mathcal{C} = \left\{ C \subseteq X \,\middle|\, C \text{ es conexo y } p \in C \right\}$$

tenemos que $\{p\} \in \mathcal{C}$ y además para todo $C \in \mathcal{C}$, $p \in C$. Por tanto $C_p = \bigcup_{C\in\mathcal{C}} C$ es un conjunto conexo, el cual llamaremos **la componente conexa de** p.

Observación 6.1.2
Se tiene lo siguiente:

1. C_p es el máximo conexo de X que contiene a $p \in X$.
2. C_p es un conjunto cerrado.
3. Sean $p, q \in X$, entonces $C_p = C_q$ ó $C_p \cap C_q = \emptyset$.

Demostración:
De 1): Es inmediata de la definición.

De 2): Como C_p es conexo, entonces $\overline{C_p}$ es conexo, luego por maximalidad $\overline{C_p} \subseteq C_p$ lo cual implica que C_p es cerrado.

De 3): Si $C_p \cap C_q \neq \emptyset$ entonces $C_p \cup C_q$ es conexo, pero es tal que contiene a p y q, luego

$$C_p \subseteq C_p \cup C_q \subseteq C_p \quad \text{y} \quad C_q \subseteq C_p \cup C_q \subseteq C_q$$

por tanto, $C_p \cup C_q = C_p = C_q$. ■

Definición 6.1.5
Sea (X, τ) un espacio topológico, definimos sobre X la relación $\sim$ siguiente:

$$x \sim y \iff \text{no existen } A, B \in \tau \text{ tales que } A \cap B = \emptyset, A \cup B = X, x \in A \text{ y } y \in B$$

Esta es una realción de equivalencia sobre X. Esta relación de equivalencia dice básicamente que dos elementos están relacionados si y sólo si están en la misma componente conexa.

Demostración:
Hay que probar que se cumplen tres condiciones:

- $\sim$ **es reflexiva**: En efecto, para todo $x \in X$ se tiene que $x \sim x$.
- $\sim$ **es transitiva**. En efecto, si $x \sim y$ entonces no es posible que $y \nsim x$ (por la definición de $\sim$), por ende $y \sim x$.
- $\sim$ **es transitiva**. Sean $x, y, z \in X$ tales que $x \sim y$ y $y \sim z$. Procederemos por contradicción, suponga que $x \nsim z$, luego existen dos abiertos $U, V \in \tau$ disjuntos tales que

  $$x \in U \quad \text{y} \quad z \in V$$

  con $U \cup V = X$. Si $y \in U$ entonces se tendría que $y \nsim z$ y, si $y \in V$ entonces $x \nsim y$. Ambos casos llegan a una contradicción. Por tanto, debe suceder que $x \sim z$.

Por los tres incisos, $\sim$ es una relación de equivalencia. ■

Observación 6.1.3
Denotamos por $[x]$ a los elementos del conjunto cociente $X/\sim$. $[x]$ será llamado una **cuasi-componente de** (X, τ).

Proposición 6.1.12
Sean (X,τ) espacio topológico y $x\in X$, entonces

$$[x]=\bigcap\left\{A\subseteq X\middle|x\in A \text{ es tal que } A \text{ es abierto y cerrado}\right\}$$

En particular el conjunto $[x]$ es cerrado en (X,τ).

Demostración:
Sea $A\subseteq X$ tal que $x\in A$ y $A, X-A\in\tau$. Veamos que $[x]\subseteq A$. En efecto, si $y\in[x]$ se tiene que $x\sim y$. Pero

$$X=A\dot{\cup}(X-A)$$

Como $x\in A$ entonces no puede ser que $y\in X-A$ pues en tal caso se tendría que $x\nsim y$. Por ende, $y\in A$. Así, $[x]\subseteq A$.

Sea $y\in\bigcap\left\{A\subseteq X\middle|x\in A \text{ es tal que } A \text{ es abierto y cerrado}\right\}$. Suponga que $y\nsim x$, entonces existen $U,V\in\tau$ tales que $U\cap V=\emptyset$, $U\cup V=X$ y

$$x\in U \quad \text{y} \quad y\in V$$

Luego $U, V=X-U\in\tau$, donde $x\in U$. Se sigue pues que $y\in U\#_c$. Por tanto, $x\sim y$. ■

Proposición 6.1.13
Cada componente está contenida en una cuasi-componente.

Demostración:
Sea $x\in X$ y considere C_x, veamos que $C_x\subseteq[x]$. En efecto, sea $A\subseteq X$ tal que $x\in A$ con $A, X-A\in\tau$. Como C_x es un conexo y $x\in C_x$ entonces $C_x\cap A\neq\emptyset$, luego $C_x\subseteq A$.

Por tanto, de la proposición anterior se sigue que $C_x\subseteq[x]$. ■

Ejemplo 6.1.5
Para cada $n\in\mathbb{N}$ defina $I_n=\left\{\frac{1}{n}\right\}\times[0,1]$. Tomemos

$$X=\{(0,0),(0,1)\}\cup\bigcup_{n\in\mathbb{N}}I_n$$

Se tiene que $X\subseteq\mathbb{R}^2$ tomando a $(\mathbb{R}^2,\tau_u)$. Las componentes de (X,τ_{uX}) son $\{(0,0)\}$, $\{(0,1)\}$ y para todo $n\in\mathbb{N}$, I_n. Las cuasi-componentes son $\forall n\in\mathbb{N}$ I_n y $\{(0,0),(0,1)\}$.

Demostración:
La parte de las componentes es inmediata. Para las cuasicomponentes, afirmamos que $(0,0)\sim(0,1)$. En efecto, suponga que $(0,0)\nsim(0,1)$, entonces existen $U,V\in\tau_{uX}$ tales que $U\cap V=\emptyset$, $U\dot{\cup}V=X$ con $(0,0)\in U$ y $(0,1)\in V$.

Como U es abierto, entonces existe $\varepsilon>0$ tal que $B((0,0),\varepsilon)\subseteq U$, luego... ■

Teorema 6.1.2
Si (X,τ) es compacto y T_2, entonces cada cuasi-componente es conexa.

Demostración:
Luego se hará la demostración del resultado. ■

Lema 6.1.1
Sea (X, τ) un espacio compacto y T_2. Sean $A \subseteq X$ cerrado y $x \in X - A$. Si para cada $y \in A$ existen U_y y V_y elementos de τ tales que

$$x \in U_y \quad \text{y} \quad y \in V_y$$

con $U_y \cap V_y = \emptyset$ y $U_y \cup V_y = X$, entonces existen $U, V \in \tau$ tales que $U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = X$ con

$$x \in U \quad \text{y} \quad A \subseteq V$$

Demostración:
Como $A \subseteq X$ es cerrado y (X, τ) es compacto, entonces A es compacto. Para $y \in A$ existen $U_y, V_y \in \tau$ tales que

$$x \in U_y \quad \text{y} \quad y \in V_y$$

con $U_y \cap V_y = \emptyset$ y $U_y \cup V_y = X$. Entonces

$$A \subseteq \bigcup_{y \in A} V_y$$

luego $\{V_y\}_{y \in A}$ forma una cubierta abierta de A. Por ser A compacto existen $y_1, ..., y_n \in A$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$$

Sean

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i} \quad \text{y} \quad V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$$

Se tiene que $x \in U$, $A \subseteq V$. Además, $U \cap V = \emptyset$ (por construcción). Veamos que

$$U \cup V = X$$

En efecto, sea $z \in X$. Se tienen dos casos:

- $z \in U_{y_i}$ para todo $i \in [\![1, n]\!]$, entonces $z \in U$, luego $z \in U \cup V$.
- Existe $i \in [\![1, n]\!]$ tal que $z \notin U_{y_i}$, luego como $X = U_{y_i} \cup V_{y_i}$ debe suceder que $z \in V_{y_i}$, lo cual implica que $z \in V \subseteq U \cup V$.

Por tanto, $z \in U \cup V$. Así, $X = U \cup V$. ■

Lema 6.1.2
Sea (X, τ) un espacio compacto y T_2, $A, B \subseteq X$ cerrados con $A \cap B = \emptyset$. Si dados $a \in A$ y $b \in B$ existen $U, V \in \tau$ tales que

$$a \in U \quad \text{y} \quad b \in V$$

con $U \cap V = \emptyset$ y $U \cap V = X$, entonces existen $M, N \in \tau$ con $M \cap N = \emptyset$ con $M \cup N = X$ siendo tales que

$$A \subseteq M \quad \text{y} \quad B \subseteq N$$

Demostración:
Sea $b \in B$, entonces $b \notin A$ pues $A \cap B = \emptyset$. Por el lema anterior existen $U_b, V_b \in \tau$ tales que

$$U_b \cap V_b = \emptyset \quad \text{y} \quad U_b \cup V_b = X$$

siendo tales que $b \in U_b$ y $A \subseteq V_b$. Luego

$$B \subseteq \bigcup_{b \in B} U_b$$

Como B es un cerrado en un espacio compacto, entonces es compacto, luego existen $b_1, ..., b_n \in B$ tales que

$$B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{b_i}$$

Sea

$$N = \bigcup_{i=1}^{n} U_{b_i} \quad \text{y} \quad M = \bigcap_{i=1}^{n} V_{b_i}$$

Se tiene que $M, N \in \tau$ y, además $M \cap N = \emptyset$. Veamos ahora que $M \cup N = X$. En efecto,

$$\begin{aligned}
M \cup N &= \left(\bigcap_{i=1}^{n} V_{b_i} \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_{b_i} \right) \\
&= \left(\bigcap_{i=1}^{n} \left[V_{b_i} \cup \left(\bigcup_{j=1}^{n} U_{b_j} \right) \right] \right) \\
&= \left(\bigcap_{i=1}^{n} \left(\bigcup_{j=1}^{n} V_{b_i} \cup U_{b_j} \right) \right) \\
&= \left(\bigcap_{i=1}^{n} \left(\bigcup_{j=1, j\neq i}^{n} V_{b_i} \cup U_{b_j} \right) \cup V_{b_i} \cup U_{b_i} \right) \\
&= \left(\bigcap_{i=1}^{n} \left(\bigcup_{j=1, j\neq i}^{n} V_{b_i} \cup U_{b_j} \right) \cup X \right) \\
&= \left(\bigcap_{i=1}^{n} X \right) \\
&= X
\end{aligned}$$

■

Lema 6.1.3
Sea (X, τ) un espacio compacto y T_2. Sean Q una quasi-componente de X y $U \in \tau$ tal que $Q \subseteq U$. Entonces existe $H \subseteq X$ tal que $H, X - H \in \tau$ y $Q \subseteq H \subseteq U$.

Demostración:
Tenemos que $Q, X - U$ son dos conjuntos cerrados disjuntos. Si $a \in Q$ y $b \in X - U$ entonces $a \nsim b$ pues en caso contrario se tendría que $b \in Q$. Por tanto, existen $V, W \in \tau$ tales que

$$a \in V, \quad b \in W$$

tales que

$$V \cap W = \emptyset \quad \text{y} \quad V \cup W = X$$

Por tanto, los cerrados Q y $X-U$ cumplen las hipótesis del lema anterior, luego existen dos abiertos $H, F \in \tau$ tales que

$$Q \subseteq H \quad X-U \subseteq F \tag{6.1}$$

y,

$$H \cap F = \emptyset \quad \text{y} \quad H \cup F = X$$

Se tiene al ser la unión disjunta que $F = X - H \in \tau$. Además,

$$X-U \subseteq F \Rightarrow X-F \subseteq U \Rightarrow H \subseteq U$$

Por tanto, H es el conjunto abierto deseado. ■

Teorema 6.1.3
Sea (X, τ) un espacio compacto y T_2. Entonces, toda cuasi-componente de X es conexa.

Demostración:
Sea Q una cuasi-componente de X y suponga que Q no es conexa. Entonces existen $U, V \in \tau_Q$ no vacíos tales que

$$U \cap V = \emptyset \quad \text{y} \quad U \cup V = Q$$

Como U y V son cerrados en (Q, τ_Q) y Q es cerrado en (X, τ), entonces U, V son cerrados en (X, τ). Como (X, τ) es compacto y T_2, es normal. Así, existen $M, N \in \tau$ tales que

$$M \cap N = \emptyset$$

con $U \subseteq M$ y $V \subseteq N$. Por ende

$$Q = U \cup V \subseteq M \cup N \in \tau$$

Por el lema anterior existe $H \subseteq X$ tal que $H, X-H \in \tau$ con

$$Q \subseteq H \subseteq M \cup N$$

Por tanto,

$$W = M \cap H = (X-N) \cap H$$

es cerrado y abierto, pues los dos conjuntos de la derecha son cerrados y los dos de en medio son abiertos. Por tanto, $W, X-W \in \tau$. Más aún , se tiene que

$$U \subseteq W \quad \text{y} \quad V \subseteq X-W$$

y, $Q = U \cup V \subseteq W \cup (X-W) = X$. De esta forma dados $x \in W$ y $y \in X-W$ entonces $Q_x \neq Q_y \#_c$. Por tanto, uno de los dos U, V debe ser vacío. Así, Q debe ser conexo. ■

Corolario 6.1.5
Si (X, τ) es un espacio compacto y T_2. Entonces las componentes y las cuasi-componentes coinciden.

Demostración:
Inmediata de lo anterior. ■

6.2. Espacios Localmente Conexos

Definición 6.2.1
Un espacio topológico (X, τ) es **localmente conexo** si dado $x \in X$ existe una base de vecindades conexas de x. Es decir, cualquier vecindad de x contiene una vecindad conexa de x.

Proposición 6.2.1
Si (X, τ) es un espacio localmente conexo y C es una componente conexa de X, entonces C es un abierto.

Demostración:
Sea C una componente conexa de X y $p \in C$. Sea U una vecindad conexa de p. Se tiene que $U \cap C \neq \emptyset$, luego $U \cap C$ es un conexo que contiene a p. Por maximalidad se sigue que $U \cup C = C$, es decir que $U \subseteq C$. ■