

Teorema de Krein-Milman

Joaquín Rodrigues Jacinto

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional de La Plata

Julio de 2010

Concurso de monografías para estudiantes
en homenaje al Dr. Eduardo Zarantonello

Reunión anual de la UMA - 2010

Agradecimientos

Gracias para las siguientes personas que me ayudaron mucho para la preparación de esta monografía: María Amelia y Demetrio por estar siempre dispuestos para mis insoportables consultas. Marianna que gracias a ella conseguí el artículo original de Krein y Milman. Carlos por dejar que le robe parte de su blog. Fidel por su traducción del Bourbaki. Y Ramiro por las sugerencias.

Índice

1. Introducción	3
1.1. Historia	3
1.2. Notaciones	4
1.3. Nociones topológicas	4
1.4. Herramientas del análisis funcional	5
2. Espacios localmente convexos	8
2.1. Conjuntos convexos y seminormas	9
2.2. Hahn-Banach geométrico	9
2.3. Banach-Alaoglu	11
3. Teorema de Krein-Milman	12
3.1. El teorema	12
3.2. Puntos extremales	16
3.3. Krein-Milman y el axioma de elección	17
4. Aplicaciones	18
4.1. Teorema de representación	18
4.2. Espacios duales y no duales	19
4.3. Teorema de Stone-Weierstrass	20
4.4. Funciones armónicas discretas	21

1. Introducción

1.1. Historia

El teorema de Krein-Milman apareció por primera vez como un artículo titulado “On extreme points of regular convex sets”, en el volumen 9 de la revista *Studia Mathematica*, en Varsovia-Breslavia en el año 1940. Su nombre se debe a Mark G. Krein (Kiev 1907 - Odessa 1989), prolífico matemático soviético; y su alumno de doctorado David P. Milman (1912 - 1982), soviético nacionalizado israelí.

En ese mismo volumen se pueden encontrar artículos de autores tales como P. Erdős, S. Banach, H. Steinhaus, W. Orlicz, entre otros.

La versión original del teorema, un tanto menos general que la conocida actualmente y cuya demostración es esencialmente igual a la del presente trabajo y a la expuesta en la mayoría de la literatura, es la siguiente:

Teorema 1.1. (*Krein-Milman*) Sea E un espacio de Banach y $K \subseteq E^*$ un conjunto acotado y regularmente convexo. Entonces el conjunto S de los puntos extremales de K es no vacío y su cápsula convexa regular coincide con K .

Donde E^* es el espacio de las funcionales lineales sobre E , un conjunto regularmente convexo se define como un $K \subseteq E^*$ tal que para toda $f_0 \in E^*$ que no esté en K , existe un $x_0 \in E$ tal que

$$\sup_{f \in K} f(x_0) < f_0(x_0),$$

y la cápsula regular convexa denota el menor convexo regular que contiene al conjunto.

Pese a que esta versión del teorema sea la que se aplique en muchos de los problemas, la versión clásica se deshace de la necesidad de trabajar en el dual, y se presenta de una forma más sencilla. Se enuncia a continuación.

Teorema 1.2. (*Krein-Milman*) Sea E un espacio localmente convexo, y $K \subseteq E$ un subconjunto compacto y convexo. Entonces K coincide con la clausura de la cápsula convexa de sus puntos extremales.

Para ver que esto último implica la versión original, hay que recurrir a un teorema famoso del análisis funcional, el teorema de Banach-Alaoglu, que dice que la bola unitaria del dual de un espacio normado es siempre ω^* -compacta.

El artículo concluye con un lema y unos ejemplos de cuándo un espacio no puede ser el dual de otro. Específicamente, si la esfera unitaria de un espacio infinito-dimensional E tiene un número finito de puntos extremales, entonces E no puede ser el espacio dual de ningún espacio de Banach.

Los espacios ambiente donde se formula el teorema de Krein-Milman, es decir, los espacios localmente convexos, comienzan a surgir por la necesidad de estudiar espacios importantes en el área del análisis cuya topología no podía ser definida a través de una norma, como por ejemplo la convergencia puntual, la convergencia en medida de funciones medibles, o la convergencia sobre compactos de funciones holomorfas. En 1926, Fréchet notó que los espacios vectoriales de esta naturaleza eran metrizable y completos.

Pero el desarrollo de esta teoría iba inevitablemente de la mano de la idea de convexidad, formulada por Helly y estudiada luego por Banach y sus discípulos, que interpretaron muchos de los enunciados de la teoría de los espacios normados desde un punto de vista más geométrico, preparando el camino para la definición general de los espacios localmente convexos, dada por Kolmogoroff y J. von Neumann en 1935. Sin embargo, la teoría de estos espacios fue desarrollada fundamentalmente en los años 1950, ayudada por el desarrollo de

las nociones de Topología y propulsada por las nuevas posibilidades de aplicación a ciertos problemas del Análisis, donde la teoría de espacios de Banach era inoperante, como los espacios de sucesiones y, sobre todo, la teoría de distribuciones de L. Schwartz.

1.2. Notaciones

Durante toda la monografía, se trabajará sobre el cuerpo de los complejos \mathbb{C} y sobre los reales \mathbb{R} . Si una proposición es válida para ambos, se escribirá en general \mathbb{K} .

Notaciones de la teoría de la medida serán usadas como por ejemplo si $\varphi : A \rightarrow B$ es una función, se nota $\{\varphi < 1\} = \{x \in A : \varphi(x) < 1\}$. Si (\mathcal{X}, μ) es un espacio de medida y $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, la notación estándar de integración

$$\int_A f(x) d\mu(x)$$

es la integral de f sobre el conjunto medible A con respecto a la medida μ .

Por último, se usarán constantemente operaciones sobre conjuntos, que vale la pena formalizarlas para que no haya confusión.

Definición 1.3. Sean $U, V \subseteq E$ conjuntos cualesquiera de un espacio vectorial E , y $x_0 \in E$,

- $U \pm x_0 = \{u \pm x_0 : u \in U\}$.
- $U \pm V = \{u \pm v : u \in U, v \in V\} = \bigcup_{u \in U} (u \pm V)$.
- $\lambda U = \{\lambda u : u \in U\}$.

1.3. Nociones topológicas

En esta introducción se expondrán los resultados básicos e imprescindibles de la topología y el análisis funcional para poder comprender y demostrar el teorema de Krein-Milman.

Un **espacio topológico** es un par (E, τ) donde E es un conjunto cualquiera, y la topología τ , que son los abiertos de E , es decir, una colección de subconjuntos de E tal que es cerrada por uniones arbitrarias e intersecciones finitas y tal que $\emptyset, E \in \tau$.

Los espacios topológicos son el ambiente natural para desarrollar conceptos básicos como conjuntos cerrados, abiertos, convergencia, funciones continuas, compacidad, convexidad, etc.

Se omitirán las definiciones de conceptos tales como la clausura de un conjunto, puntos de acumulación, topologías generadas y cuestiones por el estilo¹.

Recuérdese que $\rho \in \mathcal{P}(E)$ es una **sub-base** de τ si la topología generada por ρ , $\tau(\rho)$, es la misma topología τ . Y ρ es **base** de τ si es sub-base y a su vez cumple que para todo $V \in \tau$ $V = \bigcup \{U \in \rho : U \subseteq V\}$. Es fácil ver que ρ es base de $\tau(\rho)$ si para cualesquiera dos conjuntos en ρ y un punto en su intersección, existe un tercer conjunto incluido en su intersección que contenga tal punto, en particular para conseguir una base de una sub-base se toma ella junto a todas las intersecciones finitas de elementos de ella, y para conseguir la topología dada la subbase, se toman uniones arbitrarias de intersecciones finitas de elementos de la subbase.

El **conjunto de entornos** de un punto $x \in E$ se nota por $\mathcal{O}_\tau(x)$ o simplemente $\mathcal{O}(x)$, y $\mathcal{O}^a(x)$ al conjunto de entornos abiertos. Una colección de entornos se dice base de entornos de x si para cada entorno de x hay un elemento de la base contenido en él.

¹Véase Munkres [8].

El concepto esencial de convergencia en un espacio topológico requiere de una generalización adecuada de las sucesiones, que son las redes².

Definición 1.4. Una **red** es un conjunto indexado $\{x\}_I$, donde I es un conjunto parcialmente ordenado y dirigido, es decir que para cualesquiera $i, j \in I$, $\exists k \in I$ tal que $k \geq i$ y $k \geq j$.

Observación 1.5. Para entender por qué se elige I con estas propiedades hay que tener siempre presente el filtro de entornos de x , $\mathcal{O}(x)$ que, ordenado por la inclusión al revés, resulta en un conjunto parcialmente ordenado y cofinal. Entonces para ver convergencia siempre se puede pensar que I es $\mathcal{O}(x)$.

Definición 1.6. Sea $\{x\}_I$ una red en E , y $x \in E$, se dice que $\{x_i\}_{i \in I} \rightarrow x$ si para todo $U \in \mathcal{O}(x)$ $\exists i_0$ tal que $\forall i \geq i_0$, $x_i \in U$.

Dos últimas observaciones a este respecto. Si cada punto $x \in E$ tiene una base de entornos numerable, basta trabajar con sucesiones y no son necesarias las redes. Y que el límite de toda red sea único es equivalente a que el espacio sea Hausdorff.

1.4. Herramientas del análisis funcional

Las estructuras sobre las que se trabajará son los espacios normados, de modo que se recuerdan algunas definiciones

Definición 1.7. Si E es un \mathbb{K} -espacio vectorial, una **norma** es una función $\rho : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ que cumple

- $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$, para todos $x, y \in E$.
- $\rho(\alpha x) = |\alpha| \rho(x)$, para todos $\alpha \in \mathbb{K}$, $x \in E$.
- $\rho(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Si ρ no cumple la tercera condición, entonces se dirá que es una **seminorma**.

Así, un **espacio de Banach** es un espacio normado, tal que con la topología inducida por esa norma es completo.

Recuérdese que el dual topológico E^* de un espacio E es el conjunto de funcionales lineales continuas en E , que en el caso de que E sea normado, es un espacio de Banach con la norma de operadores

$$\|f\| = \inf\{M : |f(x)| \leq M\|x\| \quad \forall x \in E\}.$$

Y su dual algebraico E' denota al conjunto de funcionales lineales en E .

Uno de los teoremas fundamentales de todo el análisis funcional, e imprescindible para el teorema que estudia la presente monografía (especialmente sus versiones geométricas que se verán más adelante), es el teorema de Hahn-Banach.

Este teorema permite por un lado saber que todo espacio normado no trivial tiene un dual no trivial; y sirve sobre todo para extender a dimensión infinita buena parte de la intuición de \mathbb{K}^n .

El objetivo es poder “levantar” funcionales definidos en un subespacio, pero de forma que sigan respetando ciertas propiedades.

²Si bien las redes bastan para la mayoría de las cuestiones, otra herramienta para definir la convergencia son los filtros.

Definición 1.8. Sea E un \mathbb{R} -espacio vectorial. Una función $\rho : E \rightarrow \mathbb{R}$ se dice **sublineal** si cumple

- $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$ para todos $x, y \in E$,
- $\rho(\lambda x) = \lambda \rho(x)$ para todos $x \in E$, $\lambda > 0$.

Teorema 1.9. (Hahn-Banach) Sea E un \mathbb{R} -espacio vectorial y q una funcional sublineal en E . Si $S \subseteq E$ es un subespacio, y $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional lineal en S tal que $f(x) \leq q(x)$ para todo $x \in S$, entonces existe un funcional lineal $F : E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F|_S = f$ y $F(x) \leq q(x)$ para todo $x \in E$.

Demostración. La demostración consta de dos pasos; primero debe probarse que el teorema es válido cuando S es un hiperplano, es decir cuando la codimensión de S es uno. Esto servirá para poder aplicar el lema de Zorn y ver que el elemento maximal conseguido es de hecho todo el espacio, porque si no lo fuera con el argumento anterior se conseguiría un elemento estrictamente mayor al conseguido.

Supóngase entonces primero que $E = S \oplus \mathbb{R}x$ para algún $x \in E \setminus S$. Entonces el funcional buscado F debería cumplir que $F(y + tx) = f(y) + t\alpha$ para $y \in S$, $t \in \mathbb{R}$. Pero $\alpha = F(x)$ debe cumplir que

$$F(y + tx) = f(y) + t\alpha \leq \rho(y + tx).$$

Si $t = 0$ la desigualdad se cumple por las hipótesis sobre f . Si $t > 0$ debe valer que

$$\alpha \leq \frac{-f(y) + \rho(y + tx)}{t} = -f\left(\frac{y}{t}\right) + \rho\left(\frac{y}{t} + x\right)$$

por ser f lineal y ρ sublineal. Pero esto equivale a

$$\alpha \leq -f(y) + \rho(y + x)$$

para cualquier $y \in S$. Y con un razonamiento análogo, si $t < 0$ debe valer que para todo $z \in S$

$$\alpha \geq f(z) - \rho(z - x).$$

Por lo que tal α puede ser encontrado si y sólo si

$$\sup_{z \in S} f(z) - \rho(z - x) \leq \inf_{y \in S} -f(y) + \rho(y + x),$$

pero

$$f(z) + f(y) = f(z + y) \leq \rho(z + y) \leq \rho(y + x) + \rho(z - x)$$

para todos $y, z \in S$, por lo que la desigualdad de arriba vale, y tomando $\alpha = \sup_{z \in S} f(z) - \rho(z - x)$ se cumple lo buscado.

Ahora que se sabe extender un funcional un poco más, es posible usar un argumento inductivo. Sea \mathcal{S} la colección de pares (S_1, f_1) tales que S_1 es un subespacio de E con $S \subseteq S_1$ y $f_1 : S_1 \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional lineal que cumple $f_1|_S = f$ y $f_1 \leq q$ en S_1 . Se dota a \mathcal{S} con el siguiente orden parcial:

$$(S_1, f_1) \leq (S_2, f_2) \sim S_1 \subseteq S_2 \text{ y } f_2|_{S_1} = f_1.$$

Sea $(S_i, f_i)_{i \in I}$ una cadena en \mathcal{S} , entonces $T = \bigcup_{i \in I} S_i$ es subespacio de S y $F : T \rightarrow \mathbb{R}$ se define por $F(x) = f_i(x)$ para algún i tal que $x \in S_i$. Se ve fácilmente que el par $(T, F) \in \mathcal{S}$ y es una cota superior de la cadena. Por el lema de Zorn, \mathcal{S} tiene un elemento maximal (T, F) . Pero por lo dicho anteriormente se deduce que $T = E$ y que F era la extensión buscada. \square

El teorema de Hahn-Banach tiene también su versión compleja que se deduce fácilmente de las siguientes observaciones.

Observación 1.10. Sea E un \mathbb{C} -espacio vectorial.

- Si $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional \mathbb{R} -lineal, entonces $\Phi : E \rightarrow \mathbb{C}$ dado por $\Phi(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix)$ es un funcional \mathbb{C} -lineal. En efecto, basta ver que $\Phi(ix) = i\Phi(x)$, pero

$$\begin{aligned}\Phi(ix) &= \varphi(ix) - i\varphi(-x) \\ &= \varphi(ix) + i\varphi(x) \\ &= i(-i\varphi(ix) + \varphi(x)) \\ &= i\Phi(x)\end{aligned}$$

- Si $\Psi : E \rightarrow \mathbb{C}$ es \mathbb{C} -lineal y $\varphi = \operatorname{Re} \Psi$. Entonces el funcional \mathbb{C} -lineal Φ asociado a φ cumple $\Phi = \Psi$. Como sus partes reales coinciden, basta observar que $\operatorname{Im} \Psi(x) = \operatorname{Re} \Psi(-ix) = \operatorname{Re} \Phi(-ix) = \varphi(-ix) = \operatorname{Im} \Phi(x)$.
- Si ρ es una seminorma en E y φ, Φ son como en el primer inciso. Entonces $|\varphi(x)| \leq \rho(x)$ para todo $x \in E$ si y sólo si $|\Phi(x)| \leq \rho(x)$ para todo $x \in E$. Una de las implicaciones es trivial, para ver que la ida se nota que $|\Phi(x)| = \Phi(e^{-i\theta}x) = \operatorname{Re} \Phi(e^{-i\theta}x) = \varphi(e^{-i\theta}x) \leq \rho(e^{-i\theta}x) = \rho(x)$ con θ cumpliendo $\Phi(x) = e^{i\theta}|\Phi(x)|$.
- Si E es un espacio normado, entonces $\|\varphi\| = \|\Phi\|$. Este hecho es consecuencia inmediata del anterior inciso.

Corolario 1.11. Sea E un \mathbb{C} -espacio vectorial, S subespacio de E y $\rho : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ una seminorma. Si $S \subseteq E$ es un subespacio y $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ es un funcional lineal tal que $|f(x)| \leq \rho(x)$ para todo $x \in S$. Entonces existe un funcional lineal $F \in E^*$ tal que $F|_S = f$ y además $|F(x)| \leq \rho(x)$ para todo $x \in E$.

Demostración. Sea φ el funcional \mathbb{R} -lineal obtenido al aplicar el teorema 1.9 a $\operatorname{Re} f$ (notar que toda seminorma es también sublineal); obsérvese que $f(x) \leq \rho(x)$ y $-f(x) = f(-x) \leq \rho(-x) = \rho(x)$ por lo que $|f(x)| \leq \rho(x)$. Entonces por las observaciones anteriores, si $\Phi : E \rightarrow \mathbb{C}$ es el funcional \mathbb{C} -lineal asociado a φ , cumple también $|\Phi(x)| \leq \rho(x)$ para todo $x \in E$ y que $\Phi|_S = f$. \square

Se enuncian a continuación algunos corolarios directos del teorema de Hahn-Banach cuyas pruebas son relativamente simples y se omitirán y que será útil tenerlos presente en el resto del trabajo³. En todos los casos E es un espacio normado y $S \subseteq E$ es un subespacio de E .

Corolario 1.12. Si $f \in S^*$, entonces existe $F \in E^*$ tal que $F|_S = f$ y $\|F\| = \|f\|$.

Corolario 1.13. Sean $x_0 \neq x_1 \in E$, entonces existe $\varphi \in E^*$ tal que $\varphi(x_0) \neq \varphi(x_1)$. En palabras: el dual de un espacio normado separa puntos.

Corolario 1.14. Sea $x \in E$, entonces

$$\|x\| = \sup_{f \in \mathcal{B}_1^*} \{|f(x)|\}$$

donde $\mathcal{B}_1^* = \{f \in E^* : \|f\| \leq 1\}$.

Corolario 1.15.

$$\overline{S} = \bigcap \{\ker f : f \in E^* \text{ y } S \subseteq \ker f\}.$$

Corolario 1.16. S es denso en E si y sólo si el único funcional lineal acotado que se anula en S es el funcional nulo.

³Para referencia, véase Conway [2] III.6.

2. Espacios localmente convexos

Un espacio vectorial topológico es una generalización del concepto de espacio de Banach. Se recuerda su definición

Definición 2.1. *Un **espacio vectorial topológico (EVT)** es un \mathbb{K} -espacio vectorial tal que su topología es Hausdorff y las operaciones suma y producto por escalar son continuas (en la topología producto), es decir que*

- *el mapa de $E \times E \rightarrow E$ dado por $(x, y) \mapsto x + y$ es continuo;*
- *el mapa de $\mathbb{K} \times E \rightarrow E$ dado por $(\alpha, y) \mapsto \alpha y$ es continuo.*

La geometría inherente a los EVT da sentido a la noción de convexidad. Si $a, b \in E$ donde E es un EVT, se define el **segmento** que une a con b como $[a, b] = ta + (1 - t)b : t \in [0, 1]$.

Definición 2.2. *Sea E un EVT y $A \subseteq E$. Entonces A es **convexo** si y sólo si $[a, b] \subseteq A$ para cualesquiera $a, b \in A$.*

Se puede ver fácilmente que conjuntos tales como la bola unitaria \mathcal{B}_1 tanto abierta como cerrada, o conjuntos del estilo $\{Re \varphi > c\}$ para cualquier $\varphi \in E^*$ son conjuntos convexos.

También es un hecho inmediato que la intersección de conjuntos convexos es convexa, y sin mayores dificultades se observa que la clausura de un conjunto convexo es convexa.

Definición 2.3. *Un **espacio localmente convexo (ELC)** es un EVT E tal que todo $x \in E$ tiene una base de entornos abiertos convexos.*

Los entornos abiertos y convexos de la definición anterior pueden de hecho tomarse simétricos, en el sentido de $U = -U$ para todo U de la base, simplemente tomando $V = U \cap -U \subseteq U$.

Los ELC más conocidos son los EVT cuya topología viene definida por una familia de seminormas que separe puntos. Ejemplos de ellos son

Ejemplo 2.4. *Dado un dominio Ω del plano complejo, el conjunto $\mathcal{H}(\Omega)$ formado por las funciones holomorfas definidas en Ω y dotado de la topología de convergencia uniforme sobre compactos (que viene definida por la familia de seminormas $\rho_K(f) = \sup_{x \in K} \{|f(x)|\}$ para cualquier $K \subseteq \Omega$ compacto) es un ELC.*

Ejemplo 2.5. *Recuérdese que si E es un espacio normado, entonces la topología débil en E viene dada por la familia de seminormas $\rho_\varphi(x) = |\varphi(x)|$ con $\varphi \in E^*$. Y la topología ω^* en E^* es generada por $\rho_x(\varphi) = |\varphi(x)|$ con $x \in E$ (convergencia puntual).*

Por lo tanto todo espacio normado con la topología débil; así como todo dual con su topología ω^ son espacios localmente convexos.*

De hecho, como se podrá observar más adelante, la definición dada es equivalente a la siguiente

Observación 2.6. *Un ELC es un EVT cuya topología viene definida por una familia \mathcal{P} de seminormas tales que $\cap_{\rho \in \mathcal{P}} \{\rho = 0\} = \{0\}$.*

2.1. Conjuntos convexos y seminormas

Proposición 2.7. Sea E un EVT y $G \subseteq E$ un conjunto abierto y convexo tal que $0 \in G$. Entonces

$$\rho(x) = \inf\{t : t \geq 0 \text{ y } x \in tG\}$$

define un funcional sublineal continuo y positivo tal que $G = \{\rho < 1\}$

Demostración. Obsérvese que $\rho(x) < \infty$ para todo $x \in E$ porque $tx \rightarrow 0$ si $t \rightarrow 0$ y entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n}x \in G$ y por lo tanto $\rho(x) \leq n$.

Sea $\lambda > 0$, entonces

$$\begin{aligned} \rho(\lambda x) &= \inf\{t : t \geq 0, \lambda x \in tG\} \\ &= \inf\{t : t \geq 0, \lambda x \in \lambda \frac{t}{\lambda} G\} \\ &= \inf\{t : t \geq 0, x \in \frac{t}{\lambda} G\} \\ &= \inf\{t\lambda : \lambda t \geq 0, x \in tG\} \\ &= \lambda \inf\{t : t \geq 0, x \in tG\} \\ &= \lambda \rho(x), \end{aligned}$$

con lo que se prueba que $\rho(\lambda x) = \lambda \rho(x)$ para todos $x \in E$, $\lambda > 0$.

Resta ver que ρ cumple la desigualdad triangular. Obsérvese que por lo visto arriba se tiene que $\inf\{t : t \geq 0, x \in tG\} = \inf\{t : t \geq 0, \frac{1}{t}x \in G\}$. Sean pues $x, y \in E$, y $s, t > 0$ tales que $\frac{1}{s}x, \frac{1}{t}y \in G$, entonces por convexidad de G se tiene

$$\frac{1}{s+t}(x+y) = \frac{s}{s+t}(\frac{1}{s}x) + \frac{t}{s+t}(\frac{1}{t}y) \in G,$$

con lo que se concluye que $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$ □

En el caso que E sea un ELC, tomando una base de entornos abiertos convexos y simétricos del 0, se observa que el funcional de Minkowsky asociado a cada uno de ellos es de hecho una seminorma. Y si \mathcal{P} es la familia de las seminormas asociadas, se puede ver que la topología generada por ellos coincide con la inicial. Esto confirma la Observación 2.6 hecha anteriormente.

2.2. Hahn-Banach geométrico

Proposición 2.8. Sea E un EVT y G un subconjunto abierto y convexo que no contiene al origen. Entonces existe un funcional lineal $\varphi \in E^*$ tal que $\ker \varphi \cap G = \emptyset$

Demostración. El caso $G = \emptyset$ es trivial. Sea entonces $G \neq \emptyset$ y tómese $x_0 \in G$ y supóngase que E es un \mathbb{R} -EV. Se considera $H = x_0 - G$ abierto convexo que contiene al origen y su funcional sublineal de Minkowsky asociado $\rho : E \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple $H = \{\rho < 1\}$, y se observa que como $0 \notin E$ entonces $x_0 \notin H$ y por lo tanto $\rho(x_0) \geq 1$.

Para aplicar Hahn-Banach, se toma el espacio unidimensional asociado a x_0 , $\mathcal{X} = \{\alpha x_0 : \alpha \in \mathbb{R}\}$ y se define $\varphi_0 : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $\varphi_0(\alpha x_0) = \alpha \varphi_0(x_0) = \alpha \rho(x_0)$ que cumple claramente $\varphi_0 \leq \rho$ en \mathcal{X} , por lo que existe $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ que coincide con φ_0 en \mathcal{X} y esta acotada por arriba por ρ en todo el espacio.

Ahora bien, si $x \in G$ entonces $x_0 - x \in H$ y por lo tanto se tiene que

$$\varphi(x_0) - \varphi(x) = \varphi(x_0 - x) \leq \rho(x_0 - x) < 1$$

y entonces

$$\varphi(x) > \varphi(x_0) - 1 \geq 0$$

para todo $x \in G$. Y φ es el funcional buscado.

El caso en que G sea un \mathbb{C} -espacio vectorial se reduce al anterior tomando el funcional \mathbb{C} -lineal Φ asociado a φ , que claramente no se anula en G (pues $\ker \varphi \cap G = \emptyset$). \square

Los resultados siguientes son esencialmente una adaptación del teorema de Hahn-Banach explotando las propiedades geométricas de los EVT's y de los conjuntos convexos.

En \mathbb{R}^n , si A y B son polígonos convexos, es fácil ver que existe un hiperplano (recta si $n = 2$) que divide al espacio en dos componentes, dejando a cada polígono en una de ellas. Versiones análogas a este resultado en dimensión infinita se ven a continuación.

Lema 2.9. *Sea E un EVT, $A \subseteq E$ abierto convexo, y $\varphi \neq 0$ una función continua y \mathbb{R} -lineal. Entonces $\varphi(A) \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo abierto.*

Demostración. Sean $a = \inf\{\varphi(A)\}$ y $b = \sup\{\varphi(A)\}$. Claramente $\varphi(A) \subseteq [a, b]$ y por la convexidad de φ junto con las propiedades del ínfimo y el supremo se tiene que $(a, b) \subseteq \varphi(A)$. Pero como toda funcional \mathbb{R} -lineal no nula es sobreyectiva, por el teorema de la aplicación abierta, φ es abierta, y se concluye lo buscado. Si a o b no son finitos, la prueba es igual, teniendo cierto cuidado con la notación. \square

Proposición 2.10. *Sea E un \mathbb{R} -EVT, A , y B conjuntos convexos disjuntos con A abierto. Entonces existe un funcional lineal continuo $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(a) > \alpha \forall a \in A$ y $\varphi(b) \leq \alpha \forall b \in B$.*

Demostración. Tomando $G = A - B$ se observa que G es convexo por ser suma de convexos, $0 \notin G$ pues $A \cap B = \emptyset$ y como $G = \cup_{b \in B} A - b$, G es abierto. Por la Proposición 2.8, $\exists \varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\ker \varphi \cap G = \emptyset$. Como $0 \notin \varphi(G)$ y este conjunto es además convexo (por ser φ lineal), se puede suponer que $\varphi(G) \subseteq (0, \infty)$. Y por lo tanto $\varphi(a) - \varphi(b) = \varphi(a - b) > 0 \forall a \in A, b \in B$. Es decir

$$\varphi(a) > \varphi(b)$$

Por la convexidad de ambos conjuntos, $\varphi(A)$ y $\varphi(B)$ son intervalos reales, $\varphi(A)$ abierto por el lema anterior, por lo que $\alpha = \inf\{\varphi(A)\}$ satisface lo pedido. \square

Observación 2.11. *En el caso que B sea también abierto, la desigualdad $\alpha \geq \varphi(B)$ es estricta, usando el mismo razonamiento que con A .*

Observación 2.12. *Si E es un \mathbb{C} -EVT, tomando la Φ de la Observación 1.10, se consigue un funcional lineal Φ y un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\operatorname{Re} \Phi(a) < \alpha \leq \operatorname{Re} \Phi(b) \quad \forall a \in A, b \in B.$$

Tomando en el plano dos conjuntos convexos cuyas fronteras topológicas intersecten se observa que la separación no puede extenderse más. Sin embargo esto se puede hacer pidiendo otras condiciones, antes un lema.

Lema 2.13. *Sea E un EVT y $K \subseteq V \subseteq E$ con K compacto y V abierto. Entonces existe una vecindad abierta U del cero tal que $K + U \subseteq V$.*

Demostración. Sea \mathcal{U}_0 la colección de entornos abiertos del 0. Supóngase que para cualquier $U \in \mathcal{U}_0$ se tiene que $U + K \not\subseteq V$, es decir que existen $x_U \in K$ y $y_U \in U$ tales que $x_U + y_U \in E \setminus V$. Pero $\{x_U\}$ y $\{y_U\}$ son redes dirigidas por el filtro de entornos abiertos del 0, y claramente $y_U \rightarrow 0$. Como K es compacto, existe un $x \in K$ y una subred $\{x_{U'}\}$ de $\{x_U\}$ tal que $x_{U'} \rightarrow x$. Pero entonces $x_{U'} + y_{U'} \rightarrow x + 0 = x$. Es decir, $x \in \operatorname{cl}(E \setminus V) = E \setminus V \subseteq E \setminus K$, absurdo. \square

Proposición 2.14. *Sea E un ELC, A , y B conjuntos convexos disjuntos con A compacto y B cerrado. Entonces existe $\varphi \in E^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$ tal que*

$$\operatorname{Re} \varphi(a) < \alpha - \epsilon < \alpha < \operatorname{Re} \varphi(b) \quad \text{para todos } a \in A \text{ y } b \in B.$$

Demostración. Como $E \setminus B$ es abierto y $A \subseteq E \setminus B$, entonces por el Lema 2.13, existe un U entorno abierto del cero tal que $A + U \cap B = \emptyset$. Como E es un ELC puede suponerse que U es un entorno abierto y convexo. Aplicando la Proposición 2.10 (su versión compleja, de hecho) se consigue un funcional lineal continuo $\varphi \in E^*$ y un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\operatorname{Re} \varphi(x) < \alpha \leq \operatorname{Re} \varphi(y) \quad \text{para cualesquiera } x \in A + U, y \in B,$$

pero como $A \subseteq A + U$ y es además compacto, existe el ϵ buscado, ya que si no existiera tal ϵ , entonces se podría encontrar una red $\{x_i\}_{i \in I}$ en A tal que $\{\operatorname{Re} \varphi(x_i)\}_{i \in I}$ converja a α , pero por compacidad de A existiría un $x \in A$ y una subred $\{x_j\}_{j \in J}$ con $x_j \rightarrow x$ y por lo tanto

$$\alpha = \lim_{j \in J} \operatorname{Re} \varphi(x_j) = \operatorname{Re} \varphi(x),$$

una contradicción. □

Corolario 2.15. *Si E es un ELC, entonces E^* separa puntos.*

Como se podrá notar luego, esta última proposición junto con su corolario son la clave del por qué se pide que el espacio sea localmente convexo en el teorema estudiado por el presente trabajo.

2.3. Banach-Alaoglu

Se concluye este capítulo con la demostración de un teorema que será clave a la hora de estudiar en más detalle el teorema de Krein-Milman y en el momento de estudiar sus aplicaciones.

Dos topologías diferentes a la usual nacen naturalmente en el estudio de ciertos espacios. Una de ellas es la inducida por la convergencia débil, y la otra por la convergencia puntual.

Sea E un EVT tal que su dual E^* separa puntos en E , se define la **topología débil de E** como la menor topología que hace continua a toda $\varphi \in E^*$. La convergencia en esta nueva topología es la de evaluación. $x_i \xrightarrow{\omega} x$ (x_i converge débilmente a x) si y sólo si $\varphi(x_i) \rightarrow \varphi(x)$ para toda $\varphi \in E^*$. Esto muestra que la nueva topología τ_ω es menos fina que la original τ , osea $\tau_\omega \subseteq \tau$.

En general si \mathcal{F} es una familia de funcionales que separa puntos en E , al igual que antes se puede pensar en la menor topología en E que haga continua a toda $\varphi \in \mathcal{F}$.

Consideremos nuevamente un EVT E y su dual topológico E^* . Vía la inclusión canónica de E en el dual algebraico de E^* , $E^{*'}$, dada por $x \mapsto f_x$ con $f_x(\varphi) = \varphi(x)$ para cualquier $\varphi \in E^*$, se observa que la familia de funcionales lineales $\mathcal{F} = \{f_x : x \in E\}$ separa puntos en E^* ya que si $\varphi(x) = \psi(x)$ para todo $x \in E$ entonces $\varphi = \psi$. Entonces puede dotarse a E^* con la topología inducida por la familia \mathcal{F} . Esta topología es la llamada ω^* (débil estrella) o topología de la convergencia puntual. Se observa que toda funcional lineal ω^* -continua en E^* tiene la forma $\varphi \mapsto \varphi(x)$ para algún $x \in E$.

Introducidos estos conceptos, se enuncia el siguiente notable resultado.

Teorema 2.16. (Banach-Alaoglu) *Sea E un EVT y V un entorno del 0, entonces el conjunto*

$$K = \{\varphi \in E^* : |f_x(\varphi)| \leq 1 \text{ para todo } x \in V\}$$

es ω^ -compacto.*

Demostración. Como V es un entorno del 0, para cada $x \in E$ existe un $\gamma(x)$ tal que $x \in \gamma(x)V$, y entonces

$$|\varphi(x)| \leq \gamma(x)$$

para cualquier $x \in E$, $\varphi \in K$. Sea $D_x = \{\alpha \in \mathbb{K} : |\alpha| \leq \gamma(x)\}$, y $\mathcal{P} = \prod_{x \in E} D_x$ (con la topología producto). Como cada D_x es compacto, por el teorema de Tychonoff, \mathcal{P} es también compacto. y \mathcal{P} es el conjunto de funciones f en E tales que $f(x) \leq \gamma(x)$ para todo x , por lo que $K \subseteq \mathcal{P} \cap E^*$ y hereda dos topologías, una por E^* que no es más que la topología ω^* , y otra por \mathcal{P} . Se probará que ambas topologías coinciden y que además K es un subconjunto cerrado de \mathcal{P} , lo que permitirá concluir el enunciado del teorema.

Para ver que las topologías heredadas coinciden, sea

$$W_1 = \{\varphi \in E^* : |\varphi(x_i)| < \delta \text{ para } 1 \leq i \leq n\}$$

y

$$W_2 = \{f \in \mathcal{P} : |f(x_i)| < \delta \text{ para } 1 \leq i \leq n\}.$$

Moviendo los parámetros n, δ y x_i se ve que los W_1 forman una base de entornos del 0 en la topología ω^* y los W_2 una base de entornos del 0 en la topología inducida por \mathcal{P} . Pero como $K \subseteq E^* \cap \mathcal{P}$ se tiene que

$$W_1 \cap K = W_2 \cap K$$

para cualquier valor de n, δ, x_i . Esto prueba que las topologías heredadas son iguales.

Sea ahora τ la topología inducida por \mathcal{P} , f_0 en la τ -clausura de K , $x, y \in E$, α, β escalares y $\epsilon > 0$. Sea

$$\{f \in \mathcal{P} : |f - f_0| < \epsilon \text{ en } x, y, \alpha x + \beta y\}$$

que es un τ -entorno de f_0 , por lo tanto existe $f \in K$ en ese entorno. Como f es lineal

$$f_0(\alpha x + \beta y) - \alpha f_0(x) - \beta f_0(y) = (f_0 - f)(\alpha x + \beta y) - \alpha(f_0 - f)(x) - \beta(f_0 - f)(y)$$

por lo que

$$|f_0(\alpha x + \beta y) - \alpha f_0(x) - \beta f_0(y)| < (1 + |\alpha| + |\beta|)\epsilon$$

y como ϵ es arbitrario, se ve que f_0 es lineal. Y por último si $x \in V$ y $\epsilon > 0$, con el mismo argumento se ve que existe $f \in K$ tal que $|f(x) - f_0(x)| < \epsilon$ y como $|f(x)| \leq 1$ entonces $|f_0(x)| \leq 1 + \epsilon$ para cualquier $\epsilon > 0$ y se concluye que $|f_0(x)| \leq 1$ para todo $x \in V$. Por lo tanto $f_0 \in K$. Al ser \mathcal{P} compacto, K cerrado dentro de \mathcal{P} , K es τ -compacto, pero como τ y la topología ω^* coinciden, K es ω^* -compacto, y el teorema queda probado. \square

Tomando $V = E$, se obtiene el siguiente corolario

Corolario 2.17. *La bola unitaria cerrada del dual de cualquier espacio normado es ω^* -compacta.*

3. Teorema de Krein-Milman

3.1. El teorema

El teorema de Krein-Milman es la generalización natural del hecho de que todo polígono convexo del plano sea la combinación convexa de sus vértices. Para poder formularlo con la generalidad buscada, hay que definir qué son los vértices en un conjunto cualquiera de un espacio vectorial, y desarrollar la maquinaria que siempre se necesita a la hora de trabajar en espacios generales.

Definición 3.1. Sea E un espacio vectorial y $K \subseteq E$. Un conjunto $S \subseteq K$ se dice **extremal** de K si no existe un segmento abierto que intersecte a S cuyos extremos pertenezcan a $K \setminus S$. En otras palabras, S es extremal de K si $a, b \in K, t \in (0, 1)$ tal que

$$ta + (1 - t)b \in S$$

entonces $a, b \in S$.

Un **punto extremal** de K es un x tal que el conjunto $\{x\}$ es extremal de K .

Intuitivamente, los conjuntos extremales son las “caras” del conjunto. son esenciales pues permiten demostrar la existencia de puntos extremales para los conjuntos compactos y convexos.

Cabe mencionar que si A es extremal de B y B es extremal de C , entonces A es extremal de C .

La clave para explotar los conjuntos extremales son, como era de esperarse, los teoremas de separación vistos anteriormente. Obsérvese primero que cualquier funcional nos da inmediatamente un conjunto extremal de K .

Proposición 3.2. Sea $K \subseteq E$ conjunto compacto, y $\varphi \in E^*$. El conjunto

$$m_\varphi(K) = \varphi^{-1}\{\inf\{Re \varphi(K)\}\}$$

es extremal de K .

Demostración. Sean $m = \inf\{Re \varphi(K)\}$, $a, b \in K$ y supóngase que existe un x_0 tal que $x_0 \in (a, b) \cap m_\varphi$, es decir que $Re \varphi(x_0) = m$ y $\exists t \in (0, 1)$ con $x_0 = ta + (1 - t)b$, aplicando φ a esta expresión y usando su linealidad:

$$m = Re \varphi(x_0) = tRe \varphi(a) + (1 - t)Re \varphi(b)$$

lo que implica que $Re \varphi(a) = Re \varphi(b) = m$ pues si no se cumpliese esto alguno de estos valores sería menor estricto que m , lo que es imposible. Y eso no es más que decir que $a, b \in m_\varphi$, osea, m_φ es subconjunto extremal. \square

Definición 3.3.

- Si E es un espacio vectorial y $U \subseteq E$, se define la **cápsula convexa** de U , notada $co(U)$, como la intersección de todos los conjuntos convexos de E que contengan a U . Esto es equivalente a decir que $co(U)$ es el conjunto de todas las combinaciones convexas finitas de elementos de U .
- Si E es un EVT y $U \subseteq E$, entonces la **cápsula convexa cerrada** de U , $\overline{co}(U)$, es la clausura de $co(U)$. Esta definición es equivalente a decir que la cápsula convexa cerrada de U es la intersección de todos los conjuntos convexos cerrados que contengan a U .

Supóngase que se trabaja en dimensión finita, por ejemplo \mathbb{R}^n , y sea K un conjunto convexo y compacto. Es fácil probar la existencia de puntos extremales en este caso mediante un método inductivo, tomando los semiespacios $H_\lambda^i = \{x_i \geq \lambda\}$. Como $H_\lambda^1 \cap K = K$ para λ suficientemente chico, el conjunto $\mathcal{T}^1 = \{\lambda : H_\lambda^1 \cap K \neq \emptyset\}$ es no vacío. Sea $\lambda_1 = \sup \{\mathcal{T}^1\}$, $K^1 = H_{\lambda_1}^1 \cap K$. K^1 resulta ser un subconjunto $(n-1)$ -dimensional extremal de K . Se definen pues $\mathcal{T}^i = \{\lambda : H_\lambda^i \cap K^{(i-1)} \neq \emptyset\}$, $\lambda_i = \sup \{\mathcal{T}^i\}$ y $K^i = H_{\lambda_i}^i \cap K^{(i-1)} \forall i = 2, \dots, n$.

Es claro que los conjuntos $K^1 \supseteq \dots \supseteq K^n$ son todos extremales y que $K^n = \{x_0\} = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\}$, con el punto extremal buscado.

Como suele ocurrir, para hacer funcionar un argumento inductivo en un espacio de dimensión infinita, es necesario recurrir al lema de Zorn.

Teorema 3.4. (Krein-Milman) Sea E un espacio localmente convexo, $K \subseteq E$ un subconjunto convexo y compacto. Entonces K es igual a la cápsula convexa cerrada de sus puntos extremales. Es decir, $K = \overline{\text{co}}(\text{Ext } K)$

Demostración. Como se mencionó anteriormente, primero hay que ver que $\text{Ext } K \neq \emptyset$. Sea \mathcal{P} la colección de todos los subconjuntos compactos no vacíos y extremales de K ordenado por la inclusión al revés, es decir, si $S_1, S_2 \in \mathcal{P}$, $S_1 \leq S_2$ siempre y cuando $S_2 \subseteq S_1$. Sea \mathcal{Q} una cadena en \mathcal{P} , y M la intersección de todos los elementos de \mathcal{Q} que, como son compactos con la propiedad de las intersecciones finitas, $M \neq \emptyset$; hay que ver que $M \in \mathcal{P}$, pero eso es trivial pues si $(a, b) \cap M \neq \emptyset$ entonces $(a, b) \cap Q$ para todo $Q \in \mathcal{Q}$ y por lo tanto $a, b \in Q$ para todo $Q \in \mathcal{Q}$ que es lo mismo que decir que $a, b \in M$. Esto concluye, lema de Zorn por medio, que el conjunto \mathcal{P} tiene un elemento maximal que sin confusión de notación se lo denota con la misma letra M . La maximalidad de M garantiza que no existe un subconjunto propio de M en \mathcal{P} , y aplicando el lema anterior se concluye que toda $\varphi \in E^*$ es constante en M , y como E^* separa puntos, se tiene que M consiste de un solo punto, $M = \{x_0\}$, con x_0 punto extremal de K . Con lo que se concluye que $\text{Ext } K \neq \emptyset$.

Ahora bien, sea $K_0 = \overline{\text{co}}(\text{Ext } K)$. Es claro(pues K es convexo y compacto) que $K_0 \subseteq K$. Supóngase ahora que existe un $x_0 \in K \setminus K_0$. Como K_0 es cerrado y $\{x_0\}$ compacto, por la Observación 2.12 existe $\varphi \in E^*$ y un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\text{Re } \varphi(x_0) < \alpha \leq \varphi(K_0).$$

Pero se vio que $\{\varphi = \inf\{\varphi(K)\}\} \subseteq K$ es un conjunto extremal, cerrado (y por lo tanto compacto) y convexo, por lo que, aplicando el mismo razonamiento de arriba, contiene un punto extremal y_0 de K , pero como

$$\varphi(y_0) = \inf\{\varphi(K)\} \leq \varphi(x_0) < \varphi(K_0)$$

se tiene que $y_0 \notin K_0$, lo cual es absurdo pues K_0 contiene todos los puntos extremales de K . \square

Obsérvese que la convexidad de K se usa sólomente para comprobar una de las inclusiones. Y que E sea un ELC se usa notando que E^* separa puntos para ver que M consiste de un solo punto, y para aplicar la Observación 2.12. Se puede ver que si sólo se pide que E^* separe puntos, la Observación 2.12 vale si se pide que ambos conjuntos sean compactos⁴. Como K_0 es cerrado y está incluido en un compacto, es compacto, y además $\{x_0\}$ es también compacto, el teorema de Krein-Milman sigue siendo válido si se relaja la hipótesis de E pidiendo sólo que E^* separe puntos.

Vale la pena hacer algunas observaciones de ciertos detalles.

- En primer lugar, el conjunto los puntos extremales de un compacto no tienen por qué ser cerrado. En efecto, sea A el conjunto en \mathbb{R}^3 formado por la cápsula convexa del círculo apoyado sobre el eje xy de radio 1 y centrado en $(1, 0, 0)$ y los puntos $(0, 0, 1)$ y $(0, 0, -1)$. Los extremales de A son pues, estos dos últimos puntos, y todos los del borde del círculo exceptuando el $(0, 0, 0)$ que es combinación convexa de los puntos $(0, 0, 1)$ y $(0, 0, -1)$, por lo que $\text{Ext } A$ no es cerrado.
- Tomando el semiplano superior $\{x \geq 0\}$ en \mathbb{R}^2 , se observa que existen cerrados que no poseen puntos extremales.

⁴Véase Rudin [3], p 74.

- Un ejemplo de un conjunto compacto y convexo K tal que $K \neq co(Ext K)$. Sea $E = \ell^\infty$, y $e_n \in E$ que vale 1 en la posición n y 0 en el resto. Sea K la cápsula convexa cerrada del conjunto $\{\frac{e_n}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Los elementos de K son todos los de la forma $\sum_{n \geq 1} \lambda_n \frac{e_n}{n}$, con $\lambda_n \geq 0$ tales que $\sum_{n \geq 1} \lambda_n = 1$. Se puede ver fácilmente que K es un conjunto compacto, y por la Proposición 3.6 que se verá adelante, se observa que los extremales de K son 0 y $\frac{e_n}{n}$ para $n \in \mathbb{N}$. Entonces cualquier elemento de K que tenga infinitos $\lambda_n > 0$ no pertenece a $co(Ext K)$.
- Por último se observa que hay espacios en los que un conjunto compacto y convexo puede no tener ningún punto extremal, ejemplos de éstos se dan en el último capítulo.

Para continuar un poco el estudio de los conjuntos convexos, se ven a continuación algunas propiedades interesantes, que servirán además para dar una prueba alternativa del teorema de Krein-Milman.

Proposición 3.5. *Sea E un ELC y K un conjunto compacto y convexo. Si V es un convexo y abierto relativo de K tal que $Ext K \subseteq V$, entonces $K = V$*

Demostración. Se considera la familia \mathcal{U} de subconjuntos propios abiertos relativos de K y convexos, ordenados parcialmente por la inclusión. Si $K = \{x_0\}$ entonces el resultado es trivial, así que K contiene más de un punto, y como E es un ELC, $\mathcal{U} \neq \emptyset$. Sea \mathcal{U}_0 una cadena en \mathcal{U} , claramente la unión de los elementos de \mathcal{U}_0 pertenece a \mathcal{U} , pues es abierto (relativo), convexo pues la cadena es creciente, y es subconjunto propio ya que K es compacto. Por el lema de Zorn, existe un elemento maximal U de \mathcal{U} .

Para $x \in K$ y $\lambda \in [0, 1]$ se define el operador lineal y continuo $T_{x,\lambda} : K \rightarrow K$ (K con la topología heredada) dado por $T_{x,\lambda}(y) = \lambda y + (1 - \lambda)x$. Si $x \in U$ y $\lambda \in [0, 1)$ entonces vale que $T_{x,\lambda}(U) \subseteq U$ y por lo tanto $U \subseteq T_{x,\lambda}^{-1}(U)$. Más aún, si $y \in (cl U) \setminus U$ entonces $T_{x,\lambda}(y) = \lambda y + (1 - \lambda)x \in [x, y) \subseteq U$ y se concluye que $cl U \subseteq T_{x,\lambda}^{-1}(U)$ y como $T_{x,\lambda}^{-1}(U)$ es abierto de K , por la maximalidad de U se tiene que

$$T_{x,\lambda}^{-1}(U) = K$$

y por lo tanto para cualquier $x \in U$, $\lambda \in [0, 1)$

$$T_{x,\lambda}(K) \subseteq U.$$

Si W es un abierto relativo y convexo de K , entonces obsérvese que $W \cup U$ es convexo pues si $x \in U$, $y \in V$ y $\alpha \in (0, 1)$, entonces $\alpha y + (1 - \alpha)x = T_{x,\alpha}(y) \in T_{x,\alpha}(K) \subseteq U \subseteq U \cup V$. Pero entonces por la maximalidad de U se tiene que $U \cap W = K$ ó $U \cap W = U$. De esto se deduce que $K \setminus U = \{x_0\}$ (de haber dos puntos se toma un entorno convexo de alguno de ellos que no contenga al otro, contradiciendo lo dicho recién), con x_0 es punto extremal de K . porque $K \setminus \{x_0\} = U$ es convexo.

Supóngase ahora que $V \neq K$, entonces existe un $U \in \mathcal{U}$ maximal que contiene a V , pero $K \setminus U = \{x_0\}$ un punto extremal. Esto contradice el hecho que $Ext K \subseteq V$. \square

En la proposición anterior se demuestra la existencia de puntos extremales en K , que era lo difícil de la demostración del teorema de Krein-Milman. De todos modos, el enfoque alternativo adoptado permite simplificar un poco la segunda parte de la demostración.

Demostración. (Krein-Milman 2) Por la proposición 2.14, el conjunto $L = \overline{co}(Ext K)$ es la intersección de todos los semiplanos abiertos $V_{\varphi,\alpha} = \{Re \varphi < \alpha\}$ con $\varphi \in E^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$, que contengan a L . Pero todos esos abiertos contienen a los puntos extremales de K , y por lo tanto $K \subseteq V_{\varphi,\alpha}$ para todo $V_{\varphi,\alpha}$ semiplano abierto que contenga a L . Con esto se concluye que $K \subseteq \bigcap V_{\varphi,\alpha} = L$. \square

Y para concluir, el siguiente resultado puede pensarse como un recíproco al teorema de Krein-Milman.

Teorema 3.6. (D. P. Milman) Sea E un ELC y $K \subseteq E$ un conjunto compacto y convexo. $F \subseteq K$ tal que $K = \overline{co}(F)$, entonces $Ext K \subseteq cl F$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, puede suponerse que F es cerrado, y por lo tanto compacto. Supóngase que existe un $x_0 \in (Ext K) \setminus F$. Como $x_0 \notin F$ y F es cerrado, existe un entorno U convexo y simétrico del 0 tal que $U + x_0 \cap F = \emptyset$; sea ρ la seminorma asociada a U , entonces se tiene que $F \cap \{\rho(x - x_0) < 1\} = \emptyset$. Tomando $U_0 = \{\rho(x - x_0) < \frac{1}{3}\}$ se ve que $(x_0 + U_0) \cap (F + U_0) = \emptyset$ y por lo tanto $x_0 \notin cl(F + U_0)$.

Como F es compacto, existen $y_1, \dots, y_n \in F$ tales que $F \subseteq \bigcup (y_k + U_0)$. Sea $K_k = \overline{co}(F \cap (y_k + U_0)) \subseteq \overline{co}(y_k + U_0) = y_k + cl U_0$. Además, claramente $K_k \subseteq K$. Ahora, como los K_k son todos compactos y convexos, se tiene que $\overline{co}(K_1 \cup \dots \cup K_n) = co(K_1 \cup \dots \cup K_n)$. En efecto, sólo hay que ver que $co(K_1 \cup \dots \cup K_n)$ es un conjunto cerrado, pero si $\{\alpha_{1i}x_{1i} + \dots + \alpha_{ni}x_{ni}\}_{i \in I}$ es una red convergente (a un elemento x) de combinaciones convexas con $x_{ki} \in K_k$, entonces existe una subred y elementos $x_k \in K_k$ tal que para cada k , $x_{ki} \rightarrow x_k$, por lo tanto los coeficientes $\alpha_{ki} \rightarrow \alpha_k$ para ciertos α_k , y entonces $x = \sum \alpha_k x_k \in co(K_1 \cup \dots \cup K_n)$.

Finalmente, como $x_0 \in K = \overline{co} F \subseteq co(K_1 \cup \dots \cup K_n)$, $x_0 = \sum \alpha_k x_k$ para ciertos (no necesariamente iguales a los de arriba) α_k , $x_k \in K_k \subseteq K$. Pero como x_0 es punto extremal de K , $x_0 = x_k$ para algún k . Esto implica que $x_0 \in y_k + cl U_0 \subseteq cl(F + U_0)$, absurdo. \square

3.2. Puntos extremales

Se estudiarán a continuación, sin total rigurosidad, los puntos extremales de algunos conjuntos.

- Sea E un espacio localmente compacto Hausdorff, y $\mathcal{M}(T)$ el espacio de las medidas de Borel reales y acotadas en E . por el teorema de representación de Riesz $\mathcal{M}(E)$ es el espacio dual del espacio de funciones continuas en E que se anulan en el infinito, $C_0(E)$. Además $\mathcal{M}_+^1(E)$, el subespacio de las medidas positivas de masa total a lo sumo uno es compacto y convexo. Está claro que la medida nula es un punto extremal de ese conjunto, de hecho, junto con las medidas de Dirac, forma el conjunto de puntos extremales de $\mathcal{M}_+^1(E)$. En efecto, basta ver que si μ es extremal y no nula, entonces su soporte K consta de un solo punto. Supóngase que existen $t_1, t_2 \in K$ diferentes, entonces se pueden encontrar U_1, U_2 entornos disjuntos de ambos tales que $0 < \mu(U_i) < 1$, sea $m = \mu(U_1)$, tomando $\mu_1 = \frac{(\mu|_{U_1})}{m}$, $\mu_2 = \frac{(\mu - m\mu_1)}{(1-m)}$, es claro que $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_+^1(E)$ y que $\mu = m\mu_1 + (1-m)\mu_2$, con lo que se prueba la afirmación hecha.
- Los puntos extremales de la bola cerrada de radio unidad de $L^\infty([0, 1])$ son aquellos g tales que $|g(x)| = 1$ para casi todo x . En general, los puntos extremales de la bola cerrada unitaria de cualquier espacio normado son los puntos de norma uno.
- Considérese el conjunto de las matrices doblemente estocásticas de $n \times n$, $\mathcal{DS}(n)$. Este conjunto es convexo, y sus puntos extremales son las matrices de permutación $\mathcal{U}_p(n)$. Recuérdese que las matrices doblemente estocásticas son aquellas con entradas positivas tales que la suma de los elementos de cada fila y cada columna valga 1, y las matrices de permutación son matrices doblemente estocásticas que en cada fila y en cada columna poseen sólo un elemento no nulo. La demostración de este hecho puede consultarse en Bhatia [11] II.2.

3.3. Krein-Milman y el axioma de elección

Como se puede observar en la demostración, el teorema de Krein-Milman guarda una estrecha relación con el axioma de elección. En 1972, en un artículo titulado “A geometric form of the axiom of choice”, J. L. Bell y D. H. Fremlin probaron que el axioma de elección es equivalente al siguiente enunciado:

- *La bola unitaria del dual de un espacio lineal normado sobre los reales posee un punto extremal.*

En ese mismo artículo se hace notar que del teorema de los ideales primos booleanos (*Boolean prime ideal theorem*, *BPI*) que asegura que toda álgebra booleana contiene un ideal primo, más el teorema de Krein-Milman, se deduce la proposición (*). Con lo que se concluye que el teorema de Krein-Milman junto al BPI son equivalentes al axioma de elección.

Como se puede ver en [9], el teorema de Tychonoff que dice que el producto de cualquier familia de espacios compactos es compacto, es lógicamente equivalente al axioma de elección. Sin embargo, una versión mas débil del mismo, en conjunto con el teorema de Krein-Milman, son equivalentes a la proposición (*).

Proposición 3.7. Tyc *El producto $\prod_{i \in I} E_i$ de cualquier familia $(E_i)_{i \in I}$ de espacios compacto Hausdorff es compacto.*

Teorema 3.8. *Proposición ?? junto con el teorema de Krein-Milman implican (*)*

Se da una idea de la demostración del resultado principal del trabajo de Bell y Fremlin.

Teorema 3.9. *(*) implica el axioma de elección.*

Demostración. (Idea)

Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos no vacíos. Se quiere ver que existe una función de elección $g : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ tal que $g(i) \in A_i$ para todo $i \in I$. Sin pérdida de generalidad, puede suponerse que los A_i son disjuntos pues si $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, se los elimina de la familia y se agrega el conjunto $B_k = A_i \cap A_j$, y después se define $g(i) = g(j) = g(k)$. Sea $A = \bigcup A_i$, se definen

$$K = \{x \in \mathbb{R}^A : \sup_{i \in I} \sum_{t \in A_i} |x(t)| \leq 1\},$$

$$L = \{x \in \mathbb{R}^A : \sup_{i \in I} \sum_{t \in A_i} |x(t)| < \infty\},$$

$$E = \{x \in \mathbb{R}^A : (\forall \epsilon > 0)(\{|x(t)| > \epsilon\} \text{ es finito}) \text{ y } \sum_{i \in I} \sup_{t \in A_i} |x(t)| < \infty\}.$$

Entonces L y E son espacios normados con las normas

$$\|x\|_L = \sup_{i \in I} \sum_{t \in A_i} |x(t)|,$$

$$\|y\|_E = \sum_{i \in I} \sup_{t \in A_i} |y(t)|.$$

Se puede ver que existe un isomorfismo isométrico entre L y E^* , y como K es la bola unitaria de L , puede pensarse a K como la bola unitaria de E^* , que por (*) tiene un punto extremal e . Se afirma que para cada $i \in I$ existe un único $t \in A_i$ tal que $e(t) \neq 0$.

Si existiese un $i_0 \in I$ tal que $e(t) = 0$ para todo $t \in A_{i_0}$ entonces si se toma un $v \in A_{i_0}$ y $y, z \in K$ vienen dados por

$$y(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = v \\ e(t) & \text{si } t \neq v \end{cases}$$

$$z(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t = v \\ e(t) & \text{si } t \neq v \end{cases}$$

entonces $e = \frac{1}{2}(y + z)$, lo que contradiría la condición de extremalidad de e .

Por último, si $i_0 \in I$ es tal que existen $u, v \in A_{i_0}$, con $e(u), e(v) \neq 0$, se definen $y, z \in K$ del siguiente modo

$$y(t) = \begin{cases} e(u)(1 + |e(v)|) & \text{si } t = u \\ e(v)(1 - |e(u)|) & \text{si } t = v \\ e(t) & \text{si } t \notin \{u, v\} \end{cases}$$

$$z(t) = \begin{cases} e(u)(1 - |e(v)|) & \text{si } t = u \\ e(v)(1 + |e(u)|) & \text{si } t = v \\ e(t) & \text{si } t \notin \{u, v\} \end{cases}$$

y nuevamente $e = \frac{1}{2}(y + z)$, absurdo.

Por último, se define la función de elección g asignando $g(i)$ al único elemento t de A_i tal que $e(t) \neq 0$; y queda probado el axioma de elección. \square

4. Aplicaciones

Si bien el teorema de Krein-Milman tiene valor y belleza en sí mismo, su verdadera potencia reside en su versatilidad a la hora de aplicarlo a varias áreas de la matemática.

Para comenzar a vislumbrar la potencia de KM, considérese el siguiente ejemplo.

4.1. Teorema de representación

Proposición 4.1. *Sea \mathcal{F} un conjunto compacto (con la topología de la convergencia puntual) y convexo de funciones reales, y supóngase que $\text{Ext } \mathcal{F} = \{h_\lambda : \lambda \in [0, 1]\}$, es decir, que las funciones extremales de \mathcal{F} pueden parametrizarse con λ . Entonces para toda $f \in \mathcal{F}$ existe una medida de probabilidad μ en $[0, 1]$ tal que*

$$f(t) = \int_0^1 h_\lambda(t) d\mu(\lambda).$$

Demostración. Sea $f \in \mathcal{F}$, como \mathcal{F} es convexo y compacto, por Krein-Milman, existe una red $\{f_i\}$ convergente a f donde cada f_i es combinación convexa (finita) de funciones h_λ . Obsérvese que, sin embargo, toda combinación convexa de funciones h_λ puede expresarse como

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k h_{\lambda_k}(t) = \int_0^1 h_\lambda(t) d\mu(\lambda)$$

con μ una medida de probabilidad concentrada en los puntos λ_k ($\mu(\lambda_k) = \alpha_k \forall k = 1, \dots, n$). Por lo tanto la red $\{f_i\}$ de combinaciones convexas puede ser pensada como una red $\{\mu_i\}$ de medidas que viven en la bola unitaria (de las medidas), que al ser el dual de las funciones continuas es compacta en la topología w^* por Banach-Alaoglu y por lo

tanto existe una subred de $\{\mu_i\}$ que converge ω^* a una medida de probabilidad μ . En otras palabras:

$$f(t) = \int_0^1 h_\lambda(t) d\mu(\lambda)$$

□

Entre otras cosas, este resultado, aplicado a conjuntos adecuados de funciones, da teoremas importantes de representación como el teorema de Loewner y permite demostrar desigualdades famosas en la teoría de operadores convexos⁵.

4.2. Espacios duales y no duales

Se verá en este apartado cómo puede utilizarse el teorema de Krein-Milman para determinar si un espacio de Banach es el dual de un espacio normado o no. En verdad, se podrá determinar cuándo un espacio de Banach no es dual.

Como consecuencia del teorema de Krein-Milman, se sabe que todo conjunto convexo y compacto tiene al menos un punto extremal (ya que el mismo es la clausura de la cápsula convexa de estos puntos). Pero por el teorema de Banach-Alaoglu, la bola unitaria \mathcal{B}_1 de cualquier espacio dual E^* es ω^* -compacta, y es, por supuesto, convexa. Estas observaciones permitirán a continuación identificar ciertos espacios que no son duales de ningún otro espacio.

Considérese el espacio $E = L_1([0, 1])$ y su bola unitaria \mathcal{B}_1 . Sea ahora $f \in E$ con $\|f\| = 1$ y $x \in [0, 1]$ tal que $\int_0^x |f(s)| ds = \frac{1}{2}$. Se define

$$g(s) = \begin{cases} 2f(s) & \text{si } s \leq x \\ 0 & \text{si } s > x \end{cases}$$

y

$$h(s) = \begin{cases} 2f(s) & \text{si } s \geq x \\ 0 & \text{si } s < x \end{cases}$$

Se ve fácilmente que $g, h \in L_1([0, 1])$, $\|g\| = \|h\| = 1$ y $f = \frac{1}{2}g + \frac{1}{2}h$. Además todo punto extremal de \mathcal{B}_1 debería cumplir que su norma valga uno. Por lo tanto $L_1([0, 1])$ no posee puntos extremales, y en consecuencia no puede ser el dual de ningún espacio.

De la misma manera, sea $E = c_0$ el espacio de sucesiones acotadas que tienden a cero en el infinito con la norma del supremo y \mathcal{B}_1 denotando su bola unitaria. Si $x = \{x_n\}_n \in \mathcal{B}_1$ con $\|x\| = 1$, como $x_n \rightarrow 0$, existe $N > 0$ tal que $|x_N| < \frac{1}{2}$. Se definen los elementos $y, z \in \mathcal{B}_1$ de norma uno de la siguiente manera

$$y_n = \begin{cases} x_n & \text{si } n \neq N \\ x_n + \frac{1}{4} & \text{si } n = N \end{cases}$$

y

$$z_n = \begin{cases} x_n & \text{si } n \neq N \\ x_n - \frac{1}{4} & \text{si } n = N \end{cases}$$

Entonces al igual que antes, $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$. Se concluye finalmente que la bola unitaria de c_0 no tiene puntos extremales, y por lo tanto c_0 no es un espacio dual.

⁵Vease [11], p. 131.

4.3. Terema de Stone-Weierstrass

Sea E un espacio topológico. El conjunto $C(E)$ de las funciones continuas de E en \mathbb{C} dotado con las operaciones puntuales es una \mathbb{C} -álgebra. Dada una función $f \in C(E)$, \bar{f} denota su conjugada compleja, $\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$.

El teorema de Stone-Weierstrass da un criterio para saber cuándo una subálgebra de $C(E)$ aproxima bien a $C(X)$ en el sentido de que su clausura coincide con él.

Recuérdese que si E es compacto, $C(E)$ es un espacio de Banach si se lo dota con la norma del supremo, y su dual son las medidas de Borel complejas y regulares⁶.

Teorema 4.2. *Sea E un espacio topológico compacto Hausdorff, y \mathcal{A} una subálgebra de $C(E)$ tal que:*

a $1 \in \mathcal{A}$,

b Si $x, y \in E$ con $x \neq y$ entonces existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) \neq f(y)$,

c Si $f \in \mathcal{A}$ entonces $\bar{f} \in \mathcal{A}$.

Entonces $\overline{\mathcal{A}} = C(E)$.

Demostración. Por el Corolario 1.16, basta probar que $\mathcal{A}^\perp = (0)$, donde \mathcal{A}^\perp es el conjunto de funcionales lineales que se anulan en \mathcal{A} . Supóngase que $\mathcal{A}^\perp \neq (0)$, y considérese $\mathcal{B} = \mathcal{A}^\perp \cap \{\mu \in E^* : \|\mu\| \leq 1\}$. Como el conjunto \mathcal{A}^\perp es cerrado, por el teorema de Banach-Alaoglu se tiene que \mathcal{B} es ω^* -compacto. Por Krein-Milman, existe μ punto extremal de \mathcal{B} . Como μ es extremal, $0 \neq \mu$ (pues $\mathcal{A} \neq (0)$ y por lo tanto $\mathcal{B} \neq (0)$) y $\|\mu\| \leq 1$, se tiene que de hecho $\|\mu\| = 1$. Sea K el soporte de μ , entonces se tiene

$$\int f d\mu = \int_K f d\mu$$

para cualquier $f \in \mathcal{A}$ y además por lo dicho recién, $K \neq \emptyset$. Sea $x_0 \in K$, se verá que de hecho $K = \{x_0\}$.

Sea $x_1 \in E$, $x_1 \neq x_0$. Por (2) se tiene que existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x_0) \neq f(x_1)$, y por (1) (tomando $f - f(x_1) \in \mathcal{A}$ por ser \mathcal{A} álgebra) puede suponerse que $f(x_1) = 0$. Y por último, como $g = |f|^2 = f\bar{f} \in \mathcal{A}$ por (3), se tiene que $\frac{g}{(\|g\|+1)} \in \mathcal{A}$, es decir que se puede suponer que $0 \leq f \leq 1$, $f(x_0) \neq f(x_1) = 0$.

Ahora, como $\mu \in \mathcal{A}^\perp$ y $gf \in \mathcal{A}$ para cualquier g en \mathcal{A} , se tiene que $0 = \int g f d\mu = \int g(1-f)d\mu$, es decir, $f d\mu, (1-f)d\mu \in \mathcal{A}^\perp$.

Si $\alpha = \|f\mu\| = \int f d|\mu|$. Y se tiene que $0 < \alpha < 1$ pues por un lado $f(x_0) > 0$ y por lo tanto $f > 0$ en un entorno U de x_0 que tiene medida positiva por ser $U \setminus K \neq \emptyset$ y K el soporte de μ ; y por otro lado $f < 1$ entonces $\int f d|\mu| < \int d|\mu| = \|\mu\| = 1$. Usando esto último y que $1 - \alpha = \int (1-f)d|\mu| = \|(1-f)\mu\|$, se consigue

$$\mu = \alpha \left[\frac{f\mu}{\|f\mu\|} \right] + (1-\alpha) \left[\frac{(1-f)\mu}{\|(1-f)\mu\|} \right]$$

y como μ es extremal se concluye que $\mu = \frac{f\mu}{\|f\mu\|} = \alpha^{-1}f\mu$, lo que implica que $\alpha^{-1}f = 1$ en μ -ae y la continuidad de f hace que $f \equiv \alpha$ en μ -ae, osea, f es constante en K . Pero como

⁶La variación total como norma hace de este espacio un espacio de Banach, pero este hecho no será utilizado.

$f(x_1) = 0$ y $f \equiv \alpha$ en K , $x_1 \notin K$. Y con esto se concluye que μ es una medida no nula concentrada en $K = \{x_0\}$. Pero si $\mu \in \mathcal{B}$

$$0 = \int 1d\mu = \mu(x_0) \neq 0,$$

absurdo. Entonces $\mathcal{B} = (0)$ y por lo tanto $\mathcal{A}^\perp = (0)$ y el teorema queda probado. \square

4.4. Funciones armónicas discretas

Problema 4.3. *Si se tiene un número real entre 0 y 1 en cada punto de coordenadas enteras del plano, tal que todo número es el promedio de sus 4 vecinos, entonces todos ellos son iguales.*

Demostración. Considérese el espacio \mathcal{K} de funciones f en $L^\infty(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ con $\|f\|_\infty \leq 1$ y que cumplen

$$f(m, n) = \frac{1}{4}(f(m, n+1) + f(m, n-1) + f(m+1, n) + f(m-1, n)). \quad (1)$$

En primer lugar obsérvese que \mathcal{K} es ω^* -compacto por ser cerrado dentro de la bola unitaria. Esto se puede ver de dos maneras. La primera es una aplicación directa del teorema de Banach-Alaoglu, dado que la condición de armonicidad de f claramente se mantiene en el límite. Y por otro lado, como el espacio es discreto, un argumento al estilo método de la diagonal exime a uno de la necesidad de aplicar tanta teoría.

Veamos que si f es un punto extremal de \mathcal{K} , entonces f es constante. Luego, como por Krein-milman todo elemento de \mathcal{K} es límite de combinaciones convexas de sus puntos extremales, se tiene que toda $f \in \mathcal{K}$ es constante.

Si f es punto extremal de \mathcal{K} , observemos que $g(m, n) = f(m+1, n)$ y las otras tres posibles combinaciones que aparecen en (1) están en \mathcal{K} , y que además

$$f(m, n) = \frac{1}{4}(f(m, n+1) + f(m, n-1) + f(m+1, n) + f(m-1, n)),$$

con lo que de la extremalidad de f se deduce que

$$f(m, n) = f(m+1, n) = f(m-1, n) = f(m, n+1) = f(m, n-1),$$

de donde f es constante. \square

Referencias

- [1] M. G. Krein, D. P. Milman, *On extreme points of regular convex sets*, Studia Mathematica, vol 9, 1940.
- [2] J. B. Conway, *A course in functional analysis*, 2nd ed., Springer-Verlag, 1997.
- [3] W. Rudin, *Functional analysis*, 2nd ed., McGraw-Hill, Inc, 1991.
- [4] D. Stojanoff, *Un curso de análisis funcional*.
- [5] J. L. Bell, D. H. Fremlin, *A geometric form of the axiom of choice*, Fundamenta Mathematicae, vol 77.
- [6] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques, chapitres 1 à 5*, Springer-Verlag 2007.
- [7] R. E. Edwards, *Functional Analysis, theory and applications*, Holt, Rinehart and Winston, 1965.
- [8] J. Munkres, *Topology*, 2nd ed., Prentice hall, 2000.
- [9] J. L Kelley, *The Tychonoff product theorem implies the axiom of choice*, Fundamenta Mathematicae, vol 37.
- [10] M. Cotlar, R. Cignoli, *An introduction to functional analysis*, North-Holland Publishing Company, 1974.
- [11] R. Bhatia, *Matrix Analysis*, Springer-Verlag 1996.