Primer Examen Parcial Lógica Matemática

Cristo Daniel Alvarado

17 de octubre de 2024

Problema 1
Las siguientes son tres fórmulas bien formadas en notación polaca, y utlizando las conectivas $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ y $\iff$. Escriba estas fórmulas en la notación *usual* (usando tantos paréntesis coom sea necesairo para evitar cualquier tipo de ambigüedad). Posteriormente, escriba la fórmula del primer inciso utilizando únicamente las conectivas $\neg$, $\wedge$, $\vee$, y escriba la fórmula del segundo inciso utilizando únicamente las conectivas $\neg$, $\Rightarrow$.

(a) $\Rightarrow\neg\wedge p_1p_4\vee p_3\wedge p_4\neg p_{17}$.

(b) $\wedge\Rightarrow p_2\neg\wedge p_{12}p_4\vee\neg p_{23}p_7$.

(c) $\vee p_{25}\wedge\Rightarrow p_3\neg p_4\vee\wedge\neg p_4p_{10}$.

Solución:
Haremos la primera parte por cada inciso:

De *(a)*: Formemos el árbol a partir de la primera fórmula:

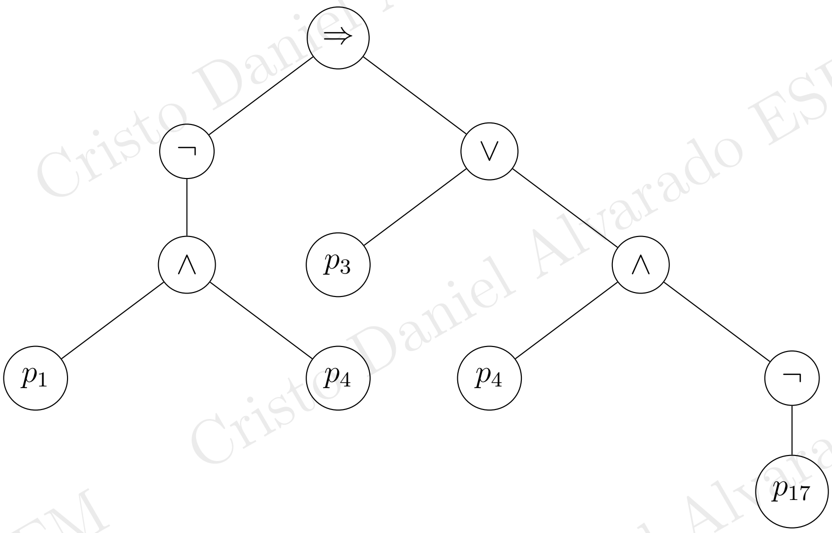

Figura 1. Árbol de la fórmula *(a)*.

traduciendo mediante este árbol la fórmula a la notación usual obtenemos la fórmula siguiente:

$$\neg(p_1\wedge p_4)\Rightarrow(p_3\vee(p_4\wedge\neg p_{17}))$$

De *(b)*: Nuevamente, formemos ahora el árbol a partir de la segunda fórmula:

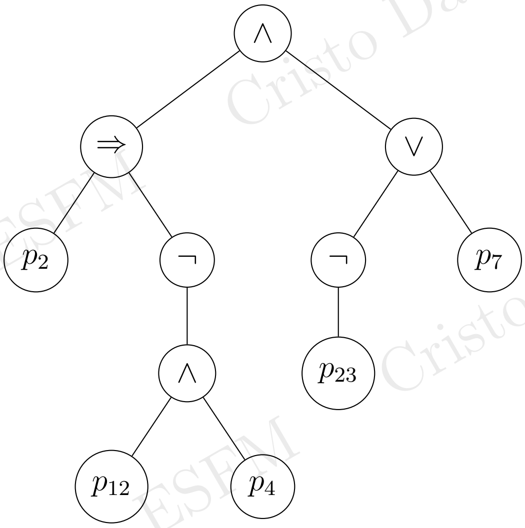

Figura 2. Árbol de la fórmula *(b)*.

traduciendo mediante este árbol la fórmula a la notación usual obtenemos la fórmula siguiente:

$$(p_2 \Rightarrow \neg(p_{12} \wedge p_4)) \wedge (\neg p_{23} \vee p_7)$$

De *(c)*: Nuevamente, formemos ahora el árbol a partir de la terera fórmula:

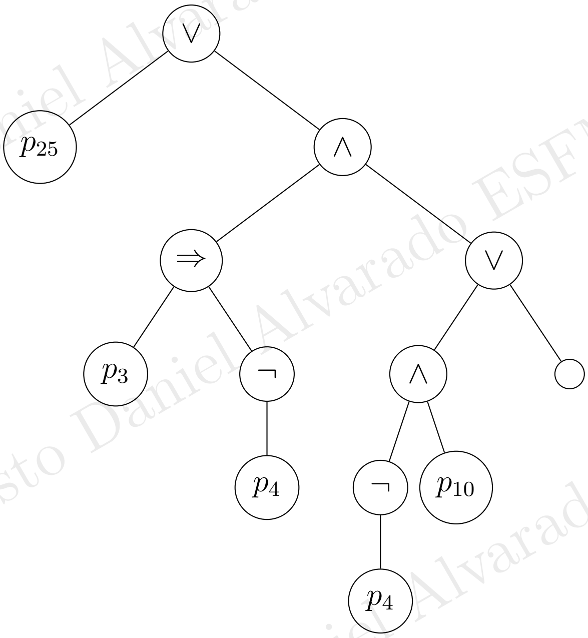

Figura 3. Árbol de la fórmula *(c)*.

traduciendo mediante este árbol la fórmula a la notación usual obtenemos la fórmula siguiente:

$$p_{25} \vee ((p_3 \Rightarrow \neg p_4) \wedge ((\neg p_4 \wedge p_{10}) \vee \ \ ))$$

donde, notemos que el nodo hijo del nodo que tiene a $\vee$ en la 3era fila está vacío (el nodo se dejó pues se sabe que la opearción $\vee$ es binaria) y también en la reescritura de la ecuación, por lo que esta tercera fórmula no es una fórmula bien formada.

Ahora, escribamos la fórmula del primer inciso usando las conectivas $\neg$, $\wedge$ y $\vee$. Notemos que tenemos una implicación y, recordemos que si φ y ψ son dos fórmulas se tiene que se puede escribir $\varphi \vee \psi$ como:

$$\neg\varphi \Rightarrow \psi$$

por lo cual, si en la primera fórmula hacemos a φ la fórmula $p_1 \wedge p_4$ y a ψ la fórmula $p_3 \vee (p_4 \wedge \neg p_{17})$, obtenemos que la primera fórmula puede ser reescrita como:

$$(p_1 \wedge p_4) \vee (p_3 \vee (p_4 \wedge \neg p_{17}))$$

Para reescribir la segunda fórmula usando únicamente las conectivas, recordemos que si φ y ψ, entonces $\varphi \wedge \psi$ puede ser reescrita como

$$\neg(\varphi \Rightarrow \neg\psi)$$

por lo cual, usando este hecho y el hecho anterior, podemos reescribir la fórmula del segundo inciso como:

$$\neg\left((p_2 \Rightarrow \neg\neg(p_{12} \Rightarrow \neg p_4)) \Rightarrow \neg(\neg\neg p_{23} \Rightarrow p_7)\right)$$

y, si se nos permite quitar las dobles negaciones mediante los axiomas de la lógica de primer orden y la única regla de inferencia Modus Ponens, obtenemos la fórmula reescrita:

$$\neg\left((p_2 \Rightarrow (p_{12} \Rightarrow \neg p_4)) \Rightarrow \neg(p_{23} \Rightarrow p_7)\right)$$

$\square$

Problema 2
Escriba una demostración formal de validez (renglón por renglón, y justificando apropiadamente cada paso) del siguiente argumento:

$$\begin{array}{rlcll}
1) & (\alpha \vee \beta) & \Rightarrow & (\gamma \Rightarrow \delta) & \text{Premisa} \\
2) & \delta & \Rightarrow & \varepsilon & \text{Premisa} \\
3) & \varepsilon & \Rightarrow & (\alpha \wedge \zeta) & \text{Premisa} \\
4) & \gamma & & & \text{Premisa} \\
\hline
 & & \therefore & \alpha \iff \varepsilon &
\end{array}$$

Solución:
Completemos la demostración:

	1)	$(\alpha \vee \beta)$	$\Rightarrow$	$(\gamma \Rightarrow \delta)$	Premisa
	2)	δ	$\Rightarrow$	ε	Premisa
	3)	ε	$\Rightarrow$	$(\alpha \wedge \zeta)$	Premisa
	4)	γ			Premisa
$\vert \longrightarrow$	5)	α			Suposición
$\vert$	6)	$\alpha \vee \beta$			5) Ad.
$\vert$	7)	γ	$\Rightarrow$	δ	1) y 6) Modus Ponens
$\vert$	8)	δ			7) y 4) Modus Ponens
$\vert$	9)	ε			2) y 8) Modus Ponens
	10)	α	$\Rightarrow$	ε	Lineas 5)-9) Metateorema de Deducción
$\vert \longrightarrow$	11)	ε			Suposición
$\vert$	12)	$\alpha \wedge \zeta$			2) y 11) Modus Ponens
$\vert$	13)	α			12) Simplificación
	14)	ε	$\Rightarrow$	α	Lineas 11)-13) Metateorema de Deducción
	15)	$(\alpha \Rightarrow \varepsilon)$	$\wedge$	$(\varepsilon \Rightarrow \alpha)$	10) y 14) Conjunción
	16)	α	$\iff$	ε	15) Reescritura
			$\therefore$	$\alpha \iff \varepsilon$	

$\square$

Problema 3
Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer oden equipado con un símbolo de función binaria $*$. Muestre que una de las siguientes dos $\mathcal{L}$-fórmulas implica lógicamente a la otra (¿cuál implica cuál?), y que esta implicación no es reversible.

(a) $(\exists x)(\forall y)(x * y = y)$.

(b) $(\exists x)(x * x = x)$.

Solución:
Afirmamos que la fórmula *(a)* implica a la fórmula *(b)*. En efecto, se tiene la siguiente demostración de *(b)* a partir de *(a)*:

$$
\begin{array}{rrlcll}
 & 1) & (\exists x)(\forall y)(x * y & = & y) & \text{Premisa} \\
| \longrightarrow & 2) & (\forall y)(z * y & = & y) & \\
| & 3) & (z * z & = & z) & \text{2) Instanciación Universal} \\
\hline
 & 4) & (\exists x)(x * x & = & x) & \text{1)-3) Generalización Existencial} \\
\hline
 & & & \therefore & (\exists x)(x * x = x) &
\end{array}
$$

pues, en en la tercera fila la variable z es sustituíble por y, ya que z no queda bajo el alcance de ningún cuanificador de la fórmula en la fila 2).

Ahora veamos que la fórmula *(b)* no implica lógicamente a la fórmula *(a)*. Esto es equivalente a probar que

$$\Sigma \nvdash (\exists x)(\forall y)(x * y = y)$$

donde $\Sigma = \{(\exists x)(x * x = x)\}$. Por el Teorema de Completud de Gödel, basta con probar que

$$\Sigma \nvDash (\exists x)(\forall y)(x * y = y)$$

así que, tenemos que encontrar una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ y una interpretación ι tales que

$$\mathfrak{A} \vDash \Sigma[\iota], \text{ pero } \mathfrak{A} \nvDash (\exists x)(\forall y)(x * y = y)[\iota]$$

Considere la $\mathcal{L}$-estructura

$$\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, \cdot)$$

donde $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales y $\cdot$ es el producto usual. Considere también la interpretación $\iota : \text{Var} \to \mathbb{N}$ dada por:

$$\iota(v_i) = i$$

para toda variable v_i. Veamos que $\mathfrak{A} \vDash \Sigma$, esto es que

$$\mathfrak{A} \vDash (\exists x)(x * x = x)[\iota]$$

en efecto, esto se cumple si y sólo si

$$\mathfrak{A} \vDash (x * x = x)[\iota_{n/x}]$$

para algún $n \in \mathbb{N}$. Tomando $n = 1$ obtenemos que:

$$
\begin{aligned}
\hat{\iota}_{1/x}(x * x) &= \hat{\iota}_{1/x}(x) \cdot \hat{\iota}_{1/x}(x) \\
&= 1 \cdot 1 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

y,

$$\hat{\iota}_{1/x}(x) = 1$$

por tanto, $\hat{\iota}_{1/x}(x)$ es lo mismo que $\hat{\iota}_{1/x}(x * x)$, se sigue así

$$\mathfrak{A} \models (x * x = x)[\iota_{n/x}]$$

Veamos que

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \not\models (\exists x)(\forall y)(x * y = y)[\iota] & \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \not\models (\exists x)(\neg(\exists y)(x * y \neq y))[\iota] \\ & \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \not\models (\neg(\exists y)(x * y \neq y))[\iota_{a/x}] \\ & \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models (\exists y)(x * y \neq y)[(\iota_{a/x})] \\ & \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models (x * y \neq y)[(\iota_{a/x})_{b/y}] \end{aligned}$$

para algunos $a, b \in \mathbb{N}$. Tomando $a = 9$ y $b = 1729$ obtenemos que:

$$\begin{aligned} (\hat{\iota}_{a/x})_{b/y}(x * y) &= (\hat{\iota}_{a/x})_{b/y}(x) \cdot (\hat{\iota}_{a/x})_{b/y}(y) \\ &= a \cdot b \\ &= 9 \cdot 1729 \\ &= 15561 \end{aligned}$$

y,

$$(\hat{\iota}_{a/x})_{b/y}(y) = b = 1729$$

como 1729 no es 15561 se sigue que

$$\mathfrak{A} \models (x * y \neq y)[(\iota_{a/x})_{b/y}]$$

por lo cual, de las equivalencias anteriores tenemos

$$\mathfrak{A} \not\models (\exists x)(\forall y)(x * y = y)[\iota]$$

De esta forma, $\mathfrak{A}$ y ι son la $\mathcal{L}$-estructura e interpretación buscadas, respectivamente. □

Problema 4
Sea $\mathcal{L} = \{\in\}$ el lenguaje de la teoría de conjuntos (es decir, $\in$ es simplement el símbolo de relación binaria). Demuestre que cualquier fórmula en la cual no aparezca el símbolo de negación $\neg$ debe tener longitud impar.

Demostración:
Procederemos por inducción sobre la longitud de la $\mathcal{L}$-fórmula. Antes de ello, notemos que como nuestro lenguaje $\mathcal{L}$ no posee constantes ni funciones, los únicos posibles términos serán las variables v_i.

- **Caso base**: Sea φ una $\mathcal{L}$-fórmula de longitud menor o igual a 3 en la que no aparece el símbolo de negación $\neg$. Se tienen 2 posibilidades:

  - φ es $v_1 = v_2$, donde v_1 y v_2 son variables.
  - φ es $v_1 \in v_2$, donde v_1 y v_2 son variables.

  esto pues φ en su forma más simple es atómica. En cualquiera de los tres casos, la longitud de φ es impar (más aún, es 3).

- **Paso Inductivo**: Suponga que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para toda $\mathcal{L}$-fórmula φ de longitud menor o igual a $2n+1$ en la que no aparezca el símbolo de negación $\neg$, implica que la longitud de φ es impar.

  Sea φ una fórmula de longitud menor o igual a $2n+3$, se tienen tres posibles casos para φ:

  - φ tiene longitud menor o igual a $2n+1$, por lo que de la hipótesis de inducción se sigue que φ tiene longitud impar.
  - φ es $\psi \Rightarrow \phi$, donde ψ y ϕ son $\mathcal{L}$-fórmulas en las que no aparece el símbolo negación $\neg$, pues éste no aparece en φ. En particular, al tenerse que φ es de longitud menor o igual a $2n+3$, se sigue que ψ y ϕ tienen longitud menor a $2n+1$. Por hipótesis de inducción se sigue que ambas tienen longitud impar, digamos:

    $$2n_\psi + 1 \quad \text{y} \quad 2n_\phi + 1$$

    respectivamente, con $n_\psi, n_\phi \in \mathbb{N}$. Por ende, la longitud de φ es

    $$(2n_\psi + 1) + 1 + (2n_\phi + 1) = 2(n_\psi + n_\phi + 1) + 1$$

    es decir, la longitud de φ es impar.
  - φ es $(\exists x)\psi$, donde al tenerse que φ no tiene al símbolo negación $\neg$, tampoco lo puede tener ψ, así que como φ es de longitud menor o igual a $2n+3$, debe tenerse que la longitud de ψ es menor o igual a $2n+1$. Por hipotesis de inducción ψ es de longitud impar, digamos $2n_\psi + 1$ con $n_\psi \in \mathbb{N}$, luego la longitud de φ será:

    $$(2n_\psi + 1) + 2 = 2(n_\psi + 1) + 1$$

    es decir, la longitud de φ es impar.

  En cualquier caso, se sigue que la longitud de φ es impar.

Aplicando inducción, se sigue que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para toda $\mathcal{L}$-fórmula φ en la que no aparezca $\neg$ que tenga longitud menor o igual a $2n+1$, φ tiene longitud impar.

En particular, si φ es una $\mathcal{L}$-fórmula en la que no aparece $\neg$, existe un número $m \in \mathbb{N}$ tal que la longitud de φ es menor o igual a $2m+1$ (pues toda fórmula en este curso tiene longitud finita) luego, por lo anterior se sigue que φ tiene longitud impar, lo cual prueba el resultado. $\blacksquare$