Notas Variedades

Cristo Daniel Alvarado

10 de enero de 2024

Índice general

Capítulo 4

Variedades

4.1. Variedades Topológicas

Para hacer toda la parte de introducción a varidedades, se hará uso del libro de Loring W. Tu 'An introduction to manifolds'. Hablaremos inicialmente de variedades topológicas. Para entender mejor los conceptos usados a lo largo de la sección, consultar al apéndice A del libro mencionado anteriormente.

Recordemos varias cosas, Un espacio topológico M es **segundo numerable** si tiene una base a lo sumo numerable. Una **vecindad** de un punto $p \in M$ es cualquier conjunto abierto que contenga a p. Una **cubierta abierta de** M es una colección $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de conjuntos abiertos de M tales que $\cup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$.

Definición 4.1.1
Un espacio topológico M es **localmente euclideano de dimensión n** si todo punto $p \in M$ tiene una vecindad $U \subseteq M$ tal que existe un homeomorfismo $\phi : U \to V$, donde $V \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto. Al par $(U, \phi : U \to V)$ se le conoce como una **carta**, U es una **vecindad coordenada** o **conjunto abierto coordenado**, y ϕ es el mapeo **mapeo coordenado** o **sistema coordenado sobre** U.

Decimos que una carta (U, ϕ) **está centrada en** $p \in U$ si para $\phi(p) = 0$. Una carta (U, ϕ) **alrededor de** p simplemente significa que (U, ϕ) es una carta y que $p \in U$.

Definición 4.1.2
Una **Variedad Topológica de dimensión n** es un espacio topológico localmente euclideano de dimensión n, Hausdorff y segundo numerable.

Recordamos que la condición de Hausdorff y la segunda numerabilidad son propiedades hereditarias, esto es, son heredadas a los subespacios de estos espacios topológicos. Un subespacio de un espacio Hausdorff es Hausforff y un subespacio de un espacio segundo numerable es segundo numerable. Así que de forma inmediata, como $\mathbb{R}^n$ es Hausdorff y segundo numerable, cualquier subespacio de él es automáticamente Hausdorff y segundo numerable.

Ejemplo 4.1.1
El espacio euclideano $\mathbb{R}^n$ es una variedad topológica de dimensión n, pues pues es un espacio topológico localmente euclideano, pues para todo $p \in \mathbb{R}^n$ existe $\phi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ homeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, además $\mathbb{R}^n$ es Hausdorff y segundo numerable.

Ejemplo 4.1.2
Considere la gráfica de la función $f\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{2/3}$. Su gráfica tiene la siguiente forma: Su gráfica (denotada por $\Gamma(f)$) es una variedad topológica, esto en virtud de ser un subespacio de $\mathbb{R}^2$, el cual es Hausdorff y segundo numerable. Y es localmente euclideano ya que es homeomorfo a $\mathbb{R}$, usando el mapeo $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, x^{2/3}) \mapsto x$.

Ejemplo 4.1.3
Considere la cruz como subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Claramente es Hausdorff y segundo numerable. Probaremos que no es una variedad topológica de dimensión 1 ó 2. Suponga que lo es, entonces para $p \in M$ (la intersección de la cruz) existe un mapeo $\phi : U \to V$, donde $U \subseteq M$ (M es el espacio topológico) con $V \subseteq \mathbb{R}^n$, donde $n \in \mathbb{N}$. Podemos suponer que U es abierto conexo (si no es conexo, basta tomar una bola tal que esté contenida en U). Notemos que $U/\{p\}$ es un conjunto que tiene 4 componentes conexas. Si

- $n = 1$, como los abiertos conexos en $\mathbb{R}$ son intervalos conexos, al quitarles un punto del interior, se tiene que $V/\{\phi(p)\}$ tiene dos componentes conexas.
- $n > 1$, como a los conexos abiertos de $\mathbb{R}^n$ con $n > 1$ al quitarles un punto siguen siendo conexos, se tiene que $V/\{\phi(p)\}$ tiene una componente conexa.

como los homeomorfismos mandan componentes conexas en componentes conexas, no puede suceder que la imagen de $U/\{p\}$ el cual es $V/\{\phi(p)\}$ tenga 2 o una componente conexa. Luego el espacio topológico M no es localmente euclideano y por tanto, no es variedad topológica.

4.2. Compatibilidad de Cartas

Sea M una variedad topológica y considere $(U, \phi : U \to \mathbb{R}^n)$ y $(V, \psi : V \to \mathbb{R}^n)$ dos cartas de la variedad topológica M.

Definición 4.2.1
Dadas dos cartas de una variedad topológica (usando la notación de lo escrito anteriormente), decimos que son C^∞**-compatibles** si los dos mapeos

$$\begin{aligned} \phi \circ \psi^{-1} :& \psi(U \cap V) \to \phi(U \cap V) \\ \psi \circ \phi^{-1} :& \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V) \end{aligned} \tag{4.1}$$

son C^∞. Estos dos mapeos son llamados **funciones de transición** entre las cartas.

Observación 4.2.1
En el contexto de la definición anterior, en caso de que la intersección de las dos cartas sea vacía, las cartas serán en automático C^∞-compatibles.

Para simplificar la notación, escribiremos

$$U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$$

y

$$U_{\alpha\beta,\gamma} = U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$$

Como nuestro interés va solo sobre cartas C^∞-compatibles, seguidamente vamos a omitir la mención de C^∞ y hablaremos simplemente de cartas compatibles.

Definición 4.2.2
Un **Atlas** C^∞ o simplemente un **atlas** en un espacio localmente euclideano, es una colección $\mathbb{U} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ de cartas C^∞-compatibles a pares que cubren a M, es decir tales que $M = \cup_\alpha U\alpha$.

Observación 4.2.2
La C^∞-compatibilidad de cartas es una relación reflexiva, simétrica, pero no es transitiva. En efecto.

Demostración:
Sea M un espacio localmente euclideano. □

Observación 4.2.3
Si M y N son variedades suaves, entonces $M \times N$ con su topología producto es una variedad suave.

Proposición 4.2.1
Si $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ y $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ son atlas para M y N, respectivamente, entonces

$$\{(U_\alpha \times V_\beta, \phi_\alpha \times \psi_\beta : U_\alpha \times V_\beta \to M \times N)\}$$

es un atlas para $M \times N$.

Ejemplo 4.2.1
$T^2 = S^1 \times S^1$. Y el n-toro $T^n = \underbrace{S^1 \times S^1}_{\text{n-veces}}$ son ejemplos de variedades suaves.

Capítulo 6

Funciones suaves sobre una variedades

6.1. Introducción

Definición 6.1.1
Sea M una variedad de dimensión n. Una función $f : M \to \mathbb{R}$ se dice que **es una función C^∞ en** $p \in M$ si existe una carta (U, ϕ) que contenga a p tal que $f \circ \phi^{-1}$ es C^∞ en $\phi(p)$. La función f se dice que es C^∞ **en** M si es C^∞ en cada punto de M.

Notemos que la definición de suavidad de una función f en u punto es independiente de de la carta (U, ϕ), pues si $f \circ \phi^{-1}$ es C^∞ en $\phi(p)$ y (V, ψ) es otra carta sobre $p \in M$, entonces en $\psi(U \cap V)$:

$$f \circ \psi^{-1} = (f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \psi^{-1})$$

las cual es C^∞ en $\psi(p)$.

Se denota al conjunto de **la funciones suaves sobre una variedad suave** M por:

$$C^\infty(M) = \{\text{conjunto de todas las funciones } C^\infty \text{ sobre } M\}$$

Sean M^m y N^n variedades suaves, $h \in C^\infty(M)$ y $F : N \to M$ funciones. Se define el **pullback de h bajo F** como la función

$$F^* h = h \circ F$$

Definición 6.1.2
Sean M y N variedades suaves de dimensión n y m, respectivamente. Una función continua $f : N \to M$ es C^∞ **en un punto** $p \in N$ si existen cartas (V, ψ) alrededor de $F(p)$ en M y (U, ϕ) alrededor de p en N tales que la composición

$$\psi \circ F \circ \phi^{-1}$$

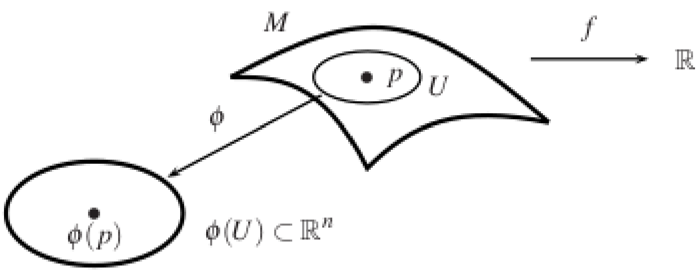

Figura 6.1: Función C^∞.

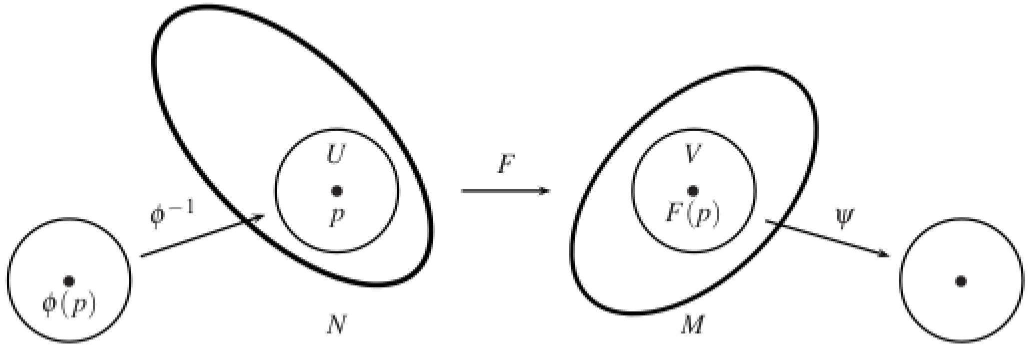

Figura 6.2: Función $F : N \to M$ entre dos variedades.

el cual es un mapeo del abierto $\phi(F^{-1}(V) \cap U)$ subcojunto de $\mathbb{R}^n$ y va a $\mathbb{R}^m$, es C^∞ en $\phi(p)$.

Se die que F **es** C^∞ si es C^∞ en todo punto de N. Este es un **difeomorfismo** si este es biyectivo y tanto F como F^{-1} son C^∞.

Ejemplo 6.1.1
Si (U, F) es una carta en el atlas de M, entonces F y F^{-1} son C^∞.

Demostración:
En efecto, notemos que $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto es variedad de dimensión n. En particular, podemos interpretar a F como el mapeo entre las variedades U y $F(U)$. de forma inmediata se sigue que F es difeomorfismo. $\square$

Proposición 6.1.1
Sea $U \subseteq M$ abierto. Si $F : U \to F(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo sobre su imagen, entonces (U, F) es una carta en el atlas de M.

Capítulo 8

El Espacio Tangente

8.1. Vectores Tangentes

Definición 8.1.1 (Coordenadas estándar de $\mathbb{R}^n$)
Para cada cada $i = 1, \ldots, n$, se definen las funciones **coordenadas estándar de** $\mathbb{R}^n$ como

$$p = (p_1, \ldots, p_n) \mapsto r_i(p) = p_i$$

Esto se usará para evitar conflictos más adelante con la notación de coordenadas locales sobre una variedad.

Definición 8.1.2 (Derivada direccional)
Sea M una variedad y $p \in M$. Consideremos $\alpha : I \to M$ función continua (dónde I es un intervalo conexo tal que $0 \in I$) y $f : M \to \mathbb{R}$ función diferenciable sobre la variedad. Entonces $f \circ \alpha$ es una función de I en $\mathbb{R}$. Se denota por

$$\alpha'(0)[f] = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t)\Big|_{t=0}$$

llamada **derivada direccional de f en la dirección de** $\alpha'(0)$.

Para dar la definición de vector tangente, tenemos que retomar el concepto de de **germen** de una función C^∞. Lo hacemos tomando una función $f : M \to \mathbb{R}$ y un punto $p \in M$. Decimos que $g : M \to \mathbb{R}$ es equivalente a f, si coinciden en una vecindad de p.

El conjunto de gérmenes de funciones reales C^∞ en un punto $p \in M$ es denotado por $C_p^\infty(M)$. Esta es un algebra sobre $\mathbb{R}$.

Generalizando la derivación en un punto en $\mathbb{R}^n$, definimos la **derivación en un punto en una variedad** M, o **derivación puntual de** $C_p^\infty(M)$ que sea un mapeo lineal $D : C_p^\infty(M) \to \mathbb{R}$ tal que

$$D(fg) = (Df)g(p) + f(p)Dg$$

Definición 8.1.3
Sea M una variedad suave. Un **vector tangente en un punto** $p \in M$ es una derivación en p.

Retomando la parte de la derivada direccional, tomemos una carta (ϕ, U) tal que $p \in U$. Tenemos entonces que

$$
\begin{aligned}
\alpha'(0)[f] &= \frac{d}{dt}(f\circ\alpha)(t)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(f\circ\phi^{-1}\circ\phi\circ\alpha)(t)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}((f\circ\phi^{-1})\circ(\phi\circ\alpha))(t)\Big|_{t=0} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dr^i}(f\circ\phi^{-1})\Big|_{\phi(p)}\cdot\frac{dr^i}{dt}\Big|_{t=0}
\end{aligned}
\tag{8.1}
$$

pues, en este caso vemos que $\phi\circ\alpha : I\to\mathbb{R}^n$, tal que $t\mapsto(r^1(t),\dots,r^n(t))$ (r^i son las funciones coordenadas de $\mathbb{R}^n$), para todo $t\in I$, donde $\phi : U\to\mathbb{R}^n$.

De esta forma, se tiene que

$$
\alpha'(0)[f] = \sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dr^i}(f\circ\phi^{-1})\Big|_{\phi(p)}\cdot\frac{dr^i}{dt}\Big|_{t=0}
$$

definimos las coordenadas locales de la variedad M en la carta (ϕ, U), como:

$$
x^i := r^i\circ\phi : U\to\mathbb{R}
$$

de esta forma, se sigue que

$$
\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p f = \frac{\partial}{\partial r^i}\Big|_\phi f\circ\phi^{-1}\in\mathbb{R}
$$

de esta forma, (6.1) es escribe como:

$$
\alpha'(0)[f] = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p f\cdot\frac{dr^i}{dt}\Big|_{t=0}
$$

(de alguna forma, lo que se hace es definir la derivación de una función en dirección de una curva sobre la variedad). Podemos ver entonces a $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ como un operador lineal que va de $C_p^\infty(M)$ en $\mathbb{R}$. es decir, es una derivación.

Observación 8.1.1
Airmamos que $d\phi^{-1}_{\phi(p)}(\frac{\partial}{\partial r^i}\Big|_{\phi(p)}) = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$.

Demostración:
No se probará, pues no se entendió en lo absoluto lo que hizo el profesor. □

De ahora en adelante, no habrá definienciones formales, simplemente se intenta dar una idea breve de lo que sucede para llegar a formas diferenciales sobre variedades.

Observación 8.1.2
Con estas ideas, afirmamos que

$$
\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p x^j = \delta_{ij}
$$

Demostración:
En efecto, observemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x^i}x^j &= \frac{\partial}{\partial r^i}\Big|_{\phi(p)}(x^j\circ\phi^{-1}) \\
&= \frac{\partial}{\partial r^i}\Big|_{\phi(p)}(r^j\circ\phi\circ\phi^{-1}) \\
&= \frac{\partial}{\partial r^i}\Big|_{\phi(p)}(r^j) \\
&= \frac{\partial r^j}{\partial r^i}\Big|_{\phi(p)} \\
&= \delta_{ij}
\end{aligned}$$

□

8.2. El diferencial de un mapeo

Definición 8.2.1
Sea $F : N \to M$ un mapeo C^∞ entre dos variedades suaves. Para cada punto $p \in N$, el mapeo F induce un mapeo lineal entre espacios tangentes, llamado **su diferencial en** p, dado como

$$F_* : T_pN \to T_{F(p)}M$$

como sigue. Si $X_p \in T_pN$, entonces $F_*(X_p)$ es el vector tangente en $T_{F(p)}M$ definido por

$$(F_*(X_p))[f] := X_p[f\circ F] \in \mathbb{R}, \quad \text{para } f \in C^\infty_{F(p)}(M) \tag{8.2}$$

Aquí, f es un gérmen en $F(p)$, representado por una función C^∞ en una vecindad de $F(p)$. En la ecuación (8.2), la definición es independiente del gérmen y el representante de la función (cosa que se tiene que probar en el siguiente ejercicio)

Ejercicio 8.2.1
Pruebe que $F_*(X_p)$ es una derivación en $F(p)$ y que el mapeo $F_* : T_pN \to T_{F(p)}M$ es lineal.

Proposición 8.2.9
Sea $(U,\phi) = (U, x^1, \cdots, x^n)$ una carta alrededor de un punto $p \in M$, siendo M una variedad. Entonces

$$\phi_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right) = \frac{\partial}{\partial r^i}\Big|_{\phi(p)}$$

Demostración:
Sea $f \in C^\infty_{\phi(p)}$, entonces

$$\begin{aligned}
&\phi_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right)f \\
&\qquad = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p(f\circ\phi) \\
&\qquad = \frac{\partial}{\partial r^i}\Big|_{\phi(p)}(f\circ\phi\circ\phi^{-1}) \\
&\qquad = \frac{\partial}{\partial r^i}\Big|_{\phi(p)}f
\end{aligned}$$

$\square$

Proposición 8.2.10
Si (U, ϕ) es una carta que contiene a $p \in M$, entonces el espacio tangente T_pM tiene como base

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p$$

Proposición 8.2.11 (Matriz de transición para vectores coordenados)
Dadas cartas $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ y $(V, \psi) = (V, y^1, \dots, y^n)$ sobre una variedad M tales que $U \cap V \neq \emptyset$, entonces

$$\frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

en $U \cap V$.