

Ejercicios Variedades Diferenciables Vol. I

Cristo Daniel Alvarado

9 de octubre de 2025

Índice general

Lista de Códigos

CAPÍTULO 1

ÁLGEBRA EXTERIOR SOBRE UN ESPACIO VECTORIAL DE DIMENSIÓN FINITA

Ejercicio 1.1.1 (Ejercicio 14)

Sea E un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo \mathbb{K} provisto de una base $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$.

Para todo entero no negativo $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ se considera un espacio vectorial E^p provisto de una base $\{\vec{e}_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}\}_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ en correspondencia biyectiva con el conjunto de todas las n^p sucesiones finitas $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ de elementos en $[1, n]$.

Es claro que $E^0 \cong \mathbb{K}$ y que $E^1 \cong E$. Se define el espacio vectorial de dimensión finita:

$$\otimes E = \bigoplus_{p \geq 0} E^p$$

(a) Muestre que $\otimes E$ es un álgebra asociativa con uno, mediante la tabla de multiplicación:

$$\vec{e}_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} \otimes \vec{e}_{\beta_1, \dots, \beta_q} = \vec{e}_{\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q}$$

En particular, $\vec{e}_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} = \vec{e}_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{\alpha_p}$.

(b) De aquí en adelante, álgebra querrá decir álgebra asociativa con uno y los homomorfismos ϕ de álgebras deberán satisfacer que $\phi(1) = 1$.

Sea E un espacio vectorial, \mathcal{A} un álgebra, i una aplicación lineal de E en \mathcal{A} . La tripleta (E, \mathcal{A}, i) se llama álgebra tensorial sobre E si satisface la siguiente propiedad universal:

Para toda aplicación lineal $\lambda : E \rightarrow \mathcal{B}$ de E en un álgebra \mathcal{B} existe un único homomorfismo de álgebras $\lambda^* : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ tal que:

$$\lambda = \lambda^* \circ i$$

es decir, que el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{B} \\ \downarrow & \nearrow & \\ \mathcal{A} & & \end{array}$$

es conmutativo.

CAPÍTULO 2

APLICACIONES MULTILINEALES ALTERNADAS. FORMAS EXTERIORES

CAPÍTULO 3

ÁLGEBRA EXTERIOR SOBRE UN ESPACIO DE PRODUCTO ESCALAR