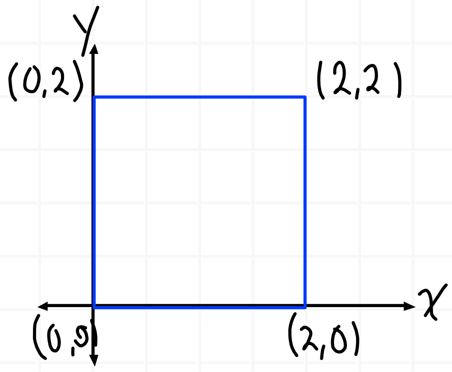
1. Considere la función $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y)\mapsto(y^2,x)$. Sea Γ el cuadrado de vértices $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$, $(0,2)$.

a) Evalue $\int_\Gamma f$ utilizando el teorema de Green y sin hacer uso de él.

b) Evalue $\int_\Gamma f$ siendo Γ la circunferencia de radio 2 y centro origen.

Sol.

a) Sin el teorema:



Sea $\alpha:[0,8]:\mathbb{R}^2$, dada por:

$$\alpha(t) := \begin{cases} (t,0) & \text{si } t\in[0,2) \\ (2,t-2) & \text{si } t\in[2,4) \\ (6-t,2) & \text{si } t\in[4,6) \\ (0,8-t) & \text{si } t\in[6,8] \end{cases}$$

Claramente α es una curva simple a trozos tal que $\alpha([0,8])=\Gamma$, la cual va en el sentido contrario a las agujas del reloj. Entonces:

$$\int_\alpha f = \int_0^8 (f\circ\alpha)\cdot\alpha' = \int_0^8 (f_1\circ\alpha)\alpha_1' + \int_0^8 (f_2\circ\alpha)\alpha_2'$$

De donde:

$$\int_0^8 (f_1\circ\alpha)\alpha_1' = \int_0^2 (f_1\circ(t,0))\cdot 1\,dt + \int_2^4 (f_1\circ(2,t-2))\cdot 0 + \int_4^6 (f_1\circ(6-t,2))\cdot(-1)\,dt$$
$$+ \int_6^8 (f_1\circ(0,8-t))\cdot 0\,dt$$
$$= \int_0^2 (0^2)\cdot 1\,dt + \int_4^6 (4)(-1)\,dt = -4\int_4^6 dt = -8$$

$$\int_0^8 (f_2\circ\alpha)\alpha_2' = \int_0^2 (f_2\circ(t,0))\cdot(0)\,dt + \int_2^4 (f_2\circ(2,t-2))\cdot(1)\,dt + \int_4^6 (f_2\circ(6-t,2))\cdot 0\,dt$$
$$+ \int_6^8 (f_2\circ(0,8-t))\cdot(-1)\,dt$$
$$= \int_2^4 2\,dt + \int_6^8 0\cdot(-1)\,dt = 2\int_2^4 dt = 4$$

Por tanto:

$$\int_\alpha f = -8+4 = -4$$

$$\therefore \int_\Gamma f = 4$$

Teorema.

Sean $d_1 f_2$ y $d_2 f_1$ dadas por: $d_1 f_2(x,y) = 1$ y $d_2 f_1 = 2y$. Claramente $d_1 f_2$ y $d_2 f_1$ son continuas, por tanto, por el teorema de Green:

$$\int_\alpha f = \int_R d_1 f_2 - d_2 f_1$$

Donde $R = [0,2] \times [0,2]$. Por el teorema de Fubini:

$$\int_R d_1 f_2 - d_2 f_1 = \int_0^2 \left(\int_0^2 (1-2y) dx \right) dy = \int_0^2 \left((1-2y) \cdot \int_0^2 dx \right) dy$$

$$= \int_0^2 (2-4y) dy = 2y - 2y^2 \Big|_0^2 = 4 - 2(4) = -4$$

por lo tanto:

$$\int_\Gamma f = 4$$

b) Sin el teorema:

Sea $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (2\cos(t), 2\operatorname{sen}(t))$. Claramente α es una curva regular cerrada simple a trozos, la cual recorre a Γ en el sentido contrario de las manecillas del reloj. Luego:

$$\int_\alpha f = \int_0^{2\pi} (f \circ \alpha) \cdot \alpha' = \int_0^{2\pi} (f_1 \circ \alpha) \alpha_1' + \int_0^{2\pi} (f_2 \circ \alpha) \alpha_2'$$

Donde:

$$\int_0^{2\pi} (f_1 \circ \alpha) \alpha_1' = \int_0^{2\pi} \left(y^2 \circ (2\cos t, 2\operatorname{sen} t) \right) (-2\sin t) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (4\operatorname{sen}^2 t) \cdot (-2\operatorname{sen} t) dt = -8 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3 t \, dt = -8 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t (1 - \cos^2 t) dt$$

sea $g(t) = \cos(t)$, luego: $g'(t) = -\operatorname{sen} t$

$$= 8 \int_0^{2\pi} (1-u^2) \circ (\cos t) \cdot (-\operatorname{sen} t) dt = 8 \int_0^{2\pi} (1-u^2) \circ g \cdot |g'|$$

$$= 8\int_{g(0)}^{g(2\pi)} (1-u^2)\,du = 8\int_1^1 1-u^2\,du = 0$$

Además:

$$\int_0^{2\pi} (F_2\circ\alpha)\alpha_2' = \int_0^{2\pi} \left(x\circ(2\cos t, 2\operatorname{sen} t)\right)\cdot 2\cos t\,dt = \int_0^{2\pi} 4\cos^2 t\,dt = 4\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt$$

$$= 2\int_0^{2\pi} 1+\cos 2t\,dt = 2\left(t+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\Big|_0^{2\pi}\right) = 2(2\pi) = 4\pi$$

Por tanto:

$$\int_\alpha f = 4\pi \Rightarrow \int_\Gamma f = 4\pi$$

Teorema

Claramente Γ es la frontera de: $R = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 4\}$. Como $d_1 f_2 = 1$ y $d_2 f_1 = 2y$, y son ambas continuas, entonces, por el teorema de Green:

$$\int_\alpha f = \int_R d_1 f_2 - d_2 f_1$$

Claramente R es una región de tipo I, pues: $R = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[-2,2]$ y $y\in[-\sqrt{4-x^2}, \sqrt{4-x^2}]\}$. Por tanto:

$$\int_R d_1 f_2 - d_2 f_1 = \int_{-2}^{2}\left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (1-2y)\,dy\right)dx = \int_{-2}^{2}\left(y - y^2\Big|_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\right)dx$$

$$= \int_{-2}^{2}\left(\left[\sqrt{4-x^2}-(4-x^2)\right] - \left[-\sqrt{4-x^2}-(4-x^2)\right]\right)dx$$

$$= \int_{-2}^{2}\left(2\sqrt{4-x^2}\right)dx = 2\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx = 2\left(\frac{\pi\cdot 4}{2}\right) = 4\pi$$

Por tanto $\int_\alpha f = 4\pi \Rightarrow \int_\Gamma f = 4\pi$.

2. Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función definida por $f(x,y)=(x^2-2xy,\ y^2-2xy)$. Sea Γ la parte de la párabola cuya ecuación es $y=x^2$ comprendida entre $(-1,1)$ y $(1,1)$. Evalue la integral de Γ de f a lo largo de Γ en el sentido de las manecillas del reloj.

Sea α una parametrización de Γ en el sentido inverso de las manecillas del reloj. Como $d_1 f_2(x,y) = -2y$ y $d_2 f_1 = -2x$ están definidas y son continuas, entonces, por el teorema de Green:

$$\int_\alpha f = \int_R d_1 f_2 - d_2 f_1$$

donde $R = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[-1,1] \text{ y } y\in[x^2,1]\}$. Claramente R es una región de tipo I, y como $d_1 f_2 - d_2 f_1 = -2y+2x$ es continua, entonces:

$$\int_R d_1 f_2 - d_2 f_1 = \int_{-1}^{1}\left(\int_{x^2}^{1}(2x-2y)\,dy\right)dx = \int_{-1}^{1}\left(2xy - y^2\Big|_{x^2}^{1}\right)dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\left([2x-1]-[2x^3-x^4]\right)dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(x^4-2x^3+2x-1\right)dx$$

$$= \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + x^2 - x\ \Big|_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+1-1\right)-\left(-\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+1+1\right)$$

$$= \frac{2}{5} - 2 = -\frac{8}{5}$$

pero α va en sentido horario, para que vaya en sentido horario, cambiamos el signo:

$$\therefore \int_\Gamma f = \frac{8}{5}$$

Sin teorema: sea $\alpha: [-1,3] \to \mathbb{R}^2$, dado por:

$$\alpha(t) := \begin{cases} (-t,\ t^2) & \text{si } t\in[-1,1) \\ (-2+t,\ 1) & \text{si } t\in[1,3] \end{cases}$$

claramente α es una curva cerrada simple a trozos tal que $\alpha([-1,3]) = \Gamma$.
La misma va en sentido horario, y:

$$\int_\alpha f = \int_{-1}^{3} (f\circ\alpha)\cdot\alpha' = \int_{-1}^{3} (f_1\circ\alpha)\alpha_1' + \int_{-1}^{3} (f_2\circ\alpha)\alpha_2' \text{ ; donde:}$$

$$\int_{-1}^{3} (f_1\circ\alpha)\alpha_1' = \int_{-1}^{1} (f_1\circ\alpha)\alpha_1' + \int_{1}^{3} (f_1\circ\alpha)\alpha_1'$$

$$= \int_{-1}^{1} \left((x^2-2xy)\circ(-t,t^2)\right)\cdot(-1)\,dt + \int_{1}^{3} \left((x^2-2xy)\circ(-2+t,1)\right)\cdot(1)\,dt$$

$$= -\int_{-1}^{1} (t^2+2t^3)\,dt + \int_{1}^{3} (t^2-4t+4)-2(-2+t)\,dt$$

$$= -\int_{-1}^{1} t^2+2t^3\,dt + \int_{1}^{3} (t^2-4t+4+4-2t)\,dt$$

$$= -\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^4}{2}\Big|_{-1}^{1}\right) + \left(\frac{t^3}{3}-3t^2+8t\Big|_{1}^{3}\right)$$

$$= -\left(\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\right) + \left((9-27+24)-\left(\frac{1}{3}-3+8\right)\right)$$

$$= -\frac{2}{3} + (6) - \frac{1}{3} - 5 = -1+1 = 0$$

$$\int_{-1}^{3} (f_2\circ\alpha)\alpha_2' = \int_{-1}^{1} (f_2\circ\alpha)\alpha_2' + \int_{1}^{3} (f_2\circ\alpha)\alpha_2' = \int_{-1}^{1} \left((y^2-2xy)\circ(-t,t^2)\right)\cdot 2t\,dt + \int_{1}^{3} \left((y^2-2xy)\circ\right.$$

$$\left.(-2+t,1)\right)\cdot 0 = \int_{-1}^{1} (t^4+2t^3)\cdot 2t\,dt = \int_{-1}^{1} 2t^5+4t^4\,dt$$

$$= \frac{t^6}{3} + \frac{4}{5}t^5 \Big|_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{3}+\frac{4}{5}\right) - \left(\frac{1}{3}-\frac{4}{5}\right) = \frac{8}{5}$$

$$\therefore \int_\alpha f = \frac{8}{5}$$

3. Sea $\alpha:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$ definida por $\alpha(t)=(a\,\text{sen}t, a\cos t, a(\text{sen}t+\cos t))$, Γ la traza de α. Utilice el teorema de Stokes para evaluar $\int_\Gamma F$ siendo $F:\Gamma\to\mathbb{R}^3$ definida por $F(x,y,z)=(x,x+y,x+y+z)$.

Sol.

Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $f(x,y)=(y,x,y+x)$. Claramente f es de clase C^2. Tome $T=\{(x,y)\in\mathbb{R}\mid x^2+y^2\leq a^2\}$, $C=\partial T$, C la imagen de la curva regular $\beta:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$, $\beta(t)=(a\cos t, a\,\text{sen}t)$. Tenemos que $(f\circ\beta)(t)=(a\,\text{sen}t, a\cos t, a(\text{sen}t+\cos t))=\alpha(t)$. Tomemos $S=f(T)$. Es claro que $f(C)=\Gamma$.

Por el teorema de Stokes:

$$\int_S \text{rot}\,F=\int_\Gamma F$$

recorriendo a C en el sentido cont. a las manecillas del reloj. rot F está dado por:

$$\text{rot}\,F=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ d_1 & d_2 & d_3\\ x & x+y & x+y+z\end{vmatrix}=\hat{\imath}(1-0)-\hat{\jmath}(1-0)+\hat{k}(1-0)=\hat{\imath}-\hat{\jmath}+k=(1,-1,1).$$

La integral de rot$F$ sobre S estará dada por:

$$\int_S \text{rot}\,F=\int_T\langle \text{rot}\,F\circ f, d_1f\times d_2f\rangle$$

donde: $d_1f=(0,1,1)$ y $d_2f=(1,0,1)$. Por tanto:

$$d_1f\times d_2f=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=\hat{\imath}(1)-\hat{\jmath}(-1)+\hat{k}(-1)=(1,1,-1)$$

de esta forma:

$$\int_T\langle \text{rot}\,F\circ f, d_1f\times d_2f\rangle$$

$$= \int_T \langle (1,-1,1),(1,1,-1) \rangle = \int_T 1-2 = -1\int_T \chi_T = -1(\pi \cdot a^2) = -\pi a^2.$$

Sin el teorema:

$$\int_\alpha F = \int_0^{2\pi} (F\circ\alpha)\cdot\alpha'$$
$$= \int_0^{2\pi}(F_1\circ\alpha)\alpha_1' + \int_0^{2\pi}(F_2\circ\alpha)\alpha_2' + \int_0^{2\pi}(F_3\circ\alpha)\alpha_3'$$

Donde:

$$\int_0^{2\pi}(F_1\circ\alpha)\alpha_1' = \int_0^{2\pi}(a\,\text{sen}\,t)\cdot(a\cos t)\,dt = a^2\int_0^{2\pi}\text{sen}\,t\cos t\,dt = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\text{sen}\,2t\,dt$$
$$= \frac{a^2}{2}\left(-\frac{\cos(2t)}{2}\Big|_0^{2\pi}\right) = \frac{a^2}{2}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 0$$

$$\int_0^{2\pi}(F_2\circ\alpha)\alpha_2' = \int_0^{2\pi}(a\,\text{sen}\,t + a\cos t)\cdot(-a\,\text{sen}\,t)\,dt = -\int_0^{2\pi} a^2\text{sen}^2 t - \int_0^{2\pi} a^2\,\text{sen}\,t\cos t\,dt$$
$$= -\int_0^{2\pi} a^2\text{sen}^2 t\,dt = -a^2\cdot(\pi) = -\pi\cdot a^2.$$

$$\int_0^{2\pi}(F_3\circ\alpha)\alpha_3' = \int_0^{2\pi} 2(a\,\text{sen}\,t + a\cos t)\cdot(a\cos t - a\,\text{sen}\,t) = 2a^2\int_0^{2\pi}(\cos^2 t - \text{sen}^2 t)\,dt$$
$$= \int_0^{2\pi} 2a^2(\cos 2t)\,dt = 2a^2\int_0^{2\pi}\cos 2t\,dt = 2a^2\left(\frac{\text{sen}\,2t}{2}\Big|_0^{2\pi}\right) = 0$$

Por lo tanto: $\int_S f = \left|\int_\alpha F\right| = |-\pi a^2| = \pi a^2.$

4. Utilice el teorema de Stokes para evaluar $\int_C F$ siendo $F(x,y,z)=(y^2+z, 2z+x, x-y)$ y $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=a^2 \text{ y } x+y+z=0\}$

Sol.

Considere $f: G\to\mathbb{R}^3$, $f(x,y)=(x,y,-x-y)$, $T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+xy+y^2\leq \frac{a^2}{2}\}$, $\Gamma=\partial T$. Es claro que $f(\Gamma)=C$, por tanto, por el teorema de Stokes:

$$\int_S \operatorname{rot} F = \int_C F$$

donde $S=f(T)$, y:

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ y^2+z & 2z+x & x-y \end{vmatrix} = \hat{\imath}(-1-2)-\hat{\jmath}(1-1)+\hat{k}(1-2y) = (-3,0,1-2y)$$

Claramente T es un conjunto J-medible (su frontera es el contorno de una elipse). También: $d_1f(x,y)=(1,0,-1)$, $d_2f(x,y)=(0,1,-1)$. Por tanto:

$$d_1f\times d_2f = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(-(-1))-\hat{\jmath}(-1)+\hat{k}(1) = (1,1,1)$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}\int_S \operatorname{rot} F &= \int_T \langle \operatorname{rot} F\circ f, d_1f\times d_2f\rangle \\ &= \int_T \langle (-3,0,1-2y),(1,1,1)\rangle \\ &= \int_T -3+1-2y = -2\int_T 1+y\end{aligned}$$

Como $1+y$ es continua, entonces $\int_T 1+y$ existe. Sea $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $h(u,v)=\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right)$. h es un difeomorfismo de clase C^1. Por el teorema de cambio de variable:

$$-2\int_T 1+y = -2\int_{h^{-1}(T)} (1+y)\circ\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right)\cdot |\det h'|$$

donde:

$$\det h' = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow |\det h'| = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto:

$$-2\int_T 1+y = -\int_{h^{-1}(T)} 1 + \frac{u}{2} - \frac{v}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{h^{-1}(T)} 2+u-v$$

y, $h^{-1}(T)$ está dada por: $h^{-1}(T) = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 3u^2+v^2 \leq \frac{a^2}{2} \right\} = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{u^2}{(\frac{a}{\sqrt{6}})^2} + \frac{v^2}{(\frac{a}{\sqrt{2}})^2} \leq 1 \right\}$
$= \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u \in \left[-\frac{a}{\sqrt{6}}, \frac{a}{\sqrt{6}}\right] \text{ y } v \in \left(\underbrace{-\frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{u^2}{(\frac{a}{\sqrt{6}})^2}}}_{c}, \underbrace{\frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{u^2}{(\frac{a}{\sqrt{6}})^2}}}_{c} \right] \right\}$, $h^{-1}(T)$ es una región de tipo I, por tanto:

$$-\frac{1}{2}\int_{h^{-1}(T)} 2+u-v = -\frac{1}{2}\left(\int_{-a/\sqrt{6}}^{a/\sqrt{6}} \left(\int_{-c}^{c} (2+u-v)\,dv \right) du \right) = -\frac{1}{2}\int_{-a/\sqrt{6}}^{a/\sqrt{6}} \left((2+u)v - \frac{v^2}{2} \Big|_{-c}^{c} \right) du$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-\frac{a}{\sqrt{6}}}^{a/\sqrt{6}} \left(\left[(2+u)c - \frac{c^2}{2} \right] - \left[-(2+u)c + \frac{c^2}{2} \right] \right) du = -\frac{1}{2}\int_{-a/\sqrt{6}}^{a/\sqrt{6}} 2(2+u)\cdot c\,du$$

$$= -\int_{-a/\sqrt{6}}^{a/\sqrt{6}} (2+u)\frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{6u^2}{a^2}}\,du = -\frac{a}{\sqrt{2}}\int_{-a/\sqrt{6}}^{a/\sqrt{6}} (2+u)\sqrt{1 - \frac{6u^2}{a^2}}\,du$$

$$= -\sqrt{2}a\int_{-a/\sqrt{6}}^{a/\sqrt{6}} \sqrt{1 - \frac{6u^2}{a^2}}\,du - \frac{a}{\sqrt{2}}\int_{-a/\sqrt{6}}^{a/\sqrt{6}} u\sqrt{1 - \frac{6u^2}{a^2}}\,du$$

Donde $\sqrt{2}\int_{-a/\sqrt{6}}^{a/\sqrt{6}} a\sqrt{1 - \frac{6u^2}{a^2}}\,du = \pi\left(\frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{6}} \right) = \frac{\pi a^2}{2\sqrt{3}}$, y:

$\int_{-a/\sqrt{6}}^{a/\sqrt{6}} u\sqrt{1 - \frac{6u^2}{a^2}}\,du = \frac{1}{a}\int_{-a/\sqrt{6}}^{a/\sqrt{6}} u\sqrt{a^2 - 6u^2}\,du$; $w(u) = a^2 - 6u^2 \Rightarrow w' = -12u$, $w\left(\frac{a}{\sqrt{6}}\right) = a^2 - 6\left(\frac{a^2}{6}\right) = 0$

y $w\left(-\frac{a}{\sqrt{6}}\right) = a^2 - 6\left(\frac{a^2}{6}\right) = 0$. Por el teorema de cambio de variable en $\mathbb{R}$:

$$\frac{1}{a}\cdot -\frac{1}{12}\int_{-a/\sqrt{6}}^{a/\sqrt{6}} \sqrt{w(u)}\,w'\,du = \frac{1}{a}\cdot -\frac{1}{12}\int_0^0 \sqrt{w}\,dw = 0.$$

Por tanto:

$$\int_S \operatorname{rot} F = -\frac{\pi a^2}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \int_C F = -\frac{\pi a^2}{2\sqrt{3}}$$

5. Determine el área de la región cortada del plano $x+y+z=0$ y el cilindro $x^2+y^2=a^2$.

Sol.

Para obtener el área de esta región, elijamos F tal que $\operatorname{rot} F = n$, donde n es un vector normal al plano $x+y+z=0$, $n=(1,1,1)$. Tomemos $F(x,y,z)=(z,x,y)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ z & x & y \end{vmatrix} = \hat{\imath}(1) - \hat{\jmath}(-1) + \hat{k}(1) = (1,1,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Sea ahora $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y)=(x,y,-x-y)$. Tome $T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq a^2\}$, es claro que $\Gamma=\partial T$ y $T\cup\Gamma\subset\mathbb{R}^2$. f es de clase C^2. Tomando $C=f(\Gamma)$, tenemos que, por el teorema de Stokes:

$$\int_S \operatorname{rot} F = \int_C F$$

Donde S es el área a obtener. Luego:

$$\int_S \operatorname{rot} F = \int_T \langle \operatorname{rot} F \circ f, d_1 f \times d_2 f \rangle$$

donde $\operatorname{rot} F\circ f = (1,1,1)\frac{1}{\sqrt{3}}$ y, $d_1 f = (1,0,-1)$ y $d_2 f = (0,1,-1)$. Por tanto:

$$d_1 f \times d_2 f = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(1) - \hat{\jmath}(-1) + \hat{k}(1) = (1,1,1).$$ Por tanto:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \int_T \langle (1,1,1),(1,1,1) \rangle = \frac{3}{\sqrt{3}} \int_T \chi_T = \sqrt{3}(\pi \cdot a^2) = \sqrt{3}\pi a^2$$