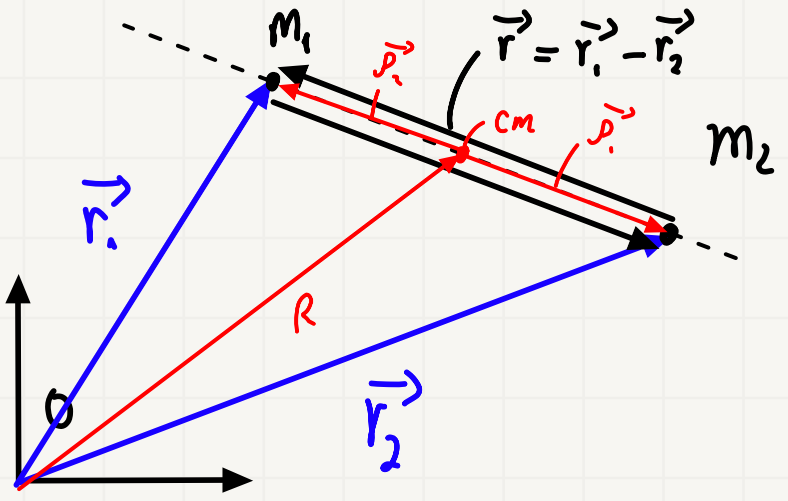
El Problema De Dos Cuerpos.

Consideremos dos cuerpos, uno de masa m_1 y el otro de masa m_2. Nuestro objetivo es tratar de expresar la lagrangiana L en términos de las posiciones de m_1 y m_2.



cm es el centro de masas de m_1 y m_2. Se observa que:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2 \quad \dots (1)$$

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \vec{\rho}_1 \ , \quad \vec{r}_2 = \vec{R} + \vec{\rho}_2 \quad \dots (2)$$

Donde $\vec{R}$ por def. es:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad \dots (3.1)$$

y, como $\vec{\rho}_1$ y $\vec{\rho}_2$ se miden desde el centro de masa, entonces:

$$m_1 \vec{\rho}_1 + m_2 \vec{\rho}_2 = 0 \quad \dots (3.2)$$

de (3):

$$\vec{\rho}_2 = -\frac{m_1}{m_2} \vec{\rho}_1 \quad \dots (4)$$

Sustituyendo lo anterior en (1):

$$\vec{r} = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \vec{\rho}_1 \Rightarrow \vec{\rho}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad \dots (5)$$

$$\vec{\rho}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

obtengamos ahora a $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ en función de $\vec{r}$. De (2), (5) y (6):

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \\ \vec{r}_2 &= \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \end{aligned} \right\} (7)$$

La lagrangiana será:

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^{\,2} - V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

denotamos así al potencial si las fuerzas debidas a un potencial y son llamadas centrales, cuando dependen únicamente de la separación de m_1 y m_2. También:

$$L = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{\rho}}_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{\rho}}_2^{\,2} - V(r)$$

donde $M = m_1 + m_2$ y $r = \|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|$. Simplificando:

$$= \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - V(r)$$

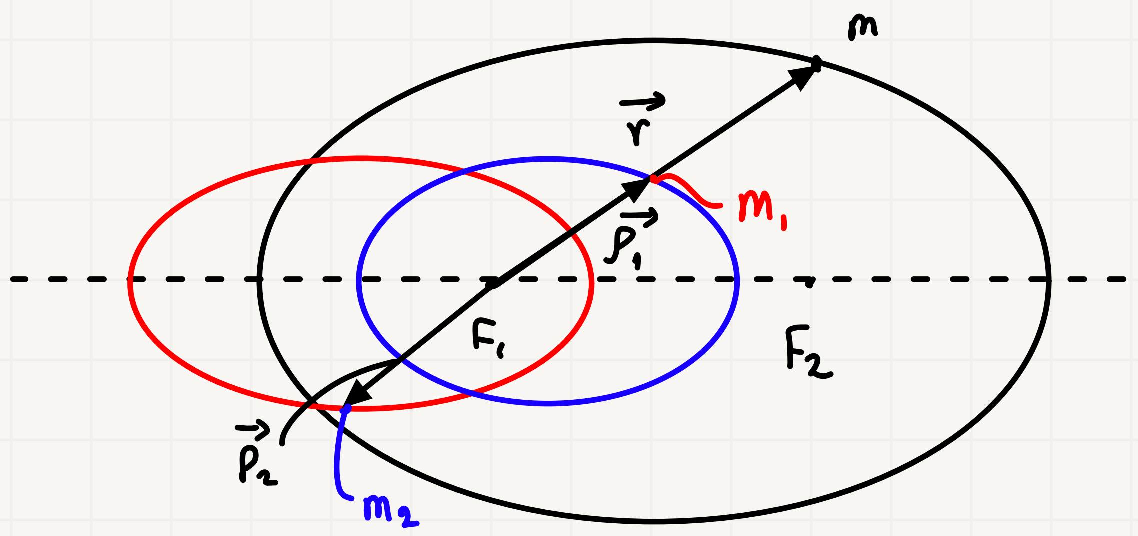
Con $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, i.e $\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$. Aproximando:

$$m = m_1 \cdot \frac{1}{1 + (m_1/m_2)} \cong m_1, \text{ si } m_1 << m_2$$

Como no hay fuerzas externas, entonces $\frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 = 0$, así en el Lagrangiano podemos poner:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - V(r)$$

Veamos un ejemplo.



El ejemplo de acá es gravitación universal con Lagrange.

Si la partícula se mueve en un campo de fuerzas central, entonces las órbitas son planas, y:

$$\vec{F} = F(r) \frac{\vec{r}}{r} = m \ddot{\vec{r}}$$

y $F = -\frac{\partial V}{\partial r}$, entonces:

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times m \ddot{\vec{r}}$$
$$= \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m \dot{\vec{r}})$$

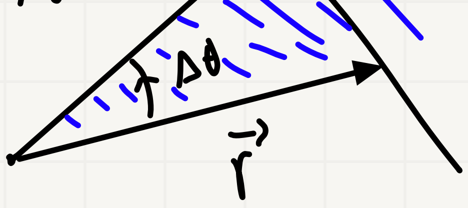
Si $\vec{F}(r)$ es paralelo a $\vec{r}$:

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{\ell} = 0$$
$$\Rightarrow \vec{\ell} = cte$$

Con $\vec{\ell} = \vec{r} \times m \dot{\vec{r}}$. Y:

$$\vec{r} \cdot \vec{\ell} = \vec{r} \cdot (\vec{r} \times m \dot{\vec{r}}) = 0$$

entonces el movimiento se efectúa en un plano perpendicular a $\vec{\ell}$. Calculemos áreas:



$$\Delta A \cong \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta A}{\Delta t} \cong \frac{1}{2} r^2 \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Cuando $\Delta t \to 0$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{l}{m}, \quad l = mr^2\dot{\theta}$$

i.e, barre áreas iguales en tiempos iguales. Y esto se cumple para todo campo central. Siempre se va a pedir la energía y el momento angular de algo.

Retomemos la Lagrangiana. Si $\dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$, entonces:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

notemos que θ no aparece, lo cual quiere decir que $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$, i.e

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = cte. \Rightarrow mr^2\dot{\theta} = cte$$

denominaremos a $\lambda = mr^2\dot{\theta} = cte$, i.e el momento angular se conserva. Además, tenemos que:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$\Rightarrow m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \quad \dots (8)$$

de (8):

$$\Rightarrow m\ddot{r} = -\frac{dV}{dr} + mr\dot{\theta}^2$$

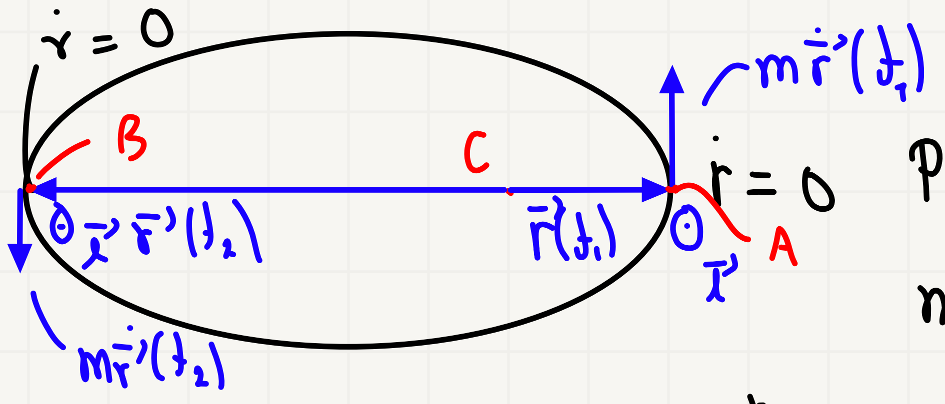
Pero $\dot{\theta}^2 = \left(\frac{\lambda}{mr^2}\right)^2$, luego:

$$m\ddot{r} = -\frac{dV}{dr} + \frac{\lambda^2}{mr^3}$$
$$= -\frac{d}{dr}\left(V(r) + \frac{\lambda^2}{2mr^2}\right)$$
$$\Rightarrow m\ddot{r}\dot{r} = -\dot{r}\frac{d}{dr}\left(V(r) + \frac{\lambda^2}{2mr^2}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2\right) = -\frac{d}{dt}\left(V(r) + \frac{\lambda^2}{2mr^2}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V(r) + \frac{\lambda^2}{2mr^2}\right) = 0$$
$$\therefore \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V(r) + \frac{\lambda^2}{2mr^2} = E = cte. \quad \dots (9)$$

que es la conservación de la energía mecánica. Despejando a $\dot{r}$ de (9):

$$\Rightarrow \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{\lambda^2}{2mr^2}\right)} \quad \dots (10)$$

El punto C es llamado centro de fuerzas, cuando $\dot{r} = 0$, obtendremos los puntos de retorno de la



partícula de masa m. En esta trayectoria, $\vec{l}$ = cte y en A la vel. es máxima, y en B la vel. es mínima.

$$\Rightarrow t = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}} = g(r) \quad \dots (11)$$

Si g es invertible: $r = r(t) = g^{-1}(t)$. Además:

$$l = mr^2\dot\theta$$

$$\Rightarrow \theta - \theta_0 = \int_0^t \frac{l}{mr^2}\,dt$$

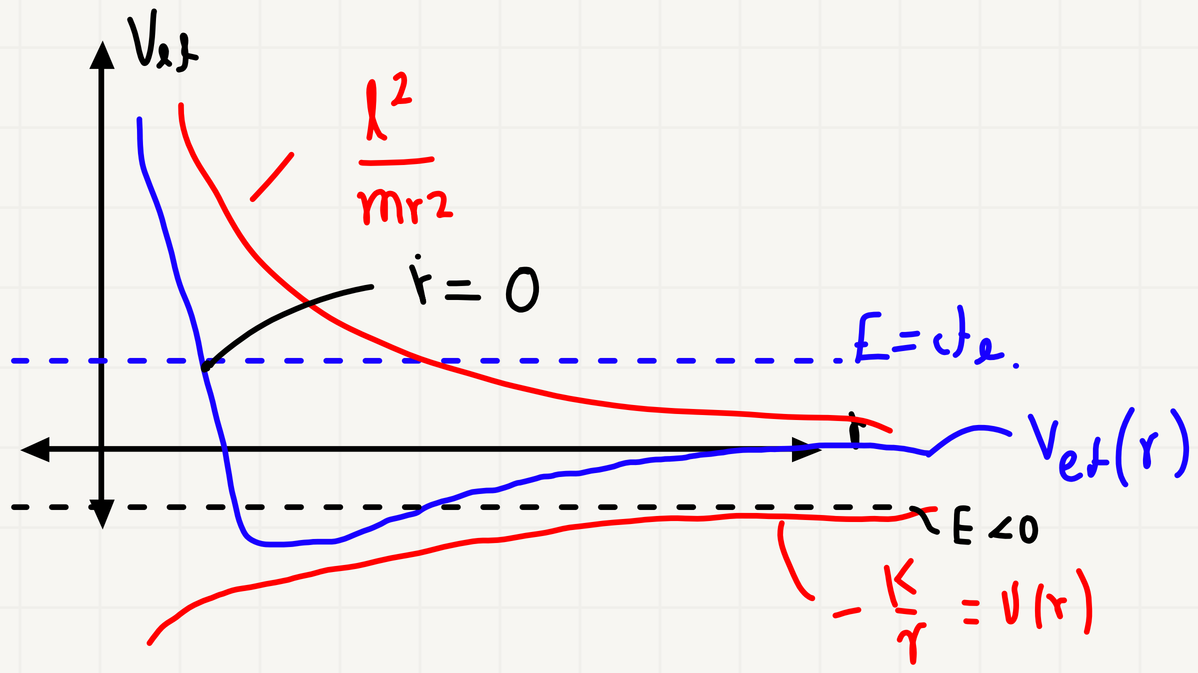
$$= \frac{l}{m}\int_0^t \frac{dt}{r^2} \quad \dots (12)$$

Definimos el potencial efectivo como $V_{ef}(r) = V(r) + \frac{l^2}{mr^2}$, así: sust. en (9):

$$E = \frac{1}{2}m\dot r^2 + V_{ef}(r)$$

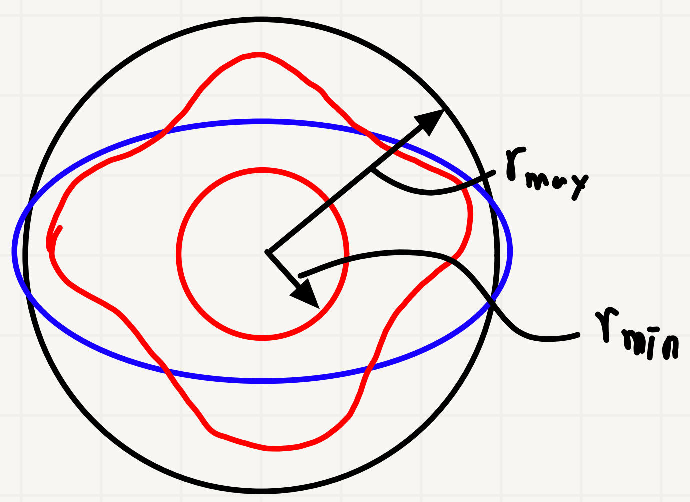
$$\Rightarrow \frac{1}{2}m\dot r^2 = E - V_{ef}(r) \geq 0$$

i.e $V_{ef}(r) \leq E$.



Cuando $E<0$, la partícula queda confinada en un radio mínimo y otro máximo. Estas órbitas son llamadas acotadas.

Aquí hay algunos ejemplos.



El potencial $V(r) = -\frac{K}{r}$ es atractivo y el $\frac{l^2}{2mr^2}$ es repulsivo.

Retomando, llamemos

$$F_c(r) = -\frac{d}{dr}\left(\frac{l^2}{2mr^2}\right) = \frac{l^2}{mr^3}$$

Sustituyendo a l en la expresión anterior:

$$f_c(r) = mr\dot{\theta}^2$$

i.e f_c es una fuerza centrífuga, esto es, es como si viéramos moverse a la partícula desde un sistema no inercial, i.e es como si viéramos la partícula alejarse (es como si el sistema estuviese girando, siguiendo a m).

Esto también es llamado movimiento unidimensional equivalente.

Ahora vamos a poner a r en función de θ y vice versa. Considere las ecs.

$$\begin{cases} m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = -\dfrac{dV}{dr} \\ mr^2\dot{\theta} = l \end{cases}$$

ED de la órbita.

Con $F(r) = -\frac{dV}{dr}$, se tiene que:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F(r)$$

hagamos el cambio $r = \frac{1}{x} \Rightarrow \dot{r} = -\frac{1}{x^2}\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{x^2}\frac{dx}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\dot{\theta}}{x^2}\frac{dx}{d\theta} = -\frac{1}{x^2}\cdot\frac{l}{mr^2}\frac{dx}{d\theta} = -\frac{1}{x^2}\cdot\frac{lx^2}{m}\frac{dx}{d\theta} = -\frac{l}{m}\frac{dx}{d\theta} \Rightarrow \ddot{r} = -\frac{l}{m}\frac{d^2x}{d^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = -\frac{l^2x^2}{m^2}\frac{d^2x}{d^2\theta}$. Sustituyendo:

$$\Rightarrow -\frac{l^2x^2}{m}\frac{d^2x}{d\theta^2} - \frac{m}{x}\frac{l^2x^4}{m^2} = F\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{l^2x^2}{m}\frac{d^2x}{d\theta^2} + \frac{l^2x^3}{m} = -F\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{d\theta^2} + x = -\frac{m}{l^2x^2}F\left(\frac{1}{x}\right) \quad \ldots (9)$$

La ec. anterior es llamada la ecuación diferencial de la órbita. Usando regla de la cadena podemos hacer:

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + x = -\frac{m}{l^2}\frac{dV}{dx} \quad \ldots (10)$$

Otro camino es usar la conservación de la energía, i.e:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2}\right]}$$

Conociendo que $l = mr^2\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow dt = \frac{mr^2}{l}d\theta$, tenemos:

$$\frac{mr^2}{\lambda} d\theta = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(r) - \frac{\lambda^2}{2mr^2}\right]}}$$

$$\Rightarrow \int_{\theta'}^{\theta} d\theta = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2mE}{\lambda^2} - \frac{2mV(r)}{\lambda^2} - \frac{1}{r^2}}}$$

Con $r = \frac{1}{x}$ se tiene:

$$\theta - \theta' = -\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2mE}{\lambda^2} - \frac{2mV(1/x)}{\lambda^2} - x^2}} \quad \dots (11)$$

Ahora resolvamos el problema de Kepler con el potencial de Kepler: $V(r) = -\frac{K}{r}$, luego $F(r) = -\frac{K}{r^2}$ $\Rightarrow F(\frac{1}{x}) = -Kx^2$. Por tanto sustituyendo en (10):

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + x = -\frac{m}{\lambda^2 x^2}\left(-Kx^2\right) = \frac{mK}{\lambda^2}$$

Sea $y = x - \frac{mK}{\lambda^2}$, entonces:

$$\frac{d^2y}{d\theta} + y = 0 \quad \dots (11)$$

La solución de (11) es: $y = B\cos(\theta - \theta')$, θ' y B constantes. Luego:

$$\frac{1}{r} = \frac{mK}{\lambda^2} + B\cos(\theta - \theta')$$

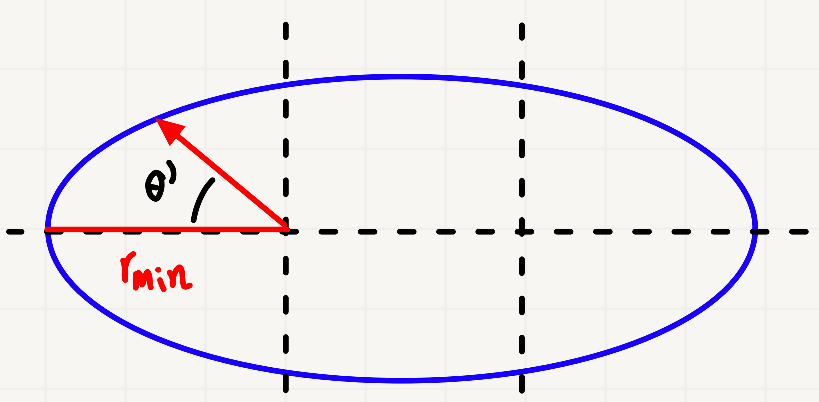
$$\Rightarrow r = \frac{1}{\frac{mK}{\lambda^2} + B\cos(\theta - \theta')}$$

$$\Rightarrow r = \frac{\lambda^2/mK}{1 + \frac{B\lambda^2}{mK}\cos(\theta - \theta')} \quad \dots (12)$$

el valor $e = \frac{B\lambda^2}{mK}$ es llamada la excentricidad de la cónica, y $\frac{\lambda^2}{mK} = p$, p el semi-lado recto.

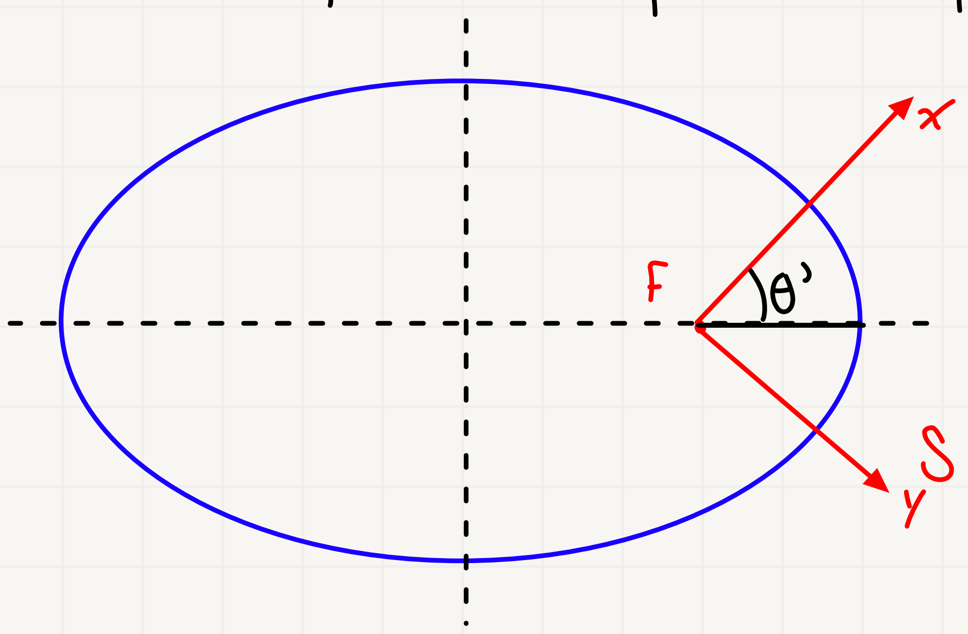
Si $e = 0$ tenemos una circunferencia, si $0 < e < 1$ tenemos una elipse, si $e = 1$ es una parábola y si $e > 1$ es una hipérbola.

Observamos además que r_{min} ocurre cuando $\theta - \theta' = 0$. Veamos un ejemplo. Para una elipse, todo se mide desde algún foco, como se muestra:



Podemos medir desde la periapsis (r_{min}) y todo funciona con un nuevo parámetro $u = \theta - \theta'$.

θ' es la posición del perihelio ó periapsis más cercano. Visto como:



Otra forma de encontrar la trayectoria, es obteniendo:

$$\theta = \theta' - \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} + \frac{2mKx}{l^2} - x^2}}$$

Integrando, se obtiene:

$$r = \frac{l^2/mK}{1 + \sqrt{1 + (2El^2/mK^2)}\cos(\theta - \theta')}$$

Luego la excentricidad será $e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mK^2}} = \frac{Bl^2}{mK}$. Si

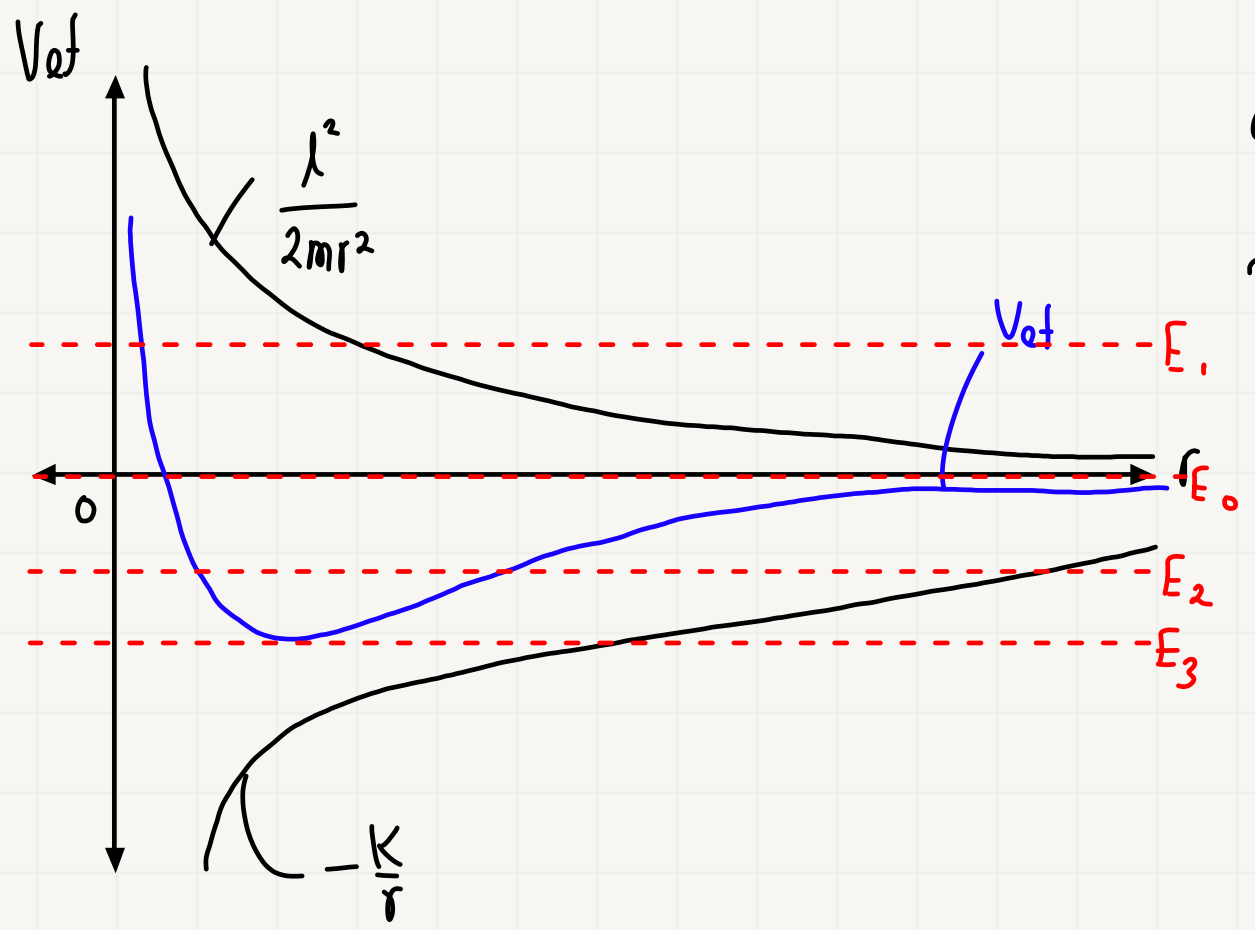
1) $e = 1 \Rightarrow E = 0 \Rightarrow$ tenemos parábola.

2) $e > 1 \Rightarrow E > 0 \Rightarrow$ tenemos hipérbola.

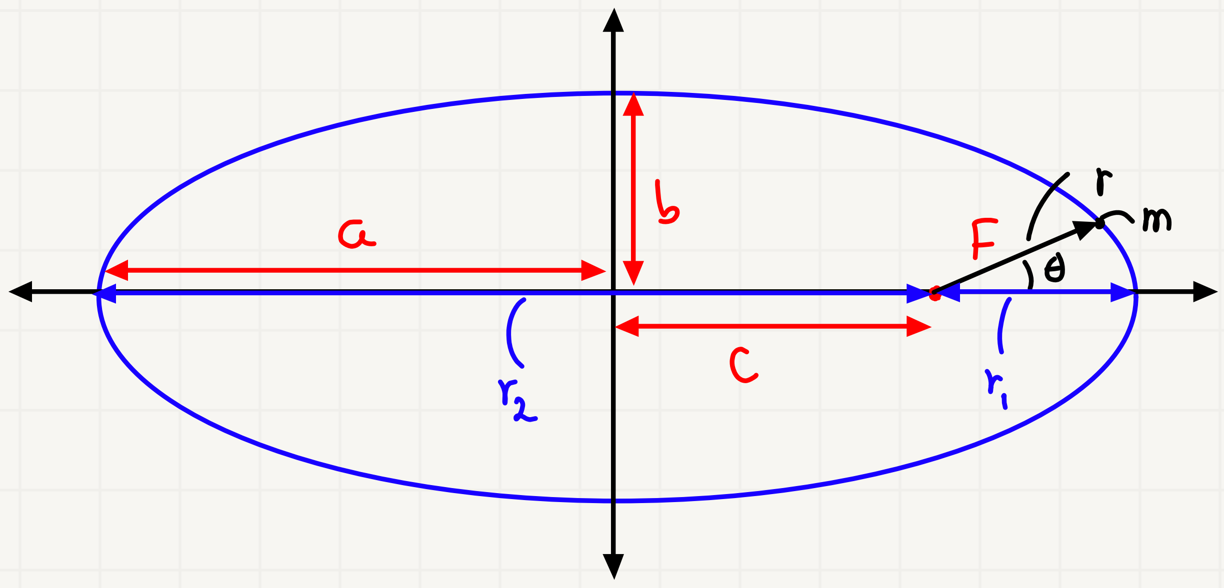
3) $0 < e < 1 \Rightarrow E < 0 \Rightarrow$ tenemos elipse

4) $e = 0 \Rightarrow E = -\frac{mK^2}{2l^2} \Rightarrow$ tenemos un circulo.

Recordemos al potencial efectivo $V_{ef} = -\frac{K}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}$. En E_1, la partícula llega y se va. En E_0 se tiene que la part. tiene una trayectoria parabólica. En E_2, la part. tiene un radio mín y otro máx, i.e una elipse. Y en E_3, el radio solo es uno y es cte.



Órbitas Elípticas.



Se tiene que $a^2 = b^2 + c^2$ y $e = \frac{c}{a}$. Teniendo que:

$$E = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - \frac{K}{r}$$

Con $l = mr\dot{\theta}^2$, se obtiene que:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{K}{r} - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}$$

Las ápsides se encuentran haciendo $\dot{r} = 0$, i.e.:

$$E + \frac{K}{r} - \frac{l^2}{2mr^2} = 0 \iff r^2 + \frac{K}{E} r - \frac{l^2}{2mE} = 0$$

Si r_1 y r_2 son las raíces de la ec. entonces:

$$-\frac{K}{E} = r_1 + r_2 \Rightarrow a = -\frac{K}{2E}, \text{ pues } r_1 + r_2 = 2a$$

y la excentricidad e es: $e = \sqrt{1 + \left(2El^2 / mK^2 \right)}$. En términos de a:

$$e = \sqrt{1 - l^2/mKa}$$

$$\Rightarrow a(1 - e^2) = \frac{l^2}{mK}$$

Sust. en la ec. de la órbita:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos(\theta - \theta')}$$

Obtenemos que:

$$r_{min} = \frac{a(1-e^2)}{1+e^2} = a(1-e) \quad \text{si } \theta - \theta' = 0$$

$$r_{max} = \frac{a(1-e^2)}{1-e} = a(1+e) \quad \text{si } \theta - \theta' = \pi$$

Tercera Ley de Kepler.

Conocemos de un resultado anterior, que para una órbita se tiene:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2\dot{\theta}}{m} = \frac{l}{2m}$$

$$\Rightarrow \int_0^A dA = \frac{l}{2m} \int_0^T dt$$

$$\Rightarrow \pi ab = \frac{Tl}{2m}$$

Como $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \Rightarrow b = a\sqrt{1-e^2}$. También $\frac{l^2}{mK} = a(1-e^2) \Rightarrow b = a\sqrt{l^2/mKa} = \sqrt{al^2/mK}$.

$$\Rightarrow T^2 = 4\pi^2 \frac{m}{K} a^3$$

Como $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ y $K = G m_1 m_2 \Rightarrow \frac{m}{K} = \frac{1}{G(m_1+m_2)}$. Si $m_1 \gg m_2 \Rightarrow \frac{m}{K} \approx \frac{1}{G m_1}$.

Teorema de Newton de las órbitas giratorias.

Recordemos que:

$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{K}{r}$; $l = mr^2 \dot{\theta}$ y $r = \frac{l^2/mK}{1 + e\cos\theta}$. Se han hecho observaciones y se encontró que para Mercurio tenemos el sig. potencial:

$$V(r) = -\frac{K}{r} + \frac{h}{r^2}, \quad h \ll 1.$$

En este contexto:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{K}{r} + \frac{h}{r^2}$$
$$= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{l^2 + 2mh}{2mr^2} - \frac{K}{r}$$

Definimos $\tilde{l}^2 = l^2 + 2mh$. Por ende:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{\tilde{l}^2}{2mr^2} - \frac{K}{r}$$

Si $\tilde{l} = mr^2 \frac{d\tilde{\theta}}{dt}$, entonces $d\tilde{\theta} = \frac{\tilde{l}}{mr^2} \cdot \frac{l}{l} dt \Rightarrow d\tilde{\theta} = \frac{\tilde{l}}{l} d\theta$. Llamamos $\alpha = \frac{\tilde{l}}{l}$, luego:

$$d\tilde{\theta} = \alpha\, d\theta \Rightarrow \tilde{\theta} = \alpha\theta$$

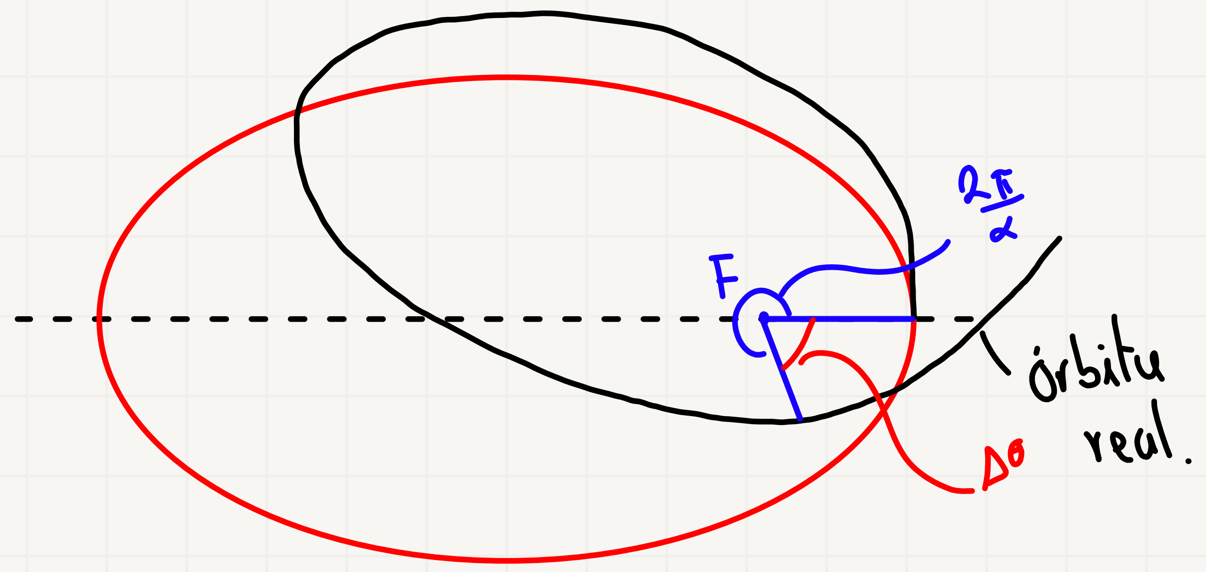
La ecuación de la órbita resulta:

$$r = \frac{\tilde{l}^2/mK}{1 + e\cos(\alpha\theta)}$$
$$= \frac{(l^2 + 2mh)/mK}{1 + e\cos\left(\theta\sqrt{1 + \frac{2mh}{l^2}}\right)}$$

En términos de la excentricidad:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos(\alpha\theta)}$$

r_{min} es cuando $\alpha\theta = 2K\pi$, $K \in \mathbb{Z} \Rightarrow r_{min} = a(1-e)$. Visualmente es como si la órbita estuviese girando.



Llamemos $\Delta\theta = 2\pi - \frac{2\pi}{\alpha} = 2\pi\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)$. La velocidad de precesión (mov. de la órbita):

$$\dot{\Omega} = \frac{\Delta\theta}{T}$$

Si $\alpha \in \mathbb{Q}$, la órbita llegará a cerrarse. Entonces:

$$\frac{\Delta\theta}{T} = \frac{2\pi}{T}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$= \frac{2\pi}{T}\left(1-\frac{l}{\lambda}\right)$$

$$= \frac{2\pi}{T}\left(1-\left(1+\frac{2mh}{l^2}\right)^{-1/2}\right)$$

Aproximando:

$$\frac{\Delta\theta}{T} = \frac{2\pi}{T}\left(1-1+\frac{mh}{l^2}\right)$$

$$= \frac{2\pi}{T}\cdot\frac{mh}{l^2}$$

Movimiento en función del tiempo en el problema de Kepler.

Con el potencial $V(r)$ se obtuvo que:

$$t = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}}$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_{r_0}^{r} \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2 + \frac{Kr}{E} - \frac{l^2}{2mE}}}$$

Pero como $dt = \frac{mr^2}{l}d\theta$, considerando la ec. de la órbita, obtenemos que:

$$t = \frac{l^3}{mK^2}\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$$

y:

$$\int \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2} = \frac{2}{(1+e)^{3/2}}\,\mathrm{atan}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right) - \frac{e}{1-e^2}\,\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+e\cos\theta}$$

Para órbitas parabólicas $e=1$. Tomando $\theta_0 = 0$:

$$t = \frac{l^3}{mk^2}\int_0^\theta \frac{d\theta}{(1+\cos\theta)^2} \; ; \; \text{con } 1+\cos\theta = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right):$$

$$= \frac{l^3}{mk^2}\int_0^\theta \frac{\sec^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}{4}\,d\theta$$

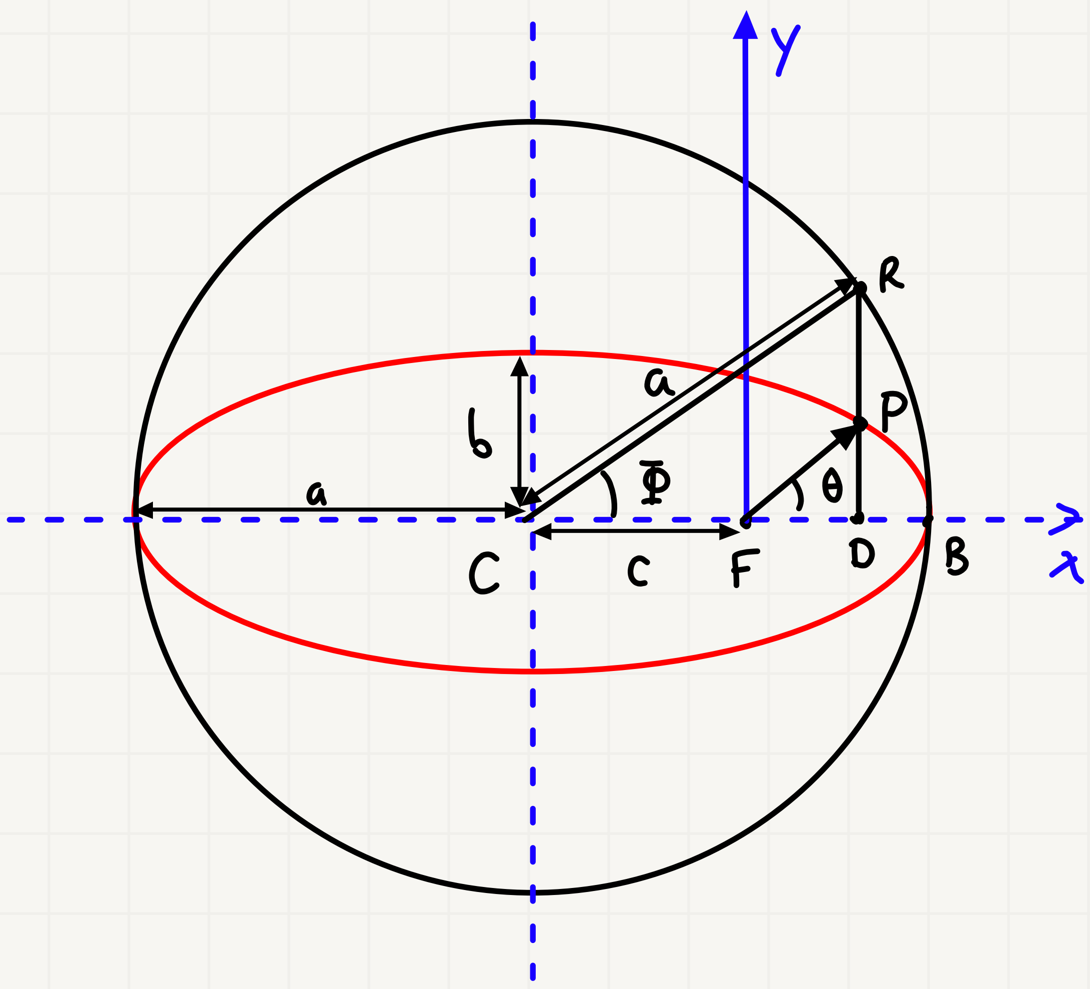
$$= \frac{l^3}{4mk^2}\int_0^\theta \sec^4\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

Haciendo el cambio $x = \tan(\theta/2)$ tenemos que:

$$= \frac{l^3}{2mk^2}\int_0^{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}(1+x^2)\,dx$$

$$= \frac{l^3}{2mk^2}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{3}\tan^3\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

Mov. en función de t. Órbitas elípticas.



El centro de la elipse se encuentra en $C(-c,0)$, luego la ec. de la elipse será:

$$\frac{(x+c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots (1)$$

Queremos escribir esto en términos de Φ y r. Vemos que:

$$x = a\cos\Phi - c \quad \ldots (2)$$

Sustituyendo (2) en (1):

$$y = b\,\text{sen}\,\Phi \quad \ldots (3)$$

r será:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$= (a\cos\Phi - c)^2 + (b\,\text{sen}\,\Phi)^2$$

$$= a^2\cos^2\Phi - 2ac\cos\Phi + c^2 + b^2\,\text{sen}^2\,\Phi$$

Como $a^2 = b^2 + c^2$, entonces:

$$r = a - c\cos\Phi \quad \ldots (4)$$

Consideremos la 2^{da} Ley de Kepler en su forma de integral de áreas.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{l}{2m} = \frac{\pi ab}{T}$$

Con T el periodo. Por ende:

$$r^2\dot{\theta} = \frac{l}{m} = \frac{2\pi ab}{T}$$

Queremos determinar $\frac{l}{m}$. Para ello, veamos que:

$$\vec{l} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

Con $\vec{r} = (x, y, 0)$ y $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, 0)$. Luego:

$$\frac{\vec{l}}{m} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = (x\dot{y} - \dot{x}y)\hat{k}$$

Donde:

$$\dot{x} = -a\dot{\Phi}\,\text{sen}\,\Phi \quad y \quad \dot{y} = b\dot{\Phi}\cos\Phi$$

$$\Rightarrow r^2\dot{\theta} = \dot{\Phi}\left[(a\cos\Phi - c)(b\cos\Phi) + ab\,\text{sen}^2\Phi\right]$$

$$= \dot{\Phi}\left[ab\cos^2\Phi - bc\cos\Phi + ab\,\text{sen}^2\Phi\right]$$

$$= b\dot{\Phi}\left[a - c\cos\Phi\right]$$

$$= br\dot{\Phi}$$

$$\Rightarrow r^2\dot{\theta} = rb\dot{\Phi}$$

y, dividiendo por ab:

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{r}{a}\dot{\Phi}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \left(1 - \frac{c}{a}\cos\Phi\right)\dot{\Phi}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{T}t = \Phi - \frac{c}{a}\,\text{sen}\,\Phi \Big\} \text{Ecuación de Kepler}$$

$$\Rightarrow wt = \Phi - \frac{c}{a}\,\text{sen}\,\Phi, \quad w = \frac{2\pi}{T}$$

$$\Rightarrow wt = \Phi - e\,\text{sen}\,\Phi$$

Relación entre θ y Φ:

$$x = a\cos\Phi - c$$

$$r = a - c\cos\Phi$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

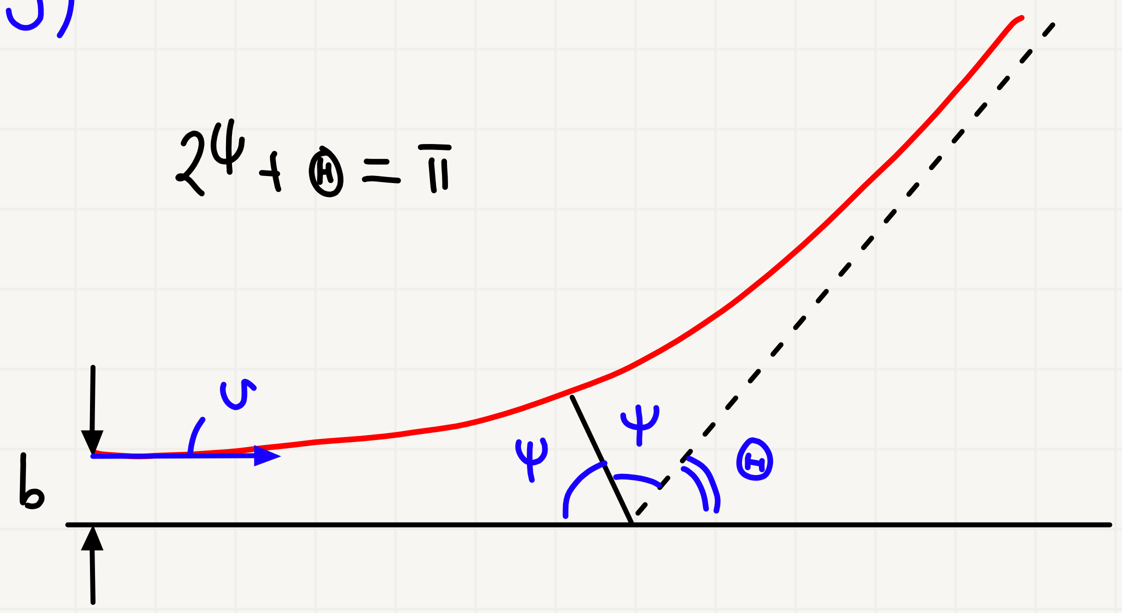
$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{a\cos\Phi - c}{c - a\cos\Phi}$$

$$\Rightarrow \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \frac{(1+e)(1-\cos\Phi)}{(1-e)(1+\cos\Phi)}$$

$$\Rightarrow \tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{\Phi}{2}$$

Segundo Examen Parcial.

3)



$$F(r) = \frac{K}{r^3},\ K > 0. \quad F(1/x) = Kx^3$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dx^2} + x = -\frac{m}{l^2 x^2} F(1/x)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{d\theta^2} + x\left(1 + \frac{mK}{l^2}\right) = 0$$

Llamemos $\omega^2 = 1 + \frac{mK}{l^2}$. Su solución es:

$$x(\theta) = A \operatorname{sen} \omega\theta + B \cos \omega\theta$$

Si $r \to \infty \Rightarrow \theta \to \Theta$. Por tanto:

$$0 = A \operatorname{sen} \omega \Theta + B \cos \omega \Theta \quad \ldots (1)$$

Para determinar a A y B, queremos r_{min}:

$$-\frac{1}{r^2}\dot{r} = A\omega\dot{\theta}\cos(\omega\theta) - B\omega\dot{\theta}\operatorname{sen}(\omega\theta)$$

Cuando $\dot{r} = 0$:

$$\Rightarrow 0 = A\cos(\omega\theta) - B\operatorname{sen}(\omega\theta)$$

$$\Rightarrow 0 = A\cos[\omega(\theta+\psi)] - B\operatorname{sen}[\omega(\Theta+\psi)]$$

$$\Rightarrow A = B\tan[\omega(\Theta+\psi)] \quad \ldots (1)$$

Pero, de (1):

$$A = -B\cot(\omega\Theta)$$

$$\Rightarrow 0 = \cos(\omega\Theta)\cos[\omega(\Theta+\psi)] + \operatorname{sen}(\omega\Theta)\operatorname{sen}[\omega(\Theta+\psi)]$$

$$\Rightarrow 0 = \cos(\omega\Theta - \omega\Theta - \omega\psi)$$

$$\Rightarrow \omega\psi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \psi = \frac{\pi}{2\omega}$$

$$\therefore \Theta = \pi\left(1 - \frac{1}{\omega}\right)$$

$\square$

Notas: