3. Un camión con 5 pasajeros hace 5 paradas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que todos bajen en la misma parada?

b) ¿Cuál de que en cada parada baje un pasajero?

c) Calcula la probabilidad de que en la primera parada bajen exactamente dos pasajeros.

Sol.

a) Para la resolución del problema, veamos que, podemos entender el problema de la siguiente manera:

$$0\,11\,0\,1\,0\,1\,0\,1$$

el número en binario anterior lo podemos interpretar como: 0 pasajeros bajaron en la primera parada, 2 en la 2^{da}, 1 en la 3^{ra}, 1 en la 4^{ta} y 1 en la 5^{ta}. Así mediante este procedimiento, podemos representar donde y cuantos pasajeros bajan del autobús. Por lo tanto:

$$\Omega = \{ (x_1, x_2, \dots, x_9) \in \{0,1\}^9 \mid \sum_{i=1}^{9} x_i = 5 \}$$

El cardinal de Ω será

$$C(\Omega) = \frac{9!}{4!5!} = 126$$

pues vamos a ver de cuantas formas podemos reordenar un arreglo de 9 elementos, donde tenemos 4 iguales de un tipo, y 5 iguales de otro tipo.

Sea ahora A el evento: "todos los pasajeros bajan en la misma parada". A, con la codificación anterior está dado por:

$$A = \{ (1,1,1,1,1,0,0,0,0), (0,1,1,1,1,1,0,0,0), \dots, (0,0,0,0,1,1,1,1,1) \}$$

claramente $C(A) = 5$ (pues son 5 paradas, y todos los pasajeros bajan en la misma). Por tanto:

$$P(A) = \frac{C(A)}{C(\Omega)} = \frac{5}{126} \approx 0.0397$$

$$a) \therefore P(A) \approx 0.0397 \,//$$

b) Considere el evento B = "en cada parada baja un pasajero". $B = \{ (1,0,1,0,1,0,1,0,1) \}$

por tanto:

$$P(B) = \frac{C(B)}{C(\Omega)} = \frac{1}{126} \approx 0.00794$$

b) $\therefore P(B) \approx 0.00794$ //

c) Considere el evento C: "en la primera parada se bajan 2 pasajeros". $C = \{(1,1,0, x_4, x_5, \dots, x_9) \in \Omega \mid \sum_{i=4}^{9} x_i = 3\}$. El cardinal de C coincidirá con el número de arreglos que se pueden formar con 3 0's y 3 1's, el cual está dado por:

$$C(C) = \frac{6!}{3!\,3!} = 20$$

$$\Rightarrow P(C) = \frac{C(C)}{C(\Omega)} = \frac{20}{126} \approx 0.159$$

c) $\therefore P(C) \approx 0.159$ //

6. Supongamos que todos los meses del año tuvieran 30 días.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que los cumpleaños de 12 personas seleccionadas al azar sucedan en 12 meses diferentes?

b) ¿Cuál de que los cumpleaños de 6 personas seleccionadas al azar caigan todos en dos meses del calendario?

Sol.

a) Considere el espacio muestral Ω dado como:

$$\Omega = \{(x_1, x_2, \dots, x_{12}) \in \{1, 2, \dots, 12\}^{12}\}$$

que representa los meses (del 1 al 12) en los que pueden cumplir años 12 personas diferentes. Considere el evento A= "los cumpleaños de las 12 personas son todos diferentes".

Veamos que $C(\Omega) = 12^{12}$, y para $C(A)$, debemos ver de cuántas formas podemos reordenar 12 elementos (números del 1 al 12), el cual está dado por: $C(A) = 12!$, así:

$$P(A) = \frac{C(A)}{C(\Omega)} = \frac{12!}{12^{12}} \approx 0.0000537$$

a) $\therefore P(A) \approx 0.0000537$ //

b) De manera similar a a), podemos tomar Ω como:

$$\Omega = \{(x_1, x_2, \dots, x_6) \in \{1, 2, \dots, 12\}^6\}$$

con $C(\Omega) = 12^6$. Considere el evento B= "los cumpleaños de las 6 personas caen en todos en 2 meses". Primero, veamos de cuántas formas podemos elegir 2 meses de los 12 del calendario, lo cual se puede hacer de $12C2$ formas.

B será: $B = \{(x_1, x_2, \dots, x_6) \in \Omega \mid x_i \in \{a, b\}$ con $a, b \in \{1, 2, \dots, 12\}$ y $a \neq b\}$. Con a y b fijos, podemos tener 2^6 6-tuplas diferentes (x_i puede ser a ó b, con $i = 1, 2, \dots, 6$). Por tanto, como se pueden elegir el a y b de $12C2$ maneras diferentes, entonces $C(B) = (12C2) \cdot 2^6$. Así:

$$P(B) = \frac{C(B)}{C(\Omega)} = \frac{(12C2) \cdot 2^6}{12^6} \approx 0.00141$$

b) $\therefore P(B) \approx 0.00141$ //

9. Si un examen consta de 10 preguntas ¿cuál es la probabilidad de que se presente la siguiente situación?

Sol.

Considere el espacio muestral de los posibles resultados de calificaciones del examen:

$$\Omega = \{ (x_1, x_2, \dots, x_{10}) \in \{0,1\}^{10} \}$$

donde 0 significa que la pregunta se respondió de manera incorrecta, y 1 de forma correcta. Considere el evento A="se sacan 5 preguntas correctas". Como $A = \{ (x_1, x_2, \dots, x_{10}) \in \Omega \mid \sum_{i=1}^{10} x_i = 5 \}$, veamos el cardinal de A. Para ello, veamos de cuantas formas podemos reordenar 10 elementos, 5 y 5 de 2 tipos diferentes, el cual está dado por:

$$C(A) = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = 252$$

Por tanto:

$$P(A) = \frac{C(A)}{C(\Omega)} = \frac{252}{2^{10}} \approx 0.246$$

$$\therefore P(A) \approx 0.246$$