Notas de Álgebra Moderna IV.
Una introducción a la teoría de categorías.

Cristo Daniel Alvarado

3 de junio de 2024

Índice general

Capítulo 3

Funtores

3.1. Conceptos Fundamentales

Definición 3.1.1
Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías. Un **funtor covariante** (respectivamente, **funtor contravariante**), denotado por $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, consta de

1. Un mapeo $F : \mathrm{Obj}(\mathcal{C}) \to \mathcal{D}$ tal que $A \mapsto F(A)$.

2. Para cualesquier dos pares de objetos $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, un mapeo $F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ (resp. $F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(B), F(A))$) tal que $f \mapsto F(f)$, que cumple las condiciones siguientes:

   I) Para cada $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

   II) Para cada $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$, se tiene que

   $$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

   (resp. $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$).

Un **bifuntor** es un funtor que va del producto de dos categorías en una categoría.

Definición 3.1.2
La **imagen de un funtor** F **entre las categorías** $\mathcal{C}$ **y** $\mathcal{D}$, consta de una clase $\left\{F(C) \middle| C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})\right\}$ junto con todos los conjuntos $\left\{F(f) \middle| f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \text{ con } A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})\right\}$.

Observación 3.1.1
La imagen de un funtor no necesariamente es una categoría. En cambio, si el funtor es inyectivo sobre objetos, se tiene que la imagen de un funtor si es una categoría.

Demostración:
En efecto, sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías. Para cualesquiera $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ y $D_1, D_2, D_3 \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1, C_2)$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C_3, C_4)$, $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D_1, D_2)$ y $k \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D_2, D_3)$. Se tiene lo siguiente:

$$C_1 \longrightarrow C_2 \text{ y } C_3 \longrightarrow C_4$$
$$D_1 \longrightarrow D_2 \longrightarrow D_3$$

la imagen de $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ noes una categoría, pues si hacemos que

$$F(C_1) = D_1, F(C_2) = F(C_3) = D_2 \text{ y } F(C_4) = D_4$$

haciendo

$$F(f) = h, F(g) = k$$

además,

$$F(1_{C_1}) = 1_{D_1} \quad F(1_{C_2}) = F(1_{C_3}) = 1_{D_2} \quad F(1_{C_4}) = 1_{D_3}$$

pues, h y k paretenecen a la imagen de F, pero su composición no lo está. ■

Observación 3.1.2
Si F es inyectiva, entonces la imagen de F será una categoría.

Proposición 3.1.1
Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor covariante (resp. contravariante), entonces $F' : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$ es un funtor contravariante (resp. covariante).

Demostración:
Se hará el segundo caso. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor contravariante. Definimos F' tal que

$$F(A) = F'(A), \quad \forall A \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C}^{op})$$

y,

$$F(1_A) = F'(1_A), \quad \forall A \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C}^{op})$$

1. Sea f un morfismo de A en B, con $A, B \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C}^{op}) = \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$. Entonces su respectivo elemento f^{op} el $\mathcal{C}$
$$F(f) = F'(f^{op})$$
Claramente esto está bien definido. Con lo cual se tiene que $F'(f^{op}) : F(B) \to F(A)$, que es la primera parte para probar que F es funtor covariante.

2. Sean $f^{op} \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(B, A)$ y $g^{op} \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(C, B)$. Entonces, existen $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ y $g \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$. Se tiene entonces que
$$\begin{aligned} F'(f^{op} \circ g^{op}) &= F'((g \circ f)^{op}) \\ &= F(g \circ f) \\ &= F(f) \circ F(g) \\ &= F'(f^{op}) \circ F'(g^{op}) \end{aligned}$$

por tanto, de los dos incisos anteriores se sigue que F' es un funtor covariante. ■

Definición 3.1.3
Sea $\mathcal{C}$ una categoría.

1. Si $\mathcal{C}'$ es una subcategoría de $\mathcal{C}$, definimos el **funtor inclusión** $I : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ el cual asigna a cada objeto y cada morfismo a sí mismo. En el caso que $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$,tendremos simplemente que $I : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es el **funtor identidad**, denotado por $1_{\mathcal{C}}$.

2. Sea $\sim$ una congruencia en $\mathcal{C}$ categoría y, $\mathcal{C}/\sim$ la categoría cociente correspondiente. Se define el **funtor cociente**, denotado por $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\sim$ de la siguiente manera:
   - $\pi(C) = C$ para todo $C \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$.
   - $\pi(f) = \overline{f}$ para todo morfismo f en la categoría $\mathcal{C}$.

donde $\overline{f}$ denota a la clase de equivalencia de los morfismos de f en $\mathcal{C}$.

Además, si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son morfismos en $\mathcal{C}$, con $A, B \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$, se tiene que

$$\pi(g \circ f) = \overline{g \circ f} = \overline{g} \circ \overline{f} = \pi(g) \circ \pi(f)$$

3. Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ son dos funtores, siendo $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ categorías, podemos definirl el **funtor composición puntual** $G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ como sigue:

$$G \circ F(C) = G(F(C)), \quad \forall C \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$$

y,

$$G \circ F(f) = G(F(f)), \quad \forall f \text{ morfismo en } \mathcal{C}$$

   I) Si F y G son ambos covariantes ó contravariantes, entonces $G \circ F$ es un funtor covariante.

   II) Si uno de ellos es covariante y el otro contravariante, entonces $G \circ F$ es contravariante.

Demostración:

Verifiquemos en 3 que es un funtor. En efecto, claramente manda objetos en objetos y morfismos en morfismos de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{E}$.

Suponga que F y G son ambos contravariantes (el caso en el que son covariantes es inmediato). Entonces para $F : A \to B$ morfismo en $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} &F(f) : F(B) \to F(A) \\ \Rightarrow &G(F(f)) : G(F(A)) \to G(F(B)) \end{aligned}$$

además, si f, g son morifsmos en $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} G \circ F(g \circ f) &= G(F(g \circ f)) \\ &= G(F(f) \circ F(g)) \\ &= G(F(g)) \circ G(F(f)) \end{aligned}$$

luego, el funtor composición puntual es covariante.

Para el caso en el que uno sea covariante y otro contravariante, el caso es similar. ■

Definición 3.1.4

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías.

1. Fijemos un objeto $D_0 \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{D})$. Definimos el **funtor constante**, $A_{D_0} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ el cual asigna a cada objeto $C \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ al objeto D_0 y a cada morfismo f de $\mathcal{C}$ el morfismo 1_{D_0} de $\mathcal{D}$.

2. Considere la categoría producto $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$. Definimos los **funtores proyección** de la siguiente mantera:

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{C}, \quad (C, D) \mapsto C \quad (f, g) \mapsto f \\ \rho_{\mathcal{D}} : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}, \quad (C, D) \mapsto D \quad (f, g) \mapsto g \end{aligned}$$

Definición 3.1.5

Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Definimos el **bifuntor** $\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ como $\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A, B)$, para todo $(A, B) \in \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}$.

Además, si $(f^{op}, g) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}}\,((A, B), (C, D))$, entonces se tiene que $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(C, A)$ y

$g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, D)$.

Luego

$$\begin{aligned}\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}\times\mathcal{C}}((A,B),(C,D)) &\to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}\left(\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}(A,B)}, \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}(C,D)}\right)\\ (f^{op}, g) &\mapsto \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(f^{op}, g)\end{aligned}$$

donde $\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(f^{op}, g)(h) = g \circ h \circ f$, para todo $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.

Demostración:

Probaremos que $\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}$ es un funtor. Hay que ver que se cumplen algunas condiciones:

1. $\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$, tal que $(A, B) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, y $(f^{op}, g) \mapsto (h \mapsto g \circ h \circ f)$ para todo $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ (siendo los f y g como se dió en la definición). Así, está bien definido.

2. Sean $(A, B) \in \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}$, $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, entonces:

$$\begin{aligned}\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}((1_A, 1_B))(h) &= \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}((1_A^{op}, 1_B))(h)\\ &= 1_b \circ g \circ 1_A\\ &= h\\ &= 1_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)}(h)\\ &= 1_{\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(A,B)(h)}\end{aligned}$$

luego manda identidades en identidades.

3. Sean ahora $(f^{op}, g) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}\times\mathcal{C}}((A, B), (C, D))$ y $(r^{op}, t) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}\times\mathcal{C}}((C, D), (E, F))$. Tomemos $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.

   Se tiene que $\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(r^{op}, t) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B), \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, F))$ y $g \circ h \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$, de manera que

$$\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(r^{op}, t)(g \circ h \circ f) = t \circ (g \circ h \circ f) \circ r$$

   luego,

$$\begin{aligned}\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}((r^{op}, t) \circ (f^{op}, g))(h) &= \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(r^{op} \circ f^{op}, t \circ g)(h)\\ &= \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}((f \circ r)^{op}, t \circ g)(h)\\ &= (t \circ g) \circ h \circ (f \circ r)\\ &= \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(r^{op}, t)(g \circ h \circ f)\\ &= \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(r^{op}, t) \circ \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(f^{op}, g)(h)\\ \Rightarrow \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}((r^{op}, t) \circ (f^{op}, g)) &= \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(r^{op}, t) \circ \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(f^{op}, g)(h)\end{aligned}$$

Por los incisos anteriores, se sigue que este es un bifuntor, denominado **bifuntor Hom**. ■

Ejemplo 3.1.1

Los funtores olvidados (o *forgetful*). Consideremos por ejemplo a las categorías **Rng** y **Ab**. Entonces:

1. F : **Ring** $\to$ **Ab** tal que $(A, +, \cdot) \mapsto (A, +)$ y a cada morfismo lo manda a sí mismo es un funtor, el cual .ºlvida”propiedades del objeto original del que partió. En este caso, olvida el producto entre dos elementos del anillo.

2. **Grp** $\to$ **Set**. A cada grupo lo manda al conjunto de sus elementos y morfismo a la función entre grupos.

Proposición 3.1.2
Las categorías pequeñas y los funtores entre ellas forman una categoría (localmente pequeña), la cual denotamos como **Cat**, definiendo:

1. $\mathrm{Obj}\,(\mathbf{Cat}) = \left\{ \mathcal{C} \middle| \mathcal{C} \text{ es una categoría pequeña} \right\}$.
2. Para cada par de objetos $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathrm{Obj}\,(\mathbf{Cat})$, el conjunto:
$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}\,(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \left\{ F \middle| F : \mathcal{C} \to \mathcal{D} \text{ es un funtor} \right\}$$
(como $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son conjuntos, entonces la clase anterior debe ser un conjunto).
3. La composición de morfismos en esta categoría se define como la composición funtorial puntual de dos funtores. Además, la identidad es el funtor identidad de la misma categoría.

Demostración:
Basta con ver que la composición es asociativa en la categoría **Cat**. En efecto, sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{T}$ categorías pequeñas y, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ y $H : \mathcal{E} \to \mathcal{T}$ funtores. Se tiene que:

$$\begin{aligned}(H \circ (G \circ F))(A) &= H(G \circ F(A)) \\ &= (H \circ G)(F(A)) \\ &= H \circ G \circ F(A)\end{aligned}$$

(pues la composición de funtores como se definió es asociativa en objetos). ■

Proposición 3.1.3
Sea $F : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ un bifuntor. Entonces, para todo $A \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{A})$ existe un funtor $F_A : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, llamado el **funtor asociado derecho respecto a** A y está definido como sigue:

1. $F_A(B) = F(A, B)$ para todo $B \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{B})$.
2. $F_A(f) = F = (1_A, f)$ para todo f morfismo en la categoría $\mathcal{B}$.

Similarmente, para cada $B \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{B})$, existe un funtor $F^B : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$, llamado **funtor asociado izquierdo respecto a** B, como sigue:

1. $F^B(A) = F(A, B)$ para todo $A \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{A})$.
2. $F^B(f) = F = (f, 1_B)$ para todo f morfismo en la categoría $\mathcal{A}$.

Y, si F es covariante (resp. contravariante), entonces F_A y F^B son covariantes (resp. contravariantes).

Demostración:
Sea $A \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{A})$. Se probará que el funtor asociado derecho respecto a $A \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{A})$ es un funtor. Claramente está bien definido (manda objetos de $\mathcal{A}$ en objetos de $\mathcal{C}$ y lo mismo con morfismos). Veamos que se cumplen dos condiciones:

1. Sea $B \in \mathcal{B}$. Entonces,

$$\begin{aligned} F_A(1_B) &= F(1_A, 1_B) \\ &= 1_{F(A,B)} \\ &= 1_{F_A(B)} \end{aligned}$$

2. Suponga que F es covariante. Sean $A, B, C \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{B})$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\,(A, B)$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\,(B, C)$. Entonces:

$$\begin{aligned} F_A(g \circ f) &= F(1_A, g \circ f) \\ &= F(1_A \circ 1_A, g \circ f) \\ &= F((1_A, g) \circ (1_A f)) \\ &= F(1_A, g) \circ F(1_A, f) \\ &= F_A(g) \circ F_A(f) \end{aligned}$$

de los incisos anteriores, se sigue que F_A es un funtor covariante (los demás casos son análogos). ■

Ejemplo 3.1.2
Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $C \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$. El funtor $\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}C} = \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(C, -)$ es el funtor asociado derecho respecto a C y ${\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}}^{C} = \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(-, C)$ es el funtor asociado izquierdo respecto a C.

Ejemplo 3.1.3
El bifuntor producto cartesiano $- \times - : \mathbf{Set} \times \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$, $(- \times -)(A, B) \mapsto A \times B$ y tal que $(- \times -)(f, g) \mapsto f \times g$, donde si $(f, g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}\,(A, C) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}\,(B, D)$, entonces

$$\begin{aligned} f \times g : A \times B &\to C \times D \\ (a, b) &\mapsto (f(a), g(b)) \end{aligned}$$

Ejemplo 3.1.4
Para cualquier conjunto X, los funtores producto cartesiano $X \times -$ y $- \times X$ son los funtores derecho e izquierdo asociados con respecto a X del bifuntor producto cartesiano, respectivamnete.

3.2. Isomorfismos entre categorías

Definición 3.2.1
Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor entre dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$. Diremos que F es **fiel** (respectivamente, **pleno**) si para cada par de objetos $A, B \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$, la función

$$\begin{aligned} F_{A,B} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A, B) &\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,(F(A), F(B)) \\ f &\mapsto F(f) \end{aligned}$$

es inyectiva (respectivamente, suprayectiva).

Se dirá que F es **plenamente fiel** cuando sea fiel y pleno.

Ejemplo 3.2.1
Si $\mathcal{C}$ es una subcategoría de una categoría $\mathcal{D}$, entonces el funtor inclusión $i : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor fiel.

Más aún, i es plenamente fiel si y sólo si $\mathcal{C}$ es subcategoría llena de $\mathcal{D}$. Particularmente,

$$i : \mathcal{D}^{grp} \hookrightarrow \mathcal{D}$$

y, será plenamente fiel si y sólo si $\mathcal{D}$ ya es un grupoide.

Ejemplo 3.2.2
Sean $\mathcal{C}$ y $\sim$ una relación de congruencia en $\mathcal{C}$. Considere el mapeo proyección

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{C} &\to \mathcal{C}/\sim \\ A &\mapsto A \\ f &\mapsto [f] = \overline{f} \end{aligned}$$

es un funtor pleno. En general no va a ser fiel. En particular, si tomamos

$$\pi : \mathbf{Set} \to \mathbf{HTop}$$

resulta que $\pi_{(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ no es inyectiva. Más aún, es una función constante (donde $(\mathbb{R},\mathbb{R})$ denota al conjunto de todas lsa funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$). En efecto, sean

$$f, g \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{Top}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

Definimos

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \times [0,1] &\to \mathbb{R} \\ (x,t) &\mapsto (1-t)f(x) + tg(x) \end{aligned}$$

es claro que F es continua y, además,

$$F(x,0) = f(x), \quad \text{y} \quad F(x,1) = g(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, es decir que f y g son homotópicas, luego todas están en la misma clase de equivalencia, así π de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ no es continuo.

Ejemplo 3.2.3
Definimos un funtor

$$U : \mathbf{Ring} \to \mathbf{Grp}$$

como sigue, para cada $R \in \operatorname{Obj}(\mathbf{Ring})$ (anillo conmutativo con identidad). $U(R) = R^*$. Además, si $R, S \in \operatorname{Obj}(\mathbf{Ring})$, para $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{Ring}}(R,S)$,

$$U(f) = f\big|_{R^*} : R^* \to S^*$$

(donde S^* es el conjunto de todos los elementos de R invertibles respecto al producto del anillo). Es claro que U es un funtor, pero no es fiel ni pleno.

Demostración:
Probaremos que U no es fiel. En efecto, consideremos el anillo $\mathbb{Z}_2[X]$ (siendo $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Observemos que

$$\mathbb{Z}_2[X]^* = \mathbb{Z}_2^* = \{[1]\}$$

(por ser $\mathbb{Z}_2$ campo) luego,

$$U_{\mathbb{Z}_2[X],\mathbb{Z}_2[X]} : \operatorname{Hom}_{\mathbf{Ring}}(\mathbb{Z}_2[X],\mathbb{Z}_2[X]) \to \operatorname{Hom}_{\mathbf{Grp}}(\{[1]\},\{[1]\})$$

Se afirma que $\left|\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}\left(\mathbb{Z}_2[X], \mathbb{Z}_2[X]\right)\right| \geq 2$. En efecto, primeramente el morfismo identidad es un morfismo en la categoría **Ring**, pero también

$$\begin{aligned} g : \mathbb{Z}_2[X] &\to \mathbb{Z}_2[x] \\ p(x) &\mapsto p(x)^2 \end{aligned}$$

luego este conjunto de morfismos tiene al menos dos elementos, así que U no puede ser fiel.

Veamos ahora que U no es pleno. Observemos que

1. $\mathbb{Z}^* = \{-1, 1\} \cong \mathbb{Z}_2$.
2. Si $p \in \mathbb{N}$ es un número primo, entonces

   $$\mathbb{Z}_p^* \cong \mathbb{Z}_{p-1}$$

   (visto como isomorfismo de grupos).
3. Si $m, n \in \mathbb{N}$ con $m, n \geq 1$, entonces

   $$\left|\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}\left(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m\right)\right| = (n, m)$$

   donde (n, m) es el máximo común divisor de m y n (basta con observar que $f(1)$ determina por completo a f, siendo $f : \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_n$ un homomorfismo).

Volviendo al problema original. Sea $p \in \mathbb{N}$ tal que $p > 2$. Se tiene que

$$U_{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}\left(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p\right) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}\left(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_{p-1}\right)$$

por (1), (2) y (3), $\left|\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}\left(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_{p-1}\right)\right| = 2$. Pero, como $\mathbb{Z}$ es un objeto inicial de la categoría **Ring**, por definición se tiene que

$$\left|\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}\left(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p\right)\right| = 1$$

así, U no puede ser pleno. ■

Definición 3.2.2
Se dice que una categoría $\mathcal{C}$ es concreta cuando existe un funtor fiel $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ (es como si pudiéramos encajar la categoría $\mathcal{C}$ en **Set**).

Proposición 3.2.1
Toda categoría pequeña es concreta.

Demostración:
Sea $\mathcal{C}$ una categoría pequeña, es decir que su clase de objetos $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ es un conjunto. Definimos

$$F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$$

como sigue

1. Para cada $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$,

   $$F(A) = \left\{ (C, \alpha) \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}) \times \mathrm{Hom}(\mathcal{C}) \middle| \alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A) \right\}$$

   en donde

   $$\mathrm{Hom}(\mathcal{C}) = \bigcup_{C, D \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$$

   (notemos que $F(A)$ es efectivamente un conjunto, ya que tanto $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ como $\mathrm{Hom}(\mathcal{C})$ son conjuntos).

2. Para cada $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$:

$$\begin{aligned} F(f) : F(A) &\to F(B) \\ (C, \alpha) &\mapsto (C, f \circ \alpha) \end{aligned}$$

Se afirma que F es un funtor fiel. En efecto,

I. Fijando $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, queremos ver que

$$F(1_A) = 1_{F(A)}$$

Tomamos $(C, \alpha) \in F(A)$, es decir, $C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ y $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$. Entonces,

$$\begin{aligned} F(1_A)(C, \alpha) &= (C, 1_A \circ \alpha) \\ &= (C, \alpha) \\ &= 1_{F(A)}(C, \alpha) \end{aligned}$$

II. Sean $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, D)$. Para cada $(C, \alpha) \in F(A)$ se verifica que

$$\begin{aligned} F(g \circ f)(C, \alpha) &= (C, g \circ f \circ \alpha) \\ &= F(g)(C, f \circ \alpha) \\ &= F(g)(F(f)(C, \alpha)) \\ &= (F(g) \circ F(f))(C, \alpha) \\ \Rightarrow F(g \circ f) &= F(g) \circ F(f) \end{aligned}$$

por los dos incisos anteriores se sigue que F es un funtor covariante. Veamos que es inyectivo. En efecto, sean $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. Hay que probar que

$$F_{A,B} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(F(A), F(B))$$

es inyectivo. En efecto, sean $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ y supongamos que

$$F(f) = F(g)$$

entonces,

$$\begin{aligned} (A, f) &= F(f)(A, 1_A) \\ &= F(g)(A, 1_A) \\ &= (A, 1_A \circ g) \\ &= (A, g) \\ \Rightarrow f &= g \end{aligned}$$

así pues, f es inyectiva, luego F es fiel. ■

Definición 3.2.3
Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías. Un funtor covariante (respectivamente, contravariante) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ se denomina **isomorfismo** (respectivamente, **anti-isomorfismo**) de categorías si existe un funtor covariante (respectivamente, contravariante) $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tal que

$$G \circ F = 1_{\mathcal{C}} \quad \text{y} \quad F \circ G = 1_{\mathcal{D}}$$

Proposición 3.2.2
Todo isomorfismo de categorías es plenamente fiel.

Demostración:
Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un isomorfismo de categorías y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ el respectivo funtor tal que

$$G \circ F = 1_{\mathcal{C}} \quad \text{y} \quad F \circ G = 1_{\mathcal{D}}$$

Tomando $A, B \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$ arbitrarios, se tiene que $G(F(A)) = A$ y $G(F(B)) = B$. Consideramos las funciones:

$$F_{A,B} : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$$

y,

$$G_{F(A),F(B)} : \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B)) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$$

Para cada $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$,

$$G_{F(A),F(B)}(F_{A,B}(f)) = G(F(f)) = 1_{\mathcal{C}}(f) = f$$

por tanto, $G_{F(A),F(B)} \circ F_{A,B} = 1_{\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)}$ y, $F_{A,B} \circ G_{F(A),F(B)} = 1_{\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A),F(B))}$. Por tanto, $F_{A,B}$ es invertible, luego biyectiva. Por tanto, F es plenamente fiel. ■

Corolario 3.2.1
Se tiene lo siguiente:

1. Los isomorfismos entre categorías mapean objetos finales (resp. iniciales) en objetos finales (resp. iniciales).
2. Los anti-isomorfismos mapean objetos iniciales (resp. finales) en objetos finales (resp. iniciales).

Demostración:
Sean $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un anti-isomorfismo y $A \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$ un objeto inicial. Sea $D \in \operatorname{Obj}(\mathcal{D})$ y $B \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$ tal que $F(B) = D$. Se tiene que

$$\left|\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)\right| = 1$$

Luego,

$$\left|\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(D, F(A))\right| = \left|\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(B), F(A))\right| = 1$$

(pues existe una biyección entre estos dos conjuntos de morfismos). Así, $F(A)$ es un objeto final de $\mathcal{D}$. ■

Definición 3.2.4
Sea $(R, +_R, \cdot_R)$ un anillo. Definimos el **anillo opuesto** $(R^{op}, +_{R^{op}}, \cdot_{R^{op}})$ de R tal que satisface lo siguiente:

1. $(R, +_R) = (R^{op}, +_{R^{op}})$.
2. $\cdot_{R^{op}} : R^{op} \times R^{op} \to R^{op}$, $(s, t) \mapsto s \cdot_{R^{op}} t = t \cdot_{R^{op}} s$.

Definición 3.2.5
Sea $(R, +_R, \cdot_R)$ un anillo. Decimos que $(A, +_A, \cdot)_R$ es un R-**módulo izquierdo** (resp. **derecho**) si se cumple que

1. $(A, +_A)$ es un grupo abeliano.
2. $\cdot : R \times A \to A$, $(\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x$ (resp. $\cdot : A \times R \to A$, $(x, \alpha) \mapsto x \cdot \alpha$) satisface lo siguiente:

    I) $\alpha \cdot (x +_A y) = \alpha \cdot x +_A \alpha \cdot y$ (resp.$(x +_A y) \cdot \alpha = x +_A \cdot \alpha +_A y \cdot \alpha$).
    II) $(\alpha +_A \beta) \cdot x = \alpha \cdot x +_A \beta \cdot x$ (resp. $x \cdot (\alpha +_A \beta) = x \cdot \alpha +_A x \cdot \beta$).
    III) $(\alpha \cdot_R \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$ (resp. $x \cdot (\alpha \cdot_R \beta) = (x \cdot \alpha) \cdot \beta$).

    para todo $\alpha, \beta \in R$ y para todo $x, y \in A$.

Si R es un anillo con identidad, entonces $\cdot$ satisface que

IV. $1_R \cdot x = x$, para todo $x \in A$.

y diremos que es un **módulo unitario**.

Lema 3.2.1
Sea $(R, +_R, \cdot_R)$ un anillo y R^{op} su anillo opuesto. Si $(A, +_A, \cdot_A)$ es un R-módulo ixquierdo (resp. derecho), entonces $(A, +_A, \cdot_{op})_{R^{op}}$ es un R^{op}-módulo derecho (resp. izquierdo), donde

$$\begin{aligned} \cdot_{op} : A \times R &\to A \\ (x, \alpha) &\mapsto x \cdot_{op} \alpha = \alpha \cdot x \end{aligned}$$

Demostración:
Es inmediato de la definición de R-módulo. ■

Ejemplo 3.2.4
Consideremos las categorías ${}_R\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}_{R^{op}}$. Definimos un funtor $F :_R \mathcal{M} \to \mathcal{M}_{R^{op}}$ tal que

$$\begin{aligned} F : \mathrm{Obj}\,({}_R\mathcal{M}) &\to \mathrm{Obj}\,(\mathcal{M}_{R^{op}}) \\ (A, +_A, \cdot)_R &\mapsto (A, +_A, \cdot_{op})_{R^{op}} \end{aligned}$$

y todo morfismo f lo envía a sí mismo (esto es, $F(f) = f$). De manera similar, se define el morfismo $G : \mathcal{M}_{R^{op}} \to_R \mathcal{M}$ que lo haga al revés, de esta forma estos módulos son tales que

$$G \circ F = 1_{{}_R\mathcal{M}} \quad \text{y} \quad F \circ G = 1_{\mathcal{M}_{R^{op}}}$$

Ejemplo 3.2.5
Consideremos las categorías **Ab** y ${}_\mathbb{Z}\mathcal{M}$ consideremos el funtor olvidadizo $F :_\mathbb{Z} \mathcal{M} \to$ **Ab** (este funtor olvida al producto).

Definamos $\cdot_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \times G \to G$ tal que

$$m \cdot_{\mathbb{Z}} x = \begin{cases} \underbrace{x +_G \cdots +_G x}_{n\text{-veces}} & \text{si} \quad m > 0 \\ e_G & \text{si} \quad m = 0 \\ \underbrace{(-x) +_G \cdots +_G (-x)}_{n\text{-veces}} & \text{si} \quad m < 0 \end{cases}$$

Se verifica que $(G, +_G, \cdot_{\mathbb{Z}})$ es un $\mathbb{Z}$-módulo.

Ejemplo 3.2.6
Set y **Set**^{op} no son categorías isomorfas pues, en caso contrario, se tendría que el objeto inical $\emptyset$ sería un objeto final de **Set**^{op}, cosa que no puede suceder.

Ejemplo 3.2.7
Recordemos que $\mathbf{Mat}(\mathbb{K})$ con $\mathbb{K}$ un campo es la categoría de matrices con entradas en $\mathbb{K}$, donde

1. $\mathrm{Obj}\left(\mathbf{Mat}(\mathbb{K})\right) = \mathbb{N}$.
2. Para todo $n, m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Mat}(\mathbb{K})}(n, m) = \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$.
3. Para todo $n, m, t \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mat}(\mathbb{K})}(n, m) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mat}(\mathbb{K})}(m, t) &\to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mat}(\mathbb{K})}(n, t) \\ (A, B) &\mapsto AB \end{aligned}$$

4. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $1_n = I_{n\times n}$.

se tiene que esta categoría no es isomorfa a la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita.

Definición 3.2.6
Se define lo siguiente:

1. Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor, decimos que F **preserva una propiedad P de los morfismos** si cuando F la tiene, también $F(f)$ la tiene.
2. Se $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor. Decimos que F **refleja una propiedad P de los morfismos** si cuando $F(f)$ la tiene, también f la tiene.

Proposición 3.2.3
Se tiene lo siguiente:

1. Cualquier funtor preserva isomorfismos.
2. Cualquier funtor plenamente fiel refleja isomorfismos.
3. Cualquier funtor plenamente fiel refleja objetos finales e iniciales.
4. Cualquier funtor fiel refleja monomorfismos y epimorfismos.

Demostración:

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor covariante.

De (1): Sean $A, B \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ y consideremos $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A, B)$ tal que f es isomorfismo. Entonces, existe $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(B, A)$ tal que

$$f \circ g = 1_B \quad \text{y} \quad g \circ f = 1_A$$

Entonces $F(f) \circ F(g) = F(f \circ g) = F(1_B) = 1_{F(B)}$ y $F(g) \circ F(f) = F(g \circ f) = F(1_A) = 1_{F(A)}$. Por tanto, $F(f)$ es un isomorfismo.

De (2): Ejercicio.

De (3): La prueba para objetos iniciales está en el libro. Sea $A \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ tal que $F(A) \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{D})$ es un objeto final. Tenemos que

$$\left|\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,(D, F(A))\right| = 1, \quad \forall D \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{D})$$

Entonces,

$$\left|\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,(F(B), F(A))\right| = 1, \quad \forall B \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$$

Como F es plenamente fiel, entonces $F_{A,B} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(B, A) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,(F(B), F(A))$ es una biyección, luego

$$\left|\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,(B, A)\right| = 1, \quad \forall B \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$$

Por tanto, A es objeto final de $\mathcal{C}$.

De (4): La prueba para monomorfismos está en el libro. Sean $A, B \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A, B)$ tla que $F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,(F(A), F(B))$ es un epimorfismo, Sea $C \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ y consideremos $g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(B, C)$. Si

$$g_1 \circ f = g_2 \circ f \Rightarrow$$

■

Capítulo 4

Trasnformaciones Naturales

Definición 4.0.1
Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías y $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ dos funtores. Una **transformación nautral** consiste en una familia de morfismos $\alpha_C : F(C) \to G(C)$ con $C \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$ en $\mathcal{D}$ tales que para todo $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C')$, el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & F(C) & \overrightarrow{\alpha_C} & G(C) & \\ F(f) & \downarrow & & \downarrow & G(f) \\ & F(C') & \overrightarrow{\alpha_{C'}} & G(C') & \end{array}$$

Denotaremos por $\operatorname{Nat}(f, g)$. Una transformación natural α se denotará por $\alpha : F \to G$.

Observación 4.0.1
Si todas las componentes de la transformación natural son isomorfismos, llamaremos a nuestra transformación natural un **isomorfismo natural** y lo denotaremos como $F \cong G$.

Definición 4.0.2
Sean W, V un categorías. Se define para $u : W \to V$ el funtor del **espacio dual** $u^* : W^* \to V$ tal que $w \mapsto w \circ u$ para todo $w \in W^*$, donde el asterisco es la categoría dual.

Definición 4.0.3
Considere la categoría ${}_R\mathcal{M}$ de espacios vectoriales. De define el **funtor del espacio doble dual** como

$$(-)^{**} :_K \mathcal{M} \to_K \mathcal{M}$$

tal que si $u : U \to V$, siendo U, V espacios vectoriales, es una transformación lineal, entonces

$$u^{**} : U^{**} \to V^{**}$$

tal que $\phi \mapsto \phi \circ u^*$ para todo $\phi : U^* \to K$.

Ejemplo 4.0.1
Definimso una transformación (aún no natural) entre el funtor identidad de la categoría ${}_R\mathcal{M}$ y el funtor doble dual. Definimos la transformación como sigue:

$$\eta : L_{{}_K\mathcal{M}} \to (-)^{**}$$

cuyas componentes son

$$\eta_V : V \to V^{**}$$

con V espacio vectorial, definida como sigue:

$$\eta_V(v)(f) = f(v), \quad \forall v \in V \text{ y } \forall f \in V^*$$

Probaremos que el diagrama de abajo es conmutativo.

Demostración:

En efecto, sea $u \in \operatorname{Hom}_{_k\mathcal{M}}(V, W)$, hay que ver que el diagrama

$$\begin{array}{cccccc} & V & \overrightarrow{\eta_V} & V^{*}* & \\ u & \downarrow & & \downarrow & u^{**} \\ & W & \overrightarrow{\eta_W} & W^{**} & \end{array}$$

En efecto, sea $v \in V$ y $f \in W^*$. Se tiene que

$$\begin{aligned} [u^* * \circ \eta_V(v)][f] &= [\eta_V(v) \circ u^*](f) \\ &= \eta_V(v)(u^*(f)) \\ &= u^*(f)(v) \\ &= f(u(v)) \\ &= \eta_W(u(v))(f) \\ &= [(\eta_W \circ u)(v)](f) \end{aligned}$$

por tanto, $\eta : 1_{_k\mathcal{M}} \to (-)^{**}$ es una transformación natural. ■

Ejemplo 4.0.2
Para todo funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ se define la **transformación natural identidad**, tal que

$$\begin{aligned} 1_F : F \to F \\ 1_F = \left(1_{F(C)}\right)_{C \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.0.3
Sean $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tres funtores y $\alpha : F \to G$ y $\beta : G \to H$ transformaciones naturales. Definimos una transformación natural como sigue:

$$\begin{aligned} &(\beta \circ \alpha)_C : F(C) \to H(C) \\ &(\beta \circ \alpha)_C = \beta_c \circ \alpha_C, \quad \forall C \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C}) \end{aligned}$$

a $((\beta \circ \alpha)_C)_{C \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})}$ la conoceremos como **composición vertical de las transformaciones naturales α y β**.

Ejemplo 4.0.4
Sean $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores y $\alpha : F \to G$ un isomorfismo natural. Definimos la siguiente transformación

$$\alpha^{-1} : G \mapsto F$$

tal que $(\alpha^{-1})_C = (\alpha_C)^{-1}$ para todo $C \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$. Esta transformación natural es llamada **transformación natural inversa**.

Ejemplo 4.0.5
Sean $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $H : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ tres funtores y $\alpha : F \to G$ una transformación natural. Definimos una transformación nautral

$$H_\alpha : H \circ F \to H \circ G$$

tal que $(H_\alpha)_C = H(\alpha_C)$ para todo $C \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$. La llamaremos **Whiskering de la transformación nautral por la derecha de H.**

De forma análoga, si $K : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ es un funtor, se define la transformación natural

$${}_\alpha K : F \circ K \to G \circ K$$

tal que $({}_\alpha K)_B = \alpha_{K(B)}$ para todo $B \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{B})$. Llamaremos a esta tranformación nautral **Whiskering de la transformación natural por la izquierda de K.**

Observación 4.0.2
En el ejemplo anterior, si α es un isomorfismo natural, entonces H_α y ${}_\alpha K$ también serán isomorfismos naturales.

Proposición 4.0.1
Sean $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $H, K : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ funtores, $\alpha : F \to G$ y $\beta : H \to K$ transformaciones naturales. Entonces, $\beta * \alpha : H \circ F \to K \circ G$ definida como sigue:

$$(\beta * \alpha)_C = \beta_{G(C)} \circ H_{\alpha(C)}, \quad \forall C \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$$

es una transformación nautral.

Demostración:
Aplicamos que β es una transformación nautral al morfismo $\alpha_C : F(C) \to G(C)$. Queremos que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} H \circ F(C) & \longrightarrow & K \circ F(C) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H \circ G(C) & \longrightarrow & K \circ G(C) \end{array}$$

■

Como veremos en el capítulo 3 (si es que nos da el tiempo suficiente de llegar hasta allí), la naturalidad en el caso de bifuntores resultará importante cuando lidiemos con funtores adjuntos (esto se definirá más adelante). Es por esta razón que concluiremos nuestra discusión sobre transformaciones naturales con el siguiente resultado, que muestra que la naturalidad de bifuntores es equivalente a la naturalidad de los funtores asociados izquierdos y derechos (mismos que se definieron en una proposición anterior).

Para ello, recordemos que un bifuntor es un funtor $F : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, donde $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ es el producto de dos categorías (es básicamente un funtor de dos variables).

Recordemos además que, para un bifuntor, los funtores asociados derecho (respectivamente, izquierdo) respecto a A (respectivamente, B), se definen como

1. $F_A(B) = F(A, B)$ para todo $B \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{B})$ (respectivamente, $F^B(A) = F(A, B)$ para todo $A \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{A})$).
2. $F_A(f) = F(1_A, f)$ para todo f morfismo de la categoría $\mathcal{B}$ (respectivamente, $F^B(g) = F(g, 1_B)$ para todo morfismo g en la categoría $\mathcal{A}$).

Con esto en mente, enunciemos la siguiente proposición.

Proposición 4.0.2
Sean $F, G : \mathcal{A}\times\mathcal{B} \to \mathcal{C}$ dos bifuntores covariantes. Una familia de morfismos $\left\{\alpha_{(A,B)}\right\}_{(A,B)\in \mathrm{Obj}(\mathcal{A}\times\mathcal{B})}$ (donde $\alpha_{(A,B)} : F(A,B) \to G(A,B)$ es un morfismo en la categoría $\mathcal{C}$) forman una transformación natrual $\alpha : F \to G$ si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Para todo $A_0 \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{A})$, la familia de morfismos $\{(\alpha_{A_0})_B\}_{B\in \mathrm{Obj}(\mathcal{B})}$ (donde $(\alpha_{A_0})_B : F_{A_0}(B) \to G_{A_0}(B)$ es morfismo en la categoría $\mathcal{C}$), forma una transformación natural $\alpha_{A_0} : F_{A_0} \to G_{A_0}$, donde
$$(\alpha_{A_0})_B = \alpha_{(A_0,B)}, \quad \forall B \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{B})$$
2. Para todo $B_0 \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{B})$, la familia de morfismos $\left\{(\alpha^{B_0})_A\right\}_{A\in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})}$ (donde $\left(\alpha^{B_0}\right)_A : F^{B_0}(A) \to G^{B_0}(A)$ es morfismo en la categoría $\mathcal{C}$), forma una transformación natural $\alpha^{B_0} : F^{B_0} \to G^{B_0}$, donde
$$\left(\alpha^{B_0}\right)_A = \alpha_{(A,B_0)}, \quad \forall A \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{A})$$

Demostración:
$\Rightarrow$): Suponga que $\alpha : F \to G$ es una transformación natural; entonces, para todo $(f,g) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}\left((A,B),(A',B')\right)$ se tiene que el diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} F(A,B) \arrow[r, "\alpha_{(A,B)}"] \arrow[d, "F(f,g)"'] & G(A,B) \arrow[d, "G(f,g)"] \\ F(A',B') \arrow[r, "\alpha_{(A',B')}"'] & G(A',B') \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

es decir que
$$\alpha_{(A',B')} \circ F(f,g) = G(f,g) \circ \alpha_{(A,B)}$$
Sea $A_0 \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{A})$ y, tomemos $A = A' = A_0$, además $f = 1_A$, se tiene por la igualdad anterior que

$$\alpha_{(A_0,B')} \circ F(1_A, g) = G(1_A, g) \circ \alpha_{(A_0,B)}$$
$$\Rightarrow (\alpha_{A_0})_{B'} \circ F_{A_0}(g) = G_{A_0}(g) \circ (\alpha_{A_0})_B$$

es decir, que para todo $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\,(B, B')$ el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} F_{A_0}(B) \arrow[r, "(\alpha_{A_0})_B"] \arrow[d, "F_{A_0}(g)"'] & G_{A_0}(B) \arrow[d, "G_{A_0}(g)"] \\ F_{A_0}(B') \arrow[r, "(\alpha_{A_0})_{B'}"'] & G_{A_0}(B') \end{tikzcd}$$

Por tanto, $\alpha_{A_0} : F_{A_0} \to G_{A_0}$ es una transformación natural.

De forma similar se deduce que $\alpha^{B_0} : F^{B_0} \to G^{B_0}$ es una transormación natural, tomando $B_0 = B = B'$ y $g = 1_B$ en (4.1).

$\Leftarrow$): Suponga que se cumplen 1) y 2), es decir que para todo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\,(A, A')$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\,(B, B')$ se cumplen
$$\begin{cases} (\alpha_{A_0})_{B'} \circ F_{A_0}(g) = G_{A_0}(g) \circ (\alpha_{A_0})_B \\ (\alpha^{B_0})_{A'} \circ F^{B_0}(f) = G^{B_0}(f) \circ (\alpha^{B_0})_A \end{cases}$$

Sea $(u,v) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}((X,Y),(X',Y'))$. Veamos que

$$\begin{aligned}
G(u,v)\circ\alpha_{(X,Y)} &= G(u\circ 1_X, 1_{Y'}\circ v)\circ\alpha_{(X,Y)} \\
&= G((u,1_{Y'})\circ(1_X,v))\circ\alpha_{(X,Y)} \\
&= G(u,1_{Y'})\circ G(1_X,v)\circ\alpha_{(X,Y)} \\
&= G^{Y'}(u)\circ G_X(v)\circ\alpha_{(X,Y)} \\
&= G^{Y'}(u)\circ \underbrace{G_X(v)\circ(\alpha_X)_Y}_{=(\alpha_X)_{Y'}\circ F_X(v)} \\
&= G^{Y'}(u)\circ(\alpha_X)_{Y'}\circ F_X(v) \\
&= G^{Y'}(u)\circ\alpha_{(X,Y')}\circ F_X(v) \\
&= \underbrace{G^{Y'}(u)\circ(\alpha^{Y'})_X}_{=(\alpha^{Y'})_{X'}\circ F^{Y'}(u)}\circ F_X(v) \\
&= (\alpha^{Y'})_{X'}\circ F^{Y'}(u)\circ F_X(v) \\
&= \alpha_{(X',Y')}\circ F(u,1_{Y'})\circ F(1_X,v) \\
&= \alpha_{(X',Y')}\circ F((u,1_{Y'})\circ(1_X,v)) \\
&= \alpha_{(X',Y')}\circ F(u,v)
\end{aligned}$$

es decir que para todo $(u,v) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}((X,Y),(X',Y'))$, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & F(X,Y) & \overset{\alpha_{(X,Y)}}{\longrightarrow} & G(X,Y) & \\
F(u,v) & \downarrow & & \downarrow & G(u,v) \\
 & F(X',X') & \underset{\alpha_{(X',Y')}}{\longrightarrow} & G(X',Y') &
\end{array}$$

por tanto, $\alpha : F \to G$ es una transformación natural. ■

Ahora se introducirá un concepto importante: funtores representables.

Observación 4.0.3
Recordemos que si $\mathcal{C}$ es una categoría, dado un objeto fijo $C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ se definen los funtores $\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(C,-), \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(-,C) : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ (el primero covariante y el segundo contravariante) como sigue:

1. Para todo $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, $\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(C,A) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,A) \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Set})$ y, para todo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$, la función $\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(C,f) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,A) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,B)$ tal que

$$g \mapsto \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(C,f)(g) = f\circ g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,B)$$

2. Para todo $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, $\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(A,C) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,C) \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Set})$ y, para todo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$, la función $\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(f,C) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,C)$ tal que

$$g \mapsto \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(f,C)(g) = g\circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,C)$$

Definición 4.0.4
Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Decimos que un funtor covariante $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ es **representable** si existe $C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ y un isomorfismo natural $F \cong \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(C,-)$.

Similarmente para un funtor contravariante $G : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ se dice **representable** si existe $C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ y un isomorfismo natural $G \cong \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(-,C)$.

En ambos casos, C es llamado el **objeto representante** del funtor.

Observación 4.0.4
Se verá en los ejemplos que resulta más sencillo tomar el isomorfismo natural inverso α^{-1} : $\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(C,-) \to F$ para determinar explícitamente quién es la transformación nautral correspondiente. Además, notemos que en la categoría **Set**, los isomorfismos de esta categoría coinciden con las funciones biyectivas, por lo que para probar que α^{-1} es isomorfismo nautral, basta que ver que es transformación natural y, para cada $D \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$, $(\alpha^{-1})_D : \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(C,D) \to F(D)$ es función biyectiva.

Básicamente lo que se pretende con esta definición es codificar la información que tiene un funtor entre dos categorías para que simplemente nos apoyemos en el objeto $C \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ y en el conjunto de isomorfismos nautrales entre los funtores pues, al ser isomorfismos, nos podemos regresar del funtor $\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(-,C)$ a F. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 4.0.6
Considere el funtor olvidadizo $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$. Afirmamos que este funtor es representable y el objeto representante del funtor es el grupo abeliano $(\mathbb{Z},+)$.

Demostración:
En efecto, tenemos que encontrar una transformación natural entre F y $\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(\mathbb{Z},-)$. Para cada $X \in \mathrm{Obj}\,(\mathbf{Grp})$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}\,(\mathbb{Z},X)$, definimos:

$$\begin{aligned} \alpha_X : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}\,(\mathbb{Z},X) &\to U(X) = X \\ g &\mapsto \alpha_X(g) = g(1) \end{aligned}$$

Notemos que cada α_X es una biyección, ya que para cualquier homomorfismo de grupos $g : \mathbb{Z} \to X$ queda únicamente determinado por su valor en 1 (ya que $\mathbb{Z}$ es cíclico y uno de sus generadores es 1). Por tanto, para ver que $\alpha : \mathrm{HOM}_{\mathbf{Grp}}(\mathbb{Z},-) \to \mathbf{Grp}$ es un isomorfismo natural, basta con ver que el diagrama:

$$\begin{array}{cccc} & \mathrm{HOM}_{\mathbf{Grp}}(\mathbb{Z},X) & \overset{\alpha_X}{\longrightarrow} & U(X) & \\ \mathrm{HOM}_{\mathbf{Grp}}(\mathbb{Z},f) & \downarrow & & \downarrow & U(f)=f \\ & \mathrm{HOM}_{\mathbf{Grp}}(\mathbb{Z},Y) & \underset{\alpha_Y}{\longrightarrow} & U(Y) & \end{array}$$

es conmutativo. En efecto, sea $g \in \mathrm{HOM}_{\mathbf{Grp}}(\mathbb{Z},X)$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} [\alpha_Y \circ \mathrm{HOM}_{\mathbf{Grp}}(\mathbb{Z},f)](g) &= \alpha_Y(\mathrm{HOM}_{\mathbf{Grp}}(\mathbb{Z},f)(g)) \\ &= \alpha_Y(f \circ g) \\ &= (f \circ g)(1) \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned} [U(f) \circ \alpha_X](g) &= f(\alpha_X(g)) \\ &= f(g(1)) \\ &= (f \circ g)(1) \end{aligned}$$

por tanto,

$$\alpha_Y \circ \mathrm{HOM}_{\mathbf{Grp}}(\mathbb{Z},f) = U(f) \circ \alpha_X(g)$$

Con lo que el diagrama anterior es conmutativo. Luego, como α es biyección y es transformación nautral, se sigue que $\alpha^{-1} : \mathbf{Grp} \to \mathrm{HOM}_{\mathbf{Grp}}(\mathbb{Z},-)$ es isomorfismo natural. ■

Ejemplo 4.0.7
El funtor covariante olvidadizo $U : \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ es representable.

Demostración:
En efecto, considere el espacio topológico $(\{x_0\}, \tau_D)$ (donde τ_D es la topología discreta). Para cada $X \in \operatorname{Obj}(\mathbf{Top})$ definimos

$$\begin{aligned} \alpha_X : \mathrm{HOM}_{\mathbf{Top}}(\{x_0\}, X) &\to U(X) = X \\ h &\mapsto \alpha_X(h) = h(x_0) \end{aligned}$$

para todo $h \in \mathrm{HOM}_{\mathbf{Top}}(\{x_0\}, X)$, donde $h : \{x_0\} \to X$ es una función continua. Claramente α_X es biyectiva para cada $X \in \operatorname{Obj}(\mathbf{Set})$, pues queda únicamente determinada por su valor en x_0. Para ver que $\alpha : \mathrm{HOM}_{\mathbf{Top}}(\{x_0\}, -) \to \mathbf{Set}$ es isomorfismo natural, basta con ver que el diagrama

$$\begin{array}{cccc} & \mathrm{HOM}_{\mathbf{Top}}(\{x_0\}, X) & \xrightarrow{\alpha_X} & U(X) & \\ \mathrm{HOM}_{\mathbf{Top}}(\{x_0\}, f) & \downarrow & & \downarrow & U(f) = f \\ & \mathrm{HOM}_{\mathbf{Top}}(\{x_0\}, Y) & \xrightarrow[\alpha_Y]{} & U(Y) & \end{array}$$

es conmutativo para todo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)$. En efecto, sea $h \in \mathrm{HOM}_{\mathbf{Top}}(\{x_0\}, X) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\{x_0\}, X)$. Se tiene que

$$\begin{aligned} [U(f) \circ \alpha_X](h) &= f(\alpha_X(h)) \\ &= f(h(x_0)) \\ &= (f \circ h)(x_0) \\ &= \alpha_Y(f \circ h) \\ &= \alpha_Y(\mathrm{HOM}_{\mathbf{Top}}(\{x_0\}, f)(h)) \\ &= [\alpha_Y \circ \mathrm{HOM}_{\mathbf{Top}}(\{x_0\}, f)](h) \\ \Rightarrow U(f) \circ \alpha_X &= \alpha_Y \circ \mathrm{HOM}_{\mathbf{Top}}(\{x_0\}, f) \end{aligned}$$

Luego, el diagrama anterior es conmutativo. Así, $\alpha : \mathrm{HOM}_{\mathbf{Top}}(\{x_0\}, -) \to U$ es isomorfismo natural. ■

Ejemplo 4.0.8
El funtor covariante constante $F_{x_0} : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ que manda todo objeto de $\mathcal{C}$ a $\{x_0\}$ y a todo morifismo al mapeo identidad, es representable si y sólo si $\mathcal{C}$ tiene un objeto inicial.

Más aún, el objeto representante es el objeto inicial.

Demostración:
F_{x_0} es representable si y sólo si existe $C \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$ tal que $F \cong \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(C, -)$, tomemos $\alpha : \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(C, -) \to F_{x_0}$ isomorfismo natural entre ambos funtores. En particular, para todo $D \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$:

$$\alpha_C : \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(C, D) \to F_{x_0}(D)$$

es biyección. Y,

$$F_{x_0}(D) = \{x_0\}$$

lo cual ocurre si y sólo si $\left|\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(C, D)\right| = \left|\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)\right| = 1$, es decir que C es objeto inicial. ■

Ejemplo 4.0.9
El funtor covariante $\mathcal{P} : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ no es representable.

Demostración:

Recordemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \textbf{Set} &\to \textbf{Set} \\ X &\mapsto \mathcal{P}(X) \\ f &\mapsto \hat{f} \end{aligned}$$

donde, $\hat{f}(U) = f(U)$, para todo $U \in \mathcal{P}(X)$. Ya se sabe que este funtor es covariante. Veamos que no es representable. En efecto, suponga que es representable y considere $A \in \textbf{Set}$ el objeto representante y $\tau : \mathcal{P} \to \mathrm{HOM}_{\textbf{Set}}(A, -)$ el isomorfismo natural correspondiente y sea $\sigma = \tau^{-1}$ el isomorfismo natural inverso.

Considere el conjunto $\{x_0\}$. Como τ es transformación nautral, entonces $\sigma_{x_0} : \mathrm{HOM}_{\textbf{Set}}(A, \{x_0\}) \to \mathcal{P}(x_0)$ es una biyección, pero

$$\mathrm{HOM}_{\textbf{Set}}(A, \{x_0\}) = \mathrm{Hom}_{\textbf{Set}}\,(A, \{x_0\}) = \{f\}$$

por ende, $\left|\mathrm{HOM}_{\textbf{Set}}(A, \{x_0\})\right| = 1$, siendo $f : A \to \{x_0\}$ la función tal que $a \mapsto f(a) = x_0$ para todo $a \in A$. Y,

$$\mathcal{P}(x_0) = \{\emptyset, \{x_0\}\}$$

por ende, $\left|\mathcal{P}(x_0)\right| = 2$. Pero esto no puede suceder pues es biyección. Por tanto, $\mathcal{P} : \textbf{Set} \to \textbf{Set}$ no es representable. ■

Observación 4.0.5

Se tiene lo siguiente:

I. Ser naturalmente isomorfo es una relación de equivalencia.

II. Sean $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ dos funtores. Supongamos que $F \overset{\alpha}{\cong} G$. Entonces para todo $X, Y \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$, si $f : X \to Y$ es morfismo, se tiene que el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

conmuta

Demostración:

De (i): Hay que verificar que la relación cumple tres condiciones:

1. Todo funtor F está relacionado consigo mismo. En efecto, considere $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtor entre dos categorías. Afirmamos que $\left(\alpha_{F(X)} = id_{F(X)}\right)_{X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})}$ es un isomorfismo natural de F en F. En efecto, veamos que para todo $X, Y \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ y $f : X \to Y$ morfismo se tiene que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & F(X) \arrow[d, "F(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\alpha_X"'] & F(Y) \end{tikzcd}$$

es conmutativo, pues

$$\begin{aligned} \alpha_Y \circ F(f) &= id_{F(X)} \circ F(f) \\ &= F(f) \\ &= F(f) \circ id_{F(X)} \\ &= F(f) \circ \alpha_X \end{aligned}$$

por tanto, $F \cong F$.

2. Sean $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores naturalmente isomorfos.

■

Definición 4.0.5
Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ un funtor. Un par $(A, a) \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C}) \times F(A)$ es llamado **par de representación** (también conocido como **elemento universal** o **par con una propiedad universal que representa a** F) si para todo $(B, b) \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C}) \times F(B)$ existe un único mofrismo $f : A \to B$ tal que

$$(F(f))\,(a) = b$$

Proposición 4.0.3
Un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ es representable si y sólo si existe un par que le represente.

Demostración:
Se probará el caso en el que F es covariante.

$\Rightarrow$): Suponga que F es representable, entonces existe $A \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ tal que $F \cong \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(A, -)$, por la observación anterior $\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(A, -) \overset{\varphi}{\cong} F$.

Notemos ahora que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A, A) \neq \emptyset$, pues $1_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A, A)$. Tomemos $a = \varphi_A(1_A)$ (recordemos que φ_A va de los morfismos de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A, A)$ en $F(A)$). Afirmamos que (A, a) es par de representación de F.

En efecto, sea $B \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ y $b \in F(B)$. Considere f_b el único morfismo de A en B tal que $b \overset{\varphi}{\cong} f_b$. Se tiene que el diagrama

$$\begin{array}{cccccc} & \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(A, A) & \underset{\longrightarrow}{\varphi_A} & F(A) & \\ \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(A, f_b) & \downarrow & & \downarrow & F(f_b) \\ & \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(A, B) & \overset{\longrightarrow}{\varphi_B} & F(B) & \end{array}$$

es conmutativo. Como también conmuta con las inversas, se tiene que:

$$(F(f_b))\,(a) = ... = b$$

$\Leftarrow$): Sea $(A, a) \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C}) \times F(A)$ un par de representación de F. Se tiene que

Para todo $(B, b) \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C}) \times F(B)$ existe un único $f : A \to B$ tal que $(F(f))(a) = b$.

Sea $B \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$. Considere $\psi_B : \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}(A,B)} \to F(B)$ tal que

$$f \mapsto (F(f))(a)$$

esta función está bien definida y es biyectiva (por el hecho de que existe un par de representación). Afirmamos que $\{\psi_B\}_{B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})}$ es un isomorfismo natural.

En efecto, hay que ver que para $X, Y \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ y $g : X \to Y$, el diagrama

$$\begin{array}{cccccc} & \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(A, X) & \underset{\longrightarrow}{\psi_X} & F(X) & \\ \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(A, g) & \downarrow & & \downarrow & F(g) \\ & \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(A, Y) & \overset{\longrightarrow}{\psi_Y} & F(Y) & \end{array}$$

es conmutativo. En efecto, sea $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) = \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(A, X)$, entonces

$$\begin{aligned}\psi_Y \circ \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(A, g)(h) &= \psi_Y(\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(A, g)(h))\\ &= \psi_Y(g \circ h)\\ &= (F(g \circ h))(a)\end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}F(g) \circ \psi_X(h) &= F(g)(F(h)(a))\\ &= F(g) \circ F(h)(a)\\ &= F(g \circ h)(a)\end{aligned}$$

con lo cual

$$\psi_Y \circ \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(A, g) = F(g) \circ \psi_X$$

Que prueba lo deseado. ■

Teorema 4.0.1 (**Propiedad universal de la localización de anillos**)
Sea A anillo conmutativo y $S \subseteq A$ multiplicativo. Sea además φ función definida como sigue

$$\begin{aligned}\varphi &: A \to S^{-1}A\\ a &\mapsto \varphi(a) = \frac{sa}{s} (\forall s \in S)\end{aligned}$$

Entonces, el par $(S^{-1}A, \varphi)$ satisface la siguiente propiedad universal. Para cualquier anillo conmutativo con 1, digamos T y f homomorfismo de A en T,

$$f : A \to T$$

tal que

$$f(S) \subseteq T^*$$

existe un único homomorfismo $\bar{f} : S^{-1}A \to T$ tal que

$$\bar{f}(1) = 1, \quad \text{y} \quad \bar{f} \circ \varphi = f$$

Ejemplo 4.0.10
El teorema anterior equivale a afirmar que el siguiente funtor

$$F : \mathbf{Ring}^c \to \mathbf{Set}$$

tal que $T \mapsto F(T) = \left\{ f \in \mathrm{HOM}_{\mathbf{Ring}^c}(A, T) \middle| f(S) \subseteq T^* \right\}$ y, a cada morfismo de anillos $u : T \to T'$ es tal que $u \mapsto F(u) =_u \varphi : F(T) \to \mathrm{HOM}_{\mathbf{Ring}^c}(A, T')$ tal que ${}_u\varphi(g) = u \circ g$.

Demostración:
$\Rightarrow$): Afirmamos que $(S^{-1}A, \varphi)$ es par de representación de F

$\Leftarrow$): El tereoam anterior implica que el par $(S^{-1}A, \varphi)$ representa a F. En efecto, si $T \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Ring}^c)$ y $f \in F(T)$, se tiene que ■

Definición 4.0.6 (**Principio de Dualidad**)
El lenguajde de primer orden de la teoría de categorías, CT, consta de

1. Objetos, $A, B, C, \ldots$ (símbolo unario de predicado Obj).
2. Morfismos, $f, g, h, \ldots$ (símbolo unario de predicado Arr).

3. Funciones:
   - Dominio.
   - Codominio,
   - 1.
   - $\circ$

Los cuales satisfacen los siguientes axiomas:

1. $$\mathrm{Dom}(1_A) = A \quad \text{y} \quad \mathrm{Cod}(1_A) = A$$
2. $$1_{\mathrm{Cod}(f)} \circ f = f \quad \text{y} \quad f \circ 1_{\mathrm{Dom}(f)} = f$$
3. $$\mathrm{Dom}(f \circ g) = \mathrm{Dom}(g) \quad \text{y} \quad \mathrm{Cod}(f \circ g) = \mathrm{Cod}(f)$$
4. $$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

Para cualquier fórmula de CT, Σ, se define su dual Σ^* como sigue:

Para cada aparición en Σ, reemplácese Dom por Cod y Cod por Dom, $f : A \to B$ por $f : B \to A$ y $f \circ g$ por $g \circ f$ y nada más.

Observación 4.0.6
Nótese que en la construcción anterior, se construye de forma directa a la categoría dual.

Ejemplo 4.0.11
Si $\Sigma(A)$ es la fórmula 'A es un objeto inicial', entonces para todo $\forall B \exists! f : A \to B$. Su dual $\Sigma^*(A)$ es la fórmula A es un objeto final, es decir que $\forall B \exists! f : B \to A$.

Ejemplo 4.0.12
Si Σ es la fórmula:

$$\forall B \forall f : A \to B \forall \varphi : F(B) \to B, \quad f \circ \alpha = \varphi \circ F(f)$$

entonces Σ^* es:

$$\forall B \forall f : B \to A \forall \varphi : B \to F(B), \quad \alpha \circ f = F(f) \circ \varphi$$

Ejemplo 4.0.13
Dadas las fórmulas Σ y Δ de CT,

$$\Sigma \Rightarrow \Delta \text{ implica } \Sigma^* \Rightarrow \Delta^*$$

Más aún, los axiomas de CT y ACT son autoduales en el sentido siguiente:

$$\mathrm{ACT}^* = \mathrm{ACT}$$

Esto permite tener el siguiente resultado.

Observación 4.0.7
ACT denota a los axiomas de la teoría de categorías.

Proposición 4.0.4 (**Principio formal de Dualidad**)
Si Σ es una fórmula de CT, entonces

$$\text{ACT} \Rightarrow \Sigma \text{ implica ACT} \Rightarrow \Sigma^*$$

Proposición 4.0.5 (**Principio de Dualidad**)
Si Σ es una fórmula sobre teoría de categorías que se satisface en cualquier categoría $\mathcal{C}$, también lo hace Σ^*.

Definición 4.0.7
Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$ categorías, y sean $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ funtores. Existe un funtor $F : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}^{op}$ llamado el **funtor opuesto de** F, definido como sigue:

Si F es tal que

$$\begin{gathered} F : \mathcal{C} \to \mathcal{D} \\ \forall X \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C}), X \mapsto F(X) \in \operatorname{Obj}(\mathcal{D}) \\ \forall X, Y \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C}), f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), f \mapsto F(f) \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)) \end{gathered}$$

entonces,

$$\begin{gathered} F^{op} : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}^{op} \\ \forall X \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C}^{op}), X \mapsto F^{op}(X) \in \operatorname{Obj}(\mathcal{D}^{op}) \\ \forall X, Y \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C}^{op}), f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y), f \mapsto F^{op}(f) \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}^{op}}(F^{op}(X), F^{op}(Y)) \end{gathered}$$

y es tal que

$$(F^{op})^{op} = F \quad \text{y} \quad (G \circ F)^{op} = G^{op} \circ F^{op}$$

Demostración:
Hay que verificar varias condiciones:

I. Sea $X \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C}^{op}) = \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$, entonces

$$\begin{aligned} F^{op}(1_X) &= F^{op}(1_X^{op}) \\ &= (F(1_X))^{op} \\ &= (1_{F(X)})^{op} \\ &= 1_{F(X)} \\ &= 1_{F^{op}(X)} \end{aligned}$$

II. Sean $X, Y, Z \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C}^{op})$; f^{op} un morfismo de $\mathcal{C}^{op}$ de X a Y y g^{op} un morfismo en $\mathcal{C}^{op}$ de Y a Z. Entonces,

$$\begin{aligned} F^{op}(g^{op} \circ^{op} f^{op}) &= F^{op}((f \circ g)^{op}) \\ &= (F(g \circ f))^{op} \\ &= (F(g) \circ F(f))^{op} \\ &= F(g)^{op} \circ^{op} F(f)^{op} \\ &= F^{op}(g^{op}) \circ^{op} F^{op}(f^{op}) \end{aligned}$$

Por i) y ii), F^{op} es funtor. Ahora, es claro que

$$(F^{op})^{op} = F$$

por lo cual resta con probar

$$(G \circ F)^{op} = G^{op} \circ F^{op}$$

En efecto, como

$$G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$$

entonces,

$$(G \circ F)^{op} : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{E}^{op}$$

También,

$$G^{op} \circ F^{op} : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{E}^{op}$$

Sea X un objeto de $\mathcal{C}^{op}$. Entonces,

$$\begin{aligned}(G^{op} \circ F^{op})(X) &= G^{op}(F^{op}(X)) \\ &= G^{op}(F(X)) \\ &= G(F(X)) \\ &= (G \circ F)(X) \\ &= (G \circ F)^{op}(X)\end{aligned}$$

y, si $X, Y \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$ con f^{op} un morfismo en $\mathcal{C}^{op}$ de X a Y, entonces

$$\begin{aligned}(G^{op} \circ F^{op})(f^{op}) &= G^{op}(F^{op}(f^{op})) \\ &= G^{op}(F(f)^{op}) \\ &= G(F(f))^{op} \\ &= ((G \circ F)(f))^{op} \\ &= (G \circ F)^{op}(f^{op})\end{aligned}$$

por tanto,

$$G^{op} \circ F^{op} = (G \circ F)^{op}$$

■

Proposición 4.0.6
Sean $F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ y $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ dos funtores. Entonce existe un isomorfismo de categorías entre $(F \downarrow G)^{op}$ y $G^{op} \downarrow F^{op}$.

Demostración:
Primeor analicemos los objetos y morfismos entre ambas categorías.

1. $\operatorname{Obj}((F \downarrow G)^{op}) = \operatorname{Obj}(F \downarrow G)$. Por definición de la categoría coma, $(A, f, B) \in \operatorname{Obj}(F \downarrow G)$ donde $A \in \operatorname{Obj}(\mathcal{A})$, $B \in \operatorname{Obj}(\mathcal{B})$ y $f : F(A) \to G(B)$ esto es, $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(F(A), G(B))$.

   Entonces, si $(A, f, B) \in \operatorname{Obj}((F \downarrow G)^{op}) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(G(B), F(A)) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(G(B)^{op}, F(A)^{op})$ lo cual ocurre si y sólo si $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(G(B), F(A))$, más aún, $A \in \operatorname{Obj}(\mathcal{A})$, $B \in \operatorname{Obj}(\mathcal{B})$ y $f^{op} \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(G(B), F(A))$, siendo $(B, f^{op}, A) \in \operatorname{Obj}(G^{op} \downarrow F^{op})$.

2. Analicemos los morfismos. Veamos al conjunto de morfismos de $(F \downarrow G)^{op}$.

$$\operatorname{Hom}_{(F \downarrow G)^{op}}((A_1, f_1, B_1), (A_2, f_2, B_2)) = \operatorname{Hom}_{(F \downarrow G)}((A_2, f_2, B_2), (A_1, f_1, B_1))$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
(a,b)^{op} \in \mathrm{Hom}_{(F\downarrow G)^{op}}\left((A_1,f_1,B_1),(A_2,f_2,B_2)\right) &\iff (a,b) \in \mathrm{Hom}_{(F\downarrow G)}\left((A_2,f_2,B_2),(A_1,f_1,B_1)\right) \\
&\iff a \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\left(A_2,A_1\right) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{op}}\left(A_1,A_2\right) \\
&\quad \text{y } b \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\left(B_2,B_1\right) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}^{op}}\left(B_1,B_2\right) \\
&\iff a^{op} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{op}}\left(A_2,A_1\right) \text{ y } b^{op} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}^{op}}\left(B_2,B_1\right)
\end{aligned}$$

En particular se tiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & F(a) & & \\
 & F(A_2) & \longrightarrow & F(A_1) & \\
f_2 & \downarrow & & \downarrow & f_1 \\
 & G(B_2) & \longrightarrow & G(B_1) & \\
 & & G(b) & &
\end{array}$$

es decir,

$$\begin{aligned}
f_1 \circ F(a) = G(b) \circ f_2 &\iff (f_1 \circ F(a))^{op} = (G(b) \circ f_2)^{op} \\
&\iff (F(a))^{op} \circ^{op} f_1^{op} = f_2^{op} \circ^{op} (G(b))^{op} \\
&\iff F^{op}(a^{op}) \circ^{op} f_1^{op} = f_2^{op} \circ^{op} G^{op}(b^{op})
\end{aligned}$$

Por tanto, el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & G^{op}(b^{op}) & & \\
 & G^{op}(B_1) & \longrightarrow & G^{op}(B_2) & \\
f_1^{op} & \downarrow & & \downarrow & f_2^{op} \\
 & F^{op}(A_1) & \longrightarrow & F^{op}(A_2) & \\
 & & F^{op}(a^{op}) & &
\end{array}$$

Por tanto, $(b^{op},a^{op}) \in \mathrm{Hom}_{(G^{op}\downarrow F^{op})}\left((B_1,f_1^{op},A_1),(B_2,f_2^{op},A_2)\right)$. Así $(a,b)^{op} \in \mathrm{Hom}_{(F\downarrow G)^{op}}\left((A_1,f_1,B_1),(\right.$ si y sólo si $(b^{op},a^{op}) \in \mathrm{Hom}_{(G^{op}\downarrow F^{op})}\left((B_1,f_1^{op},A_1),(B_2,f_2^{op},A_2)\right)$.

Con lo anterior, sea $H : (F \downarrow G)^{op} \to (G^{op} \downarrow F^{op})$ dado como:

$$H((A,f,B)) = (B,f^{op},A), \quad \forall (A,f,B) \in \mathrm{Obj}\left((F\downarrow G)^{op}\right)$$

y,

$$H((a,b)^{op}) = (b^{op},a^{op}), \quad \forall (a,b)^{op} \text{ morfismo de la categoría } (F\downarrow G)^{op}$$

Definimos también $K : (G^{op} \downarrow F^{op}) \to (F \downarrow G)^{op}$ tal que

$$K((B,f^{op},A)) = (A,f,B), \quad \forall (B,f^{op},A) \in \mathrm{Obj}\left((G^{op}\downarrow F^{op})\right)$$

y,

$$H((b^{op},a^{op})) = (a,b)^{op}, \quad \forall (b^{op},a^{op}) \text{ morfismo de la categoría } (G^{op}\downarrow F^{op})$$

Procederemos a probar que K y H son funtores. Sean $A \in \mathrm{Obj}\left(\mathcal{A}\right)$ y $B \in \mathrm{Obj}\left(\mathcal{B}\right)$ arbitrarios y $f : F(A) \to G(B)$. Entonces

$$\begin{aligned}
H(1_{(A,f,B)^{op}}) &= H((1_A,1_B)^{op}) \\
&= H((1_A,1_B)^{op}) \\
&= (1_B^{op},1_A^{op}) \\
&= 1_{(B,f^{op}.A)}
\end{aligned}$$

(de forma análoga con K). Sean ahora $(a,b)^{op} \in \mathrm{Hom}_{(F\downarrow G)^{op}}((A_1,f_1,B_1),(A_2,f_2,B_2))$ y $(c,d)^{op} \in \mathrm{Hom}_{(F\downarrow G)^{op}}((A_2,f_2,B_2),(A_3,f_3,B_3))$, se tiene que

$$\begin{aligned} H((c,d)^{op} \circ^{op} (a,b)^{op}) &= H(((a,b)\circ(c,d))^{op}) \\ &= H((a\circ c, b\circ d)^{op}) \\ &= ((b\circ d)^{op}, (a\circ c)^{op}) \\ &= (d^{op} \circ^{op} b^{op}, c^{op} \circ^{op} a^{op}) \\ &= (d^{op}, c^{op}) \circ (b^{op}, a^{op}) \\ &= H((c,d)^{op}) \circ H((a,b)^{op}) \end{aligned}$$

(de forma análoga se cumple algo similar para K). Por tanto, H y K son funtores. De la definición de H y K es claro que

$$H \circ K = 1_{G^{op}\downarrow F^{op}} \quad \text{y} \quad K \circ H = 1_{(F\downarrow G)^{op}}$$

luego, las categorías $(F \downarrow G)^{op}$ y $G^{op} \downarrow F^{op}$ son isomorfas. ■

4.1. Categorías de Funtores

Proposición 4.1.1
Sean $\mathcal{I}$ y $\mathcal{C}$ dos categorías. Si $\mathcal{I}$ es categoría pequeña, entonces los funtores $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ y las transformaciones naturales entre los mismos forman una categoría, la cual es llamada **categoría de funtores** denotada por $\mathrm{Fun}(\mathcal{I},\mathcal{C})$ (también denotado por $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$), donde

1. Los objetos de $\mathrm{Fun}(\mathcal{I},\mathcal{C})$ son todos los funtores F de $\mathcal{I}$ en $\mathcal{C}$.
2. Los morfismos entre dos funtores $F, G : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$, son las transformaciones naturales $\eta : F \to G$.
3. Existe una transformación natural identidad, para cada $F \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Fun}(\mathcal{I},\mathcal{C}))$, se define

$$\forall i \in \mathrm{Obj}(\mathcal{I}), (1_F)_i = 1_{F(i)}$$

4. Composición vertical para transformaciones natruales.

$$\forall i \in \mathrm{Obj}(\mathcal{I}), (\alpha \circ \beta)_i = \alpha_i \circ \beta_i$$

Demostración:
Para probar que $\mathrm{Fun}(\mathcal{I},\mathcal{C})$ es una categoría, basta con demostrar que la clase de morfismos entre dos objetos es un conjunto.

En efecto, sean $F, G : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ arbitrarios, entonces notemos que

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{I},\mathcal{C})}(F,G) = \mathrm{Nat}(F,G) = \mathcal{C}^{\mathcal{I}}(F,G)$$

Notemos que

$$\bigcup_{i \in \mathrm{Obj}(\mathcal{I})} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(i), G(i))$$

es un conjunto. Sea $\alpha : F \to G$ una transformación natural arbitraria, dado que para cada

$$i \in \mathrm{Obj}(\mathcal{I}), \alpha_i : F(i) \to G(i)$$

podemos ver a α como un mapeo

$$\alpha : \mathrm{Obj}\,(\mathcal{I}) \to \bigcup_{i\in \mathrm{Obj}(\mathcal{I})} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(F(i), G(i))$$

esto determina que la clase de transformaciones natruales es un subconjunto de

$$\mathrm{Obj}\,(\mathcal{I}) \times \bigcup_{i\in \mathrm{Obj}(\mathcal{I})} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(F(i), G(i))$$

el cual es un conjunto ya que $\mathcal{I}$ es categoría pequeña, luego $\mathrm{Nat}\,(F, G)$ es un conjunto. ■

Ejemplo 4.1.1
Sea $\mathcal{C}$ una categoría pequeña, el funtor $F : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ se llama **prehaz** y a la categoría $\mathrm{Fun}\,(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set})$ se le conoce como la **categoría de prehaces**.

Ejemplo 4.1.2
Sea $\mathbf{2}$ la categoría discreta con dos objetos. Supongamos que estos objetos son $\{*, \diamond\}$. Entonces, para cualquier categoría $\mathcal{C}$, la categoría $\mathrm{Fun}\,(\mathbf{2}, \mathcal{C})$ es isomorfa a la categoría producto $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$.

Demostración:
En efecto, note que para cada funtor $F : \mathbf{2} \to \mathcal{C}$ está determinado únicamente por dos objetos $D_F, C_F \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$, pues

$$F(*) = C_F \quad \text{y} \quad F(\diamond) = D_F$$

y para cada transformación natrual $\eta : F \to G$ está determinada por dos morfismos

$$\eta_* : C_F \to D_G \quad \text{y} \quad \eta_\diamond : D_F \to D_G$$

Ahora, como siempre existe un morfismo identidad en $\mathbf{2}$, no existen diagramas no triviales, luego no se le dan condiciones extras a η_* y $\eta_\diamond$. Sea $F : \mathrm{Fun}\,(\mathbf{2}, \mathcal{C}) \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ el funtor dado por:

$$V(F) = (C_F, D_F) \quad \text{y} \quad V(\eta) = (\eta_*, \eta_\diamond)$$

para cada funtor $F, G : \mathbf{2} \to \mathcal{C}$ y $\eta : F \to G$ es transformación natural. ■

Proposición 4.1.2
Sea $\mathcal{I}$ una categoría pequeña y $\mathcal{C}$ una categoría arbitraria. Tomemos $F, G : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ dos funtores, entonces la transformación nautral $\eta : F \to G$ es un isomorfismo en $\mathrm{Fun}\,(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ si y sólo es un isomorfismo natural.

Demostración:
$\Rightarrow$) : Supongamos que η es un isomorfismo en $\mathrm{Fun}\,(\mathcal{I}, \mathcal{C})$. Entonces, existe $\xi : G \to F$ transformación nautral tal que

$$\xi \circ \eta = 1_F \quad \text{y} \quad \eta \circ \xi = 1_G$$

en particular, para cada objeto $i \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{I})$:

$$\xi_i \circ \eta_i = (\xi \circ \eta)_i = (1_F)_i = 1_{F(i)}$$

y de forma análoga $\eta_i \circ \xi_i = 1_{G(i)}$. Entonces, η es un isomorfismo natural.

$\Leftarrow$) : Suponga que η es un isomorfismo natural. Considere $\eta^{-1} : G \to F$ el cual es una transformación natural (se probó anteriormente), luego se tiene que

$$\eta^{-1} \circ \eta = 1_F \quad \text{y} \quad \eta \circ \eta^{-1} = 1_G$$

así, η es isomorfismo. ■

Proposición 4.1.3
Sea $\mathcal{I}$ una categoría pequeña y $\mathcal{C}$ una categoría puntuada. Entonces, la categoría $\mathrm{Fun}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ es puntuada.

Demostración:
Sea C_0 un objeto cero en $\mathcal{C}$. Afirmamos que el funtor $\Delta_{C_0} : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ constante C_0 es un objeto cero en $\mathrm{Fun}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$.

En efecto, sea $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ un funtor arbitrario.

1. Se define $\varphi : \Delta_{C_0} \to F$ formado por lo súnicos morfismos $\varphi : C_0 \to F(i)$ para cada $i \in \mathrm{Obj}(\mathcal{I})$ (pues C_0 es objeto inicial). Afirmamos que φ es transformación natural. En efecto, sea $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i, j)$ con $i, j \in \mathrm{Obj}(\mathcal{I})$ arbitrario.

$$\begin{array}{ccccc} & C_0 & \overset{\varphi_i}{\longrightarrow} & F(i) & \\ 1_{C_0} & \downarrow & & \downarrow & F(f) \\ & C_0 & \underset{\varphi_j}{\longrightarrow} & F(j) & \end{array}$$

hay que ver que el diagrama conmuta. En efecto, notemos que

$$\varphi_j : C_0 \to F(j)$$

y

$$F(f) \circ \varphi_i : C_0 \to F(j)$$

como C_0 es objeto inicial, entonces debe tenerse que

$$\varphi_j \circ 1_{C_0} = \varphi_j = F(f) \circ \varphi_i$$

luego el diagrama anterior conmuta.

2. Se define $\psi : F \to \Delta_{C_0}$ formado por los únicos morfismos $\psi_i : F \to C_0$ (pues C_0 es objeto final). De forma análoga se concluye que ψ es transformación natural y es la única entre F y Δ_{C_0}.

Por los dos incisos anteriores, Δ_{C_0} es objeto inicial y final, es decir que es objeto cero. Luego, $\mathrm{Fun}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ admite un objeto cero, lo que quiere decir que es puntuada. ■

Proposición 4.1.4
Sea $\mathcal{B}$ una categoría pequeña y $\mathcal{C}$ una categoría arbitraria. Entonces, existe un isomorfismo entre $\mathrm{Fun}(\mathcal{B}, \mathcal{C})^{op}$ y $\mathrm{Fun}(\mathcal{B}^{op}, \mathcal{C}^{op})$.

Demostración:
Antes, usaremos la siguiente notación:

1. Denotamos para cualquier morfismo $\alpha : F \to G$ en $\mathrm{Fun}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ el correspondiente morfismo en $\mathrm{Fun}(\mathcal{B}, \mathcal{C})^{op}$ por $\alpha^{\overline{op}} : G \to F$.

2. Denotamos por $\alpha^{op} : G^{op} \to F^{op}$ a la correspondiente transformación natural dual.

3. Denotamos a la composición en $\mathrm{Fun}(\mathcal{B}, \mathcal{C})^{op}$ por $\circ^{op}$.

4. Denotamos por $\circ_{\mathcal{C}}$ (respectivamente, $\circ_{\mathcal{C}}^{op}$) a la composición en la categoría $\mathcal{C}$ (respectivamente en $\mathcal{C}^{op}$).

5. Denotamos por $\bullet$ (resp. $\circ$) a la composición en la categoría $\mathrm{Fun}(\mathcal{B}^{op}, \mathcal{C}^{op})$ (resp. $\mathrm{Fun}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$).

Con todo lo anterior, definimos el funtor $T : \mathrm{Fun}(\mathcal{B}, \mathcal{C})^{op} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{B}^{op}, \mathcal{C}^{op})$ dada por

$$T(F) = F^{op} \quad \text{y} \quad T(\alpha^{\overline{op}}) = \alpha^{op}$$

para cualesquiera $G, F : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ funtores y $\alpha : F \to G$ transformación nautral.

También se define al funtor $S : \mathrm{Fun}(\mathcal{B}^{op}, \mathcal{C}^{op}) \to \mathrm{Fun}(\mathcal{B}, \mathcal{C})^{op}$ dado por

$$S(U) = U^{op} \quad \text{y} \quad S(\beta) = (\beta^{op})^{\overline{op}}$$

para cualesquiera $U, V : \mathcal{B}^{op} \to \mathcal{C}^{op}$ funtores y $\beta : U \to V$ transformación natural.

Consideremos $F, G, H : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ funtores y $\alpha : F \to G$ y $\beta : G \to H$ transformaciones naturales.

Entonces, para todo $B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{B})$ se tiene

$$(\beta \circ \alpha)^{op} = \alpha^{op} \bullet \beta^{op}$$

■