Notas de Álgebra Moderna III: Una Introducción a la Teoría de Galois Finita

Cristo Daniel Alvarado

25 de mayo de 2024

Índice general

Capítulo 1

Anillo de Polinomios

1.1. Series de Potencias

Observación 1.1.1
De ahora en adelante todos los anillos se considerarán como anillos connmutativos con identidad, a menos que se establezca lo contrario.

Definición 1.1.1
Sea A un anillo. Denotemos por

$$S_A = \left\{ f \middle| f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to A \right\}$$

es decir que S_A es el **conjunto de sucesiones de** A. Si $f \in S_A$ escribimos a f como:

$$f = (a_0, a_1, ...)$$

Sobre S_A se definen dos operaciones, la **suma** y **producto**. A saber, si $f = (a_0, a_1, ...)$ y $g = (b_0, b_1, ...)$, entonces:

$$f + g = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, ..., a_k + b_k, ...)$$

y,

$$fg = f \cdot g = (c_0, c_1, ..., c_k, ...)$$

donde

$$\begin{aligned} c_k &= \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \\ &= a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + ... + a_k b_0 \\ &= \sum_{i=0}^{k} a_{k-i} b_i \\ &= \sum_{i+j=k} a_i b_j \end{aligned}$$

Observación 1.1.2
En la definición anterior, se tiene que S_A es un anillo con cero el elemento $(0, 0, ..., 0, ...)$ e inverso $-f = (-a_0, -a_1, ..., -a_k, ...)$ para todo $f \in S_A$. Además, existe un monomorfismo de A en S_A, a saber:

$$A \hookrightarrow S_A, a \mapsto (a, 0, ..., 0, ...)$$

Por lo cual A está encajado en S_A. Debido a esto, se denotará de ahora en adelante como

$$a = (a, 0, ..., 0, ...), \quad \forall a \in A$$

Definición 1.1.2
Sean A y x un objeto tal que $x \notin A$. x es llamado una **indeterminada para** A. Definimos para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y para todo $a \in A$:

$$ax^n = (\underbrace{0, 0, 0, ..., 0, 0, 0, a}_{n+1-\textbf{ésima entrada}}, 0, ...)$$

Si A tiene identidad, entonces

$$1x^n = x^n = (\underbrace{0, 0, 0, ..., 0, 0, 0, 1}_{n+1-\textbf{ésima entrada}}, 0, ...)$$

En caso que $n = 1$, $1x^1 = x^1 = x$ y si $n = 0$, $1x^0 = x^0 = 1$ (abusando en este caso de la notación). Se tiene entonces que

$$x^n \in S_A, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$