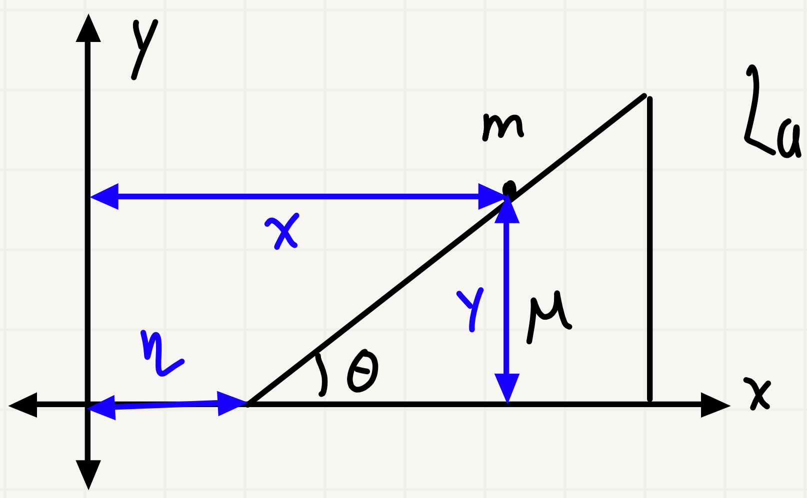
Lagrange.

2 grados de libertad.

1)



La lagrangiana previa será:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \frac{1}{2}M\dot{\eta}^2 - mgy$$

Con la restricción $\tan\theta = \frac{y}{x-\eta} \Rightarrow (x-\eta)\tan\theta = y$. Por tanto:

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + (\dot{x}-\dot{\eta})^2\tan\theta\right) + \frac{1}{2}M\dot{\eta}^2 - mg(x-\eta)\tan\theta \;//$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{2}m\left(2\dot{x} + 2(\dot{x}-\dot{\eta})\tan\theta\right), \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -mg\tan\theta$$

$$= m(\dot{x} + (\dot{x}-\dot{\eta})\tan\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} = \frac{1}{2}m\left(-2(\dot{x}-\dot{\eta})\tan\theta\right) + \frac{1}{2}\cdot 2M\dot{\eta}, \quad \frac{\partial L}{\partial \eta} = mg\tan\theta$$

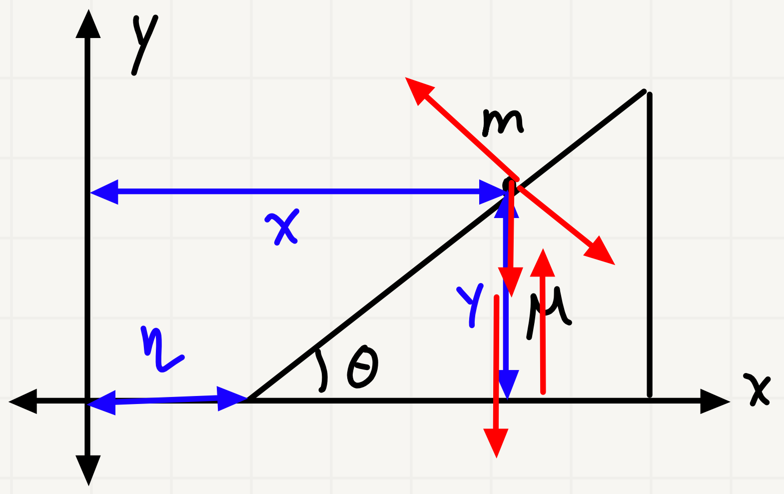
$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = m(\ddot{x} + (\ddot{x}-\ddot{\eta})\tan\theta) + mg\tan\theta = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \eta} = -m(\ddot{x}-\ddot{\eta})\tan\theta - mg\tan\theta + M\ddot{\eta} = 0$$

$$(1)\ldots \begin{cases} \ddot{x} + (\ddot{x}-\ddot{\eta})\tan\theta + g\tan\theta = 0 \\ -(\ddot{x}-\ddot{\eta})\tan\theta - g\tan\theta + \frac{M}{m}\ddot{\eta} = 0 \end{cases}$$

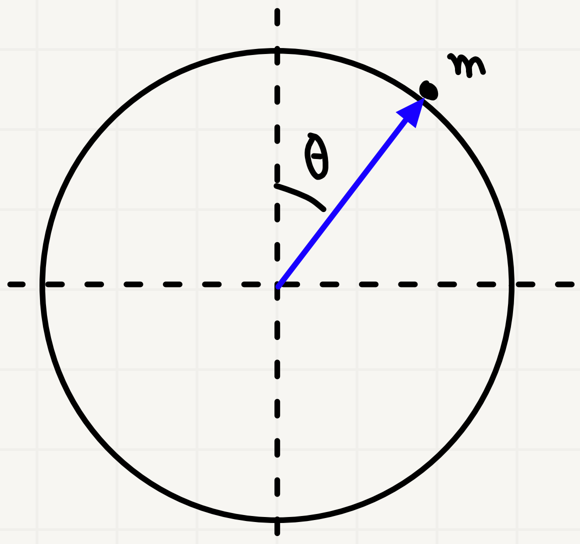
Ejemplos.

1) Para el cálculo de reestricciones:



En el diagrama,

EJEMPLO.



$\downarrow \vec{g}$ La reestricción asociada a la fuerza normal es $r-R=0$. Planteamos la lagrangiana generalizada:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - mgr\cos\theta + \lambda(r-R)$$

entonces:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta + \lambda$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = mgr\,\mathrm{sen}\theta$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta - \lambda = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} - mgr\,\mathrm{sen}\theta = 0$$

Sustituyendo la reestricción $R=r$: $\Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$, luego:

$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta - \lambda = 0 \quad \ldots (1) \\ mR^2\ddot{\theta} - mgR\,\mathrm{sen}\theta = 0 \quad \ldots (2) \end{cases}$$

de (1) y (2):

$$R\ddot{\theta} = g\,\mathrm{sen}\theta$$

$$\Rightarrow R\int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\, d\dot{\theta} = g\int_0^{\theta} \mathrm{sen}\theta\, d\theta$$

$$\Rightarrow R\frac{\dot{\theta}^2}{2} = g(1-\cos\theta)$$

$\therefore R\dot{\theta}^2 = 2g(1-\cos\theta)$, sustituyendo en (1):

$$-2mg(1-\cos\theta) + mg\cos\theta = \lambda$$

$\therefore \lambda = mg(3\cos\theta - 2)$, como:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}}(r-R) = \hat{e}_r$$

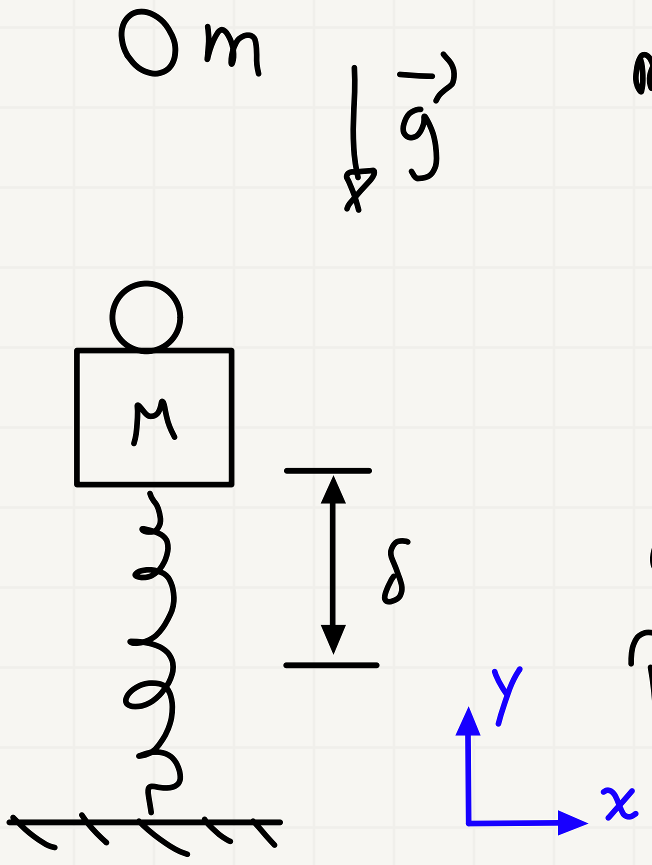
entonces $\vec{N} = \lambda\hat{e}_r = mg(3\cos\theta - 2)\,\hat{e}_r$. Cuando $\vec{N}=0$, entonces $\cos\theta = \frac{2}{3}$ se desprenderá la masa m.

$\square$

Si L cumple las ecs. de Lagrange, entonces $L' = L + f(q_i, t)$ satisface las ecs. de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial q_j} = 0$$

Problema 3.



m colisiona con M a una velocidad $-\sqrt{2gh}$ (pues y va hacia arriba). Durante la colisión se conserva el momento lineal, i.e:

$$-\sqrt{2gh}\,m = mv + MV \quad \dots (1)$$

donde v y V son las velocidades de m y M, resp., después de la colisión. Por def. el coeficiente de restitución es:

$$e = -\frac{V-v}{0+\sqrt{2gh}} = \frac{v-V}{\sqrt{2gh}} \quad \dots (2)$$

Luego $\sqrt{2gh}\,e = v - V \Rightarrow me\sqrt{2gh} = mv - mV$, eliminando a mv:

$$\Rightarrow -m\sqrt{2gh}\,(1+e) = (M+m)V \quad \dots (3)$$

Como M está comprimiendo el resorte, y está en equilibrio, entonces:

$$Mg = Ky_0$$

y_0 la compresión inicial. Entonces $y_0 = \frac{Mg}{K}$. (Si se plantea desde la pos. de equilibrio, la deformación inicial y la energía potencial gravitacional de M no se toman en cuenta). Aplicando cons. de energía desde la pos. de equilibrio hasta la máxima deformación δ[1)]:

$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}k\delta^2$$ (en V, la masa m ya está subiendo).

$$\Rightarrow V^2 = \frac{K}{M}\delta^2 \Rightarrow V = -\delta\sqrt{\frac{K}{M}}$$ (pues M va hacia abajo) ... (4)

Sustituyendo en (3):

$$\Rightarrow m\sqrt{2gh}\,(1+e) = \delta(M+m)\sqrt{\frac{K}{M}}$$

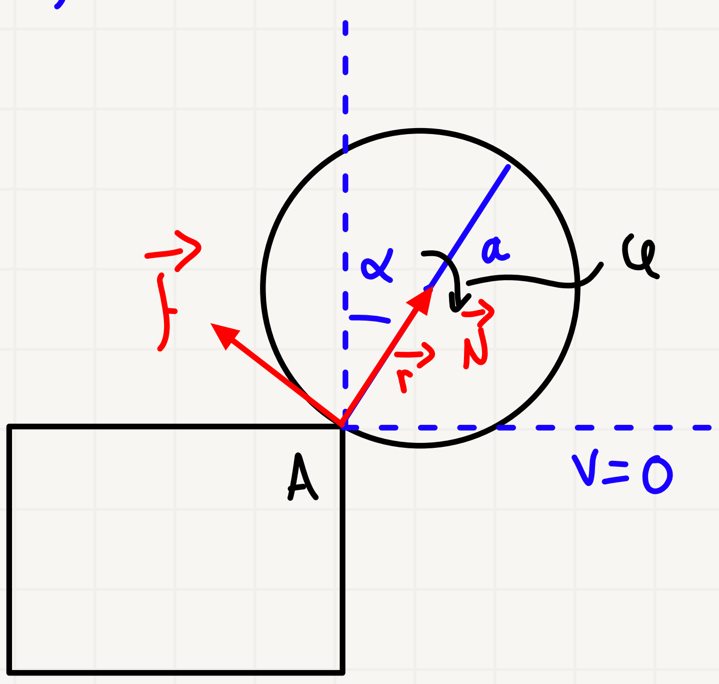
$$\Rightarrow e = \left(1+\frac{M}{m}\right)\delta\sqrt{\frac{K}{2Mgh}} - 1$$

□

Y, para v se tiene:

Problema

1)



En este problema la normal $\vec{N}$ está asociada a la ec. de reestricción: $r-a=0$.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\alpha}^2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}Ma^2\right)\dot{\varphi}^2 - Mgr\cos\alpha + \lambda(r-a)$$

esto, usando traslación más rotación. Como rueda, $\dot{\alpha} = \dot{\varphi}$.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = M\dot{r} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = Mr\dot{\alpha}^2 - Mg\cos\alpha + \lambda$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} = Mr^2\dot{\alpha} + \frac{1}{2}Ma^2\dot{\alpha} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = Mgr\,\text{sen}\,\alpha$$

$$\Rightarrow M\ddot{r} - Mr\dot{\alpha}^2 + Mg\cos\alpha - \lambda = 0 \quad \ldots (1)$$

$$2Mr\dot{r}\dot{\alpha} + Mr^2\ddot{\alpha} + \frac{1}{2}Ma^2\ddot{\alpha} - Mgr\,\text{sen}\,\alpha = 0 \quad \ldots (2)$$

Con la reestricción $r=a \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$, entonces:

$$-Ma\dot{\alpha}^2 + Mg\cos\alpha - \lambda = 0 \quad \ldots (3)$$

$$Ma^2\ddot{\alpha} + \frac{1}{2}Ma^2\ddot{\alpha} - Mga\,\text{sen}\,\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}Ma^2\ddot{\alpha} - Mga\,\text{sen}\,\alpha = 0 \quad \ldots (4)$$

Terminar de resolver.

Nota: si hay fricción estática, la energía SÍ se conserva (con C.R).

Ahora veamos rotación pura alrededor de A.

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2}I_A\dot{\alpha}^2}_{I_A = \frac{1}{2}Ma^2 + Mr^2} - Mgr\cos\alpha + \lambda(r-a)$$

Notas.

1) Hacer tomando todo en cuenta.