

# Espacios Hilbertianos

Cristo Daniel Alvarado

10 de marzo de 2024

# Índice general

<b>1. Espacios Hilbertianos</b>	<b>2</b>
1.1. Conceptos básicos. Proyecciones ortogonales . . . . .	2
1.2. Autodualidad de espacios hilbertianos . . . . .	13
1.3. Familias sumables de números complejos . . . . .	19
1.4. Familias Ortonormales (O.N.) . . . . .	23
1.5. Espacios Separables . . . . .	31
1.6. $L_\infty$ como dual de $L_1$ . . . . .	33

# Capítulo 1

## Espacios Hilbertianos

### 1.1. Conceptos básicos. Proyecciones ortogonales

#### Definición 1.1.1

Sea  $H$  un espacio vectorial sobre el campo  $\mathbb{K}$ . Decimos que  $H$  es un **espacio prehilbertiano** si está dotado de una aplicación  $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto (\vec{x}|\vec{y})$  con las propiedades siguientes:

1.  $\forall \vec{y} \in H$  fijo,  $\vec{x} \mapsto (\vec{x}|\vec{y})$  es una aplicación lineal de  $H$  en  $\mathbb{K}$ , o sea

$$\begin{aligned}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2|\vec{y}) &= (\vec{x}_1|\vec{y}) + (\vec{x}_2|\vec{y}) \\ (\alpha\vec{x}|\vec{y}) &= \alpha \cdot (\vec{x}|\vec{y})\end{aligned}$$

para todo  $\vec{x}, \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in H$  y  $\alpha \in \mathbb{K}$ .

2.  $(\vec{y}|\vec{x}) = \overline{(\vec{x}|\vec{y})}$ , para todo  $\vec{x} \in H$ .
3.  $(\vec{x}|\vec{x}) \geq 0$ , para todo  $\vec{x} \in H$ .
4.  $(\vec{x}|\vec{x}) = 0$  si y sólo si  $\vec{x} = 0$ .

#### Observación 1.1.1

Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , entonces 1) y 2) implican que  $\forall \vec{x} \in H$  fijo, la aplicación  $\vec{y} \mapsto (\vec{x}|\vec{y})$  de  $H$  en  $\mathbb{R}$  es lineal. En este caso se dice que  $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto (\vec{x}|\vec{y})$  es una **forma bilineal sobre  $H$** .

Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , entonces

$$\begin{aligned}(\vec{x}|\vec{y}_1 + \vec{y}_2) &= (\vec{x}|\vec{y}_1) + (\vec{x}|\vec{y}_2) \\ (\vec{x}|\alpha\vec{y}) &= \overline{\alpha} (\vec{x}|\vec{y})\end{aligned}$$

Se dice que  $\vec{y} \mapsto (\vec{x}|\vec{y})$  es entonces **semilineal** y que  $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto (\vec{x}|\vec{y})$  es **sesquilineal** ( $1\frac{1}{2}$ -lineal).

La aplicación  $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto (\vec{x}|\vec{y})$  se llama **producto escalar sobre  $H$** .

#### Definición 1.1.2

Para todo  $\vec{x} \in H$  se define la **norma de  $\vec{x}$**  como:  $\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}|\vec{x})}$ .

#### Ejemplo 1.1.1

Sea  $H = \mathbb{K}^n$

**Ejemplo 1.1.2**

Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  medible y sea  $H = L_2(S, \mathbb{K})$ . Para todo  $f, g \in H$  se define

$$(f|g) = \int_S f \bar{g}$$

La integral existe por Hölder con  $p = p^* = 2$ . Este es un producto escalar sobre  $H$  y, en este caso:

$$\|f\| = \left[ \int_S |f|^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \mathcal{N}_2(f), \quad \forall f \in H$$

**Ejemplo 1.1.3**

Sea  $H = l_2(\mathbb{K})$  el espacio de sucesiones en  $\mathbb{K}$  que son cuadrado sumables. Se sabe que  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots) \in l_2(\mathbb{K})$  si y sólo si

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$$

$l_2(\mathbb{K})$  es un espacio prehilbertiano con el producto escalar:

$$(\vec{x}|\vec{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i$$

donde la serie es convergente por Hölder. En este caso:

$$\|\vec{x}\| = \left[ \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \mathcal{N}_2(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in l_2(\mathbb{K})$$

**Teorema 1.1.1** (Desigualdad de Cauchy-Schwartz)

Sea  $H$  un espacio prehilbertiano. Entonces:

1. Se cumple la desigualdad de Cauchy-Schwartz:

$$|(\vec{x}|\vec{y})| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in H$$

y, la igualdad se da si y sólo si los vectores son linealmente dependientes.

2. Se cumple la desigualdad triangular:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in H$$

y la igualdad se da si y sólo si uno de los vectores es múltiplo no negativo del otro.

**Demostración:**

De 1): Se supondrá que  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  (el caso en que sea  $\mathbb{R}$  es similar y se deja como ejercicio).

Sean  $\vec{x}, \vec{y} \in H$ . En el caso de que alguno de los vectores sea  $\vec{0}$ , el resultado es inmediato (ambos miembros de la desigualdad son cero). Por lo cual, supongamos que ambos son no cero. Se tiene para

todo  $\lambda \in \mathbb{K}$  que

$$\begin{aligned}
0 &\leq (\vec{x} + \lambda \vec{y} | \vec{x} + \lambda \vec{y}) \\
&= (\vec{x} | \vec{x}) + \overline{\lambda} (\vec{x} | \vec{y}) + \lambda (\vec{y} | \vec{x}) + \lambda \overline{\lambda} (\vec{y} | \vec{y}) \\
&= (\vec{x} | \vec{x}) + \overline{\lambda} (\vec{y} | \vec{x}) + \lambda (\vec{y} | \vec{x}) + \lambda \overline{\lambda} (\vec{y} | \vec{y}) \\
&= \|\vec{x}\|^2 + 2\Re \lambda (\vec{y} | \vec{x}) + |\lambda|^2 \|\vec{y}\|^2
\end{aligned} \tag{1.1}$$

En particular, para

$$\lambda(t) = \begin{cases} t \frac{(\vec{x} | \vec{y})}{|(\vec{x} | \vec{y})|} & \text{si } (\vec{x} | \vec{y}) \neq 0 \\ t & \text{si } (\vec{x} | \vec{y}) = 0 \end{cases}$$

con  $t \in \mathbb{R}$ , la desigualdad (1) se convierte en

$$0 \leq \|\vec{x}\|^2 + 2t |(\vec{y} | \vec{x})| + t^2 \|\vec{y}\|^2 \tag{1.2}$$

El trinomio anterior es mayor o igual a cero si y sólo si su discriminante:

$$|(\vec{x} | \vec{y})|^2 - \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 \leq 0$$

es decir

$$|(\vec{x} | \vec{y})| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$$

Si  $|(\vec{x} | \vec{y})| = \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2$ , entonces el trinomio en (2) tiene una raíz doble. Luego, existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que

$$(\vec{x} + \lambda \vec{y} | \vec{x} + \lambda \vec{y}) = 0$$

pero lo anterior solo sucede si y sólo si  $\vec{x} + \lambda \vec{y} = 0$ , es decir si  $\vec{x}$  y  $\vec{y}$  son linealmente dependientes.

De 2): Se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 &= (\vec{x} + \vec{y} | \vec{x} + \vec{y}) \\
&= \|\vec{x}\|^2 + 2\Re (\vec{y} | \vec{x}) + \|\vec{y}\|^2 \\
&\leq \|\vec{x}\|^2 + 2|(\vec{y} | \vec{x})| + \|\vec{y}\|^2 \\
&\leq \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\| \|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 \\
&= (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2
\end{aligned}$$

lo cual implica la desigualdad que se quiere probar. Ahora, la igualdad se cumple si y sólo si

$$|(\vec{x} | \vec{y})| = \Re (\vec{x} | \vec{y}) \text{ y } |(\vec{x} | \vec{y})| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$$

la primera igualdad implica que  $(\vec{x} | \vec{y})$  es real (en particular,  $\geq 0$  por el valor absoluto) y la segunda implica que  $\vec{x}$  y  $\vec{y}$  son linealmente dependientes. Es decir, si y sólo si un vector es multiplo no negativo del otro. ■

Se concluye del teorema anterior que  $\|\cdot\|$  es una norma sobre  $H$ . En lo sucesivo se consdierará a  $H$  como espacio normado dotado de esta norma.

### Proposición 1.1.1

La aplicación  $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto (\vec{x} | \vec{y})$  es una función continua del espacio normado producto  $H \times H$  en  $\mathbb{K}$ .

**Demostración:**

Sean  $\vec{x}, \vec{y} \in H$  y,  $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$  y  $\{\vec{y}_n\}_{n=1}^{\infty}$  dos sucesiones que convergen a  $\vec{x}$  y  $\vec{y}$ , respectivamente. Se probará que  $\{(\vec{x}_n|\vec{y}_n)\}_{n=1}^{\infty}$  converge a  $(\vec{x}|\vec{y})$  en  $\mathbb{K}$ . Se tiene que

$$\begin{aligned} |(\vec{x}|\vec{y}) - (\vec{x}_n|\vec{y}_n)| &\leq |(\vec{x} - \vec{x}_n|\vec{y})| + |(\vec{x}_n|\vec{y} - \vec{y}_n)| \\ &\leq \|\vec{x} - \vec{x}_n\| \|\vec{y}\| + \|\vec{x}_n\| \|\vec{y} - \vec{y}_n\| \end{aligned} \quad (1.3)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $\{\vec{x}_n\}$  es convergente, es acotada. Luego existe  $M > 0$  tal que

$$\|\vec{x}_n\| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Se sigue de (3) que

$$|(\vec{x}|\vec{y}) - (\vec{x}_n|\vec{y}_n)| \leq \|\vec{x} - \vec{x}_n\| \|\vec{y}\| + M \|\vec{y} - \vec{y}_n\|$$

y, por ende

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(\vec{x}|\vec{y}) - (\vec{x}_n|\vec{y}_n)| = 0$$

con lo que se tiene el resultado. ■

**Definición 1.1.3**

Decimos que un espacio prehilbertiano se llama **Hilbertiano**, si la norma  $\|\cdot\|$  hace de él un espacio normado completo (o sea, un espacio normado de Banach).

**Ejemplo 1.1.4**

Los espacios  $L_2(S, \mathbb{K})$ ,  $l_2(\mathbb{K})$  y todo espacio prehilbertiano de dimensión finita ( $\mathbb{K}^n$ ) son hilbertianos (ya que, todo espacio prehilbertiano de dimensión finita es isomorfo a  $\mathbb{R}^k$ , para algún  $k \in \mathbb{N}$ ).

De ahora en adelante,  $H$  denotará siempre a un espacio prehilbertiano (a menos que se indique lo contrario).

**Definición 1.1.4**

Sean  $\vec{x}, \vec{y} \in H$ . Se dice que  $\vec{x}$  y  $\vec{y}$  son **ortogonales** y se escribe  $\vec{x} \perp \vec{y}$ , si  $(\vec{x}|\vec{y}) = 0$ .

**Observación 1.1.2**

La condición  $\vec{x} \perp \vec{y}$  para todo  $\vec{x} \in H$  implica que  $\vec{y} = \vec{0}$ , pues en particular  $(\vec{y}|\vec{y}) = 0 \Rightarrow \vec{y} = \vec{0}$ .

**Teorema 1.1.2** (Teorema de Pitágoras)

Si  $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$  es un sistema de vectores ortogonales (a pares), entonces

$$\|\vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_n\|^2 = \|\vec{x}_1\|^2 + \dots + \|\vec{x}_n\|^2$$

**Demostración:**

Se procederá por inducción sobre  $n$ . Veamos el caso  $n = 2$ . En este caso, veamos que

$$\begin{aligned} \|\vec{x}_1 + \vec{x}_2\|^2 &= (\vec{x}_1 + \vec{x}_2|\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \\ &= \|\vec{x}_1\|^2 + (\vec{x}_1|\vec{x}_2) + (\vec{x}_2|\vec{x}_1) + \|\vec{x}_2\|^2 \\ &= \|\vec{x}_1\|^2 + \|\vec{x}_2\|^2 \end{aligned}$$

Suponga que el resultado se cumple para  $n \geq 2$ . Sea  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n+1} \in H$  un sistema de vectores ortogonales. Observemos que

$$\begin{aligned} (\vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_n|\vec{x}_{n+1}) &= (\vec{x}_1|\vec{x}_{n+1}) + \dots + (\vec{x}_n|\vec{x}_{n+1}) \\ &= 0 + \dots + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

por lo cual,  $x_{n+1} \perp \vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_n$ . Por el caso  $n = 2$  se sigue que:

$$\|\vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_{n+1}\|^2 = \|\vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_n\|^2 + \|\vec{x}_{n+1}\|^2$$

Pero, por hipótesis de inducción:

$$\|\vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_n\|^2 = \|\vec{x}_1\|^2 + \cdots + \|\vec{x}_n\|^2$$

Por lo cual:

$$\|\vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_{n+1}\|^2 = \|\vec{x}_1\|^2 + \cdots + \|\vec{x}_n\|^2 + \|\vec{x}_{n+1}\|^2$$

Aplicando inducción se sigue el resultado. ■

**Proposición 1.1.2** (Identidad del paralelogramo)

Para todo  $\vec{x}, \vec{y} \in H$  se cumple la identidad del paralelogramo:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2)$$

**Demostración:**

Sean  $\vec{x}, \vec{y} \in H$ . Veamos que

$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 &= (\vec{x} + \vec{y} | \vec{x} + \vec{y}) + (\vec{x} - \vec{y} | \vec{x} - \vec{y}) \\ &= \|\vec{x}\|^2 + 2\Re(\vec{y} | \vec{x}) + \|\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}\|^2 - 2\Re(\vec{y} | \vec{x}) + \|\vec{y}\|^2 \\ &= 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2) \end{aligned}$$
■

Este resultado anterior es importante, pues en espacios donde la norma no venga de un producto escalar, no necesariamente se cumple la igualdad.

**Ejemplo 1.1.5**

Los vectores  $\chi_{[0,1]}$  y  $\chi_{[1,2]}$  son ortogonales en  $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  (es inmediato del producto escalar en  $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ).

**Ejemplo 1.1.6**

Los vectores  $\sin$  y  $\cos$  son ortogonales en  $L_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ . En efecto, veamos que

$$(\sin | \cos) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x dx = 0$$

En particular, por Pitágoras se tiene que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x + \cos x|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|^2 dx + \int_{-\pi}^{\pi} |\cos x|^2 dx$$

**Ejemplo 1.1.7**

Si  $\vec{x} = (1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{3}, \dots)$  y  $\vec{y} = (1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{3}, \dots)$  son elementos de  $l_2(\mathbb{R})$ , se tiene que  $\vec{x} \perp \vec{y}$ . En efecto, veamos que

$$\begin{aligned} (\vec{x} | \vec{y}) &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \end{aligned}$$

donde  $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$  es la sucesión de sumas parciales, siendo  $s_{2m} = 0$  y  $s_{2m-1} = \frac{1}{m}$ . Por lo cual

$$(\vec{x}|\vec{y}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$$

### Teorema 1.1.3

Sea  $M$  un subespacio de un espacio prehilbertiano  $H$  y sea  $\vec{x} \in H$ .

1. Suponiendo que existe  $\vec{x}_0 \in M$  tal que  $\vec{x} - \vec{x}_0 \perp M$ , es decir que  $\vec{x} - \vec{x}_0 \perp \vec{y}$ , para todo  $\vec{y} \in M$ , se tiene

$$\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \|\vec{x} - \vec{y}\|, \quad \forall \vec{y} \in M, \vec{y} \neq \vec{x}_0$$

Así pues, si existe  $\vec{x}_0$ , tal vector es único y es llamado **la proyección ortogonal de  $\vec{x}$  sobre  $M$** . Además

$$d(\vec{x}, M)^2 = \|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2 = \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{x}_0\|^2$$

2. Recíprocamente, si existe un  $\vec{x}_0 \in M$  tal que  $d(\vec{x}, M) = \|\vec{x} - \vec{x}_0\|$ , entonces  $\vec{x}_0$  es la proyección ortogonal de  $\vec{x}$  sobre  $M$ . En particular, si  $\vec{x} \in M$  entonces  $\vec{x} = \vec{x}_0$ , es decir que  $\vec{x}$  es su propia proyección ortogonal sobre  $M$ .

### Demostración:

De 1): Suponga que existe  $\vec{x}_0 \in M$  con la condición especificada. Sea  $\vec{y} \in M$  distinto de  $\vec{x}_0$ . Como  $\vec{x}_0 - \vec{x} \perp \vec{x}_0 - \vec{y}$ , por el Teorema de Pitágoras se tiene que

$$\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2 + \|\vec{x}_0 - \vec{y}\|^2 > \|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2 \quad (1.4)$$

pues  $\vec{x}_0 \neq \vec{y}$ . Así pues,  $\vec{x}_0$  es único. Además  $d(\vec{x}, M) = \|\vec{x} - \vec{x}_0\|$ . Aplicando la ecuación 4) con  $\vec{y} = \vec{0}$  se tiene que

$$\begin{aligned} \|\vec{x}\|^2 &= \|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2 + \|\vec{x}_0\|^2 \\ \Rightarrow d(\vec{x}, M)^2 &= \|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2 = \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{x}_0\|^2 \end{aligned}$$

De 2) Si existe  $\vec{x}_0 \in M$  tal que  $d(\vec{x}, M) = \|\vec{x} - \vec{x}_0\|$ , entonces  $\vec{x}_0$  debe ser la proyección ortogonal de  $\vec{x}$  sobre  $M$ . En efecto, para todo  $\vec{y} \in M$  y para todo  $\lambda \in \mathbb{K}$  se tiene

$$\begin{aligned} \|\vec{x} - (\vec{x}_0 + \lambda\vec{y})\|^2 &\geq \|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2 \\ \Rightarrow \|(\vec{x} - \vec{x}_0) - \lambda\vec{y}\|^2 &\geq \|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2 \\ \Rightarrow \|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2 + 2\Re[\bar{\lambda}(\vec{x} - \vec{x}_0|\vec{y})] + |\lambda|^2\|\vec{y}\|^2 &\geq \|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2 \\ \Rightarrow -2\Re[\lambda(\vec{x} - \vec{x}_0|\vec{y})] + |\lambda|^2\|\vec{y}\|^2 &\geq 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

en particular, para  $\lambda = t(\vec{x} - \vec{x}_0|\vec{y})$ , con  $t \in \mathbb{R}$ , la ecuación anterior se transforma en:

$$|(\vec{x} - \vec{x}_0|\vec{y})|^2 [-2t + t^2\|\vec{y}\|] \geq 0$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Esto exige que  $(\vec{x} - \vec{x}_0|\vec{y}) = 0$ , o sea que  $\vec{x} - \vec{x}_0 \perp \vec{y}$ . ■

Dado un subespacio  $M$  de un espacio prehilbertiano  $H$  un vector  $\vec{x} \in H$ , puede no existir la proyección ortogonal de  $\vec{x}$  sobre  $M$ . Esto motiva la siguiente definición:

### Definición 1.1.5

Un subespacio  $M$  de  $H$  se dice que es **distinguido** si para cada  $\vec{x} \in H$  existe la proyección ortogonal de  $\vec{x}$  sobre  $M$ .



**Ejemplo 1.1.8**

El subespacio  $\phi_0$  de las sucesiones eventualmente constantes de valor cero es un subespacio del espacio hilbertiano  $l_2(\mathbb{R})$ . Sea  $M$  el subespacio de  $\phi_0$  dado como sigue:

$$M = \{\vec{x} \in \phi_0 | x_2 = 0\}$$

Sea  $\vec{x} = (0, \frac{1}{2^{0/2}}, \frac{1}{2^{1/2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^{3/2}}, \dots)$ . Se tiene que:

$$\begin{aligned} d(\vec{x}, M) &= \inf_{\vec{y} \in M} \{\|\vec{x} - \vec{y}\|\} \\ &= \inf_{\vec{y} \in M} \left\{ \left[ |y_1| + \sum_{i=2}^{\infty} \left| \frac{1}{2^{(i-2)/2}} - y_i \right|^2 \right]^{1/2} \right\} \\ &= 1 \\ &= \inf_{\vec{y} \in M} \left\{ \left[ |y_1| + 1 + \sum_{i=3}^{\infty} \left| \frac{1}{2^{(i-2)/2}} - y_i \right|^2 \right]^{1/2} \right\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(pues,  $y_2 = 0$ ). Pero  $\|\vec{x} - \vec{y}\| > 1$ , para todo  $\vec{y} \in M$ . En efecto, sea  $\vec{y} \in M$ , entonces  $\exists m \in \mathbb{N}$  tal que si  $k \geq m$  se tiene que  $y_k = 0 = y_2$ . Veamos que

$$\begin{aligned} \|\vec{x} - \vec{y}\| &= \left[ |y_1| + 1 + \sum_{i=3}^{\infty} \left| \frac{1}{2^{(i-2)/2}} - y_i \right|^2 \right]^{1/2} \\ &\geq \left[ 1 + \sum_{i=3}^{k-1} \left| \frac{1}{2^{(i-2)/2}} - y_i \right|^2 + \sum_{i=k}^{\infty} \left| \frac{1}{2^{(i-2)/2}} - y_i \right|^2 \right]^{1/2} \\ &= \left[ 1 + \sum_{i=3}^{k-1} \left| \frac{1}{2^{(i-2)/2}} - y_i \right|^2 + \sum_{i=k}^{\infty} \left| \frac{1}{2^{(i-2)/2}} \right|^2 \right]^{1/2} \\ &\geq \left[ 1 + \sum_{i=k}^{\infty} \left| \frac{1}{2^{(i-2)/2}} \right|^2 \right]^{1/2} \\ &> [1]^{1/2} \\ &> 1 \end{aligned}$$

Luego no existe  $\vec{x}_0 \in M$  tal que  $d(\vec{x}, M) = \|\vec{x} - \vec{x}_0\|$ . Por lo tanto, no existe la proyección ortogonal de  $\vec{x}$  sobre  $M$  (es decir,  $M$  no es distinguido).

Sin embargo, si  $\vec{x} = (1, 1, 0, \dots) \in l_2(\mathbb{R})$ , entonces si existe la proyección ortogonal de  $\vec{x}$  sobre  $M$ , pues

$$\begin{aligned} d(\vec{x}, M) &= \inf_{\vec{y} \in M} \{\|\vec{x} - \vec{y}\|\} \\ &= \inf_{\vec{y} \in M} \left\{ \left[ |1 - y_1|^2 + 1^2 + \sum_{i=3}^{\infty} |y_i|^2 \right]^{1/2} \right\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

y  $\|\vec{x} - \vec{e}_1\| = 1$ , donde  $\vec{e}_1 \in M$ . Por tanto,  $\vec{e}_1$  es la proyección ortogonal de  $\vec{x}$  sobre  $M$ .

---

**Teorema 1.1.4**

Si  $M$  es un subespacio completo de un espacio prehilbertiano, entonces  $M$  es distinguido. En particular todo subespacio de dimensión finita de un espacio prehilbertiano siempre es distinguido.

---

**Demostración:**

Sea  $\vec{x} \in H$ . Se debe probar que existe un  $\vec{x}_0 \in M$  tal que  $d(\vec{x}, M) = \|\vec{x} - \vec{x}_0\|$ . Sea  $a = d(\vec{x}, M)$ . Por propiedades del ínfimo existe una sucesión  $\{\vec{y}_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  tal que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|\vec{x} - \vec{y}_\nu\| = a \quad (1.6)$$

Sean  $\nu, \mu \in \mathbb{N}$  arbitrarios. Por la identidad del paralelogramo se tiene que

$$\begin{aligned} 2(\|\vec{x} - \vec{y}_\nu\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}_\mu\|^2) &= \|\vec{y}_\nu - \vec{y}_\mu\|^2 + \|2\vec{x} - (\vec{y}_\nu + \vec{y}_\mu)\|^2 \\ &= \|\vec{y}_\nu - \vec{y}_\mu\|^2 + 4\left\|\vec{x} - \frac{\vec{y}_\nu + \vec{y}_\mu}{2}\right\|^2 \\ &\geq \|\vec{y}_\nu - \vec{y}_\mu\|^2 + 4a^2 \end{aligned}$$

de donde

$$\|\vec{y}_\nu - \vec{y}_\mu\|^2 \leq 2(\|\vec{x} - \vec{y}_\nu\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}_\mu\|^2) - 4a^2$$

Tomando límite cuando  $\nu, \mu$  tienden a infinito y por (6), se tiene que

$$\lim_{\nu, \mu \rightarrow \infty} \|\vec{y}_\nu - \vec{y}_\mu\|^2 = 0$$

por tanto,  $\{\vec{y}_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  es de Cauchy. Por ser  $M$  completo, existe  $\vec{x}_0 \in M$  tal que  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \vec{y}_\nu = \vec{x}_0$ . Por (6):

$$a = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \|\vec{x} - \vec{y}_\nu\| = \|\vec{x} - \vec{x}_0\|$$

■

**Ejemplo 1.1.9**

¿Es distinguido el subespacio de  $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  dado por:

$$M = \{f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) = 0 \text{ c.t.p. en } [1, 2]\}$$

?

La respuesta es que sí, ya que  $M$  es cerrado. En efecto, sea  $\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  una sucesión en  $M$  convergente en promedio cuadrático a una  $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , es decir:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{N}_2(f_\nu - f) = 0$$

Se sabe que existe una subsucesión de  $\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ , digamos  $\{f_{\alpha(\nu)}\}_{\nu=1}^\infty$  que converge c.t.p. a  $f$  en  $\mathbb{R}$ . Como  $f_{\alpha(\nu)} = 0$  c.t.p. en  $[1, 2]$ , entonces  $f = 0$  c.t.p. en  $[1, 2]$ , es decir  $f \in M$ . Por tanto,  $M$  es distinguido.

Ahora, dada  $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , ¿Cuál será la proyección ortogonal de  $f$  sobre  $M$ ? Es claro que

$$f_0 = f \cdot \chi_{\mathbb{R} \setminus [1, 2]} \in M$$

es la proyección ortogonal de  $f$  sobre  $M$ , y además  $f - f_0 \perp M$ .

**Definición 1.1.6**

Sea  $S \subseteq H$  un conjunto arbitrario. Para este conjunto se define

$$S^\perp = \{\vec{x} \in H \mid \vec{x} \perp \vec{s}, \forall \vec{s} \in S\}$$

Es claro que  $S^\perp$  es un subespacio cerrado de  $H$ .

**Solución:**

En efecto, si  $\{\vec{x}_\nu\}$  es una sucesión en  $S^\perp$  que converge a  $\vec{x} \in H$ , entonces

$$(\vec{x}|\vec{s}) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} (\vec{x}_\nu|\vec{s}) = 0, \quad \forall \vec{s} \in S$$

por continuidad y para todo  $\vec{s} \in S$ . Luego  $\vec{x} \in S^\perp$ . Otra forma es definiendo una función  $T_{\vec{s}}: H \rightarrow \mathbb{K}$  como

$$T_{\vec{s}}(\vec{x}) = (\vec{x}|\vec{s}), \quad \forall \vec{x} \in H$$

Entonces

$$S^\perp = \bigcap_{\vec{s} \in S} \ker T_{\vec{s}}$$

Como  $T_{\vec{s}}$  es lineal continua para todo  $\vec{s} \in S$ , entonces se sigue que  $S^\perp$  es cerrado.  $\square$

**Proposición 1.1.3**

Un subespacio  $M$  de un espacio prehilbertiano  $H$  es distinguido si y sólo si

$$H = M \oplus M^\perp$$

**Demostración:**

$\Rightarrow$ ): Suponga que  $M$  es distinguido. Como  $M \cap M^\perp = \{\vec{0}\}$ , para probar que  $H = M \oplus M^\perp$ , basta probar que es la suma simplemente, es decir que  $H = M + M^\perp$ .

Sea  $\vec{x} \in H$ , como  $M$  es distinguido entonces existe  $\vec{x}_1 \in M$  tal que  $\vec{x} - \vec{x}_1 \perp M$ , tomando  $\vec{x}_2 = \vec{x} - \vec{x}_1$  se tiene que  $\vec{x}_2 \in M^\perp$ . Además  $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ , lo que prueba el resultado.

$\Leftarrow$ ): Suponga que  $H = M \oplus M^\perp$ . Hay que probar que  $M$  es distinguido. Sea  $\vec{x} \in H$  arbitrario. Por hipótesis existen  $\vec{x}_1 \in M$  y  $\vec{x}_2 \in M^\perp$  únicos tales que  $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ . Se afirma que  $\vec{x}_1$  es la proyección ortogonal de  $\vec{x}$  sobre  $M$ .

En efecto,

$$\vec{x} - \vec{x}_1 = \vec{x}_2 \in M^\perp$$

pero  $\vec{x}_2 \perp M$ , por tanto  $\vec{x}_1$  es la proyección ortogonal.  $\blacksquare$

**Ejemplo 1.1.10**

Sea  $M = \{x \in l_2(\mathbb{R}) \mid x(2n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}\}$ . Afirmamos que  $M$  es distinguido, para lo cual basta ver que este subespacio es cerrado (por ser  $l_2(\mathbb{R})$  completo, es decir por ser un espacio Hilbertiano).

Sea  $\{\vec{x}_n\}$  una sucesión en  $l_2(\mathbb{R})$  que converge a  $\vec{x} \in l_2(\mathbb{R})$ , es decir

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}_2(\vec{x} - \vec{x}_n) &= 0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} (\vec{x}(2k) - \vec{x}_n(2k)) &= 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \vec{x}(2k) &= 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{1.7}$$

por lo cual,  $\vec{x} \in M$ . Luego,  $M$  es cerrado. Dado que  $M$  es distinguido, si  $\vec{x} \in l_2(\mathbb{R}) = M \oplus M^\perp$ , se tiene

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$$

donde  $\vec{x}_1 \in M$  y  $\vec{x}_2 \in M^\perp$  son únicos y están dados por:

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 &= (\vec{x}(1), 0, \vec{x}(3), \dots) \\ \vec{x}_2 &= (0, \vec{x}(2), 0, \vec{x}(4), \dots)\end{aligned}$$

---

**Corolario 1.1.1**

Si  $M$  es un subespacio distinguido de  $H$ , entonces  $M^\perp$  es también un subespacio distinguido.

---

**Demostración:**

Se probará que cualquier  $\vec{x} \in H$  posee una proyección ortogonal sobre  $M^\perp$ . Por el teorema anterior:

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$$

con  $\vec{x}_1 \in M$  y  $\vec{x}_2 \in M^\perp$  únicos. Luego,  $\vec{x} - \vec{x}_2 = \vec{x}_1 \in M$ , por lo que cualquier vector en  $M^\perp$  se cumple que  $\vec{x}_1 \perp \vec{y}$ , para todo  $\vec{y} \in M$ , es decir que  $\vec{x}_2$  es la proyección ortogonal de  $\vec{x}$  sobre  $M^\perp$ . ■

---

**Proposición 1.1.4**

Si  $M$  es un subespacio distinguido de  $H$ , entonces  $M^{\perp\perp} = M$ .

---

**Demostración:**

Claramente  $M \subseteq M^{\perp\perp}$ . Ahora, sea  $\vec{x} \in M^{\perp\perp}$ , por el teorema  $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$  donde  $\vec{x}_1 \in M$  y  $\vec{x}_2 \in M^\perp$  únicos.

Se tiene que

$$0 = (\vec{x}|\vec{x}_2) = (\vec{x}_1|\vec{x}_2) + (\vec{x}_2|\vec{x}_2) = (\vec{x}_2|\vec{x}_2)$$

es decir que  $\vec{x}_2 = \vec{0}$ . Por tanto,  $\vec{x} \in M$ .

Luego,  $M = M^{\perp\perp}$ . ■

---

**Corolario 1.1.2**

En un espacio hilbertiano  $H$ , un subespacio es distinguido si y sólo si es cerrado.

---

**Demostración:**

Si es cerrado es inmediato que es distinguido. Ahora, si es distinguido entonces es cerrado, pues por el corolario anterior  $M = M^{\perp\perp}$ , donde  $M^{\perp\perp}$  es cerrado por ser intersección arbitraria de cerrados, luego  $M$  es cerrado. ■

---

**Proposición 1.1.5**

Sea  $H$  un espacio prehilbertiano y sea  $M$  un subespacio distinguido de  $H$  (que no se reduce al  $\{\vec{0}\}$ ).  $\forall \vec{x} \in H$  sea  $\pi(\vec{x})$  la **proyección ortogonal de  $\vec{x}$  sobre  $M$** .

Entonces  $\pi : H \rightarrow M$  es lineal continua y tal que  $\|\pi\| = 1$ . Además,  $\pi \circ \pi = \pi$ , y  $(\pi(\vec{x})|\vec{y}) = (\vec{x}|\pi(\vec{y}))$ .

---

**Demostración:**

Sea  $\vec{x} \in H$  y  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Si  $\alpha = 0$ , el resultado es inmediato. Suponga que  $\alpha \neq 0$ . Se tiene que  $\alpha\pi(\vec{x}) \in M$  por ser subespacio, y

$$\alpha\vec{x} - \alpha\pi(\vec{x}) = \alpha(\vec{x} - \pi(\vec{x})) \perp M$$

Luego,  $\alpha\pi(\vec{x})$  es una proyección ortogonal de  $\alpha\vec{x}$  sobre  $M$ , pero por unicidad de la proyección ortogonal, se tiene que  $\pi(\alpha\vec{x}) = \alpha\pi(\vec{x})$ .

Ahora, sean  $\vec{x}, \vec{y} \in H$ . Entonces,  $\pi(\vec{x}) + \pi(\vec{y}) \in M$  y:

$$(\vec{x} + \vec{y}) - (\pi(\vec{x}) + \pi(\vec{y})) = (\vec{x} - \pi(\vec{x})) + (\vec{y} - \pi(\vec{y})) \perp M$$

es decir que  $\pi(\vec{x}) + \pi(\vec{y})$  es una proyección ortogonal de  $\vec{x} + \vec{y}$  sobre  $M$ . Por unicidad,

$$\pi(\vec{x} + \vec{y}) = \pi(\vec{x}) + \pi(\vec{y})$$

Por tanto,  $\pi$  es lineal.

Ahora, veamos que es continua. Se sabe que:

$$\begin{aligned} d(\vec{x}, M)^2 &= \|\vec{x} - \pi(\vec{x})\|^2 \\ &= \|\vec{x}\|^2 - \|\pi(\vec{x})\|^2 \\ \Rightarrow \|\pi(\vec{x})\|^2 &= \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{x} - \pi(\vec{x})\|^2 \\ &\leq \|\vec{x}\|^2 \end{aligned}$$

luego,  $\pi$  es continua y,  $\|\pi\| \leq 1$ .

Sea ahora  $\vec{x} \in M$ ,  $\vec{x} \neq \vec{0}$ . Entonces:

$$\|\vec{x}\| = \|\pi(\vec{x})\| \leq \|\pi\| \|\vec{x}\|$$

por tanto,  $\|\pi\| \geq 1$ , por lo anterior se sigue que  $\|\pi\| = 1$ .

Ya se sabe que  $\pi \circ \pi = \pi^2 = \pi$  (por la proposición anterior).

Sean  $\vec{x}, \vec{y} \in H$  arbitrarios. Entonces,  $\pi(\vec{x}) \in M$  y  $\vec{y} - \pi(\vec{y}) \perp M$ , por lo cual

$$\begin{aligned} 0 &= (\pi(\vec{x}) | \vec{y} - \pi(\vec{y})) \\ &= (\pi(\vec{x}) | \vec{y}) - (\pi(\vec{x}) | \pi(\vec{y})) \\ \Rightarrow (\pi(\vec{x}) | \vec{y}) &= (\pi(\vec{x}) | \pi(\vec{y})) \end{aligned}$$

Intercambiando los papeles de  $\vec{x}$  y  $\vec{y}$  se obtiene que:  $(\pi(\vec{y}) | \vec{x}) = (\pi(\vec{y}) | \pi(\vec{x}))$  o sea:

$$(\vec{x} | \pi(\vec{y})) = (\pi(\vec{x}) | \pi(\vec{y}))$$

por lo cual  $(\pi(\vec{x}) | \vec{y}) = (\vec{x} | \pi(\vec{y}))$ . ■

### Proposición 1.1.6

Sea  $H$  prehilbertiano. Suponga que  $\pi$  es una aplicación lineal de  $H$  en  $H$  tal que

- $\pi^2 = \pi$ .
- $(\pi(\vec{x}) | \vec{y}) = (\vec{x} | \pi(\vec{y})), \forall \vec{x}, \vec{y} \in H$ .

Entonces existe un único subespacio distinguido  $M$  de  $H$  tal que  $\pi$  es la proyección ortogonal de  $H$  sobre  $M$ .

### Demostración:

Claramente, si  $M$  existe debe ser  $M = \pi(H)$ , o sea:

$$M = \pi(H) = \{\pi(\vec{x}) | \vec{x} \in H\}$$

Se debe probar que si  $\vec{x} \in H$  es arbitrario  $\vec{x} - \pi(\vec{x}) \perp M$ , o sea

$$(\vec{x} - \pi(\vec{x}) | \pi(\vec{y})) = 0, \quad \forall \vec{y} \in H$$

Sean  $\vec{x}, \vec{y} \in H$ . Se tiene que:

$$\begin{aligned} (\vec{x} - \pi(\vec{x}) | \pi(\vec{y})) &= (\vec{x} | \pi(\vec{y})) - (\pi(\vec{x}) | \pi(\vec{y})) \\ &= (\vec{x} | \pi(\vec{y})) - (\vec{x} | \pi(\vec{y})) \\ &= 0 \end{aligned}$$

usando las dos propiedades de  $\pi$ . Por tanto,  $\pi(\vec{x})$  es la proyección ortogonal de  $\vec{x}$ , es decir que  $M$  es distinguido. La unicidad se sigue de la construcción de  $M$ . ■

## 1.2. Autodualidad de espacios hilbertianos

Si  $E$  es un espacio normado,  $E^*$  denota su **dual topológico** formado por todas las aplicaciones lineales continuas de  $E$  en  $\mathbb{K}$ . Si  $W \in E^*$ , se define la  $\|W\|$  como

$$\|W\| = \inf \{a \in \mathbb{R} | \|W(\vec{x})\| \leq a\|\vec{x}\|, \forall \vec{x}\}$$

Recuerde que  $E^*$  es siempre un espacio de Banach aunque  $E$  no lo sea.

---

### Teorema 1.2.1 (Teorema de Riesz)

Sea  $H$  un espacio hilbertiano (no reducido a  $\{\vec{0}\}$ ). Para cada  $\vec{y} \in H$  se define una aplicación  $G_{\vec{y}} : H \rightarrow \mathbb{K}$  como sigue:

$$G_{\vec{y}}(\vec{x}) = (\vec{x} | \vec{y}), \quad \forall \vec{x} \in H$$

Entonces,  $G_{\vec{y}}$  es un funcional lineal continuo sobre  $H$ . Además, la aplicación  $G : H \rightarrow H^*$  dada por:

$$\vec{y} \mapsto G_{\vec{y}}$$

es una isometría semilineal de  $H$  en  $H^*$  que es suprayectiva.

---

### Demostración:

Se probarán varias cosas:

1. Por propiedades del producto escalar, para cada  $\vec{y} \in H$  la aplicación  $G_{\vec{y}} : H \rightarrow \mathbb{K}$  es lineal. Dicha aplicación lineal es continua, pues

$$|G_{\vec{y}}(\vec{x})| = |(\vec{x} | \vec{y})| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|, \quad \forall \vec{x} \in H$$

(por Cauchy-Schwartz). Así que  $G_{\vec{y}} \in H^*$ . Además,  $\|G_{\vec{y}}\| \leq \|\vec{y}\|$ . Por otra, parte, si  $\vec{y} \neq \vec{0}$ , entonces

$$G_{\vec{y}}(\vec{y}) = (\vec{y} | \vec{y}) = \|\vec{y}\|^2$$

pero, como el operador es continuo, se tiene que  $|G_{\vec{y}}(\vec{y})| \leq \|G_{\vec{y}}\| \|\vec{y}\|$ . Por lo cual,  $\|\vec{y}\| \leq \|G_{\vec{y}}\|$ . Así pues,  $\|G_{\vec{y}}\| = \|\vec{y}\|$ .

Si  $\vec{y} = \vec{0}$ , entonces  $\|G_{\vec{y}}\| = 0 = \|\vec{y}\|$ , pues  $G_{\vec{y}} = 0$ .

2. La aplicación  $G : H \rightarrow H^*$ ,  $\vec{y} \mapsto G_{\vec{y}}$  es semilineal, es decir que  $G_{\alpha\vec{y}} = \bar{\alpha}G_{\vec{y}}$  y separa sumas. En efecto, sea  $\vec{y} \in H$  y  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Entonces:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\vec{y}}(\vec{x}) &= (\vec{x} | \alpha\vec{y}) \\ &= \bar{\alpha} (\vec{x} | \vec{y}) \\ &= \bar{\alpha} G_{\vec{y}}(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in H \end{aligned}$$

y además, para  $\vec{z} \in H$  se tiene que

$$\begin{aligned} G_{\vec{y}+\vec{z}}(\vec{x}) &= (\vec{x}|\vec{y}+\vec{z}) \\ &= (\vec{x}|\vec{y}) + (\vec{x}|\vec{z}) \\ &= G_{\vec{y}}(\vec{x}) + G_{\vec{z}}(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in H \end{aligned}$$

por tanto,  $G$  es semilineal. Ahora, veamos que es isometría; sean  $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in H$ , entonces:

$$\begin{aligned} \|G_{\vec{y}_1} - G_{\vec{y}_2}\| &= \|G_{\vec{y}_1 + \vec{y}_2}\| \\ &= \|\vec{y}_1 + \vec{y}_2\| \end{aligned}$$

así, esta función semilineal es isometría. Automáticamente  $G$  es inyectiva. Note que  $\vec{y} \in (\ker G_{\vec{y}})^\perp$  y  $G_{\vec{y}}(\vec{y}) = \|\vec{y}\|^2$ .

3. Se probará la suprayectividad. Sea  $W \in H^*$  tal que  $W \neq 0$  (en caso contrario basta tomar  $\vec{y} = \vec{0}$ ) se debe probar que existe  $\vec{y} \in H$  tal que  $W = G_{\vec{y}}$ .

Por la parte (2), tal  $\vec{y}$  debe cumplir que  $\vec{y} \in (\ker W)^\perp$  y  $W(\vec{y}) = \|\vec{y}\|^2$ . Como  $\ker W$  es un subespacio cerrado de  $H$  y  $H$  es hilbertiano, entonces  $\ker W$  es distinguido. Luego:

$$H = \ker W \oplus (\ker W)^\perp$$

por tanto, la restricción de  $W$  a  $(\ker W)^\perp$  es un isomorfismo de  $(\ker W)^\perp$  sobre  $\mathbb{K}$ . En efecto, como  $W \neq 0$  entonces existe  $\vec{x} \in H$  tal que  $W(\vec{x}) \neq 0$ , pero podemos escribir de forma única a  $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$  con  $\vec{x}_1 \in \ker W$  y  $\vec{x}_2 \in (\ker W)^\perp$ , entonces:

$$\begin{aligned} W(\vec{x}) &= W(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \\ &= W(\vec{x}_1) + W(\vec{x}_2) \\ &= W(\vec{x}_2) \\ &= W|_{(\ker W)^\perp}(\vec{x}_2) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Sea  $\beta \in \mathbb{K}$  arbitrario, entonces:

$$W|_{(\ker W)^\perp} \left( \beta \frac{\vec{x}_2}{W(\vec{x}_2)} \right) = \beta$$

por tanto la restricción es suprayectiva. Ahora si para algún  $\vec{u} \in (\ker W)^\perp$  se tiene que  $W|_{(\ker W)^\perp}(\vec{u}) = 0$ , en particular  $\vec{u} \in \ker W$ , pero:

$$(\ker W)^\perp \cap \ker W = \{\vec{0}\}$$

por tanto  $\vec{u} = \vec{0}$ . Así la restricción es inyectiva. Luego es un isomorfismo. En particular la dimensión de  $\mathbb{K}$  sobre  $\mathbb{K}$  es 1, así la dimensión de  $(\ker W)^\perp$  es 1.

Tomemos  $\vec{z}$  generador de  $(\ker W)^\perp$ . El  $\vec{y}$  buscado debe ser de la forma  $\vec{y} = \alpha \vec{z}$  donde  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Además,

$$\begin{aligned} W(\vec{y}) &= \|\vec{y}\|^2 \\ \Rightarrow \alpha W(\vec{z}) &= \alpha^2 \|\vec{z}\|^2 \\ \Rightarrow \alpha &= \frac{\overline{W(\vec{z})}}{\|\vec{z}\|^2} \end{aligned}$$

así,  $\vec{y}$  debe ser

$$\vec{y} = \frac{\overline{W(\vec{z})}}{\|\vec{z}\|^2} \vec{z} \tag{1.8}$$

Verifiquemos el que vector en (1.8) es el que cumple que  $W = G_{\vec{y}}$ . Se tiene:

$$G_{\vec{y}}(\vec{x}) = (\vec{x}|\vec{y})$$

para todo  $\vec{x} \in H$ , donde este vector se descompone de forma única como  $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$  con  $\vec{x}_1 \in \ker W$  y  $\vec{x}_2 \in (\ker W)^\perp$ . Por tanto:

$$\begin{aligned} G_{\vec{y}}(\vec{x}) &= (\vec{x}_1 + \vec{x}_2|\vec{y}) \\ &= (\vec{x}_1|\vec{y}) + (\vec{x}_2|\vec{y}) \\ &= (\vec{x}_2|\vec{y}) \end{aligned}$$

pero los elementos de  $(\ker W)^\perp$  son de la forma  $\beta\vec{z}$ , por lo cual:

$$\begin{aligned} G_{\vec{y}}(\vec{x}) &= (\beta\vec{z}|\vec{y}) \\ &= \left( \beta\vec{z} \left| \frac{\overline{W(\vec{z})}}{\|\vec{z}\|^2} \vec{z} \right. \right) \\ &= \beta \frac{W(\vec{z})}{\|\vec{z}\|^2} (\vec{z}|\vec{z}) \\ &= \beta W(\vec{z}) \\ &= W(\beta\vec{z}) \\ &= W(\vec{x}_2) \\ &= W(\vec{x}) \end{aligned}$$

con lo que se tiene el resultado. ■

### Observación 1.2.1

La demostración no cambia en vez de suponer que  $H$  es hilbertiano se supone  $H$  prehilbertiano tal que todo subespacio cerrado es distinguido (para solventar el problema que puede llegar a haber en la restricción del funcional lineal continuo  $W$ ). Pero la conclusión del teorema afirma que  $H$  es (semilinealmente) isométrico al espacio de Banach  $H^*$ , luego  $H$  debe ser de Banach, es decir que es hilbertiano.

Así pues, un espacio prehilbertiano en el cual todo subespacio cerrado es distinguido es un espacio hilbertiano.

---

### Proposición 1.2.1 (Autodualidad de $L_2$ )

Sea  $S$  un conjunto medible en  $\mathbb{R}^n$ . Para cada  $g \in L_2(S, \mathbb{K})$  sea  $\varphi_g$  el funcional lineal sobre  $L_2(S, \mathbb{K})$  definido como:

$$\varphi_g(f) = \int_S fg, \quad \forall f \in L_2(S, \mathbb{K})$$

entonces, la aplicación lineal  $\varphi : g \mapsto \varphi_g$  es una isometría lineal de  $L_2(S, \mathbb{K})$  sobre  $L_2(S, \mathbb{K})^*$ .

---

### Demostración:

Sea

$$\psi_g(f) = \int_S f\bar{g}$$

para todo  $f \in L_2(S, \mathbb{K})$ . Por el teorema de Riesz,  $\psi : g \mapsto \psi_g$  es una isometría semilineal de  $L_2(S, \mathbb{K})$  sobre  $L_2(S, \mathbb{K})^*$ .



Como la función  $\eta, g \mapsto \bar{g}$  es una isometría semilineal de  $L_2(S, \mathbb{K})$  sobre  $L_2(S, \mathbb{K})$  y  $\varphi$  es la composición de  $\eta$  con  $\psi$ , entonces  $\varphi$  es una isometría lineal de  $L_2(S, \mathbb{K})$  sobre  $L_2(S, \mathbb{K})$ . La linealidad es inmediata de las propiedades de la integral de Lebesgue. ■

¿Es posible clasificar a los espacios hilbertianos?

Consideremos las sumas de familia de elementos en  $[0, \infty]$ . Se tiene que

$$[0, \infty] = [0, \infty[ \cup \{\infty\}$$

todo conjunto  $S$  en  $[0, \infty]$  posee un supremo, el usual si el conjunto es acotado en  $[0, \infty[$  e  $\infty$  si  $S$  no es acotado.

Si  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión creciente en  $[0, \infty[$ , se define:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

este límite coincide con el usual en el caso de que la sucesión sea acotada. De otra forma es igual a  $\infty$ .

Se tienen las siguientes propiedades:

1.  $a + \infty = \infty + a = \infty$ , para todo  $a \in [0, \infty[$ .
2.  $a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$ , para todo  $a \in [0, \infty[$ .
3.  $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$ .

### Definición 1.2.1

Sea  $(a_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  una familia arbitraria de elementos de  $[0, \infty]$ . Se denota por  $\mathcal{F}(\Omega)$  a la colección de **todos los subconjuntos finitos de  $\Omega$** . Toda suma:

$$\sum_{\alpha \in J} a_\alpha, \quad \forall J \in \mathcal{F}(\Omega)$$

se llama **suma parcial de la familia  $(a_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$** . Al elemento de  $[0, \infty]$ :

$$\sum_{\alpha \in \Omega} a_\alpha = \sup \left\{ \sum_{\alpha \in J} a_\alpha \mid J \in \mathcal{F}(\Omega) \right\}$$

se le llama **suma de la familia  $(a_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$** . Se dice que  $(a_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  es una **familia sumable** de números no negativos si  $\sum_{\alpha \in \Omega} a_\alpha < \infty$ .

### Ejemplo 1.2.1

Se tiene que:

$$\sum_{t \in [0,1]} t = \infty$$

### Proposición 1.2.2 (Conmutatividad general)

Si  $\Omega'$  es otro conjunto de índices para indexar la familia  $(a_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  y  $\sigma$  es una biyección de  $\Omega$  sobre  $\Omega'$ , entonces:

$$\sum_{\alpha' \in \Omega'} a_{\sigma(\alpha')} = \sum_{\alpha \in \Omega} a_\alpha \tag{1.9}$$

---

**Demostración:**

Es inmediato del hecho de que los conjuntos de las sumas parciales de las dos familias son el mismo, por tanto al tomar el supremo se obtiene el mismo valor. ■

La ecuación (1.9) se aplica en particular al caso en el que  $\Omega = \Omega'$ , obteniendo una propiedad de conmutatividad general para sumas de familias en  $[0, \infty]$ .

Ahora, ¿se tendrá una propiedad para la asociatividad general? La respuesta es que sí, se tiene un resultado que nos permite obtener esta propiedad para sumar familias.

---

**Teorema 1.2.2** (Sumación por paquetes de familias)

Sea  $(a_\alpha)_{\alpha \in I}$  una familia en  $[0, \infty]$  y  $(I_\lambda)_{\lambda \in L}$  una partición arbitraria de subconjuntos de  $I$ . Si

$$\Delta = \sum_{\alpha \in I} a_\alpha \quad \text{y} \quad \Delta_\lambda = \sum_{\alpha \in I_\lambda} a_\alpha, \quad \forall \lambda \in L$$

entonces,

$$\Delta = \sum_{\lambda \in L} \Delta_\lambda$$

---

**Demostración:**

Sea  $J \in \mathcal{F}(I)$  y sea

$$M = \{\lambda \in L \mid I_\lambda \cap J \neq \emptyset\}$$

Entonces  $M \in \mathcal{F}(L)$  y

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in J} a_\alpha &= \sum_{\lambda \in M} \sum_{\alpha \in J \cap I_\lambda} a_\alpha \\ &\leq \sum_{\lambda \in M} \Delta_\lambda \\ &\leq \sum_{\lambda \in L} \Delta_\lambda \end{aligned}$$

tomando supremo respecto a  $J$  se sigue que:

$$\Delta \leq \sum_{\lambda \in L} \Delta_\lambda \tag{1.10}$$

Sea  $M \in \mathcal{F}(L)$ . Fijemos arbitrariamente una  $H_\lambda \in \mathcal{F}(I_\lambda)$ , para todo  $\lambda \in M$ . Se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in M} \sum_{\alpha \in H_\lambda} a_\alpha &= \sum_{\alpha \in \bigcup_{\lambda \in M} H_\lambda} a_\alpha \\ &\leq \Delta \end{aligned}$$

Manteniendo a  $M$  fijo y tomando supremo con respecto a  $H_\lambda \in \mathcal{F}(I_\lambda)$ , resulta:

$$\sum_{\lambda \in M} \Delta_\lambda \leq \Delta$$

tomando ahora el supremo con respecto a  $M$  se obtiene que:

$$\sum_{\lambda \in L} \Delta_\lambda \leq \Delta \tag{1.11}$$

de (1.10) y (1.11) se sigue la igualdad. ■

**Ejemplo 1.2.2**

¿Es cierto que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ?

La respuesta a esta pregunta la da el siguiente teorema:

**Teorema 1.2.3**

Para toda sucesión  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  en  $[0, \infty]$  se cumple:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

**Demostración:**

Sea  $\Delta = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  y  $\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Como la colección de sumas parciales de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  está contenida en la colección de sumas parciales de  $\sum_{n \in J} a_n$  donde  $J \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ , entonces:

$$\Sigma \leq \Delta$$

Sea  $J \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ . Tomando  $k = \max_{i \in J} i$  se obtiene que:

$$\sum_{n \in J} a_n \leq \sum_{n=1}^k a_n$$

tomando supremos se sigue que  $\Delta \leq \Sigma$ . Finalmente, se obtiene que  $\Delta = \Sigma$ . ■

**Corolario 1.2.1** (Propiedad de conmutatividad para series)

Sea  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  en  $[0, \infty]$ , y sea  $\sigma$  una biyección de  $\mathbb{N}$  sobre  $\mathbb{N}$ . Entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

**Demostración:**

Es inmediata del teorema anterior y de la propiedad de conmutatividad general. ■

**Corolario 1.2.2**

Sea  $\{a_{i,j}\} (i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  una sucesión doble en  $[0, \infty]$  y,  $\sigma$  una biyección de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  sobre  $\mathbb{N}$ .

Tomemos  $a_{i,j} = b_{\sigma(i,j)}$  para todo  $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . Entonces:

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} a_{i,j} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

Además, sumando por paquetes, se tiene en particular que:

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j}$$

**Demostración:**

Es inmediata del teorema de sumación por paquetes de familias. ■

---

**Teorema 1.2.4**

Para que una familia  $(a_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  de elementos de  $[0, \infty]$  sea sumable, son necesarias y suficientes las condiciones siguientes:

1. El conjunto:

$$\Omega_0 = \left\{ \alpha \in \Omega \mid a_\alpha \neq 0 \right\}$$

sea a lo sumo numerable.

2. En el caso de que  $\Omega_0$  sea numerable, si tenemos una numeración  $n \mapsto \alpha(n)$  es una biyección de  $\mathbb{N}$  sobre  $\Omega_0$  se tenga que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\alpha(n)} < \infty$$

En este caso:

$$\sum_{\alpha \in \Omega} a_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\alpha(n)}$$

---

**Demostración:**

La suficiencia es clara. (Ejercicio)

Veamos la necesidad. Supona que la familia  $(a_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  de números no negativos es sumable de suma digamos  $\Delta$ . Sea:

$$A_\nu = \left\{ \alpha \mid a_\alpha \geq \frac{1}{\nu} \right\}, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$$

probaremos que los  $A_\nu$  son finitos. Sea  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$  una familia finita de índices en  $A_\nu$  con  $\nu \in \mathbb{N}$ . Entonces:

$$\frac{k}{\nu} \leq a_{\alpha_1} + \dots + a_{\alpha_k} \leq \Delta$$

por tanto,  $k \leq \nu\Delta$ . Esto prueba que para cada  $\nu \in \mathbb{N}$ ,  $A_\nu$  es finito.

Como  $\Omega_0 = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$ , entonces  $\Omega_0$  es a lo sumo numerable.

El resto se deja como ejercicio al lector. ■

## 1.3. Familias sumables de números complejos

**Definición 1.3.1**

Sea  $(u_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  una familia arbitraria de números complejos. Se dice que dicha familia es **sumable** si la familia de los módulos  $(|u_\alpha|)_{\alpha \in \Omega}$  es una familia sumable de números no negativos.

---

**Proposición 1.3.1**

Sea  $(u_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  una familia sumable de números complejos. Defina:

$$\Omega_0 = \left\{ \alpha \in \Omega \mid u_\alpha \neq 0 \right\}$$

entonces  $\Omega_0$  es a lo sumo numerable. Además, si  $i \mapsto \alpha(i)$  es una biyección de  $\mathbb{N}$  sobre  $\Omega_0$ , la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{\alpha(i)}$$

es absolutamente convergente, y la suma de dicha serie es independiente la biyección  $\alpha$  elegida, la cual se denomina **suma de la familia sumable**  $(u_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$ , y se escribe

$$\sum_{\alpha \in \Omega} a_\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} a_{\alpha(i)}$$

Si  $\Omega'$  es otro conjunto numerable tal que  $\Omega_0 \subseteq \Omega' \subseteq \Omega$  y  $i \mapsto \alpha(i)$  es una biyección de  $\mathbb{N}$  sobre  $\Omega'$ , entonces:

$$\sum_{\alpha \in \Omega} a_\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} a_{\alpha(i)}$$

### Demostración:

Para la primera parte. Como  $(u_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  es sumable, entonces la familia de módulos  $(|u_\alpha|)_{\alpha \in \Omega}$  es sumable. Por la proposición anterior, el conjunto:

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \left\{ \alpha \in \Omega \mid |u_\alpha| > 0 \right\} \\ &= \left\{ \alpha \in \Omega \mid u_\alpha \neq 0 \right\} \end{aligned}$$

es a lo sumo numerable. Claramente se tiene que la serie  $\sum_{i=1}^{\infty} u_{\alpha(i)}$  es absolutamente convergente (nuevamente, pues la familia de los módulos es sumable).

Ahora, sea  $i \mapsto \beta(i)$  otra biyección de  $\mathbb{N}$  sobre  $\Omega_0$ . Hay que probar que:

$$s = \sum_{i=1}^{\infty} u_{\alpha(i)} = \sum_{i=1}^{\infty} u_{\beta(i)} = t$$

Dado  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que:

$$\sum_{i > n_0} |u_{\alpha(i)}| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{y} \quad \sum_{i > n_0} |u_{\beta(i)}| < \frac{\varepsilon}{3}$$

también existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $n_1 > n_0$  y  $\{\alpha(1), \dots, \alpha(n_0)\} \subseteq \{\beta(1), \dots, \beta(n_1)\}$  (básicamente podemos cubrir todos los índices de  $\alpha$  con los  $\beta$  eventualmente). Se tiene:

$$\begin{aligned} |s - t| &\leq \left| s - \sum_{i=1}^{n_0} u_{\alpha(i)} \right| + \left| \sum_{i=1}^{n_0} u_{\alpha(i)} - \sum_{i=1}^{n_1} u_{\beta(i)} \right| + \left| \sum_{i=1}^{n_1} u_{\beta(i)} - t \right| \\ &< \frac{2\varepsilon}{3} + \left| \sum_{i=1}^{n_0} u_{\alpha(i)} - \sum_{i=1}^{n_1} u_{\beta(i)} \right| \end{aligned}$$

donde la primera desigualdad se da por la convergencia de la suma de los módulos. El último término, después de la reducción, se convierte en la suma de unos cuantos  $u_\alpha(i)$  con  $i \geq n_0$ , los cuales al ser mayorizados con sus módulos suman algo menor que  $\frac{\varepsilon}{3}$ . Por tanto:

$$|s - t| < \varepsilon$$

luego,  $s = t$ . ■

### Definición 1.3.2

Sea  $\Omega$  un conjunto arbitrario.

1.  $l_1(\Omega, \mathbb{K})$  denota al conjunto de funciones  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  tales que  $(f(\alpha))_{\alpha \in \Omega}$  es una familia sumable en  $\mathbb{K}$ . Si  $f \in l_1(\Omega, \mathbb{K})$ , se escribe:

$$\mathcal{N}_1(f) = \sum_{\alpha \in \Omega} |f(\alpha)|$$

2.  $l_2(\Omega, \mathbb{K})$  denota al conjunto de funciones  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  tales que  $(f(\alpha)^2)_{\alpha \in \Omega}$  es una familia sumable en  $\mathbb{K}$ . Si  $f \in l_2(\Omega, \mathbb{K})$ , se escribe:

$$\mathcal{N}_2(f) = \left[ \sum_{\alpha \in \Omega} |f(\alpha)|^2 \right]^{1/2}$$

### Proposición 1.3.2

$l_1(\Omega, \mathbb{K})$  es un espacio vectorial sobre el campo  $\mathbb{K}$ , y  $\mathcal{N}_1$  es una norma sobre  $l_1(\Omega, \mathbb{K})$ . Además, si  $f, g \in l_1(\Omega, \mathbb{K})$  entonces,

$$\sum_{\alpha \in \Omega} (f + g)(\alpha) = \sum_{\alpha \in \Omega} f(\alpha) + \sum_{\alpha \in \Omega} g(\alpha)$$

### Demostración:

Sea  $f \in l_1(\Omega, \mathbb{K})$  y  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Sea  $J \in \mathcal{F}(\Omega)$ , se tiene que:

$$\sum_{\alpha \in J} |\lambda f(\alpha)| = |\lambda| \sum_{\alpha \in J} |f(\alpha)| \leq |\lambda| \mathcal{N}_1(f)$$

tomando supremos se sigue que  $\lambda f \in l_1(\Omega, \mathbb{K})$ , pues la familia de sus módulos es sumable.

Sean ahora  $f, g \in l_1(\Omega, \mathbb{K})$  y  $J \in \mathcal{F}(\Omega)$ . Se sabe que:

$$\sum_{\alpha \in J} |(f + g)(\alpha)| \leq \sum_{\alpha \in J} |f(\alpha)| + \sum_{\alpha \in J} |g(\alpha)| = \mathcal{N}_1(f) + \mathcal{N}_1(g)$$

por tanto,  $f + g \in l_1(\Omega, \mathbb{K})$  y  $\mathcal{N}_1(f + g) \leq \mathcal{N}_1(f) + \mathcal{N}_1(g)$ .

Finalmente, se tiene que  $\mathcal{N}_1(f) = 0$  si y sólo si  $f(\alpha) = 0$  para todo  $\alpha \in \Omega$ , si y sólo si  $f = 0$ .

Por tanto,  $\mathcal{N}_1$  es una norma sobre  $l_1(\Omega, \mathbb{K})$ .

Sean ahora  $f, g \in l_1(\Omega, \mathbb{K})$ . Tomemos:

$$\Omega_1 = \left\{ \alpha \in \Omega \mid f(\alpha) \neq 0 \right\} \quad \text{y} \quad \Omega_2 = \left\{ \alpha \in \Omega \mid g(\alpha) \neq 0 \right\}$$

Defina  $\Omega_0 = \Omega_1 \cup \Omega_2$ .  $\Omega_0, \Omega_1$  y  $\Omega_2$  son a lo sumo numerables. Sea  $i \mapsto \alpha(i)$  una biyección de  $\mathbb{N}$  sobre  $\Omega_0$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \Omega} (f + g)(\alpha) &= \sum_{i=1}^{\infty} (f + g)(\alpha(i)) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} f(\alpha(i)) + \sum_{i=1}^{\infty} g(\alpha(i)) \\ &= \sum_{\alpha \in \Omega} f(\alpha) + \sum_{\alpha \in \Omega} g(\alpha) \end{aligned}$$

■

### Observación 1.3.1

En la sumatoria con  $\Omega_0$  se usó el último resultado de la proposición 1.3.1, ya que puede que la familia  $\Omega_0$  no coincida con aquella en la que  $\alpha \in \Omega$  es tal que  $(f + g)(\alpha) = 0$ , sin embargo este conjunto  $\Omega_0$  contiene a este conjunto que se especificó.

---

**Teorema 1.3.1**

El espacio normado  $l_1(\Omega, \mathbb{K})$  con la norma  $\mathcal{N}_1$  es un espacio de Banach.

---

**Demostración:**

Sea  $\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  una sucesión de Cauchy en  $l_1(\Omega, \mathbb{K})$ , y sea  $\varepsilon > 0$ . Existe entonces  $n_0 \geq 0$  tal que:

$$\mathcal{N}_2(f_p - f_q) < \varepsilon, \quad \forall p, q \geq n_0 \quad (1.12)$$

en particular, para cada  $\alpha \in \Omega$ :

$$|f_p(\alpha) - f_q(\alpha)| \leq \mathcal{N}_2(f_p - f_1) < \varepsilon, \quad \forall p, q \geq n_0$$

entonces, la sucesión  $\{f_\nu(\alpha)\}_{\nu=1}^\infty$  es de Cauchy en  $\mathbb{K}$ . Por tanto, al ser  $\mathbb{K}$  completo, entonces para cada  $\alpha \in \Omega$  existe  $f(\alpha) \in \mathbb{K}$  tal que:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu(\alpha) = f(\alpha)$$

defina  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  la función tal que  $\alpha \mapsto f(\alpha)$ . Veamos que la sucesión  $\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  converge a  $f$ . En efecto, se tiene por (1.12) que si  $J \in \mathcal{F}(\Omega)$ :

$$\sum_{\alpha \in J} |f_p(\alpha) - f_q(\alpha)| < \varepsilon, \quad \forall p, q \geq n_0$$

tomemos  $p \geq n_0$  fijo y tomemos el límite cuando  $q \rightarrow \infty$ , se tiene que:

$$\sum_{\alpha \in J} |f_p(\alpha) - f(\alpha)| \leq \varepsilon$$

por ser  $J$  finito arbitrario, se sigue que  $f_p - f \in l_1(\Omega, \mathbb{K})$ , de donde se sigue que  $f \in l_1(\Omega, \mathbb{K})$  y:

$$\mathcal{N}_2(f_p - f) \leq \varepsilon, \quad \forall p \geq n_0$$

luego,  $l_1(\Omega, \mathbb{K})$  es completo, es decir que es de Banach. ■

---

**Teorema 1.3.2**

Sean  $f, g \in l_2(\Omega, \mathbb{K})$ . Entonces,  $fg \in l_1(\Omega, \mathbb{K})$  y:

$$\mathcal{N}_1(fg) \leq \mathcal{N}_2(f)\mathcal{N}_2(g)$$

Además,  $l_2(\Omega, \mathbb{K})$  es un espacio vectorial sobre el campo  $\mathbb{K}$ . Se define  $\forall f, g \in l_2(\Omega, \mathbb{K})$

$$(f|g) = \sum_{\alpha \in \Omega} f(\alpha) \overline{g(\alpha)}$$

La aplicación  $(f, g) \mapsto (f|g)$  hace de  $l_2(\Omega, \mathbb{K})$  un espacio hilbertiano en el cual la norma inducida por este producto escalar es  $\mathcal{N}_2$ .

---

**Demostración:**

Sea  $J \in \mathcal{F}(\Omega)$ . Por Cauchy-Schwartz para sumas finitas se tiene que:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in J} |f(\alpha)g(\alpha)| &\leq \left( \sum_{\alpha \in J} |f(\alpha)|^2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{\alpha \in J} |g(\alpha)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \mathcal{N}_2(f)\mathcal{N}_2(g) \end{aligned}$$

tomando supremo respecto a  $J$  se obtiene que  $\mathcal{N}_1(fg) \leq \mathcal{N}_2(f)\mathcal{N}_2(g)$ .

Sean  $f \in l_2(\Omega, \mathbb{K})$  y  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Para todo  $J \in \mathcal{F}(\Omega)$  se tiene que:

$$\sum_{\alpha \in J} |\lambda f(\alpha)|^2 \leq |\lambda|^2 \sum_{\alpha \in J} |f(\alpha)|^2 \leq |\lambda|^2 \mathcal{N}_2(f)^2$$

tomando supremos se sigue que  $\lambda f \in l_2(\Omega, \mathbb{K})$ , y que  $\mathcal{N}_2(\lambda f) \leq |\lambda| \mathcal{N}_2(f)$  (para la igualdad hay que fijarse en la desigualdad converso, partiendo de  $\mathcal{N}_2(f)$ ).

Sean  $f, g \in l_2(\Omega, \mathbb{K})$ . Para todo  $J \in \mathcal{F}(\Omega)$  se tiene que:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in J} |f(\alpha) + g(\alpha)|^2 &= \sum_{\alpha \in J} |f(\alpha)|^2 + \sum_{\alpha \in J} |g(\alpha)|^2 + \sum_{\alpha \in J} 2\Re(f(\alpha)\overline{g(\alpha)}) \\ &\leq \sum_{\alpha \in J} |f(\alpha)|^2 + \sum_{\alpha \in J} |g(\alpha)|^2 + \sum_{\alpha \in J} 2|f(\alpha) + g(\alpha)| \\ &\leq \mathcal{N}_2(f) + \mathcal{N}_2(g) + 2\mathcal{N}_1(fg) \end{aligned}$$

tomando supremo respecto a  $J$  se sigue que  $f + g \in l_2(\Omega, \mathbb{K})$ .

La definición  $(f|g) = \sum_{\alpha \in \Omega} f(\alpha)\overline{g(\alpha)}$  tiene sentido pues  $f, g \in l_2(\Omega, \mathbb{K})$  implica que  $fg \in l_1(\Omega, \mathbb{K})$ . Se verifica de inmediato que  $(f|g)$  es un producto escalar el cual induce  $\mathcal{N}_2$ .

Ahora probaremos que es completo. Sea  $\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  una sucesión de Cauchy en  $l_2(\Omega, \mathbb{K})$ . Sea  $\varepsilon > 0$ . Existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que:

$$\mathcal{N}_2(f_p - f_q) < \varepsilon, \quad \forall p, q \geq n_0$$

ya que para cada  $\alpha \in \Omega$ :

$$|f_p(\alpha) - f_q(\alpha)| \leq \mathcal{N}_2(f_p - f_q) < \varepsilon, \quad \forall p, q \geq n_0$$

Como  $\mathbb{K}$  es completo, existe  $f(\alpha) \in \mathbb{K}$  tal que:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu(\alpha) = f(\alpha)$$

Sea  $J \in \mathcal{F}(\Omega)$ . Se tiene entonces que:

$$\sum_{\alpha \in J} |f_p(\alpha) - f_q(\alpha)|^2 \leq \varepsilon^2, \quad \forall p, q \geq n_0$$

Manteniendo a  $p \geq n_0$  fijo y tomando límite cuando  $q \rightarrow \infty$  y siendo  $J$  finito,

$$\sum_{\alpha \in J} |f_p(\alpha) - f(\alpha)|^2 \leq \varepsilon^2$$

Esto prueba que  $f_p - f \in l_2(\Omega, \mathbb{K})$ , de donde  $f \in l_2(\Omega, \mathbb{K})$  y

$$\mathcal{N}_2(f_p - f) \leq \varepsilon, \quad \forall p, q \geq n_0$$

luego,  $l_2(\Omega, \mathbb{K})$  es completo. ■

## 1.4. Familias Ortonormales (O.N.)

### Definición 1.4.1

Una familia de vectores, digamos  $(\vec{u}_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  de vectores en un espacio prehilbertiano  $H$  es **ortonormal** si:

$$(\vec{u}_\alpha | \vec{u}_\beta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \\ 1 & \text{si } \alpha = \beta \end{cases} \quad \forall \alpha, \beta \in \Omega$$



Recuerde que una familia  $(\vec{u}_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  en  $H$  es **linealmente independiente** si cualquier subcolección finita es linealmente independiente. Se tiene que si  $(\vec{u}_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  es una familia O.N., entonces dicha familia es l.i. (linealmente independiente). En efecto, si  $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$  son O.N., entonces

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{u}_i \right\|^2 &= \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \|\vec{u}_i\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \end{aligned} \quad (1.13)$$

(esto por Pitágoras), la cual es 0 si todos los  $\alpha_i$  son cero, es decir si los vectores son l.i.

¿Cuando un espacio hilbertiano o prehilbertiano posee una base O.N.?

### Proposición 1.4.1

Se cumple lo siguiente:

1. Todo espacio hilbertiano  $H$  de dimensión finita posee una base O.N.
2. Sea  $M$  un subespacio de dimensión finita de un espacio prehilbertiano  $H$ . Sea  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  una base O.N. de  $M$ . Dado  $\vec{x} \in H$ . La proyección ortogonal de  $\vec{x}$  sobre  $M$  es:

$$\vec{x}_0 = \sum_{i=1}^n (\vec{x} | \vec{e}_i) \vec{e}_i$$

### Demostración:

De (1): La prueba se hará por inducción sobre la dimensión de  $H$ .

- Suponga que la dimensión es 1. Existe  $\vec{u} \in H$  tal que  $\vec{u} \neq \vec{0}$ . Una base O.N. de  $H$  es  $(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|})$ .
- Suponga que el resultado es cierto para dimensión  $n - 1$ . Sea  $H$  de dimensión  $n$ , y  $\vec{u} \in H$  diferente de  $\vec{0}$ , defina:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

Sea  $M = \mathcal{L}(\vec{e}_1)$ . Ya que  $H = M \oplus M^\perp$  (ya que  $M$  es distinguido por ser de dimensión finita), necesariamente  $\dim M^\perp = n - 1$ . Por hipótesis inductiva  $M^\perp$  posee una base O.N. digamos  $(\vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ .

Entonces, es claro que  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  es base O.N. de  $H$ .

aplicando inducción se sigue el resultado.

De (2): Sea  $\vec{x}_0 = \sum_{i=1}^n (\vec{x} | \vec{e}_i) \vec{e}_i$ . Se tiene

$$\begin{aligned} (\vec{x} - \vec{x}_0 | \vec{e}_i) &= (\vec{x} | \vec{e}_i) - (\vec{x}_0 | \vec{e}_i) \\ &= (\vec{x} | \vec{e}_i) - \left( \sum_{j=1}^n (\vec{x} | \vec{e}_j) \vec{e}_j | \vec{e}_i \right) \\ &= (\vec{x} | \vec{e}_i) - ((\vec{x} | \vec{e}_j) \vec{e}_j | \vec{e}_i) \\ &= (\vec{x} | \vec{e}_i) - (\vec{x} | \vec{e}_j) (\vec{e}_j | \vec{e}_i) \\ &= (\vec{x} | \vec{e}_i) - (\vec{x} | \vec{e}_j) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Siendo  $M = \mathcal{L}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ , necesariamente  $(\vec{x} - \vec{x}_0 | \vec{y}) = 0$ , para todo  $\vec{y} \in M$ . Por tanto,  $\vec{x}_0$  es efectivamente la proyección ortogonal de  $\vec{x}$  sobre  $M$ . ■

**Definición 1.4.2**

Sea  $H$  prehilbertiano y sea  $(\vec{u}_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  una familia O.N. en  $H$ . Para cada  $\vec{x} \in H$  se define una función  $\hat{x} : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  dada por:

$$\hat{x}(\alpha) = (\vec{x} | \vec{u}_\alpha), \quad \forall \alpha \in \Omega$$

los escalares  $\hat{x}(\alpha)$  se llaman **los coeficientes de Fourier de  $\vec{x}$  con respecto a la familia ortonormal  $(\vec{u}_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$** .

**Teorema 1.4.1**

Con las hipótesis y notaciones de la definición anterior,  $\forall \vec{x} \in H$  se tiene que  $\hat{x} \in l_2(\Omega, \mathbb{K})$ , y se cumple

$$\mathcal{N}_2(\hat{x}) \leq \|\vec{x}\|$$

es decir:

$$\sum_{\alpha \in \Omega} |\hat{x}(\alpha)|^2 \leq \|\vec{x}\|^2$$

la desigualdad anterior es llamada **desigualdad de Bessel**.

**Demostración:**

Sea  $J \in \mathcal{F}(\Omega)$  y defina  $M_J = \mathcal{L}((\vec{u}_\alpha)_{\alpha \in J})$ . Entonces  $M_J$  es un subespacio de dimensión finita de  $H$  provisto de la base O.N.  $(\vec{u}_\alpha)_{\alpha \in J}$ . Entonces, la proyección ortogonal de  $\vec{x}$  sobre  $M_J$  debe ser:

$$\vec{x}_0 = \sum_{\alpha \in J} (\vec{x} | \vec{u}_\alpha) \vec{u}_\alpha = \sum_{\alpha \in J} \hat{x}(\alpha) \vec{u}_\alpha$$

por la proposición anterior. Por Pitágoras:

$$\sum_{\alpha \in J} |\hat{x}(\alpha)|^2 = \left\| \sum_{\alpha \in J} \hat{x}(\alpha) \vec{u}_\alpha \right\|^2 = \|\vec{x}_0\|^2 = \|\vec{x}\|^2 - d(\vec{x}, M_J)^2 \leq \|\vec{x}\|^2$$

tomando supremos respecto a  $J$  se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_2(\hat{x})^2 &\leq \|\vec{x}\|^2 \\ \Rightarrow \mathcal{N}_2(\hat{x}) &\leq \|\vec{x}\| \end{aligned}$$

lo cual prueba el resultado. ■

**Corolario 1.4.1**

La aplicación  $\vec{x} \mapsto \hat{x}$  de  $H$  en  $l_2(\Omega, \mathbb{K})$  es una aplicación lineal continua de norma menor o igual a 1.

**Demostración:**

Veamos que es lineal. Sean  $\vec{x}, \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in H$  y  $a \in \mathbb{K}$ . Se tiene que:

$$\begin{aligned} \widehat{x_1 + x_2}(\alpha) &= (\vec{x}_1 + \vec{x}_2 | \vec{u}_\alpha) \\ &= (\vec{x}_1 | \vec{u}_\alpha) + (\vec{x}_2 | \vec{u}_\alpha) \\ &= \hat{x}_1(\alpha) + \hat{x}_2(\alpha) \end{aligned}$$

para todo  $\alpha \in \Omega$ . Por tanto,  $\widehat{x_1 + x_2} = \hat{x}_1 + \hat{x}_2$ .

Además,

$$\begin{aligned} \widehat{a\vec{x}}(\alpha) &= (a\vec{x} | \vec{u}_\alpha) \\ &= a (\vec{x} | \vec{u}_\alpha) \\ &= a \hat{x}(\alpha) \end{aligned}$$

para todo  $\alpha \in \Omega$ . Por tanto,  $\widehat{a\hat{x}} = a\hat{x}$ . Luego,  $\vec{x} \mapsto \hat{x}$  es lineal y continua por la desigualdad de Bessel, donde se deduce de forma inmediata que la norma de esta aplicación lineal es menor o igual que uno. ■

---

### Corolario 1.4.2

Si  $(\vec{u}_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  es un sistema O.N. de  $H$  y  $\vec{x} \in H$ , entonces:

$$\hat{x}(\alpha) = (\vec{x} | \vec{u}_\alpha) \neq 0$$

para una cantidad a lo sumo numerable de índices  $\alpha \in \Omega$ .

---

### Demostración:

Sea

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \left\{ \alpha \in \Omega \mid (\vec{x} | \vec{u}_\alpha) \neq 0 \right\} \\ &= \left\{ \alpha \in \Omega \mid \hat{x}(\alpha) \neq 0 \right\} \end{aligned}$$

como la familia  $\{\hat{x}(\alpha)\}_{\alpha \in \Omega}$  es sumable, el conjunto  $\Omega_0$  es a lo sumo numerable, es decir que  $(\vec{x} | \vec{u}_\alpha) \neq 0$  para una cantidad a lo sumo numerable de  $\alpha \in \Omega$ . ■

---

### Teorema 1.4.2 (Teorema de Riesz-Fischer)

Sea  $H$  prehilbertiano y sea  $(\vec{u}_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  una familia O.N. en  $H$ . Se supone que el subespacio cerrado

$$M = \overline{\mathcal{L}((\vec{u}_\alpha)_{\alpha \in \Omega})}$$

es completo (lo cual se cumple en particular si  $H$  es hilbertiano). Entonces la aplicación  $\vec{x} \mapsto \hat{x}$  es suprayectiva de  $H$  sobre  $l_2(\Omega, \mathbb{K})$ . Más precisamente, dado  $\varphi \in l_2(\Omega, \mathbb{K})$  existe un único  $\vec{x}_0 \in M$  tal que sus coeficientes de Fourier coinciden con  $\varphi$ , i.e.  $\hat{x}_0 = \varphi$ .

Además, para cualquier  $\vec{x} \in H$  se cumple que  $\hat{x} = \varphi$  si y sólo si  $\vec{x} - \vec{x}_0 \perp M$ .

---

### Demostración:

Se harán varias cosas:

1. Sea  $\varphi \in l_2(\Omega, \mathbb{K})$  y sea  $\Omega_0 = \left\{ \alpha \in \Omega \mid \varphi(\alpha) \neq 0 \right\}$  el cual es a lo sumo numerable. Sea  $i \mapsto \alpha(i)$  una biyección de  $\mathbb{N}$  sobre  $\Omega_0$ .

Considere la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi(\alpha(i)) \vec{u}_{\alpha(i)}$$

en  $M$ . Como

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(\alpha(i))|^2 = \mathcal{N}_2(\varphi) < \infty$$

dado  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $q > p \geq n_0$ :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=p}^q \varphi(\alpha(i)) \vec{u}_{\alpha(i)} \right\|^2 &= \sum_{i=p}^q |\varphi(\alpha(i))|^2 \|\vec{u}_{\alpha(i)}\|^2 \\ &= \sum_{i=p}^q |\varphi(\alpha(i))|^2 \\ &\leq \varepsilon^2 \end{aligned}$$

se cumple pues la condición de Cauchy para la convergencia de la serie en  $M$ . Como  $M$  es completo, existe  $\vec{x}_0 \in M$  único tal que

$$\vec{x}_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(\alpha(i)) u_{\alpha(i)}^{\vec{}}$$

Se tiene

$$\left( \sum_{i=1}^m \varphi(\alpha(i)) u_{\alpha(i)}^{\vec{}} \middle| u_{\alpha(k)}^{\vec{}} \right) = \varphi(\alpha(k)), \quad \forall m \geq k$$

tomando límite cuando  $m \rightarrow \infty$  y usando la continuidad de  $(\cdot | \cdot)$ :

$$\Rightarrow \hat{x}_0(\alpha(k)) = (\vec{x}_0 | u_{\alpha(k)}^{\vec{}}) = \varphi(\alpha(k)), \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Sea  $\alpha \in \Omega \setminus \Omega_0$ . Se tiene:

$$\left( \sum_{i=1}^m \varphi(\alpha(i)) u_{\alpha(i)}^{\vec{}} \middle| u_{\alpha}^{\vec{}} \right) = 0 = \varphi(\alpha(k)), \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

tomando límite cuando  $m \rightarrow \infty$  y usando la continuidad de  $(\cdot | \cdot)$  se obtiene que:

$$\Rightarrow \hat{x}_0(\alpha) = (\vec{x}_0 | u_{\alpha}^{\vec{}}) = \varphi(\alpha)$$

por tanto,  $\hat{x}_0 = \varphi$ .

2. Sea  $\vec{x} \in H$  tal que  $\hat{x} = \varphi$ . Entonces,

$$\widehat{x - x_0} = \hat{x} - \hat{x}_0 = \varphi - \varphi = 0$$

luego

$$(\vec{x} - \vec{x}_0 | u_{\alpha}^{\vec{}}) = 0 \quad \forall \alpha \in \Omega$$

Así pues,  $\vec{x} - \vec{x}_0 \perp \mathcal{L}((u_{\alpha}^{\vec{}})_{\alpha \in \Omega})$ . Siendo los elementos de  $M$  límites de sucesiones en  $\mathcal{L}((u_{\alpha}^{\vec{}})_{\alpha \in \Omega})$ , por la continuidad de  $(\cdot | \cdot)$  se tiene que  $\vec{x} - \vec{x}_0 \perp M$ .

Recíprocamente, si  $\vec{x} - \vec{x}_0 \perp M$ , es claro que  $\hat{0} = \widehat{x - x_0} = \hat{x} - \hat{x}_0 = \hat{x} - \varphi$ . Por tanto,  $\hat{x} = \varphi$ . En particular, si  $\vec{x} \in M$  y  $\hat{x} = \varphi$ , resulta que  $\vec{x} - \vec{x}_0 \in M$  y  $\vec{x} - \vec{x}_0 \perp M$ , luego  $\vec{x} - \vec{x}_0 \perp \vec{x} - \vec{x}_0$ , o sea  $\vec{x} - \vec{x}_0 = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{x}_0$ , es decir que el  $\vec{x}_0$  es único.

■

#### Observación 1.4.1

La unicidad de  $\hat{x}_0 \in M$  implica que  $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi(\alpha(i)) u_{\alpha(i)}^{\vec{}}$  es independiente de la biyección elegida  $i \mapsto \alpha(i)$  de  $\mathbb{N}$  sobre  $\Omega_0$ . Abusando de la notación se escribe

$$\hat{x}_0 = \sum_{\alpha \in \Omega} \varphi(\alpha) u_{\alpha}^{\vec{}}$$

¿Cuándo el subespacio  $M$  coincide con  $H$ ?

#### Definición 1.4.3

Una familia O.N. de vectores  $(u_{\alpha}^{\vec{}})_{\alpha \in \Omega}$  se dice **maximal** si no existe una familia O.N. que la contenga propiamente. Es decir,  $(u_{\alpha}^{\vec{}})_{\alpha \in \Omega}$  es O.N. maximal si y sólo si

$$\vec{x} \perp u_{\alpha}^{\vec{}}, \forall \alpha \in \Omega \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

---

**Teorema 1.4.3 (Teorema de Parseval)**

Sea  $H$  hilbertiano, y sea  $(\vec{u}_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  una familia O.N. de vectores en  $H$ . Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1.  $(\vec{u}_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  es maximal.
2.  $\overline{\mathcal{L}((\vec{u}_\alpha)_{\alpha \in \Omega})} = H$ .
3. Para todo  $\vec{x} \in H$ ,  $\mathcal{N}_2(\hat{x}) = \|\vec{x}\|$ , o sea que  $\sum_{\alpha \in \Omega} |\hat{x}(\alpha)|^2 = \|\vec{x}\|^2$ .
4. Para todo  $\vec{x}, \vec{y} \in H$ ,

$$(\hat{x}|\hat{y}) = (\vec{x}|\vec{y})$$

o sea

$$\sum_{\alpha \in \Omega} x(\alpha) \overline{y(\alpha)} = (\vec{x}|\vec{y})$$

---

**Demostración:**

1)  $\Rightarrow$  2): Suponga que 2. es falso, entonces,

$$M = \overline{\mathcal{L}((\vec{u}_\alpha)_{\alpha \in \Omega})} \neq H$$

es decir que existe  $\vec{x} \in H$  tal que  $\vec{x} \notin M$ . Como  $M$  es un subespacio cerrado de  $H$  hilbertiano, entonces es distinguido, luego existe la proyección ortogonal de  $\vec{x}$  sobre  $M$ , digamos  $\vec{x}_0$ , entonces  $\vec{x} - \vec{x}_0 \neq \vec{0}$ , pues  $\vec{x} \notin M$  y, en particular

$$\vec{x} - \vec{x}_0 \perp M$$

luego,

$$\vec{x} - \vec{x}_0 \perp \vec{u}_\alpha \quad \forall \alpha \in \Omega$$

es decir que la familia  $(\vec{u}_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  no es maximal.

2)  $\Rightarrow$  3): Ya se sabe que  $\mathcal{N}_2(\hat{x}) \leq \|\vec{x}\|$  por la desigualdad de Bessel. Sea  $\vec{x} \in H$  y  $\varepsilon > 0$ . Como  $\overline{\mathcal{L}((\vec{u}_\alpha)_{\alpha \in \Omega})} = H$ , existen  $J \subseteq \mathcal{F}(\Omega)$  y  $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in J}$  en  $\mathbb{K}$  tales que:

$$\|\vec{x} - \sum_{\alpha \in J} \lambda_\alpha \vec{u}_\alpha\| < \sqrt{\varepsilon} \tag{1.14}$$

Sea  $M_J = \mathcal{L}((\vec{u}_\alpha)_{\alpha \in J})$ , el cual es de dimensión finita, luego cerrado. Por tanto, de la ecuación anterior se sigue que:

$$d(\hat{x}, M_J) \leq \sqrt{\varepsilon}$$

Si  $\hat{x}_0 = \sum_{\alpha \in J} \hat{x}(\alpha) \vec{u}_\alpha$ , entonces  $\vec{x}_0$  es la proyección ortogonal de  $\vec{x}$  sobre  $M_J$ , luego:

$$\begin{aligned} d(\vec{x}, M_J)^2 &= \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{x}_0\|^2 \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

así pues:

$$\begin{aligned} \|\vec{x}\|^2 - \varepsilon &= \|\vec{x}_0\|^2 \\ &= \sum_{\alpha \in J} |\hat{x}(\alpha)|^2 \|\vec{u}_\alpha\|^2 \\ &= \sum_{\alpha \in J} |\hat{x}(\alpha)|^2 \\ &\leq \mathcal{N}_2(\hat{x})^2 \end{aligned}$$

Como  $\varepsilon > 0$  es arbitrario, se sigue que

$$\|\vec{x}\| \leq \mathcal{N}_2(\hat{x})$$

por tanto,  $\|\vec{x}\| = \mathcal{N}_2(\hat{x})$ .

3)  $\Rightarrow$  4): La identidad  $\|\vec{x}\| = \mathcal{N}_2(\hat{x})$  puede ser reescrita como:

$$(\hat{x}|\hat{x}) = (\vec{x}|\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in H$$

entonces, para todo  $\vec{x}, \vec{y} \in H$  y para todo  $\lambda \in \mathbb{K}$  se cumple:

$$\begin{aligned} (\hat{x} + \lambda \hat{y}|\hat{x} + \lambda \hat{y}) &= (\vec{x} + \lambda \vec{y}|\vec{x} + \lambda \vec{y}) \\ \Rightarrow \bar{\lambda} (\hat{x}|\hat{y}) + \lambda (\hat{y}|\hat{x}) &= \bar{\lambda} (\vec{x}|\vec{y}) + \lambda (\vec{y}|\vec{x}) \end{aligned}$$

tomando  $\lambda = 1$  y  $\lambda = i$  tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} (\hat{x}|\hat{y}) + (\hat{y}|\hat{x}) &= (\vec{x}|\vec{y}) + (\vec{y}|\vec{x}) \\ \Rightarrow (\hat{x}|\hat{y}) + \overline{(\hat{y}|\hat{x})} &= (\vec{x}|\vec{y}) + \overline{(\vec{x}|\vec{y})} \\ \Rightarrow 2\Re(\hat{x}|\hat{y}) &= 2\Re(\vec{x}|\vec{y}) \\ \Rightarrow \Re(\hat{x}|\hat{y}) &= \Re(\vec{x}|\vec{y}) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} i(\hat{x}|\hat{y}) - i(\hat{y}|\hat{x}) &= i(\vec{x}|\vec{y}) - i(\vec{y}|\vec{x}) \\ \Rightarrow i(\hat{x}|\hat{y}) + i\overline{(\hat{x}|\hat{y})} &= i(\vec{x}|\vec{y}) + i\overline{(\vec{x}|\vec{y})} \\ \Rightarrow 2\Re i(\hat{x}|\hat{y}) &= 2\Re i(\vec{x}|\vec{y}) \\ \Rightarrow -\Im(\hat{x}|\hat{y}) &= -\Im(\vec{x}|\vec{y}) \\ \Rightarrow \Im(\hat{x}|\hat{y}) &= \Im(\vec{x}|\vec{y}) \end{aligned}$$

lo anterior muestra que  $(\vec{x}|\vec{y})$  y  $(\hat{x}|\hat{y})$  tienen las mismas parte real e imaginaria, por tanto son iguales.

4)  $\Rightarrow$  1): Supongamos que 1. es falso. Entonces, existe  $\vec{x} \in H \setminus \{\vec{0}\}$  tal que  $\vec{x} \perp \vec{u}_\alpha$  para todo  $\alpha \in \Omega$ , es decir que:

$$\hat{x}(\alpha) = (\vec{x}|\vec{u}_\alpha), \quad \forall \alpha \in \Omega$$

al tomar  $\vec{x} = \vec{y}$ , resulta que:

$$(\hat{x}|\hat{x}) = 0$$

siendo que  $(\vec{x}|\vec{x}) \neq 0$ . Luego, se tiene el resultado. ■

#### Observación 1.4.2

Las identidades en 3. y 4. son llamadas **identidades de Parseval**.

#### Observación 1.4.3

Si  $(\vec{u}_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  es un sistema ortonormal maximal en un espacio hilbertiano  $H$ , entonces  $\vec{x} \mapsto \hat{x}$  es una isometría lineal de  $H$  en  $l_2(\Omega, \mathbb{K})$ . Pero, por el teorema de Riesz-Fischer esta aplicación es suprayectiva, luego  $H$  y  $l_2(\Omega, \mathbb{K})$  son linealmente isométricos (en particular, son isomorfos). La isometría inversa está dada por: para todo  $\varphi \in l_2(\Omega, \mathbb{K})$ ,

$$\varphi \mapsto \sum_{\alpha \in \Omega} \varphi(\alpha) \vec{u}_\alpha$$

---

**Teorema 1.4.4**

En todo espacio prehilbertiano  $H$  existe una familia O.N. maximal.

---

**Demostración:**

Sea  $\mathcal{O}$  la colección de todas las familias ortonormales de vectores en  $H$ . La relación inclusión  $\subseteq$  hace de  $\mathcal{O}$  un conjunto ordenado (no totalmente ordenado). Se verá que  $\mathcal{O}$  es inductivo. Sea  $(\mathcal{F}_i)_{i \in J}$  una cadena en  $\mathcal{O}$ , es decir,  $(\mathcal{F}_i)_{i \in J}$  es una familia de sistemas O.N. tales que:

$$\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_j \quad \text{o} \quad \mathcal{F}_j \subseteq \mathcal{F}_i$$

para todo  $i, j \in J$ . Sea  $\mathcal{F} = \bigcup_{i \in J} \mathcal{F}_i$ . Si  $\vec{u}_\alpha, \vec{u}_\beta \in \mathcal{F}$ , entonces existe  $i \in J$  tal que  $\vec{u}_\alpha, \vec{u}_\beta \in \mathcal{F}_i$ , luego  $(\vec{u}_\alpha | \vec{u}_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$ , por tanto  $\mathcal{F}$  es un sistema O.N., el cual es un mayorante de la cadena  $(\mathcal{F}_i)_{i \in J}$  (es decir que tiene un elemento máximo).

Así pues,  $\mathcal{O}$  es un conjunto ordenado inductivo. Por el lema de Zorn,  $\mathcal{O}$  contiene un elemento maximal. Este elemento es un sistema ortonormal maximal. ■

---

**Teorema 1.4.5**

En un espacio hilbertiano  $H$ , dos familias O.N. maximales tienen la misma cardinalidad.

---

**Demostración:**

Sean  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  dos familias ortonormales maximales en  $H$ . Se tienen dos casos:

1.  $\mathcal{A}$  es finito, digamos que  $\mathcal{A} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ . Por Parseval:

$$H = \overline{\mathcal{L}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)} = \mathcal{L}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$$

pues la dimensión del generado es finita por tanto, el generado es cerrado. Así pues,  $H$  es de dimensión finita.

Como los elementos de  $\mathcal{B}$  son l.i. entonces  $\mathcal{B}$  también debe ser finito y cumplen que si  $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ :

$$H = \overline{\mathcal{L}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}} = \mathcal{L}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$$

es decir que  $m = n$  por ser bases de  $H$ . Luego  $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$ .

2. Suponga que  $\mathcal{A}$  es infinito. Por 1. también debe suceder que  $\mathcal{B}$  sea infinito. Para todo  $\vec{a} \in \mathcal{A}$  se define:

$$\mathcal{B}_{\vec{a}} = \left\{ \vec{b} \in \mathcal{B} \mid \hat{a}(\vec{b}) = (\vec{a} | \vec{b}) \neq 0 \right\}$$

se sabe que  $\mathcal{B}_{\vec{a}}$  es a lo sumo numerable. Por otra parte, por la identidad de Parseval:

$$\begin{aligned} 1 &= \|\vec{b}\|^2 \\ &= \mathcal{N}_2(\hat{b})^2 \\ &= \sum_{\vec{a} \in \mathcal{A}} (\vec{b} | \vec{a})^2 \\ &= \sum_{\vec{a} \in \mathcal{A}} |\hat{b}(\vec{a})|^2 \end{aligned}$$

así que, debe existir  $\vec{a} \in \mathcal{A}$  tal que  $(\vec{b} | \vec{a}) \neq 0$ , es decir que

$$\mathcal{B} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}| &= \left| \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha \right| \\ &\leq |\mathcal{A}| \aleph_0 \\ &\leq |\mathcal{A}| \end{aligned}$$

pues,  $|\mathcal{B}_{\vec{a}}| \leq \aleph_0$ , para todo  $\vec{a} \in \mathcal{A}$ . Por simetría se obtiene también que  $|\mathcal{A}| \leq |\mathcal{B}|$ . Por tanto, por Cantor-Bernstein se sigue que  $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$ .

■

### Teorema 1.4.6 (Teorema de Clasificación de espacios Hilbertianos)

Todo espacio hilbertiano es linealmente isométrico a algún  $l_2(\Omega, \mathbb{K})$ . Además,  $l_2(\Omega, \mathbb{K})$  y  $l_2(\Omega', \mathbb{K})$  son linealmente isométricos si y sólo si  $|\Omega| = |\Omega'|$ .

#### Demostración:

Para la primera parte, sea  $H$  hilbertiano. Por un teorema anterior,  $H$  posee una familia O.N. maximal, digamos  $(\vec{u}_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$ , entonces, por otro teorema  $H$  debe ser linealmente isométrico a  $l_2(\Omega, \mathbb{K})$ .

Para la segunda parte, sea  $\Omega$  arbitrario. Para cada  $\alpha \in \Omega$  se define  $\varphi_\alpha \in l_2(\Omega, \mathbb{K})$  como:

$$\varphi_\alpha(\beta) = \delta_{\alpha\beta}, \quad \forall \alpha, \beta \in \Omega$$

Claramente  $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  es un sistema O.N. en  $l_2(\Omega, \mathbb{K})$ .

Sea  $\Omega'$  otro conjunto tal que  $|\Omega'| \neq |\Omega|$ . Si  $l_2(\Omega, \mathbb{K})$  y  $l_2(\Omega', \mathbb{K})$  fuesen linealmente isométricos, se tendrían dos sistemas O.N. maximales en  $l_2(\Omega, \mathbb{K})$  con misma cardinalidad, a saber  $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  y el inducido por el de  $l_2(\Omega', \mathbb{K})$  a través de la isometría, lo cual no es posible por un teorema anterior.

Si  $|\Omega| = |\Omega'|$  entonces, existe  $h : \Omega \rightarrow \Omega'$  biyección. En este caso, la aplicación  $f \mapsto f \circ h$  sería una isometría lineal de  $l_2(\Omega', \mathbb{K})$  en  $l_2(\Omega, \mathbb{K})$ . ■

## 1.5. Espacios Separables

### Definición 1.5.1

Un número complejo  $\lambda$  se llama **complejo racional** si su parte real e imaginaria son racionales.

### Teorema 1.5.1

Un espacio hilbertiano  $H$  es separable si y sólo si  $H$  posee una familia ortonormal maximal a lo sumo numerable.

#### Demostración:

$\Rightarrow$ ): Suponga que  $H$  es separable (de dimensión infinita, si es dimensión finita el resultado es inmediato). Sea  $(\vec{x}_i)_{i \in \mathbb{N}}$  una sucesión densa en  $H$  (la cual existe por ser separable). Sea ahora  $(\vec{u}_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  una familia O.N. maximal. Para obtener el resultado, se debe probar que  $\Omega$  es numerable.

Sea

$$A_i = \left\{ \alpha \in \Omega \mid (\vec{x}_i | \vec{u}_\alpha) \neq 0 \right\}$$

Se sabe que  $A_i$  es a lo sumo numerable (ya que coincide con los coeficientes de Fourier de  $\vec{x}_i$ ). Para que  $\Omega$  sea numerable, basta probar con que:

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$



Una contención se tiene por definición de los  $A_i$ . Sea  $\alpha \in \Omega$  arbitrario. Como  $(\vec{x}_i)_{i \in \mathbb{N}}$  es densa, existe  $l \in \mathbb{N}$  tal que:

$$\|\vec{x}_l - \vec{u}_\alpha\| < 1$$

Si fuera que  $(\vec{x}_l | u_\alpha) = 0$ , entonces

$$\begin{aligned} \|\vec{x}_l - \vec{u}_\alpha\|^2 &= \|\vec{u}_\alpha\|^2 + \|\vec{x}_\alpha\|^2 \\ &\geq 1 \\ \Rightarrow \|\vec{x}_l - \vec{u}_\alpha\| &\geq 1 \end{aligned}$$

lo cual no puede suceder por la elección del  $l$ . Por tanto,  $(\vec{x}_l | \vec{u}_\alpha) \neq 0$ , es decir que  $\alpha \in A_l$ .

$\Leftarrow$ ): Suponga que  $(\vec{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es O.N. maximal. Sea  $S$  la colección de todas las sumas finitas de la forma

$$\sum_{i \in J} \alpha_i \vec{u}_i$$

con  $\alpha_i$  complejo racional (o racional en caso de que el campo sea  $\mathbb{R}$ ) y  $J \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ . Se sabe que  $S$  es numerable. Como  $H = \overline{\mathcal{L}((\vec{u}_n)_{n \in \mathbb{N}})}$ , dado  $\vec{x} \in H$  y  $\varepsilon > 0$  existe  $\sum_{i=1}^n \beta_i \vec{u}_i$  con  $\beta_i \in \mathbb{K}$  tal que

$$\|\vec{x} - \sum_{i=1}^n \beta_i \vec{u}_i\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ahora, para cada  $i \in [1, n]$  existe  $\alpha_i$  racional complejo (o racional) tal que:

$$|\beta_i - \alpha_i| < \frac{\varepsilon}{2n}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \|\vec{x} - \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{u}_i\| &\leq \|\vec{x} - \sum_{i=1}^n \beta_i \vec{u}_i\| + \|\sum_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i) \vec{u}_i\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^n |\beta_i - \alpha_i| \|\vec{u}_i\| \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^n |\beta_i - \alpha_i| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

■

### Observación 1.5.1

La prueba de la ida de la prueba anterior la hizo un alumno de la ESFM. Su nombre era *Nunez Esquer*.

### Corolario 1.5.1

Un espacio hilbertiano de dimensión infinita es separable si y sólo si es linealmente isométrico a  $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ :

$$l_2(\mathbb{N}, \mathbb{K}) = \left\{ \{a_n\}_{n=1}^\infty \mid a_n \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ tal que } \sum_{n=1}^\infty |a_n| < \infty \right\}$$

provisto del producto escalar:

$$(\vec{a}|\vec{b}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n}$$

**Demostración:**

Es inmediato del teorema anterior. ■

**Ejemplo 1.5.1**

En particular con el corolario anterior, como  $L_2(S, \mathbb{K})$  es separable (siendo  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  medible), entonces

$$L_2(S, \mathbb{K}) \equiv l_2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$$

Notemos que para tener la isometría lineal, necesitamos a la familia O.N. maximal  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de tal suerte que  $f \in \mathcal{L}_2(S, \mathbb{K}) \mapsto \hat{f} = ((f|f_n))_{n \in \mathbb{N}}$  y la función inversa es  $\varphi \in l_2(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \mapsto f = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) f_n = f$ .

## 1.6. $L_{\infty}$ como dual de $L_1$

**Lema 1.6.1 (Lema de los promedios)**

Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  medible, y sea  $f : S \rightarrow \mathbb{K}$  medible e integrable en todo conjunto medible con medida finita dentro de  $S$ . Sea  $F$  un conjunto cerrado en  $\mathbb{K}$ . Se supone que para todo  $A \subseteq S$  medible tal que  $0 < m(A) < \infty$  se cumple lo siguiente:

$$\frac{1}{m(A)} \int_A f \in F$$

Entonces,  $f(x) \in F$  c.t.p. en  $S$ .

**Demostración:**

1. Sea  $C$  una bola cerrada en  $\mathbb{K} \setminus F$  de centro  $u$  y radio  $r > 0$  tal que  $C \cap F = \emptyset$ . Se afirma que  $f^{-1}(C)$  es despreciable en  $S$ . En efecto, escriba

$$f^{-1}(C) = \bigcup_{k=1}^{\infty} [f^{-1}(C) \cap P_k]$$

donde  $P_k = [-k, k]^n$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Basta probar que

$$A_k = f^{-1}(C) \cap P_k$$

es despreciable para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Se tiene que  $m(A_k)$  es finita. Si  $m(A_k) > 0$ , entonces por la hipótesis se tiene que

$$\frac{1}{m(A_k)} \int_{A_k} f \in F$$

Pero,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{m(A_k)} \int_{A_k} f - u \right| &= \frac{1}{m(A_k)} \left| \int_{A_k} (f(x) - u) dx \right| \\
&\leq \frac{1}{m(A_k)} \int_{A_k} |f(x) - u| dx \\
&\leq rm(A_k) \frac{1}{m(A_k)} \\
&= r
\end{aligned}$$

por tanto,  $\frac{1}{m(A_k)} \int_{A_k} f \in C\#_c$ , ya que  $F \cap C = \emptyset$ . Luego,  $A_k$  tiene medida cero, así  $f^{-1}(C)$  es despreciable.

2. Resta probar que  $f^{-1}(\mathbb{K} \setminus F)$  es despreciable. Como  $F$  es cerrado, entonces para todo  $x \in \mathbb{K} \setminus F$  existe una bola cerrada de centro  $x$  y radio  $r_x > 0$  tal que

$$F \cap C_x = \emptyset$$

Note que  $(\overset{\circ}{C}_x)_{x \in \mathbb{K} \setminus F}$  forman un recubrimiento abierto de  $\mathbb{K} \setminus F$ . Ya que  $\mathbb{K}$ , y por tanto  $\mathbb{K} \setminus F$  es separable, existe un recubrimiento numerable  $(\overset{\circ}{C}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{K} \setminus F$  (por el T. de Lindelöf). Entonces:

$$f^{-1}(\mathbb{K} \setminus F) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(\overset{\circ}{C}_n)$$

es despreciable por (1).

Por ambos incisos, se sigue que  $f(x) \in F$  para casi todo  $x \in S$ . ■

### Corolario 1.6.1

Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  medible y  $f : S \rightarrow \mathbb{K}$  medible e integrable en todo subconjunto de  $S$  con medida finita. Se supone que  $\forall A \subseteq S$  con medida finita:

$$\int_A f = 0$$

entonces  $f(x) = 0$  para casi toda  $x \in S$ .

### Demostración:

■

### Corolario 1.6.2

Sean  $S$  y  $f$  como en el corolario anterior. Se supone que existe  $b \geq 0$  tal que:

$$\left| \int_A f \right| \leq bm(A)$$

para todo  $A \subseteq S$  con medida finita. Entonces,  $|f(x)|$  para casi toda  $x \in S$ .

### Demostración:

■

---

**Teorema 1.6.1**

Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  medible. Para cada  $g \in \mathcal{L}_\infty(S, \mathbb{K})$  se define  $\phi_g$  como la función de  $\mathcal{L}_1(S, \mathbb{K})$  en  $\mathbb{K}$  dada como sigue:

$$\phi_g(f) = \int_S fg, \quad \forall f, g \in \mathcal{L}_1(S, \mathbb{K})$$

Entonces,  $\phi_g$  es un funcional lineal continuo sobre  $L_1(S, \mathbb{K})$ . Además, la aplicación  $\phi : g \mapsto \phi_g$  es una isometría lineal de  $L_\infty(S, \mathbb{K})$  sobre  $L_1(\mathbb{N}, \mathbb{K})^*$ .

---

**Demostración:**

Note que nada cambia si se reemplazan  $f$  o  $g$  por funciones equivalentes (es decir que la norma de sus diferencias sea 0), luego es indistinto usar las notaciones  $\mathcal{L}_1$  o  $L_1$  y  $\mathcal{L}_\infty$  o  $L_\infty$ .

Sea  $g \in \mathcal{L}_\infty(S, \mathbb{K})$ . Claramente  $\phi_g$  es un funcional lineal sobre  $L_1(S, \mathbb{K})$ . Además,

$$|\phi_g(f)| \leq \left| \int_S fg \right| \leq \int_S |f| |g| \leq \mathcal{N}_\infty(g) \mathcal{N}_1(f)$$

por tanto,  $\phi_g \in L_1(\mathbb{N}, \mathbb{K})^*$ , y  $\|\phi_g\| \leq \mathcal{N}_\infty(g)$ .

Si  $A \subseteq S$  es medible de medida finita, entonces

$$\begin{aligned} \left| \int_A g \right| &= \left| \int_S g \chi_A \right| \\ &= |\phi_g(\chi_A)| \\ &\leq \|\phi_g\| \mathcal{N}_1(\chi_A) \\ &= \|\phi_g\| m(A) \end{aligned}$$

por el corolario anterior se sigue que

$$|g(x)| \leq \|\phi_g\|, \text{ para casi toda } x \in S$$

por ende,  $\mathcal{N}_\infty(g) \leq \|\phi_g\|$ . Finalmente, se sigue que  $\|\phi_g\| = \mathcal{N}_\infty(g)$  (es decir que es isometría) y, claramente es lineal. ■