

Notas Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

17 de abril de 2024

Índice general

3. Series de Fourier	2
3.1. Series de Fourier de funciones en $\mathcal{L}_1^{2\pi}$	2

Capítulo 3

Series de Fourier

3.1. Series de Fourier de funciones en $\mathcal{L}_1^{2\pi}$

Definición 3.1.1

Se llama **serie de Fourier trigonométrica** a una serie de funciones de \mathbb{R} en \mathbb{C} de la forma

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} \quad (3.1)$$

donde $c_k \in \mathbb{C}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ son coeficientes constantes. Por definición, las **sumas parciales** de la serie son:

$$s_m(x) = \sum_{k=-m}^m c_k e^{ikx}, \forall m \in \mathbb{N}^*$$

Se dice que la serie **converge en un punto x a una suma $f(x)$** , si

$$f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} s_m(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=-m}^m c_k e^{ikx}$$

En este caso,

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

Usando la identidad $e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx$, podemos reescribir s_m como

$$s_m(x) = c_0 + \sum_{k=1}^m (c_k + c_{-k}) \cos kx + i \sum_{k=1}^m (c_k - c_{-k}) \sin kx, \quad \forall m \in \mathbb{N}^* \quad (3.2)$$

definamos

$$a_k = c_k + c_{-k} \quad \text{y} \quad b_k = c_k - c_{-k}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (3.3)$$

de la definición es claro que

$$a_{-k} = a_k \quad \text{y} \quad b_{-k} = -b_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

conociendo los coeficientes a_k y b_k se recuperan los c_k mediante las fórmulas

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad (3.4)$$

y, $c_0 = \frac{a_0}{2}$. En términos de los a_k y b_k , las sumas 3.2 y 3.1 pueden ser reescritas como sigue:

$$s_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m a_k \cos kx + \sum_{k=1}^m b_k \sin kx, \quad \forall m \in \mathbb{N}^* \quad (3.5)$$

y,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \quad (3.6)$$

respectivamente.

Definición 3.1.2

Se dice que la serie trigonométrica es **real** si $s_m(x) \in \mathbb{R}$ para todo $m \in \mathbb{N}^*$ y para toda $x \in \mathbb{R}$. Se sigue de 3.2 que la serie es real si y sólo si $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, para todo $k \in \mathbb{N}^*$.

Esta condición es equivalente a que

$$c_{-k} = \overline{c_k}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Es válido preguntarnos ahora: ¿Qué relación hay entre f y los coeficientes c_k ?

Proposición 3.1.1

Considere una serie trigonométrica $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$. Suponga que esta serie converge uniformemente en \mathbb{R} a alguna función f . Entonces, $f \in \mathcal{C}^{2\pi}$ y

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Demostración:

Se supone que $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ uniformemente en \mathbb{R} . Como el límite uniforme de una sucesión de funciones continuas es continua, se tiene entonces que $f \in \mathcal{C}^{2\pi}$. Para un $n \in \mathbb{Z}$:

$$f(x) e^{-inx} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{i(k-n)x} \text{ uniformemente en } \mathbb{R} \quad (3.7)$$

pues,

$$|f(x) e^{-inx} - s_m(x) e^{-inx}| = |f(x) - s_m(x)|, \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$$

Se puede pues integrar término por término 3.7 en el compacto $[-\pi, \pi]$. Antes veamos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)x} dx = \begin{cases} 2\pi & \text{si } n = k \\ 0 & \text{si } n \neq k \end{cases}$$

por tanto,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)x} dx \\ &= 2\pi c_n \\ \Rightarrow c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \end{aligned}$$

■

Este resultado sugiere la definición siguiente:

Definición 3.1.3

Para todo $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ se define

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (3.8)$$

en particular, $c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$. Los coeficientes c_k se llaman **los coeficientes de Fourier trigonométricos de f** y, la serie

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

se llama **serie de Fourier trigonométrica de f** .

Observación 3.1.1

Los correspondientes coeficientes a_k y b_k son los siguientes:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

también,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad \text{y} \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$ (esto se obtiene usando la igualdad entre los c_k y a_k, b_k).

Observación 3.1.2

Para fines prácticos, conviene tener en cuenta lo siguiente. Si f es una función impar en $] -\pi, \pi[$, entonces

$$a_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

y,

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Si f es una función par en $] -\pi, \pi[$ se invierte el resultado, es decir

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

y,

$$b_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$