Notas de Álgebra Moderna IV.
Una introducción a la teoría de categorías.

Cristo Daniel Alvarado

18 de abril de 2024

Índice general

Capítulo 3

Funtores

3.1. Conceptos Fundamentales

Definición 3.1.1
Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías. Un **funtor covariante** (respectivamente, **funtor contravariante**), denotado por $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, consta de

1. Un mapeo $F : \text{Obj}(\mathcal{C}) \to \mathcal{D}$ tal que $A \mapsto F(A)$.
2. Para cualesquier dos pares de objetos $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, un mapeo $F : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ (resp. $F : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(B), F(A))$) tal que $f \mapsto F(f)$, que cumple las condiciones siguientes:
   i) Para cada $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, $F(1_A) = 1_{F(A)}$.
   ii) Para cada $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ y $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$, se tiene que
   $$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$
   (resp. $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$).

Definición 3.1.2
La **imagen de un funtor** F **entre las categorías** $\mathcal{C}$ **y** $\mathcal{D}$, consta de una clase $\left\{ F(C) \middle| C \in \text{Obj}(\mathcal{C}) \right\}$ junto con todos los conjuntos $\left\{ F(f) \middle| f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \text{ con } A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C}) \right\}$.

Observación 3.1.1
La imagen de un funtor no necesariamente es una categoría. En cambio, si el funtor es inyectivo sobre objetos, se tiene que la imagen de un funtor si es una categoría.

Demostración:
En efecto, sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías. Para cualesquiera $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ y $D_1, D_2, D_3 \in \text{Obj}(\mathcal{D})$, $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1, C_2)$ y $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C_3, C_4)$, $h \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(D_1, D_2)$ y $k \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(D_2, D_3)$. Se tiene lo siguiente:

$$C_1 \longrightarrow C_2 \text{ y } C_3 \longrightarrow C_4$$
$$D_1 \longrightarrow D_2 \longrightarrow D_3$$

la imagen de $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ noes una categoría, pues si hacemos que

$$F(C_1) = D_1, F(C_2) = F(C_3) = D_2 \text{ y } F(C_4) = D_4$$

haciendo

$$F(f) = h, F(g) = k$$

además,

$$F(1_{C_1}) = 1_{D_1} \quad F(1_{C_2}) = F(1_{C_3}) = 1_{D_2} \quad F(1_{C_4}) = 1_{D_3}$$

pues, h y k paretenecen a la imagen de F, pero su composición no lo está. ■

Observación 3.1.2
Si F es inyectiva, entonces la imagen de F será una categoría.

Proposición 3.1.1
Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor covariante (resp. contravariante), entonces $F' : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$ es un funtor contravariante (resp. covariante).

Demostración:
Se hará el segundo caso. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor contravariante. Definimos F' tal que

$$F(A) = F'(A), \quad \forall A \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C}^{op})$$

y,

$$F(1_A) = F'(1_A), \quad \forall A \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C}^{op})$$

1. Sea f un morfismo de A en B, con $A, B \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C}^{op}) = \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$. Entonces su respectivo elemento f^{op} el $\mathcal{C}$
$$F(f) = F'(f^{op})$$
Claramente esto está bien definido. Con lo cual se tiene que $F'(f^{op}) : F(B) \to F(A)$, que es la primera parte para probar que F es funtor covariante.

2. Sean $f^{op} \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(B, A)$ y $g^{op} \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(C, B)$. Entonces, existen $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ y $g \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$. Se tiene entonces que
$$\begin{aligned} F'(f^{op} \circ g^{op}) &= F'((g \circ f)^{op}) \\ &= F(g \circ f) \\ &= F(f) \circ F(g) \\ &= F'(f^{op}) \circ F'(g^{op}) \end{aligned}$$

por tanto, de los dos incisos anteriores se sigue que F' es un funtor covariante. ■

Definición 3.1.3
Sea $\mathcal{C}$ una categoría.

1. Si $\mathcal{C}'$ es una subcategoría de $\mathcal{C}$, definimos el **funtor inclusión** $I : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ el cual asigna a cada objeto y cada morfismo a sí mismo. En el caso que $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$,tendremos simplemente que $I : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es el **funtor identidad**, denotado por $1_{\mathcal{C}}$.

2. Sea $\sim$ una congruencia en $\mathcal{C}$ categoría y, $\mathcal{C}/\sim$ la categoría cociente correspondiente. Se define el **funtor cociente**, denotado por $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\sim$ de la siguiente manera:
   - $\pi(C) = C$ para todo $C \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$.
   - $\pi(f) = \overline{f}$ para todo morfismo f en la categoría $\mathcal{C}$.

donde $\overline{f}$ denota a la clase de equivalencia de los morfismos de f en $\mathcal{C}$.

Además, si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son morfismos en $\mathcal{C}$, con $A, B \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$, se tiene que

$$\pi(g \circ f) = \overline{g \circ f} = \overline{g} \circ \overline{f} = \pi(g) \circ \pi(f)$$

3. Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ son dos funtores, siendo $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ categorías, podemos definirl el **funtor composición puntual** $G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ como sigue:

$$G \circ F(C) = G(F(C)), \quad \forall C \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$$

y,

$$G \circ F(f) = G(F(f)), \quad \forall f \text{ morfismo en } \mathcal{C}$$

 I) Si F y G son ambos covariantes ó contravariantes, entonces $G \circ F$ es un funtor covariante.

 II) Si uno de ellos es covariante y el otro contravariante, entonces $G \circ F$ es contravariante.

Demostración:

Verifiquemos en 3 que es un funtor. En efecto, claramente manda objetos en objetos y morfismos en morfismos de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{E}$.

Suponga que F y G son ambos contravariantes (el caso en el que son covariantes es inmediato). Entonces para $F : A \to B$ morfismo en $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} &F(f) : F(B) \to F(A) \\ \Rightarrow &G(F(f)) : G(F(A)) \to G(F(B)) \end{aligned}$$

además, si f, g son morifsmos en $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} G \circ F(g \circ f) &= G(F(g \circ f)) \\ &= G(F(f) \circ F(g)) \\ &= G(F(g)) \circ G(F(f)) \end{aligned}$$

luego, el funtor composición puntual es covariante.

Para el caso en el que uno sea covariante y otro contravariante, el caso es similar. ■

Definición 3.1.4

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías.

1. Fijemos un objeto $D_0 \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{D})$. Definimos el **funtor constante**, $A_{D_0} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ el cual asigna a cada objeto $C \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ al objeto D_0 y a cada morfismo f de $\mathcal{C}$ el morfismo 1_{D_0} de $\mathcal{D}$.

2. Considere la categoría producto $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$. Definimos los **funtores proyección** de la siguiente mantera:

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{C}} &: \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{C}, \quad (C, D) \mapsto C \quad (f, g) \mapsto f \\ \rho_{\mathcal{D}} &: \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}, \quad (C, D) \mapsto D \quad (f, g) \mapsto g \end{aligned}$$