# Lista Ejercicios Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

12 de junio de 2024

# Índice general

# Capítulo 1

# Lista 4

**Ejercicio 1.0.1**
Haga lo siguiente:

i. Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Defina $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como:

$$P(x_1, ..., x_n) = e^{-\sum_{k=1}^{n}|x_k|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Fije $\nu \in \mathbb{N}$, **demuestre** la fórmula:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x) P\left(\frac{x}{\nu}\right)\, dx = (2\nu)^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x_1, ..., x_n)}{(1+\nu^2 x_1^2)\cdots(1+\nu^2 x_n^2)}\, dx_1 \cdots dx_n$$

ii. **Deduzca** que si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \cap \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ y $\mathcal{F}f \geqslant 0$, entonces $\mathcal{F}f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

*Sugerencia.* Aplique el teorema de Beppo-Levi.

**Demostración:**
De (i): Defina $g(x) = P\left(\frac{x}{\nu}\right)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Veamos que $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} g\left(x\right)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} P\left(\frac{x}{\nu}\right)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} P\left(\frac{x_1}{\nu}, ..., \frac{x_1}{\nu}\right)\, dx_1 \cdots dx_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{x_k}{\nu}\right|}\, dx_1 \cdots dx_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{\nu}\sum_{k=1}^{n}|x_k|}\, dx_1 \cdots dx_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x_1|}{\nu}} \cdot ... \cdot e^{-\frac{|x_n|}{\nu}}\, dx_1 \cdots dx_n \\
&= \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x_1|}{\nu}}\, dx_1\right) \cdots \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x_n|}{\nu}}\, dx_n\right)}_{n\text{-veces}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|t|}{\nu}}\, dt\right)^n \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Usando Fubini para funciones medibles no negativas. Por tanto, por el Teorema de transferencia se sigue que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x)P\left(\frac{x}{\nu}\right)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x)g(x)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathcal{F}g(x)\,dx\end{aligned}$$

Calculemos $\mathcal{F}g(x)$. Como $g(x) = P\left(\frac{x}{\nu}\right)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\mathcal{F}g(x) = \nu^n \mathcal{F}P(\nu x)$$

(por una proposición), donde

$$\begin{aligned}\mathcal{F}P(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle}P(y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\sum_{k=1}^{n} x_k y_k} e^{-\sum_{k=1}^{n}|y_k|}\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{k=1}^{n}(|y_k|+ix_k y_k)}\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y_1|-ix_1y_1}\cdot \ldots \cdot e^{-|y_n|-ix_ny_n}\,dy_1\cdots dy_n \\ &= \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y_1|-ix_1y_1}\,dy_1\right)\cdots\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y_n|-ix_ny_n}\,dy_n\right)}_{n\text{-veces}} \\ &= \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|-ix_1t}\,dt\right)\cdots\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|-ix_nt}\,dt\right)}_{n\text{-veces}} \\ &= \mathcal{F}h(x_1)\cdots\mathcal{F}h(x_n)\end{aligned}$$

donde $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función tal que $t \mapsto e^{-|t|}$ y, se sabe que

$$\mathcal{F}h(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}P(x) &= \frac{2^n}{(1+x_1^2)\cdots(1+x_n^2)} \\ \Rightarrow \mathcal{F}P(\nu x) &= \frac{2^n}{(1+\nu^2x_1^2)\cdots(1+\nu^2x_n^2)}\end{aligned}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x)P\left(\frac{x}{\nu}\right)\,dx &= \nu^n\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathcal{F}P(\nu x)\,dx \\ &= \nu^n\int_{\mathbb{R}^n} \frac{2^n f(x_1,...,x_n)}{(1+\nu^2x_1^2)\cdots(1+\nu^2x_n^2)}\,dx_1\cdots dx_n \\ &= (2\nu)^n\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x_1,...,x_n)}{(1+\nu^2x_1^2)\cdots(1+\nu^2x_n^2)}\,dx_1\cdots dx_n\end{aligned}$$

De (ii): Para cada $\nu \in \mathbb{N}$ defina la función $g_\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ como sigue:

$$g_\nu(x) = \mathcal{F}f(x)P\left(\frac{x}{\nu}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Esta es una sucesión creciente de funciones en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$, pues si $\nu\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\nu+1}\sum_{k=1}^{n}|x_k| \leqslant \frac{1}{\nu}\sum_{k=1}^{n}|x_k|\,, \quad \forall x\in\mathbb{R}^n \\
\Rightarrow -\frac{1}{\nu}\sum_{k=1}^{n}|x_k| \leqslant -\frac{1}{\nu+1}\sum_{k=1}^{n}|x_k|\,, \quad \forall x\in\mathbb{R}^n \\
\Rightarrow e^{\frac{1}{\nu}\sum_{k=1}^{n}|x_k|} \leqslant e^{-\frac{1}{\nu+1}\sum_{k=1}^{n}|x_k|}, \quad \forall x\in\mathbb{R}^n \\
\Rightarrow P\left(\frac{x}{\nu}\right) \leqslant P\left(\frac{x}{\nu+1}\right), \quad \forall x\in\mathbb{R}^n \\
\Rightarrow \mathcal{F}f(x)P\left(\frac{x}{\nu}\right) \leqslant \mathcal{F}f(x)P\left(\frac{x}{\nu+1}\right), \quad \forall x\in\mathbb{R}^n \\
\Rightarrow g_\nu \leqslant g_{\nu+1}
\end{aligned}$$

pues, $\mathcal{F}f\geqslant 0$. Además, como $f\in\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$, entonces

$$f\leqslant \mathcal{N}_\infty(f) \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n$$

luego,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} g_\nu(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{F}f(x)P\left(\frac{x}{\nu}\right)\,dx \\
&= (2\nu)^n\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(x_1,...,x_n)}{(1+\nu^2x_1^2)\cdots(1+\nu^2x_n^2)}\,dx_1\cdots dx_n
\end{aligned}$$

Hagamos el cambio de variable $(y_1,...,y_n)=(\frac{x_1}{\nu},...,\frac{x_n}{\nu})$, se tiene que

$$\begin{aligned}
(2\nu)^n\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(x_1,...,x_n)}{(1+\nu^2x_1^2)\cdots(1+\nu^2x_n^2)}\,dx_1\cdots dx_n &= (2\nu)^n\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(\nu y_1,...,\nu y_n)}{(1+y_1^2)\cdots(1+y_n^2)}\,\frac{dy_1\cdots dy_n}{\nu^n} \\
&= 2^n\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(\nu y_1,...,\nu y_n)}{(1+y_1^2)\cdots(1+y_n^2)}\,dy_1\cdots dy_n \\
&= 2^n\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\mathcal{N}_\infty(f)}{(1+y_1^2)\cdots(1+y_n^2)}\,dy_1\cdots dy_n \\
&= 2^n\mathcal{N}_\infty(f)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{dy_1\cdots dy_n}{(1+y_1^2)\cdots(1+y_n^2)} \\
\Rightarrow \left|\int_{\mathbb{R}^n} g_\nu(x)\right| &= 2^n\mathcal{N}_\infty(f)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{dy_1\cdots dy_n}{(1+y_1^2)\cdots(1+y_n^2)}
\end{aligned}$$

pues $\int_{\mathbb{R}^n}\frac{dy_1\cdots dy_n}{(1+y_1^2)\cdots(1+y_n^2)}<\infty$ y $\int_{\mathbb{R}^n} g_\nu(x)\geqslant 0$. Por tanto, por Beppo-Levi se sigue que existe una función $g\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ tal que

$$\lim_{\nu\to\infty} g_\nu = g \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n$$

Pero, también se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{\nu\to\infty} g_\nu(x) &= \lim_{\nu\to\infty}\mathcal{F}f(x)P\left(\frac{x}{\nu}\right) \\
&= \mathcal{F}f(x)\lim_{\nu\to\infty}P\left(\frac{x}{\nu}\right) \\
&= \mathcal{F}f(x)P(0,...,0) \\
&= \mathcal{F}f(x), \quad \forall x\in\mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

Entonces $\mathcal{F}f=g$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$, luego $\mathcal{F}f\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$. Más aún,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{F}f(x)\,dx &= \lim_{\nu\to\infty}2^n\mathcal{N}_\infty(f)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{dy_1\cdots dy_n}{(1+y_1^2)\cdots(1+y_n^2)} \\
&= 2^n\mathcal{N}_\infty(f)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{dy_1\cdots dy_n}{(1+y_1^2)\cdots(1+y_n^2)}
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

**Ejercicio 1.0.2** (**Problema 2 Lista 6 Análisis Matemático II**)
**Pruebe** que si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, entonces

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} f\right| = \int_{\mathbb{R}^n} |f|$$

si y sólo si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ fijo tal que $f = e^{i\alpha}|f|$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$.

*Sugerencia.* Suponiendo que $\left|\int_{\mathbb{R}^n} f\right| = \int_{\mathbb{R}^n} |f|$, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} f = e^{i\alpha}\int_{\mathbb{R}^n} |f|$. Escriba

$$e^{-i\alpha} f = g + ih$$

donde $g$ y $h$ son funciones reales.

**Demostración:**

$\blacksquare$

**Ejercicio 1.0.3**
Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Se supone que $f(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. **Pruebe** que si $x \neq 0$, entonces

$$\mathcal{F}f(0) > |\mathcal{F}f(x)|$$

*Sugerencia.* Una vez que ha demostrado $|\mathcal{F}f(x)| \leqslant \mathcal{F}f(0)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, Para demostrar la desigualdad estricta para $x \neq 0$ proceda por reducción al absurdo y use el Problema 2 de la Lista 6 de Análisis Matemático II.

**Demostración:**

Notemos que como $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene en particular que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Primero probaremos que

$$\mathcal{F}f(0) \geqslant |\mathcal{F}f(x)|$$

es decir:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle 0|y\rangle} f(y)\,dy \geqslant \left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y)\,dy\right| \\
\iff &\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,dy \geqslant \left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y)\,dy\right| \\
\iff &\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\,dy \geqslant \left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y)\,dy\right|
\end{aligned}$$

pues $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Veamos que

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y)\,dy\right| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left|e^{-i\langle x|y\rangle} f(y)\right|\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left|e^{-i\langle x|y\rangle}\right| |f(y)|\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\,dy
\end{aligned} \tag{1.1}$$

lo que prueba el resultado. Para la desigualdad estricta suponga que existe $x \in \mathbb{R}^n$ no cero tal que

$$\mathcal{F}f(x) = \mathcal{F}f(0)$$

esto es

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y)\, dy\right| &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left|e^{-i\langle x|y\rangle} f(y)\right|\, dy\end{aligned}$$

Por el ejercicio anterior existe $\alpha \in \mathbb{R}$ fijo tal que

$$e^{-i\langle x|y\rangle} f(y) = e^{i\alpha} |f(y)| = e^{i\alpha} f(y)$$

para casi todo $y \in \mathbb{R}^n$. En particular, tenemos que

$$f(y)\left(e^{-i\langle x|y\rangle} - e^{i\alpha}\right) = 0$$

para casi todo $y \in \mathbb{R}^n$. Como $f(y) > 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$e^{-i\langle x|y\rangle} - e^{i\alpha} = 0$$

nuevamente para casi todo $y \in \mathbb{R}^n$. Como las dos funciones involucradas son continuas y coinciden c.t.p. en $\mathbb{R}^n$, debe tenerse pues que

$$e^{-i\langle x|y\rangle} = e^{i\alpha}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

lo cual ocurre si y sólo si

$$e^{i(\langle x|y\rangle+\alpha)} = 1, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

es decir que

$$\langle x|y\rangle + \alpha = 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

como $x \neq 0$ en particular se tiene que

$$\langle x|x\rangle = -\alpha$$

y, además (tomando $y = 2x$):

$$2\langle x|x\rangle = -\alpha$$

pero esto sólo puede suceder si $\langle x|x\rangle = 0$, es decir que $x = 0\#_c$. Luego entonces

$$|\mathcal{F}f(x)| < \mathcal{F}f(0)$$

■

**Ejercicio 1.0.4**
Haga lo siguiente:

i. Sean $a > 0$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. **Pruebe** que la función $x \mapsto (\cos\lambda x)/(x^2 + a^2)$ es integrable en $[0, \infty[$. **Muestre** que si $\lambda \neq 0$, la función $x \mapsto (x \sin\lambda x)/(x^2 + a^2)$ no es integrable en $[0, \infty[$, pero existe la integral impropia

$$\int_0^{\to\infty} \frac{x\sin\lambda x}{x^2 + a^2}\, dx$$

*Sugerencia.* Muestre que

$$\left|\frac{x\sin\lambda x}{x^2 + a^2}\right| \underset{x\to\infty}{\sim} \left|\frac{\sin\lambda x}{x}\right|$$

Para probar la existencia de la integral impropia use los criterios de Abel.

ii. Recuerde que la función $x \mapsto (2a)/(x^2 + a^2)$ es la transformada de Fourier de la función $x \mapsto e^{-a|x|}$. Usando el teorema de inversión de Fourier, **demuestre** que

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos\lambda x}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{\pi}{2a} e^{-a|\lambda|}$$

iii. Usando el inciso (ii), calcule la integral impropia

$$\int_0^{\to\infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2}\, dx$$

*Sugerencia.* Para $\lambda \neq 0$ defina

$$\Phi(\lambda) = \int_0^{\to\infty} \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2}\, dx$$

**Calcule** $\Phi'(\lambda)$ primero suponiendo $\lambda > \lambda_0$, donde $\lambda_0 > 0$ es arbitrario fijo, de forma análoga para $\lambda < 0$ y finalmente para $\lambda = 0$.

**Demostración:**

De (i): Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ defina

$$f(x) = \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2}$$

Afirmamos que $f$ es integrable en $[0, \infty[$. Para ello, veamos que

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} |f| &= \int_0^{\infty} \frac{|\cos \lambda x|}{x^2 + a^2}\, dx \\ &\leqslant \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} \end{aligned}$$

donde la función de la derecha es integrable en tal invervalo. Por tanto, $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Sea ahora $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \neq 0$. Afirmamos que la función

$$g(x) = \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ no es integrable en $[0, \infty[$. En efecto, veamos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} \frac{\left|\frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2}\right|}{\left|\frac{\sin \lambda x}{x}\right|} &= \lim_{x \to \infty} \left|\frac{x^2}{x^2 + a^2}\right| \\ &= \lim_{x \to \infty} \left|\frac{1}{1 + \frac{a^2}{x^2}}\right| \\ &= \frac{1}{1 + 0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

por tanto,

$$\left|\frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2}\right| \underset{x \to \infty}{\sim} \left|\frac{\sin \lambda x}{x}\right|$$

Luego entonces, por la proposición 8.53 Análisis Matemático II:

$$\left|\frac{\sin \lambda x}{x}\right| \underset{x \to \infty}{=} O\left(\left|\frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2}\right|\right)$$

donde la función $x \mapsto \left|\frac{\sin \lambda x}{x}\right|$ no es integrable en $[0, \infty[$, luego tampoco puede serlo $g$ (siendo que ambas funciones son integrables en todo subconjunto acotado de $\mathbb{R}$).

Veamos que si existe la integral impropia

$$\int_0^{\to\infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2}$$

En efecto, defina para cada $x \in [0, \infty[$ las funciones:

$$G(x) = \int_0^x \sin \lambda x \, dx \quad \text{y} \quad f(x) = \frac{x}{x^2 + a^2}$$

se tienen dos cosas:

- $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ (es claro de la definición de $f$).
- $G$ es una función acotada en $[0, \infty[$, pues para cada $x \in [0, \infty[$:

$$\begin{aligned}
|G(x)| &= \left| \int_0^x \sin \lambda x \, dx \right|, \text{ haciendo el cambio de variable } u = \lambda x \\
&= \left| \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^{\lambda x} \sin u \, du \right| \\
&= \left| \frac{1}{\lambda} \cdot \left[ - \cos u \Big|_0^{\lambda x} \right] \right| \\
&= \left| \frac{1}{\lambda} \cdot [- \cos \lambda x + \cos 0] \right| \\
&\leqslant \frac{2}{|\lambda|}
\end{aligned}$$

Por tanto, del primer criterio de Abel se sigue que la integral impropia

$$\int_0^{\to \infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2}$$

es convergente.

De (ii): Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$h(x) = e^{-a|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

se sabe por un ejercicio de las notas que

$$\mathcal{F}h(x) = \frac{2a}{x^2 + a^2}$$

la función $h$ cumple la condición de Dini en todo punto $\lambda \in \mathbb{R} \neq 0$ (también lo hace en cero, pero no es relevante), por lo cual se tiene que

$$h(\lambda) = \lim_{R \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} e^{i\lambda x} \mathcal{F}h(x) \, dx$$

es decir,

$$\begin{aligned}
e^{-a|\lambda|} &= \lim_{R \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} e^{i\lambda x} \mathcal{F}h(x) \, dx \\
&= \frac{2a}{2\pi} \lim_{R \to \infty} \left[ \int_{-R}^{R} \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx + i \int_{-R}^{R} \frac{\sin \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx \right] \\
&= \frac{a}{\pi} \lim_{R \to \infty} \left[ \int_{-R}^{0} \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx + \int_0^R \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx + i \int_{-R}^{0} \frac{\sin \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx + i \int_0^R \frac{\sin \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx \right] \\
&= \frac{a}{\pi} \lim_{R \to \infty} \left[ \int_0^R \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx + \int_0^R \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx - i \int_0^R \frac{\sin \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx + i \int_0^R \frac{\sin \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx \right] \\
&= \frac{2a}{\pi} \lim_{R \to \infty} \int_0^R \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx \\
&= \frac{2a}{\pi} \int_0^{\to \infty} \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx
\end{aligned}$$

pero, de (i) se sabe que $x \mapsto \frac{\cos \lambda x}{x^2+a^2}$ es integrable en $[0, \infty[$, por tanto coincide su valor con el de la integral impropia, así:

$$e^{-a|\lambda|} = \frac{2a}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{x^2+a^2}\, dx$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{x^2+a^2}\, dx = \frac{\pi}{2a} e^{-a|\lambda|}$$

De (iii): Por la parte anterior, para todo $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tiene que

$$\Phi(\lambda) = \int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{x^2+a^2}\, dx = \frac{\pi}{2a} e^{-a|\lambda|} = \frac{\pi}{2a} e^{-a|\lambda|}$$

Si todo funciona bien, por el Teorema de derivación para funciones definidas por integrales impropias, se tendría para $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} -\int_0^{\to\infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2+a^2}\, dx &= \Phi'(\lambda) \\ &= -\frac{\pi}{2} e^{-a\lambda} \\ &= -\frac{\pi}{2} e^{-a|\lambda|} \\ \Rightarrow \int_0^{\to\infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2+a^2}\, dx &= \frac{\pi}{2} e^{-a|\lambda|} \end{aligned}$$

y, para $\lambda < 0$:

$$\begin{aligned} -\int_0^{\to\infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2+a^2}\, dx &= \Phi'(\lambda) \\ &= \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\pi}{2a} e^{-a(-\lambda)}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} e^{a\lambda} \\ &= \frac{\pi}{2} e^{-a|\lambda|} \\ \Rightarrow \int_0^{\to\infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2+a^2}\, dx &= -\frac{\pi}{2} e^{-a|\lambda|} \end{aligned}$$

es decir que

$$\int_0^{\to\infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2+a^2}\, dx = \operatorname{Sgn}(\lambda) \cdot \frac{\pi}{2} e^{-a|\lambda|}$$

■

**Ejercicio 1.0.5**

Sea $H$ una matriz simétrica real $n \times n$ positiva definida, es decir, la forma cuadrática $\langle x|Hx\rangle$ sobre $\mathbb{R}^n$ es positiva definida. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la función

$$f(x) = e^{-\langle Hx|x\rangle}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

**Demuestre** que $f$ es integrable y que

$$\mathcal{F}f(x) = \frac{\pi^{n/2}}{(\det H)^{1/2}} e^{-\frac{1}{4}\langle H^{-1}x|x\rangle}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

*Sugerencia.* $f$ es medible. Para ver que es integrable, pruebe que $\langle Hx|x\rangle \geqslant m\|x\|^2$, donde

$$m = \min_{x \in S} \{\langle Hx|x\rangle\} > 0$$

con $S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| \|x\| = 1 \right\}$. Se sabe de álgebra que existe una matriz ortogonal $U$ tal que $U^{-1}HU = \mathrm{Diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, donde $\lambda_1, ..., \lambda_n$ son números estrictamente positivos. En la integral $\mathcal{F}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} e^{-\langle Hy|y\rangle}\, dy$ haga el cambio de variable $y = Uz$ siendo tal que $|\det U| = 1$, $\langle Ur|Us\rangle = \langle r|s\rangle$ (y lo análogo para $U^{-1}$) y observe que $(1/\lambda_1, ..., 1/\lambda_n) = U^{-1}H^{-1}U$.

**Demostración:**

Veamos que $f$ es medible (más aún, es continua). En efecto, considere la matriz $H$ dada por

$$H = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & ... & h_{1,n-1} & h_{1,n} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & ... & h_{2,n-1} & h_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{n,1} & h_{n,2} & ... & h_{n,n-1} & h_{n,n} \end{bmatrix}$$

Se tiene entonces que para cada $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \langle x|Hx\rangle &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \end{aligned}$$

donde

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & ... & h_{1,n-1} & h_{1,n} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & ... & h_{2,n-1} & h_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{n,1} & h_{n,2} & ... & h_{n,n-1} & h_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

es decir que

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} h_{k,i} x_i$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \langle x|Hx\rangle &= \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{i=1}^{n} h_{k,i} x_i \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_k x_i h_{k,i} \end{aligned}$$

siendo la aplicación $x \mapsto \langle x|Hx\rangle$ una aplicación polinomial de $n$-variables, luego es continua. Así, la composición con $t \mapsto e^{-t}$ es continua, es decir que la función $f$ es continua en $\mathbb{R}^n$, luego medible.

Ahora, sea ahora

$$m = \inf_{x \in S} \{\langle Hx|x\rangle\}$$

donde $S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| \|x\| = 1 \right\}$. Afirmamos que $m > 0$. En el caso que $m = 0$, como la función $x \mapsto \langle x|Hx\rangle$ es continua de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, se tendría que alcanzaría su máximo y mínimo, luego existiría $x_0 \in S$ tal que

$$\langle x_0|Hx_0\rangle = 0$$

lo cual contradeciría el hecho de que $H$ es positiva definida. Por tanto, $m > 0$. Más aún,

$$m = \inf_{x \in S} \{\langle Hx|x\rangle\} = \min_{x \in S} \{\langle Hx|x\rangle\}$$

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ no cero, se tiene que

$$\begin{aligned}\langle Hx|x\rangle &= \langle H\left(\|x\|\cdot\frac{x}{\|x\|}\right)|\|x\|\cdot\frac{x}{\|x\|}\rangle\\ &= \|x\|^2\langle H\left(\frac{x}{\|x\|}\right)|\frac{x}{\|x\|}\rangle\\ &\geqslant m\|x\|^2\\ \Rightarrow -\langle Hx|x\rangle &\leqslant -m\|x\|^2\end{aligned}$$

Considere la función $x \mapsto e^{-m\|x\|^2}$ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. Se tiene que

$$0 \leqslant f(x) \leqslant e^{-m\|x\|^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

siendo $x \mapsto e^{-m\|x\|^2}$ intergable en $\mathbb{R}^n$, luego $f$ lo es en $\mathbb{R}^n$, luego la transformada de Fourier $\mathcal{F}f(\cdot)$ está definida en todo $\mathbb{R}^n$.

Sea $x \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{F}f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y)\,dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle}\cdot e^{-\langle Hy|y\rangle}\,dy\end{aligned}$$

Se sabe por un resultado de álgebra lineal que existen una matriz $D$ $n\times n$ diagonal con entradas en la diagonal positivas, y una matriz ortogonal $U$ (también $n\times n$) con $|\det U| = 1$ tal que

$$U^{-1}HU = D \Rightarrow HU = UD$$

Hagáse el cambio de variable $y = Uz$, se tiene en la integral anterior que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle}\cdot e^{-\langle Hy|y\rangle}\,dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|Uz\rangle}\cdot e^{-\langle HUz|Uz\rangle}\,dz\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|Uz\rangle}\cdot e^{-\langle UDz|Uz\rangle}\,dz\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|Uz\rangle}\cdot e^{-\langle Dz|z\rangle}\,dz\end{aligned}$$

■

**Ejercicio 1.0.6**
Recuerde que si $f = \chi_{[-a,a]}$, entonces

$$\mathcal{F}f(x) = \frac{2\sin ax}{x}, \quad \forall x \neq 0$$

**Deduzca** la fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin ax}{x}\right)^2 dx = \pi a$$

**Demostración:**

Se sabe que la función $x \mapsto \left(\frac{\sin ax}{x}\right)^2$ es integrable en $\mathbb{R}$. Observemos ahora que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin ax}{x}\right)^2 dx &= \frac{1}{4} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(x) \cdot \mathcal{F}f(x)\, dx \\
&= \frac{1}{4} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(x)\, dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} f(y)\, dy \\
&= \frac{1}{4} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(x)\, dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} \chi_{[-a,a]}(y)\, dy \\
&= \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x}\, dx \int_{-a}^{a} e^{-ixy}\, dy
\end{aligned}$$

considere la función $(x, y) \mapsto e^{-ixy} \cdot \frac{\sin ax}{x}$. Esta función es integrable en $\mathbb{R} \times [-a, a]$. En efecto, basta con ver que la función

$$(x, y) \mapsto \frac{e^{-ixy}}{x}$$

lo es en $[0, \infty[\times[-a, a]$.

Luego por Fubini se sigue que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x}\, dx \int_{-a}^{a} e^{-ixy}\, dy &= \int_{-a}^{a} \frac{\sin ax}{x}\, dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy}\, dx \\
&= \int_{-a}^{a} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} \cdot \frac{\sin ax}{x}\, dx \\
&= \int_{-a}^{a} dy \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-ixy} \cdot \frac{\sin ax}{x}\, dx \\
&= \int_{-a}^{a} dx \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-ixy} \cdot \frac{\sin ay}{y}\, dy \\
\Rightarrow 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin ax}{x}\right)^2 dx &= \int_{-a}^{a} dx \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-ixy} \cdot \frac{\sin ay}{y}\, dy
\end{aligned}$$

pues, la función $x \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} \cdot \frac{\sin ay}{y}\, dy$ definida c.t.p. en $[-a, a]$ coincide con su integral impropia.

Sea $x \in \mathbb{R}$. Se tiene que $f$ posee derivadas laterales derecha e izquierda en $x$, por lo cual del teorema de inversión de Fourier en $\mathbb{R}$ se sigue que

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{ixy} \mathcal{F}f(y)\, dy \\
\Rightarrow \chi_{[-a,a]}(-x) &= \frac{1}{\pi} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-ixy} \cdot \frac{\sin ay}{y}\, dy \\
\Rightarrow \pi \cdot \chi_{[-a,a]}(-x) &= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-ixy} \cdot \frac{\sin ay}{y}\, dy
\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \pi \int_{-a}^{a} \chi_{[-a,a]}(-x)\, dx &= \int_{-a}^{a} dx \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-ixy} \cdot \frac{\sin ay}{y}\, dy \\
\Rightarrow \pi \int_{-a}^{a} dx &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin ax}{x}\right)^2 dx \\
\Rightarrow 2\pi a &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin ax}{x}\right)^2 dx \\
\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin ax}{x}\right)^2 dx &= \pi a
\end{aligned}$$

lo que prueba el resultado. ■

**Ejercicio 1.0.7**
Haga lo siguiente:

i. Sea $f(x) = \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) \chi_{[-a,a]}(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. **Pruebe** que

$$\mathcal{F}f(x) = a\left(\frac{\sin \frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}}\right)^2$$

ii. Usando $\mathcal{F}_2 f$ **muestre** la fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin ax}{x}\right)^4 dx = \frac{2}{3}\pi a^3$$

iii. **Calcule** la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin ax}{x}\right)^3 dx$$

*Sugerencia.* Escriba $f(x) = \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) \chi_{[} - a, a](x)$ y $g(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Aplique la identidad de Parseval

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_2 f \mathcal{F}_2 g = \langle \mathcal{F}_2 f | \mathcal{F}_2 g \rangle = \langle f | g \rangle = \int_{\mathbb{R}} fg$$

para deducir el resultado.

**Solución:**
De (i): Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} f(y)\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} \left(1 - \frac{|y|}{a}\right) \chi_{[-a,a]}(y)\, dy \\
&= \int_{-a}^{a} e^{-ixy} \left(1 - \frac{|y|}{a}\right) dy \\
&= \int_{-a}^{0} e^{-ixy} \left(1 - \frac{|y|}{a}\right) dy + \int_{0}^{a} e^{-ixy} \left(1 - \frac{|y|}{a}\right) dy \\
&= \int_{-a}^{0} e^{-ixy} \left(1 + \frac{y}{a}\right) dy + \int_{0}^{a} e^{-ixy} \left(1 - \frac{y}{a}\right) dy \\
&= -\int_{a}^{0} e^{ixu} \left(1 - \frac{u}{a}\right) du + \int_{0}^{a} e^{-ixy} \left(1 - \frac{y}{a}\right) dy \\
&= \int_{0}^{a} e^{ixy} \left(1 - \frac{y}{a}\right) dy + \int_{0}^{a} e^{-ixy} \left(1 - \frac{y}{a}\right) dy \\
&= \int_{0}^{a} \left(e^{ixy} + e^{-ixy}\right) \cdot \left(1 - \frac{y}{a}\right) dy \\
&= 2\int_{0}^{a} \left(1 - \frac{y}{a}\right) \cos xy\, dy \\
&= 2\left[\int_{0}^{a} \cos xy\, dy - \frac{1}{a}\int_{0}^{a} y \cos xy\, dy\right]
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\int_0^a \cos xy\, dy &= \frac{1}{x}\int_0^{ax} \cos u\, du\\ &= \frac{1}{x}\sin u\Big|_0^{ax}\\ &= \frac{\sin ax}{x}\end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}\int_0^a y\cos xy\, dy &= \int_0^{ax} \frac{u}{x}\cos u\,\frac{du}{x}\\ &= \frac{1}{x^2}\int_0^{ax} u\cos u\, du\\ &= \frac{1}{x^2}\left[ax\sin ax + \cos ax - 1\right]\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}f(x) &= 2\left[\int_0^a \cos xy\, dy - \frac{1}{a}\int_0^a y\cos xy\, dy\right]\\ &= 2\left[\frac{\sin ax}{x} - \frac{ax\sin ax}{ax^2} - \frac{\cos ax}{ax^2} + \frac{1}{ax^2}\right]\\ &= 2\left[\frac{\sin ax}{x} - \frac{\sin ax}{x} + \frac{1-\cos ax}{ax^2}\right]\\ &= \frac{1-\cos ax}{\frac{ax^2}{2}}\\ &= a\cdot\frac{2\sin^2\left(\frac{ax}{2}\right)}{\frac{a^2x^2}{2}}\\ &= a\cdot\frac{\sin^2\frac{ax}{2}}{\frac{a^2x^2}{4}}\\ &= a\cdot\left(\frac{\sin\frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}}\right)^2\end{aligned}$$

De (ii):

□

**Ejercicio 1.0.8**
Sea $n \geqslant 2$ y $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la función $x \mapsto r(x) = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$. Sea $f : [0,\infty[\to \mathbb{C}$ una función tal que $f\circ r$ es integrable en $\mathbb{R}^n$.

i. **Pruebe** que la transformada de Fourier $\mathcal{F}(f\circ r)$ es una función radial.

   *Sugerencia.* Si $U$ es una matriz ortogonal $n\times n$, se tiene que $\mathcal{F}(f\circ r)(Ux) = \mathcal{F}(f\circ r)(x)$. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que $\|x\| = \|y\|$, siempre existe una matriz ortogonal $U$ tal que $Ux = y$.

ii. **Muestre** que se cumple la **fórmula de Bochner**

$$\mathcal{F}(f\circ r)(x) = 2(n-1)\omega_{n-1}\int_0^\infty v_n(u(\|x\|))f(u)u^{n-1}\, du, \quad \forall x\in\mathbb{R}^n$$

   donde $\omega_{n-1}$ es el volumen de la bola euclideana de radio uno en $\mathbb{R}^{n-1}$ y $v_n$ se define por la fórmula

$$v_n(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t\cos\theta)\sin^{n-2}\theta\, d\theta$$

*Sugerencia.* Según el inciso (i),

$$\mathcal{F}(f\circ r)(x) = \mathcal{F}(f\circ r)(\|x\|, 0, ..., 0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\|y\|)e^{-i\|x\|y_1}\, dy_1\cdots dy_n$$

Transforme esta integral por el Teorema de Fubini y exprese la integral con respecto a $y_2, ..., y_n$ como una integral simple. La doble integral resultante se transforma a coordenadas polares.

**Solución:**

De (i): Ya se sabe que $f\circ r$ es una función radial (de la definición es claro este hecho). Como $f\circ r$ es integrable en $\mathbb{R}^n$, entonces la transformada de Fourier de $f\circ r$ está definida para todo $x\in\mathbb{R}^n$.

Sean $x, y\in\mathbb{R}^n$ tales que $\|x\| = \|y\|$. Para probar que $\mathcal{F}(f\circ r)$ es una función radial, basta con ver que

$$\mathcal{F}(f\circ r)(x) = \mathcal{F}(f\circ r)(y)$$

En efecto, como $\|x\| = \|y\|$ por álgebra lineal se sabe que existe una matriz ortogonal $n\times n$ con determinante 1 tal que $x = Uy$. Por lo cual, por el teorema de cambio de variable haciendo $z = Uw$, se sigue que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f\circ r)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|z\rangle} f\circ r(z)\, dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|Uw\rangle} f\circ r(Uw)\, dw \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle UU^{-1}x|Uw\rangle} f\circ r(w)\, dw \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle y|w\rangle} f\circ r(w)\, dw \\
&= \mathcal{F}(f\circ r)(y)
\end{aligned}$$

por tanto, $\mathcal{F}(f\circ r)$ es una función radial.

De (ii): Sea $x\in\mathbb{R}^n$, veamos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f\circ r)(x) &= \mathcal{F}(f\circ r)(\|x\|, 0, ..., 0) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle(\|x\|,0,...,0)|(y_1,...,y_n)\rangle} f\circ r(y_1, ..., y_n)\, dy_1\cdots dy_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\|x\|y_1} f(\|y\|)\, dy_1\cdots dy_n
\end{aligned}$$

Cambiando a coordenadas polares, resulta que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f\circ r)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\|x\|y_1} f(\|y\|)\, dy_1\cdots dy_n \\
&= \int_{\Omega} e^{-i\|x\|r\cos\varphi_1} f(r)\, dr d\varphi_1\cdots d\varphi_{n-1}
\end{aligned}$$

donde

$$\Omega = \left\{(r, \varphi_1, ..., \varphi_{n-1})\in\mathbb{R}^n \middle| r\geqslant 0, 0\leqslant\varphi_1, ..., \varphi_{n-2}\leqslant\pi, -\pi\leqslant\varphi_{n-1}\leqslant\pi\right\}$$

por Fubini, integrando primero respecto a $y_1$ resulta:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f\circ r)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\|x\|y_1} f(\|y\|)\,dy_1\cdots dy_n \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\|x\|y_1}\,dy_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(\|y\|)\,dy_2\cdots dy_n\end{aligned}$$

Se sabe también por Fubini que para casi todo $y_1\in\mathbb{R}$, la función $(y_2,...,y_n)\mapsto f(\|y\|)=f\circ r(y_1,...,y_n)$ es integrable en $\mathbb{R}^{n-1}$. Veamos que esta función es radial. En efecto, para $z=(z_2,...,z_n), w=(w_2,...,w_n)\in\mathbb{R}^{n-1}$ tales que

$$\|z\|=\|w\|\Rightarrow z_2^2+...+z_n^2=w_2^2+...+w_n^2$$

se cumple

$$\begin{aligned}f\circ r(y_1,z_2,...,z_n) &= f(\sqrt{y_1^2+z_2^2+...+z_n^2}) \\ &= f(\sqrt{y_1^2+w_2^2+...+w_n^2}) \\ &= f\circ r(y_1,w_2,...,w_n)\end{aligned}$$

por tanto, la función es radial. Por el teorema de funciones radiales se tiene que al ser integrable, tenemos:

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(\|y\|)\,dy_2\cdots dy_n =$$

□

**Ejercicio 1.0.9**
Haga lo siguiente:

**i.** Sea $h:[0,\infty[\to\mathbb{C}$ una función integrable en $[0,\infty[$. Sea $a>0$, **demuestre** que existe la integral impropia

$$\int_a^{\to\infty}\frac{dx}{x}\int_0^{\infty} h(y)\sin xy\,dy$$

*Sugerencia.* Justifique la inversión del orden de las integraciones.

**ii.** Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{e}x & \text{si} \quad |x|<e\\ \frac{\operatorname{Sgn}(x)}{\log|x|} & \text{si} \quad |x|\geqslant e\end{cases}, \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Muestre que, para $a>0$ no existe la integral impropia

$$\int_a^{\to\infty}\frac{f(x)}{x}\,dx$$

De este hecho y del inciso (i) **deduzca** que no existe $g\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ tal que $f=\mathcal{F}g$. Así pues, la transformación de Fourier no es una aplicación suprayectiva de $L_1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ en $\mathcal{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

**Solución:**

□

**Ejercicio 1.0.10**
Haga lo siguiente:

**i.** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función integrable en $\mathbb{R}$. Se supone que existe una función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ localmente integrable en $\mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = f(0) + \int_0^x \varphi, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad |\varphi(x)| \underset{|x|\to\infty}{=} O\left(\frac{1}{|x|^m}\right)$$

donde $m > 2$. **Pruebe** que

$$|f(x)| \underset{|x|\to\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^{m-1}}\right)$$

y que, para todo $x \in \mathbb{R}$, existen las sumas

$$\Phi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(x+k) \quad \text{y} \quad F(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+k)$$

siendo la convergencia absoluta y uniforme en $[-1, 1]$, luego en $\mathbb{R}$. **Muestre** finalmente que

$$F(x) = F(0) + \int_0^x \Phi, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

**ii.** $F$ es una función periódica de periodo uno. **Demuestre** que los coeficientes de Fourier de $F$ respecto al sistema O.N. $(e^{2\pi int})_{n\in\mathbb{Z}}$ son

$$\int_0^1 F(x)e^{-2\pi inx}\, dx = \mathcal{F}f(2\pi n), \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

**Deduzca la fórmula Sumatoria de Poisson**

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}f(x+k), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

**iii.** Aplicando la fórmula sumatoria de Poisson a la función $x \mapsto e^{-\alpha|x|}$ para $\alpha > 0$, obtenga el desarrollo

$$\coth x = \frac{1}{x} + 2x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2\pi^2}, \quad \forall x \geqslant 0$$

Se define la **función theta** por

$$\Theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}, \quad \forall x > 0$$

Aplicando la fórmula sumatoria de Poisson a la función $x \mapsto e^{-\alpha x^2}$ para $\alpha > 0$, **pruebe** la identidad

$$\Theta(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}\Theta\left(\frac{1}{x}\right), \quad \forall x > 0$$

**Solución:**

□

**Ejercicio 1.0.11**

Haga lo siguiente:

i. Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x < 0$. Para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\Im z \leqslant 0$ se define

$$\mathcal{F}f(x) = \int_0^\infty e^{-izx} f(x)\, dx$$

**Pruebe** que esta defineción tiene sentido, que $\mathcal{F}f$ es continua en el semiplano cerrado $\left\{z \in \mathbb{C} \middle| \Im z \leqslant 0\right\}$ y holomorfa en el semiplano abierto $\left\{z \in \mathbb{C} \middle| \Im z < 0\right\}$.

*Sugerencia.* El teorema de derivación de funciones defindas por integrales continúa siendo válido al sustituir el intervalo $I$ por un abierto de $\mathbb{C}$.

ii. Sean $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tales que $f(x) = g(x) = 0$, $\forall x < 0$. **Muestre** que para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\Im z \leqslant 0$ se tiene

$$\mathcal{F}(f * g)(z) = \mathcal{F}f(z)\mathcal{F}g(z)$$

iii. Sean $f, g$ como en el inciso (ii). Se supone además que $\mathcal{F}(f * g) = 0$ c.t.p. en $\mathbb{R}$. **Demuestre** que $f = 0$ c.t.p. en $\mathbb{R}$ o bien $g = 0$ c.t.p. en $\mathbb{R}$.

*Sugerencia.* Deduzca de (i) y (ii) que $\mathcal{F}f = 0$ o bien $\mathcal{F}g = 0$.

**Solución:**

$\square$

**Ejercicio 1.0.12**
Haga lo siguiente:

i. Sea $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Se define para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$F(z) = \int_{-\infty}^\infty e^{-izx - \frac{x^2}{2}} \overline{f(x)}\, dx$$

**Pruebe** que $F$ es holomorfa en $\mathbb{C}$ y que, para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$F^{(n)}(z) = (-i)^n \int_{-\infty}^\infty x^n e^{-izx - \frac{x^2}{2}} \overline{f(x)}\, dx$$

*Sugerencia.* La misma que la del Problema 11.

ii. Se supone que $f$ es ortogonal a todas las funciones de Hermite. Muestre que $F = 0$ y **deduzca** que $f = 0$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$.

Así pues, el sistema de funciones de Hermite normalizadas es un sistema ortonormal maximal en $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

*Sugerencia.* Observe que $F^{(n)}(0) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. La condición $F = 0$ implica que la transformada de Fourier de la función integrable $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}} \overline{f(x)}$ es cero.

**Solución:**

$\square$

**Ejercicio 1.0.13**
Haga lo siguiente:

**i. Demuestre** la fórmula.

$$D_x^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2}\, dy = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} D_x^n e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2}\, dy$$

**ii.** Se consideran las funciones de Hermite

$$\varphi(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} D^n e^{-x^2}$$

**Pruebe** que $\mathcal{F}_2\varphi_n = (-1)^n\varphi_n$. Así pues, las funciones de Hermite son vectores propios para el operador $\mathcal{F}_2\cdot$.

*Sugerencia.* Tranforme $\mathcal{F}_2\varphi_n$ por la "fórmula de integración por partes de orden $n$".

$$\int_a^b f^(n) g = \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^{(n-k-1)} g^{(k)}\right] + (-1)^n \int_a^b f g^(n)$$

(al suponer $f^(n)$ y $g^(n)$ continuas en $[a, b]$). Después, use la fórmula del inciso (i).

**Solución:**

$\square$