

# Notas del curso Topología I

Cristo Daniel Alvarado

4 de marzo de 2024

# Índice general

<b>0. Introduccion</b>	<b>2</b>
0.1. Temario . . . . .	2
0.2. Bibliografía . . . . .	2
<b>1. Conceptos Fundamentales</b>	<b>3</b>
1.1. Fundamentos . . . . .	3
1.2. Bases de una topología . . . . .	16
1.3. Sub-bases . . . . .	20
1.4. Subespacios topológicos . . . . .	23
1.5. Relaciones de orden y la topología del orden . . . . .	27

# Capítulo 0

## Introduccion

### 0.1. Temario

Checar el Munkres

### 0.2. Bibliografía

1. J. R. Munkres 'Topología' - Prentices Hall.
2. M. Gemignani 'Elementary Topology' - Dover.
3. J. Dugundji 'Topology' - Allyn Bacon.

# Capítulo 1

## Conceptos Fundamentales

### 1.1. Fundamentos

#### Definición 1.1.1

Sea  $X$  un conjunto y  $\mathcal{A}$  una familia no vacía de subconjuntos de  $X$ . Definamos los **complementos de  $\mathcal{A}$**

$$\mathcal{A}' := \{X - A \mid A \in \mathcal{A}\}$$

(básicamente es el conjunto de todos los complementos de los conjuntos en  $\mathcal{A}$ ). Para no perder ambigüedad, no denotaremos al complemento de un conjunto por  $B^c$ , sino por  $X - B$  (para denotar quien es el conjunto sobre el que se toma el complemento del conjunto).

La **unión de los elementos** de  $\mathcal{A}$  se define como el conjunto:

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \in X \mid x \in A \text{ para algún elemento } A \in \mathcal{A}\}$$

denotada por el símbolo de la izquierda.

La **intersección de los elementos** de  $\mathcal{A}$  se define como el conjunto:

$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \in X \mid x \in A \text{ para todo elemento } A \in \mathcal{A}\}$$

#### Observación 1.1.1

En caso de que la colección  $\mathcal{A}$  sea vacía, no se puede hacer lo que marca la definición anterior. Como  $\mathcal{A}$  es vacía, entonces  $\mathcal{A}'$  también es vacía.

1. Suponga que  $\bigcup \mathcal{A} \neq \emptyset$ , entonces existe  $x \in X$  tal que  $x \in \bigcup \mathcal{A}$ , luego existe algún elemento  $A \in \mathcal{A}$  tal que  $x \in A$ , pero esto no puede suceder, pues la familia  $\mathcal{A}$  es vacía.  $\#_c$ . Por tanto,  $\bigcup \mathcal{A} = \emptyset$ .
2. Ahora, si aplicamos las leyes de Morgan, y tomamos

$$X - \bigcap \mathcal{A} = X - \bigcap \emptyset = \bigcup \mathcal{A}' = \bigcup \emptyset = \emptyset$$

luego,  $\bigcap \mathcal{A} = X$ .

En definitiva, si  $\mathcal{A}$  es una colección vacía, entonces definimos  $\bigcup \mathcal{A} = \emptyset$  y  $\bigcap \mathcal{A} = X$ .

La observación junto con la definición anterior se usarán a lo largo de todo el curso y serán de utilidad.

**Definición 1.1.2**

Sea  $X$  un conjunto y sea  $\tau$  una familia de subconjuntos de  $X$ . Se dice que  $\tau$  es una **topología definida sobre  $X$**  si se cumple lo siguiente:

1.  $\emptyset, X \in \tau$ .
2. Si  $\mathcal{A}$  es una subcolección de  $\tau$ , entonces  $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$ .
3. Si  $A, B \in \tau$ , entonces  $A \cap B \in \tau$ .

**Observación 1.1.2**

En algunos libros viejos viene la siguiente condición adicional a la definición:

4. Si  $p, q \in X$  con  $p \neq q$ , entonces existen  $U, V \in \tau$  tales que  $p \in U$ ,  $q \in V$  y  $U \cap V = \emptyset$ .

en este caso se dirá que el espacio es **Hausdorff**.

**Observación 1.1.3**

Se tienen las siguientes observaciones:

1. Sea  $X$  un conjunto y  $\mathcal{A}$  una familia de subconjuntos de  $X$ . Si

$$\mathcal{A} = \{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$$

entonces podemos escribir

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

e igual con la intersección:

$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$$

Si  $\mathcal{A}$  es una familia vacía, y se toma como definición lo dicho en la observación 1.0.1, entonces podemos omitir el primer inciso de la definición anterior.

2. Si  $\tau$  es una topología sobre  $X$  y para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_1, \dots, A_n \in \tau$ , entonces  $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \tau$ .

**Ejemplo 1.1.1**

Sea  $X$  un conjunto no vacío.

1. El conjunto potencia (denotado por  $\mathcal{P}$ ) de  $X$  es una topología sobre  $X$ , la cual se llama la **topología discreta**, y se denota por  $\tau_D$ .
2. La colección formada únicamente por  $X$  y  $\emptyset$  es una topología sobre  $X$ , es decir  $\tau = \{\emptyset, X\}$  es llamada la **topología indiscreta**, y se escribe como  $\tau_I$ .
3. En el caso de que  $X = \{1\}$ , se tendría que  $\tau_D = \{\emptyset, \{1\}\}$  y  $\tau_I = \{\emptyset, \{1\}\}$ .  
Si  $X = \{1, \zeta\}$ , entonces  $\tau_D = \{\emptyset, \{1\}, \{\zeta\}, \{1, \zeta\}\}$  y  $\tau_I = \{\emptyset, \{1, \zeta\}\}$ .
4. Si  $\tau$  es una topología sobre  $X$ , entonces

$$\tau_I \subseteq \tau \subseteq \tau_D$$

5. Sea  $a \in X$ . Entonces  $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \}$  es una topología sobre  $X$ .

6. Sea  $A \subseteq X$  y sea  $\tau(A) = \{B \subseteq X \mid A \subseteq B\} \cup \{\emptyset\}$ . Esta familia  $\tau(A)$  es una topología sobre  $X$ .

**Solución:**

Para el inciso 6., veamos que  $\tau(A)$  es una topología sobre  $X$ . En efecto, verificaremos que se cumplen las 3 condiciones:

1. Claro que  $\emptyset \in \tau(A)$  por definición de  $\tau(A)$ . Además  $X \in \tau(A)$  ya que  $X \subseteq X$  y  $A \subseteq X$ .
2. Sea  $\mathcal{B}$  una familia no vacía de subconjuntos de  $\tau(A)$ , entonces existe  $B_0 \in \mathcal{B}$  tal que  $A \subseteq B_0$ , por lo cual

$$A \subseteq B_0 \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subseteq X$$

por tanto  $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \in \tau(A)$ .

3. Sean  $C, D \in \tau(A)$ , entonces  $A \subseteq C$  y  $A \subseteq D$ , por ende  $A \subseteq C \cap D \subseteq X$ . Así,  $C \cap D \in \tau(A)$ .

Por los incisos anteriores, la familia descrita en el inciso 6. es una topología sobre  $X$ . □

**Observación 1.1.4**

Sea  $X$  un conjunto no vacío. Si  $A = \{a\} \subseteq X$ , entonces escribimos  $\tau_a$  en vez de  $\tau(A)$ .

**Ejemplo 1.1.1**

Se continúan con los ejemplos anteriores:

7. Sea  $\tau_{cf} = \{A \subseteq X \mid X - A \text{ es un conjunto finito}\} \cup \{\emptyset\}$ . Esta es una topología sobre  $X$  y se llama la **topología de los complementos finitos**.
8. Si  $X$  es un conjunto finito, entonces  $\tau_{cf} = \tau_D = \mathcal{P}$ .
9. Considere (en un conjunto finito  $X$ ) a  $\tau_{cf}$  y sean  $a, b \in X$  con  $a \neq b$ . Si  $U_a = X - \{b\}$ ,  $U_b = X - \{a\}$ , entonces  $U_a, U_b \in \tau_{cf}$  y además,  $a \in U_a$  pero  $b \notin U_a$  y  $a \notin U_b$  pero  $b \in U_b$ . Esta propiedad es muy importante tenerla en mente pues más adelante se usará.

**Solución:**

Veamos que la familia del ejemplo 7. es una topología sobre  $X$ . En efecto, veamos que se cumplen las 3 condiciones:

1. Claro que  $\emptyset \in \tau_{cf}$  (por definición de  $\tau_{cf}$ ). Y además  $X \in \tau_{cf}$  ya que  $\emptyset = X - X$  es un conjunto finito y  $X \subseteq X$ .
2. Sea  $\mathcal{A}$  una familia no vacía de subconjuntos de  $\tau_{cf}$ . Se cumple entonces que existe  $A_0 \in \mathcal{A}$  tal que  $X - A_0$  es finito. Por lo cual como

$$X - \bigcup \mathcal{A} \subseteq X - A_0$$

ya que  $A \subseteq \bigcup \mathcal{A}$ , se tiene que  $X - \bigcup \mathcal{A}$  es finito y  $\bigcup \mathcal{A} \subseteq X$ . Por tanto,  $\bigcup \mathcal{A} \in \tau_{cf}$ .

3. Sean  $A, B \in \tau_{cf}$ . Probaremos que  $A \cap B \in \tau_{cf}$ . Afirmamos que  $X - A \cap B$  es finito, en efecto, por leyes de Morgan se tiene que

$$X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B) \subseteq X$$

donde  $X - A$  y  $X - B$  son finitos, por lo cual su unión también lo es. Por tanto  $A \cap B \in \tau_{cf}$ .

Por los tres incisos anteriores, se sigue que  $\tau_{cf}$  es una topología sobre  $X$ . □

A continuación se verá una proposición la cual tiene como objetivo el inducir una topología sobre un espacio métrico  $(X, d)$  arbitrario.

---

**Proposición 1.1.1**

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Dados  $a \in X$  y  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ , al conjunto  $B_d(a, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$  se llama  **$\varepsilon$ -bola con centro en  $x$  y radio  $\varepsilon$** .

Sea

$$\tau_d = \{A \subseteq X \mid \forall a \in A \exists r > 0 \text{ tal que } B_d(a, r) \subseteq A\}$$

Esta colección es una topología sobre  $X$ .

---

**Demostración:**

Se verificará que se cumplen las tres condiciones.

1. Por vacuidad,  $\emptyset \in \tau_d$ . Además,  $X \in \tau_d$ , pues para todo  $x \in X$ ,  $B_d(x, 1) \subseteq X$ .
2. Sean  $\mathcal{A}$  una familia no vacía de subconjuntos de  $\tau_d$ . Sea  $p \in \cup \mathcal{A}$ , es decir que existe  $A_\beta \in \mathcal{A}$  tal que  $p \in A_\beta$ , así existe  $r > 0$  tal que  $B_d(p, r) \subseteq A_\beta \subseteq \cup \mathcal{A}$ , luego  $\cup \mathcal{A} \in \tau_d$ .
3. Sean  $M, N \in \tau_d$ , y sea  $p \in M \cap N$ , es decir que  $p \in M$  y  $p \in N$ , por lo cual existen  $r_1, r_2 > 0$  tales que  $B_d(p, r_1) \subseteq M$  y  $B_d(p, r_2) \subseteq N$ . Sea  $r = \min\{r_1, r_2\}$ , es inmediato que  $B_d(p, r) \subseteq B_d(p, r_i)$ , para  $i = 1, 2$ . Por tanto,  $B_d(p, r) \subseteq M \cap N$ . Luego, como el  $p$  fue arbitrario, se sigue que  $M \cap N \in \tau_d$ .

■

**Definición 1.1.3**

La topología de la proposición anterior es llamada la **topología generada por la métrica  $d$** .

**Ejercicio 1.1.1**

Sea  $(X, d)$  espacio métrico. Veamos que, dados  $x \in X$  y  $r > 0$ , se cumple que  $B_d(x, r) \in \tau_d$ .

**Solución:**

Sea  $y \in B_d(x, r)$ , entonces  $d(x, y) < r$ . Sea  $\varepsilon = d(x, y)$  y, supongamos que  $x \neq y$  (pues en caso contrario, el caso es inmediato ya que  $B_d(x, r) \subseteq B_d(x, r)$ ) luego  $\varepsilon > 0$  y además  $\varepsilon < r$ . Sea  $s = r - \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ .

Afirmamos que  $B_d(y, s) \subseteq B_d(x, r)$ . En efecto, sea  $z \in B_d(y, s)$ , entonces

$$\begin{aligned} d(z, y) &< s \\ \Rightarrow d(z, y) &< r - \varepsilon \\ \Rightarrow d(z, y) + \varepsilon &< r \\ \Rightarrow d(z, y) + d(y, x) &< r \\ \Rightarrow d(z, x) &< r \end{aligned}$$

por tanto,  $x \in B_d(x, r)$ . Luego,  $B_d(x, r) \in \tau_d$ . □

---

**Lema 1.1.1**

Todo espacio métrico  $(X, d)$  es Hausdorff.

---

### **Demostración:**

Veamos que dados  $x, y \in X$ ,  $x \neq y$  existen  $r, s \in \mathbb{R}^+$  tales que  $B_d(x, r) \cap B_d(y, s) = \emptyset$ . Como  $x \neq y$  entonces  $d(x, y) = m \in \mathbb{R}^+$ . Tomemos  $r = \frac{m}{\pi}$  y  $s = \frac{\pi-1}{\pi}m$  y veamos que la intersección es vacía.

En efecto, en caso de que no lo fuese se tendría que si existiera  $p \in B_d(x, r) \cap B_d(y, s)$ , entonces  $d(p, x) < \frac{m}{\pi}$  y  $d(p, y) < \frac{\pi-1}{\pi}m$ , por lo cual de la desigualdad triangular se sigue que:

$$d(x, y) \leq d(p, x) + d(p, y) < \frac{1 + \pi - 1}{\pi}m = m = d(x, y)$$

lo cual es una contradicción. Por tanto, la intersección es vacía. ■

Retomando al espacio métrico  $(X, d)$ , tenemos que para  $A \subseteq X$ ,  $A \in \tau_d$  si y sólo si existen  $\{a_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq A$  y  $\{\varepsilon_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathbb{R}^+$  tales que

$$\bigcup_{\alpha \in I} B_d(a_\alpha, \varepsilon_\alpha) = A$$

donde  $\forall \alpha \in I$  se tiene que  $A_\alpha \in \mathcal{A}$ .

---

### **Corolario 1.1.1**

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y

$$\mathcal{B}_d = \{B_d(x, \varepsilon) | x \in X, \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$$

entonces, para  $A \subseteq X$  se tiene que  $A \in \tau_d$  si y sólo si existe una colección  $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathcal{B}_d$  tal que  $A = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$ . La colección  $\mathcal{B}_d \subseteq \tau_d$ .

---

### **Ejemplo 1.1.2**

Sea  $m \in \mathbb{N}$  y considere el espacio métrico  $\mathbb{R}^m$  con la métrica  $d_u$ , siendo:

$$d_u(x, y) = [(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_m - y_m)^2]^{\frac{1}{2}}$$

para  $x = (x_1, \dots, x_m), y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ . Esta métrica será denominada **métrica usual**. Vamos a escribir a la topología generada por esta métrica como  $\tau_u$ , y se dice la **topología usual definida sobre  $\mathbb{R}^m$** . En particular, cuando  $m = 1$  tenemos que  $\tau_u$  la topología usual definida sobre  $\mathbb{R}$ . En este caso, se tiene que  $A \in \tau_u$  si y sólo si existen  $\{a_\alpha\}_{\alpha \in I}$  y  $\{b_\alpha\}_{\alpha \in I}$  subfamilias de  $\mathbb{R}$  tal que  $A = \bigcup_{\alpha \in I} (a_\alpha, b_\alpha)$ .

### **Observación 1.1.5**

Tenemos que para todo  $n \in \mathbb{N}$ , los conjuntos  $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \in \tau_u$ , y  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \{0\} \notin \tau_u$ . Es decir, que la topología solo es cerrada (en general) bajo intersecciones finitas.

### **Definición 1.1.4**

Sea  $X$  un conjunto, y sean  $\tau_1$  y  $\tau_2$  topologías sobre  $X$ . Decimos que  $\tau_2$  es **más fina** que la topología  $\tau_1$  si se tiene que  $\tau_1 \subseteq \tau_2$  (a veces también se dice que  $\tau_1$  es **menos fina** que  $\tau_2$ ).

### **Ejemplo 1.1.3**

Sea  $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}\}$ ,  $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2\}\}$ . Tomemos

$$\tau_1 \cup \tau_2 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{2\}\}$$

la familia  $\tau_1 \cup \tau_2$  no es una topología sobre  $X$ , pues no es cerrada bajo uniones arbitrarias. Con esto se tiene que la unión de dos topologías no necesariamente es una topología.



---

**Teorema 1.1.1**

Sea  $X$  un conjunto, y sea  $\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in I}$  una familia de topologías sobre  $X$ , entonces  $\tau = \bigcap_{\alpha \in I} \tau_\alpha$  es una topología sobre  $X$ .

---

**Demostración:**

Veamos que se cumplen las tres condiciones.

1. Claro que  $X, \emptyset \in \tau$ , pues  $X, \emptyset \in \tau_\alpha$ , para todo  $\alpha \in I$ .
2. Sea  $\mathcal{A} = \{A_\beta\}_{\beta \in J} \subseteq \tau = \bigcap_{\alpha \in I} \tau_\alpha$  una subcolección arbitraria de elementos de  $\tau$ . Por ser  $\tau_\alpha$  una topología, se sigue que  $\bigcup \mathcal{A} \in \tau_\alpha$ , para todo  $\alpha \in I$ . Por tanto,  $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$ .
3. Sean  $K, L \in \tau$ , entonces  $K, L \in \tau_\alpha$ , para todo  $\alpha \in I$ , luego como  $\tau_\alpha$  es una topología sobre  $X$ , se tiene que  $L \cap K \in \tau_\alpha$ , para todo  $\alpha \in I$ , por tanto  $L \cap K \in \tau$ .

Por los tres incisos anteriores, se sigue que  $\tau$  es una topología sobre  $X$ . ■

---

**Corolario 1.1.2**

Sea  $X$  un conjunto y sean  $\mathcal{A}$  una familia de subconjuntos de  $X$ . Definimos

$$\mathcal{K} = \{\tau \mid \tau \text{ es una topología sobre } X \text{ y } \mathcal{A} \subseteq \tau\}$$

Entonces:

1.  $\tau_D \in \mathcal{K}$ .
  2. Definiendo  $\tau(\mathcal{A}) = \bigcap_{\tau \in \mathcal{K}} \tau$ , se tiene que  $\tau(\mathcal{A})$  es una topología sobre  $X$ .
  3. Para toda topología  $\tau \in \mathcal{K}$ ,  $\tau(\mathcal{A}) \subseteq \tau$ .
  4.  $\tau(\mathcal{A}) \in \mathcal{K}$ .
- 

**Demostración:**

De 1. Es inmediato, pues como  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P} = \tau_D$  y  $\tau_D$  es una topología sobre  $X$ , se sigue que  $\tau_D \in \mathcal{K}$ .

De 2. Es inmediato del teorema anterior.

De 3. Como  $\tau(\mathcal{A}) = \bigcap_{\tau \in \mathcal{K}} \tau$ , entonces  $\tau(\mathcal{A}) \subseteq \tau$ , para toda  $\tau \in \mathcal{K}$ .

De 4. Por 2.  $\tau(\mathcal{A})$  es una topología sobre  $X$ , y además  $\mathcal{A} \subseteq \tau(\mathcal{A})$ , pues  $\mathcal{A} \subseteq \tau$ , para todo  $\tau \in \mathcal{K}$ , luego  $\mathcal{A} \subseteq \bigcap_{\tau \in \mathcal{K}} \tau = \tau(\mathcal{A})$ . Por ende,  $\tau(\mathcal{A}) \in \mathcal{K}$ . ■

**Definición 1.1.5**

Un **espacio topológico** es una pareja  $(X, \tau)$  en donde  $X$  es un conjunto y  $\tau$  es una topología sobre  $X$ . A los elementos de  $\tau$  los llamaremos los **conjuntos abiertos** del espacio  $(X, \tau)$  a veces también se les nombra como los  **$\tau$ -abiertos de  $X$** .

**Ejemplo 1.1.4**

Ejemplos de espacios topológicos son  $(\mathbb{R}, \tau_D)$ ,  $(\mathbb{R}, \tau_I)$ ,  $(\mathbb{R}, \tau_{cf})$ ,  $(\mathbb{R}, \tau_u)$ , etc... Las diferencias notables son que  $\{1, \sqrt{2}\}$  es abierto en  $(\mathbb{R}, \tau_D)$ , pero no en  $(\mathbb{R}, \tau_u)$ .

Sea  $X$  un conjunto y  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ . Por el corolario anterior, podemos trabajar con la topología  $\tau(\mathcal{A})$ , y tenemos así al espacio topológico  $(X, \tau(\mathcal{A}))$ , el cual en particular tiene como abiertos a los elementos de la familia  $\mathcal{A}$ .

**Definición 1.1.6**

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico.

1. Un subconjunto  $C \subseteq X$  es un **conjunto cerrado** del espacio topológico  $(X, \tau)$  si  $X - C \in \tau$ .

**Ejemplo 1.1.5**

En  $(\mathbb{R}, \tau_u)$  se tiene que  $\mathbb{R}$  y  $\emptyset$  son abiertos y cerrados a la vez, pero el conjunto  $[1, 2[$  no es abierto ni cerrado,  $]1, 2[$  es abierto pero no cerrado y  $[1, 2]$  no es abierto pero sí es cerrado.

**Proposición 1.1.2**

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico.

1. Si  $A_1, \dots, A_n$  son subconjuntos cerrados de  $(X, \tau)$ , entonces su unión  $A_1 \cup \dots \cup A_n$  es un cerrado de  $(X, \tau)$ .
2. Si  $\mathcal{A}$  es una familia arbitraria de conjuntos cerrados en  $(X, \tau)$ , entonces  $\bigcap \mathcal{A}$  es un conjunto cerrado.

**Demostración:**

De (1): Consideremos el complemento de la unión. Se tiene que:

$$X - \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i=1}^n (X - A_i)$$

el cuál es abierto por ser intersección finita de abiertos. Luego  $\bigcap_{i=1}^n A_i$  es cerrado.

De (2): Basta con aplicar leyes de Morgan. ■

**Ejemplo 1.1.6**

Considere  $(\mathbb{R}, \tau_u)$  y, para  $n \in \mathbb{N}$  definimos  $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ , es claro que cada uno de estos conjuntos es abierto. Sea  $B_n = \mathbb{R} - A_n = (-\infty, -\frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{n}, \infty)$ .

Se tiene que:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R} - A_n = \mathbb{R} - \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{R} - \{0\}$$

el cual es abierto. Por tanto, la unión arbitraria de cerrados no es cerrada (en general).

**Definición 1.1.7**

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico y, sean  $x \in X$  y  $V \subseteq X$  tal que  $x \in V$ . Se dice que  $V$  es una **vecindad de  $x$**  si existe  $U \in \tau$  abierto tal que  $x \in U$  y  $U \subseteq V$ .

1. Si  $V$  es una vecindad de  $x$  y  $V \in \tau$ , decimos que  $V$  es una **vecindad abierta de  $x$** .
2. Si  $V$  es una vecindad de  $x$  y  $X - V \in \tau$ , decimos que  $V$  es una **vecindad cerrada de  $x$** .

Al conjunto de todas las vecindades del punto  $x$  lo denotamos por  $\mathcal{V}(x)$ . Tenemos que  $X \in \mathcal{V}(x)$  para todo  $x \in X$ .

**Definición 1.1.8**

Se define el conjunto  $[[1, n]]$  llamado **intervalo natural de 1 a  $n$**  como el conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

**Ejercicio 1.1.2**

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico.

1. Si  $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{V}(x)$  para  $x \in X$ , entonces  $V_1 \cap \dots \cap V_n \in \mathcal{V}(x)$ .
2. Si  $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathcal{V}(x)$  para  $x \in X$ , entonces  $\bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha \in \mathcal{V}(x)$ .

**Solución:**

Probaremos ambos incisos:

De (1): Como  $x \in V_i$  para  $i \in [[1, n]]$ , entonces existen  $U_1, \dots, U_n$  abiertos en  $X$  tales que  $x \in U_i \subseteq V_i$  para todo  $i \in [[1, n]]$ , luego  $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i \subseteq V_1 \cap \dots \cap V_n$  donde el primer conjunto es abierto, luego  $V_1 \cap \dots \cap V_n \in \mathcal{V}(x)$ .

De (2): Es inmediato. □

**Definición 1.1.9**

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico y  $A \subseteq X$ .

1. Sea  $x \in X$ .  $x$  es un **punto de acumulación de  $A$**  si para todo  $U$  abierto que contiene a  $x$  se tiene que  $(U - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$  ( $U$  contiene un punto de  $A$  diferente de  $x$ ). Al conjunto de todos los puntos de acumulación lo llamaremos el **conjunto derivado de  $A$** , y se denota por  $A'$ .
2. Un elemento  $a \in A$  es un **punto interior** de  $A$ , si  $A$  es una vecindad de  $x$  (es decir,  $A \in \mathcal{V}(x)$ ). El **interior de  $A$**  es el conjunto de todos los puntos interiores de  $A$  y se escribe  $\overset{\circ}{A}$ . Es claro que  $\overset{\circ}{A} \subseteq A$ .
3. Sea

$$\mathcal{C} = \{C \subseteq X \mid X - C \in \tau, A \subseteq C\}$$

es claro que  $\mathcal{C}$  es no vacía, pues  $X \in \mathcal{C}$ . La **cerradura de  $A$**  es el conjunto  $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$  y se denota por  $\overline{A}$ . Si  $x \in \overline{A}$ , diremos que  $x$  es un **punto adherente de  $A$** . Es claro que  $A \subseteq \overline{A}$ .

4. La **frontera de  $A$**  es el conjunto  $\overline{A} \cap \overline{X - A}$  y se denota por  $\text{Fr}(A)$ .

**Proposición 1.1.3**

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico,  $x \in X$  y sean  $A, B \subseteq X$ . Entonces:

1.  $\overset{\circ}{A} \subseteq A \subseteq \overline{A}$ .
2.  $\overset{\circ}{A} = \bigcup \{U \in \tau \mid U \subseteq A\} = \bigcup \mathcal{A}$ .
3.  $\overset{\circ}{A} \in \tau$ .
4. Si  $V \in \tau$  tal que  $V \subseteq A$ , entonces  $V \subseteq \overset{\circ}{A}$ .
5.  $A$  es abierto si y sólo si  $\overset{\circ}{A} = A$ .
6.  $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$ .

7.  $\widehat{A \cap B} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$ .
  8.  $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subseteq \widehat{A \cup B}$ .
  9.  $\overline{A}$  es un conjunto cerrado.
  10. Si  $K \subseteq X$  es cerrado de  $(X, \tau)$  y  $A \subseteq K$ , entonces  $\overline{A} \subseteq K$ .
  11.  $A$  es cerrado si y sólo si  $\overline{A} = A$ .
  12.  $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ .
  13.  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ .
  14.  $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ .
  15.  $\emptyset = \mathring{\emptyset} = \overline{\emptyset}$  y  $X = \mathring{X} = \overline{X}$ .
  16. Si  $A \subseteq B$ , entonces  $\mathring{A} \subseteq \mathring{B}$  y  $\overline{A} \subseteq \overline{B}$ .
  17.  $x \in \overline{A}$  si y sólo si para todo abierto  $U \subseteq X$  tal que  $x \in U$  se tiene que  $U \cap A \neq \emptyset$ .
  18.  $x \in \text{Fr}(A)$  si y sólo si para todo abierto  $U$  tal que  $x \in U$  se cumple que  $U \cap A \neq \emptyset$  y  $U \cap (A - X) \neq \emptyset$ .
  19.  $\overline{A} = A \cup A'$ .
  20.  $A$  es un conjunto cerrado si y sólo si  $A' \subseteq A$ .
  21.  $\overline{A} = \mathring{A} \cup \text{Fr}(A)$ .
  22.  $\text{Fr}(A) = \text{Fr}(X - A)$ .
  23.  $\overline{A} - \text{Fr}(A) = \mathring{A}$ .
- 

### **Demostración:**

Se probarán todos los incisos.

De (1): Si  $x \in \mathring{A}$ , entonces  $A \in \mathcal{V}(x)$ , luego  $x \in A$ . Por tanto,  $\mathring{A} \subseteq A$ . Ahora, es claro que  $A \subseteq \overline{A}$ , pues de la definición de cerradura de  $A$ , todos los elementos de la intersección en esta definición contienen a  $A$ , luego  $A$  está contenida en la intersección.

De (2): Veamos que se tienen las dos contenciones:

- $\mathring{A} \subseteq \bigcup \mathcal{A}$ . Sea  $x \in \mathring{A}$ , entonces  $A \in \mathcal{V}(x)$ , por lo cual existe un abierto  $U \in \tau$  tal que  $x \in U \subseteq A$ , luego  $U \in \mathcal{A}$ , es decir que  $x \in \bigcup \mathcal{A}$ .
- $\bigcup \mathcal{A} \subseteq \mathring{A}$ . Sea  $x \in \bigcup \mathcal{A}$ , entonces existe  $U \in \tau$  con  $U \subseteq A$  tal que  $x \in U$ , por lo cual  $A \in \mathcal{V}(x)$ , luego  $x \in \mathring{A}$ .

por los dos incisos anteriores, se sigue que  $\mathring{A} = \bigcup \mathcal{A}$ , es decir que el interior de  $A$  es el conjunto abierto más grande contenido en  $A$ .

De (3): Es inmediato de (2).

De (4): Es inmediato de (2).

De (5): Supongamos que  $A$  es abierto, entonces  $A \in \tau$ . Además,  $A \subseteq A$ , por lo cual de (4) se sigue que  $A \subseteq \mathring{A}$ . Ya se tiene que  $\mathring{A} \subseteq A$ , por tanto  $A = \mathring{A}$ .

La recíproca es inmediata.

De (6): Por (3), se tiene que  $\overset{\circ}{A}$  es abierto, luego por (5) se sigue que  $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$ .

De (7): Probaremos las dos contenciones:

- $\widehat{\overset{\circ}{A \cap B}} \subseteq \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ . Si  $x \in \widehat{\overset{\circ}{A \cap B}} \subseteq A \cap B$ , entonces existe  $U \in \tau$  tal que  $x \in U \subseteq A \cap B$ , en particular  $x \in U \subseteq A$  y  $x \in U \subseteq B$ , luego  $x \in \overset{\circ}{A}$  y  $x \in \overset{\circ}{B} \Rightarrow x \in \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ . Por tanto,  $\widehat{\overset{\circ}{A \cap B}} \subseteq \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ .
- $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subseteq \widehat{\overset{\circ}{A \cap B}}$ . El conjunto  $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \in \tau$  y  $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subseteq A \cap B$ . Por (4), se sigue que  $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subseteq \widehat{\overset{\circ}{A \cap B}}$ .

de los dos incisos anteriores, se sigue que  $\widehat{\overset{\circ}{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ .

De (8): Se tiene que  $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \in \tau$  es tal que  $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subseteq A \cup B$ , luego por (4) se sigue que  $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subseteq \widehat{\overset{\circ}{A \cup B}}$ .

De (9): Es inmediato de la definición de  $\overline{A}$ , pues este conjunto es intersección arbitraria de cerrados.

De (10): Es inmediato de la definición de  $\overline{A}$ . Esto significa que la cerradura de un conjunto es el cerrado más pequeño que contiene a  $A$ .

De (11): Suponga que  $A$  es cerrado, entonces como  $A \subseteq A$ , se tiene por (10) que  $\overline{A} \subseteq A$ . Luego, como  $A \subseteq \overline{A}$  por (1), se sigue que  $A = \overline{A}$ .

La recíproca es inmediata de (9).

De (12): Por (9),  $\overline{A}$  es cerrado, luego por (11) se tiene que  $\overline{A} = \overline{\overline{A}}$ .

De (13): Proaremos las dos contenciones:

- $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ . El conjunto  $\overline{A \cup B}$  es un cerrado que contiene a  $A \cup B$ , por tanto del inciso (10) se tiene que  $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ .
- Como  $A, B \subseteq A \cup B$ , entonces  $A, B \subseteq \overline{A \cup B}$ , luego por (10) se tiene que  $\overline{A}, \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$ . Por tanto,  $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$ .

de los dos incisos anteriores, se sigue que  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ .

De (14): Como  $A \subseteq \overline{A}$  y  $B \subseteq \overline{B}$ , entonces  $A \cap B \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ . Por (10), se sigue que  $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ .

De (15): Se dividirá en dos partes:

- $\emptyset = \overset{\circ}{\emptyset} = \overline{\emptyset}$ . Como  $\emptyset \subseteq \overset{\circ}{\emptyset} \subseteq \emptyset$ , entonces  $\emptyset = \overset{\circ}{\emptyset}$ . Ahora, como  $\emptyset$  es un cerrado que contiene a  $\emptyset$ , se sigue por (10) que  $\overline{\emptyset} \subseteq \emptyset$ . Por ende,  $\overline{\emptyset} = \emptyset$ .
- Para  $X$  el caso es casi análogo a  $\emptyset$  (al final todo esto resulta más en un juego de palabras que en otra cosa).

De (16). Como  $A \subseteq B$ , entonces  $\overset{\circ}{A} \subseteq B$ , y  $A \subseteq \overline{B}$ , por (4) y (10), se debe tener que  $\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}$  y  $\overline{A} \subseteq \overline{B}$ .

De (17): Sea  $x \in X$ :

$\Rightarrow$ ): Suponga que  $x \in \overline{A}$ , entonces para todo  $C \subseteq X$  cerrado tal que  $A \subseteq C$ ,  $x \in C$ . Suponga que existe  $U_0 \in \tau$  abierto tal que  $x \in U_0$  y  $U_0 \cap A = \emptyset$ . Entonces  $A \subseteq X - U_0$  es un cerrado que contiene a  $A$ , luego  $x \in X - U_0$ , es decir  $x \notin U_0 \#_c$ . Por tanto,  $U \cap A \neq \emptyset$  para todo  $U \in \tau$  tal que  $x \in U$ .

$\Leftarrow$ ): Sea  $L \subseteq X$  un cerrado tal que  $A \subseteq L$ . Probaremos que  $x \in L$ , suponiendo la tesis para este  $x \in X$ . Suponga que  $x \notin L$ , entonces  $x \in X - L$  el cual es abierto, por tanto  $(X - L) \cap A \neq \emptyset$ , es decir  $A \not\subseteq L \#_c$ . Por tanto,  $x \in L$ .

De (18): Es inmediato de la definición de  $\text{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{X - A}$  y del inciso (17).

De (19): Se probarán las dos contenciones:

- $\bar{A} \subseteq A \cup A'$ . Sea  $x \in \bar{A}$ . Si  $x \in A$ , se tiene el resultado. Suponga que  $x \notin A$ . Como  $x \in \bar{A}$ , por (17) para todo abierto  $U \subseteq X$  se tiene que  $U \cap A \neq \emptyset$ , pero  $x \notin A$ , por lo cual  $(U - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ . Por tanto,  $x \in A'$ .
- $A \cup A' \subseteq \bar{A}$ . Es inmediata de la definición de  $\bar{A}$  y  $A'$ .

por los dos incisos anteriores se sigue que  $\bar{A} = A \cup A'$ .

De (20): Suponga que  $A$  es cerrado, entonces por (11),  $\bar{A} = A$ , luego por (19) se tiene que  $A \cup A' = \bar{A} = A$ , es decir que  $A' \subseteq A$ .

Si  $A' \subseteq A$ , entonces  $A = A \cup A' = \bar{A}$  por (11), luego  $A = \bar{A}$ , es decir que  $A$  es cerrado.

De (21): Es claro que  $\mathring{A} \cap \text{Fr}(A) \subseteq \bar{A}$ , pues  $\mathring{A}, \text{Fr}(A) \subseteq \bar{A}$ . Ahora, si  $x \in \bar{A}$  sea  $U \subseteq X$  tal que  $x \in U$ . Se tienen dos casos:

- $U \subseteq A$ , en este caso se sigue de la definición que  $x \in \mathring{A}$ .
- $U \not\subseteq A$ , entonces existe  $y \in U$  tal que  $y \notin A$ , es decir que  $U \cap (X - A) \neq \emptyset$ . Como  $x \in \bar{A}$ , entonces  $U \cap A \neq \emptyset$ . Por ser el  $U$  arbitrario, se sigue por (18) que  $x \in \text{Fr}(A)$ .

es decir que  $x \in \mathring{A} \cup \text{Fr}(A)$ . Por tanto,  $\bar{A} \subseteq \mathring{A} \cup \text{Fr}(A)$ . Así,  $\bar{A} = \mathring{A} \cup \text{Fr}(A)$ .

De (22): Veamos que  $A = X - (X - A)$ , por lo cual:

$$\text{Fr}(A) = \bar{A} \cap \overline{X - A} = \overline{X - A} \cap \bar{A} = \overline{X - A} \cap \overline{X - (X - A)} = \text{Fr}(X - A)$$

De (23): Observemos que:  $x \in \bar{A} - \text{Fr}(A)$  si y sólo si se cumple que

- Para todo  $U$  abierto tal que  $x \in U$  se cumple que  $U \cap A \neq \emptyset$ .
- Existe  $U_0$  abierto tal que  $x \in U_0$  y,  $U_0 \cap A = \emptyset$  o  $U_0 \cap (X - A) = \emptyset$ .

Por ambas condiciones, debe suceder que  $U_0 \cap A \neq \emptyset$  y  $U_0 \cap (X - A) = \emptyset$ , es decir que  $U_0 \subseteq A$ , esto es que  $x \in \mathring{A}$ . Por tanto,  $x \in \bar{A} - \text{Fr}(A)$  si y sólo si  $x \in \mathring{A}$ . Luego se tiene la igualdad. ■

### Proposición 1.1.4

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico y  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ .

1.  $\bigcup_{\alpha \in I} \bar{A}_\alpha \subseteq \overline{\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha}$ .
2.  $\overline{\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha} \subseteq \bigcap_{\alpha \in I} \bar{A}_\alpha$ .

### Demostración:

Probemos ambos incisos:

De (1): Si  $x \in \bigcup_{\alpha \in I} \bar{A}_\alpha$ , sea  $U \in \tau$  tal que  $x \in U$ , luego  $\exists \alpha \in I$  tal que  $x \in \bar{A}_\alpha$ , por ende  $U \cap A_\alpha \neq \emptyset$ , por tanto  $U \cap (\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) \neq \emptyset$ . Como el  $U \in \tau$  fue arbitrario, se sigue que  $x \in \overline{\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha}$ .

De (2): Si  $x \in \overline{\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha}$ , entonces para  $U \in \tau$  tal que  $x \in U$  se cumple que  $(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha) \cap U \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in I} (A_\alpha \cap U) \neq \emptyset$ , es decir que  $U \cap A_\alpha \neq \emptyset$ , para todo  $\alpha \in I$ , luego como  $U \in \tau$  fue arbitrario, se sigue que  $x \in \bar{A}_\alpha$  para todo  $\alpha \in I$ . Así  $x \in \bigcap_{\alpha \in I} \bar{A}_\alpha$ . ■

### Ejemplo 1.1.7

Considere al espacio topológico  $(\mathbb{R}, \tau_u)$ . Tomemos

1.  $A = ]0, 1] \cup \{9\}$ . Tenemos que  $\bar{A} = [0, 1] \cup \{9\}$ ,  $A' = [0, 1]$ , por lo cual no podemos relacionar (al menos de forma directa) a  $A$  junto con su  $A'$  (esto es, uno no está contenido dentro del

otro).

2. Sea  $n \in \mathbb{N}$ , defina  $A_n = [\frac{1}{n}, 1]$ . Se tiene que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n} = ]0, 1]$$

y,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = ]0, 1] \Rightarrow \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n} = [0, 1]$$

es decir que  $\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n} \not\subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}$ .

3. Considere  $X = \{a, b\}$ , tomemos al espacio topológico  $(X, \tau = \{X, \emptyset, \{a\}\})$ . Si  $A = \{a\}$  y  $B = \{b\}$ , entonces  $\overset{\circ}{A} = \{a\}$ ,  $\overset{\circ}{B} = \emptyset$ ,  $\overline{A} = X$ ,  $\overline{B} = B$ . Luego  $X = \widehat{\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}} \not\subseteq \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = A$ .

Además  $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \overline{A \cap B} = \emptyset$ . Por ende,  $B = \overline{A} \cap \overline{B} \not\subseteq \overline{A \cap B}$ .

### Definición 1.1.10

Para  $x \in \mathbb{R}$ , se define el **suelo de  $x$**  (denotado por  $\lfloor x \rfloor$ ) como el máximo entero tal que  $\lfloor x \rfloor \leq x$ .

### Ejercicio 1.1.3

Considere  $(\mathbb{R}, \tau_u)$ . Encuentre  $\overset{\circ}{\mathbb{N}}$ ,  $\overline{\mathbb{N}}$ ,  $\mathbb{N}'$ ,  $\text{Fr}(\mathbb{N})$ .

### Solución:

Hagamos cada uno de los incisos:

1.  $\overset{\circ}{\mathbb{N}}$ ) Afirmamos que  $\overset{\circ}{\mathbb{N}} = \emptyset$ . En efecto, si fuese el caso contrario, existiría  $U$  abierto no vacío en  $(\mathbb{R}, \tau_u)$  tal que  $U \subseteq \mathbb{N}$ , luego si  $x \in U \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$  (por ser  $U$  no vacío), entonces existe  $r > 0$  tal que  $]x - r, x + r[ \subseteq U$ .

Sea  $\delta = \min\{1, r\} > 0$ , entonces  $]x - \delta, x + \delta[ \subseteq U$ , pero como  $x \in \mathbb{N}$ , no puede ser que  $x + \frac{1}{2} \in \mathbb{N}$ , lo cual contradice el hecho de que  $U \subseteq \mathbb{N}$ . Por tanto,  $\overset{\circ}{\mathbb{N}} = \emptyset$ .

2.  $\overline{\mathbb{N}}$ ) Probaremos que  $\mathbb{N}$  es cerrado. Si  $x \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$ , entonces existe  $r = \min\{x - \lfloor x \rfloor, 1 - x + \lfloor x \rfloor\} > 0$  (pues  $x \notin \mathbb{N}$ , luego  $\lfloor x \rfloor < x$ ) tal que  $]x - r, x + r[ \subseteq \mathbb{R} - \mathbb{N}$ .

En efecto, supongamos que  $x - \lfloor x \rfloor \leq 1 - x + \lfloor x \rfloor$ , entonces

$$\begin{aligned} ]x - r, x + r[ &\subseteq ]\lfloor x \rfloor, x + 1 - x + \lfloor x \rfloor[ \\ &\subseteq ]\lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1[ \end{aligned}$$

es decir,  $]x - r, x + r[ \subseteq \mathbb{R} - \mathbb{N}$ . Si  $x - \lfloor x \rfloor \geq 1 - x + \lfloor x \rfloor$  el caso es análogo. Por tanto,  $\mathbb{R} - \mathbb{N}$  es abierto, luego  $\mathbb{N}$  es cerrado y, por ende  $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$ .

3.  $\mathbb{N}'$ ) Afirmamos que el conjunto es vacío. Sea  $x \in \mathbb{R}$ . Se tienen dos casos:

- $x \in \mathbb{N}$  En este caso, existe  $r = \frac{1}{2} > 0$  tal que  $(]x - r, x + r[ - \{x\}) \cap \mathbb{N} = \emptyset$ .
- $x \notin \mathbb{N}$  En este caso, existe  $r = \min\{x - \lfloor x \rfloor, 1 - x + \lfloor x \rfloor\} > 0$  tal que (como se vió en (2))  $]x - r, x + r[ \cap \mathbb{N} = \emptyset$ , en particular  $(]x - r, x + r[ - \{x\}) \cap \mathbb{N} = \emptyset$ .

Por ambos incisos, se sigue que  $\mathbb{N}' = \emptyset$ .

4.  $\text{Fr}(\mathbb{N})$ ) Afirmamos que  $\text{Fr}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$ . En efecto, ya se sabe que  $\mathbb{N} = \overline{\mathbb{N}}$ . Probaremos que  $\mathbb{N} \subseteq \overline{\mathbb{R} - \mathbb{N}}$  y con ello se tendría el resultado.

Sea  $x \in \mathbb{N}$ , entonces si  $U$  es un abierto tal que  $x \in U$ , entonces existe  $r > 0$  tal que  $]x-r, x+r[ \subseteq U$ , luego si  $\delta = \min\{1, r\} > 0$ , se tiene que el elemento  $x + \frac{\delta}{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$ , es decir que  $U \cap (\mathbb{R} - \mathbb{N}) \neq \emptyset$ . Por tanto,  $x \in \overline{\mathbb{R} - \mathbb{N}}$ , así  $\mathbb{N} \subseteq \overline{\mathbb{R} - \mathbb{N}}$ .

□

#### Ejercicio 1.1.4

Considere  $(\mathbb{R}, \tau_I)$ ,  $(\mathbb{R}, \tau_D)$  y  $(\mathbb{R}, \tau_{cf})$ . Encuentre en cada uno de los espacios anteriores  $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}$ ,  $\overline{\mathbb{Z}}$ ,  $\mathbb{Z}'$ ,  $\text{Fr}(\mathbb{Z})$ .

#### Solución:

Consideremos cada una de las topologías por separado.

1. En  $(\mathbb{R}, \tau_I)$ :

- $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}$ ) Afirmamos que  $\overset{\circ}{\mathbb{Z}} = \emptyset$ . En efecto, como  $\tau_I = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ , el único abierto contenido en  $\mathbb{Z}$  es  $\emptyset$ , luego  $\overset{\circ}{\mathbb{Z}} = \emptyset$ .
- $\overline{\mathbb{Z}}$ ) Como el único cerrado que contiene a  $\mathbb{Z}$  es  $\mathbb{R}$ , se sigue que  $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{R}$ .
- $\mathbb{Z}'$ ) Sea  $x \in \mathbb{R}$ , si  $U$  es un abierto tal que  $x \in U$ , entonces debe suceder que  $U = \mathbb{R}$ , luego  $(U - \{x\}) \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$ . Por tanto  $x \in \mathbb{Z}'$ . Así,  $\mathbb{R} = \mathbb{Z}'$ .
- $\text{Fr}(\mathbb{Z})$ ) Como  $\overline{\mathbb{R} - \mathbb{Z}} = \mathbb{R}$ , entonces se tiene que  $\text{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{R}$ .

2. En  $(\mathbb{R}, \tau_D)$ :

- $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}$ ) Es claro que  $\overset{\circ}{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$ , pues en la topología discreta todo subconjunto de  $\mathbb{R}$  es abierto.
- $\overline{\mathbb{Z}}$ ) Es claro que  $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$ , pues en la topología discreta todo subconjunto de  $\mathbb{R}$  es cerrado.
- $\mathbb{Z}'$ ) Afirmamos que  $\mathbb{Z}' = \emptyset$ . En efecto, si  $x \in \mathbb{Z}$ , entonces  $\{x\}$  es un abierto en  $\mathbb{R}$  tal que  $x \in \{x\}$ , y se cumple que  $(\{x\} - \{x\}) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$ . Luego  $\mathbb{Z}' = \emptyset$ .
- $\text{Fr}(\mathbb{Z})$ ) Como  $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$  es cerrado, por un inciso anterior se sigue que  $\text{Fr}(\mathbb{Z}) = \emptyset$ .

3. En  $(\mathbb{R}, \tau_{cf})$ :

- $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}$ ) Sea  $U \subseteq \mathbb{Z}$  abierto, es decir que  $\mathbb{R} - U$  es finito o  $U = \emptyset$ . Se tiene entonces que:

$$\mathbb{R} - \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R} - U$$

como  $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$  es infinito, entonces por Cantor-Bernstein debe suceder que  $\mathbb{R} - U$  también sea infinito. Por tanto,  $U = \emptyset$ . Luego entonces  $\overset{\circ}{\mathbb{Z}} = \emptyset$ .

- $\overline{\mathbb{Z}}$ ) Sea  $C \subseteq \mathbb{R}$  un cerrado tal que  $\mathbb{Z} \subseteq C$ . Como en  $\tau_{cf}$  los cerrados son todos los subconjuntos finitos o  $\mathbb{R}$ , entonces al ser  $\mathbb{Z}$  infinito no puede ser que  $C$  sea finito, luego  $C = \mathbb{R}$ . Por ende,  $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{R}$ .
- $\mathbb{Z}'$ ) Sea  $x \in \mathbb{R}$ , afirmamos que  $x \in \mathbb{Z}'$ . En efecto, si  $U \subseteq \mathbb{R}$  es abierto tal que  $x \in U$ , entonces  $\mathbb{R} - U$  es finito, luego como  $\mathbb{Z}$  es infinito, existe  $z \in \mathbb{Z}$  tal que  $z < y$ , para todo  $y \in \mathbb{R} - U$  y  $x < y$ . Es decir que  $y \in (U - \{x\}) \cap \mathbb{Z}$ . Por tanto,  $(U - \{x\}) \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$ , es decir que  $x \in \mathbb{Z}'$ .
- $\text{Fr}(\mathbb{Z})$ ) Computemos  $\overline{\mathbb{R} - \mathbb{Z}}$ . Sea  $C \subseteq \mathbb{R}$  cerrado tal que  $\mathbb{R} - \mathbb{Z} \subseteq C$ , entonces como  $C$  es cerrado,  $C$  es finito o  $C = \mathbb{R}$ , pero  $C$  no puede ser finito ya que  $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$  es infinito, luego  $C = \mathbb{R}$ . Así,  $\overline{\mathbb{R} - \mathbb{Z}} = \mathbb{R}$ . Por tanto,  $\text{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ .

□



**Definición 1.1.11**

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. Se dice que el espacio  $(X, \tau)$  es de **Hausdorff** si para todo  $x_1, x_2 \in X$  distintos existen  $U_1, U_2 \in \tau$  tales que  $x_1 \in U_1$ ,  $x_2 \in U_2$  y  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ .

**Ejemplo 1.1.8**

Considere  $(X, \tau)$  donde  $X = \{1, 2\}$  y  $\tau = \{X, \emptyset, \{1\}\}$ , entonces  $(X, \tau)$  no es de Hausdorff.

**Ejemplo 1.1.9**

$(\mathbb{R}, \tau_I)$  no es de Hausdorff (cuando el espacio tiene más de un elemento esto se sigue cumpliendo).

**Ejemplo 1.1.10**

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y consideremos al espacio topológico  $(X, \tau_d)$ . Este espacio es de Hausdorff.

**Ejemplo 1.1.11**

Sea  $(X, d)$  es espacio métrico tal que la métrica de él está definida como:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq y \\ 1 & \text{si } x = y \end{cases}$$

dado  $p \in X$  considere  $B_d(p, 1) = \{p\}$ . Entonces para todo  $p \in X$ ,  $\{p\} \in \tau_D \Rightarrow \forall A \subseteq X, A \in \tau_d$ , es decir que  $\tau_d = \tau_D$ .

**Definición 1.1.12**

Un espacio topológico  $(X, \tau)$  se dice **metrizable** si existe una métrica  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\tau_d = \tau$ .

**Proposición 1.1.5**

Si  $(X, \tau)$  es un espacio metrizable, entonces  $(X, \tau)$  es un espacio de Hausdorff.

**Demostración:**

Es inmediata de la definición de espacio metrizable y del ejemplo 1.1.10. ■

**Ejemplo 1.1.12**

Considere  $X = \{1, 2\}$ , si tomamos al espacio topológico  $(X, \tau = \{X, \emptyset, \{2\}\})$  obtenemos que este espacio no es metrizable por no ser de Hausdorff.

**Ejemplo 1.1.13**

Considere  $(X, \tau_D)$ . Este espacio es metrizable tomando la métrica discreta.

## 1.2. Bases de una topología

**Definición 1.2.1**

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. Una subcolección  $\mathcal{B}$  de  $\tau$  es una **base para la topología**  $\tau$  si todo  $U \in \tau$  puede escribirse como unión arbitraria de elementos de  $\mathcal{B}$ .

Si  $\mathcal{B}$  es una base para  $\tau$ , a sus elementos los llamaremos **básicos**.

**Observación 1.2.1**

Cualquier topología es una base para sí misma.

Considere al espacio topológico  $(X, \tau)$ . Una base  $\mathcal{B}$  de  $\tau$  cumple que:

1.  $\mathcal{B} \subseteq \tau$ .
2. Si  $U \in \tau$  entonces existe  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathcal{B}$  tal que  $U = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ .

¿Qué pretendemos con esta definición?

Básicamente lo que se pretende es describir a todos los elementos de la topología mediante un conjunto más pequeño de elementos (esto permite que sea más fácil de manejar y que las propiedades deseadas para los elementos de la topología se sigan cumpliendo).

**Ejemplo 1.2.1**

Sea  $X$  un conjunto y sea  $\mathcal{M} = \{\{p\} \mid p \in X\}$ . Esta es una base para  $\tau_D$  definida sobre  $X$ .

**Ejemplo 1.2.2**

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y sea  $\tau_d$  la topología generada por la métrica  $d$ . Entonces, las colecciones:

$$\mathcal{B}_1 = \{B_d(x, r) \mid x \in X, r \in \mathbb{R}^+\}$$

es una base para la topología generada por  $\tau_d$ . Además,

$$\mathcal{B}_2 = \{B_d(x, q) \mid x \in X, q \in \mathbb{Q}^+\}$$

es otra base. Más aún:

$$\mathcal{B}_3 = \left\{ B_d\left(x, \frac{1}{n}\right) \mid x \in X, n \in \mathbb{N} \right\}$$

es otra base.

**Ejemplo 1.2.3**

Sea  $X = \{a, b, c, d\}$  y  $\kappa = \{\{a, b, c\}, \{c, d\}\}$ . Afirmamos que no existe una topología definida sobre  $X$  tal que  $\kappa$  sea base de ella.

En efecto, suponga que  $\tau$  es una topología sobre  $X$  y  $\kappa$  es una base para  $\tau$ , entonces  $\{a, b, c\}$  y  $\{c, d\}$  están en  $\tau$ , luego su intersección  $\{c\} \in \tau$ . Pero,  $\{c\}$  no puede ser escrito como unión de elementos de  $\kappa$ .

**Proposición 1.2.1**

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico y sea  $\mathcal{B} \subseteq \tau$ . Entonces,  $\mathcal{B}$  es una base para la topología  $\tau$  si y sólo si dados  $U \in \tau$  y  $u \in U$  existe  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $u \in B \subseteq U$ .

**Demostración:**

Probaremos la doble implicación.

$\Rightarrow$ ): Suponga que  $\mathcal{B}$  es una base para la topología  $\tau$ . Sea  $U \in \tau$  y  $u \in U$ . Como  $\mathcal{B}$  es una base entonces existe una subcolección  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$  tal que  $U = \bigcup \mathcal{C}$ , luego existe  $C_\alpha \in \mathcal{C}$  tal que  $u \in C_\alpha$ . Por ende  $u \in C_\alpha \subseteq U$ . Tomando  $B = C_\alpha \in \mathcal{B}$  se tiene el resultado.

$\Leftarrow$ ): Suponga que se cumple la tesis. Ya se tiene que  $\mathcal{B} \subseteq \tau$ . Sea entonces  $U \in \tau$ . Para cada  $x \in U$  existe  $B_x \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B_x \subseteq U$ , luego la colección:

$$\{U_x \in \mathcal{B} | x \in U\}$$

es una subcolección de  $\mathcal{B}$  tal que  $\bigcup_{x \in U} U_x = U$ . Por tanto,  $\mathcal{B}$  es una base de  $\tau$ . ■

### Corolario 1.2.1

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico y sea  $\mathcal{B}$  una base de la topología  $\tau$ . Sea  $U \subseteq X$ , entonces  $U$  es abierto en  $\tau$  si y sólo si dados  $x \in U$  existe  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B \subseteq U$ .

### Demostración:

Es inmediato de la proposición anterior. ■

### Corolario 1.2.2

Sea  $X$  un conjunto y sean  $\tau_1, \tau_2$  dos topologías definidas sobre  $X$ . Tomemos  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$  bases para  $\tau_1, \tau_2$ , respectivamente, entonces los siguientes resultados son equivalentes:

1.  $\tau_1 \subseteq \tau_2$ .
2. Dados  $x \in X$  y  $B_1 \in \mathcal{B}_1$  tal que  $x \in B_1$  existe  $B_2 \in \mathcal{B}_2$  tal que  $x \in B_2$  y  $B_2 \subseteq B_1$ .

### Demostración:

Probaremos la doble implicación.

1)  $\Rightarrow$  2): Sean  $x \in X$  y  $B_1 \in \mathcal{B}_1$  tal que  $x \in B_1$ . Como  $\tau_1 \subseteq \tau_2$ , entonces en particular  $B_1$  es abierto de  $\tau_2$ , luego existe  $B_2 \in \mathcal{B}_2$  tal que  $x \in B_2 \subseteq B_1$ .

2)  $\Rightarrow$  1): Sea  $U \in \tau_1$ , como  $\mathcal{B}_1$  es base de  $\tau_1$  entonces existe  $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$  subcolección de  $\mathcal{B}_1$  tal que:

$$\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = U$$

Sea  $u \in U$ , entonces existe  $\beta \in I$  tal que  $u \in B_\beta$ . Por (2) existe  $C_\beta$  tal que  $u \in C_\beta \subseteq B_\beta$ . Formamos la subcolección  $\{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$ , por lo anterior se sigue que:

$$\begin{aligned} U &= \bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha \\ &\subseteq \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \\ &= U \\ \Rightarrow U &= \bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha \end{aligned}$$

donde  $\bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha \in \tau_2$  por ser  $\mathcal{B}_2$  una base de  $\tau_2$ . Por tanto,  $U \in \tau_2$ . Finalmente, se sigue que  $\tau_1 \subseteq \tau_2$ . ■

### Corolario 1.2.3

Sean  $d_1$  y  $d_2$  métricas definidas sobre el conjunto  $X$ . Consideremos  $\tau_{d_1}$  y  $\tau_{d_2}$ . Entonces  $\tau_{d_1} \subseteq \tau_{d_2}$  si y sólo si dado  $x \in X$  y  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  existe  $\delta \in \mathbb{R}^+$  tal que  $B_{d_2}(x, \varepsilon) \subseteq B_{d_1}(x, \delta)$

### Demostración:

Es inmediato del corolario anterior. ■

---

**Corolario 1.2.4**

Sea  $X$  un conjunto y sea  $\mathcal{B}$  una colección de subconjuntos de  $X$  tal que  $\mathcal{B}$  es base para dos topologías  $\tau_1$  y  $\tau_2$  definidas sobre  $X$ . Entonces,  $\tau_1 = \tau_2$ .

---

**Demostración:**

Es inmediato del corolario 1.2.2. ■

---

**Corolario 1.2.5**

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico y sea  $\mathcal{B}$  una base para  $\tau$ . Entonces, se cumple lo siguiente:

1. La intersección de dos elementos de  $\mathcal{B}$  se puede escribir como una unión de elementos de  $\mathcal{B}$ .
2. Existe  $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathcal{B}$  tal que

$$\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = X$$

---

**Demostración:**

Es inmediato de la definición de base. ■

¿Es posible prescindir de un espacio topológico para definir lo que es una base?

**Definición 1.2.2**

Sea  $X$  un conjunto arbitrario y sea  $\mathcal{A}$  una familia de subconjuntos de  $X$ ,  $\mathcal{A}$  se dice que es **una base para una topología sobre  $X$**  si cumple lo siguiente:

1. La intersección de dos elementos de  $\mathcal{A}$  se puede escribir como una unión de elementos de  $\mathcal{A}$ .
2.  $X$  se puede escribir como una unión de elementos de  $\mathcal{A}$ .

---

**Proposición 1.2.2**

Sea  $\mathcal{A}$  una base para una topología sobre el conjunto  $X$ . Entonces, la colección  $\tau_{\mathcal{A}}$  dada por:

$$\tau_{\mathcal{A}} = \{U \subseteq X \mid U \text{ se puede escribir como una unión de elementos de } \mathcal{A}\}$$

es una topología sobre  $X$  y  $\mathcal{A}$  es una base para ella. La topología  $\tau_{\mathcal{A}}$  es llamada **topología generada por  $\mathcal{A}$** .

---

**Demostración:**

Veamos que  $\tau_{\mathcal{A}}$  es una topología sobre  $X$ .

1. Es claro que  $X \in \tau_{\mathcal{A}}$  y además  $\emptyset \in \tau_{\mathcal{A}}$  ya que se puede ver como la unión de los elementos de la familia vacía.
2. Sea  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \tau_{\mathcal{A}}$ , entonces dado  $\alpha \in I$  existe  $\{A_\beta^\alpha\}_{\beta \in J_\alpha} \subseteq \mathcal{A}$  tal que

$$U_\alpha = \bigcup_{\beta \in J_\alpha} A_\beta^\alpha$$

luego

$$\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} \left( \bigcup_{\beta \in J_\alpha} A_\beta^\alpha \right) \in \tau_{\mathcal{A}}$$

donde la unión está en  $\tau_{\mathcal{A}}$  por definición de la misma.

3. Sean  $U, V \in \tau_{\mathcal{A}}$ , entonces existen  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$  y  $\{B_\beta\}_{\beta \in J}$  subcolecciones de  $\mathcal{A}$  tales que:

$$U = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \quad \text{y} \quad V = \bigcup_{\beta \in J} B_\beta$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} U \cap V &= \left( \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) \cap \left( \bigcup_{\beta \in J} B_\beta \right) \\ &= \left( \bigcup_{\alpha \in I \text{ y } \beta \in J} A_\alpha \cap B_\beta \right) \\ &= \left( \bigcup_{(\alpha, \beta) \in I \times J} A_\alpha \cap B_\beta \right) \end{aligned}$$

sabemos que para  $\alpha \in I$  y  $\beta \in J$ , el conjunto  $A_\alpha \cap B_\beta$  se puede escribir como una unión de elementos de  $\mathcal{A}$ , por tanto  $U \cap V$  es una unión de elementos de  $\mathcal{A}$ .

por los tres incisos anteriores, se sigue que  $\tau_{\mathcal{A}}$  es una topología sobre  $X$ . El hecho de que  $\mathcal{A}$  sea una base para esta topología es inmediato de la definición de  $\tau_{\mathcal{A}}$ . ■

## 1.3. Sub-bases

### Definición 1.3.1

Sea  $X$  un conjunto y  $\mathcal{S}$  una colección no vacía de subconjuntos de  $X$ . Entonces, se dice que  $\mathcal{S}$  es una **sub-base para**  $\tau(\mathcal{S})$ .

### Ejemplo 1.3.1

Sea  $X = \{a, e, i, o, u\}$ ,  $\mathcal{S} = \{\{a, e\}, \{e, i\}\}$ .  $\mathcal{S}$  es una sub-base para  $\tau(\mathcal{S})$  pero no es una base para  $\tau(\mathcal{S})$ .

Sea  $\mathcal{S}' = \{\{a, e\}, \{e, i\}, \{e\}\}$ . Entonces  $\tau(\mathcal{S}) = \tau(\mathcal{S}')$ , pues

1.  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$  implica que  $\tau(\mathcal{S}) \subseteq \tau(\mathcal{S}')$ .
2. Como  $\{a, e\}, \{e, i\} \in \tau(\mathcal{S})$  entonces  $\mathcal{S}' \subseteq \tau(\mathcal{S})$  lo cual implica que  $\tau(\mathcal{S}') \subseteq \tau(\mathcal{S})$ .

### Proposición 1.3.1

Sea  $X$  un conjunto arbitrario y sea  $\mathcal{S}$  una colección no vacía de subconjuntos de  $X$ . Sea

$$\mathcal{B} = \{B \subseteq X \mid B \text{ se puede escribir como una intersección finita de elementos de } \mathcal{S}\} \cup \{X\}$$

Entonces,

1.  $\mathcal{B}$  es una base para una topología sobre  $X$ .

2.  $\tau_{\mathcal{B}}$  es la topología más gruesa definida sobre  $X$  para la cual  $\mathcal{S}$  es una colección de conjuntos abiertos, es decir que  $\tau_{\mathcal{B}} = \tau(\mathcal{S})$ .

**Demostración:**

Notemos antes que  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$ .

De (1): Sean  $M, N \in \mathcal{B}$ , entonces existen  $S_{M,1}, \dots, S_{M,k}, S_{N,1}, \dots, S_{N,l} \in \mathcal{S}$  tales que:

$$M = \bigcap_{i=1}^k S_{M,i} \quad y \quad N = \bigcap_{j=1}^n S_{N,j}$$

por tanto:

$$\begin{aligned} M \cap N &= \left( \bigcap_{i=1}^k S_{M,i} \right) \cap \left( \bigcap_{j=1}^n S_{N,j} \right) \\ &= \left( \bigcap_{i=1, j=1}^{k,n} S_{M,i} \cap S_{N,j} \right) \end{aligned}$$

luego, por definición de  $\mathcal{B}$  se sigue que  $M \cap N \in \mathcal{B}$ .

Además, de la definición es claro que  $X \in \mathcal{B}$ . Por tanto,  $\mathcal{B}$  es una base de una topología sobre  $X$ .

De (2): De la observación que se hizo al inicio, se tiene que  $\mathcal{S} \subseteq \tau_{\mathcal{B}}$ , es decir que  $\tau_{\mathcal{B}}$  es una topología que contiene a  $\mathcal{S}$ , luego  $\tau(\mathcal{S}) \subseteq \tau_{\mathcal{B}}$ .

Suponga que  $\tau$  es una topología sobre  $X$  tal que  $\mathcal{S} \subseteq \tau$ . Es claro que  $\mathcal{B} \subseteq \tau$  ya que  $\tau$  es cerrado bajo intersecciones finitas. Por tanto,  $\tau_{\mathcal{B}} \subseteq \tau$ . Luego:

$$\tau_{\mathcal{B}} \subseteq \tau(\mathcal{S})$$

Por ambas contenciones se sigue la igualdad. ■

**Observación 1.3.1**

Sea  $X$  un conjunto y  $\mathcal{S}$  una colección no vacía de subconjuntos de  $X$ . Sea  $M \in \tau(\mathcal{S})$ , es decir que existe  $\{A_{\alpha}\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathcal{P}(X)$  tal que:

$$M = \bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha}$$

y además, dado  $\beta \in I$  existen  $S_{\beta,1}, \dots, S_{\beta,n_{\beta}} \in \mathcal{S}$  tales que:

$$A_{\beta} = \bigcap_{i=1}^{n_{\beta}} S_{\beta,i}$$

por tanto,

$$M = \bigcup_{\alpha \in I} \left( \bigcap_{i=1}^{n_{\alpha}} S_{\alpha,i} \right)$$

lo cual caracteriza a los elementos de  $\tau(\mathcal{S})$ .

**Ejercicio 1.3.1**

Demuestre que las siguientes colecciones de subconjuntos de  $\mathbb{R}$  son base para una topología sobre  $\mathbb{R}$ :

1.  $\mathcal{B}_1 = \left\{ ]a, b[ \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b \right\}$ .

2.  $\mathcal{B}_2 = \left\{ [a, b[ \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b \right\}.$
3.  $\mathcal{B}_3 = \left\{ ]a, b[ \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b \right\}.$
4.  $\mathcal{B}_4 = \left\{ B - K \mid B \in \mathcal{B}_1 \right\} \cup \mathcal{B}_1$ , con  $K = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$
5.  $\mathcal{B}_5 = \left\{ ]a, \infty[ \mid a \in \mathbb{R} \right\}.$
6.  $\mathcal{B}_6 = \left\{ ]-\infty, b[ \mid b \in \mathbb{R} \right\}.$
7.  $\mathcal{B}_7 = \left\{ A \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} - A \text{ es finito} \right\}.$

### Solución:

La demostración de (1)-(3) es muy similar, por lo que solo se probará para (3).

De (3): Tenemos que verificar que la intersección de dos elementos de  $\mathcal{B}_3$  se puede escribir como unión de elementos de  $\mathcal{B}_3$  y que  $\mathbb{R}$  puede ser escrito como unión de elementos de esta colección. En efecto:

1. Sean  $]a_1, b_1[, ]a_2, b_2[ \in \mathcal{B}_3$ . Se tienen dos casos:

- $]a_1, b_1[ \cap ]a_2, b_2[ = \emptyset$ . En este caso la intersección se escribe como la unión de los elementos de la familia vacía.
- $]a_1, b_1[ \cap ]a_2, b_2[ \neq \emptyset$ . Analicemos este caso.

2. Notemos que:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} ]m, m+1]$$

donde  $]m, m+1] \in \mathcal{B}_3$  para todo  $m \in \mathbb{Z}$ .

por 1) y 2) se sigue que  $\mathcal{B}_3$  es una base para una topología sobre  $\mathbb{R}$ .

De (4):

La prueba de (5) y (6) es muy similar, por lo cual solo se hará la de (5).

De (5): Se tienen que verificar dos condiciones:

1. Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ . Sea  $c = \max\{a, b\} \in \mathbb{R}$ , tenemos que:

$$]a, \infty[ \cap ]b, \infty[ = ]c, \infty[$$

en efecto, si  $x \in ]a, \infty[ \cap ]b, \infty[$ , entonces  $x > a$  y  $x > b$ , luego  $x > \max\{a, b\} = c$ , así pues  $x \in ]c, \infty[$ . Si  $x \in ]c, \infty[$  es claro que  $x \in ]a, \infty[ \cap ]b, \infty[$ . Luego la intersección de estos dos elementos de  $\mathcal{B}_5$  se escribe como unión de elementos de  $\mathcal{B}_5$ , pues  $]c, \infty[ \in \mathcal{B}_5$ .

2. Notemos que:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} ]-m, \infty[ \tag{1.1}$$

donde  $]-m, \infty[ \in \mathcal{B}_5$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ .

Por los dos incisos anteriores, se sigue que  $\mathcal{B}_5$  es una base para una topología sobre  $\mathbb{R}$ .

De (7):

□

**Observación 1.3.2**

Usamos la notación:

$$\mathcal{B}_l = \left\{ [a, b[ \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b \right\}$$

a la topología  $\tau_{\mathcal{B}_l}$  la llamaremos la **topología del límite inferior**, y se denota por  $\tau_l$ .

## 1.4. Subespacios topológicos

**Ejercicio 1.4.1**

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico y  $Y \subseteq X$ . Demostrar que

$$\tau_Y = \left\{ Y \cap U \mid U \in \tau \right\}$$

es una topología sobre  $Y$ .

**Demostración:**

Verifiquemos que se cumplen las tres condiciones:

1. Es claro que  $\emptyset \in \tau_Y$ , pues  $\emptyset = Y \cap \emptyset$  donde  $\emptyset \in \tau$ . Además,  $Y \in \tau_Y$  pues  $Y = Y \cap X$  con  $X \in \tau$ .
2. Sea  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \tau_Y$  una colección no vacía. Entonces, para cada  $\alpha \in I$  existe  $U_\alpha \in \tau$  tal que

$$A_\alpha = Y \cap U_\alpha$$

Por lo cual:

$$\begin{aligned} \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha &= \bigcup_{\alpha \in I} (Y \cap U_\alpha) \\ &= Y \cap \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \end{aligned}$$

donde  $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau$ . Por tanto,  $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \tau_Y$ .

3. Sean  $A, B \in \tau_Y$ , entonces existen  $U, V \in \tau$  tales que:

$$A = Y \cap U \quad \text{y} \quad B = Y \cap V$$

por tanto:

$$\begin{aligned} A \cap B &= (Y \cap U) \cap (Y \cap V) \\ &= Y \cap (U \cap (Y \cap V)) \\ &= Y \cap (Y \cap (U \cap V)) \\ &= Y \cap (U \cap V) \end{aligned}$$

donde  $U \cap V \in \tau$ . Por tanto,  $A \cap B \in \tau_Y$ .

■

**Definición 1.4.1**

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico y sea  $Y \subseteq X$ . A la topología sobre  $Y$ ,

$$\tau_Y = \left\{ Y \cap U \mid U \in \tau \right\}$$

la llamaremos la **topología inducida por  $\tau$  en  $Y$** . A la pareja  $(Y, \tau_Y)$  la llamaremos un **subespacio topológico de  $(X, \tau)$** .



Si  $A \in \tau_Y$ , se dice que  $A$  es un **abierto en  $Y$** . Si  $A \subseteq Y$  y cumple que  $Y - A \in \tau_Y$ , se dice que  $A$  es un **cerrado en  $Y$** .

#### Ejemplo 1.4.1

Considere  $(\mathbb{R}, \tau_u)$ ,  $Y = [0, 1[$ ,  $A = [0, \frac{1}{2}[$ . Podemos escribir:

$$A = ] - 1, \frac{1}{2}[ \cap Y$$

donde  $] - 1, \frac{1}{2}[ \in \tau_u$ , por ende  $A \in \tau_Y$ , pero  $A$  no es abierto en  $(\mathbb{R}, \tau_u)$ .

Se tiene además que  $\mathring{A} = ]0, \frac{1}{2}[$  y, como  $A \in \tau_Y$ , entonces  $\mathring{A}^Y = [0, \frac{1}{2}[$ .

#### Ejemplo 1.4.2

Considere  $(\mathbb{R}, \tau_u)$ . Tomemos al subconjunto  $\mathbb{N}$ . Como:

$$\{m\} = \mathbb{N} \cap ]m - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}[ \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

así,  $\{m\} \in \tau_{u_{\mathbb{N}}}$ , es decir que coincide con la topología discreta de  $\mathbb{N}$ , pero  $\{m\} \notin \tau_u$ .

#### Ejemplo 1.4.3

Considere  $(\mathbb{R}, \tau_u)$ ,  $Y = [0, 1[$ ,  $A = [0, \frac{1}{2}[ \in \tau_{u_Y}$ . Sea  $B = [\frac{1}{2}, 1[ \subseteq Y$ . Se tiene que  $B = Y - A$ , es decir que  $B$  es un cerrado de  $(Y, \tau_{u_Y})$ , pero no es cerrado en  $(\mathbb{R}, \tau_u)$ .

Además,  $\overline{B} = [\frac{1}{2}, 1]$ , y  $\overline{B}^Y = B = [\frac{1}{2}, 1[$  (por ser cerrado en la topología del subespacio).

Sea  $M \subseteq Y$ , denotamos por  $\text{Fr}(M)_Y$  a la frontera de  $M$  en  $(Y, \tau_{u_Y})$ .

---

#### Proposición 1.4.1

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico y sea  $Y \subseteq X$ .

1. Si  $Y$  es abierto (respectivamente, cerrado) en  $(X, \tau)$  y  $U \subseteq Y$  es un conjunto abierto (respectivamente, cerrado) en  $(Y, \tau_Y)$ , entonces  $U$  es abierto (respectivamente, cerrado) en  $(X, \tau)$ .
2. Si  $\mathcal{B}$  es una base para  $\tau$ , entonces la colección:

$$\mathcal{B}_Y = \left\{ Y \cap B \mid B \in \mathcal{B} \right\}$$

es una base para la topología  $\tau_Y$ .

3. Sea  $A \subseteq Y$ . Entonces  $A$  es cerrado en  $Y$  si y sólo si existe  $C \subseteq X$  cerrado en  $X$  tal que  $A = Y \cap C$ .
  4. Sea  $B \subseteq Y$ . Si  $\overline{B}$  es la cerradura de  $B$  en  $X$ , entonces la cerradura de  $B$  en  $Y$ , denotada por  $\overline{B}^Y$ , es  $Y \cap \overline{B}$ .
  5. Sea  $A \subseteq Y$ , si  $\mathring{A}^Y$  denota al interior de  $A$  en  $Y$ , entonces  $Y \cap \mathring{A} \subseteq \mathring{A}^Y$ .
  6. Sea  $A \subseteq Y$ , si  $\text{Fr}(A)_Y$  es la frontera de  $A$  en  $Y$ , entonces  $\text{Fr}(A)_Y \subseteq Y \cap \text{Fr}(A)$ .
-

**Demostración:**

De (1): En ambos casos la prueba es inmediata de la definición de subespacio de un espacio topológico.

De (2): Se deben verificar dos condiciones:

1.  $\mathcal{B}_Y \subseteq \tau_Y$ , esto es inmediato pues si  $Y \cap B \in \mathcal{B}_Y$ , entonces  $B \in \mathcal{B}$ , luego  $B \in \tau$  y, por ende  $Y \cap B \in \tau_Y$ .
2. Sea  $U \in \tau_Y$  abierto no vacío. Entonces existe  $V \in \tau$  tal que  $U = Y \cap V$ . Sea  $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathcal{B}$  tal que  $V = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$ , entonces:

$$\begin{aligned} U &= Y \cap V \\ &= Y \cap \left( \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \right) \\ &= \left( \bigcup_{\alpha \in I} Y \cap B_\alpha \right) \end{aligned}$$

por tanto,  $U$  es unión de elementos de  $\mathcal{B}_Y$ .

por los dos incisos anteriores se sigue que  $\mathcal{B}_Y$  es base de  $\tau_Y$ .

De (3): Probaremos la doble implicación:

$\Rightarrow$ ): Suponga que  $A$  es cerrado en  $Y$ , entonces  $Y - A \in \tau_Y$ , luego existe  $U \in \tau$  tal que  $Y - A = Y \cap U$ . Tomemos  $C = X - U$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} Y \cap C &= (X - U) \cap Y \\ &= (X \cap Y) - (U \cap Y) \\ &= Y - (U \cap Y) \\ &= Y - (Y \cap U) \\ &= Y - (Y - A) \\ &= A \\ \Rightarrow A &= Y \cap C \end{aligned}$$

Prueba alternativa de la igualdad de conjuntos. Sea  $a \in A$ , en particular  $a \in Y$ . Si  $a \in U$ , entonces  $a \notin A$ , luego esto contradice el hecho de que  $Y - A = Y \cap U$ , por tanto  $a \in C$ . Así,  $a \in C \cap Y$ .

Si  $p \in Y \cap C$ , entonces  $p \in Y$  y  $p \notin U$ , luego  $p \notin Y - A$ , es decir  $p \in A$ .

Por lo anterior se sigue que  $A = Y \cap C$ .

$\Leftarrow$ ): Suponga que existe  $C \subseteq X$  cerrado en  $X$  tal que  $A = Y \cap C$ . Hay que ver que  $A$  es cerrado en  $Y$ , para ello, notemos que:

$$\begin{aligned} Y - A &= Y - (Y \cap C) \\ &= Y - (Y - Y \cap U) \\ &= Y \cap U \end{aligned}$$

donde  $U = X - C$  es abierto en  $X$  y, por ende  $Y \cap U$  es abierto en  $Y$ , luego  $Y - A$  es abierto en  $Y$  lo que implica que  $A$  es cerrado.

De (4): Se probarán las dos contenciones:

- $Y \cap \overline{B} \subseteq \overline{B}^Y$ ) Por el inciso anterior,  $Y \cap \overline{B}$  es un cerrado en  $Y$  el cual contiene a  $B$  (pues  $B \subseteq \overline{B}, Y$ ), luego  $\overline{B}^Y \subseteq Y \cap \overline{B}$ .

- $\overline{B}^Y \subseteq Y \cap \overline{B}$ ) Sea  $M \subseteq Y$  cerrado en  $Y$  tal que  $B \subseteq M$ , luego por (3) existe  $K \subseteq X$  cerrado tal que  $M = Y \cap K$ , siendo  $K$  un cerrado que contiene a  $B$ , luego  $\overline{B} \subseteq K$ . Por tanto,  $Y \cap \overline{B} \subseteq M$ . Por ende, al ser  $M$  un cerrado en  $Y$  arbitrario que contiene a  $B$  se sigue que  $Y \cap \overline{M} \subseteq \overline{B}^Y$ .

Por las dos contenciones se sigue que  $\overline{B}^Y = Y \cap \overline{B}$ .

De (5): Es inmediato.

De (6): Observemos que:

$$\begin{aligned}
 \text{Fr}(A)_Y &= \overline{A}^Y \cap \overline{Y - A}^Y \\
 &= (Y \cap \overline{A}) \cap (Y \cap \overline{Y - A}) \\
 &= Y \cap (\overline{A} \cap \overline{Y - A}) \\
 &\subseteq Y \cap (\overline{A} \cap \overline{X - A}) \\
 &= Y \cap \text{Fr}(A) \\
 \Rightarrow \text{Fr}(A)_Y &\subseteq Y \cap \text{Fr}(A)
 \end{aligned}$$

pues,  $Y - A \subseteq X - A$ .

■

#### Observación 1.4.1

En el inciso (3) de la demostración anterior, notemos que:

$$(Y \cap U) \cup (Y \cap C) = Y$$

pues,  $U \cap C = X$  donde  $U$  y  $C$  son disjuntos, luego  $Y \cap U$  y  $Y \cap C$  lo son, así  $Y - Y \cap U = Y \cap C$ . Esto justifica un paso en la demostración de la vuelta de (3).

#### Ejemplo 1.4.4

Considere  $(\mathbb{R}, \tau_u)$  y, considere el subespacio  $(\mathbb{Z}, \tau_{u\mathbb{Z}})$ . Entonces,  $\overset{\circ}{\mathbb{N}} = \emptyset$  y,  $\overset{\circ}{\mathbb{N}}^Y = \mathbb{N}$ . Por ende,  $\overset{\circ}{\mathbb{N}}^Y \not\subseteq \overset{\circ}{\mathbb{N}}$ .

#### Ejemplo 1.4.5

Considere  $(\mathbb{R}^2, \tau_u)$  y el subespacio  $(Y, \tau_{uY})$  con:

$$Y = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \right\}$$

entonces,  $\text{Fr}(Y) = Y$  y  $\text{Fr}(Y)_Y = \emptyset$ .

#### Observación 1.4.2

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico y sean  $Y, Z \subseteq X$  tales que  $Z \subseteq Y$ . Tenemos que podemos considerar a  $(Z, \tau_Z)$  como subespacio de  $X$ .

También, podemos considerar a  $(Z, \tau_{YZ})$  como subespacio de  $(Y, \tau_Y)$ .

¿Es cierto que  $\tau_{YZ} = \tau_Y$ ? La respuesta es que sí:

- Sea  $M \in \tau_Z$ , entonces,  $M = Z \cap U$  donde  $U \in \tau$ , luego como  $M \subseteq Y$  se sigue que:  $M = Z \cap (Y \cap U)$  siendo  $Y \cap U \in \tau_Y$ , así  $M \in \tau_{YZ}$ .
- Sea  $K \in \tau_{YZ}$ , entonces existe  $L \in \tau_Y$  tal que  $K = Z \cap L$ , pero como  $L \in \tau_Y$  entonces existe  $U \in \tau$  tal que  $L = Y \cap U$ , por tanto:  $K = Z \cap (Y \cap U) = Z \cap U$  pues  $Z \subseteq Y$ , luego  $K \in \tau_Z$ .

por ambos incisos, se sigue la igualdad.

#### Definición 1.4.2

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. Una propiedad  $P$  que se cumple para  $(X, \tau)$  se dice que es una **propiedad que se hereda**, si se verifica en cualquier subespacio topológico de  $(X, \tau)$ . A veces simplemente se dice que  $P$  es una **propiedad hereditaria**.

#### Ejemplo 1.4.6

La propiedad de ser un espacio de Hausdorff es hereditaria.

#### Demostración:

Sea  $(X, \tau)$  un espacio de Hausdorff y sea  $Y \subseteq X$  arbitrario. Sean  $p, q \in Y$  con  $p \neq q$ , en particular como  $X$  es de Hausdorff, existen  $M, N \in \tau$  tales que  $p \in M$ ,  $q \in N$  y  $M \cap N = \emptyset$ .

En particular,  $p \in Y \cap M$  y  $q \in Y \cap N$ , donde ambos conjuntos son abiertos en  $Y$  y, además  $(Y \cap M) \cap (Y \cap N) = \emptyset$ . Por tanto,  $(Y, \tau_Y)$  es de Hausdorff. ■

#### Ejemplo 1.4.7

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico tal que  $\tau$  tiene una base numerable, sea  $\mathcal{B}$  tal base. Si  $Y \subseteq X$  es arbitrario, sabemos que

$$\mathcal{B}_Y = \{Y \cap B \mid B \in \mathcal{B}\}$$

es una base para  $\tau_Y$ , la cual es numerable por ser  $\mathcal{B}$  numerable. Luego esta propiedad es hereditaria.

#### Ejercicio 1.4.2

La propiedad de ser metrizable se hereda.

#### Demostración:

■

## 1.5. Relaciones de orden y la topología del orden

#### Definición 1.5.1

Una relación  $\mathcal{R}$  definida sobre un conjunto  $A$  es una **relación de orden lineal** si se cumple lo siguiente:

1. Dados  $a, b \in A$  distintos se tiene que  $a\mathcal{R}b$  ó  $b\mathcal{R}a$ .
2. Para todo elemento de  $a \in A$ ,  $a\not\mathcal{R}a$ .
3. Si  $a, b, c \in A$  son tales que  $a\mathcal{R}b$  y  $b\mathcal{R}c$ , entonces  $a\mathcal{R}c$ .

#### Definición 1.5.2

Si  $\mathcal{R}$  es una relación de orden lineal definida sobre el conjunto  $A$ , diremos que  $(A, \mathcal{R})$  es un **conjunto ordenado**.

---

**Proposición 1.5.1**

Sea  $(X, \mathcal{R})$  un conjunto ordenado y sea  $B \subseteq X$ .

1. Si existe  $b \in B$  tal que  $\forall x \in B - \{b\}, b\mathcal{R}x$ , entonces  $b$  es único y se dice el **elemento mínimo** (a veces también llamado **primer elemento**) de  $B$ .
  2. Si existe  $b \in B$  tal que  $\forall x \in B - \{b\}, x\mathcal{R}b$ , entonces  $b$  es único y se dice el **elemento máximo** (a veces también llamado **último elemento**) de  $B$ .
- 

**Demostración:**

■

**Observación 1.5.1**

Si  $(X, \prec)$  es un conjunto ordenado y  $a, b \in X$ , escribimos  $a \preceq b$  si  $a \prec b$  o  $a = b$ .

**Definición 1.5.3**

Sea  $(A, \prec)$  un conjunto ordenado y  $B \subseteq A$ .

1. Si existe  $a \in A$  tal que para todo  $x \in B$  se cumple que  $a \preceq x$ , diremos que  $B$  está **acotado inferiormente por**  $A$ . En este caso,  $a$  se dice una **cota inferior de**  $B$ .
2. Si existe  $a' \in A$  tal que para todo  $x \in B$  se cumple que  $x \preceq a'$ , diremos que  $B$  está **acotado superiormente por**  $A$ . En este caso,  $a'$  se dice una **cota superior de**  $B$ .
3. Si  $B$  está acotado inferiormente y el conjunto de cotas inferiores de  $B$  tiene elemento máximo, diremos que tal elemento es la **máxima cota inferior de**  $B$  (abreviado **máx. c.i.**).
4. Si  $B$  está acotado superiormente y el conjunto de cotas superiores de  $B$  tiene elemento mínimo, diremos que tal elemento es la **mínima cota superior de**  $B$  (abreviado **mín. c.s.**).
5. Si cada subconjunto no vacío acotado superiormente (resp. inferiormente) del conjunto ordenado  $(A, \prec)$  tiene mínima cota superior (resp. máxima cota inferior), se dice que  $(A, \prec)$  tiene la propiedad de la **mínima cota superior** (resp. **máxima cota inferior**).

**Definición 1.5.4**

Un conjunto ordenado  $(A, \prec)$  es un **continuum lineal** si cumple:

1.  $(A, \prec)$  tiene la propiedad de la mínima cota superior.
2. Si  $a, b \in A$  tales que  $a \prec b$ , entonces existe  $c \in A$  tal que  $a \prec c$  y  $c \prec b$  (a veces escrito como  $a \prec c \prec b$ ).

**Definición 1.5.5**

Sea  $(A, \prec)$  un conjunto ordenado y sean  $a, b \in A$  tales que  $a \prec b$ . Definimos los siguientes conjuntos:

1.  $(a, b) = \{x \in A \mid a \prec x \prec b\}$ , llamado el **intervalo abierto con extremos**  $a$  y  $b$ .
2. Si  $(a, b) = \emptyset$ ,  $a$  se dice el **predecesor inmediato de**  $b$ , y  $b$  el **sucedor inmediato de**  $a$ .

3.  $[a, b] = \{x \in A \mid a \preceq x \preceq b\}$ , llamado el **intervalo cerrado con extremos  $a$  y  $b$** .
4.  $(a, b] = \{x \in A \mid a \prec x \preceq b\}$ , llamado el **intervalo abierto por la izquierda y cerrado por la derecha con extremos  $a$  y  $b$** .
5.  $[a, b) = \{x \in A \mid a \preceq x \prec b\}$ , llamado el **intervalo abierto por la derecha y cerrado por la izquierda con extremos  $a$  y  $b$** .
6. Los siguientes cuatro conjuntos se llaman **rayos determinados por el elemento  $a$** :
  - I)  $(a, +\infty) = \{x \in A \mid a \prec x\}$ .
  - II)  $[a, +\infty) = \{x \in A \mid a \preceq x\}$ .
  - III)  $(-\infty, a) = \{x \in A \mid x \prec a\}$ .
  - IV)  $(-\infty, a] = \{x \in A \mid x \preceq a\}$ .
7. Al rayo  $(-\infty, a)$  también se le conoce como la **sección definida por el elemento  $a$** , y se escribe  $\mathcal{S}_a$ , es decir:

$$\mathcal{S}_a = \{x \in A \mid x \prec a\}$$

### Proposición 1.5.2

Sea  $(X, \prec)$  un conjunto ordenado y sea  $\mathcal{B}$  la colección de todos los subconjuntos de  $X$  de los siguientes tipos:

1. Todos los intervalos abiertos de  $X$ .
2. Todos los intervalos de la forma  $[a_0, b)$  donde  $a_0$  es el elemento mínimo de  $(X, \prec)$  (si es que tal  $a_0$  existe).
3. Todos los intervalos de la forma  $(a, b_0]$  donde  $b_0$  es el elemento máximo de  $(X, \prec)$  (si es que tal  $b_0$  existe).

Entonces,  $\mathcal{B}$  es una base para una topología sobre  $X$ , la cual llamaremos la **topología del orden** y se denota por  $\tau_{\prec}$ .

Tenemos además, que la colección  $\mathcal{S}_a$  de todos los rayos de la forma  $(a, +\infty)$  con  $a \in X$  es una sub-base para  $\tau_{\prec}$ .

### Demostración:

Tenemos cuatro casos:

1.  $X$  tiene elemento máximo y mínimo. Se tienen que verificar dos cosas:

■

### Definición 1.5.6

Sean  $(A, \prec_A)$  y  $(B, \prec_B)$  dos conjuntos ordenados. definimos la relación  $\prec$  sobre  $A \times B$  de la

siguiente manera

$$(a, b) \prec (c, d) \iff a \prec_A c \text{ o, } a = c \text{ y } b \prec_B d$$

esta relación es un orden definido sobre  $A \times B$  y se dice el **orden del diccionario**.

### **Demostración:**

Se deben cumplir tres cosas:

1. Sean  $(a, b), (c, d) \in A \times B$  y suponga que  $(a, b) \neq (c, d)$ , se tienen dos casos:
  - I)  $a \neq c$ , entonces  $a \prec_A c$  ó  $a \succ_A c$ . En el primer caso se tiene que  $(a, b) \prec (c, d)$ . En caso contrario se tendría que  $(c, d) \prec (a, b)$ .
  - II)  $a = c$ , entonces, puede suceder  $b \prec_B d$  ó  $d \prec_B b$  ó  $b = d$ , por tanto  $(a, b) \prec (c, d)$  ó  $(c, d) \prec (a, b)$  ó  $(a, b) = (c, d)$ , en cuyo caso los elementos son iguales, cosa que no puede suceder. Por tanto solo puede suceder que  $b \prec_B d$  ó  $d \prec_B b$ .
- por tanto,  $(a, b) \prec (c, d)$  o  $(c, d) \prec (a, b)$ .
2. Como  $\prec_A$  y  $\prec_B$  son antireflexivos, entonces siempre se tiene que  $(a, b) \not\prec (a, b)$ .
3. Sean  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in A \times B$  tales que  $(x_1, y_1) \prec (x_2, y_2)$  y  $(x_2, y_2) \prec (x_3, y_3)$ . Entonces

$$\begin{aligned} & (x_1 \prec_A x_2 \text{ ó } x_1 = x_2 \text{ y } y_1 \prec_B y_2) \text{ y } (x_2 \prec_A x_3 \text{ ó } x_2 = x_3 \text{ y } y_2 \prec_B y_3) \\ \Rightarrow & [(x_1 \prec_A x_2 \text{ ó } x_1 = x_2 \text{ y } y_1 \prec_B y_2) \text{ y } x_2 \prec_A x_3] \text{ ó } \\ & [(x_1 \prec_A x_2 \text{ ó } x_1 = x_2 \text{ y } y_1 \prec_B y_2) \text{ y } (x_2 = x_3 \text{ y } y_2 \prec_B y_3)] \\ \Rightarrow & [(x_1 \prec_A x_2 \text{ y } x_2 \prec_A x_3) \text{ ó } (x_1 = x_2 \text{ y } y_1 \prec_B y_2 \text{ y } x_2 \prec_A x_3)] \text{ ó } \\ & [(x_1 \prec_A x_2 \text{ y } x_2 = x_3 \text{ y } y_2 \prec_B y_3) \text{ ó } (x_1 = x_2 \text{ y } y_1 \prec_B y_2 \text{ y } x_2 = x_3 \text{ y } y_2 \prec_B y_3)] \\ \Rightarrow & [(x_1 \prec_A x_3) \text{ ó } (x_1 \prec_A x_3)] \text{ ó } \\ & [(x_1 \prec_A x_3) \text{ ó } (x_1 = x_3 \text{ y } y_1 \prec_B y_3)] \\ \Rightarrow & x_1 \prec_A x_3 \text{ ó } x_1 = x_3 \text{ y } y_1 \prec_B y_3 \\ \Rightarrow & (x_1, y_1) \prec (x_3, y_3) \end{aligned}$$

por los tres incisos anteriores, se sigue que  $\prec$  es un orden en  $A \times B$ . ■

### **Definición 1.5.7**

Un conjunto ordenado  $(X, \mathcal{R})$  se dice que está **bien ordenado** si todo subconjunto no vacío de  $X$  tiene primer elemento o elemento mínimo.

---

### **Proposición 1.5.3**

Existe un conjunto bien ordenado no numerable, en el cual toda sección de él es numerable.

---

### **Demostración:**

■