

Notas del curso Topología I

Cristo Daniel Alvarado

21 de febrero de 2024

Índice general

0. Introduccion	2
0.1. Temario	2
0.2. Bibliografía	2
1. Conceptos Fundamentales	3
1.1. Fundamentos	3
1.2. Bases y sub-bases de topología	13

Capítulo 0

Introduccion

0.1. Temario

Checar el Munkres

0.2. Bibliografía

1. J. R. Munkres 'Topología' - Prentices Hall.
2. M. Gemignani 'Elementary Topology' - Dover.
3. J. Dugundji 'Topology' - Allyn Bacon.

Capítulo 1

Conceptos Fundamentales

1.1. Fundamentos

Definición 1.1.1

Sea X un conjunto y \mathcal{A} una familia no vacía de subconjuntos de X . Definamos los **complementos de \mathcal{A}**

$$\mathcal{A}' := \{X - A \mid A \in \mathcal{A}\}$$

(básicamente es el conjunto de todos los complementos de los conjuntos en \mathcal{A}). Para no perder ambigüedad, no denotaremos al complemento de un conjunto por B^c , sino por $X - B$ (para denotar quien es el conjunto sobre el que se toma el complemento del conjunto).

La **unión de los elementos** de \mathcal{A} se define como el conjunto:

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \in X \mid x \in A \text{ para algún elemento } A \in \mathcal{A}\}$$

denotada por el símbolo de la izquierda.

La **intersección de los elementos** de \mathcal{A} se define como el conjunto:

$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \in X \mid x \in A \text{ para todo elemento } A \in \mathcal{A}\}$$

Observación 1.1.1

En caso de que la colección \mathcal{A} sea vacía, no se puede hacer lo que marca la definición anterior. Como \mathcal{A} es vacía, entonces \mathcal{A}' también es vacía.

1. Suponga que $\bigcup \mathcal{A} \neq \emptyset$, entonces existe $x \in X$ tal que $x \in \bigcup \mathcal{A}$, luego existe algún elemento $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A$, pero esto no puede suceder, pues la familia \mathcal{A} es vacía. $\#_c$. Por tanto, $\bigcup \mathcal{A} = \emptyset$.
2. Ahora, si aplicamos las leyes de Morgan, y tomamos

$$X - \bigcap \mathcal{A} = X - \bigcap \emptyset = \bigcup \emptyset' = \bigcup \emptyset = \emptyset$$

luego, $\bigcap \mathcal{A} = X$.

En definitiva, si \mathcal{A} es una colección vacía, entonces definimos $\bigcup \mathcal{A} = \emptyset$ y $\bigcap \mathcal{A} = X$.

La observación junto con la definición anterior se usarán a lo largo de todo el curso y serán de utilidad.

Definición 1.1.2

Sea X un conjunto y sea τ una familia de subconjuntos de X . Se dice que τ es una **topología definida sobre X** si se cumple lo siguiente:

1. $\emptyset, X \in \tau$.
2. Si \mathcal{A} es una subcolección de τ , entonces $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$.
3. Si $A, B \in \tau$, entonces $A \cap B \in \tau$.

Observación 1.1.2

En algunos libros viejos viene la siguiente condición adicional a la definición:

4. Si $p, q \in X$ con $p \neq q$, entonces existen $U, V \in \tau$ tales que $p \in U$, $q \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

en este caso se dirá que el espacio es **Hausdorff**.

Observación 1.1.3

Se tienen las siguientes observaciones:

1. Sea X un conjunto y \mathcal{A} una familia de subconjuntos de X . Si

$$\mathcal{A} = \{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$$

entonces podemos escribir

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

e igual con la intersección:

$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$$

Si \mathcal{A} es una familia vacía, y se toma como definición lo dicho en la observación 1.0.1, entonces podemos omitir el primer inciso de la definición anterior.

2. Si τ es una topología sobre X y para $n \in \mathbb{N}$, $A_1, \dots, A_n \in \tau$, entonces $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \tau$.

Ejemplo 1.1.1

Sea X un conjunto no vacío.

1. El conjunto potencia (denotado por \mathcal{P}) de X es una topología sobre X , la cual se llama la **topología discreta**, y se denota por τ_D .
2. La colección formada únicamente por X y \emptyset es una topología sobre X , es decir $\tau = \{\emptyset, X\}$ es llamada la **topología indiscreta**, y se escribe como τ_I .
3. En el caso de que $X = \{1\}$, se tendría que $\tau_D = \{\emptyset, \{1\}\}$ y $\tau_I = \{\emptyset, \{1\}\}$.
Si $X = \{1, \zeta\}$, entonces $\tau_D = \{\emptyset, \{1\}, \{\zeta\}, \{1, \zeta\}\}$ y $\tau_I = \{\emptyset, \{1, \zeta\}\}$.
4. Si τ es una topología sobre X , entonces

$$\tau_I \subseteq \tau \subseteq \tau_D$$

5. Sea $a \in X$. Entonces $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \}$ es una topología sobre X .

6. Sea $A \subseteq X$ y sea $\tau(A) = \{B \subseteq X \mid A \subseteq B\} \cup \{\emptyset\}$. Esta familia $\tau(A)$ es una topología sobre X .

Solución:

Para el inciso 6., veamos que $\tau(A)$ es una topología sobre X . En efecto, verificaremos que se cumplen las 3 condiciones:

1. Claro que $\emptyset \in \tau(A)$ por definición de $\tau(A)$. Además $X \in \tau(A)$ ya que $X \subseteq X$ y $A \subseteq X$.
2. Sea \mathcal{B} una familia no vacía de subconjuntos de $\tau(A)$, entonces existe $B_0 \in \mathcal{B}$ tal que $A \subseteq B_0$, por lo cual

$$A \subseteq B_0 \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subseteq X$$

por tanto $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \in \tau(A)$.

3. Sean $C, D \in \tau(A)$, entonces $A \subseteq C$ y $A \subseteq D$, por ende $A \subseteq C \cap D \subseteq X$. Así, $C \cap D \in \tau(A)$.

Por los incisos anteriores, la familia descrita en el inciso 6. es una topología sobre X . \square

Observación 1.1.4

Sea X un conjunto no vacío. Si $A = \{a\} \subseteq X$, entonces escribimos τ_a en vez de $\tau(A)$.

Ejemplo 1.1.1

Se continúan con los ejemplos anteriores:

7. Sea $\tau_{cf} = \{A \subseteq X \mid X - A \text{ es un conjunto finito}\} \cup \{\emptyset\}$. Esta es una topología sobre X y se llama la **topología de los complementos finitos**.
8. Si X es un conjunto finito, entonces $\tau_{cf} = \tau_D = \mathcal{P}$.
9. Considere (en un conjunto finito X) a τ_{cf} y sean $a, b \in X$ con $a \neq b$. Si $U_a = X - \{b\}$, $U_b = X - \{a\}$, entonces $U_a, U_b \in \tau_{cf}$ y además, $a \in U_a$ pero $b \notin U_a$ y $a \notin U_b$ pero $b \in U_b$. Esta propiedad es muy importante tenerla en mente pues más adelante se usará.

Solución:

Veamos que la familia del ejemplo 7. es una topología sobre X . En efecto, veamos que se cumplen las 3 condiciones:

1. Claro que $\emptyset \in \tau_{cf}$ (por definición de τ_{cf}). Y además $X \in \tau_{cf}$ ya que $\emptyset = X - X$ es un conjunto finito y $X \subseteq X$.
2. Sea \mathcal{A} una familia no vacía de subconjuntos de τ_{cf} . Se cumple entonces que existe $A_0 \in \mathcal{A}$ tal que $X - A_0$ es finito. Por lo cual como

$$X - \bigcup \mathcal{A} \subseteq X - A_0$$

ya que $A_0 \subseteq \bigcup \mathcal{A}$, se tiene que $X - \bigcup \mathcal{A}$ es finito y $\bigcup \mathcal{A} \subseteq X$. Por tanto, $\bigcup \mathcal{A} \in \tau_{cf}$.

3. Sean $A, B \in \tau_{cf}$. Probaremos que $A \cap B \in \tau_{cf}$. Afirmamos que $X - A \cap B$ es finito, en efecto, por leyes de Morgan se tiene que

$$X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B) \subseteq X$$

donde $X - A$ y $X - B$ son finitos, por lo cual su unión también lo es. Por tanto $A \cap B \in \tau_{cf}$.

Por los tres incisos anteriores, se sigue que τ_{cf} es una topología sobre X . \square

A continuación se verá una proposición la cual tiene como objetivo el inducir una topología sobre un espacio métrico (X, d) arbitrario.

Proposición 1.1.1

Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $a \in X$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, al conjunto $B_d(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ se llama **ε -bola con centro en x y radio ε** .

Sea

$$\tau_d = \{A \subseteq X \mid \forall a \in A \exists r > 0 \text{ tal que } B_d(a, r) \subseteq A\}$$

Esta colección es una topología sobre X .

Demostración:

Se verificará que se cumplen las tres condiciones.

1. Por vacuidad, $\emptyset \in \tau_d$. Además, $X \in \tau_d$, pues para todo $x \in X$, $B_d(x, 1) \subseteq X$.
2. Sean \mathcal{A} una familia no vacía de subconjuntos de τ_d . Sea $p \in \cup \mathcal{A}$, es decir que existe $A_\beta \in \mathcal{A}$ tal que $p \in A_\beta$, así existe $r > 0$ tal que $B_d(p, r) \subseteq A_\beta \subseteq \cup \mathcal{A}$, luego $\cup \mathcal{A} \in \tau_d$.
3. Sean $M, N \in \tau_d$, y sea $p \in M \cap N$, es decir que $p \in M$ y $p \in N$, por lo cual existen $r_1, r_2 > 0$ tales que $B_d(p, r_1) \subseteq M$ y $B_d(p, r_2) \subseteq N$. Sea $r = \min\{r_1, r_2\}$, es inmediato que $B_d(p, r) \subseteq B_d(p, r_i)$, para $i = 1, 2$. Por tanto, $B_d(p, r) \subseteq M \cap N$. Luego, como el p fue arbitrario, se sigue que $M \cap N \in \tau_d$.

■

Definición 1.1.3

La topología de la proposición anterior es llamada la **topología generada por la métrica d** .

Ejercicio 1.1.1

Sea (X, d) espacio métrico. Veamos que, dados $x \in X$ y $r > 0$, se cumple que $B_d(x, r) \in \tau_d$.

Solución:

Sea $y \in B_d(x, r)$, entonces $d(x, y) < r$. Sea $\varepsilon = d(x, y)$ y, supongamos que $x \neq y$ (pues en caso contrario, el caso es inmediato ya que $B_d(x, r) \subseteq B_d(x, r)$) luego $\varepsilon > 0$ y además $\varepsilon < r$. Sea $s = r - \varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

Afirmamos que $B_d(y, s) \subseteq B_d(x, r)$. En efecto, sea $z \in B_d(y, s)$, entonces

$$\begin{aligned} d(z, y) &< s \\ \Rightarrow d(z, y) &< r - \varepsilon \\ \Rightarrow d(z, y) + \varepsilon &< r \\ \Rightarrow d(z, y) + d(y, x) &< r \\ \Rightarrow d(z, x) &< r \end{aligned}$$

por tanto, $x \in B_d(x, r)$. Luego, $B_d(x, r) \in \tau_d$. \square

Lema 1.1.1

Todo espacio métrico (X, d) es Hausdorff.

Demostración:

Veamos que dados $x, y \in X$, $x \neq y$ existen $r, s \in \mathbb{R}^+$ tales que $B_d(x, r) \cap B_d(y, s) = \emptyset$. Como $x \neq y$ entonces $d(x, y) = m \in \mathbb{R}^+$. Tomemos $r = \frac{m}{\pi}$ y $s = \frac{\pi-1}{\pi}m$ y veamos que la intersección es vacía.

En efecto, en caso de que no lo fuese se tendría que si existiera $p \in B_d(x, r) \cap B_d(y, s)$, entonces $d(p, x) < \frac{m}{\pi}$ y $d(p, y) < \frac{\pi-1}{\pi}m$, por lo cual de la desigualdad triangular se sigue que:

$$d(x, y) \leq d(p, x) + d(p, y) < \frac{1 + \pi - 1}{\pi}m = m = d(x, y)$$

lo cual es una contradicción. Por tanto, la intersección es vacía. ■

Retomando al espacio métrico (X, d) , tenemos que para $A \subseteq X$, $A \in \tau_d$ si y sólo si existen $\{a_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq A$ y $\{\varepsilon_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathbb{R}^+$ tales que

$$\bigcup_{\alpha \in I} B_d(a_\alpha, \varepsilon_\alpha) = A$$

donde $\forall \alpha \in I$ se tiene que $A_\alpha \in \mathcal{A}$.

Corolario 1.1.1

Sea (X, d) un espacio métrico y

$$\mathcal{B}_d = \{B_d(x, \varepsilon) | x \in X, \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$$

entonces, para $A \subseteq X$ se tiene que $A \in \tau_d$ si y sólo si existe una colección $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathcal{B}_d$ tal que $A = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$. La colección $\mathcal{B}_d \subseteq \tau_d$.

Ejemplo 1.1.2

Sea $m \in \mathbb{N}$ y considere el espacio métrico \mathbb{R}^m con la métrica d_u , siendo:

$$d_u(x, y) = [(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_m - y_m)^2]^{\frac{1}{2}}$$

para $x = (x_1, \dots, x_m), y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$. Esta métrica será denominada **métrica usual**. Vamos a escribir a la topología generada por esta métrica como τ_u , y se dice la **topología usual definida sobre \mathbb{R}^m** . En particular, cuando $m = 1$ tenemos que τ_u la topología usual definida sobre \mathbb{R} . En este caso, se tiene que $A \in \tau_u$ si y sólo si existen $\{a_\alpha\}_{\alpha \in I}$ y $\{b_\alpha\}_{\alpha \in I}$ subfamilias de \mathbb{R} tal que $A = \bigcup_{\alpha \in I} (a_\alpha, b_\alpha)$.

Observación 1.1.5

Tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, los conjuntos $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \in \tau_u$, y $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \{0\} \notin \tau_u$. Es decir, que la topología solo es cerrada (en general) bajo intersecciones finitas.

Definición 1.1.4

Sea X un conjunto, y sean τ_1 y τ_2 topologías sobre X . Decimos que τ_2 es **más fina** que la topología τ_1 si se tiene que $\tau_1 \subseteq \tau_2$ (a veces también se dice que τ_1 es **menos fina** que τ_2).

Ejemplo 1.1.3

Sea $X = \{1, 2, 3\}$, $\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}\}$, $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2\}\}$. Tomemos

$$\tau_1 \cup \tau_2 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{2\}\}$$

la familia $\tau_1 \cup \tau_2$ no es una topología sobre X , pues no es cerrada bajo uniones arbitrarias. Con esto se tiene que la unión de dos topologías no necesariamente es una topología.

Teorema 1.1.1

Sea X un conjunto, y sea $\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de topologías sobre X , entonces $\tau = \bigcap_{\alpha \in I} \tau_\alpha$ es una topología sobre X .

Demostración:

Veamos que se cumplen las tres condiciones.

1. Claro que $X, \emptyset \in \tau$, pues $X, \emptyset \in \tau_\alpha$, para todo $\alpha \in I$.
2. Sea $\mathcal{A} = \{A_\beta\}_{\beta \in J} \subseteq \tau = \bigcap_{\alpha \in I} \tau_\alpha$ una subcolección arbitraria de elementos de τ . Por ser τ_α una topología, se sigue que $\bigcup \mathcal{A} \in \tau_\alpha$, para todo $\alpha \in I$. Por tanto, $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$.
3. Sean $K, L \in \tau$, entonces $K, L \in \tau_\alpha$, para todo $\alpha \in I$, luego como τ_α es una topología sobre X , se tiene que $L \cap K \in \tau_\alpha$, para todo $\alpha \in I$, por tanto $L \cap K \in \tau$.

Por los tres incisos anteriores, se sigue que τ es una topología sobre X . ■

Corolario 1.1.2

Sea X un conjunto y sean \mathcal{A} una familia de subconjuntos de X . Definimos

$$\mathcal{K} = \{\tau \mid \tau \text{ es una topología sobre } X \text{ y } \mathcal{A} \subseteq \tau\}$$

Entonces:

1. $\tau_D \in \mathcal{K}$.
2. Definiendo $\tau(\mathcal{A}) = \bigcap_{\tau \in \mathcal{K}} \tau$, se tiene que $\tau(\mathcal{A})$ es una topología sobre X .
3. Para toda topología $\tau \in \mathcal{K}$, $\tau(\mathcal{A}) \subseteq \tau$.
4. $\tau(\mathcal{A}) \in \mathcal{K}$.

Demostración:

De 1. Es inmediato, pues como $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P} = \tau_D$ y τ_D es una topología sobre X , se sigue que $\tau_D \in \mathcal{K}$.

De 2. Es inmediato del teorema anterior.

De 3. Como $\tau(\mathcal{A}) = \bigcap_{\tau \in \mathcal{K}} \tau$, entonces $\tau(\mathcal{A}) \subseteq \tau$, para toda $\tau \in \mathcal{K}$.

De 4. Por 2. $\tau(\mathcal{A})$ es una topología sobre X , y además $\mathcal{A} \subseteq \tau(\mathcal{A})$, pues $\mathcal{A} \subseteq \tau$, para todo $\tau \in \mathcal{K}$, luego $\mathcal{A} \subseteq \bigcap_{\tau \in \mathcal{K}} \tau = \tau(\mathcal{A})$. Por ende, $\tau(\mathcal{A}) \in \mathcal{K}$. ■

Definición 1.1.5

Un **espacio topológico** es una pareja (X, τ) en donde X es un conjunto y τ es una topología sobre X . A los elementos de τ los llamaremos los **conjuntos abiertos** del espacio (X, τ) a veces también se les nombra como los **τ -abiertos de X** .

Ejemplo 1.1.4

Ejemplos de espacios topológicos son (\mathbb{R}, τ_D) , (\mathbb{R}, τ_I) , (\mathbb{R}, τ_{cf}) , (\mathbb{R}, τ_u) , etc... Las diferencias notables son que $\{1, \sqrt{2}\}$ es abierto en (\mathbb{R}, τ_D) , pero no en (\mathbb{R}, τ_u) .

Sea X un conjunto y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$. Por el corolario anterior, podemos trabajar con la topología $\tau(\mathcal{A})$, y tenemos así al espacio topológico $(X, \tau(\mathcal{A}))$, el cual en particular tiene como abiertos a los elementos de la familia \mathcal{A} .

Definición 1.1.6

Sea (X, τ) un espacio topológico.

1. Un subconjunto $C \subseteq X$ es un **conjunto cerrado** del espacio topológico (X, τ) si $X - C \in \tau$.

Ejemplo 1.1.5

En (\mathbb{R}, τ_u) se tiene que \mathbb{R} y \emptyset son abiertos y cerrados a la vez, pero el conjunto $[1, 2[$ no es abierto ni cerrado, $]1, 2[$ es abierto pero no cerrado y $[1, 2]$ no es abierto pero sí es cerrado.

Proposición 1.1.2

Sea (X, τ) un espacio topológico.

1. Si A_1, \dots, A_n son subconjuntos cerrados de (X, τ) , entonces su unión $A_1 \cup \dots \cup A_n$ es un cerrado de (X, τ) .
2. Si \mathcal{A} es una familia arbitraria de conjuntos cerrados en (X, τ) , entonces $\bigcap \mathcal{A}$ es un conjunto cerrado.

Demostración:

De (1): Consideremos el complemento de la unión. Se tiene que:

$$X - \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i=1}^n (X - A_i)$$

el cual es abierto por ser intersección finita de abiertos. Luego $\bigcap_{i=1}^n A_i$ es cerrado.

De (2): Basta con aplicar leyes de Morgan. ■

Ejemplo 1.1.6

Considere (\mathbb{R}, τ_u) y, para $n \in \mathbb{N}$ definimos $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, es claro que cada uno de estos conjuntos es abierto. Sea $B_n = \mathbb{R} - A_n = (-\infty, -\frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{n}, \infty)$.

Se tiene que:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R} - A_n = \mathbb{R} - \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{R} - \{0\}$$

el cual es abierto. Por tanto, la unión arbitraria de cerrados no es cerrada (en general).

Definición 1.1.7

Sea (X, τ) un espacio topológico y, sean $x \in X$ y $V \subseteq X$ tal que $x \in V$. Se dice que V es una **vecindad de x** si existe $U \in \tau$ abierto tal que $x \in U$ y $U \subseteq V$.

1. Si V es una vecindad de x y $V \in \tau$, decimos que V es una **vecindad abierta de x** .
2. Si V es una vecindad de x y $X - V \in \tau$, decimos que V es una **vecindad cerrada de x** .

Al conjunto de todas las vecindades del punto x lo denotamos por $\mathcal{V}(x)$. Tenemos que $X \in \mathcal{V}(x)$ para todo $x \in X$.

Ejercicio 1.1.2

Sea (X, τ) un espacio topológico.

1. Si $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{V}(x)$ para $x \in X$, entonces $V_1 \cap \dots \cap V_n \in \mathcal{V}(x)$.
2. Si $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathcal{V}(x)$ para $x \in X$, entonces $\bigcap_{\alpha \in I} V_\alpha \in \mathcal{V}(x)$.

Solución:

□

Definición 1.1.8

Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$.

1. Sea $x \in X$. x es un **punto de acumulación de** A si para todo U abierto que contiene a x se tiene que $(U - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ (U contiene un punto de A diferente de x). Al conjunto de todos los puntos de acumulación lo llamaremos el **conjunto derivado de** A , y se denota por A' .
2. Un elemento $a \in A$ es un **punto interior** de A , si A es una vecindad de x (es decir, $A \in \mathcal{V}(x)$). El **interior de** A es el conjunto de todos los puntos interiores de A y se escribe $\overset{\circ}{A}$. Es claro que $\overset{\circ}{A} \subseteq A$.

3. Sea

$$\mathcal{C} = \{C \subseteq X \mid X - C \in \tau, A \subseteq C\}$$

es claro que \mathcal{C} es no vacía, pues $X \in \mathcal{C}$. La **cerradura de** A es el conjunto $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$ y se denota por \overline{A} . Si $x \in \overline{A}$, diremos que x es un **punto adherente de** A . Es claro que $A \subseteq \overline{A}$.

4. La **frontera de** A es el conjunto $\overline{A} \cap \overline{X - A}$ y se denota por $\text{Fr}(A)$.

Proposición 1.1.3

Sea (X, τ) un espacio topológico, $x \in X$ y sean $A, B \subseteq X$. Entonces:

1. $\overset{\circ}{A} \subseteq A \subseteq \overline{A}$.
2. $\overset{\circ}{A} = \bigcup \{U \in \tau \mid U \subseteq A\}$.
3. $\overset{\circ}{A} \in \tau$.
4. Si $V \in \tau$ tal que $V \subseteq A$, entonces $V \subseteq \overset{\circ}{A}$.
5. A es abierto si y sólo si $\overset{\circ}{A} = A$.
6. $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$.
7. $\widehat{\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.
8. $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subseteq \widehat{\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}}$.
9. \overline{A} es un conjunto cerrado.
10. Si $K \subseteq X$ es cerrado de (X, τ) y $A \subseteq K$, entonces $\overline{A} \subseteq K$.

11. A es cerrado si y sólo si $\overline{A} = A$.
12. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
13. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
14. $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.
15. $\emptyset = \overset{\circ}{\emptyset} = \overline{\emptyset}$ y $X = \overset{\circ}{X} = \overline{X}$.
16. Si $A \subseteq B$, entonces $\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}$ y $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.
17. $x \in \overline{A}$ si y sólo si para todo abierto $U \subseteq X$ tal que $x \in U$ se tiene que $U \cap A \neq \emptyset$.
18. $x \in \text{Fr}(A)$ si y sólo si para todo abierto U tal que $x \in U$ se cumple que $U \cap A \neq \emptyset$ y $U \cap (X - A) \neq \emptyset$.
19. $\overline{A} = A \cup A'$.
20. A es un conjunto cerrado si y sólo si $A' \subseteq A$.
21. $\overline{A} = \overset{\circ}{A} \cup \text{Fr}(A)$.
22. $\text{Fr}(A) = \text{Fr}(X - A)$.
23. $\overline{A} - \text{Fr}(A) = \overset{\circ}{A}$.

Demostración:

De (1):

De (17): Sea $x \in X$.

\Rightarrow): Suponga que $x \in \overline{A}$, entonces para todo $C \subseteq X$ cerrado tal que $A \subseteq C$. Suponga que existe $U_0 \in \tau$ abierto tal que $x \in U_0$ y $U_0 \cap A = \emptyset$. Entonces $A \subseteq X - M$ es un cerrado que contiene a A , luego $x \in X - M$, es decir $x \notin M\#_c$. Por tanto, $U \cap A \neq \emptyset$.

\Leftarrow): Sea $L \subseteq X$ un cerrado tal que $A \subseteq L$. Probaremos que $x \in L$, suponiendo la tesis para este $x \in X$. Suponga que $x \notin L$, entonces $x \in X - L$ el cual es abierto, por tanto $(X - L) \cap A \neq \emptyset$, es decir $A \not\subseteq L\#_c$. Por tanto, $x \in L$.

De (19): Se probarán las dos contenciones:

- a). $\overline{A} \subseteq A \cup A'$. Sea $x \in \overline{A}$. Si $x \in A$, se tiene el resultado. Suponga que $x \notin A$. Como $x \in \overline{A}$, por (17) para todo abierto $U \subseteq X$ se tiene que $U \cap A \neq \emptyset$, pero $x \notin A$, por lo cual $(U - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Por tanto, $x \in A'$.
- b). $A \cup A' \subseteq \overline{A}$. Es inmediata de la definición de \overline{A} y A' .

Por a) y b) se sigue el resultado. ■

Proposición 1.1.4

Sea (X, τ) un espacio topológico y $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

1. $\bigcup_{\alpha \in I} \overline{A_\alpha} \subseteq \overline{\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha}$.
2. $\overline{\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha} \subseteq \bigcap_{\alpha \in I} \overline{A_\alpha}$.

Demostración:

Probemos ambos incisos:

De (1): Si $x \in \bigcup_{\alpha \in I} \overline{A_\alpha}$, sea $U \in \tau$ tal que $x \in U$, luego $\exists \alpha \in I$ tal que $x \in \overline{A_\alpha}$, por ende $U \cap A_\alpha \neq \emptyset$, por tanto $(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) \cap A_\alpha \neq \emptyset$. Como el U fue arbitrario, se sigue que $x \in \overline{\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha}$.

De (2): Si $x \in \overline{\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha}$, entonces para $U \in \tau$ tal que $x \in U$ se cumple que $(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha) \cap U \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in I} (A_\alpha \cap U) \neq \emptyset$, es decir que $U \cap A_\alpha \neq \emptyset$, para todo $\alpha \in I$, luego como $U \in \tau$ fue arbitrario, se sigue que $x \in \overline{A_\alpha}$ para todo $\alpha \in I$. Así $x \in \bigcap_{\alpha \in I} \overline{A_\alpha}$. ■

Ejemplo 1.1.7

Considere al espacio topológico (\mathbb{R}, τ_u) . Tomemos

1. $A =]0, 1] \cup \{9\}$. Tenemos que $\overline{A} = [0, 1] \cup \{9\}$, $A' = [0, 1]$, por lo cual no podemos relacionar (al menos de forma directa) a A junto con su A' (uno no está contenido dentro del otro).
2. Sea $n \in \mathbb{N}$, defina $A_n = [\frac{1}{n}, 1]$. Se tiene que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n} =]0, 1]$$

y,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n =]0, 1] \Rightarrow \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n} = [0, 1]$$

es decir que $\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n} \not\subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}$.

3. Considere $X = \{a, b\}$, tomemos al espacio topológico $(X, \tau = \{X, \emptyset, \{a\}\})$. Si $A = \{a\}$ y $B = \{b\}$, entonces $\overset{\circ}{A} = \{a\}$, $\overset{\circ}{B} = \emptyset$, $\overline{A} = X$, $\overline{B} = B$. Luego $\widehat{\overline{A \cup B}} \not\subseteq \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$.
Además $A \cap B = \emptyset$, $\overline{A \cap B} = \emptyset$. Por ende, $\overline{A} \cap \overline{B} \not\subseteq \overline{A \cap B}$.

Ejercicio 1.1.3

Considere (\mathbb{R}, τ_u) . Encuentre $\overset{\circ}{\mathbb{N}}$, $\overline{\mathbb{N}}$, \mathbb{N}' , $\text{Fr}(\mathbb{N})$.

Solución:

□

Ejercicio 1.1.4

Considere (\mathbb{R}, τ_I) , (\mathbb{R}, τ_D) y (\mathbb{R}, τ_{cf}) . Encuentre en cada uno de los espacios anteriores $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}$, $\overline{\mathbb{Z}}$, \mathbb{Z}' , $\text{Fr}(\mathbb{Z})$.

Solución:

□

Definición 1.1.9

Sea (X, τ) un espacio topológico. Se dice que el espacio (X, τ) es de **Hausdorff** si para todo $x_1, x_2 \in X$ distintos existen $U_1, U_2 \in \tau$ tales que $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Ejemplo 1.1.8

Considere (X, τ) donde $X = \{1, 2\}$ y $\tau = \{X, \emptyset, \{1\}\}$, entonces (X, τ) no es de Hausdorff.

Ejemplo 1.1.9

(\mathbb{R}, τ_I) no es de Hausdorff (cuando el espacio tiene más de un elemento, esto se sigue cumpliendo).

Ejemplo 1.1.10

Sea (X, d) un espacio métrico y consideremos al espacio topológico (X, τ_d) . Este espacio es de Hausdorff.

Ejemplo 1.1.11

Sea (X, d) es espacio métrico tal que la métrica de él está definida como:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq y \\ 1 & \text{si } x = y \end{cases}$$

dado $p \in X$ considere $B_d(p, 1) = \{p\}$. Entonces para todo $p \in X$, $\{p\} \in \tau_D \Rightarrow \forall A \subseteq X, A \in \tau_d$, es decir que $\tau_d = \tau_D$.

Definición 1.1.10

Un espacio topológico (X, τ) se dice **metrizable** si existe una métrica $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tau_d = \tau$.

Proposición 1.1.5

Si (X, τ) es un espacio metrizable, entonces (X, τ) es un espacio de Hausdorff.

Demostración:

Es inmediata de la definición de espacio metrizable y del ejemplo 1.1.10. ■

Ejemplo 1.1.12

Considere $X = \{1, 2\}$, si tomamos al espacio topológico $(X, \tau = \{X, \emptyset, \{2\}\})$. Este espacio no es metrizable por no ser de Hausdorff.

Ejemplo 1.1.13

Considere (X, τ_D) . Este espacio es metrizable tomando la métrica discreta.

1.2. Bases y sub-bases de topología

Definición 1.2.1

Sea (X, τ) un espacio topológico. Una subcolección \mathcal{B} de τ es una **base para la topología** τ si todo $U \in \tau$ puede escribirse como unión arbitraria de elementos de \mathcal{B} .

Si \mathcal{B} es una base para τ , a sus elementos los llamaremos **básicos**.

Observación 1.2.1

Cualquier topología es una base para si misma.

Considere al espacio topológico (X, τ) . Una base \mathcal{B} de τ cumple que

1. $\mathcal{B} \subseteq \tau$.
2. Si $U \in \tau$ entonces existe $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $U = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$.

¿Qué pretendemos con esta definición?

Ejemplo 1.2.1

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{M} = \{\{p\} \mid p \in X\}$. Esta es una base para τ_D definida sobre X .

Básicamente lo que se pretende es describir a todos los elementos de la topología mediante un conjunto más pequeño de elementos (esto permite que sea más fácil de manejar y que las propiedades deseadas para los elementos de la topología se sigan cumpliendo).

Ejemplo 1.2.2

Sea (X, d) un espacio métrico y sea τ_d la topología generada por la métrica d . Entonces, las colecciones:

$$\mathcal{B}_1 = \{B_d(x, r) \mid x \in X, r \in \mathbb{R}^+\}$$

es una base para la topología generada por τ_d . Además,

$$\mathcal{B}_2 = \{B_d(x, q) \mid x \in X, q \in \mathbb{Q}^+\}$$

es otra base. Más aún:

$$\mathcal{B}_3 = \left\{ B_d\left(x, \frac{1}{n}\right) \mid x \in X, n \in \mathbb{N} \right\}$$

es otra base.

Ejemplo 1.2.3

Sea $X = \{a, b, c, d\}$ y $\kappa = \{\{a, b, c\}, \{c, d\}\}$. Afirmamos que no existe una topología definida sobre X tal que κ sea base de ella.

En efecto, suponga que τ es una topología sobre X y κ es una base para τ , entonces $\{a, b, c\}$ y $\{c, d\}$ están en τ , luego su intersección $\{c\} \in \tau$. Pero, $\{c\}$ no puede ser escrito como unión de elementos de κ .

Proposición 1.2.1

Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $\mathcal{B} \subseteq \tau$. Entonces, \mathcal{B} es una base para la topología τ si y sólo si dados $U \in \tau$ y $u \in U$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $u \in B \subseteq U$.

Demostración:

Probaremos la doble implicación.

\Rightarrow): Suponga que \mathcal{B} es una base para la topología τ . Sea $U \in \tau$ y $u \in U$. Como \mathcal{B} es una base entonces existe una subcolección $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $U = \bigcup \mathcal{C}$, luego existe $C_\alpha \in \mathcal{C}$ tal que $u \in C_\alpha$. Por ende $u \in C_\alpha \subseteq U$. Tomando $B = C_\alpha \in \mathcal{B}$ se tiene el resultado.

\Leftarrow): Suponga que se cumple la tesis. Ya se tiene que $\mathcal{B} \subseteq \tau$. Sea entonces $U \in \tau$. Para cada $x \in U$ existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq U$, luego la colección:

$$\{U_x \in \mathcal{B} \mid x \in U\}$$

es una subcolección de \mathcal{B} tal que $\bigcup_{x \in U} U_x = U$. Por tanto, \mathcal{B} es una base de τ . ■

Corolario 1.2.1

Sea (X, τ) un espacio topológico y sea \mathcal{B} una base de la topología τ . Sea $U \subseteq X$, entonces U es abierto en τ si y sólo si dados $x \in U$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$.

Demostración:

Es inmediato de la proposición anterior. ■