Notas Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

25 de abril de 2024

Índice general

Capítulo 3

Series de Fourier

3.1. Series de Fourier de funciones en $\mathcal{L}_1^{2\pi}$

Definición 3.1.1
Se llama **serie de Fourier trigonométrica** a una serie de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ de la forma

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx} \tag{3.1}$$

donde $c_k \in \mathbb{C}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ son coeficientes constantes. Por definición, las **sumas parciales** de la serie son:

$$s_m(x) = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx}, \forall m \in \mathbb{N}^*$$

Se dice que la serie **converge en un punto** x **a una suma** $f(x)$, si

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} s_m(x) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx}$$

En este caso,

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

Usando la identidad $e^{ikx} = \cos kx + i \operatorname{sen} kx$, podemos reescribir s_m como

$$s_m(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{m} (c_k + c_{-k}) \cos kx + i \sum_{k=1}^{m} (c_k - c_{-k}) \operatorname{sen} kx, \quad \forall m \in \mathbb{N}^* \tag{3.2}$$

definamos

$$a_k = c_k + c_{-k} \quad \text{y} \quad b_k = c_k - c_{-k}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \tag{3.3}$$

de la definición es claro que

$$a_{-k} = a_k \quad \text{y} \quad b_{-k} = -b_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

conociendo los coeficientes a_k y b_k se recobran los c_k mediante las fórmulas

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \tag{3.4}$$

y, $c_0 = \frac{a_0}{2}$. En términos de los a_k y b_k, las sumas 3.2 y 3.1 pueden ser reescritas como sigue:

$$s_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{m} b_k \sin kx, \quad \forall m \in \mathbb{N}^* \tag{3.5}$$

y,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \tag{3.6}$$

respectivamente.

Definición 3.1.2
Se dice que la serie trigonométrica es **real** si $s_m(x) \in \mathbb{R}$ para todo $m \in \mathbb{N}^*$ y para toda $x \in \mathbb{R}$. Se sigue de 3.2 que la serie es real si y sólo si $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, para todo $k \in \mathbb{N}^*$.

Esta condición es equivalente a que

$$c_{-k} = \overline{c_k}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Es válido preguntarnos ahora: ¿Qué relación hay entre f y los coeficientes c_k?

Proposición 3.1.1
Considere una serie trigonométrica $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$. Suponga que esta serie converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a alguna función f. Entonces, $f \in \mathcal{C}^{2\pi}$ y

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Demostración:
Se supone que $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ uniformemente en $\mathbb{R}$. Como el límite uniforme de una sucesión de funciones continuas es continua, se tiene entonces que $f \in \mathcal{C}^{2\pi}$. Para un $n \in \mathbb{Z}$:

$$f(x)e^{-inx} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{i(k-n)x} \text{ uniformemente en } \mathbb{R} \tag{3.7}$$

pues,

$$\left|f(x)e^{-inx} - s_m(x)e^{-inx}\right| = \left|f(x) - s_m(x)\right|, \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$$

Se puede pues integrar término por término 3.7 en el compacto $[-\pi, \pi]$. Antes veamos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)x}dx = \begin{cases} 2\pi & \text{si} \quad n = k \\ 0 & \text{si} \quad n \neq k \end{cases}$$

por tanto,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)x}dx \\ &= 2\pi c_n \\ \Rightarrow c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \end{aligned}$$

■

Este resultado sugiere la definición siguiente:

Definición 3.1.3
Para todo $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ se define

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \tag{3.8}$$

en particular, $c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$. Los coeficientes c_k se llaman **los coeficientes de Fourier trigonométricos de** f y, la serie

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

se llama **serie de Fourier trigonométrica de** f.

Observación 3.1.1
Los correspondientes coeficientes a_k y b_k son los siguientes:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

también,

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx \quad \text{y} \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$ (esto se obtiene usando la igualdad entre los c_k y a_k, b_k).

Observación 3.1.2
Para fines prácticos, conviene tener en cuenta lo siguiente. Si f es una función impar en $]-\pi,\pi[$, entonces

$$a_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

y,

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\, kx, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Si f es una función par en $]-\pi,\pi[$ se invierte el resultado, es decir

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

y,

$$b_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Teorema 3.1.1
Las aplicaciones $f \mapsto \{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ y, $f \mapsto \{a_0, a_1, b_1, ...\}$ son aplicaciones lineales inyectivas de $L_1^{2\pi}$ en el espacio de sucesiones complejas y reales, respectivamente. En particular, si $f, g \in \mathcal{L}_1^{2\pi}$ tienen los mismos coeficientes de Fourier trigonométricos, entonces $f = g$ c.t.p. en $\mathbb{R}$.

Demostración:
Por la forma en que se definen los coeficientes de Fourier de una función integrable, es claro que dichas aplicaciones son lineales.

Resta probar que su kernel es $\{0\}$. Sea $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ tal que

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

dado que el sistema trigonométrico $\tau_{\mathbb{C}}$ es total en $\mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$, necesariamente $f = 0$ c.t.p. en $\mathbb{R}$.

Similarmente se prueba la otra afirmación. ■

Proposición 3.1.2
Sean $f, g \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ y $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ y $\{d_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ los coeficientes de Fourier trigonométricos de f y g, respectivamente. Entonces, los coeficientes de Fourier $\{\gamma_k\}$ de $f * g$ son $\{2\pi c_k d_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

Demostración:
Para todo $k \in \mathbb{Z}$ fijo se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\gamma_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f * g(x)e^{-ikx}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx}dx \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy\end{aligned}$$

como la función $(x, y) \mapsto e^{-ikx}f(y)g(x - y)$ es integrable en $]-\pi, \pi[\times]-\pi, \pi[$ (pues la función es medible y su módulo es el mismo que el de $(x, y) \mapsto f(y)g(x-y)$, la cual es integrable por un teorema de convolución), se puede invertir del orden de integración:

$$\begin{aligned}\gamma_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)dy \int_{-\pi}^{\pi} g(x-y)e^{-ikx}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)dy \int_{-\pi-y}^{\pi-y} g(z)e^{-ik(z+y)}dz \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iky}dy \int_{-\pi-y}^{\pi-y} g(z)e^{-ikz}dz \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iky}dy \int_{-\pi}^{\pi} g(z)e^{-ikz}dz \\ &= c_k \cdot (2\pi d_k) \\ &= 2\pi c_k d_k\end{aligned}$$

pues, las funciones son periódicas. Se tieene entonces con lo anterior el resultado para todo $k \in \mathbb{Z}$. ■

3.2. Series de Fourier de funciones en $\mathcal{L}_2^{2\pi}$

Recuerde que las funciones

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

constituyen un sistema ortonormal maximal en el espacio Hilbertiano $L_2^{2\pi}(\mathbb{C})$. En el sentido Hilbertiano, los coeficientes de Fourier de algún vector $f \in \mathcal{L}_2^{2\pi}(\mathbb{C})$ con respecto a dicho sistema ortonormal son los siguientes:

$$\begin{aligned}\hat{f}(x) &= \big(f\big|\varphi_k\big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx \\ &= \sqrt{2\pi}c_k\end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}\hat{f}(x)\varphi_k(x) &= \sqrt{2\pi}c_k\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx} \\ &= c_k e^{ikx}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

La serie de Fourier hilbertiana de f sería:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(x)\varphi_k(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

que corresponde a al serie de Fourier trigonométrica de f. También, las funciones

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \eta_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx, \quad \theta_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

forman otro sistema O.N. maximal en $L_2^{2\pi}(\mathbb{K})$. Los correspondientes coeficientes de Fourier de f con respecto a este sistema O.N. maximal serían:

$$\begin{cases} \left(f\middle|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) & = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\ \left(f\middle|\eta_k\right) & = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx \\ \left(f\middle|\theta_k\right) & = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} kxdx \end{cases}$$

La serie de Fourier hilbertiana de f será:

$$\left(f\middle|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(f\middle|\eta_k\right)\eta_k + \sum_{k=1}^{\infty}\left(f\middle|\theta_k\right)\theta_k = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos kx + b_k \sin kx\right]$$

Recuerde también que por el teorema de Riesz-Fischer que si $\{\vec{u}_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ es un sistema O.N. maximal en un espacio hilbertiano H, entonces la aplicación $\vec{x} \mapsto \{\hat{x}(\alpha)\}$ es una isometría lineal de H en $l_2(\Omega)$. La isometría inversa es:

$$\varphi \mapsto \sum_{\alpha\in\Omega}\varphi(\alpha)\vec{u}_\alpha$$

Aplicacndo este resultado al primer caso se tiene que

Teorema 3.2.1
Las aplicaciones

$$f \mapsto \left\{\sqrt{2\pi}c_k\right\}_{k\in\mathbb{Z}} \quad \text{y} \quad f \mapsto \left\{\sqrt{2\pi}\frac{a_0}{2}, \sqrt{\pi}a_1, \sqrt{\pi}b_1\right\}$$

son isometrías lineales de $L_2^{2\pi}$ sobre $l_2(\mathbb{Z})$ o $l_2(\mathbb{N})$, respectivamente. Se tienen las identidades siguientes de Parseval:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|c_k\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)\right|^2 dx$$

$$\frac{\left|a_0\right|^2}{2} + \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left[\left|a_k\right|^2 + \left|b_k\right|^2\right] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)\right|^2 dx$$

Más generalmente, si $f, g \in \mathcal{L}_2^{2\pi}(\mathbb{K})$ con coeficientes de Fourier trigonométricos $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ y $\{d_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, entonces

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\overline{d_k} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$$

para los correspondientes coeficientes $\{a_k, b_k\}$ y $\{\alpha_k, \beta_k\}$ se tiene

$$\frac{a_0\overline{\alpha_k}}{2} + \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left[a_k\overline{\alpha_k} + b_k\overline{\beta_k}\right] = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$$

Además, f es igual al promedio cuadrádtico de su serie de Fourier:

$$\lim_{m\to\infty} \mathcal{N}_2 (f - s_m) = 0$$

Demostración:

Es inmediata de las observaciones hechas anteriormente y del teorema de Riesz-Fischer, junto con las identidades de Parserval. ■

Observación 3.2.1

Se tiene lo siguiente:

1. La suprayectividad de $f \mapsto \left\{\sqrt{2\pi}c_k\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ de $L_2^{2\pi}(\mathbb{C})$ sobre $l_2(\mathbb{Z})$ es consecuencia del teorema de Riesz-Fischer, es decir, de la completez de $L_2^{2\pi}$. Dice que dada una sucesión arbitraria $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ en $l_2(\mathbb{Z})$ existe una función $f \in \mathcal{L}_2^{2\pi}$ única salvo equivalencias cuyos coeficientes de Fourier son la sucesión dada.

   Este resultado fue históricamente un éxito para la integral de Lebesgue.

2. Carleson demostró en 1966 que para cada $f \in \mathcal{L}_2^{2\pi}$ la serie de Fourier de f converge a f c.t.p. en $\mathbb{R}$. Sin embargo, para funciones en $\mathcal{L}_1^{2\pi}$ ésta no será la misma historia.

3.3. Series de Fourier de funciones de periodo $T > 0$

Sea $f \in \mathcal{L}_1^T$. Defina

$$g(y) = f\left(\frac{T}{2\pi}y\right), \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

entonces, $g \in \mathcal{L}_1^{2\pi}$. Por definición, los coeficientes de Fourier de f van a ser los de g, estos son

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)e^{iky}dy$$

Por el cambio de variable $y = \frac{2\pi}{T}x$, podemos reescribirlos de la siguiente forma:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)e^{i\frac{2\pi k}{T}x}dx$$

en particular, $c_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx$. Los correspondientes a_k y b_k son

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx \\ a_k &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right)dx \\ b_k &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right)dx \end{aligned}$$

Las series de Fourier trigonométricas correspondientes son

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{i\frac{2\pi k}{T}x} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) + b_k\sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right)\right]$$

Sea ahora $f \in \mathcal{L}_2^T$. Los coeficientes de Fourier de f con respecto al sistema O.N. maximal formado por

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{i\frac{2\pi k}{T}x}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

son

$$\left(f \middle| \varphi_k\right) = \sqrt{T} c_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

si se usa el sistema O.N. maximal formado por

$$\frac{1}{\sqrt{T}}, \quad \eta_k(x) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right), \quad \theta_k(x) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right), \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

se obtienen

$$\begin{aligned}\left(f \middle| \frac{1}{\sqrt{T}}\right) &= \sqrt{T}\frac{a_0}{2} \\ \left(f \middle| \eta_k\right) &= \sqrt{\frac{T}{2}} a_k \\ \left(f \middle| \theta_k\right) &= \sqrt{\frac{T}{2}} b_k\end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Las series de Fourier correspondientes serían

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(f \middle| \varphi_k\right) \varphi_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{i\frac{2\pi k}{T}x} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right)\right]$$

Se tienen las identidades de Parserval

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|c_k\right|^2 &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left|f(x)\right|^2 \\ \frac{\left|a_0\right|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left|a_k\right|^2 + \left|b_k\right|^2\right] &= \frac{T}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left|f(x)\right| dx \\ \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \overline{d_k} &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\overline{g(x)}dx \\ \frac{a_0\overline{\alpha_0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\overline{\alpha_k} + b_k\overline{\beta_k}\right] &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\overline{g(x)}dx\end{aligned}$$

por lo cual, en lo sucesivo se trabajará únicamente con funciones de periodo 2π (la traducción al periodo $T > 0$ es un ejercicio).

3.4. Convergencia de series de Fourier de integrales indefinidas

Observación 3.4.1
Sea $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{K})$. Considere la integral indefinida $F : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ dada como sigue

$$F(x) = c + \int_0^x f(t)dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(en otras palabras F es absolutamente continua y f es su derivada c.t.p. en $\mathbb{R}$). Se sabe que F es continua en $\mathbb{R}$. Una condición necesaria y suficiente para que también F sea periódica es la siguiente:

$$\begin{aligned} F(x-2\pi)-F(x) &= \int_x^{x+2\pi} f(t)dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

por tanto, $F \in \mathcal{C}^{2\pi}$ si y sólo si $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0$.

Teorema 3.4.1
Sea $f \in \mathcal{L}_2^{2\pi}(\mathbb{K})$ tal que $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0$ y sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ la integral indefinida de f dada por:

$$F(x) = c + \int_0^x f(t)dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

donde $c \in \mathbb{K}$. Entonces, $F \in \mathcal{C}^{2\pi}(\mathbb{K})$ y la serie de Fourier de F converge a F uniformemente en $\mathbb{R}$.

Demostración:
Ya se sabe que $F \in \mathcal{C}^{2\pi}(\mathbb{K})$. Sean $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ y $\{c'_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ los coeficientes de Fourier de F y f, respectivamente. Note que

$$c'_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0$$

Integrando por partes se tiene que

$$\begin{aligned} c'_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[F(x)e^{-ikx}\Big|_{-\pi}^{\pi} + ik\int_{-\pi}^{\pi} F(x)e^{-ikx}dx\right] \\ &= \frac{ik}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)e^{-ikx}dx \\ &= ikc_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \end{aligned}$$

Por tanto, en particular se tiene que

$$|c_k| = \frac{|c'_k|}{|k|}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$$

Se tiene

$$\begin{aligned} |c_k| &= \frac{|c'_k|}{|k|} \\ &\leq \frac{1}{2}\cdot\left[|c'_k|^2 + \frac{1}{k^2}\right], \quad \forall k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \end{aligned}$$

como $f \in \mathcal{L}_2^{2\pi}(\mathbb{K})$, entonces $\{|c'_k|\}_{k\in\mathbb{Z}} \in l_2(\mathbb{Z})$ de donde $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k|^2 < \infty$. Se sigue de la ecuación anterior que la serie $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k$ es absolutamente convergente en $\mathbb{K}$. Ya que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k e^{ikx}| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}}|c'_k|$$

se sigue del critero M de Weierestrass que la serie de Fourier de F converge absoluta y uniformemente en $\mathbb{R}$. Resta probar que la suma de esta serie es F. Sea

$$G(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \text{ uniformemente en } \mathbb{R}$$

Entonces, $G \in \mathcal{C}^{2\pi}(\mathbb{K})$. Además,

$$G(x)e^{-inx} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{i(k-n)x} \text{ uniformemente en } \mathbb{R}$$

Se puede pues integrar término por término en $[-\pi, \pi]$. Resulta:

$$\int_{-\pi}^{\pi} G(x)e^{-inx}dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)x}dx = 2\pi c_n$$

por tanto, F y G tienen los mismos coeficientes de Fourier. Se sabe entonces que $F = G$ c.t.p. en $\mathbb{R}$ siendo ambas continuas, necesariamente $F = G$ en $\mathbb{R}$. ■

Corolario 3.4.1
Si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ es una función de clase C^1 periódica de periodo 2π, entonces la serie de Fourier de F converge a F uniformemente en $\mathbb{R}$.

Demostración:
Por el teorema fundamental del cálculo, podemos escribir

$$F(x) = F(0) + \int_0^x f(t)dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

donde $f(x) = F'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ es una función continua. Por el teorema anterior, el resultado estará probado si se muestra que f es periódica de periodo 2π.

Ya que $F(x) = F(x + 2\pi)$, entonces del teorema fundamental

$$\int_x^{x+2\pi} f(t)dt = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

en particular, $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0$. Para todo $a < b$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x+2\pi)dx &= \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(t)dt \\
&= \int_{a+2\pi}^{a} f(t)dt + \int_a^b f(t)dt + \int_b^{b+2\pi} f(t)dt \\
&= \int_a^b f(t)dt
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_a^b \left[f(x+2\pi) - f(x)\right]dx = 0, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$$

Por el lema de los promedios, se sigue que $f(x + 2\pi) - f(x) = 0$ para casi toda $x \in \mathbb{R}$. Siendo ambas funciones continuas, se sigue que

$$f(x + 2\pi) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

por tanto f es periódica de periodo 2π. ■

Observación 3.4.2
Como $c_k = \frac{c'_k}{ik}$ para todo $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, el término $c_k e^{ikx}$ de la serie de Fourier de F es una primitiva del térmio $c'_k e^{ikx}$ de la serie de Fourier de f. En este caso c_0 juega el papel de constante de integración.

Al considerar los coeficientes a_k, b_k y a'_k, b'_k resulta lo siguiente:

$$a_k - ib_k = \frac{a'_k - ib'_k}{ik}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$$

cambiando a k por $-k$:

$$a_k + ib_k = \frac{a'_k + ib'_k}{ik}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$$

resulta de estos sistemas de ecuaciones que

$$a_k = -\frac{b'_k}{k} \quad \text{y} \quad b_k = \frac{a'_k}{k}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Así pues, $a_k \cos kx$ es una primitiva de $b'_k \operatorname{sen} kx$ y que $b_k \operatorname{sen} kx$ es una primitiva de $a_k \cos kx$.

Se verá más adelante que la conclusión del teorema anterior es válida si $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{K})$.

Ejemplo 3.4.1
Sea $n \in \mathbb{N}^*$. Considere las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones siguiente:

$$f(x) = \cos nx \quad \text{y} \quad g(x) = \operatorname{sen} nx, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Claramente f y g son funciones de clase C^1 en $\mathbb{R}$ periódicas de periodo 2π. Por el último corolario las series de Fourier de f y g convergen a f y g respectivamente, uniformemente en $\mathbb{R}$. Los correspondientes coeficientes de Fourier de f y g serían:

$$\frac{a_0}{2}\sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cos kx + b_k \sin kx]$$

como f es par, entonces $b_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Además,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\cos nx \middle| \cos kx\right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \neq n \\ 1 & \text{si} \quad k = n \end{cases} \end{aligned}$$

por tanto, $f(x) = \cos nx = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \cos kx = \cos nx$. Similarmente se prueba que $g(x) = \operatorname{sen} nx$ es su desarrollo en serie de Fourier.

Ejemplo 3.4.2
Considere la función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada como sigue

$$F(x) = \operatorname{sen}^3 x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

F es de clase C^1 y periódica de periodo 2π. Por el corolario, la serie de Fourier de F converge a F uniformemente en $\mathbb{R}$. Como F es impar, $a_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$.

Se tiene que

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^3 x \operatorname{sen} x dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^4 x dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 x dx \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1 - \cos 2x + \cos^2 2x x dx \\
&= \frac{1}{4\pi}\left[2\pi - \big(2\big| \cos 2x\big) + \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 2x dx\right] \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 4x}{2} dx \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{8\pi}\left[2\pi + \big(1\big| \cos 4x\big)\right] \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

en general

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^3 x \operatorname{sen} kx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x \operatorname{sen} kx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x \operatorname{sen} kx dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\big(\operatorname{sen} x \big| \operatorname{sen} kx\big) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x \operatorname{sen} x \operatorname{sen} kx dx \\
&= -\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(k-1)x + \cos(k+1)x] \cos 2x dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\big(\cos(k+1)x \big| \cos 2x\big) - \frac{1}{4}\left(\frac{\cos(k-1)x}{\sqrt{\pi}} \Big| \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}\right) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k = 2, 4, 5, \ldots \\ -\frac{1}{4} & \text{si} \quad k = 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

luego, $F(x) = \frac{3}{4}\operatorname{sen} x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 3x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.4.3
¿Qué pasa con la función $x \mapsto \big|\operatorname{sen} x\big|$ y su serie de Fourier?

3.5. Teorema fundamental para la convergencia puntual de series de Fourier en $\mathcal{L}_1^{2\pi}$

Teorema 3.5.1 (**Teorema de Riemman-Lebesgue**)
Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Si $f \in \mathcal{L}_1(]a, b[, \mathbb{K})$, entonces

$$\lim_{\lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| \to \infty} \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx = 0$$

Demostración:
Se harán varias cosas:

1. Suponga que $f = \chi_I$ con $I \subseteq]a, b[$ es un intervalo de extremos $\alpha \leq \beta$. Luego,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx &= \int_\alpha^\beta e^{i\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{i\lambda}\left(e^{i\lambda\beta} - e^{i\lambda\alpha}\right) \\ \Rightarrow \left|\int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx\right| &\leq \frac{2}{|\lambda|} \end{aligned}$$

donde el lado de la derecha tiende a cero conforme $|\lambda| \to \infty$. Por tanto,

$$\lim_{\lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| \to \infty} \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx = 0$$

por linealidad el resultado es válido si f es una función escalonada en el abierto $]a, b[$.

2. Suponga que $f \in \mathcal{L}_1^{(}]a, b[, \mathbb{K})$ y sea $\varepsilon > 0$. Se sabe que existe $\varphi \in \mathcal{E}(]a, b[, \mathbb{K})$ tal que

$$\mathcal{N}_1(f - \varphi) < \frac{\varepsilon}{2}$$

También existe $R > 0$ tal que

$$\lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| > R \Rightarrow \left|\int_a^b \varphi(x) e^{i\lambda x} dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

entonces, si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $|\lambda| > R$, se tiene que

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx\right| &\leq \left|\int_a^b [f(x) - \varphi(x)] e^{i\lambda x} dx\right| + \left|\int_a^b \varphi(x) e^{i\lambda x} dx\right| \\ &< \int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

lo que termina la prueba.

■

Observación 3.5.1
Se tiene lo siguiente:

1. Si $f :]a, b[\to \mathbb{C}$ es integrable en un conjunto medible $B \subseteq]a, b[$,entonces

$$\lim_{\lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| \to \infty} \int_B f(x) e^{i\lambda x} dx = 0$$

pues, $f\chi_B$ es integrable en $]a,b[$.

2. Si $f \in \mathcal{L}_1(]a,b[,\mathbb{C})$ al escribir $e^{i\lambda x} = \cos\lambda x + i \operatorname{sen}\lambda x$ el Teorema de Riemman-Lebesgue implica que

$$\lim_{\lambda\in\mathbb{R},|\lambda|\to\infty} \int_B f(x)\cos\lambda x dx = 0$$

y

$$\lim_{\lambda\in\mathbb{R},|\lambda|\to\infty} \int_B f(x)\sin\lambda x dx = 0$$

3. Recuerde que si $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$, se definió:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Por el Teorema de Riemman-Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0$$

además,

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = 0$$

Se denota por $c_0(\mathbb{Z})$ al espacio vectorial de todas las sucesiones $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que

$$\lim_{|n|\to\infty} c_n = 0$$

$c_0(\mathbb{Z})$ es un subespacio del espacio de Banach $(l_\infty(\mathbb{Z}),\mathcal{N}_\infty(\cdot))$. Se demuestra que $c_0(\mathbb{Z})$ es un subespacio cerrado de $(l_\infty(\mathbb{Z}),\mathcal{N}_\infty(\cdot))$, luego $(c_0(\mathbb{Z}),\mathcal{N}_\infty(\cdot))$ también es de Banach.

Por cierdo, $(l_\infty(\mathbb{Z}),\mathcal{N}_\infty(\cdot)) \equiv (\mathcal{B}(\mathbb{Z},\mathbb{C}),\mathcal{N}_\infty(\cdot))$. De hecho, $(c_0(\mathbb{Z}),\mathcal{N}_\infty(\cdot))$ es un álgebra de Banach con el producto:

$$\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \cdot \{d_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{c_n \cdot d_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

Proposición 3.5.1
La aplicación $f \mapsto \{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es una aplicación lineal continua inyectiva de $L_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ en $c_0(\mathbb{Z})$.

Demostración:
Ya se sabe que dicha aplicación es lineal e inyectiva. Veamos que

$$\begin{aligned}
|c_k| &= |\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}dx| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\mathcal{N}_1(f), \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\
\Rightarrow \mathcal{N}_\infty\left(\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\right) &\le \frac{1}{2\pi}\mathcal{N}_1(f)
\end{aligned}$$

Por tanto, esta aplicación lineal es continua y de norma menor o igual a $\frac{1}{2\pi}$. ■

Observación 3.5.2
En los ejercicios se verá que dicha aplicación lineal no es suprayectiva (a diferencia del caso en

$L_2^{2\pi}$).

3.6. Núcleo de Dirichlet y teorema fundamental

Para determinar la posible convergencia puntual de una serie de Fourier se debe analizar la sucesión de sumas parciales en un punto $x \in \mathbb{R}$. Recuerde que

$$s_m(x) = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx}, \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$$

Sustituyendo $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt$, se obtiene que

$$\begin{aligned} s_m(x) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-m}^{m}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ik(x-t)}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\sum_{k=-m}^{m} e^{ik(x-t)}\right]dt, \quad \forall m \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Entonces,

$$s_m(x) = f * D_m(x) \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$$

donde

$$D_m(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-m}^{m} e^{ikx}$$

es el llamado **Núcleo de Dirichlet**.

Una expresión alternativa para este núcleo es

$$D_m(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-m}^{m} = \frac{1}{2\pi}\left[1 + \sum_{k=1}^{m}\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right)\right] = \frac{1}{2\pi}\left[2\Re\left(\sum_{k=1}^{m} e^{ikx}\right) - 1\right]$$

para todo $m \in \mathbb{N}^*$. Se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m} e^{ikx} &= \frac{1 - e^{i(m+1)x}}{1 - e^{ix}} \\ &= \frac{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i(m+\frac{1}{2})x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} \\ &= \frac{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i(m+\frac{1}{2})x}}{-2i \operatorname{sen}\frac{x}{2}} \\ &= \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{-2i\operatorname{sen}\frac{x}{2}} + i\frac{-\operatorname{sen}\frac{x}{2} - \operatorname{sen}\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{-2i\operatorname{sen}\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

así pues,

$$\begin{aligned} \Re\left(\sum_{k=1}^{m} e^{ikx}\right) &= \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2} + \operatorname{sen}\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\operatorname{sen}\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\right] \end{aligned}$$

sustituyendo en el núcleo de Dirichlet:

$$D_m(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{\operatorname{sen}\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$$

si x no es múltiplo entero de 2π. En caso contrario obtenemos que

$$D_m(x) = \frac{2m+1}{2\pi}$$

Note además que por definición de $D_m(x)$:

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} D_m(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\operatorname{sen}\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}dx$$

Teorema 3.6.1 (**Teorema fundamental para la convergencia puntual de una serie de Fourier**)
Sea $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ y fijemos $x \in \mathbb{R}$. Para que la serie de Fourier de f converja en x a una suma $s(x)$ (finita), es necesario y suficiente que para algún $0 < \delta < \pi$ se cumpla alguna de las dos condiciones siguientes:

1. $\lim_{m\to\infty}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{f(x+t)-s(x)}{t}\operatorname{sen}\left(m+\frac{1}{2}\right)tdt = 0.$

2. $\lim_{m\to\infty}\int_{0}^{\delta}\frac{f(x+t)+f(x-t)-2s(x)}{t}\operatorname{sen}\left(m+\frac{1}{2}\right)tdt = 0.$

Demostración:
Probaremos que las integrales (1) y (2) son equivalentes (es decir que son una misma integral). En efecto,

$$\begin{aligned}
\int_{-\delta}^{\delta}\frac{f(x+t)-s(x)}{t}\operatorname{sen}\left(m+\frac{1}{2}\right)tdt &= \int_{-\delta}^{0}\frac{f(x+t)-s(x)}{t}\operatorname{sen}\left(m+\frac{1}{2}\right)tdt \\
&+ \int_{0}^{\delta}\frac{f(x+t)-s(x)}{t}\operatorname{sen}\left(m+\frac{1}{2}\right)tdt \\
&= \int_{0}^{\delta}\frac{f(x-u)-s(x)}{-u}\operatorname{sen}\left(m+\frac{1}{2}\right)(-u)du \\
&+ \int_{0}^{\delta}\frac{f(x+t)-s(x)}{t}\operatorname{sen}\left(m+\frac{1}{2}\right)tdt \\
&= \int_{0}^{\delta}\frac{f(x+t)+f(x-t)-2s(x)}{t}\operatorname{sen}\left(m+\frac{1}{2}\right)tdt
\end{aligned}$$

Recordemos que

$$s_m(x) = f * D_m(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\frac{\operatorname{sen}\left(m+\frac{1}{2}\right)u}{\operatorname{sen}\frac{u}{2}}du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{\operatorname{sen}\left(m+\frac{1}{2}\right)u}{\operatorname{sen}\frac{u}{2}}du$$

también, se tiene que

$$s(x) = s(x)\int_{-\pi}^{\pi} D_m(u)du = \int_{-\pi}^{\pi} s(x)\frac{\operatorname{sen}\left(m+\frac{1}{2}\right)u}{\operatorname{sen}\frac{u}{2}}du$$

así pues,

$$s_m(x) - s(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+t)-s(x)}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\operatorname{sen}\left(m+\frac{1}{2}\right)tdu$$

Sea $0 < \delta < \pi$, sentonces

$$s_m(x) - s(x) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-s}^{s} \frac{f(x+t)-s(x)}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}} \operatorname{sen}\left(m+\frac{1}{2}\right) t dt + \int_{s\leq|t|<\pi} \frac{f(x+t)-s(x)}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}} \operatorname{sen}\left(m+\frac{1}{2}\right) t dt\right]$$

Como $t \mapsto \frac{f(x+t)-s(x)}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}}$ es integrable en $s \leq \left|t\right| < \pi$, por el teorema de Riemman-Lebesgue la segunda integral tiende a cero conforme $m \to \infty$. Por lo tanto,

$$\lim_{m\to\infty} [s_m(x) - s(x)] = 0 \iff \lim_{m\to\infty} \int_{-s}^{s} \frac{f(x+t)-s(x)}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}} \operatorname{sen}\left(m+\frac{1}{2}\right) t dt = 0$$

y, veamos que

$$\begin{aligned}\int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+t)-s(x)}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}} \operatorname{sen}\left(m+\frac{1}{2}\right) t dt &= \int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+t)-s(x)}{t} \operatorname{sen}\left(m+\frac{1}{2}\right) t dt \\ &+ \int_{-\delta}^{-\delta} (f(x+t)-s(x)) \left[\frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right] \operatorname{sen}\left(m+\frac{1}{2}\right) t dt\end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}} - \frac{1}{t} &= \frac{t - 2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}{2t\operatorname{sen}\frac{t}{2}} \\ t \to 0 &= \frac{t - 2\left(\frac{t}{2} - \frac{t^3}{48} + O(t^3)\right)}{2t(\frac{t}{2} - O(t))} \\ t \to 0 &= \frac{\frac{t^3}{48} + O(t^3)}{t^2 + 2tO(t)} \\ t \to 0 &= \frac{\frac{t^3}{48} + O(t^3)}{t^2 + O(t^2)} \\ t \to 0 &= \frac{t^3\left(\frac{1}{48} + \frac{O(t^3)}{t^2}\right)}{t^2(1 + \frac{O(t^2)}{t^2})} \\ t \to 0 &= \frac{t\left(\frac{1}{48} + \frac{O(t^3)}{t^2}\right)}{1 + \frac{O(t^2)}{t^2}} \\ t \to 0 &= 0\end{aligned}$$

Si a la función $t \mapsto \frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}$ se le asigna el valor 0 en 0, se hace continua en $[-\delta, \delta]$. Así pues,

$$t \mapsto (f(x+t) - s(x)) \left[\frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right]$$

es integrable en $[-\delta, \delta]$. Por Riemman-Lebesgue la segunda integral tiende a 0 cuando $m \to \infty$. Por tanto se concluye que

$$\lim_{m\to\infty} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+t)-s(x)}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}} \operatorname{sen}\left(m+\frac{1}{2}\right) t dt = 0 \iff \lim_{m\to\infty} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+t)-s(x)}{t} \operatorname{sen}\left(m+\frac{1}{2}\right) t dt = 0$$

por la observación hecha anteriormente, esto es equivalente a

$$\lim_{m\to\infty} s_m(x) = s(x) \iff \lim_{m\to\infty} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+t)-s(x)}{t} \operatorname{sen}\left(m+\frac{1}{2}\right) t dt = 0, \text{ para algún } 0 < \delta < \pi$$

■

Observación 3.6.1
Por el teorema anterior, la convergencia de la serie de Fourier de f en un punto x y la eventual suma de esta serie de Fourier dependen solamente del comportamiento de f en alguna vecindad arbitrariamente pequeña de x. A esto se le llama el **principio de localización de Riemman**. Esto es sorprendente, pues los coeficientes de Fourier de la función f dependen de los valores de f en todo el intervalo $[-\pi, \pi[$.

Teorema 3.6.2 (**Criterio de Dini para la convergencia puntual de una serie de Fourier**)
Sea $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$. Para que la serie de Fourier de f converga en un punto $x \in \mathbb{R}$ a una suma $s(x)$ es necesario y suficiente que para algún $0 < \delta < \pi$ la función siguiente sea integrable:

$$t \mapsto \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2s(x)}{t}$$

sea integrable en $]0, \delta[$.

Demostración:
$\Leftarrow)$: Es inmediato del teorema de Riemman-Lebesgue y del teorema anterior.

$\Rightarrow)$: La condición $\int_{-\delta}^{\delta} \left|\frac{f(x+t)-s(x)}{t}\right| dt < \infty$ implica la convergencia puntual de la serie de Fourier. En efecto,

$$\begin{aligned} \int_{-\delta}^{0} \left|\frac{f(x+t)-s(x)}{t}\right| dt + \int_{0}^{\delta} \left|\frac{f(x+t)-s(x)}{t}\right| dt &= \int_{-\delta}^{\delta} \left|\frac{f(x+t)-s(x)}{t}\right| dt < \infty \\ \Rightarrow \int_{0}^{\delta} \left|\frac{f(x-t)-s(x)}{t}\right| dt + \int_{0}^{\delta} \left|\frac{f(x+t)-s(x)}{t}\right| dt &= \int_{-\delta}^{\delta} \left|\frac{f(x+t)-s(x)}{t}\right| dt < \infty \\ \Rightarrow \int_{0}^{\delta} \left|\frac{f(x+t)+f(x-t)-2s(x)}{t}\right| dt &= \int_{-\delta}^{\delta} \left|\frac{f(x+t)-s(x)}{t}\right| dt < \infty \end{aligned}$$

■

Corolario 3.6.1
Sea $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$. Si en un punto $x \in \mathbb{R}$ existen la derivda por la derecha $f'_d(x)$ y por la izquierda $f'_i(x)$, entonces la serie de Fourier de f converge en x a $f(x)$.

Demostración:
Como existen las derivadas por la derecha e izquierda, para $\varepsilon = 1 > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < t < \delta \Rightarrow \begin{cases} \left|f(x+t) - d(x)\right| & \leq t\left|f'_d(x) + 1\right| \\ \left|f(x-t) - d(x)\right| & \leq t\left|f'_i(x) + 1\right| \end{cases}$$

así pues, $0 < t < \delta$ implica que

$$\left|\frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t}\right| \leq \left|f'_d(x)\right| + \left|f'_i(x)\right| + 2$$

por tanto, $t \mapsto \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}$ es integrable en $]0, \delta[$. ■

3.7. Convergencia uniforme de una serie de Fourier

Lema 3.7.1 (**Versión Uniforme del Teorema de Riemman-Lebesgue**)
Si $\mathcal{F}$ es un conjunto relativamente compacto en $L_1^{2\pi}(\mathbb{C})$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \geq 0$ tal que

$$\lambda \in \mathbb{R}, \left|\lambda\right| \geq N \Rightarrow \sup_{f\in\mathcal{F}} \Big| \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{i\lambda x}dx\Big| < \varepsilon$$

Demostración:
Como $\mathcal{F}$ es relativamente compacto, entonces $\mathcal{F}$ es totalmente acotado (ya que su cerradura por definición, es compacta). Luego, dado $\varepsilon > 0$ existe una familia finita de elementos de $\mathcal{F}$, digamos $f_1, ..., f_r \in \mathcal{F}$ tales que las bolas abiertas $B(f_1, \frac{\varepsilon}{2}), ..., B(f_r, \frac{\varepsilon}{2})$ recubren a $\mathcal{F}$. Por Riemman-Lebesgue, existe $N > 0$ tal que

$$\lambda \in \mathbb{R}, \left|\lambda\right| \geq N \Rightarrow \Big| \int_{-\pi}^{\pi} f_k(x)e^{i\lambda x}dx\Big| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall k \in [\![1, r]\!]$$

Sea $f \in \mathcal{F}$ arbitario. Existe $k \in [\![1, r]\!]$ tal que $f \in B(f_k, \frac{\epsilon}{2})$, esto es

$$\mathcal{N}_1\left(f - f_k\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es tal que $\left|\lambda\right| > N$, se tiene que

$$\begin{aligned} \Big| \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{i\lambda x}dx\Big| &\leq \Big| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f_k(x))e^{i\lambda x}dx\Big| + \Big| \int_{-\pi}^{\pi} f_k(x)e^{i\lambda x}dx\Big| \\ &< \mathcal{N}_1\left(f - f_k\right) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

lo que termina la prueba. ■

Lema 3.7.2
Sean $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ y $E \subseteq [-\pi, \pi]$. Se supone:

1. f es acotada en E.
2. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $0 < \delta < \pi$ tal que

$$\sup_{x\in E} \int_{-\delta}^{\delta} \Big|\frac{f(x+t) - f(x)}{t}\Big| dt < \varepsilon$$

Defina para cada $x \in E$,

$$\varphi_x(t) = \frac{f(x+t) - f(x)}{t}, \quad \forall t \in [-\pi, \pi]$$

y extiéndase por periodicidad a todo $\mathbb{R}$. Si $h \in \mathcal{L}_\infty^{2\pi}(\mathbb{C})$, entonces la familia de funciones $\{h\varphi_x\}_{x\in E}$ es relativamente compacta en $\mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$.

Demostración:
■