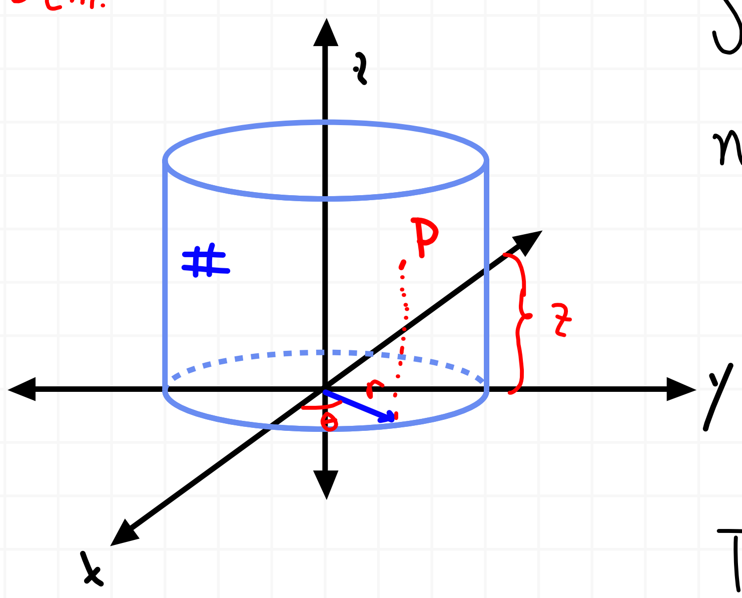
2-2 Ejercicios.

1. Show that the cylinder $\{(x, y, z) \in R^3; x^2 + y^2 = 1\}$ is a regular surface, and find parametrizations whose coordinate neighborhoods cover it.

Dem:



Sea $p \in C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1\}$, en coordenadas cilíndricas:

$$x = r\cos\theta = \cos\theta$$

$$y = r\sin\theta = \sin\theta$$

$$z = z$$

Tenemos 2 casos:

1) $P=(x,y,z)$ cumple que $\theta \neq 0$, i.e $x \neq 1, y \neq 0$. Para este caso, $\exists\ V_p = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq 0\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x<0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ y $U_p = \{(\theta, z) \mid \theta \in]0,2\pi[$ y $z \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$, donde V_p y U_p son abiertos con $\overline{X}_1 : U_p \to V_p \cap S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1$ y, $y \neq 0\}$ dada como:

$$\forall (\theta, z) \in U_p,\ \overline{X}_1(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z)$$

Con X_1 cumpliendo:

a) $\overline{X}_1$ es diferenciable, pues las funciones $\cos\theta$, $\sin\theta$ y z tienen derivadas parciales continuas.

b) $\overline{X}_1$ es homeomorfismo, pues su inversa $\overline{X}^{-1} : V_p \cap S \to U_p$, $(x,y,z) \mapsto (\text{ang}(x,y)^{(1)}, z)$ es continua (ya que cada función componente es continua).

c) $d\overline{X}_1(p) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva. En efecto: Como

$$d\overline{X}_1(p) = \begin{pmatrix} -\sin\theta & 0 \\ \cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \overline{X}_1}{\partial \theta} & \frac{\partial \overline{X}_1}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Donde:

$$\frac{\partial \bar{X}_1}{\partial \theta} \times \frac{\partial \bar{X}_1}{\partial z} = (0, -\sin\theta, -\cos\theta) \neq 0, \ \forall\ (\theta, z) \in \mathbb{R}^2.$$

2) $P=(x,y,z)$ cumple $\theta = 0$, i.e $x=0$ y $y=0$. Tome $V_p = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0\}$ y $U_p = \{(\theta, z) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ y $z \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$, V_p y U_p abiertos. Y $\bar{X}_2 : U_p \to V_p \cap S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1$ y $x > 0\}$, como:

$$\forall\ (\theta, z) \in U_p,\ \bar{X}_2(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z)$$

Se procede análogamente a 1) para verificar a)–c).

Por 1) y 2), C es sup. regular con carta $\{\bar{X}_i\}_{i=1}^{2}$.

$\square$

2. Is the set $\{(x, y, z) \in R^3; z = 0 \text{ and } x^2 + y^2 \leq 1\}$ a regular surface? Is the set $\{(x, y, z) \in R^3; z = 0, \text{ and } x^2 + y^2 < 1\}$ a regular surface?

Sol.

1) El conjunto $C_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1$ y $z=0\}$ no es sup. regular. En efecto, supongu que lo es, entonces para $(1,0,0) \in C_1$, $\exists\ V \subseteq \mathbb{R}^3$ una vecindad de $p=(1,0,0)$ tal que $V \cap S$ es la gráfica de alguna función. En este caso, $V \cap S$ es la gráfica de una función $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, U abierto, con $(x,y) \mapsto f(x,y)$, pues si fuera de y, z ó z, x no podría ser función. Así $V = \text{graph}(f)$. Pero como f es diferenciable, es continua.

3. Show that the two-sheeted cone, with its vertex at the origin, that is, the set $\{(x, y, z) \in R^3; x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$, is not a regular surface.

Dem: Supongamos que $2C$ sup. regular. Como $(0,0,0) \in 2C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-z^2=0\} \subseteq \mathbb{R}^3$, $\exists\, V_0 \subseteq \mathbb{R}^3$ y $U_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ abiertos, y $\mathbb{X}_0 : U_0 \to V_0 \cap 2C$ tal que $\mathbb{X}_0$ cumple 2)-3).

Si $K \subseteq \mathbb{R}^2$ es un conexo en U_0 que contiene a $\mathbb{X}_0^{-1}(0,0,0)$ (i.e $K \subseteq U_0$ conexo y $\mathbb{X}_0^{-1}(0,0,0) \in K$), tal que $K \setminus \{\mathbb{X}_0^{-1}(0,0,0)\}$ es conexo (lo anterior se argumenta por análisis), entonces como $\mathbb{X}_0 : U_0 \to V_0 \cap S$ es homeomorfismo, preserva conexidad, luego $\mathbb{X}_0(K \setminus \{\mathbb{X}_0^{-1}(0,0,0)\}) = \mathbb{X}_0(K) \setminus \{(0,0,0)\}$ es conexo.

Pero, este conjunto no es conexo. Sean $p_1, p_2 \in \mathbb{X}_0(K) \setminus \{(0,0,0)\}$, como $K \setminus \{\mathbb{X}_0^{-1}(0,0,0)\}$ es conexo, $\exists\, \alpha : [0,1] \to K \setminus \{\mathbb{X}_0^{-1}(0,0,0)\}$ continua m $\alpha(0) = \mathbb{X}_0^{-1}(p_1)$ y $\alpha(1) = \mathbb{X}_0^{-1}(p_2)$.

Si $p_1 = (x_1, y_1, z_1)$ m $z_1 > 0$ y $p_2 = (x_2, y_2, z_2)$ m $z_2 < 0$, como $\mathbb{X}_0 \circ \alpha : [0,1] \to \mathbb{X}_0(K) \setminus \{(0,0,0)\}$ es un camino que une a p_1 y p_2, el cuál es continuo (por ser $\mathbb{X}_0$ y α continuas), $\exists\, p_3 \in \mathbb{X}_0(K) \setminus \{(0,0,0)\}$ m $p_3 = (x_3, y_3, z_3)$ y $z_3 = 0$.

Pero, $(x_3, y_3, z_3) \in \mathbb{X}_0(K) \setminus \{(0,0,0)\} \Leftrightarrow x_3^2 + y_3^2 = 0 \Leftrightarrow x_3 = y_3 = 0 \Leftrightarrow (x_3, y_3, z_3) = (0,0,0)$ $\times\!\!c$.

Luego $\mathbb{X}_0(K) \setminus \{(0,0,0)\}$ no es conexo. Así $2C$ no es sup. regular. $\square$

4. Let $f(x, y, z) = z^2$. Prove that 0 is not a regular value of f and yet that $f^{-1}(0)$ is a regular surface.

Dem: Con $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, su derivada será:

$$df(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \;\; \frac{\partial f}{\partial y} \;\; \frac{\partial f}{\partial z} \right)\Big|_p = \left(0 \;\; 0 \;\; 2z \right)\Big|_p$$

Cuando $p = (0,0,0)$: $df(p) = (0 \;\; 0 \;\; 0) \equiv 0 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, la cual no es supravectiva.

Por tanto, $(0,0,0)$ no es un valor regular de f. Pero:

$$f^{-1}(\{0\}) = \{(x,y,z) \mid z = 0\}$$
$$= P_{xy} \subseteq \mathbb{R}^3$$

es sup. regular, pues P_{xy} es sup. regular.

$\square$

*5. Let $P = \{(x, y, z) \in R^3; x = y\}$ (a plane) and let $\mathbf{x}: U \subset R^2 \to R^3$ be given by

$$\mathbf{x}(u, v) = (u + v, u + v, uv),$$

where $U = \{(u, v) \in R^2; u > v\}$. Clearly, $\mathbf{x}(U) \subset P$. Is $\mathbf{x}$ a parametrization of P?

Sol.

Sea $(x,y,z) \in P$, entonces para que $P \subseteq \underline{X}(U)$, en este caso, debemos encontrar $u, v \in \mathbb{R}$, $u < v$ tq

$$x = u + v, \quad y = u + v \quad y \quad z = uv$$

Si $x = 0$, entonces $u + v = 0 \Rightarrow u = -v$, así $uv = (-v)v = -v^2$, como $v^2 \geq 0 \Rightarrow -v^2 \leq 0$, así el punto $(0,0,1) \notin \underline{X}(U)$. Por tanto, $\underline{X}$ no es una parametrización de P.

$\square$

6. Give another proof of Prop. 1 by applying Prop. 2 to $h(x, y, z) = f(x, y) - z$.

7. Let $f(x, y, z) = (x + y + z - 1)^2$.

a. Locate the critical points and critical values of f.

Dem:

Recordando que:

PROPOSITION 1. *If* f: U $\to$ R *is a differentiable function in an open set* U *of* R², *then the graph of* f, *that is, the subset of* R³ *given by* (x, y, f(x, y)) *for* (x, y) $\in$ U, *is a regular surface.*

Dem:

Sea $h(x,y,z) = f(x,y) - z$, $\forall (x,y,z) \in U \times \mathbb{R}$. Veamos que:

$$\begin{aligned} h^{-1}(\{0\}) &= \{(x,y,z) \mid f(x,y) - z = 0 \text{ y } (x,y) \in U\} \\ &= \{(x,y,f(x,y)) \mid (x,y) \in U\} \\ &= \operatorname{graph}(f) \end{aligned}$$

Por lo que para probar que graph(f) es sup. regular, basta probar que h es diferenciable en $U \times \mathbb{R}$, y que 0 es un valor regular de h.

Como f es diferenciable:

$$dh(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad 1 \right)\Big|_p$$

donde $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ y 1 son funciones continuas, $\forall p \in U$. Luego h es diferenciable. Veamos que 0 es un valor regular de h. Si $(x,y,z) \in U \times \mathbb{R}$ son m $h(x,y,z) = f(x,y) - z = 0 \Rightarrow f(x,y) = z$, i.e $h(x,y,f(x,y)) = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} dh(x,y,f(x,y)) : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u,v,t) &\longmapsto u \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(p) + v \frac{\partial f}{\partial y}(p) + t \end{aligned}$$

donde $p = (x,y,f(x,y))$. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\exists\, (0,0,\alpha) \in \mathbb{R}^3$ m

$$dh(x,y,f(x,y))(0,0,\alpha) = \alpha$$

i.e, $dh(x,y,f(x,y))$ es suprayectiva, así p es un punto regular y 0 es un valor regular.
Por la proposición 2, $h^{-1}(\{0\}) = \operatorname{graph}(f)$ es una sup. regular.

$\square$

7. Let $f(x, y, z) = (x + y + z - 1)^2$.

a. Locate the critical points and critical values of f.

b. For what values of c is the set $f(x, y, z) = c$ a regular surface?

c. Answer the questions of parts a and b for the function $f(x, y, z) = xyz^2$.

a) Como f tiene derivadas parciales continuas, $\forall p \in \mathbb{R}^3$:

$$df(p) = \big(2(x+y+z-1) \quad 2(x+y+z-1) \quad 2(x+y+z-1) \big)\Big|_p$$

$df(p) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ no es suprayectiva cuando $2(x+y+z-1)\big|_p = 0$, i.e:

$$x+y+z-1 = 0$$

i.e, los puntos críticos de f están en el plano $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z-1=0\}$.

b) Para que $f(x,y,z) = c$ sea sup. regular, entonces: f diferenciable y, ser $c>0$ un punto regular.

$\square$

8. Let $\mathbf{x}(u, v)$ be as in Def. 1. Verify that $d\mathbf{x}_q \colon R^2 \longrightarrow R^3$ is one-to-one if and only if

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \neq 0.$$

Sol.

Si $d\bar{X}_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $q \in U$ es uno a uno:

$$\operatorname{Ker}(d\bar{X}_q) = \{(0,0)\}$$

i.e $d\bar{X}_q(x,y) = (0,0,0) \Leftrightarrow (x,y) = 0$, i.e:

$$\Leftrightarrow d\bar{X}_q(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \bar{X}}{\partial u}(q) \text{ y } \frac{\partial \bar{X}}{\partial v}(q) \text{ son l.i.}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \bar{X}}{\partial u}(q) \times \frac{\partial \bar{X}}{\partial v} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^3$$

$\square$

9. Let V be an open set in the xy plane. Show that the set

$$\{(x, y, z) \in R^3;\, z = 0 \text{ and } (x, y) \in V\}$$

is a regular surface.

Dem:

Sea $f: V \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada como: $\forall\, (x,y) \in V$, $f(x,y) = 0$. Como f es diferenciable, V es abierto, entonces graph(f) es una sup. regular, donde:

$$\begin{aligned} \operatorname{graph}(f) &= \{(x,y,f(x,y)) \mid (x,y) \in V\} \\ &= \{(x,y,z) \mid (x,y) \in V \text{ y } z = 0\} \end{aligned}$$

$\square$

10. Let C be a figure "8" in the xy plane and let S be the cylindrical surface over C (Fig. 2-11); that is,

$$S = \{(x, y, z) \in R^3; (x, y) \in C\}.$$

Is the set S a regular surface?

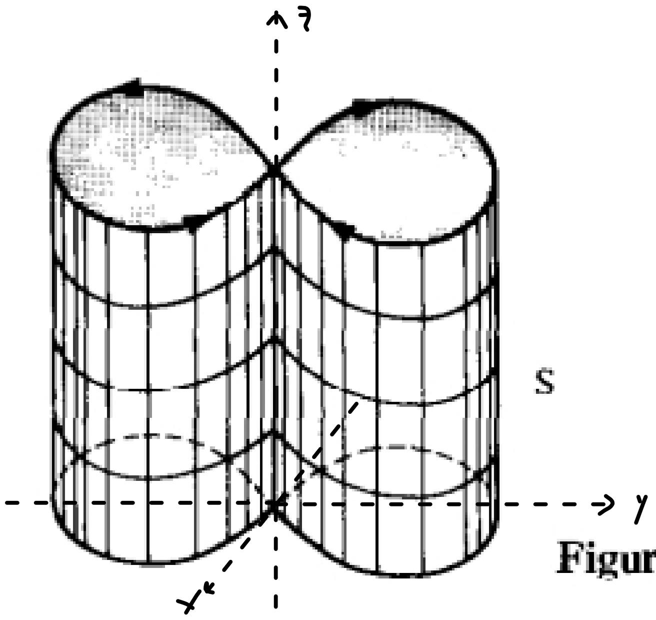


Figure 2-11

Sol.

No, pues la superficie tiene autointersecciones.

11. Show that the set $S = \{(x, y, z) \in R^3; z = x^2 - y^2\}$ is a regular surface and check that parts a and b are parametrizations for S:

a. $\mathbf{x}(u, v) = (u + v, u - v, 4uv)$, $(u, v) \in R^2$.

***b.** $\mathbf{x}(u, v) = (u \cosh v, u \sinh v, u^2)$, $(u, v) \in R^2$, $u \neq 0$.

Which parts of S do these parametrizations cover?

Dem:

Sea $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada como: $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = x^2 - y^2 - z$. Claramente f es diferenciable, con df_p, $p \in \mathbb{R}^3$:

$$df_p = \begin{pmatrix} 2x & -2y & -1 \end{pmatrix}\Big|_p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

donde 0 es un valor regular. En efecto, si $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ m $f(x_0,y_0,z_0) = 0$, entonces:

$$df(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} 2x_0 & -2y_0 & -1 \end{pmatrix}$$

Así, $\forall (u,v,w) \in \mathbb{R}^3$, $df(x_0,y_0,z_0)(u,v,w) = 2x_0 u - 2y_0 v - w$. Veamos que es suproyectiva. En efecto: si $t \in \mathbb{R}$, $\exists (0,0,-t) \in \mathbb{R}^3$ m $df(x_0,y_0,z_0)(0,0,-t) = t$.

Por tanto, 0 es valor regular de $df(x_0,y_0,z_0)$. Por tanto, el conjunto:

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{0\}) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = 0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2\} \\ &= S \end{aligned}$$

Es sup. regular.

a) Considere $\mathbf{X}(\mathbb{R}^2) = \{(u+v, u-v, 4uv) \mid (u,v) \in \mathbb{R}^2\}$. Veamos que $\mathbf{X}: \mathbb{R}^2 \to S$. Sea $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, entonces $\mathbf{X}(u,v) \in \mathbb{R}^2$ pues:

$$\begin{aligned} (u+v)^2 - (u-v)^2 &= u^2 + 2uv + v^2 - u^2 + 2uv - v^2 \\ &= 4uv \end{aligned}$$

además es biyectiva. Si $(x,y,z) \in S$, $\exists$ $u = \frac{1}{2}(x+y)$, $v = \frac{1}{2}(x-y)$, con $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ m

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(u,v) &= (x, y, (x+y)(x-y)) \\ &= (x, y, z) \end{aligned}$$

y, es inyectiva, pues si $\mathbf{X}(u,v) = \mathbf{X}(u',v') \Rightarrow u+v = u'+v'$, $u-v = u'-v'$, $4uv = 4u'v' \Rightarrow$ $u = u'$, $v = v'$.

También es diferenciable, pues tiene derivadas parciales continuas, y su inversa:

$$\bar{X}^{-1}(x,y,z) = \left(\tfrac{1}{2}(x+y), \tfrac{1}{2}(x-y) \right)$$

es continua. Además:

$$\bar{X}_u = (1, 1, 4v), \bar{X}_v = (1, -1, 4u)$$

$$\Rightarrow \| \bar{X}_u \wedge \bar{X}_v \|^2 = \| (-4u-4v, -4v+4u, -2) \|^2$$

$$= 32u^2 + 32v^2 + 4 \neq 0, \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

Luego $\bar{X}$ es parametrización de S. ($d\bar{X}_q$ es 1-1).

b) Recordando que:

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Veamos que $\bar{X}$ es parametrización. Si $(u,v) \in \mathbb{R}^2$:

$$\bar{X}(u,v) = \left(u \frac{e^v + e^{-v}}{2}, u \frac{e^v - e^{-v}}{2}, u^2 \right)$$

y:

$$\frac{u^2}{4}(e^{2v} + e^{-2v} + 2) - \frac{u^2}{4}(e^{2v} + e^{-2v} - 2) = \frac{u^2}{4} \cdot 4$$

$$= u^2$$

Así $\bar{X} : \mathbb{R}^2 \to S$. Además

12. Show that $\mathbf{x}: U \subset R^2 \longrightarrow R^3$ given by

$$\mathbf{x}(u, v) = (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u), \qquad a, b, c \neq 0,$$

where $0 < u < \pi$, $0 < v < 2\pi$, is a parametrization for the ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Describe geometrically the curves $u = \text{const.}$ on the ellipsoid.

Dem:

Tome $U =]0, \pi[\times]0, 2\pi[$. Para $(u,v) \in U$ tenemos que $\mathbb{X}(u,v) \in E^2$ (E^2 es el elipsoide en $\mathbb{R}^3$). En efecto: como $\mathbb{X}(u,v) = (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u)$, entonces:

$$\frac{a^2 \sin^2 u \cos^2 v}{a^2} + \frac{b^2 \sin^2 u \sin^2 v}{b^2} + \frac{c^2 \cos^2 u}{c^2} = \sin^2 u + \cos^2 u$$
$$= 1$$

$\therefore \mathbb{X}(u,v) \in E^2, \forall (u,v) \in U$. Veamos que es supraeyectiva.

*13. Find a parametrization for the hyperboloid of two sheets $\{(x, y, z) \in R^3;\ x^2 - y^2 + z^2 = 1\}$.

14. A half-line $[0, \infty)$ is perpendicular to a line E and rotates about E from a given

Sol.

Sea $\mathbb{X} : \mathbb{R}\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}$ dada como:

$$\mathbb{X}(u,v) = (\sinh u \cos v,\ \sinh u \sin v,\ \cosh u)$$

$\mathbb{X}$ está bien definido, y $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$:

$$-\sinh^2 u \cos^2 v - \sinh^2 u \sin^2 v + \cosh^2 u = -\sinh^2 u + \cosh^2 v$$
$$= 1$$

Luego $\mathbb{X}(U) \subseteq H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x^2 - y^2 + z^2 = 1\}$. Ya sabemos que H es sup. regular. Para ver que $\mathbb{X}$ es parametrización de H, solo basta probar que para $p \in \mathbb{X}(U)$, $\mathbb{X}$ cumple ser diferenciable y $d\mathbb{X}_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $\mathbb{X}(q) = p$ es supriyectiva (y ver que $\mathbb{X}$ es uno a uno).

Veamos que es diferenciable, pues sus funciones componentes son todas de clase $C^\infty(\mathbb{R})$.

Ahora, su diferencial:

$$d\mathbb{X}_q = \begin{pmatrix} \cosh u \cos v & -\sinh u \sin v \\ \cosh u \sin v & \sinh u \cos v \\ \sinh u & 0 \end{pmatrix}$$

Veamos que es supriyectivo, pues:

$$\|\mathbb{X}_u \wedge \mathbb{X}_v\|^2 = \|(\sinh^2 u \cos v,\ \sinh^2 u \sin v,\ -\sinh u \cosh u \sin^2 v - \sinh u \cosh u \cos^2 v)\|^2$$
$$= \sinh^4 u \cos^2 v + \sinh^4 u \sin^2 v + \sinh^2 u \cosh^2 u$$
$$= \sinh^2 u (\sinh^2 u + \cosh^2 u)$$
$$= \sinh^2 u (1 + 2\sinh^2 u) \neq 0,\ \forall u \in \mathbb{R}$$

14. A half-line $[0, \infty)$ is perpendicular to a line E and rotates about E from a given initial position while its origin 0 moves along E. The movement is such that when $[0, \infty)$ has rotated through an angle θ, the origin is at a distance $d = \sin^2(\theta/2)$ from its initial position on E. Verify that by removing the line E from the image of the rotating line we obtain a regular surface. If the movement were such that $d - \sin(\theta/2)$, what else would need to be excluded to have a regular surface?

Sol.

Considere la recta $E = \{p + \hat{q}t \mid t \in \mathbb{R}\}$, $p \in \mathbb{R}^3$ y $\hat{q} \in \mathbb{R}^3$ es un vector unitario. Para simplificar, digamos que E es el eje z. Entonces el conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^3$ está dado por:

$$S = \{(t\cos\theta, t\,\text{sen}\,\theta, d = \sin^2(\theta/2)) \mid t \in]0, \infty[\text{ y } \theta \in [0, 2\pi[\}$$

Suponiendo que la recta se encuentra en $(0,0,0)$ cuando $\theta = 0$. Veamos que es una curva regular. Sea

$$X_1 :]0,\infty[\times]0, 2\pi[\to S$$
$$(t, \theta) \mapsto (t\cos\theta, t\,\text{sen}\,\theta, \sin^2(\theta/2))$$

Claramente X_1 es función continua y diferenciable pues sus derivadas parciales son todas continuas, y su inversa:

$$X^{-1}(t\cos\theta, t\,\text{sen}\,\theta, \sin^2(\theta/2)) = (t, \theta)$$

es continua. Aquí tenemos:

$$dX_q = \left.\begin{pmatrix} \cos\theta & -t\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & t\cos\theta \\ 0 & \frac{\sin\theta}{2} \end{pmatrix}\right|_q$$

donde: $X_{1t} \wedge X_{1\theta} = \left(\sin\theta \frac{\sin\theta}{2}, -\cos\theta \frac{\sin\theta}{2}, t\right)$

$$\Rightarrow \|X_{1t} \wedge X_{1\theta}\|^2 = \left(\frac{\sin^2\theta}{4} + t^2\right)^2 \neq 0, \ \forall (t,\theta) \in]0,\infty[\times]0, 2\pi[$$

Así dX_{1q} es 1-1. Para un punto $p \in S$ en $\theta = 0$, tomamos $X_2 :]0,\infty[\times]-\pi, \pi[\to S$ como:

$$X_2(t, \theta) = (t\cos\theta, t\,\text{sen}\,\theta, \sin^2(\tfrac{\theta}{2}))$$

la cual cumple lo mismo que X_1. Luego S es sup. regular.

En el otro caso hay que limitar el valor de θ para que no haya auto-intersecciones. En este caso: $\theta \in [0, 2\pi[$. (ó excluir los valores pares de π).

$\square$

***15.** Let two points $p(t)$ and $q(t)$ move with the same speed, p starting from $(0, 0, 0)$ and moving along the z axis and q starting at $(a, 0, 0)$, $a \neq 0$, and moving parallel to the y axis. Show that the line joining $p(t)$ to $q(t)$ describes a set in R^3 given by $y(x - a) + zx = 0$. Is this a regular surface?

Dem:

Veamos que el Conjunto:

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y(x-a)+zx = 0\}$$

es sup. regular o no. Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada como:

$$f(x,y,z) = y(x-a)+zx$$

Entonces:

$$df_p = \begin{pmatrix} y+z & x-a & x \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

tiene como valor regular a 0, pues:

$$\begin{pmatrix} y+z & x-a & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow y = z, \; x = a \text{ y } x = 0.$$

Como $a \neq 0$, entonces $x \neq 0$. Así df_p es Suprayectiva. Luego no tiene puntos críticos. Luego 0 es valor regular de f, así:

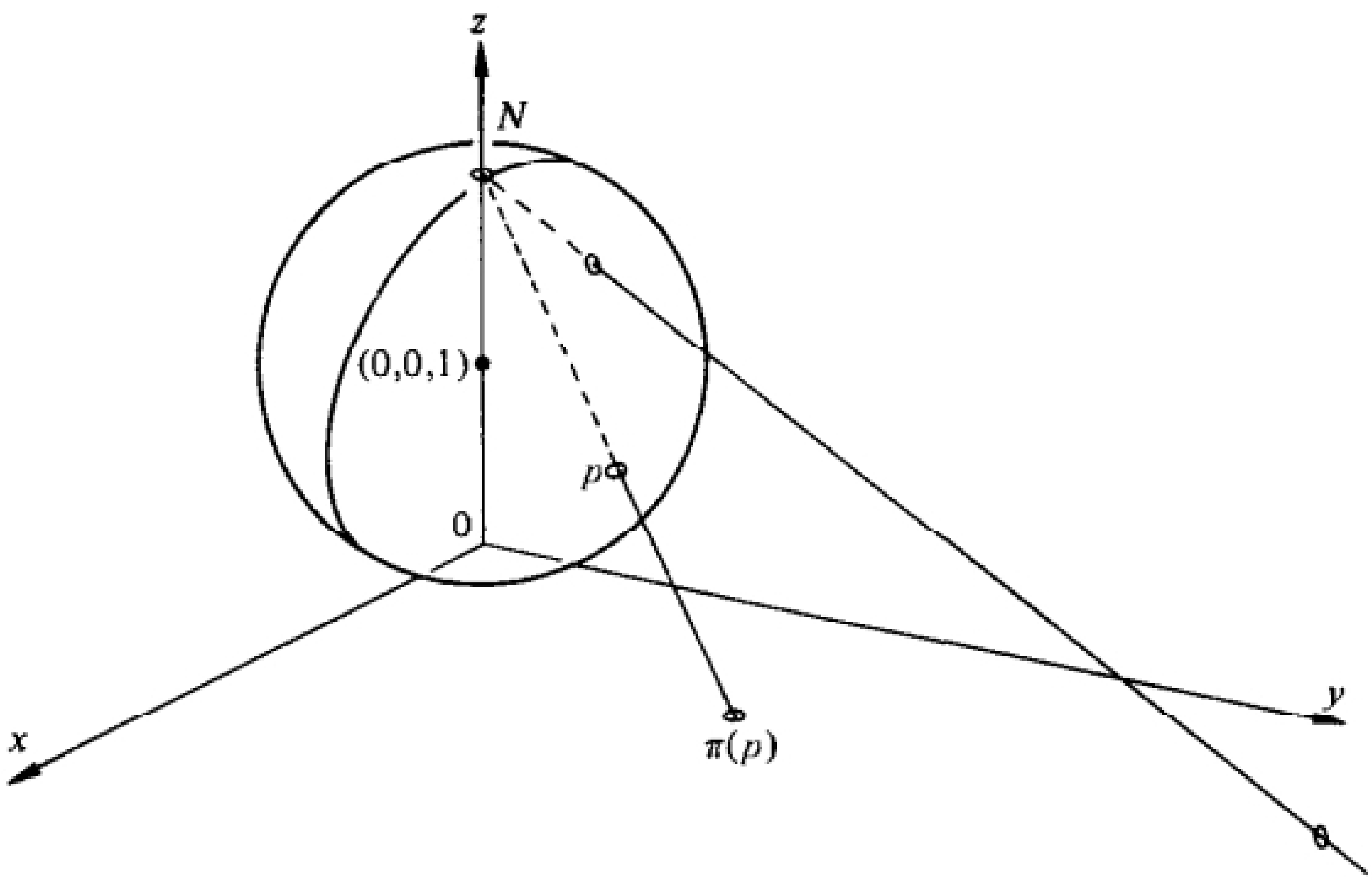
$$S = f^{-1}(\{0\}) \text{ es sup. regular.}$$

Veamos que el conjunto se forma por esa recta.

16. One way to define a system of coordinates for the sphere S^2, given by $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$, is to consider the so-called *stereographic projection* $\pi: S^2 \sim \{N\} \longrightarrow R^2$ which carries a point $p = (x, y, z)$ of the sphere S^2 minus the north pole $N = (0, 0, 2)$ onto the intersection of the xy plane with the straight line which connects N to p (Fig. 2-12). Let $(u, v) = \pi(x, y, z)$, where $(x, y, z) \in S^2 \sim \{N\}$ and $(u, v) \in xy$ plane.

a. Show that $\pi^{-1}: R^2 \longrightarrow S^2$ is given by

$$\pi^{-1}\begin{cases} x = \dfrac{4u}{u^2+v^2+4}, \\ y = \dfrac{4v}{u^2+v^2+4}, \\ z = \dfrac{2(u^2+v^2)}{u^2+v^2+4}. \end{cases}$$



b. Show that it is possible, using stereographic projection, to cover the sphere with two coordinate neighborhoods.

17. Define a regular curve in analogy with a regular surface. Prove that

Sol.

Para un punto $p \in P_{xy} \subseteq \mathbb{R}^2$, $\exists!$ recta digamos $l_p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ tal que esta conecta a N y a p. En efecto:

Si $p = (x, y, 0)$, entonces el vector $\vec{v} = (0,0,2) - (x,y,0) = (-x,-y,2)$ colocado en p apunta a $(0,0,2)$. Sea $l_p(t) = p + \vec{v}t$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Esta curva parametriza a una recta que

Conecta a p con N, pues:

$$l_p(0) = p \quad y \quad l_p(1) = (x,y,0) + (-x,-y,2)\cdot 1$$
$$= (0,0,2)$$
$$= N$$

Veamos que $Tr(l_p) \cap S^2 \setminus \{N\} \neq \emptyset$ (más aún, consta de un punto). En efecto:

Si intersectan, entonces:

$$l_p(t) = (x - xt, y - yt, 2t), \text{ veamos:}$$

$$\Rightarrow (x-xt)^2 + (y-yt)^2 + (2t-1)^2 = x^2(1-t)^2 + y^2(1-t)^2 + (2t-1)^2$$
$$= x^2(1-2t+t^2) + y^2(1-2t+t^2) + 4t^2 - 4t + 1$$
$$= 1.$$

$$\Rightarrow (x^2+y^2+4)t^2 + (-2x^2-2y^2-4)t + (x^2+y^2) = 0. \text{ Por tanto,}$$

$$\Rightarrow t^2 + 2\left(\frac{-x^2-y^2-2}{x^2+y^2+4}\right)t + \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+4} = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{\frac{2x^2+2y^2+4}{x^2+y^2+4} \pm \sqrt{\frac{(x^2+y^2+2)^2\cdot 2^2}{(x^2+y^2+4)^2} - \frac{4x^2+4y^2}{x^2+y^2+4}}}{2}$$

$$= \frac{x^2+y^2+2}{x^2+y^2+4} \pm \frac{1/2}{x^2+y^2+4}\sqrt{\cancel{4x^4} + \cancel{4y^4} + 16 + \cancel{8x^2y^2} + \cancel{16x^2} + \cancel{16y^2} - \cancel{4x^4} - \cancel{4x^2y^2} - \cancel{16x^2} - \cancel{4y^4} - \cancel{4x^2y^2} - \cancel{16y^2}}$$

$$= \frac{x^2+y^2+2}{x^2+y^2+4} \pm \frac{1/2}{x^2+y^2+4}\sqrt{16}$$

$$= \frac{1}{x^2+y^2+4}(x^2+y^2+2 \pm 2).$$

Si $t = \frac{1}{x^2+y^2+4}(x^2+y^2+4) = 1$, $l_p(t) = N$. En otro caso:

$$l_p(t) = \left(x - x\cdot\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+4},\ y - y\,\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+4},\ \frac{2(x^2+y^2)}{x^2+y^2+4}\right)$$
$$= \left(\frac{4x}{x^2+y^2+4},\ \frac{4y}{x^2+y^2+4},\ \frac{2(x^2+y^2)}{x^2+y^2+4}\right)$$

Por tanto $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$, $\pi^{-1}: \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{N\}$ está dada como:

$$\pi^{-1}(u,v) = \left(\frac{4u}{u^2+v^2+4},\ \frac{4v}{u^2+v^2+4},\ \frac{2(u^2+v^2)}{u^2+v^2+4}\right)$$

Por construcción, π^{-1} está bien definida y es suprayectiva.

Este mismo procedimiento lo podemos hacer, tomando el plano $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2\}$ y trazando la recta desde $S = (0,0,0)$ (el polo sur), obteniendo el resultado anterior.

$\square$

17. Define a regular curve in analogy with a regular surface. Prove that

a. The inverse image of a regular value of a differentiable function

$$f\colon U \subset R^2 \longrightarrow R$$

is a regular plane curve. Give an example of such a curve which is not connected.

b. The inverse image of a regular value of a differentiable map

$$F\colon U \subset R^3 \longrightarrow R^2$$

is a regular curve in R^3. Show the relationship between this proposition and the classical way of defining a curve in R^3 as the intersection of two surfaces.

***c.** The set $C = \{(x, y) \in R^2;\, x^2 = y^3\}$ is not a regular curve.

Dem:

Def. Una curva regular, es un conjunto C tal que $\forall\, p \in C$ $\exists$ una vecindad V en $\mathbb{R}^3$ y un mapeo $\mathbf{X}: U \to V \cap S$, $U \subseteq \mathbb{R}$ abierto tal que:

1. $\mathbf{X}$ es diferenciable.
2. $\mathbf{X}$ es homeomorfismo.
3. $\forall\, q \in U$, $d\mathbf{X}_q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ es uno a uno.

De a):

Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$ un valor regular de f, con f diferenciable. Probaremos que

$$C = f^{-1}(\{a\}) \subseteq \mathbb{R}^2$$

es curva regular. Sea $p \in f^{-1}(\{a\})$, entonces $f(p) = a$. Como a es valor regular, p es punto regular de f, el diferencial $df_p: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es suprayectiva.

***18.** Suppose that $f(x, y, z) = u = \text{const.}$, $g(x, y, z) = v = \text{const.}$,

$$h(x, y, z) = w = \text{const.},$$

describe three families of regular surfaces and assume that at (x_0, y_0, z_0) the Jacobian

$$\frac{\partial(f, g, h)}{\partial(x, y, z)} \neq 0.$$

Prove that in a neighborhood of (x_0, y_0, z_0) the three families will be described by a mapping $F(u, v, w) = (x, y, z)$ of an open set of R^3 into R^3, where a local parametrization for the surface of the family $f(x, y, z) = u$, for example, is obtained by setting $u = \text{const.}$ in this mapping. Determine F for the case where the three families of surfaces are

$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = u = \text{const.}$; (spheres with center $(0, 0, 0)$);

$g(x, y, z) = \dfrac{y}{x} = v = \text{const.}$, (planes through the z axis);

$h(x, y, z) = \dfrac{x^2 + y^2}{z^2} = w = \text{const.}$, (cones with vertex at $(0, 0, 0)$).

Sol.

Sea $F^{-1}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada como:

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad F^{-1}(x,y,z) = (f(x,y,z), g(x,y,z), h(x,y,z))$$

Como describen 3 familias de sup. regulares, $f, g, h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ son diferenciables. Entonces:

$$dF^{-1}_q = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix}\right|_q$$

Por hip. en $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, $|dF^{-1}_q| \neq 0$, donde $q = (x_0, y_0, z_0)$. Luego, por el teorema de la func. inversa, existen vecindades V de q y $\mathcal{U}$ de $F^{-1}(q)$

$$F^{-1}: V \to \mathcal{U}$$

es difeomorfismo local. Así F está bien definida, i.e $F(u,v,w) = (x,y,z)$ es diferenciable.

*19.

Let $\alpha: (-3, 0) \longrightarrow R^2$ be defined by (Fig. 2-13)

$$\alpha(t)\begin{cases} = (0, -(t+2)), & \text{if } t \in (-3, -1), \\ = \text{regular parametrized curve joining } p = (0, -1) \text{ to } q = \left(\frac{1}{\pi}, 0\right), & \\ & \text{if } t \in \left(-1, -\frac{1}{\pi}\right), \\ = \left(-t, -\sin\frac{1}{t}\right), & \text{if } t \in \left(-\frac{1}{\pi}, 0\right). \end{cases}$$

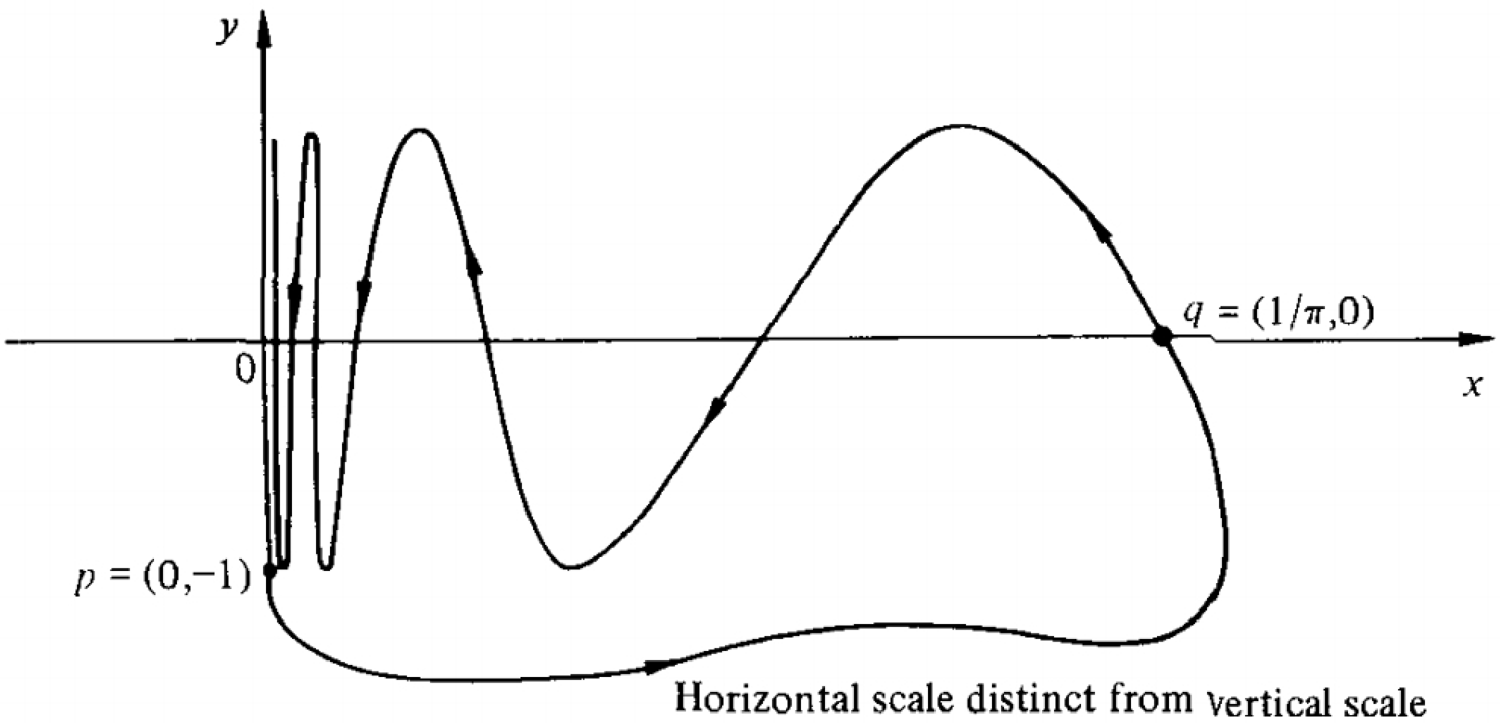


Figure 2-13

It is possible to define the curve joining p to q so that all the derivatives of α are continuous at the corresponding points and α has no self-intersections. Let C be the trace of α.

a. Is C a regular curve?

b. Let a normal line to the plane R^2 run through C so that it describes a "cylinder" S. Is S a regular surface?

Notas:

1) angl : $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, 2\pi]$ es la función que mide el ángulo θ entre 2 vectores: