Isomorfismos.

Def. Sean E, F espacios normados. Un *isomorfismo* de E sobre F es un homeomorfismo T de E sobre F, tal que T es aplicación lineal (luego T^{-1} también es lineal). Si existe un isomorfismo entre E y F se dice que F y E son *isomorfos* y se escribe $E \cong F$.

Si el isomorfismo T es además una isometría de E y F, se dice que E y F son *linealmente isométricos*, y

$$E \equiv F$$

Puesto que toda aplicación lineal es continua es uniformemente continua, entonces transforma sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy, etc.

Teorema:

Si $E \cong F$ y E es de Banach, entonces F es de Banach

EJEMPLO.

1) $(\mathcal{C}([0,1]), N_\infty) \not\approx (\mathcal{C}([0,1]), N_1)$.

Corolario.

Sean N y $\|\cdot\|$ dos normas equivalentes sobre un mismo espacio vectorial, entonces (E, N) es de Banach si y sólo si $(E, \|\cdot\|)$ es de Banach.

Dem:

Se sigue del hecho que $Id: (E, N) \to (E, \|\cdot\|)$ es lineal.

Teorema.

Sea $T: E \to F$ (suprayectiva). Entonces T es isomorfismo de E sobre F si y sólo si $\exists\, \alpha, \beta > 0 \ \ni$

$$\alpha N_E(x) \leqslant N_F(T(x)) \leqslant \beta N_E(x), \ \forall\, x \in E.$$

Dem:

$\Rightarrow$) Suponga que T es isomorfismo. Entonces:

$$N_F(T(x)) \leqslant \|T\| \cdot N_E(x), \ \forall\, x \in E.$$

$$N_E(T^{-1}(y)) \leqslant \|T^{-1}\| N_F(y), \ \forall\, y \in F.$$

como T es biyectiva, entonces

$$N_E(x) \leqslant \|T^{-1}\| N_F(T(x)), \ \forall\, x \in E$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|T^{-1}\|} N_E(x) \leqslant N_F(T(x)) \leqslant \|T\| N_E(x), \ \forall\, x \in E.$$

$\Leftarrow$) Como $\alpha N_E(x) \leqslant N_F(T(x))$, $\forall\, x \in E \Rightarrow x \in \operatorname{Ker} T \Leftrightarrow \alpha N_E(x) \leqslant 0 \Rightarrow N_E(x) = 0$, pues $\alpha > 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} T = \{0\} \Rightarrow T$ es inyectiva.

Luego, T es biyectiva.

Como $N_F(T(x)) \leqslant \beta N_E(x)$, $\forall\, x \in E$, entonces T es lineal continua. Además $N_E(x) \leqslant \frac{1}{\beta} N_F(T(x))$, $\forall\, x \in E \Rightarrow N_E(T^{-1}(y)) \leqslant \frac{1}{\beta} N_F(y)$, $\forall\, y \in F$. Por tanto T^{-1} es lineal continua.

q.e.d.

Corolario.

Sea $T: E \to F$ isomorfismo. Entonces

i) T y T^{-1} transforman conjuntos acotados, abiertos o cerrados, en acotados, abiertos o cerrados.

Def. Sea C el espacio de todas las sucesiones convergentes en $\mathbb{R}$, i.e

$x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in C \iff \exists\, l \in \mathbb{R} \ni \lim_{n\to\infty} x_n = l.$

Claramente $C_0 \subseteq C \subseteq l_\infty$.

Proposición.

$(C, N_\infty) \cong (C_0, N_\infty)$.

Dem:

Sea $T: C \to C_0$, dada como: $\forall\, x \in C$, como $\exists\, l \in \mathbb{R} \ni \lim_{n\to\infty} x_n = l$, entonces

$$T(x) = (l, x_1 - l, x_2 - l, \dots) \in C_0$$

Claramente T es lineal e invertible (probar), con inversa

$$T^{-1}(y) = (y_1 + y_2, y_1 + y_3, \dots)$$

Veamos que T es continua. Veamos que:

$$N_\infty(T(x)) = N_\infty(l, x_1 - l, x_2 - l, \dots)$$
$$= \sup_{k\in\mathbb{N}} \{|l|, |x_k - l|\},\ \forall\, x \in C.$$

Como x converge, $\exists\, M \in \mathbb{R} \ni \forall\, n \in \mathbb{N}$, $|x_n| \leq M$, luego $|l| \leq M$. Por tanto:

$$N_\infty(T(x)) \leq |l| + \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_n|$$
$$\leq |l| + N_\infty(x) \leq 2N_\infty(x),\ \forall\, x \in C$$

por tanto, T es continua. T^{-1} también es continua, por ser lineal, y:

$$|T^{-1}(y_n)| = |y_{n+1} - y_1| \leq |y_{n+1}| + |y_1| \leq 2N_\infty(y)$$

$\forall\, y \in C_0$. Por tanto $N_\infty(T^{-1}(y)) \leq 2N_\infty(y)$, $\forall\, y \in C_0$.

q.e.d.