

Notas de Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

5 de abril de 2024

Índice general

2. Convolución	2
2.1. Preliminares	2
2.2. Convolución	4
2.3. Convolución en \mathcal{L}_p	9
2.4. Convolución y diferenciación	17
2.5. Sucesiones de Dirac	20
2.5.1. Convolución de sucesiones de Dirac con funciones en \mathcal{L}_p , $1 \leq p < \infty$	21
2.6. Convolución de sucesiones de Dirac con funciones en \mathcal{L}_∞	27

Capítulo 2

Convolución

Se sabe que el producto puntual de dos funciones integrables no necesariamente es una función integrable (por ejemplo, $f(x) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\chi_{[0,1]}$). Sin embargo, es posible definir un auténtico producto en $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ que sea compatible con la adición y el producto por escalares, con el cual $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ sea un **álgebra de Banach conmutativa sin elemento identidad**. Tal operación se llama **convolución**.

2.1. Preliminares

Lema 2.1.1

Si M es un subconjunto despreciable de \mathbb{R}^n , entonces $M \times \mathbb{R}^m$ es despreciable en \mathbb{R}^{n+m} .

Demostración:

Escriba a \mathbb{R}^m como unión numerable de rectángulos acotados disjuntos. Basta probar que si Q es un rectángulo acotado en \mathbb{R}^m , entonces $M \times Q$ es despreciable en \mathbb{R}^{n+m} .

Sea $\varepsilon > 0$. Si $\text{Vol}(Q) = 0$, el resultado es inmediato, pues se sigue que $\text{Vol}(M \times Q) = 0$. Suponga que $\text{Vol}(Q) > 0$, se tiene para $M \subseteq \mathbb{R}^n$ que por definición de medida exterior existe $\{P_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ sucesión de rectángulos acotados disjuntos tales que $M \subseteq \bigcup_{\nu=1}^\infty P_\nu$ y:

$$\sum_{\nu=1}^\infty \text{Vol}(P_\nu) < \frac{\varepsilon}{\text{Vol}(Q)}$$

Entonces, $\{P_\nu \times Q\}_{\nu=1}^\infty$ es una sucesión de rectángulos acotados en \mathbb{R}^{n+m} tales que $M \times Q \subseteq \bigcup_{\nu=1}^\infty P_\nu \times Q$, y

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^\infty \text{Vol}(P_\nu \times Q) &= \text{Vol}(Q) \cdot \sum_{\nu=1}^\infty \text{Vol}(P_\nu) \\ &< \text{Vol}(Q) \cdot \frac{\varepsilon}{\text{Vol}(Q)} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

luego, el conjunto $M \times Q$ es despreciable, con lo cual el conjunto $M \times \mathbb{R}^m$ también lo es. ■

Definición 2.1.1

Si $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{K}$ y $g : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{K}$ son funciones, se define el **producto tensorial de f y g** como la

función: $f \otimes g : \mathbb{R}^{p+q} \rightarrow \mathbb{K}$, dada por:

$$f \otimes g(x, y) = f(x)g(y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^{p+q}$$

Proposición 2.1.1

Si $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{K}$ y $g : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{K}$ son funciones medibles, entonces $f \otimes g : \mathbb{R}^{p+q} \rightarrow \mathbb{K}$ es medible.

Demostración:

Se probarán dos casos:

1. Afirmamos que el resultado es cierto para funciones escalonadas $\varphi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{K}$ y $\psi : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{K}$ escritas canónicamente como:

$$\varphi = \sum_{i=1}^r c_i \chi_{P_i} \quad \text{y} \quad \psi = \sum_{j=1}^s d_j \chi_{Q_j}$$

donde los P_i y Q_j son rectángulos acotados disjuntos. En efecto, en este caso:

$$\begin{aligned} \varphi \otimes \psi(x, y) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s c_i d_j \chi_{P_i}(x) \chi_{Q_j}(y) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s c_i d_j \chi_{P_i \times Q_j}(x, y) \end{aligned}$$

la cual es una función escalonada en \mathbb{R}^{p+q} , luego medible.

2. En el caso general, se sabe que existen $\{\varphi_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ en $\mathcal{E}(\mathbb{R}^p, \mathbb{K})$ y $\{\psi_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ en $\mathcal{E}(\mathbb{R}^q, \mathbb{K})$ y conjuntos despreciables $M \subseteq \mathbb{R}^p$, $N \subseteq \mathbb{R}^q$ tales que:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \varphi_\nu(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^p \setminus M$$

y,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \psi_\nu(x) = g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^q \setminus N$$

luego, se tiene que:

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow \infty} \varphi_\nu \otimes \psi_\nu(x, y) &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \varphi_\nu(x) \psi_\nu(y) \\ &= f(x)g(y) \end{aligned}$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^{p+q} \setminus [M \times \mathbb{R}^q \cup \mathbb{R}^p \times N]$. Por el lema anterior se tiene que $M \times \mathbb{R}^q \cup \mathbb{R}^p \times N$ es despreciable en \mathbb{R}^{p+q} . Como $\varphi_\nu \otimes \psi_\nu$ son medibles para todo $\nu \in \mathbb{N}$, entonces $f \otimes g$ es medible. ■

Corolario 2.1.1

Si $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{K}$ es medible, entonces $F : \mathbb{R}^{p+q} \rightarrow \mathbb{K}$ dada como:

$$F(x, y) = f(x), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^{p+q}$$

es medible.

Demostración:

Es inmediata de la proposición anterior tomando a f y $g = \chi_{\mathbb{R}^q}$. ■

Corolario 2.1.2

Si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^p, \mathbb{K})$, $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^q, \mathbb{K})$, entonces $f \otimes g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^{p+q}, \mathbb{K})$ y:

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f \otimes g = \int_{\mathbb{R}^p} f \cdot \int_{\mathbb{R}^q} g$$

Demostración:

Es inmediato del teorema de Tonelli. ■

2.2. Convolución

Definición 2.2.1

Sean $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ funciones medibles. La **convolución de f por g** se define como la función de \mathbb{R}^n en \mathbb{K} tal que:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy$$

para toda $x \in \mathbb{R}^n$ tal que la integral exista.

Ejemplo 2.2.1

Considere la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

entonces,

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dx = \int_0^{\infty} f(y)g(x-y)dx$$

se tienen dos casos, por como están dadas las funciones f y g :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(y)g(x-y)dx &= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \\ \int_0^x f(y)g(x-y)dy & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \\ \int_0^x f(y)g(x-y)dy & \text{si } 0 < x < 1 \\ \int_0^1 f(y)g(x-y)dy & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \\ \int_0^x g(x-y)dy & \text{si } 0 < x < 1 \\ \int_0^1 g(x-y)dy & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \\ \int_0^x g(x-y)dy & \text{si } 0 < x < 1 \\ \int_0^1 g(x-y)dy & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \\ \int_0^x g(x-y)dy & \text{si } 0 < x < 1 \\ \int_0^1 g(x-y)dy & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ \int_0^1 g(x-y)dy & \text{si } x > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_0^\infty f(y)g(x-y)dx &= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \\ \int_0^x (x-y)dy & \text{si } 0 < x < 1 \\ \int_{x-1}^1 g(x-y)dy & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \\ -\frac{(x-y)^2}{2} \Big|_0^x & \text{si } 0 < x < 1 \\ \int_{x-1}^1 (x-y)dy & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \\ \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 < x < 1 \\ -\frac{(x-y)^2}{2} \Big|_{x-1}^1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \\ \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 < x < 1 \\ -\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{1}{2} & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \\ \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 < x < 1 \\ -\frac{x^2}{2} + x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Observación 2.2.1

Note que la función $f * g$ es continua. (esto servirá para ver que la convolución obtenida es correcta).

Ejemplo 2.2.2

Recuerde la fórmula de Cauchy para la n -ésima integral reiterada:

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{n-1}} dt$$

la igualdad anterior es la misma que la de la función:

$$\int_0^x \frac{f(t)dt}{\Gamma(n)(x-t)^{n-1}} = f * g(x)$$

donde

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{\Gamma(n)x^{n-1}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Si $0 < \alpha \leq 1$, definimos:

$$\int_0^x \frac{f(t)dt}{\Gamma(\alpha)(x-t)^{1-\alpha}} = I_0^\alpha[f](x)$$

llamada la **integral fraccional de orden α de f en x** . Por ejemplo:

$$I_0^{1/2}[t](x) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}}x^{3/2}$$

$$I_0^{1/2} \left[\frac{4}{3\sqrt{\pi}} t^{3/2} \right] (x) = \frac{x^2}{2}$$

que concuerda con la integral normal de t .

Ahora estudiaremos algunas propiedades de este operador.

Proposición 2.2.1 (Asociatividad y conmutatividad de la convolución)

Sean $f, g, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ funciones medibles.

1. Si para algún $x \in \mathbb{R}^n$ existe la convolución $f * g(x)$, entonces también existe $g * f(x)$, y,

$$f * g(x) = g * f(x)$$

2. Si la función $|f| * |g|$ está definida c.t.p. en \mathbb{R}^n y, para algún $x \in \mathbb{R}^n$ existe $(|f| * |g|) * |h|(x)$, entonces existen $(f * g) * h(x)$, $f * (g * h)(x)$ y,

$$(f * g) * h(x) = f * (g * h)(x)$$

Demostración:

De (1): Se tiene que:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-u)g(u)du = \int_{\mathbb{R}^n} g(u)f(x-u)du = g * f(x)$$

por el cambio de variable $u = x - y$, de Jacobiano $|(-1)^n| = 1$. En particular, esto garantiza la existencia de $g * f(x)$.

De (2): Se demostrará primero que la función

$$(y, z) \mapsto f(z)g(y-z)h(x-y)$$

es medible como función de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en \mathbb{K} , para un $x \in \mathbb{R}^n$ fijo. Ya se sabe que $(y, z) \mapsto f(z)$ es medible (por una proposición sobre productos tensoriales).

Se afirma que la función $(y, z) \mapsto h(x-y)$ es medible. En efecto, $u \mapsto h(u)$ es medible. Por el cambio de variable $u = x - y$, la función $y \mapsto h(x-y)$ también es medible (por el teorema de cambio de variable). Luego, como con f , se sigue que $(y, z) \mapsto h(x-y)$ es medible.

También $(y, z) \mapsto g(y-z)$ es medible. Por productos tensoriales:

$$G(u, v) = g(u)$$

es medible. La función $\Phi(r, s) = (r - s, s)$ es un isomorfismo C^∞ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Por el teorema de cambio de variable se sigue que es medible la función:

$$G \circ \Phi(y, z) = g(y - z)$$

Por lo tanto, la función inicial es medible.

Puesto que para $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h(x-y)|dy \int_{\mathbb{R}^n} |f(z)||g(y-z)|dz = \int_{\mathbb{R}^n} |h(x-y)|(|f| * |g|)(y)dy = (|f| * |g|) * |h|(x) < \infty$$

(para los x en que esté definida la función), entonces por Tonelli la función $(y, z) \mapsto f(z)g(y-z)h(x-y)$ es integrable y, por Fubini:

$$(f * g) * h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x-y)dy \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(y-z)dz$$

además,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} h(x-y)f(z)g(y-z)dydz &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)dx \int_{\mathbb{R}^n} h(x-y)g(y-z)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)dz \int_{\mathbb{R}^n} h((x-z)-u)g(y-z)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)(g * h)(x-z)dz \\
&= f * (g * h)(x)
\end{aligned}$$

En particular, existen y son iguales $f * (g * h)(x)$ y $(f * g) * h(x)$. ■

Teorema 2.2.1

Si $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, se cumplen las afirmaciones siguientes.

1. Para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$, existe $f * g(x)$.
2. La función $f * g$, definida c.t.p. en \mathbb{R}^n , es integrable en \mathbb{R}^n .
3. $\int_{\mathbb{R}^n} f * g = \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)$.
4. $\mathcal{N}_1(f * g) \leq \mathcal{N}_1(|f| * |g|) = \mathcal{N}_1(f) \mathcal{N}_1(g)$.

Demostración:

De (1): Ya se sabe que la función $(x, y) \mapsto f(y)g(x-y)$ es medible (ver la proposición anterior). Como

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|dy \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|dx = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|dy\right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(z)|dz\right) < \infty$$

haciendo el cambio de variable $x = y + z$ y por ser f, g integrables, entonces la función $(x, y) \mapsto f(y)g(x-y)$ es integrable en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Por el teorema de Fubini, la función $y \mapsto f(y)g(x-y)$ es integrable para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$, lo cual prueba el primer inciso.

De (2): Además, por Fubini nuevamente, la función $x \mapsto f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy$ definida c.t.p. en \mathbb{R}^n también es integrable, lo cual prueba el segundo inciso.

De (3): Y, por Fubini:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dx dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)dy \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)dy \int_{\mathbb{R}^n} g(u)du \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)dy\right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(u)du\right)
\end{aligned}$$

lo cual prueba el tercer inciso.

De (4): Aplicando (3) a $|f|, |g|$, resulta que:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N}_1(f * g) &= \int_{\mathbb{R}^n} |f * g|(x) dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x - y) dy \right| dx \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y) g(x - y)| dx dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} (|f| * |g|)(x) dx \\
 &= \mathcal{N}_1(|f| * |g|) \\
 &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f| \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g| \right) \\
 &= \mathcal{N}_1(f) \mathcal{N}_1(g)
 \end{aligned}$$

lo cual prueba el cuarto inciso. ■

Observación 2.2.2

Se tiene lo siguiente:

1. La existencia y el valor de la convolución dependen solamente de las clases de equivalencia de f y g , se puede pues considerar la convolución como una aplicación de $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \times L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ en $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, tal que:

$$\mathcal{N}_1(f * g) \leq \mathcal{N}_1(f) \mathcal{N}_1(g)$$

2. Es claro que:

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) * g = \alpha_1 (f_1 * g) + \alpha_2 (f_2 * g)$$

y

$$f * (\beta_1 g_1 + \beta_2 g_2) = \beta_1 (f * g_1) + \beta_2 (f * g_2)$$

o sea, que la convolución es un aplicación bilineal y asociativa.

Definición 2.2.2

Un **Álgebra de Banach** es un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$ provisto de un producto $(x, y) \mapsto x \cdot y$. Este producto es bilineal y, además,

$$\|x \cdot y\| \leq \|x\| \|y\|$$

si el producto es conmutativo, se dice que el álgebra de Banach es **conmutativa**.

Ejercicio 2.2.1

En un álgebra de Banach, la función $(x, y) \mapsto x \cdot y$ es continua del espacio normado producto $E \times E$ en E .

Demostración:

Sean $\varepsilon > 0$ y $(x_0, y_0) \in E \times E$. Tomemos $\delta = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2(\|x_0\|+1)}, \frac{\varepsilon}{2(\|y_0\|+1)}, 1 \right\} > 0$, entonces, si $(x, y) \in E \times E$ es tal que:

$$\|(x_0, y_0) - (x, y)\| < \delta$$

entonces,

$$\|x_0 - x\| < \delta \quad \text{y} \quad \|y_0 - y\| < \delta \Rightarrow \|y\| < 1 + \|y_0\|$$

luego, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\|x_0 \cdot y_0 - x \cdot y\| &= \|x_0 \cdot y_0 - x_0 \cdot y + x_0 \cdot y - x \cdot y\| \\
&\leq \|x_0 \cdot (y_0 - y)\| + \|(x_0 - x) \cdot y\| \\
&\leq \|x_0\| \|y_0 - y\| + \|x_0 - x\| \|y\| \\
&< \|y_0 - y\| (\|x_0\| + 1) + \|x_0 - x\| (\|y_0\| + 1) \\
&< \frac{\varepsilon}{2(\|x_0\| + 1)} (\|x_0\| + 1) + \frac{\varepsilon}{2(\|y_0\| + 1)} (\|y_0\| + 1) \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

por tanto, $(x, y) \mapsto x \cdot y$ es continua en $(x_0, y_0) \in E \times E$. Por ser este elemento de $E \times E$ arbitrario, se sigue que es continua en todo $E \times E$. ■

Ejemplo 2.2.3

Considere \mathbb{K} como espacio vectorial sobre sí mismo con la norma usual y, provisto de la multiplicación usual en \mathbb{K} , es un álgebra de Banach conmutativa con elemento uno.

Ejemplo 2.2.4

Sea S un conjunto no vacío. El espacio vectorial $\mathcal{B}(S, \mathbb{K})$ de las funciones acotadas de S en \mathbb{K} , provisto de la norma uniforme $\|\cdot\|_\infty$ y con la multiplicación definida puntualmente, es un álgebra de Banach conmutativa con elemento uno (la función constante de valor uno).

Ejemplo 2.2.5

Sea S un espacio métrico. El subespacio $\mathcal{BC}(S, \mathbb{K})$ de las funciones continuas y acotadas de S en \mathbb{K} es una sub-álgebra de Banach del ejemplo anterior con elemento uno.

Ejemplo 2.2.6

El subespacio $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ de las funciones continuas nulas en infinito es una sub-álgebra de Banach de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ sin elemento uno.

Ejemplo 2.2.7

Sea E un espacio de Banach. El espacio normado $\text{End}(E)$ de todos los endomorfismos continuos de E provisto del producto $(A, B) \mapsto A \circ B$ es un álgebra de Banach no conmutativa con elemento uno.

Ejemplo 2.2.8

$L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ provisto de la convolución también es un álgebra de Banach conmutativa (¿con elemento identidad?).

2.3. Convolución en \mathcal{L}_p

Teorema 2.3.1 (Desigualdad de Hölder Generalizada)

Sean p_1, \dots, p_m números positivos tales que:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_m} = 1$$

entonces, si $f_1 \in \mathcal{L}_{p_1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, $f_2 \in \mathcal{L}_{p_2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, ..., $f_m \in \mathcal{L}_{p_m}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, entonces $f_1 \cdot f_2 \cdots f_m \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, y

$$\mathcal{N}_1(f_1 \cdot f_2 \cdots f_m) \leq \mathcal{N}_{p_1}(f_1) \mathcal{N}_{p_2}(f_2) \cdots \mathcal{N}_{p_m}(f_m)$$

Demostración:

Procederemos por inducción sobre $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. El caso $n = 2$ es inmediato de la desigualdad de Hölder clásica.

Suponga que el resultado se cumple para algún $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Veamos que se cumple para $m + 1$. En efecto, sean $f_1 \in \mathcal{L}_{p_1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, $f_2 \in \mathcal{L}_{p_2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, ..., $f_{m+1} \in \mathcal{L}_{p_{m+1}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ con p_1, \dots, p_{m+1} números positivos tales que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_{m+1}} &= 1 \\ \Rightarrow \frac{1}{p_{m+1}^*} &= 1 - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_m} \end{aligned}$$

afirmamos que $f_1 \cdots f_m \in \mathcal{L}_{p_{m+1}^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. En efecto, observemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} ||$$

■

Proposición 2.3.1

Si $f : \mathbb{R}^{p+q} \rightarrow \mathbb{K}$ es medible, se cumple lo siguiente:

1. Para casi toda $x \in \mathbb{R}^p$, la función $f_x(y) = f(x, y)$ de \mathbb{R}^q en \mathbb{K} es medible.
2. Si para casi toda $x \in \mathbb{R}^p$, la función f_x es integrable en \mathbb{R}^q , entonces:

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f_x = \int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) dy$$

definida c.t.p. es medible.

Teorema 2.3.2 (Teorema de Young)

Sean $p, q \in [1, \infty[$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$ y defina r como sigue:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$$

Entonces, si $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y $g \in \mathcal{L}_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, se cumple lo siguiente:

1. Para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$, existe la convolución $f * g$, es decir:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)dy$$

para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$.

$$2. f * g \in \mathcal{L}_r(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}).$$

$$3. \mathcal{N}_r(f * g) \leq \mathcal{N}_p(f) \mathcal{N}_q(g).$$

Demostración:

Observemos primero que los números p, q, r satisfacen lo siguiente:

$$r > 1, \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{r} \geq 0, \quad \frac{1}{q} - \frac{1}{r} \geq 0$$

En efecto,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \leq 2 - 1 = 1 \Rightarrow r \geq 1$$

las otras dos son inmediatas, ya que:

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{r} > 1 - \frac{1}{q} \geq 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{q} - \frac{1}{r} > 1 - \frac{1}{p} \geq 0$$

Se verá que para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$, la función $y \mapsto f(y)g(x-y)$ es integrable en \mathbb{R}^n . Por un teorema anterior, ya se sabe que dicha función es medible. Escriba

$$|f(y)||g(x-y)| = (|f(y)|^p |g(x-y)|^q)^{\frac{1}{r}} (|f(y)|^p)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} (|g(x-y)|^q)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}$$

Para probar el resultado, se probarán dos casos:

1. $p > 1$ y $q > 1$ En este caso, $\frac{1}{p} - \frac{1}{r} > 0$ y $\frac{1}{q} - \frac{1}{r} > 0$. Si

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{r}, \quad \frac{1}{\beta} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r}, \quad \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{r}$$

entonces,

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 1$$

La función $y \mapsto (|f(y)|^p |g(x-y)|^q)^{\frac{1}{r}}$ está en $\mathcal{L}_\alpha(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ (pues, existe la convolución $|f|^p * |g|^q(x)$ para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$). También, $y \mapsto (|f(y)|^p)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}$ está en $\mathcal{L}_\beta(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y $y \mapsto (|g(x-y)|^q)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}$ está en $\mathcal{L}_\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$.

Por Hölder generalizado, se tiene que $y \mapsto |f(y)||g(x-y)|$ es integrable, en particular, existe la convolución $f * g$, lo que prueba (1). Además,

$$\begin{aligned} |f * g|(x) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)||g(x-y)| dy \\ &\leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p |g(x-y)|^q dy \right]^{\frac{1}{r}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p dy \right]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^q dy \right]^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} \\ &= [|f|^p * |g|^q(x)]^{\frac{1}{r}} \mathcal{N}_p(f)^{1-\frac{p}{r}} \mathcal{N}_q(g)^{1-\frac{q}{r}} \end{aligned}$$

luego,

$$|f * g|^r(x) \leq \mathcal{N}_p(f)^{r-p} \mathcal{N}_q(g)^{r-q} (|f|^p * |g|^q(x))$$

por el teorema anterior (el cual asegura que $|f|^p * |g|^q$ es integrable), implica que $|f| * |g| \in \mathcal{L}_3(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, lo cual prueba (2).

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_r(f * g)^r &= \int_{\mathbb{R}^n} |f * g(x)|^r dx \\
&\leq \mathcal{N}_p(f)^{r-q} \mathcal{N}_q(g)^{r-p} \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p * |g|^q(x) dx \\
&= \mathcal{N}_p(f)^{r-q} \mathcal{N}_q(g)^{r-p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g|^q \right) \\
&= \mathcal{N}_p(f)^{r-q} \mathcal{N}_q(g)^{r-p} \mathcal{N}_p(f)^p \mathcal{N}_q(g)^q \\
&= (\mathcal{N}_p(f) \mathcal{N}_q(g))^r \\
\Rightarrow \mathcal{N}_r(f * g) &\leq \mathcal{N}_p(f) \mathcal{N}_q(g)
\end{aligned}$$

2. $p > 1$, $q = 1$. En este caso, $r = p$, luego se sigue que:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{r} = \frac{1}{p}, \quad \frac{1}{\beta} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r} = 0, \quad \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{r} = \frac{1}{p^*}$$

Luego, si $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
|f(y)| |g(x-y)| &= (|f(y)|^p |g(x-y)|^q)^{\frac{1}{r}} (|f(y)|^p)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} (|g(x-y)|^q)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}} \\
&= (|f(y)|^p |g(x-y)|)^{\frac{1}{p}} (|f(y)|^p)^0 (|g(x-y)|^q)^{\frac{1}{p^*}} \\
&= (|f(y)|^p |g(x-y)|)^{\frac{1}{p}} (|g(x-y)|^q)^{\frac{1}{p^*}}
\end{aligned}$$

Como $y \mapsto (|f(y)|^p |g(x-y)|)^{\frac{1}{p}}$ está en $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ (pues existe $|f|^p * |g|(x)$ para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$) y $y \mapsto (|g(x-y)|^q)^{\frac{1}{p^*}}$ está en $\mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, entonces por Hölder y la ecuación anterior, se sigue que $y \mapsto |f(y)g(x-y)|$ es integrable en \mathbb{R}^n , luego existe $|f| * |g|(x)$ para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$, lo que prueba (1). Además,

$$\begin{aligned}
|f * g|(x) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| |g(x-y)| dy \\
&\leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p |g(x-y)| dy \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)| dy \right]^{\frac{1}{p^*}} \\
&= [|f|^p * |g|(x)]^{\frac{1}{p}} \mathcal{N}_1(g)^{\frac{1}{p^*} = 1 - \frac{1}{p^*}} \\
\Rightarrow |f * g|^p(x) &\leq [|f|^p * |g|(x)] \mathcal{N}_1(g)^{1-p}
\end{aligned}$$

luego, $f * g \in \mathcal{L}_r(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ (recuerde que $r = p$) lo cual prueba (2), y

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f * g|^p(x) dx &\leq \mathcal{N}_1(g)^{p-1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g| \right) \\
&\leq \mathcal{N}_1(g)^{p-1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \right) \mathcal{N}_1(g) \\
&\leq \mathcal{N}_p(f)^p \mathcal{N}_1(g)^p
\end{aligned}$$

lo cual prueba (3).

El caso $p = q = 1$ es el teorema anterior, y por la conmutatividad de la convolución, no es necesario probar el caso $q = 1$, $p > 1$. ■

Observación 2.3.1

El caso $q = 1$ y $r = p$ es importante, dice: Si $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ entonces, para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$ existe $f * g(x) \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y $\mathcal{N}_p(f * g) \leq \mathcal{N}_p(f) \mathcal{N}_1(g)$.

Teorema 2.3.3

Fije $p \in [1, \infty]$. Si $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y $g \in \mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ entonces, para toda $x \in \mathbb{R}^n$ (no solamente para casi toda x) existe $f * g(x)$, $f * g$ es medible acotada y:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f * g(x)| \leq \mathcal{N}_p(f) \mathcal{N}_{p^*}(g)$$

Demostración:

La función $y \mapsto f(y)$ está en $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $y \mapsto g(x - y)$ está en $\mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Entonces, $y \mapsto f(y)g(x - y)$ es integrable, luego existe $f * g(x)$ y, por Hölder:

$$\begin{aligned} |f * g(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)||g(x - y)|dy \\ &= \mathcal{N}_p(f) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x - y)|^{p^*} dy \right)^{1/p^*} \\ &= \mathcal{N}_p(f) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(z)|^{p^*} dz \right)^{1/p^*} \text{ por T.C.V. con } z = x - y \\ &\leq \mathcal{N}_p(f) \mathcal{N}_{p^*}(g) \end{aligned}$$

Esto prueba que $f * g$ es acotada y, tomando supremos:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f * g(x)| \leq \mathcal{N}_p(f) \mathcal{N}_{p^*}(g)$$

además, por un resultado anterior, $f * g$ es medible. ■

Observación 2.3.2

Recuerde que si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ entonces, para cada $h \in \mathbb{R}^n$ la función $f_h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ dada por $f_h(x) = f(x + h)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ es medible.

Lema 2.3.1

Sea $p \in [1, \infty[$, $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Entonces, para cada $h \in \mathbb{R}^n$, $f_h \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y $\mathcal{N}_p(f_h) = \mathcal{N}_p(f)$. Además, la aplicación $h \mapsto f_h$ de \mathbb{R}^n en $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ es uniformemente continua en \mathbb{R}^n .

Demostración:

Se tienen que probar varias cosas:

1. Por el teorema de cambio de variable, para todo $h \in \mathbb{R}^n$, f_h es medible y

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p dy = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x + h)|^p dy = \int_{\mathbb{R}^n} |f_h(y)|^p dy$$

por tanto, $f_h \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y, más aún, $\mathcal{N}_p(f) = \mathcal{N}_p(f_h)$.

2. Se prueba que si $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, entonces $h \mapsto g_h$ de \mathbb{R}^n en el subespacio denso $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ en $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ es uniformemente continua.

Sea $\varepsilon > 0$ y $K = \text{Spt}(K)$. Entonces, K es compacto en \mathbb{R}^n . Existe un rectángulo acotado con medida positiva $P \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $K \subseteq \overset{\circ}{P}$.

Sea $\|\cdot\|$ una norma de \mathbb{R}^n y d la correspondiente distancia inducida. Entonces, $d(K, \mathbb{R}^n \setminus \overset{\circ}{P}) > 0$. Como g es uniformemente continua en \mathbb{R}^n (pues es continua en un conjunto compacto, a saber, \overline{P} y fuera de este conjunto es nula) existe $0 < \delta < d(K, \mathbb{R}^n \setminus \overset{\circ}{P})$ tal que:

$$x_1, y_1 \in \mathbb{R}^n, \|x_1 - y_1\| < \delta \Rightarrow |g(x_1) - g(y_1)| < \frac{\varepsilon}{(\text{Vol}(P))^{1/p}}$$

Sean $s, t \in \mathbb{R}^n$ tales que $\|s - t\| < \delta$. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_p(g_s - g_t) &= \left[\int_{\mathbb{R}^n} |g(x + s) - g(x + t)|^p dx \right]^{1/p} \\ &= \left[\int_{\mathbb{R}^n} |g(y + s - y) - g(y)|^p dy \right]^{1/p} \end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $x = y - t$ y, como para $y \in \mathbb{R}^n \setminus \overset{\circ}{P}$ se tiene que $y + s - t \notin K$ (pues, $\|s - t\| < d(K, \mathbb{R}^n \setminus \overset{\circ}{P})$) luego, el integrando se anula fuera de P . Se sigue que:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_p(g_s - g_t) &= \left[\int_P |g(y + s - y) - g(y)|^p dy \right]^{1/p} \\ &= \left[\int_P \left| \frac{\varepsilon}{(\text{Vol}(P))^{1/p}} \right|^p dy \right]^{1/p} \\ &= \left[\int_P \frac{\varepsilon^p}{(\text{Vol}(P))} dy \right]^{1/p} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

lo que prueba el resultado.

3. Sea $\varepsilon > 0$. Existe $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ tal que:

$$\mathcal{N}_p(f - g) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Por (2), existe $\delta > 0$ tal que:

$$s, t \in \mathbb{R}^n, \|s - t\| < \delta \Rightarrow \mathcal{N}_p(g_s - g_t) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Dados $s, t \in \mathbb{R}^n$ tales que $\|s - t\| < \delta$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_p(f_s - f_t) &\leq \mathcal{N}_p(f_s - g_s) + \mathcal{N}_p(g_s - g_t) + \mathcal{N}_p(g_t - f_t) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

lo cual prueba la continuidad uniforme de $h \mapsto f_h$.

■

Proposición 2.3.2

Fije $p \in [1, \infty]$. Si $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y $g \in \mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, entonces $f * g$ es uniformemente continua en \mathbb{R}^n .

Demostración:

Se puede suponer que, por ejemplo, $p^* < \infty$. Por Hölder, para todo $s, t \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} |f * g(s) - f * g(t)| &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)[g(s-y) - g(t-y)]| dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| |g(s-y) - g(t-y)| dy \\ &\leq \mathcal{N}_p(f) \left[\int_{\mathbb{R}^n} |g(s-y) - g(t-y)|^{p^*} dy \right]^{1/p^*} \\ &\leq \mathcal{N}_p(f) \left[\int_{\mathbb{R}^n} |g(s+x) - g(t+x)|^{p^*} dx \right]^{1/p^*} \\ &= \mathcal{N}_p(f) \mathcal{N}_{p^*}(g_s - g_t) \end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $y = -x$. Por la continuidad uniforme de $h \mapsto f_h$, se tiene que $f * g$ también debe ser uniformemente continua. En efecto, sea $\varepsilon > 0$, como $h \mapsto g_h$ es uniformemente continua, (usando el teorema anterior y ya que $p^* < \infty$), existe $\delta > 0$ tal que si $s, t \in \mathbb{R}^n$ son tales que:

$$\|s - t\| < \delta \Rightarrow \mathcal{N}_{p^*}(g_s - g_t) < \frac{\varepsilon}{\mathcal{N}_p(f) + 1}$$

Luego,

$$\|s - t\| < \delta \Rightarrow |f * g(s) - f * g(t)| < (\mathcal{N}_p(f) + 1) \cdot \frac{\varepsilon}{\mathcal{N}_p(f) + 1} = \varepsilon$$

lo que prueba la continuidad uniforme de $f * g$. ■

Proposición 2.3.3

Fije $p \in]1, \infty[$. Si $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in \mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f * g(x) = 0$$

Demostración:

Fije una norma en \mathbb{R}^n , digamos $\|\cdot\|$. Sea $\varepsilon > 0$. Para cada $M > 0$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} |f * g(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| |g(x-y)| dy \\ &\leq \int_{\|y\| \leq M} |f(y)| |g(x-y)| dy + \int_{\|y\| > M} |f(y)| |g(x-y)| dy \\ &\leq \mathcal{N}_p(f) \left[\int_{\|y\| \leq M} |g(x-y)|^{p^*} dy \right]^{1/p^*} + \mathcal{N}_{p^*}(g) \left[\int_{\|y\| > M} |f(y)|^p dy \right]^{1/p} \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Por Lebesgue,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{\|y\| > M} |f(y)|^p dy = 0$$

Entonces, existe $M > 0$ tal que

$$\left[\int_{\|y\| > M} |f(y)|^p dy \right]^{1/p} < \frac{\varepsilon}{1 + \mathcal{N}_p(f) + \mathcal{N}_{p^*}(g)}$$

Por el cambio de variable $y = x - z$, resulta lo siguiente:

$$\int_{\|y\| \leq M} |g(x - y)|^{p^*} dy = \int_{\|x - z\| \leq M} |g(z)|^{p^*} dz$$

Se sigue también del teorema de Lebesgue que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\|z\| > R} |g(z)|^{p^*} dz = 0$$

Entonces, para $\varepsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que si $\|z\| > R$, entonces:

$$\int_{\|z\| > R} |g(z)|^{p^*} dz < \frac{\varepsilon}{1 + \mathcal{N}_p(f) + \mathcal{N}_{p^*}(g)}$$

Ahora, como

$$\left\{ z \in \mathbb{R}^n \mid \|x - z\| \leq M \right\} \subseteq \left\{ z \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| - M \leq \|z\| \right\}$$

tomando $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x\| > R + M$, se sigue que:

$$\int_{\|x - z\| \leq M} |g(z)|^{p^*} dz \leq \int_{\|z\| > R} |g(z)|^{p^*} dz < \frac{\varepsilon}{1 + \mathcal{N}_p(f) + \mathcal{N}_{p^*}(g)}$$

Por tanto, tomando $\|x\| > R + M$ se sigue que:

$$\begin{aligned} |f * g(x)| &\leq [\mathcal{N}_p(f) + \mathcal{N}_{p^*}(g)] \cdot \frac{\varepsilon}{1 + \mathcal{N}_p(f) + \mathcal{N}_{p^*}(g)} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f * g(x) = 0$$

■

Observación 2.3.3

El resultado anterior no se generaliza al caso $p > 1$ y $p^* = \infty$. En efecto, si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ con $\int_{\mathbb{R}^n} f \neq 0$ y $g = \chi_{\mathbb{R}^n}$, entonces:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)dy \neq 0$$

la cual no es nula en el infinito.

Proposición 2.3.4

Si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y $g \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ es tal que

$$\lim_{y \rightarrow \infty} g(y) = 0$$

entonces,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f * g(x) = 0$$

Demostración:

Por Hölder tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
|f * g(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| |g(y)| dy \\
&= \int_{\|y\| \leq M} |f(x-y)| |g(y)| dy + \int_{\|y\| > M} |f(x-y)| |g(y)| dy \\
&\leq \mathcal{N}_\infty(g) \int_{\|y\| \leq M} |f(x-y)| dy + \mathcal{N}_1(f) \sup_{\|y\| > M} |g(y)|
\end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Existe $M > 0$ tal que:

$$\sup_{\|y\| > M} |g(y)| < \frac{\varepsilon}{1 + \mathcal{N}_1(f) + \mathcal{N}_\infty(g)}$$

lo cual sucede, ya que $\lim_{y \rightarrow \infty} g(y) = 0$. Ahora, se tiene que:

$$\int_{\|y\| \leq M} |f(x-y)| dy = \int_{\|x-z\| \leq M} |f(z)| dz$$

Por Lebesgue, existe $R > 0$ tal que:

$$\int_{\|z\| > R} |f(z)| dz < \frac{\varepsilon}{1 + \mathcal{N}_1(f) + \mathcal{N}_\infty(g)}$$

si $\|x\| > R + M$, entonces:

$$\begin{aligned}
\int_{\|y\| \leq M} |f(x-y)| dy &\leq \int_{\|z\| > R} |f(z)| dz \\
&< \frac{\varepsilon}{1 + \mathcal{N}_1(f) + \mathcal{N}_\infty(g)}
\end{aligned}$$

Por tanto, si $\|x\| > R + M$:

$$\begin{aligned}
|f * g(x)| &\leq [\mathcal{N}_1(f) + \mathcal{N}_\infty(g)] \cdot \frac{\varepsilon}{1 + \mathcal{N}_1(f) + \mathcal{N}_\infty(g)} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

lo cual prueba el resultado. ■

2.4. Convolución y diferenciación

Proposición 2.4.1

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ es integrable (está en \mathcal{L}_1) y $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ es de clase C^r de tal suerte que g y todas sus derivadas parciales hasta el orden r (incluye) son acotadas, entonces $f * g$ es de clase C^r .

Además, si $D = \partial_{\alpha_1} \cdots \partial_{\alpha_k}$ con $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \{1, \dots, n\}$ y $k \in \{1, \dots, r\}$, se tiene:

$$D(f * g) = f * Dg$$

Demostración:

Como $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y $g \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, entonces existen $f * g$ y $f * Dg$ (pues, tanto g como Dg son acotadas) en todo punto de \mathbb{R}^n .

Se afirma que $D(f * g) = f * Dg$. Procederemos por inducción sobre k , basta probar que

$$\partial_{\alpha_k}(f * g) = (f * \partial_{\alpha_k}g)$$

(si se puede para una derivada parcial, se puede continuar con las demás derivadas parciales para obtener el operador D). Se tiene que:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)dy$$

y

$$(f * \partial_{\alpha_k}g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\partial_{\alpha_k}g(x - y)dy$$

Si $M = \sup_{z \in \mathbb{R}^n} |\partial_{\alpha_k}g(z)|$, entonces

$$|f(y)\partial_{\alpha_k}g(x - y)| \leq M|f(y)|, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

donde la función de la derecha es integrable e independiente de x . Por el teorema de derivación de funciones definidas por integrales, existe $\partial_{\alpha_k}(f * g)$ y su valor es:

$$\partial_{\alpha_k}(f * g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\partial_{\alpha_k}g(x - y)dy = (f * \partial_{\alpha_k}g)(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. ■

Definición 2.4.1

Se dice que una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ es **localmente integrable**, si f es integrable en todo compacto de \mathbb{R}^n . Se denota por $\mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ al espacio vectorial de estas funciones.

Observación 2.4.1

Toda función integrable es localmente integrable, pero no viceversa. En particular, $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \subseteq \mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y, en particular, todos los polinomios están en $\mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$.

Podemos entonces definir al espacio $\mathcal{L}_p^{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ de todas las funciones tales que su módulo a la p están en $\mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Pero, en particular se tendría que:

$$\mathcal{L}_p^{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \subseteq \mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$$

para todo $p \in [1, \infty[$.

Proposición 2.4.2

Si $f \in \mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y $g \in \mathcal{C}_c^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, entonces $f * g$ existe en todo punto de \mathbb{R}^n , es de clase C^r (g es de clase C^r) y para todo $D = \partial_{\alpha_1} \cdots \partial_{\alpha_k}$, con $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \{1, \dots, n\}$ y $k \in \{1, \dots, r\}$, se tiene:

$$D(f * g) = f * D(g)$$

Demostración:

Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ el soporte de g (el cual es compacto). Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, existe la integral:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy$$

Esa integral es no cero si $x - y \in K$, es decir si $y \in x - K$. Por ende:

$$f * g(x) = \int_{x-K} f(y)g(x-y)dy$$

el conjunto $x - K$ es compacto. Como f es localmente integrable, es integrable en $x - K$ y g es medible acotada, luego está en $\mathcal{L}_\infty^{loc}(x - K, \mathbb{K})$.

Sea $\|\cdot\|$ una norma en \mathbb{R}^n . Entonces:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{f(y)\chi_{x-K}(y)}_{\in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})} g(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f_1(y)g(x-y)dy$$

no se puede usar directamente el teorema de derivación, ya que $f_1(y) = f(y)\chi_{x-K}(y)$ depende de x . Para ello, sea $R > 0$ y

$$B'_R = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq R \right\}$$

Para cada $x \in B'_R$, $x - K \subseteq B'_R + (-K)$ y:

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy \\ &= \int_{B'_R + (-K)} f(y)g(x-y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} [f(y)\chi_{B'_R + (-K)}(y)] g(x-y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f_1(y)g(x-y)dy \\ &= f_1 * g(x) \end{aligned}$$

para todo $x \in B'_R$. Por la proposición anterior, $f_1 * g$ es de clase C^r en \mathbb{R}^n , luego $f * g$ es de clase C^r en B'_R . Además, para cada $x \in B'_R$,

$$D(f * g)(x) = D(f_1 * g)(x) = (f_1 * Dg)(x)$$

y

$$\begin{aligned} (f_1 * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f_1(y)Dg(x-y)dy \\ &= \int_{B'_R + (-K)} f(y)Dg(x-y)dy \\ &= \int_{x-K} f(y)Dg(x-y)dy \\ &= f * Dg(x) \\ \Rightarrow D(f * g)(x) &= f * Dg(x) \end{aligned}$$

pues, Dg es nula fuera de K . Como el $R > 0$ fue arbitrario, se sigue que el resultado anterior es válido para todo $x \in \mathbb{R}^n$. ■

Definición 2.4.2

Sea $p \in [1, \infty[$ y $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$. Se dice que $f \in \mathcal{L}_p^{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ si la restricción de f a cada compacto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ pertenece a $\mathcal{L}_p(C, \mathbb{K})$.

Observación 2.4.2

Es claro que si $f \in \mathcal{L}_p^{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, entonces $f \in \mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ (pues, para todo compacto $C \subseteq \mathbb{R}^n$, se tiene que $\mathcal{L}_p(C, \mathbb{K}) \subseteq \mathcal{L}_1(C, \mathbb{K})$). Y $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \subseteq \mathcal{L}_p^{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$

Así pues, el último resultado es válido con la hipótesis alternativa de que $f \in \mathcal{L}_p^{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, en particular, de que $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$

2.5. Sucesiones de Dirac

El álgebra de Banach $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ no posee elemento uno, es decir, no existe $\delta \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ tal que

$$f * \delta = f \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n \quad \forall f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$$

tampoco existe $\delta \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ tal que:

$$f * \delta = f \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n \quad \forall f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$$

Demostración:

En efecto, suponga que exista tal $\delta > 0$. Sea $P \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectángulo acotado tal que $\overset{\circ}{P} \neq \emptyset$. Se sabe que

$$\delta * \chi_P = \chi_P \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n$$

por un resultado anterior, $\delta * \chi_P$ es una función continua en \mathbb{R}^n ($\delta \in \mathcal{L}_1$ y $\chi_P \in \mathcal{L}_\infty$). Entonces:

$$\delta * \chi_P = \chi_P = 1 \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n$$

como ambas son continuas, entonces:

$$\delta * \chi_P(x) = \chi_P(x) = 1, \quad \forall x \in \overset{\circ}{P}$$

y

$$\delta * \chi_P(x) = \chi_P(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{P}$$

esto contradeciría la continuidad de $\delta * \chi_P$ en \mathbb{R}^n . ■

Las sucesiones de Dirac hacen el papel del elemento uno.

Definición 2.5.1

Una sucesión $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ se dice que es una **sucesión de Dirac** si satisface lo siguiente:

- I. $\rho_\nu \geq 0$ para todo $\nu \in \mathbb{N}$.
- II. $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\nu = 1$, para todo $\nu \in \mathbb{N}$.
- III. Para todo $\delta > 0$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{\|x\| < \delta} \rho_\nu(x) dx = 1$.

usar (ii) y (iii), (iii) es equivalente a:

- IV. Para todo $\delta > 0$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{\|x\| \geq \delta} \rho_\nu(x) dx = 0$.

Esta definición es independiente de la norma elegida.

Ejemplo 2.5.1

Considere la sucesión de picos (especificar). Para todo $\nu \in \mathbb{N}$, ρ_ν es la función cuya gráfica es triangular de base $[\frac{1}{\nu}, -\frac{1}{\nu}]$ sobre el eje x y cuyo vértice está en el punto $(0, \nu)$ sobre el eje y y que es cero fuera del intervalo.

Entonces, $\{\rho_\nu\}$ es una sucesión de dirac en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Ejemplo 2.5.2

Sea $\delta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función no negativa tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\nu = 1$. Para cada $\nu \in \mathbb{N}$ se define:

$$\rho_\nu(x) = \nu^n \rho(\nu x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Entonces, $\{\rho_\nu\}$ es una sucesión de Dirac en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$.

Claramente cumple (i). Para (ii), veamos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\nu(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \nu^n \rho(\nu x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(y) dy = 1$$

haciendo el cambio de variable $x = \frac{y}{\nu}$ de Jacobiano $\frac{1}{\nu^n}$.

De (iii). Por el mismo cambio de variable:

$$\int_{\|x\| > \delta} \rho_\nu(x) dx = \nu^n \int_{\|x\| > \delta} \rho(\nu x) dx = \int_{\|y\| > \nu\delta} \rho(y) dy \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0$$

por el Teorema de Lebesgue. Luego, $\{\rho_\nu\}$ es una sucesión de Dirac.

2.5.1. Convolución de sucesiones de Dirac con funciones en \mathcal{L}_p , $1 \leq p < \infty$

Teorema 2.5.1 (Desigualdad de Jensen)

Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\rho : E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\rho \geq 0$, para todo $x \in E$, ρ integrable en E y

$$\int_E \rho = 1$$

Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo en \mathbb{R} , $f : E \rightarrow I$ una función y $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa. Si $f \cdot \rho$ y $(\varphi \circ f)\rho$ son integrables en E , entonces

$$\int_E f \cdot \rho \in I$$

y

$$\varphi \left(\int_E f \cdot \rho \right) \leq \int_E (\varphi \circ f) \rho$$

Demostración:

Se probarán dos cosas:

1. Veamos que $\int_E f \cdot \rho \in I$. En efecto, analicemos por casos:

- i) Suponga que para algún $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq \alpha$, para todo $x \in E$ (en este caso, se tiene que I es cerrado por la izquierda). Entonces, $f(x)\rho(x) \geq \alpha\rho(x)$ para todo $x \in E$, luego

$$\int_E f \cdot \rho \geq \int_E \alpha \rho = \alpha$$

Suponga ahora que $f(x) > \alpha$, para todo $x \in E$ (en este caso, se tiene que I es abierto por la izquierda). Entonces

$$\int_E f \cdot \rho \geq \alpha$$

si $\int_E f \cdot \rho = \alpha$, debe suceder entonces que $\int_E (f \cdot \rho - \alpha\rho) = 0$, por lo cual $f \cdot \rho - \alpha\rho = 0$ c.t.p. en E , de donde $f(x) - \alpha = 0$ para casi toda $x \in S$, donde

$$S = \left\{ y \in E \mid \rho(y) > 0 \right\}$$

Como $m(S) > 0$ ya que $\int_E \rho = \int_S \rho = 1$, entonces existe $x_0 \in E$ tal que $f(x_0) = \alpha$, lo cual contradice el hecho de que $f(x) > \alpha$ para toda $x \in E$. Por tanto:

$$\int_E f \cdot \rho > \alpha$$

- ii) De forma análoga al inciso anterior, se prueba que si $f(x) \leq \beta$ para toda $x \in E$, entonces $\int_E f \cdot \rho \leq \beta$ y, si $f(x) < \beta$ para toda $x \in E$, entonces $\int_E f \cdot \rho < \beta$

por los dos incisos anteriores, se concluye que $\int_E f \cdot \rho \in I$.

2. Defina $c = \int_E f \cdot \rho \in I$. Se tienen dos casos:

- i) Suponga que $c \in \overset{\circ}{I}$. Como φ es convexa en I , si $s, t \in I$ son tales que $s < c < t$, entonces:

$$\frac{\varphi(c) - \varphi(s)}{c - s} \leq \frac{\varphi(t) - \varphi(c)}{t - c}$$

sea $\alpha = \sup \left\{ \frac{\varphi(c) - \varphi(s)}{c - s} \mid s < c \right\}$. Entonces si $s \in I$,

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(c) - \varphi(s)}{c - s} &\leq \alpha, \quad \forall s < c \\ \Rightarrow \varphi(c) + \alpha \cdot (s - c) &\leq \varphi(s), \quad \forall s \leq c \end{aligned}$$

Como $t \in I$ es tal que $c < t$, entonces por ser α el supremo, debe suceder que

$$\begin{aligned} \alpha &\leq \frac{\varphi(t) - \varphi(c)}{t - c}, \quad \forall t > c \\ \Rightarrow \varphi(c) + \alpha \cdot (t - c) &\leq \varphi(t), \quad \forall t \geq c \end{aligned}$$

Por tanto, de las dos desigualdades anteriores, se sigue que:

$$\varphi(c) + \alpha \cdot (u - c) \leq \varphi(u), \quad \forall u \in I$$

como $f(x) \in I$ para todo $x \in E$, se sigue que:

$$\begin{aligned} \varphi(c) + \alpha \cdot (f(x) - c) &\leq \varphi(f(x)), \quad \forall x \in E \\ \Rightarrow \varphi(c)\rho(x) + \alpha \cdot (f(x) - c)\rho(x) &\leq \varphi(f(x))\rho(x), \quad \forall x \in E \end{aligned}$$

de esta forma, integrando ambos lados:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \int_E \varphi(c)\rho(x)dx + \int_E \alpha \cdot (f(x) - c)\rho(x)dx \leq \int_E \varphi(f(x))\rho(x)dx \\
&\Rightarrow \varphi(c) \int_E \rho(x)dx + \alpha \int_E (f(x) - c)\rho(x)dx \leq \int_E \varphi(f(x))\rho(x)dx \\
&\Rightarrow \varphi(c) \cdot 1 + \alpha \int_E f(x)\rho(x)dx - \alpha \cdot c \int_E \rho(x)dx \leq \int_E \varphi(f(x))\rho(x)dx \\
&\Rightarrow \varphi\left(\int_E f(x)\rho(x)dx\right) + \alpha \int_E f(x)\rho(x)dx - \alpha \cdot \int_E f(x)\rho(x)dx \leq \int_E \varphi(f(x))\rho(x)dx \\
&\Rightarrow \varphi\left(\int_E f(x)\rho(x)dx\right) \leq \int_E \varphi(f(x))\rho(x)dx
\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\varphi\left(\int_E f \cdot \rho\right) \leq \int_E (\varphi \circ f)\rho$$

que es lo que se quería probar.

- II) Suponga que $a = \int_E f \cdot \rho$ (en este caso, la integral coincide con el valor del extremo izquierdo del intervalo I), luego $a \in I$.

Se tiene entonces que $f(x) \geq a$ para todo $x \in E$. Luego, $\int_E (f-a)\rho = 0$, por ende $f(x) = a$ para casi todo $x \in S$, donde

$$S = \{x \in E \mid \rho(x) > 0\}$$

así pues

$$\begin{aligned}
\int_E (\varphi \circ f)\rho &= \int_S (\varphi \circ f)\rho \\
&= \int_S \varphi(a) \cdot \rho \\
&= \varphi(a) \int_S \rho \\
&= \varphi(a) \int_E \rho \\
&= \varphi(a) \\
&= \varphi\left(\int_E f \cdot \rho\right) \\
\Rightarrow \int_E (\varphi \circ f)\rho &= \varphi\left(\int_E f \cdot \rho\right)
\end{aligned}$$

lo que prueba el resultado.

- III) El caso $b = \int_E f \cdot \rho$ es análogo al anterior.

Por los incisos anteriores, se sigue el resultado de la prueba. ■

Observación 2.5.1

Note que $\int_E f \cdot \rho$ representa un promedio de los valores de f , por lo cual el hecho de que $a = \int_E f \cdot \rho$ sea un extremo del intervalo I implica que f debe tomar el valor constante a c.t.p. en E .

Ejemplo 2.5.3

Suponga que $I = [0, \infty[$ en el teorema anterior, luego f debe ser no negativa en E .

1. Si $\varphi(t) = t^p$, $t \geq 0$ con $p \geq 1$, la desigualdad de Jensen dice que

$$\left(\int_E f \cdot \rho \right)^p \leq \int_E f^p \cdot \rho$$

siempre que las integrales existan. La conclusión persiste si f es medible no negativa y $\int_E f \cdot \rho < \infty$ y $\int_E f^p \cdot \rho \leq \infty$.

2. Si $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$e^{\alpha \int_E f \cdot \rho} \leq \int_E e^{\alpha f} \rho$$

Igual que en caso anterior, si f es medible no negativa y $\int_E f \cdot \rho$, la conclusión persiste.

3. Si $m(E) = 1$ y ρ es tal que $\rho(x) = 1$ para todo $x \in E$, se tiene que:

$$\varphi \left(\int_E f(x) dx \right) \leq \int_E \varphi(f(x)) dx$$

Teorema 2.5.2

Sean $1 \leq p \leq \infty$ y $f \in L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Si $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ es una sucesión de Dirac en $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ entoces, $\{\rho_\nu * f\}_{\nu=1}^\infty$ converge a f en p -promedio.

Demostración:

Como $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ es una sucesión de Dirac, entonces

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \rho_\nu(y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

para todo $\nu \in \mathbb{N}$. Además,

$$f * \rho_\nu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \rho_\nu(x - y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) \rho_\nu(y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

para todo $\nu \in \mathbb{N}$. Por ende:

$$\begin{aligned} (f - f * \rho_\nu)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} (f(x) - f(x - y)) \rho_\nu(y) dy \\ \Rightarrow |(f - f * \rho_\nu)(x)|^p &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x) - f(x - y)) \rho_\nu(y) dy \right|^p \\ &\leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x - y)| \rho_\nu(y) dy \right]^p \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x - y)|^p \rho_\nu(y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ y } \forall \nu \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

donde la primera desigualdad es por desigualdad del triángulo, la segunda por desigualdad de Jensen, tomando $\varphi(t) = t^p$ para todo $t \geq 0$, tratando al segundo miembro como una función medible no negativa. Integrando respecto a $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_p(f - f * \rho_\nu)^p &\leq \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x - y)|^p \rho_\nu(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\nu(y) dy \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x - y)|^p dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\nu(y) \mathcal{N}_p(f - f_{-y})^p dy, \quad \forall \nu \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Donde $f_{-y}(x) = f(x-y)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Como la función $y \mapsto f_{-y}$ de \mathbb{R}^n en $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ es continua (pues es uniformemente continua), dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|y\| < \delta$ entonces

$$\mathcal{N}_p(f - f_{-y}) < \frac{\varepsilon}{2^{1/p}}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_p(f - f * \rho_\nu)^p &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\nu(y) \mathcal{N}_p(f - f_{-y})^p dy \\ &= \int_{\|y\| < \delta} \rho_\nu(y) \mathcal{N}_p(f - f_{-y})^p dy + \int_{\delta \leq \|y\|} \rho_\nu(y) \mathcal{N}_p(f - f_{-y})^p dy \\ &\leq \int_{\|y\| < \delta} \rho_\nu(y) \frac{\varepsilon^p}{2} dy + \int_{\delta \leq \|y\|} \rho_\nu(y) \mathcal{N}_p(f - f_{-y})^p dy \\ &= \frac{\varepsilon^p}{2} \int_{\|y\| < \delta} \rho_\nu(y) dy + \int_{\delta \leq \|y\|} \rho_\nu(y) \mathcal{N}_p(f - f_{-y})^p dy \\ &\leq \frac{\varepsilon^p}{2} + \int_{\delta \leq \|y\|} \rho_\nu(y) \mathcal{N}_p(f - f_{-y})^p dy, \quad \forall \nu \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

además,

$$\begin{aligned} \int_{\delta \leq \|y\|} \rho_\nu(y) \mathcal{N}_p(f - f_{-y})^p dy &\leq \int_{\delta \leq \|y\|} \rho_\nu(y) [\mathcal{N}_p(f) + \mathcal{N}_p(f_{-y})]^p dy \\ &= [2\mathcal{N}_p(f)]^p \int_{\delta \leq \|y\|} \rho_\nu(y) dy \\ &= 2^p \mathcal{N}_p(f)^p \int_{\delta \leq \|y\|} \rho_\nu(y) dy, \quad \forall \nu \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Como $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ es sucesión de Dirac, por (iv) se tiene que existe $\nu_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $\nu \geq \nu_0$, entonces:

$$2^p \mathcal{N}_p(f)^p \int_{\delta \leq \|y\|} \rho_\nu(y) dy < \frac{\varepsilon^p}{2}$$

Por tanto, si $\nu \geq \nu_0$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{N}_p(f - f * \rho_\nu)^p &\leq \frac{\varepsilon^p}{2} + 2^p \mathcal{N}_p(f)^p \int_{\delta \leq \|y\|} \rho_\nu(y) dy \\ &< \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} \\ &= \varepsilon^p \\ \Rightarrow \mathcal{N}_p(f - f * \rho_\nu) &< \varepsilon \end{aligned}$$

por ende,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{N}_p(f - f * \rho_\nu) = 0$$

lo que prueba el resultado. ■

Lema 2.5.1

Si $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ son funciones medibles de soporte compacto y $f * g$ está definida c.t.p. en \mathbb{R}^n entonces, $f * g$ tiene soporte compacto, más precisamente, existe un compacto en \mathbb{R}^n fuera del cual $f * g$ existe y se anula.

Demostración:

Notemos que $f * g(x)$ existe para algún $x \in \mathbb{R}^n$ si y sólo si existe y se cumple:

$$f + g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy = \int_{\text{Spt}(f)} f(y)g(x-y)dy$$

Se afirma que si $x \notin \text{Spt}(f) + \text{Spt}(g)$ entonces existe la convolución $f * g(x)$ y vale cero. En efecto, sea $x \notin \text{Spt}(f) + \text{Spt}(g)$ entonces, $x - y \notin \text{Spt}(g)$ para todo $y \in \text{Spt}(f)$. De donde:

$$\int_{\text{Spt}(f)} f(y)g(x-y)dy = 0, \quad \forall x \notin \text{Spt}(f) + \text{Spt}(g)$$

Por ende, $\text{Spt}(f * g) \subseteq \text{Spt}(f) + \text{Spt}(g)$. Note que $\text{Spt}(f * g)$ es un cerrado en un compacto (ya que la suma de dos compactos es compacto), luego compacto para el cual $f * g$ se anula. ■

Teorema 2.5.3

El $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ es denso en $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, para $1 \leq p < \infty$.

Demostración:

Sea $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función tal que

$$t \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-t}} & \text{si } t < 1 \\ 0 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

φ es continua de clase C^∞ en \mathbb{R} . Sea $\|\cdot\|$ la norma euclidea. Se define $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como $\rho(x) = 0$ si $\|x\| \geq 1$ y:

$$\rho(x) = \frac{e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}}}{\int_{\|y\| < 1} e^{-\frac{1}{1-\|y\|^2}} dy} \quad \text{si } \|x\| < 1$$

es decir, que $\rho(x) = c\varphi(\|x\|^2)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ con c constante. Es claro que ρ es de clase C^∞ en \mathbb{R}^n , no negativa y:

$$\text{Spt}(\rho) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1 \right\}$$

y, su integral sobre \mathbb{R}^n es igual a 1. Considere la sucesión de Dirac $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ daada por:

$$\rho_\nu(x) = \nu^n \rho(\nu x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Note que $\rho_\nu \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, de hecho:

$$\text{Spt}(\rho_\nu) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq \frac{1}{\nu} \right\}, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$$

Sea $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y tomemos $\varepsilon > 0$. Por la densidad de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, en $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, existe $\psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ tal que:

$$\mathcal{N}_p(f - \psi) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por el teorema anterior,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{N}_p(\psi - \psi * \rho_\nu) = 0$$

Fije $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{N}_p(\psi - \psi * \rho_\nu) < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces:

$$\mathcal{N}_p(f - \psi * \rho_\nu) \leq \mathcal{N}_p(f - \psi) + \mathcal{N}_p(\psi - \psi * \rho_\nu) < \varepsilon$$

Como $\psi \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y ρ_ν es de clase C^∞ de soporte compacto, entonces $\psi * \rho_\nu$ es de clase C^∞ . Además, por el teorema anterior, $\psi * \rho_\nu$ tiene soporte compacto ya que ambas funciones, ψ y ρ_ν lo tienen. Luego, se tiene el resultado. ■

2.6. Convolución de sucesiones de Dirac con funciones en \mathcal{L}_∞

Teorema 2.6.1 (Teorema de Heine)

Sean X y Y espacios métricos y $f : X \rightarrow Y$ continua en todo punto de un compacto $K \subseteq X$ (no basta suponer que $f|_K$ es función continua). Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$x \in K \text{ y } y \in X, d(x, y) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Demostración:

Ejercicio. ■

Teorema 2.6.2

Sea $f \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ una sucesión de Dirac en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Si f es continua en todo punto de un compacto K , entonces:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} f * \rho_\nu = f \text{ uniformemente en } K$$

Demostración:

Se sabe que existe la convolución $f * \rho_\nu(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y, para todo $\nu \in \mathbb{N}$.

Se tiene:

$$|f(x) - f * \rho_\nu(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x - y)| \rho_\nu(y) dy$$

sea $\varepsilon > 0$. Por el teorema de Heine, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in K, y \in \mathbb{R}^n, \|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Para $x \in K$, con este δ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} |f(x) - f * \rho_\nu(x)| &\leq \int_{\|y\| < \delta} |f(x) - f(x - y)| \rho_\nu(y) dy + \int_{\delta \leq \|y\|} |f(x) - f(x - y)| \rho_\nu(y) dy \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \int_{\delta \leq \|y\|} |f(x) - f(x - y)| \rho_\nu(y) dy \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \int_{\delta \leq \|y\|} (|f(x)| + |f(x - y)|) \rho_\nu(y) dy \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \left(\sup_{x \in K} |f(x)| + \mathcal{N}_\infty(f) \right) \int_{\delta \leq \|y\|} \rho_\nu(y) dy \end{aligned}$$

Por la condición (iv) de sucesiones de Dirac, existe $\nu_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\nu \geq \nu_0 \Rightarrow \left[\left(\sup_{x \in K} |f(x)| + \mathcal{N}_\infty(f) \right) \int_{\delta \leq \|y\|} \rho_\nu(y) dy \right] < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por tanto, si $\nu \geq \nu_0$:

$$\sup_{x \in K} |f(x) - f * \rho_\nu(x)| \leq \varepsilon$$

Luego, se tiene la convergencia uniforme en K . ■

Corolario 2.6.1

Bajo las mismas condiciones del teorema, si f es continua en un punto $x \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} f * \rho_\nu(x) = f(x)$$

Demostración:

Es inmediato del teorema anterior tomando $K = \{x\}$. ■

Teorema 2.6.3

Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ es acotada y uniformemente continua en \mathbb{R}^n y $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ es una sucesión de Dirac en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, entonces

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} f * \rho_\nu = f \text{ uniformemente en } \mathbb{R}^n$$

También, si $f \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y es continua en un abierto Ω y $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ es una sucesión de Dirac en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, entonces

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} f * \rho_\nu = f \text{ uniformemente en } C$$

donde C es un conjunto compacto arbitrario contenido en Ω .

Demostración:

Analicemos la prueba del teorema anterior, ■

Teorema 2.6.4 (Teorema de Weierstrass)

Sea $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ el espacio vectorial de funciones continuas de $[a, b]$ en \mathbb{K} , provisto de la norma uniforme. Si $\mathcal{P}([a, b], \mathbb{K})$ es el espacio vectorial de todas las funciones polinómicas de $[a, b]$ en \mathbb{K} entonces, $\mathcal{P}([a, b], \mathbb{K})$ es denso en $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$.

Demostración:

Hay que hacer varias cosas:

1. Basta probar el resultado para $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K})$. En efecto, suponga cierto el teorema para este caso. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ una función continua. Sea $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K}$ dada por:

$$g(t) = f((1-t)a + tb)$$

entonces, $g \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K})$. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe una función polinómica p tal que:

$$\sup_{t \in [0, 1]} |g(t) - p(t)| < \varepsilon$$

o sea:

$$\sup_{x \in [a, b]} \left| f(x) - p\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \right| < \varepsilon$$

tomando como polinomio a $q \in \mathcal{P}([a, b], \mathbb{K})$ tal que $q(x) = p\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$. Luego, se tiene el resultado.

2. Basta probar el resultado para el subespacio vectorial $\tilde{\mathcal{C}}([0, 1], \mathbb{K})$ de todas las funciones continuas de $[0, 1]$ en \mathbb{K} nulas en 0 y 1. En efecto, suponga el resultado probado en este caso. Sea $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K})$. Note que la función siguiente:

$$x \mapsto f(x) - f(0) - x(f(1) - f(0))$$

pertenece a $\tilde{\mathcal{C}}([0, 1], \mathbb{K})$. Dado $\varepsilon > 0$ existe una función polinómica p tal que

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - f(0) - x(f(1) - f(0) - p(x))| \leq \varepsilon$$

tomemos al polinomio $q(x) = p(x) - x(f(1) - f(0)) - f(0)$ es tal que $q \in \mathcal{P}([0, 1], \mathbb{K})$.

3. Resta probar que si $f \in \tilde{\mathcal{C}}([0, 1], \mathbb{K})$ y $\varepsilon > 0$, existe una función polinómica p tal que:

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon$$

Sea $\rho_\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función siguiente:

$$\rho_\nu(t) = \frac{(1 - t^2)^\nu}{\int_{-1}^1 (1 - \theta^2)^\nu d\theta} \text{ si } t \in [-1, 1]$$

y $\rho_\nu(t) = 0$ si $t \in [-1, 1]$, para todo $\nu \in \mathbb{N}$. Esta sucesión es llamada el **Núcleo de Landau**. Se afirma que $\{\rho_\nu\}_{\nu=\infty}^\infty$ es una sucesión de Dirac en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Claramente cumplen (i) y (ii). Se verá que se cumple (iv). Usando la paridad de ρ_ν , basta probar que si $0 < \delta < 1$, entonces:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\int_\delta^1 (1 - t^2)^\nu dt}{\int_{-1}^1 (1 - \theta^2)^\nu d\theta} = 0$$

Se tiene

$$\int_{-1}^1 (1 - \theta^2)^\nu d\theta = 2 \int_0^1 (1 - \theta^2)^\nu d\theta = 2 \int_0^1 (1 - \theta)^\nu (1 + \theta)^\nu d\theta \geq 2 \int_0^1 (1 - \theta)^\nu d\theta = \frac{2}{\nu + 1}$$

y

$$\int_\delta^1 (1 - t^2)^\nu dt \leq (1 - \delta^2)^\nu \int_\delta^1 dy = (1 - \delta^2)^\nu (1 - \delta)$$

por tanto,

$$\frac{\int_\delta^1 (1 - t^2)^\nu dt}{\int_{-1}^1 (1 - \theta^2)^\nu d\theta} \leq \frac{\nu + 1}{2} (1 - \delta)(1 - \delta^2)^\nu$$

donde el lado de la derecha tiende a cero si $\nu \rightarrow \infty$. Con ello, se tiene el resultado.

Ahora, si \tilde{f} es la ampliación canónica de $f \in \tilde{\mathcal{C}}([0, 1], \mathbb{K})$ entonces, es uniformemente continua en \mathbb{R} y acotada. Luego, por el teorema anterior, la convolución converge a \tilde{f} en el compacto $[0, 1]$.

Para $x \in [0, 1]$,

$$\rho_\nu * f(x) = \int_0^1 f(t) \rho_\nu(x - t) dt$$

como $x - t \in [-1, 1]$ para todo $t \in [0, 1]$, entonces:

$$\begin{aligned} \rho_\nu * f(x) &= \int_0^1 f(t) \frac{(1 - (x - t)^2)^\nu}{\int_{-1}^1 (1 - \theta^2)^\nu d\theta} dt \\ &= \int_0^1 f(t) c_\nu (1 - (x - t)^2)^\nu dt \end{aligned}$$

donde $c_\nu = \frac{1}{\int_{-1}^1 (1 - \theta^2)^\nu d\theta}$. Siendo claramente dicha integral anterior un polinomio en la variable x de grado 2ν , lo cual concluye la demostración. ■