

Lista Ejercicios Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

20 de junio de 2024

Índice general

1. Lista 4

2

Capítulo 1

Lista 4

Ejercicio 1.0.1

Haga lo siguiente:

- i. Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Defina $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$P(x_1, \dots, x_n) = e^{-\sum_{k=1}^n |x_k|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Fije $\nu \in \mathbb{N}$, **demuestre** la fórmula:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x) P\left(\frac{x}{\nu}\right) dx = (2\nu)^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{(1 + \nu^2 x_1^2) \cdots (1 + \nu^2 x_n^2)} dx_1 \cdots dx_n$$

- ii. **Deduzca** que si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \cap \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ y $\mathcal{F}f \geq 0$, entonces $\mathcal{F}f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

Sugerencia. Aplique el teorema de Beppo-Levi.

Demostración:

De (i): Defina $g(x) = P\left(\frac{x}{\nu}\right)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Veamos que $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} P\left(\frac{x}{\nu}\right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} P\left(\frac{x_1}{\nu}, \dots, \frac{x_n}{\nu}\right) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{k=1}^n \left|\frac{x_k}{\nu}\right|} dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{\nu} \sum_{k=1}^n |x_k|} dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x_1|}{\nu}} \cdots e^{-\frac{|x_n|}{\nu}} dx_1 \cdots dx_n \\ &= \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x_1|}{\nu}} dx_1 \right) \cdots \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x_n|}{\nu}} dx_n \right)}_{n\text{-veces}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|t|}{\nu}} dt \right)^n \\ &< \infty \end{aligned}$$

Usando Fubini para funciones medibles no negativas. Por tanto, por el Teorema de transferencia se sigue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x) P\left(\frac{x}{\nu}\right) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x) g(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \mathcal{F}g(x) dx \end{aligned}$$

Calculemos $\mathcal{F}g(x)$. Como $g(x) = P\left(\frac{x}{\nu}\right)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\mathcal{F}g(x) = \nu^n \mathcal{F}P(\nu x)$$

(por una proposición), donde

$$\begin{aligned} \mathcal{F}P(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y \rangle} P(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i \sum_{k=1}^n x_k y_k} e^{-\sum_{k=1}^n |y_k|} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{k=1}^n (|y_k| + i x_k y_k)} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y_1| - i x_1 y_1} \cdots e^{-|y_n| - i x_n y_n} dy_1 \cdots dy_n \\ &= \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y_1| - i x_1 y_1} dy_1 \right) \cdots \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y_n| - i x_n y_n} dy_n \right)}_{n\text{-veces}} \\ &= \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t| - i x_1 t} dt \right) \cdots \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t| - i x_n t} dt \right)}_{n\text{-veces}} \\ &= \mathcal{F}h(x_1) \cdots \mathcal{F}h(x_n) \end{aligned}$$

donde $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es la función tal que $t \mapsto e^{-|t|}$ y, se sabe que

$$\mathcal{F}h(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}P(x) &= \frac{2^n}{(1+x_1^2) \cdots (1+x_n^2)} \\ \Rightarrow \mathcal{F}P(\nu x) &= \frac{2^n}{(1+\nu^2 x_1^2) \cdots (1+\nu^2 x_n^2)} \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x) P\left(\frac{x}{\nu}\right) dx &= \nu^n \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \mathcal{F}P(\nu x) dx \\ &= \nu^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2^n f(x_1, \dots, x_n)}{(1+\nu^2 x_1^2) \cdots (1+\nu^2 x_n^2)} dx_1 \cdots dx_n \\ &= (2\nu)^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{(1+\nu^2 x_1^2) \cdots (1+\nu^2 x_n^2)} dx_1 \cdots dx_n \end{aligned}$$

De (ii): Para cada $\nu \in \mathbb{N}$ defina la función $g_\nu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ como sigue:

$$g_\nu(x) = \mathcal{F}f(x) P\left(\frac{x}{\nu}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Esta es una sucesión creciente de funciones en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, pues si $\nu \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\nu+1} \sum_{k=1}^n |x_k| &\leq \frac{1}{\nu} \sum_{k=1}^n |x_k|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\
\Rightarrow -\frac{1}{\nu} \sum_{k=1}^n |x_k| &\leq -\frac{1}{\nu+1} \sum_{k=1}^n |x_k|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\
\Rightarrow e^{\frac{1}{\nu} \sum_{k=1}^n |x_k|} &\leq e^{-\frac{1}{\nu+1} \sum_{k=1}^n |x_k|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\
\Rightarrow P\left(\frac{x}{\nu}\right) &\leq P\left(\frac{x}{\nu+1}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\
\Rightarrow \mathcal{F}f(x)P\left(\frac{x}{\nu}\right) &\leq \mathcal{F}f(x)P\left(\frac{x}{\nu+1}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\
\Rightarrow g_\nu &\leq g_{\nu+1}
\end{aligned}$$

pues, $\mathcal{F}f \geq 0$. Además, como $f \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, entonces

$$f \leq \mathcal{N}_\infty(f) \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n$$

luego,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} g_\nu(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x)P\left(\frac{x}{\nu}\right) dx \\
&= (2\nu)^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{(1 + \nu^2 x_1^2) \cdots (1 + \nu^2 x_n^2)} dx_1 \cdots dx_n
\end{aligned}$$

Hagamos el cambio de variable $(y_1, \dots, y_n) = (\frac{x_1}{\nu}, \dots, \frac{x_n}{\nu})$, se tiene que

$$\begin{aligned}
(2\nu)^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{(1 + \nu^2 x_1^2) \cdots (1 + \nu^2 x_n^2)} dx_1 \cdots dx_n &= (2\nu)^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\nu y_1, \dots, \nu y_n)}{(1 + y_1^2) \cdots (1 + y_n^2)} \frac{dy_1 \cdots dy_n}{\nu^n} \\
&= 2^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\nu y_1, \dots, \nu y_n)}{(1 + y_1^2) \cdots (1 + y_n^2)} dy_1 \cdots dy_n \\
&= 2^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathcal{N}_\infty(f)}{(1 + y_1^2) \cdots (1 + y_n^2)} dy_1 \cdots dy_n \\
&= 2^n \mathcal{N}_\infty(f) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dy_1 \cdots dy_n}{(1 + y_1^2) \cdots (1 + y_n^2)} \\
\Rightarrow \left| \int_{\mathbb{R}^n} g_\nu(x) \right| &= 2^n \mathcal{N}_\infty(f) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dy_1 \cdots dy_n}{(1 + y_1^2) \cdots (1 + y_n^2)}
\end{aligned}$$

pues $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dy_1 \cdots dy_n}{(1+y_1^2) \cdots (1+y_n^2)} < \infty$ y $\int_{\mathbb{R}^n} g_\nu(x) \geq 0$. Por tanto, por Beppo-Levi se sigue que existe una función $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ tal que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} g_\nu = g \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n$$

Pero, también se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{\nu \rightarrow \infty} g_\nu(x) &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{F}f(x)P\left(\frac{x}{\nu}\right) \\
&= \mathcal{F}f(x) \lim_{\nu \rightarrow \infty} P\left(\frac{x}{\nu}\right) \\
&= \mathcal{F}f(x)P(0, \dots, 0) \\
&= \mathcal{F}f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

Entonces $\mathcal{F}f = g$ c.t.p. en \mathbb{R}^n , luego $\mathcal{F}f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Más aún,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x) dx &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} 2^n \mathcal{N}_\infty(f) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dy_1 \cdots dy_n}{(1 + y_1^2) \cdots (1 + y_n^2)} \\
&= 2^n \mathcal{N}_\infty(f) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dy_1 \cdots dy_n}{(1 + y_1^2) \cdots (1 + y_n^2)}
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.0.2 (Problema 2 Lista 6 Análisis Matemático II)

Pruebe que si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, entonces

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f \right| = \int_{\mathbb{R}^n} |f|$$

si y sólo si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ fijo tal que $f = e^{i\alpha} |f|$ c.t.p. en \mathbb{R}^n .

Sugerencia. Suponiendo que $|\int_{\mathbb{R}^n} f| = \int_{\mathbb{R}^n} |f|$, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} f = e^{i\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f|$. Escriba

$$e^{-i\alpha} f = g + ih$$

donde g y h son funciones reales.

Demostración:**Ejercicio 1.0.3**

Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Se supone que $f(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. **Pruebe** que si $x \neq 0$, entonces

$$\mathcal{F}f(0) > |\mathcal{F}f(x)|$$

Sugerencia. Una vez que ha demostrado $|\mathcal{F}f(x)| \leq \mathcal{F}f(0)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, Para demostrar la desigualdad estricta para $x \neq 0$ proceda por reducción al absurdo y use el Problema 2 de la Lista 6 de Análisis Matemático II.

Demostración:

Notemos que como $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene en particular que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Primero probaremos que

$$\mathcal{F}f(0) \geq |\mathcal{F}f(x)|$$

es decir:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle 0|y\rangle} f(y) dy &\geq \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y) dy \right| \\ \iff \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy &\geq \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y) dy \right| \\ \iff \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy &\geq \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y) dy \right| \end{aligned}$$

pues $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Veamos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y) dy \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-i\langle x|y\rangle} f(y)| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-i\langle x|y\rangle}| |f(y)| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy \end{aligned} \tag{1.1}$$

lo que prueba el resultado. Para la desigualdad estricta suponga que existe $x \in \mathbb{R}^n$ no cero tal que

$$\mathcal{F}f(x) = \mathcal{F}f(0)$$

esto es

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y) dy \right| &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-i\langle x|y\rangle} f(y)| dy \end{aligned}$$

Por el ejercicio anterior existe $\alpha \in \mathbb{R}$ fijo tal que

$$e^{-i\langle x|y\rangle} f(y) = e^{i\alpha} |f(y)| = e^{i\alpha} f(y)$$

para casi todo $y \in \mathbb{R}^n$. En particular, tenemos que

$$f(y) (e^{-i\langle x|y\rangle} - e^{i\alpha}) = 0$$

para casi todo $y \in \mathbb{R}^n$. Como $f(y) > 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$e^{-i\langle x|y\rangle} - e^{i\alpha} = 0$$

nuevamente para casi todo $y \in \mathbb{R}^n$. Como las dos funciones involucradas son continuas y coinciden c.t.p. en \mathbb{R}^n , debe tenerse pues que

$$e^{-i\langle x|y\rangle} = e^{i\alpha}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

lo cual ocurre si y sólo si

$$e^{i(\langle x|y\rangle + \alpha)} = 1, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

es decir que

$$\langle x|y\rangle + \alpha = 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

como $x \neq 0$ en particular se tiene que

$$\langle x|x\rangle = -\alpha$$

y, además (tomando $y = 2x$):

$$2\langle x|x\rangle = -\alpha$$

pero esto sólo puede suceder si $\langle x|x\rangle = 0$, es decir que $x = 0_{\#c}$. Luego entonces

$$|\mathcal{F}f(x)| < \mathcal{F}f(0)$$

■

Ejercicio 1.0.4

Haga lo siguiente:

- Sean $a > 0$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. **Pruebe** que la función $x \mapsto (\cos \lambda x)/(x^2 + a^2)$ es integrable en $[0, \infty[$. **Muestre** que si $\lambda \neq 0$, la función $x \mapsto (x \sin \lambda x)/(x^2 + a^2)$ no es integrable en $[0, \infty[$, pero existe la integral impropia

$$\int_0^{\rightarrow \infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2} dx$$

Sugerencia. Muestre que

$$\left| \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2} \right| \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \left| \frac{\sin \lambda x}{x} \right|$$

Para probar la existencia de la integral impropia use los criterios de Abel.

- Recuerde que la función $x \mapsto (2a)/(x^2 + a^2)$ es la transformada de Fourier de la función $x \mapsto e^{-a|x|}$. Usando el teorema de inversión de Fourier, **demuestre** que

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-a|\lambda|}$$

iii. Usando el inciso (ii), calcule la integral impropia

$$\int_0^{\rightarrow\infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2} dx$$

Sugerencia. Para $\lambda \neq 0$ defina

$$\Phi(\lambda) = \int_0^{\rightarrow\infty} \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} dx$$

Calcule $\Phi'(\lambda)$ primero suponiendo $\lambda > \lambda_0$, donde $\lambda_0 > 0$ es arbitrario fijo, de forma análoga para $\lambda < 0$ y finalmente para $\lambda = 0$.

Demostración:

De (i): Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ defina

$$f(x) = \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2}$$

Afirmamos que f es integrable en $[0, \infty[$. Para ello, veamos que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |f| &= \int_0^\infty \frac{|\cos \lambda x|}{x^2 + a^2} dx \\ &\leq \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + a^2} \end{aligned}$$

donde la función de la derecha es integrable en tal intervalo. Por tanto, $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Sea ahora $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \neq 0$. Afirmamos que la función

$$g(x) = \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ no es integrable en $[0, \infty[$. En efecto, veamos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2} \right|}{\left| \frac{\sin \lambda x}{x} \right|} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{x^2}{x^2 + a^2} \right| \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{1 + \frac{a^2}{x^2}} \right| \\ &= \frac{1}{1 + 0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

por tanto,

$$\left| \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2} \right| \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \left| \frac{\sin \lambda x}{x} \right|$$

Luego entonces, por la proposición 8.53 Análisis Matemático II:

$$\left| \frac{\sin \lambda x}{x} \right| \underset{x \rightarrow \infty}{=} O \left(\left| \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2} \right| \right)$$

donde la función $x \mapsto \left| \frac{\sin \lambda x}{x} \right|$ no es integrable en $[0, \infty[$, luego tampoco puede serlo g (siendo que ambas funciones son integrables en todo subconjunto acotado de \mathbb{R}).

Veamos que si existe la integral impropia

$$\int_0^{\rightarrow\infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2}$$

En efecto, defina para cada $x \in [0, \infty[$ las funciones:

$$G(x) = \int_0^x \sin \lambda x \, dx \quad \text{y} \quad f(x) = \frac{x}{x^2 + a^2}$$

se tienen dos cosas:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ (es claro de la definición de f).
- G es una función acotada en $[0, \infty[$, pues para cada $x \in [0, \infty[$:

$$\begin{aligned} |G(x)| &= \left| \int_0^x \sin \lambda x \, dx \right|, \text{ haciendo el cambio de variable } u = \lambda x \\ &= \left| \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^{\lambda x} \sin u \, du \right| \\ &= \left| \frac{1}{\lambda} \cdot \left[-\cos u \right]_0^{\lambda x} \right| \\ &= \left| \frac{1}{\lambda} \cdot [-\cos \lambda x + \cos 0] \right| \\ &\leq \frac{2}{|\lambda|} \end{aligned}$$

Por tanto, del primer criterio de Abel se sigue que la integral impropia

$$\int_0^{\rightarrow \infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2}$$

es convergente.

De (ii): Sea $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$h(x) = e^{-a|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

se sabe por un ejercicio de las notas que

$$\mathcal{F}h(x) = \frac{2a}{x^2 + a^2}$$

la función h cumple la condición de Dini en todo punto $\lambda \in \mathbb{R} \neq 0$ (también lo hace en cero, pero no es relevante), por lo cual se tiene que

$$h(\lambda) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R e^{i\lambda x} \mathcal{F}h(x) \, dx$$

es decir,

$$\begin{aligned} e^{-a|\lambda|} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R e^{i\lambda x} \mathcal{F}h(x) \, dx \\ &= \frac{2a}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{-R}^R \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx + i \int_{-R}^R \frac{\sin \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx \right] \\ &= \frac{a}{\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{-R}^0 \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx + \int_0^R \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx + i \int_{-R}^0 \frac{\sin \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx + i \int_0^R \frac{\sin \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx \right] \\ &= \frac{a}{\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_0^R \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx + \int_0^R \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx - i \int_0^R \frac{\sin \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx + i \int_0^R \frac{\sin \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx \right] \\ &= \frac{2a}{\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx \\ &= \frac{2a}{\pi} \int_0^{\rightarrow \infty} \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx \end{aligned}$$

pero, de (i) se sabe que $x \mapsto \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2}$ es integrable en $[0, \infty[$, por tanto coincide su valor con el de la integral impropia, así:

$$\begin{aligned} e^{-a|\lambda|} &= \frac{2a}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} dx \\ \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} dx &= \frac{\pi}{2a} e^{-a|\lambda|} \end{aligned}$$

De (iii): Por la parte anterior, para todo $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tiene que

$$\Phi(\lambda) = \int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-a|\lambda|} = \frac{\pi}{2a} e^{-a|\lambda|}$$

Si todo funciona bien, por el Teorema de derivación para funciones definidas por integrales impropias, se tendría para $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} - \int_0^{\rightarrow \infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2} dx &= \Phi'(\lambda) \\ &= -\frac{\pi}{2} e^{-a\lambda} \\ &= -\frac{\pi}{2} e^{-a|\lambda|} \\ \Rightarrow \int_0^{\rightarrow \infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2} dx &= \frac{\pi}{2} e^{-a|\lambda|} \end{aligned}$$

y, para $\lambda < 0$:

$$\begin{aligned} - \int_0^{\rightarrow \infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2} dx &= \Phi'(\lambda) \\ &= \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\pi}{2a} e^{-a(-\lambda)} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} e^{a\lambda} \\ &= \frac{\pi}{2} e^{-a|\lambda|} \\ \Rightarrow \int_0^{\rightarrow \infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2} dx &= -\frac{\pi}{2} e^{-a|\lambda|} \end{aligned}$$

es decir que

$$\int_0^{\rightarrow \infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2} dx = \text{Sgn}(\lambda) \cdot \frac{\pi}{2} e^{-a|\lambda|}$$

■

Ejercicio 1.0.5

Sea H una matriz simétrica real $n \times n$ positiva definida, es decir, la forma cuadrática $\langle x | Hx \rangle$ sobre \mathbb{R}^n es positiva definida. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la función

$$f(x) = e^{-\langle Hx | x \rangle}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Demuestre que f es integrable y que

$$\mathcal{F}f(x) = \frac{\pi^{n/2}}{(\det H)^{1/2}} e^{-\frac{1}{4} \langle H^{-1}x | x \rangle}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Sugerencia. f es medible. Para ver que es integrable, pruebe que $\langle Hx | x \rangle \geq m \|x\|^2$, donde

$$m = \min_{x \in S} \{ \langle Hx | x \rangle \} > 0$$

con $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$. Se sabe de álgebra que existe una matriz ortogonal U tal que $U^{-1}HU = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, donde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son números estrictamente positivos. En la integral $\mathcal{F}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} e^{-\langle Hy|y\rangle} dy$ haga el cambio de variable $y = Uz$ siendo tal que $|\det U| = 1$, $\langle Ur|Us\rangle = \langle r|s\rangle$ (y lo análogo para U^{-1}) y observe que $(1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_n) = U^{-1}H^{-1}U$.

Demostración:

Veamos que f es medible (más aún, es continua). En efecto, considere la matriz H dada por

$$H = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \dots & h_{1,n-1} & h_{1,n} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \dots & h_{2,n-1} & h_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{n,1} & h_{n,2} & \dots & h_{n,n-1} & h_{n,n} \end{bmatrix}$$

Se tiene entonces que para cada $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \langle Hx|x\rangle &= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^n y_k x_k \end{aligned}$$

donde

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \dots & h_{1,n-1} & h_{1,n} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \dots & h_{2,n-1} & h_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{n,1} & h_{n,2} & \dots & h_{n,n-1} & h_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

es decir que

$$y_k = \sum_{i=1}^n h_{k,i} x_i$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \langle Hx|x\rangle &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n h_{k,i} x_i \right) x_k \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n x_k x_i h_{k,i} \end{aligned}$$

siendo la aplicación $x \mapsto \langle Hx|x\rangle$ una aplicación polinomial de n -variables, luego es continua. Así, la composición con $t \mapsto e^{-t}$ es continua, es decir que la función f es continua en \mathbb{R}^n , luego medible.

Ahora, sea ahora

$$m = \inf_{x \in S} \{\langle Hx|x\rangle\}$$

donde $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$. Afirmamos que $m > 0$. En el caso que $m = 0$, como la función $x \mapsto \langle Hx|x\rangle$ es continua de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} , se tendría que alcanzaría su máximo y mínimo en el compacto S , luego existiría $x_0 \in S$ tal que

$$\langle Hx_0|x_0\rangle = 0$$

lo cual contradeciría el hecho de que H es positiva definida. Por tanto, $m > 0$. Más aún,

$$m = \inf_{x \in S} \{\langle Hx|x\rangle\} = \min_{x \in S} \{\langle Hx|x\rangle\}$$

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ no cero, se tiene que

$$\begin{aligned}\langle Hx|x \rangle &= \langle H \left(\|x\| \cdot \frac{x}{\|x\|} \right) \|x\| \cdot \frac{x}{\|x\|} \rangle \\ &= \|x\|^2 \langle H \left(\frac{x}{\|x\|} \right) | \frac{x}{\|x\|} \rangle \\ &\geq m\|x\|^2 \\ \Rightarrow -\langle Hx|x \rangle &\leq -m\|x\|^2\end{aligned}$$

Considere la función $x \mapsto e^{-m\|x\|^2}$ de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} . Se tiene que

$$0 \leq f(x) = e^{-m\langle Hx|x \rangle} \leq e^{-m\|x\|^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

siendo $x \mapsto e^{-m\|x\|^2}$ integrable en \mathbb{R}^n , luego f lo es en \mathbb{R}^n . Así, la transformada de Fourier $\mathcal{F}f$ está definida en todo \mathbb{R}^n .

Sea $x \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{F}f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y \rangle} f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y \rangle} \cdot e^{-\langle Hy|y \rangle} dy\end{aligned}$$

Se sabe por un resultado de álgebra lineal que existen una matriz D $n \times n$ diagonal con entradas en la diagonal positivas, y una matriz ortogonal U (también $n \times n$) con $|\det U| = 1$ tal que

$$U^{-1}HU = D \Rightarrow HU = UD$$

siendo

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Hagáse el cambio de variable $y = Uz$, se tiene en la integral anterior que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y \rangle} \cdot e^{-\langle Hy|y \rangle} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|Uz \rangle} \cdot e^{-\langle HUz|Uz \rangle} dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|Uz \rangle} \cdot e^{-\langle U Dz|Uz \rangle} dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|Uz \rangle} \cdot e^{-\langle Dz|z \rangle} dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle U^{-1}x|U^{-1}Uz \rangle} \cdot e^{-\langle Dz|z \rangle} dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle U^{-1}x|z \rangle} \cdot e^{-\langle Dz|z \rangle} dz\end{aligned}$$

considere la función $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $x \mapsto e^{-\langle Dz|z \rangle}$ (esta función es integrable pues los elementos de la matriz diagonal D son números positivos), por lo anterior se tiene que

$$\mathcal{F}f(x) = \mathcal{F}g(U^{-1}x)$$

donde

$$\begin{aligned}\mathcal{F}g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|z\rangle} g(z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|z\rangle} \cdot e^{-\langle Dz|z\rangle} dz\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}Dz &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 z_1 \\ \lambda_2 z_2 \\ \vdots \\ \lambda_n z_n \end{bmatrix}\end{aligned}$$

por tanto

$$\langle Dz|z\rangle = \lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_n z_n^2$$

luego, usando Fubini se sigue que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\sum_{k=1}^n x_k z_k - \sum_{k=1}^n \lambda_k z_k^2} dz_1 \dots dz_n \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_1 z_1 - \lambda_1 z_1^2} dz_1 \right) \dots \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_n z_n - \lambda_n z_n^2} dz_n \right) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathcal{F}g_i(x_i)\end{aligned}$$

donde

$$g_i(u) = e^{-\lambda_i u^2}, \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

para cada $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Se sabe por un ejercicio de las notas que

$$\mathcal{F}g_i(x_i) = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_i}} e^{-\frac{x_i^2}{4\lambda_i}}, \quad \forall x_i \in \mathbb{R}$$

para todo $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Por tanto:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}g(x) &= \prod_{i=1}^n \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_i}} e^{-\frac{x_i^2}{4\lambda_i}} \\ &= \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\lambda_1 \dots \lambda_n}} e^{-\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{\lambda_k}}\end{aligned}$$

recordemos que

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\lambda_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

y,

$$\det H = \det(UDU^{-1}) = \det U \cdot \det D \cdot \det U^{-1} = \lambda_1 \dots \lambda_n$$

por ende

$$\langle D^{-1}x|x\rangle = \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{\lambda_k}$$

así,

$$\mathcal{F}g(x) = \frac{\pi^{n/2}}{(\det H)^{1/2}} e^{-\frac{1}{4}\langle D^{-1}x|x\rangle}$$

Por lo tanto, recordando que

$$\begin{aligned} U^{-1}HU &= D \Rightarrow U^{-1}H^{-1}U = D^{-1} \\ &\Rightarrow U^{-1}H^{-1} = D^{-1}U^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f(x) &= \mathcal{F}g(U^{-1}x) \\ &= \frac{\pi^{n/2}}{(\det H)^{1/2}} e^{-\frac{1}{4}\langle D^{-1}U^{-1}x|U^{-1}x\rangle} \\ &= \frac{\pi^{n/2}}{(\det H)^{1/2}} e^{-\frac{1}{4}\langle U^{-1}H^{-1}x|U^{-1}x\rangle} \\ &= \frac{\pi^{n/2}}{(\det H)^{1/2}} e^{-\frac{1}{4}\langle H^{-1}x|x\rangle} \\ \Rightarrow \mathcal{F}f(x) &= \frac{\pi^{n/2}}{(\det H)^{1/2}} e^{-\frac{1}{4}\langle H^{-1}x|x\rangle} \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, como se quería demostrar. ■

Ejercicio 1.0.6

Recuerde que si $f = \chi_{[-a,a]}$, entonces

$$\mathcal{F}f(x) = \frac{2 \sin ax}{x}, \quad \forall x \neq 0$$

Deduzca la fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin ax}{x} \right)^2 dx = \pi a$$

Demostración:

Notemos que $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \cap \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, por lo cual

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2 f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \mathcal{F}f(x) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \cdot \frac{2 \sin ax}{x} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin ax}{x} \end{aligned}$$

así, por la identidad de Parseval se cumple

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}_2 f)^2(x) dx &= \langle \mathcal{F}_2 f | \mathcal{F}_2 f \rangle \\
 &= \langle f | f \rangle \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-a,a]}(x) dx \\
 &= 2a \\
 \Rightarrow \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin ax}{x} \right)^2 dx &= 2a \\
 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin ax}{x} \right)^2 dx &= \pi a
 \end{aligned}$$

■

Ejercicio 1.0.7

Haga lo siguiente:

- i. Sea $f(x) = \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) \chi_{[-a,a]}(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. **Pruebe** que

$$\mathcal{F}f(x) = a \left(\frac{\sin \frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}} \right)^2$$

- ii. Usando $\mathcal{F}_2 f$ **muestre** la fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin ax}{x} \right)^4 dx = \frac{2}{3} \pi a^3$$

- iii. **Calcule** la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin ax}{x} \right)^3 dx$$

Sugerencia. Escriba $f(x) = \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) \chi_{[-a,a]}(x)$ y $g(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Aplique la identidad de Parseval

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_2 f \mathcal{F}_2 g = \langle \mathcal{F}_2 f | \mathcal{F}_2 g \rangle = \langle f | g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f g$$

para deducir el resultado.

Solución:

De (i): Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} f(y) dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} \left(1 - \frac{|y|}{a}\right) \chi_{[-a,a]}(y) dy \\
 &= \int_{-a}^a e^{-ixy} \left(1 - \frac{|y|}{a}\right) dy \\
 &= \int_{-a}^0 e^{-ixy} \left(1 - \frac{|y|}{a}\right) dy + \int_0^a e^{-ixy} \left(1 - \frac{|y|}{a}\right) dy \\
 &= \int_{-a}^0 e^{-ixy} \left(1 + \frac{y}{a}\right) dy + \int_0^a e^{-ixy} \left(1 - \frac{y}{a}\right) dy \\
 &= - \int_a^0 e^{ixu} \left(1 - \frac{u}{a}\right) du + \int_0^a e^{-ixy} \left(1 - \frac{y}{a}\right) dy \\
 &= \int_0^a e^{ixy} \left(1 - \frac{y}{a}\right) dy + \int_0^a e^{-ixy} \left(1 - \frac{y}{a}\right) dy \\
 &= \int_0^a (e^{ixy} + e^{-ixy}) \cdot \left(1 - \frac{y}{a}\right) dy \\
 &= 2 \int_0^a \left(1 - \frac{y}{a}\right) \cos xy dy \\
 &= 2 \left[\int_0^a \cos xy dy - \frac{1}{a} \int_0^a y \cos xy dy \right]
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \int_0^a \cos xy dy &= \frac{1}{x} \int_0^{ax} \cos u du \\
 &= \frac{1}{x} \sin u \Big|_0^{ax} \\
 &= \frac{\sin ax}{x}
 \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}
 \int_0^a y \cos xy dy &= \int_0^{ax} \frac{u}{x} \cos u \frac{du}{x} \\
 &= \frac{1}{x^2} \int_0^{ax} u \cos u du \\
 &= \frac{1}{x^2} [ax \sin ax + \cos ax - 1]
 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f(x) &= 2 \left[\int_0^a \cos xy \, dy - \frac{1}{a} \int_0^a y \cos xy \, dy \right] \\
&= 2 \left[\frac{\sin ax}{x} - \frac{ax \sin ax}{ax^2} - \frac{\cos ax}{ax^2} + \frac{1}{ax^2} \right] \\
&= 2 \left[\frac{\sin ax}{x} - \frac{\sin ax}{x} + \frac{1 - \cos ax}{ax^2} \right] \\
&= \frac{1 - \cos ax}{\frac{ax^2}{2}} \\
&= a \cdot \frac{2 \sin^2 \left(\frac{ax}{2} \right)}{\frac{a^2 x^2}{2}} \\
&= a \cdot \frac{\sin^2 \frac{ax}{2}}{\frac{a^2 x^2}{4}} \\
&= a \cdot \left(\frac{\sin \frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}} \right)^2
\end{aligned}$$

De (ii): Notemos que $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, por lo cual

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_2 f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}f(x) \\
&= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\frac{\sin \frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}} \right)^2
\end{aligned}$$

por lo cual, usando la identidad de Parseval se sigue que

$$\begin{aligned}
\frac{a^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}} \right)^4 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{a}{\sqrt{2\pi}} \right)^2 \left(\frac{\sin \frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}} \right)^4 dx \\
&= \langle \mathcal{F}_2 f | \mathcal{F}_2 f \rangle \\
&= \langle f | f \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{|x|}{a} \right)^2 \chi_{[-a, a]}(x) \, dx \\
&= \int_{-a}^a \left(\frac{a - |x|}{a} \right)^2 dx \\
&= 2 \int_0^a \left(\frac{a - x}{a} \right)^2 dx
\end{aligned}$$

cambiamos de variable la primera integral, haciendo $u = \frac{x}{2} \Rightarrow 2du = dx$, por tanto:

$$\begin{aligned}
\frac{a^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}} \right)^4 dx &= \frac{a^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin ax}{ax} \right)^4 dx \\
&= \frac{1}{a^2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin ax}{x} \right)^4 dx
\end{aligned}$$

y, haciendo el cambio de variable en la última integral a $y = a - x \Rightarrow dy = -dx$, se tiene que

$$\begin{aligned}
 \int_0^a \left(\frac{a-x}{a} \right)^2 dx &= - \int_a^0 \frac{y^2}{a^2} dy \\
 &= \frac{1}{a^2} \int_0^a y^2 dy \\
 &= \frac{1}{a^2} \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^a \\
 &= \frac{a^3}{3a^2} \\
 &= \frac{a}{3}
 \end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{a^2 \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin ax}{x} \right)^4 dx &= \frac{2a}{3} \\
 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin ax}{x} \right)^4 dx &= \frac{2}{3} \pi a^3
 \end{aligned}$$

De (iii): Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función $g = \chi_{[-a,a]}$. Se sabe por el inciso anterior que

$$\mathcal{F}_2 g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ax}{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

y, del inciso (i) y considere la función $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) = f(2x) = f\left(\frac{x}{\frac{1}{2}}\right)$. Entonces

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_2 f(2x) &= \frac{1}{2} \mathcal{F}_2 f(x) \\
 \Rightarrow 2 \mathcal{F}_2 f(2x) &= \mathcal{F}_2 f(x) \\
 \Rightarrow 2 \mathcal{F}_2 h(x) &= \mathcal{F}_2 f(x)
 \end{aligned}$$

Notemos además que

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{F}_2 f | \mathcal{F}_2 g \rangle &= 2 \langle \mathcal{F}_2 h | \mathcal{F}_2 g \rangle \\
 &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_2 h(x) \mathcal{F}_2 g(x) dx \\
 &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_2 f(2x) \mathcal{F}_2 g(x) dx \\
 &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin \frac{2ax}{2}}{\frac{2ax}{2}} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ax}{x} dx \\
 &= \frac{2}{\pi a} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin ax}{x} \right)^3 dx
 \end{aligned}$$

y, por la identidad de Parseval

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}_2 f | \mathcal{F}_2 g \rangle &= \langle f | g \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x) dx \\
&= \int_{-a}^a \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) dx \\
&= 2 \int_0^a \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) dx \\
&= 2 \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right) dx \\
&= 2 \left[x - \frac{x^2}{2a} \right]_0^a \\
&= 2 \left[a - \frac{a^2}{2a} \right] \\
&= 2 \left[\frac{a}{2} \right] \\
&= a
\end{aligned}$$

Por ende,

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\pi a} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin ax}{x} \right)^3 dx &= a \\
\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin ax}{x} \right)^3 dx &= \frac{\pi a}{2}
\end{aligned}$$

(falta multiplicar por un factor de 2/3 según Wolfram). □

Ejercicio 1.0.8

Sea $n \geq 2$ y $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la función $x \mapsto r(x) = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Sea $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ una función tal que $f \circ r$ es integrable en \mathbb{R}^n .

- i. **Pruebe** que la transformada de Fourier $\mathcal{F}(f \circ r)$ es una función radial.

Sugerencia. Si U es una matriz ortogonal $n \times n$, se tiene que $\mathcal{F}(f \circ r)(Ux) = \mathcal{F}(f \circ r)(x)$. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que $\|x\| = \|y\|$, siempre existe una matriz ortogonal U tal que $Ux = y$.

- ii. **Muestre** que se cumple la **fórmula de Bochner**

$$\mathcal{F}(f \circ r)(x) = 2(n-1)\omega_{n-1} \int_0^\infty v_n(u\|x\|)f(u)u^{n-1} du, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

donde ω_{n-1} es el volumen de la bola euclídeana de radio uno en \mathbb{R}^{n-1} y v_n se define por la fórmula

$$v_n(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t \cos \theta) \sin^{n-2} \theta d\theta$$

Sugerencia. Según el inciso (i),

$$\mathcal{F}(f \circ r)(x) = \mathcal{F}(f \circ r)(\|x\|, 0, \dots, 0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\|y\|) e^{-i\|x\|y_1} dy_1 \cdots dy_n$$

Transforme esta integral por el Teorema de Fubini y exprese la integral con respecto a y_2, \dots, y_n como una integral simple. La doble integral resultante se transforma a coordenadas polares.

Solución:

De (i): Ya se sabe que $f \circ r$ es una función radial (de la definición es claro este hecho). Como $f \circ r$ es integrable en \mathbb{R}^n , entonces la transformada de Fourier de $f \circ r$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que $\|x\| = \|y\|$. Para probar que $\mathcal{F}(f \circ r)$ es una función radial, basta con ver que

$$\mathcal{F}(f \circ r)(x) = \mathcal{F}(f \circ r)(y)$$

En efecto, como $\|x\| = \|y\|$ por álgebra lineal se sabe que existe una matriz ortogonal $n \times n$ con determinante 1 tal que $x = Uy$. Por lo cual, por el teorema de cambio de variable haciendo $z = Uw$, se sigue que:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f \circ r)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|z \rangle} f \circ r(z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|Uw \rangle} f \circ r(Uw) dw \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle UU^{-1}x|Uw \rangle} f \circ r(w) dw \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle y|w \rangle} f \circ r(w) dw \\ &= \mathcal{F}(f \circ r)(y) \end{aligned}$$

por tanto, $\mathcal{F}(f \circ r)$ es una función radial.

De (ii): Sea $x \in \mathbb{R}^n$, veamos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f \circ r)(x) &= \mathcal{F}(f \circ r)(\|x\|, 0, \dots, 0) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle (\|x\|, 0, \dots, 0) | (y_1, \dots, y_n) \rangle} f \circ r(y_1, \dots, y_n) dy_1 \cdots dy_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\|x\|y_1} f(\|y\|) dy_1 \cdots dy_n \end{aligned}$$

Cambiando a coordenadas polares, resulta que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f \circ r)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\|x\|y_1} f(\|y\|) dy_1 \cdots dy_n \\ &= \int_{\Omega} e^{-i\|x\|\rho \cos \varphi_1} f(\rho) \rho^{n-1} \sin^{n-2} \varphi_1 \cdots \sin \varphi_{n-2} d\rho d\varphi_1 \cdots d\varphi_{n-1} \end{aligned}$$

donde

$$\Omega = \left\{ (\rho, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \mid \rho \geq 0, 0 \leq \varphi_1, \dots, \varphi_{n-2} \leq \pi, -\pi \leq \varphi_{n-1} \leq \pi \right\}$$

Por Fubini se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f \circ r)(x) &= \int_{\Omega} e^{-i\|x\|\rho \cos \varphi_1} f(\rho) \rho^{n-1} \sin^{n-2} \varphi_1 \cdots \sin \varphi_{n-2} d\rho d\varphi_1 \cdots d\varphi_{n-1} \\ &= \int_0^\infty \rho^{n-1} f(\rho) d\rho \int_0^\pi e^{-i\|x\|\rho \cos \varphi_1} \sin^{n-2} \varphi_1 d\varphi_1 \int_{\Omega'} \sin^{n-3} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2} d\varphi_2 \cdots d\varphi_{n-1} \end{aligned}$$

donde

$$\Omega' = \left\{ (\varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-2} \mid 0 \leq \varphi_2, \dots, \varphi_{n-2} \leq \pi, -\pi \leq \varphi_{n-1} \leq \pi \right\}$$

Pero, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega'} \sin^{n-3} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2} d\varphi_2 \cdots d\varphi_{n-1} &= (1-0) \int_{\Omega'} \sin^{(n-1)-2} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2} d\varphi_2 \cdots d\varphi_{n-1} \\
&= (n-1) \left(\frac{\rho^{n-1}}{n-1} \Big|_0^1 \right) \int_{\Omega'} \sin^{(n-1)-2} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2} d\varphi_2 \cdots d\varphi_{n-1} \\
&= (n-1) \left(\int_0^1 \rho^{n-2} d\rho \right) \int_{\Omega'} \sin^{(n-1)-2} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2} d\varphi_2 \cdots d\varphi_{n-1} \\
&= (n-1) \int_0^1 \rho^{n-2} d\rho \int_{\Omega'} \sin^{(n-1)-2} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2} d\varphi_2 \cdots d\varphi_{n-1}
\end{aligned}$$

donde

$$\omega_{n-1} = \int_0^1 \rho^{n-2} d\rho \int_{\Omega'} \sin^{(n-1)-2} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2} d\varphi_2 \cdots d\varphi_{n-1}$$

es el volumen de la $n-1$ esfera en \mathbb{R}^{n-1} . Por tanto:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f \circ r)(x) &= \int_0^\infty \rho^{n-1} f(\rho) d\rho \int_0^\pi e^{-i\|x\|\rho \cos \varphi_1} \sin^{n-2} \varphi_1 d\varphi_1 \int_{\Omega'} \sin^{n-3} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2} d\varphi_2 \cdots d\varphi_{n-1} \\
&= (n-1)\omega_{n-1} \int_0^\infty \rho^{n-1} f(\rho) d\rho \int_0^\pi e^{-i\|x\|\rho \cos \varphi_1} \sin^{n-2} \varphi_1 d\varphi_1 \\
&= (n-1)\omega_{n-1} \int_0^\infty u^{n-1} f(u) du \int_0^\pi e^{-i\|x\|u \cos \phi} \sin^{n-2} \phi d\phi
\end{aligned}$$

y, para $u \in [0, \infty[$:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi e^{-i\|x\|u \cos \phi} \sin^{n-2} \phi d\phi &= \int_0^\pi (\cos(\|x\|u \cos \phi) - i \sin(\|x\|u \cos \phi)) \sin^{n-2} \phi d\phi \\
&= \int_0^\pi \cos(\|x\|u \cos \phi) \sin^{n-2} \phi d\phi - i \int_0^\pi \sin(\|x\|u \cos \phi) \sin^{n-2} \phi d\phi
\end{aligned}$$

Analicemos ambas integrables. Sea $u \in [0, \infty[$:

■ Afirmamos que

$$\int_0^\pi \cos(\|x\|u \cos \phi) \sin^{n-2} \phi d\phi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\|x\|u \cos \theta) \sin^{n-2} \theta d\theta$$

■ Afirmamos que

$$\int_0^\pi \sin(\|x\|u \cos \phi) \sin^{n-2} \phi d\phi = 0$$

Por los dos incisos anteriores, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f \circ r)(x) &= (n-1)\omega_{n-1} \int_0^\infty u^{n-1} f(u) du \int_0^\pi e^{-i\|x\|u \cos \phi} \sin^{n-2} \phi d\phi \\
&= 2(n-1)\omega_{n-1} \int_0^\infty u^{n-1} f(u) du \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\|x\|u \cos \theta) \sin^{n-2} \theta d\theta \\
&= 2(n-1)\omega_{n-1} \int_0^\infty v_n(u\|x\|) f(u) u^{n-1} du
\end{aligned}$$

donde

$$v_n(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t \cos \theta) \sin^{n-2} \theta d\theta, \quad \forall t \in [0, \infty[$$

□

Ejercicio 1.0.9

Haga lo siguiente:

- i. Sea $h : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ una función integrable en $[0, \infty[$. Sea $a > 0$, **demuestre** que existe la integral impropia

$$\int_a^{\rightarrow \infty} \frac{dx}{x} \int_0^\infty h(y) \sin xy \, dy$$

Sugerencia. Justifique la inversión del orden de las integraciones.

- ii. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{si } |x| < e \\ \frac{\text{sgn}(x)}{\log|x|} & \text{si } |x| \geq e \end{cases}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Muestre que, para $a > 0$ no existe la integral impropia

$$\int_a^{\rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \, dx$$

De este hecho y del inciso (i) **deduzca** que no existe $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tal que $f = \mathcal{F}g$. Así pues, la transformación de Fourier no es una aplicación suprayectiva de $L_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ en $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Solución:

De (i): Considere la función $f : [a, \infty[\times [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x, y) = \frac{h(y) \sin xy}{x}, \quad \forall (x, y) \in [a, \infty[\times [0, \infty[$$

Veamos que se cumplen tres condiciones:

- $\forall \beta \in [a, \infty]$, f es integrable en $[a, \beta] \times [0, \infty[$, pues

$$\begin{aligned} |f(x, y)| &= \left| \frac{h(y) \sin xy}{x} \right| \\ &\leq \frac{1}{a} |h(y)| \cdot |\sin xy| \\ &\leq \frac{1}{a} |h(y)|, \quad \forall (x, y) \in [a, \beta] \times [0, \infty[\end{aligned}$$

donde la función $(x, y) \mapsto \frac{1}{a} |h(y)|$ es integrable en $[a, \beta] \times [0, \infty[$ ya que h es integrable y $[a, \beta]$ es un conjunto de medida finita.

- Sea $y \in [0, \infty[$. Afirmamos que la integral impropia

$$\int_a^{\rightarrow \infty} f(x, y) \, dx$$

es convergente. En efecto, si $y = 0$ el resultado se tiene pues $f(x, 0) = 0$ para todo $x \in [a, \infty[$.

Para $M > a$ y $y > 0$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_a^M f(x, y) dx &= \int_a^M \frac{h(y) \sin xy}{x} dx \\
&= h(y) \int_a^M \frac{\sin xy}{x} dx, \text{ haciendo el cambio de variable } u = xy \\
&= h(y) \int_{ay}^{My} \frac{\sin u}{\frac{u}{y}} \frac{du}{y} \\
&= h(y) \int_{ay}^{My} \frac{\sin u}{u} du
\end{aligned}$$

como la integral impropia

$$\int_0^{\rightarrow\infty} \frac{\sin u}{u} du$$

es convergente, en particular lo es

$$\int_a^{\rightarrow\infty} \frac{\sin u}{u} du$$

se sigue que también lo es $\int_a^{\rightarrow\infty} f(x, y) dx$.

- Tomemos $\beta_0 > a$, se tiene que para todo $\beta > \beta_0$:

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^\beta f(x, y) dx \right| &\leq \left| \int_a^\beta \frac{h(y) \sin xy}{x} dx \right| \\
&\leq \left| h(y) \int_{ya}^{y\beta} \frac{\sin u}{u} du \right| \\
&\leq |h(y)| \left| \int_{ya}^{y\beta} \frac{\sin u}{u} du \right|
\end{aligned}$$

como

$$\int_{ya}^{\rightarrow\infty} \frac{\sin u}{u} du$$

es convergente para todo $y > 0$, entonces para $\varepsilon = 1$ existe $M > a$ tal que

$$\left| \int_{ya}^{yM} \frac{\sin u}{u} du - \frac{\pi}{2} \right| < 1 \Rightarrow \left| \int_{ya}^{yM} \frac{\sin u}{u} du \right| < 1 + \frac{\pi}{2}$$

Luego, si $\beta_0 = M$, tenemos que

$$\beta > \beta_0 \Rightarrow \left| \int_a^\beta f(x, y) dx \right| < \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) |h(y)|$$

para todo $y \in [0, \infty[$ (en particular cuando $y = 0$, el valor de la integral de la derecha es cero), donde la función de la derecha es integrable en $[0, \infty[$.

Por el teorema de intercambio de integrales impropias, se sigue que

$$\begin{aligned}
\int_a^{\rightarrow\infty} \frac{dx}{x} \int_0^\infty h(y) \sin xy dy &= \int_a^{\rightarrow\infty} dx \int_0^\infty \frac{h(y) \sin xy}{x} dy \\
&= \int_0^\infty dy \int_a^{\rightarrow\infty} \frac{h(y) \sin xy}{x} dx \\
&= \int_0^\infty h(y) dy \int_{ya}^{\rightarrow\infty} \frac{\sin u}{u} du \\
\Rightarrow \left| \int_a^{\rightarrow\infty} \frac{dx}{x} \int_0^\infty h(y) \sin xy dy \right| &\leq \int_0^\infty \left| h(y) dy \int_{ya}^{\rightarrow\infty} \frac{\sin u}{u} du \right| \\
&= \int_0^\infty |h(y)| \left| \int_{ya}^{\rightarrow\infty} \frac{\sin u}{u} du \right| dy
\end{aligned}$$

Donde la función

$$y \mapsto \int_{ya}^{\rightarrow \infty} \frac{\sin y}{u} du, \quad \forall y \in [0, \infty[$$

es acotada (*probar*). Luego, se sigue que existe la integral impropia:

$$\int_a^{\rightarrow \infty} \frac{dx}{x} \int_0^\infty h(y) \sin xy dy$$

De (ii): Sea $a > 0$. Veamos primero que la función $x \mapsto f(x)$ es continua en \mathbb{R} , más aún, se tiene que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

(es inmediato de la definición de f), por lo cual $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Por esta razón, basta con analizar el caso en que $a \geq e$. Veamos que para $M > a$

$$\begin{aligned} \int_a^M \frac{f(x)}{x} dx &= \int_a^M \frac{dx}{x \log x}, \text{ haciendo el cambio de variable } u = \log x \Rightarrow dx = x du \\ &= \int_{\log a}^{\log M} \frac{du}{u} \\ &= \log |u| \Big|_{\log a}^{\log M} \\ &= \log |\log M| - \log |\log a| \end{aligned}$$

por tanto,

$$\int_a^{\rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M \frac{f(x)}{x} dx = \infty$$

Ahora, suponga que existe $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tal que

$$f = \mathcal{F}g$$

Entonces,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} g(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \cos xy dy + i \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \sin xy dy \end{aligned}$$

en particular, para $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(y) \cos xy}{x} dy + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(y) \sin xy}{x} dy \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{g(y) \cos xy}{x} dy + \int_0^{\infty} \frac{g(y) \cos xy}{x} dy + i \left(\int_{-\infty}^0 \frac{g(y) \sin xy}{x} dy + \int_0^{\infty} \frac{g(y) \sin xy}{x} dy \right) \\ &= \int_0^{\infty} \frac{g(-y) \cos -xy}{x} dy + \int_0^{\infty} \frac{g(y) \cos xy}{x} dy + i \left(\int_0^{\infty} \frac{g(-y) \sin -xy}{x} dy + \int_0^{\infty} \frac{g(y) \sin xy}{x} dy \right) \end{aligned}$$

veamos que g impar casi en todo \mathbb{R} . Se tiene que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} g(y) dy &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} g(y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} g(y) dy &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} g(-y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} [g(y) - g(-y)] dy &= 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

en particular, se cumple para todo $k \in \mathbb{Z}$. Como el sistema $\{e^{-ixk}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es total en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, debe suceder que $g(y) - g(-y) = 0$ para casi todo $y \in \mathbb{R}$. Por tanto, g es impar c.t.p. en \mathbb{R} . Luego,

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \int_0^\infty \frac{g(-y) \cos -xy}{x} dy + \int_0^\infty \frac{g(y) \cos xy}{x} dy + i \left(\int_0^\infty \frac{g(-y) \sin -xy}{x} dy + \int_0^\infty \frac{g(y) \sin xy}{x} dy \right) \\ &= - \int_0^\infty \frac{g(y) \cos xy}{x} dy + \int_0^\infty \frac{g(y) \cos xy}{x} dy + i \left(\int_0^\infty \frac{g(y) \sin xy}{x} dy + \int_0^\infty \frac{g(y) \sin xy}{x} dy \right) \\ &= 2i \int_0^\infty \frac{g(y) \sin xy}{x} dy \end{aligned}$$

Para $a > 0$ se tiene que

$$\int_a^{\rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} dx$$

no es convergente, pero por (i), se tiene que

$$\int_a^{\rightarrow \infty} 2i dx \int_0^\infty \frac{g(y) \sin xy}{x} dy = 2i \int_a^{\rightarrow \infty} dx \int_0^\infty \frac{g(y) \sin xy}{x} dy$$

si lo es, pues la función g es integrable en $[0, \infty[$, lo cual contradice la igualdad a la que se llegó anteriormente. Por tanto, f no puede ser la transformada de Fourier de ninguna función en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. \square

Ejercicio 1.0.10

Haga lo siguiente:

- i. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función integrable en \mathbb{R} . Se supone que existe una función $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ localmente integrable en \mathbb{R} tal que

$$f(x) = f(0) + \int_0^x \varphi, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad |\varphi(x)| \underset{|x| \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{1}{|x|^m}\right)$$

donde $m > 2$. **Pruebe** que

$$|f(x)| \underset{|x| \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{1}{|x|^{m-1}}\right)$$

y que, para todo $x \in \mathbb{R}$, existen las sumas

$$\Phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(x+k) \quad \text{y} \quad F(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+k)$$

siendo la convergencia absoluta y uniforme en $[-1, 1]$, luego en \mathbb{R} . **Muestre** finalmente que

$$F(x) = F(0) + \int_0^x \Phi, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- ii. F es una función periódica de periodo uno. **Demuestre** que los coeficientes de Fourier de F respecto al sistema O.N. $(e^{2\pi i n t})_{n \in \mathbb{Z}}$ son

$$\int_0^1 F(x) e^{-2\pi i n x} dx = \mathcal{F}f(2\pi n), \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Deduzca la fórmula Sumatoria de Poisson

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}f(x+k), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- iii. Aplicando la fórmula sumatoria de Poisson a la función $x \mapsto e^{-\alpha|x|}$ para $\alpha > 0$, obtenga el desarrollo

$$\coth x = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2\pi^2}, \quad \forall x \geq 0$$

Se define la **función theta** por

$$\Theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}, \quad \forall x > 0$$

Aplicando la fórmula sumatoria de Poisson a la función $x \mapsto e^{-\alpha x^2}$ para $\alpha > 0$, **pruebe** la identidad

$$\Theta(x) = \sqrt{\frac{1}{x}} \Theta\left(\frac{1}{x}\right), \quad \forall x > 0$$

Solución:

De (i): Como

$$|\varphi(x)| \underset{|x| \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{1}{|x|^m}\right)$$

entonces existen $M \geq 0$ y $A > 0$ tales que

$$|x| > M \Rightarrow |\varphi(x)| \leq \frac{A}{|x|^m}$$

Al ser f integrable, se tiene que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

Por tanto, de la definición de f tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left(f(0) + \int_0^u \varphi(t) dt \right) \\ &= f(0) + \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u \varphi(t) dt \\ \Rightarrow f(0) &= - \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u \varphi(t) dt \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{u \rightarrow -\infty} \left(f(0) + \int_0^u \varphi(t) dt \right) \\ &= f(0) - \lim_{u \rightarrow \infty} \int_u^0 \varphi(t) dt \\ \Rightarrow f(0) &= - \lim_{u \rightarrow -\infty} \int_u^0 \varphi(t) dt \end{aligned}$$

por ende,

$$\begin{aligned} f(x) &= - \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u \varphi(t) dt + \int_0^x \varphi(t) dt \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left[- \int_0^u \varphi(t) dt + \int_0^x \varphi(t) dt \right] \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \int_x^u \varphi(t) dt \end{aligned}$$

si $x \geq 0$. Si $x < 0$ tenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= - \lim_{u \rightarrow -\infty} \int_u^0 \varphi(t) dt + \int_0^x \varphi(t) dt \\ &= \lim_{u \rightarrow -\infty} \left(- \int_u^0 \varphi(t) dt - \int_x^0 \varphi(t) dt \right) \\ &= - \lim_{u \rightarrow -\infty} \int_u^x \varphi(t) dt \end{aligned}$$

Si $|x| > M$, tenemos dos casos:

- $x > M$, se tiene

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \lim_{u \rightarrow \infty} \int_x^u \varphi(t) dt \right| \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left| \int_x^u \varphi(t) dt \right| \\ &\leq \lim_{u \rightarrow \infty} \int_x^u |\varphi(t)| dt \\ &\leq A \lim_{u \rightarrow \infty} \int_x^u \frac{dt}{|t|^m} \\ &= A \lim_{u \rightarrow \infty} \int_x^u t^{-m} dt \\ &= A \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{t^{1-m}}{1-m} \Big|_x^u \\ &= \frac{A}{1-m} \lim_{u \rightarrow \infty} t^{1-m} \Big|_x^u \\ &= \frac{A}{1-m} \lim_{u \rightarrow \infty} [u^{1-m} - x^{1-m}] \\ &= \frac{A}{m-1} x^{1-m} \\ &= \frac{A}{m-1} \cdot \frac{1}{|x|^{m-1}} \\ \therefore |f(x)| &\leq \frac{A}{m-1} \cdot \frac{1}{|x|^{m-1}} \end{aligned}$$

- $-x < -M$, de forma análoga se sigue que

$$|f(x)| \leq \frac{A}{m-1} \cdot \frac{1}{|x|^{m-1}}$$

De los dos incisos anteriores se concluye que

$$|x| > M \Rightarrow |f(x)| \leq \frac{A}{m-1} \cdot \frac{1}{|x|^{m-1}}$$

por ende,

$$|f(x)| \underset{|x| \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{1}{|x|^{m-1}}\right)$$

La convergencia absoluta de ambas sumas se sigue de forma inmediata de el hecho que

$$|f(x)| \underset{|x| \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{1}{|x|^{m-1}}\right) \quad \text{y} \quad |\varphi(x)| \underset{|x| \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{1}{|x|^m}\right)$$

veamos que es uniforme en $[-1, 1]$. En efecto, sea $\varepsilon > 0$, debemos encontrar un $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implique

$$\sup_{x \in [-1, 1]} \left| \Phi(x) - \sum_{k=-n}^n \varphi(x+k) \right| \leq \varepsilon$$

en otras palabras

$$\sup_{x \in [-1, 1]} \left| \sum_{k \in U_n} \varphi(x+k) \right| \leq \varepsilon$$

donde

$$\begin{aligned} U_n &= \left\{ y \in \mathbb{Z} \mid y \leq -n \text{ ó } n \leq y \right\} \\ &= (]-\infty, -n] \cup [n, \infty[) \cap \mathbb{Z} \end{aligned}$$

es decir que

$$\sup_{x \in [-1, 1]} \left| \sum_{k=-\infty}^{-n} \varphi(x+k) + \sum_{k=n}^{\infty} \varphi(x+k) \right| \leq \varepsilon$$

En efecto, existe $M_1 \geq 0$ tal que

$$|x| \geq M_1 \Rightarrow \frac{A}{|x|^m} \leq \varepsilon$$

sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $N \geq \max \{M, M_1\}$, entonces si $n \geq N$ (la idea está en ver la convergencia absoluta de $\sum_{k=-\infty}^{-n} \varphi(x+k)$).

De (ii): Veamos primero que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 F(x) e^{-2\pi i n x} dx &= \int_0^1 \left(F(0) + \int_0^x \Phi(y) dy \right) e^{-2\pi i n x} dx \\
&= \int_0^1 \left(F(0) + \int_0^x \Phi(y) dy \right) e^{-2\pi i n x} dx \\
&= \int_0^1 F(0) dx + \int_0^1 dx \int_0^x \Phi(y) e^{-2\pi i n x} dy \\
&= F(0) + \int_0^1 dx \int_0^x \Phi(y) e^{-2\pi i n x} dy \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) + \int_0^1 dx \int_0^x \Phi(y) e^{-2\pi i n x} dy \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) + \int_0^1 dy \int_{1-y}^1 \Phi(y) e^{-2\pi i n x} dx \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) + \int_0^1 \Phi(y) dy \int_{1-y}^1 e^{-2\pi i n x} dx \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) + \int_0^1 \Phi(y) dy \int_{1-y}^1 e^{-2\pi i n x} dx \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) + \int_0^1 \Phi(y) \left[\frac{e^{-2\pi i n x}}{-2\pi i n} \Big|_{1-y}^1 \right] dy \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) + \int_0^1 \Phi(y) \left[\frac{e^{-2\pi i n} - e^{-2\pi(1-y)n}}{-2\pi i n} \right] dy \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) + \int_0^1 \Phi(y) \left[\frac{1 - e^{-2\pi i n} e^{-2\pi i n y}}{-2\pi i n} \right] dy \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) + \int_0^1 \Phi(y) \left[\frac{1 - e^{-2\pi i n y}}{-2\pi i n} \right] dy \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) - \frac{1}{2\pi i n} \int_0^1 \Phi(y) [1 - e^{-2\pi i n y}] dy \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) - \frac{1}{2\pi i n} \int_0^1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(y+k) [1 - e^{-2\pi i n y}] dy
\end{aligned}$$

(suponiendo que todo sale bien) y,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f(2\pi n) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i n x} f(x) dx \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} e^{-2\pi i n x} f(x) dx \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} \left(f(0) + \int_0^x \varphi(y) dy \right) e^{-2\pi i n x} dx \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} f(0) e^{-2\pi i n x} dx + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} dx \int_0^x \varphi(y) e^{-2\pi i n x} dy
\end{aligned}$$

De (iii): Considere la función $h_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto e^{-\alpha|x|}$, se sabe que

$$\mathcal{F}h_1(x) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 1.0.11

Haga lo siguiente:

- i. Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x < 0$. Para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\Im z \leq 0$ se define

$$\mathcal{F}f(z) = \int_0^\infty e^{-izx} f(x) dx$$

Pruebe que esta definición tiene sentido, que $\mathcal{F}f$ es continua en el semiplano cerrado $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im z \leq 0\}$ y holomorfa en el semiplano abierto $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im z < 0\}$.

Sugerencia. El teorema de derivación de funciones definidas por integrales continúa siendo válido al sustituir el intervalo I por un abierto de \mathbb{C} .

- ii. Sean $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tales que $f(x) = g(x) = 0$, $\forall x < 0$. **Muestre** que para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\Im z \leq 0$ se tiene

$$\mathcal{F}(f * g)(z) = \mathcal{F}f(z) \mathcal{F}g(z)$$

- iii. Sean f, g como en el inciso (ii). Se supone además que $\mathcal{F}(f * g) = 0$ c.t.p. en \mathbb{R} . **Demuestre** que $f = 0$ c.t.p. en \mathbb{R} o bien $g = 0$ c.t.p. en \mathbb{R} .

Sugerencia. Deduzca de (i) y (ii) que $\mathcal{F}f = 0$ o bien $\mathcal{F}g = 0$.

Solución:

De (i): Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $\Im z \leq 0$. Se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |e^{-izx} f(x)| dx &= \int_0^\infty |e^{-ix(\Re z + i\Im z)} f(x)| dx \\ &= \int_0^\infty |e^{-ix\Re z} e^{x\Im z} f(x)| dx \\ &= \int_0^\infty |e^{-ix\Re z}| e^{x\Im z} |f(x)| dx \\ &= \int_0^\infty |f(x)| e^{x\Im z} dx \end{aligned}$$

donde $x \geq 0$ y $\Im z \leq 0$, luego $e^{x\Im z} \leq 1$, para todo $x \in [0, \infty[$. Así

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |e^{-izx} f(x)| dx &\leq \int_0^\infty |f(x)| dx \\ &= \int_{-\infty}^\infty |f(x)| dx \end{aligned}$$

pues $f(x) = 0$ para todo $x < 0$. Como f es integrable, se sigue entonces que $\mathcal{F}f(z)$ está bien definida, para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\Im z \leq 0$.

Veamos que $\mathcal{F}f$ es una función continua en el semiplano cerrado

$$\mathcal{I} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z \leq 0\}$$

En efecto, considere la función $g : \mathbb{R} \times \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$g(x, z) = e^{-izx} f(x)$$

para todo $(x, z) \in \mathbb{R} \times \mathcal{I}$. Claramente g está bien definida. Se tiene lo siguiente:

- Para todo $z \in \mathbb{C}$, $g^z(x) = e^{-izx}f(x)$ es integrable en \mathbb{R} (se probó en el punto anterior), se define así

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \mathcal{F}f(z) \\ &= \int_{\mathbb{R}} g^z(x) dx \\ &= \int_0^\infty e^{-izx} f(x) dx\end{aligned}$$

- Para toda $x \in \mathbb{R}$, la función $g_x : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $z \mapsto e^{-izx}f(x)$ es continua en $z_0 \in \mathcal{I}$, para todo z_0 .
- Existe $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tal que

$$\begin{aligned}|g(x, z)| &= |e^{-izx}f(x)| \\ &\leq |f(x)|\end{aligned}$$

para todo $(x, z) \in \mathbb{R} \times \mathcal{I}$.

entonces, por el teorema de continuidad de funciones definidas por integrales, se sigue que Φ es continua en $z_0 \in \mathcal{I}$, para todo z_0 , esto es que $\mathcal{F}f$ es continua en \mathcal{I} .

Para ver que es holomorfa en el semiplano abierto

$$\mathring{\mathcal{I}} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \Im z < 0 \right\}$$

considere nuevamente a la función $g : \mathbb{R} \times \mathring{\mathcal{I}} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$g(x, z) = e^{-izx}f(x)$$

Veamos que

- Para toda $z \in \mathring{\mathcal{I}}$, la función $x \mapsto g^z(x) = g(x, z)$ es integrable, se define así

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \mathcal{F}f(z) \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(x, z) dx \\ &= \int_0^\infty e^{-izx} f(x) dx\end{aligned}$$

para todo $z \in \mathring{\mathcal{I}}$.

- Sea $x \in \mathbb{R}$, como $z \mapsto e^{-izx}$ es holomorfa en $\mathring{\mathcal{I}}$, entonces existe la derivada de la función $g_x : \mathring{\mathcal{I}} \rightarrow \mathbb{C}$, dada por

$$\begin{aligned}g'_x(z) &= \lim_{w \rightarrow z} \frac{g_x(z) - g_x(w)}{z - w} \\ &= \lim_{w \rightarrow z} \frac{e^{-izx}f(x) - e^{-iwx}f(x)}{z - w} \\ &= f(x) \lim_{w \rightarrow z} \frac{e^{-izx} - e^{-iwx}}{z - w} \\ &= -ixf(x)e^{-izx}\end{aligned}$$

- Para todo $(x, z) \in \mathbb{R} \times \overset{\circ}{\mathcal{I}}$ se cumple que

$$\begin{aligned}
|g'_x(z)| &= |-ixf(x)e^{-izx}| \\
&= |xe^{-izx}| |f(x)| \\
&= |xe^{-ix(\Re z + i\Im z)}| |f(x)| \\
&= |xe^{-ix\Re z} e^{x\Im z}| |f(x)| \\
&= |xe^{x\Im z}| |f(x)|
\end{aligned}$$

donde

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{x\Im z} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{-x\Im z}}$$

que es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, por L'Hopital se sigue que

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{x\Im z} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{-x\Im z}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{-\Im z e^{-x\Im z}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

pues el segundo límite existe. Así, existe $M > 0$ tal que

$$x \geq M \Rightarrow |xe^{x\Im z}| < 1$$

y, como la función $x \mapsto |xe^{x\Im z}|$ es continua en $[0, M]$, es acotada, luego existe $A_0 \geq 1$ tal que

$$|xe^{x\Im z}| \leq A_0, \quad \forall x \in [0, M]$$

Por ende,

$$|xe^{x\Im z}| \leq \max\{A_0, 1\} = B_0, \quad \forall x \in [0, \infty[$$

se sigue entonces que

$$|g'_x(z)| \leq B_0 |f(x)|$$

(pues f es nula fuera de $[0, \infty[$), siendo f integrable.

Por los tres incisos anteriores y el teorema de derivación de funciones definidas por integrales, se sigue que Φ es holomorfa en $\overset{\circ}{\mathcal{I}}$ y su valor es

$$\Phi'(z) = -i \int_0^\infty xe^{-izx} f(x) dx$$

De (ii): como $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, entonces su convolución $f * g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Afirmamos que

$$f * g(x) = 0, \quad \forall x < 0$$

En efecto, sea $x < 0$, se tiene que

$$\begin{aligned}
f * g(x) &= \int_{-\infty}^\infty f(x-y)g(y) dy \\
&= \int_{-\infty}^\infty f(x-y)g(y) dy \\
&= \int_0^\infty f(x-y)g(y) dy, \text{ haciendo el CV } u = x-y \\
&= - \int_x^{-\infty} f(u)g(x-u) du \\
&= \int_{-\infty}^x f(u)g(x-u) du \\
&= 0
\end{aligned}$$

pues $f(y) = g(y) = 0$ para todo $y < 0$. Así, $f * g$ cumple las condiciones de la definición anterior. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $\Im z \leq 0$, veamos que

$$\mathcal{F}(f * g)(z) = \mathcal{F}f(z)\mathcal{F}g(z)$$

En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f * g)(z) &= \int_0^\infty e^{-izx} f * g(x) dx \\ &= \int_0^\infty e^{-izx} dx \int_{-\infty}^\infty f(x-y)g(y) dy \\ &= \int_0^\infty e^{-izx} dx \int_0^\infty f(x-y)g(y) dy\end{aligned}$$

Considere la función $(x, y) \mapsto e^{-izx} f(x-y)g(y)$. Afirmamos que esta función es integrable en $[0, \infty[\times [0, \infty[$. En efecto, es medible y, se cumple que

$$\begin{aligned}|e^{-izx} f(x-y)g(y)| &\leq |e^{-ix(\Re z + i\Im z)}| |f(x-y)g(y)| \\ &= |e^{-ix\Re z} e^{x\Im z}| |f(x-y)g(y)| \\ &= |e^{-ix\Re z}| |e^{x\Im z}| |f(x-y)g(y)| \\ &= |e^{x\Im z}| |f(x-y)g(y)| \\ &\leq |f(x-y)g(y)|, \quad \forall (x, y) \in [0, \infty[\times [0, \infty[\end{aligned}$$

pues, $\Im z \leq 0$, luego $x\Im z \leq 0$. Como la función $(x, y) \mapsto f(x-y)g(y)$ es integrable en $[0, \infty[\times [0, \infty[$, se sigue que $(x, y) \mapsto e^{-izx} f(x-y)g(y)$ es integrable en $[0, \infty[\times [0, \infty[$. Así, por Fubini obtenemos que (haciendo el cambio de variable $u = x - y$):

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f * g)(z) &= \int_0^\infty e^{-izx} dx \int_0^\infty f(x-y)g(y) dy \\ &= \int_0^\infty dy \int_0^\infty e^{-izx} f(x-y)g(y) dx \\ &= \int_0^\infty dy \int_{-y}^\infty e^{-iz(u+y)} f(u)g(y) du \\ &= \int_0^\infty e^{-izy} g(y) dy \int_0^\infty e^{-izu} f(u) du \\ &= \left(\int_0^\infty e^{-izy} g(y) dy \right) \left(\int_0^\infty e^{-izu} f(u) du \right) \\ &= \mathcal{F}g(z)\mathcal{F}f(z) \\ &= \mathcal{F}f(z)\mathcal{F}g(z)\end{aligned}$$

pues $-y \leq 0$ para todo $y \in [0, \infty[$. Lo anterior prueba el resultado.

De (iii): Suponga que

$$\mathcal{F}(f * g)(x) = 0$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}$. Por la parte (i), se tiene que

$$\mathcal{F}(f * g)(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

pues $\mathcal{F}(f * g)$ es continua en $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. Entonces:

$$\mathcal{F}f(z)\mathcal{F}g(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Suponga que $\mathcal{F}g(x) \neq 0$ para algún $x \in \mathbb{R}$, esto es que

$$\left| \int_0^\infty e^{-ixy} g(y) dy \right| > 0$$

Como $\mathcal{F}g$ es continua en x y $x \in L = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z \leq 0\}$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $u \in B(x, \delta) \cap L$:

$$|\mathcal{F}g(u)| > 0$$

luego entonces

$$\mathcal{F}f(z) = 0, \quad \forall z \in B(x, \delta) \cap L$$

en particular, existe $u_0 \in B(x, \delta) \cap L$ tal que $\Im u_0 < 0$, luego existe $r > 0$ tal que

$$B(u_0, r) \subseteq B(x, \delta) \cap \mathring{L}$$

siendo $\mathcal{F}f$ holomorfa en \mathring{L} y cero en un abierto contenido en \mathring{L} , se sigue que $\mathcal{F}f$ debe ser cero en todo \mathring{L} (por el teorema de identidad en variable compleja) y, como $\mathcal{F}f$ es continua en L , debe ser cero en \mathbb{R} .

Por ende, $f = 0$ c.t.p. en \mathbb{R} (ya que el operador transformación de Fourier es inyectivo). \square

Ejercicio 1.0.12

Haga lo siguiente:

- i. Sea $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Se define para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izx - \frac{x^2}{2}} \overline{f(x)} dx$$

Pruebe que F es holomorfa en \mathbb{C} y que, para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$F^{(n)}(z) = (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-izx - \frac{x^2}{2}} \overline{f(x)} dx$$

Sugerencia. La misma que la del Problema 11.

- ii. Se supone que f es ortogonal a todas las funciones de Hermite. Muestre que $F = 0$ y **deduzca** que $f = 0$ c.t.p. en \mathbb{R}^n .

Así pues, el sistema de funciones de Hermite normalizadas es un sistema ortonormal maximal en $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Sugerencia. Observe que $F^{(n)}(0) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. La condición $F = 0$ implica que la transformada de Fourier de la función integrable $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}} \overline{f(x)}$ es cero.

Solución:

De (i): Defina $h : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por:

$$h(x, z) = e^{-izx - \frac{x^2}{2}} \overline{f(x)}$$

Veamos que se cumple lo siguiente:

- Sea $z \in \mathbb{C}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \left| e^{-izx - \frac{x^2}{2}} \overline{f(x)} \right| &= \left| e^{-ix(\Re z + i\Im z)} e^{-\frac{x^2}{2}} \overline{f(x)} \right| \\ &= \left| e^{-ix\Re z} \right| \left| e^{x\Im z - \frac{x^2}{2}} \right| \left| \overline{f(x)} \right| \\ &= \left| e^{x\Im z - \frac{x^2}{2}} \right| |f(x)|, \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

donde por Hölder, se tiene que $x \mapsto \left| e^{x\Im z - \frac{x^2}{2}} \right| |f(x)|$ está en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, pues $x \mapsto e^{x\Im z - \frac{x^2}{2}}$ está en $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, al igual que f .

- Sea $x \in \mathbb{R}$. Es claro que la función

$$z \mapsto e^{-izx - \frac{x^2}{2}} \overline{f(x)}$$

es diferenciable en \mathbb{C} (pues $z \mapsto e^{-izx - \frac{x^2}{2}}$) lo es, con derivada:

$$\frac{\partial h}{\partial z}(x, z) = (-i)xe^{-izx - \frac{x^2}{2}} \overline{f(x)}$$

Se tiene entonces que F está bien definida, para todo $z \in \mathbb{R}$.

- Para $z \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial h}{\partial z}(x, z) \right| &= \left| (-i)xe^{-izx - \frac{x^2}{2}} \overline{f(x)} \right| \\ &= \left| xe^{x\Im z - \frac{x^2}{2}} \right| |f(x)| \end{aligned}$$

sea $a > 0$, tenemos que para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\Im z < a$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial h}{\partial z}(x, z) \right| &= \left| xe^{x\Im z - \frac{x^2}{2}} \right| |f(x)| \\ &= e^{x\Im z} \left| xe^{-\frac{x^2}{2}} \right| |f(x)| \\ &\leq e^{ax} \left| xe^{-\frac{x^2}{2}} \right| |f(x)| \\ &= \left| xe^{ax - \frac{x^2}{2}} \right| |f(x)| \end{aligned}$$

donde la función de la derecha es integrable en \mathbb{R} y no depende de z .

Por el teorema de derivación de funciones definidas por integrales, se tiene que F es holomorfa en el semiplano abierto

$$\Omega_a = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \Im z < a \right\}$$

para todo $a > 0$. Luego al ser el $a > 0$ arbitrario, se sigue que F es holomorfa en \mathbb{C} . En particular:

$$F^{(1)} = (-i) \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-izx - \frac{x^2}{2}} \overline{f(x)} dx, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Más aún, como F es holomorfa en \mathbb{C} , tiene todas sus derivadas de todos sus órdenes y, por inducción se prueba de forma análoga al procedimiento anterior que

$$F^{(n)} = (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-izx - \frac{x^2}{2}} \overline{f(x)} dx, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

De (ii): Como f es ortogonal a todas las funciones de Hermite, se tiene que

$$\langle \varphi_n | f \rangle = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \overline{f(x)} dx = 0$$

donde H_n es un polinomio de grado n . Como se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$(-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}} \overline{f(x)} dx = 0$$

es decir, que

$$F(n) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por ser F holomorfa en \mathbb{C} , admite expansión en serie de Taylor alrededor del 0, así:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^n(0)}{n!} z^n, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

(ya que el hecho de que F sea holomorfa en \mathbb{C} implica que F es analítica, luego admite tal representación en serie de potencias). En particular, se tiene que

$$F(z) = F(0), \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

en particular

$$F(y) = F(0), \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

es decir que

$$\begin{aligned} F(0) &= F(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyx} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \overline{f(x)} dx \\ &= \mathcal{F}h(y) \end{aligned}$$

donde $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es la función $x \mapsto h(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \overline{f(x)}$ es una función en $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, por ende $\mathcal{F}h \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, esto es que

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \mathcal{F}h(y) = 0 \iff \lim_{y \rightarrow \infty} F(y) = 0$$

lo cual solo puede suceder si $F(0) = 0$. Por tanto, $F = 0$. Pero de lo anterior, como la aplicación que a cada función la envía a su serie de Fourier es inyectiva, debe suceder que $h = 0$ c.t.p. en \mathbb{R} , es decir que $f = 0$ c.t.p. en \mathbb{R} . \square

Ejercicio 1.0.13

Haga lo siguiente:

- i. **Demuestre** la fórmula.

$$D_x^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2} dy = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} D_y^n e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2} dy$$

- ii. Se consideran las funciones de Hermite

$$\varphi(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} D^n e^{-x^2}$$

Pruebe que $\mathcal{F}_2 \varphi_n = (-1)^n \varphi_n$. Así pues, las funciones de Hermite son vectores propios para el operador \mathcal{F}_2 .

Sugerencia. Transforme $\mathcal{F}_2 \varphi_n$ por la “fórmula de integración por partes de orden n ”.

$$\int_a^b f^{(n)} g = \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^{(n-k-1)} g^{(k)} \right] + (-1)^n \int_a^b f g^{(n)}$$

(al suponer $f^{(n)}$ y $g^{(n)}$ continuas en $[a, b]$). Después, use la fórmula del inciso (i).

Solución:

Considere la función $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f(y, x) = e^{-y^2} e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2}$$

Se cumple para f lo siguiente:

- Sea $y \in \mathbb{R}$, entonces la función $x \mapsto f_y(x) = f(x, y) = e^{-y^2} e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2}$ es de clase C^∞ en \mathbb{R} (por ser composición de funciones clases C^∞). Más aún, se tiene que

$$D_x^n \left(e^{-y^2} e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2} \right) = e^{-y^2} D_x^n e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2}$$

- Para todo $x \in \mathbb{R}$, las funciones $y \mapsto e^{-y^2} D_x^n e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2}$ son integrables en \mathbb{R} , con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. En efecto, procederemos por inducción sobre n . Sea $x \in \mathbb{R}$:

- El caso $n = 0$ y $n = 1$ son inmediatos, pues para todo $y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} e^{-y^2} D_x^0 e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2} &= e^{-y^2 + \frac{1}{2}(y-ix)^2} \\ &= e^{-y^2 + \frac{1}{2}(y^2 - 2iyx - x^2)} \\ &= e^{-y^2 + \frac{1}{2}y^2 - iyx - \frac{1}{2}x^2} \\ &= e^{-\frac{y^2}{2} - iyx - \frac{x^2}{2}} \\ &= e^{-\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2}} e^{-iyx} \\ \Rightarrow \left| e^{-y^2} D_x^0 e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2} \right| &\leq e^{-\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2}} \\ &= e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} \end{aligned}$$

donde la función $y \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}}$ es integrable en \mathbb{R} . y,

$$e^{-y^2} D_x^1 e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2} =$$

- Suponga que para algún $n \in \mathbb{N}$, las funciones

$$y \mapsto e^{-y^2} D_x^n e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2} \quad \text{y} \quad y \mapsto e^{-y^2} D_x^{n-1} e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2}$$

son integrables en \mathbb{R} . Veamos que se cumple para $n + 1$. En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned} D_x^{n+1} \left(e^{-y^2} e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2} \right) &= e^{-y^2} D_x^{n+1} e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2} \\ &= D_x^n \left(D_x e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2} \right) \\ &= e^{-y^2} D_x^n \left(e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2} D_x \left[\frac{1}{2} (y - ix)^2 \right] \right) \\ &= e^{-y^2} D_x^n \left(e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2} D_x \left[\frac{1}{2} (y - ix)^2 \right] \right) \\ &= e^{-y^2} D_x^n \left(e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2} (-i)[y - ix] \right) \\ &= e^{-y^2} \left[(-i) D_x^n \left([y - ix] e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2} \right) \right] \\ &= e^{-y^2} \left[(-i) y D_x^n \left(e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2} \right) - D_x^n \left(x e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2} \right) \right] \\ &= e^{-y^2} \left[(-i) y D_x^n \left(e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2} \right) - \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} D_x^{n-k} \left(e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2} \right) D_x^k(x) \right] \\ &= e^{-y^2} \left[(-i) y D_x^n \left(e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2} \right) - x D_x^n e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2} - D_x^{n-1} e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2} \right] \end{aligned}$$

usando la fórmula de Leibniz para la derivada de un producto.

□