Nota: para el lema del cubo, usar la norma máxima, $\|\vec{x}\|_m = \sup\{|x_i| : \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)\}$.
De esta forma, ya queda bien definido el ejercicio.

Lema 5. Sean $U, V \subset \mathbb{R}^n$ abiertos, $h: U \to V$ un difeomorfismo de clase C^1, $X \subset U$ compacto J-medible y $N = \sup\{|Dh(x)| : x \in X\}$. Entonces $h(X)$ es J-medible y $c(h(X)) \leq N^m \cdot c(X)$.

Dem.

Suponga inicialmente que X es un cubo de centro p y arista a i.e $X = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_m \leq a/2\}$. Por el teorema del valor medio: $\|h(x) - h(p)\|_m \leq N \cdot \frac{a}{2}$ ... (1)
Lo anterior muestra que $h(X)$ está contenido en el cubo $D = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - h(p)\|_m \leq N \cdot \frac{a}{2}\}$, cuya arista mide Na, luego $c(h(x)) \leq c(D) = N^m a^m = N^m c(X)$. Además, $h(X)$ es J-medible por ser h difeomorfismo y X J-medible.
Considere ahora el caso general. Sea $\varepsilon > 0$, entonces $\|Dh(x)\|^m < N^m + \varepsilon$ $\forall x \in X$. Como Dh es continua (por ser h de clase C^1), existe un abierto U_0 tal que $X \subset U_0 \subset U$ y $\|Dh(y)\|^m \leq N^m + \varepsilon$ $\forall y \in U_0$ ... (2)
Por ser X compacto, existe una colección finita de cubos $C_1, \dots, C_k$ tales que $X \subset \bigcup_{i \in N_k} C_i \subset U_0$ y $\sum_{i=1}^{k} c(C_i) \leq c(X) + \varepsilon$ ... (3)
Para cada $i \in N_k$ sea $N_i = \sup\{Dh(y) : y \in C_i\}$. Se tiene que $N_i^m \leq N^m + \varepsilon$ (es claro).
Por otra parte: $h(X) \subset \bigcup_{i \in N_k} h(C_i)$. Por ser C_i un cubo: $c(h(C_i)) \leq N_i^m c(C_i)$. Luego:
$$c(h(x)) \leq \sum_{i \in N_k} c(h(C_i)) \leq \sum_{i \in N_k} N_i^m c(C_i) \leq (N^m + \varepsilon) \sum_{i \in N_k} c(C_i) \leq (N^m + \varepsilon)(c(X) + \varepsilon).$$
Luego, por ser ε arbitrario: $c(h(X)) \leq N^m c(X)$. $\square$

Def. Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto J-medible, una descomposición de X es una colección finita $D = \{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ de conjuntos J-medibles tales que: $X = \bigcup_{i \in N_k} X_i$ y: $\operatorname{int}(X_i \cap X_j) = \phi$ $\forall i, j \in N_k, i \neq j$. La norma de la descomposición D, denotada por: $\|D\|$, es el máximo del conjunto $\{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ siendo d_i el diámetro de X_i, i.e: $d_i = \sup\{\|x - y\| : x, y \in X_i\}$, el cual está bien definido, pues si es J-medible, es acotado, luego el sup esta bien definido.
Una descomposición puntuada es una pareja $D^* = (D, (x_i))$, en la que $D = \{X_1, \dots, X_k\}$ es una descomposición de X y $x_i \in X_i$ $\forall i \in N_k$.

La suma de Riemman de una función acotada, $f: \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ con respecto a la descomposición puntuada $D^* = (D, (x_i))$ de $\mathbb{X}$, denotada por $\Sigma(f, D^*)$ es:

$$\Sigma(f, D^*) = \sum_{i \in \mathbb{N}_k} f(x_i) \cdot c(\mathbb{X}_i)$$

Teorema 15.

Sea $f: \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ una función acotada, $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto J-medible. f es integrable si y sólo si existe $\lim_{\|D\| \to 0} \Sigma(f, D^*)$, i.e si $\exists\, I \in \mathbb{R}$ tal que $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que $|\Sigma(f, D^*) - I| < \varepsilon$ siempre que $D^* = (D, (x_i))$ sea tal que $\|D\| < \delta$. En tal caso: $\int_{\mathbb{X}} f = I$.

Dem:

Sean $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ subconjuntos no vacíos, $\delta > 0$, se escribirá $d(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) < \delta$ si existen $x \in \mathbb{X}$, $y \in \mathbb{Y}$ tales que $\|x - y\| < \delta$.

Lema:

Sean $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^n$ J-medibles, $c(\mathbb{Y}) = 0$ $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que si $D = \{\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_m\}$ es cualquier descomposición de $\mathbb{X}$, cuya norma: $\|D\| < \delta$, entonces $\sum_{i \in A} c(\mathbb{X}_i) < \varepsilon$ siendo $A = \{ i \in \mathbb{N}_m : d(\mathbb{X}_i, \mathbb{Y}) < \delta \}$.

Dem:

Sea $\varepsilon > 0$. Como $c(\mathbb{Y}) = 0$, se tiene que si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un cubo cerrado que contiene a $\mathbb{Y}$, entonces: $\int_A \chi_{\mathbb{Y}} = 0$ siendo $\chi_{\mathbb{Y}}$ la función característica de $\mathbb{Y}$. Luego:

$$\int_A \chi_{\mathbb{Y}} = \overline{\int_A} \chi_{\mathbb{Y}} = \inf\{S(f, P) : P \in \Gamma\}$$

Γ el conjunto de particiones de A. Como ε no es cota inferior de $\{S(f, P) : P \in \Gamma\}$, $\exists$ $Q \in \Gamma$ tal que $S(f, Q) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sean $B_1, \dots, B_k$ las subceldas de A determinadas por Q para las cuales $M_{B_i} = 1$ $\forall\, i \in \mathbb{N}_k$. Luego:

$$\mathbb{Y} \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}_k} B_i \quad y \quad \sum_{i \in \mathbb{N}_k} c(B_i) = S(\chi_{\mathbb{Y}}, Q) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Para cada $i \in \mathbb{N}_k$, $B_i = \prod_{j \in \mathbb{N}_n} [a_{ji}, b_{ji}]$; sea $B'_{i\delta} = \prod_{j \in \mathbb{N}_n} [a_{ji} - 2\delta, b_{ji} + 2\delta]$ $\forall\, \delta > 0$ (Arbitrario). Es claro que: $\lim_{\delta \to 0} c(B'_{i\delta}) = B_i$ ... (4) por tanto, $\exists\, \delta > 0$ tal que $\sum_{i \in \mathbb{N}_k} c(B'_{i\delta}) < \varepsilon$.

Veamos ahora que, si Z es un conjunto tal que su diámetro es menor o igual a δ, tal que $d(Z, B_i) < \delta$, entonces $Z \subset B'_{i\delta}$ ... (5)

Por tanto, si $D = \{\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_m\}$ es una descomposición de $\mathbb{X}$ tal que $\|D\| < \delta$ y el diámetro de $\mathbb{X}_j$ es menor o igual a δ, por lo cual, si $d(\mathbb{X}_j, B_i) < \delta$, entonces $\mathbb{X}_j \subset B'_{i\delta}$

Consecuentemente, como $\text{int}(\mathbb{X}_r \cap \mathbb{X}_l) = \phi$ si $r \neq l$, se concluye que $\sum_{i \in \mathcal{L}} c(\mathbb{X}_i) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}_K} c(B_{is}^{j}) < \varepsilon$. □ ... (5')

Dada una descomposición $D = \{\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \ldots, \mathbb{X}_K\}$ de un conjunto J-medible y $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ acotada, $\inf\{f(x) : x \in \mathbb{X}_i\}$ y $\sup\{f(x) : x \in \mathbb{X}_i\}$ se denotarán por m_i y M_i, $\forall i \in \mathbb{N}_K$, respectivamente (los cuáles están bien definidos, pues f es acotado).
Las sumas inferior y superior de f relativas a D son respectivamente:

$$i(f, D) = \sum_{i \in \mathbb{N}_K} m_i c(\mathbb{X}_i), \quad s(f, D) = \sum_{i \in \mathbb{N}_K} M_i c(\mathbb{X}_i)$$

Asimismo, se definen $\overline{\int_{\mathbb{X}}} f := \overline{\int_A} \hat{f}$ y $\underline{\int_{\mathbb{X}}} f := \underline{\int_A} \hat{f}$, siendo $A \subset \mathbb{R}^n$ una celda cerrada tal que $\mathbb{X} \subset A$, y $\hat{f} : A \to \mathbb{R}$ la función característica de f.

Proposición

Sean $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$ J-medible, $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ acotada, entonces:

$$\underline{\int_{\mathbb{X}}} f = \lim_{\|D\| \to 0} i(f, D) \quad \text{y} \quad \overline{\int_{\mathbb{X}}} f = \lim_{\|D\| \to 0} s(f, D)$$

Dem:

Se demostrará la segunda igualdad. Como f es acotada, $\exists\ K \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq K\ \forall x \in \mathbb{X}$.
Se considerará primero el caso en que f es no negativa. Tenemos entonces que $0 \leq f(x) \leq K\ \forall x \in \mathbb{X}$. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ una celda cerrada que contiene a $\mathbb{X}$ y $\hat{f}$ la función característica de f en A.
Sea $\varepsilon > 0$, para este $\varepsilon > 0$ $\exists\ P \in \mathcal{J}_A$ tal que $s(\hat{f}, P) < \frac{\varepsilon}{2} + \overline{\int_A} f$. Sea ahora $\mathbb{Y} = \bigcup_{B \in H} \partial B$, donde H es el conjunto de subceldas de A determinadas por la partición P. Es claro que $c(\mathbb{Y}) = 0$ ... (6)
Por el lema anterior, para este $\varepsilon > 0$ $\exists\ \delta > 0$ tal que, $\forall D$ descomposición de $\mathbb{X}$, con $\|D\| < \delta$, $\sum_{i \in \mathcal{A}} c(\mathbb{X}_i) < \frac{\varepsilon}{2K}$, $\mathcal{A} = \{i \in \mathbb{N}_m : d(\mathbb{X}_i, \mathbb{Y}) < \delta\}$, donde $D = \{\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_m\}$, tome $\mathcal{B} = \mathbb{N}_m \setminus \mathcal{A}$.
Sea $i \in \mathcal{B}$, entonces $\exists\ B_j \in H$ tal que $\mathbb{X}_i \subset B_j$ ... (7). Se tiene que:

$$s(f, D) = \sum_{i \in \mathcal{A}} M_i c(\mathbb{X}_i) + \sum_{i \in \mathcal{B}} M_i c(\mathbb{X}_i)$$

Es claro que:

$$\sum_{i\in A} M_i c(\overline{X}_i) \leq \sum_{i\in A} K\cdot c(\overline{X}_i) < K\cdot \frac{\varepsilon}{2K} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Asimismo:

$M_B \geq 0$, luego, no se añaden términos negativos, lo que conserva la desigualdad.

$$\sum_{i\in B} M_i c(\overline{X}_i) \leq \sum_{B\in H} M_B c(B) = s(\hat{f}, P)$$

Pues $M_i \leq M_B$, ya que cada $\overline{X}_i \subset B$ $\forall i \in \mathbb{N}_m$ y algún $B\in H$. Como $s(\hat{f},P) < \overline{\int_{\overline{X}}} f + \frac{\varepsilon}{2}$, entonces:

$$s(f,D) = \sum_{i\in A} M_i c(\overline{X}_i) + \sum_{i\in B} M_i c(\overline{X}_i) < \frac{\varepsilon}{2} + \overline{\int_{\overline{X}}} f + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \varepsilon + \overline{\int_{\overline{X}}} f$$

$$\Rightarrow s(f,D) - \overline{\int_{\overline{X}}} f < \varepsilon$$

Probaremos que $\overline{\int_{\overline{X}}} f \leq s(f,D)$ $\forall$ D descomposición de $\overline{X}$.

Sea $Z = \bigcup_{i=1}^{k} \partial \overline{X}_i$, entonces $c(Z) = 0$. Sea $\varepsilon' > 0$. Por el lema anterior, $\exists\, \delta' > 0$ tal que si Q es una partición de A tal que $\|Q\| < \delta'$, entonces la suma de los contenidos de las subceldas de A determinadas por la part. Q que intersecan a Z es menor que $\frac{\varepsilon'}{K}$. ($Z \subset A$ es J-medible y toda partición de A, entendida como el conjunto de subceldas determinadas por ella, es una descomposición de A. Si una subcelda de B determinada por Q interseca a Z, entonces $\exists\, x \in B$ y $y \in Z$ tales que $\|x-y\| < \delta'$, esto es, las celdas que intersecan a Z cumplen las condiciones para aplicar el lema anterior). (7')

Sean $\{B_1', \dots, B_r'\}$ el conjunto de subceldas de A determinadas por Q; $\Gamma = \{i \in \mathbb{N}_r : B_i' \cap Z \neq \phi\}$ y $\Lambda = \mathbb{N}_r \setminus \Gamma$. Es claro que:

$$s(\hat{f},Q) = \sum_{i\in\Gamma} M_i c(B_i') + \sum_{i\in\Lambda} M_i c(B_i') \quad \dots \quad (i)$$

Observe que:

$$\sum_{i\in\Gamma} M_i c(B_i') \leq K\cdot \sum_{i\in\Gamma} c(B_i') < \varepsilon'$$

Por otra parte, si $i \in \Lambda$, $B_i' \cap Fr(\overline{X}_j) = \phi$ $\forall j \in \mathbb{N}_K$. Luego, como B_i' es conexo, debe ocurrir que $B_i' \subset \overline{X}_j$ para algún $j \in \mathbb{N}_K$. Por tanto:

$$\sum_{i\in\Lambda} M_{B_i} c(B_i') \leq \sum_{i\in\mathbb{N}_K} M_i c(\overline{X}_i) = s(f,D)$$

(observe que si $B_i' \cap \overline{X} = \phi$, entonces $M_i = \sup \hat{f}(B_i') = 0$, luego estos términos se eliminan de la sumatoria y, quedan solo los B_i' dentro de $\overline{X}$).

De (i):

$$s(\hat{f},Q) = \sum_{i\in J} M_i c(B_i') + \sum_{i\in \Lambda} M_i c(B_i') < \varepsilon' + s(f,D)$$

Y:

$$\overline{\int_X} f := \overline{\int_A} \hat{f} \leq s(\hat{f},Q) < s(f,D) + \varepsilon' \quad \forall\, \varepsilon' > 0$$
$$\Rightarrow \overline{\int_X} f \leq s(f,D)$$

Luego:
$$\left| s(f,D) - \overline{\int_X} f \right| < \varepsilon$$

Lo que prueba el resultado. $\triangle$

Para el caso general, por ser f acotada, $\exists\, K \in \mathbb{R}$ tal que: $-K \leq f(x) \leq K \ \forall x \in X$ entonces $f+K$ es no negativa. Luego:

$$\overline{\int_X} f+K = \lim_{\|D\|\to 0} s(f+K, D)$$

Observe que: $\overline{\int_X} f+K = Kc(X) + \overline{\int_X} f$ y $s(f+K, D) = Kc(X) + s(f,D)$. Luego: ... (7'')

$$\overline{\int_X} f = \lim_{\|D\|\to 0} s(f,D)$$

(El otro límite es análogo).

q.e.d.

Corolario (a la prueba).

Sea $f: X \to \mathbb{R}$ acotada no negativa, $X \subset \mathbb{R}^n$ J-medible, entonces $\underline{\int_X} f = \sup\{ i(f,D) : D \in \Gamma\}$ y $\overline{\int_X} \inf\{ s(f,D) : D \in \Gamma\}$, Γ el conjunto de descomposiciones de X.

Dem.

En la prueba anterior, se demostró que toda descomposición de X cumple que $s(f, D) \geq \overline{\int_X} f$, por tanto $\overline{\int_X} f$ es cota inferior de $\{s(f,D) : D \in \Gamma\}$ y a su vez, se probó que $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0$ tal que si $D \in \Gamma$ y $\|D\| < \delta$, entonces $s(f,D) < \overline{\int_X} f + \varepsilon$ lo que muestra que $\overline{\int_X} f$ es la máxima cota inferior de $\{s(f,D) : D \in \Gamma\}$.

q.e.d.

(La otra igualdad es análoga).

Con todas estos elementos, ya somos capaces de realizar la demostración.

Teorema 15.

Sea $f: X \to \mathbb{R}$ una función acotada, $X \subset \mathbb{R}^n$ J-medible, f es integrable sii existe el límite: $I := \lim_{\|D\|\to 0} \Sigma(f, D^*)$ y en tal caso: $\int_X f = I$.

Dem:

$\Rightarrow$ Sea D^* una descomposición puntuada de $\mathbb{X}$, $D=(D,(x_i))$, siendo $D=\{\mathbb{X}_1,\dots,\mathbb{X}_K\}$. Entonces: $i(f,D)=\sum_{i=1}^{K} m_i c(\mathbb{X}_i)\leqslant \sum_{i=1}^{K} f(x_i)c(\mathbb{X}_i)=\sum(f,D^*)\leqslant \sum_{i=1}^{K} M_i c(\mathbb{X}_i)=s(f,D)$. Por la proposición anterior, y del hecho de que f es integrable, tenemos que:

$$\lim_{\|D\|\to 0} i(f,D)=\underline{\int_{\mathbb{X}}} f=\overline{\int_{\mathbb{X}}} f=\lim_{\|D\|\to 0} s(f,D)$$

Por tanto: $\lim_{\|D\|\to 0}\sum(f,D^*)$ existe, y: $\lim_{\|D\|\to 0}\sum(f,D^*)=\int_{\mathbb{X}} f$. Δ

$\Leftarrow$) Suponga que el límite existe. Para probar que f es integrable, primero se probará para el caso en que f es no negativa. Sea $\varepsilon>0$, entonces $\exists\ \delta>0$ tal que $\|D\|<\delta$ implica $|\sum(f,D^*)-I|<\frac{\varepsilon}{4}$. Sea $D=\{\mathbb{X}_1,\dots,\mathbb{X}_K\}$ una descomposición de $\mathbb{X}$ tal que: $\|D\|<\delta$.

$\forall\ i\in\mathbb{N}_K$, tome $m_i=\inf f(\mathbb{X}_i)$. Por ser el ínfimo, para el $\varepsilon>0$ $\exists\ \xi_i\in\mathbb{X}_i$ tal que $f(\xi_i)<m_i+\frac{\varepsilon}{4Kc(\mathbb{X}_i)}$. Sea ahora D^* la descomposición puntuada: $(D,(\xi_i))$. Se tiene que:

$$\sum(f,D^*)=\sum_{i=1}^{K} f(\xi_i)\cdot c(\mathbb{X}_i)<\sum_{i=1}^{K}\left(m_i+\frac{\varepsilon}{4Kc(\mathbb{X}_i)}\right)c(\mathbb{X}_i)=i(f,D)+\frac{\varepsilon}{4}$$

Por otra parte, $\forall\ i\in\mathbb{N}_K$, tome $M_i=\sup f(\mathbb{X}_i)$. Luego, para el $\varepsilon>0$ $\exists\ \eta_i\in\mathbb{X}_i$ tal que $f(\eta_i)>M_i-\frac{\varepsilon}{4Kc(\mathbb{X}_i)}$. Sea $\hat{D}^*=(D,(\eta_i))$. Luego:

$$\sum(f,\hat{D}^*)=\sum_{i=1}^{K} f(\eta_i)c(\mathbb{X}_i)>\sum_{i=1}^{K}\left(M_i-\frac{\varepsilon}{4Kc(\mathbb{X}_i)}\right)\cdot c(\mathbb{X}_i)=s(f,D)-\frac{\varepsilon}{4}$$

Por tanto:

$$\sum(f,D^*)-\frac{\varepsilon}{4}<i(f,D)\leqslant s(f,D)\leqslant\sum(f,\hat{D}^*)+\frac{\varepsilon}{4}$$

Como $\|D\|<\delta$, entonces:

$$\left|\sum(f,D^*)-I\right|<\frac{\varepsilon}{4}\quad y\quad \left|\sum(f,\hat{D}^*)-I\right|<\frac{\varepsilon}{4}$$

$$\Rightarrow I-\frac{\varepsilon}{4}<\sum(f,D^*)\quad y\quad \sum(f,\hat{D}^*)<\frac{\varepsilon}{4}+I$$

Por tanto:

$$I-\frac{\varepsilon}{2}<i(f,D)\leqslant s(f,D)<I+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow 0\leqslant s(f,D)-i(f,D)<\varepsilon$$

Como $\varepsilon>0$ fue arbitrario, se concluye que:

$$\sup\{i(f,D): D\in\Gamma\}=\inf\{s(f,D): D\in\Gamma\}\ \ldots\ (8)$$

El corolario anterior implica que f es integrable, y

(1) Por la desigualdad del valor medio:

$$\|h(x)-h(p)\| \leqslant \|Dh(c)\cdot(x-p)\|$$

con $\| \,\|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la norma euclidiana. Sabemos que: $\|Dh(c)\cdot(x-p)\| \leqslant \|Dh(c)\|\cdot\|x-p\| \leqslant N\cdot\|x-p\|$

Veamos que $\|(0,0,5)\| \leqslant \|(2,2,2)\|$, pero $|2| \leqslant |5|$, luego $\|(2,2,2)\|_m \leqslant \|(0,0,5)\|_m$.

Por tanto, dada la desigualdad, no se cumple lo anterior.

Luego, ¿qué hacer?

Cualquier resultado válido con una norma en $\mathbb{R}^n$, será el mismo con cualquier otra norma.

$\square$

(2) Sea $g: U \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|Dh(x)\|^m$ } Probar Continuidad. Sea $c = N^m + \varepsilon$. Dado $x \in \mathbb{X}$, $g(x) < C$, pues $g(x) = \|Dh(x)\|^m < N^m + \varepsilon = c$. Sea $\hat{\varepsilon}_x = c - g(x) > 0$. Como g es continua, $\exists\, \delta_x > 0$ tal que si $y \in E_{\delta_x}(x) \cap U := V_x$ (V_x es un abie-rto), entonces: $|g(y) - g(x)| < \hat{\varepsilon}_x$. Luego $g(y) < \hat{\varepsilon}_x + g(x) = c - g(x) + g(x) = c$ $\forall\, y \in V_x$. Por tanto, tomando $U_0 = \bigcup_{x \in \mathbb{X}} V_x$, se tiene lo deseado.

Prueba continuidad:

Sabemos que $Dh: \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Tome $\delta =$
Entonces, si $y \in \mathbb{R}^n$ y $\|x - y\| < \delta$, entonces:

$$\|Dh(x) - Dh(y)\|$$

(4) Para este $\varepsilon>0$ $\exists\ \delta_0>0 \ni$ si $\delta<\delta_0$, entonces $|c(B'_{i\delta})-c(B_i)|<\frac{\varepsilon}{2K}$. Luego: Como $c(B'_{i\delta})>c(B_i)$, entonces:

$$
\begin{aligned}
c(B'_{i\delta})-c(B_i) &< \frac{\varepsilon}{2K}\\
\Rightarrow \sum_{i\in\mathbb{N}_K}[c(B'_{i\delta})-c(B_i)] &< \sum_{i\in\mathbb{N}_K}\frac{\varepsilon}{2K}\\
\Rightarrow \sum_{i\in\mathbb{N}_K}c(B'_{i\delta}) &< \frac{\varepsilon}{2}+\sum_{i\in\mathbb{N}_K}c(B_i)\\
&< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon
\end{aligned}
$$

δ asociado a celda, tomar el mínimo de las K-celdas.

Tome $\delta=\frac{\delta_0}{2}$, luego se cumple lo anterior. □

(5) Sea $z\in Z$, como $d(Z,B_i)<\delta$, entonces $\exists\ x\in Z$ y $y\in B_i$ tales que: $\|x-y\|<\delta$ luego, como $\|z-x\|\leq\delta$, se sigue que, $\|z-y\|<2\delta$. Siendo que $y\in B_i=\prod_{j\in\mathbb{N}_m}[a_{ji}, b_{ji}]$, entonces $z\in\prod_{j\in\mathbb{N}_m}[a_{ji}-2\delta, b_{ji}+2\delta]$, entonces $z\in B'_{i\delta}$. □

(6) Como $Y=\bigcup_{B\in H}\partial B$ y B es una celda, entonces ∂B es de medida nula, luego es J-medible y $c(\partial B)=0$. Así: $c(Y)\leq\sum_{B\in H}c(\partial B)\leq 0$. Luego $c(Y)=0$. □

(7) $X_i\subset B_j$. Si esto no sucede, $\exists\ x,y\in X_i$ tales que $x\in B_j$ y $y\notin B_j$. Como $\|D\|<\delta$, entonces $\|x-y\|<\delta$. La recta que une a x y y, interseca a Y, por tanto, $\exists\ c\in l(x,y)$ tal que $c\in Y$. Así: $\|x-c\|<\delta$. Así $d(X_i,Y)<\delta$, por tanto $i\in\mathcal{A}$ #c, pues $i\in\mathcal{B}$. ← Checar otra vez.

(5') Como $Y\subset\bigcup_{i\in\mathbb{N}_K}B_i$, si $d(X_j,Y)<\delta$, entonces $\exists\ x\in X_j$ y $y\in Y \ni \|x-y\|<\delta$, pero como $Y\subset\bigcup_{i\in\mathbb{N}_K}B_i$, $\exists\ i\in\mathbb{N}_K\ni y\in B_i$, luego $d(X_j,B_i)<\delta$, para lo cual: $X_j\subset B'_{i\delta}$. así $c(X_j)\leq c(B'_{i\delta})$. Sea $A=\{l\in\mathbb{N}_r : X_j\subset B_{i\delta}\}$, como $\operatorname{int}(X_\alpha\cap X_\beta)=\emptyset\ \forall\ \alpha,\beta\in\mathbb{N}_r$, luego: $\sum_{j\in A}c(X_j)\leq c(B'_{i\delta})$. Por tanto: $\sum_{i\in A}c(X_i)\leq\sum_{i\in\mathbb{N}_K}c(B'_{i\delta})<\varepsilon$

(8) Probaremos que $\sup\{i(f,D): D\in\Gamma\}=\inf\{s(f,D): D\in\Gamma\}$. Como $i(f,D)\leq s(f,D)$, $\forall\ D\in\Gamma$ entonces $\sup A\leq s(f,D)$, luego $\sup A\leq\inf B$, donde $A=\{i(f,D): D\in\Gamma\}$ y $B=\{s(f,D): D\in\Gamma\}$. Suponga que $\sup A<\inf(B)$.
Sea $\varepsilon=\inf B-\sup A>0$. Luego, $\exists\ D\in\Gamma$ tal que:

$$
\begin{aligned}
&0\leq s(f,D)-i(f,D)<\varepsilon\\
&\Rightarrow s(f,D)<\varepsilon+i(f,D)
\end{aligned}
$$

Por tanto:

$$\inf B<\varepsilon+i(f,D)\leq\varepsilon+\sup A=\inf B-\sup A+\sup A=\inf B$$

Luego: $\inf B < \inf B$ $\#_c$. Por tanto $\sup A = \inf B$.

Probaremos que $i(f,D) \leq s(f,R)$ $\forall$ $D, R \in \Gamma$. Sean $D, R \in \Gamma$, $D = \{\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_k\}$ y $R = \{\overline{Y}_1, \ldots, \overline{Y}_l\}$. Tome $S = \{\overline{X}_i \cap \overline{Y}_j : i \in \mathbb{N}_k, j \in \mathbb{N}_l\}$. Probaremos que S es descomposición de $\overline{X}$:

$$\bigcup_{(i,j)\in \mathbb{N}_k \times \mathbb{N}_l} \overline{X}_i \cap \overline{Y}_i = \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}_k} \overline{X}_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}_l} \overline{Y}_j\right) = \overline{X} \cap \overline{X} = \overline{X}$$

Por tanto, $S \in \Gamma$. Veamos ahora que: $i(f,D) \leq i(f,S)$ y $s(f,S) \leq s(f,R)$. Basta con probar la segunda.

$$s(f,D) = \sum_{(i,j)\in \mathbb{N}_k \times \mathbb{N}_l} M_{ij}\, c(\overline{X}_i \cap \overline{Y}_j) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} M_{ij}\, c(\overline{X}_i \cap \overline{Y}_j) \ldots$$

Pero: $c(\overline{X}_i \cap \overline{Y}_i) = c(\overline{X}_i) + c(\overline{Y}_i) - c(\overline{X}_i \cup \overline{Y}_i)$. Por tanto:

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} M_{ij}\, c(\overline{X}_i \cap \overline{Y}_j) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l}$$

(5') Por probar: $\sum_{i\in A} c(\overline{X}_i) \leq \sum_{i=1}^{K} c(B'_{i\delta}) < \varepsilon$. Es claro que, si $\overline{X}_j \subset B'_{i\delta}$, entonces $c(\overline{X}_j) \leqslant c(B'_{i\delta})$. Sea $I_j = \{ i \in \mathbb{N}_K : \overline{X}_i \subset B'_{j\delta} \}$. Por tanto:

$$\sum_{i\in I_j} c(\overline{X}_i) = c\left(\bigcup_{i\in I_j} \overline{X}_i\right) + c\left(\bigcap_{i\in I_j} \overline{X}_i\right)$$

Pero $\operatorname{int}\{ \bigcap_{i\in I_j} \overline{X}_i \} = \emptyset$, luego: $c\left(\bigcap_{i\in I_j} \overline{X}_i\right) = 0$. Así:

$$\sum_{i\in I_j} c(\overline{X}_i) = c\left(\bigcup_{i\in I_j} \overline{X}_i\right) \leqslant c(B'_{j\delta})$$

Pues $\bigcup_{i\in I_j} \overline{X}_i \subset B'_{j\delta}$. Por tanto:

$$\sum_{i\in A} c(\overline{X}_i) \leqslant \sum_{j=1}^{l} \left(\sum_{i\in I_j} c(\overline{X}_i) \right) \leqslant \sum_{j=1}^{l} c(B'_{j\delta}) < \varepsilon$$

Como se quería demostrar. □

(7') $d(B,Z) < \delta' \Leftrightarrow B \cap Z \neq \emptyset$.