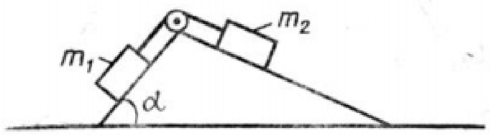
Lista 5.

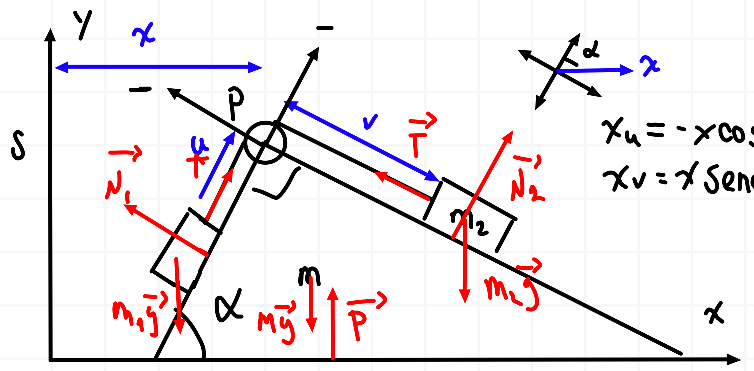
1. Dos bloques de masas m_1 y m_2 están conectados por medio de una cuerda inextensible de masa despreciable que pasa por una polea lisa A que está fija a una cuña rectangular de masa m, ésta a su vez se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal lisa de masa m. Calcule el desplazamiento de la cuña sobre el plano horizontal cuando la masa m_1 se desliza hacia abajo una distancia h.



R. $\Delta x = \frac{(m_1 \cos\alpha + m_2 \operatorname{sen}\alpha)h}{m+m_1+m_2}$

Sol.

Considere el sistema como el mostrado en la figura.



Por segunda Ley, para el sistema conformado por m, m_1 y m_2:

$x_u = -x\cos\alpha$
$x_v = x\operatorname{sen}\alpha$

$$\vec{F}^{(e)} = M_T \ddot{\vec{r}}_{cm}$$

donde $\vec{r}_{cm}$ es el vector posición del centro de masa respecto a S, $M_T = m + m_1 + m_2$, $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ y $\vec{r}$ los vectores posición de m_1, m_2 y m, respectivamente. Como:

$$M_T \vec{r}_{cm} = m\vec{r} + m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2$$

y $\vec{F}^{(e)} = (m+m_1+m_2)\vec{g} + \vec{P}$, en componentes:

$$\begin{cases} 0 = m\ddot{x} + m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 \\ M_T g - P = m\ddot{y} + m_1\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_2 \end{cases}$$

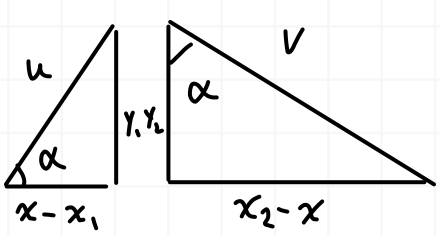
En particular, en x:

$$m\dot{x} + m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 = cte$$

i.e el centro de masa se mueve en x a una vel. cte. En $t=0$ todo está en reposo (desde S), así:

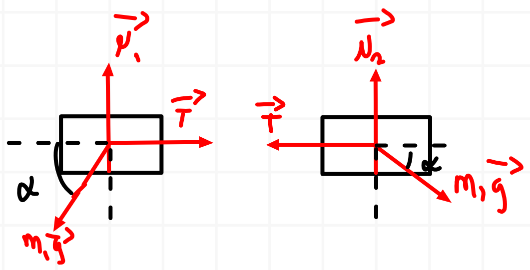
$$m\dot{x} + m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 = 0 \quad \dots (1)$$

Como la polea está unida a la masa m, su aceleración es $\ddot{x}$. Analizando a m_1 y m_2 desde P:



$$\vec{N}_1 + m_1\vec{g} + \vec{T} = m_1(\ddot{\vec{r}}_{P_1} + \ddot{\vec{r}})$$
$$\vec{N}_2 + m_2\vec{g} + \vec{T} = m_2(\ddot{\vec{r}}_{P_2} + \ddot{\vec{r}})$$

Teniendo los diagramas de cuerpo libre, obtenemos:



$$\begin{cases} -N_1 + m_1 g \operatorname{sen}\alpha = m_1 \ddot{x}_v \\ -T + m_1 g \cos\alpha = m_1(\ddot{u} + \ddot{x}_u) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -T + m_2 g \cos\alpha = m_2(\ddot{v} + \ddot{x}_v) \\ -N_2 + m_2 g \operatorname{sen}\alpha = m_2 \ddot{x}_u \end{cases}$$

Donde $x_u = -x\cos\alpha$ y $x_v = x\operatorname{sen}\alpha$. Por tanto:

$$\Rightarrow \begin{cases} -N_1 + m_1 g \operatorname{sen}\alpha = m_1 \ddot{x} \operatorname{sen}\alpha & (2) \\ -T + m_1 g \cos\alpha = m_1(\ddot{u} - \ddot{x}\cos\alpha) & (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -T + m_2 g \cos\alpha = m_2(\ddot{v} + \ddot{x}\operatorname{sen}\alpha) & (4) \\ -N_2 + m_2 g \operatorname{sen}\alpha = m_2 \ddot{x}\cos\alpha & (5) \end{cases}$$

Como la cuerda es inextensible, $u+v=cte \Rightarrow \ddot{u} = -\ddot{v}$. Sustituyendo e igualando 9) y 5):

$$m_1 g \cos\alpha - m_1\ddot{u} + m_1\ddot{x}\cos\alpha = m_2 g\cos\alpha - m_2\ddot{v} - m_2\ddot{x}\operatorname{sen}\alpha$$

$$\Rightarrow (m_1 - m_2) g\cos\alpha + (m_1\cos\alpha + m_2\operatorname{sen}\alpha)\ddot{x} = m_1\ddot{u} - m_2\ddot{v} = (m_1+m_2)\ddot{u} \quad (6)$$

Pero:

$$\ddot{u}\cos\alpha = \ddot{x} - \ddot{x}_1, \quad y \quad \ddot{v}\operatorname{sen}\alpha = \ddot{x}_2 - \ddot{x}$$

Por tanto, de (2):

$$N g\cos\alpha + K\ddot{x} = M\ddot{u} = M\frac{\ddot{x} - \ddot{x}_1}{\cos\alpha}, \quad M = m_1 + m_2,\ N = m_1 - m_2 \ y \ K = m_1\cos\alpha + m_2\operatorname{sen}\alpha$$

$$N g\cos\alpha + K\ddot{x} = M\frac{\ddot{x} - \ddot{x}_2}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Luego:

$$\begin{cases} N g\cos^2\alpha + K\ddot{x}\cos\alpha = M\ddot{x} - M\ddot{x}_1 \\ N g\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + K\ddot{x}\operatorname{sen}\alpha = M\ddot{x} - M\ddot{x}_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 = \left(1 - \frac{K}{M}\cos\alpha\right)\ddot{x} - \frac{N}{M} g\cos^2\alpha \\ \ddot{x}_2 = \left(1 - \frac{K}{M}\operatorname{sen}\alpha\right)\ddot{x} - \frac{N}{M} g\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \end{cases}$$

Por 1):

$$m\ddot{x} + m_1\left(1 - \frac{K}{M}\cos\alpha\right)\ddot{x} - \frac{N m_1 g\cos^2\alpha}{M} + m_2\left(1 - \frac{K}{M}\operatorname{sen}\alpha\right)\ddot{x} - \frac{N m_2 g\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{M} = 0$$

$$\Rightarrow (m+m_1+m_2)\ddot{x} + \left(-\frac{Km_1}{M}\cos\alpha - \frac{Km_2}{M}\operatorname{sen}\alpha\right)\ddot{x} + \left(-\frac{Ng\cos\alpha}{M}\right)(m_1\cos\alpha + m_2\operatorname{sen}\alpha) = 0$$

Sea $M_T = m+m_1+m_2$. Vemos que:

$$-\frac{K}{M}(m_1\cos\alpha + m_2\operatorname{sen}\alpha) = -\frac{K^2}{M}$$

Luego:

$$M_T\ddot{x} - \frac{K^2}{M}\ddot{x} - \frac{Ng\cos\alpha}{M}K = 0$$

$$\Rightarrow \left(M_T - \frac{K^2}{M}\right)\ddot{x} = \frac{Ng\cos\alpha}{M}K$$

Como $\dot{x}(0) = x(0) = 0$, entonces:

$$\left(M_T - \frac{K^2}{M}\right)x = \frac{NKg\cos\alpha}{2M}t^2$$

Además $(x-x_1)\sec\alpha = u$. Por tanto:

$$\ddot{u} = \left(\ddot{x} - \left(1 - \frac{K}{M}\cos\alpha\right)\ddot{x} + \frac{N}{M}g\cos^2\alpha\right)\sec\alpha$$

$$= \frac{K}{M}\ddot{x} + \frac{N}{M}g\cos\alpha$$

Con $\dot{u}(0) = 0$ y $u(0) = c$, entonces:

$$u - c = \frac{K}{M}x + \frac{N}{2M}g\cos\alpha\, t^2$$

En $u(t_1)$ y $u(t_2)$:

$$u(t_2) - u(t_1) = \frac{K}{M}\left(x(t_2) - x(t_1)\right) + \frac{Ng\cos\alpha}{2M}(t_2^2 - t_1^2)$$

Pero:

$$\frac{Ng\cos\alpha}{2M}t^2 = \frac{1}{K}\left(M_T - \frac{K^2}{M}\right)x$$

$$\Rightarrow \Delta u = \frac{K}{M}\Delta x + \frac{1}{K}\left(M_T - \frac{K}{M}\right)\Delta x$$

$$= \Delta x\left(\frac{K}{M} + \frac{M_T}{K} - \frac{K}{M}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta u = \frac{M_T}{K}\Delta x$$

$$\therefore \Delta x = \frac{M_T\Delta u}{K}$$

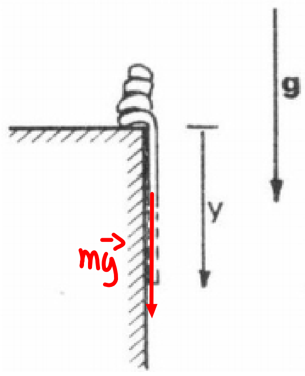
Cuando $\Delta u = h$, tenemos:

$$\Delta x = \frac{(m+m_1+m_2)h}{m_1\cos\alpha + m_2\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\therefore \Delta x = \frac{(m+m_1+m_2)h}{m_1\cos\alpha + m_2\operatorname{sen}\alpha} \;//$$

$\square$

2. Considere una cadena uniforme de longitud a inicialmente con una parte de longitud b colgando sobre la orilla de una mesa y la parte restante de longitud (a − b) enrollada en la orilla. Calcule la velocidad y aceleración de la parte de cadena que cuelga en función de su longitud y la velocidad y aceleración cuando el último eslabón abandona el extremo de la mesa.



Longitud de la cadena: a

$Y(0)=b$

$\dot{Y}(0)=0$

R. $\dot{y}^2 = 2g(y^3 - b^3)/3y^2 \qquad \ddot{y} = g - 2g(y^3 - b^3)/3y^3$

Sol.

Analicemos a la parte de la cadena que está cayendo por el borde. Sea m la masa de la cadena cayendo en el instante t. Si M es la masa total de la cadena, como la cadena es uniforme tiene una masa m dada por:

$$m = \lambda y, \text{ donde } \lambda = \frac{M}{a}$$

Así $\frac{dm}{dt} = \lambda \dot{y}$. Por la ec. de Meschersky:

$$\vec{F}^{(e)} = m\ddot{\vec{r}} - \frac{dm}{dt}(\vec{u} - \dot{\vec{r}})$$

en este caso, $\dot{\vec{r}} = \dot{y}$ (trabajando sólo en una dimensión). Y $\vec{u} = 0$ (la masa entrante no se mueve). Por tanto:

$$mg = m\ddot{y} - \lambda\dot{y}(0 - \dot{y})$$

$$\Rightarrow \lambda y g = \lambda y\ddot{y} + \lambda\dot{y}^2$$

$$\Rightarrow yg = y\ddot{y} + \dot{y}^2, \text{ como } \frac{d}{dt}(y\dot{y}) = y\ddot{y} + \dot{y}^2 : \ldots \quad (0)$$

$$\Rightarrow yg = \frac{d}{dt}(y\dot{y})$$

$$\Rightarrow y^2\dot{y}g = y\dot{y}\frac{d}{dt}(y\dot{y}) \ldots \quad (1)$$

integrando (1):

$$\Rightarrow g\int_0^t y^2 \cdot \frac{dy}{dt}\,dt = \int_0^t y\dot{y}\frac{d}{dt}(y\dot{y})\,dt$$

$$\Rightarrow g\,\frac{y^3}{3}\Big|_{y(0)}^{y} = \frac{(y\dot{y})^2}{2}\Big|_{y\dot{y}(0)}^{y\dot{y}}$$

$$\Rightarrow \frac{g}{3}(y^3 - b^3) = \frac{1}{2}y^2\dot{y}^2$$

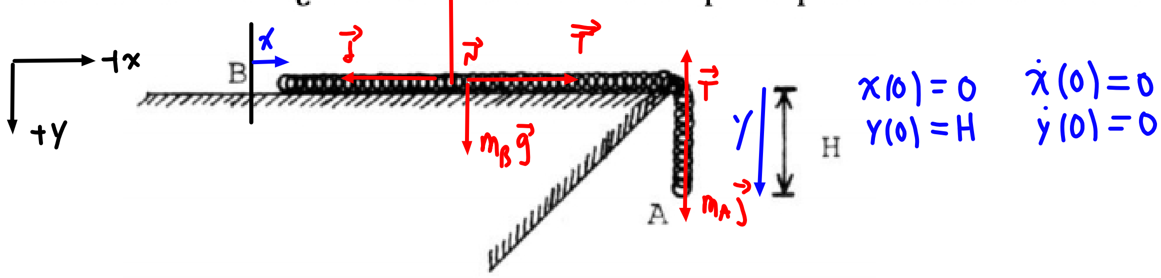
$$\Rightarrow \dot{y}^2 = \frac{2g(y^3-b^3)}{3y^2}$$

y, para $\ddot{y}$ por (0):

$$yg = y\ddot{y} + \dot{y}^2$$
$$\Rightarrow g - \frac{\dot{y}^2}{y} = \ddot{y}$$
$$\Rightarrow \ddot{y} = g - \frac{2g(y^3-b^3)}{3y^3}$$

$\square$

3. Se sujeta una cadena inextensible de longitud L y masa λ por unidad de longitud sobre una superficie horizontal rugosa en la posición mostrada en la figura. Si el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto es μ, obtenga la posición de la cadena en función del tiempo, desde que inicia su movimiento hasta que está a punto de separarse de la superficie mencionada. ¿Cuál es el dominio de H para que exista movimiento?



R. $x(t) = \left(H - \frac{\mu L}{1+\mu}\right) \cosh \sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu)}t + \frac{\mu L}{1+\mu}$

Sol.

Analicemos primero a la masa en A.

A) Veamos que $m_A = \lambda y$. Por tanto, por la ec. de Meschersky:

$$\vec{F}_A^{(e)} = m_A \ddot{\vec{r}}_A - \frac{dm_A}{dt}(\vec{u}_A - \vec{v}_A)$$

Donde $\vec{F}_A^{(e)} = m_A\vec{g} + \vec{T}$, $\frac{dm_A}{dt} = \lambda\dot{y}$, $\vec{u}_A = \dot{y}$, $\vec{v}_A = \dot{y}$ (respecto a S_A). Entonces:

$$\lambda y g - T = \lambda y \ddot{y} - \lambda\dot{y}(\dot{y} - \dot{y})$$
$$\Rightarrow T = \lambda y g - \lambda y \ddot{y} \quad \dots (1)$$

B) Para B, tenemos que:

$$\vec{F}_B^{(e)} = m_B \ddot{\vec{r}}_B - \frac{dm_B}{dt}(\vec{u}_B - \vec{v}_B)$$

Donde $m_B = \lambda(L-H-x)$, $\frac{dm_B}{dt} = -\lambda\dot{x}$, $\vec{u}_B = \dot{y}\hat{\imath}$ y $\vec{v}_B = \dot{x}\hat{\imath}$, $\vec{F}_B^{(e)} = \vec{N} + \vec{f} + m_B\vec{g} + \vec{T}$. Por tanto:

$$\vec{N} + \vec{f} + m_B\vec{g} + \vec{T} = \lambda(L-H-x)\ddot{x}\hat{\imath} + \lambda\dot{x}\cancel{(\dot{y}\hat{\imath} - \dot{x}\hat{\imath})}^{0}$$
$$\Rightarrow -N\hat{\jmath} - \mu N\hat{\imath} + \lambda(L-H-x)g\hat{\jmath} + T\hat{\imath} = \lambda(L-H-x)\ddot{x}\hat{\imath}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\mu N + T = \lambda(L-H-x)\ddot{x} \ldots (2) \\ -N + \lambda(L-H-x)g = 0 \ldots (3) \end{cases}$$

Notemos además que $L-y+x = L-H$. Por tanto (2) y (3) se convierten en:

$$L-y = L-H-x \Rightarrow \dot{y} = \dot{x} \quad y \quad \ddot{y} = \ddot{x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\mu N + T = \lambda(L-y)\ddot{y} \ldots (4) \\ -N + \lambda(L-y)g = 0 \ldots (5) \end{cases}$$

por (1):

$$-\mu N + \lambda y g - \lambda y \ddot{y} = \lambda(L-y)\ddot{y}$$

y, por (5): $\mu N = \mu\lambda(L-y)g$. Luego:

$$-\mu\lambda(L-y)g + \lambda y g - \cancel{\lambda y}\ddot{y} = \lambda L\ddot{y} - \cancel{\lambda y}\ddot{y}$$

$$\Rightarrow -\mu\lambda L + \mu\lambda y g + \lambda y g = \lambda L\ddot{y}$$

$$\Rightarrow -\mu L g + \mu y g + y g = L\ddot{y}$$

$$\Rightarrow \ddot{y} - \frac{g}{L}(\mu+1)y + \mu g = 0 \ldots (6)$$

La solución de esta ecuación diferencial es:

$$y(t) = C_1 e^{-\sqrt{\frac{g}{L}(\mu+1)}\,t} + C_2 e^{\sqrt{\frac{g}{L}(\mu+1)}\,t} + y_p(t)$$

donde $y_p(t) = At^2 + Bt + C$. Veamos que: $\dot{y}_p(t) = 2At + B$ y $\ddot{y}_p(t) = 2A$. En (6):

$$2A - \frac{g}{L}(\mu+1)(At^2 + Bt + C) + \mu g = 0$$

entonces $A = B = 0$ y:

$$\mu g = \frac{g}{L}(\mu+1)C$$

$$\Rightarrow C = \frac{\mu L}{1+\mu}$$

Por ende:

$$y(t) = C_1 e^{-\sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu)}\,t} + C_2 e^{\sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu)}\,t} + \frac{\mu L}{1+\mu}$$

$$\Rightarrow \dot{y}(t) = \sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu)}\left(-C_1 e^{-\sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu)}\,t} + C_2 e^{\sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu)}\,t}\right)$$

Como $y(0) = H$ y $\dot{y}(0) = 0$:

$$\Rightarrow H = C_1 + C_2 + \frac{\mu L}{1+\mu}$$

$$0 = \sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu)}\,(-C_1+C_2)$$

$$\Rightarrow C_1 = C_2$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{1}{2}\left(H-\frac{\mu L}{1+\mu}\right)$$

Por tanto:

$$y(t) = \left(H-\frac{\mu L}{1+\mu}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(e^{-\sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu)}\,t}+e^{\sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu)}\,t}\right)+\frac{\mu L}{1+\mu}$$

Como $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^{-x}+e^{x})$:

$$\Rightarrow y(t) = \left(H-\frac{\mu L}{1+\mu}\right)\cdot\cosh\left(\sqrt{\frac{g}{L}(1+\mu)}\,t\right)+\frac{\mu L}{1+\mu}$$

$\square$

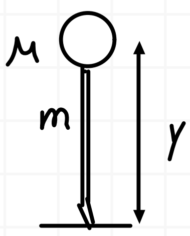
4. Una masa M unida al extremo de una cadena muy larga de masa λ por unidad de longitud se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_0. Calcule la altura alcanzada por M y la velocidad de M cuando regresa a tierra.

R. $h = (M/\lambda)\left(\sqrt[3]{1+(3\lambda v_0^2/2Mg)}-1\right)$ $\qquad v = \sqrt{2gh}$

Sol.

Considere el sistema como el mostrado en la figura: en este caso $y(0)=0$ y $\dot y(0)=v_0$. Por la ec. de Meschesky:

$$\vec F^{(e)} = M_T\ddot{\vec r} - \frac{dM_T}{dt}(\vec u - \vec v)$$



Donde $\vec F^{(e)} = M_T\vec g$, $\vec v = \dot{\vec r}$, $\vec u = 0$ y $M_T = M+\lambda y$. Por tanto:

$$-M_T g = M_T\ddot y + \frac{dM_T}{dt}\dot y$$

Pero $M_T = M+\lambda y \Rightarrow \frac{1}{\lambda}\dot M_T = \dot y$ y $\frac{1}{\lambda}\ddot M_T = \ddot y$. Por lo cual:

$$\Rightarrow -M_T g = \frac{1}{\lambda}M_T\ddot M_T + \frac{1}{\lambda}\dot M_T^2$$

$$\Rightarrow -\lambda g M_T = \frac{d}{dt}(M_T\dot M_T)$$

$$\Rightarrow -\lambda g M_T^2\dot M_T = M_T\dot M_T\cdot\frac{d}{dt}(M_T\dot M_T)$$

$$\Rightarrow -\lambda g\int_0^t M_T^2\,dM_T = \int_0^t M_T\dot M_T\,d(M_T\dot M_T)$$

$$\Rightarrow -\lambda g\,\frac{M_T^3}{3}\Big|_0^t = \frac{M_T^2\dot M_T^2}{2}\Big|_0^t$$

$$\Rightarrow -\frac{\lambda g}{3}\left[M_T^3-M^3\right] = \frac{M_T^2\dot M_T^2}{2}-\frac{M^2(\lambda^2 v_0^2)}{2}$$

$$\Rightarrow \dot M_T = \frac{1}{M_T}\sqrt{M^2\lambda^2v_0^2-\frac{2}{3}\lambda g\,(M_T^3-M^3)}$$

Queremos determinar la altura máxima que alcanza M. Para ello, veamos que:

$$M_T = M + \lambda y$$

$$\Rightarrow \dot{M}_T = \lambda \dot{y}$$

Por tanto, para obtener el máximo de y, basta con encontrar el de M_T, que sucede cuando:

$$\dot{M}_T = 0$$

$$\iff M^2\lambda^2 v_0^2 - \frac{2}{3}\lambda g\left(M_T^3 - M^3\right) = 0$$

$$\iff M^2\lambda^2 v_0^2 + \frac{2}{3}\lambda g M^3 = \frac{2}{3}\lambda g M_T^3$$

$$\iff M_T = \left(\frac{3}{2}\frac{M^2\lambda v_0^2}{g} + M^3\right)^{1/3}$$

$$\iff M_T = M\cdot\sqrt[3]{1+\frac{3\lambda v_0^2}{2Mg}}$$

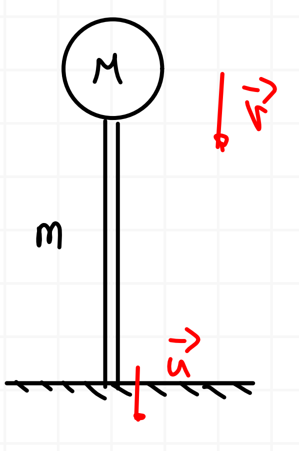
i.e M_T valdrá eso cuando y sea máxima. Así:

$$y_{max} = \frac{M_T}{\lambda} - \frac{M}{\lambda}$$

$$= \left(\frac{M}{\lambda}\right)\left(\sqrt[3]{1+\frac{3\lambda v_0^2}{2Mg}} - 1\right)$$

$$\therefore h = \frac{M}{\lambda}\left(\sqrt{1+\frac{3\lambda v_0^2}{2Mg}} - 1\right)_{//}$$

Ahora, con la masa cayendo desde arriba. A un tiempo t: tenemos $y(0) = h$ y $\dot{y}(0) = 0$.



En la ec. de Meschersky:

$$\vec{F}^{(e)} = M_T\,\ddot{y} - \frac{dm}{dt}\left(\vec{u} - \vec{v}\right)$$

en este caso $\vec{u} = \vec{v}$. Por tanto, como $\vec{F}^{(e)} = M_T\vec{g}$:

$$\Rightarrow M_T g = M_T \ddot{y}$$

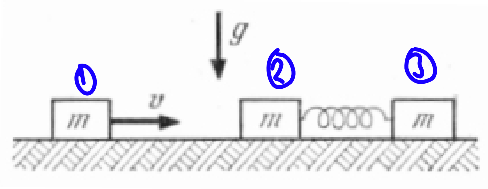
$$\Rightarrow g = \ddot{y}$$

así, M_T acelera a g. Por tanto, cayendo desde h, la velocidad del sistema al acabar de caer, será de $\sqrt{2gh}$.

$$\therefore v_f = \sqrt{2gh}_{//}$$

$\square$

5. Contra un sistema en reposo que se encuentra en una superficie horizontal lisa y que consta de dos cuerpos con masas m, unidos por un resorte de constante k, choca a la velocidad v otro cuerpo de la misma masa. La colisión es elástica. Calcule el alargamiento máximo del muelle.



R. $x_{max} = \sqrt{mv^2/2k}$

Sol.

Como la colisión es elástica y las masas de 1) y 2) son iguales, justo después de la colisión la velocidad de 2) es v.

Luego de la colisión, el sistema 2) y 3) se empieza a mover. Como $\vec{F}^{(e)} = 0$ sobre (2) y (3) (en el eje x), la energía se conserva. Y, la energía es:

$$E = \frac{1}{2} m v^2$$

Como $\vec{F}^{(e)} = 0$, el momento lineal se conserva, i.e:

$$2m \dot{x}_{cm} = cte$$

donde x_{cm} es la posición del centro de masa de 2) y 3). Pero:

$$x_{cm} = \frac{1}{2}(x_2 + x_3)$$

$$\Rightarrow v_{cm} = \frac{1}{2}(v_2 + v_3)$$

Justo después de la colisión, $v_2 = v$ y $v_3 = 0$. Por tanto $v_{cm} = \frac{v}{2}$. Así $v_{cm} = \frac{v}{2}$ en todo momento. Si S es un sistema inercial colocado en el centro de masas de 2) y 3) después de la colisión, $v_2 = \frac{v}{2}$, $v_3 = -\frac{v}{2}$, y cuando el alargamiento x del resorte sea máximo, $v_2 = v_3 = 0$. Por conservación de la energía:

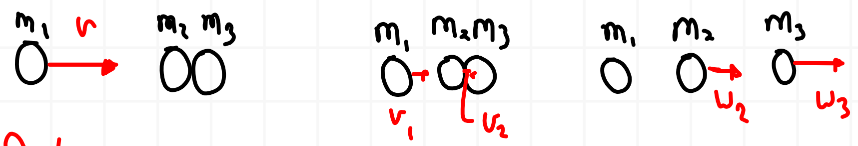
$$\frac{1}{2} m \left(\frac{v}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} m \left(-\frac{v}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} K x^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} m v^2 = \frac{1}{2} K x^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{mv^2}{2K}}$$

$$\therefore x_{max} = \sqrt{\frac{mv^2}{2K}} \quad //$$

6. Una esfera de masa m_1 se lanza contra otras dos de masas m_2 y m_3 que se encuentran en reposo. Los centros de las tres esferas están en línea recta y el coeficiente de restitución es e. Determine m_2 bajo la condición de que la última esfera, m_3 adquiera la máxima velocidad posible y calcule su valor.

R. $m_2 = \sqrt{m_1 m_3}$, $(v_3)_{max} = \frac{(1+e)^2 v}{\left(1+\sqrt{m_3/m_1}\right)^2}$



Sol.

Se producen dos colisiones, m_1 con m_2 y m_2 con m_3. Para la primera, sea u_1, u_2 las resp. velocidades de m_1 y m_2 antes de la colisión, y v_1 y v_2 después. Entonces:

$$u_1 = v \qquad u_2 = 0$$

Tenemos entonces el sistema:

$$\begin{cases} m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \\ v_1 - v_2 = e\,(u_2 - u_1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 v = m_1 v_1 + m_2 v_2 \\ v_1 - v_2 = -ev \end{cases}$$

Donde:

$$m_1 v = m_1 (v_2 - ev) + m_2 v_2$$

$$\Rightarrow v_2 = \frac{m_1 (1+e)}{m_1 + m_2} v$$

Ahora, en la segunda colisión, sean v_2 y v_3 las vel. iniciales de 2 y 3, y w_2 y w_2 las finales.

Tenemos:

$$v_2 = \frac{m_1 (1+e)}{m_1 + m_2} v \qquad v_3 = 0$$

Así, tenemos el sistema:

$$\begin{cases} m_2 v_2 + m_3 v_3 = m_2 w_2 + m_3 w_3 \\ w_2 - w_3 = e\,(v_3 - v_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{m_1 m_2 (1+e)}{m_1 + m_2} v = m_2 w_2 + m_3 w_3 \\ w_2 - w_3 = -e\,\dfrac{m_1 (1+e)}{m_1 + m_2} v \end{cases}$$

Con w_3:

$$m_2 v_2 = m_2\left(\omega_3 - v_2\right) + m_3\omega_3$$

$$\Rightarrow \omega_3 = \frac{m_2 v_2 + m_2 e v_2}{m_2 + m_3}$$

$$= \frac{m_2(1+e)}{m_2+m_3}\cdot\frac{m_1(1+e)}{m_1+m_2}\, v$$

$$= \frac{m_1 m_2 (1+e)^2}{(m_1+m_2)(m_2+m_3)}\, v \quad \ldots (1)$$

Determinemos $\frac{d\omega_3}{dm_2}$, para ver el valor con el que ω_3 es máxima.

$$\frac{d\omega_3}{dm_2} = \frac{m_1(1+e)^2 v}{(m_1+m_2)(m_2+m_3)} - \frac{m_1 m_2 (1+e)^2 v}{(m_1+m_2)^2(m_2+m_3)^2}\cdot\frac{d}{dm_2}\Big((m_1+m_2)(m_2+m_3)\Big)$$

$$= \frac{(1+e)^2 v}{(m_1+m_2)^2(m_2+m_3)^2}\cdot\Big(m_1(m_1+m_2)(m_2+m_3) - m_1m_2(m_2+m_3) - m_1m_2(m_1+m_2)\Big)$$

$$= \frac{(1+e)^2 v}{(m_1+m_2)^2(m_2+m_3)^2}\cdot\Big(m_1(m_1m_2+m_1m_3+m_2^2+m_2m_3) - m_1m_2^2 - m_1m_2m_3 - m_1^2m_2 - m_1m_2^2\Big)$$

$$= \frac{(1+e)^2 v}{(m_1+m_2)^2(m_2+m_3)^2}\cdot\Big(\cancel{m_1^2m_2} + m_1^2m_3 \cancel{+ m_1m_2^2} \cancel{+ m_1m_2m_3} \cancel{- m_1m_2^2} \cancel{- m_1m_2m_3} \cancel{- m_1^2m_2} - m_1m_2^2\Big)$$

$$= 0$$

$$\Leftrightarrow m_1^2 m_3 = m_1 m_2^2 \Rightarrow m_1 m_3 = m_2^2 \Rightarrow m_2 = \sqrt{m_1 m_3}$$

$$\therefore m_2 = \sqrt{m_1 m_3}$$

Sustituyendo este valor en 1):

$$(\omega_3)_{max} = \frac{m_1\sqrt{m_1m_3}\,(1+e)^2}{(m_1+\sqrt{m_1m_3})(\sqrt{m_1m_3}+m_3)}\, v$$

$$= \frac{(1+e)^2 m_1\sqrt{m_1m_3}}{m_1\sqrt{m_1m_3} + m_1m_3 + m_1m_3 + m_3\sqrt{m_1m_3}}\, v$$

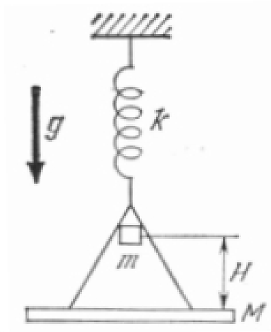
$$= \frac{(1+e)^2 m_1}{m_1 + 2\sqrt{m_1m_3} + m_3}\, v$$

$$= \frac{(1+e)^2}{1 + 2\sqrt{\frac{m_3}{m_1}} + \frac{m_3}{m_1}}\, v$$

$$= \frac{(1+e)^2}{\left(1+\sqrt{m_3/m_1}\right)^2}\, v$$

$$\therefore (\omega_3)_{max} = \frac{(1+e)^2}{\left(1+\sqrt{\frac{m_3}{m_1}}\right)^2}\, v \quad //$$

7. Sobre un soporte de masa M que cuelga de un resorte de rigidez k cae desde la altura H un cuerpo de masa m y se adhiere a él. Determine el alargamiento máximo del resorte.



$U_g = 0$

$$y_{máx} = \frac{Mg}{k} + \frac{mg}{k}\left[1 + \sqrt{1 + 2kH/(M+m)g}\right]$$

Sol.

Al dejarse caer el bloque de una altura H, al tocar la tabla de masa M, lo hace a una velocidad $u = \sqrt{2gH}$.
Como la colisión fue inélastica (pues m y M quedaron unidos), entonces la velocidad justo después de la colisión será:

$$m\sqrt{2gH} = mv + Mv$$

$$\therefore v = \frac{m}{M+m}\sqrt{2gH}$$

Ahora, por conservación de la energía:

$$\frac{1}{2}(M+m)v^2 + \frac{1}{2}Ky_0^2 = -(M+m)g(y-y_0) + \frac{1}{2}Ky^2$$

con y la dist. que bajó M+m hasta que se detuvo, con y_0 el estiramiento inicial del resorte, dado por:

$$Mg - Ky_0 = 0 \Rightarrow y_0 = \frac{Mg}{K}$$

$$\therefore \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{(M+m)}\frac{m^2}{(M+m)^{\cancel{2}}}\cancel{2}gH + \frac{1}{2}\frac{M^2g^2}{K} = -(M+m)gy + \frac{1}{2}Ky^2 + (M+m)g\frac{Mg}{K}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{2}Ky^2 - (M+m)gy - \frac{m^2}{M+m}gH - \frac{1}{2}\frac{M^2g^2}{K} + (M+m)g\frac{Mg}{K}$$

$$\Rightarrow 0 = y^2 - \frac{2(M+m)g}{K}y - \frac{2m^2gH}{K(M+m)} - \frac{M^2g^2}{K^2} + \frac{2(M+m)Mg^2}{K^2}$$

$$\therefore y = \frac{(M+m)g}{K} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4(M+m)^2g^2}{K^2} + \frac{8m^2gH}{K(M+m)} + \frac{4M^2g^2}{K^2} - \frac{8(M+m)Mg^2}{K^2}}$$

$$= \frac{(M+m)g}{K} \pm \frac{g}{K}\sqrt{(M+m)^2 + \frac{2m^2KH}{(M+m)g} + M^2 - 2(M+m)M}$$

$$= \frac{(M+m)g}{K} \pm \frac{g}{K}\sqrt{(M+m-M)^2 + \frac{2KH}{(M+m)g}}$$

$$= \frac{(M+m)g}{K} \pm \frac{mg}{K}\sqrt{1 + \frac{2KH}{(M+m)g}}$$

$$\therefore y_{max} = \frac{Mg}{K} + \frac{mg}{K}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2KH}{(M+m)g}}\right) //$$

8. Una partícula de masa m y velocidad u choca elásticamente con una partícula de masa M inicialmente en reposo. Como resultado del choque la partícula m es desviada 90° y su velocidad reducida a $u/\sqrt{3}$. La partícula M retrocede con una velocidad v formando un ángulo θ con la dirección original de m. Todos los ángulos y velocidades se observan en el sistema laboratorio. Obtenga el valor de M en función de m, v en función de u y el ángulo de desviación θ en el sistema laboratorio. Calcule el ángulo de desviación Θ y los ángulos de desviación de M y m en el sistema centro de masa.

R. $M = 2m, v = u/\sqrt{3}, \theta = \pi/6;\ \tilde{\theta}_m = 2\pi/3, \tilde{\theta}_M = 5\pi/3$