

# Exámenes Parciales y ETS Topología I

Cristo Daniel Alvarado

20 de abril de 2024

# Índice general

<b>1. Primer Examamen Parcial</b>	<b>2</b>
1.1. Ejercicios I . . . . .	2
1.2. Ejercicios II . . . . .	3
<b>2. Segundo Examen Parcial</b>	<b>5</b>
2.1. Ejercicios I . . . . .	5
2.2. Ejercicios II . . . . .	5
<b>3. Tercer Examen Parcial</b>	<b>6</b>
3.1. Ejercicios . . . . .	6
<b>4. ETS Ordinario</b>	<b>7</b>
4.1. Ejercicios . . . . .	7
4.2. Resultados Preeliminares . . . . .	8

# Capítulo 1

## Primer Examamen Parcial

### 1.1. Ejercicios I

**Ejercicio 1.1.1**

Sean  $X = \mathbb{R}$  y  $\tau = \{X, \emptyset\} \cup \{B_q\}_{q \in \mathbb{Q}}$ , donde  $B_q = (q, \infty) \cap \mathbb{Q}$ . ¿Es  $(\mathbb{R}, \tau)$  un espacio topológico? Demuestre su respuesta.

Solución:

□

**Ejercicio 1.1.2**

¿La familia  $\{[a, b[ \mid a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$  es base en  $(X, \tau_S)$ ? Justifique su respuesta.

Solución:

□

**Ejercicio 1.1.3**

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico y  $R$  una relación de equivalencia sobre  $X$ , y  $p : X \rightarrow X/R$  la función que a cada elemento  $x \mapsto [x]$  lo asigna a su clase de equivalencia. Haga lo siguiente:

1. Demuestre que la colección de todos los conjuntos cerrados en  $(X/R, \tau/R)$  es:

$$\{F \subseteq X/R \mid p^{-1}(F) \text{ es cerrado en } X\}$$

2. Demuestre que la colección de todos los conjuntos cerrados en  $(X/R, \tau/R)$  es igual a la familia:

$$\{p(F) \subseteq X/R \mid F \text{ es cerrado en } (X, \tau) \text{ y } p^{-1}(p(F)) = F\}$$

Solución:

□

**Ejercicio 1.1.4**

En el espacio  $(X, \tau_{cf})$  y tomando  $A = (0, 1)$ , obtener:

1.  $\mathring{A}$ .
2.  $\overline{A}$ .

3.  $\text{Fr}(A)$ .

4.  $\text{Ext}(A) = \widehat{X - A}$ .

**Solución:**

□

**Ejercicio 1.1.5**

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico, para cada  $A \subseteq X$  definimos  $\alpha(A) = \overset{\circ}{\overline{A}}$ , y  $\beta(A) = \overline{\overset{\circ}{A}}$ . Demuestre o refute:

1.  $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$ , para cada  $A \subseteq X$ .
2.  $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$ , para cada  $A \subseteq X$ .

**Demostración:**

■

## 1.2. Ejercicios II

**Ejercicio 1.2.1**

Sea  $\mathcal{S} = \{\mathbb{N}, \{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, \{1, 4, 7\}\}$ , Encuentre explícitamente los elementos de la topología  $\tau$  menos fina definida sobre  $\mathbb{N}$  tal que  $\mathcal{S} \subseteq \tau$  y, además, encuentre una base para  $\tau$  tal que  $\mathcal{B} \neq \tau$ .

**Solución:**

□

**Ejercicio 1.2.2**

Sean  $(X, \tau)$  un espacio topológico,  $Y$  un conjunto y  $f : X \rightarrow Y$  una función. Demuestre que el conjunto:

$$\tau_f := \left\{ U \subseteq Y \mid f^{-1}(U) \in \tau \right\}$$

es una topología sobre  $Y$  y es la topología más fina definida sobre  $Y$  tal que la función  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau_f)$  es una función continua.

**Demostración:**

■

**Ejercicio 1.2.3**

Sea  $(\mathbb{N}, \tau_{cf})$ , donde  $\tau_{cf}$  es la topología de los complementos finitos. Considere el conjunto

$$P = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } n = 2k \right\}$$

encuentre  $\overline{P}, \overset{\circ}{P}, P'$ .

**Solución:**

□

**Ejercicio 1.2.4**

Sean  $(X, \tau)$  y  $(Y, \tau')$  espacios topológicos tales que  $(Y, \tau')$  es un espacio topológico Hausdorff. Sean  $A \subseteq X$  y  $f : (A, \tau_A) \rightarrow (Y, \tau')$  una función continua tal que existen  $g_i : (\overline{A}, \tau_{\overline{A}}) \rightarrow (Y, \tau')$ ,  $i \in \{1, 2\}$  funciones continuas que cumplen:

$$g_1(a) = g_2(a), \quad \forall a \in A$$

demuestre que  $g_1 = g_2$ .

**Demostración:**

Sea  $a \in \overline{A}$ . Debemos probar que  $g_1(a) = g_2(a)$ . Se tienen dos casos:

1.  $a \in A$ , en cuyo caso se sigue de hipótesis que  $g_1(a) = g_2(a)$ .
2. Suponga que  $a \notin A$ . Si  $g_1(a) \neq g_2(a)$ , como el espacio  $(Y, \tau')$  es Hausdorff, existen dos abiertos  $M, N \in \tau'$  tales que

$$g_1(a) \in M \quad g_2(a) \in N \quad M \cap N = \emptyset$$

por ende, los conjuntos  $V = g_1^{-1}(M)$  y  $U = g_2^{-1}(N)$  son dos abiertos en  $(\overline{A}, \tau_{\overline{A}})$  tales que

$$a \in V \cap U$$

como  $a \in \overline{A}$ , existe pues  $a' \in A$  tal que  $a' \in U \cap V$ , es decir:

$$a' \in g_1^{-1}(M) \cap g_2^{-1}(N) \Rightarrow g_1(a') \in M \quad \text{y} \quad g_2(a') \in N \Rightarrow g_1(a') = g_2(a') \in M \cap N$$

pues,  $a' \in A$ . Por tanto,  $M \cap N \neq \emptyset$ . Así,  $g_1(a) = g_2(a)$ .

Por ambos incisos, se sigue que  $g_1 = g_2$ . ■

# Capítulo 2

## Segundo Examen Parcial

### 2.1. Ejercicios I

#### Ejercicio 2.1.1

Sean  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$  y  $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ y } 0 \leq z \leq 1\}$ . Los espacios  $(S, \tau_{u_S})$  y  $(P, \tau_{u_P})$  son homeomorfos? Demuestre que su respuesta es correcta.

#### Ejercicio 2.1.2

Sea  $\beta$  un número irracional arbitrario pero fijo. Demuestre que el conjunto

$$G = \{a\beta + b \mid a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z}\}$$

es denso en  $(\mathbb{R}, \tau_u)$ .

#### Ejercicio 2.1.3

Considere los espacios topológicos  $(\mathbb{R}, \tau_{cf})$  y  $(\mathbb{R}, \tau'_{cf})$  donde  $\tau_{cf}$  y  $\tau'_{cf}$  son la topología de los complementos finitos en  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{R}^2$ , respectivamente. ¿Es cierto que  $\tau_{cf} \times \tau_{cf} = \tau'_{cf}$ ? Demuestre su respuesta.

#### Ejercicio 2.1.4

Sea  $n \mapsto r_n$  una biyección de  $\mathbb{N}$  sobre  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ . Definimos la función  $f : ([0, 1], \tau_{u_{[0,1]}}) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$  como sigue; para cada  $x \in [0, 1]$  tomamos

$$f(x) = \sum_{n \in \mathcal{N}(x)} \frac{1}{2^n}$$

donde  $\mathcal{N}(x) = \{n \in \mathbb{N} \mid x < r_n\}$ . Demuestre que la restricción de  $f$  al conjunto  $B$  de todos los números irracionales  $x$  en  $[0, 1]$  es continua.

### 2.2. Ejercicios II

# Capítulo 3

## Tercer Examen Parcial

### 3.1. Ejercicios

Ejercicio 3.1.1

# Capítulo 4

## ETS Ordinario

### 4.1. Ejercicios

#### Ejercicio 4.1.1

Sea  $A = \{\sin n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Pruebe que  $\overline{A} = [-1, 1]$  en  $(\mathbb{R}, \tau_u)$ .

#### Demostración:

Notemos que  $A = \sin(\mathbb{N})$ . Sea  $C = \sin(\mathbb{Z})$ .

Es claro que  $C \subseteq [-1, 1]$  donde  $[-1, 1]$  es un cerrado en  $(\mathbb{R}, \tau_u)$ , por tanto  $\overline{C} \subseteq [-1, 1]$ , veremos que se cumple la otra contención. Sea  $x \in [-1, 1]$ ,

- Si  $x \in C$ , es claro que  $x \in \overline{C}$  ya que  $C \subseteq \overline{C}$ .
- Si  $x \notin C$ , como la función  $t \mapsto \sin t$  de  $\mathbb{R}$  a  $[-1, 1]$  es suprayectiva, entonces existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tal que  $\sin \theta = x$ .

Ahora, por la proposición 4.2.2, el conjunto

$$B = \{a + 2\pi b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

es denso en  $\mathbb{R}$  por ser  $2\pi$  irracional. Entonces, para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe  $\theta_n = a_n + 2\pi b_n \in B$  tal que  $|\theta - \theta_n| < \frac{1}{n}$ , es decir que la sucesión  $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$  converge a  $\theta$ . Como  $t \mapsto \sin t$  es continua, entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |\sin \theta - \sin \theta_n| &= 0 \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x - \sin(a_n + 2\pi b_n)| &= 0 \end{aligned}$$

pero,

$$\begin{aligned} \sin(a_n + 2\pi b_n) &= \sin(a_n) \cos(2\pi b_n) + \cos(a_n) \sin(2\pi b_n) \\ &= \sin(a_n) \end{aligned}$$

pues  $\cos(2\pi k) = 1$  y  $\sin(2\pi k) = 0$ , para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . Luego,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x - \sin a_n| = 0$$

es decir que para  $\varepsilon > 0$  existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $|x - \sin a_n| < \varepsilon$ , donde  $a_n \in \mathbb{Z}$ .

Por los dos incisos anteriores, se sigue que lo que  $\overline{C} \subseteq [-1, 1] \Rightarrow \overline{C} = [-1, 1]$ , es decir que  $\sin(\mathbb{Z})$  es denso en  $[-1, 1]$ , pero  $t \mapsto \sin t$  es continua y periódica entre  $[-1, 1]$ , por tanto de la proposición 4.2.3 se sigue que  $A = \sin(\mathbb{N})$  es denso en  $[-1, 1]$ . ■



**Ejercicio 4.1.2**

Para cada par de enteros positivos primos relativos  $a, b \in \mathbb{N}$  definimos:

$$N_{a,b} = \left\{ a + kb \mid k \in \mathbb{N}^* \right\}$$

1. Demuestre que la familia  $B = \left\{ N_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{N} \text{ tales que } (a, b) = 1 \right\}$  es base de una topología sobre  $\mathbb{N}$ .
2.  $(\mathbb{N}, \tau(B))$  es Hausdorff (donde  $\tau(B)$  representa a la topología generada por la base  $B$ ).
3. Cualquier múltiplo de  $b$  pertenece a  $\overline{N_{a,b}}$ .

**Ejercicio 4.1.3**

Demuestre que una bola en  $(\mathbb{R}^2, \tau_u|_{\mathbb{R}^2})$  no es igual al producto cartesiano de dos subconjuntos de  $(\mathbb{R}, \tau_u|_{\mathbb{R}})$ .

**Ejercicio 4.1.4**

Sea  $(X, \tau)$  un espacio Hausdorff compacto. Si  $(X, \tau)$  no tiene puntos aislados, demuestre que  $X$  no es a lo sumo numerable.

**Ejercicio 4.1.5**

Sean

$$\begin{aligned} X &= \left\{ (x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, 0 \leq z \leq 1 \right\} \\ Y &= \left\{ (x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + \left(z - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}, x \geq 0 \right\} \\ Z &= \left\{ (x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + \left(z - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}, x \geq 0 \right\} \\ B &= X \cup Y \cup Z \\ O &= \left\{ (x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \right\} \end{aligned}$$

¿Son los espacios  $(B, \tau_{u_B}|_{\mathbb{R}^2})$  y  $(O, \tau_{u_O}|_{\mathbb{R}^2})$  homeomorfos? En caso de que su respuesta sea sí, construya explícitamente una función biyectiva y continua  $f : B \rightarrow O$  y también exhiba su inversa mostrando también que es continua.

En caso de que su respuesta sea negativa, justifique detalladamente porque no son homeomorfos.

## 4.2. Resultados Preliminares

**Proposición 4.2.1**

Considere al grupo aditivo  $(\mathbb{R}, +)$ . Entonces todo subgrupo  $H$  de éste es denso en la topología  $(\mathbb{R}, \tau_u)$  ó es cíclico.

### **Demostración:**

Se tienen que probar dos cosas:

1. Suponga que  $G$  es denso. Se probará que  $G$  no puede ser cíclico. En efecto, si  $G$  fuera cíclico, existiría  $g \in G$  tal que

$$G = \langle g \rangle$$

es claro que  $g \neq 0$ , pues en caso contrario se tendría que  $G = \{0\}$ , que no puede suceder ya que  $G$  es denso en  $\mathbb{R}$ , así  $g > 0$ ; además, existe  $h \in G$  tal que  $0 < h < g$  ya que el conjunto  $]0, g[$  es abierto en  $\mathbb{R}$ .

Como  $G = \langle g \rangle$  existe entonces  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $g = hn$  (por ser  $h, g > 0$ ), es decir que  $g \leq h\#_c$ , pues  $h < g$ . Por tanto,  $G$  no es cíclico.

2. Suponga que  $G$  no es denso. Probaremos que  $G$  es cíclico, sea

$$g = \inf \left\{ x \in G \mid x > 0 \right\}$$

Se tienen dos casos. Afirmamos que  $g > 0$ . En efecto, suponga que  $g = 0$ , sea  $U \subseteq \mathbb{R}$  abierto no vacío y,  $x \in \mathbb{R}$  y  $\varepsilon > 0$  tales que  $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[ \subseteq U$ . Como  $g = 0$ , existe  $g_\varepsilon \in G$  tal que  $0 < g_\varepsilon < \varepsilon$ , sea ahora  $k \in \mathbb{Z}$  tal que:

$$kg_\varepsilon \leq x < (k+1)g_\varepsilon$$

es claro que  $kg_\varepsilon \in G$ , y además:

$$\begin{aligned} 0 &\leq x - kg_\varepsilon \\ &< (k+1)g_\varepsilon - kg_\varepsilon \\ &= g_\varepsilon \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

es decir,  $|x - kg_\varepsilon| < \varepsilon$  y por ende  $kg_\varepsilon \in U$ . Por tanto,  $G$  es denso en  $\mathbb{R}\#_c$ . Por tanto,  $g > 0$ . Veamos ahora que  $g \in G$ .

Suponga que  $g \notin G$ , entonces existen  $h_1, h_2 \in G$  positivos tales que:

$$g < h_1 < h_2 < 2g$$

(por propiedades del ínfimo), luego  $h_2 - h_1 \in G$  y son tales que  $0 < h_2 - h_1 < g\#_c$ , pues  $g$  es el ínfimo. Luego,  $g \in G$ .

Sea  $x \in G$ , entonces existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que

$$kg \leq x < (k+1)g$$

Así,  $kg \in G$  lo cual implica que  $x - kg \in H$ , por ende:

$$\begin{aligned} 0 &\leq x - kg \\ &< (k+1)g - kg \\ &= g \end{aligned}$$

al ser  $g$  el ínfimo, debe suceder que  $x - kg = 0$ , es decir que  $x = kg$ . Por tanto,  $G = \langle g \rangle$ .

por los dos incisos anteriores, se sigue que  $G$  es denso ó es cíclico. ■

---

**Proposición 4.2.2**

Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Entonces el conjunto:

$$A = \left\{ a + b\alpha \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

es denso en  $\mathbb{R}$  con la topología usual.

---

**Demostración:**

Afirmamos que  $A$  es un subgrupo de  $\mathbb{R}$  el cual no es cíclico, por tanto, de la proposición anterior, se sigue que  $A$  es denso en  $\mathbb{R}$  con la topología usual.

Es claro que  $A$  es subgrupo de  $(\mathbb{R}, +)$ , pues si  $a_1 + b_1\alpha, a_2 + b_2\alpha \in A$ , se tiene que el elemento  $(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\alpha \in A$  ya que  $a_1 - a_2, b_1 - b_2 \in \mathbb{Z}$ .

Ahora, supongamos que  $A$  es cíclico, entonces existiría  $a + b\alpha \in A$  positivo (lo podemos elegir positivo y no puede ser cero ya que  $\alpha \in A$ ) tal que  $A = \langle a + b\alpha \rangle$ . En particular,  $\alpha \in A$ , por tanto, existe  $m \in \mathbb{Z}$  tal que

$$\begin{aligned} \alpha &= m(a + b\alpha) \\ \Rightarrow (1 - mb)\alpha &= ma \end{aligned}$$

entonces,  $mb = 1$ , lo cual implica que  $m = b = \pm 1$  (en caso contrario, un lado de la ecuación sería irracional y el otro entero), y que  $a = 0$ . Por tanto,  $A = \langle \alpha \rangle = \langle -\alpha \rangle$ , pero esto no puede suceder pues el elemento  $1 + 2\alpha \notin \langle \alpha \rangle$ , pero  $1 + 2\alpha \in A \setminus \langle \alpha \rangle$ .

Por tanto,  $A$  no es cíclico. Luego, de la proposición anterior, se sigue que  $A$  es denso en  $\mathbb{R}$  con la topología usual. ■

---

**Proposición 4.2.3**

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  función continua y periódica de período  $T > 0$ . Entonces, si  $f(\mathbb{Z})$  es denso en  $(\mathbb{R}, \tau_u)$ , entonces  $f(\mathbb{N})$  también lo es.

---

**Demostración:**

Si  $T$  es racional, entonces  $f(\mathbb{Z}) = T$  el cual no es denso en  $[-1, 1]$ , por tanto,  $T$  debe ser irracional. Como  $f$  es continua y acotada, entonces es uniformemente continua en  $\mathbb{R}$ .

Sea  $x \in [-1, 1]$  y  $\varepsilon > 0$ , entonces existe  $m \in \mathbb{Z}$  tal que  $|f(m) - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Como  $f$  es uniformemente continua, existe  $\delta > 0$  tal que si  $|u - v| < \delta$  entonces  $|f(u) - f(v)| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Si  $m \in \mathbb{N}$ , se tiene el resultado. Suponga que  $m \leq 0$ . Existen  $p, q \in \mathbb{N}$  tales que

$$|p - Tq| < \delta$$

donde  $p > -m$  y  $q > 1/\delta$ , esto pues el conjunto  $]T, \infty[ \cap \mathbb{Q}$  es denso en  $[T, \infty[$ . Entonces:

$$\begin{aligned} |f(m + p) - \alpha| &\leq |f(m + p) - f(m)| + |f(m) - \alpha| \\ &\leq |f(m + (p - Tq)) - f(m)| + |f(m) - \alpha| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

con  $p + m \in \mathbb{N}$ . Luego  $f(\mathbb{N})$  es denso en  $[-1, 1]$ . ■