Notas de Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

21 de mayo de 2024

Índice general

Capítulo 1

Transformación de Fourier

La transformada de Fourier de una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{C}$ generaliza en cierta forma la noción de coeficietes de Fourier de funciones periódicas

1.1. Conceptos Fundamentales

Definición 1.1.1
Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Se definen $\mathcal{F}f, \mathcal{F}^*f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ como

$$\mathcal{F}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\left(x\middle|y\right)} f(y)\, dy \quad \text{y} \quad \mathcal{F}^*f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\left(x\middle|y\right)} f(y)\, dy$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Las funciones $\mathcal{F}f$ y $\mathcal{F}^*f$ se llaman las **transformaciones de Fourier de** f. Las aplicaciones $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^*$ de $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ en el conjunto de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{C}$ se llaman las **transformaciones de Fourier**.

Observación 1.1.1
Se tiene lo siguiente:

I. Los operadores $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^*$ son lineales de $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ en el espacio de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{C}$.

II. Las funciones $\mathcal{F}f(x)$ y $\mathcal{F}^*f(x)$ están definidas para todo $x \in \mathbb{R}^n$ si y sólo si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

III. En caso de existir, se tiene que $\mathcal{F}f(x) = \mathcal{F}^*f(-x)$.

Demostración:
De (i): Es claro que si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ entonces $\mathcal{F}f(x)$ y $\mathcal{F}^*f(x)$ están definidas para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Para la recíproca, en particular están definidas para $x = \vec{0}$, es decir que

$$\mathcal{F}f\left(\vec{0}\right) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\left(\vec{0}\middle|y\right)} f(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} e^{0} f(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, dy < \infty$$

luego $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

De (ii): Es inmediata. ■

Definición 1.1.2

Sea $f \in \mathcal{L}_1([0,\infty[,\mathbb{C})$. Se definen

$$\mathcal{F}_c f(x) = \int_0^\infty f(y)\cos xy\,dy \quad \text{y} \quad \mathcal{F}_s f(x) = \int_0^\infty f(y)\sin xy\,dy$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Las funciones $\mathcal{F}_c f$ y $\mathcal{F}_s f$ se llaman **las trasnformadas coseno y seno de Fourier de** f.

Definición 1.1.3
Sea $f : [0,\infty[\to \mathbb{C}$ una función. Se definen las funciones f^P y f^I de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ como

$$f^P(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ f(-x) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

y,

$$f^I(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -f(-x) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Proposición 1.1.1
Sea $f \in \mathcal{L}_1([0,\infty[,\mathbb{C})$. Se tiene

$$\mathcal{F} f^P(x) = 2\mathcal{F}_c f(x) \quad \text{y} \quad \mathcal{F} f^I(x) = -2i\mathcal{F}_2 f(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostración:
Sea $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} f^P(x) &= \int_{\mathbb{R}} f^P(y) e^{-i\left(x\middle|y\right)}\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f^P(y)e^{-ixy}\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{0} f^P(y)e^{-ixy}\,dy + \int_0^\infty f^P(y)e^{-ixy}\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{0} f(-y)e^{-ixy}\,dy + \int_0^\infty f(y)e^{-ixy}\,dy \\
&= \int_0^\infty f(y)e^{ixy}\,dy + \int_0^\infty f(y)e^{-ixy}\,dy \\
&= \int_0^\infty f(y)\left[e^{ixy} + \overline{e^{ixy}}\right]\,dy \\
&= \int_0^\infty f(y)\left[2\Re(e^{ixy})\right]\,dy \\
&= \int_0^\infty 2f(y)\cos xy\,dy \\
&= 2\int_0^\infty f(y)\cos xy\,dy \\
&= 2\mathcal{F}_c f(x)
\end{aligned}$$

y,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}f^I(x) &= \int_{\mathbb{R}} f^I(y)e^{-ixy}\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{0} f^I(y)e^{-ixy}\,dy + \int_{0}^{\infty} f^I(y)e^{-ixy}\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{0} (-f(-y))e^{-ixy}\,dy + \int_{0}^{\infty} f(y)e^{-ixy}\,dy \\
&= -\int_{0}^{\infty} f(y)e^{ixy}\,dy + \int_{0}^{\infty} f(y)e^{-ixy}\,dy \\
&= \int_{0}^{\infty} f(y)\left[-e^{ixy} + e^{-ixy}\right]\,dy \\
&= \int_{0}^{\infty} f(y)\left[-\cos xy - i\sin xy + \cos(-xy) + i\sin(-xy)\right]\,dy \\
&= \int_{0}^{\infty} f(y)\left[-2i\sin xy\right]\,dy \\
&= -2i\int_{0}^{\infty} f(y)\sin xy\,dy \\
&= -2i\mathcal{F}_s f(x)
\end{aligned}
$$

lo que prueba el resultado. ■

Corolario 1.1.1
Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

I. Si f es par, entonces $\mathcal{F}f(x) = 2\int_0^\infty f(y)\cos xy\,dy$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

II. Si f es impar, entonces $\mathcal{F}f(x) = -2i\int_0^\infty f(y)\sin xy\,dy$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.1.1
Se tiene lo siguiente:

I. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función $f = \chi_I$ donde I es un intervalo con extremos $a < b$ en $\mathbb{R}$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_I(y)e^{-ixy}\,dy \\
&= \int_a^b e^{-ixy}\,dy \\
&= \begin{cases} \frac{e^{-ixb}-e^{-ixa}}{-ix} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ b-a & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

En particular, si $a > 0$ se tiene que

$$
\mathcal{F}\chi_[-a,a](x) = \begin{cases} \frac{2\sin ax}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 2a & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}
$$

Como $\mathcal{F}\chi_[-a,a]$ no es integrable en $\mathbb{R}$ se concluye que, en general, la transformada de Fourier de una función integrable no necesariamente es integrable.

II. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función

$$
f(x) = e^{-k|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}
$$

donde $k > 0$. Como f es integrable, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k|y|}e^{-ixy}\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{ky}e^{-ixy}\,dy + \int_{0}^{\infty} e^{-ky}e^{-ixy}\,dy \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-ky}e^{ixy}\,dy + \int_{0}^{\infty} e^{-ky}e^{-ixy}\,dy \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-ky}e^{(-k+ix)y}\,dy + \int_{0}^{\infty} e^{-ky}e^{(-k-ix)y}\,dy \\
&= \frac{-1}{-k+ix} + \frac{-1}{-k-ix} \\
&= \frac{k+ix+k-ix}{k^2+x^2} \\
&= \frac{2k}{k^2+x^2}
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.1.2
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función

$$f(x) = e^{-kx^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

donde $k > 0$. Como f es par se tiene que

$$\mathcal{F}f(x) = 2\int_{0}^{\infty} e^{-ky^2}\cos xy\,dy$$

Sea $g(x) = \int_0^\infty e^{-ky^2}\cos xy\,dy$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se afirma que

$$g'(x) = -\int_{0}^{\infty} ye^{-ky^2}\sin xy\,dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En efecto, observemos que

$$\left|ye^{-ky^2}\sin xy\right| \leqslant ye^{-ky^2}, \quad \forall y \geqslant 0$$

donde la función de la derecha es integrable e independiente de x (se nota fácilmente que una de sus antiderivadas es $y \mapsto -\frac{1}{2k}e^{-ky^2}$, por el T.F.C. II evaluando en 0 e ∞ se obtiene que la función original es integrable en $[0, \infty[$). Por el Teorema de derivación se sigue que

$$g'(x) = -\int_{0}^{\infty} ye^{-ky^2}\sin xy\,dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Veamos ahora que

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \int_0^\infty ye^{-ky^2}\sin xy\, dy \\
&= -\left[-\frac{1}{2k}e^{-ky^2}\sin xy\Big|_0^\infty + \frac{1}{2k}\int_0^\infty xe^{-ky^2}\cos xy\, dy\right] \\
&= -\left[0 - 0 + \frac{x}{2k}\int_0^\infty e^{-ky^2}\cos xy\, dy\right] \\
&= -\frac{x}{2k}\int_0^\infty e^{-ky^2}\cos xy\, dy \\
&= -\frac{x}{2k}g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
g'(x) + \frac{x}{2k}g(x) = 0, &\quad \forall x \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow e^{\frac{x^2}{4k}}\left(g'(x) + \frac{x}{2k}g(x)\right) = 0, &\quad \forall x \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{\frac{x^2}{4k}}g(x)\right)(x_0) = 0, &\quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow e^{\frac{x^2}{4k}}g(x) = c, &\quad \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

En particular,

$$\begin{aligned}
c &= g(0) \\
&= \int_0^\infty e^{-ky^2}\, dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{k}}\int_0^\infty e^{-u^2}\, du \\
&= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{k}}
\end{aligned}$$

Por ende,

$$g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}}e^{-\frac{x^2}{4k}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

De donde se sigue que

$$\mathcal{F}f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{k}}e^{-\frac{x^2}{4k}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En particular, si $k = \frac{1}{2}$ entonces $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y,

$$\mathcal{F}f(x) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{2\pi}f(x)$$

es decir que f es un vector propio del operador transformada de Fourier.

Proposición 1.1.2
Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

I. Si $g(x) = e^{i\left(a\middle|y\right)} f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\mathcal{F}g(x) = \mathcal{F}f(x-a), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

II. Si $g(x) = f(x-a)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\mathcal{F}g(x) = e^{-i\left(x\middle|a\right)} \mathcal{F}f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

III. Si $g(x) = \overline{f(-x)}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\mathcal{F}g(x) = \overline{\mathcal{F}f(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

IV. Sea $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Si $g(x) = f(\frac{x}{\lambda})$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\mathcal{F}g(x) = |\lambda|^n \mathcal{F}f(\lambda x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Demostración:

De (i): Veamos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\left(x\middle|y\right)} g(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\left(x\middle|y\right)} e^{i\left(a\middle|y\right)} f(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\left(x-a\middle|y\right)} f(y)\, dy \\
&= \mathcal{F}f(x-a)
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

De (ii): Veamos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\left(x\middle|y\right)} g(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\left(x\middle|y\right)} f(y-a)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\left(x\middle|u+a\right)} f(u)\, du \\
&= e^{-i\left(x\middle|a\right)} \mathcal{F}f(x)
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

De (iii): Veamos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\left(x\middle|y\right)} \overline{f(-y)}\, dy \\
&= \overline{\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\left(x\middle|y\right)} \overline{f(y)}\, dy} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\left(x\middle|y\right)} f(y)\, dy \\
&= \overline{\mathcal{F}f(x)}
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

De (iv): Veamos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\left(x\middle|y\right)} g(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\left(x\middle|y\right)} f\left(\frac{y}{\lambda}\right)\, dy, \ \text{haciendo el cambio de variable } u = \frac{y}{\lambda} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\left(x\middle|\lambda u\right)} f(u)\ |\lambda|^n\, du \\
&= |\lambda|^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\left(\lambda x\middle|u\right)} f(u)\, du \\
&= |\lambda|^n\, \mathcal{F}f(\lambda x)
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. ■