Def. Sea X un conjunto. Se dice que una función $d: X \times X \to \mathbb{R}$ es una métrica sobre X si

i) $d(x,y) \geq 0$.

ii) $d(x,y) = d(y,x)$.

iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

iv) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

$\forall\, x,y,z \in X$.

Ejemplos:

1) $(\mathbb{R}, d)$ es un espacio métrico con

$$d(x,y) := |x-y| \ \forall\, x,y \in \mathbb{R}$$

2) Sea X un conjunto arbitrario. Se define d como:

$$d(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y. \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

a d se le llama la métrica discreta sobre X. En efecto:

i) Sean $x,y \in X$. Si $x = y$, entonces $d(x,y) = 0 \Rightarrow d(x,y) \geq 0$. Si $x \neq y$, $d(x,y) = 1 \geq 0$.

ii) Sean $x,y \in X$. Si $x = y$, $d(x,y) = 0$ y $d(y,x) = 0$, luego $d(x,y) = d(y,x)$. Si $x \neq y$, $d(x,y) = 1$ y $d(y,x) = 1$, así $d(x,y) = d(y,x)$.

iii) Sean $x,y,z \in X$.

- Si $x = z$, entonces $y = x$ o $y \neq x$. Si $y \neq x$, entonces:

$$d(x,z) = 0 \leq 2 = 1+1 = d(x,y) + d(y,z)$$

Si $x = y$:

$$d(x,z) = 0 \leq 0+0 = d(x,y) + d(y,z).$$

- Si $x \neq z$, entonces $y = x$, $y = z$ ó, $y \neq x$ y $y \neq z$. Para lo primero:

$$d(x,z) = 1 \leq 0+1 = d(x,y) + d(y,z)$$

Si $y=z$:

$$d(x,z) = 1 \leq 1+0 = d(x,y) + d(y,z)$$

Si $y \neq x$ y $y \neq z$:

$$d(x,z) = 1 \leq 1+1 = d(x,y) + d(y,z)$$

Por tanto, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ $\forall$ $x,y,z \in \mathbb{X}$.

iv) Es inmediato de la definición.

Por (i), (ii), (iii) y (iv), d es una métrica sobre $\mathbb{X}$.

3) Sea $\mathbb{X} = \{a,b,c\}$, $d: \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, se define

$$d(a,b) = 1, \quad d(a,c) = 2 \text{ y } d(b,c) = 3$$

con $d(a,a) = d(b,b) = d(c,c) = 0$, y $d(x,y) = d(y,x)$ $\forall x,y \in \mathbb{X}$. Es claro que d es una métrica sobre $\mathbb{X}$.

Si $d(a,c) = 1.5$, d dejará de ser una métrica, pues:

$$3 = d(b,c) \not\leq d(b,a) + d(a,c) = 1 + 1.5 = 2.5$$

Sistema Ampliado De Los Números Reale

$\overline{\mathbb{R}}$ se define como: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, donde $+\infty, -\infty \notin \mathbb{R}$. Dados $x,y \in \overline{\mathbb{R}}$ se definen $x+y$, $x \cdot y$ y $x<y$ como en $\mathbb{R}$ si $x,y \in \mathbb{R}$, y:

$$(\pm\infty) + x = x + (\pm\infty) = \pm\infty$$
$$(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$$
$$(\pm\infty) \cdot x = x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \text{ si } 0 < x.$$
$$(\pm\infty) \cdot x = x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty \text{ si } x < 0.$$
$$(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty.$$
$$(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty.$$

Además $-\infty < x < +\infty \ \forall x \in \mathbb{R}$, quedando indeterminados: $(+\infty)+(-\infty)$, $(-\infty)+(+\infty)$, $0\cdot(\pm\infty)$ y $(\pm\infty)\cdot 0$.

Con lo anterior, entonces todo subconjunto de $\mathbb{R}$ tiene supremo e ínfimo en $\overline{\mathbb{R}}$.

Sea $f:\overline{\mathbb{R}} \to [-1,1]$ dada por:

$$f(x) := \frac{\arctan(x)}{\pi/2}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

y $f(+\infty)=1$, $f(-\infty)=-1$. Claramente f es biyectiva ($\mathrm{Card}\,\overline{\mathbb{R}} = \aleph_1$) y su inversa está dada por:

$$f^{-1}(y) = \tan\left(\frac{\pi}{2}y\right) \ \forall y \in (-1,1)$$

y $f^{-1}(-1) = -\infty$, $f^{-1}(1) = +\infty$.

Con lo anterior, se define $d:\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ como:

$$d(x,y) = |f(x)-f(y)| \ \forall x,y \in \overline{\mathbb{R}}.$$

La cual es una métrica sobre $\overline{\mathbb{R}}$. En efecto:

i) Sean $x,y \in \overline{\mathbb{R}}$, entonces $d(x,y) = |f(x)-f(y)| \geq 0$.

ii) Sean $x,y \in \overline{\mathbb{R}}$, entonces $d(x,y) = |f(x)-f(y)| = |f(y)-f(x)| = d(y,x)$.

iii) Sean $x,y,z \in \overline{\mathbb{R}}$, entonces $d(x,z) = |f(x)-f(z)| = |f(x)-f(y)-(f(y)-f(z))|$
$\leq |f(x)-f(y)| + |f(y)-f(z)| = d(x,y) + d(y,z)$

iv) Sean $x,y \in \overline{\mathbb{R}}$:

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow |f(x)-f(y)| = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow \frac{2}{\pi}\operatorname{atan}(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{atan}(y)$$
$$\Leftrightarrow x = y.$$

Por i), ii), iii) y iv), d es una métrica sobre $\overline{\mathbb{R}}$.

Si en lugar de la f usada, se usa otra función estrictamente creciente continua con límites finitos en $+\infty$ y $-\infty$, p.ej:

$$f(x) := \frac{x}{1+|x|} \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Se obtendrá otra métrica sobre $\overline{\mathbb{R}}$ topológicamente equivalente a la anterior. A $(\overline{\mathbb{R}}, d)$ se le llama el sistema ampliado de los números reales o recta real extendida.

Espacio Producto

Def. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos. Se define $d: (X \times Y) \times (X \times Y) \to \mathbb{R}$ como:

$$d((x,y),(x',y')) = \max\{d(x,x'), d(y,y')\}$$

$\forall (x,y),(x',y') \in X \times Y$. d es una métrica sobre $X \times Y$, en efecto:

i) Sean $(x,y),(x',y') \in X \times Y$, entonces:

$$d((x,y),(x',y')) = \max\{d(x,x'), d(y,y')\} \geqslant 0$$

pues $d(x,x') \geqslant 0$ y $d(y,y') \geqslant 0$.

ii) Sean $(x,y),(x',y') \in X \times Y$, entonces:

$$\begin{aligned} d((x,y),(x',y')) &= \max\{d(x,x'), d(y,y')\} \\ &= \max\{d(x',x), d(y',y)\} \\ &= d((x',y'),(x,y)) \end{aligned}$$

iii) Sean $(x,y),(x',y')$ y $(x'',y'') \in X \times Y$, entonces:

$$\begin{aligned} d((x,y),(x'',y'')) &= \max\{d(x,x''), d(y,y'')\} \\ &\leqslant \max\{d(x,x')+d(x',x''), d(y,y')+d(y',y'')\} \\ &\leqslant \max\{d(x,x'), d(y,y')\} + \max\{d(x',x''), d(y',y'')\} \\ &= d((x,y),(x',y')) + d((x',y'),(x'',y'')). \end{aligned}$$

iv) Sean $(x,y),(x',y') \in X \times Y$:

$$\begin{aligned} d((x,y),(x',y')) = 0 &\Leftrightarrow \max\{d(x,x'), d(y,y')\} = 0 \Leftrightarrow d(x,x') = 0 \text{ y } d(y,y') = 0 \\ &\Leftrightarrow x = x' \text{ y } y = y' \Leftrightarrow (x,y) = (x',y'). \end{aligned}$$

Por lo anterior, d es una métrica sobre $X \times Y$, denominado $(X \times Y, d)$ el espacio métrico producto.

Subespacios Métricos

Def. Sea $(\mathbb{X}, d_X)$ un espacio métrico, y $A \subset \mathbb{X}$. Se define $d_A : A \times A \to \mathbb{R}$, como $d_A = d_X|_A$, i.e:

$$d_A(a,b) = d_X(a,b) \quad \forall\, a,b \in A.$$

d_A es una métrica sobre A. En este caso, (A, d_A) es un subespacio métrico de $(\mathbb{X}, d_X)$.

Proposición:

Sea $(\mathbb{X}, d)$ un espacio métrico. Se tiene:

$$|d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z), \quad \forall\, x,y,z \in \mathbb{X}.$$

Dem:

Sean $x,y,z \in \mathbb{X}$. Como $(\mathbb{X}, d)$ es espacio métrico, entonces:

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

$$\Rightarrow d(x,y) - d(y,z) \leq d(x,z) \quad \dots (1)$$

Además:

$$d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z)$$

$$\Rightarrow -d(x,z) \leq d(x,y) - d(y,z) \quad \dots (2)$$

Por (1) y (2):

$$|d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z)$$

q.e.d.

En general, $\forall\, x,y,u,v \in \mathbb{X}$:

$$|d(x,y) - d(u,v)| \leq d(x,u) + d(y,v)$$

Dem:

Sean $x,y,u,v \in \mathbb{X}$, por la prop. anterior:

$$|d(x,y) - d(y,u)| \leq d(x,u) \quad \text{y}$$

$$|d(y,u) - d(u,v)| \leq d(y,v)$$

Por tanto:

$$|d(x,y)-d(u,v)| \leqslant |d(x,y)-d(y,u)|+|d(y,u)-d(u,v)| \leqslant d(x,u)+d(y,v)$$

q.e.d.