Curso de Lógica Matemática

Cristo Daniel Alvarado

30 de agosto de 2024

Índice general

Capítulo 0

Introducción

0.1. Temario

Los siguientes temas se verán a lo largo del curso:

1. Lógica (Teoría de Modelos).
   1.1) Lógica proposicional.
   1.2) Lógica de primer orden.
2. Teoría de la Computabilidad.
   2.1) Conjuntos/Funciones computables.
   2.2) Teoremas de incompletitud.
3. Teoría de Conjuntos.
   3.1) Ordinales.
   3.2) Cardinalidad.

Y la bibliografía para el curso es la siguiente:

- Enderton, 'Introducción matemática a la lógica'.
- Enderton, 'Teoría de la computabilidad'.
- Copi, 'Lógica Simbólica' o 'Computability Theory'.
- Rebeca Weber 'Computability Theory'.
- Hrbacek, Seda.
- Herrnández Herrnández.

0.2. Conectivas Lógicas

La disyunción ($\wedge$), conjunción ($\vee$), negación ($\neg$), implicación ($\Rightarrow$) y si y sólo si ($\iff$) son las conectivas lógicas usadas usualmente. Para las demostraciones se tienen que tomar los casos que se cumplan con estas implicaciones, por lo que si podemos simplificar el conjunto de conectivas lógicas, todo se simplificará.

Para ello, veamos que

$$P \Rightarrow Q \equiv \neg(P \wedge \neg Q)$$

tienen las mismas tablas de verdad. Por ejemplo también se tiene

$$P \wedge Q \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q)$$

ó

$$P \vee Q \equiv \neg(\neg P \wedge \neg Q)$$

A $\{\wedge, \vee, \neg\}$ se le conoce como un **conjunto completo de conectivas lógicas** (es decir que toda conectiva se expresa como combinaciones de ellas). Nos podemos quedar simplemente con conjuntos completos de disyuntivas con solo dos elementos, a saber: $\{\wedge, \neg\}$ y $\{\vee, \neg\}$, ya que $P \vee Q$ es $\neg(\neg P \wedge \neg Q)$. (de forma similar a lo otro $P \wedge Q$ es $\neg(\neg P \vee \neg Q)$).

También $\{\Rightarrow, \neg\}$ es otro conjunto completo de conectivas lógicas, ya que $P \wedge Q$ es $\neg(P \Rightarrow \neq Q)$.

Y, $\{|\}$ es un conjunto completo, donde $|$ es llamado la **barra de Scheffel**, que tiene la siguiente tabla de verdad.

P	Q	$P\|Q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

con este, se tiene un conjunto completo de conectivas lógicas. Veamos que

$$P|P \equiv \neg P$$

y,

$$P \wedge Q \equiv \neg(P|Q) \equiv (P|Q)|(P|Q)$$

Como muchas veces se usan conectivas de este tipo:

$$(P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow ((P \Rightarrow R) \wedge \neg(Q \Rightarrow S) \wedge T)$$

al ser muy largas, a veces es más conveniente escribirlas en forma Polaca. De esta forma, lo anterior quedaría de la siguiente manera:

$$\Rightarrow\Rightarrow P\neg Q \wedge \wedge PR\neg \Rightarrow QST$$

Ahora empezamos con el estudio formal de la lógica.

0.3. Ejercicios

Convierta a/de notación Polaca, según sea el caso.

1. $P \Rightarrow (Q \wedge \neg A)$. Sería $\Rightarrow P \wedge Q\neg A$.

2. $\Rightarrow A\neg \wedge CD$. Sería $A \Rightarrow \neg(C \wedge D)$.

3. $(A \Rightarrow B) \iff (\neg A \vee \neg(\neg B \vee C))$. Sería $\iff \Rightarrow AB \vee \neg A\neg \vee \neg BC$.

4. $\vee\neg\neg \Rightarrow BC\wedge \Rightarrow A \wedge BCA$. Sería $(\neg\neg(B \Rightarrow C)) \vee ((A \Rightarrow (B \wedge C)) \wedge A)$.

5. $(P \Rightarrow Q) \iff (\neg Q \Rightarrow \neg P)$. Sería $\iff \Rightarrow PQ \Rightarrow \neg Q\neg P$.

Capítulo 1

Lógica Proposicional

1.1. Alfabeto

Hablaremos un poco de sintaxis y semántica.

- Sintaxis: la forma en la que vamos a ordenar nuestras variables y conectivas.
- Semántica: da significado al orden de nuestras variables y conectivas.

Definiremos el lenguaje de la lógica proposicional. Para ello primero definiremos el alfabeto.
El **alfabeto** de la lógica proposicional es un conjunto que consta de dos tipos de símbolos:

1. **Variables**, denotadas por $p_1, p_2, ..., p_n, ...$ (a lo más una cantidad numerable). Estas representan proposiciones o enunciados (tengo un paraguas, me caí de las escaleras, no tengo café en la cafetera, etc. . .).
2. **Conectivas**, como $\Rightarrow$ y $\neg$.

El alfabeto que usaremos es: $\{\Rightarrow, \neg, p_1, p_2, ...\}$.

Observación 1.1.1
Podríamos usar otro alfabeto, pero dado a que $\{\Rightarrow, \neg\}$ es un conjunto completo de conectivas lógicas (y resulta más sencillo usarlas que la barra de Scheffel), se tomará este alfabeto con estas conectivas.

Aceptamos la existencia de estas cosas (pues, al menos debemos aceptar la existencia de algo).
Se van a trabajar con sucesiones finitas de símbolos del alfabeto descrito anteriormente. Ahora necesitaremos especificar que tipos de sucesiones van a servirnos para tener un significado formal.

Ejemplo 1.1.1
Por ejemplo la sucesión (p_3), $\emptyset$, $(\Rightarrow, p_2, \neg, p_5)$. Básicamente estas sucesiones finitas representan fórmulas en notación polaca.

Definición 1.1.1
En el conjunto de sucesiones finitas de símbolos del alfabeto, definimos una **fórmula bien formada** (abreviada como **FBF**) como sigue:

1. Cada variable es una **FBF**.
2. Si φ, ψ son **FBF**, entonces $\neg\varphi$ y $\Rightarrow \varphi\psi$ también lo son.

Observación 1.1.2
Recordar que usamos la notación Polaca en la definición anterior. Cuando se colocan en (2) $\neg\varphi$ y $\Rightarrow \varphi\psi$, hace referencia a concatenar estas sucesiones finitas.

A continuación unos ejemplos:

Ejemplo 1.1.2
p_{17}, p_{54} y $\Rightarrow p_2 p_{25}$ son FBF. Las primeras dos son llamadas **variables aisladas**. También lo es $\neg \Rightarrow p_2 p_{25}$ (en este ejemplo, los p_i son variables).

Pero, por ejemplo $\Rightarrow \neg p_1 p_2 p_3$ y $\Rightarrow p_4$ no son FBF.

Viendo el ejemplo anterior, notamos que el operador $\Rightarrow$ es binario (solo usa dos entradas) y $\neg$ es unario (solo una entrada). Por lo cual, añadir o no demás variables a los opeadores dentro de la fórmula, hace que la fórmula ya no sea una FBF.

Observación 1.1.3
Eventualmente se va a sustituir la notación Polaca por la normal, para que se pueda leer la FBF y el proceso no sea robotizado.

Definiremos ahora más conectivas lógicas para poder trabajar más cómodamente.

Definición 1.1.2
Se definirán tres conectivas lógicos adicionales.

1. Se define la **disyunción** $\varphi \vee \psi$ como $\Rightarrow \neg\psi\varphi$ (en notación Polaca).
2. Se define la **conjunción** $\varphi \wedge \psi$ como $\neg(\neg\psi \vee \neg\varphi)$.
3. Se define el **si sólo si** $\psi \iff \varphi$ como $(\psi \Rightarrow \varphi) \wedge (\varphi \Rightarrow \psi)$.

1.2. Modeos o Estructuras

En el fondo, queremos que las FBF sean cosas verdaderas o falsas. Un Modelo o Estructura es algo que le va a dar significado a las FBF, esta es la parte de la semántica. De alguna manera va a ser una forma de asignarle el valor de verdadero o falso a cada una de las variables.

Definición 1.2.1
Un **Modelo o Estructura** de la lógica proposicional es una función $m : \mathrm{Var} \to \{V, F\}$, donde Var denota al conjunto de símbolos que son variables. Básicamente estamos diciendo que hay variables que son verdaderas y otras que son falsas.

Teorema 1.2.1
Para todo modelo m, existe una única extensión $\overline{m} : \mathrm{FBF} \to \{V, F\}$, donde FBF denota al conjunto de las fórmulas bien formadas, tal que

1. $\overline{m}(p) = m(p)$ para todo $p \in \mathrm{Var}$.
2. Para todo $\varphi, \psi \in \mathrm{FBF}$:
$$\overline{m}(\neg\varphi) = V \text{ si y sólo si } \overline{m}(\varphi) = F$$

y,
$$\overline{m}(\Rightarrow \varphi\psi) = F \text{ si y sólo si } \overline{m}(\varphi) = V \text{ y } \overline{m}(\psi) = F$$

Demostración:
La prueba aún no se hará, pero es por recursión. ■

Definición 1.2.2
Sea m un modelo, φ una fórmula y Σ un cojunto de fórmulas. Decimos que

1. m **satisface** φ (denotado por $m \vDash \varphi$) si $\overline{m}(\varphi) = V$.
2. m **satisface** Σ (denotado por $m \vDash \Sigma$) si $m \vDash \varphi$ para cada $\varphi \in \Sigma$.

Ejemplo 1.2.1
Sea m un modelo tal que $m(p_1) = V$ y $m(p_i) = F$, para todo $i \geq 2$. En este caso $m \nvDash \Rightarrow p_1p_3$, pero $m \vDash \neg p_5$.

Definición 1.2.3
Sea φ una fórmula y Σ un conjunto de fórmulas.

1. Decimos que φ es **consecuencia lógica** de Σ o que Σ **lógicamente implica** φ (denotado por $\Sigma \vDash \varphi$) si para todo modelo m tal que $m \vDash \Sigma$, se cumple que $m \vDash \varphi$.
2. Decimos que φ es una **tautología** si $\emptyset \vDash \varphi$.
3. Decimos que φ es una **contradicción** si $\emptyset \vDash \neg\varphi$ es una tautología.

Veamos ejemplos para aclarar las ideas:

Ejemplo 1.2.2
Se tiene $\{\Rightarrow p_1p_2, p_2\} \nvDash p_1$. En efecto, para un modelo m tal que $m(p_2) = V$ y $m(p_1) = F$ es tal que m no satisface p_1.

Ejemplo 1.2.3
Muestre que $\{\Rightarrow p_1p_2, \Rightarrow p_2p_3\} \vDash \Rightarrow p_1p_3$.

Observación 1.2.1
De ahora en adelante, $f \upharpoonright A$ denotará la reestricción de f al conjunto A.

Lema 1.2.1
Sean n, m dos modelos y sea φ una fórmula. Sean $p_{i_1}, p_{i_2}, ..., p_{i_k}$ las variables que ocurren en φ. Si $n \upharpoonright \{p_{i_1}, p_{i_2}, ..., p_{i_k}\} = m \upharpoonright \{p_{i_1}, p_{i_2}, ..., p_{i_k}\}$, entonces
$$n \vDash \varphi \text{ si y sólo si } m \vDash \varphi$$

Demostración:
Por la definición de $\models$, basta con demostrar que

$$\overline{n}(\varphi) = \overline{m}(\varphi)$$

Esto lo haremos por inducción sobre φ.

- Si φ es una variable p_t, entonces

$$\begin{aligned}\overline{n}(\varphi) &= \overline{n}(p_t)\\ &= n(p_t)\\ &= m(p_t)\\ &= \overline{m}(p_t)\\ &= \overline{m}(\varphi)\end{aligned}$$

- Hay que ver que se cumple también para las conectivas:

  1. Supongamos que $\varphi = \neg\psi$, siendo ψ una FBF tal que $\overline{n}(\psi) = \overline{m}(\psi)$. Entonces,

  $$\overline{n}(\varphi) = \overline{n}(\neg\psi)$$

  se tiene que

  $$\begin{aligned}\overline{n}(\neg\psi) = V &\text{ si y sólo si } \overline{n}(\psi) = F\\ &\text{ si y sólo si } \overline{m}(\psi) = F\\ &\text{ si y sólo si } \overline{m}(\neg\psi) = V\\ &\text{ si y sólo si } \overline{m}(\varphi) = V\end{aligned}$$

  por tanto, $\overline{m}(\varphi) = V$ si y sólo si $\overline{m}(\varphi) = V$. De forma análoga se llega a que $\overline{m}(\varphi) = F$ si y sólo si $\overline{m}(\varphi) = F$. Por tanto:

  $$\overline{m}(\varphi) = \overline{n}(\varphi)$$

  2. Supongamos que φ es de la forma $\Rightarrow \psi\chi$ y que $\overline{m}(\psi) = \overline{n}(\psi)$, y $\overline{m}(\chi) = \overline{n}(\chi)$.
  Se tiene que $\overline{m}(\Rightarrow \psi\chi) = F$ si y sólo si $\overline{m}(\psi) = V$ y $\overline{m}(\chi) = F$, si y sólo si $\overline{n}(\psi) = V$ y $\overline{n}(\chi) = F$, si y sólo si $\overline{n}(\Rightarrow \psi\chi) = F$ (que es el único caso en que es falso). Por tanto:

  $$\overline{m}(\varphi) = \overline{n}(\varphi)$$

por inducción se sigue que

$$n \models \varphi \text{ si y sólo si } m \models \varphi$$

■

Con este lema, se tiene que el ejemplo 1.2.2 ya tiene fundamentación, ya que únicamente basta que el modelo sea válido en las variables p_1 y p_2 (no en la cantidad infinita de variables que podemos llegar a tener).

Observación 1.2.2
Si Σ es un conjunto finito de fórmulas (digamos $\Sigma = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$), entonces $\Sigma \models \varphi$ si y sólo si $(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \Rightarrow \varphi$ es una tautología.

1.3. Cálculo Proposicional

Nuestro cálculo proposicional se compondrá de lo siguiente:

1. **Axiomas Lógicos**.
2. **Reglas de inferencia**.

más adelante se probará que si hubiesemos elegido diferentes axiomas lógicos y reglas de inferencia, habríamos llegado al mismo resultado (siempre que se haya cumplido una hipótesis adicional ¿?).

Definición 1.3.1 (**Axiomas Lógicos**)
Tenemos para nuestro cálculo proposicional los siguientes axiomas lógicos:

1. $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$.
2. $\varphi \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \neg\varphi) \Rightarrow \neg\psi)$.
3. $\varphi \Rightarrow \varphi'$ siempre que φ resulte de sustituir ψ por $\neg\neg\psi$ o viceversa (siendo ψ una subfórmula de φ).
4. $\varphi \Rightarrow \varphi'$ siempre que φ resulte de sustituir $\psi \Rightarrow \chi$ por $\neg\chi \Rightarrow \neg\psi$ o viceversa (siendo ψ y χ subfórmulas de φ).
5. $\varphi \Rightarrow \varphi'$ siempre que φ resulte de sustitur $\neg\psi \Rightarrow \psi$ por ψ (siendo ψ una subfórmula de φ).
6. $(\varphi \Rightarrow (\chi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi))$.

siendo φ una FBF dada y ψ una FBF arbitraria en 1 y 2, y φ, ψ, χ FBF dadas.

Ejemplo 1.3.1
Ejemplo del axioma 1: si p_1 es una variable,

$$p_1 \Rightarrow (p_3 \Rightarrow p_1)$$

siendo p_3 una variable arbitraria.

Ejemplo 1.3.2
Ejemplo del axioma 3:

$$(p_1 \Rightarrow \neg\neg p_3) \Rightarrow (p_1 \Rightarrow p_3)$$

o

$$(p_1 \Rightarrow p_3) \Rightarrow (p_1 \Rightarrow \neg\neg p_3)$$

Definición 1.3.2 (**Reglas de Inferencia**)
Se tiene una única regla de inferencia, denominada **Modus Ponens** (abreviada **MP**) dada por:

$$\begin{array}{lcc} \varphi & \Rightarrow & \psi \\ \varphi & & \\ \hline & \therefore & \psi \end{array}$$

Definición 1.3.3
Sea Σ un conjunto y φ una fórmula.

1. Una **demostración** de φ a partir de Σ es una sucesión finita de fórmulas $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ tal que:
   1.I) $\varphi_n = \varphi$.
   1.II) Para cada $i \in \{1, ..., n\}$ se tiene una de las tres:
      I.II.a) $\varphi_i \in \Sigma$.
      I.II.b) φ_i es axioma lógico.
      I.II.c) existen $k, j \in \{1, ..., n\}$ con $k < j < i$ tales que φ_j es $\Rightarrow \varphi_k \varphi_i$.
2. Decimos que φ es **demostrable a partir de** Σ, o que φ es un **teorema de** Σ si existe una demostración de φ a partir de Σ, esto se simboliza por $\Sigma \vdash \varphi$.

Ejemplo 1.3.3
Se cumple que $\{\neg p_3, p_1 \Rightarrow p_3, p_1 \vee (p_2 \Rightarrow p_3), \neg p_3 \Rightarrow (p_3 \Rightarrow p_5), p_2\} \vdash p_5$.

Demostración:
Se tiene la siguiente demostración de p_5:

■

Notas viejas

Definición 1.3.4
Decimos que una fórmula φ es:

1. **Satisfacible** si existe un modelo m tal que $m \vDash \varphi$.
2. **Contradictoria** si todo modelo cumple que $m \nvDash \varphi$.
3. **Una tautología** si todo modelo m cumple que $m \vDash \varphi$.

Ejemplo 1.3.4
Tomemos de ejemplo a $\Rightarrow p_1 p_2$. cualquier modelo que haga a p_1 y p_3 verdaderas, o ambas falsas satisfacen la FBF, p_1, $\neg \Rightarrow p_1 p_3$ o $\neg(p_1 \Rightarrow \neg p_1)$. Por lo cual, esta fórmula es satisfacible.

En cambio, $\neg(p_1 \Rightarrow p_1)$ es contradictoria y, por ende $p_1 \Rightarrow p_1$ y $\neg p_1 \Rightarrow \neg p_1$ son tautologías.

Definición 1.3.5
Sea Σ un conjunto de fórmulas. Decimos que Σ es

1. **Satisfacible** si existe un modelo m tal que $m \vDash \Sigma$.
2. **Contradictoria** si todo modelo cumple que $m \nvDash \Sigma$.
3. **Una tautología** si todo modelo m cumple que $m \vDash \Sigma$.

Ejemplo 1.3.5
El conjunto de fórmulas $\Sigma = \{\Rightarrow p_1p_2, p_1, \neg p_2\}$ no es satisfacible (en este caso, es contradictorio).

Observación 1.3.1
Se tiene lo siguiente:

1. Una tautología $\Rightarrow$ satisfacible.
2. φ es satisfacible $\iff$ $\neg\varphi$ es una contradicción.
3. Satisfacible es lo mismo que no contradictoria.

Definición 1.3.6
Si Σ es un conjunto de FBF y φ es alguna otra fórmula, entonces decimos que φ es **consecuencia lógica** de Σ, o que Σ **implica lógicamente** a φ, escrito como $\Sigma \vDash \varphi$, si para todo modelo m tal que $m \vDash \Sigma$ se tiene que $m \vDash \varphi$.

Ejemplo 1.3.6
El conjunto de FBF $\{\Rightarrow p_1p_2, p_1\} \vDash p_2$.

Observación 1.3.2
Se tiene lo siguiente:

1. Un conjunto de FBF $\Sigma \nvDash \varphi$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es satisfacible.
2. Además, un conjunto de FBF $\Sigma \vDash \varphi$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ no es satisfacible.

Lema 1.3.1
Sea Σ un conjunto de fórmulas y sean $\mathrm{Var}(\Sigma)$ el conjunto de las variables p_i que aparecen en las fórmulas de Σ. Si m_1 y m_2 son dos modelos tales que

$$m_1|_{\mathrm{Var}(\Sigma)} = m_2|_{\mathrm{Var}(\Sigma)}$$

entonces, $\overline{m_1}|_\Sigma = \overline{m_2}|_\Sigma$. En particular, para cada fórmula φ que sea elemento de Σ, entonces $m_1 \vDash \varphi$ si y sólo si $m_2 \vDash \varphi$, más aún $m_1 \vDash \Sigma$ si y sólo si $m_2 \vDash \Sigma$.

Demostración:
Sin pérdida de generalidad, Σ es cerrado bajo subformulas.

Procederemos por inducción sobre $\varphi \in \Sigma$, demostraremos que $\overline{m_1}(\varphi) = \overline{m_2}(\varphi)$. Si φ coincide con algún p_i, entonces $p_i \in \mathrm{Var}(\Sigma)$ y, por tanto

$$\overline{m_1}(p_i) = m_1(p_i) = m_2(p_i) = \overline{m_2}(p_i)$$

Ahora hacemos el paso inductivo.

1. Tenemos el caso en que φ es de la forma $\neg\psi$ y suponemos que $\overline{m_1}(\psi) = \overline{m_2}(\psi)$. Se tiene que $\overline{m_1}(\neg\psi) = F \iff \overline{m_1}(\psi) = V \iff \overline{m_2}(\psi) = V \iff \overline{m_2}(\neg\psi) = F$. Por lo tanto, $\overline{m_1}(\psi) = \overline{m_2}(\psi)$. El caso en que sea verdadero es análogo.

2. Tenemos el caso en que φ es de la forma $\Rightarrow \varphi_1\psi$ y, supontemos que $\overline{m_1}(\varphi_1) = \overline{m_2}(\varphi_1)$ y $\overline{m_1}(\psi) = \overline{m_2}(\psi)$. Se tiene que $\overline{m_1}(\Rightarrow \varphi_1\psi) = F \iff \overline{m_1}(\varphi_1) = V$ y $\overline{m_1}(\psi) = F \iff$ (por hipótesis de inducción) $\overline{m_2}(\varphi_1) = V$ y $\overline{m_2}(\psi) = F \iff \overline{m_2}(\Rightarrow \varphi_1\psi) = F$. El caso en que sean verdaderas es análogo. Por tanto, $\overline{m_1}(\Rightarrow \varphi_1\psi) = \overline{m_2}(\Rightarrow \varphi_1\psi)$.

Lo cual completa el paso inductivo. ■

Corolario 1.3.1
Si Σ es un conjunto finito de fórmulas, entonces se puede verificar 'Mecánicamente' si es el caso, que $\Sigma \vDash \varphi$.

El procedimiento para verificar el modelo, se hace mediante la tabla de verdad de las variables y las FBF de Σ.

Definición 1.3.7
Decimos que un conjunto de fórmulas bien formadas Σ es **finitamente satisfacible** si cualquier subconjunto finito $\Delta \subseteq \Sigma$ es satisfacible.

Teorema 1.3.1 (Teorema de Compacidad de Gödel)
Si Σ es un conjunto (arbitrario) de fórmulas tal que $\Sigma \vDash \varphi$, entonces existe un $\Delta \subseteq \Sigma$ finito tal que $\Delta \vDash \varphi$.

El teorema que Gödel probó originalmente fue este:

Teorema 1.3.2 (Teorema de Gödel)
Un conjunto de fórmulas Σ es satisfacible si y sólo si es finitamente satisfacible.

Veamos por qué el teorema de Gödel implica el teorema de compacidad de Gödel. Se tiene que $\Sigma \nvDash \varphi \iff$ existe un modelo m tal que $m \vDash \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$. Es decir, si y sólo si $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es satisfacible, es decir que es finitamente satisfacible (por el teorema de Gödel), es decir que para todo $\Delta \subseteq \Sigma$ finito se cumple que

$$\Delta \cup \{\neg\varphi\}$$

es satisfacible. Y esto sucede si y sólo si para todo $\Delta \subseteq \Sigma$ finito existe m tal que $m \vDash \Delta \cup \{\neg\varphi\}$, si y sólo si para todo $\Delta \subseteq \Sigma$ finito $\Delta \nvDash \varphi$, con lo cual

$$\Sigma \nvDash \varphi \iff \Delta \nvDash \varphi$$

para todo $\Delta \subseteq \Sigma$ finito, que es el teorema de compacidad en su forma contrapositiva.

Lema 1.3.2
Sea Σ un conjunto finitamente satisfacible, y sea φ cualquier fórmula, entonces o bien $\Sigma \cup \{\varphi\}$ es finitamente satisfacible o $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ lo es.

Demostración:
Supongamos que no, es decir que tanto $\Sigma \cup \{\varphi\}$ como $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ no son finitamente satisfacibles, por lo cual existen $\Delta_1, \Delta_2 \subseteq \Sigma$ finitos tales que $\Delta_1 \cup \{\varphi\}$ y $\Delta_2 \cup \{\neg\varphi\}$ no son satisfacibles. Entonces $\Delta_1 \cup \Delta_2$ no puede ser satisfacible, pues si m es un modelo tal que $m \vDash \Delta_1 \cup \Delta_2$, entonces $m \vDash \varphi$ contradice el hecho de que $\Delta_1 \cup \{\varphi\}$ es no satisfacible y si $m \vDash \neg\varphi$ contradice el hecho de que $\Delta_2 \cup \{\neg\varphi\}$ no es satisfacible, siendo $\Delta_1 \cup \Delta_2 \subseteq \Sigma$, se contradice el hecho de que Σ es finitamente satisfacible$\#_c$. Luego se tiene el resultado. ■

Ahora procederemos a probar el teorema de Gödel.

Demostración:

Se probará la doble implicación:

$\Rightarrow$): Es inmediato.

$\Leftarrow$): Sean $\varphi_1, \varphi_2, ...$ una enumeración 'efectiva' de todas las fórmulas (checar la observación). Recursivamente, definimos conjuntos de fórmulas $\Sigma_0 \subseteq \Sigma_1 \subseteq \cdots$ tales que $\Sigma_0 = \Sigma$, y

1. Cada Σ_n es finitamente satisfacible.
2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, o bien $\varphi_n \in \Sigma_{n+1}$ o bien $\neg\varphi_n \in \Sigma_{n+1}$

en este contexto, definimos:

$$\Sigma_{n+1} = \begin{cases} \Sigma_n \cup \{\varphi_n\} & \text{si este conjunto es finitamente satisfacible} \\ \Sigma_n \cup \{\neg\varphi_n\} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Esta definición es consistente con la recursión por el lema anterior.

Ahora, definimos $\Sigma_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Sigma_n$. Analicemos a este conjunto.

1. Σ_∞ **es finitamente satisfacible**. En efecto, sea $\Delta \subseteq \Sigma$ un subconjunto finito, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\Delta \subseteq \Sigma_n$, luego como Σ_n es finitamente satisfacible, Δ es satisfacible. Por lo cual Σ_∞ es finitamente satisfacible.
2. **Para cada fórmula ψ o bien $\psi \in \Sigma_\infty$ ó $\neg\psi \in \Sigma_\infty$ y no ambas.** Esto es inmediato con la enumeración efectiva de todas las fórmulas bien formadas.
3. Σ_∞ **es maximal finitamente satisfacible**.

Sea $m : \text{Var}(\Sigma_\infty) \to \{V, F\}$, dado por $m(p_n) = V$ si y sólo si $p_n \in \Sigma_\infty$.

Se probará el siguiente lema:

Lema 1.3.3

Para cualquier fórmula ψ, $\overline{m}(\psi) = V$ si y sólo si $\psi \in \Sigma_\infty$ y $\overline{m}(\psi) = F$ si y sólo si $\neg\psi \in \Sigma_\infty$.

Demostración:

Procederemos por inducción sobre ψ.

- El caso base es inmediato por definición.
- $\overline{m}(\neg\psi) = V \iff \overline{m}(\psi) = F \iff \psi \notin \Sigma_\infty \iff \neg\psi \in \Sigma_\infty$.
- $\overline{m}(\Rightarrow \xi\psi) = F \iff \overline{m}(\xi) = F$ y $\overline{m}(\psi) = V \iff \neg\xi, \psi \in \Sigma_\infty$ si y sólo si $\Rightarrow \psi\xi \notin \Sigma_\infty$ (esto es cierto por la maximalidad de Σ_∞ al ser finitamente satisfacible).

por inducción se tiene lo deseado. ■

En conclusión, el modelo definido cumple que $m \vDash \psi$ si y sólo si $\psi \in \Sigma_\infty$. En particular, $m \vDash \Sigma$, y Σ es satisfacible.

■

Observación 1.3.3

Tuplas. Considere los números naturales. Podemos establecer una biyección entre las tuplas finitas de números naturales junto con el cero, y los números naturales, de esta forma:

Si $n \in \mathbb{N}$, por el TFA podemos expresar a $n = q_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot q_m^{\alpha_m}$. Establecemos la biyección dada como sigue: $n \mapsto (\alpha_1, ..., \alpha_{m-1}, \alpha_m - 1)$. De esta forma podemos enumerar algo con tuplas. Lo que Gödel hace es que hace ciertas asignaciones: $\neg = 0$, $\Rightarrow = 1$, $2 = p_1$, $3 = p_2$, etc... Esta enumeración es llamada **enumeración de Gödel**.

Cuando decimos lo de enumeración, nos referimos a esto. Básicamente enumeramos a todas las fórmulas bien formadas. Cuando decimos que la enumeración es efectiva, hacemos referencia a que podemos hacerlo de forma mecánica.

1.4. Lista de Axiomas Lógicos

Definición 1.4.1 (Axiomas Lógicos)
Se tienen los siguientes axiomas. Cualquier fórmula que caiga en alguno de los siguientes casos.

1. $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$.
2. $\varphi \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \neg\varphi) \Rightarrow \neg\psi)$.
3. $\varphi \Rightarrow \varphi'$ siempre que φ' sea el resultado de sustituir una subfórmula de la forma $\neg\neg\psi$ por ψ, o viceversa.
4. $\varphi \Rightarrow \varphi[\psi \Rightarrow \xi \leftrightsquigarrow \neg\xi \Rightarrow \neg\psi]$.
5. $\varphi \Rightarrow \varphi[\neg\psi \Rightarrow \psi \leftrightsquigarrow \psi]$.
6. $(\varphi \Rightarrow (\xi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \xi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi))$.

Junto con una única regla de inferencia, llamada **Modus Ponens**, la cual consiste en que

$$\begin{array}{ccc} \varphi & \Rightarrow & \psi \\ \varphi & & \\ \hline & \therefore & \psi \end{array}$$

Un ejemplo de 3. sería que $(p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow (p_1 \Rightarrow \neg\neg p_2)$. Cuando ponemos [.] al lado de una fórmula, nos referimos a cualquier subfórmula interna dentro de la original. Cuando ponemos $\leftrightsquigarrow$ es que podemos sustituir uno por otro.

Definición 1.4.2
Sea Γ un conjunto de fórmulas,y sea φ una fórmula.

1. Una **demostración** de φ a partifr de Γ es una sucesión finita de fórmulas $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ tales que, para cada i se cumple una de las siguientes:
   1.I) φ_i es un axioma lógico.
   1.II) φ_i es un elemento de Γ.
   1.III) Existen $j, k < i$ tales que: φ_j es la fórmula $\varphi_k \Rightarrow \varphi_i$.
2. φ es **demostrable a partir de** Γ, o bien φ es un **teorema de** Γ, si existe una demostración de φ a partir de Γ. Esto se simboliza por $\Gamma \vdash \varphi$.

Observación 1.4.1
$\varphi \vee \psi$ es $\neg\varphi \Rightarrow \psi$, y $\varphi \wedge \psi$ es $\neg(\psi \Rightarrow \neg\varphi)$. $\varphi \iff \psi$ es $(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$

Ejemplo 1.4.1
Se cumple que $\{\neg C, A \Rightarrow C, A \vee (B \Rightarrow C), \neg C \Rightarrow (C \Rightarrow E), B\} \vdash E$. Probemos que esto es cierto:

1)	$(A \Rightarrow C)$	$\Rightarrow$	$(\neg C \Rightarrow \neg A)$	Ax. 4
2)	A	$\Rightarrow$	C	Premisa
3)	$\neg C$	$\Rightarrow$	$\neg A$	Modus ponens
4)	$\neg C$			Premisa
5)	$\neg A$			3,4 Modus ponens
6)	$\neg A$	$\Rightarrow$	$(B \Rightarrow C)$	Premisa
7)	B	$\Rightarrow$	C	6,5 Modus ponens
8)	B			Premisa
9)	C			7,8 Modus ponens
10)	$\neg C$	$\Rightarrow$	$(C \Rightarrow E)$	Premisa
11)	C	$\Rightarrow$	E	10,4 Modus ponens
12)	E			11,9 Modus ponens
		$\therefore$	E	

Ejemplo 1.4.2
$\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$. En efecto:

1)	$\neg(\psi \Rightarrow \neg\varphi)$			Premisa
2)	$\neg\varphi$	$\Rightarrow$	$\psi \Rightarrow \neg\varphi$	Ax. 1
3)	$(\neg\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \neg\varphi))$	$\Rightarrow$	$(\neg(\psi \Rightarrow \neg\varphi) \Rightarrow \neg\neg\varphi)$	Ax. 4
4)	$\neg(\psi \Rightarrow \neg\varphi)$	$\Rightarrow$	$\neg\neg\varphi$	3,2 M.P.
5)	$\neg\neg\varphi$			4,1 M.P.
6)	$\neg\neg\varphi$	$\Rightarrow$	φ	Ax. 3
7)	φ			6,5 M.P.
		$\therefore$	φ	

esta demostración es llamada **simplificación**.

Hay varias demostraciones que son de utilidad. Como las siguientes:

Ejercicio 1.4.1
Pruebe lo siguiente:

1. $\{\varphi \Rightarrow \psi, \neg\psi\} \vdash \neg\varphi$ (llamada **Modus Tollens**).
2. $\{\varphi\} \vdash \varphi \vee \psi$ (llamada **Adición**).
3. $\{\varphi \vee \psi, \neg\varphi\} \vdash \psi$ (llamada **Silogismo Disyuntivo**).
4. $\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$ (llamada **Conjunción**).
5. $\{\varphi \Rightarrow \psi\} \vdash \neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$. (llamada **Transposición**).

Demostración:
Probemos cada inciso.
De (1):

1)	$\varphi \Rightarrow \psi$			Premisa
2)	$(\varphi \Rightarrow \psi)$	$\Rightarrow$	$(\neg\psi \Rightarrow \neg\psi)$	Ax. 4
3)	$\neg\psi$	$\Rightarrow$	$\neg\psi$	2,1 M.P.
4)	$\neg\psi$			Premisa
5)	$\neg\varphi$			3,4 M.P.
		$\therefore$	$\neg\varphi$	

De (2):

$$\begin{array}{lllll} 1) & \varphi & & & \text{Premisa} \\ 2) & \varphi & \Rightarrow & (\neg\psi \Rightarrow \varphi) & \text{Ax. 1} \\ 3) & \neg\psi \Rightarrow \varphi & & & \text{2,1 M.P.} \\ 4) & \neg\psi \Rightarrow \varphi & \Rightarrow & \neg\varphi \Rightarrow \neg\neg\psi & \text{Ax.4.} \\ 5) & \neg\varphi \Rightarrow \neg\neg\psi & & & \text{4,3 M.P.} \\ 6) & \neg\varphi \Rightarrow \neg\neg\psi & \Rightarrow & \neg\varphi \Rightarrow \psi & \text{Ax. 3} \\ 7) & \neg\varphi \Rightarrow \psi & & & \text{6,5 M.P.} \\ 8) & \varphi \vee \psi & & & 7) \\ \hline & & \therefore & \varphi \vee \psi & \end{array}$$

De (3):

$$\begin{array}{lllll} 1) & \varphi \vee \psi & & & \text{Premisa} \\ 2) & \neg\varphi & \Rightarrow & \psi & 1) \\ 3) & \neg\varphi & & & \text{Premisa} \\ 4) & \psi & & & \text{2,3 M.P.} \\ \hline & & \therefore & \psi & \end{array}$$

De (4):

$$\begin{array}{lllll} 1) & \varphi & & & \text{Premisa} \\ 2) & \psi & & & \text{Premisa} \\ 3) & \psi & \Rightarrow & ((\psi \Rightarrow \neg\varphi) \Rightarrow \neg\psi) & \text{Ax. 2} \\ 4) & (\psi \Rightarrow \neg\varphi) & \Rightarrow & \neg\psi & \text{1,3 M.P.} \\ 5) & \psi & \Rightarrow & \neg\neg\psi & \text{Ax. 3} \\ 6) & \neg\neg\psi & & & \text{2,5 M.P.} \\ 7) & \neg(\psi & \Rightarrow & \neg\varphi) & \text{4,6 M.T.} \\ 8) & \varphi & \wedge & \psi & 7) \\ \hline & & \therefore & \varphi \wedge \psi & \end{array}$$

■

Ejercicio 1.4.2
Demuestre que existe una demostración de lo siguiente:

1. $\{F \vee (G \vee H), (G \vee H) \Rightarrow (I \vee J), (I \vee J) \Rightarrow (F \vee H), \neg F\} \vdash H$.
2. $\{Q \Rightarrow (R \Rightarrow S), (R \Rightarrow S) \Rightarrow T, (S \vee U) \Rightarrow \neg V, \neg V \Rightarrow (R \iff \neg W), \neg T, \neg(R \iff \neg W)\} \vdash \neg Q \wedge \neg(S \vee U)$.
3. $\{A \Rightarrow B, C \Rightarrow D, \neg B \vee \neg D, \neg\neg A, (E \wedge F) \Rightarrow C\} \vdash \neg(E \wedge F)$.
4. $\{E \Rightarrow (F \wedge \neg G), (F \vee G) \Rightarrow H, E\} \vdash H$.
5. $\{J \Rightarrow K, J \vee (L \vee \neg L), \neg K\} \vdash \neg L \wedge \neg K$.
6. $\{(R \Rightarrow \neg S) \wedge (T \Rightarrow \neg U), (V \Rightarrow \neg W) \wedge (X \Rightarrow \neg Y), (T \Rightarrow W) \wedge (U \Rightarrow S), V, R\} \vdash \neg T \wedge \neg U$.

Demostración:
De (1):

1)	F	$\vee$	$(G \vee H)$	Premisa
2)	G	$\vee$	H	Premisa
3)	$(G \vee H)$	$\Rightarrow$	$(I \vee J)$	Premisa
4)	$(I \vee J)$	$\Rightarrow$	$(F \vee H)$	Premisa
5)	F	$\vee$	H	Premisa
6)	$\neg F$			Premisa
7)	G	$\vee$	H	1,6 S.D.
8)	I	$\vee$	J	3,7 M.P.
9)	F	$\vee$	H	4,8 M.P.
10)	H			9,6 S.D.
		$\therefore$	H	

De (2):

1)	Q	$\Rightarrow$	$(R \Rightarrow S)$	Premisa
2)	$(R \Rightarrow S)$	$\Rightarrow$	T	Premisa
3)	$(S \vee U)$	$\Rightarrow$	$\neg V$	Premisa
4)	$\neg V$	$\Rightarrow$	$(R \iff \neg W)$	Premisa
5)	$\neg T$			Premisa
6)	$\neg(R$	$\iff$	$\neg W)$	Premisa
7)	$\neg\neg V$			4,6 M.T.
8)	$\neg\neg V$	$\Rightarrow$	V	Ax. 3.
9)	V			8,7 M.P.
10)	$\neg(S \vee U)$			3,9 M.T.
11)	$\neg(R \Rightarrow S)$			2,5 M.T.
12)	$\neg Q$			1,11 M.T.
13)	$\neg Q$	$\wedge$	$\neg(S \vee U)$	12,10 Conj.
		$\therefore$	$\neg Q \wedge \neg(S \vee U)$	

De (3):

1)	A	$\Rightarrow$	B	Premisa
2)	C	$\Rightarrow$	D	Premisa
3)	$\neg B$	$\vee$	$\neg D$	Premisa
4)	$\neg\neg A$			Premisa
5)	$(E \wedge F)$	$\Rightarrow$	C	Premisa
6)	$\neg\neg A$	$\Rightarrow$	A	Ax. 3
7)	A			6,4 M.P.
8)	B			1,7 M.P.
9)	B	$\Rightarrow$	$\neg\neg B$	Ax. 3
10)	$\neg\neg B$			8,9 M.P.
11)	$\neg D$			3,9 S.D.
12)	$\neg C$			2,11 M.T.
13)	$\neg(E \wedge F)$			5,12 M.T.
		$\therefore$	$\neg(E \vee F)$	

De (4):

1)	E	$\Rightarrow$	$(F \wedge \neg G)$	Premisa
2)	$(F \vee G)$	$\Rightarrow$	H	Premisa
3)	E			Premisa
4)	$F \neg G$			1,3 M.P.
5)	F			4 Simp.
6)	$F \vee G$			5 Ad.
7)	H			2,6 M.P.
		$\therefore$	H	

De (5):

1)	J	$\Rightarrow$	K	Premisa
2)	J	$\vee$	$(K \vee \neg L)$	Premisa
3)	$\neg K$			Premisa
4)	$\neg J$			1,3 M.T.
5)	K	$\vee$	$\neg L$	2,4 S.D.
6)	$\neg L$			5,3 S.D.
7)	$\neg L$	$\wedge$	$\neg K$	3,6 Conj.
		$\therefore$	$\neg L \wedge \neg K$	

De (6):

1)	$(R \Rightarrow \neg S)$	$\wedge$	$(T \Rightarrow \neg U)$	Premisa
2)	$(V \Rightarrow \neg W)$	$\wedge$	$(X \Rightarrow \neg Y)$	Premisa
3)	$(T \Rightarrow W)$	$\wedge$	$(U \Rightarrow S)$	Premisa
4)	V			Premisa
5)	R			Premisa
6)	R	$\Rightarrow$	$\neg S$	1 Simp.
7)	$\neg S$			6,5 M.P.
8)	V	$\Rightarrow$	$\neg W$	2 Simp.
9)	$\neg W$			8,4 M.P.
10)	T	$\Rightarrow$	W	3 Simp.
11)	$\neg W$	$\Rightarrow$	$\neg T$	10 Transp.
12)	$\neg T$			11,9 M.P.
13)	U	$\Rightarrow$	S	3 Simp.
14)	$\neg S$	$\Rightarrow$	$\neg U$	13 Transp.
15)	$\neg U$			14,7 M.P.
15)	$\neg T$	$\wedge$	$\neg U$	12,15 Conj.
		$\therefore$	$\neg T \wedge \neg U$	

■

Observación 1.4.2 (**Conmutatividad del** $\wedge$ **y** $\vee$)
Es fácil de probar (teniendo en mente la definción) que:

1. $\varphi \Rightarrow \varphi[\xi \wedge \psi \leftrightsquigarrow \psi \wedge \xi]$.

2. $\varphi \Rightarrow \varphi[\xi \vee \psi \leftrightsquigarrow \psi \vee \xi]$.

Demostración:

■

Proposición 1.4.1 (Leyes de Morgan)
Se cumplen las siguiente (denominadas Leyes de Morgan):

1. $\neg(\xi \vee \psi) \iff \neg\xi \wedge \neg\psi$.

2. $\neg(\xi \wedge \psi) \iff \neg\xi \vee \neg\psi$.

Demostración:

■

Lema 1.4.1
$\emptyset \vdash \varphi \Rightarrow \varphi$. Es decir, que sin premisas es válido que $\varphi \Rightarrow \varphi$.

Demostración:
Veamos que:

$$\begin{array}{llcll}
1) & \varphi & \Rightarrow & ((\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi) & \text{Ax. 1} \\
1) & (\varphi \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi)) & \Rightarrow & ((\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi))) & \text{Ax. 6} \\
1) & (\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)) & \Rightarrow & (\varphi \Rightarrow \varphi) & \text{Ax. 6} \\
4) & \varphi & \Rightarrow & (\psi \Rightarrow \varphi) & \text{Ax. 1} \\
4) & \varphi & \Rightarrow & \varphi & \text{4,3 M.P.} \\
\hline
 & & \therefore & \varphi \Rightarrow \varphi &
\end{array}$$

Lo cual termina la prueba

■

Teorema 1.4.1 (Metateorema de Deducción)
Sea Σ un conjunto de fórmulas y φ, ψ dos fórmulas. Entonces, $\Sigma \vdash (\varphi \Rightarrow \psi)$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.

Demostración:
Probaremos las dos implicaciones:

$\Rightarrow$): Suponga que $\Sigma \vdash (\varphi \Rightarrow \psi)$, entonces en $\Sigma \cup \{\varphi\}$ como $\Sigma \vdash (\varphi \Rightarrow \psi)$ entonces por M.P. al tener que $\{\varphi \Rightarrow \psi, \varphi\} \vdash \psi$, se sigue que $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.

$\Leftarrow$): Supongamos que $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$. La prueba se hará por inducción sobre la longitud de la demostración de ψ a partir de $\Sigma \cup \{\varphi\}$.

Sean $(\varphi_1, ..., \varphi_n, \psi)$ la demostración, Entonces, la hipótesis inductiva es que: $\Sigma \vdash \varphi \Rightarrow \varphi_k$ para $k \in \{1, ..., n\}$.

Hay 4 casos para ψ:

1. $\psi \in \Sigma$. Se tiene que:

$$\begin{array}{llcll}
1) & \psi & & & \text{Premisa} \\
2) & \psi & \Rightarrow & \varphi \Rightarrow \psi & \text{Ax. 1} \\
3) & \varphi & \Rightarrow & \psi & \text{2,1 M.P} \\
\hline
 & & \therefore & \varphi \Rightarrow \psi &
\end{array}$$

2. $\psi = \varphi$) En este caso lo que se quiere probar es que $\Sigma \vdash (\varphi \Rightarrow \varphi)$. Para lo cual se usa el lema anterior se tiene el resultado de forma inmediata (tomando el conjunto vacío).

3. ψ es axioma lógico. Es inmediato pues si es un axioma lógico, siempre se tiene que $\emptyset \vdash \varphi \Rightarrow \psi$. Luego, $\Sigma \vdash \varphi \Rightarrow \psi$.

4. Algún φ_i es $\varphi_k \Rightarrow \psi$. Como por inducción se tiene que $\varphi \Rightarrow \varphi_k$, en particular para i se tiene que:

$$\begin{array}{llcll}
1) & ... & ... & ... & \text{Premisa} \\
2) & \varphi & \Rightarrow & \varphi_k & \text{Ax. 1} \\
3) & \varphi & \Rightarrow & (\varphi_k \Rightarrow \psi) & \text{2,1 M.P} \\
3) & (\varphi \Rightarrow (\varphi_k \Rightarrow \psi)) & \Rightarrow & ((\varphi \Rightarrow \varphi_k) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)) & \text{Ax. 6} \\
3) & (\varphi \Rightarrow \varphi_k) & \Rightarrow & (\varphi \Rightarrow \psi) & \text{3,2 M.P.} \\
3) & \varphi & \Rightarrow & \psi & \text{4,1 M.P.} \\
\hline
 & & \therefore & \varphi \Rightarrow \psi &
\end{array}$$

Lo cual termina la demostración por inducción. Esto se abrevia con **P.C.** ■

Ejemplo 1.4.3
Considere:

1)	M	$\Rightarrow$	N	Premisa
2)	N	$\Rightarrow$	O	Premisa
3)	$(M \Rightarrow O)$	$\Rightarrow$	$(N \Rightarrow P)$	Premisa
4)	$(M \Rightarrow P)$	$\Rightarrow$	Q	Premisa
5)	M			Suposición
6)	N			1,5 M.P.
7)	O			2,6 M.P.
8)	M	$\Rightarrow$	O	5-7 P.C.
9)	N	$\Rightarrow$	P	3,8 M.P.
10)	M			Suposición.
11)	N			1,10 M.P.
12)	P			9,11 M.P.
13)	M	$\Rightarrow$	P	10-12 P.C.
		$\therefore$	$M \Rightarrow P$	

Ejercicio 1.4.3
Complete la demostración:

1)	V	$\Rightarrow$	W	Premisa
2)	X	$\Rightarrow$	Y	Premisa
3)	Z	$\Rightarrow$	W	Premisa
4)	X	$\Rightarrow$	A	Premisa
5)	W	$\Rightarrow$	X	Premisa
6)	$(V \Rightarrow Y) \wedge (Z \Rightarrow A)$	$\Rightarrow$	$(V \vee Z)$	Premisa
7)	V			Suposición
8)	W			1,7 M.P.
9)	X			5,8 M.P.
10)	Y			2,9 M.P.
11)	V	$\Rightarrow$	Y	7-10 P.C.
12)	Z			Suposición
13)	W			3,12 M.P.
14)	X			5,13 M.P.
15)	A			4,14 M.P.
16)	Z	$\Rightarrow$	A	12-15 P.C.
17)	$(V \Rightarrow Y)$	$\wedge$	$(Z \Rightarrow A)$	11,16 Conj.
		$\therefore$	$Y \vee A$	

Ejercicio 1.4.4
Complete las demostraciones:

1.

1)	P	$\Rightarrow$	Q	Premisa
2)	Q	$\Rightarrow$	R	Premisa
3)	P			Suposición
4)	Q			1,3 M.P.
5)	R			2,4 M.P.
6)	P	$\Rightarrow$	R	3-5 P.C.
		$\therefore$	$P \Rightarrow R$	

2.

1)	Q			Premisa
2)	Q	$\Rightarrow$	$(P \Rightarrow Q)$	Ax. 2
3)	P	$\Rightarrow$	Q	2,1 M.P.
		$\therefore$	$P \Rightarrow Q$	

3.

1)	P	$\Rightarrow$	$(Q \Rightarrow R)$	Premisa
2)	P			Suposición
3)	Q	$\Rightarrow$	R	1,2 M.P.
4)	Q			Suposición
5)	R			3,4 M.P.
6)	P	$\Rightarrow$	R	2-5 P.C.
7)	Q	$\Rightarrow$	$(P \Rightarrow R)$	6 Eje. 2
		$\therefore$	$Q \Rightarrow (P \Rightarrow R)$	

4.

1)	P	$\Rightarrow$	$(Q \wedge R)$	Premisa
2)	P			Suposición
3)	$Q \wedge R$			1,2 M.P.
4)	Q			3 Simp.
5)	P	$\Rightarrow$	Q	1-4 P.C.
		$\therefore$	$P \Rightarrow Q$	

5.

1)	$(P \Rightarrow Q)$	$\wedge$	$(C \Rightarrow D)$	Premisa
2)	$(Q \vee D)$	$\Rightarrow$	$((E \Rightarrow (E \vee F)) \Rightarrow (P \wedge C))$	Premisa
3)	P	$\Rightarrow$	Q	1 Simp.
4)	C	$\Rightarrow$	D	1 Simp.
5)	E			Suposición.
6)	E	$\vee$	F	5 Ad.
7)	E	$\Rightarrow$	$(E \vee F)$	5-6 P.C.
8)	P			Suposición.
9)	Q			3,5 M.P.
10)	$Q \vee D$			6 Ad.
11)	$(E \Rightarrow (E \vee F))$	$\Rightarrow$	$(P \wedge C)$	7,2 M.P.
		$\therefore$	$P \iff R$	

Ejemplo 1.4.4
Este es un esquema general en el que se hacen las pruebas por contradicción:

1)	P	$\vee$	$(Q \wedge R)$	Premisa
2)	P	$\Rightarrow$	R	Premisa
3)	$\neg R$			Suposición.
4)	$\neg P$			2,3 M.T.
5)	Q	$\wedge$	R	4,1 S.D.
6)	R			5 Simp.
7)	R	$\wedge$	$\neg R$	6,3 Ad.
8)	R			3-7 P.I.
		$\therefore$	R	

Ejercicio 1.4.5
Complete las siguientes demostraciones:

1.

1)	$(P \vee Q)$	$\Rightarrow$	$(R \Rightarrow D)$	Premisa
2)	$(\neg D \vee E)$	$\Rightarrow$	$(P \wedge R)$	Premisa
3)	$\neg D$			Suposición
4)	$\neg D$	$\vee$	E	3 Ad.
5)	P	$\wedge$	R	2,4 M.P.
6)	P			5 Simp.
7)	P	$\vee$	Q	6 Ad.
8)	R	$\Rightarrow$	D	1,7 M.P.
9)	R			5 Simp.
10)	D			8,9 M.P.
11)	D	$\wedge$	$\neg D$	10, 3 Conj.
12)	$\neg\neg D$			3-11 P.I.
13)	D			12 Ax. 3
		$\therefore$	D	

2.

1)	$(P \vee Q)$	$\Rightarrow$	$(R \wedge D)$	Premisa
2)	$(R \vee F)$	$\Rightarrow$	$(\neg F \wedge G)$	Premisa
3)	$(F \vee H)$	$\Rightarrow$	$(P \wedge I)$	Premisa
4)	F			Suposición
5)	F	$\vee$	H	4. Ad.
6)	P	$\wedge$	I	3,5 M.P.
7)	P			6 Simp.
8)	P	$\vee$	Q	7 Ad.
9)	R	$\wedge$	D	7 Ad.
10)	R			9 Simp.
11)	R	$\vee$	F	10 Ad.
12)	$\neg F$	$\wedge$	G	2,11 M.P.
13)	$\neg F$			12 Simp.
14)	F	$\wedge$	$\neg F$	4,13 Conj.
15)	$\neg F$			4-14 P.I.
		$\therefore$	$\neg F$	

Definición 1.4.3

Teorema 1.4.2 (Teorema de Completud)
Cualquier conjunto de fórmulas Γ que sea consistente, es satisfacible.

Demostración:

■

Corolario 1.4.1
Si Γ es un conjunto de fórmulas, entonces $\Gamma \vDash \varphi$ implica $\Gamma \vdash \varphi$.

Demostración:
Ya construimo sun conjunto Γ_∞ con $\Gamma \subseteq \Gamma_\infty$ tal que:

1. Γ_∞ es consistente.
2. Para toda fórmula φ, o bien $\varphi \in \Gamma_\infty$ ó $\neg\varphi \in \Gamma_\infty$.
3. $\varphi \in \Gamma_\infty$ si y sólo si $\Gamma_\infty \vdash \varphi$, y $\varphi \notin \Gamma_\infty$ si y sólo si $\neg\varphi \in \Gamma_\infty$, si y sólo si $\Gamma_\infty \nvdash \varphi$ si y sólo si $\Gamma_\infty \vdash \neg\varphi$.

Definimos $M : \text{Var} \to \{V, F\}$ de tal forma que $m(p_k) = V$ si y sólo si $p_k \in \Gamma_\infty$ (de forma análoga, $m(p_k) = F$ si y sólo si $p_k \notin \Gamma_\infty$).
Afirmamos que para toda fórmula φ, se tiene que $\overline{m}(\varphi) = V$ si y sólo s i$\varphi \in \Gamma_\infty$. Procederemos por inducción sobre φ.

1. Si φ es atómica, entonces se cumple por definición.
2. Paso inductivo: supongamos que se cumple para φ y ψ. Entonces,

$$\begin{aligned} \overline{m}(\neg\varphi) = V &\iff \overline{m}(\varphi) = F \\ &\iff \neg\varphi \in \Gamma \end{aligned}$$

   además,

$$\begin{aligned} \overline{m}(\varphi \Rightarrow \psi) = F &\iff \overline{m}(\varphi) = V \text{ y } \overline{m}(\psi) = F \\ &\iff \varphi \in \Gamma_\infty \text{ y } \neg\psi \in \Gamma_\infty \\ &\iff \varphi \Rightarrow \psi \notin \Gamma_\infty \end{aligned}$$

   probaremos una doble implicación.

   $\Rightarrow$): Suponga que $\varphi, \neg\psi \in \Gamma_\infty$. Si $\varphi \Rightarrow \psi \in \Gamma_\infty$, entonces $\varphi \Rightarrow \psi \notin \Gamma_\infty$.

   $\Leftarrow$): Suponga que $\varphi \Rightarrow \psi \notin \Gamma_\infty$, entonces $\neg(\varphi \Rightarrow \psi) \in \Gamma_\infty$, por lo cual $\neg(\varphi \Rightarrow \neg\neg\psi) \in \Gamma_\infty$, es decir que $\varphi \wedge \neg\psi \in \Gamma_\infty$, luego $\Gamma_\infty \vdash \varphi$ y $\Gamma_\infty \vdash \neg\psi$.

por tanto, usando inducción se cumple que $m \vDash \Gamma_\infty$, en particular $m \vDash \Gamma$. ■

Capítulo 2

Lógica de primer orden

2.1. Fundamentos

Definición 2.1.1
Un **lenguaje de primer orden** cuenta con un alfabeto que consta de lo siguiente:

1. *Variables* (denotadas por Var), denotadas por $v_1, v_2, ...$ (a lo sumo una cantidad numerable).
2. *Conectivas lógicas* $\neg, \Rightarrow$.
3. *Símbolo de igualdad* $=$.
4. *Cuantificador* $\forall$, denominado **para todo**.
5. *Símbolos de predicado* (o *Símbolo de relación*), $P_1, P_2, ...$
6. *Símbolos de función*, $f_1, F_2, ...$
7. *Símbolos de constante* $c_1, c_2, ...$

los primeros cuatro son llamados **símbolos lógicos**,y los últimos tres son llamados **símbolos no lógicos**. Puede que un lenguaje de primer orden no conste con alguno de los elementos de 5. a 7. o que conste de una cantidad finita. Cada uno de los 5. a 7. tiene asociada una **aridad** (que es un número entero).

Para que la idea quede más afianzada, se verán algunos ejemplos.

Ejemplo 2.1.1
El lenguaje de la Teoría de Grupos consta de $\{*, (\cdot)^{-1}, e\}$ donde $*$ es una función binaria, $(\cdot)^{-1}$ es una función unaria y e es una constante.

Ejemplo 2.1.2
El lenguaje de la Teoría de Anillos consta de $\{\cdot, +, 0, 1\}$ donde $\cdot$ y $+$ son función binaria, y $0, 1$ son constantes.

Ejemplo 2.1.3
El lenguaje de la Aritmética consta de $\{+, \cdot, s, <, 1\}$, donde $+, \cdot$ son funciones binarias, s es una función unaria, $<$ es una relación binaria y 1 es una constante.

Ejemplo 2.1.4
El lenguaje de la Teoría de Conjuntos, consta de $\{\in\}$, la cual es una relación binaria.

Definición 2.1.2
Definimos lo siguiente:

1. **Términos** son:

   1.I) v_i y c_i son términos.

   1.II) Si F_i es un símbolo de función n-aria, y $t_1, ..., t_n$ son términos, entonces $F_i t_1 \cdots t_n$ es un término (en notación polaca),

2. **Fórmulas** son:

   2.I) Si t_1, t_2 son términos, entonces $= t_1 t_2$ es una fórmula.

   2.II) Si R_i es un símbolo de relación de aridad n y tengo n-términos, entonces $R_1 t_1 \cdots t_n$ es una fórmula.

   2.III) Si φ, ψ son fórmulas y v_i es una variable, entonces $\neg\varphi$, $\Rightarrow \varphi\psi$ y $\forall v_i \varphi$ son fórmulas.

Ejemplo 2.1.5
La asociatividad se puede escribir como la siguiente fórmula:

$$\forall x \forall y \forall z = * * xyz * x * yz$$

que básicamente es decir que:

$$\forall x, y, z, (x * y) * z = x * (y * z)$$

en un grupo cualquiera.

2.2. Axiomas Lógicos

Cualquier generalización de

1. Los de Lógica proposicional.
2. $(\forall x)(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\forall x\varphi \Rightarrow \forall x\psi)$.
3. $\varphi \Rightarrow \forall x\varphi$ si x no es libre en φ.
4. $x = x$.
5. $x = y \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi\,[y/x])$ si φ es atómica, esta sustitución es para algunas x.
6. $\forall x\varphi \Rightarrow \varphi\,[t/x]$ si t es sustitubile por x.

Reglas de inferencia: M.P.

Teorema 2.2.1 (**Metateorema**)
Se tiene lo siguiente:

1. **Instanciación universal**. Si $\Sigma \vdash (\forall x)\varphi$ entonces, $\Sigma \vdash \varphi[t/x]$ siempre que t sea sustituible por x en φ.

2. **Generalización existencial**. Si $\Sigma \vdash \varphi[t/x]$ entonces, $\Sigma \vdash (\exists x)\,\varphi$ siempre que t sea sustituible por x en φ.

Demostración:

De (1): Como $\Sigma \vdash (\forall x)\varphi$, entonces existe una demostración que prueba $(\forall x)\varphi$. Por el axioma (5), se tiene que al ser t sustituible: $\forall x\varphi \Rightarrow \varphi\,[t/x]$, luego existe una demostración que prueba a $\varphi\,[t/x]$, añadiendo esta línea al teorema anterior, se sigue que $\Sigma \vdash \varphi\,[t/x]$.

De (2): Como $\Sigma \vdash \varphi[t/x]$, entonces existe una demostración que prueba $\Sigma \vdash \varphi[t/x]$. Procederemos por contradicción. Suponga que $\neg(\exists x)\varphi$, es decir $\neg(\exists x)\neg\neg\varphi$, luego $(\forall x)\neg\varphi$. Por (1), se sigue que $\neg\varphi[t/x]$, lo que es una contradicción del renglón de arriba.

Luego, $(\exists x)\varphi$. ∎

Ejercicio 2.2.1

Demuestre que existe una demostración formal de válidez para lo siguiente:

1. $(\forall x)(Px \Rightarrow Qx)/ \therefore Pc \Rightarrow ((\forall y)(Qy \Rightarrow Sy) \Rightarrow Sc)$.
2. $(\forall x)(Px \Rightarrow (\forall y)(Qy \Rightarrow Sy))/ \therefore (\forall x)Px \Rightarrow (\forall y)(Qy \Rightarrow Sy)$.
3. $(\exists x)Px \Rightarrow (\exists y)Qy/ \therefore (\exists x)(Px \Rightarrow (\exists y)Qy)$.

Demostración:

De (1):

No.			
1)	$(\forall x)(Px \Rightarrow Qx)$		Premisa
2)	Pc		Hipótesis
3)	$(\forall y)(Qy \Rightarrow Sy)$		Hipótesis
4)	$Pc \Rightarrow Qc$		1 I.U.
5)	$Qc \Rightarrow Sc$		3 I.U.
6)	$Qc \Rightarrow Sc$		4,5, S.H.
7)	Sc		6,2 M.P.
8)	$(\forall y)(Qy \Rightarrow Sy)$	$\Rightarrow Sc$	3-7 P.C.
9)	$Pc \Rightarrow$	$((\forall y)(Qy \Rightarrow Sy) \Rightarrow Sc)$	2-8 P.C.
		$\therefore Pc \Rightarrow ((\forall y)(Qy \Rightarrow Sy) \Rightarrow Sc)$	

De (2):

No.			
1)	$(\forall x)(Px \Rightarrow (\forall y)(Qy \Rightarrow Sy))$		Premisa
2)	$(\forall x)Px$		Hipótesis
3)	$(\forall x)(Px \Rightarrow (\forall y)(Qy \Rightarrow Sy))$	$\Rightarrow ((\forall x)Px \Rightarrow (\forall x)((\forall y)(Qy \Rightarrow Sy)))$	1 Ax. 1
4)	$(\forall x)Px \Rightarrow (\forall x)((\forall y)(Qy \Rightarrow Sy))$		1,3 M.P.
5)	$(\forall x)((\forall y)(Qy \Rightarrow Sy))$		2,4 M.P.
6)	$(\forall y)(Qy \Rightarrow Sy)$		5 I.U.
7)	$(\forall x)Px$	$\Rightarrow ((\forall y)(Qy \Rightarrow Sy))$	2-6 P.C.
		$\therefore (\forall x)Px \Rightarrow ((\forall y)(Qy \Rightarrow Sy))$	

De (3):

No.		
1)	$(\exists x)Px \Rightarrow (\exists y)Qy$	Premisa
2)	$\neg(\exists x)(Px \Rightarrow (\exists y)Qy)$	Negación
3)	$\neg(\exists x)(\neg\neg(Px \Rightarrow (\exists y)Qy))$	2 Ax.
4)	$(\forall x)(\neg(Px \Rightarrow (\exists y)Qy))$	Equiv.
5)	$(\forall x)(\neg(\exists y)Qy \Rightarrow \neg Px)$	Equiv.
6)	$(\forall x)((\forall y)\neg Qy \Rightarrow \neg Px)$	Equiv.
7)	$(\forall x)(\forall y)\neg Qy \Rightarrow (\forall x)\neg Px$	Equiv.
8)	$(\forall y)\neg Qy \qquad\qquad \Rightarrow (\forall x)(\forall y)\neg Qy$	Ax.2
9)	$(\forall y)\neg Qy \Rightarrow (\forall x)\neg Px$	7,8 I.U.
10)	$\neg((\exists y)Qy) \Rightarrow \neg((\exists x)Px)$	Equiv
11)	$(\exists x)(Px \Rightarrow (\exists y)Qy)$	2-10 Contradicción
	$\therefore (\exists x)(Px \Rightarrow (\exists y)Qy)$	

Alternativa (y correcta):

No.		
1)	$(\exists x)Px \Rightarrow (\exists y)Qy$	Premisa
2)	Px	Hipótesis
3)	$(\exists x)Px$	2 G.E.
4)	$(\exists y)Qy$	3,1 M.P.
5)	$(Px \Rightarrow (\exists y)Qy)$	2-4 P.C.
6)	$(\exists x)(Px \Rightarrow (\exists y)Qy)$	5 G.E.
	$\therefore (\exists x)(Px \Rightarrow (\exists y)Qy)$	

■

Observación 2.2.1
S.H. siginifca silogismo hipotético. El I.U (Instanciación universal) y G.E (generalización existencial) son: $(\forall x)\varphi \Rightarrow \varphi[t/x]$ y $\varphi[t/x] \Rightarrow (\exists x)\varphi$.

Faltan dos reglas por demostrar. Consdiere Σ un conjunto de fórmulas.

1. **Generalización universal** (G.U.) Si x no aparece libre en ninguna fórmula de Σ, se tiene que $\varphi \Rightarrow \forall x\varphi$.

2. **Instanciación existencial** (I.E.) Se expresa en tabla como sigue:

No.		
1)	$\exists x\varphi$	
2)	$\varphi[w/x]$	
$\vdots$	$\vdots$	
n)	ψ	w no es libre en ninguna fórmula de Γ ni en $\exists x\varphi$ y ψ
n+1)	ψ	
	$\therefore \psi$	

Lema 2.2.1 (Lema al metateoreama)
Si Γ es un conjunto de fórmulas tal que $\Gamma \vdash (\forall y)\varphi$ y ζ no aparece libre en Γ y es sustituible en φ, entonces $\Gamma \vdash (\forall\zeta)\varphi[\zeta/x]$.

Demostración:

No.		
$\vdots$	$\vdots$	Premisas de Γ
$k)$	$(\forall x)\varphi$	
$k+1)$	$\varphi[\zeta/x]$	I.U.
$k+2)$	$(\forall\zeta)\varphi[\zeta/x]$	G.U.

$\therefore (\forall\zeta)\varphi[\zeta/x]$

■

Teorema 2.2.2 (Metateorema)
Se tiene lo siguiente:

1. Si Γ es un conjunto de fórmulas, x es una variable que no aparece libre en Γ y $\Gamma \vdash \varphi$, entonces $\Gamma \vdash (\forall x)\varphi$.
2. Si $\Gamma \cup \{\varphi[w/x]\} \vdash \psi$ entonces, $\Gamma \cup \{(\exists x)\varphi\} \vdash \psi$ siempre y cuando w no aparezca libre en Γ ni en ψ.

Demostración:
De (1): Mostraremos que el conjunto

$$\left\{\varphi \middle| \Gamma \vdash (\forall x)\varphi\right\}$$

incluye a Γ, todos los axiomas lógicos y, además, es cerrado bajo M.P.

- **Axiomas Lógicos**: Por definición si φ es axioma lógico entonces $(\forall x)\varphi$ también lo es.
- **Elementos de** Γ. Entonces,

No.		
1)	φ	Premisa
2)	$\varphi \Rightarrow (\forall x)\varphi$	Ax.2
3)	$(\forall x)\varphi$	1,2 M.P.

$\therefore (\forall x)\varphi$

- **Cerrado bajo M.P.** Supongamos que

$$\Gamma \vdash (\forall x)\varphi \quad \Gamma \vdash (\forall x)(\varphi \Rightarrow \psi)$$

Es decir:

No.			
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$k)$	$(\forall x)\varphi$		
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$n)$	$(\forall x)(\varphi \Rightarrow \psi)$		
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$n+1)$	$(\forall x)(\varphi \Rightarrow \psi)$	$\Rightarrow ((\forall x)\varphi \Rightarrow (\forall x)\psi)$	Ax.1
$n+2)$	$(\forall x)\varphi \Rightarrow (\forall x)\psi$		M.P.
$n+3)$	$(\forall x)\psi$		M.P.

$\therefore (\forall x)\psi$

lo cual prueba la cerradura.

Luego, por todos los casos, se sigue que $\Gamma \vdash (\forall x)\varphi$.

De (2): Procederemos por contradicción.

No.		
$\vdots$	$\vdots$	Premisas de Γ
$k)$	$(\exists x)\varphi$	
$k+1)$	$\neg\psi$	Suposición
$\vdots$	$\vdots$	Lineas para probar lo de abajo
$n)$	$\varphi[w/x] \Rightarrow \psi$	Prueba condicional
$n+1)$	$\neg\varphi[w/x]$	M.T.
$n+2)$	$(\forall w)\neg\varphi[w/x]$	G.U.
$n+3)$	$(\exists w)\varphi[w/x]$	Por k y el lema anterior
$n+4)$	ψ	Contradicción $k+1)$-$n+3)$

$\therefore \psi$

■

Ejercicio 2.2.2
Muestre que existe una demostración en las siguientes fórmulas.

Demostración:

a):

No.			
1)	$(\forall x)(Px \Rightarrow Qx)$		Premisa
2)	Sx		Suposición
3)	$(\forall y)(Sy \Rightarrow Py)$		Suposición
4)	$Sx \Rightarrow Px$		
5)	Px		
6)	$Px \Rightarrow Qx$		
7)	Qx		
8)	$(\forall y)(Sy \Rightarrow Py)$	$\Rightarrow Qx$	P.C.
9)	$Sx \Rightarrow ((\forall y)(Sy \Rightarrow Py) \Rightarrow Qx)$		P.C.
10)	$(\forall x)(Sx \Rightarrow ((\forall y)(Sy \Rightarrow Py) \Rightarrow Qx))$		G.U.

$\therefore (\forall z)(Sz \Rightarrow ((\forall y)(Sy \Rightarrow Py) \Rightarrow Qx))$

b):

No.			
1)	$(\forall x)(Px \Rightarrow Qx)$		Premisa
2)	$(\forall x)(Sx \Rightarrow Tx)$		Premisa
3)	$(\forall x)(Qx \Rightarrow Sx)$		Suposición
4)	$Qy \Rightarrow Sy$		I.U
5)	$Py \Rightarrow Qy$		I.U.
6)	$Py \Rightarrow Sy$		
7)	$Sy \Rightarrow Ty$		I.U.
8)	$Py \Rightarrow Ty$		
9)	$(\forall y)(Py \Rightarrow Ty)$		G.U.
10)	$(\forall x)(Qx \Rightarrow Sx)$	$\Rightarrow (\forall y)(Py \Rightarrow Ty)$	3-10 P.C.

$\therefore (\forall x)(Qx \Rightarrow Sx) \Rightarrow (\forall y)(Py \Rightarrow Ty)$

c):

No.			
1)	$(\exists x)Px$	$\Rightarrow (\forall y)((Py \vee Qy) \Rightarrow Sy)$	Premisa
2)	$(\exists x)Px \wedge (\exists x)Sx$		Premisa
3)	$(\exists x)Px$		Simp.
4)	Pz		I.U.
5)	$(\forall y)((Py \vee Qy) \Rightarrow Sy)$		M.P.
6)	$(Pz \vee Qz) \Rightarrow Sz$		I.U.
7)	$(Pz \vee Qz)$		Ad.
8)	Sz		M.P.
9)	$Pz \wedge Sz$		Conj.
10)	$(\exists x)(Px \wedge Sx)$		G.E.
11)	$(\exists x)(Px \wedge Sx)$		5-10 I.E.
		$\therefore (\exists x)(Px \wedge Sx)$	

d):

No.			
1)	$(\exists x)Px$	$\Rightarrow (\forall y)(Qy \Rightarrow Sy)$	Premisa
2)	$(\exists x)(Px \wedge Qx)$		Sup
3)	$Pu \wedge Qu$		I.E.
4)	Pu		Simp
5)	$(\exists x)Px$		G.E.
6)	$(\forall y)(Qy \Rightarrow Sy)$		M.P.
7)	$Qu \Rightarrow Su$		M.P.
8)	Qu		M.P.
9)	Su		Simp.
10)	$Pu \wedge Su$		Ad.
11)	$(\exists y)(Py \wedge Sy)$		I.E.
12)	$(\exists x)(Px \wedge Qx)$	$\Rightarrow (\exists y)(Py \wedge Sy)$	P.C.
		$\therefore (\exists x)(Px \wedge Qx) \Rightarrow (\exists y)(Py \wedge Sy)$	

e):

No.			
1)	$(\forall x)(\exists y)(Px \vee Qy)$		Premisa
1)	$\neg(\forall x)Px$		Sup.
1)	$(\exists x)\neg Px$		
1)	$\neg Px$		
1)	$(\exists y)(Px \vee Qy)$		
1)	$Px \vee Qy$		
1)	Qy		
1)	$(\exists y)Qy$		I.E.
1)	$\neg(\forall x)Px$	$\Rightarrow (\exists y)Qy$	I.E.
1)	$(\forall x)Px \vee (\exists y)Qy$		P.C.
		$\therefore (\forall x)Px \vee (\exists y)Qy$	

f):

No.			
1)	$(\exists x)Px \vee (\forall y)(Py \Rightarrow Qy)$		Premisa
2)	$(\forall x)(Sx \Rightarrow \neg Px)$		Premisa
3)	$(\forall x)(Px \Rightarrow Sx)$		Sup.
4)	$Py \Rightarrow Sy$		I.U
5)	Py		Sup.
6)	Sy		
7)	$Sy \Rightarrow \neg Py$		
8)	$\neg Py$		
9)	$Py \wedge \neg Py$		
10)	$\neg Py$		P.I.
11)	$(\forall y)\neg Py$		I.U.
12)	$\neg(\exists x)Px$		11
13)	$(\forall y)(Py \Rightarrow Qy)$		
14)	$(\forall x)(Px \Rightarrow Sx)$	$\Rightarrow (\forall y)(Py \Rightarrow Qy)$	

$\therefore (\forall x)(Px \Rightarrow Sx) \Rightarrow (\forall y)(Py \Rightarrow Qy)$

g):

No.		
1)	$(\exists x)Px \vee (\exists y)Qy$	Premisa
1)	$(\forall x)(Px \Rightarrow Qx)$	Premisa
1)	$\neg(\exists y)Qy$	Sup.
1)	$(\exists x)Px$	
1)	Pu	
1)	$Pu \Rightarrow Qu$	
1)	Qu	
1)	$(\exists y)Qy$	
1)	$(\exists y)Qy \wedge \neg(\exists y)Qy$	
1)	$(\exists y)Qy$	P.I

$\therefore (\exists y)Qy$

h):

No.		
1)	$x = x$	Ax. 4
1)	$(\forall x)x = x$	G.U.

$(\forall x)(x = x)$

i):

No.			
1)	$x = y$		Sup.
1)	$(\forall x)(x = x)$		
1)	$x = x$		
1)	$x = x$	$\Rightarrow (y = x)$	Ax.
1)	$y = x$		M.P.
1)	$(x = y)$	$\Rightarrow (y = x)$	P.C.
1)	$(\forall y)(x = y) \Rightarrow (y = x)$		G.U.
1)	$(\forall x)(\forall y)(x = y) \Rightarrow (y = x)$		G.U.

$(\forall x)(\forall y)(x = y \Rightarrow y = x)$

j):

No.		
1)	$u = v$	Sup.
2)	$v = w$	Sup.
3)	$u = u$	Ax.
4)	$u = v$	Ax.
5)	$u = w$	Ax.
6)	$v = w \Rightarrow u = w$	P.C.
7)	$u = v \Rightarrow (v = w \Rightarrow u = w)$	P.C.
8)	$(\forall z)(u = v \Rightarrow (v = z \Rightarrow u = z))$	G.U.
9)	$(\forall y)(\forall z)(u = y \Rightarrow (y = z \Rightarrow u = z))$	G.U.
10)	$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x = y \Rightarrow (y = z \Rightarrow x = z))$	G.U.
	$\therefore (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x = y \Rightarrow (y = z \Rightarrow x = z))$	

k):

No.		
1)	$x = z$	Sup.
1)	$y = w$	Sup.
1)	$P(x, y)$	Sup.
1)	$P(z, y)$	Ax. 4
1)	$P(z, w)$	Ax. 4
1)	$P(x, y) \Rightarrow P(z, w)$	P.C.
1)	$y = w \Rightarrow (P(x, y) \Rightarrow P(z, w))$	P.C.
1)	$x = z \Rightarrow (y = w \Rightarrow (P(x, y) \Rightarrow P(z, w)))$	P.C.
1)	$(\forall w)(x = z \Rightarrow (y = w \Rightarrow (P(x, y) \Rightarrow P(z, w))))$	G.U.
1)	$(\forall z)(\forall w)(x = z \Rightarrow (y = w \Rightarrow (P(x, y) \Rightarrow P(z, w))))$	G.U.
1)	$(\forall y)(\forall z)(\forall w)(x = z \Rightarrow (y = w \Rightarrow (P(x, y) \Rightarrow P(z, w))))$	G.U.
1)	$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall w)(x = z \Rightarrow (y = w \Rightarrow (P(x, y) \Rightarrow P(z, w))))$	G.U.
	$\therefore (\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall w)(x = z \Rightarrow (y = w \Rightarrow (P(x, y) \Rightarrow P(z, w))))$	

l):

No.		
1)	$x = z$	Sup.
1)	$y = w$	Sup.
1)	$f(x, y) = f(x, y)$	Ax.4
1)	$f(x, y) = f(z, y)$	Ax.5
1)	$f(x, y) = f(z, w)$	Ax.5
1)	$y = w \Rightarrow (f(x, y) = f(z, w))$	P.C.
1)	$x = z \Rightarrow (y = w \Rightarrow (f(x, y) = f(z, w)))$	P.C.
1)	$(\forall w)(x = z \Rightarrow (y = w \Rightarrow (f(x, y) = f(z, w))))$	G.U.
1)	$(\forall z)(\forall w)(x = z \Rightarrow (y = w \Rightarrow (f(x, y) = f(z, w))))$	G.U.
1)	$(\forall y)(\forall z)(\forall w)(x = z \Rightarrow (y = w \Rightarrow (f(x, y) = f(z, w))))$	G.U.
1)	$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall w)(x = z \Rightarrow (y = w \Rightarrow (f(x, y) = f(z, w))))$	G.U.
	$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall w)(x = z \Rightarrow (y = w \Rightarrow (f(x, y) = f(z, w))))$	

m):

No.		
1)	$(\exists x)(\varphi(x) \vee \psi)$	Sup.
2)	$\varphi(x) \vee \psi$	I.E.
3)	$\psi \vee \varphi(x)$	
4)	$\neg\psi \Rightarrow \varphi(x)$	
5)	$\neg\psi$	Sup.
6)	$\varphi(x)$	Sup.
7)	$(\exists x)\varphi(x)$	I.E.
8)	$(\exists x)\varphi(x)$	
9)	$\neg\psi \Rightarrow (\exists x)\varphi(x)$	P.C.
10)	$\psi \vee ((\exists x)\varphi(x))$	
11)	$((\exists x)\varphi(x)) \vee \psi$	
12)	$(\exists x)(\varphi(x) \vee \psi) \Rightarrow (((\exists x)\varphi(x)) \vee \psi)$	P.C.
13)	$((\exists x)\varphi(x)) \vee \psi$	Sup.
14)	$\psi \vee ((\exists x)\varphi(x))$	
15)	$\neg\psi \Rightarrow ((\exists x)\varphi(x))$	
16)	$\neg\psi$	Sup.
17)	$((\exists x)\varphi(x))$	M.P.
18)	$\varphi(x)$	I.E.
19)	$\neg\psi \Rightarrow \varphi(x)$	P.C.
20)	$\psi \vee \varphi(x)$	
21)	$(\exists x)(\psi \vee \varphi(x))$	G.E.
22)	$(\exists x)(\psi \vee \varphi(x))$	
23)	$(((\exists x)\varphi(x)) \vee \psi) \Rightarrow (\exists x)(\psi \vee \varphi(x))$	P.C.
24)	$(\exists x)(\varphi(x) \vee \psi) \iff (((\exists x)\varphi(x)) \vee \psi)$	
	$(\exists x)(\varphi(x) \vee \psi) \iff (((\exists x)(\varphi(x))) \vee \psi)$	

Esta también se puede hacer por contradicción. ■