6 de enero de 2024

Notas Teorema Fundamental del Cálculo

Cristo Daniel Alvarado

6 de enero de 2024

Índice general

Capítulo 1

Teorema Fundamental del Cálculo

1.1. Segundo Teorema Fundamental del Cálculo

Teorema 1.1.1 (**Segundo Teorema Fundamental del Cálculo**)
Sea $F : [a, b] \to \mathbb{K}$ si y sólo si existe $F'(x)$ para casi toda $x \in [a, b]$, la función F' es integrable en $[a, b]$ y se cumple que

$$\int_a^x F'(x)\, dx = F(x) - F(a), \quad \forall x \in [a, b]$$

Corolario 1.1.1
Si $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ es continua en $[a, b]$ y $F : [a, b] \to \mathbb{K}$ es una primitiva de f, entonces

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

Teorema 1.1.2 (**Fórmula de Integración por partes para el cálculo de integrales**)
Si F y G son funciones absolutamente continuas en $[a, b]$, entonces FG también lo es en $[a, b]$, y

$$\int_a^b F(x)G'(x)\, dx = F(x)G(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b F'(x)G(x)\, dx$$

Observación 1.1.1
En particular, el Teorema anterior se cumple si F' y G' son continuas, es decir que F y G son de clase C^1.

1.2. Cálculo de integrales en invervalos abiertos

Teorema 1.2.1 (**Primer Teorema Fundamental para intervalos abiertos**)
Se $f : I \to \mathbb{R}$ donde I es un intervalo abierto (que puede o no ser acotado), localmente integrable y sea $\gamma \in I$ fijo. Entonces la intgral indefinida $F : I \to \mathbb{K}$, $F(x) = \int_\gamma^x f(t)\, dt$, para todo $x \in I$ es continua en I, diferenciable c.t.p. en I, y

$$F'(x) = f(x), \qquad \text{c.t.p. en } I$$

Corolario 1.2.1 (Fórmula para integrales por partes para primitivas)

Definición 1.2.1
Sea $f : I \to \mathbb{K}$ con I intervalo abierto (acotado o no). Entonces f es **absolutamente continua** si lo es en todo subintervalo compacto contenido en I.

Proposición 1.2.1
Si $f : I \to \mathbb{K}$ es de clase C^1 en I (siendo I un intervalo abierto), entonces f es absolutamente continua en I.

Teorema 1.2.2
Sea $F : I \to \mathbb{K}$ con I un intervalo abierto, y sea $\gamma \in I$. Entonces F es absolutamente continua en I, si y sólo si, existe $F'(x)$ para casi toda $x \in I$, F' está definida c.t.p. en I, es localmente integrable en I, y

$$\int_\gamma^x F'(t)\,dt = F(x) - F(\gamma) \quad \forall x \in I$$

Teorema 1.2.3 (**Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, 1° Versión**)

Teorema 1.2.4 (**Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, 2° Versión**)