# Lista 2 de Problemas y Ejercicios
# Lógica Matemática

Cristo Daniel Alvarado

10 de octubre de 2024

# Capítulo 2

# Lista 2

**Ejercicio 2.1.1**
Traduzca cada una de las siguientes fórmulas de primer orden a español ordinario, utilizando los símbolos de predicado unario $A$, $B$ e $I$ para representar *es un autor*, *es un libro* y *es interesante*, respectivamente; por otra parte, el símbolo de predicado binario $C$ debe ser interpretado como *es más caro que*. Finalmente, el símbolo de función unario $P$ representa a la función que recibe como entrada un libro y, arroja como salida a su autor.

($a$) $(\forall x)(B(x) \Rightarrow (\exists y)(A(y) \wedge y = P(x)))$.

($b$) $(\forall x)(\forall y)((B(x) \wedge B(y) \wedge I(x) \wedge \neg I(y)) \Rightarrow C(x, y))$.

($c$) $(\forall x)(B(x) \Rightarrow ((\exists y)(B(y) \wedge C(x, y)) \Rightarrow I(x)))$.

**Solución:**

□

**Ejercicio 2.1.2**
Dada cada uno de los siguientes enunciados en español, identifique el universo de discurso apropiado, así como los símbolos adecuados de constante, función y relación (específicando la aridad de cada uno de ellos) para poder escribir simbólicamente una traducción a la lógica de primer orden:

($a$) Todo número primo debe ser impar.

($b$) Si hay al menos una manzana, entonces hay al menos una manzana podrida.

($c$) Todo número complejo $z$ tal que $z = \overline{z}$ pertenece al conjunto $\mathbb{R}$.

**Solución:**

□

**Ejercicio 2.1.3**
Considere el llamado **lenguaje de la aritmética de Peano**, el cual consta de un símbolo de constante 1, un símbolo de relación binaria $<$, un símbolo de función unaria $S$ y dos símbolos de función binaria, $+$ y $\cdot$. Determine cuáles de las siguiente sucesiones de símbolos denotan términos y/o fórmulas bien formadas (o bien, de manera más precisa, cuáles de las siguientes podrían convertirse en términos y/o fórmulas bien formadas módulo algunas abreviaturas).

(a) $v_1 < (v_2 + S(v_3))$.

(b) $S(v_5 + (S(S(1)) + v_2 7))$.

(c) $S(v_9 + S((\forall 1)(1 + S(1) = v_{57})))$.

(d) $(\forall v_{48})(S(v_{48} + 1) \cdot S(S(S(1))) = v_{23})$.

**Solución:**

$\square$

**Ejercicio 2.1.4**
Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con cuatro símbolos de relación unaria $P, Q, S, T$, así cómo símbolos de relación binaria $B, C, D$ y símbolos de constante $c, d$. Construya demostraciones formales de validez para cada uno de los siguientes argumentos:

(a)
$$\begin{array}{lll} 1) & (\exists x)(\forall y)(Px \iff Qy) & \text{Premisa} \\ \hline & \therefore \quad (\forall y)(\exists x)(Px \iff Qy) & \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{lll} 1) & (\forall x)(\exists y)(Px \wedge Qy) & \text{Premisa} \\ \hline & \therefore \quad (\exists y)(\forall x)(Px \wedge Qy) & \end{array}$$

(c)
$$\frac{}{\therefore \quad (\forall x)(Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x)(Px) \Rightarrow (\forall x)(Qx))}$$

(d)
$$\frac{}{(\forall x)(Px \Rightarrow \varphi) \iff ((\exists x)(Px) \Rightarrow \varphi)}$$

(e)
$$\frac{}{\therefore \quad (\exists x)(Px \wedge \varphi) \iff ((\exists x)(Px) \wedge \varphi)}$$

(f)
$$\frac{}{\therefore \quad (\forall x)(\exists y)(Px \Rightarrow Qy) \Rightarrow ((\forall x)Px \Rightarrow (\exists y)Qy)}$$

(g)
$$\frac{}{\therefore \quad (\exists x)(Px \Rightarrow \varphi) \iff ((\forall x)(Px) \Rightarrow \varphi)}$$

(h)
$$\frac{}{\therefore \quad (\exists x)(Px \vee \varphi) \Rightarrow ((\forall x)(Px) \vee \varphi)}$$

(i)
$$\frac{}{\therefore \quad ((\exists x)(Px) \vee (\exists x)(Qx)) \iff (\exists x)(Px \vee Qx)}$$

(j)
$$\frac{}{\therefore \quad (\forall x)(Px \vee \varphi) \iff ((\forall x)(Px) \vee \varphi)}$$

(k)
$$\frac{}{\therefore \quad (\forall x)(\exists y)(Px \wedge Qy) \iff (\exists y)(\forall x)(Px \wedge Qx)}$$

(l)
$$\frac{}{\therefore \quad (\forall x)(\exists y)(Px \wedge Qy) \iff (\exists y)(\forall x)(Px \wedge Qy)}$$

(m)
$$\frac{}{\therefore \quad (\exists x)(Px \Rightarrow \varphi) \iff ((\forall x)(Px) \Rightarrow \varphi)}$$

**Ejercicio 2.1.5**
Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje de primer orden cuyo único símbolo lógico es una relación unaria $P$. Demuestre o refute las siguientes afirmaciones:

(a) $(\forall v_1)(Pv_1) \vDash P(v_2)$.

(b) $Pv_2 \vDash (\forall v_2)(Pv_1)$.

(c) $(\forall v_1)(Pv_1) \vDash (\exists v_1)(Pv_1)$.

(d) $\emptyset \vDash (\exists v_5)(Pv_5) \Rightarrow (\forall v_6)(Pv_6)$.

(e) $\models (\exists v_5)(Pv_5 \Rightarrow (\forall v_6)(Pv_6))$.

**Solución:**

$\square$

**Ejercicio 2.1.6**
Sea $\mathcal{L}$ el mismo lenguaje del problema anterior.

(a) Caracterice a los modelos que satisfacen el enunciado $(\forall x)(\forall y)(x = y)$.

(b) Caracterice a los modelos que satisfacen el enunciado $(\exists x)(\exists y)(\neg(x = y) \wedge (\forall z)(z = x \vee z = y))$.

(c) Caracterice a los modelos que satisfacen el enunciado $(\forall x)(\neg Px)$.

**Solución:**

$\square$

**Ejercicio 2.1.7**
Sea $\varphi$ una fórmula (de algún lenguaje de primer orden, $\mathcal{L}$), y sea $\{v_{i_1}, ..., v_{i_k}\} = \mathrm{Free}\,(\varphi)$ (supongamos que para todo esté bien definido y que $i_1 < ... < i_k$). Definimos la **cerradura universal** de $\varphi$ como la oración $(\forall v_{i_k}) \cdots (\forall v_{i_1})(\varphi)$.

(a) Escriba la definición formal de la cerradura universal de una fórmula.

*Sugerencia.* Inducción sobre el número de variables libres.

(b) Demuestre que, para cualquier conjunto de enunciados $\Sigma$, se cumple que $\Sigma \models \varphi$ si y sólo si $\Sigma \models \psi$, donde $\psi$ es la cerradura universal de $\varphi$.

**Demostración:**

$\blacksquare$

**Ejercicio 2.1.8**
Considere el lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ cuyo único símbolo no lógico es uno de relación binaria, $P$. Demuestre que, de entre los siguientes enunciados, no hay dos de ellos que contengan al otro como consecuencia lógica.

(a) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(P(x, y) \Rightarrow P(x, z))$.

(b) $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \Rightarrow (P(y, x) \Rightarrow x = y))$.

(c) $(\forall x)(\exists y)(P(x, y)) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)(P(x, y))$.

**Demostración:**

$\blacksquare$

**Ejercicio 2.1.9**
Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje de primer orden cuyos símbolos no lógicos son un símbolo de función unaria $F$, y un símbolo de relación biaria $P$. Demuestre que $\emptyset \models x = y \Rightarrow (P(z, F(x)) \Rightarrow P(z, F(y)))$.

**Demostración:**

$\blacksquare$