

Notas del curso Topología I

Cristo Daniel Alvarado

28 de febrero de 2024

Índice general

0. Introduccion	2
0.1. Temario	2
0.2. Bibliografía	2
1. Conceptos Fundamentales	3
1.1. Fundamentos	3
1.2. Bases de una topología	16
1.3. Sub-bases	20

Capítulo 0

Introduccion

0.1. Temario

Checar el Munkres

0.2. Bibliografía

1. J. R. Munkres 'Topología' - Prentices Hall.
2. M. Gemignani 'Elementary Topology' - Dover.
3. J. Dugundji 'Topology' - Allyn Bacon.

Capítulo 1

Conceptos Fundamentales

1.1. Fundamentos

Definición 1.1.1

Sea X un conjunto y \mathcal{A} una familia no vacía de subconjuntos de X . Definamos los **complementos de \mathcal{A}**

$$\mathcal{A}' := \{X - A \mid A \in \mathcal{A}\}$$

(básicamente es el conjunto de todos los complementos de los conjuntos en \mathcal{A}). Para no perder ambigüedad, no denotaremos al complemento de un conjunto por B^c , sino por $X - B$ (para denotar quien es el conjunto sobre el que se toma el complemento del conjunto).

La **unión de los elementos** de \mathcal{A} se define como el conjunto:

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \in X \mid x \in A \text{ para algún elemento } A \in \mathcal{A}\}$$

denotada por el símbolo de la izquierda.

La **intersección de los elementos** de \mathcal{A} se define como el conjunto:

$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \in X \mid x \in A \text{ para todo elemento } A \in \mathcal{A}\}$$

Observación 1.1.1

En caso de que la colección \mathcal{A} sea vacía, no se puede hacer lo que marca la definición anterior. Como \mathcal{A} es vacía, entonces \mathcal{A}' también es vacía.

1. Suponga que $\bigcup \mathcal{A} \neq \emptyset$, entonces existe $x \in X$ tal que $x \in \bigcup \mathcal{A}$, luego existe algún elemento $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A$, pero esto no puede suceder, pues la familia \mathcal{A} es vacía. $\#_c$. Por tanto, $\bigcup \mathcal{A} = \emptyset$.
2. Ahora, si aplicamos las leyes de Morgan, y tomamos

$$X - \bigcap \mathcal{A} = X - \bigcap \emptyset = \bigcup \mathcal{A}' = \bigcup \emptyset = \emptyset$$

luego, $\bigcap \mathcal{A} = X$.

En definitiva, si \mathcal{A} es una colección vacía, entonces definimos $\bigcup \mathcal{A} = \emptyset$ y $\bigcap \mathcal{A} = X$.

La observación junto con la definición anterior se usarán a lo largo de todo el curso y serán de utilidad.

Definición 1.1.2

Sea X un conjunto y sea τ una familia de subconjuntos de X . Se dice que τ es una **topología definida sobre X** si se cumple lo siguiente:

1. $\emptyset, X \in \tau$.
2. Si \mathcal{A} es una subcolección de τ , entonces $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$.
3. Si $A, B \in \tau$, entonces $A \cap B \in \tau$.

Observación 1.1.2

En algunos libros viejos viene la siguiente condición adicional a la definición:

4. Si $p, q \in X$ con $p \neq q$, entonces existen $U, V \in \tau$ tales que $p \in U$, $q \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

en este caso se dirá que el espacio es **Hausdorff**.

Observación 1.1.3

Se tienen las siguientes observaciones:

1. Sea X un conjunto y \mathcal{A} una familia de subconjuntos de X . Si

$$\mathcal{A} = \{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$$

entonces podemos escribir

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

e igual con la intersección:

$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$$

Si \mathcal{A} es una familia vacía, y se toma como definición lo dicho en la observación 1.0.1, entonces podemos omitir el primer inciso de la definición anterior.

2. Si τ es una topología sobre X y para $n \in \mathbb{N}$, $A_1, \dots, A_n \in \tau$, entonces $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \tau$.

Ejemplo 1.1.1

Sea X un conjunto no vacío.

1. El conjunto potencia (denotado por \mathcal{P}) de X es una topología sobre X , la cual se llama la **topología discreta**, y se denota por τ_D .
2. La colección formada únicamente por X y \emptyset es una topología sobre X , es decir $\tau = \{\emptyset, X\}$ es llamada la **topología indiscreta**, y se escribe como τ_I .
3. En el caso de que $X = \{1\}$, se tendría que $\tau_D = \{\emptyset, \{1\}\}$ y $\tau_I = \{\emptyset, \{1\}\}$.
Si $X = \{1, \zeta\}$, entonces $\tau_D = \{\emptyset, \{1\}, \{\zeta\}, \{1, \zeta\}\}$ y $\tau_I = \{\emptyset, \{1, \zeta\}\}$.
4. Si τ es una topología sobre X , entonces

$$\tau_I \subseteq \tau \subseteq \tau_D$$

5. Sea $a \in X$. Entonces $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \}$ es una topología sobre X .

6. Sea $A \subseteq X$ y sea $\tau(A) = \{B \subseteq X \mid A \subseteq B\} \cup \{\emptyset\}$. Esta familia $\tau(A)$ es una topología sobre X .

Solución:

Para el inciso 6., veamos que $\tau(A)$ es una topología sobre X . En efecto, verificaremos que se cumplen las 3 condiciones:

1. Claro que $\emptyset \in \tau(A)$ por definición de $\tau(A)$. Además $X \in \tau(A)$ ya que $X \subseteq X$ y $A \subseteq X$.
2. Sea \mathcal{B} una familia no vacía de subconjuntos de $\tau(A)$, entonces existe $B_0 \in \mathcal{B}$ tal que $A \subseteq B_0$, por lo cual

$$A \subseteq B_0 \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subseteq X$$

por tanto $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \in \tau(A)$.

3. Sean $C, D \in \tau(A)$, entonces $A \subseteq C$ y $A \subseteq D$, por ende $A \subseteq C \cap D \subseteq X$. Así, $C \cap D \in \tau(A)$.

Por los incisos anteriores, la familia descrita en el inciso 6. es una topología sobre X . □

Observación 1.1.4

Sea X un conjunto no vacío. Si $A = \{a\} \subseteq X$, entonces escribimos τ_a en vez de $\tau(A)$.

Ejemplo 1.1.1

Se continúan con los ejemplos anteriores:

7. Sea $\tau_{cf} = \{A \subseteq X \mid X - A \text{ es un conjunto finito}\} \cup \{\emptyset\}$. Esta es una topología sobre X y se llama la **topología de los complementos finitos**.
8. Si X es un conjunto finito, entonces $\tau_{cf} = \tau_D = \mathcal{P}$.
9. Considere (en un conjunto finito X) a τ_{cf} y sean $a, b \in X$ con $a \neq b$. Si $U_a = X - \{b\}$, $U_b = X - \{a\}$, entonces $U_a, U_b \in \tau_{cf}$ y además, $a \in U_a$ pero $b \notin U_a$ y $a \notin U_b$ pero $b \in U_b$. Esta propiedad es muy importante tenerla en mente pues más adelante se usará.

Solución:

Veamos que la familia del ejemplo 7. es una topología sobre X . En efecto, veamos que se cumplen las 3 condiciones:

1. Claro que $\emptyset \in \tau_{cf}$ (por definición de τ_{cf}). Y además $X \in \tau_{cf}$ ya que $\emptyset = X - X$ es un conjunto finito y $X \subseteq X$.
2. Sea \mathcal{A} una familia no vacía de subconjuntos de τ_{cf} . Se cumple entonces que existe $A_0 \in \mathcal{A}$ tal que $X - A_0$ es finito. Por lo cual como

$$X - \bigcup \mathcal{A} \subseteq X - A_0$$

ya que $A \subseteq \bigcup \mathcal{A}$, se tiene que $X - \bigcup \mathcal{A}$ es finito y $\bigcup \mathcal{A} \subseteq X$. Por tanto, $\bigcup \mathcal{A} \in \tau_{cf}$.

3. Sean $A, B \in \tau_{cf}$. Probaremos que $A \cap B \in \tau_{cf}$. Afirmamos que $X - A \cap B$ es finito, en efecto, por leyes de Morgan se tiene que

$$X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B) \subseteq X$$

donde $X - A$ y $X - B$ son finitos, por lo cual su unión también lo es. Por tanto $A \cap B \in \tau_{cf}$.

Por los tres incisos anteriores, se sigue que τ_{cf} es una topología sobre X . □

A continuación se verá una proposición la cual tiene como objetivo el inducir una topología sobre un espacio métrico (X, d) arbitrario.

Proposición 1.1.1

Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $a \in X$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, al conjunto $B_d(a, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ se llama **ε -bola con centro en x y radio ε** .

Sea

$$\tau_d = \{A \subseteq X \mid \forall a \in A \exists r > 0 \text{ tal que } B_d(a, r) \subseteq A\}$$

Esta colección es una topología sobre X .

Demostración:

Se verificará que se cumplen las tres condiciones.

1. Por vacuidad, $\emptyset \in \tau_d$. Además, $X \in \tau_d$, pues para todo $x \in X$, $B_d(x, 1) \subseteq X$.
2. Sean \mathcal{A} una familia no vacía de subconjuntos de τ_d . Sea $p \in \cup \mathcal{A}$, es decir que existe $A_\beta \in \mathcal{A}$ tal que $p \in A_\beta$, así existe $r > 0$ tal que $B_d(p, r) \subseteq A_\beta \subseteq \cup \mathcal{A}$, luego $\cup \mathcal{A} \in \tau_d$.
3. Sean $M, N \in \tau_d$, y sea $p \in M \cap N$, es decir que $p \in M$ y $p \in N$, por lo cual existen $r_1, r_2 > 0$ tales que $B_d(p, r_1) \subseteq M$ y $B_d(p, r_2) \subseteq N$. Sea $r = \min\{r_1, r_2\}$, es inmediato que $B_d(p, r) \subseteq B_d(p, r_i)$, para $i = 1, 2$. Por tanto, $B_d(p, r) \subseteq M \cap N$. Luego, como el p fue arbitrario, se sigue que $M \cap N \in \tau_d$.

■

Definición 1.1.3

La topología de la proposición anterior es llamada la **topología generada por la métrica d** .

Ejercicio 1.1.1

Sea (X, d) espacio métrico. Veamos que, dados $x \in X$ y $r > 0$, se cumple que $B_d(x, r) \in \tau_d$.

Solución:

Sea $y \in B_d(x, r)$, entonces $d(x, y) < r$. Sea $\varepsilon = d(x, y)$ y, supongamos que $x \neq y$ (pues en caso contrario, el caso es inmediato ya que $B_d(x, r) \subseteq B_d(x, r)$) luego $\varepsilon > 0$ y además $\varepsilon < r$. Sea $s = r - \varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

Afirmamos que $B_d(y, s) \subseteq B_d(x, r)$. En efecto, sea $z \in B_d(y, s)$, entonces

$$\begin{aligned} d(z, y) &< s \\ \Rightarrow d(z, y) &< r - \varepsilon \\ \Rightarrow d(z, y) + \varepsilon &< r \\ \Rightarrow d(z, y) + d(y, x) &< r \\ \Rightarrow d(z, x) &< r \end{aligned}$$

por tanto, $x \in B_d(x, r)$. Luego, $B_d(x, r) \in \tau_d$. □

Lema 1.1.1

Todo espacio métrico (X, d) es Hausdorff.

Demostración:

Veamos que dados $x, y \in X$, $x \neq y$ existen $r, s \in \mathbb{R}^+$ tales que $B_d(x, r) \cap B_d(y, s) = \emptyset$. Como $x \neq y$ entonces $d(x, y) = m \in \mathbb{R}^+$. Tomemos $r = \frac{m}{\pi}$ y $s = \frac{\pi-1}{\pi}m$ y veamos que la intersección es vacía.

En efecto, en caso de que no lo fuese se tendría que si existiera $p \in B_d(x, r) \cap B_d(y, s)$, entonces $d(p, x) < \frac{m}{\pi}$ y $d(p, y) < \frac{\pi-1}{\pi}m$, por lo cual de la desigualdad triangular se sigue que:

$$d(x, y) \leq d(p, x) + d(p, y) < \frac{1 + \pi - 1}{\pi}m = m = d(x, y)$$

lo cual es una contradicción. Por tanto, la intersección es vacía. ■

Retomando al espacio métrico (X, d) , tenemos que para $A \subseteq X$, $A \in \tau_d$ si y sólo si existen $\{a_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq A$ y $\{\varepsilon_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathbb{R}^+$ tales que

$$\bigcup_{\alpha \in I} B_d(a_\alpha, \varepsilon_\alpha) = A$$

donde $\forall \alpha \in I$ se tiene que $A_\alpha \in \mathcal{A}$.

Corolario 1.1.1

Sea (X, d) un espacio métrico y

$$\mathcal{B}_d = \{B_d(x, \varepsilon) | x \in X, \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$$

entonces, para $A \subseteq X$ se tiene que $A \in \tau_d$ si y sólo si existe una colección $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathcal{B}_d$ tal que $A = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$. La colección $\mathcal{B}_d \subseteq \tau_d$.

Ejemplo 1.1.2

Sea $m \in \mathbb{N}$ y considere el espacio métrico \mathbb{R}^m con la métrica d_u , siendo:

$$d_u(x, y) = [(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_m - y_m)^2]^{\frac{1}{2}}$$

para $x = (x_1, \dots, x_m), y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$. Esta métrica será denominada **métrica usual**. Vamos a escribir a la topología generada por esta métrica como τ_u , y se dice la **topología usual definida sobre \mathbb{R}^m** . En particular, cuando $m = 1$ tenemos que τ_u la topología usual definida sobre \mathbb{R} . En este caso, se tiene que $A \in \tau_u$ si y sólo si existen $\{a_\alpha\}_{\alpha \in I}$ y $\{b_\alpha\}_{\alpha \in I}$ subfamilias de \mathbb{R} tal que $A = \bigcup_{\alpha \in I} (a_\alpha, b_\alpha)$.

Observación 1.1.5

Tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, los conjuntos $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \in \tau_u$, y $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \{0\} \notin \tau_u$. Es decir, que la topología solo es cerrada (en general) bajo intersecciones finitas.

Definición 1.1.4

Sea X un conjunto, y sean τ_1 y τ_2 topologías sobre X . Decimos que τ_2 es **más fina** que la topología τ_1 si se tiene que $\tau_1 \subseteq \tau_2$ (a veces también se dice que τ_1 es **menos fina** que τ_2).

Ejemplo 1.1.3

Sea $X = \{1, 2, 3\}$, $\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}\}$, $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2\}\}$. Tomemos

$$\tau_1 \cup \tau_2 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{2\}\}$$

la familia $\tau_1 \cup \tau_2$ no es una topología sobre X , pues no es cerrada bajo uniones arbitrarias. Con esto se tiene que la unión de dos topologías no necesariamente es una topología.

Teorema 1.1.1

Sea X un conjunto, y sea $\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de topologías sobre X , entonces $\tau = \bigcap_{\alpha \in I} \tau_\alpha$ es una topología sobre X .

Demostración:

Veamos que se cumplen las tres condiciones.

1. Claro que $X, \emptyset \in \tau$, pues $X, \emptyset \in \tau_\alpha$, para todo $\alpha \in I$.
2. Sea $\mathcal{A} = \{A_\beta\}_{\beta \in J} \subseteq \tau = \bigcap_{\alpha \in I} \tau_\alpha$ una subcolección arbitraria de elementos de τ . Por ser τ_α una topología, se sigue que $\bigcup \mathcal{A} \in \tau_\alpha$, para todo $\alpha \in I$. Por tanto, $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$.
3. Sean $K, L \in \tau$, entonces $K, L \in \tau_\alpha$, para todo $\alpha \in I$, luego como τ_α es una topología sobre X , se tiene que $L \cap K \in \tau_\alpha$, para todo $\alpha \in I$, por tanto $L \cap K \in \tau$.

Por los tres incisos anteriores, se sigue que τ es una topología sobre X . ■

Corolario 1.1.2

Sea X un conjunto y sean \mathcal{A} una familia de subconjuntos de X . Definimos

$$\mathcal{K} = \{\tau \mid \tau \text{ es una topología sobre } X \text{ y } \mathcal{A} \subseteq \tau\}$$

Entonces:

1. $\tau_D \in \mathcal{K}$.
 2. Definiendo $\tau(\mathcal{A}) = \bigcap_{\tau \in \mathcal{K}} \tau$, se tiene que $\tau(\mathcal{A})$ es una topología sobre X .
 3. Para toda topología $\tau \in \mathcal{K}$, $\tau(\mathcal{A}) \subseteq \tau$.
 4. $\tau(\mathcal{A}) \in \mathcal{K}$.
-

Demostración:

De 1. Es inmediato, pues como $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P} = \tau_D$ y τ_D es una topología sobre X , se sigue que $\tau_D \in \mathcal{K}$.

De 2. Es inmediato del teorema anterior.

De 3. Como $\tau(\mathcal{A}) = \bigcap_{\tau \in \mathcal{K}} \tau$, entonces $\tau(\mathcal{A}) \subseteq \tau$, para toda $\tau \in \mathcal{K}$.

De 4. Por 2. $\tau(\mathcal{A})$ es una topología sobre X , y además $\mathcal{A} \subseteq \tau(\mathcal{A})$, pues $\mathcal{A} \subseteq \tau$, para todo $\tau \in \mathcal{K}$, luego $\mathcal{A} \subseteq \bigcap_{\tau \in \mathcal{K}} \tau = \tau(\mathcal{A})$. Por ende, $\tau(\mathcal{A}) \in \mathcal{K}$. ■

Definición 1.1.5

Un **espacio topológico** es una pareja (X, τ) en donde X es un conjunto y τ es una topología sobre X . A los elementos de τ los llamaremos los **conjuntos abiertos** del espacio (X, τ) a veces también se les nombra como los **τ -abiertos de X** .

Ejemplo 1.1.4

Ejemplos de espacios topológicos son (\mathbb{R}, τ_D) , (\mathbb{R}, τ_I) , (\mathbb{R}, τ_{cf}) , (\mathbb{R}, τ_u) , etc... Las diferencias notables son que $\{1, \sqrt{2}\}$ es abierto en (\mathbb{R}, τ_D) , pero no en (\mathbb{R}, τ_u) .

Sea X un conjunto y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$. Por el corolario anterior, podemos trabajar con la topología $\tau(\mathcal{A})$, y tenemos así al espacio topológico $(X, \tau(\mathcal{A}))$, el cual en particular tiene como abiertos a los elementos de la familia \mathcal{A} .

Definición 1.1.6

Sea (X, τ) un espacio topológico.

1. Un subconjunto $C \subseteq X$ es un **conjunto cerrado** del espacio topológico (X, τ) si $X - C \in \tau$.

Ejemplo 1.1.5

En (\mathbb{R}, τ_u) se tiene que \mathbb{R} y \emptyset son abiertos y cerrados a la vez, pero el conjunto $[1, 2[$ no es abierto ni cerrado, $]1, 2[$ es abierto pero no cerrado y $[1, 2]$ no es abierto pero sí es cerrado.

Proposición 1.1.2

Sea (X, τ) un espacio topológico.

1. Si A_1, \dots, A_n son subconjuntos cerrados de (X, τ) , entonces su unión $A_1 \cup \dots \cup A_n$ es un cerrado de (X, τ) .
2. Si \mathcal{A} es una familia arbitraria de conjuntos cerrados en (X, τ) , entonces $\bigcap \mathcal{A}$ es un conjunto cerrado.

Demostración:

De (1): Consideremos el complemento de la unión. Se tiene que:

$$X - \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i=1}^n (X - A_i)$$

el cuál es abierto por ser intersección finita de abiertos. Luego $\bigcap_{i=1}^n A_i$ es cerrado.

De (2): Basta con aplicar leyes de Morgan. ■

Ejemplo 1.1.6

Considere (\mathbb{R}, τ_u) y, para $n \in \mathbb{N}$ definimos $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, es claro que cada uno de estos conjuntos es abierto. Sea $B_n = \mathbb{R} - A_n = (-\infty, -\frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{n}, \infty)$.

Se tiene que:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R} - A_n = \mathbb{R} - \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{R} - \{0\}$$

el cual es abierto. Por tanto, la unión arbitraria de cerrados no es cerrada (en general).

Definición 1.1.7

Sea (X, τ) un espacio topológico y, sean $x \in X$ y $V \subseteq X$ tal que $x \in V$. Se dice que V es una **vecindad de x** si existe $U \in \tau$ abierto tal que $x \in U$ y $U \subseteq V$.

1. Si V es una vecindad de x y $V \in \tau$, decimos que V es una **vecindad abierta de x** .
2. Si V es una vecindad de x y $X - V \in \tau$, decimos que V es una **vecindad cerrada de x** .

Al conjunto de todas las vecindades del punto x lo denotamos por $\mathcal{V}(x)$. Tenemos que $X \in \mathcal{V}(x)$ para todo $x \in X$.

Definición 1.1.8

Se define el conjunto $[[1, n]]$ llamado **intervalo natural de 1 a n** como el conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$.

Ejercicio 1.1.2

Sea (X, τ) un espacio topológico.

1. Si $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{V}(x)$ para $x \in X$, entonces $V_1 \cap \dots \cap V_n \in \mathcal{V}(x)$.
2. Si $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathcal{V}(x)$ para $x \in X$, entonces $\bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha \in \mathcal{V}(x)$.

Solución:

Probaremos ambos incisos:

De (1): Como $x \in V_i$ para $i \in [[1, n]]$, entonces existen U_1, \dots, U_n abiertos en X tales que $x \in U_i \subseteq V_i$ para todo $i \in [[1, n]]$, luego $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i \subseteq V_1 \cap \dots \cap V_n$ donde el primer conjunto es abierto, luego $V_1 \cap \dots \cap V_n \in \mathcal{V}(x)$.

De (2): Es inmediato. □

Definición 1.1.9

Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$.

1. Sea $x \in X$. x es un **punto de acumulación de A** si para todo U abierto que contiene a x se tiene que $(U - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ (U contiene un punto de A diferente de x). Al conjunto de todos los puntos de acumulación lo llamaremos el **conjunto derivado de A** , y se denota por A' .
2. Un elemento $a \in A$ es un **punto interior** de A , si A es una vecindad de x (es decir, $A \in \mathcal{V}(x)$). El **interior de A** es el conjunto de todos los puntos interiores de A y se escribe $\overset{\circ}{A}$. Es claro que $\overset{\circ}{A} \subseteq A$.
3. Sea

$$\mathcal{C} = \{C \subseteq X \mid X - C \in \tau, A \subseteq C\}$$

es claro que \mathcal{C} es no vacía, pues $X \in \mathcal{C}$. La **cerradura de A** es el conjunto $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$ y se denota por \overline{A} . Si $x \in \overline{A}$, diremos que x es un **punto adherente de A** . Es claro que $A \subseteq \overline{A}$.

4. La **frontera de A** es el conjunto $\overline{A} \cap \overline{X - A}$ y se denota por $\text{Fr}(A)$.

Proposición 1.1.3

Sea (X, τ) un espacio topológico, $x \in X$ y sean $A, B \subseteq X$. Entonces:

1. $\overset{\circ}{A} \subseteq A \subseteq \overline{A}$.
2. $\overset{\circ}{A} = \bigcup \{U \in \tau \mid U \subseteq A\} = \bigcup \mathcal{A}$.
3. $\overset{\circ}{A} \in \tau$.
4. Si $V \in \tau$ tal que $V \subseteq A$, entonces $V \subseteq \overset{\circ}{A}$.
5. A es abierto si y sólo si $\overset{\circ}{A} = A$.
6. $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$.

7. $\widehat{A \cap B} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.
 8. $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subseteq \widehat{A \cup B}$.
 9. \overline{A} es un conjunto cerrado.
 10. Si $K \subseteq X$ es cerrado de (X, τ) y $A \subseteq K$, entonces $\overline{A} \subseteq K$.
 11. A es cerrado si y sólo si $\overline{A} = A$.
 12. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
 13. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
 14. $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.
 15. $\emptyset = \mathring{\emptyset} = \overline{\emptyset}$ y $X = \mathring{X} = \overline{X}$.
 16. Si $A \subseteq B$, entonces $\mathring{A} \subseteq \mathring{B}$ y $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.
 17. $x \in \overline{A}$ si y sólo si para todo abierto $U \subseteq X$ tal que $x \in U$ se tiene que $U \cap A \neq \emptyset$.
 18. $x \in \text{Fr}(A)$ si y sólo si para todo abierto U tal que $x \in U$ se cumple que $U \cap A \neq \emptyset$ y $U \cap (A - X) \neq \emptyset$.
 19. $\overline{A} = A \cup A'$.
 20. A es un conjunto cerrado si y sólo si $A' \subseteq A$.
 21. $\overline{A} = \mathring{A} \cup \text{Fr}(A)$.
 22. $\text{Fr}(A) = \text{Fr}(X - A)$.
 23. $\overline{A} - \text{Fr}(A) = \mathring{A}$.
-

Demostración:

Se probarán todos los incisos.

De (1): Si $x \in \mathring{A}$, entonces $A \in \mathcal{V}(x)$, luego $x \in A$. Por tanto, $\mathring{A} \subseteq A$. Ahora, es claro que $A \subseteq \overline{A}$, pues de la definición de cerradura de A , todos los elementos de la intersección en esta definición contienen a A , luego A está contenida en la intersección.

De (2): Veamos que se tienen las dos contenciones:

- $\mathring{A} \subseteq \bigcup \mathcal{A}$. Sea $x \in \mathring{A}$, entonces $A \in \mathcal{V}(x)$, por lo cual existe un abierto $U \in \tau$ tal que $x \in U \subseteq A$, luego $U \in \mathcal{A}$, es decir que $x \in \bigcup \mathcal{A}$.
- $\bigcup \mathcal{A} \subseteq \mathring{A}$. Sea $x \in \bigcup \mathcal{A}$, entonces existe $U \in \tau$ con $U \subseteq A$ tal que $x \in U$, por lo cual $A \in \mathcal{V}(x)$, luego $x \in \mathring{A}$.

por los dos incisos anteriores, se sigue que $\mathring{A} = \bigcup \mathcal{A}$, es decir que el interior de A es el conjunto abierto más grande contenido en A .

De (3): Es inmediato de (2).

De (4): Es inmediato de (2).

De (5): Supongamos que A es abierto, entonces $A \in \tau$. Además, $A \subseteq A$, por lo cual de (4) se sigue que $A \subseteq \mathring{A}$. Ya se tiene que $\mathring{A} \subseteq A$, por tanto $A = \mathring{A}$.

La recíproca es inmediata.

De (6): Por (3), se tiene que $\overset{\circ}{A}$ es abierto, luego por (5) se sigue que $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$.

De (7): Probaremos las dos contenciones:

- $\widehat{\overset{\circ}{A \cap B}} \subseteq \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$. Si $x \in \widehat{\overset{\circ}{A \cap B}} \subseteq A \cap B$, entonces existe $U \in \tau$ tal que $x \in U \subseteq A \cap B$, en particular $x \in U \subseteq A$ y $x \in U \subseteq B$, luego $x \in \overset{\circ}{A}$ y $x \in \overset{\circ}{B} \Rightarrow x \in \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$. Por tanto, $\widehat{\overset{\circ}{A \cap B}} \subseteq \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.
- $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subseteq \widehat{\overset{\circ}{A \cap B}}$. El conjunto $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \in \tau$ y $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subseteq A \cap B$. Por (4), se sigue que $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subseteq \widehat{\overset{\circ}{A \cap B}}$.

de los dos incisos anteriores, se sigue que $\widehat{\overset{\circ}{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

De (8): Se tiene que $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \in \tau$ es tal que $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subseteq A \cup B$, luego por (4) se sigue que $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subseteq \widehat{\overset{\circ}{A \cup B}}$.

De (9): Es inmediato de la definición de \overline{A} , pues este conjunto es intersección arbitraria de cerrados.

De (10): Es inmediato de la definición de \overline{A} . Esto significa que la cerradura de un conjunto es el cerrado más pequeño que contiene a A .

De (11): Suponga que A es cerrado, entonces como $A \subseteq A$, se tiene por (10) que $\overline{A} \subseteq A$. Luego, como $A \subseteq \overline{A}$ por (1), se sigue que $A = \overline{A}$.

La recíproca es inmediata de (9).

De (12): Por (9), \overline{A} es cerrado, luego por (11) se tiene que $\overline{A} = \overline{\overline{A}}$.

De (13): Proaremos las dos contenciones:

- $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. El conjunto $\overline{A \cup B}$ es un cerrado que contiene a $A \cup B$, por tanto del inciso (10) se tiene que $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$.
- Como $A, B \subseteq A \cup B$, entonces $A, B \subseteq \overline{A \cup B}$, luego por (10) se tiene que $\overline{A}, \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Por tanto, $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

de los dos incisos anteriores, se sigue que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

De (14): Como $A \subseteq \overline{A}$ y $B \subseteq \overline{B}$, entonces $A \cap B \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. Por (10), se sigue que $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

De (15): Se dividirá en dos partes:

- $\emptyset = \overset{\circ}{\emptyset} = \overline{\emptyset}$. Como $\emptyset \subseteq \overset{\circ}{\emptyset} \subseteq \emptyset$, entonces $\emptyset = \overset{\circ}{\emptyset}$. Ahora, como \emptyset es un cerrado que contiene a \emptyset , se sigue por (10) que $\overline{\emptyset} \subseteq \emptyset$. Por ende, $\overline{\emptyset} = \emptyset$.
- Para X el caso es casi análogo a \emptyset (al final todo esto resulta más en un juego de palabras que en otra cosa).

De (16). Como $A \subseteq B$, entonces $\overset{\circ}{A} \subseteq B$, y $A \subseteq \overline{B}$, por (4) y (10), se debe tener que $\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}$ y $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

De (17): Sea $x \in X$:

\Rightarrow): Suponga que $x \in \overline{A}$, entonces para todo $C \subseteq X$ cerrado tal que $A \subseteq C$, $x \in C$. Suponga que existe $U_0 \in \tau$ abierto tal que $x \in U_0$ y $U_0 \cap A = \emptyset$. Entonces $A \subseteq X - U_0$ es un cerrado que contiene a A , luego $x \in X - U_0$, es decir $x \notin U_0 \#_c$. Por tanto, $U \cap A \neq \emptyset$ para todo $U \in \tau$ tal que $x \in U$.

\Leftarrow): Sea $L \subseteq X$ un cerrado tal que $A \subseteq L$. Probaremos que $x \in L$, suponiendo la tesis para este $x \in X$. Suponga que $x \notin L$, entonces $x \in X - L$ el cual es abierto, por tanto $(X - L) \cap A \neq \emptyset$, es decir $A \not\subseteq L \#_c$. Por tanto, $x \in L$.

De (18): Es inmediato de la definición de $\text{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{X - A}$ y del inciso (17).

De (19): Se probarán las dos contenciones:

- $\bar{A} \subseteq A \cup A'$. Sea $x \in \bar{A}$. Si $x \in A$, se tiene el resultado. Suponga que $x \notin A$. Como $x \in \bar{A}$, por (17) para todo abierto $U \subseteq X$ se tiene que $U \cap A \neq \emptyset$, pero $x \notin A$, por lo cual $(U - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Por tanto, $x \in A'$.
- $A \cup A' \subseteq \bar{A}$. Es inmediata de la definición de \bar{A} y A' .

por los dos incisos anteriores se sigue que $\bar{A} = A \cup A'$.

De (20): Suponga que A es cerrado, entonces por (11), $\bar{A} = A$, luego por (19) se tiene que $A \cup A' = \bar{A} = A$, es decir que $A' \subseteq A$.

Si $A' \subseteq A$, entonces $A = A \cup A' = \bar{A}$ por (11), luego $A = \bar{A}$, es decir que A es cerrado.

De (21): Es claro que $\mathring{A} \cap \text{Fr}(A) \subseteq \bar{A}$, pues $\mathring{A}, \text{Fr}(A) \subseteq \bar{A}$. Ahora, si $x \in \bar{A}$ sea $U \subseteq X$ tal que $x \in U$. Se tienen dos casos:

- $U \subseteq A$, en este caso se sigue de la definición que $x \in \mathring{A}$.
- $U \not\subseteq A$, entonces existe $y \in U$ tal que $y \notin A$, es decir que $U \cap (X - A) \neq \emptyset$. Como $x \in \bar{A}$, entonces $U \cap A \neq \emptyset$. Por ser el U arbitrario, se sigue por (18) que $x \in \text{Fr}(A)$.

es decir que $x \in \mathring{A} \cup \text{Fr}(A)$. Por tanto, $\bar{A} \subseteq \mathring{A} \cup \text{Fr}(A)$. Así, $\bar{A} = \mathring{A} \cup \text{Fr}(A)$.

De (22): Veamos que $A = X - (X - A)$, por lo cual:

$$\text{Fr}(A) = \bar{A} \cap \overline{X - A} = \overline{X - A} \cap \bar{A} = \overline{X - A} \cap \overline{X - (X - A)} = \text{Fr}(X - A)$$

De (23): Observemos que: $x \in \bar{A} - \text{Fr}(A)$ si y sólo si se cumple que

- Para todo U abierto tal que $x \in U$ se cumple que $U \cap A \neq \emptyset$.
- Existe U_0 abierto tal que $x \in U_0$ y, $U_0 \cap A = \emptyset$ o $U_0 \cap (X - A) = \emptyset$.

Por ambas condiciones, debe suceder que $U_0 \cap A \neq \emptyset$ y $U_0 \cap (X - A) = \emptyset$, es decir que $U_0 \subseteq A$, esto es que $x \in \mathring{A}$. Por tanto, $x \in \bar{A} - \text{Fr}(A)$ si y sólo si $x \in \mathring{A}$. Luego se tiene la igualdad. ■

Proposición 1.1.4

Sea (X, τ) un espacio topológico y $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

1. $\bigcup_{\alpha \in I} \bar{A}_\alpha \subseteq \overline{\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha}$.
2. $\overline{\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha} \subseteq \bigcap_{\alpha \in I} \bar{A}_\alpha$.

Demostración:

Probemos ambos incisos:

De (1): Si $x \in \bigcup_{\alpha \in I} \bar{A}_\alpha$, sea $U \in \tau$ tal que $x \in U$, luego $\exists \alpha \in I$ tal que $x \in \bar{A}_\alpha$, por ende $U \cap A_\alpha \neq \emptyset$, por tanto $U \cap (\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) \neq \emptyset$. Como el $U \in \tau$ fue arbitrario, se sigue que $x \in \overline{\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha}$.

De (2): Si $x \in \overline{\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha}$, entonces para $U \in \tau$ tal que $x \in U$ se cumple que $(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha) \cap U \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in I} (A_\alpha \cap U) \neq \emptyset$, es decir que $U \cap A_\alpha \neq \emptyset$, para todo $\alpha \in I$, luego como $U \in \tau$ fue arbitrario, se sigue que $x \in \bar{A}_\alpha$ para todo $\alpha \in I$. Así $x \in \bigcap_{\alpha \in I} \bar{A}_\alpha$. ■

Ejemplo 1.1.7

Considere al espacio topológico (\mathbb{R}, τ_u) . Tomemos

1. $A =]0, 1] \cup \{9\}$. Tenemos que $\bar{A} = [0, 1] \cup \{9\}$, $A' = [0, 1]$, por lo cual no podemos relacionar (al menos de forma directa) a A junto con su A' (esto es, uno no está contenido dentro del

otro).

2. Sea $n \in \mathbb{N}$, defina $A_n = [\frac{1}{n}, 1]$. Se tiene que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n} =]0, 1]$$

y,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n =]0, 1] \Rightarrow \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n} = [0, 1]$$

es decir que $\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n} \not\subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}$.

3. Considere $X = \{a, b\}$, tomemos al espacio topológico $(X, \tau = \{X, \emptyset, \{a\}\})$. Si $A = \{a\}$ y $B = \{b\}$, entonces $\overset{\circ}{A} = \{a\}$, $\overset{\circ}{B} = \emptyset$, $\overline{A} = X$, $\overline{B} = B$. Luego $X = \widehat{\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}} \not\subseteq \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = A$.

Además $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \overline{A \cap B} = \emptyset$. Por ende, $B = \overline{A} \cap \overline{B} \not\subseteq \overline{A \cap B}$.

Definición 1.1.10

Para $x \in \mathbb{R}$, se define el **suelo de x** (denotado por $\lfloor x \rfloor$) como el máximo entero tal que $\lfloor x \rfloor \leq x$.

Ejercicio 1.1.3

Considere (\mathbb{R}, τ_u) . Encuentre $\overset{\circ}{\mathbb{N}}$, $\overline{\mathbb{N}}$, \mathbb{N}' , $\text{Fr}(\mathbb{N})$.

Solución:

Hagamos cada uno de los incisos:

1. $\overset{\circ}{\mathbb{N}}$) Afirmamos que $\overset{\circ}{\mathbb{N}} = \emptyset$. En efecto, si fuese el caso contrario, existiría U abierto no vacío en (\mathbb{R}, τ_u) tal que $U \subseteq \mathbb{N}$, luego si $x \in U \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$ (por ser U no vacío), entonces existe $r > 0$ tal que $]x - r, x + r[\subseteq U$.

Sea $\delta = \min\{1, r\} > 0$, entonces $]x - \delta, x + \delta[\subseteq U$, pero como $x \in \mathbb{N}$, no puede ser que $x + \frac{1}{2} \in \mathbb{N}$, lo cual contradice el hecho de que $U \subseteq \mathbb{N}$. Por tanto, $\overset{\circ}{\mathbb{N}} = \emptyset$.

2. $\overline{\mathbb{N}}$) Probaremos que \mathbb{N} es cerrado. Si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$, entonces existe $r = \min\{x - \lfloor x \rfloor, 1 - x + \lfloor x \rfloor\} > 0$ (pues $x \notin \mathbb{N}$, luego $\lfloor x \rfloor < x$) tal que $]x - r, x + r[\subseteq \mathbb{R} - \mathbb{N}$.

En efecto, supongamos que $x - \lfloor x \rfloor \leq 1 - x + \lfloor x \rfloor$, entonces

$$\begin{aligned}]x - r, x + r[&\subseteq]\lfloor x \rfloor, x + 1 - x + \lfloor x \rfloor[\\ &\subseteq]\lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1[\end{aligned}$$

es decir, $]x - r, x + r[\subseteq \mathbb{R} - \mathbb{N}$. Si $x - \lfloor x \rfloor \geq 1 - x + \lfloor x \rfloor$ el caso es análogo. Por tanto, $\mathbb{R} - \mathbb{N}$ es abierto, luego \mathbb{N} es cerrado y, por ende $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$.

3. \mathbb{N}') Afirmamos que el conjunto es vacío. Sea $x \in \mathbb{R}$. Se tienen dos casos:

- $x \in \mathbb{N}$ En este caso, existe $r = \frac{1}{2} > 0$ tal que $(]x - r, x + r[- \{x\}) \cap \mathbb{N} = \emptyset$.
- $x \notin \mathbb{N}$ En este caso, existe $r = \min\{x - \lfloor x \rfloor, 1 - x + \lfloor x \rfloor\} > 0$ tal que (como se vió en (2)) $]x - r, x + r[\cap \mathbb{N} = \emptyset$, en particular $(]x - r, x + r[- \{x\}) \cap \mathbb{N} = \emptyset$.

Por ambos incisos, se sigue que $\mathbb{N}' = \emptyset$.

4. $\text{Fr}(\mathbb{N})$) Afirmamos que $\text{Fr}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$. En efecto, ya se sabe que $\mathbb{N} = \overline{\mathbb{N}}$. Probaremos que $\mathbb{N} \subseteq \overline{\mathbb{R} - \mathbb{N}}$ y con ello se tendría el resultado.

Sea $x \in \mathbb{N}$, entonces si U es un abierto tal que $x \in U$, entonces existe $r > 0$ tal que $]x-r, x+r[\subseteq U$, luego si $\delta = \min\{1, r\} > 0$, se tiene que el elemento $x + \frac{\delta}{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$, es decir que $U \cap (\mathbb{R} - \mathbb{N}) \neq \emptyset$. Por tanto, $x \in \overline{\mathbb{R} - \mathbb{N}}$, así $\mathbb{N} \subseteq \overline{\mathbb{R} - \mathbb{N}}$.

□

Ejercicio 1.1.4

Considere (\mathbb{R}, τ_I) , (\mathbb{R}, τ_D) y (\mathbb{R}, τ_{cf}) . Encuentre en cada uno de los espacios anteriores $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}$, $\overline{\mathbb{Z}}$, \mathbb{Z}' , $\text{Fr}(\mathbb{Z})$.

Solución:

Consideremos cada una de las topologías por separado.

1. En (\mathbb{R}, τ_I) :

- $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}$) Afirmamos que $\overset{\circ}{\mathbb{Z}} = \emptyset$. En efecto, como $\tau_I = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$, el único abierto contenido en \mathbb{Z} es \emptyset , luego $\overset{\circ}{\mathbb{Z}} = \emptyset$.
- $\overline{\mathbb{Z}}$) Como el único cerrado que contiene a \mathbb{Z} es \mathbb{R} , se sigue que $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{R}$.
- \mathbb{Z}') Sea $x \in \mathbb{R}$, si U es un abierto tal que $x \in U$, entonces debe suceder que $U = \mathbb{R}$, luego $(U - \{x\}) \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$. Por tanto $x \in \mathbb{Z}'$. Así, $\mathbb{R} = \mathbb{Z}'$.
- $\text{Fr}(\mathbb{Z})$) Como $\overline{\mathbb{R} - \mathbb{Z}} = \mathbb{R}$, entonces se tiene que $\text{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{R}$.

2. En (\mathbb{R}, τ_D) :

- $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}$) Es claro que $\overset{\circ}{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$, pues en la topología discreta todo subconjunto de \mathbb{R} es abierto.
- $\overline{\mathbb{Z}}$) Es claro que $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$, pues en la topología discreta todo subconjunto de \mathbb{R} es cerrado.
- \mathbb{Z}') Afirmamos que $\mathbb{Z}' = \emptyset$. En efecto, si $x \in \mathbb{Z}$, entonces $\{x\}$ es un abierto en \mathbb{R} tal que $x \in \{x\}$, y se cumple que $(\{x\} - \{x\}) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$. Luego $\mathbb{Z}' = \emptyset$.
- $\text{Fr}(\mathbb{Z})$) Como $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ es cerrado, por un inciso anterior se sigue que $\text{Fr}(\mathbb{Z}) = \emptyset$.

3. En (\mathbb{R}, τ_{cf}) :

- $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}$) Sea $U \subseteq \mathbb{Z}$ abierto, es decir que $\mathbb{R} - U$ es finito o $U = \emptyset$. Se tiene entonces que:

$$\mathbb{R} - \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R} - U$$

como $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ es infinito, entonces por Cantor-Bernstein debe suceder que $\mathbb{R} - U$ también sea infinito. Por tanto, $U = \emptyset$. Luego entonces $\overset{\circ}{\mathbb{Z}} = \emptyset$.

- $\overline{\mathbb{Z}}$) Sea $C \subseteq \mathbb{R}$ un cerrado tal que $\mathbb{Z} \subseteq C$. Como en τ_{cf} los cerrados son todos los subconjuntos finitos o \mathbb{R} , entonces al ser \mathbb{Z} infinito no puede ser que C sea finito, luego $C = \mathbb{R}$. Por ende, $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{R}$.
- \mathbb{Z}') Sea $x \in \mathbb{R}$, afirmamos que $x \in \mathbb{Z}'$. En efecto, si $U \subseteq \mathbb{R}$ es abierto tal que $x \in U$, entonces $\mathbb{R} - U$ es finito, luego como \mathbb{Z} es infinito, existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $z < y$, para todo $y \in \mathbb{R} - U$ y $x < y$. Es decir que $y \in (U - \{x\}) \cap \mathbb{Z}$. Por tanto, $(U - \{x\}) \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$, es decir que $x \in \mathbb{Z}'$.
- $\text{Fr}(\mathbb{Z})$) Computemos $\overline{\mathbb{R} - \mathbb{Z}}$. Sea $C \subseteq \mathbb{R}$ cerrado tal que $\mathbb{R} - \mathbb{Z} \subseteq C$, entonces como C es cerrado, C es finito o $C = \mathbb{R}$, pero C no puede ser finito ya que $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ es infinito, luego $C = \mathbb{R}$. Así, $\overline{\mathbb{R} - \mathbb{Z}} = \mathbb{R}$. Por tanto, $\text{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

□

Definición 1.1.11

Sea (X, τ) un espacio topológico. Se dice que el espacio (X, τ) es de **Hausdorff** si para todo $x_1, x_2 \in X$ distintos existen $U_1, U_2 \in \tau$ tales que $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Ejemplo 1.1.8

Considere (X, τ) donde $X = \{1, 2\}$ y $\tau = \{X, \emptyset, \{1\}\}$, entonces (X, τ) no es de Hausdorff.

Ejemplo 1.1.9

(\mathbb{R}, τ_I) no es de Hausdorff (cuando el espacio tiene más de un elemento esto se sigue cumpliendo).

Ejemplo 1.1.10

Sea (X, d) un espacio métrico y consideremos al espacio topológico (X, τ_d) . Este espacio es de Hausdorff.

Ejemplo 1.1.11

Sea (X, d) es espacio métrico tal que la métrica de él está definida como:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq y \\ 1 & \text{si } x = y \end{cases}$$

dado $p \in X$ considere $B_d(p, 1) = \{p\}$. Entonces para todo $p \in X$, $\{p\} \in \tau_D \Rightarrow \forall A \subseteq X, A \in \tau_d$, es decir que $\tau_d = \tau_D$.

Definición 1.1.12

Un espacio topológico (X, τ) se dice **metrizable** si existe una métrica $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tau_d = \tau$.

Proposición 1.1.5

Si (X, τ) es un espacio metrizable, entonces (X, τ) es un espacio de Hausdorff.

Demostración:

Es inmediata de la definición de espacio metrizable y del ejemplo 1.1.10. ■

Ejemplo 1.1.12

Considere $X = \{1, 2\}$, si tomamos al espacio topológico $(X, \tau = \{X, \emptyset, \{2\}\})$ obtenemos que este espacio no es metrizable por no ser de Hausdorff.

Ejemplo 1.1.13

Considere (X, τ_D) . Este espacio es metrizable tomando la métrica discreta.

1.2. Bases de una topología

Definición 1.2.1

Sea (X, τ) un espacio topológico. Una subcolección \mathcal{B} de τ es una **base para la topología** τ si todo $U \in \tau$ puede escribirse como unión arbitraria de elementos de \mathcal{B} .

Si \mathcal{B} es una base para τ , a sus elementos los llamaremos **básicos**.

Observación 1.2.1

Cualquier topología es una base para sí misma.

Considere al espacio topológico (X, τ) . Una base \mathcal{B} de τ cumple que:

1. $\mathcal{B} \subseteq \tau$.
2. Si $U \in \tau$ entonces existe $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $U = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$.

¿Qué pretendemos con esta definición?

Básicamente lo que se pretende es describir a todos los elementos de la topología mediante un conjunto más pequeño de elementos (esto permite que sea más fácil de manejar y que las propiedades deseadas para los elementos de la topología se sigan cumpliendo).

Ejemplo 1.2.1

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{M} = \{\{p\} \mid p \in X\}$. Esta es una base para τ_D definida sobre X .

Ejemplo 1.2.2

Sea (X, d) un espacio métrico y sea τ_d la topología generada por la métrica d . Entonces, las colecciones:

$$\mathcal{B}_1 = \{B_d(x, r) \mid x \in X, r \in \mathbb{R}^+\}$$

es una base para la topología generada por τ_d . Además,

$$\mathcal{B}_2 = \{B_d(x, q) \mid x \in X, q \in \mathbb{Q}^+\}$$

es otra base. Más aún:

$$\mathcal{B}_3 = \left\{ B_d\left(x, \frac{1}{n}\right) \mid x \in X, n \in \mathbb{N} \right\}$$

es otra base.

Ejemplo 1.2.3

Sea $X = \{a, b, c, d\}$ y $\kappa = \{\{a, b, c\}, \{c, d\}\}$. Afirmamos que no existe una topología definida sobre X tal que κ sea base de ella.

En efecto, suponga que τ es una topología sobre X y κ es una base para τ , entonces $\{a, b, c\}$ y $\{c, d\}$ están en τ , luego su intersección $\{c\} \in \tau$. Pero, $\{c\}$ no puede ser escrito como unión de elementos de κ .

Proposición 1.2.1

Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $\mathcal{B} \subseteq \tau$. Entonces, \mathcal{B} es una base para la topología τ si y sólo si dados $U \in \tau$ y $u \in U$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $u \in B \subseteq U$.

Demostración:

Probaremos la doble implicación.

\Rightarrow): Suponga que \mathcal{B} es una base para la topología τ . Sea $U \in \tau$ y $u \in U$. Como \mathcal{B} es una base entonces existe una subcolección $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $U = \bigcup \mathcal{C}$, luego existe $C_\alpha \in \mathcal{C}$ tal que $u \in C_\alpha$. Por ende $u \in C_\alpha \subseteq U$. Tomando $B = C_\alpha \in \mathcal{B}$ se tiene el resultado.

\Leftarrow): Suponga que se cumple la tesis. Ya se tiene que $\mathcal{B} \subseteq \tau$. Sea entonces $U \in \tau$. Para cada $x \in U$ existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq U$, luego la colección:

$$\{U_x \in \mathcal{B} | x \in U\}$$

es una subcolección de \mathcal{B} tal que $\bigcup_{x \in U} U_x = U$. Por tanto, \mathcal{B} es una base de τ . ■

Corolario 1.2.1

Sea (X, τ) un espacio topológico y sea \mathcal{B} una base de la topología τ . Sea $U \subseteq X$, entonces U es abierto en τ si y sólo si dados $x \in U$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$.

Demostración:

Es inmediato de la proposición anterior. ■

Corolario 1.2.2

Sea X un conjunto y sean τ_1, τ_2 dos topologías definidas sobre X . Tomemos $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ bases para τ_1, τ_2 , respectivamente, entonces los siguientes resultados son equivalentes:

1. $\tau_1 \subseteq \tau_2$.
2. Dados $x \in X$ y $B_1 \in \mathcal{B}_1$ tal que $x \in B_1$ existe $B_2 \in \mathcal{B}_2$ tal que $x \in B_2$ y $B_2 \subseteq B_1$.

Demostración:

Probaremos la doble implicación.

1) \Rightarrow 2): Sean $x \in X$ y $B_1 \in \mathcal{B}_1$ tal que $x \in B_1$. Como $\tau_1 \subseteq \tau_2$, entonces en particular B_1 es abierto de τ_2 , luego existe $B_2 \in \mathcal{B}_2$ tal que $x \in B_2 \subseteq B_1$.

2) \Rightarrow 1): Sea $U \in \tau_1$, como \mathcal{B}_1 es base de τ_1 entonces existe $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$ subcolección de \mathcal{B}_1 tal que:

$$\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = U$$

Sea $u \in U$, entonces existe $\beta \in I$ tal que $u \in B_\beta$. Por (2) existe C_β tal que $u \in C_\beta \subseteq B_\beta$. Formamos la subcolección $\{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$, por lo anterior se sigue que:

$$\begin{aligned} U &= \bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha \\ &\subseteq \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \\ &= U \\ \Rightarrow U &= \bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha \end{aligned}$$

donde $\bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha \in \tau_2$ por ser \mathcal{B}_2 una base de τ_2 . Por tanto, $U \in \tau_2$. Finalmente, se sigue que $\tau_1 \subseteq \tau_2$. ■

Corolario 1.2.3

Sean d_1 y d_2 métricas definidas sobre el conjunto X . Consideremos τ_{d_1} y τ_{d_2} . Entonces $\tau_{d_1} \subseteq \tau_{d_2}$ si y sólo si dado $x \in X$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que $B_{d_2}(x, \varepsilon) \subseteq B_{d_1}(x, \delta)$

Demostración:

Es inmediato del corolario anterior. ■

Corolario 1.2.4

Sea X un conjunto y sea \mathcal{B} una colección de subconjuntos de X tal que \mathcal{B} es base para dos topologías τ_1 y τ_2 definidas sobre X . Entonces, $\tau_1 = \tau_2$.

Demostración:

Es inmediato del corolario 1.2.2. ■

Corolario 1.2.5

Sea (X, τ) un espacio topológico y sea \mathcal{B} una base para τ . Entonces, se cumple lo siguiente:

1. La intersección de dos elementos de \mathcal{B} se puede escribir como una unión de elementos de \mathcal{B} .
2. Existe $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathcal{B}$ tal que

$$\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = X$$

Demostración:

Es inmediato de la definición de base. ■

¿Es posible prescindir de un espacio topológico para definir lo que es una base?

Definición 1.2.2

Sea X un conjunto arbitrario y sea \mathcal{A} una familia de subconjuntos de X , \mathcal{A} se dice que es **una base para una topología sobre X** si cumple lo siguiente:

1. La intersección de dos elementos de \mathcal{A} se puede escribir como una unión de elementos de \mathcal{A} .
2. X se puede escribir como una unión de elementos de \mathcal{A} .

Proposición 1.2.2

Sea \mathcal{A} una base para una topología sobre el conjunto X . Entonces, la colección $\tau_{\mathcal{A}}$ dada por:

$$\tau_{\mathcal{A}} = \{U \subseteq X \mid U \text{ se puede escribir como una unión de elementos de } \mathcal{A}\}$$

es una topología sobre X y \mathcal{A} es una base para ella. La topología $\tau_{\mathcal{A}}$ es llamada **topología generada por \mathcal{A}** .

Demostración:

Veamos que $\tau_{\mathcal{A}}$ es una topología sobre X .

1. Es claro que $X \in \tau_{\mathcal{A}}$ y además $\emptyset \in \tau_{\mathcal{A}}$ ya que se puede ver como la unión de los elementos de la familia vacía.
2. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \tau_{\mathcal{A}}$, entonces dado $\alpha \in I$ existe $\{A_\beta^\alpha\}_{\beta \in J_\alpha} \subseteq \mathcal{A}$ tal que

$$U_\alpha = \bigcup_{\beta \in J_\alpha} A_\beta^\alpha$$

luego

$$\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} \left(\bigcup_{\beta \in J_\alpha} A_\beta^\alpha \right) \in \tau_{\mathcal{A}}$$

donde la unión está en $\tau_{\mathcal{A}}$ por definición de la misma.

3. Sean $U, V \in \tau_{\mathcal{A}}$, entonces existen $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ y $\{B_\beta\}_{\beta \in J}$ subcolecciones de \mathcal{A} tales que:

$$U = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \quad \text{y} \quad V = \bigcup_{\beta \in J} B_\beta$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} U \cap V &= \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) \cap \left(\bigcup_{\beta \in J} B_\beta \right) \\ &= \left(\bigcup_{\alpha \in I \text{ y } \beta \in J} A_\alpha \cap B_\beta \right) \\ &= \left(\bigcup_{(\alpha, \beta) \in I \times J} A_\alpha \cap B_\beta \right) \end{aligned}$$

sabemos que para $\alpha \in I$ y $\beta \in J$, el conjunto $A_\alpha \cap B_\beta$ se puede escribir como una unión de elementos de \mathcal{A} , por tanto $U \cap V$ es una unión de elementos de \mathcal{A} .

por los tres incisos anteriores, se sigue que $\tau_{\mathcal{A}}$ es una topología sobre X . El hecho de que \mathcal{A} sea una base para esta topología es inmediato de la definición de $\tau_{\mathcal{A}}$. ■

1.3. Sub-bases

Definición 1.3.1

Sea X un conjunto y \mathcal{S} una colección no vacía de subconjuntos de X . Entonces, se dice que \mathcal{S} es una **sub-base para** $\tau(\mathcal{S})$.

Ejemplo 1.3.1

Sea $X = \{a, e, i, o, u\}$, $\mathcal{S} = \{\{a, e\}, \{e, i\}\}$. \mathcal{S} es una sub-base para $\tau(\mathcal{S})$ pero no es una base para $\tau(\mathcal{S})$.

Sea $\mathcal{S}' = \{\{a, e\}, \{e, i\}, \{e\}\}$. Entonces $\tau(\mathcal{S}) = \tau(\mathcal{S}')$, pues

1. $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$ implica que $\tau(\mathcal{S}) \subseteq \tau(\mathcal{S}')$.
2. Como $\{a, e\}, \{e, i\} \in \tau(\mathcal{S})$ entonces $\mathcal{S}' \subseteq \tau(\mathcal{S})$ lo cual implica que $\tau(\mathcal{S}') \subseteq \tau(\mathcal{S})$.

Proposición 1.3.1

Sea X un conjunto arbitrario y sea \mathcal{S} una colección no vacía de subconjuntos de X . Sea

$$\mathcal{B} = \{B \subseteq X \mid B \text{ se puede escribir como una intersección finita de elementos de } \mathcal{S}\} \cup \{X\}$$

Entonces,

1. \mathcal{B} es una base para una topología sobre X .

2. $\tau_{\mathcal{B}} = \tau(\mathcal{S})$.
