Tercer Examen Parcial Lógica Matemática

Cristo Daniel Alvarado

13 de enero de 2025

Problema 1
Demuestre que no existe un conjunto que contiene a todos los singuletes (un singulete es un conjunto con un único elemento).

Demostración:

Suponga que existe un conjunto X tal que para cualquier conjunto a se tiene que $\{a\} \in X$.

Por el axioma de unión, existe el conjunto $\bigcup_{x\in X} x$, en particular, por la condición anterior se tiene que el siguiente:

$$V = \left\{ a \in \bigcup_{x\in X} x \middle| \{a\} \in X \right\}$$

es conjunto por el axioma de comprensión. Veamos que $\forall a, a \in V$. En efecto, si a es un conjunto, entonces $\{a\} \in X$ por lo que además, $a \in \bigcup_{x\in X} x$, luego $a \in V$. Por tanto V es conjunto$\#_c$ya que por un Teorema probado en clase el conjunto de todos los conjuntos no es conjunto. Así que X no puede ser conjunto. ■

Problema 2
Dado un conjunto X, definimos recursivamente conjuntos X_n, para $n \in \omega$, de la manera siguiente:

- $X_0 = X$.
- $X_{n+1} = \bigcup_{\alpha\in X_n} a$.

definiendo también $X_\omega = \bigcup_{n\in\omega} X_n$, demuestre que X es un conjunto transitivo.

Demostración:

Recordemos que un conjunto es x **transitivo** si $\forall y \in x(y \subseteq x)$. Veamos que X es transitivo. Sea $y \in X$, entonces existe $n_0 \in \omega$ tal que $y \in Xn_0$, se sigue así que el elemento y cumple que:

$$y \subseteq \bigcup_{a\in X_{n_0}} a = X_{n_0+1}$$

por tanto:

$$y \subseteq X_{n_0+1} \subseteq \bigcup_{n\in\omega} X_n = X$$

Se sigue que X es un conjunto transitivo. ■

Lema Auxiliar 1
Si β es ordinal límite, entonces $\sup\left\{\alpha\middle|\alpha<\beta\right\}=\beta$.

Demostración:
Sea β ordinal límite, entonces β no es sucesor de nadie, por tanto, si α es otro ordinal, se sigue que $\alpha<\beta\Rightarrow S(\alpha)<\beta$, pues en caso contrario se llegaría a una contradicción. En efecto, se tendría que:

- $\beta=S(\alpha)\#_c$, lo cual es una contradicción ya que β es ordinal límite.
- $\beta<S(\alpha)$, por lo que $\beta\leq\alpha\#_c$, ya que $\alpha<\beta$.

Veamos que β es el supremo de $S=\left\{\alpha\middle|\alpha<\beta\right\}$. En efecto, por definición de este conjunto β es cota superior de él y es no vacío, ya que $0<\beta$ (por ser β un ordinal no cero al ser éste un ordinal límite). Si γ ahora es tal que

$$\alpha<\gamma,\quad\forall\alpha\in S$$

y $\gamma<\beta$, entonces por lo probado anteriormente se sigue que $S(\gamma)<\beta$ con lo que γ no puede ser cota superior de S. Así que β es la mínima cota superior de S, esto es que β es el supremo de S. ■

Proposición Auxiliar 1
Para todo ordinal α se cumple que $0+\alpha=\alpha$.

Demostración:
Procederemos por inducción transfinita sobre α. Sea β un ordinal tal que $(\forall\gamma<\beta)(0+\gamma=\gamma)$. Probaremos que $0+\beta=\beta$. Se tienen tres casos:

- Suponga que $\beta=0$, entonces se tiene que $0+\beta=0+0=0=\beta\Rightarrow 0+\beta=\beta$.
- Suponga que existe un ordinal η tal que $\beta=S(\eta)$, en particular, $\eta<\beta$, así que:

$$\begin{aligned}0+\eta=\eta&\Rightarrow S(0+\eta)=S(\eta)\\&\Rightarrow 0+S(\eta)=\beta\\&\Rightarrow 0+\beta=\beta\end{aligned}$$

- Suponga que β no es sucesor de ningún ordinal, entonces:

$$\begin{aligned}0+\beta&=\sup\left\{0+\eta\middle|\eta<\beta\right\}\\&=\sup\left\{\eta\middle|\eta<\beta\right\}\\&=\beta\\\Rightarrow 0+\beta&=\beta\end{aligned}$$

  donde la segunda igualdad se da por hipótesis de inducción y la tercera por ser β ordinal límite y usando el Lema Auxiliar 1.

Por los tres incisos anterioes se sigue que $0+\beta=\beta$. Aplicando inducción transfinita se sigue que $0+\alpha=\alpha$ para todo ordinal α. ■

Problema 3
Directamente de la definición de multiplicación ordinal, demuestre que $\alpha \cdot 1 = \alpha$ y que $1 \cdot \alpha = \alpha$ para todo α número ordinal.

Demostración:
Recordemos que si α, β son ordinales, entonces:

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \beta = 0, \\ \alpha \cdot \gamma + \alpha & \text{si} \quad \beta = S(\gamma), \\ \sup \left\{ \alpha \cdot \eta \middle| \eta < \beta \right\} & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

donde en el segundo caso γ es un número ordinal tal que $\beta = S(\gamma)$. Probaremos ambos resultados:

- Veamos que $\alpha \cdot 1 = \alpha$ para todo α ordinal. Sea α ordinal, se tiene que:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot 1 &= \alpha \cdot S(0) \\ &= \alpha \cdot 0 + \alpha \\ &= 0 + \alpha \\ &= \alpha \end{aligned}$$

  donde la última igualdad se da por la Proposición Auxiliar 1.

- Veamos que $1 \cdot \alpha = \alpha$ para todo α ordinal. Procederemos por inducción transfinita sobre α. Sea β un ordinal tal que $(\forall \gamma < \beta)(1 \cdot \gamma = \gamma)$. Se tienen tres casos:

  - $\beta = 0$,en cuyo caso se sigue que:

$$\begin{aligned} 1 \cdot \beta &= 1 \cdot 0 \\ &= 0 \\ &= \beta \\ \Rightarrow 1 \cdot \beta &= \beta \end{aligned}$$

  - Existe un ordinal γ tal que $\beta = S(\gamma)$, en particular $\gamma < \beta$, por lo que:

$$\begin{aligned} 1 \cdot \beta &= 1 \cdot S(\gamma) \\ &= 1 \cdot \gamma + 1 \\ &= \gamma + 1 \\ &= S(\gamma) \\ &= \beta \\ \Rightarrow 1 \cdot \beta &= \beta \end{aligned}$$

    donde el paso de la segunda a tercera igualdad es por hipótesis de inducción.

  - Suponga que β es ordinal límite, entonces:

$$\begin{aligned} 1 \cdot \beta &= \sup \left\{ 1 \cdot \eta \middle| \eta < \beta \right\} \\ &= \sup \left\{ \eta \middle| \eta < \beta \right\} \\ &= \beta \\ \Rightarrow 1 \cdot \beta &= \beta \end{aligned}$$

    donde el paso de la primera a segunda igualdad es por hipótesis de inducción y el paso de la segunda a la tercera es por el Lema Auxiliar 1.

Por los tres incisos anterioes se sigue que $1 \cdot \beta = \beta$. Aplicando inducción transfinita se sigue que $1 \cdot \alpha = \alpha$ para todo ordinal α. ■

Problema 4
Suponga que tenemos una clase-función F (es decir, formalmente estamos considerando una fórmula $\psi(x, y)$ en el lenguaje de la teoría de conjuntos tal que se cumple que $(\forall x)(\exists! y)\psi(x, y)$, y entonces $F(x)$ denota al único elemento y tal que $\psi(x, y)$). Demuestre que, para todo conjunto A, la restricción $F \restriction A$ (es decir, formalmente la colección de todos los pares ordenados tales que $x \in A$ y $\psi(x, y)$) es un conjunto.

Demostración:

Por decir que tenemos la clase función F, estamos diciendo que para una fórmula con dos variables libres $\psi(x, y)$ se tiene que:

$$(\forall x)(\exists! y)\psi(x, y)$$

usando el esquema axioma de reemplazo con la fórmula ψ y Modus Ponens:

$$\forall u \exists v \forall y (y \in v \iff (x \in u)\psi(x, y))$$

obtenemos haciendo una instanciacion existencial tomando $u = A$ se tiene que existe v_A conjunto tal que:

$$\forall y (y \in v_A \iff (x \in A)\psi(x, y))$$

tomemos $F(A) = v_A$, construímos la función $F \restriction A$ dada por:

$$F \restriction A = \left\{ (x, y) \in A \times F(A) \middle| \psi(x, y) \right\}$$

Hay que verificar varias cosas para ver que esto es una función. Como $A \times F(A)$ es un conjunto (pues el producto cartesiano de dos conjuntos es un conjunto), se tiene del axioma de comprensión $F \restriction A$ es un conjunto.

Sea $x \in A$, en particular, $(\exists! y)(\psi(x, y))$, es decir que $(\exists! y)(x, y) \in F \restriction A$, por lo cual:

$$(\forall x)(\exists! y)((x, y) \in F \restriction A)$$

por ende, $F \restriction A$ es función. ■

Problema 5
Demuestre que todo espacio vectorial admite una base.

Sugerencia. hay muchísimas formas de hacer esto, la más sencilla es notar que una base es un conjunto maximal linealmente independiente, pero también se puede bien ordenar el espacio vectorial y elegur una base por recursión transfinita.

Demostración:

En clase hemos probado que:

$$ZF \vdash AE \iff LZ$$

donde ZF denota a los axiomas 1 a 8 sin Axioma de Elección (denotado por AE) y LZ es el Lema de Zorn:

Teorema 1 (**Lema de Zorn**)
Cualquier conjunto parcialmente ordenado y no vacío en el cual toda cadena tiene una cota superior, tiene un elemento maximal.

Veamos ahora que todo espacio vectorial admite una base. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial donde $\mathbb{K}$ es un campo. Considere la familia:

$$\mathcal{S}=\left\{S\subseteq V\middle|S\text{ es linealmente independiente}\right\}$$

Si $V=\{0\}$, ya se sabe que una base para V sería $\emptyset$. Podemos suponer entonces que V tiene al menos dos elementos.

Como V tiene al menos dos elementos, existe $x\in V$ tal que $x\neq 0$, por lo que el conjunto:

$$\{x\}\subseteq V$$

es linealmente independiente, así que $\mathcal{S}$ es no vacío. Además, $\mathcal{S}$ está parcialmente ordenado por $\subseteq$ ya que esta relación es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Veamos que $\mathcal{S}$ admite elementos maximales. Sea $\mathcal{C}$ una cadena, es decir:

$$\mathcal{C}=\left\{C_i\in\mathcal{S}\middle|i\in I\right\}$$

es tal que para todo par $i,j\in I$ se tiene que $C_i\subseteq C_j$ o que $C_j\subseteq C_i$. Afirmamos que esta cadena tiene cota superior. Sea:

$$C=\bigcup\mathcal{C}=\bigcup_{i\in I}C_i$$

es claro que $C_i\subseteq C$. Veamos que $C\in\mathcal{S}$. En efecto, sean $x_1,...,x_n\in C$ y tomemos $\alpha_1,...,\alpha_n\in\mathbb{K}$ tales que:

$$\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nc_n=0$$

Como $x_1,...,x_n\in C$, existen $i_1,...,i_n\in I$ tales que:

$$x_j\in C_{i_j},\quad\forall j=1,...,n$$

Dado a que $\mathcal{C}$ es una cadena, existe $m=1,...,n$ tal que:

$$C_{i_j}\subseteq C_{i_m},\quad\forall j=1,...,n$$

Por lo cual,

$$x_j\in C_{i_m},\quad\forall j=1,...,n$$

Así que, como $C\in\mathcal{S}$, entonces C es un conjunto linealmente independiente, por lo cual:

$$\alpha_j=0,\quad\forall j=1,...,n$$

Por ser estos elementos arbitrarios se sigue que C es un conjunto linealmente independiente, así que $C\in\mathcal{S}$. Por tanto, la cadena $\mathcal{C}$ tiene cota superior C.

Aplicando el Lema de Zorn se sigue que $\mathcal{S}$ admite elementos maximales, digamos B. Afirammos que B es una base para V. En efecto, como $B\in\mathcal{S}$ entonces es un conjunto linealmente independiente. Veamos que B genera a V.

Si no lo generase, existiría $v\in V$ tal que $v\notin\langle B\rangle$. En particular, $\alpha v\notin\langle B\rangle$ para todo $\alpha\in\mathbb{K}\setminus\{0\}$, así que el conjunto:

$$B\cup\{v\}$$

es linealmente independiente. Por ser B elemento maximal y $B\subseteq B\cup\{v\}$ se sigue que $B\cup\{v\}\subseteq B$, así que $v\in B\subseteq\langle B\rangle\#_c$. Por tanto, B genera a todo V.

Se sigue entonces que el $\mathbb{K}$.espacio vectorial V admite una base. $\blacksquare$