

Lista Ejercicios Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

10 de junio de 2024

Índice general

1. Lista 4

2

Capítulo 1

Lista 4

Ejercicio 1.0.1

Haga lo siguiente:

- i. Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Defina $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$P(x_1, \dots, x_n) = e^{-\sum_{k=1}^n |x_k|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Fije $\nu \in \mathbb{N}$, **demuestre** la fórmula:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x) P\left(\frac{x}{\nu}\right) dx = (2\nu)^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{(1 + \nu^2 x_1^2) \cdots (1 + \nu^2 x_n^2)} dx_1 \cdots dx_n$$

- ii. **Deduzca** que si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \cap \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ y $\mathcal{F}f \geq 0$, entonces $\mathcal{F}f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

Sugerencia. Aplique el teorema de Beppo-Levi.

Demostración:

De (i): Defina $g(x) = P\left(\frac{x}{\nu}\right)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Veamos que $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} P\left(\frac{x}{\nu}\right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} P\left(\frac{x_1}{\nu}, \dots, \frac{x_n}{\nu}\right) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{k=1}^n \left|\frac{x_k}{\nu}\right|} dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{\nu} \sum_{k=1}^n |x_k|} dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x_1|}{\nu}} \cdots e^{-\frac{|x_n|}{\nu}} dx_1 \cdots dx_n \\ &= \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x_1|}{\nu}} dx_1 \right) \cdots \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x_n|}{\nu}} dx_n \right)}_{n\text{-veces}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|t|}{\nu}} dt \right)^n \\ &< \infty \end{aligned}$$

Usando Fubini para funciones medibles no negativas. Por tanto, por el Teorema de transferencia se sigue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x) P\left(\frac{x}{\nu}\right) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x) g(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \mathcal{F}g(x) dx \end{aligned}$$

Calculemos $\mathcal{F}g(x)$. Como $g(x) = P\left(\frac{x}{\nu}\right)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\mathcal{F}g(x) = \nu^n \mathcal{F}P(\nu x)$$

(por una proposición), donde

$$\begin{aligned} \mathcal{F}P(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y \rangle} P(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i \sum_{k=1}^n x_k y_k} e^{-\sum_{k=1}^n |y_k|} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{k=1}^n (|y_k| + i x_k y_k)} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y_1| - i x_1 y_1} \cdots e^{-|y_n| - i x_n y_n} dy_1 \cdots dy_n \\ &= \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y_1| - i x_1 y_1} dy_1 \right) \cdots \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y_n| - i x_n y_n} dy_n \right)}_{n\text{-veces}} \\ &= \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t| - i x_1 t} dt \right) \cdots \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t| - i x_n t} dt \right)}_{n\text{-veces}} \\ &= \mathcal{F}h(x_1) \cdots \mathcal{F}h(x_n) \end{aligned}$$

donde $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es la función tal que $t \mapsto e^{-|t|}$ y, se sabe que

$$\mathcal{F}h(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}P(x) &= \frac{2^n}{(1+x_1^2) \cdots (1+x_n^2)} \\ \Rightarrow \mathcal{F}P(\nu x) &= \frac{2^n}{(1+\nu^2 x_1^2) \cdots (1+\nu^2 x_n^2)} \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x) P\left(\frac{x}{\nu}\right) dx &= \nu^n \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \mathcal{F}P(\nu x) dx \\ &= \nu^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2^n f(x_1, \dots, x_n)}{(1+\nu^2 x_1^2) \cdots (1+\nu^2 x_n^2)} dx_1 \cdots dx_n \\ &= (2\nu)^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{(1+\nu^2 x_1^2) \cdots (1+\nu^2 x_n^2)} dx_1 \cdots dx_n \end{aligned}$$

De (ii): Para cada $\nu \in \mathbb{N}$ defina la función $g_\nu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ como sigue:

$$g_\nu(x) = \mathcal{F}f(x) P\left(\frac{x}{\nu}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Esta es una sucesión creciente de funciones en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, pues si $\nu \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\nu+1} \sum_{k=1}^n |x_k| &\leq \frac{1}{\nu} \sum_{k=1}^n |x_k|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\
\Rightarrow -\frac{1}{\nu} \sum_{k=1}^n |x_k| &\leq -\frac{1}{\nu+1} \sum_{k=1}^n |x_k|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\
\Rightarrow e^{\frac{1}{\nu} \sum_{k=1}^n |x_k|} &\leq e^{-\frac{1}{\nu+1} \sum_{k=1}^n |x_k|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\
\Rightarrow P\left(\frac{x}{\nu}\right) &\leq P\left(\frac{x}{\nu+1}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\
\Rightarrow \mathcal{F}f(x)P\left(\frac{x}{\nu}\right) &\leq \mathcal{F}f(x)P\left(\frac{x}{\nu+1}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\
\Rightarrow g_\nu &\leq g_{\nu+1}
\end{aligned}$$

pues, $\mathcal{F}f \geq 0$. Además, como $f \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, entonces

$$f \leq \mathcal{N}_\infty(f) \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n$$

luego,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} g_\nu(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x)P\left(\frac{x}{\nu}\right) dx \\
&= (2\nu)^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{(1 + \nu^2 x_1^2) \cdots (1 + \nu^2 x_n^2)} dx_1 \cdots dx_n
\end{aligned}$$

Hagamos el cambio de variable $(y_1, \dots, y_n) = (\frac{x_1}{\nu}, \dots, \frac{x_n}{\nu})$, se tiene que

$$\begin{aligned}
(2\nu)^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{(1 + \nu^2 x_1^2) \cdots (1 + \nu^2 x_n^2)} dx_1 \cdots dx_n &= (2\nu)^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\nu y_1, \dots, \nu y_n)}{(1 + y_1^2) \cdots (1 + y_n^2)} \frac{dy_1 \cdots dy_n}{\nu^n} \\
&= 2^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\nu y_1, \dots, \nu y_n)}{(1 + y_1^2) \cdots (1 + y_n^2)} dy_1 \cdots dy_n \\
&= 2^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathcal{N}_\infty(f)}{(1 + y_1^2) \cdots (1 + y_n^2)} dy_1 \cdots dy_n \\
&= 2^n \mathcal{N}_\infty(f) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dy_1 \cdots dy_n}{(1 + y_1^2) \cdots (1 + y_n^2)} \\
\Rightarrow \left| \int_{\mathbb{R}^n} g_\nu(x) \right| &= 2^n \mathcal{N}_\infty(f) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dy_1 \cdots dy_n}{(1 + y_1^2) \cdots (1 + y_n^2)}
\end{aligned}$$

pues $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dy_1 \cdots dy_n}{(1+y_1^2) \cdots (1+y_n^2)} < \infty$ y $\int_{\mathbb{R}^n} g_\nu(x) \geq 0$. Por tanto, por Beppo-Levi se sigue que existe una función $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ tal que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} g_\nu = g \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n$$

Pero, también se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{\nu \rightarrow \infty} g_\nu(x) &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{F}f(x)P\left(\frac{x}{\nu}\right) \\
&= \mathcal{F}f(x) \lim_{\nu \rightarrow \infty} P\left(\frac{x}{\nu}\right) \\
&= \mathcal{F}f(x)P(0, \dots, 0) \\
&= \mathcal{F}f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

Entonces $\mathcal{F}f = g$ c.t.p. en \mathbb{R}^n , luego $\mathcal{F}f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Más aún,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x) dx &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} 2^n \mathcal{N}_\infty(f) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dy_1 \cdots dy_n}{(1 + y_1^2) \cdots (1 + y_n^2)} \\
&= 2^n \mathcal{N}_\infty(f) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dy_1 \cdots dy_n}{(1 + y_1^2) \cdots (1 + y_n^2)}
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.0.2 (Problema 2 Lista 6 Análisis Matemático II)

Pruebe que si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, entonces

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f \right| = \int_{\mathbb{R}^n} |f|$$

si y sólo si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ fijo tal que $f = e^{i\alpha} |f|$ c.t.p. en \mathbb{R}^n .

Sugerencia. Suponiendo que $\left| \int_{\mathbb{R}^n} f \right| = \int_{\mathbb{R}^n} |f|$, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} f = e^{i\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f|$. Escriba

$$e^{-i\alpha} f = g + ih$$

donde g y h son funciones reales.

Demostración:

Ejercicio 1.0.3

Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Se supone que $f(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. **Pruebe** que si $x \neq 0$, entonces

$$\mathcal{F}f(0) > |\mathcal{F}f(x)|$$

Sugerencia. Una vez que ha demostrado $|\mathcal{F}f(x)| \leq \mathcal{F}f(0)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, Para demostrar la desigualdad estricta para $x \neq 0$ proceda por reducción al absurdo y use el Problema 2 de la Lista 6 de Análisis Matemático II.

Demostración:

Notemos que como $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene en particular que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Primero probaremos que

$$\mathcal{F}f(0) \geq |\mathcal{F}f(x)|$$

es decir:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle 0|y\rangle} f(y) dy &\geq \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y) dy \right| \\ \iff \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy &\geq \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y) dy \right| \\ \iff \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy &\geq \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y) dy \right| \end{aligned}$$

pues $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Veamos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y) dy \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-i\langle x|y\rangle} f(y)| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-i\langle x|y\rangle}| |f(y)| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy \end{aligned} \tag{1.1}$$

lo que prueba el resultado. Para la desigualdad estricta suponga que existe $x \in \mathbb{R}^n$ no cero tal que

$$\mathcal{F}f(x) = \mathcal{F}f(0)$$

esto es

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y \rangle} f(y) dy \right| &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-i\langle x|y \rangle} f(y)| dy \end{aligned}$$

Por el ejercicio anterior existe $\alpha \in \mathbb{R}$ fijo tal que

$$e^{-i\langle x|y \rangle} f(y) = e^{i\alpha} |f(y)| = e^{i\alpha} f(y)$$

para casi todo $y \in \mathbb{R}^n$. En particular, tenemos que

$$f(y) (e^{-i\langle x|y \rangle} - e^{i\alpha}) = 0$$

para casi todo $y \in \mathbb{R}^n$. Como $f(y) > 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$e^{-i\langle x|y \rangle} - e^{i\alpha} = 0$$

nuevamente para casi todo $y \in \mathbb{R}^n$. Como las dos funciones involucradas son continuas y coinciden c.t.p. en \mathbb{R}^n , debe tenerse pues que

$$e^{-i\langle x|y \rangle} = e^{i\alpha}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

lo cual ocurre si y sólo si

$$e^{i(\langle x|y \rangle + \alpha)} = 1, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

es decir que

$$\langle x|y \rangle + \alpha = 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

como $x \neq 0$ en particular se tiene que

$$\langle x|x \rangle = -\alpha$$

y, además (tomando $y = 2x$):

$$2\langle x|x \rangle = -\alpha$$

pero esto sólo puede suceder si $\langle x|x \rangle = 0$, es decir que $x = 0_{\#c}$. Luego entonces

$$|\mathcal{F}f(x)| < \mathcal{F}f(0)$$

■

Ejercicio 1.0.4

Haga lo siguiente:

- Sean $a > 0$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. **Pruebe** que la función $x \mapsto (\cos \lambda x)/(x^2 + a^2)$ es integrable en $[0, \infty[$. **Muestre** que si $\lambda \neq 0$, la función $x \mapsto (x \sin \lambda x)/(x^2 + a^2)$ no es integrable en $[0, \infty[$, pero existe la integral impropia

$$\int_0^{\rightarrow \infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2} dx$$

Sugerencia. Muestre que

$$\left| \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2} \right| \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \left| \frac{\sin \lambda x}{x} \right|$$

Para probar la existencia de la integral impropia use los criterios de Abel.

- Recuerde que la función $x \mapsto (2a)/(x^2 + a^2)$ es la transformada de Fourier de la función $x \mapsto e^{-a|x|}$. Usando el teorema de inversión de Fourier, **demuestre** que

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-a|\lambda|}$$

iii. Usando el inciso (ii), calcule la integral impropia

$$\int_0^{\rightarrow\infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2} dx$$

Sugerencia. Para $\lambda \neq 0$ defina

$$\Phi(\lambda) = \int_0^{\rightarrow\infty} \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} dx$$

Calcule $\Phi'(\lambda)$ primero suponiendo $\lambda > \lambda_0$, donde $\lambda_0 > 0$ es arbitrario fijo, de forma análoga para $\lambda < 0$ y finalmente para $\lambda = 0$.

Demostración:

De (i): Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ defina

$$f(x) = \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2}$$

Afirmamos que f es integrable en $[0, \infty[$. Para ello, veamos que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |f| &= \int_0^\infty \frac{|\cos \lambda x|}{x^2 + a^2} dx \\ &\leq \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + a^2} \end{aligned}$$

donde la función de la derecha es integrable en tal intervalo. Por tanto, $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Sea ahora $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \neq 0$. Afirmamos que la función

$$g(x) = \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ no es integrable en $[0, \infty[$. En efecto, veamos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2} \right|}{\left| \frac{\sin \lambda x}{x} \right|} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{x^2}{x^2 + a^2} \right| \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{1 + \frac{a^2}{x^2}} \right| \\ &= \frac{1}{1 + 0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

por tanto,

$$\left| \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2} \right| \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \left| \frac{\sin \lambda x}{x} \right|$$

Luego entonces, por la proposición 8.53 Análisis Matemático II:

$$\left| \frac{\sin \lambda x}{x} \right| \underset{x \rightarrow \infty}{=} O \left(\left| \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2} \right| \right)$$

donde la función $x \mapsto \left| \frac{\sin \lambda x}{x} \right|$ no es integrable en $[0, \infty[$, luego tampoco puede serlo g (siendo que ambas funciones son integrables en todo subconjunto acotado de \mathbb{R}).

Veamos que si existe la integral impropia

$$\int_0^{\rightarrow\infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2}$$

En efecto, defina para cada $x \in [0, \infty[$ las funciones:

$$G(x) = \int_0^x \sin \lambda x \, dx \quad \text{y} \quad f(x) = \frac{x}{x^2 + a^2}$$

se tienen dos cosas:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ (es claro de la definición de f).
- G es una función acotada en $[0, \infty[$, pues para cada $x \in [0, \infty[$:

$$\begin{aligned} |G(x)| &= \left| \int_0^x \sin \lambda x \, dx \right|, \text{ haciendo el cambio de variable } u = \lambda x \\ &= \left| \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^{\lambda x} \sin u \, du \right| \\ &= \left| \frac{1}{\lambda} \cdot \left[-\cos u \right]_0^{\lambda x} \right| \\ &= \left| \frac{1}{\lambda} \cdot [-\cos \lambda x + \cos 0] \right| \\ &\leq \frac{2}{|\lambda|} \end{aligned}$$

Por tanto, del primer criterio de Abel se sigue que la integral impropia

$$\int_0^{\rightarrow \infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2}$$

es convergente.

De (ii): Sea $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$h(x) = e^{-a|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

se sabe por un ejercicio de las notas que

$$\mathcal{F}h(x) = \frac{2a}{x^2 + a^2}$$

la función h cumple la condición de Dini en todo punto $\lambda \in \mathbb{R} \neq 0$ (también lo hace en cero, pero no es relevante), por lo cual se tiene que

$$h(\lambda) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R e^{i\lambda x} \mathcal{F}h(x) \, dx$$

es decir,

$$\begin{aligned} e^{-a|\lambda|} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R e^{i\lambda x} \mathcal{F}h(x) \, dx \\ &= \frac{2a}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{-R}^R \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx + i \int_{-R}^R \frac{\sin \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx \right] \\ &= \frac{a}{\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{-R}^0 \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx + \int_0^R \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx + i \int_{-R}^0 \frac{\sin \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx + i \int_0^R \frac{\sin \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx \right] \\ &= \frac{a}{\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_0^R \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx + \int_0^R \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx - i \int_0^R \frac{\sin \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx + i \int_0^R \frac{\sin \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx \right] \\ &= \frac{2a}{\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx \\ &= \frac{2a}{\pi} \int_0^{\rightarrow \infty} \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} \, dx \end{aligned}$$

pero, de (i) se sabe que $x \mapsto \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2}$ es integrable en $[0, \infty[$, por tanto coincide su valor con el de la integral impropia, así:

$$\begin{aligned} e^{-a|\lambda|} &= \frac{2a}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} dx \\ \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} dx &= \frac{\pi}{2a} e^{-a|\lambda|} \end{aligned}$$

De (iii): Por la parte anterior, para todo $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tiene que

$$\Phi(\lambda) = \int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-a|\lambda|} = \frac{\pi}{2a} e^{-a|\lambda|}$$

Si todo funciona bien, por el Teorema de derivación para funciones definidas por integrales impropias, se tendría para $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} - \int_0^{\rightarrow \infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2} dx &= \Phi'(\lambda) \\ &= -\frac{\pi}{2} e^{-a\lambda} \\ &= -\frac{\pi}{2} e^{-a|\lambda|} \\ \Rightarrow \int_0^{\rightarrow \infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2} dx &= \frac{\pi}{2} e^{-a|\lambda|} \end{aligned}$$

y, para $\lambda < 0$:

$$\begin{aligned} - \int_0^{\rightarrow \infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2} dx &= \Phi'(\lambda) \\ &= \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\pi}{2a} e^{-a(-\lambda)} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} e^{a\lambda} \\ &= \frac{\pi}{2} e^{-a|\lambda|} \\ \Rightarrow \int_0^{\rightarrow \infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2} dx &= -\frac{\pi}{2} e^{-a|\lambda|} \end{aligned}$$

es decir que

$$\int_0^{\rightarrow \infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2} dx = \text{Sgn}(\lambda) \cdot \frac{\pi}{2} e^{-a|\lambda|}$$

■

Ejercicio 1.0.5

Sea H una matriz simétrica real $n \times n$ positiva definida, es decir, la forma cuadrática $\langle x | Hx \rangle$ sobre \mathbb{R}^n es positiva definida. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la función

$$f(x) = e^{-\langle Hx | x \rangle}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Demuestre que f es integrable y que

$$\mathcal{F}f(x) = \frac{\pi^{n/2}}{(\det H)^{1/2}} e^{-\frac{1}{4} \langle H^{-1}x | x \rangle}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Sugerencia. f es medible. Para ver que es integrable, pruebe que $\langle Hx | x \rangle \geq m \|x\|^2$, donde

$$m = \min_{x \in S} \{ \langle Hx | x \rangle \} > 0$$

con $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$. Se sabe de álgebra que existe una matriz ortogonal U tal que $U^{-1}HU = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, donde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son números estrictamente positivos. En la integral $\mathcal{F}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} e^{-\langle Hy|y\rangle} dy$ haga el cambio de variable $y = Uz$ siendo tal que $|\det U| = 1$, $\langle Ur|Us\rangle = \langle r|s\rangle$ (y lo análogo para U^{-1}) y observe que $(1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_n) = U^{-1}H^{-1}U$.

Demostración:

Veamos que f es medible (más aún, es continua). En efecto, considere la matriz H dada por

$$H = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \dots & h_{1,n-1} & h_{1,n} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \dots & h_{2,n-1} & h_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{n,1} & h_{n,2} & \dots & h_{n,n-1} & h_{n,n} \end{bmatrix}$$

Se tiene entonces que para cada $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \langle x|Hx\rangle &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^n x_k y_k \end{aligned}$$

donde

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \dots & h_{1,n-1} & h_{1,n} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \dots & h_{2,n-1} & h_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{n,1} & h_{n,2} & \dots & h_{n,n-1} & h_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

es decir que

$$y_k = \sum_{i=1}^n h_{k,i} x_i$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \langle x|Hx\rangle &= \sum_{k=1}^n x_k \sum_{i=1}^n h_{k,i} x_i \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n x_k x_i h_{k,i} \end{aligned}$$

siendo la aplicación $x \mapsto \langle x|Hx\rangle$ una aplicación polinomial de n -variables, luego es continua. Así, la composición con $t \mapsto e^{-t}$ es continua, es decir que la función f es continua en \mathbb{R}^n , luego medible.

Ahora, sea ahora

$$m = \inf_{x \in S} \{\langle Hx|x\rangle\}$$

donde $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$. Afirmamos que $m > 0$. En el caso que $m = 0$, como la función $x \mapsto \langle x|Hx\rangle$ es continua de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} , se tendría que alcanzaría su máximo y mínimo, luego existiría $x_0 \in S$ tal que

$$\langle x_0|Hx_0\rangle = 0$$

lo cual contradeciría el hecho de que H es positiva definida. Por tanto, $m > 0$. Más aún,

$$m = \inf_{x \in S} \{\langle Hx|x\rangle\} = \min_{x \in S} \{\langle Hx|x\rangle\}$$

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ no cero, se tiene que

$$\begin{aligned}\langle Hx|x \rangle &= \langle H \left(\|x\| \cdot \frac{x}{\|x\|} \right) \|x\| \cdot \frac{x}{\|x\|} \rangle \\ &= \|x\|^2 \langle H \left(\frac{x}{\|x\|} \right) | \frac{x}{\|x\|} \rangle \\ &\geq m\|x\|^2 \\ \Rightarrow -\langle Hx|x \rangle &\leq -m\|x\|^2\end{aligned}$$

Considere la función $x \mapsto e^{-m\|x\|^2}$ de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} . Se tiene que

$$0 \leq f(x) \leq e^{-m\|x\|^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

siendo $x \mapsto e^{-m\|x\|^2}$ integrable en \mathbb{R}^n , luego f lo es en \mathbb{R}^n , luego la transformada de Fourier $\mathcal{F}f(\cdot)$ está definida en todo \mathbb{R}^n .

Sea $x \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{F}f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y \rangle} f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y \rangle} \cdot e^{-\langle Hy|y \rangle} dy\end{aligned}$$

Se sabe por un resultado de álgebra lineal que existen una matriz D $n \times n$ diagonal con entradas en la diagonal positivas, y una matriz ortogonal U (también $n \times n$) con $|\det U| = 1$ tal que

$$U^{-1}HU = D \Rightarrow HU = UD$$

Hagáse el cambio de variable $y = Uz$, se tiene en la integral anterior que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y \rangle} \cdot e^{-\langle Hy|y \rangle} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|Uz \rangle} \cdot e^{-\langle HUZ|Uz \rangle} dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|Uz \rangle} \cdot e^{-\langle U Dz|Uz \rangle} dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|Uz \rangle} \cdot e^{-\langle Dz|z \rangle} dz\end{aligned}$$

■

Ejercicio 1.0.6

Recuerde que si $f = \chi_{[-a,a]}$, entonces

$$\mathcal{F}f(x) = \frac{2 \sin ax}{x}, \quad \forall x \neq 0$$

Deduzca la fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin ax}{x} \right)^2 dx = \pi a$$

Demostración:

Se sabe que la función $x \mapsto \left(\frac{\sin ax}{x}\right)^2$ es integrable en \mathbb{R} . Observemos ahora que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin ax}{x}\right)^2 dx &= \frac{1}{4} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(x) \cdot \mathcal{F}f(x) dx \\ &= \frac{1}{4} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} f(y) dy \\ &= \frac{1}{4} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} \chi_{[-a,a]}(y) dy \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx \int_{-a}^a e^{-ixy} dy \end{aligned}$$

considere la función $(x, y) \mapsto e^{-ixy} \cdot \frac{\sin ax}{x}$. Esta función es integrable en $\mathbb{R} \times [-a, a]$. En efecto, basta con ver que la función

$$(x, y) \mapsto \frac{e^{-ixy}}{x}$$

lo es en $[0, \infty[\times [-a, a]$.

Luego por Fubini se sigue que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx \int_{-a}^a e^{-ixy} dy &= \int_{-a}^a \frac{\sin ax}{x} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} dx \\ &= \int_{-a}^a dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} \cdot \frac{\sin ax}{x} dx \\ &= \int_{-a}^a dy \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-ixy} \cdot \frac{\sin ax}{x} dx \\ &= \int_{-a}^a dx \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-ixy} \cdot \frac{\sin ay}{y} dy \\ &\Rightarrow 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin ax}{x}\right)^2 dx = \int_{-a}^a dx \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-ixy} \cdot \frac{\sin ay}{y} dy \end{aligned}$$

pues, la función $x \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} \cdot \frac{\sin ay}{y} dy$ definida c.t.p. en $[-a, a]$ coincide con su integral impropia.

Sea $x \in \mathbb{R}$. Se tiene que f posee derivadas laterales derecha e izquierda en x , por lo cual del teorema de inversión de Fourier en \mathbb{R} se sigue que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{ixy} \mathcal{F}f(y) dy \\ &\Rightarrow \chi_{[-a,a]}(-x) = \frac{1}{\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-ixy} \cdot \frac{\sin ay}{y} dy \\ &\Rightarrow \pi \cdot \chi_{[-a,a]}(-x) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-ixy} \cdot \frac{\sin ay}{y} dy \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \pi \int_{-a}^a \chi_{[-a,a]}(-x) dx = \int_{-a}^a dx \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-ixy} \cdot \frac{\sin ay}{y} dy \\ &\Rightarrow \pi \int_{-a}^a dx = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin ax}{x}\right)^2 dx \\ &\Rightarrow 2\pi a = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin ax}{x}\right)^2 dx \\ &\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin ax}{x}\right)^2 dx = \pi a \end{aligned}$$

lo que prueba el resultado. ■

Ejercicio 1.0.7

Haga lo siguiente:

- i. Sea $f(x) = \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) \chi_{[-a,a]}(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. **Pruebe** que

$$\mathcal{F}f(x) = a \left(\frac{\sin \frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}} \right)^2$$

- ii. Usando $\mathcal{F}_2 f$ **muestre** la fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin ax}{x} \right)^4 dx = \frac{2}{3} \pi a^3$$

- iii. **Calcule** la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin ax}{x} \right)^3 dx$$

Sugerencia. Escriba $f(x) = \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) \chi_{[-a,a]}(x)$ y $g(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Aplique la identidad de Parseval

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_2 f \mathcal{F}_2 g = \langle \mathcal{F}_2 f | \mathcal{F}_2 g \rangle = \langle f | g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f g$$

para deducir el resultado.

Solución:

De (i): Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} f(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} \left(1 - \frac{|y|}{a}\right) \chi_{[-a,a]}(y) dy \\ &= \int_{-a}^a e^{-ixy} \left(1 - \frac{|y|}{a}\right) dy \\ &= \int_{-a}^0 e^{-ixy} \left(1 - \frac{|y|}{a}\right) dy + \int_0^a e^{-ixy} \left(1 - \frac{|y|}{a}\right) dy \\ &= \int_{-a}^0 e^{-ixy} \left(1 + \frac{y}{a}\right) dy + \int_0^a e^{-ixy} \left(1 - \frac{y}{a}\right) dy \\ &= - \int_a^0 e^{ixu} \left(1 - \frac{u}{a}\right) du + \int_0^a e^{-ixy} \left(1 - \frac{y}{a}\right) dy \\ &= \int_0^a e^{ixy} \left(1 - \frac{y}{a}\right) dy + \int_0^a e^{-ixy} \left(1 - \frac{y}{a}\right) dy \\ &= \int_0^a (e^{ixy} + e^{-ixy}) \cdot \left(1 - \frac{y}{a}\right) dy \\ &= 2 \int_0^a \left(1 - \frac{y}{a}\right) \cos xy dy \\ &= 2 \left[\int_0^a \cos xy dy - \frac{1}{a} \int_0^a y \cos xy dy \right] \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\int_0^a \cos xy \, dy &= \frac{1}{x} \int_0^{ax} \cos u \, du \\ &= \frac{1}{x} \sin u \Big|_0^{ax} \\ &= \frac{\sin ax}{x}\end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}\int_0^a y \cos xy \, dy &= \int_0^{ax} \frac{u}{x} \cos u \frac{du}{x} \\ &= \frac{1}{x^2} \int_0^{ax} u \cos u \, du \\ &= \frac{1}{x^2} [ax \sin ax + \cos ax - 1]\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}f(x) &= 2 \left[\int_0^a \cos xy \, dy - \frac{1}{a} \int_0^a y \cos xy \, dy \right] \\ &= 2 \left[\frac{\sin ax}{x} - \frac{ax \sin ax}{ax^2} - \frac{\cos ax}{ax^2} + \frac{1}{ax^2} \right] \\ &= 2 \left[\frac{\sin ax}{x} - \frac{\sin ax}{x} + \frac{1 - \cos ax}{ax^2} \right] \\ &= \frac{1 - \cos ax}{\frac{ax^2}{2}} \\ &= a \cdot \frac{2 \sin^2 \left(\frac{ax}{2} \right)}{\frac{a^2 x^2}{2}} \\ &= a \cdot \frac{\sin^2 \frac{ax}{2}}{\frac{a^2 x^2}{4}} \\ &= a \cdot \left(\frac{\sin \frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}} \right)^2\end{aligned}$$

De (ii):

□

Ejercicio 1.0.8

Sea $n \geq 2$ y $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la función $x \mapsto r(x) = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Sea $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ una función tal que $f \circ r$ es integrable en \mathbb{R}^n .

- i. **Pruebe** que la transformada de Fourier $\mathcal{F}(f \circ r)$ es una función radial.

Sugerencia. Si U es una matriz ortogonal $n \times n$, se tiene que $\mathcal{F}(f \circ r)(Ux) = \mathcal{F}(f \circ r)(x)$. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que $\|x\| = \|y\|$, siempre existe una matriz ortogonal U tal que $Ux = y$.

- ii. **Muestre** que se cumple la **fórmula de Bochner**

$$\mathcal{F}(f \circ r)(x) = 2(n-1)\omega_{n-1} \int_0^\infty v_n(u(\|x\|))f(u)u^{n-1} \, du, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

donde ω_{n-1} es el volumen de la bola euclídeana de radio uno en \mathbb{R}^{n-1} y v_n se define por la

fórmula

$$v_n(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t \cos \theta) \sin^{n-2} \theta \, d\theta$$

Sugerencia. Según el inciso (i),

$$\mathcal{F}(f \circ r)(x) = \mathcal{F}(f \circ r)(\|x\|, 0, \dots, 0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\|y\|) e^{-i\|x\|y_1} \, dy_1 \cdots dy_n$$

Transforme esta integral por el Teorema de Fubini y exprese la integral con respecto a y_2, \dots, y_n como una integral simple. La doble integral resultante se transforma a coordenadas polares.

Solución:

□

Ejercicio 1.0.9

Haga lo siguiente:

- i. Sea $h : [0, \infty[\rightarrow 0\mathbb{C}$ una función integrable en $[0, \infty[$. Sea $a > 0$, **demuestre** que existe la integral impropia

$$\int_a^{\rightarrow \infty} \frac{dx}{x} \int_0^\infty h(y) \sin xy \, dy$$

Sugerencia. Justifique la inversión del orden de las integraciones.

- ii. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e}x & \text{si } |x| < e \\ \frac{\text{Sgn}(x)}{\log|x|} & \text{si } |x| \geq e \end{cases}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Muestre que, para $a > 0$ no existe la integral impropia

$$\int_a^{\rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \, dx$$

De este hecho y del inciso (i) **deduzca** que no existe $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tal que $f = \mathcal{F}g$. Así pues, la transformación de Fourier no es una aplicación suprayectiva de $L_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ en $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Solución:

□

Ejercicio 1.0.10

Haga lo siguiente:

- i. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función integrable en \mathbb{R} . Se supone que existe una función $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ localmente integrable en \mathbb{R} tal que

$$f(x) = f(0) + \int_0^x \varphi, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad |\varphi(x)| \underset{|x| \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{1}{|x|^m}\right)$$

donde $m > 2$. **Pruebe** que

$$|f(x)| \underset{|x| \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{1}{x^{m-1}}\right)$$

y que, para todo $x \in \mathbb{R}$, existen las sumas

$$\Phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(x+k) \quad \text{y} \quad F(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+k)$$

siendo la convergencia absoluta y uniforme en $[-1, 1]$, luego en \mathbb{R} . **Muestre** finalmente que

$$F(x) = F(0) + \int_0^x \Phi, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

F es una función periódica de periodo uno. **Demuestre** que los coeficientes de Fourier de F respecto al sistema O.N. $(e^{2\pi i n t})_{n \in \mathbb{Z}}$ son

$$\int_0^1 F(x) e^{-2\pi i n x} dx = \mathcal{F}f(2\pi n), \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Deduzca la fórmula Sumatoria de Poisson

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}f(x+k), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Aplicando la fórmula sumatoria de Poisson a la función $x \mapsto e^{-\alpha|x|}$ para $\alpha > 0$, obtenga el desarrollo

$$\coth x = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2 \pi^2}, \quad \forall x \geq 0$$

Se define la **función theta** por

$$\Theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}, \quad \forall x > 0$$

Aplicando la fórmula sumatoria de Poisson a la función $x \mapsto e^{-\alpha x^2}$ para $\alpha > 0$, **pruebe** la identidad

$$\Theta(x) = \sqrt{\frac{1}{x}} \Theta\left(\frac{1}{x}\right), \quad \forall x > 0$$

Solución:

□

Ejercicio 1.0.11

Haga lo siguiente:

- i. Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x < 0$. Para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\Im z \leq 0$ se define

$$\mathcal{F}f(x) = \int_0^{\infty} e^{-izx} f(x) dx$$

Pruebe que esta definición tiene sentido, que $\mathcal{F}f$ es continua en el semiplano cerrado $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im z \leq 0\}$ y holomorfa en el semiplano abierto $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im z < 0\}$.

Sugerencia. El teorema de derivación de funciones definidas por integrales continúa siendo válido al sustituir el intervalo I por un abierto de \mathbb{C} .

- ii. Sean $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tales que $f(x) = g(x) = 0, \forall x < 0$. **Muestre** que para todo $z \in \mathbb{C}$ tal

que $\Im z \leq 0$ se tiene

$$\mathcal{F}(f * g)(z) = \mathcal{F}f(z)\mathcal{F}g(z)$$

- iii. Sean f, g como en el inciso (ii). Se supone además que $\mathcal{F}(f * g) = 0$ c.t.p. en \mathbb{R} . **Demuestre** que $f = 0$ c.t.p. en \mathbb{R} o bien $g = 0$ c.t.p. en \mathbb{R} .

Sugerencia. Deduzca de (i) y (ii) que $\mathcal{F}f = 0$ o bien $\mathcal{F}g = 0$.

Solución:

□

Ejercicio 1.0.12

Haga lo siguiente:

- i. Sea $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Se define para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izx - \frac{x^2}{2}} \overline{f(x)} dx$$

Pruebe que F es holomorfa en \mathbb{C} y que, para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$F^{(n)}(z) = (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-izx - \frac{x^2}{2}} \overline{f(x)} dx$$

Sugerencia. La misma que la del Problema 11.

- ii. Se supone que f es ortogonal a todas las funciones de Hermite. Muestre que $F = 0$ y **deduzca** que $f = 0$ c.t.p. en \mathbb{R}^n .

Así pues, el sistema de funciones de Hermite normalizadas es un sistema ortonormal maximal en $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Sugerencia. Observe que $F^{(n)}(0) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. La condición $F = 0$ implica que la transformada de Fourier de la función integrable $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}} \overline{f(x)}$ es cero.

Solución:

□

Ejercicio 1.0.13

Haga lo siguiente:

- i. **Demuestre** la fórmula.

$$D_x^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2} dy = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} D_x^n e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2} dy$$

- ii. Se consideran las funciones de Hermite

$$\varphi(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} D^n e^{-x^2}$$

Pruebe que $\mathcal{F}_2 \varphi_n = (-1)^n \varphi_n$. Así pues, las funciones de Hermite son vectores propios para el operador \mathcal{F}_2 .

Sugerencia. Transforme $\mathcal{F}_2\varphi_n$ por la “fórmula de integración por partes de orden n ”.

$$\int_a^b f^{(n)}g = \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^{(n-k-1)} g^{(k)} \right] + (-1)^n \int_a^b f g^{(n)}$$

(al suponer $f^{(n)}$ y $g^{(n)}$ continuas en $[a, b]$). Después, use la fórmula del inciso (i).

Solución:

□