Notas Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

18 de abril de 2024

Índice general

Capítulo 3

Series de Fourier

3.1. Series de Fourier de funciones en $\mathcal{L}_1^{2\pi}$

Definición 3.1.1
Se llama **serie de Fourier trigonométrica** a una serie de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ de la forma

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx} \tag{3.1}$$

donde $c_k \in \mathbb{C}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ son coeficientes constantes. Por definición, las **sumas parciales** de la serie son:

$$s_m(x) = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx}, \forall m \in \mathbb{N}^*$$

Se dice que la serie **converge en un punto** x **a una suma** $f(x)$, si

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} s_m(x) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx}$$

En este caso,

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

Usando la identidad $e^{ikx} = \cos kx + i \operatorname{sen} kx$, podemos reescribir s_m como

$$s_m(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{m} (c_k + c_{-k}) \cos kx + i \sum_{k=1}^{m} (c_k - c_{-k}) \operatorname{sen} kx, \quad \forall m \in \mathbb{N}^* \tag{3.2}$$

definamos

$$a_k = c_k + c_{-k} \quad \text{y} \quad b_k = c_k - c_{-k}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \tag{3.3}$$

de la definición es claro que

$$a_{-k} = a_k \quad \text{y} \quad b_{-k} = -b_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

conociendo los coeficientes a_k y b_k se recobran los c_k mediante las fórmulas

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \tag{3.4}$$

y, $c_0 = \frac{a_0}{2}$. En términos de los a_k y b_k, las sumas 3.2 y 3.1 pueden ser reescritas como sigue:

$$s_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{m} b_k \sin kx, \quad \forall m \in \mathbb{N}^* \tag{3.5}$$

y,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \tag{3.6}$$

respectivamente.

Definición 3.1.2
Se dice que la serie trigonométrica es **real** si $s_m(x) \in \mathbb{R}$ para todo $m \in \mathbb{N}^*$ y para toda $x \in \mathbb{R}$. Se sigue de 3.2 que la serie es real si y sólo si $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, para todo $k \in \mathbb{N}^*$.

Esta condición es equivalente a que

$$c_{-k} = \overline{c_k}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Es válido preguntarnos ahora: ¿Qué relación hay entre f y los coeficientes c_k?

Proposición 3.1.1
Considere una serie trigonométrica $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$. Suponga que esta serie converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a alguna función f. Entonces, $f \in \mathcal{C}^{2\pi}$ y

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Demostración:
Se supone que $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ uniformemente en $\mathbb{R}$. Como el límite uniforme de una sucesión de funciones continuas es continua, se tiene entonces que $f \in \mathcal{C}^{2\pi}$. Para un $n \in \mathbb{Z}$:

$$f(x)e^{-inx} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{i(k-n)x} \text{ uniformemente en } \mathbb{R} \tag{3.7}$$

pues,

$$\left|f(x)e^{-inx} - s_m(x)e^{-inx}\right| = \left|f(x) - s_m(x)\right|, \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$$

Se puede pues integrar término por término 3.7 en el compacto $[-\pi, \pi]$. Antes veamos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)x}dx = \begin{cases} 2\pi & \text{si} \quad n = k \\ 0 & \text{si} \quad n \neq k \end{cases}$$

por tanto,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)x}dx \\ &= 2\pi c_n \\ \Rightarrow c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \end{aligned}$$

■

Este resultado sugiere la definición siguiente:

Definición 3.1.3
Para todo $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ se define

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \tag{3.8}$$

en particular, $c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$. Los coeficientes c_k se llaman **los coeficientes de Fourier trigonométricos de** f y, la serie

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

se llama **serie de Fourier trigonométrica de** f.

Observación 3.1.1
Los correspondientes coeficientes a_k y b_k son los siguientes:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

también,

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx \quad \text{y} \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$ (esto se obtiene usando la igualdad entre los c_k y a_k, b_k).

Observación 3.1.2
Para fines prácticos, conviene tener en cuenta lo siguiente. Si f es una función impar en $]-\pi,\pi[$, entonces

$$a_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

y,

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\text{sen}\, kx, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Si f es una función par en $]-\pi,\pi[$ se invierte el resultado, es decir

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

y,

$$b_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Teorema 3.1.1
Las aplicaciones $f \mapsto \{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ y, $f \mapsto \{a_0, a_1, b_1, ...\}$ son aplicaciones lineales inyectivas de $L_1^{2\pi}$ en el espacio de sucesiones complejas y reales, respectivamente. En particular, si $f, g \in \mathcal{L}_1^{2\pi}$ tienen los mismos coeficientes de Fourier trigonométricos, entonces $f = g$ c.t.p. en $\mathbb{R}$.

Demostración:
Por la forma en que se definen los coeficientes de Fourier de una función integrable, es claro que dichas aplicaciones son lineales.

Resta probar que su kernel es $\{0\}$. Sea $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ tal que

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

dado que el sistema trigonométrico $\tau_{\mathbb{C}}$ es total en $\mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$, necesariamente $f = 0$ c.t.p. en $\mathbb{R}$.

Similarmente se prueba la otra afirmación. ■

Proposición 3.1.2
Sean $f, g \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ y $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ y $\{d_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ los coeficientes de Fourier trigonométricos de f y g, respectivamente. Entonces, los coeficientes de Fourier $\{\gamma_k\}$ de $f * g$ son $\{2\pi c_k d_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

Demostración:
Para todo $k \in \mathbb{Z}$ fijo se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\gamma_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f * g(x) e^{-ikx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} dx \int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(x-y) dy
\end{aligned}$$

como la función $(x, y) \mapsto e^{-ikx} f(y) g(x-y)$ es integrable en $]-\pi, \pi[\times]-\pi, \pi[$ (pues la función es medible y su módulo es el mismo que el de $(x, y) \mapsto f(y)g(x-y)$, la cual es integrable por un teorema de convolución), se puede invertir del orden de integración:

$$\begin{aligned}
\gamma_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) dy \int_{-\pi}^{\pi} g(x-y) e^{-ikx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) dy \int_{-\pi-y}^{\pi-y} g(z) e^{-ik(z+y)} dz \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} dy \int_{-\pi-y}^{\pi-y} g(z) e^{-ikz} dz \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} dy \int_{-\pi}^{\pi} g(z) e^{-ikz} dz \\
&= c_k \cdot (2\pi d_k) \\
&= 2\pi c_k d_k
\end{aligned}$$

pues, las funciones son periódicas. Se tieene entonces con lo anterior el resultado para todo $k \in \mathbb{Z}$. ■

3.2. Series de Fourier de funciones en $\mathcal{L}_2^{2\pi}$

Recuerde que las funciones

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

constituyen un sistema ortonormal maximal en el espacio Hilbertiano $L_2^{2\pi}(\mathbb{C})$. En el sentido Hilbertiano, los coeficientes de Fourier de algún vector $f \in \mathcal{L}_2^{2\pi}(\mathbb{C})$ con respecto a dicho sistema ortonormal son los siguientes:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(x) &= \big(f \big| \varphi_k\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \\
&= \sqrt{2\pi} c_k
\end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}
\hat{f}(x)\varphi_k(x) &= \sqrt{2\pi} c_k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \\
&= c_k e^{ikx}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

La serie de Fourier hilbertiana de f sería:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(x)\varphi_k(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

que corresponde a al serie de Fourier trigonométrica de f. También, las funciones

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \eta_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx, \quad \theta_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx, \quad \forall k\in\mathbb{Z}$$

forman otro sistema O.N. maximal en $L_2^{2\pi}(\mathbb{K})$. Los correspondientes coeficientes de Fourier de f con respecto a este sistema O.N. maximal serían:

$$\begin{cases} \left(f\middle|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) & = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\ \left(f\middle|\eta_k\right) & = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx \\ \left(f\middle|\theta_k\right) & = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\, kxdx \end{cases}$$

La serie de Fourier hilbertiana de f será:

$$\left(f\middle|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(f\middle|\eta_k\right)\eta_k + \sum_{k=1}^{\infty}\left(f\middle|\theta_k\right)\theta_k = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos kx + b_k\sin kx\right]$$

Recuerde también que por el teorema de Riesz-Fischer que si $\{\vec{u}_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ es un sistema O.N. maximal en un espacio hilbertiano H, entonces la aplicación $\vec{x}\mapsto\{\hat{x}(\alpha)\}$ es una isometría lineal de H en $l_2(\Omega)$. La isometría inversa es:

$$\varphi\mapsto\sum_{\alpha\in\Omega}\varphi(\alpha)\vec{u}_\alpha$$

Aplicacndo este resultado al primer caso se tiene que

Teorema 3.2.1
Las aplicaciones

$$f\mapsto\left\{\sqrt{2\pi}c_k\right\}_{k\in\mathbb{Z}} \quad \text{y} \quad f\mapsto\left\{\sqrt{2\pi}\frac{a_0}{2}, \sqrt{\pi}a_1, \sqrt{\pi}b_1\right\}$$

son isometrías lineales de $L_2^{2\pi}$ sobre $l_2(\mathbb{Z})$ o $l_2(\mathbb{N})$, respectivamente. Se tienen las identidades siguientes de Parseval:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|c_k\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)\right|^2 dx$$

$$\frac{\left|a_0\right|^2}{2} + \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left[\left|a_k\right|^2 + \left|b_k\right|^2\right] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)\right|^2 dx$$

Más generalmente, si $f,g\in\mathcal{L}_2^{2\pi}(\mathbb{K})$ con coeficientes de Fourier trigonométricos $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ y $\{d_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, entonces

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\overline{d_k} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$$

para los correspondientes coeficientes $\{a_k, b_k\}$ y $\{\alpha_k, \beta_k\}$ se tiene

$$\frac{a_0\overline{\alpha_k}}{2} + \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left[a_k\overline{\alpha_k} + b_k\overline{\beta_k}\right] = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$$

Además, f es igual al promedio cuadrádtico de su serie de Fourier:

$$\lim_{m\to\infty} \mathcal{N}_2 (f - s_m) = 0$$

Demostración:

Es inmediata de las observaciones hechas anteriormente y del teorema de Riesz-Fischer, junto con las identidades de Parserval. ■

Observación 3.2.1
Se tiene lo siguiente:

1. La suprayectividad de $f \mapsto \left\{\sqrt{2\pi} c_k\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ de $L_2^{2\pi}(\mathbb{C})$ sobre $l_2(\mathbb{Z})$ es consecuencia del teorema de Riesz-Fischer, es decir, de la completez de $L_2^{2\pi}$. Dice que dada una sucesión arbitraria $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ en $l_2(\mathbb{Z})$ existe una función $f \in \mathcal{L}_2^{2\pi}$ única salvo equivalencias cuyos coeficientes de Fourier son la sucesión dada.

   Este resultado fue históricamente un éxito para la integral de Lebesgue.

2. Carleson demostró en 1966 que para cada $f \in \mathcal{L}_2^{2\pi}$ la serie de Fourier de f converge a f c.t.p. en $\mathbb{R}$. Sin embargo, para funciones en $\mathcal{L}_1^{2\pi}$ ésta no será la misma historia.

3.3. Series de Fourier de funciones de periodo $T > 0$

Sea $f \in \mathcal{L}_1^T$. Defina

$$g(y) = f\left(\frac{T}{2\pi} y\right), \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

entonces, $g \in \mathcal{L}_1^{2\pi}$. Por definición, los coeficientes de Fourier de f van a ser los de g, estos son

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) e^{iky} dy$$

Por el cambio de variable $y = \frac{2\pi}{T} x$, podemos reescribirlos de la siguiente forma:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{i\frac{2\pi k}{T}x} dx$$

en particular, $c_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx$. Los correspondientes a_k y b_k son

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx \\ a_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) dx \\ b_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) dx \end{aligned}$$

Las series de Fourier trigonométricas correspondientes son

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{i\frac{2\pi k}{T}x} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} x\right)\right]$$

Sea ahora $f \in \mathcal{L}_2^T$. Los coeficientes de Fourier de f con respecto al sistema O.N. maximal formado por

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{i\frac{2\pi k}{T}x}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

son

$$\left(f\middle|\varphi_k\right) = \sqrt{T} c_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

si se usa el sistema O.N. maximal formado por

$$\frac{1}{\sqrt{T}}, \quad \eta_k(x) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right), \quad \theta_k(x) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right), \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

se obtienen

$$\begin{aligned} \left(f\middle|\frac{1}{\sqrt{T}}\right) &= \sqrt{T}\frac{a_0}{2} \\ \left(f\middle|\eta_k\right) &= \sqrt{\frac{T}{2}} a_k \\ \left(f\middle|\theta_k\right) &= \sqrt{\frac{T}{2}} b_k \end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Las series de Fourier correspondientes serían

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(f\middle|\varphi_k\right)\varphi_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{i\frac{2\pi k}{T}x} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right)\right]$$

Se tienen las identidades de Parserval

$$\begin{aligned} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|c_k\right|^2 &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left|f(x)\right|^2 \\ \frac{\left|a_0\right|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left|a_k\right|^2 + \left|b_k\right|^2\right] &= \frac{T}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left|f(x)\right| dx \\ \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\overline{d_k} &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\overline{g(x)}dx \\ \frac{a_0\overline{\alpha_0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\overline{\alpha_k} + b_k\overline{\beta_k}\right] &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\overline{g(x)}dx \end{aligned}$$

por lo cual, en lo sucesivo se trabajará únicamente con funciones de periodo 2π (la traducción al periodo $T > 0$ es un ejercicio).