

Espacios Hilbertianos

Cristo Daniel Alvarado

15 de febrero de 2024

Índice general

1. Espacios Hilbertianos	2
1.1. Conceptos básicos. Proyecciones ortogonales	2

Capítulo 1

Espacios Hilbertianos

1.1. Conceptos básicos. Proyecciones ortogonales

Definición 1.1.1

Sea H un espacio vectorial sobre el campo \mathbb{K} . Decimos que H es un **espacio prehilbertiano** si está dotado de una aplicación $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto (\vec{x}|\vec{y})$ con las propiedades siguientes:

- 1). $\forall \vec{y} \in H$ fijo, $\vec{x} \mapsto (\vec{x}|\vec{y})$ es una aplicación lineal de H en \mathbb{K} , o sea

$$\begin{aligned}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2|\vec{y}) &= (\vec{x}_1|\vec{y}) + (\vec{x}_2|\vec{y}) \\ (\alpha\vec{x}|\vec{y}) &= \alpha \cdot (\vec{x}|\vec{y})\end{aligned}$$

para todo $\vec{x}, \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in H$ y $\alpha \in \mathbb{K}$.

- 2). $(\vec{y}|\vec{x}) = \overline{(\vec{x}|\vec{y})}$, para todo $\vec{x} \in H$.

- 3). $(\vec{x}|\vec{x}) \geq 0$, para todo $\vec{x} \in H$.

- 4). $(\vec{x}|\vec{x}) = 0$ si y sólo si $\vec{x} = 0$.

Observación 1.1.1

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces 1) y 2) implican que $\forall \vec{x} \in H$ fijo, la aplicación $\vec{y} \mapsto (\vec{x}|\vec{y})$ de H en \mathbb{R} es lineal. En este caso se dice que $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto (\vec{x}|\vec{y})$ es una **forma bilineal sobre H** .

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, entonces

$$\begin{aligned}(\vec{x}|\vec{y}_1 + \vec{y}_2) &= (\vec{x}|\vec{y}_1) + (\vec{x}|\vec{y}_2) \\ (\vec{x}|\alpha\vec{y}) &= \overline{\alpha} (\vec{x}|\vec{y})\end{aligned}$$

Se dice que $\vec{y} \mapsto (\vec{x}|\vec{y})$ es entonces **semilineal** y que $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto (\vec{x}|\vec{y})$ es **sesquilineal** (1_2^1 -lineal).

La aplicación $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto (\vec{x}|\vec{y})$ se llama **producto escalar sobre H** .

Definición 1.1.2

Para todo $\vec{x} \in H$ se define la **norma de \vec{x}** como: $\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}|\vec{x})}$.

Ejemplo 1.1.1

Sea $H = \mathbb{K}^n$

Ejemplo 1.1.2

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y sea $H = L_2(S, \mathbb{K})$. Para todo $f, g \in H$ se define

$$(f|g) = \int_S f \bar{g}$$

La integral existe por Hölder con $p = p^* = 2$. Este es un producto escalar sobre H y, en este caso:

$$\|f\| = \left[\int_S |f|^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \mathcal{N}_2(f), \quad \forall f \in H$$

Ejemplo 1.1.3

Sea $H = l_2(\mathbb{K})$ el espacio de sucesiones en \mathbb{K} que son cuadrado sumables. Se sabe que $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots) \in l_2(\mathbb{K})$ si y sólo si

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$$

$l_2(\mathbb{K})$ es un espacio prehilbertiano con el producto escalar:

$$(\vec{x}|\vec{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i$$

donde la serie es convergente por Hölder. En este caso:

$$\|\vec{x}\| = \left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \mathcal{N}_2(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in l_2(\mathbb{K})$$

Teorema 1.1.1 (Desigualdad de Cauchy-Schwartz)

Sea H un espacio prehilbertiano. Entonces:

- 1). Se cumple la desigualdad de Cauchy-Schwartz:

$$|(\vec{x}|\vec{y})| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in H$$

y, la igualdad se da si y sólo si los vectores son linealmente dependientes.

- 2). Se cumple la desigualdad triangular:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in H$$

y la igualdad se da si y sólo si uno de los vectores es múltiplo no negativo del otro.

Demostración:

De 1): Se supondrá que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (el caso en que sea \mathbb{R} es similar y se deja como ejercicio).

Sean $\vec{x}, \vec{y} \in H$. En el caso de que alguno de los vectores sea $\vec{0}$, el resultado es inmediato (ambos miembros de la desigualdad son cero). Por lo cual, supongamos que ambos son no cero. Se tiene para

todo $\lambda \in \mathbb{K}$ que

$$\begin{aligned}
0 &\leq (\vec{x} + \lambda \vec{y} | \vec{x} + \lambda \vec{y}) \\
&= (\vec{x} | \vec{x}) + \overline{\lambda} (\vec{x} | \vec{y}) + \lambda (\vec{y} | \vec{x}) + \lambda \overline{\lambda} (\vec{y} | \vec{y}) \\
&= (\vec{x} | \vec{x}) + \overline{\lambda} (\vec{y} | \vec{x}) + \lambda (\vec{y} | \vec{x}) + \lambda \overline{\lambda} (\vec{y} | \vec{y}) \\
&= \|\vec{x}\|^2 + 2\Re \lambda (\vec{y} | \vec{x}) + |\lambda|^2 \|\vec{y}\|^2
\end{aligned} \tag{1.1}$$

En particular, para

$$\lambda(t) = \begin{cases} t \frac{(\vec{x} | \vec{y})}{|(\vec{x} | \vec{y})|} & \text{si } (\vec{x} | \vec{y}) \neq 0 \\ t & \text{si } (\vec{x} | \vec{y}) = 0 \end{cases}$$

con $t \in \mathbb{R}$, la desigualdad (1) se convierte en

$$0 \leq \|\vec{x}\|^2 + 2t |(\vec{y} | \vec{x})| + t^2 \|\vec{y}\|^2 \tag{1.2}$$

El trinomio anterior es mayor o igual a cero si y sólo si su discriminante:

$$|(\vec{x} | \vec{y})|^2 - \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 \leq 0$$

es decir

$$|(\vec{x} | \vec{y})| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$$

Si $|(\vec{x} | \vec{y})| = \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2$, entonces el trinomio en (2) tiene una raíz doble. Luego, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que

$$(\vec{x} + \lambda \vec{y} | \vec{x} + \lambda \vec{y}) = 0$$

pero lo anterior solo sucede si y sólo si $\vec{x} + \lambda \vec{y} = 0$, es decir si \vec{x} y \vec{y} son linealmente dependientes.

De 2): Se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 &= (\vec{x} + \vec{y} | \vec{x} + \vec{y}) \\
&= \|\vec{x}\|^2 + 2\Re (\vec{y} | \vec{x}) + \|\vec{y}\|^2 \\
&\leq \|\vec{x}\|^2 + 2|(\vec{y} | \vec{x})| + \|\vec{y}\|^2 \\
&\leq \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\| \|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 \\
&= (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2
\end{aligned}$$

lo cual implica la desigualdad que se quiere probar. Ahora, la igualdad se cumple si y sólo si

$$|(\vec{x} | \vec{y})| = \Re (\vec{x} | \vec{y}) \text{ y } |(\vec{x} | \vec{y})| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$$

la primera igualdad implica que $(\vec{x} | \vec{y})$ es real (en particular, ≥ 0 por el valor absoluto) y la segunda implica que \vec{x} y \vec{y} son linealmente dependientes. Es decir, si y sólo si un vector es múltiplo no negativo del otro. ■

Se concluye del teorema anterior que $\|\cdot\|$ es una norma sobre H . En lo sucesivo se considerará a H como espacio normado dotado de esta norma.

Proposición 1.1.1

La aplicación $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto (\vec{x} | \vec{y})$ es una función continua del espacio normado producto $H \times H$ en \mathbb{K} .

Demostración:

Sean $\vec{x}, \vec{y} \in H$ y, $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{\vec{y}_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones que convergen a \vec{x} y \vec{y} , respectivamente. Se probará que $\{(\vec{x}_n|\vec{y}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $(\vec{x}|\vec{y})$ en \mathbb{K} . Se tiene que

$$\begin{aligned} |(\vec{x}|\vec{y}) - (\vec{x}_n|\vec{y}_n)| &\leq |(\vec{x} - \vec{x}_n|\vec{y})| + |(\vec{x}_n|\vec{y} - \vec{y}_n)| \\ &\leq \|\vec{x} - \vec{x}_n\| \|\vec{y}\| + \|\vec{x}_n\| \|\vec{y} - \vec{y}_n\| \end{aligned} \quad (1.3)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\{\vec{x}_n\}$ es convergente, es acotada. Luego existe $M > 0$ tal que

$$\|\vec{x}_n\| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Se sigue de (3) que

$$|(\vec{x}|\vec{y}) - (\vec{x}_n|\vec{y}_n)| \leq \|\vec{x} - \vec{x}_n\| \|\vec{y}\| + M \|\vec{y} - \vec{y}_n\|$$

y, por ende

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(\vec{x}|\vec{y}) - (\vec{x}_n|\vec{y}_n)| = 0$$

con lo que se tiene el resultado. ■

Definición 1.1.3

Decimos que un espacio prehilbertiano se llama **Hilbertiano**, si la norma $\|\cdot\|$ hace de él un espacio normado completo (o sea, un espacio normado de Banach).

Ejemplo 1.1.4

Los espacios $L_2(S, \mathbb{K})$, $l_2(\mathbb{K})$ y todo espacio prehilbertiano de dimensión finita (\mathbb{K}^n) son hilbertianos (ya que, todo espacio prehilbertiano de dimensión finita es isomorfo a \mathbb{R}^k , para algún $k \in \mathbb{N}$).

De ahora en adelante, H denotará siempre a un espacio prehilbertiano (a menos que se indique lo contrario).

Definición 1.1.4

Sean $\vec{x}, \vec{y} \in H$. Se dice que \vec{x} y \vec{y} **son ortogonales** y se escribe $\vec{x} \perp \vec{y}$, si $(\vec{x}|\vec{y}) = 0$.

Observación 1.1.2

La condición $\vec{x} \perp \vec{y}$ para todo $\vec{x} \in H$ implica que $\vec{y} = \vec{0}$, pues en particular $(\vec{y}|\vec{y}) = 0 \Rightarrow \vec{y} = \vec{0}$.

Teorema 1.1.2 (Teorema de Pitágoras)

Si $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ es un sistema de vectores ortogonales (a pares), entonces

$$\|\vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_n\|^2 = \|\vec{x}_1\|^2 + \dots + \|\vec{x}_n\|^2$$

Demostración:

Se procederá por inducción sobre n . Veamos el caso $n = 2$. En este caso, veamos que

$$\begin{aligned} \|\vec{x}_1 + \vec{x}_2\|^2 &= (\vec{x}_1 + \vec{x}_2|\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \\ &= \|\vec{x}_1\|^2 + (\vec{x}_1|\vec{x}_2) + (\vec{x}_2|\vec{x}_1) + \|\vec{x}_2\|^2 \\ &= \|\vec{x}_1\|^2 + \|\vec{x}_2\|^2 \end{aligned}$$

Suponga que el resultado se cumple para $n \geq 2$. Sea $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n+1} \in H$ un sistema de vectores ortogonales. Observemos que

$$\begin{aligned} (\vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_n | \vec{x}_{n+1}) &= (\vec{x}_1 | \vec{x}_{n+1}) + \dots + (\vec{x}_n | \vec{x}_{n+1}) \\ &= 0 + \dots + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

por lo cual, $\vec{x}_{n+1} \perp \vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_n$. Por el caso $n = 2$ se sigue que:

$$\|\vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_{n+1}\|^2 = \|\vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_n\|^2 + \|\vec{x}_{n+1}\|^2$$

Pero, por hipótesis de inducción:

$$\|\vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_n\|^2 = \|\vec{x}_1\|^2 + \dots + \|\vec{x}_n\|^2$$

Por lo cual:

$$\|\vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_{n+1}\|^2 = \|\vec{x}_1\|^2 + \dots + \|\vec{x}_n\|^2 + \|\vec{x}_{n+1}\|^2$$

Aplicando inducción se sigue el resultado. ■

Proposición 1.1.2 (Identidad del paralelogramo)

Para todo $\vec{x}, \vec{y} \in H$ se cumple la identidad del paralelogramo:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2)$$

Demostración:

Sean $\vec{x}, \vec{y} \in H$. Veamos que

$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 &= (\vec{x} + \vec{y} | \vec{x} + \vec{y}) + (\vec{x} - \vec{y} | \vec{x} - \vec{y}) \\ &= \|\vec{x}\|^2 + 2\Re(\vec{y} | \vec{x}) + \|\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}\|^2 - 2\Re(\vec{y} | \vec{x}) + \|\vec{y}\|^2 \\ &= 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2) \end{aligned}$$

■

Este resultado anterior es importante, pues en espacios donde la norma no venga de un producto escalar, no necesariamente se cumple la igualdad.

Ejemplo 1.1.5

Los vectores $\chi_{[0,1]}$ y $\chi_{[1,2]}$ son ortogonales en $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (es inmediato del producto escalar en $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$).

Ejemplo 1.1.6

Los vectores \sin y \cos son ortogonales en $L_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$. En efecto, veamos que

$$(\sin | \cos) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x dx = 0$$

En particular, por Pitágoras se tiene que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x + \cos x|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|^2 dx + \int_{-\pi}^{\pi} |\cos x|^2 dx$$

Ejemplo 1.1.7

Si $\vec{x} = (1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{3}, \dots)$ y $\vec{y} = (1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{3}, \dots)$ son elementos de $l_2(\mathbb{R})$, se tiene que $\vec{x} \perp \vec{y}$. En efecto, veamos que

$$\begin{aligned} (\vec{x}|\vec{y}) &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \end{aligned}$$

donde $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de sumas parciales, siendo $s_{2m} = 0$ y $s_{2m-1} = \frac{1}{m}$. Por lo cual

$$(\vec{x}|\vec{y}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$$

Teorema 1.1.3

Sea M un subespacio de un espacio prehilbertiano H y sea $\vec{x} \in H$.

- 1). Suponiendo que existe $\vec{x}_0 \in M$ tal que $\vec{x} - \vec{x}_0 \perp M$, es decir que $\vec{x} - \vec{x}_0 \perp \vec{y}$, para todo $\vec{y} \in M$, se tiene

$$\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \|\vec{x} - \vec{y}\|, \quad \forall \vec{y} \in M, \vec{y} \neq \vec{x}_0$$

Así pues, si existe \vec{x}_0 , tal vector es único y es llamado **la proyección ortogonal de \vec{x} sobre M** . Además

$$d(\vec{x}, M)^2 = \|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2 = \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{x}_0\|^2$$

- 2). Recíprocamente, si existe un $\vec{x}_0 \in M$ tal que $d(\vec{x}, M) = \|\vec{x} - \vec{x}_0\|$, entonces \vec{x}_0 es la proyección ortogonal de \vec{x} sobre M . En particular, si $\vec{x} \in M$ entonces $\vec{x} = \vec{x}_0$, es decir que \vec{x} es su propia proyección ortogonal sobre M .

Demostración:

■

Dado un subespacio M de un espacio prehilbertiano H un vector $\vec{x} \in H$, puede no existir la proyección ortogonal de \vec{x} sobre M . Esto motiva la siguiente definición:

Definición 1.1.5

Un subespacio M de H se dice que es **distinguido** si para cada $\vec{x} \in H$ existe la proyección ortogonal de \vec{x} sobre M .

Observación 1.1.3