Lista Ejercicios Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

13 de octubre de 2024

Índice general

Capítulo 1

Lista 4

Ejercicio 1.0.1
Haga lo siguiente:

i. Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Defina $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como:

$$P(x_1, ..., x_n) = e^{-\sum_{k=1}^{n}|x_k|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Fije $\nu \in \mathbb{N}$, **demuestre** la fórmula:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x) P\left(\frac{x}{\nu}\right)\,dx = (2\nu)^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x_1, ..., x_n)}{(1+\nu^2 x_1^2)\cdots(1+\nu^2 x_n^2)}\,dx_1\cdots dx_n$$

ii. **Deduzca** que si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \cap \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ y $\mathcal{F}f \geqslant 0$, entonces $\mathcal{F}f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

Sugerencia. Aplique el teorema de Beppo-Levi.

Demostración:
De (i): Defina $g(x) = P\left(\frac{x}{\nu}\right)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Veamos que $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} P\left(\frac{x}{\nu}\right)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} P\left(\frac{x_1}{\nu}, ..., \frac{x_1}{\nu}\right)\,dx_1\cdots dx_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{x_k}{\nu}\right|}\,dx_1\cdots dx_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{\nu}\sum_{k=1}^{n}|x_k|}\,dx_1\cdots dx_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x_1|}{\nu}}\cdot ... \cdot e^{-\frac{|x_n|}{\nu}}\,dx_1\cdots dx_n \\
&= \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x_1|}{\nu}}\,dx_1\right)\cdots\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x_n|}{\nu}}\,dx_n\right)}_{n\text{-veces}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|t|}{\nu}}\,dt\right)^n \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Usando Fubini para funciones medibles no negativas. Por tanto, por el Teorema de transferencia se sigue que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x)P\left(\frac{x}{\nu}\right)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x)g(x)\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathcal{F}g(x)\,dx\end{aligned}$$

Calculemos $\mathcal{F}g(x)$. Como $g(x) = P\left(\frac{x}{\nu}\right)$ para todo $x\in\mathbb{R}^n$, entonces

$$\mathcal{F}g(x) = \nu^n\mathcal{F}P(\nu x)$$

(por una proposición), donde

$$\begin{aligned}\mathcal{F}P(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle}P(y)\,dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\sum_{k=1}^n x_ky_k}e^{-\sum_{k=1}^n|y_k|}\,dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{k=1}^n(|y_k|+ix_ky_k)}\,dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y_1|-ix_1y_1}\cdot\ldots\cdot e^{-|y_n|-ix_ny_n}\,dy_1\cdots dy_n\\ &= \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y_1|-ix_1y_1}\,dy_1\right)\cdots\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y_n|-ix_ny_n}\,dy_n\right)}_{n\text{-veces}}\\ &= \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|-ix_1t}\,dt\right)\cdots\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|-ix_nt}\,dt\right)}_{n\text{-veces}}\\ &= \mathcal{F}h(x_1)\cdots\mathcal{F}h(x_n)\end{aligned}$$

donde $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es la función tal que $t\mapsto e^{-|t|}$ y, se sabe que

$$\mathcal{F}h(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}P(x) &= \frac{2^n}{(1+x_1^2)\cdots(1+x_n^2)}\\ \Rightarrow \mathcal{F}P(\nu x) &= \frac{2^n}{(1+\nu^2x_1^2)\cdots(1+\nu^2x_n^2)}\end{aligned}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x)P\left(\frac{x}{\nu}\right)\,dx &= \nu^n\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathcal{F}P(\nu x)\,dx\\ &= \nu^n\int_{\mathbb{R}^n}\frac{2^nf(x_1,...,x_n)}{(1+\nu^2x_1^2)\cdots(1+\nu^2x_n^2)}\,dx_1\cdots dx_n\\ &= (2\nu)^n\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(x_1,...,x_n)}{(1+\nu^2x_1^2)\cdots(1+\nu^2x_n^2)}\,dx_1\cdots dx_n\end{aligned}$$

De (ii): Para cada $\nu\in\mathbb{N}$ defina la función $g_\nu:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ como sigue:

$$g_\nu(x) = \mathcal{F}f(x)P\left(\frac{x}{\nu}\right),\quad \forall x\in\mathbb{R}^n$$

Esta es una sucesión creciente de funciones en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$, pues si $\nu\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\nu+1}\sum_{k=1}^{n}|x_k| &\leqslant \frac{1}{\nu}\sum_{k=1}^{n}|x_k|, \quad \forall x\in\mathbb{R}^n\\
\Rightarrow -\frac{1}{\nu}\sum_{k=1}^{n}|x_k| &\leqslant -\frac{1}{\nu+1}\sum_{k=1}^{n}|x_k|, \quad \forall x\in\mathbb{R}^n\\
\Rightarrow e^{\frac{1}{\nu}\sum_{k=1}^{n}|x_k|} &\leqslant e^{-\frac{1}{\nu+1}\sum_{k=1}^{n}|x_k|}, \quad \forall x\in\mathbb{R}^n\\
\Rightarrow P\left(\frac{x}{\nu}\right) &\leqslant P\left(\frac{x}{\nu+1}\right), \quad \forall x\in\mathbb{R}^n\\
\Rightarrow \mathcal{F}f(x)P\left(\frac{x}{\nu}\right) &\leqslant \mathcal{F}f(x)P\left(\frac{x}{\nu+1}\right), \quad \forall x\in\mathbb{R}^n\\
\Rightarrow g_\nu &\leqslant g_{\nu+1}
\end{aligned}$$

pues, $\mathcal{F}f\geqslant 0$. Además, como $f\in\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$, entonces

$$f\leqslant \mathcal{N}_\infty(f) \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n$$

luego,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} g_\nu(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{F}f(x)P\left(\frac{x}{\nu}\right)\,dx\\
&= (2\nu)^n\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(x_1,...,x_n)}{(1+\nu^2x_1^2)\cdots(1+\nu^2x_n^2)}\,dx_1\cdots dx_n
\end{aligned}$$

Hagamos el cambio de variable $(y_1,...,y_n)=(\frac{x_1}{\nu},...,\frac{x_n}{\nu})$, se tiene que

$$\begin{aligned}
(2\nu)^n\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(x_1,...,x_n)}{(1+\nu^2x_1^2)\cdots(1+\nu^2x_n^2)}\,dx_1\cdots dx_n &= (2\nu)^n\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(\nu y_1,...,\nu y_n)}{(1+y_1^2)\cdots(1+y_n^2)}\,\frac{dy_1\cdots dy_n}{\nu^n}\\
&= 2^n\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(\nu y_1,...,\nu y_n)}{(1+y_1^2)\cdots(1+y_n^2)}\,dy_1\cdots dy_n\\
&= 2^n\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\mathcal{N}_\infty(f)}{(1+y_1^2)\cdots(1+y_n^2)}\,dy_1\cdots dy_n\\
&= 2^n\mathcal{N}_\infty(f)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{dy_1\cdots dy_n}{(1+y_1^2)\cdots(1+y_n^2)}\\
\Rightarrow \left|\int_{\mathbb{R}^n} g_\nu(x)\right| &= 2^n\mathcal{N}_\infty(f)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{dy_1\cdots dy_n}{(1+y_1^2)\cdots(1+y_n^2)}
\end{aligned}$$

pues $\int_{\mathbb{R}^n}\frac{dy_1\cdots dy_n}{(1+y_1^2)\cdots(1+y_n^2)}<\infty$ y $\int_{\mathbb{R}^n} g_\nu(x)\geqslant 0$. Por tanto, por Beppo-Levi se sigue que existe una función $g\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ tal que

$$\lim_{\nu\to\infty} g_\nu = g \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n$$

Pero, también se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{\nu\to\infty} g_\nu(x) &= \lim_{\nu\to\infty}\mathcal{F}f(x)P\left(\frac{x}{\nu}\right)\\
&= \mathcal{F}f(x)\lim_{\nu\to\infty}P\left(\frac{x}{\nu}\right)\\
&= \mathcal{F}f(x)P(0,...,0)\\
&= \mathcal{F}f(x), \quad \forall x\in\mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

Entonces $\mathcal{F}f=g$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$, luego $\mathcal{F}f\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$. Más aún,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{F}f(x)\,dx &= \lim_{\nu\to\infty}2^n\mathcal{N}_\infty(f)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{dy_1\cdots dy_n}{(1+y_1^2)\cdots(1+y_n^2)}\\
&= 2^n\mathcal{N}_\infty(f)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{dy_1\cdots dy_n}{(1+y_1^2)\cdots(1+y_n^2)}
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Ejercicio 1.0.2 (**Problema 2 Lista 6 Análisis Matemático II**)
Pruebe que si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, entonces

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} f\right| = \int_{\mathbb{R}^n} |f|$$

si y sólo si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ fijo tal que $f = e^{i\alpha}|f|$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$.

Sugerencia. Suponiendo que $\left|\int_{\mathbb{R}^n} f\right| = \int_{\mathbb{R}^n} |f|$, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} f = e^{i\alpha}\int_{\mathbb{R}^n} |f|$. Escriba

$$e^{-i\alpha} f = g + ih$$

donde g y h son funciones reales.

Demostración:

$\blacksquare$

Ejercicio 1.0.3
Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Se supone que $f(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. **Pruebe** que si $x \neq 0$, entonces

$$\mathcal{F}f(0) > |\mathcal{F}f(x)|$$

Sugerencia. Una vez que ha demostrado $|\mathcal{F}f(x)| \leqslant \mathcal{F}f(0)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, Para demostrar la desigualdad estricta para $x \neq 0$ proceda por reducción al absurdo y use el Problema 2 de la Lista 6 de Análisis Matemático II.

Demostración:
Notemos que como $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene en particular que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Primero probaremos que

$$\mathcal{F}f(0) \geqslant |\mathcal{F}f(x)|$$

es decir:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle 0|y\rangle} f(y)\, dy \geqslant \left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y)\, dy\right| \\
\iff &\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, dy \geqslant \left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y)\, dy\right| \\
\iff &\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, dy \geqslant \left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y)\, dy\right|
\end{aligned}$$

pues $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Veamos que

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y)\, dy\right| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left|e^{-i\langle x|y\rangle} f(y)\right|\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left|e^{-i\langle x|y\rangle}\right| |f(y)|\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, dy
\end{aligned} \tag{1.1}$$

lo que prueba el resultado. Para la desigualdad estricta suponga que existe $x \in \mathbb{R}^n$ no cero tal que

$$\mathcal{F}f(x) = \mathcal{F}f(0)$$

esto es

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y)\, dy\right| &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\ dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left|e^{-i\langle x|y\rangle} f(y)\right|\ dy
\end{aligned}
$$

Por el ejercicio anterior existe $\alpha \in \mathbb{R}$ fijo tal que

$$e^{-i\langle x|y\rangle} f(y) = e^{i\alpha}\,|f(y)| = e^{i\alpha} f(y)$$

para casi todo $y \in \mathbb{R}^n$. En particular, tenemos que

$$f(y)\left(e^{-i\langle x|y\rangle} - e^{i\alpha}\right) = 0$$

para casi todo $y \in \mathbb{R}^n$. Como $f(y) > 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$e^{-i\langle x|y\rangle} - e^{i\alpha} = 0$$

nuevamente para casi todo $y \in \mathbb{R}^n$. Como las dos funciones involucradas son continuas y coinciden c.t.p. en $\mathbb{R}^n$, debe tenerse pues que

$$e^{-i\langle x|y\rangle} = e^{i\alpha}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

lo cual ocurre si y sólo si

$$e^{i(\langle x|y\rangle + \alpha)} = 1, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

es decir que

$$\langle x|y\rangle + \alpha = 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

como $x \neq 0$ en particular se tiene que

$$\langle x|x\rangle = -\alpha$$

y, además (tomando $y = 2x$):

$$2\langle x|x\rangle = -\alpha$$

pero esto sólo puede suceder si $\langle x|x\rangle = 0$, es decir que $x = 0\#_c$. Luego entonces

$$|\mathcal{F}f(x)| < \mathcal{F}f(0)$$

■

Ejercicio 1.0.4
Haga lo siguiente:

i. Sean $a > 0$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. **Pruebe** que la función $x \mapsto (\cos\lambda x)/(x^2 + a^2)$ es integrable en $[0, \infty[$. **Muestre** que si $\lambda \neq 0$, la función $x \mapsto (x \sin\lambda x)/(x^2 + a^2)$ no es integrable en $[0, \infty[$, pero existe la integral impropia

$$\int_0^{\to\infty} \frac{x \sin\lambda x}{x^2 + a^2}\, dx$$

Sugerencia. Muestre que

$$\left|\frac{x \sin\lambda x}{x^2 + a^2}\right| \underset{x\to\infty}{\sim} \left|\frac{\sin\lambda x}{x}\right|$$

Para probar la existencia de la integral impropia use los criterios de Abel.

ii. Recuerde que la función $x \mapsto (2a)/(x^2 + a^2)$ es la transformada de Fourier de la función $x \mapsto e^{-a|x|}$. Usando el teorema de inversión de Fourier, **demuestre** que

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos\lambda x}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{\pi}{2a} e^{-a|\lambda|}$$

iii. Usando el inciso (ii), calcule la integral impropia

$$\int_0^{\to\infty} \frac{x\sin\lambda x}{x^2+a^2}\,dx$$

Sugerencia. Para $\lambda \neq 0$ defina

$$\Phi(\lambda) = \int_0^{\to\infty} \frac{\cos\lambda x}{x^2+a^2}\,dx$$

Calcule $\Phi'(\lambda)$ primero suponiendo $\lambda > \lambda_0$, donde $\lambda_0 > 0$ es arbitrario fijo, de forma análoga para $\lambda < 0$ y finalmente para $\lambda = 0$.

Demostración:

De (i): Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ defina

$$f(x) = \frac{\cos\lambda x}{x^2+a^2}$$

Afirmamos que f es integrable en $[0,\infty[$. Para ello, veamos que

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} |f| &= \int_0^{\infty} \frac{|\cos\lambda x|}{x^2+a^2}\,dx\\ &\leqslant \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+a^2}\end{aligned}$$

donde la función de la derecha es integrable en tal invervalo. Por tanto, $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Sea ahora $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \neq 0$. Afirmamos que la función

$$g(x) = \frac{x\sin\lambda x}{x^2+a^2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ no es integrable en $[0,\infty[$. En efecto, veamos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{\left|\frac{x\sin\lambda x}{x^2+a^2}\right|}{\left|\frac{\sin\lambda x}{x}\right|} &= \lim_{x\to\infty}\left|\frac{x^2}{x^2+a^2}\right|\\ &= \lim_{x\to\infty}\left|\frac{1}{1+\frac{a^2}{x^2}}\right|\\ &= \frac{1}{1+0}\\ &= 1\end{aligned}$$

por tanto,

$$\left|\frac{x\sin\lambda x}{x^2+a^2}\right| \underset{x\to\infty}{\sim} \left|\frac{\sin\lambda x}{x}\right|$$

Luego entonces, por la proposición 8.53 Análisis Matemático II:

$$\left|\frac{\sin\lambda x}{x}\right| \underset{x\to\infty}{=} O\left(\left|\frac{x\sin\lambda x}{x^2+a^2}\right|\right)$$

donde la función $x \mapsto \left|\frac{\sin\lambda x}{x}\right|$ no es integrable en $[0,\infty[$, luego tampoco puede serlo g (siendo que ambas funciones son integrables en todo subconjunto acotado de $\mathbb{R}$).

Veamos que si existe la integral impropia

$$\int_0^{\to\infty} \frac{x\sin\lambda x}{x^2+a^2}$$

En efecto, defina para cada $x \in [0, \infty[$ las funciones:

$$G(x) = \int_0^x \sin \lambda x \, dx \quad \text{y} \quad f(x) = \frac{x}{x^2 + a^2}$$

se tienen dos cosas:

- $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ (es claro de la definición de f).
- G es una función acotada en $[0, \infty[$, pues para cada $x \in [0, \infty[$:

$$\begin{aligned}
|G(x)| &= \left| \int_0^x \sin \lambda x \, dx \right|, \text{ haciendo el cambio de variable } u = \lambda x \\
&= \left| \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^{\lambda x} \sin u \, du \right| \\
&= \left| \frac{1}{\lambda} \cdot \left[-\cos u \Big|_0^{\lambda x} \right] \right| \\
&= \left| \frac{1}{\lambda} \cdot [-\cos \lambda x + \cos 0] \right| \\
&\leqslant \frac{2}{|\lambda|}
\end{aligned}$$

Por tanto, del primer criterio de Abel se sigue que la integral impropia

$$\int_0^{\to\infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2}$$

es convergente.

De (ii): Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$h(x) = e^{-a|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

se sabe por un ejercicio de las notas que

$$\mathcal{F}h(x) = \frac{2a}{x^2 + a^2}$$

la función h cumple la condición de Dini en todo punto $\lambda \in \mathbb{R} \neq 0$ (también lo hace en cero, pero no es relevante), por lo cual se tiene que

$$h(\lambda) = \lim_{R \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} e^{i\lambda x} \mathcal{F}h(x) \, dx$$

es decir,

$$\begin{aligned}
e^{-a|\lambda|} &= \lim_{R \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} e^{i\lambda x} \mathcal{F}h(x) \, dx \\
&= \frac{2a}{2\pi} \lim_{R \to \infty} \left[\int_{-R}^{R} \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx + i \int_{-R}^{R} \frac{\sin \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx \right] \\
&= \frac{a}{\pi} \lim_{R \to \infty} \left[\int_{-R}^{0} \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx + \int_0^{R} \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx + i \int_{-R}^{0} \frac{\sin \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx + i \int_0^{R} \frac{\sin \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx \right] \\
&= \frac{a}{\pi} \lim_{R \to \infty} \left[\int_0^{R} \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx + \int_0^{R} \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx - i \int_0^{R} \frac{\sin \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx + i \int_0^{R} \frac{\sin \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx \right] \\
&= \frac{2a}{\pi} \lim_{R \to \infty} \int_0^{R} \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx \\
&= \frac{2a}{\pi} \int_0^{\to\infty} \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx
\end{aligned}$$

pero, de (i) se sabe que $x \mapsto \frac{\cos \lambda x}{x^2+a^2}$ es integrable en $[0,\infty[$, por tanto coincide su valor con el de la integral impropia, así:

$$
\begin{aligned}
e^{-a|\lambda|} &= \frac{2a}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{x^2+a^2}\,dx\\
\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{x^2+a^2}\,dx &= \frac{\pi}{2a}e^{-a|\lambda|}
\end{aligned}
$$

De (iii): Por la parte anterior, para todo $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ tiene que

$$
\Phi(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}e^{-a|\lambda|} = \frac{\pi}{2a}e^{-a|\lambda|}
$$

Si todo funciona bien, por el Teorema de derivación para funciones definidas por integrales impropias, se tendría para $\lambda > 0$:

$$
\begin{aligned}
-\int_0^{\to\infty} \frac{x\sin \lambda x}{x^2+a^2}\,dx &= \Phi'(\lambda)\\
&= -\frac{\pi}{2}e^{-a\lambda}\\
&= -\frac{\pi}{2}e^{-a|\lambda|}\\
\Rightarrow \int_0^{\to\infty} \frac{x\sin \lambda x}{x^2+a^2}\,dx &= \frac{\pi}{2}e^{-a|\lambda|}
\end{aligned}
$$

y, para $\lambda < 0$:

$$
\begin{aligned}
-\int_0^{\to\infty} \frac{x\sin \lambda x}{x^2+a^2}\,dx &= \Phi'(\lambda)\\
&= \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\pi}{2a}e^{-a(-\lambda)}\right)\\
&= \frac{\pi}{2}e^{a\lambda}\\
&= \frac{\pi}{2}e^{-a|\lambda|}\\
\Rightarrow \int_0^{\to\infty} \frac{x\sin \lambda x}{x^2+a^2}\,dx &= -\frac{\pi}{2}e^{-a|\lambda|}
\end{aligned}
$$

es decir que

$$
\int_0^{\to\infty} \frac{x\sin \lambda x}{x^2+a^2}\,dx = \operatorname{Sgn}(\lambda)\cdot\frac{\pi}{2}e^{-a|\lambda|}
$$

■

Ejercicio 1.0.5
Sea H una matriz simétrica real $n\times n$ positiva definida, es decir, la forma cuadrática $\langle x|Hx\rangle$ sobre $\mathbb{R}^n$ es positiva definida. Sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ la función

$$
f(x) = e^{-\langle Hx|x\rangle},\quad \forall x\in\mathbb{R}^n
$$

Demuestre que f es integrable y que

$$
\mathcal{F}f(x) = \frac{\pi^{n/2}}{(\det H)^{1/2}}e^{-\frac{1}{4}\langle H^{-1}x|x\rangle},\quad \forall x\in\mathbb{R}^n
$$

Sugerencia. f es medible. Para ver que es integrable, pruebe que $\langle Hx|x\rangle \geqslant m\|x\|^2$, donde

$$
m = \min_{x\in S}\{\langle Hx|x\rangle\} > 0
$$

con $S = \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| \|x\| = 1\right\}$. Se sabe de álgebra que existe una matriz ortogonal U tal que $U^{-1}HU = \text{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, donde $\lambda_1, ..., \lambda_n$ son números estrictamente positivos. En la integral $\mathcal{F}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} e^{-\langle Hy|y\rangle}\, dy$ haga el cambio de variable $y = Uz$ siendo tal que $|\det U| = 1$, $\langle Ur|Us\rangle = \langle r|s\rangle$ (y lo análogo para U^{-1}) y observe que $(1/\lambda_1, ..., 1/\lambda_n) = U^{-1}H^{-1}U$.

Demostración:

Veamos que f es medible (más aún, es continua). En efecto, considere la matriz H dada por

$$H = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \dots & h_{1,n-1} & h_{1,n} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \dots & h_{2,n-1} & h_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{n,1} & h_{n,2} & \dots & h_{n,n-1} & h_{n,n} \end{bmatrix}$$

Se tiene entonces que para cada $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle Hx|x\rangle = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} y_k x_k$$

donde

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \dots & h_{1,n-1} & h_{1,n} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \dots & h_{2,n-1} & h_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{n,1} & h_{n,2} & \dots & h_{n,n-1} & h_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

es decir que

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} h_{k,i} x_i$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \langle Hx|x\rangle &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} h_{k,i} x_i \right) x_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_k x_i h_{k,i} \end{aligned}$$

siendo la aplicación $x \mapsto \langle Hx|x\rangle$ una aplicación polinomial de n-variables, luego es continua. Así, la composición con $t \mapsto e^{-t}$ es continua, es decir que la función f es continua en $\mathbb{R}^n$, luego medible.

Ahora, sea ahora

$$m = \inf_{x \in S} \{\langle Hx|x\rangle\}$$

donde $S = \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| \|x\| = 1\right\}$. Afirmamos que $m > 0$. En el caso que $m = 0$, como la función $x \mapsto \langle Hx|x\rangle$ es continua de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, se tendría que alcanzaría su máximo y mínimo en el compacto S, luego existiría $x_0 \in S$ tal que

$$\langle Hx_0|x_0\rangle = 0$$

lo cual contradeciría el hecho de que H es positiva definida. Por tanto, $m > 0$. Más aún,

$$m = \inf_{x \in S} \{\langle Hx|x\rangle\} = \min_{x \in S} \{\langle Hx|x\rangle\}$$

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ no cero, se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle Hx|x\rangle &= \langle H\left(\|x\|\cdot\frac{x}{\|x\|}\right)|\|x\|\cdot\frac{x}{\|x\|}\rangle \\
&= \|x\|^2\langle H\left(\frac{x}{\|x\|}\right)|\frac{x}{\|x\|}\rangle \\
&\geqslant m\|x\|^2 \\
\Rightarrow -\langle Hx|x\rangle &\leqslant -m\|x\|^2
\end{aligned}$$

Considere la función $x \mapsto e^{-m\|x\|^2}$ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. Se tiene que

$$0 \leqslant f(x) = e^{-m\langle Hx|x\rangle} \leqslant e^{-m\|x\|^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

siendo $x \mapsto e^{-m\|x\|^2}$ intergable en $\mathbb{R}^n$, luego f lo es en $\mathbb{R}^n$. Así, la transformada de Fourier $\mathcal{F}f$ está definida en todo $\mathbb{R}^n$.

Sea $x \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle}\cdot e^{-\langle Hy|y\rangle}\,dy
\end{aligned}$$

Se sabe por un resultado de álgebra lineal que existen una matriz D $n\times n$ diagonal con entradas en la diagonal positivas, y una matriz ortogonal U (también $n \times n$) con $|\det U| = 1$ tal que

$$U^{-1}HU = D \Rightarrow HU = UD$$

siendo

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Hagáse el cambio de variable $y = Uz$, se tiene en la integral anterior que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle}\cdot e^{-\langle Hy|y\rangle}\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|Uz\rangle}\cdot e^{-\langle HUz|Uz\rangle}\,dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|Uz\rangle}\cdot e^{-\langle UDz|Uz\rangle}\,dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|Uz\rangle}\cdot e^{-\langle Dz|z\rangle}\,dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle U^{-1}x|U^{-1}Uz\rangle}\cdot e^{-\langle Dz|z\rangle}\,dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle U^{-1}x|z\rangle}\cdot e^{-\langle Dz|z\rangle}\,dz
\end{aligned}$$

considere la función $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $x \mapsto e^{-\langle Dz|z\rangle}$ (esta función es integrable pues los elementos de la matriz diagonal D son números positivos), por lo anterior se tiene que

$$\mathcal{F}f(x) = \mathcal{F}g(U^{-1}x)$$

donde

$$\begin{aligned}\mathcal{F}g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|z\rangle} g(z)\, dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|z\rangle} \cdot e^{-\langle Dz|z\rangle}\, dz\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}Dz &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 z_1 \\ \lambda_2 z_2 \\ \vdots \\ \lambda_n z_n \end{bmatrix}\end{aligned}$$

por tanto

$$\langle Dz|z\rangle = \lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_n z^n$$

luego, usando Fubini se sigue que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\sum_{k=1}^n x_k z_k - \sum_{k=1}^n \lambda_k z_k^2}\, dz_1 \cdots dz_n \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_1 z_1 - \lambda_1 z_1^2}\, dz_1\right) \cdots \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_n z_n - \lambda_n z_n^2}\, dz_n\right) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathcal{F}g_i(x_i)\end{aligned}$$

donde

$$g_i(u) = e^{-\lambda_i u^2}, \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

para cada $i \in [\![1, n]\!]$. Se sabe por un ejercicio de la las notas que

$$\mathcal{F}g_i(x_i) = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_i}} e^{-\frac{x_i^2}{4\lambda_i}}, \quad \forall x_i \in \mathbb{R}$$

para todo $i \in [\![1, n]\!]$. Por tanto:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}g(x) &= \prod_{i=1}^n \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_i}} e^{-\frac{x_i^2}{4\lambda_i}} \\ &= \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\lambda_1 \cdots \lambda_n}} e^{-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{\lambda_k}}\end{aligned}$$

recordemos que

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\lambda_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

y,

$$\det H = \det(UDU^{-1}) = \det U \cdot \det D \cdot \det U^{-1} = \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

por ende

$$\langle D^{-1}x|x\rangle = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{\lambda_k}$$

así,

$$\mathcal{F}g(x) = \frac{\pi^{n/2}}{(\det H)^{1/2}} e^{-\frac{1}{4}\langle D^{-1}x|x\rangle}$$

Por lo tanto, recordando que

$$\begin{aligned} U^{-1}HU = D &\Rightarrow U^{-1}H^{-1}U = D^{-1} \\ &\Rightarrow U^{-1}H^{-1} = D^{-1}U^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f(x) &= \mathcal{F}g(U^{-1}x) \\ &= \frac{\pi^{n/2}}{(\det H)^{1/2}} e^{-\frac{1}{4}\langle D^{-1}U^{-1}x|U^{-1}x\rangle} \\ &= \frac{\pi^{n/2}}{(\det H)^{1/2}} e^{-\frac{1}{4}\langle U^{-1}H^{-1}x|U^{-1}x\rangle} \\ &= \frac{\pi^{n/2}}{(\det H)^{1/2}} e^{-\frac{1}{4}\langle H^{-1}x|x\rangle} \\ \Rightarrow \mathcal{F}f(x) &= \frac{\pi^{n/2}}{(\det H)^{1/2}} e^{-\frac{1}{4}\langle H^{-1}x|x\rangle} \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, como se quería demostrar.

■

Ejercicio 1.0.6
Recuerde que si $f = \chi_{[-a,a]}$, entonces

$$\mathcal{F}f(x) = \frac{2\sin ax}{x}, \quad \forall x \neq 0$$

Deduzca la fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin ax}{x}\right)^2 dx = \pi a$$

Demostración:
Notemos que $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \cap \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, por lo cual

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2 f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \mathcal{F}f(x) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \cdot \frac{2\sin ax}{x} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin ax}{x} \end{aligned}$$

así, por la identidad de Parseval se cumple

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}(\mathcal{F}_2 f)^2(x)\,dx &= \langle \mathcal{F}_2 f|\mathcal{F}_2 f\rangle \\
&= \langle f|f\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\chi_{[-a,a]}(x)\,dx \\
&= 2a \\
\Rightarrow \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin ax}{x}\right)^2 dx &= 2a \\
\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin ax}{x}\right)^2 dx &= \pi a
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 1.0.7
Haga lo siguiente:

i. Sea $f(x)=\left(1-\frac{|x|}{a}\right)\chi_{[-a,a]}(x)$, para todo $x\in\mathbb{R}$. **Pruebe** que

$$\mathcal{F}f(x)=a\left(\frac{\sin\frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}}\right)^2$$

ii. Usando $\mathcal{F}_2 f$ **muestre** la fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin ax}{x}\right)^4 dx=\frac{2}{3}\pi a^3$$

iii. **Calcule** la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin ax}{x}\right)^3 dx$$

Sugerencia. Escriba $f(x)=\left(1-\frac{|x|}{a}\right)\chi_{[-a,a]}(x)$ y $g(x)=\chi_{[-a,a]}(x)$, para todo $x\in\mathbb{R}$. Aplique la identidad de Parseval

$$\int_{\mathbb{R}}\mathcal{F}_2 f\mathcal{F}_2 g=\langle \mathcal{F}_2 f|\mathcal{F}_2 g\rangle=\langle f|g\rangle=\int_{\mathbb{R}} fg$$

para deducir el resultado.

Solución:

De (i): Sea $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} f(y)\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} \left(1 - \frac{|y|}{a}\right) \chi_{[-a,a]}(y)\, dy \\
&= \int_{-a}^{a} e^{-ixy} \left(1 - \frac{|y|}{a}\right) dy \\
&= \int_{-a}^{0} e^{-ixy} \left(1 - \frac{|y|}{a}\right) dy + \int_{0}^{a} e^{-ixy} \left(1 - \frac{|y|}{a}\right) dy \\
&= \int_{-a}^{0} e^{-ixy} \left(1 + \frac{y}{a}\right) dy + \int_{0}^{a} e^{-ixy} \left(1 - \frac{y}{a}\right) dy \\
&= -\int_{a}^{0} e^{ixu} \left(1 - \frac{u}{a}\right) du + \int_{0}^{a} e^{-ixy} \left(1 - \frac{y}{a}\right) dy \\
&= \int_{0}^{a} e^{ixy} \left(1 - \frac{y}{a}\right) dy + \int_{0}^{a} e^{-ixy} \left(1 - \frac{y}{a}\right) dy \\
&= \int_{0}^{a} \left(e^{ixy} + e^{-ixy}\right) \cdot \left(1 - \frac{y}{a}\right) dy \\
&= 2\int_{0}^{a} \left(1 - \frac{y}{a}\right) \cos xy\, dy \\
&= 2\left[\int_{0}^{a} \cos xy\, dy - \frac{1}{a}\int_{0}^{a} y\cos xy\, dy\right]
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{a} \cos xy\, dy &= \frac{1}{x}\int_{0}^{ax} \cos u\, du \\
&= \frac{1}{x}\sin u\Big|_{0}^{ax} \\
&= \frac{\sin ax}{x}
\end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{a} y\cos xy\, dy &= \int_{0}^{ax} \frac{u}{x}\cos u\, \frac{du}{x} \\
&= \frac{1}{x^2}\int_{0}^{ax} u\cos u\, du \\
&= \frac{1}{x^2}\left[ax\sin ax + \cos ax - 1\right]
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f(x) &= 2\left[\int_0^a \cos xy\,dy - \frac{1}{a}\int_0^a y\cos xy\,dy\right]\\
&= 2\left[\frac{\sin ax}{x} - \frac{ax\sin ax}{ax^2} - \frac{\cos ax}{ax^2} + \frac{1}{ax^2}\right]\\
&= 2\left[\frac{\sin ax}{x} - \frac{\sin ax}{x} + \frac{1-\cos ax}{ax^2}\right]\\
&= \frac{1-\cos ax}{\frac{ax^2}{2}}\\
&= a\cdot\frac{2\sin^2\left(\frac{ax}{2}\right)}{\frac{a^2x^2}{2}}\\
&= a\cdot\frac{\sin^2\frac{ax}{2}}{\frac{a^2x^2}{4}}\\
&= a\cdot\left(\frac{\sin\frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}}\right)^2
\end{aligned}$$

De (ii): Notemos que $f\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R},\mathbb{R})\cap\mathcal{L}_2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, por lo cual

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_2f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}f(x)\\
&= \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left(\frac{\sin\frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}}\right)^2
\end{aligned}$$

por lo cual, usando la identidad de Parseval se sigue que

$$\begin{aligned}
\frac{a^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}}\right)^4 dx &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\right)^2\left(\frac{\sin\frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}}\right)^4 dx\\
&= \langle\mathcal{F}_2f|\mathcal{F}_2f\rangle\\
&= \langle f|f\rangle\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{|x|}{a}\right)^2\chi_{[-a,a]}(x)\,dx\\
&= \int_{-a}^{a}\left(\frac{a-|x|}{a}\right)^2 dx\\
&= 2\int_0^a\left(\frac{a-x}{a}\right)^2 dx
\end{aligned}$$

cambiemos de variable la primera integral, haciendo $u=\frac{x}{2}\Rightarrow 2du=dx$, por tanto:

$$\begin{aligned}
\frac{a^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}}\right)^4 dx &= \frac{a^2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin ax}{ax}\right)^4 dx\\
&= \frac{1}{a^2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin ax}{x}\right)^4 dx
\end{aligned}$$

y, haciendo el cambio de variable en la última integral a $y=a-x \Rightarrow dy=-dx$, se tiene que

$$\begin{aligned}\int_0^a \left(\frac{a-x}{a}\right)^2 dx &= -\int_a^0 \frac{y^2}{a^2}\,dy\\ &= \frac{1}{a^2}\int_0^a y^2\,dy\\ &= \frac{1}{a^2}\left[\frac{y^3}{3}\Big|_0^a\right]\\ &= \frac{a^3}{3a^2}\\ &= \frac{a}{3}\end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin ax}{x}\right)^4 dx &= \frac{2a}{3}\\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin ax}{x}\right)^4 dx &= \frac{2}{3}\pi a^3\end{aligned}$$

De (iii): Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función $g=\chi_{[-a,a]}$. Se sabe por el inciso anterior que

$$\mathcal{F}_2 g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin ax}{x}, \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

y, del inciso (i) y considere la función $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $h(x)=f(2x)=f\left(\frac{x}{\frac{1}{2}}\right)$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2 f(2x) &= \frac{1}{2}\mathcal{F}_2 f(x)\\ \Rightarrow 2\mathcal{F}_2 f(2x) &= \mathcal{F}_2 f(x)\\ \Rightarrow 2\mathcal{F}_2 h(x) &= \mathcal{F}_2 f(x)\end{aligned}$$

Notemos además que

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}_2 f|\mathcal{F}_2 g\rangle &= 2\langle \mathcal{F}_2 h|\mathcal{F}_2 g\rangle\\ &= 2\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}_2 h(x)\mathcal{F}_2 g(x)\,dx\\ &= 2\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}_2 f(2x)\mathcal{F}_2 g(x)\,dx\\ &= 2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sin\frac{2ax}{2}}{\frac{2ax}{2}}\right)^2\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin ax}{x}\,dx\\ &= \frac{2}{\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin ax}{x}\right)^3 dx\end{aligned}$$

y, por la identidad de Parserval

$$
\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}_2 f | \mathcal{F}_2 g\rangle &= \langle f|g\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\,dx \\
&= \int_{-a}^{a}\left(1-\frac{|x|}{a}\right)\,dx \\
&= 2\int_{0}^{a}\left(1-\frac{|x|}{a}\right)\,dx \\
&= 2\int_{0}^{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)\,dx \\
&= 2\left[x-\frac{x^2}{2a}\Big|_0^a\right] \\
&= 2\left[a-\frac{a^2}{2a}\right] \\
&= 2\left[\frac{a}{2}\right] \\
&= a
\end{aligned}
$$

Por ende,

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin ax}{x}\right)^3\,dx = a \\
\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin ax}{x}\right)^3\,dx = \frac{\pi a}{2}
\end{aligned}
$$

(falta multiplicar por un factor de 2/3 según Wolfram). □

Ejercicio 1.0.8
Sea $n \geqslant 2$ y $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la función $x \mapsto r(x) = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$. Sea $f : [0,\infty[\to \mathbb{C}$ una función tal que $f \circ r$ es integrable en $\mathbb{R}^n$.

i. **Pruebe** que la transformada de Fourier $\mathcal{F}(f \circ r)$ es una función radial.

   Sugerencia. Si U es una matriz ortogonal $n \times n$, se tiene que $\mathcal{F}(f\circ r)(Ux) = \mathcal{F}(f \circ r)(x)$. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que $\|x\| = \|y\|$, siempre existe una matriz ortogonal U tal que $Ux = y$.

ii. **Muestre** que se cumple la **fórmula de Bochner**

$$
\mathcal{F}(f\circ r)(x) = 2(n-1)\omega_{n-1}\int_0^{\infty} v_n(u\|x\|)f(u)u^{n-1}\,du, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n
$$

   donde ω_{n-1} es el volumen de la bola euclideana de radio uno en $\mathbb{R}^{n-1}$ y v_n se define por la fórmula

$$
v_n(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t\cos\theta)\sin^{n-2}\theta\,d\theta
$$

   Sugerencia. Según el inciso (i),

$$
\mathcal{F}(f\circ r)(x) = \mathcal{F}(f\circ r)(\|x\|, 0, ..., 0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\|y\|)e^{-i\|x\|y_1}\,dy_1\cdots dy_n
$$

Transforme esta integral por el Teorema de Fubini y exprese la integral con respecto a $y_2, ..., y_n$ como una integral simple. La doble integral resultante se transforma a coordenadas polares.

Solución:

De (i): Ya se sabe que $f \circ r$ es una función radial (de la definición es claro este hecho). Como $f \circ r$ es integrable en $\mathbb{R}^n$, entonces la transformada de Fourier de $f \circ r$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que $\|x\| = \|y\|$. Para probar que $\mathcal{F}(f \circ r)$ es una función radial, basta con ver que

$$\mathcal{F}(f \circ r)(x) = \mathcal{F}(f \circ r)(y)$$

En efecto, como $\|x\| = \|y\|$ por álgebra lineal se sabe que existe una matriz ortogonal $n \times n$ con determinante 1 tal que $x = Uy$. Por lo cual, por el teorema de cambio de variable haciendo $z = Uw$, se sigue que:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f \circ r)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|z\rangle} f \circ r(z)\, dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|Uw\rangle} f \circ r(Uw)\, dw \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle UU^{-1}x|Uw\rangle} f \circ r(w)\, dw \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle y|w\rangle} f \circ r(w)\, dw \\ &= \mathcal{F}(f \circ r)(y)\end{aligned}$$

por tanto, $\mathcal{F}(f \circ r)$ es una función radial.

De (ii): Sea $x \in \mathbb{R}^n$, veamos que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f \circ r)(x) &= \mathcal{F}(f \circ r)(\|x\|, 0, ..., 0) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle(\|x\|,0,...,0)|(y_1,...,y_n)\rangle} f \circ r(y_1, ..., y_n)\, dy_1 \cdots dy_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\|x\|y_1} f(\|y\|)\, dy_1 \cdots dy_n\end{aligned}$$

Cambiando a coordenadas polares, resulta que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f \circ r)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\|x\|y_1} f(\|y\|)\, dy_1 \cdots dy_n \\ &= \int_{\Omega} e^{-i\|x\|\rho\cos\varphi_1} f(\rho)\rho^{n-1} \sin^{n-2}\varphi_1 \cdots \sin\varphi_{n-2}\, d\rho d\varphi_1 \cdots d\varphi_{n-1}\end{aligned}$$

donde

$$\Omega = \left\{(\rho, \varphi_1, ..., \varphi_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \middle| \rho \geqslant 0, 0 \leqslant \varphi_1, ..., \varphi_{n-2} \leqslant \pi, -\pi \leqslant \varphi_{n-1} \leqslant \pi\right\}$$

Por Fubini se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f \circ r)(x) &= \int_{\Omega} e^{-i\|x\|\rho\cos\varphi_1} f(\rho)\rho^{n-1} \sin^{n-2}\varphi_1 \cdots \sin\varphi_{n-2}\, d\rho d\varphi_1 \cdots d\varphi_{n-1} \\ &= \int_0^\infty \rho^{n-1} f(\rho)\, d\rho \int_0^\pi e^{-i\|x\|\rho\cos\varphi_1} \sin^{n-2}\varphi_1\, d\varphi_1 \int_{\Omega'} \sin^{n-3}\varphi_2 \cdots \sin\varphi_{n-2}\, d\varphi_2 \cdots d\varphi_{n-1}\end{aligned}$$

donde

$$\Omega' = \left\{(\varphi_2, ..., \varphi_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-2} \middle| 0 \leqslant \varphi_2, ..., \varphi_{n-2} \leqslant \pi, -\pi \leqslant \varphi_{n-1} \leqslant \pi\right\}$$

Pero, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega'} \sin^{n-3}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\,d\varphi_2\cdots d\varphi_{n-1} &= (1-0)\int_{\Omega'} \sin^{(n-1)-2}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\,d\varphi_2\cdots d\varphi_{n-1}\\
&= (n-1)\left(\frac{\rho^{n-1}}{n-1}\Big|_0^1\right)\int_{\Omega'} \sin^{(n-1)-2}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\,d\varphi_2\cdots d\varphi_{n-1}\\
&= (n-1)\left(\int_0^1 \rho^{n-2}\,d\rho\right)\int_{\Omega'} \sin^{(n-1)-2}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\,d\varphi_2\cdots d\varphi_{n-1}\\
&= (n-1)\int_0^1 \rho^{n-2}\,d\rho\int_{\Omega'} \sin^{(n-1)-2}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\,d\varphi_2\cdots d\varphi_{n-1}
\end{aligned}$$

donde

$$\omega_{n-1} = \int_0^1 \rho^{n-2}\,d\rho\int_{\Omega'} \sin^{(n-1)-2}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\,d\varphi_2\cdots d\varphi_{n-1}$$

es el volumen de la $n-1$ esfera en $\mathbb{R}^{n-1}$. Por tanto:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f\circ r)(x) &= \int_0^\infty \rho^{n-1}f(\rho)\,d\rho\int_0^\pi e^{-i\|x\|\rho\cos\varphi_1}\sin^{n-2}\varphi_1\,d\varphi_1\int_{\Omega'}\sin^{n-3}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\,d\varphi_2\cdots d\varphi_{n-1}\\
&= (n-1)\omega_{n-1}\int_0^\infty \rho^{n-1}f(\rho)\,d\rho\int_0^\pi e^{-i\|x\|\rho\cos\varphi_1}\sin^{n-2}\varphi_1\,d\varphi_1\\
&= (n-1)\omega_{n-1}\int_0^\infty u^{n-1}f(u)\,du\int_0^\pi e^{-i\|x\|u\cos\phi}\sin^{n-2}\phi\,d\phi
\end{aligned}$$

y, para $u\in[0,\infty[$:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi e^{-i\|x\|u\cos\phi}\sin^{n-2}\phi\,d\phi &= \int_0^\pi (\cos(\|x\|u\cos\phi) - i\sin(\|x\|u\cos\phi))\sin^{n-2}\phi\,d\phi\\
&= \int_0^\pi \cos(\|x\|u\cos\phi)\sin^{n-2}\phi\,d\phi - i\int_0^\pi \sin(\|x\|u\cos\phi)\sin^{n-2}\phi\,d\phi
\end{aligned}$$

Analicemos ambas integrables. Sea $u\in[0,\infty[$:

- Afirmamos que
$$\int_0^\pi \cos(\|x\|u\cos\phi)\sin^{n-2}\phi\,d\phi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\|x\|u\cos\theta)\sin^{n-2}\theta\,d\theta$$
- Afirmamos que
$$\int_0^\pi \sin(\|x\|u\cos\phi)\sin^{n-2}\phi\,d\phi = 0$$

Por los dos incisos anteriores, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f\circ r)(x) &= (n-1)\omega_{n-1}\int_0^\infty u^{n-1}f(u)\,du\int_0^\pi e^{-i\|x\|u\cos\phi}\sin^{n-2}\phi\,d\phi\\
&= 2(n-1)\omega_{n-1}\int_0^\infty u^{n-1}f(u)\,du\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\|x\|u\cos\theta)\sin^{n-2}\theta\,d\theta\\
&= 2(n-1)\omega_{n-1}\int_0^\infty v_n(u\|x\|)f(u)u^{n-1}\,du
\end{aligned}$$

donde

$$v_n(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t\cos\theta)\sin^{n-2}\theta\,d\theta,\quad \forall t\in[0,\infty[$$

$\square$

Ejercicio 1.0.9
Haga lo siguiente:

i. Sea $h : [0, \infty[\to \mathbb{C}$ una función integrable en $[0, \infty[$. Sea $a > 0$, **demuestre** que existe la integral impropia

$$\int_a^{\to\infty} \frac{dx}{x} \int_0^\infty h(y) \sin xy \, dy$$

Sugerencia. Justifique la inversión del orden de las integraciones.

ii. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e}x & \text{si} \quad |x| < e \\ \frac{\operatorname{Sgn}(x)}{\log|x|} & \text{si} \quad |x| \geqslant e \end{cases}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Muestre que, para $a > 0$ no existe la integral impropia

$$\int_a^{\to\infty} \frac{f(x)}{x} \, dx$$

De este hecho y del inciso (i) **deduzca** que no existe $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tal que $f = \mathcal{F}g$. Así pues, la transformación de Fourier no es una aplicación suprayectiva de $L_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ en $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Solución:
De (i): Considere la función $f : [a, \infty[\times [0, \infty[\to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x, y) = \frac{h(y) \sin xy}{x}, \quad \forall (x, y) \in [a, \infty[\times [0, \infty[$$

Veamos que se cumplen tres condiciones:

- $\forall \beta \in [a, \infty]$, f es integrable en $[a, \beta] \times [0, \infty[$, pues

$$\begin{aligned} |f(x, y)| &= \left| \frac{h(y) \sin xy}{x} \right| \\ &\leqslant \frac{1}{a} |h(y)| \cdot |\sin xy| \\ &\leqslant \frac{1}{a} |h(y)|, \quad \forall (x, y) \in [a, \beta] \times [0, \infty[\end{aligned}$$

  donde la función $(x, y) \mapsto \frac{1}{a} |h(y)|$ es integrable en $[a, \beta] \times [0, \infty[$ ya que h es integrable y $[a, \beta]$ es un conjunto de medida finita.

- Sea $y \in [0, \infty[$. Afirmamos que la integral impropia

$$\int_a^{\to\infty} f(x, y) \, dx$$

  es convergente. En efecto, si $y = 0$ el resultado se tiene pues $f(x, 0) = 0$ para todo $x \in [a, \infty[$.

Para $M > a$ y $y > 0$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_a^M f(x,y)\,dx &= \int_a^M \frac{h(y)\sin xy}{x}\,dx \\
&= h(y)\int_a^M \frac{\sin xy}{x}\,dx, \text{ haciendo el cambio de variable } u = xy \\
&= h(y)\int_{ay}^{My} \frac{\sin u}{\frac{u}{y}}\,\frac{du}{y} \\
&= h(y)\int_{ay}^{My} \frac{\sin u}{u}\,du
\end{aligned}$$

como la integral impropia

$$\int_0^{\to\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$$

es convergente, en particular lo es

$$\int_a^{\to\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$$

se sigue que también lo es $\int_a^{\to\infty} f(x,y)\,dx$.

- Tomemos $\beta_0 > a$, se tiene que para todo $\beta > \beta_0$:

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^\beta f(x,y)\,dx\right| &\leqslant \left|\int_a^\beta \frac{h(y)\sin xy}{x}\,dx\right| \\
&\leqslant \left|h(y)\int_{ya}^{y\beta} \frac{\sin u}{u}\,du\right| \\
&\leqslant |h(y)|\left|\int_{ya}^{y\beta} \frac{\sin u}{u}\,du\right|
\end{aligned}$$

como

$$\int_{ya}^{\to\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$$

es convergente para todo $y > 0$, entonces para $\varepsilon = 1$ existe $M > a$ tal que

$$\left|\int_{ya}^{yM} \frac{\sin u}{u}\,du - \frac{\pi}{2}\right| < 1 \Rightarrow \left|\int_{ya}^{yM} \frac{\sin u}{u}\,du\right| < 1 + \frac{\pi}{2}$$

Luego, si $\beta_0 = M$, tenemos que

$$\beta > \beta_0 \Rightarrow \left|\int_a^\beta f(x,y)\,dx\right| < \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)|h(y)|$$

para todo $y \in [0,\infty[$ (en particular cuando $y = 0$, el valor de la integral de la derecha es cero), donde la función de la derecha es integrable en $[0,\infty[$.

Por el teorema de intercambio de integrales impropias, se sigue que

$$\begin{aligned}
\int_a^{\to\infty} \frac{dx}{x}\int_0^\infty h(y)\sin xy\,dy &= \int_a^{\to\infty} dx\int_0^\infty \frac{h(y)\sin xy}{x}\,dy \\
&= \int_0^\infty dy\int_a^{\to\infty} \frac{h(y)\sin xy}{x}\,dx \\
&= \int_0^\infty h(y)\,dy\int_{ya}^{\to\infty} \frac{\sin u}{u}\,du \\
\Rightarrow \left|\int_a^{\to\infty} \frac{dx}{x}\int_0^\infty h(y)\sin xy\,dy\right| &\leqslant \int_0^\infty \left|h(y)\,dy\int_{ya}^{\to\infty} \frac{\sin u}{u}\,du\right| \\
&= \int_0^\infty |h(y)|\left|\int_{ya}^{\to\infty} \frac{\sin u}{u}\,du\right|\,dy
\end{aligned}$$

Donde la función

$$y \mapsto \int_{ya}^{\to\infty} \frac{\sin y}{u}\, du, \quad \forall y \in [0, \infty[$$

es acotada (*probar*). Luego, se sigue que existe la integral impropia:

$$\int_a^{\to\infty} \frac{dx}{x} \int_0^\infty h(y) \sin xy\, dy$$

De (ii): Sea $a > 0$. Veamos primero que la función $x \mapsto f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, más aún, se tiene que

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$$

(es inmediato de la definición de f), por lo cual $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Por esta razón, basta con analizar el caso en que $a \geqslant e$. Veamos que para $M > a$

$$\begin{aligned}
\int_a^M \frac{f(x)}{x}\, dx &= \int_a^M \frac{dx}{x \log x}, \text{ haciendo el cambio de variable } u = \log x \Rightarrow dx = x\, du \\
&= \int_{\log a}^{\log M} \frac{du}{u} \\
&= \log|u| \Big|_{\log a}^{\log M} \\
&= \log|\log M| - \log|\log a|
\end{aligned}$$

por tanto,

$$\int_a^{\to\infty} \frac{f(x)}{x}\, dx = \lim_{M\to\infty} \int_a^M \frac{f(x)}{x}\, dx = \infty$$

Ahora, suponga que existe $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tal que

$$f = \mathcal{F} g$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_{-\infty}^\infty e^{-ixy} g(y)\, dy \\
&= \int_{-\infty}^\infty g(y) \cos xy\, dy + i \int_{-\infty}^\infty g(y) \sin xy\, dy
\end{aligned}$$

en particular, para $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x} &= \int_{-\infty}^\infty \frac{g(y)\cos xy}{x}\, dy + i \int_{-\infty}^\infty \frac{g(y)\sin xy}{x}\, dy \\
&= \int_{-\infty}^0 \frac{g(y)\cos xy}{x}\, dy + \int_0^\infty \frac{g(y)\cos xy}{x}\, dy + i\left(\int_{-\infty}^0 \frac{g(y)\sin xy}{x}\, dy + \int_0^\infty \frac{g(y)\sin xy}{x}\right) \\
&= \int_0^\infty \frac{g(-y)\cos -xy}{x}\, dy + \int_0^\infty \frac{g(y)\cos xy}{x}\, dy + i\left(\int_0^\infty \frac{g(-y)\sin -xy}{x}\, dy + \int_0^\infty \frac{g(y)\sin xy}{x}\right)
\end{aligned}$$

veamos que g impar casi en todo $\mathbb{R}$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
&f(x) = f(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow \int_{-\infty}^\infty e^{-ixy} g(y)\, dy = \int_{-\infty}^\infty e^{ixy} g(y)\, dy, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow \int_{-\infty}^\infty e^{-ixy} g(y)\, dy = \int_{-\infty}^\infty e^{-ixy} g(-y)\, dy, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow \int_{-\infty}^\infty e^{-ixy} \left[g(y) - g(-y)\right]\, dy = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

en particular, se cumple para todo $k \in \mathbb{Z}$. Como el sistema $\left\{e^{-ixk}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es total en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R},\mathbb{C})$, debe suceder que $g(y)-g(-y)=0$ para casi todo $y\in\mathbb{R}$. Por tanto, g es impar c.t.p. en $\mathbb{R}$. Luego,

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x} &= \int_0^\infty \frac{g(-y)\cos -xy}{x}\,dy + \int_0^\infty \frac{g(y)\cos xy}{x}\,dy + i\left(\int_0^\infty \frac{g(-y)\sin -xy}{x}\,dy + \int_0^\infty \frac{g(y)\sin xy}{x}\right)\\ &= -\int_0^\infty \frac{g(y)\cos xy}{x}\,dy + \int_0^\infty \frac{g(y)\cos xy}{x}\,dy + i\left(\int_0^\infty \frac{g(y)\sin xy}{x}\,dy + \int_0^\infty \frac{g(y)\sin xy}{x}\right)\\ &= 2i\int_0^\infty \frac{g(y)\sin xy}{x}\,dy\end{aligned}$$

Para $a>0$ se tiene que

$$\int_a^{\to\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx$$

no es convergente, pero por (i), se tiene que

$$\int_a^{\to\infty} 2i\,dx\int_0^\infty \frac{g(y)\sin xy}{x}\,dy = 2i\int_a^{\to\infty}\,dx\int_0^\infty \frac{g(y)\sin xy}{x}\,dy$$

si lo es, pues la función g es integrable en $[0,\infty[$, lo cual contradice la igualdad a la que se llegó anteriormente. Por tanto, f no puede ser la transformada de Fourier de ninguna función en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R},\mathbb{C})$.
$\square$

Ejercicio 1.0.10
Haga lo siguiente:

i. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ una función integrable en $\mathbb{R}$. Se supone que existe una función $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ localmente integrable en $\mathbb{R}$ tal que

$$f(x)=f(0)+\int_0^x\varphi,\quad \forall x\in\mathbb{R}\quad \text{y}\quad |\varphi(x)| \underset{|x|\to\infty}{=} O\left(\frac{1}{|x|^m}\right)$$

donde $m>2$. **Pruebe** que

$$|f(x)| \underset{|x|\to\infty}{=} O\left(\frac{1}{|x|^{m-1}}\right)$$

y que, para todo $x\in\mathbb{R}$, existen las sumas

$$\Phi(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi(x+k)\quad \text{y}\quad F(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}f(x+k)$$

siendo la convergencia absoluta y uniforme en $[-1,1]$, luego en $\mathbb{R}$. **Muestre** finalmente que

$$F(x)=F(0)+\int_0^x\Phi,\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

ii. F es una función periódica de periodo uno. **Demuestre** que los coeficientes de Fourier de F respecto al sistema O.N. $(e^{2\pi int})_{n\in\mathbb{Z}}$ son

$$\int_0^1 F(x)e^{-2\pi inx}\,dx=\mathcal{F}f(2\pi n),\quad \forall n\in\mathbb{Z}$$

Deduzca la fórmula Sumatoria de Poisson

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}f(x+k)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}f(x+k),\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

iii. Aplicando la fórmula sumatoria de Poisson a la función $x \mapsto e^{-\alpha|x|}$ para $\alpha > 0$, obtenga el desarrollo
$$\coth x = \frac{1}{x} + 2x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2\pi^2}, \quad \forall x \geqslant 0$$
Se define la **función theta** por
$$\Theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}, \quad \forall x > 0$$
Aplicando la fórmula sumatoria de Poisson a la función $x \mapsto e^{-\alpha x^2}$ para $\alpha > 0$, **pruebe** la identidad
$$\Theta(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}\Theta\left(\frac{1}{x}\right), \quad \forall x > 0$$

Solución:

De (i): Como
$$|\varphi(x)| \underset{|x|\to\infty}{=} O\left(\frac{1}{|x|^m}\right)$$
entonces existen $M \geqslant 0$ y $A > 0$ tales que
$$|x| > M \Rightarrow |\varphi(x)| \leqslant \frac{A}{|x|^m}$$
Al ser f integrable, se tiene que
$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$$
entonces
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$
Por tanto, de la definición de f tenemos que
$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{u\to\infty}\left(f(0) + \int_0^u \varphi(t)\,dt\right) \\ &= f(0) + \lim_{u\to\infty}\int_0^u \varphi(t)\,dt \\ \Rightarrow f(0) &= -\lim_{u\to\infty}\int_0^u \varphi(t)\,dt \end{aligned}$$
y,
$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{u\to-\infty}\left(f(0) + \int_0^u \varphi(t)\,dt\right) \\ &= f(0) - \lim_{u\to\infty}\int_u^0 \varphi(t)\,dt \\ \Rightarrow f(0) &= -\lim_{u\to-\infty}\int_u^0 \varphi(t)\,dt \end{aligned}$$
por ende,
$$\begin{aligned} f(x) &= -\lim_{u\to\infty}\int_0^u \varphi(t)\,dt + \int_0^x \varphi(t)\,dt \\ &= \lim_{u\to\infty}\left[-\int_0^u \varphi(t)\,dt + \int_0^x \varphi(t)\,dt\right] \\ &= \lim_{u\to\infty}\int_x^u \varphi(t)\,dt \end{aligned}$$

si $x \geqslant 0$. Si $x < 0$ tenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= -\lim_{u\to-\infty}\int_u^0 \varphi(t)\,dt + \int_0^x \varphi(t)\,dt \\ &= \lim_{u\to-\infty}\left(-\int_u^0 \varphi(t)\,dt - \int_x^0 \varphi(t)\,dt\right) \\ &= -\lim_{u\to-\infty}\int_u^x \varphi(t)\,dt \end{aligned}$$

Si $|x| > M$, tenemos dos casos:

- $x > M$, se tiene

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left|\lim_{u\to\infty}\int_x^u \varphi(t)\,dt\right| \\ &= \lim_{u\to\infty}\left|\int_x^u \varphi(t)\,dt\right| \\ &\leqslant \lim_{u\to\infty}\int_x^u |\varphi(t)|\,dt \\ &\leqslant A\lim_{u\to\infty}\int_x^u \frac{dt}{|t|^m} \\ &= A\lim_{u\to\infty}\int_x^u t^{-m}\,dt \\ &= A\lim_{u\to\infty}\left.\frac{t^{1-m}}{1-m}\right|_x^u \\ &= \frac{A}{1-m}\lim_{u\to\infty}\left.t^{1-m}\right|_x^u \\ &= \frac{A}{1-m}\lim_{u\to\infty}\left[u^{1-m} - x^{1-m}\right] \\ &= \frac{A}{m-1}x^{1-m} \\ &= \frac{A}{m-1}\cdot\frac{1}{|x|^{m-1}} \\ \therefore |f(x)| &\leqslant \frac{A}{m-1}\cdot\frac{1}{|x|^{m-1}} \end{aligned}$$

- $-x < -M$, de forma análoga se sigue que

$$|f(x)| \leqslant \frac{A}{m-1}\cdot\frac{1}{|x|^{m-1}}$$

De los dos incisos anteriores se concluye que

$$|x| > M \Rightarrow |f(x)| \leqslant \frac{A}{m-1}\cdot\frac{1}{|x|^{m-1}}$$

por ende,

$$|f(x)| \underset{|x|\to\infty}{=} O\left(\frac{1}{|x|^{m-1}}\right)$$

La convergencia absoluta de ambas sumas se sigue de forma inmediata de el hecho que

$$|f(x)| \underset{|x|\to\infty}{=} O\left(\frac{1}{|x|^{m-1}}\right) \quad \text{y} \quad |\varphi(x)| \underset{|x|\to\infty}{=} O\left(\frac{1}{|x|^{m}}\right)$$

veamos que es uniforme en $[-1,1]$. En efecto, sea $\varepsilon>0$, debemos encontrar un $N\in\mathbb{N}$ tal que $n\geqslant N$ implique

$$\sup_{x\in[-1,1]}\left|\Phi(x)-\sum_{k=-n}^{n}\varphi(x+k)\right|\leqslant\varepsilon$$

en otras palabras

$$\sup_{x\in[-1,1]}\left|\sum_{k\in U_n}\varphi(x+k)\right|\leqslant\varepsilon$$

donde

$$\begin{aligned}U_n&=\left\{y\in\mathbb{Z}\middle|y\leqslant -n \text{ ó } n\leqslant y\right\}\\&=(]-\infty,-n]\cup[n,\infty[)\cap\mathbb{Z}\end{aligned}$$

es decir que

$$\sup_{x\in[-1,1]}\left|\sum_{k=-\infty}^{-n}\varphi(x+k)+\sum_{k=n}^{\infty}\varphi(x+k)\right|\leqslant\varepsilon$$

En efecto, existe $M_1\geqslant 0$ tal que

$$|x|\geqslant M_1\Rightarrow\frac{A}{|x|^m}\leqslant\varepsilon$$

sea $N\in\mathbb{N}$ tal que $N\geqslant\text{máx}\{M,M_1\}$, entonces si $n\geqslant N$ (la idea está en ver la convergencia absoulta de $\sum_{k=-\infty}^{-n}\varphi(x+k)$).

De (ii): Veamos primero que

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 F(x)e^{-2\pi inx}\,dx &= \int_0^1 \left(F(0)+\int_0^x \Phi(y)\,dy\right)e^{-2\pi inx}\,dx\\
&= \int_0^1 \left(F(0)+\int_0^x \Phi(y)\,dy\right)e^{-2\pi inx}\,dx\\
&= \int_0^1 F(0)\,dx + \int_0^1 dx\int_0^x \Phi(y)e^{-2\pi inx}\,dy\\
&= F(0)+\int_0^1 dx\int_0^x \Phi(y)e^{-2\pi inx}\,dy\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)+\int_0^1 dx\int_0^x \Phi(y)e^{-2\pi inx}\,dy\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)+\int_0^1 dy\int_{1-y}^1 \Phi(y)e^{-2\pi inx}\,dx\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)+\int_0^1 \Phi(y)\,dy\int_{1-y}^1 e^{-2\pi inx}\,dx\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)+\int_0^1 \Phi(y)\,dy\int_{1-y}^1 e^{-2\pi inx}\,dx\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)+\int_0^1 \Phi(y)\left[\left.\frac{e^{-2\pi inx}}{-2\pi in}\right|_{1-y}^1\right]\,dy\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)+\int_0^1 \Phi(y)\left[\frac{e^{-2\pi in}-e^{-2\pi(1-y)in}}{-2\pi in}\right]\,dy\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)+\int_0^1 \Phi(y)\left[\frac{1-e^{-2\pi in}e^{-2\pi iny}}{-2\pi in}\right]\,dy\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)+\int_0^1 \Phi(y)\left[\frac{1-e^{-2\pi iny}}{-2\pi in}\right]\,dy\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)-\frac{1}{2\pi in}\int_0^1 \Phi(y)\left[1-e^{-2\pi iny}\right]\,dy\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)-\frac{1}{2\pi in}\int_0^1 \sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi(y+k)\left[1-e^{-2\pi iny}\right]\,dy
\end{aligned}
$$

(suponiendo que todo sale bien) y,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}f(2\pi n) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi inx}f(x)\,dx\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_k^{k+1} e^{-2\pi inx}f(x)\,dx\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_k^{k+1} \left(f(0)+\int_0^x \varphi(y)\,dy\right)e^{-2\pi inx}\,dx\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_k^{k+1} f(0)e^{-2\pi inx}\,dx+\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_k^{k+1} dx\int_0^x \varphi(y)e^{-2\pi inx}\,dy
\end{aligned}
$$

De (iii): Considere la función $h_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $x\mapsto e^{-\alpha|x|}$, se sabe que

$$
\mathcal{F}h_1(x)=\frac{2\alpha}{\alpha^2+x^2},\quad \forall x\in\mathbb{R}
$$

$\square$

Ejercicio 1.0.11
Haga lo siguiente:

i. Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x < 0$. Para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\Im z \leqslant 0$ se define

$$\mathcal{F}f(z) = \int_0^\infty e^{-izx} f(x)\, dx$$

Pruebe que esta defined tiene sentido, que $\mathcal{F}f$ es continua en el semiplano cerrado $\left\{z \in \mathbb{C} \middle| \Im z \leqslant 0\right\}$ y holomorfa en el semiplano abierto $\left\{z \in \mathbb{C} \middle| \Im z < 0\right\}$.

Sugerencia. El teorema de derivación de funciones defindas por integrales continúa siendo válido al sustituir el intervalo I por un abierto de $\mathbb{C}$.

ii. Sean $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tales que $f(x) = g(x) = 0$, $\forall x < 0$. **Muestre** que para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\Im z \leqslant 0$ se tiene

$$\mathcal{F}(f * g)(z) = \mathcal{F}f(z)\mathcal{F}g(z)$$

iii. Sean f, g como en el inciso (ii). Se supone además que $\mathcal{F}(f*g) = 0$ c.t.p. en $\mathbb{R}$. **Demuestre** que $f = 0$ c.t.p. en $\mathbb{R}$ o bien $g = 0$ c.t.p. en $\mathbb{R}$.

Sugerencia. Deduzca de (i) y (ii) que $\mathcal{F}f = 0$ o bien $\mathcal{F}g = 0$.

Solución:
De (i): Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $\Im z \leqslant 0$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left|e^{-izx} f(x)\right|\, dx &= \int_0^\infty \left|e^{-ix(\Re z + i\Im z)} f(x)\right|\, dx \\
&= \int_0^\infty \left|e^{-ix(\Re z + i\Im z)} f(x)\right|\, dx \\
&= \int_0^\infty \left|e^{-ix\Re z} e^{x\Im z} f(x)\right|\, dx \\
&= \int_0^\infty \left|e^{x\Im z}\right| |f(x)|\, dx
\end{aligned}$$

donde $x \geqslant 0$ y $\Im z \leqslant 0$, luego $e^{x\Im z} \leqslant 1$, para todo $x \in [0, \infty[$. Así

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left|e^{-izx} f(x)\right|\, dx &\leqslant \int_0^\infty |f(x)|\, dx \\
&= \int_{-\infty}^\infty |f(x)|\, dx
\end{aligned}$$

pues $f(x) = 0$ para todo $x < 0$. Como f es integrable, se sigue entonces que $\mathcal{F}f(z)$ está bien definida, para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\Im z \leqslant 0$.

Veamos que $\mathcal{F}f$ es una función continua en el semiplano cerrado

$$\mathcal{I} = \left\{z \in \mathbb{C} \middle| \Im z \leqslant 0\right\}$$

En efecto, considere la función $g : \mathbb{R} \times \mathcal{I} \to \mathbb{C}$ dada por

$$g(x, z) = e^{-izx} f(x)$$

para todo $(x, z) \in \mathbb{R} \times \mathcal{I}$. Claramente g está bien definida. Se tiene lo siguiente:

- Para todo $z \in \mathbb{C}$, $g^z(x) = e^{-izx} f(x)$ es integrable en $\mathbb{R}$ (se probó en el punto anterior), se define así

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \mathcal{F}f(z)\\ &= \int_{\mathbb{R}} g^z(x)\,dx\\ &= \int_0^\infty e^{-izx} f(x)\,dx\end{aligned}$$

- Para toda $x \in \mathbb{R}$, la función $g_x : \mathcal{I} \to \mathbb{C}$ tal que $z \mapsto e^{-izx} f(x)$ es continua en $z_0 \in \mathcal{I}$, para todo z_0.
- Existe $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tal que

$$\begin{aligned}|g(x,z)| &= \left|e^{-izx} f(x)\right|\\ &\leqslant |f(x)|\end{aligned}$$

  para todo $(x,z) \in \mathbb{R} \times \mathcal{I}$.

entonces, por el teorema de continuidad de funciones definidas por integrales, se sigue que Φ es continua en $z_0 \in \mathcal{I}$, para todo z_0, esto es que $\mathcal{F}f$ es continua en $\mathcal{I}$.

Para ver que es holomorfa en el semiplano abierto

$$\mathring{\mathcal{I}} = \left\{z \in \mathbb{C} \middle| \Im z < 0\right\}$$

considere nuevamente a la función $g : \mathbb{R} \times \mathring{\mathcal{I}} \to \mathbb{C}$ tal que

$$g(x,z) = e^{-izx} f(x)$$

Veamos que

- Para toda $z \in \mathring{\mathcal{I}}$, la función $x \mapsto g^z(x) = g(x,z)$ es integrable, se define así

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \mathcal{F}f(z)\\ &= \int_{\mathbb{R}} g(x,z)\,dx\\ &= \int_0^\infty e^{-izx} f(x)\,dx\end{aligned}$$

  para todo $z \in \mathring{\mathcal{I}}$.

- Sea $x \in \mathbb{R}$, como $z \mapsto e^{-izx}$ es holomorfa en $\mathring{\mathcal{I}}$, entonces existe la derivada de la función $g_x : \mathring{\mathcal{I}} \to \mathbb{C}$, dada por

$$\begin{aligned}g_x'(z) &= \lim_{w\to z} \frac{g_x(z) - g_x(w)}{z-w}\\ &= \lim_{w\to z} \frac{e^{-izx} f(x) - e^{-iwx} f(x)}{z-w}\\ &= f(x) \lim_{w\to z} \frac{e^{-izx} - e^{-iwx}}{z-w}\\ &= -ixf(x)e^{-izx}\end{aligned}$$

- Para todo $(x,z)\in\mathbb{R}\times\mathring{\mathcal{I}}$ se cumple que

$$\begin{aligned}|g_x'(z)| &= \left|-ixf(x)e^{-izx}\right|\\ &= \left|xe^{-izx}\right||f(x)|\\ &= \left|xe^{-ix(\Re z+i\Im z)}\right||f(x)|\\ &= \left|xe^{-ix\Re z}e^{x\Im z}\right||f(x)|\\ &= \left|xe^{x\Im z}\right||f(x)|\end{aligned}$$

donde

$$\lim_{x\to\infty} xe^{x\Im z}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{-x\Im z}}$$

que es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, por L'Hopital se sigue que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} xe^{x\Im z} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{-x\Im z}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{-\Im z e^{-z\Im z}}\\ &= 0\end{aligned}$$

pues el segundo límite existe. Así, existe $M>0$ tal que

$$x\geqslant M\Rightarrow \left|xe^{x\Im z}\right|<1$$

y, como la función $x\mapsto\left|xe^{x\Im z}\right|$ es continua en $[0,M]$, es acotada, luego existe $A_0\geqslant 1$ tal que

$$\left|xe^{x\Im z}\right|\leqslant A_0,\quad \forall x\in[0,M]$$

Por ende,

$$\left|xe^{x\Im z}\right|\leqslant \max\{A_0,1\}=B_0,\quad \forall x\in[0,\infty[$$

se sigue entonces que

$$|g_x'(z)|\leqslant B_0|f(x)|$$

(pues f es nula fuera de $[0,\infty[$), siendo f integrable.

Por los tres incisos anteriores y el teorema de derivación de funciones definidas por integrales, se sigue que Φ es holomorfa en $\mathring{\mathcal{I}}$ y su valor es

$$\Phi'(z)=-i\int_0^\infty xe^{-izx}f(x)\,dx$$

De (ii): como $f,g\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R},\mathbb{C})$, entonces su convolución $f*g\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Afirmamos que

$$f*g(x)=0,\quad \forall x<0$$

En efecto, sea $x<0$, se tiene que

$$\begin{aligned}f*g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy\\ &= \int_{0}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy \quad \text{, haciendo el CV } u=x-y\\ &= -\int_{x}^{-\infty} f(u)g(x-u)\,du\\ &= \int_{-\infty}^{x} f(u)g(x-u)\,du\\ &= 0\end{aligned}$$

pues $f(y)=g(y)=0$ para todo $y<0$. Así, $f*g$ cumple las condiciones de la definición anterior. Sea $z\in\mathbb{C}$ tal que $\Im z\leqslant 0$, veamos que

$$\mathcal{F}(f*g)(z)=\mathcal{F}f(z)\mathcal{F}g(z)$$

En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f*g)(z)&=\int_0^\infty e^{-izx}f*g(x)\,dx\\&=\int_0^\infty e^{-izx}\,dx\int_{-\infty}^\infty f(x-y)g(y)\,dy\\&=\int_0^\infty e^{-izx}\,dx\int_0^\infty f(x-y)g(y)\,dy\end{aligned}$$

Considere la función $(x,y)\mapsto e^{-izx}f(x-y)g(y)$. Afirmamos que esta función es integrable en $[0,\infty[\times[0,\infty[$. En efecto, es medible y, se cumple que

$$\begin{aligned}\left|e^{-izx}f(x-y)g(y)\right|&\leqslant\left|e^{-ix(\Re z+i\Im z)}\right|\left|f(x-y)g(y)\right|\\&=\left|e^{-ix\Re z}e^{x\Im z}\right|\left|f(x-y)g(y)\right|\\&=\left|e^{-ix\Re z}\right|\left|e^{x\Im z}\right|\left|f(x-y)g(y)\right|\\&=\left|e^{x\Im z}\right|\left|f(x-y)g(y)\right|\\&\leqslant\left|f(x-y)g(y)\right|,\quad\forall(x,y)\in[0,\infty[\times[0,\infty[\end{aligned}$$

pues, $\Im z\leqslant 0$, luego $x\Im z<\leqslant 0$. Como la función $(x,y)\mapsto f(x-y)g(y)$ es integrable en $[0,\infty[\times[0,\infty[$, se sigue que $(x,y)\mapsto e^{-izx}f(x-y)g(y)$ es integrable en $[0,\infty[\times[0,\infty[$. Así, por Fubini obtenemos que (haciendo el cambio de variable $u=x-y$):

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f*g)(z)&=\int_0^\infty e^{-izx}\,dx\int_0^\infty f(x-y)g(y)\,dy\\&=\int_0^\infty dy\int_0^\infty e^{-izx}f(x-y)g(y)\,dx\\&=\int_0^\infty dy\int_{-y}^\infty e^{-iz(u+y)}f(u)g(y)\,du\\&=\int_0^\infty e^{-izy}g(y)\,dy\int_0^\infty e^{-izu}f(u)\,du\\&=\left(\int_0^\infty e^{-izy}g(y)\,dy\right)\left(\int_0^\infty e^{-izu}f(u)\,du\right)\\&=\mathcal{F}g(z)\mathcal{F}f(z)\\&=\mathcal{F}f(z)\mathcal{F}g(z)\end{aligned}$$

pues $-y\leqslant 0$ para todo $y\in[0,\infty[$. Lo anterior prueba el resultado.

De (iii): Suponga que

$$\mathcal{F}(f*g)(x)=0$$

para casi todo $x\in\mathbb{R}$. Por la parte (i), se tiene que

$$\mathcal{F}(f*g)(x)=0,\quad\forall x\in\mathbb{R}$$

pues $\mathcal{F}(f*g)$ es continua en $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$. Entonces:

$$\mathcal{F}f(z)\mathcal{F}g(x)=0,\quad\forall x\in\mathbb{R}$$

Suponga que $\mathcal{F}g(x)\neq 0$ para algún $x\in\mathbb{R}$, esto es que

$$\left|\int_0^\infty e^{-ixy}g(y)\right|>0$$

Como $\mathcal{F}g$ es continua en x y $x\in L=\left\{z\in\mathbb{C}\Big|\Im z\leqslant 0\right\}$, existe $\delta>0$ tal que para todo $u\in B(x,\delta)\cap L$:

$$|\mathcal{F}g(u)|>0$$

luego entonces

$$\mathcal{F}f(z)=0,\quad \forall z\in B(x,\delta)\cap L$$

en particular, existe $u_0\in B(x,\delta)\cap L$ tal que $\Im u_0<0$, luego existe $r>0$ tal que

$$B(u_0,r)\subseteq B(x,\delta)\cap\mathring{L}$$

siendo $\mathcal{F}f$ holomorfa en $\mathring{L}$ y cero en un abierto contenido en $\mathring{L}$, se sigue que $\mathcal{F}f$ debe ser cero en todo $\mathring{L}$ (por el teorema de identidad en variable compleja) y, como $\mathcal{F}f$ es continua en L, debe ser cero en $\mathbb{R}$.

Por ende, $f=0$ c.t.p. en $\mathbb{R}$ (ya que el operador transformación de Fourier es inyectivo). $\square$

Ejercicio 1.0.12
Haga lo siguiente:

i. Sea $f\in\mathcal{L}_2(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Se define para todo $z\in\mathbb{C}$,

$$F(z)=\int_{-\infty}^\infty e^{-izx-\frac{x^2}{2}}\overline{f(x)}\,dx$$

Pruebe que F es holomorfa en $\mathbb{C}$ y que, para todo $n\in\mathbb{N}$ y para todo $z\in\mathbb{C}$,

$$F^{(n)}(z)=(-i)^n\int_{-\infty}^\infty x^ne^{-izx-\frac{x^2}{2}}\overline{f(x)}\,dx$$

Sugerencia. La misma que la del Problema 11.

ii. Se supone que f es ortogonal a todas las funciones de Hermite. Muestre que $F=0$ y **deduzca** que $f=0$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$.

Así pues, el sistema de funciones de Hermite normalizadas es un sistema ortonormal maximal en $L_2(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Sugerencia. Observe que $F^{(n)}(0)=0$, para todo $n\in\mathbb{N}$. La condición $F=0$ implica que la transformada de Fourier de la función integrable $x\mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}\overline{f(x)}$ es cero.

Solución:

De (i): Defina $h:\mathbb{R}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ dada por:

$$h(x,z)=e^{-izx-\frac{x^2}{2}}\overline{f(x)}$$

Veamos que se cumple lo siguiente:

- Sea $z\in\mathbb{C}$, se tiene que

$$\begin{aligned}\left|e^{-izx-\frac{x^2}{2}}\overline{f(x)}\right|&=\left|e^{-ix(\Re z+i\Im z)}e^{-\frac{x^2}{2}}\overline{f(x)}\right|\\&=\left|e^{-ix\Re z}\right|\left|e^{x\Im z-\frac{x^2}{2}}\right|\left|\overline{f(x)}\right|\\&=\left|e^{x\Im z-\frac{x^2}{2}}\right||f(x)|,\quad\forall x\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

donde por Hölder, se tiene que $x \mapsto \left| e^{x\Im z - \frac{x^2}{2}} \right| |f(x)|$ está en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, pues $x \mapsto e^{x\Im z - \frac{x^2}{2}}$ está en $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, al igual que f.

- Sea $x \in \mathbb{R}$. Es claro que la función

$$z \mapsto e^{-izx - \frac{x^2}{2}} \overline{f(x)}$$

es diferenciable en $\mathbb{C}$ (pues $z \mapsto e^{-izx-\frac{x^2}{2}}$) lo es, con derivada:

$$\frac{\partial h}{\partial z}(x,z) = (-i)xe^{-izx-\frac{x^2}{2}}\overline{f(x)}$$

Se tiene entonces que F está bien definida, para todo $z \in \mathbb{R}$.

- Para $z \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial h}{\partial z}(x,z)\right| &= \left|(-i)xe^{-izx-\frac{x^2}{2}}\overline{f(x)}\right| \\ &= \left|xe^{x\Im z - \frac{x^2}{2}}\right| |f(x)|\end{aligned}$$

sea $a > 0$, tenemos que para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\Im z < a$:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial h}{\partial z}(x,z)\right| &= \left|xe^{x\Im z - \frac{x^2}{2}}\right| |f(x)| \\ &= e^{x\Im z}\left|xe^{-\frac{x^2}{2}}\right| |f(x)| \\ &\leqslant e^{ax}\left|xe^{-\frac{x^2}{2}}\right| |f(x)| \\ &= \left|xe^{ax-\frac{x^2}{2}}\right| |f(x)|\end{aligned}$$

donde la función de la derecha es integrable en $\mathbb{R}$ y no depende de z.

Por el teorema de derivación de funciones definidas por integrales, se tiene que F es holomorfa en el semiplano abierto

$$\Omega_a = \left\{ z \in \mathbb{Z} \middle| \Im z < a \right\}$$

para todo $a > 0$. Luego al ser el $a > 0$ arbitrario, se sigue que F es homolorfa en $\mathbb{C}$. En particular:

$$F^{(1)} = (-i)\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-izx-\frac{x^2}{2}}\overline{f(x)}\,dx, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Más aún, como F es holomorfa en $\mathbb{C}$, tiene todas sus derivadas de todos sus órdenes y, por inducción se prueba de forma análoga al procedimiento anterior que

$$F^{(n)} = (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-izx-\frac{x^2}{2}}\overline{f(x)}\,dx, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

De (ii): Como f es ortogonal a todas las funciones de Hermite, se tiene que

$$\langle \varphi_n | f \rangle = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\overline{f(x)}\,dx = 0$$

donde H_n es un polinomio de grado n. Como se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$(-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}} \overline{f(x)}\, dx = 0$$

es decir, que

$$F^(n) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por ser F holomorfa en $\mathbb{C}$, admite expansión en serie de Taylor alrededor del 0, así:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^n(0)}{n!} z^n, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

(ya que el hecho de que F sea holomorfa en $\mathbb{C}$ implica que F es analítica, luego admite tal representación en serie de potencias). En particular, se tiene que

$$F(z) = F(0), \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

en particular

$$F(y) = F(0), \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

es decir que

$$\begin{aligned} F(0) &= F(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyx} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \overline{f(x)}\, dx \\ &= \mathcal{F}h(y) \end{aligned}$$

donde $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es la función $x \mapsto h(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \overline{f(x)}$ es una función en $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, por ende $\mathcal{F}h \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, esto es que

$$\lim_{y \to \infty} \mathcal{F}h(y) = 0 \iff \lim_{y \to \infty} F(y) = 0$$

lo cual solo puede suceder si $F(0) = 0$. Por tanto, $F = 0$. Pero de lo anterior, como la aplicación que a cada función la envía a su serie de Fourier es inyectiva, debe suceder que $h = 0$ c.t.p. en $\mathbb{R}$, es decir que $f = 0$ c.t.p. en $\mathbb{R}$. $\square$

Ejercicio 1.0.13

Haga lo siguiente:

i. **Demuestre** la fórmula.

$$D_x^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2}\, dy = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} D_y^n e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2}\, dy$$

ii. Se consideran las funciones de Hermite

$$\varphi(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} D^n e^{-x^2}$$

Pruebe que $\mathcal{F}_2 \varphi_n = (-1)^n \varphi_n$. Así pues, las funciones de Hermite son vectores propios para el operador $\mathcal{F}_2 \cdot$.

Sugerencia. Tranforme $\mathcal{F}_2 \varphi_n$ por la "fórmula de integración por partes de orden n".

$$\int_a^b f^{(n)} g = \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^{(n-k-1)} g^{(k)} \right] + (-1)^n \int_a^b f g^{(n)}$$

(al suponer $f^{(n)}$ y $g^{(n)}$ continuas en $[a,b]$). Después, use la fórmula del inciso (i).

Solución:

Considere la función $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ dada por

$$f(y,x)=e^{-y^2}e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2}$$

Se cumple para f lo siguiente:

- Sea $y\in\mathbb{R}$, entonces la función $x\mapsto f_y(x)=f(x,y)=e^{-y^2}e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2}$ es de clase C^∞ en $\mathbb{R}$ (por ser composición de funciones clases C^∞). Más aún, se tiene que

$$D_x^n\left(e^{-y^2}e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2}\right)=e^{-y^2}D_x^n e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2}$$

- Para todo $x\in\mathbb{R}$, las funciones $y\mapsto e^{-y^2}D_x^n e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2}$ son integrables en $\mathbb{R}$, con $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. En efecto, procederemos por inducción sobre n. Sea $x\in\mathbb{R}$:

  - El caso $n=0$ y $n=1$ son inmediatos, pues para todo $y\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
e^{-y^2}D_x^0 e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2}&=e^{-y^2+\frac{1}{2}(y-ix)^2}\\
&=e^{-y^2+\frac{1}{2}(y^2-2iyx-x^2)}\\
&=e^{-y^2+\frac{1}{2}y^2-iyx-\frac{1}{2}x^2}\\
&=e^{-\frac{y^2}{2}-iyx-\frac{x^2}{2}}\\
&=e^{-\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}}e^{-iyx}\\
\Rightarrow\left|e^{-y^2}D_x^0 e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2}\right|&\leqslant e^{-\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}}\\
&=e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{y^2}{2}}
\end{aligned}$$

  donde la función $y\mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{y^2}{2}}$ es integrable en $\mathbb{R}$. y,

$$e^{-y^2}D_x^1 e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2}=$$

  - Suponga que para algún $n\in\mathbb{N}$, las funciones

$$y\mapsto e^{-y^2}D_x^n e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2}\quad \text{y}\quad y\mapsto e^{-y^2}D_x^{n-1}e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2}$$

  son integrables en $\mathbb{R}$. Veamos que se cumple para $n+1$. En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned}
D_x^{n+1}\left(e^{-y^2}e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2}\right)&=e^{-y^2}D_x^{n+1}e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2}\\
&=D_x^n\left(D_x e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2}\right)\\
&=e^{-y^2}D_x^n\left(e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2}D_x\left[\frac{1}{2}(y-ix)^2\right]\right)\\
&=e^{-y^2}D_x^n\left(e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2}D_x\left[\frac{1}{2}(y-ix)^2\right]\right)\\
&=e^{-y^2}D_x^n\left(e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2}(-i)[y-ix]\right)\\
&=e^{-y^2}\left[(-i)D_x^n\left([y-ix]e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2}\right)\right]\\
&=e^{-y^2}\left[(-i)yD_x^n\left(e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2}\right)-D_x^n\left(xe^{\frac{1}{2}(y-ix)^2}\right)\right]\\
&=e^{-y^2}\left[(-i)yD_x^n\left(e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2}\right)-\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}D_x^{n-k}\left(e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2}\right)D_x^k(x)\right]\\
&=e^{-y^2}\left[(-i)yD_x^n\left(e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2}\right)-xD_x^n e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2}-D_x^{n-1}e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2}\right]
\end{aligned}$$

usando la fórmula de Leibniz para la derivada de un producto.

□