Lista 1 de Ejercicios Lógica Matemática: Lógica Proposicional

Cristo Daniel Alvarado

13 de octubre de 2024

1.1. Ejercicios

Definición 1.1.1
Una **conectiva booleana n-aria** es una función $B:\{T,F\}^n\to\{T,F\}$.

Observación 1.1.1
La idea de la función anterior es que se codifique una tabla de verdad.

Ejercicio 1.1.1
Considere la conectiva booleana dada por:

$$\begin{array}{ll} B(T,T,T)=F, & B(F,T,T)=F, \\ B(T,T,F)=F, & B(F,T,F)=T, \\ B(T,F,T)=F, & B(F,F,T)=T, \\ B(T,F,F)=T, & B(F,F,F)=T, \end{array}$$

escriba una fórmula bien formada, utilizando el conjunto de conectivas $\{\neg,\wedge,\vee\}$ que realice esta función booleana.

Solución:
Sea $B:\{T,F\}^3\to\{T,F\}$ dada por:

$$B(p_1,p_2,p_3)=(p_1\wedge\neg p_2\wedge\neg p_3)\vee(\neg p_1\wedge p_2\wedge\neg p_3)\vee(\neg p_1\wedge\neg p_2\wedge p_3)\vee(\neg p_1\wedge\neg p_2\wedge\neg p_3)$$

se verifica rápidamente que ésta función B satiface lo deseado. $\square$

Ejercicio 1.1.2
Muestre que el conjunto de conectivas $\{\perp,\Rightarrow\}$ es completo (donde $\perp$ es la conectiva 0-aria con valor constante F).

Demostración:
Basta con ver que si φ y ψ son fórmulas, entonces $\neg\varphi$ y $\varphi\Rightarrow\psi$ se pueden expresar con conectivas $\{\perp,\Rightarrow\}$.

En efecto, ya se tiene la implicación. Veamos que:

$$\neg\varphi\equiv\varphi\Rightarrow\perp$$

para un modelo m se tiene que:

φ	$\perp$	$\varphi\Rightarrow\perp$	$\neg\varphi$
T	F	F	F
F	F	T	T

es decir, que en cualquier caso $\overline{m}(\neg\varphi)=\overline{m}(\perp\Rightarrow\varphi)$. Se sigue entonces la equivalencia. Como $\{\neg,\Rightarrow\}$ es un conjunto completo de conectivas, también lo debe ser pues $\{\perp,\Rightarrow\}$. $\blacksquare$

Ejercicio 1.1.3
Reescriba las siguientes fórmulas en notación polaca a notación usual:

a). $\neg\neg\Rightarrow\vee\wedge p_3p_8\neg p_{10}\neg\vee p_1p_5$.

b). $\wedge\neg\Rightarrow p_3\vee p_4p_1\iff\vee\neg p_{10}\iff p_{15}p_{18}q$.

Cristo Daniel Alvarado ESFM

c). $\wedge \Rightarrow p_3 \wedge p_2 p_1 \neg \vee \wedge p_4 p_5 \neg p_{10}$.

Solución:

Veamos que

a). $\neg\neg \Rightarrow \vee \wedge p_3 p_8 \neg p_{10} \neg \vee p_1 p_5 \equiv \neg\neg(((p_3 \wedge p_8) \vee \neg p_{10}) \Rightarrow \neg(p_1 \vee p_5))$.

b). $\wedge \neg \Rightarrow p_3 \vee p_4 p_1 \iff \vee \neg p_{10} \iff p_{15} p_{18} q \equiv (\neg(p_3 \Rightarrow (p_4 \vee p_1))) \wedge ((\neg p_{10} \vee (p_{15} \iff p_{18})) \iff q)$.

c). $\wedge \Rightarrow p_3 \wedge p_2 p_1 \neg \vee \wedge p_4 p_5 \neg p_{10} \equiv (p_3 \Rightarrow (p_2 \vee p_1)) \wedge \neg((p_4 \wedge p_5) \vee \neg p_1 0)$.

□

Ejercicio 1.1.4
Demuestre que toda fórmula bien formada (en el formato de clase, es decir, en notación polaca) en la que no aparezca el símbolo $\neg$ debe tener longitud impar.

Demostración:

Procederemos por inducción del número de implicaciones $\Rightarrow$, digamos n, en la cadena de la fórmula φ.

- Si $n = 0$, entonces $\varphi \equiv p_1$, siendo p_1 una variable. Luego la longitud de φ es 1 que es impar.
- Si $n = 1$, entonces $\varphi \equiv \Rightarrow p_1 p_2$, siendo p_1 y p_2 variables. Luego la longitud de φ es 3 que es impar.
- Suponga que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \in [\![0, n]\!]$ se cumple que toda FBF que no contenga a $\neg$ y con una cantidad de implicaciones k tiene longitud impar.

  Sea φ una fórmula bien formada que no contenga $\neg$ y que tiene $n + 1$ implicaciones, es decir que es de la forma:
  $$\varphi \equiv \Rightarrow \psi_1 \psi_2$$
  donde ψ_1, ψ_2 son FBF. Como φ tiene $n + 1$ implicaciones, entonces debe suceder que ψ_1 y ψ_2 contengan entre 0 y n implicaciones. Por hipótesis de inducción, tanto ψ_1 como ψ_2 tienen longitud impar, luego φ tiene longitud la suma de estos dos impares (que es un par) más 1 (la primera implicación). Por tanto, φ tiene longitud impar.

Por inducción se sigue el resultado. ■

Ejercicio 1.1.5
Sea φ una fórmula bien formada. Sea c la cantidad de veces que aparece el símbolo $\Rightarrow$ en la fórmula φ, y sea s la cantidad de veces que aparecen variables en la fórmula φ (en donde, si alguna variable aparece varias veces, se cuentan cada una de sus apariciones por separado). Demuestre que
$$s = c + 1$$

Cristo Daniel Alvarado ESFM

Demostración:

Procederemos por inducción sobre c.

- Para $c = 0$, se tiene que φ solo está conformada por variables y por aplicaciones sucesivas de la operación unaria $\neg$, por lo que solamente puede tener una variable. Así que $s = 1$. Se sigue entonces que:
$$s = c + 1$$
- Para $c = 1$, se tiene que φ es de la forma $\Rightarrow \psi\chi$, donde ψ y χ son subfórmulas bien formadas de φ que no contienen implicaciones, luego por la parte anterior ψ y χ contienen una variable, es decir que φ contiene dos variables. Luego $s = 2$. Así que:
$$s = c + 1$$
- Suponga que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \leq n$ con $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se tiene que toda fórmula bien formada en la que aparecen k veces el símbolo $\Rightarrow$, se tiene que
$$s = k + 1$$
siendo s el número de variables de la fórmula.

  Suponga que φ es una fórmula bien formada en la que el símbolo $\Rightarrow$ aparece $n + 1$ veces, esto es que $c = n + 1$. Entonces, φ es de la forma:
$$\Rightarrow \psi\chi$$
donde ψ y χ son subfórmulas bien formadas de φ. Sean c_1 y c_2 el número de veces que aparece el símbolo $\Rightarrow$ en ψ y χ, respectivamente. Se tiene que $0 \leq c_1, c_2 \leq n$, luego por hipótesis indictiva se sigue que
$$s_i = c_i + 1, \quad \forall i = 1, 2$$
donde s_1 y s_2 es el número de variables que aparecen en ψ y χ, respectivamente. Así pues, el número de variables que aparecen en φ es:
$$s = s_1 + s_2$$
y, el número de veces que aparece el símbolo $\Rightarrow$ es la suma de el número de veces que aparece en ψ y χ más uno. Por lo cual:
$$c = c_1 + c_2 + 1$$
Así pues:
$$\begin{aligned} s &= s_1 + s_2 \\ &= c_1 + 1 + c_2 + 1 \\ &= (c_1 + c_2 + 1) + 1 \\ &= c + 1 \end{aligned}$$

Aplicando inducción se sigue el resultado. ■

Ejercicio 1.1.6

Sea φ una fórmula bien formada, y suponga que todos los símbolos de la variable que aparecen en φ se encuentran entre $p_1, ..., p_n$. Supóngase que m, m' son dos modelos que satisfacen $m(p_i) = m'(p_i)$ para todo $i \in [\![1, n]\!]$. Demuestre que
$$\overline{m}(\varphi) = \overline{m'}(\varphi)$$

Cristo Daniel Alvarado ESFM

Demostración:

Procederemos por inducción sobre φ.

- Si φ es una variable, digamos p_i (con $i \in [\![1, n]\!]$), se tiene que:

$$\begin{aligned}\overline{m}(\varphi) &= m(p_i)\\ &= m'(p_i)\\ &= \overline{m'}(\varphi)\end{aligned}$$

- Se verán dos casos:

  - φ es de la forma $\neg\psi$ siendo ψ una fórmula bien formada. Se tiene que las variables de ψ son las mismas que las variables de φ. Suponga que $\overline{m}(\psi) = \overline{m'}(\psi)$, entonces:

$$\begin{aligned}\overline{m}(\varphi) = V &\text{ si y sólo si } \overline{m}(\neg\psi) = V\\ &\text{ si y sólo si } \overline{m}(\psi) = F\\ &\text{ si y sólo si } \overline{m'}(\psi) = F\\ &\text{ si y sólo si } \overline{m'}(\neg\psi) = V\\ &\text{ si y sólo si } \overline{m'}(\varphi) = V\end{aligned}$$

    de forma análoga se deduce que $\overline{m}(\varphi) = F$ si y sólo si $\overline{m'}(\varphi) = F$. Así que:

$$\overline{m}(\varphi) = \overline{m'}(\varphi)$$

  - φ es de la forma $\Rightarrow \psi\chi$ siendo ψ y χ subfórmulas bien formadas de φ. Se tiene en el inciso anterior que ψ y χ son tienen algunas de las variables $p_1, ..., p_n$. Supongamos que $\overline{m}(\psi) = \overline{m'}(\psi)$ y $\overline{m}(\chi) = \overline{m'}(\chi)$. Entonces:

$$\begin{aligned}\overline{m}(\varphi) = F &\text{ si y sólo si } \overline{m}(\Rightarrow \psi\chi) = F\\ &\text{ si y sólo si } \overline{m}(\psi) = F \text{ y } \overline{m}(\chi) = V\\ &\text{ si y sólo si } \overline{m'}(\psi) = F \text{ y } \overline{m'}(\chi) = V\\ &\text{ si y sólo si } \overline{m'}(\Rightarrow \psi\chi) = F\\ &\text{ si y sólo si } \overline{m'}(\varphi) = F\end{aligned}$$

    se sigue entonces que $\overline{m}(\varphi) = \overline{m'}(\varphi)$.

Por induccioń, se sigue que

$$\overline{m}(\varphi) = \overline{m'}(\varphi)$$

■

Ejercicio 1.1.7

Demuestre o refute, para un conjunto de fórmulas Σ, y φ, ψ dos fórmulas:

a). Si o bien $\Sigma \vDash \varphi$, o bien $\Sigma \vDash \psi$, entonces $\Sigma \vDash \varphi \wedge \psi$.

b). Si $\Sigma \vDash \varphi \wedge \psi$ entonces o bien $\Sigma \vDash \varphi$, o bien $\Sigma \vDash \psi$.

Solución:

De (a): Suponga que $\Sigma = \{p_1\}$. Entonces, $\Sigma \vDash p_1$. No puede suceder que $\Sigma \vDash \neg p_1$. En efecto, si m es un modelo tal que $m \vDash \Sigma$, entonces:

$$m(p_1) = V$$

por tanto:

$$m(\neg p_1) = F$$

luego, $m \nvDash \neg p_1$. Por tanto, $\Sigma \nvDash \neg p_1$. Afirmamos que $\Sigma \nvDash p_1 \wedge \neg p_1$. En efecto, si m es un modelo que satisface Σ, entonces:

$$\begin{aligned}\overline{m}(p_1 \wedge \neg p_1) &= \overline{m}(\neg(p_1 \Rightarrow \neg\neg p_1)) \\ &= \overline{m}(\neg(p_1 \Rightarrow p_1))\end{aligned}$$

como $\overline{m}(p_1) = m(p_1) = V$, entonces $\overline{m}(p_1 \Rightarrow p_1) = V$. Así, $\overline{m}(p_1 \wedge \neg p_1) = F$. Así que $\Sigma \nvDash p_1 \wedge \neg p_1$.

De (b): Probaremos que $\Sigma \vDash \varphi \wedge \psi$ implica que $\Sigma \vDash \varphi$ y $\Sigma \vDash \psi$. En efecto, por el Teorema de Completud se tiene que

$$\Sigma \vdash \chi \text{ si y sólo si } \Sigma \vDash \chi$$

para toda fórmula χ. Por tanto, $\Sigma \vdash \varphi \wedge \psi$. Entonces, $\Sigma \vdash \varphi$ y $\Sigma \vdash \psi$ (usando conjunción). Luego, $\Sigma \vDash \varphi$ y $\Sigma \vDash \psi$. $\square$

Ejercicio 1.1.8 (Sustitución)

Suponga que tenemos una lista de fórmulas bien formadas $\varphi_1, ..., \varphi_n, ...$. Quisiéramos definir formalmente la opearción que dada una fórmula bien formada ψ, reemplaza cada aparición del símbolo de la variable p_i con la fórmula φ_i, de modo que se obtiene una nueva fórmula bien formada ψ^*. Por ejemplo, si ψ es $p_4 \Rightarrow p_{32}$, entonces ψ^* es $\varphi_4 \Rightarrow \varphi_2$.

a). ¿Cómo definiría formalmente la operación $\psi \mapsto \psi^*$ por recursión?

b). Sea m cualquier modelo, y defina m' como el modelo dado por $m'(p_i) = \overline{m}(\varphi_i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Demuestre que $\overline{m'}(\psi) = \overline{m}(\psi^*)$, para cada fórmula bien formada ψ.

c). Concluya que si ψ es una tautología, entonces ψ^* también lo es.

Demostración:

De (a): Sea $f : \text{FBF} \to \text{FBF}$ dada como sigue:

- Si ψ es una variable, digamos p_i con $i \in \mathbb{N}$, entonces $f(\psi) = \varphi_i$.
- Para las conectivas:
  - Si ψ es de la forma $\neg\chi$, entonces $f(\psi) = \neg f(\chi)$.
  - Si ψ es de la forma $\Rightarrow \chi\xi$, entonces $f(\psi) = \Longrightarrow f(\chi)f(\xi)$.

De tal forma, se define recursivamente el valor de ψ, ya que se va descomponiendo en sus subfórmulas en las cuales, cada variable p_i es sustutuída por φ_i.

De (b): $\blacksquare$

Ejercicio 1.1.9

Sea Σ un conjunto de fórmulas bien formadas. Definimos la operación $\mathcal{C}(\Sigma)$ mediante

$$\mathcal{C}(\Sigma) = \Sigma \cup \left\{\varphi \middle| \neg\varphi \in \Sigma\right\} \cup \left\{\varphi \middle| \varphi \wedge \psi \in \Sigma \text{ o } \psi \wedge \varphi \in \Sigma \text{ para alguna FBF } \psi\right\}$$

Definimos también recursivamente, para cada conjunto de fórmulas bien formadas Σ los conjuntos

$\mathcal{C}^n(\Sigma)$ como sigue:

$$\mathcal{C}^0(\Sigma) = \Sigma$$
$$\mathcal{C}^{n+1}(\Sigma) = \mathcal{C}(\mathcal{C}^n(\Sigma)), \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

y más aún, se define

$$\mathcal{C}^\infty(\Sigma) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^n(\Sigma)$$

Haga lo siguiente:

a). Considere $\Sigma = \{p_1 \wedge \neg p_2, \neg(p_3 \wedge (p_4 \wedge p_5))\}$. Calcule $\mathcal{C}(\Sigma)$ y $\mathcal{C}(\mathcal{C}(\Sigma))$.

b). Si Σ es como en el inciso (a), ¿a qué es igual $\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$?

c). Ahora, sea

$$\Sigma = \left\{ p_n \wedge \cdots p_n \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$$

¿A qué es igual $\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$?

d). ¿Se te puede ocurrir de alguna manera intuitiva (verbal, corta) de describir a qué es igual $\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$?

Solución:

De (a): $\square$

Ejercicio 1.1.10

Demuestre que existe una demostración formal de los siguientes argumentos (en su defecto, complete las demostraciones):

Solución:

a).

$$\begin{array}{llcll}
1) & A & \Rightarrow & (B \wedge \neg C) & \text{Premisa} \\
2) & (B \vee C) & \Rightarrow & D & \text{Premisa} \\
3) & A & & & \text{Premisa} \\
4) & B & \wedge & \neg C & \text{1,3 M.P.} \\
5) & B & & & \text{4 Simp.} \\
6) & B & \vee & C & \text{5 Ad.} \\
7) & D & & & \text{2,6 M.P.} \\
\hline
 & & \therefore & D &
\end{array}$$

b).

$$\begin{array}{llcll}
1) & A & \Rightarrow & B & \text{Premisa} \\
2) & A & \vee & (B \vee \neg C) & \text{Premisa} \\
3) & \neg B & & & \text{Premisa} \\
4) & \neg A & & & \text{1,2 M.T.} \\
5) & B & \vee & \neg C & \text{3,2 S.D.} \\
6) & \neg C & & & \text{5,3 S.D.} \\
7) & \neg C & \wedge & \neg B & \text{5,3 Conj.} \\
\hline
 & & \therefore & \neg C \wedge \neg B &
\end{array}$$

Cristo Daniel Alvarado ESFM

c).

$$
\begin{array}{lrlcll}
 & 1) & A & \Rightarrow & B & \text{Premisa}\\
 & 2) & B & \Rightarrow & C & \text{Premisa}\\
 & 3) & (A \Rightarrow C) & \Rightarrow & (B \Rightarrow D) & \text{Premisa}\\
 & 4) & (A \Rightarrow D) & \Rightarrow & E & \text{Premisa}\\
\mid \longrightarrow & 5) & A & & & \text{Sup.}\\
\mid & 6) & B & & & \text{1,5 M.P.}\\
\mid & 7) & C & & & \text{2,6 M.P.}\\ \hline
 & 8) & A & \Rightarrow & C & \text{5-7 M.D.}\\
 & 9) & B & \Rightarrow & D & \text{3,8 M.P.}\\
\mid \longrightarrow & 10) & A & & & \text{Sup.}\\
\mid & 11) & B & & & \text{1,10 M.P.}\\
\mid & 12) & D & & & \text{9,11 M.P.}\\ \hline
 & 13) & A & \Rightarrow & D & \text{10-12 M.D.}\\
 & 14) & E & & & \text{4,14 M.P.}\\ \hline
 & & & \therefore & E &
\end{array}
$$

d).

$$
\begin{array}{rlcll}
1) & A & \Rightarrow & (B \wedge C) & \text{Premisa}\\
2) & \neg A & \Rightarrow & ((D \Rightarrow E) \wedge (F \Rightarrow H)) & \text{Premisa}\\
3) & (B \wedge C) & \vee & ((\neg A \Rightarrow D) \wedge (\neg A \Rightarrow F)) & \text{Premisa}\\
4) & \neg(B \wedge C) & \wedge & \neg(H \wedge D) & \text{Premisa}\\
5) & \neg(B & \wedge & C) & \text{4 Simp.}\\
6) & \neg A & & & \text{1,5 M.T.}\\
7) & (D \Rightarrow E) & \wedge & (F \Rightarrow H) & \text{2,6 M.P.}\\
8) & D & \Rightarrow & E & \text{7 Simp.}\\
9) & F & \Rightarrow & H & \text{7 Conm. y Simp.}\\
10) & (\neg A \Rightarrow D) & \wedge & (\neg A \Rightarrow F) & \text{3,5 S.D.}\\
11) & \neg A & \Rightarrow & D & \text{10 Simp.}\\
12) & \neg A & \Rightarrow & F & \text{10 Conm. y Simp.}\\
13) & D & & & \text{11,6 M.P.}\\
14) & F & & & \text{12,6 M.P.}\\
15) & E & & & \text{8,13 M.P.}\\
16) & H & & & \text{9,14 M.P.}\\
17) & E & \wedge & H & \text{15,16 Conj.}\\ \hline
 & & \therefore & E \wedge H &
\end{array}
$$

e).

$$
\begin{array}{rlcll}
1) & (A \Rightarrow B) & \wedge & (C \Rightarrow D) & \text{Premisa}\\
2) & (B \Rightarrow E) & \wedge & (D \Rightarrow F) & \text{Premisa}\\
3) & (\neg A \Rightarrow E) & \wedge & (\neg B \Rightarrow D) & \text{Premisa}\\
4) & \neg E & & & \text{Premisa}\\
5) & A & \Rightarrow & B & \text{1 Simp.}\\
6) & C & \Rightarrow & D & \text{1 Conm. y Simp.}\\
7) & B & \Rightarrow & E & \text{2 Simp.}\\
8) & D & \Rightarrow & F & \text{2 Conm. y Simp.}\\
9) & \neg A & \Rightarrow & E & \text{3 Simp.}\\
10) & \neg B & \Rightarrow & D & \text{3 Conm. y Simp.}\\
11) & \neg B & & & \text{7,4 M.T.}\\
12) & \neg B & \vee & \neg C & \text{11 Ad.}\\
13) & \neg C & \vee & \neg B & \text{12 Conm.}\\ \hline
 & & \therefore & \neg C \vee \neg B &
\end{array}
$$

Cristo Daniel Alvarado ESFM

$$
\text{f).}\quad
\begin{array}{ll|l}
 & 1)\ A \Rightarrow (B \Rightarrow C) & \text{Premisa} \\
| \longrightarrow & 2)\ B & \text{Sup.} \\
|| \longrightarrow & 3)\ A & \text{Sup.} \\
|| & 4)\ B \Rightarrow C & 1{,}3\ \text{M.P.} \\
\hline
| & 5)\ A \Rightarrow C & 3\text{-}4\ \text{M.D.} \\
\hline
 & 6)\ B \Rightarrow (A \Rightarrow C) & 2\text{-}5\ \text{M.D.} \\
\hline
 & \therefore\ B \Rightarrow (A \Rightarrow C) &
\end{array}
$$

$$
\text{g).}\quad
\begin{array}{lll}
1) & A \Rightarrow (B \wedge C) & \text{Premisa} \\
\hline
 & \therefore\ A \Rightarrow B &
\end{array}
$$

$$
\text{h).}\quad
\begin{array}{lll}
1) & A \Rightarrow (B \wedge C) & \text{Premisa} \\
2) & C \Rightarrow (D \wedge E) & \text{Premisa} \\
\hline
 & \therefore\ A \Rightarrow (B \wedge D) &
\end{array}
$$

$$
\text{i).}\quad
\begin{array}{lll}
1) & A \Rightarrow B & \text{Premisa} \\
2) & C \Rightarrow B & \text{Premisa} \\
\hline
 & \therefore\ (A \vee C) \Rightarrow B &
\end{array}
$$

$$
\text{j).}\quad
\begin{array}{lll}
1) & ((A \vee B) \Rightarrow C) \ \wedge \ (\neg D \Rightarrow (B \wedge \neg C)) & \text{Premisa} \\
\hline
 & \therefore\ A \Rightarrow D &
\end{array}
$$

$$
\text{k).}\quad
\begin{array}{lll}
1) & (A \vee B) \Rightarrow C & \text{Premisa} \\
2) & D \Rightarrow (E \wedge F) & \text{Premisa} \\
\hline
 & \therefore\ (A \Rightarrow C) \wedge (D \Rightarrow F) &
\end{array}
$$

$$
\text{l).}\quad
\begin{array}{lll}
1) & (A \Rightarrow B) \ \wedge \ (C \Rightarrow D) & \text{Premisa} \\
2) & (B \vee D) \Rightarrow ((E \Rightarrow (E \vee F)) \Rightarrow A \wedge C) & \text{Premisa} \\
\hline
 & \therefore\ A \iff C &
\end{array}
$$

$$
\text{m).}\quad
\begin{array}{lll}
1) & A \vee (B \Rightarrow C) & \text{Premisa} \\
2) & (B \Rightarrow (B \wedge C)) \Rightarrow (D \vee E) & \text{Premisa} \\
3) & (D \Rightarrow A) \wedge (E \Rightarrow F) & \text{Premisa} \\
\hline
 & \therefore\ A \vee F &
\end{array}
$$

$$
\text{n).}\quad
\begin{array}{lll}
1) & (A \Rightarrow (\neg B \wedge \neg C)) \wedge (D \Rightarrow \neg (B \vee C)) & \text{Premisa} \\
2) & (\neg E \Rightarrow A) \wedge (\neg F \Rightarrow D) & \text{Premisa} \\
3) & (E \Rightarrow B) \wedge (F \Rightarrow C) & \text{Premisa} \\
\hline
 & \therefore\ B \iff C &
\end{array}
$$

$$
\text{o).}\quad
\begin{array}{lll}
1) & (A \vee B) \Rightarrow (C \Rightarrow D) & \text{Premisa} \\
2) & (C \Rightarrow (C \wedge D)) \Rightarrow E & \text{Premisa} \\
3) & E \Rightarrow ((\neg F \vee \neg\neg F) \Rightarrow (A \wedge F)) & \text{Premisa} \\
\hline
 & \therefore\ A \iff E &
\end{array}
$$

$$
\text{p).}\quad
\begin{array}{l}
\hline
\therefore\ (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow C))
\end{array}
$$

$$
\text{q).}\quad
\begin{array}{l}
\hline
\therefore\ (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \wedge C) \Rightarrow (B \wedge C))
\end{array}
$$

$$
\text{r).}\quad
\begin{array}{l}
\hline
\therefore\ ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A
\end{array}
$$

$$
\text{s).}\quad
\begin{array}{lll}
1) & A \vee (B \wedge C) & \text{Premisa} \\
2) & A \Rightarrow C & \text{Premisa} \\
\hline
 & \therefore\ C &
\end{array}
$$

Cristo Daniel Alvarado ESFM

$$\text{t).}\quad \begin{array}{lllll} 1) & (A \vee B) & \Rightarrow & (C \Rightarrow D) & \text{Premisa} \\ 2) & (\neg D \vee E) & \Rightarrow & (A \wedge C) & \text{Premisa} \\ \hline & & \therefore & D & \end{array}$$

$$\text{u).}\quad \begin{array}{lllll} 1) & (A \vee B) & \Rightarrow & (C \wedge D) & \text{Premisa} \\ 2) & (C \vee E) & \Rightarrow & (\neg F \wedge H) & \text{Premisa} \\ 3) & (F \vee G) & \Rightarrow & (A \wedge I) & \text{Premisa} \\ \hline & & \therefore & \neg F & \end{array}$$

$$\text{v).}\quad \begin{array}{c} \hline \therefore \quad (A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow C) \end{array}$$

$$\text{w).}\quad \begin{array}{c} \hline \therefore \quad A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \end{array}$$

$$\text{x).}\quad \begin{array}{c} \hline \therefore \quad (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)) \end{array}$$

$$\text{y).}\quad \begin{array}{c} \hline \therefore \quad (A \wedge B) \Rightarrow B \end{array}$$

$$\text{z).}\quad \begin{array}{c} \hline \therefore \quad A \Rightarrow (B \Rightarrow A \wedge B) \end{array}$$

□