Series

Def. Se dice que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ en un espacio normado es absolutamente convergente si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} N(x_n)$ converge en $\mathbb{R}$.

Una serie puede ser convergente sin serlo absolutamente. Por ejemplo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge en $\mathbb{R}$, pero $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ no converge en $\mathbb{R}$.

También, una serie puede ser absolutamente convergente sin ser convergente. Por ejemplo, en (ϕ_0, N_∞) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} e_n$ es absolutamente convergente, pues:

$$\sum_{n=1}^{\infty} N_1\left(\frac{1}{2^n} e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < \infty$$

Pero, no existe $x \in \phi_0$ tq

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} e_n \notin \phi_0$$

pues $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\right)$ no es eventualmente 0.

Teorema.

Un espacio normado (E, N) es de Banach, si y sólo si toda serie absolutamente convergente es convergente.

Dem.

$\Rightarrow$) Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie en E absolutamente convergente, y $t_k = \sum_{n=1}^{k} x_n$, con $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ la sucesión de sumas parciales, también $S_k = \sum_{n=1}^{\infty} N(x_n)$ con $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Para probar que $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge en E, basta con probar que es de Cauchy (por ser E de Banach, el límite existe).

Se tiene:

$$N(t_p - t_q) = N\left(\sum_{n=q+1}^{p} x_n\right)$$

$$\leq \sum_{n=q+1}^{p} N(x_n)$$
$$= S_p - S_q$$
$$\leq |S_p - S_q|, \ \forall \ p>q, \ p,q\in\mathbb{N}.$$

Como $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, entonces $\{J_k\}_{k=1}^{\infty}$ es de Cauchy, así, la serie es convergente.

$\Leftarrow$) Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en E. Para probar que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente, basta probar que alguna subsucesión es convergente. Se afirma que existe una subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$N(x_{\alpha(n+1)} - x_{\alpha(n)}) < \frac{1}{2^n}, \ \forall \ n\in\mathbb{N}.$$

Dado $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$, $\exists \ N_1 \in \mathbb{N} \ \ni$

$$N(x_m - x_n) < \frac{1}{2} \text{ si } m,n \geq N_1$$

Sea $\alpha(1) = N_1$. Entonces

$$N(x_m - x_{\alpha(1)}) < \frac{1}{2}, \ \forall \ m > \alpha(1).$$

Dado $\varepsilon = \frac{1}{2^2} > 0$, $\exists \ N_2 \in \mathbb{N} \ \ni$

$$N(x_m - x_n) < \frac{1}{2^2}, \ \forall \ m,n \geq N_2$$

Sea $\alpha(2) = N_2$ (podemos suponer que $N_2 > N_1$ sin problemas). Se tiene

$$N(x_{\alpha(2)} - x_{\alpha(1)}) < \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad N(x_m - x_{\alpha(2)}) < \frac{1}{2^2}, \ \forall \ m > \alpha(2)$$

Suponga definidos $\alpha(k) > \ldots > \alpha(1) \ \ni$

$$N(x_{\alpha(i)} - x_{\alpha(i-1)}) < \frac{1}{2^i}, \ \forall \ i \in J_k \setminus \{1\}, \text{ y}$$
$$N(x_m - x_{\alpha(i)}) < \frac{1}{2^i}, \ \forall \ m > \alpha(i) \text{ con } i \in J_k$$

Dado $\varepsilon = \frac{1}{2^{k+1}}$, $\exists \ N_{k+1} > N_k \ \ni$

$$N(x_m - x_n) < \frac{1}{2^{k+1}}, \ \forall \ m,n \geq N_{k+1}$$

Sea $\alpha(k+1) = N_{k+1}$. Se tiene

$$N(x_{\alpha(k+1)} - x_{\alpha(k)}) < \frac{1}{2^k}, \text{ y } N(x_m - x_{\alpha(k+1)}) < \frac{1}{2^{k+1}}, \ \forall \ m > \alpha(k+1)$$

Considere la serie telescópica en E:

$$x_{\alpha(1)} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(x_{\alpha(n)} - x_{\alpha(n-1)}\right)$$

dicha serie es absolutamente convergente, pues:

$$N(x_{\alpha(1)}) + \sum_{n=2}^{\infty} N\left(x_{\alpha(n)} - x_{\alpha(n-1)}\right) \leq N(x_{\alpha(1)}) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

$$= N(x_{\alpha(1)}) + \frac{1}{2} < \infty$$

Por hip. la serie debe ser convergente, i.e. $\exists\, x \in E$ ᴨ

$$x = x_{\alpha(1)} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(x_{\alpha(n)} - x_{\alpha(n-1)}\right)$$

$$= \lim_{k \to \infty} \left(x_{\alpha(1)} + \sum_{n=2}^{k} \left(x_{\alpha(n)} - x_{\alpha(n-1)}\right)\right)$$

$$= \lim_{k \to \infty} x_{\alpha(k)}$$

así, $\{x_{\alpha(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ converge $\Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge.

q.e.d.