

Notas de Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

24 de mayo de 2024

Índice general

1. Transformación de Fourier	2
1.1. Conceptos Fundamentales	2
1.2. Teoremas de Transferencia e Inversión	13

Capítulo 1

Transformación de Fourier

La transformada de Fourier de una función de \mathbb{R}^n en \mathbb{C} generaliza en cierta forma la noción de coeficientes de Fourier de funciones periódicas

1.1. Conceptos Fundamentales

Definición 1.1.1

Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Se definen $\mathcal{F}f, \mathcal{F}^*f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$\mathcal{F}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x|y)} f(y) dy \quad \text{y} \quad \mathcal{F}^*f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x|y)} f(y) dy$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Las funciones $\mathcal{F}f$ y \mathcal{F}^*f se llaman las **transformaciones de Fourier de f** . Las aplicaciones \mathcal{F} y \mathcal{F}^* de $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ en el conjunto de funciones de \mathbb{R}^n en \mathbb{C} se llaman las **transformaciones de Fourier**.

Observación 1.1.1

Se tiene lo siguiente:

- I. Los operadores \mathcal{F} y \mathcal{F}^* son lineales de $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ en el espacio de funciones de \mathbb{R}^n en \mathbb{C} .
- II. Las funciones $\mathcal{F}f(x)$ y $\mathcal{F}^*f(x)$ están definidas para todo $x \in \mathbb{R}^n$ si y sólo si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.
- III. En caso de existir, se tiene que $\mathcal{F}f(x) = \mathcal{F}^*f(-x)$.

Demostración:

De (i): Es claro que si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ entonces $\mathcal{F}f(x)$ y $\mathcal{F}^*f(x)$ están definidas para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Para la recíproca, en particular están definidas para $x = \vec{0}$, es decir que

$$\mathcal{F}f(\vec{0}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\vec{0}|y)} f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} e^0 f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy < \infty$$

luego $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

De (ii): Es inmediata. ■

Definición 1.1.2

Sea $f \in \mathcal{L}_1([0, \infty[, \mathbb{C})$. Se definen

$$\mathcal{F}_c f(x) = \int_0^\infty f(y) \cos xy \, dy \quad \text{y} \quad \mathcal{F}_s f(x) = \int_0^\infty f(y) \sin xy \, dy$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Las funciones $\mathcal{F}_c f$ y $\mathcal{F}_s f$ se llaman **las transformadas coseno y seno de Fourier de f** .

Definición 1.1.3

Sea $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ una función. Se definen las funciones f^P y f^I de \mathbb{R} en \mathbb{C} como

$$f^P(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y,

$$f^I(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geq 0 \\ -f(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Proposición 1.1.1

Sea $f \in \mathcal{L}_1([0, \infty[, \mathbb{C})$. Se tiene

$$\mathcal{F} f^P(x) = 2\mathcal{F}_c f(x) \quad \text{y} \quad \mathcal{F} f^I(x) = -2i\mathcal{F}_s f(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostración:

Sea $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{F} f^P(x) &= \int_{\mathbb{R}} f^P(y) e^{-i(x|y)} \, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f^P(y) e^{-ixy} \, dy \\ &= \int_{-\infty}^0 f^P(y) e^{-ixy} \, dy + \int_0^{\infty} f^P(y) e^{-ixy} \, dy \\ &= \int_{-\infty}^0 f(-y) e^{-ixy} \, dy + \int_0^{\infty} f(y) e^{-ixy} \, dy \\ &= \int_0^{\infty} f(y) e^{ixy} \, dy + \int_0^{\infty} f(y) e^{-ixy} \, dy \\ &= \int_0^{\infty} f(y) \left[e^{ixy} + \overline{e^{ixy}} \right] \, dy \\ &= \int_0^{\infty} f(y) \left[2\Re(e^{ixy}) \right] \, dy \\ &= \int_0^{\infty} 2f(y) \cos xy \, dy \\ &= 2 \int_0^{\infty} f(y) \cos xy \, dy \\ &= 2\mathcal{F}_c f(x) \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f^I(x) &= \int_{\mathbb{R}} f^I(y) e^{-ixy} dy \\
&= \int_{-\infty}^0 f^I(y) e^{-ixy} dy + \int_0^{\infty} f^I(y) e^{-ixy} dy \\
&= \int_{-\infty}^0 (-f(-y)) e^{-ixy} dy + \int_0^{\infty} f(y) e^{-ixy} dy \\
&= - \int_0^{\infty} f(y) e^{ixy} dy + \int_0^{\infty} f(y) e^{-ixy} dy \\
&= \int_0^{\infty} f(y) [-e^{ixy} + e^{-ixy}] dy \\
&= \int_0^{\infty} f(y) [-\cos xy - i \sin xy + \cos(-xy) + i \sin(-xy)] dy \\
&= \int_0^{\infty} f(y) [-2i \sin xy] dy \\
&= -2i \int_0^{\infty} f(y) \sin xy dy \\
&= -2i \mathcal{F}_s f(x)
\end{aligned}$$

lo que prueba el resultado. ■

Corolario 1.1.1

Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

- I. Si f es par, entonces $\mathcal{F}f(x) = 2 \int_0^{\infty} f(y) \cos xy dy$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- II. Si f es impar, entonces $\mathcal{F}f(x) = -2i \int_0^{\infty} f(y) \sin xy dy$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.1.1

Se tiene lo siguiente:

- I. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función $f = \chi_I$ donde I es un intervalo con extremos $a < b$ en \mathbb{R} . Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_I(y) e^{-ixy} dy \\
&= \int_a^b e^{-ixy} dy \\
&= \begin{cases} \frac{e^{-ixb} - e^{-ixa}}{-ix} & \text{si } x \neq 0 \\ b - a & \text{si } x = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

En particular, si $a > 0$ se tiene que

$$\mathcal{F}\chi_{[-a, a]}(x) = \begin{cases} \frac{2 \sin ax}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Como $\mathcal{F}\chi_{[-a, a]}$ no es integrable en \mathbb{R} se concluye que, en general, la transformada de Fourier de una función integrable no necesariamente es integrable.

- II. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función

$$f(x) = e^{-k|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

donde $k > 0$. Como f es integrable, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k|y|} e^{-ixy} dy \\
&= \int_{-\infty}^0 e^{ky} e^{-ixy} dy + \int_0^{\infty} e^{-ky} e^{-ixy} dy \\
&= \int_0^{\infty} e^{-ky} e^{ixy} dy + \int_0^{\infty} e^{-ky} e^{-ixy} dy \\
&= \int_0^{\infty} e^{-ky} e^{(-k+ix)y} dy + \int_0^{\infty} e^{-ky} e^{(-k-ix)y} dy \\
&= \frac{-1}{-k+ix} + \frac{-1}{-k-ix} \\
&= \frac{k+ix+k-ix}{k^2+x^2} \\
&= \frac{2k}{k^2+x^2}
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.1.2

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función

$$f(x) = e^{-kx^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

donde $k > 0$. Como f es par se tiene que

$$\mathcal{F}f(x) = 2 \int_0^{\infty} e^{-ky^2} \cos xy dy$$

Sea $g(x) = \int_0^{\infty} e^{-ky^2} \cos xy dy$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se afirma que

$$g'(x) = - \int_0^{\infty} ye^{-ky^2} \sin xy dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En efecto, observemos que

$$\left| ye^{-ky^2} \sin xy \right| \leq ye^{-ky^2}, \quad \forall y \geq 0$$

donde la función de la derecha es integrable e independiente de x (se nota fácilmente que una de sus antiderivadas es $y \mapsto -\frac{1}{2k}e^{-ky^2}$, por el T.F.C. II evaluando en 0 e ∞ se obtiene que la función original es integrable en $[0, \infty[$). Por el Teorema de derivación se sigue que

$$g'(x) = - \int_0^{\infty} ye^{-ky^2} \sin xy dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Veamos ahora que

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \int_0^\infty y e^{-ky^2} \sin xy \, dy \\
&= - \left[-\frac{1}{2k} e^{-ky^2} \sin xy \Big|_0^\infty + \frac{1}{2k} \int_0^\infty x e^{-ky^2} \cos xy \, dy \right] \\
&= - \left[0 - 0 + \frac{x}{2k} \int_0^\infty e^{-ky^2} \cos xy \, dy \right] \\
&= -\frac{x}{2k} \int_0^\infty e^{-ky^2} \cos xy \, dy \\
&= -\frac{x}{2k} g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
g'(x) + \frac{x}{2k} g(x) &= 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow e^{\frac{x^2}{4k}} \left(g'(x) + \frac{x}{2k} g(x) \right) &= 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow \frac{d}{dx} \left(e^{\frac{x^2}{4k}} g(x) \right) (x_0) &= 0, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow e^{\frac{x^2}{4k}} g(x) &= c, \quad \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

En particular,

$$\begin{aligned}
c &= g(0) \\
&= \int_0^\infty e^{-ky^2} \, dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{k}} \int_0^\infty e^{-u^2} \, du \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{k}}
\end{aligned}$$

Por ende,

$$g(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{k}} e^{-\frac{x^2}{4k}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

De donde se sigue que

$$\mathcal{F}f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{k}} e^{-\frac{x^2}{4k}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En particular, si $k = \frac{1}{2}$ entonces $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y,

$$\mathcal{F}f(x) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{2\pi} f(x)$$

es decir que f es un vector propio del operador transformada de Fourier.

Proposición 1.1.2

Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

I. Si $g(x) = e^{i\left(\begin{smallmatrix} a \\ y \end{smallmatrix}\right)} f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\mathcal{F}g(x) = \mathcal{F}f(x - a), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

II. Si $g(x) = f(x - a)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\mathcal{F}g(x) = e^{-i\left(\begin{smallmatrix} x \\ a \end{smallmatrix}\right)} \mathcal{F}f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

III. Si $g(x) = \overline{f(-x)}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\mathcal{F}g(x) = \overline{\mathcal{F}f(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

IV. Sea $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si $g(x) = f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\mathcal{F}g(x) = |\lambda|^n \mathcal{F}f(\lambda x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Demostración:

De (i): Veamos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)} g(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)} e^{i\left(\begin{smallmatrix} a \\ y \end{smallmatrix}\right)} f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\left(\begin{smallmatrix} x-a \\ y \end{smallmatrix}\right)} f(y) dy \\ &= \mathcal{F}f(x - a) \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

De (ii): Veamos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)} g(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)} f(y - a) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\left(\begin{smallmatrix} x \\ u+a \end{smallmatrix}\right)} f(u) du \\ &= e^{-i\left(\begin{smallmatrix} x \\ a \end{smallmatrix}\right)} \mathcal{F}f(x) \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

De (iii): Veamos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)} \overline{f(-y)} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)} \overline{f(y)} dy \\ &= \overline{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)} f(y) dy} \\ &= \overline{\mathcal{F}f(x)} \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

De (iv): Veamos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x|y)} g(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x|y)} f\left(\frac{y}{\lambda}\right) dy, \text{ haciendo el cambio de variable } u = \frac{y}{\lambda} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x|\lambda u)} f(u) |\lambda|^n du \\
&= |\lambda|^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\lambda x|u)} f(u) du \\
&= |\lambda|^n \mathcal{F}f(\lambda x)
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. ■

Teorema 1.1.1

Si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, entonces,

$$|\mathcal{F}f(x)| \leq \mathcal{N}_1(f), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Así pues, $\mathcal{F}f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ es una función acotada. Si $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ denota al espacio de funciones acotadas de \mathbb{R}^n en \mathbb{C} provisto de la norma uniforme, entonces $\mathcal{F} \cdot$ es una aplicación lineal continua de $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ tal que $\|\mathcal{F} \cdot\| = 1$.

Demostración:

Para todo $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, se tiene que

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x|y)} f(y) dy \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy \\
&= \mathcal{N}_1(f), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

Notemos también que $\|\mathcal{F} \cdot\| \leq 1$.

Para probar la otra desigualdad se busca una función $P \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ tal que $\mathcal{N}_\infty(\mathcal{F}P) = \mathcal{N}_1(P) > 0$. Por ejemplo, la función $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ dada por:

$$P(x) = e^{-\sum_{k=1}^n |x_k|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

satisface

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}P(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x|y)} P(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x|y)} e^{-\sum_{k=1}^n |y_k|} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y_1| - ix_1 y_1} \dots e^{-|y_n| - ix_n y_n} dy_1 \dots dy_n \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y_1| - ix_1 y_1} dy_1 \right) \dots \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y_n| - ix_n y_n} dy_n \right)
\end{aligned}$$

Se sabe por ejemplos anteriores que la transformada de $t \mapsto e^{-|t|}$ es $\frac{2}{1+t^2}$, para todo $t \in \mathbb{R}$, así pues,

$$\mathcal{F}P(x) = \frac{2^n}{(1+x_1^2) \cdots (1+x_n^2)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

de donde,

$$\mathcal{N}_\infty(\mathcal{F}P) = 2^n$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1(P) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{k=1}^n |x_k|} dx_1 \cdots dx_n \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} dt \right]^n \\ &= 2^n \left[\int_0^{\infty} e^{-|t|} dt \right] \\ &= 2^n \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1(P) &= \mathcal{N}_\infty(\mathcal{F}P) \\ &\leq \|\mathcal{F} \cdot\| \mathcal{N}_1(P) \\ &\Rightarrow 1 \leq \|\mathcal{F} \cdot\| \end{aligned}$$

por tanto, de lo anterior se deduce que $\|\mathcal{F} \cdot\| = 1$. ■

Proposición 1.1.3

Si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, entonces $\mathcal{F}f$ es uniformemente continua en \mathbb{R}^n .

Demostración:

Basta probar que si $\{x_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ y $\{y_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ son dos sucesiones en \mathbb{R}^n tales que $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|x_\nu - y_\nu\| = 0$, entonces

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} |\mathcal{F}f(x_\nu) - \mathcal{F}f(y_\nu)| = 0$$

Considere entonces dos sucesiones que cumplan lo anterior. Se tiene

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}f(x_\nu) - \mathcal{F}f(y_\nu)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left(e^{-i(x_\nu|z)} - e^{-i(y_\nu|z)} \right) f(z) dz \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x_\nu|z)} \left(1 - e^{-i(y_\nu - x_\nu|z)} \right) f(z) dz \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \left(1 - e^{-i(y_\nu - x_\nu|z)} \right) \right| |f(z)| dz \end{aligned}$$

donde

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left| 1 - e^{-i(y_\nu - x_\nu|z)} \right| |f(z)| = 0, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$$

y, además

$$\left| 1 - e^{-i(y_\nu - x_\nu|z)} \right| |f(z)| \leq 2 |f(z)|, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$$

donde la función de la derecha es integrable e independiente de ν . Por Lebesgue se sigue que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} |\mathcal{F}f(x_\nu) - \mathcal{F}f(y_\nu)| = 0$$

así, $\mathcal{F}f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ es una función uniformemente continua. ■

Observación 1.1.2

$\mathcal{F}f$ es una función uniformemente continua acotada en \mathbb{R}^n si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

Teorema 1.1.2 (Teorema de Riemman-Lebesgue)

Si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, entonces

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \mathcal{F}f(x) = 0$$

Demostración:

Se probará por casos:

- I. Sea $P = I_1 \times \cdots \times I_n \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectángulo acotado en \mathbb{R}^n donde I_k es un intervalo de extremos $a_k \leq b_k$ para todo $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Se considera el caso en que $f = \chi_P$. En particular, notemos que

$$f(x) = \chi_{I_1}(x_1) \cdots \chi_{I_n}(x_n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x|z)} f(z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix_1 z_1} \chi_{I_1}(z_1) \cdots e^{-ix_n z_n} \chi_{I_n}(z_n) dz_1 \cdots dz_n \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_1 z_1} \chi_{I_1}(z_1) dz_1 \right) \cdots \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_n z_n} \chi_{I_n}(z_n) dz_n \right) \end{aligned}$$

luego,

$$\mathcal{F}f(x) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

donde

$$\varphi_k(x_k) = \begin{cases} \frac{e^{-ix_k b_k} - e^{-ix_k a_k}}{-ik}, & \text{si } x_k \neq 0 \\ b_k - a_k, & \text{si } x_k = 0 \end{cases}$$

para $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Es claro que $\lim_{x_k \rightarrow \infty} \varphi_k(x_k) = 0$ para todo $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} |\varphi_k(x_k)| &\leq |\mathcal{F}\chi_{I_k}(x_k)| \\ &\leq \mathcal{N}_1(\chi_{I_k}) \\ &= b_k - a_k \end{aligned}$$

para $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Sea

$$c = \max_{1 \leq k \leq n} \{b_k - a_k\}$$

Dado $\varepsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que para todo $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ es tiene

$$|x_k| > R \Rightarrow |\varphi_k(x_k)| < \varepsilon$$

Si se toma la norma cúbica $\|\cdot\|$ de \mathbb{R}^n , al suponer que $\|x\| > R$ se tendrá que $|x_k| > R$ para algún $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, luego

$$\|x\| > R \Rightarrow |\mathcal{F}\chi_P(x)| = |\varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n)| \leq c^{n-1} \varepsilon$$

Así pues, el Teorema es cierto para $f = \chi_P$. Claramente por linealidad de la transformación de Fourier el Teorema sigue siendo cierto si f es una función escalonada en \mathbb{R}^n .

II. Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ y tomemos $\varepsilon > 0$. Por la densidad de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, existe $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ tal que

$$\mathcal{N}_1(f - \varphi) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}f(x)| &= |\mathcal{F}f(x) - \mathcal{F}\varphi(x)| + |\mathcal{F}\varphi(x)| \\ &= |\mathcal{F}(f - \varphi)(x)| + |\mathcal{F}\varphi(x)| \\ &\leq \mathcal{N}_1(f - \varphi) + |\mathcal{F}\varphi(x)|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + |\mathcal{F}\varphi(x)|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Por tanto, de (i) existe $R > 0$ tal que

$$\|x\| > R \Rightarrow |\mathcal{F}\varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

de donde se sigue que

$$\|x\| > R \Rightarrow |\mathcal{F}f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + |\mathcal{F}\varphi(x)| < \varepsilon$$

lo que prueba el resultado. ■

Teorema 1.1.3

Si $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, entonces $\mathcal{F}(f * g) = (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g)$.

Demostración:

Sean $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x|y)} f * g(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x|y)} dy \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(y - z) dz \end{aligned}$$

ya se sabe que $(y, z) \mapsto f(z)g(y - z)e^{-i(x|y)}$ es integrable en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Por Fubini:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z) dz \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x|y)} g(y - z) dy, \text{ haciendo el cambio de variable } y = u + z \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z) dz \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x|u+z)} g(u) du \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x|z)} f(z) dz \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x|y)} g(y) dy \right) \\ &= (\mathcal{F}f(x))(\mathcal{F}g(x)) \end{aligned}$$

lo que prueba el resultado. ■

Teorema 1.1.4

Sea $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ el álgebra de Banach de las funciones de \mathbb{R}^n en \mathbb{C} continuas y nulas en el infinito provisto de la norma uniforme. Entonces la aplicación $\mathcal{F} \cdot : L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ es un homomorfismo continuo entre ambas álgebras de Banach.

La norma de $\mathcal{F} \cdot$ considerada como aplicación lineal es $\|\mathcal{F} \cdot\| = 1$.

Demostración:

Es un resumen de las propiedades anteriores. ■

Observación 1.1.3

Más adelante se verá que $\mathcal{F}\cdot$ es inyectiva pero no es suprayectiva.

Proposición 1.1.4

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{N}$. Se supone que $x \mapsto x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n} f(x)$ es integrable en \mathbb{R}^n para toda colección $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ tales que $m_1 + \cdots + m_n \leq r$. Entonces, $\mathcal{F}f$ es de clase C^r en \mathbb{R}^n . Si $k \in \llbracket 1, k \rrbracket$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ se tiene que

$$\partial_{\alpha_1} \cdots \partial_{\alpha_k} \mathcal{F}f = \mathcal{F}g$$

donde $g(x) = (-ix_{\alpha_1})(-ix_{\alpha_2}) \cdots (-ix_{\alpha_k})f(x)$.

Demostración:

Se tiene

$$\mathcal{F}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)} f(y) dy$$

Al aplicar el operador $\partial_{\alpha_1} \cdots \partial_{\alpha_k}$ a $x \mapsto e^{-i(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)} f(y)$ se tiene

$$(-iy_{\alpha_1}) \cdots (-iy_{\alpha_k}) f(y)$$

Esta función en valor absoluto es menor o igual a

$$|y_{\alpha_1} \cdots y_{\alpha_k} f(y)|$$

la cual por hipótesis es integrable en \mathbb{R}^n e independiente de x . Por el Teorema de derivación parcial de funciones definidas por integrales, $\mathcal{F}f$ es de clase C^r . ■

Observación 1.1.4

Si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y existe $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, necesariamente

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

Proposición 1.1.5

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ función de clase C^r en \mathbb{R}^n . Se supone que f y todas sus derivadas parciales hasta el orden r (inclusive) son integrables. Si $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, entonces

$$\mathcal{F}(\partial_{\alpha_1} \cdots \partial_{\alpha_k} f)(x) = (ix_{\alpha_1}) \cdots (ix_{\alpha_k}) \mathcal{F}f(x)$$

Demostración:

Basta probar que

$$\mathcal{F}(\partial_j f)(x) = (ix_j) \mathcal{F}f(x)$$

con $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ pues el resto se sigue por inducción. Se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\partial_j f)(x) - (ix_j) \mathcal{F}f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x|y)} [\partial_j f(y) - ix_j f(y)] dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial y_j} \left[e^{-i(x|y)} f(y) \right] dy \end{aligned}$$

de donde, por el Teorema de Fubini

$$\mathcal{F}(\partial_j f)(x) - (ix_j)\mathcal{F}f(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy_1 \cdots dy_{j-1} dy_{j+1} \cdots dy_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y_j} \left[e^{-i(x|y)} f(y) \right] dy_j$$

El Teorema de Fubini asegura que existe un conjunto despreciable $Z_1 \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ tal que para todo $y' = (y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus Z_1$ existe la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y_j} \left[e^{-i(x|y)} f(y) \right] dy_j$$

o sea que $y_j \mapsto \frac{\partial}{\partial y_j} \left[e^{-i(x|y)} f(y) \right]$ es integrable en \mathbb{R} . Por el 2° T.F.C. para intervalos abiertos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y_j} \left[e^{-i(x|y)} f(y) \right] dy_j = \lim_{y_j \rightarrow \infty} e^{-i(x|y)} f(y) - \lim_{y_j \rightarrow -\infty} e^{-i(x|y)} f(y) \quad (1.1)$$

puesto que la función $y \mapsto e^{-i(x|y)} f(y)$ es integrable en \mathbb{R}^n , por el Teorema de Fubini existe un conjunto $Z_2 \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ tal que para todo $y' = (y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus Z_2$, la función $y_j \mapsto e^{-i(x|y)} f(y)$ es integrable en \mathbb{R} . Sea $Z = Z_1 \cup Z_2 \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$. Por la última observación, los límites a la derecha de la ecuación anterior deben ser 0 para todo $y' = (y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus Z$. Por tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y_j} \left[e^{-i(x|y)} f(y) \right] dy_j = 0$$

para todo $y' = (y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus Z$. Por tanto

$$\mathcal{F}(\partial_j f)(x) - (ix_j)\mathcal{F}f(x) = 0$$

lo que prueba el resultado. ■

1.2. Teoremas de Transferencia e Inversión

Teorema 1.2.1 (Teorema de Transferencia)

Sean $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \mathcal{F}g = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f \cdot g$$

y,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \mathcal{F}^*g = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^*f \cdot g$$

Demostración:

Como $\mathcal{F}f$ y $\mathcal{F}g$ son continuas acotadas en \mathbb{R}^n y $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, ambas integrales existen. Se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x) \cdot g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x|y)} f(y) dy$$

ya se sabe que $(x, y) \mapsto e^{-i(x|y)} g(x)f(y)$ es integrable en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Por Fubini podemos invertir el orden de integración

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x) \cdot g(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x|y)} g(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y|x)} g(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot \mathcal{F}g(y) dy \\ &\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \mathcal{F}g = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f \cdot g \end{aligned}$$

para la \mathcal{F}^* . el procedimiento es análogo. ■

Lema 1.2.1 (Efecto de la transformación de Fourier sobre sucesiones de Dirac)

Sea $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ una sucesión de Dirac en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Defina

$$h_\nu = \mathcal{F}\rho_\nu, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$$

Entonces,

- I. $|h_\nu(x)| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
- II. $\lim_{\nu \rightarrow \infty} h_\nu(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demostración:

De (i): Se tiene

$$\begin{aligned} |h_\nu(x)| &= |\mathcal{F}\rho_\nu(x)| \\ &\leq \mathcal{N}_1(\rho_\nu) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\nu \\ &= 1 \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

De (ii): Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Entonces $\{f * \rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ es una sucesión en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ que converge en promedio a f . Como la transformación de Fourier es un homomorfismo continuo del álgebra de Banach $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ en $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, se debe tener que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{F}(f * \rho_\nu) = \mathcal{F}f \text{ uniformemente en } \mathbb{R}^n$$

pero,

$$\mathcal{F}f * \rho_\nu = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}\rho_\nu = h_\nu \mathcal{F}f$$

es decir,

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow \infty} h_\nu \mathcal{F}f &= \mathcal{F}f \text{ uniformemente en } \mathbb{R}^n \\ \Rightarrow \mathcal{F}f \lim_{\nu \rightarrow \infty} h_\nu &= \mathcal{F}f \text{ uniformemente en } \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Fijando f de tal suerte que $\mathcal{F}f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se concluye que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} h_\nu(x) = 1$$

(por ejemplo, tome $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$). ■

Observación 1.2.1

Si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, entonces no necesariamente su transformada de Fourier es integrable. Por ejemplo

$$\mathcal{F}\chi_{[-1,1]} = \begin{cases} \frac{2\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es continua, nula en el infinito pero no es integrable en \mathbb{R} .

Teorema 1.2.2 (Teorema de Inversión de Fourier)

Si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ es tal que $\mathcal{F}f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, entonces

$$\mathcal{F}^*(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^*f) = (2\pi)^n f \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n$$

Si además f es continua en \mathbb{R}^n , la fórmula es válida en todo punto de \mathbb{R}^n .

Demostración:

■

Proposición 1.2.1

La transformación de Fourier $\mathcal{F}\cdot$ es un homomorfismo inyectivo del álgebra de Banach $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ en el álgebra de Banach $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

Demostración:

Basta probar que el kernel de $\mathcal{F}\cdot$ se reduce a 0. En efecto, sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ tal que $\mathcal{F}f = 0$ en \mathbb{R}^n , luego $\mathcal{F}f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Así se puede aplicar el Teorema anterior, que resulta en que

$$0 = \mathcal{F}^*0 = \mathcal{F}^*(\mathcal{F}f) = (2\pi)^n f \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n$$

en \mathbb{R}^n . Por tanto, $f = 0$ c.t.p. en \mathbb{R}^n .

■