Ejercicios Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

15 de abril de 2024

Índice general

Capítulo 1

Espacios Hilbertianos

1.1. Ejercicios

Ejercicio 1.1.1
Pruebe lo siguiente:

I. Sean H, H' espacios hilbertianos y sea T una aplicación lineal continua de H en H'. **Demuestre** que existe una única aplicación lineal $\widetilde{T} : H' \to H$ tal que

$$\left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'}\right) = \left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right), \quad \forall\vec{x} \in H \text{ y } \forall\vec{x'} \in H'$$

Pruebe también que $\widetilde{T}$ es continua, $\widetilde{\widetilde{T}} = T$ y $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$. El operador $\widetilde{T}$ se llama la **adjunta de** T.

II. **Demuestre** las reglas:

$$\widetilde{T_1 + T_2} = \widetilde{T}_1 + \widetilde{T}_2 \quad \text{y} \quad \widetilde{\alpha T} = \overline{\alpha}\widetilde{T}$$

III. Sea H'' un tercer espacio hilbertiano. Sean T una aplicación lineal continua de H en H' y U una aplicación lineal continua de H' en H''. **Pruebe** que:

$$\widetilde{U \circ T} = \widetilde{T} \circ \widetilde{U}$$

Demostración:
De (i): Se probarán dos cosas:

- **Unicidad**. Suponga que existen $S, W : H' \to H$ tales que:

$$\left(\vec{x}\middle|S\vec{x'}\right) = \left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) \quad \text{y} \quad \left(\vec{x}\middle|W\vec{x'}\right) = \left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right), \quad \forall\vec{x} \text{ y } \vec{x'} \in H'$$

entonces, se tiene que para $\vec{x'} \in H'$ fijo:

$$\begin{aligned} \left(\vec{x}\middle|S\vec{x'}\right) &= \left(\vec{x}\middle|W\vec{x'}\right) \\ \Rightarrow \left(\vec{x}\middle|S\vec{x'}\right) - \left(\vec{x}\middle|W\vec{x'}\right) &= 0 \\ \Rightarrow \left(\vec{x}\middle|S\vec{x'} - W\vec{x'}\right) &= 0 \forall\vec{x} \in H \end{aligned} \tag{1.1}$$

Por tanto, $S\vec{x'} = W\vec{x'}$. Como el $\vec{x'} \in H'$ fue arbitrario, se sigue que $S = W$.

- **Existencia**. Para cada $\vec{x'} \in H'$, sea $L_{\vec{x'}} : H \to \mathbb{K}$ definida como sigue:

$$L_{\vec{x'}}(\vec{x}) = \left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right)$$

Afirmamos que $L_{\vec{x'}}$ es lineal continuo. En efecto, si $\vec{x}, \vec{y} \in H$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
L_{\vec{x'}}(\vec{x} + \alpha\vec{y}) &= \left(T(\vec{x} + \alpha\vec{y})\middle|\vec{x'}\right) \\
&= \left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) + \alpha\left(T\vec{y}\middle|\vec{x'}\right) \\
&= L_{\vec{x'}}(\vec{x}) + \alpha L_{\vec{x'}}(\vec{y})
\end{aligned}$$

luego es lineal, y es continuo ya que

$$\begin{aligned}
\left|L_{\vec{x}}(\vec{x'})\right| &= \left|\left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right)\right| \\
&\leq \|T\vec{x}\|\|\vec{x'}\| \\
&\leq (\|T\|\|\vec{x'}\|)\|\vec{x}\|
\end{aligned}$$

donde la primera desigualdad es por Cauchy-Schwarts, y la segunda es por el hecho de que T es un funcional lineal continuo. Por tanto: $\|L_{\vec{x'}}\| \leq \|T\|\|\vec{x'}\|$. Luego, $L_{\vec{x'}}$ es lineal continuo, i.e. $L_{\vec{x'}} \in H^*$.

Por el teorema de Riesz, como la aplicación $G : H \to H^*$ es suprayectiva, para $\vec{x'} \in H'$ existe $\widetilde{T}\vec{x'} \in H$ tal que $L_{\vec{x'}} = G_{\widetilde{T}\vec{x'}}$, es decir que:

$$L_{\vec{x'}}\vec{x} = \left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'}\right) = G_{\widetilde{T}\vec{x'}}\vec{x}, \quad \forall\vec{x} \in H$$

Afirmamos que la aplicación $\widetilde{T} : H' \to H$ está bien definida y es lineal. En efecto, si $\widetilde{T}\vec{x'_1}, \widetilde{T}\vec{x'_2} \in H$ son tales que $L_{\vec{x'}} = G_{\widetilde{T}\vec{x'_1}}$ y $L_{\vec{x}} = G_{\widetilde{T}\vec{x'_1}}$, entonces:

$$\left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'_1}\right) \quad \text{y} \quad \left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'_2}\right), \quad \forall\vec{x} \in H$$

entonces:

$$\begin{aligned}
\left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'_1}\right) &= \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'_2}\right), \quad \forall\vec{x} \in H \\
\Rightarrow \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'_1} - \widetilde{T}\vec{x'_2}\right) &= 0 \quad \forall\vec{x} \in H \\
\Rightarrow \widetilde{T}\vec{x'_1} - \widetilde{T}\vec{x'_2} &= \vec{0} \\
\Rightarrow \widetilde{T}\vec{x'_1} &= \widetilde{T}\vec{x'_2}
\end{aligned}$$

por tanto, $\widetilde{T} : H' \to H$ está bien definida. Comprobemos ahora la linealidad, sean $\vec{x'}, \vec{y'} \in H'$, entonces:

$$\begin{aligned}
&\left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'}\right), \left(T\vec{x}\middle|\vec{y'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{y'}\right) \text{ y } \left(T\vec{x}\middle|\vec{x'} + \vec{y'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}(\vec{x'} + \vec{y'})\right) \quad \forall\vec{x} \in H \\
\Rightarrow &\left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) + \left(T\vec{x}\middle|\vec{y'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'}\right) + \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{y'}\right) \text{ y } \left(T\vec{x}\middle|\vec{x'} + \vec{y'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}(\vec{x'} + \vec{y'})\right) \quad \forall\vec{x} \in H \\
\Rightarrow &\left(T\vec{x}\middle|\vec{x'} + \vec{y'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'} + \widetilde{T}\vec{y'}\right) \text{ y } \left(T\vec{x}\middle|\vec{x'} + \vec{y'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}(\vec{x'} + \vec{y'})\right) \quad \forall\vec{x} \in H \\
\Rightarrow &\left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'} + \widetilde{T}\vec{y'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}(\vec{x'} + \vec{y'})\right) \quad \forall\vec{x} \in H \\
\Rightarrow &\left(\vec{x}\middle|(\widetilde{T}\vec{x'} + \widetilde{T}\vec{y'}) - \widetilde{T}(\vec{x'} + \vec{y'})\right) = 0 \quad \forall\vec{x} \in H \\
\Rightarrow &(\widetilde{T}\vec{x'} + \widetilde{T}\vec{y'}) - \widetilde{T}(\vec{x'} + \vec{y'}) = 0 \\
\Rightarrow &\widetilde{T}\vec{x'} + \widetilde{T}\vec{y'} = \widetilde{T}(\vec{x'} + \vec{y'})
\end{aligned}$$

y, si $\alpha \in \mathbb{K}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\left(T\vec{x}\middle|\alpha\vec{x'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}(\alpha\vec{x'})\right) \text{ y } \left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'}\right) \quad \forall\vec{x} \in H\\
\Rightarrow &\overline{\alpha}\left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}(\alpha\vec{x'})\right) \text{ y } \overline{\alpha}\left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) = \overline{\alpha}\left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'}\right) \quad \forall\vec{x} \in H\\
\Rightarrow &\overline{\alpha}\left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}(\alpha\vec{x'})\right) \text{ y } \overline{\alpha}\left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\alpha\widetilde{T}\vec{x'}\right) \quad \forall\vec{x} \in H\\
\Rightarrow &\left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}(\alpha\vec{x'})\right) = \left(\vec{x}\middle|\alpha\widetilde{T}\vec{x'}\right) \quad \forall\vec{x} \in H\\
\Rightarrow &\left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}(\alpha\vec{x'})\right) - \left(\vec{x}\middle|\alpha\widetilde{T}\vec{x'}\right) = 0 \quad \forall\vec{x} \in H\\
\Rightarrow &\left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}(\alpha\vec{x'}) - \alpha\widetilde{T}\vec{x'}\right) = 0 \quad \forall\vec{x} \in H\\
\Rightarrow &\widetilde{T}(\alpha\vec{x'}) - \alpha\widetilde{T}\vec{x'} = \vec{0}\\
\Rightarrow &\widetilde{T}(\alpha\vec{x'}) = \alpha\widetilde{T}\vec{x'}
\end{aligned}$$

por tanto $\widetilde{T}$ es lineal. Además, se cumple para todos $\vec{x} \in H$ y $\vec{x'} \in H'$ que:

$$\left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'}\right)$$

Veamos ahora que es continua, en efecto, por Cauchy-Schwartz se tiene que para todo $\vec{x'} \in H' \setminus \left\{\vec{0}\right\}$:

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{T}\vec{x'}\|^2 &= \left(\widetilde{T}\vec{x'}\middle|\widetilde{T}\vec{x'}\right)\\
&= \left(T(\widetilde{T}\vec{x'})\middle|\vec{x'}\right)\\
&\leq \left|\left(T(\widetilde{T}\vec{x'})\middle|\vec{x'}\right)\right|\\
&\leq \|T(\widetilde{T}\vec{x'})\|\|\vec{x'}\|\\
&\leq \|T\|\|\widetilde{T}\vec{x'}\|\|\vec{x'}\|
\end{aligned}$$

si $\vec{x'} \in \ker\widetilde{T}$ es claro que

$$0 = \|\widetilde{T}\vec{x'}\| \leq \|T\|\|\vec{x'}\|$$

y, en caso de que no esté, por la ecuación anterior se sigue que:

$$\Rightarrow \|\widetilde{T}\vec{x'}\| \leq \|T\|\|\vec{x'}\|$$

En cuyo caso se sigue que $\widetilde{T}$ es continua y tal que $\|\widetilde{T}\| \leq \|T\|$. Para ver la igualdad se intercambian los papeles de T y $\widetilde{T}$ en las desigualdades anteriores, con lo que se obtiene que $\|T\| \leq \|\widetilde{T}\|$.

Y, para ver que $\widetilde{\widetilde{T}}$, notemos que para todo $\vec{x} \in H$ y $\vec{x'} \in H'$

$$\left(\widetilde{\widetilde{T}}\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'}\right) = \left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right)$$

por ende

$$\left(\widetilde{\widetilde{T}}\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) = \left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right)$$

pero, por unicidad de la adjunta debe suceder que $\widetilde{\widetilde{T}} = T$.

De (ii): Probaremos las dos igualdades.

I. $\widetilde{T_1+T_2}=\widetilde{T}_1+\widetilde{T}_2$. Tenemos que:

$$\left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}_1\vec{x'}\right)=\left(T_1\vec{x}\middle|\vec{x'}\right)\quad \text{y}\quad \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}_2\vec{x'}\right)=\left(T_2\vec{x}\middle|\vec{x'}\right),\quad \forall\vec{x}\in H,\vec{x'}\in H'$$

por tanto

$$\begin{aligned}\left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}_1\vec{x'}\right)+\left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}_2\vec{x'}\right)&=\left(T_1\vec{x}\middle|\vec{x'}\right)+\left(T_2\vec{x}\middle|\vec{x'}\right)\quad \forall\vec{x}\in H,\vec{x'}\in H'\\ \Rightarrow\left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}_1\vec{x'}+\widetilde{T}_2\vec{x'}\right)&=\left(T_1\vec{x}+T_2\vec{x}\middle|\vec{x'}\right)\quad \forall\vec{x}\in H,\vec{x'}\in H'\\ \Rightarrow\left(\vec{x}\middle|(\widetilde{T}_1+\widetilde{T}_2)\vec{x'}\right)&=\left((T_1+T_2)\vec{x}\middle|\vec{x'}\right)\quad \forall\vec{x}\in H,\vec{x'}\in H'\end{aligned}$$

de la unicidad de la adjunta, se sigue que $\widetilde{T_1+T_2}=\widetilde{T}_1+\widetilde{T}_2$.

II. $\widetilde{\alpha T}=\overline{\alpha}\widetilde{T}$. Es similar al caso anterior.

De los dos incisos anteriores se sigue el resultado.

De (iii): Se tiene que:

$$\left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'}\right)=\left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right)\quad \text{y}\quad \left(\vec{x'}\middle|\widetilde{U}\vec{x''}\right)=\left(U\vec{x'}\middle|\vec{x''}\right),\quad \forall\vec{x}\in H,\vec{x'}\in H',\vec{x''}\in H''$$

debemos probar que:

$$\left(\vec{x}\middle|(\widetilde{T}\circ\widetilde{U})\vec{x''}\right)=\left((U\circ T)\vec{x}\middle|\vec{x''}\right)\quad \forall\vec{x}\in H,\vec{x''}\in H''$$

para usar la unicidad y de forma inmediata dedudcir el resultado. Sean $\vec{x}\in H$ y $\vec{x''}\in H''$. Como $\widetilde{U}\vec{x''}T\vec{x}\in H'$, tenemos que:

$$\left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}(\widetilde{U}\vec{x''})\right)=\left(T\vec{x}\middle|\widetilde{U}\vec{x''}\right)\quad \text{y}\quad \left(T\vec{x}\middle|\widetilde{U}\vec{x''}\right)=\left(U(T\vec{x})\middle|\vec{x''}\right)$$

por tanto:

$$\begin{aligned}\left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}(\widetilde{U}\vec{x''})\right)&=\left(U(T\vec{x})\middle|\vec{x''}\right)\\ \Rightarrow\left(\vec{x}\middle|(\widetilde{T}\circ\widetilde{U})\vec{x''}\right)&=\left((U\circ T)\vec{x}\middle|\vec{x''}\right)\end{aligned}$$

lo cual prueba el resultado al ser los vectores arbitrarios.

■

Ejercicio 1.1.2

Sea H un espacio hilbertiano complejo. A toda aplicación lineal continua T de H en H se le asocia la aplicación $Q_T:H\to\mathbb{C}$ (llamada **forma hermitiana**) definida por:

$$Q_T(\vec{x})=\left(T\vec{x}\middle|\vec{x}\right),\quad \forall\vec{x}\in H$$

Haga lo siguiente:

I. **Establezca** la fórmula:

$$\left(T\vec{x}\middle|\vec{y}\right)=\frac{1}{4}\left[Q_T(\vec{x}+\vec{y})-Q_T(\vec{x}-\vec{y})+iQ_T(\vec{x}+i\vec{y})-iQ_T(\vec{x}-i\vec{y})\right]$$

II. **Muestre** que

$$Q_{\widetilde{T}}(\vec{x})=\overline{Q_T(\vec{x})},\quad \forall\vec{x}\in H$$

y que $Q_T(\vec{x})$ es real, $\forall\vec{x}\in H$, si y sólo si T es autoadjunto (es decir, que $T=\widetilde{T}$).

Solución:

Establezcamos ambos incisos:

De (i): Sean $\vec{x},\vec{y}\in H$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
Q_T(\vec{x}+\vec{y}) &= \big(T(\vec{x}+\vec{y})\big|\vec{x}+\vec{y}\big)\\
&= \big(T(\vec{x})+T(\vec{y})\big|\vec{x}+\vec{y}\big)\\
&= \big(T(\vec{x})+T(\vec{y})\big|\vec{x}\big)+\big(T(\vec{x})+T(\vec{y})\big|\vec{y}\big)\\
&= \big(T(\vec{x})\big|\vec{x}\big)+\big(T(\vec{y})\big|\vec{x}\big)+\big(T(\vec{x})\big|\vec{y}\big)+\big(T(\vec{y})\big|\vec{y}\big)\\
&=Q_T(\vec{x})+\big(T(\vec{y})\big|\vec{x}\big)+\big(T(\vec{x})\big|\vec{y}\big)+Q_T(\vec{y})
\end{aligned}$$

por lo cual,

$$\begin{aligned}
Q_T(\vec{x}-\vec{y}) =&Q_T(\vec{x})+\big(T(-\vec{y})\big|\vec{x}\big)+\big(T(\vec{x})\big|-\vec{y}\big)+Q_T(-\vec{y})\\
=&Q_T(\vec{x})-\big(T(\vec{y})\big|\vec{x}\big)-\big(T(\vec{x})\big|\vec{y}\big)+Q_T(\vec{y})
\end{aligned}$$

Luego:

$$Q_T(\vec{x}+\vec{y})-Q_T(\vec{x}-\vec{y}) = 2\left(\big(T(\vec{y})\big|\vec{x}\big)+\big(T(\vec{x})\big|\vec{y}\big)\right)$$

y, por ende:

$$\begin{aligned}
iQ_T(\vec{x}+i\vec{y})-iQ_T(\vec{x}-i\vec{y}) &= 2i\left(\big(T(i\vec{y})\big|\vec{x}\big)+\big(T(\vec{x})\big|i\vec{y}\big)\right)\\
&= 2i\left(i\big(T(\vec{y})\big|\vec{x}\big)-i\big(T(\vec{x})\big|\vec{y}\big)\right)\\
&= 2\left(-\big(T(\vec{y})\big|\vec{x}\big)+\big(T(\vec{x})\big|\vec{y}\big)\right)
\end{aligned}$$

Finalmente, se sigue que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\left[Q_T(\vec{x}+\vec{y})-Q_T(\vec{x}-\vec{y})+iQ_T(\vec{x}+i\vec{y})-iQ_T(\vec{x}-i\vec{y})\right] =&\frac{1}{4}\left[4\big(T(\vec{x})\big|\vec{y}\big)\right]\\
=&\big(T(\vec{x})\big|\vec{y}\big)
\end{aligned}$$

lo cual establece la fórmula.

De (ii): Sea $\vec{x}\in H$, entonces:

$$\begin{aligned}
Q_{\widetilde{T}}(\vec{x}) &= \left(\widetilde{T}\vec{x}|\vec{x}\right)\\
&= \left(\widetilde{T}\vec{x}|\vec{x}\right)\\
&= \overline{\left(\vec{x}|\widetilde{T}\vec{x}\right)}\\
&= \overline{(T\vec{x}|\vec{x})}\\
&= \overline{Q_T(\vec{x})}
\end{aligned}$$

Para la otra parte, veamos que:

$$\begin{aligned}
Q_T(\vec{x})\in\mathbb{R},\forall\vec{x}\in H &\iff Q_T(\vec{x})=\overline{Q_T(\vec{x})},\forall\vec{x}\in H\\
&\iff Q_T(\vec{x})=Q_{\widetilde{T}}(\vec{x}),\forall\vec{x}\in H\\
&\iff \big(T\vec{x}\big|\vec{x}\big)=\left(\widetilde{T}\vec{x}|\vec{x}\right),\forall\vec{x}\in H\\
&\iff \big(T\vec{x}\big|\vec{x}\big)-\left(\widetilde{T}\vec{x}|\vec{x}\right)=0,\forall\vec{x}\in H\\
&\iff \left(T\vec{x}-\widetilde{T}\vec{x}|\vec{x}\right)=0,\forall\vec{x}\in H\\
&\iff \left(\left[T-\widetilde{T}\right]\vec{x}|\vec{x}\right)=0,\forall\vec{x}\in H
\end{aligned}$$

Veamos que $\left(\left[T-\widetilde{T}\right]\vec{x}\middle|\vec{x}\right)=0, \forall\vec{x}\in H$ si y sólo si $T=\widetilde{T}$.

$\Rightarrow$) Suponga que $\left(\left[T-\widetilde{T}\right]\vec{x}\middle|\vec{x}\right)=0, \forall\vec{x}\in H$. Esto es inmediato, pues se tiene que: $Q_{T-\widetilde{T}}(\vec{x})=0$, para todo $\vec{x}\in H$, luego

$$\left(\left[T-\widetilde{T}\right]\vec{x}\middle|\vec{y}\right)=0,\quad \forall\vec{x},\vec{y}\in H$$

en particular para $\vec{x}$ fijo, $\left(\left[T-\widetilde{T}\right]\vec{x}\middle|\vec{y}\right)=0$ para todo $\vec{y}\in H$, luego $\left[T-\widetilde{T}\right]\vec{x}=\vec{0}$. Como fue arbitrario se sigue entonces que $T=\widetilde{T}$.

$\Leftarrow$) Suponga que $T=\widetilde{T}$. De forma inmediata se sigue que $\left(\left[T-\widetilde{T}\right]\vec{x}\middle|\vec{x}\right)=0, \forall\vec{x}\in H$.

□

Ejercicio 1.1.3

Sea A un endomorfismo lineal continuo de un espacio prehilbertiano H. Defina $Q_A:H\to\mathbb{K}$ como:

$$Q_A(\vec{x})=\left(A\vec{x}\middle|\vec{x}\right),\quad \forall\vec{x}\in H$$

Sea

$$\alpha=\sup\left\{\frac{\left|Q_A(\vec{x})\right|}{\|\vec{x}\|^2}\middle|\vec{x}\in H,\vec{x}\neq\vec{0}\right\}$$

I. **Pruebe** que $\alpha\leq\|A\|$.

II. Al suponer A autoadjunto, **demuestre** la igualdad opuesta. Luego, si A es autoadjunto se tiene que

$$\|A\|=\sup\left\{\frac{\left|Q_A(\vec{x})\right|}{\|\vec{x}\|^2}\middle|\vec{x}\in H,\vec{x}\neq\vec{0}\right\}$$

Indicación. Compruebe que $\forall\vec{x}\in H$ y $\forall\lambda>0$,

$$\left(A\vec{x}\middle|A\vec{x}\right)=\frac{1}{4}\left(Q_A(\lambda\vec{x}+\lambda^{-1}A\vec{x})-Q_A(\lambda\vec{x}-\lambda^{-1}A\vec{x})\right)$$

de ahí obtenga que $\|A\vec{x}\|^2\leq\frac{\alpha}{2}\left(\lambda^2\|\vec{x}\|^2+\frac{1}{\lambda^2}\|A\vec{x}\|^2\right)$ y elija λ convenientemente.

Demostración:

Demostremos cada inciso.

De (i): Basta con ver que $\|A\|$ es cota superior del conjunto al que se le quiere sacar el supremo. Para ello, notemos que al ser A lineal continuo, se tiene que:

$$\left|\left(A\vec{x}\middle|\vec{x}\right)\right|\leq\|A\vec{x}\|\|\vec{x}\|\leq\|A\|\|\vec{x}\|^2$$

para todo $\vec{x}\in H$. En particular, para $\vec{x}\neq\vec{0}$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{\left|\left(A\vec{x}\middle|\vec{x}\right)\right|}{\|\vec{x}\|^2}&\leq\|A\|\\ \Rightarrow\frac{\left|Q_A(\vec{x})\right|}{\|\vec{x}\|^2}&\leq\|A\|\end{aligned}$$

luego, $\|A\|$ es cota superior del conjunto. Por tanto $\alpha\leq\|A\|$.

De (ii): Suponga que A es autoadjunto. Sean $\vec{x}\in H$ y $\lambda>0$. Entonces:

$$\begin{aligned}Q_A(\lambda\vec{x}+\lambda^{-1}A\vec{x})&=\left(A(\lambda\vec{x}+\lambda^{-1}A\vec{x})\middle|\lambda\vec{x}+\lambda^{-1}A\vec{x}\right)\\&=\left(\lambda A\vec{x}+\lambda^{-1}(A\circ A)\vec{x}\middle|\lambda\vec{x}+\lambda^{-1}A\vec{x}\right)\\&=\left(\lambda A\vec{x}+\lambda^{-1}(A\circ A)\vec{x}\middle|\lambda\vec{x}\right)+\left(\lambda A\vec{x}+\lambda^{-1}(A\circ A)\vec{x}\middle|\lambda^{-1}A\vec{x}\right)\\&=\left(\lambda A\vec{x}\middle|\lambda\vec{x}\right)+\left(\lambda^{-1}(A\circ A)\vec{x}\middle|\lambda\vec{x}\right)+\left(\lambda A\vec{x}\middle|\lambda^{-1}A\vec{x}\right)+\left(\lambda^{-1}(A\circ A)\vec{x}\middle|\lambda^{-1}A\vec{x}\right)\end{aligned}$$

y

$$
\begin{aligned}
Q_A(\lambda\vec{x}-\lambda^{-1}A\vec{x}) &= \big(A(\lambda\vec{x}-\lambda^{-1}A\vec{x})\big|\lambda\vec{x}-\lambda^{-1}A\vec{x}\big)\\
&= \big(\lambda A\vec{x}-\lambda^{-1}(A\circ A)\vec{x}\big|\lambda\vec{x}-\lambda^{-1}A\vec{x}\big)\\
&= \big(\lambda A\vec{x}-\lambda^{-1}(A\circ A)\vec{x}\big|\lambda\vec{x}\big)-\big(\lambda A\vec{x}-\lambda^{-1}(A\circ A)\vec{x}\big|\lambda^{-1}A\vec{x}\big)\\
&= \big(\lambda A\vec{x}\big|\lambda\vec{x}\big)-\big(\lambda^{-1}(A\circ A)\vec{x}\big|\lambda\vec{x}\big)-\big(\lambda A\vec{x}\big|\lambda^{-1}A\vec{x}\big)+\big(\lambda^{-1}(A\circ A)\vec{x}\big|\lambda^{-1}A\vec{x}\big)
\end{aligned}
$$

por tanto:

$$
\begin{aligned}
Q_A(\lambda\vec{x}+\lambda^{-1}A\vec{x})-Q_A(\lambda\vec{x}-\lambda^{-1}A\vec{x}) =& 2(\big(\lambda^{-1}(A\circ A)\vec{x}\big|\lambda\vec{x}\big)+\big(\lambda A\vec{x}\big|\lambda^{-1}A\vec{x}\big))\\
=& 2(\big((A\circ A)\vec{x}\big|\vec{x}\big)+\big(A\vec{x}\big|A\vec{x}\big))\\
=& 2(\big(A\vec{x}\big|A\vec{x}\big)+\big(A\vec{x}\big|A\vec{x}\big))\\
=& 4\left(A\vec{x}\big|A\vec{x}\right)
\end{aligned}
$$

pues, A es autoadjunto. Luego:

$$
\big(A\vec{x}\big|A\vec{x}\big)=\frac{1}{4}(Q_A(\lambda\vec{x}+\lambda^{-1}A\vec{x})-Q_A(\lambda\vec{x}-\lambda^{-1}A\vec{x}))
$$

por tanto:

$$
\begin{aligned}
\|A\vec{x}\|^2 =& \frac{1}{4}\big|Q_A(\lambda\vec{x}+\lambda^{-1}A\vec{x})-Q_A(\lambda\vec{x}-\lambda^{-1}A\vec{x})\big|\\
\leq& \frac{1}{4}(\big|Q_A(\lambda\vec{x}+\lambda^{-1}A\vec{x})\big|+\big|Q_A(\lambda\vec{x}-\lambda^{-1}A\vec{x})\big|)\\
=& \frac{1}{4}(\frac{\|\lambda\vec{x}+\lambda^{-1}A\vec{x}\|^2}{\|\lambda\vec{x}+\lambda^{-1}A\vec{x}\|^2}\big|Q_A(\lambda\vec{x}+\lambda^{-1}A\vec{x})\big|+\frac{\|\lambda\vec{x}-\lambda^{-1}A\vec{x}\|^2}{\|\lambda\vec{x}-\lambda^{-1}A\vec{x}\|^2}\big|Q_A(\lambda\vec{x}-\lambda^{-1}A\vec{x})\big|)\\
\leq& \frac{1}{4}(\alpha\|\lambda\vec{x}+\lambda^{-1}A\vec{x}\|^2+\alpha\|\lambda\vec{x}-\lambda^{-1}A\vec{x}\|^2)\\
=& \frac{\alpha}{4}(\big(\lambda\vec{x}+\lambda^{-1}A\vec{x}\big|\lambda\vec{x}+\lambda^{-1}A\vec{x}\big)+\big(\lambda\vec{x}-\lambda^{-1}A\vec{x}\big|\lambda\vec{x}-\lambda^{-1}A\vec{x}\big))\\
=& \frac{\alpha}{4}(\big(\lambda\vec{x}+\lambda^{-1}A\vec{x}\big|\lambda\vec{x}\big)+\big(\lambda\vec{x}+\lambda^{-1}A\vec{x}\big|\lambda^{-1}A\vec{x}\big)+\big(\lambda\vec{x}-\lambda^{-1}A\vec{x}\big|\lambda\vec{x}\big)-\big(\lambda\vec{x}-\lambda^{-1}A\vec{x}\big|\lambda^{-1}A\vec{x}\big))\\
=& \frac{\alpha}{4}(\lambda^2\left(\vec{x}\big|\vec{x}\right)+\left(A\vec{x}\big|\vec{x}\right)+\left(\vec{x}\big|A\vec{x}\right)+\lambda^{-2}\left(A\vec{x}\big|A\vec{x}\right)+\lambda^2\left(\vec{x}\big|\vec{x}\right)-\left(A\vec{x}\big|\vec{x}\right)-\left(\vec{x}\big|A\vec{x}\right)+\lambda^{-2}\left(A\vec{x}\big|A\vec{x}\right))\\
=& \frac{\alpha}{2}(\lambda^2\left(\vec{x}\big|\vec{x}\right)+\lambda^{-2}\left(A\vec{x}\big|A\vec{x}\right))\\
=& \frac{\alpha}{2}(\lambda^2\|\vec{x}\|^2+\lambda^{-2}\|A\vec{x}\|^2)
\end{aligned}
$$

por Cauchy-Schwartz y usando la definición de α. Por tanto, si consideramos que $\alpha>0$:

$$
\begin{aligned}
\|A\vec{x}\|^2 &\leq \frac{\alpha}{2}(\lambda^2\|\vec{x}\|^2+\lambda^{-2}\|A\vec{x}\|^2)\\
\Rightarrow\left(1-\frac{\alpha}{2\lambda^2}\right)\|A\vec{x}\|^2 &\leq \frac{\alpha\lambda^2}{2}\|\vec{x}\|^2\\
\Rightarrow\frac{2\lambda^2-\alpha}{2\lambda^2}\|A\vec{x}\|^2 &\leq \frac{\alpha\lambda^2}{2}\|\vec{x}\|^2\\
\Rightarrow\|A\vec{x}\|^2 &\leq \frac{2\alpha\lambda^4}{2(2\lambda^2-\alpha)}\|\vec{x}\|^2\\
\Rightarrow\|A\vec{x}\|^2 &\leq \frac{\alpha\lambda^4}{2\lambda^2-\alpha}\|\vec{x}\|^2
\end{aligned}
$$

tomemos $\lambda > 0$ tal que:

$$\begin{aligned}
\alpha^2 = \frac{\alpha\lambda^4}{2\lambda^2 - \alpha} &\iff \alpha = \frac{\lambda^4}{2\lambda^2-\alpha} \\
&\iff \alpha(2\lambda^2 - \alpha) = \lambda^4 \\
&\iff 0 = \lambda^4 - 2\alpha\lambda^2 + \alpha^2 \\
&\iff 0 = \left(\lambda^2 - \alpha\right)^2 \\
&\iff 0 = \left(\lambda^2 - \alpha\right)^2 \\
&\iff 0 = \lambda^2 - \alpha \\
&\iff \sqrt{\alpha} = \lambda
\end{aligned}$$

de esta forma:

$$\begin{aligned}
\|A\vec{x}\|^2 &\leq \alpha^2\|\vec{x}\|^2 \\
\|A\vec{x}\| &\leq \alpha\|\vec{x}\|
\end{aligned}$$

es decir que $\|A\| \leq \alpha$ y por ende $\alpha = \|A\|$, esto si $\alpha > 0$. Si $\alpha = 0$, entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{\left|Q_A(\vec{x})\right|}{\|\vec{x}\|^2} =& 0 \quad \forall\vec{x} \in H \\
\Rightarrow \left|Q_A(\vec{x})\right| =& 0 \quad \forall\vec{x} \in H \\
\Rightarrow \left(A\vec{x}\middle|\vec{x}\right) =& 0 \quad \forall\vec{x} \in H
\end{aligned}$$

pero, por (i) de 1.4 se sigue que $A = 0$, pues $\left(A\vec{x}\middle|\vec{y}\right) = 0$ para todo $\vec{x}, \vec{y} \in H \backslash \left\{\vec{0}\right\}$. En este caso $\alpha = 0 = \|A\|$. En cualquier caso, se concluye que $\alpha = \|A\|$. ■

Ejercicio 1.1.4
Muestre que todo endomorfismo continuo T de un espacio hilbertiano H se expresa únicamente en la forma:

$$T = A + iB$$

donde A y B son endomorfismos autoadjuntos de H.

Demostración:
Tomemos $A = \frac{1}{2}(T + \widetilde{T})$ y $B = \frac{1}{2i}(T - \widetilde{T})$, siendo $\widetilde{T} : H \to H$ la adjunta de T. Es claro que $T = A + iB$ y, que tanto A como B son adjuntos, pues:

$$\begin{aligned}
\widetilde{A} =& \frac{1}{2}\widetilde{(T + \widetilde{T})} \\
=& \frac{1}{2}\widetilde{(T + \widetilde{T})} \\
=& \frac{1}{2}(\widetilde{T} + \widetilde{\widetilde{T}}) \\
=& \frac{1}{2}(T + \widetilde{T}) \\
=& A
\end{aligned}$$

y

$$
\begin{aligned}
\widetilde{B} =& \widetilde{\frac{1}{2i}(T-\widetilde{T})} \\
=& \widetilde{\frac{-i}{2}(T-\widetilde{T})} \\
=& \overline{-\frac{i}{2}}\widetilde{(T-\widetilde{T})} \\
=& \frac{i}{2}(\widetilde{T}-\widetilde{\widetilde{T}}) \\
=& -\frac{1}{2i}(\widetilde{T}-T) \\
=& \frac{1}{2i}(T-\widetilde{T}) \\
=& B
\end{aligned}
$$

además, son endomorfismos (pues van de H en H). Veamos que éstos son únicos. En efecto, si $A', B' : H \to H$ son lineales adjuntos tales que

$$T = A' + iB'$$

se tiene que:

$$i(B'-B) = A - A'$$

en particular, son continuos, por lo cual podemos tomar la adjunta de ambos lados:

$$
\begin{aligned}
i\widetilde{(B'-B)} &= \widetilde{A-A'} \\
\Rightarrow -i\widetilde{(B'-B)} &= A - A' \\
\Rightarrow -i(B'-B) &= A - A' \\
\Rightarrow -i(B'-B) &= i(B'-B)
\end{aligned}
$$

ya que son adjuntos. Por tanto $B' - B = 0 \Rightarrow B' = B$, con lo cual $A = A'$. ■

Ejercicio 1.1.5
Sea H un espacio prehilbertiano. **Construya** un espacio hilbertiano $\hat{H}$ y una inyección lineal $j : H \to \hat{H}$ tal que

$$\left(j\vec{x}\middle|j\vec{y}\right) = \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right), \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in H.$$

y que $j(H)$ sea denso en $\hat{H}$. El espacio hilbertiano $\hat{H}$ se llama la **completación** del espacio prehilibertiano H. **Formule y demuestre** un teorema de unicidad de esta completación.

Demostración:
Sea

$$\hat{H} = \left\{ \{\vec{x_n}\}_{n=1}^{\infty} \,\middle|\, \{\vec{x_n}\}_{n=1}^{\infty} \text{ es sucesión de Cauchy en } H \right\}$$

se definen sobre $\hat{H}'$ dos operaciones, para todo $\hat{x}' = \{\vec{x_n}\}_{n=1}^{\infty}, \hat{y}' = \{\vec{y_n}\}_{n=1}^{\infty} \in \hat{H}'$ y $\alpha \in K$:

$$\hat{x}' + \hat{y}' = \{\vec{x_n} + \vec{y_n}\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{y} \quad \alpha\hat{x}' = \{\alpha\vec{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$$

Con estas operaciones $\hat{H}'$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Definimos una relación $\sim$ en $\hat{H}'$ dada como sigue:

$$\hat{x}' \sim \hat{y}' \iff \lim_{n\to\infty} \|\vec{x_n} - \vec{y_n}\| = 0$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma inducida por el producto interno sobre H. Tomemos $\hat{0}' = \left\{\vec{0}\right\}_{n=1}^{\infty} \in \hat{H}'$, y sea:

$$\hat{K} = \left\{\hat{x'} \in \hat{H}' \middle| \hat{x'} \sim \hat{0}'\right\}$$

Afirmamos que $\hat{K}$ es subespacio vectorial de $\hat{H}$. En efecto, sean $\hat{x'} = \{\vec{x_n}\}_{n=1}^{\infty}, \hat{y'} = \{\vec{y_n}\}_{n=1}^{\infty} \in \hat{K}'$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces:

$$\begin{aligned}
0 \leq & \lim_{n\to\infty} \|\vec{x_n} + \alpha\vec{y_n} - \vec{0}\| \\
= & \lim_{n\to\infty} \|\vec{x_n} + \alpha\vec{y_n}\| \\
\leq & \lim_{n\to\infty} \|\vec{x_n}\| + \lim_{n\to\infty} \|\alpha\vec{y_n}\| \\
= & \lim_{n\to\infty} \|\vec{x_n}\| + \lim_{n\to\infty} \left|\alpha\right| \cdot \|\vec{y_n}\| \\
= & \lim_{n\to\infty} \|\vec{x_n} - \vec{0}\| + \left|\alpha\right| \lim_{n\to\infty} \|\vec{y_n} - \vec{0}\| \\
= & 0 + \left|\alpha\right| \cdot 0 \\
= & 0
\end{aligned}$$

por tanto, $\hat{x'} + \alpha\hat{y'} \in \hat{K}'$. Así $\hat{K}'$ es espacio vectorial. Tomemos

$$\hat{H} = \hat{H}'/\hat{K}'$$

el espacio vectorial cociente, cuyos elementos los denotaremos por $\hat{x} = [\hat{x'}] = \hat{x'} + \hat{K}'$. Definimos un producto escalar en $\hat{H}$ como sigue; para cada $\hat{x}, \hat{y} \in H$:

$$\left(\hat{x}\middle|\hat{y}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\vec{x_n}\middle|\vec{y_n}\right)$$

■

Ejercicio 1.1.6
Si E es un espacio vectorial complejo, la adición de elementos de E y la multiplicación de elementos de E por números reales, hacen de E un espacio vectorial real que se designa por $E_{\mathbb{R}}$.

I. Sea H un espacio prehilbertiano complejo. Se designa por $\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ un producto escalar en H. **Muestre** que la aplicación:

$$(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} = \Re\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$$

hace de $H_{\mathbb{R}}$ un espacio prehilbertiano real para el que se cumple:

$$\left(i\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} = \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}}$$

Pruebe la relación:

$$\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) = \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + i\left(\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} \tag{1.2}$$

II. Sea H un espacio vectorial complejo. Se supone que $H_{\mathbb{R}}$ está provisto de un producto escalar $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}}$ que hace de $H_{\mathbb{R}}$ un espacio prehilbertiano real. Se supone también que $\left(i\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} = \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}}$, para todo $\vec{x}, \vec{y} \in H$. Se define en H un producto $\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ por la fórmula (1.1). **Demuestre** que $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ es un producto escalar complejo que hace de H un espacio prehilbertiano complejo.

Demostración:
De (i): Hay que verificar que se cumplen cuatro condiciones:

I. Para todo $\vec{y} \in H_{\mathbb{R}}$ fijo, la aplicación $\vec{x} \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}}$ es lineal de $H_{\mathbb{R}}$ en $\mathbb{R}$. En efecto, sea $\vec{y} \in H_{\mathbb{R}}$. Si $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x} \in H_{\mathbb{R}}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\left(\vec{x_1} + \vec{x_2}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} &= \Re\left(\vec{x_1} + \vec{x_2}\middle|\vec{y}\right)\\ &= \Re[\left(\vec{x_1}\middle|\vec{y}\right) + \left(\vec{x_2}\middle|\vec{y}\right)]\\ &= \Re\left(\vec{x_1}\middle|\vec{y}\right) + \Re\left(\vec{x_2}\middle|\vec{y}\right)\\ &= \left(\vec{x_1}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + \Re\left(\vec{x_2}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}}\end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}\left(\alpha\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} &= \Re\left(\alpha\vec{x}\middle|\vec{y}\right)\\ &= \Re\alpha\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)\\ &= \alpha\Re\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)\\ &= \alpha\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}}\end{aligned}$$

con lo cual, la aplicación es lineal.

II. $\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} = \overline{\left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right)_{\mathbb{R}}} = \left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right)_{\mathbb{R}}$, para todo $\vec{x}, \vec{y} \in H_{\mathbb{R}}$. En efecto, sean $\vec{x}, \vec{y} \in H_{\mathbb{R}}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} &= \Re\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)\\ &= \Re\overline{\left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right)}\\ &= \Re\left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right)\\ &= \left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right)_{\mathbb{R}}\\ &= \overline{\left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right)_{\mathbb{R}}}\end{aligned}$$

pues, el producto escalar toma valores reales.

III. $\left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right)_{\mathbb{R}} \geq 0$, para todo $\vec{x} \in H_{\mathbb{R}}$. En efecto, como $\left(\cdot\middle|\cdot\right)$ es un producto escalar sobre H, se cumple que $\left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right) \geq 0$, por ende $\left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right)_{\mathbb{R}} = \left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right) \geq 0$.

IV. Sea $\vec{x} \in H_{\mathbb{R}}$, entonces $\left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right)_{\mathbb{R}} = 0$ si y sólo si $\vec{x} = \vec{0}$. La vuelta es inmediata, suponga que $\left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right)_{\mathbb{R}} = 0$, como $\left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right)_{\mathbb{R}} = \Re\left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right) = \left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right)$, se sigue que $\vec{x} = \vec{0}$.

con lo cual, por los 4 incisos anteriores se sigue que $\left(\cdot\middle|\cdot\right)_{\mathbb{R}}$ es un producto escalar sobre $H_{\mathbb{R}}$, es decir que $H_{\mathbb{R}}$ es un espacio prehilbertiano real.

Verifiquemos que se cumple que:

$$\left(i\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} = \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}}, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in H_{\mathbb{R}}$$

en efecto, si $\vec{x}, \vec{y} \in H_{\mathbb{R}}$, entonces:

$$\begin{aligned}\left(i\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} &= \Re\left(i\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)\\ &= \Re(i \cdot (-i))\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)\\ &= \Re(-(-1))\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)\\ &= \Re\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)\\ &= \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}}\end{aligned}$$

con lo que se verifica la igualdad. Probemos la relación. Sean $\vec{x}, \vec{y} \in H$, se tiene entonces que:

$$\begin{aligned}\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) &= \Re\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) + i\Im\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)\\ &= \Re\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) + i\Re(-i\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right))\\ &= \Re\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) + i\Re(\bar{i}\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right))\\ &= \Re\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) + i\Re(\left(\vec{x}\middle|i\vec{y}\right))\\ &= \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + i\left(\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}}\end{aligned}$$

lo cual prueba la relación.

De (ii): Hay que verificar que se cumplen cuatro condiciones:

I. Para todo $\vec{y} \in H$ fijo, la aplicación $\vec{x} \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ es lineal de H en $\mathbb{C}$. En efecto, sea $\vec{y} \in H$. Si $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x} \in H$ y $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\left(\vec{x_1} + \vec{x_2}\middle|\vec{y}\right) &= \left(\vec{x_1} + \vec{x_2}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + i\left(\vec{x_1} + \vec{x_2}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} \\
&= \left(\vec{x_1}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + \left(\vec{x_2}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + i\left(\vec{x_1}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + i\left(\vec{x_2}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} \\
&= (\left(\vec{x_1}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} i\left(\vec{x_1}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}}) + (\left(\vec{x_2}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + i\left(\vec{x_2}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}}) \\
&= \left(\vec{x_1}\middle|\vec{y}\right) + \left(\vec{x_2}\middle|\vec{y}\right)
\end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}
\left(\alpha\vec{x}\middle|\vec{y}\right) &= \left(\alpha\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + i\left(\alpha\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} \\
&= \left([a+ib]\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + i\left([a+ib]\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} \\
&= \left(a\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + \left(ib\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + i\left(a\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + i\left(ib\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} \\
&= a\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + b\left(i\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + ia\left(\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + ib\left(i\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} \\
&= a\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} - b\left(\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + ia\left(\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + ib\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} \\
&= (a+ib)\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + (ia-b)\left(\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} \\
&= (a+ib)\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + i(a+ib)\left(\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} \\
&= \alpha\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + i\alpha\left(\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} \\
&= \alpha(\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + i\left(\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}}) \\
&= \alpha\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)
\end{aligned}$$

por tanto, es lineal de H en $\mathbb{C}$.

II. Sean $\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) = \overline{\left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right)}$, para todo $\vec{x}, \vec{y} \in H$. En efecto, si $\vec{x}, \vec{y} \in H$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) &= \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + i\left(\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} \\
&= \left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right)_{\mathbb{R}} + i\left(i\vec{x}\middle|-\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} \\
&= \left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right)_{\mathbb{R}} - i\left(\vec{y}\middle|i\vec{x}\right)_{\mathbb{R}} \\
&= \overline{\left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right)_{\mathbb{R}} + i\left(\vec{y}\middle|i\vec{x}\right)_{\mathbb{R}}} \\
&= \overline{\left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right)}
\end{aligned}$$

III. $\left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right) \geq 0$ para todo $\vec{x} \in H$. En efecto, si $\vec{x} \in H$, se tiene primeramente que:

$$\begin{aligned}
\left(\vec{x}\middle|i\vec{x}\right) &= \left(i\vec{x}\middle|-\vec{x}\right) \\
&= -\left(i\vec{x}\middle|\vec{x}\right) \\
&= -\left(\vec{x}\middle|i\vec{x}\right) \\
\Rightarrow \left(\vec{x}\middle|i\vec{x}\right) &= 0
\end{aligned}$$

por tanto,

$$\begin{aligned}
\left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right) &= \left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right)_{\mathbb{R}} + i\left(\vec{x}\middle|i\vec{x}\right)_{\mathbb{R}} \\
&= \left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right)_{\mathbb{R}} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

donde $\left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right)_{\mathbb{R}} \geq 0$. Luego se tiene el resultado.

IV. Sea $\vec{x} \in H$. Entonces, $\left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right) = 0$ si y sólo si $\vec{x} = \vec{0}$. La vuelta es inmediata. Suponga que $\left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right) = 0$, entonces:

$$0 = \left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right) = \left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right)_{\mathbb{R}}$$

usando lo obtenido en (iii), pero $\left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right) = 0$ implica $\vec{x} = \vec{0}$, luego $\vec{x} = \vec{0}$ con lo que se tiene el resultado.

por los cuatro incisos se sigue que $\left(\cdot\middle|\cdot\right)$ es un producto escalar complejo sobre H que hace de él un espacio prehilbertiano complejo. ■

Ejercicio 1.1.7
Haga lo sugiente:

I. **Muestre** que en todo espacio prehilbertiano real se cumple

$$\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) = \frac{1}{4}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2\right)$$

y en todo espacio prehilbertiano complejo se cumple

$$\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) = \frac{1}{4}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 + i\|\vec{x}+i\vec{y}\|^2 - i\|\vec{x}-i\vec{y}\|^2\right)$$

II. Sea E un espacio vectorial normado real en el que se verifica la identidad del paralelogramo:

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2)$$

Pruebe que se puede definir de manera única un producto escalar $\left(\cdot\middle|\cdot\right)$ sobre E que hace de E un espacio prehilbertiano real para el cual $\|\vec{x}\|^2 = \left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right)$, $\forall \vec{x} \in E$.

Indicación. Defina $\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ por la primera fórmula del inciso (i). Usando la fórmula del paralelogramo compruebe que $\left(\vec{x}\middle|2\vec{y}\right) = 2\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$. Transforme $\left(\vec{x_1}\middle|\vec{y_1}\right) + \left(\vec{x_2}\middle|\vec{y_2}\right)$ por la identidad del paralelogramo y deduzca la fórmula $\left(\vec{x_1}\middle|\vec{y}\right) + \left(\vec{x_2}\middle|\vec{y}\right) = \left(\vec{x_1}+\vec{x_2}\middle|\vec{y}\right)$.

III. Misma pregunta que en (ii) en el caso de ser E espacio vectorial complejo.

Indicación. Use (ii) y el problema 1.6.

Solución:
De (i): Sea H un espacio prehilbertiano real, y sean $\vec{x}, \vec{y} \in H$, se tiene entonces que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2\right) &= \frac{1}{4}\left(\left(\vec{x}+\vec{y}\middle|\vec{x}+\vec{y}\right) - \left(\vec{x}-\vec{y}\middle|\vec{x}-\vec{y}\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right) + \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) + \left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right) + \left(\vec{y}\middle|\vec{y}\right) - \left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right) + \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) + \left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right) - \left(\vec{y}\middle|\vec{y}\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(2\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) + 2\left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(4\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)\right) \\
&= \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)
\end{aligned}$$

para un espacio prehilbertiano complejo, sean $\vec{x}, \vec{y} \in H$. Por el ejercicio 1.1.6 (i) se tiene que:

$$\begin{aligned}
\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) &= \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + i\left(\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} \\
&= \frac{1}{4}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|_{\mathbb{R}}^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|_{\mathbb{R}}^2\right) + i\frac{1}{4}\left(\|\vec{x}+i\vec{y}\|_{\mathbb{R}}^2 - \|\vec{x}-i\vec{y}\|_{\mathbb{R}}^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 + i\|\vec{x}+i\vec{y}\|^2 - i\|\vec{x}-i\vec{y}\|^2\right)
\end{aligned}$$

pues, $\|\cdot\|_{\mathbb{R}} = \|\cdot\|$.

De (ii). Defina:

$$\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) = \frac{1}{4}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2\right), \quad \forall \vec{x},\vec{y} \in H$$

veamos que $(\vec{x},\vec{y}) \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ verifica las cuatro condiciones para ser producto escalar real sobre H:

I. Hay que probar que para todo $\vec{y} \in E$ fijo, $\vec{x} \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ es una aplicación lineal de E en $\mathbb{R}$. En efecto, veamos que se cumplen dos cosas:

  I) Sea $\vec{y} \in H$. Hay que ver que la función $\vec{x} \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ separa sumas. En efecto, sean $\vec{x},\vec{x_1},\vec{x_2} \in H$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, tenemos que:

$$\left(\vec{x_1}+\vec{x_2}\middle|\vec{y}\right) = \frac{1}{4}\left(\|\vec{x_1}+\vec{x_2}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x_1}+\vec{x_2}-\vec{y}\|^2\right)$$

  de la identidad del paralelogramo obtenemos que:

$$\begin{cases} \|\vec{x_1}+\vec{x_2}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x_1}-\vec{x_2}-\vec{y}\|^2 & = 2\|\vec{x_1}\|^2 + 2\|\vec{x_2}+\vec{y}\|^2 \\ \|\vec{x_1}+\vec{x_2}-\vec{y}\|^2 + \|\vec{x_1}-\vec{x_2}+\vec{y}\|^2 & = 2\|\vec{x_1}-\vec{x_2}\|^2 + 2\|-\vec{y}\|^2 \end{cases}$$

  II) Notemos antes que si $\vec{x},\vec{y} \in H$:

$$\begin{aligned} \left(2\vec{x}\middle|\vec{y}\right) &= \frac{1}{4}\left(\|2\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|2\vec{x}-\vec{y}\|^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\|2\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|2\vec{x}-\vec{y}\|^2\right) \end{aligned}$$

  de la identidad del paralelogramo obtenemos que

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \|\vec{x}+\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{x}-\vec{y}\|^2 & = 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 \\ \|\vec{x}+\vec{x}-\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{x}+\vec{y}\|^2 & = 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} \|2\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 & = 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 \\ \|2\vec{x}-\vec{y}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 & = 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} \|2\vec{x}+\vec{y}\|^2 & = 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{y}\|^2 \\ \|2\vec{x}-\vec{y}\|^2 & = 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 - \|\vec{y}\|^2 \end{cases} \end{aligned}$$

  por tanto,

$$\begin{aligned} \left(2\vec{x}\middle|\vec{y}\right) &= \frac{1}{4}(2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{y}\|^2 - 2\|\vec{x}\|^2 - 2\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 + \|\vec{y}\|^2) \\ &= \frac{2}{4}(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2) \\ &= 2\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) \end{aligned}$$

  Queremos ver que este producto interno saca escalares. Por inducción se prueba rápidamente que

$$\left(n\vec{x}\middle|\vec{y}\right) = n\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

  y, tomando $\vec{x} = -\vec{u}$, el resultado es válido para todo $n \in \mathbb{Z}$, esto es

$$\left(m\vec{x}\middle|\vec{y}\right) = m\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right), \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

  Ahora, para el vector $\frac{1}{n}\vec{x}$ se tiene que

$$\begin{aligned} n\left(\frac{1}{n}\vec{x}\middle|\vec{y}\right) &= \left(\frac{n}{n}\vec{x}\middle|\vec{y}\right) \\ &= \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{n}\vec{x}\middle|\vec{y}\right) &= \frac{1}{n}\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

luego, por el resultado anterior se tiene que

$$\left(r\vec{x}\middle|\vec{y}\right) = r\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) \quad \forall r\in\mathbb{Q}$$

y, para todo $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}$. Veamos que se cumple para todo $r\in\mathbb{R}$. En efecto, como las aplicaciones $r\mapsto\left(r\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ y $r\mapsto r\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ son continuas (pues, son composición de funciones continuas) y, son iguales en $\mathbb{Q}$ el cual es tal que $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$, por un teorema de análsis matemático I se sigue que

$$\left(\alpha\vec{x}\middle|\vec{y}\right) = \alpha\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right), \quad \forall\vec{x},\vec{y}\in E, \quad \forall\alpha\in\mathbb{R}$$

II. Sean $\vec{x},\vec{y}\in E$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right) &= \frac{1}{4}\left(\|\vec{y}+\vec{x}\|^2-\|\vec{y}-\vec{x}\|^2\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2-\|-\vec{y}+\vec{x}\|^2\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2-\|\vec{x}-\vec{y}\|^2\right)\\
&= \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)\\
\Rightarrow \left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right) &= \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)
\end{aligned}$$

III. Sea $\vec{x}\in E$, entonces

$$\begin{aligned}
\left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right) &= \frac{1}{4}\left(\|\vec{x}+\vec{x}\|^2-\|\vec{x}-\vec{x}\|^2\right)\\
&= \frac{1}{4}\|2\vec{x}\|^2\\
&= \frac{4}{4}\|\vec{x}\|^2\\
&= \|\vec{x}\|^2\\
&\geq 0\\
\Rightarrow \left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right) &\geq 0
\end{aligned}$$

IV. Es claro que si $\vec{x}=\vec{0}$, entonces $\left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right)=0$. El converso es inmediato del hecho que $\|\cdot\|$ es una norma sobre E.

por los cuatro incisos anteriores, se sigue que $\left(\cdot\middle|\cdot\right)$ es un producto escalar real sobre E tal que $\left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right)=\|\vec{x}\|$ para todo $\vec{x}\in E$.

De (iii): Es análogo a (ii) usando hechos del problema 1.6. □

Ejercicio 1.1.8

Para todo $s\in\mathbb{R}$ sea $u_s:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ la función definida por:

$$u_s(x)=e^{isx}, \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Sea X el espacio vectorial complejo compuesto de todas las combinaciones lineales finitas de estas funciones u_s, $\forall f,g\in X$ se define:

$$\left(f\middle|g\right)=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2R}\int_{-R}^{R}f\overline{g}.$$

Pruebe que esta definición tiene sentido y que la aplicación $(f,g)\mapsto\left(f\middle|g\right)$ es un producto escalar que hace de X un espacio prehilbertiano.

Sea H el espacio prehilbertiano, completación del espacio prehilbertiano X (ver problema 1.5). **Muestre** que H es un espacio hilbertiano no separable y que la familia $(u_s)_{s\in\mathbb{R}}$ es un sistema ortonormal maximal en H.

Demostración:
Para la primera parte, notemos que por linealidad de la integral, basta probar que este mapeo tiene sentido para las funciones u_s. Sean $r, s \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\begin{aligned}\big(u_s\big|u_r\big) &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} u_s(x)\overline{u_r(x)}dx\\ &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} e^{isx}\overline{e^{irx}}dx\\ &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} e^{isx}e^{-irx}dx\\ &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} e^{i(s-r)x}dx\end{aligned}$$

si $s = r$, entonces

$$\begin{aligned}\big(u_s\big|u_r\big) &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} dx\\ &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}2R\\ &= \lim_{R\to\infty} 1\\ &= 1\end{aligned}$$

si $s \neq r$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\big(u_s\big|u_r\big) &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\frac{e^{i(s-r)x}}{i(s-r)}\Big|_{x=-R}^{x=R}\\ &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\frac{e^{i(s-r)R}-e^{-i(s-r)R}}{i(s-r)}\\ &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\frac{\cos((s-r)R)+i\operatorname{sen}((s-r)R)-\cos(-(s-r)R)-i\sin(-(s-r)R)}{i(s-r)}\\ &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\frac{\cos((s-r)R)+i\operatorname{sen}((s-r)R)-\cos((s-r)R)+i\sin((s-r)R)}{i(s-r)}\\ &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\frac{2i\sin((s-r)R)}{i(s-r)}\\ &= \lim_{R\to\infty} \frac{\sin((s-r)R)}{(s-r)R}\\ &= 0\end{aligned}$$

(usar teorema del emparedado para verificar que ese es el límite). Por tanto, $\big(\cdot\big|\cdot\big)$ está bien definida.

Veamos ahora que esa aplicación es un producto escalar sobre X. En efecto, se deben verificar cuatro condiciones:

I. Sea $g \in X$ fijo, hay que ver que la aplicación $f \mapsto \big(f\big|g\big)$ es lineal. En efecto, sean $f, f_1, f_2 \in X$

y $\alpha \in \mathbb{C}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\big(f_1 + f_2 \big| g\big) &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} (f_1+f_2)\overline{g} \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} f_1\overline{g} + f_2\overline{g} \\
&= \lim_{R\to\infty} \left(\frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} f_1\overline{g} + \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} f_2\overline{g}\right) \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} f_1\overline{g} + \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} f_2\overline{g} \\
&= \big(f_1\big|g\big) + \big(f_2\big|g\big)
\end{aligned}$$

pues, ambos límites existen. Además:

$$\begin{aligned}
\big(\alpha f\big|g\big) &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} \alpha f\overline{g} \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{\alpha}{2R}\int_{-R}^{R} f\overline{g} \\
&= \alpha \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} f\overline{g} \\
&= \alpha \big(f\big|g\big)
\end{aligned}$$

por tanto, esa aplicación es lineal.

II. $\big(g\big|f\big) = \overline{\big(f\big|g\big)}$, para todo $f, g \in X$. En efecto, sean $f, g \in X$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\overline{\big(f\big|g\big)} &= \overline{\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} f\overline{g}} \\
&= \lim_{R\to\infty} \overline{\frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} f\overline{g}} \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} \overline{f\overline{g}} \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} \overline{f} g \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} g\overline{f} \\
&= \big(g\big|f\big)
\end{aligned}$$

con lo que se tiene el resultado.

III. $\big(f\big|f\big) \geq 0$, para todo $f \in X$. En efecto, sea $f \in X$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\big(f\big|f\big) &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} f\overline{f} \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} \big|f\big|^2 \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

pues $\big|f\big|^2 \geq 0$.

IV. $\big(f\big|f\big) = 0$ si y sólo si $f = 0$. La vuelta es inmediata, suponga que $\big(f\big|f\big) = 0$, digamos que $f = \lambda_1 u_{s_1} + ... + \lambda_n u_{s_n}$ donde $\lambda_i \in \mathbb{C}$ y $s_i \in \mathbb{R}$ para todo $i \in [|1, n|]$, se tiene entonces que:

$$\begin{aligned}
\big(f\big|f\big) &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} f\overline{f} \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} (\lambda_1 u_{s_1} + ... + \lambda_n u_{s_n})\overline{\lambda_1 u_{s_1} + ... + \lambda_n u_{s_n}} \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} (\lambda_1 u_{s_1} + ... + \lambda_n u_{s_n})(\overline{\lambda_1} u_{-s_1} + ... + \overline{\lambda_n} u_{-s_n}) \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} (\lambda_1 u_{s_1} + ... + \lambda_n u_{s_n})(\overline{\lambda_1} u_{-s_1} + ... + \overline{\lambda_n} u_{-s_n}) \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i u_{s_i} \overline{\lambda_j} u_{-s_j} \\
&= \lim_{R\to\infty} \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \overline{\lambda_j} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} u_{s_i} u_{-s_j} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \overline{\lambda_j} \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} u_{s_i} u_{-s_j}
\end{aligned}$$

sean $i, j \in [|1, n|]$, se tienen dos casos, $i \neq j$ o $i = j$. Por lo analizado anteriormente si $i \neq j$ se sigue que

$$\lambda_i \overline{\lambda_j} \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} u_{s_i} u_{-s_j} = 0$$

y, si $i = j$:

$$\lambda_i \overline{\lambda_i} \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} u_{s_i} u_{-s_i} = \big|\lambda_i\big|^2$$

Por tanto:

$$\big(f\big|f\big) = \sum_{i=1}^{n} \big|\lambda_i\big|^2 = 0$$

esto ocurre si y sólo si $\lambda_i = 0$ para todo $i \in [|1, n|]$, es decir si $f = 0$.

por los cuatro incisos anteriores, se sigue que $\big(\cdot\big|\cdot\big)$ es un producto escalar sobre X que lo hace un espacio prehilbertiano.

Para la segunda parte, al inicio ya se vió que $(u_s)_{s\in\mathbb{R}}$ es un sistema O.N. de vectores en X. Para ver que no es separable, considere la familia de bolas:

$$\mathcal{B} = \Big\{B_s \Big| s \in \mathbb{R}^+\Big\}$$

donde $B_s = \Big\{f \in H \Big| \|f - u_s\| < \frac{1}{2}\Big\}$, para todo $s \in \mathbb{R}^+$. Afirmamos que estas bolas son disjuntas a pares, en efecto, sean $s, r \in \mathbb{R}^+$ con $s \neq r$. Si $f \in B_s$ y $f \in B_r$, entonces:

$$\|f - u_s\| < \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \|f - u_r\| < \frac{1}{2} \Rightarrow \|u_s - u_r\| \leq \|u_s - f\| + \|f - u_r\| < 1$$

pero,

$$\begin{aligned}
\left(u_s - u_r \middle| u_s - u_r\right) &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} (u_s - u_r)\overline{(u_s - u_r)} \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} (u_s - u_r)(u_{-s} - u_{-r}) \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} (u_s u_{-s} - u_s u_{-r} - u_r u_{-s} + u_{-s} u_{-r}) \\
&= 1 + 0 + 0 + 1 \\
&= 2 \\
\Rightarrow \|u_s - u_r\| &= \sqrt{2}
\end{aligned}$$

el cual no es menor que 1, por tanto tal f no puede existir, así $B_s \cap B_r = \emptyset$. Con lo que $\mathcal{B}$ es una familia no numerable de bolas abiertas disjuntas a pares, por una proposición de análisis I debe suceder que H no es separable.

Veamos que $(u_s)_{s\in\mathbb{R}}$ es O.N. maximal. Ya se vió que es O.N., veamos que es maximal. Por el teorema de Parserval al ser H hilbertiano, basta con ver que:

$$\overline{\mathcal{L}\left((u_s)_{s\in\mathbb{R}}\right)} = H$$

esto es inmediato, pues $\mathcal{L}\left((u_s)_{s\in\mathbb{R}}\right) = X$ ya que el conjunto de la izquierda es el generado por todas las combinaciones lineales finitas de elementos de $(u_s)_{s\in\mathbb{R}}$, y el conjunto $i(X)$ es denso en H (usando la notación del ejercicio 1.1.5), luego se tiene que:

$$\overline{i(X)} = H \Rightarrow \overline{\mathcal{L}\left((u_s)_{s\in\mathbb{R}}\right)} = H$$

pues, $i(u_s) = u_s$. Por tanto, $(u_s)_{s\in\mathbb{R}}$ es O.N. maximal. ■

Ejercicio 1.1.9
Sea H un espacio hilbertiano de dimensión infinita. **Demuestre** que existe una aplicación continua inyectiva γ de $[0,1]$ en H (un **camino simple** en H) tal que si $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 1$, los vectores $\gamma(b) - \gamma(a)$ y $\gamma(d) - \gamma(c)$ son ortogonales.

Indicación. Tome $H = L_2([0,1],\mathbb{K})$ y considere funciones características de ciertos subconjuntos de $[0,1]$.

Demostración:
Consideremos primero $H' = L_2([0,1],\mathbb{K})$. Sea $\gamma' : [0,1] \to H'$ dada por:

$$\gamma'(x) = \chi_{[0,x]}, \quad \forall x \in [0,1]$$

es claro que γ' es inyectiva. Además, si $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 1$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\gamma'(b) - \gamma'(a) &= \chi_{[0,b]} - \chi_{[0,a]} \\
&= \chi_{]a,b]}
\end{aligned}$$

y, $\gamma'(d) - \gamma'(c) = \chi_{]c,d]}$. Por tanto:

$$\begin{aligned}
\left(\gamma'(b) - \gamma'(a) \middle| \gamma'(d) - \gamma'(c)\right) &= \int_0^1 \chi_{]a,b]}\overline{\chi_{]c,d]}} \\
&= \int_0^1 \chi_{]a,b]}\chi_{]c,d]} \\
&= 0
\end{aligned}$$

por tanto, $\gamma'(b)-\gamma'(a)$ y $\gamma'(d)-\gamma'(c)$ son ortogonales.

Ahora, sea H un espacio hilbertiano arbitrario de dimensión infinita. Entonces, existe Ω tal que $H\equiv l_2(\Omega,\mathbb{K})$, sea $F:l_2(\Omega,\mathbb{K})\to H$ la isometría suprayectiva entre estos dos espacios (en particular, es biyectiva por lo que es un isomorfismo de espacios hilbertianos).

Notemos que como $H'=L_2([0,1],\mathbb{K})$ siendo $[0,1]\subseteq\mathbb{R}$ medible, entonces H' es separable, es decir que $H'\equiv l_2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ (son isométricos), sea $G:H'\to l_2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ la isometría suprayectiva entre estos dos espacios (nuevamente, se tiene que en particular es biyectiva, por lo que es un isomorfismo de espacios hilbertianos).

Como Ω es infinito (ya que el espacio H es de dimensión infinita, luego la familia O.N. maximal debe ser infinita, es decir a lo sumo numerable) existe una subfamilia $\{\omega_n\}_{n=1}^\infty$ numerable de elementos de Ω, defina así $j:\mathbb{N}\to\Omega$ tal que $n\mapsto\omega_n$. Definimos con esto la función $J:l_2(\mathbb{N},\mathbb{K})\to l_2(\Omega,\mathbb{K})$ tal que:

$$\{x(n)\}_{n\in\mathbb{N}}\mapsto\{y(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$$

donde

$$y(\omega)=\begin{cases} x(n) & \text{si } \omega=\omega_n \text{ para algún } n\in\mathbb{N}\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases},\quad \forall\omega\in\Omega$$

Esta función está bien definida y es claro que es inyectiva (más aún, es una isometría). Por lo cual la función

$$\gamma=F\circ J\circ G\circ\gamma':[0,1]\to H$$

es inyectiva, y cumple que (al ser F, J y G isometrías):

$$\begin{aligned}\big(\gamma(b)-\gamma(a)\big|\gamma(d)-\gamma(d)\big)&=\big(\gamma'(b)-\gamma'(a)\big|\gamma'(d)-\gamma'(d)\big)\\&=0\end{aligned}$$

para todo $0\leq a\leq b\leq c\leq d\leq 1$ (pues, $F\circ J\circ G$ es una isometría por lo cual preserva el producto escalar). Así, γ es la función buscada. ■

Ejercicio 1.1.10

Sea $\{\vec{x_\nu}\}_{\nu=1}^\infty$ una sucesión de elementos de un espacio hilbertiano H. La sucesión $\{\vec{x_\nu}\}_{\nu=1}^\infty$ se llama **martingala** (en el sentido amplio) si, $\forall\nu\in\mathbb{N}$, $\vec{x_\nu}$ es el vector de $\mathcal{L}(\vec{x_1},...,\vec{x_\nu})$ menos alejado de $\vec{x_{\nu+1}}$ (básicamente $\vec{x_v}$ es la proyección ortogonal de $\vec{x_{v+1}}$ sobre el subespacio generado por los vectores anteriores).

I. Sea $\{\vec{x_\nu}\}_{\nu=1}^\infty$ una martingala. Se definen:

$$\vec{y_1}=\vec{x_1}\quad\text{e}\quad\vec{y_\nu}=\vec{x_\nu}-\vec{x_{\nu-1}},\quad\forall\nu\geq 2.$$

Muestre que los vectores $\vec{y_\nu}$ son ortogonales a pares y que $\{\|\vec{x_\nu}\|\}_{\nu=1}^\infty$ es una sucesión creciente de números no negativos.

II. Sea $\{\vec{y_\nu}\}_{\nu=1}^\infty$ una sucesión de vectores en H ortogonales a pares. Se define

$$\vec{x_\nu}=\sum_{k=1}^{\nu}\vec{y_k},\quad\forall\nu\in\mathbb{N}.$$

Pruebe que $\{\vec{y_\nu}\}_{\nu=1}^\infty$ es una martingala.

Demostración:

De (i): Procederemos por inducción sobre ν. Para $\nu=2$ el resultado se cumple, pues notemos que $\vec{x_1}$ es el vector de $\mathcal{L}(\vec{x_1})$ menos alejado de $\vec{x_2}$, es decir que $\vec{x_1}$ es la proyección ortogonal de $\vec{x_2}$, luego

$\vec{x_1} \perp \vec{x_2} - \vec{x_1}$, es decir que $\vec{y_1} \perp \vec{y_2}$. Además, por este hecho (y, usando Pitágoras) se sigue que:

$$\begin{aligned}\|\vec{x_1}\|^2 + \|\vec{x_2} - \vec{x_1}\|^2 &= \|\vec{x_2}\|^2 \\ \Rightarrow \|\vec{x_1}\| &\leq \|\vec{x_2}\|\end{aligned}$$

Suponga que el resultado se cumple para algún ν. Veamos que se cumple para $\nu + 1$. En efecto, ya se tiene que $\vec{y_1}, ..., \vec{y_\nu}$ son ortogonales a pares. Como $\vec{x_\nu}$ es el vector menos alejado de $\vec{x_{\nu+1}}$, es decir que es su proyección ortogonal sobre $\mathcal{L}(\vec{x_1}, ..., \vec{x_\nu})$, por ende, $y_{\nu+1} = \vec{x_{\nu+1}} - \vec{x_\nu} \perp \mathcal{L}(\vec{x_1}, ..., \vec{x_\nu})$, en particular, $\vec{y_1}, ..., \vec{y_\nu} \in \mathcal{L}(\vec{x_1}, ..., \vec{x_\nu})$, luego los vectores $\vec{y_1}, ..., \vec{y_{\nu+1}}$ son ortogonales a pares.

Además, como en el paso inductivo, se tiene que:

$$\begin{aligned}\|\vec{x_\nu}\|^2 + \|\vec{x_{\nu+1}} - \vec{x_\nu}\|^2 &= \|\vec{x_{\nu+1}}\|^2 \\ \Rightarrow \|\vec{x_\nu}\| &\leq \|\vec{x_{\nu+1}}\|\end{aligned}$$

Aplicando inducción, el resultado se tiene para todo $\nu \in \mathbb{N}$.

De (ii): Sea $\nu \in \mathbb{N}$. Hay que probar que $\vec{x_\nu}$ es la proyección de $\vec{x_{\nu+1}}$ sobre $\mathcal{L}(\vec{x_1}, ..., \vec{x_\nu})$. En efecto, veamos que

$$\begin{aligned}\vec{x_{\nu+1}} &= \sum_{k=1}^{\nu+1} \vec{y_k} \\ &= \sum_{k=1}^{\nu} \vec{y_k} + \vec{y_{\nu+1}} \\ &= \vec{x_\nu} + \vec{y_{\nu+1}}\end{aligned}$$

siendo $y_\nu \vec{+} 1 \perp M = \mathcal{L}(\vec{x_1}, ..., \vec{x_\nu})$, por tanto al ser M distinguido (por ser de dimensión finita), se sigue que esta descomposición es única, es decir que el vector $\vec{x_\nu}$ es la proyección ortogonal de $\vec{x_{\nu+1}}$ sobre M, que es lo que se quería demostrar.

$\blacksquare$

Ejercicio 1.1.11

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ una función medible, integrable en todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ de medida finita. Si

$$\int f = 0, \quad \forall \text{ rectángulo acotado } P \subseteq \mathbb{R}^n,$$

demuestre que $f = 0$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$.

Indicación. Redúzcase a un corolario del lema de los promedios.

Demostración:

Sea $P \subseteq \mathbb{R}^n$ rectángulo acotado con medida positiva, es decir, $m(P) > 0$. Probaremos que:

$$\int_P |f| = 0$$

en efecto, como f es integrable en $\mathbb{R}^n$ en todo subconjunto con medida finita, entonces $|f|$ también lo es. Además:

$$\int_P f = \int_P f^+ + \int_P f^- = 0$$

si $\int_P f^+ = \int_P f^- = 0$, ya se tiene el resultado. Suponga que alguna de las dos integrales es positiva, digamos

$$\int_P f^+ > 0$$

entonces, el conjunto:

$$A = \left\{x \in P \middle| f(x) > 0\right\}$$

tiene medida positiva. Se tiene que:

$$A = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$$

donde $A_\nu = \left\{x \in P \middle| f(x) \geq \frac{1}{\nu}\right\}$. Por el teorema de continuidad, existe $\nu_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m(A_{\nu_0}) > 0$. Ahora, como todas las normas sobre $\mathbb{R}^n$ son equivalentes, existe $r > 0$ tal que:

$$B_\infty(x_0, r) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| \|x_0 - x\|_\infty < r\right\} \subseteq A_{\nu_0}$$

(donde $\|\cdot\|_\infty$ es la norma infinito sobre $\mathbb{R}^n$ y $x_0 \in A_{\nu_0}$). Este conjunto es un rectángulo acotado en el que se cumple que:

$$\int_{A_{\nu_0}} f^+ = \int_{A_{\nu_0}} f \geq \int_{B_\infty(x_0,r)} f \geq \frac{1}{\nu_0} \int_{B_\infty(x_0,r)} dx = \frac{1}{\nu_0} m(B_\infty(x_0, r)) > 0$$

lo cual contradice la hipótesis. Por tanto,

$$\int_P f^+ = \int_P f^- = 0$$

es decir, que

$$\int_P |f| = 0$$

siendo P un rectángulo acotado con medida positiva. Notemos que si la medida de este rectangulo fuese 0, el resultado seguiría siendo válido. Por ende:

$$\int |f| = 0, \quad \forall \text{ rectángulo acotado } P \subseteq \mathbb{R}^n,$$

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto medible tal que $0 < m(A) < \infty$. Por un resultado de Análisis II, existe $\{P_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ sucesión de rectángulos acotados disjuntos con medida finita tales que:

$$A \subseteq \bigcup_{\nu=1}^{\infty} P_\nu = P$$

donde $m(P) < \infty$. Se tiene entonces que, al ser $|f| \geq 0$:

$$0 \leq \frac{1}{m(A)} \int_A |f| \leq \frac{1}{m(P)} \int_P |f|$$

pero, por un corolario de Beppo-Levi, se tiene que:

$$\int_P |f| = \int_{\bigcup_{\nu=1}^\infty P_\nu} |f| = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{P_\nu} |f| = 0$$

por lo probado anteriormente, luego:

$$\frac{1}{m(A)} \int_A |f| = 0 \in F$$

donde $F = \{0\}$ es cerrado. Por el lema de los promedios se sigue que $f = 0$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$. ■

Ejercicio 1.1.12 (**Funciones de Hermite**)
Por inducción se ve inmediatamente que

$$D^n e^{-x^2} = (-1)^n H_n(x) e^{-x^2}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

donde $(-1)H_n$ es un polinomio de grado n. Estos polinomios $(-1)H_n$ se llaman **polinomios de Hermite**. Se definen las **funciones de Hermite** φ_n por:

$$\varphi_n(x) = H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

equivalentemente,

$$\varphi_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} D^n e^{-x^2}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

I. **Demuestre** que las funciones de Hermite satisfacen la relación:

$$\varphi_n''(x) = (x^2 - 2n - 1)\varphi_n(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Indicación. Exprese a $\varphi_n''(x)$ mediante $D^n e^{-x^2}$, $D^{n+1} e^{-x^2}$ y $D^{n+2} e^{-x^2}$ y calcule $D^{n+2} e^{-x^2} = D^{n+1}(-2xe^{-x^2})$ por la fórmula de Leibniz para la derivada $n+1$-enésima de un producto de factores.

II. **Muestre** que las funciones de Hermite consistituyen un sistema ortogonal en el espacio hilbertiano $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{K})$

Indicación. Del inciso (i) se sigue que $\varphi_n''\varphi_m - \varphi_m''\varphi_n = 2(m-n)\varphi_n\varphi_m$.

III. **Pruebe** la relación

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x).$$

Indicación. Exprese $H_n'(x)$ mediante $D^n e^{-x^2}$ y $D^{n+1} e^{-x^2}$. Calcule $D^{n+1} e^{-x^2} = D^n(-2xe^{-x^2})$ por la fórmula de Leibniz.

IV. **Demuestre** que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^2(x)dx = 2n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{n-1}^2(x)dx$$

y deduzca que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^2(x)dx = \pi^{1/2} 2^n n!.$$

Luego el sistema de funciones:

$$\Psi_n = \frac{1}{\pi^{1/2} 2^n n!}\varphi_n$$

es un sistema ortonormal en $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ (En un ejercicio posterior se probará que dicho sistema ortonormal es, de hecho, maximal).

Indicación. Integre por partes

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^2(x)dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) D^n e^{-x^2} dx$$

y use (iii).

Demostración:

De (i): Sea $n \in \mathbb{N}^*$. Veamos que:

$$\begin{aligned}
\varphi_n'(x) &= \frac{d}{dx}\left((-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} D^n e^{-x^2}\right) \\
&= (-1)^n \frac{d}{dx}\left(e^{\frac{x^2}{2}} D^n e^{-x^2}\right) \\
&= (-1)^n \left[\frac{d}{dx}\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right) D^n e^{-x^2} + e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d}{dx}\left(D^n e^{-x^2}\right)\right] \\
&= (-1)^n \left[x e^{\frac{x^2}{2}} D^n e^{-x^2} + e^{\frac{x^2}{2}} D^{n+1} e^{-x^2}\right]
\end{aligned}$$

por tanto:

$$\begin{aligned}
\varphi_n''(x) &= (-1)^n \frac{d}{dx}\left[x e^{\frac{x^2}{2}} D^n e^{-x^2} + e^{\frac{x^2}{2}} D^{n+1} e^{-x^2}\right] \\
&= (-1)^n \left[\frac{d}{dx}(x e^{\frac{x^2}{2}}) D^n e^{-x^2} + x e^{\frac{x^2}{2}} D^{n+1} e^{-x^2} + \frac{d}{dx}(e^{\frac{x^2}{2}}) D^{n+1} e^{-x^2} + e^{\frac{x^2}{2}} D^{n+2} e^{-x^2}\right] \\
&= (-1)^n \left[(x^2+1) e^{\frac{x^2}{2}} D^n e^{-x^2} + x e^{\frac{x^2}{2}} D^{n+1} e^{-x^2} + x e^{\frac{x^2}{2}} D^{n+1} e^{-x^2} + e^{\frac{x^2}{2}} D^{n+2} e^{-x^2}\right] \\
&= (-1)^n \left[(x^2+1) e^{\frac{x^2}{2}} D^n e^{-x^2} + 2x e^{\frac{x^2}{2}} D^{n+1} e^{-x^2} + e^{\frac{x^2}{2}} D^{n+2} e^{-x^2}\right] \\
&= (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \left[(x^2+1) D^n e^{-x^2} + 2x D^{n+1} e^{-x^2} + D^{n+2} e^{-x^2}\right]
\end{aligned}$$

por la regla general de Leibniz para la derivada de un producto, se tiene que:

$$\begin{aligned}
D^{n+2} e^{-x^2} &= D^{n+1}(D(e^{-x^2})) \\
&= D^{n+1}(-2x e^{-x^2}) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (D^{n+1-k} e^{-x^2})(-2 D^k x) \\
&= -2x D^{n+1} e^{-x^2} - 2(n+1) D^n e^{-x^2}
\end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}
\varphi_n''(x) &= (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \left[(x^2+1) D^n e^{-x^2} + 2x D^{n+1} e^{-x^2} - 2x D^{n+1} e^{-x^2} - 2(n+1) D^n e^{-x^2}\right] \\
&= (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \left[(x^2+1) D^n e^{-x^2} - 2(n+1) D^n e^{-x^2}\right] \\
&= (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} D^n e^{-x^2} \left[x^2 + 1 - 2n - 2\right] \\
&= (x^2 - 2n - 1)(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} D^n e^{-x^2} \\
&= (x^2 - 2n - 1)\varphi_n(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

como se quería probar.

De (ii): Observemos que si $m, n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\varphi_n''(x)\varphi_m(x) - \varphi_m''(x)\varphi_n(x) &= (x^2 - 2n - 1)\varphi_n(x)\varphi_m(x) - (x^2 - 2m - 1)\varphi_n(x)\varphi_m(x) \\
&= (x^2 - 2n - 1 - x^2 + 2m + 1)\varphi_n(x)\varphi_m(x) \\
&= 2(m - n)\varphi_n(x)\varphi_m(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Por tanto, si $m \neq n$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\left(\varphi_n \middle| \varphi_m\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x)\overline{\varphi_m(x)}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx \\
&= \frac{1}{2(m-n)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\varphi_n''(x)\varphi_m(x) - \varphi_m''(x)\varphi_n(x)\right] dx \\
&= \frac{1}{2(m-n)} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \left[\varphi_n''(x)\varphi_m(x) - \varphi_m''(x)\varphi_n(x)\right] dx
\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
&\int_{-R}^{R} \left[\varphi_n''(x)\varphi_m(x) - \varphi_m''(x)\varphi_n(x)\right] dx \\
&\quad = \left[\varphi_n'(x)\varphi_m(x) - \varphi_m'(x)\varphi_n(x)\right]\Big|_{-R}^{R} - \int_{-R}^{R}(\varphi_n'(x)\varphi_m'(x) - \varphi_m'(x)\varphi_n'(x))dx \\
&\quad = \left[\varphi_n'(R)\varphi_m(R) - \varphi_m'(R)\varphi_n(R) - \varphi_n'(-R)\varphi_m(-R) + \varphi_m'(-R)\varphi_n(-R)\right]
\end{aligned}$$

además,

$$\begin{aligned}
\varphi_n'(x) &= \frac{d}{dx}\left(H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\right) \\
&= H_n'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - 2xH_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \\
&= e^{-\frac{x^2}{2}}\left[H_n'(x) - 2xH_n(x)\right]
\end{aligned}$$

Por lo cual:

$$\varphi_n'(x)\varphi_m(x) = e^{-x^2}\left[H_n'(x) - 2xH_n(x)\right]H_m(x)$$

luego, al tomar el límite cuando $R \to \infty$, se tiene que el término e^{-x^2} domina a lo que sea que valga el producto de polinomios de la derecha con lo cual, se sigue que:

$$\lim_{R\to\infty} \left[\varphi_n'(R)\varphi_m(R) - \varphi_m'(R)\varphi_n(R) - \varphi_n'(-R)\varphi_m(-R) + \varphi_m'(-R)\varphi_n(-R)\right] = 0$$

y, por ende:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \left[\varphi_n''(x)\varphi_m(x) - \varphi_m''(x)\varphi_n(x)\right] dx = 0$$

así, se tiene que:

$$\left(\varphi_n \middle| \varphi_m\right) = 0$$

Por tanto, el sistema $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ es un sistema ortogonal en $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

De (iii): Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\begin{aligned}
\varphi_n(x) &= \varphi_n(x) \\
\Rightarrow H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}} &= (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} D^n e^{-x^2} \\
\Rightarrow H_n(x) &= (-1)^n e^{x^2} D^n e^{-x^2}
\end{aligned}$$

derivando se tiene que:

$$\begin{aligned}
H_n'(x) &= \frac{d}{dx}\left((-1)^n e^{x^2} D^n e^{-x^2}\right) \\
&= (-1)^n \left[\frac{d}{dx}\left(e^{x^2}\right) D^n e^{-x^2} + e^{x^2} D^{n+1} e^{-x^2}\right] \\
&= (-1)^n \left[2xe^{x^2} D^n e^{-x^2} + e^{x^2} D^{n+1} e^{-x^2}\right] \\
&= (-1)^n e^{x^2} \left[2D^n e^{-x^2} + D^{n+1} e^{-x^2}\right]
\end{aligned}$$

con:

$$\begin{aligned} D^{n+1}e^{-x^2} &= D^n(-2xe^{-x^2}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (D^{n-k}e^{-x^2})(D^k(-2x)) \\ &= -2xD^n e^{-x^2} - 2nD^{n-1}e^{-x^2} \end{aligned}$$

por tanto:

$$\begin{aligned} H_n'(x) &= (-1)^n e^{x^2} \left[2xD^n e^{-x^2} + D^{n+1}e^{-x^2}\right] \\ &= (-1)^n e^{x^2} \left[2xD^n e^{-x^2} - 2xD^n e^{-x^2} - 2nD^{n-1}e^{-x^2}\right] \\ &= (-1)^{n-1} e^{x^2} \left[2nD^{n-1}e^{-x^2}\right] \\ &= 2n \left[(-1)^{n-1} e^{x^2} D^{n-1}e^{-x^2}\right] \\ &= 2nH_{n-1}(x) \end{aligned}$$

como se quería demostrar.

De (iv): Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x)^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{\left(H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\right)}^{\varphi_n(x)} \overbrace{\left((-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} D^n e^{-x^2}\right)}^{\varphi_n(x)} dx \\ &= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) D^n e^{-x^2} dx \\ &= (-1)^n \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} H_n(x) D^n e^{-x^2} dx \\ &= (-1)^n \lim_{R\to\infty} \left[H_n(x) D^{n-1} e^{-x^2} \Big|_{x=-R}^{x=R} - \int_{-R}^{R} H_n'(x) D^{n-1} e^{-x^2} \right] \\ &= (-1)^n \lim_{R\to\infty} \left[(-1)^{n-1} H_n(x) H_{n-1}(x) e^{-x^2} \Big|_{x=-R}^{x=R} - \int_{-R}^{R} H_n'(x) D^{n-1} e^{-x^2} \right] \end{aligned}$$

pero:

$$\lim_{R\to\infty} (-1)^{n-1} H_n(x) H_{n-1}(x) e^{-x^2} \Big|_{x=-R}^{x=R} = \lim_{R\to\infty} P(R) e^{-R^2}$$

donde $P(x) = (-1)^{n-1} \left(H_n(x)H_{n-1}(x) - H_n(-x)H_{n-1}(-x)\right)$. Luego el límite anterior es cero, pues la función exponencial tiende a 0 más rápido. Usando además lo obtenido en (iii), se sigue que:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x)^2 dx &= (-1)^{n-1} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} H_n'(x) D^{n-1} e^{-x^2} \\ &= 2n(-1)^{n-1} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} H_{n-1}(x) D^{n-1} e^{-x^2} \\ &= 2n(-1)^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} H_{n-1}(x) D^{n-1} e^{-x^2} \\ &= 2n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{n-1}(x)^2 dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x)^2 dx = 2n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{n-1}(x)^2 dx$$

para probar la otra parte, veamos que:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x)^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left((-1)^0 e^{\frac{x^2}{2}} e^{-x^2}\right)^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \\ &= \pi^{1/2}\end{aligned}$$

Por inducción (no es tan complicado), se prueba que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x)^2 dx = \pi^{1/2} 2^n n!$$

con lo cual, el sistema formado por:

$$\psi_n = \frac{\varphi_n}{\pi^{1/2} 2^n n!}$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$ es un sistema ortonormal sobre $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, como se quería demostrar.

$\blacksquare$