Taller Topología Algebraica, Lectura 3:

Cristo Alvarado

1 de septiembre de 2024

Nota: Debido a que la clase pasada se recortó el tiempo, algunas cosas de la lectura pasada están repetidas en esta lectura y se continua con temas adicionales.

El Grupo Fundamental

Definición 3.1
Para cualquier camino $f : I \to X$, $\overline{f}$ denota al camino definido por:

$$\overline{f}(t) = f(1-t), \quad \forall t \in I$$

El camino $\overline{f}$ se obtiene recorriendo el camino f en sentido contrario.

Lema 3.1
Sea f un camino y denotemos por $\mathcal{F} = [f]$ y $\overline{\mathcal{F}} = [\overline{f}]$, entonces:

$$\mathcal{F} \cdot \overline{\mathcal{F}} = \mathcal{I}_x \quad \text{y} \quad \overline{\mathcal{F}} \cdot \mathcal{F} = \mathcal{I}_y$$

donde $x \in X$ y $y \in X$ son los puntos inicial y terminal de f, respectivamnete.

Demostración:
Sólo se probará la primera igualdad, para ello es suficiente con probar que $f \cdot \overline{f} \sim i_x$. Definimos la función $F : I \times I \to X$ por:

$$F(t,s) = \begin{cases} f(2t) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{s}{2} \\ f(s) & \text{si} \quad \frac{s}{2} \leq t \leq 1 - \frac{s}{2} \\ f(2-2t) & \text{si} \quad 1 - \frac{s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

para todo $s, t \in I$. Entonces,

$$\begin{aligned} F(t,0) &= \begin{cases} f(2t) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 0 \\ f(s) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1 - 0 \\ f(2-2t) & \text{si} \quad 1 - 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(0) & \text{si} \quad t = 0 \\ f(0) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ f(2-2t) & \text{si} \quad t = 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ f(0) & \text{si} \quad t = 1 \end{cases} \\ &= x \end{aligned}$$

para todo $t \in I$. Además,

$$F(t,1) = \begin{cases} f(2t) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f(1) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 - \frac{1}{2} \\ f(2-2t) & \text{si} \quad 1 - \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} f(2t) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f(1-(2t-1)) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} f(2t) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \overline{f}(2t-1) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$
$$= f \cdot \overline{f}(t)$$

para todo $t \in I$. La función F es continua...

Por tanto, $\mathcal{F} \cdot \overline{\mathcal{F}}$. ■

En visata de estas propiedades de la clase $\overline{\mathcal{F}}$, de ahora en adelante la denotaremos por $\mathcal{F}^{-1}$.

Podemos resumir todos los lemas antes probados diciendo que el conjunto de todas las clases de caminos en un espacio X satisfacen los axiomas de grupo, excepto que el producto de dos caminos no siempre está definido. Solventamos este problema con la siguiente definición:

Definición 3.2
Un camino o una clase de camino es llamada **cerrada** o un **bucle**, si el punto inicial y terminal son el mimso. El bucle se dice que tiene **base** en el punto inicial o terminal.

Teorema 3.1
Sea X un espacio topológico y $x \in X$ un punto fijo. Entonces, el conjunto de todas las clases de caminos cerradas que tienen como punto base a x dotado por la operación $\cdot$, denotado por $\pi(X,x)$ es un grupo llamado **grupo fundamental** o **grupo de Poincaré** de X con punto base x.

Demostración:
Es un resumen de todos los lemas anteriores. ■

Observación 3.1
Para un espacio topológico dado X y $x \in X$, dotamos el grupo fundamental $\pi(X,x)$ de una operación binaria que lo hace de grupo, de ahora en adelante tal operación se denotará al producto de dos clases $[f]$ y $[g]$ por $[f] \cdot [g]$ o por yuxtaposición como $[f][g] = [f \cdot g]$ (no confundir la operación dentro de los paréntesis cuadrados con la composición usual de funciones).

Si $[f] \in \pi(X,x)$, se denotará a su inverso por $[f]^{-1}$ y, al elemento identidad por $\mathcal{I}$

Proposición 3.1
Sea X un espacio y $x, y \in X$ dos puntos distintos. Si $\gamma : I \to X$ es un camino con punto inicial x y terminal y, entonces $\pi(X,x) \cong \pi(X,y)$ (es decir, son grupos isomorfos).

Demostración:
En efecto, defina la función $u : \pi(X,x) \to \pi(X,y)$ dada por:

$$u([f]) = [\gamma]^{-1}[f][\gamma]$$

Por cursos anteriores de teoría de Grupos, se ve de forma inmediata que esta función es un isomorfismo entre los grupos $\pi(X,x)$ y $\pi(X,y)$. ■

Corolario 3.1
Sea X un espacio topológico arco-conexo, entonces los grupos $\pi(X, x)$ y $\pi(X, y)$ son isomorfos para todo $x, y \in X$.

La importancia del teorema anterior radica en que el grupo $\pi(X, x)$ tiene propiedades como grupo (es decir, es abeliano, finito, nilpotente, libre, etc...) no debido al punto elegido $x \in X$, sino al espacio mismo X, suponiendo que X es arco-conexo.

En general, no hay un mapeo canónico o isomorfismo natural entre $\pi(X, x)$ y $\pi(X, y)$, ya que a cada elección de camino entre x y y le corresponderá un isomorfismo.

Efecto de una función continua en el grupo fundamental

Observación 3.2
Para esta sección resultará de utilidad definir el siguiente conjunto, para todo espacio topológico X se define

$$\wp_X = \left\{ [f] \middle| f : I \to X \text{ es una función continua} \right\}$$

es decir, estamos tomando todas las clases de caminos de un espacio topológico X (note que no tiene nada que ver con el grupo fundamental, más que con el hecho de que usa las clases de caminos en su definición).

Considere dos espacios topológicos X y Y y sea $\varphi : X \to Y$ una función continua. Si $f_0, f_1 : I \to X$ son caminos en X, ¿también lo son $\varphi \circ f_0$ y $\varphi \circ f_1$?

Proposición 3.2
Sean X y Y espacios topológicos, $f_0, f_1 : I \to X$ caminos equivalentes. Entonces, $\varphi \circ f_0 \sim \varphi \circ f_1$.

Demostración:
Como $f_1 \sim f_0$, existe pues una función continua $F : I \times I \to X$ tal que

$$F(x, 0) = f_0(x), \quad F(x, 1) = f_1(x)$$

para todo $x \in I$ y,

$$F(0, t) = f_0(0) = f_1(0), \quad F(1, t) = f_0(1) = f_1(1)$$

Considere la función $G : I \times I \to Y$ dada por:

$$G(x, t) = \varphi \circ F(x, t)$$

Es claro que esta funciónes continua por ser composición de funciones continuas, además se cumple que

$$\begin{aligned} G(x, 0) &= \varphi \circ F(x, 0) \\ &= \varphi(F(x, 0)) \\ &= \varphi(f_0(x)) \\ &= \varphi \circ f_0(x) \end{aligned}$$

para todo $x \in I$. De forma análoga

$$G(x, 1) = \varphi \circ f_1(x)$$

La otra condición se verifica de forma inmediata, con lo que se concluye que $\varphi \circ f_0 \sim \varphi \circ f_1$. ■

Con la proposición anterior, podemos definir sin problemas una función que mapee clases de caminos en X a clases de caminos en Y, a partir de la función continua φ. Esto se hará con el objetivo de ver qué sucede con el grupo fundamental bajo esta función continua φ_*.

Definición 3.3
Sean X y Y espacios topológicos y $\varphi : X \to Y$ una función continua. Sea $f : I \to X$ un camino que une a los puntos $x, y \in X$, se define la función $\varphi_* : \wp_X \to \wp_Y$ por

$$\varphi_*([f]) = [\varphi \circ f]$$

por la proposición anterior, esta función está bien definida.

Ahora, analizaremos las propiedades de la función φ_*.

Proposición 3.3
Sean X y Y espacios topológicos y $\varphi : X \to Y$ una función continua.

I. Si $f_0, f_1 : I \to X$ son caminos en X tales que $f_0 \cdot f_1$ está definido (por ende, $[f_0] \cdot [f_1]$ lo está), entonces $\varphi_*([f_0] \cdot [f_1]) = \varphi_*([f_0]) \cdot \varphi_*([f_1])$.

II. Para cualquier punto $x \in X$, $\varphi_*(\mathcal{I}_x) = \mathcal{I}_{\varphi(x)}$.

III. Si $f : I \to X$ es un camino, entonces $\varphi_*([f]^{-1}) = (\varphi_*([f]))^{-1}$.

Demostración:
De (i): Veamos primero que el producto $\varphi_*([f_0]) \cdot \varphi_*([f_1])$ está bien definido. En efecto, dado a que el producto $[f_0] \cdot [f_1]$ lo está, entonces

$$f_0(1) = f_1(0)$$

luego,

$$\varphi \circ f_0(1) = \varphi \circ f_1(0)$$

donde $\varphi_*([f_0]) = [\varphi \circ f_0]$ y $\varphi_*([f_1]) = [\varphi \circ f_1]$, por tanto el producto de ambas clases está definido. Probemos ahora la igualdad. Se tiene que

$$\begin{aligned}\varphi_*([f_0] \cdot [f_1]) &= \varphi_*([f_0 \cdot f_1]) \\ &= [\varphi \circ (f_0 \cdot f_1)]\end{aligned}$$

siendo

$$f_0 \cdot f_1(t) = \begin{cases} f_0(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f_1(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}, \quad \forall t \in I$$

por ende,

$$\begin{aligned}\varphi \circ (f_0 \cdot f_1)(t) &= \begin{cases} \varphi(f_0(2t)) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \varphi(f_1(2t-1)) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \varphi \circ f_0(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \varphi \circ f_1(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \\ &= (\varphi \circ f_0) \cdot (\varphi \circ f_1)(t), \quad \forall t \in I\end{aligned}$$

luego entonces

$$\begin{aligned}[\varphi \circ (f_0 \cdot f_1)] &= [(\varphi \circ f_0) \cdot (\varphi \circ f_1)] \\ &= [\varphi \circ f_0] \cdot [\varphi \circ f_1] \\ &= \varphi_*([f_0]) \cdot \varphi_*([f_1])\end{aligned}$$

lo que prueba el resultado.
De (ii) y (iii): Ejercicio. ■

Por estas razones, llamaremos a φ_* un *homomorfismo* u *homomorfismo inducido por* φ.

Proposición 3.4
En el contexto de la proposición anterior, si Z es un espacio topológico y $\psi : Y \to Z$ es una función continua, entonces

$$(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$$

Demostración:
Es claro que la composición de ambas funciones está bien definida. Probaremos ahora la igualdad, sea $f : I \to X$ un camino, entonces:

$$\begin{aligned}(\psi \circ \varphi)_*([f]) &= [\psi \circ \varphi \circ f] \\ &= [\psi \circ (\varphi \circ f)] \\ &= \psi_*([\varphi \circ f]) \\ &= \psi_*(\varphi_*([f])) \\ &= \psi_* \circ \varphi_*([f])\end{aligned}$$

lo que prueba la igualdad. ■

Ejercicio 3.1
Sea X espacio topológico y $i : X \to X$ la función identidad, entonces

$$i_*([f]) = [f]$$

para todo camino $f : I \to X$ en X.

Demostración:
Ejercicio. ■

Observación 3.3
En otras palabras, lo que nos dice la proposición anterior es que el mapeo i_* reestringido a $\pi(X, x)$ coincide con la identidad de $\mathbb{1}_{\pi(X,x)}$, y que

$$i_* = \mathbb{1}_{\wp X}$$

Corolario 3.2
Sean X y Y espacios topológicos y $\varphi : X \to Y$ una función continua y $x \in X$. La función φ_* restringida a $\pi(X, x) \subseteq \wp X$ es un homomorfismo entre $\pi(X, x)$ y $\pi(Y, \varphi(x))$. Más aún, si φ es homeomorfismo, entonces φ_* reestringida a $\pi(X, x)$ es isomorfismo.

Demostración:
El hecho de que sea homomorfismo es inmediato de la proposición anterior y de que si f es un bucle con base en x, entonces

$$\varphi_*([f]) = [\varphi \circ f]$$

es la clase del camino $\varphi \circ f$, el cual es un bucle con base en $\varphi(x)$.

Veamos ue si φ es homeomorfismo entonces φ_* es isomorfismo. En efecto, como es homeomorfismo existe una función $\varphi^{-1} : Y \to X$ continua que es la inversa de φ.

Se sigue de la proposición anterior que

$$(\mathbb{1}_X)_* = (\varphi \circ \varphi^{-1})_* = \varphi_* \circ \varphi_*^{-1}$$

donde $\mathbb{1}_X$ es la identidad de X, luego

$$\varphi_* \circ \varphi_*^{-1} = \mathbb{1}_{\wp X}$$

de forma análoga se sigue que

$$\varphi_*^{-1} \circ \varphi_* = \mathbb{1}_{\wp Y}$$

por tanto, la función φ_* es invertible, luego φ_* reestringida a $\pi(X, x)$ es invertible, con inversa la reestricción de φ_*^{-1} a $\pi(Y, \varphi(x))$. Así, φ_* es isomorfismo. ∎