Notas Grupos Topológicos

Cristo Daniel Alvarado

14 de junio de 2024

Índice general

Capítulo 2

Compacidad

Observación 2.0.1
De ahora en adelante se considerarán solamente grupos T_0. Por un lema anterior se tiene en particular que son T_3 y T_0, luego son T_2 y regulares.

En este capítulo se estudiarán algunas de las propiedades más investigadas en grupos topológicos.

2.1. Grupos compactos y localmente compactos

Este primer teorema es una generalización de un teorema de la sección anterior.

Teorema 2.1.1
Sean G un grupo topológico, U una vecindad de e_G y F un subconjunto compacto de G. Entonces, existe una vecindad V de e_G tal que

$$xVx^{-1} \subseteq U \quad \forall x \in F$$

Demostración:
Sea $W \subseteq G$ una vecindad simétrica de e_G, esto es que $W^3 \subseteq U$. Como

$$F \subseteq \bigcup_{x \in F} Wx$$

al tenerse que F es compacto, existen $x_1, .., x_k \in F$ tales que

$$F \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} Wx_i$$

Sea $V = \bigcap_{i=1}^{k} x_i^{-1} W x_i$. Es claro que V es una vecindad de e_G y que $V \subseteq x_i^{-1} W x_i$, para todo $i \in [\![1, k]\!]$. Si $x \in F$ entonces existe $i \in [\![1, k]\!]$ tal que

$$x \in Wx_i$$

es decir $x = wx_i$ para algún $w \in W$. Luego,

$$\begin{aligned} xVx^{-1} &= wx_i V x_i^{-1} w^{-1} \\ &\subseteq wWw^{-1} \\ &\subseteq W^3 \\ &\subseteq U \end{aligned}$$

■

Se sabe de la sección anterior que si G es un grupo topológico y H es un subgrupo cerrado de G, entonces la función canónica $\pi : G \to G/H$ es continua y abierta. En el caso en que H sea compacto, este resultado puede mejorarse:

Teorema 2.1.2
Sea G un grupo topológico y H un subgrupo compacto de G. Entonces, la función canónica $\pi : G \to G/H$ es una función cerrada.

Demostración:
Sea $A \subseteq G$ cerrado. Para probar el resultado bastará con probar que el complemento de $\pi(A)$ es abierto en G/H. Sea $x \in G$ tal que $\pi(x) \notin \pi(A)$. Notemos que

$$\pi(A) = AH$$

donde el conjunto $AH \subseteq G$ es cerrado en G (ya que A es cerrado y H es compacto), luego como $x \notin AH$ existe un abierto $U \subseteq G$ tal que $x \in U$ y

$$U \cap AH = \emptyset$$

Afirmamos que $U^* = \pi(U)$ es un abierto que contiene a $\pi(x)$ ajeno a $\pi(A)$. En efecto, es claro que contiene a $\pi(x)$. Suponga que existe $z \in G$ tal que $\pi(z) = zH \in \pi(U) \cap \pi(A)$, luego existen $u \in U$ y $a \in A$ tales que:

$$zH = uH = aH$$

luego $a^{-1}u \in H$ de donde se sigue que $u \in AH$, es decir que $U \cap AH \neq \emptyset \#_c$. Por tanto, $\pi(U) \cap \pi(A) = \emptyset$. Así, el conjunto $G/H \backslash \pi(A)$ es abierto, luego $\pi(A)$ es cerrado. ■

Observación 2.1.1
Note que la condición de que H sea compacto es necesaria para que el conjunto AH sea cerrado.

Las propiedades de compacidad y compacidad local se heredan a espacios cocientes de G entre subgrupos cerrados H.

Teorema 2.1.3
Sean G un grupo topológico y H un subgrupo cerrado de G. Si G es compacto, entonces H y G/H también lo son. Si G es localmente compacto, entonces H y G/H también lo son.

Demostración:
Es claro que la compacidad y la compacidad local se hereda a subgrupos cerrados de G.

Dado que la función canónica $\pi : G \to G/H$ es continua y sobre, la imagen $\pi(G) = G/H$ es un conjunto compacto en G/H, es decir que G/H es compacto.

Ahora probaremos que si G es localmente compacto, entonces G/H también lo es. En efecto, suponga que G es localmente compacto. Sea $\pi(a) \in G/H$, debemos encontrar una vecindad compacta de $\pi(a)$. Como $a \in G$ existe una vecindad U de a tal que $a \in U \subseteq \overline{U}$, siendo $\overline{U}$ compacto en G.

Como π es continua, se tiene que $\pi(\overline{U})$ es compacto en G/H, en particular, cerrado. Además, como $U \subseteq \overline{U}$, entonces

$$\pi(U) \subseteq \pi(\overline{U}) \Rightarrow \overline{\pi(U)} \subseteq \pi(\overline{U})$$

es decir, que $\pi(U)$ es una vecindad de $\pi(a)$ tal que $\overline{\pi(U)}$ es compacta (por ser un cerrado contenido en un compacto). Luego, G/H es localmente compacto. ■

Hemos usado el hecho de que si $\pi : G \to G/H$ es la función canónica y $K \subseteq G$ es compacto, entonces $\pi(K)$ es compacto en G/H. El recíproco de este resultado también es cierto con una hipótesis adicional: la imagen inversa de un compacto en el espacio cociente G/H es compacta si H es compacto. Antes de probar este resultado necesitamos de algunos hechos auxiliares.

Definición 2.1.1
Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua. Decimos que f es **perfecta** si f es cerrada y todas las fibras $f^{-1}(y) \subseteq X$ son compactas para todo $y \in Y$.

El teorema 2.1.2 se puede generalizar al afirmar que la función canónica $\pi : G \to G/H$ es perfecta si el subgrupo H de G es compacto.

Se harán a continuación la prueba de algunos resultados necesarios para un teorema posterior.

Proposición 2.1.1
Si $f : X \to Y$ es una función cerrada, entonces para cualquier subespacio $L \subseteq Y$ la reestricción $f_L = f\big|_{f^{-1}(L)} : f^{-1}(L) \to L$ es cerrada.

Demostración:
Sea $A \subseteq X$ un conjunto cerrado en X, entonces

$$\begin{aligned} f_L(A \cap f^{-1}(L)) &= f(A \cap f^{-1}(L)) \\ &= f(A) \cap L \end{aligned}$$

pues, $f(f^{-1}(L)) = L$. Por ende, como f es cerrada se sigue que $f(A) \cap L$ es cerrado en el subespacio de L de Y. Así, f_L es cerrada. ■

Proposición 2.1.2
Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función perfecta, entonces para cualquier cerrado $A \subseteq X$ y cualquier subespacio $B \subseteq Y$ las restricciones $f\big|_A : A \to Y$ y $f_B = f\big|_{f^{-1}(B)} : f^{-1}(B) \to B$ son perfectas.

Demostración:
Es claro que la reestricción $f\big|_A$ y f_B son cerradas (siendo la última por la proposición anterior). Sea ahora $y \in Y$, se tiene:

$$f\big|_A^{-1}(y) = A \cap f^{-1}(y)$$

donde el conjunto de la derecha es un cerrado contenido en el compacto $f^{-1}(y)$, luego compacto. Así, $f\big|_A$ es perfecta.

Para f_B, veamos que si $y \in B$:

$$f_B^{-1}(y) = f^{-1}(y)$$

donde el conjunto de la derecha es compacto. Por tanto, f_B es perfecta. ■

Teorema 2.1.4
Sean X, Y espacios topológicos. Si $f : X \to Y$ es una función perfecta, entonces para todo subconjunto compacto $Z \subseteq Y$, su imagen inversa $f^{-1}(Z)$ es compacta en X. En particular, si Y es compacto, X también lo es.

Demostración:

Primero notemos que si $y \in Y$ y $U \subseteq X$ es una vecindad abierta de $f^{-1}(y)$, entonces existe una vecindad $W \subseteq Y$ de y tal que

$$f^{-1}(W) \subseteq U$$

En efecto, tomemos $W = Y \backslash f(X \backslash U)$. Claramente W es cerrada pues f es perfecta (en particular, f es cerrada) y es tal que $y \in W$. Además,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(Y \backslash f(X \backslash U)) &\iff f(x) \in Y \backslash f(X \backslash U) \\ &\iff f(x) \in Y \backslash f(X \backslash U) \\ &\iff f(x) \in Y \text{ y } f(x) \notin f(X \backslash U) \\ &\Rightarrow x \notin X \backslash U \\ &\iff x \in U \end{aligned}$$

por tanto ,$f^{-1}(W) \subseteq W$.

Ahora, por el teorema 2.1.3 es suficiente con probar que si Y es compacto, entonces X también lo es (esto pues podemos tomar la reestricción de f a U y sería una función $f\big|_U : U \to Y$ y el resultado se cumpliría para U). Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X.

Sin péridida de generalidad podemos suponer que $\mathcal{U}$ es cerrada bajo uniones finitas (en caso de que no lo sea, podemos crear una cubierta más grande formada por todos los elementos de $\mathcal{U}$, al extraer la subcubierta abierta finita de esta cubierta más grande tendríamos a su vez una cubierta abierta finita del conjunto formada por una cantidad finita de elementos de $\mathcal{U}$). Sabemos que para toda $y \in Y$, el conjunto $f^{-1}(y)$ es compacto en X. Por ende, existe un abierto $U_y \in \mathcal{U}$ tal que

$$f^{-1}(y) \subseteq U_y$$

por lo probado anteriormente se tiene que existe un abierto $V_y \subseteq Y$ tal que $y \in V_y$ y:

$$f^{-1}(V_y) \subseteq U_y$$

como Y es compacto y la familia $\left\{V_y \middle| y \in Y\right\}$ forma una cubierta abierta de Y, entonces existen $y_1, ..., y_n \in Y$ tales que

$$Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$$

Se sigue entonces que

$$\begin{aligned} X &= f^{-1}(Y) \\ &\subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}\right) \\ &\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(V_{y_i}) \\ &\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i} \end{aligned}$$

luego, X es compacto. ■

Suponga que tenemos un grupo G, un subgrupo H de G y una propiedad topológica $\mathcal{P}$. Un problema muy conocido en la teoría de grupos topológicos es: si G/H y H tienen la propiedad $\mathcal{P}$, ¿también G posee la propiedad $\mathcal{P}$? En este libro se responderá afirmativamente esta pregunta para varias propiedades $\mathcal{P}$, por ejemplo, conexidad, compacidad, etc... Comencemos con la compacidad.

Teorema 2.1.5
Sean G un grupo topológico y H un subgrupo compacto de G. Si $Q \subseteq G/H$ es compacto, entonces $P = \pi^{-1}(Q)$ es compacto, donde $\pi : G \to G/H$ es la función canónica. En particular, si G/H es compacto, entonces G también lo es.

Demostración:
Por el teorema anterior, basta con probar que π es perfecta. De un teorema anterior se tiene que π es cerrada.

Sea $x \in G$, entonces el conjunto $\pi^{-1}(\pi(x)) = xH$ que es compacto. Así, π es perfecta. ■

Corolario 2.1.1
Sea G grupo topológico y H un subgrupo cerrado de G. Entonces, $\pi : G \to G/H$ es perfecta si y sólo si H es compacto.

Demostración:
Es inmediata de la prueba del teorema anterior, pues:

$$\pi^{-1}(\pi(x)) = xH$$

■

Existen grupos numerables sin puntos aislados, por ejemplo, el grupo $\mathbb{Z}$ con la p-topología. Demostraremos que tales grupos no pueden ser localmente compactos.

Teorema 2.1.6
Todo grupo topológico localmente compacto G tal que $|G| < \mathfrak{c}$ es discreto.

Demostración:
Suponga que G es localmente compacto y no es discreto. Entonces G no puede tener puntos aislados (pues es homogéneo). Sea U una vecindad abierta de e_G tal que $K = \overline{U}$ es compacto. ■

Como todo espacio compacto es localmente compacto, se sigue que todo grupo topológico compacto no discreto tiene cardinalidad no menor que $\mathfrak{c}$ (por el teorema anterio). Lo mismo se cumple para los grupos numerablemente compactos (como se verá en un ejercicio posterior).

El siguiente resultado acerca de subconjuntos compactos de un grupo nos será de utliidad posteriormente.

Teorema 2.1.7
Sean G un grupo topológico, F un subconjunto compacto de G, U un subconjunto abierto de G tal que $F \subseteq U$. Entonces existe una vecindad V de e_G tal que

$$(FV) \cup (VF) \subseteq U$$

Si G es localmente compacto, entonces V se puede elegir de tal forma que ambos conjuntos $\overline{FV}$ y $\overline{VF}$ sean compactos.

Demostración:
Como W es abierto, entonces para cada $x \in F$ existe $W_x \subseteq G$ vecindad abierta de e_G que

$$xW_x \subseteq U$$

además, existe una vecindad V_x de e_G tal que

$$V_x^2 \subseteq W_x$$

Notemos que $\{xV_x\}_{x\in F}$ es una cubierta abierta de F luego, F por ser compacto existen $x_1, ..., x_n \in F$ tales que

$$F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} x_i V_{x_i}$$

Tomemos:

$$V_1 = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$$

la cual es una vecindad abierta de e_G. Se tiene que:

$$\begin{aligned} FV_1 &\subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{n} x_i V_{x_i}\right) V_1 \\ &\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} x_i V_{x_i} V_{x_i} \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} x_i V_{x_i}^2 \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} x_i W_{x_i} \\ &\subseteq U \\ \Rightarrow FV_1 &\subseteq U \end{aligned}$$

de forma similar obtenemos una vecindad abierta V_2 de e_G tal que $V_2 F \subseteq U$. Sea $V = V_1 \cap V_2$, se obtiene con ello que

$$(FV) \cup (VF) \subseteq U$$

Supongamos ahora que G es localmente compacto. Entonces, en lo hecho anteriormente podemos elegir a V tal que $\overline{V}$ es un conjunto compacto en G. Luego, por un teorema se sigue que el conjunto $F\overline{V}$ es compacto.

Como $FV \subseteq F\overline{V}$ y $F\overline{V}$ es cerrado, entonces $\overline{FV} \subseteq F\overline{V}$, luego $\overline{FV}$ es compacto. De forma análoga se deduce que $\overline{VF}$ es compacto. ■

Ahora se analizarán algunos resultados sobre compacidad numerable.

Observación 2.1.2
Recordemos antes que todo espacio es compacto si y sólo si es numerablemente compacto y Lindelöf.

Teorema 2.1.8
Si G es un grupo topológico que contiene un subgrupo compacto H tal que el espacio cociente G/H es numerablemente compacto, entonces G es numerablemente compacto.

Demostración:
Por un resultado del apéndice, basta con probar que cada subconjunto infinito de G tiene un punto de acumulación (en el caso en que $|G|$ sea infinito, si es finito el resultado es inmediato). Sea $X \subseteq G$ tal que

$$|X| = \aleph_0$$

(basta con este cardinal ya que para cardinales más grande siempre se puede extraer un subconjunto de cardinalidad al menos $\aleph_0$). Se tienen dos casos:

- Existe $g \in G$ tal que $|X \cap gH| = \aleph_0$. En este caso el subconjunto $X \cap gH$ del subespacio gH de G debe tener un punto de acumulación (pues, el subespacio gH es compacto, en particular numerablemente compacto), luego X tiene un punto de acumulación en G.

- Para toda $x \in G$, $|X \cap gH| < \aleph_0$. Sea $\pi : G \to G/H$ la función canónica. De esta suposición se desprende que
$$|\pi(X)| = \aleph_0$$
(ya que en caso contrario, una clase lateral debería contener una cantidad numerable de elementos de X, cosa que no puede suceder), luego al ser G/H numerablemente compacto se sigue que $\pi(X)$ tiene un punto de acumulación en G/H, es decir que existe $a \in G$ tal que para toda U vecindad de a en G se cumple que
$$|\pi(X) \cap U^*| = \aleph_0$$
(donde $U^* = \pi(U)$). Probaremos que para alguna $p \in aH$, p es punto de acumulación de X. Suponga lo contrario, es decir que para todo $p \in aH$ existe una vecindad abierta V_p en G de p tal que
$$|X \cap V_p| < \aleph_0$$
Se tiene entonces que el conjunto $\{V_p\}_{p \in aH}$ forma una cubierta abierta de aH. Por ser compacto, existen $p_1, ..., p_n \in aH$ tales que
$$aH \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{p_i} = V$$
se tiene que V es una vecindad abierta de aH para la cual
$$|X \cap V| \leq \sum_{i=1}^{n} |X \cap V_{p_i}| < \aleph_0$$
por ser π perfecta (por ser H compacto), existe una vecindad abierta U^* de aH en G/H tal que
$$\pi^{-1}(U^*) \subseteq V$$
luego,
$$|U^* \cap \pi(X)| \leq \left|\pi^{-1}(U^*) \cap X\right| < \aleph_0$$
lo cual es una contradicción. Por tanto, X tiene un punto de acumulación p tal que $p \in aH$.

■

En este teorema anteiror no se puede debilitar la hipótesis de que H a numerablemente compacto sin perder el resultado, pues existen grupos topológicos numerablemente compactos H y K tales que $G = H \times K$ no es numerablemente compacto. Este tipo de construcciones usan axiomas adicionales de ZFE, por ejemplo, la hipótesis del continuo o el axioma de Martin.

¿Existen grupos topológicos numerablemente compactos que no sean compactos? La respuesta es que si, en el que se usa el Σ-producto.

Definición 2.1.2
Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ un conjunto de espacios topológicos. En el producto $X = \prod_{i \in I} X_i$ considere un punto $p \in X$, es decir $p = (p_i)_{i \in I}$. Definimos el **soporte de un punto** $x \in X$ **respecto a** p como:
$$\operatorname{supp}(x) = \left\{ i \in I \middle| x_i \neq p_i \right\}$$

El **Σ-producto** denotado por $\Sigma(p)$ en X se define como:

$$\Sigma(p) = \left\{ x \in X \middle| |\operatorname{supp}(x)| \leq \aleph_0 \right\}$$

Ejemplo 2.1.1
Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de grupos topológicos compactos con $|G_i| > 0$ para todo $i \in I$, donde $|I| > \aleph_0$. En el producto

$$G = \prod_{i\in I} G_i$$

considere el Σ-producto G^* con la identidad e_G como punto base (básicamente se toman todos los elementos de G tales que el elemento tiene a lo sumo una cantidad numerable de entradas diferentes de la identidad). Se tiene que G^* es un subgrupo propio denso de G que es numerablemente compacto que no es compacto.

Demostración:
Ya se tiene que G^* es un subgrupo propio de G. Veamos que es denso. En efecto, el hecho de que sea denso se sigue de que $H < G$ definido como todos los elementos de G que tienen una cantidad finita de entradas diferentes de la identidad es denso en G, luego $H < G^* < G$. Veamos que G^* es numerablemente compacto.

En efecto, considere un subconjunto infinito numerable $F \subseteq G^*$. Debemos probar que F tiene un punto de acumulación en G^*. Sea

$$H = \bigcup \left\{ \operatorname{supp}(x) \middle| x \in F \right\}$$

Por definición, $\operatorname{supp}(x)$ es a lo sumo numerable para todo $x \in F$, luego $|H| \leq \aleph_0$. Observe que por el teorema de Tikhonov, el espacio

$$G' = \left[\prod_{i\in H} G_i \right] \times \left[\prod_{j\in I\setminus H} \{e_j\} \right]$$

es compacto y es tal que $F \subseteq G'$, por lo cual existe $z \in G'$ tal que es punto de acumulación de F en G'. Solo resta notar que $z \in G' \subseteq G^*$. ■

Definición 2.1.3
Un subgrupo H de un grupo topológico G es **totalmente denso** en G si para todo subgrupo cerrado N de G el subgrupo $H \cap N$ es denso en N. El subgrupo H es **débilmente denso** en G si para todo subgrupo normal N de G, el conjunto $H \cap N$ es denso en N.

Definición 2.1.4
Un espacio X se llama **precompacto** si la cerradura de cualquier subconjunto numerable $Y \subseteq X$ es compacta.

Observación 2.1.3
Note que todo espacio precompacto es numerablemente compacto.

Lema 2.1.1
Toda función continua de un espacio compacto en un Hausdorff es perfecta.

Demostración:
Sea $f : X \to Y$ una función continua entre los espacios (X, τ) y (Y, σ) siendo (X, τ) compacto y (Y, σ) Hausdorff. Veamos que es perfecta. En efecto, hay que ver que f es cerrada y que cada fibra es compacta en X.

- **f es cerrada.** En efecto, sea $F \subseteq X$ cerrado, como el espacio (X, τ) es compacto, entonces F es compacto en X, así $f(F)$ es compacto en Y, el cual es Hausdorff, luego $f(F)$ es cerrado. Por tanto, f es cerrada.
- Sea $y \in Y$, debemos probar que $f^{-1}(y)$ es compacto en X. En efecto, como f es continua, se tiene que $f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\})$ es cerrado en X, que al ser compacto se sigue que es compacto en X.

Por los dos incisos anteriores se sigue el resultado. ∎

Proposición 2.1.3
Sean G un grupo compacto, $\varphi : G \to G'$ un homomorfismo continuo de G sobre G', H' un subgrupo de G' y $H = \varphi^{-1}(H')$. Entonces,

1. Si H' es denso en G', entonces H es denso en G.
2. Si H' es totalmente denso en G', entonces H también es totalmente denso en G.
3. Si H' es precompacto, entonces H también lo es.

Demostración:
Más adelante se probará que φ es abierto (el resultado es muy relevante y aún no se puede probar totalmente dadas las herramientas actuales), pero en este momento lo tomaremos como un hecho. En partcular, $\varphi\big|_H$ es abierto: luego, si U es un abierto en H y V es un abierto en G tal que

$$U = H \cap V$$

entonces, $\varphi(U) = \varphi(V) \cap H'$. Por tanto, $\varphi(U)$ es abierto en H'. (recuerde que toda función continua de un compacto en un Hausdorff es perfecta). Probaremos los tres incisos:

1. Queremos probar que $H = \varphi^{-1}(H')$ es denso en G. Sea U un abierto en G, entonces $\varphi(U)$ es un abierto en G'. Como H' es denso en G' se tiene que

$$\varphi(U) \cap H' \neq \emptyset \Rightarrow U \cap \varphi^{-1}(H') \neq \emptyset$$

así, H es denso en G.

2. Sea K un subgrupo cerrado de G. Se tiene que $H' \cap \varphi(K)$ es denso en G. Sea U un abierto en G, entonces $\varphi(U)$ es abierto en G' y por consiguiente:

$$\varphi(U) \cap (H' \cap \varphi(K)) \neq \emptyset \Rightarrow U \cap \varphi^{-1}(H') \cap K \neq \emptyset$$

luego, $H \cap K$ es denso en K. Por ser K arbitrario se sigue que H es totalmente denso en G.

3. Sea $D \subseteq H$ numerable. Queremos ver que $\overline{D}$ es compacta en H. Como H' es precompacto, existe pues un conjunto $K \subseteq H'$ compacto tal que

$$\varphi(D) \subseteq K$$

luego,

$$D \subseteq \varphi^{-1}(K)$$

donde $\varphi^{-1}(K)$ es compacto, pues la función φ es perfecta.

■

2.2. Propiedades Relativas a Compacidad

Una clase más amplia de grupos compactos la constituyen los grupos totalmente acotados.

Definición 2.2.1
Un grupo topológico G es **totalmente acotado** si para cada vecindad U de e_G existe un subconjunto $F \subseteq G$ tal que F es finito y $G = F \cdot U$.

Los grupos totalmente acotados tienen una propiedad muy importante: son subgrupos densos de grupos compactos (esto no se probará). Además, la propiedad se preserva en subgrupos, bajo homomorfismos continuos y en productos.

Observación 2.2.1
Los grupos totalmente acotados no pueden contener grupos infinitos discretos y, su grado de dispersión es igual a la cardinalidad del grupo G.

Demostración:
Sea G un grupo totalmente acotado y H un subgrupo de G discreto. Probaremos que H es finito. En efecto, como H es discreto, entonces el conjunto $\{e_G\}$ es un abierto que contiene a e_G, luego por ser G totalmente acotado, existe $F \subseteq G$ finito para el cual

$$G = F \cdot \{e_G\} = F$$

es decir que G es finito de donde se sigue que H debe ser finito. ■

Note que todo grupo compacto es totalmente acotado. Pues si G es compacto y U es una vecindad de e_G, entonces $\{gU\}_{g \in G}$ es una cubierta abierta de G, luego por ser compacto existen $g_1, ..., g_n$ tales que G está contenido en la unión de la familia $\{g_i U\}_{i=1}^{n}$. Por tanto, tomando $F = \{g_1, ..., g_n\}$ se sigue que $G = F \cdot U$, es decir que G es totalmente acotado.

Proposición 2.2.1
Sea G un grupo totalmente acotado. Entonces:

I. Si U es una vecindad arbitraria de e_G, entonces existe $L \subseteq G$ finito tal que $G = U \cdot L$.

II. Todo subgrupo K de G es totalmente acotado.

III. Si G' es un grupo topológico que es la imagen de G respecto a un homomorfismo continuo, entonces G' es totalmente acotado.

IV. Si K es un subgrupo denso de un grupo L y K es totalmente acotado, entonces L también es totalmente acotado.

Demostración:

De (i): Sea U una vecindad arbitraria de e_G. Por un teorema anterior existe una vecindad simétrica V de e_G tal que $V \subseteq U$. Por ser G totalmente acotado, para V existe $F \subseteq G$ finito tal que

$$G = F \cdot V$$

Sea

$$L = F^{-1} = \left\{x^{-1} \in G \middle| x \in F\right\}$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} V \cdot L &= V^{-1} \cdot L \\ &= (F \cdot V) \\ &= G \end{aligned}$$

más aún, se tiene que

$$G = U \cdot L$$

De (ii): Sea U una vecindad de e_G en H, es decir que existe V abierto en G tal que

$$U = H \cap V$$

Por una proposición anterior, existe W vecindad de e_G tal que $W^{-1}W \subseteq V$. Por ser G totalmente acotado, existe un subconjunto finito $F \subseteq G$ tal que

$$G = F \cdot W$$

Para cada $x \in F$, definimos a_x como sigue:

- Si $H \cap xW \neq \emptyset$, tomamos a_x como un elemento arbitrario fijo de este conjunto.
- En caso contrario, hacemos $a_x = e_G$.

Entonces, el conjunto

$$A = \left\{a_x \in H \middle| x \in F\right\} \cup \{e_G\}$$

es finito y $H = A \cdot U$. En efecto, es claro que $A \cdot U \subseteq H$, pues $A, U \subseteq H$. Si $y \in H$, en particular $y \in G = F \cdot W$, luego existe $x \in F$ tal que $y \in xW$. Se tienen dos casos:

- $y = e_G$, en tal caso se sigue que $y \in A \cdot U$.
- $y \neq e_G$, se tiene que $y \in H \cap xW$, luego si $y = a_x$, se tiene el resultado, pues se seguiría que $y \in A \cdot U$. En caso de que no sean iguales, se sabe que existe $w \in W$ tal que

  $$y = xw = a_x a_x^{-1} xw$$

  donde $a_x \in A$ y, como $a_x \in xW$, existe $w' \in W$ tal que $a_x = xw' \Rightarrow a_x^{-1} = w'^{-1}x^{-1}$, luego:

  $$a_x^{-1}xw = w'^{-1}x^{-1}xw = w'^{-1}w$$

  donde $w'^{-1}w \in W^{-1}W \subseteq V$, y además está en H pues xw y xw' lo están, luego el producto de sus inversos el cual es

  $$(xw')^{-1}(xw) = w'^{-1}w$$

  está en H, así $a_x^{-1}xw \in U = V \cap H$. Por tanto, $y \in A \cdot U$

Por tanto, $H = A \cdot U$, luego H es totalmente acotado.

De (iii): Sea $\varphi : G \to K$ un homomorfismo continuo suprayectivo (podemos suponer que es suprayectivo tomando como contradominio la imagen de G bajo φ) y supongamos que G es totalmente acotado. Probaremos que K también lo es. Sea V una vecindad abierta de e_K en K. El conjunto

$$U = \varphi^{-1}(V)$$

es un abierto en G que contiene a e_G. Como G es totalmente acotado, entonces existe $F \subseteq G$ finito tal que

$$G = F \cdot U$$

luego,

$$K = \varphi(F) \cdot V$$

pues $\varphi(\varphi^{-1}(V)) = V$. Así, tomando $A = \varphi(F)$ subconjunto finito de K se sigue que K es totalmente acotado.

De (iv): Sea U una vecindad de e_L. Se sabe que existe una vecindad simétrica W de e_L tal que

$$W^2 \subseteq L$$

Se tiene pues que

$$V = W \cap K \neq \emptyset$$

pues K es denso en L. Más aún, V es una vecindad de $e_K = e_L$ en K, por ser K totalmente acotado existe $F \subseteq K$ finito tal que

$$K = F \cdot V$$

Afirmamos que

$$L = F \cdot U$$

En efecto, sea $g \in L$. Como K es denso en L, el conjunto $K \cap gW$ es no vacío, tomemos $h \in K \cap gW$. Entonces, $h = gw$ para algún $w \in W$ y $h \in K$, de donde se sigue quee existe $f \in F$ y $v \in V$ tales que

$$h = fv$$

pues $h \in K$. Así, se tiene

$$\begin{aligned} g &= hw^{-1} \\ &= fvw^{-1} \end{aligned}$$

donde $f \in F$ y $vw^{-1} \subseteq W^2 \subseteq U$. Por tanto, $L = F \cdot U$. ■

Ejemplo 2.2.1
Los puntos con coordenadas racionales en el grupo del círculo forman un subgrupo denso, totalmente acotado y no compacto de $\mathbb{T}$. Se tiene pues que la clase de grupos totalmente acotados es estrictamente más grande que la de grupos compactos.

Definición 2.2.2
Un grupo topológico G es **compacto de origen** si existe una vecindad V de e_G tal que $\overline{V}$ es compacto y el conjunto V genera al grupo G, es decir

$$G = \langle V \rangle$$

Si el grupo G está generado por un subconjunto H compacto, entonces G es **compacto generado**.

Observación 2.2.2
Todo grupo compacto de origen es compacto generado. La recíproca no necesariamente es cierta.

Definición 2.2.3
Un espacio topológico X es **σ-compacto** si existe una familia numerable de conjuntos compactos $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que cubren a X.

Observación 2.2.3
Todo espacio compacto es σ-compacto. La recíproca en general no es cierta. Si X es Lindelöf y localmente compacto, es σ-compacto.

Lema 2.2.1
Si G es un grupo topológico compacto de origen, entonces G es σ-compacto.

Demostración:
Como G es compacto de origen, existe una vecindad V de e_G tal que $\overline{V}$ es compacto y

$$G = \langle V \rangle$$

Tomemos

$$U = V \cup V^{-1}$$

Claramente se tiene que

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$$

(véase una caracterización de $\langle V \rangle$). Con más razón

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{U}^n$$

donde $\overline{U}^n$ es compacto, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, G es σ-compacto. ■

Teorema 2.2.1
Sea G un grupo topológico con un subgrupo normal y compacto H tal que G/H es compacto generado. Entonces G es compacto generado.

Demostración:
Considere $\pi : G \to G/H$ el homomorfismo canónico. Como G/H es compacto generado, existe un conjunto $\tilde{A} \subseteq G$ compacto tal que

$$G/H = \langle \tilde{A} \rangle$$

tomemos $A = \pi^{-1}(\tilde{A})$. Por ser H compacto, se tiene que π es perfecta, luego

$$A = \pi^{-1}(\tilde{A})$$

es compacto. Así, AH es un subconjunto compacto de G. Se sigue que $(AH) \cup H$ es compacto. Afirmamos que

$$G = \langle (AH) \cup H \rangle$$

En efecto, sea $g \in G$. Se tienen dos casos:

- $g \in H$, de donde se sigue que $g \in \langle (AH) \cup H \rangle$.
- $g \notin H$. Como $\pi(g) \in G/H = \langle \tilde{A} \rangle$, existen $a_1H, ..., a_nH \in \langle \tilde{A} \rangle$ y $\epsilon_1, ..., \epsilon_n \in \{-1, 1\}$ tales que

$$\begin{aligned} \pi(g) &= (a_1H)^{\epsilon_1} \cdots (a_nH)^{\epsilon_n} \\ &= (a_1^{\epsilon_1} \cdots a_n^{\epsilon_n})H \\ \Rightarrow gH &= (a_1^{\epsilon_1} \cdots a_n^{\epsilon_n})H \end{aligned}$$

siendo $a_1, ..., a_n \in \pi^{-1}(\tilde{A}) = A$, luego para ciertos $h_1, h_2 \in H$ tenemos que

$$\begin{aligned} gh_1 &= a_1^{\epsilon_1} \cdots a_n^{\epsilon_n} h_2 \\ g &= a_1^{\epsilon_1} \cdots a_n^{\epsilon_n} h_2 h_1^{-1} \end{aligned}$$

donde el elemento de la derecha está en $\langle (AH) \cup H \rangle$.

Por los dos incisos anteriores, se sigue que $G = \langle (AH) \cup H \rangle$. Por tanto G es compacto generado. ■

Teorema 2.2.2
Sea G un grupo localmente compacto y H un subgrupo normal de G. Si G/H y H son compactos generados, entonces G también es compacto generado.

Demostración:
Suponga que G/H y H son compactos generados. Sea $\tilde{X} =\subseteq G/H$ y $Y \subseteq G$ tales que

$$G/H = \langle \tilde{X} \rangle \quad \text{y} \quad H = \langle Y \rangle$$

Tomemos $X = \pi^{-1}(\tilde{X})$. Como π es perfecta, entonces X es compacto, así $X \cup Y$ es compacto. Afirmamos que

$$G = \langle X \cup Y \rangle$$

■

2.3. Funciones Cardinales y Compacidad

Teorema 2.3.1
Sea G un grupo topológico con la propiedad de que para cada vecindad U de e_G existe un subconjunto $D_u \subseteq G$ tal que $|D_U| \leq \chi(G)$ y $G = U \cdot D_U$. Entonces $w(G) = \chi(G)$.

Demostración:
Recordemos que

$$w(G) = \text{mín}\left\{ |\mathcal{B}| \,\middle|\, \mathcal{B} \text{ es una base de } G \right\} + \aleph_0$$

y

$$\chi(G) = \sup\left\{ \text{mín}\left\{ |\mathcal{V}| \,\middle|\, \mathcal{V} \text{ es una base local en } p \right\} \,\middle|\, p \in G \right\} + \aleph_0$$

Se tiene siempre que $\chi(G) \leq w(G)$, pues cualquier base de G es una base local para cualquier punto de G. Basta con probar que $w(G) \leq \chi(G)$.

Sea $\mathcal{B}(e_G)$ una base local para e_G con cardinalidad igual a χ_G. Definimos

$$\mathcal{B} = \left\{ Bx \,\middle|\, B \in \mathcal{B}(e_G) x \in D_B \right\}$$

donde D_B es un subconjunto de G tal que $G = B \cdot D_B$. Por un teorema anterior se sabe que $\mathcal{B}$ es una base para la topología de G. Se desprende que

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}| &\leq \sum_{B \in \mathcal{B}(e_G)} |D_B| \\ &\leq \chi(G) \cdot \chi(G) \\ &= \chi(G) \end{aligned}$$

por lo cual, $w(G) \leq \chi(G)$. ■

Corolario 2.3.1
Sea G un grupo σ-compacto, entonces $w(G) = \chi(G)$.

Demostración:
Como G es σ-compacto, para toda vecindad U de e_G existe un subconjunto a lo sumo numerable $F \subseteq G$ tal que

$$G = U \cdot F$$

(recurde la definición de σ-compacto y compacto). Se sigue que se cumplen las hipótesis del teorema anterior con lo que, $w(G) = \chi(G)$. ■

Observación 2.3.1
Para un espacio topológico X se define el **número de Lindelöf** como el cardinal más pequeño $l(X)$ tal que toda cubierta abierta admite una subcubierta de cardinalidad $l(X)$.