Sucesiones De Funciones.

Convergencia.

Sea $\mathbb{X}$ un conjunto no vacío. Dadas dos funciones $f, g : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se definen las funciones $f+g, \lambda f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ puntuulmente, es decir:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \text{ y } (\lambda f)(x) = \lambda f(x), \forall x \in \mathbb{X}$$

Se denota por $\mathcal{F}(\mathbb{X})$ a algún conjunto de funciones de $\mathbb{X}$ en $\mathbb{R}$ que tenga propiedades de espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$ con esas operaciones, como pueden ser ℓ_p, $B(\mathbb{X})$ o, si $\mathbb{X}$ es un espacio métrico, $BC(\mathbb{X})$ ó alguno de sus subespacios.

Además, para cada $c \in \mathbb{R}$, se denotará por $\underline{c} : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ a: $\underline{c}(x) = c, \forall x \in \mathbb{X}$. También, si $f(x) \leq g(x)$ ó $f(x) < g(x)$, $\forall x \in \mathbb{X}$, se denotará $f \leq g$ ó $f < g$.

Def. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones en $\mathcal{F}(\mathbb{X})$, y sea $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ una función.

i) Se dice que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a f en $\mathbb{X}$, si para cada $x \in \mathbb{X}$, se cumple:

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$$

es decir:

$$\lim_{n \to \infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

o sea, para cada $\varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$, $N = N(\varepsilon, x)$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

f es llamado el límite puntual en $\mathbb{X}$ de la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, y se escribe:

$$\lim_{n \to \infty} f_n = f \text{ puntualmente en } \mathbb{X}$$

ii) Se dice que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f en $\mathbb{X}$, si

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in \mathbb{X}} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

o sea, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, $N = N(\varepsilon)$ tal que

$$n \geqslant N \Rightarrow \sup_{x \in \overline{X}} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

o, de manera equivalente, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geqslant N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \ \forall\, x \in \overline{X}.$$

Geométricamente, esto quiere decir que, a partir de cierto índice N, la gráfica de f_n se inscribe enteramente dentro de una banda de ancho 2ε centrada en la gráfica de f.

A f se le llama el límite uniforme en $\overline{X}$ de la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ y se escribe

$$\lim_{n \to \infty} f_n = f \text{ uniformemente en } \overline{X}$$

Claramente, si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f en $\overline{X}$, entonces $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a f en $\overline{X}$, pues

$$|f_n(t) - f(t)| \leqslant \sup_{x \in \overline{X}} |f_n(x) - f(x)|, \ \forall\, n \in \mathbb{N}, \ t \in \overline{X}.$$

EJEMPLOS.

1) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, defina $f_n :]0,1[\to \mathbb{R}$ como

$$f_n \equiv (-1)^n \underline{1}$$

Veamos que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ no converge puntualmente. En efecto, sea $\varepsilon_0 = 1$, entonces $\forall\, n \in \mathbb{N}$ y $\forall\, t \in]0,1[$:

a) Si $n = 2m+1$, $\exists\ 2\mathbb{N} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$ a lo sumo numerable, tal que si $2l \in 2\mathbb{N}$:

$$|f_n(t) - f_{2l}(t)| = |(-1)^{2m+1} - (-1)^{2l}| = |-1-1| = 2 \geqslant 1$$

b) Si $n = 2m$, $\exists\ 2\mathbb{N}+1 = \{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$ a lo sumo numerable, tal que si $2l+1 \in 2\mathbb{N}+1$:

$$|f_n(t) - f_{2l+1}(t)| = |(-1)^{2n} - (-1)^{2l+1}| = |1+1| = 2 \geqslant 1$$

por a) y b), $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ no converge puntualmente en $\overline{X}$.

q.e.d.

Def. Sea $A \subseteq \overline{X}$. Se define la **función característica** de A como la función $\chi_A : \overline{X} \to \mathbb{R}$

dada por:

$$\forall x \in X, \ \chi_A(x) := \left\{ \right.$$