CONEXIDAD.

Def. Un espacio métrico se dice **conexo** si no existe ningún subconjunto propio de X que es abierto y cerrado.

Si un espacio métrico no es conexo, se le llama **disconexo**.

Def. Una familia de conjuntos $\{A_i\}_{i\in I}$ se dice que es una **partición de X**, si cumple:

i) $A_i \neq \phi$, $\forall i \in I$.

ii) $X = \bigcup_{i\in I} A_i$.

iii) $A_i \cap A_j = \phi$, $\forall i,j \in I$, $i \neq j$.

Teorema.

Sea X un espacio métrico. Son equivalentes las afirmaciones:

i) X no es conexo.

ii) Existe una partición de X en dos abiertos.

iii) Existe una partición de X en dos cerrados.

Dem:

$(i) \Rightarrow (ii)$:

Suponga que X no es conexo. Entonces existe $A \subseteq X$ abierto y cerrado en X.

Como A es cerrado y abierto, entonces $\complement A$ es cerrado y abierto. Tome $U = A$ y $V = \complement A$. Así

$X = A \cup \complement A$, $A \cap \complement A = \phi$ y $A, \complement A \neq \phi$, pues A es subconjunto propio de X.

Luego $\{A, \complement A\}$ es una partición de X en 2 abiertos.

$(ii) \Rightarrow (iii)$:

Suponga que existe una partición X en dos conjuntos abiertos, digamos $\{A, B\}$.

Como $X = A \cup B$, entonces $\complement A = B$ y $\complement B = A$. Además $A \cap B = \phi \Rightarrow \complement A \cap \complement B = \phi$.

$A, B \neq \phi \Rightarrow \complement A, \complement B \neq \phi$. Luego, $\{\complement A, \complement B\}$ es una partición de $\bar{X}$ en dos cerrados, pues $\complement A \cup \complement B = \bar{X}$, y A, B son dos abiertos.

$(iii) \Rightarrow (i)$:

Suponga que existe una partición de $\bar{X}$ en dos cerrados, digamos $\{A, B\}$. Como $\bar{X} = A \cup B$ y $A \cap B = \phi$, entonces $\complement B = A$. Como B es cerrado, entonces A es abierto. Así, A es cerrado y abierto. $A \neq \phi$, pues es elemento de la partición. Como $B \neq \phi$, entonces $A \neq \bar{X}$. Así A es un subconjunto propio abierto y cerrado. Por tanto, A es conexo.

q.e.d.

Def. Se dice que un conjunto A de un subespacio métrico $\bar{X}$ es **conexo**, si A como subespacio métrico de $\bar{X}$ es conexo.

Proposición.

Sea $\bar{X}$ un espacio métrico y $A \subseteq \bar{X}$. Entonces A es un conjunto conexo en $\bar{X}$ $\Leftrightarrow$ no existen dos abiertos o cerrados U y V en $\bar{X}$ tal que

$$V \cap A, U \cap A \neq \phi.$$

$$U \cap V \cap A = \phi$$

$$(U \cap A) \cup (V \cap A) = A.$$

Dem:

$\Leftarrow$) Suponga que A no es conexo, entonces por una proposición anterior, existen $M, N \subseteq A$ abiertos en A tales que

$$M, N \neq \phi$$

$$M \cup N = A$$

$$M \cap N = \phi$$

Como A es subespacio métrico de $\bar{X}$, y M, N son abiertos en A, existen $U, V \subseteq \bar{X}$ abiertos tales que $M = U \cap A$ y $N = V \cap A$. Así:

$$V\cap A,\ U\cap A \neq \phi$$
$$V\cap U\cap A = \phi$$
$$(U\cap A)\cup(V\cap A) = A$$

$\Rightarrow$) Suponga que $\exists$ $U, V \subseteq X$ tales que se cumple la hipótesis, entonces $M = U\cap A$, $N = V\cap A \neq \phi$. Como U y V son abiertos, entonces M y N son abiertos en A. Así

$$M, N \neq \phi$$
$$M \cap N = \phi$$
$$M \cup N = A$$

Así, $\{M, N\}$ es una partición de A en dos abiertos. Luego, A no es conexo.

q.e.d.

EJEMPLOS.

Proposición.

Sea $\bar{X}$ esp. métrico y $D \subseteq \bar{X}$ un conjunto denso en $\bar{X}$. Si D es conexo, entonces $\bar{X}$ es conexo.

Dem:

Suponga que $\bar{X}$ no es conexo, entonces $\exists\ U, V \subseteq \bar{X}$ abiertos $\ni$ $U, V \neq \phi$, $U \cap V = \phi$ y $U \cup V = \bar{X}$.

Como D es denso en $\bar{X}$, entonces $D \cap U, D \cap V \neq \phi$ por ser U y V abiertos. Luego $(U \cap D) \cup (V \cap D) = D$, además $U \cap V \cap D = \phi$. Por lo tanto, D no es conexo.

q.e.d.

Teorema.

Si A es un conjunto conexo en un esp. métrico $\bar{X}$ y B es cualquier conjunto en $\bar{X}$ $\ni$ $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$, entonces B es conexo.

Dem:

Sea $B \subseteq \bar{X}$ tal que $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$. Como A es denso en B, pues $(\bar{A})_B = \bar{A} \cap B = B$, entonces, por el teorema anterior, por ser A conexo, B es conexo.

q.e.d.

Teorema.

Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos conexos en $\bar{X}$ tales que $A_i \cap A_j \neq \phi$, $\forall i \neq j;\ i, j \in I$. Entonces $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ es conexo.

Dem:

Sean $M, N \subseteq \bar{X}$ abiertos tales que $A = M \cup N$ y $M \cap N = \phi$. Probaremos que $M = \phi$ ó $N = \phi$.

Como A_i es conexo $\forall i \in I$, entonces $A_i \cap M = \phi$, ó $A \cap N = \phi$ (pues de otra forma $\{A_i \cap M, A_i \cap N\}$ sería una partición de A_i). Sea $i_0 \in I$, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $A_{i_0} \cap N = \phi$, entonces $A_{i_0} \subseteq M$. Como $A_{i_0} \cap A_j \neq \phi$, $\forall j \in I$, entonces $A_j \cap M \neq \phi$, así $A_j \cap N = \phi$. Luego:

$$A \cap N = \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap N = \bigcup_{i \in I} A_i \cap N = \emptyset$$

por lo tanto, $N = \emptyset$. Así, A es conexo.

q.e.d.

Corolario

Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos conexos en un espacio métrico X tal que $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, entonces

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

es un conjunto conexo.

Dem:

Sean $M, N \subseteq X$ tales que $M \cup N = A$ y $M \cap N = \emptyset$. Como A_n es conexo $\forall\, n \in \mathbb{N}$ y $A_n \subseteq A$, entonces $A_n \cap M = \emptyset$ ó $A_n \cap N = \emptyset$ (de otra forma, $\{A_n \cap M, A_n \cap N\}$ sería una partición de A_n). Para $1 \in \mathbb{N}$, podemos suponer sin pérdida de generalidad, que $A_1 \cap N = \emptyset$, entonces $A_1 \subseteq M$, luego como $A_1 \cap A_2 \subseteq M \cap A_2$ y $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, entonces $A_2 \cap M \neq \emptyset$, así $A_2 \cap N = \emptyset$.

Suponga que $A_1, A_2, \dots, A_K$ son tales que $A_i \cap M \neq \emptyset$, $\forall\, i \in J_K$. Como $A_K \cap N = \emptyset$, entonces $A_K \subseteq M$, así $A_{K+1} \cap M \neq \emptyset$, luego $A_{K+1} \cap N = \emptyset$. Por inducción, se tiene que $A_n \cap N = \emptyset$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Veamos que

$$A \cap N = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \cap N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \cap N = \emptyset$$

por tanto, $N = \emptyset$. Así, A es conexo.

q.e.d.

Teorema (de paso de Aduana).

Sea X un espacio métrico y $A \subseteq X$. Si $B \subseteq X$ es un conjunto conexo en X, y

$$B \cap A \neq \emptyset \quad \text{y} \quad B \cap \complement A \neq \emptyset$$

entonces

$$B \cap \operatorname{Fr} A \neq \emptyset$$

Dem:

Suponga que B es conexo, con $B\cap A, B\cap \complement A \neq \phi$, y que $B\cap \mathrm{Fr}\,A=\phi$. Como

$$B = B\cap \bar{X} = B\cap(A^\circ \cup \mathrm{Fr}\,A \cup \mathrm{Ext}\,A) = (B\cap A^\circ)\cup(B\cap \mathrm{Fr}\,A)\cup(B\cap \mathrm{Ext}\,A)$$
$$= (B\cap A^\circ)\cup(B\cap \mathrm{Ext}\,A)$$

además $B\cap A^\circ\cap \mathrm{Ext}\,A=\phi$. Como A°, $\mathrm{Ext}\,A\neq\phi$ (en general), entonces B no es conexo, pues A° y $\mathrm{Ext}\,A$ son abiertos. #c. Por tanto, $B\cap \mathrm{Fr}\,A\neq\phi$.

q.e.d.

Corolario.

En un espacio métrico conexo, cualquier subconjunto propio no vacío tiene frontera no vacía.

Dem:

Sea $\bar{X}$ un espacio métrico conexo y $A\subseteq \bar{X}$ ∍ $A\neq\phi, \bar{X}$. Como $A\neq\phi$ y $\complement A\neq\phi$ (pues $A\neq\bar{X}$), entonces $\bar{X}\cap \mathrm{Fr}\,A\neq\phi$. Así, $\mathrm{Fr}\,A\neq\phi$.

q.e.d.

Continuidad.

Teorema.

Si f es una función continua de un espacio métrico $(\bar{X},d)$ en $(\bar{Y},\rho)$, entonces $f(\bar{X})$ es un conjunto conexo en $\bar{Y}$, es decir, toda función continua transforma conexos en conexos.

Dem:

Sean $U,V\subseteq\bar{Y}$ abiertos ∍ $U\cap V=\phi$ y $U\cup V=f(\bar{X})$. Como ambos son abiertos y f es continua, entonces $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ son abiertos, tales que $\bar{X}=f^{-1}(U)\cup f^{-1}(V)$. Como $U\cap V=\phi$, entonces $f^{-1}(U)\cap f^{-1}(V)=\phi$.

Como $\bar{X}$ es conexo, entonces $f^{-1}(U)=\phi$ ó $f^{-1}(V)=\phi$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f^{-1}(V)=\phi$, luego $f^{-1}(U)=\bar{X}$, entonces $V\subseteq f(f^{-1}(V))=\phi$, así $V=\phi$. Por lo tanto, $f(\bar{X})$ es conexo.

q.e.d.

Ejemplos.

Corolario (Teorema del valor intermedio).

Si f es una función continua de un espacio métrico conexo $(\bar{X},d)$ en $(\mathbb{R},|\cdot|)$ entonces $f(\bar{X})$ es un intervalo en $\mathbb{R}$, es decir, si $f(x), f(y)\in f(\bar{X})$ con $f(x)<f(y)$ y $c\in\mathbb{R}$ es tal que $f(x)\leq c\leq f(y)$, entonces $\exists\, z\in\bar{X} \ni f(z)=c$.

Dem:

Como f es continua y $\bar{X}$ es conexo, por el teorema anterior $f(\bar{X})\subseteq\mathbb{R}$ es conexo. Por un ejercicio anterior, los únicos conjuntos conexos en $\mathbb{R}$ son el $\emptyset$, los intervalos, y los conjuntos formados por un punto.

Si $f(\bar{X})=\{a\}$, donde $a\in\mathbb{R}$, entonces si $f(x), f(y)\in f(\bar{X}) \Rightarrow f(x)=a=f(y)$. Si $f(\bar{X})=I$, donde I es un intervalo en $\mathbb{R}$, para $c\in\mathbb{R} \ni f(x)\leq c\leq f(y)$, entonces $c\in I=f(\bar{X})$. Como $f:\bar{X}\to f(\bar{X})$ es suprayectiva, para $c\in I=f(\bar{X})$, $\exists\, z\in\bar{X} \ni f(z)=c$.

q.e.d.

Proposición.

Un espacio métrico $\bar{X}$ es conexo $\Leftrightarrow$ toda aplicación continua de $\bar{X}$ en cualquier espacio métrico es constante.

Dem:

$\Rightarrow$) Suponga que $\bar{X}$ es conexo y sea $f:\bar{X}\to\bar{Y}$ una función continua donde $\bar{Y}$ es un esp. métrico discreto. Como $f(\bar{X})\subseteq\bar{Y}$ es conexo en $\bar{Y}$, y los únicos conexos en $\bar{Y}$ son el vacío y los puntos, entonces $f(\bar{X})=\{c\}$, donde $c\in\bar{Y}$ (pues $\bar{X}\neq\emptyset$). Así

$$f(x)=c, \ \forall x\in\bar{X}$$

$\Leftarrow$) Supongamos que $\bar{X}$ no es conexo, entonces $\exists\ U,V\subseteq\bar{X}$ abiertos $\ni U,V\neq\emptyset$, $U\cap V=\emptyset$ y $U\cup V=\bar{X}$. Sea $\bar{Y}=\{a,b\}$ un esp. métrico discreto provisto de la métrica discreta. Defina $f:\bar{X}\to\{a,b\}$ como sigue:

$$\forall x \in \bar{X},\ f(x) := \begin{cases} a & \text{si } x \in U. \\ b & \text{si } x \in V. \end{cases}$$

Claramente $f^{-1}(\{a\}) = U$, $f^{-1}(\{b\}) = V$, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ y $f^{-1}(\{a,b\}) = \bar{X}$, es decir, todas las imágenes inversas de conjuntos abiertos en $\{a,b\}$, son abiertos en $\bar{X}$. Luego, f es continua. Claramente f no es constante, así $\exists f$ una función continua de $\bar{X}$ en $\{a,b\}$ que no es constante.

q.e.d.

Conexidad Por Arcos.

Def. Sea $\bar{X}$ un espacio métrico. Un camino en $\bar{X}$ es cualquier aplicación continua φ de algún intervulo $[\alpha, \beta]$ de $\mathbb{R}$ (con la distancia usual) en $\bar{X}$. Al subconjunto $\varphi([\alpha, \beta])$ de $\bar{X}$ se le llama la imagen del camino φ. También se dice que un camino $\varphi : [\alpha, \beta] \to \bar{X}$ une a x con y en $\bar{X}$, si

$$\varphi(\alpha) = x,\quad \varphi(\beta) = y \quad \text{o} \quad \varphi(\alpha) = y \quad \text{y} \quad \varphi(\beta) = x$$

Nota: basta con que la función φ vaya de $[0,1]$ a $\bar{X}$, pues existe una función $\gamma : [0,1] \to [\alpha, \beta]$ biyectiva, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$.

Def. Se dice que un espacio métrico $\bar{X}$ es conexo por arcos, si cualquier par de elementos de x puede ser unido por un camino.

Teorema.

Si $\bar{X}$ es conexo por arcos, entonces es conexo

Dem:

Sea $x_0 \in \bar{X}$ fijo y $x \in \bar{X}$ arbitrario. Como $\bar{X}$ es arcoconexo, $\exists\, \varphi_x : [0,1] \to \bar{X}$ continua tal que $\varphi(0) = x_0$ y $\varphi(1) = x$. Como φ_x es continua y $[0,1]$ es conexo entonces $\varphi_x([0,1])$ es conexo. Afirmamos que

$$\overline{X} = \bigcup_{x \in \overline{X}} \varphi_x([0,1])$$

Además, si $x, y \in \overline{X}$, entonces $\varphi_x([0,1]) \cap \varphi_y([0,1]) \supseteq \{x_0\}$. Por tanto $\{\varphi_x([0,1])\}_{x \in \overline{X}}$ es una familia de conexos con intersección no vacía, así $\overline{X}$ es conexo.

q.e.d.

EJEMPLOS.