

# 10° Escuela Oaxaqueña de Matemáticas

## Notas

Cristo Daniel Alvarado

26 de diciembre de 2024

---

# CAPÍTULO 1

---

## EJERCICIOS Y PROBLEMAS TEORÍA DE GRUPOS

---

### §1.1 PRELIMINARES TEORÍA DE GRUPOS

---

#### Ejercicio 1.1.1

Supongamos que  $G$  es un grupo que tiene un subgrupo de índice finito  $H$ . Demuestra que  $G$  tiene un subgrupo normal de índice finito.

#### Demostración:

Se tienen dos casos:

- $G$  es finito, en cuyo caso  $G$  es un subgrupo normal de  $G$  de índice finito.
- $G$  es infinito.

#### Ejercicio 1.1.2

¿Cuál es el grupo de automorfismos del grupo aditivo  $\mathbb{Z}$ ?

#### Solución:

Considere al grupo de automorfismos del grupo aditivo  $\mathbb{Z}$ , digamos:

$$A = \text{Aut}(\mathbb{Z}) = \left\{ f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \mid f \text{ es isomorfismo} \right\}$$

Afirmamos que  $\text{Aut}(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  donde  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  es el grupo aditivo de los enteros módulo 2. En efecto, afirmamos que:

$$\text{Aut}(\mathbb{Z}) = \{1_{\mathbb{Z}}, -1_{\mathbb{Z}}\}$$

donde  $1_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  es la identidad de  $\mathbb{Z}$  y  $-1_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  es tal que  $-1_{\mathbb{Z}}(m) = -m$  para todo  $m \in \mathbb{Z}$ . En efecto, es claro que  $\{1_{\mathbb{Z}}, -1_{\mathbb{Z}}\} \subseteq \text{Aut}(\mathbb{Z})$ .

Sea ahora  $f \in \text{Aut}(\mathbb{Z})$ , se tiene que:

$$f(m) = f(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{m\text{-veces}}) = \underbrace{f(1) + \cdots + f(1)}_{m\text{-veces}} = mf(1)$$

para todo  $m \in \mathbb{N}$ . De forma análoga se demuestra que:

$$f(-m) = -mf(1), \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Así que:

$$f(m) = mf(1), \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

por lo que  $f$  está únicamente determinada por su valor en 1. Como  $\mathbb{Z}$  tiene únicamente dos generadores (por ser un grupo cíclico infinito), al ser  $f$  automorfismo debe suceder que  $\mathbb{Z} = \langle f(1) \rangle$ , así que  $f(1) = 1$  ó  $f(1) = -1$ , es decir que:

$$\begin{aligned} f(m) &= mf(1) \\ &= \begin{cases} m & \text{si } f(1) = 1 \\ -m & \text{si } f(1) = -1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}}(m) & \text{si } f(1) = 1 \\ -\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}(m) & \text{si } f(1) = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

es decir, que  $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}}$  o  $f = -\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}$ . Por tanto,  $\text{Aut}(\mathbb{Z}) = \{\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}, -\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}\}$ . Para la otra parte, es inmediato que el grupo  $\{\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}, -\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}\}$  con la composición de funciones es isomorfo al grupo aditivo  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .  $\square$

### Ejercicio 1.1.3

Supongamos que tenemos una sucesión exacta corta de grupos:

$$1 \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow K \rightarrow 1$$

demuestra que si  $N$  y  $K$  son grupos finitamente generados, entonces  $G$  es finitamente generado.

### Demostración:

Al tenerse la sucesión exacta corta de grupos, estamos diciendo que existen homomorfismos  $f_0 : \langle 1 \rangle \rightarrow N$ ,  $f_1 : N \rightarrow G$ ,  $f_2 : G \rightarrow K$  y  $f_3 : K \rightarrow \langle 1 \rangle$  tales que:

$$\text{Im}(f_{i-1}) = \ker(f_i), \quad \forall i = 1, 2, 3$$

En particular, notemos que  $f_1$  es monomorfismo y que  $f_2$  es epimorfismo, ya que:

$$\ker(f_1) = \text{Im}(f_0) = \langle e_N \rangle$$

siendo  $e_N$  la identidad del grupo  $N$  y, además:

$$\text{Im}(f_2) = \ker(f_3) = K$$

por lo que se tiene lo afirmado.

Supongamos ahora que  $N$  y  $K$  son finitamente generados, entonces existen elementos  $n_1, \dots, n_m \in N$  y  $k_1, \dots, k_l \in K$  tales que:

$$N = \langle n_1, \dots, n_m \rangle \quad \text{y} \quad K = \langle k_1, \dots, k_l \rangle$$

Como  $f_3$  es epimorfismo, entonces del Primer Teorema de Isomorfismo se sigue que:

$$K \cong G / \ker(f_3) = G / \text{Im}(f_2) = G / N'$$

donde  $N' = f_2(N)$ .

■

**Ejercicio 1.1.4**

Demuestra que en el producto semidirecto  $N \rtimes_{\varphi} H$ ,  $H$  es un subgrupo normal si y sólo si  $\varphi$  es el homomorfismo trivial.

**Demostración:**

Recordemos que el producto semidirecto  $N \rtimes_{\varphi} H$  es el grupo  $N \times H$  dotado de la operación:

$$(n, h)(n', h') = (n\varphi_h(n'), hh')$$

donde  $\varphi : H \rightarrow \text{Aut}(N)$  es un homomorfismo tal que  $h \mapsto \varphi_h$ . El elemento neutro de este grupo es  $(e_N, e_H)$ , donde cada elemento tiene como inverso:

$$(n, h)^{-1} = ((\varphi_{h^{-1}}(n))^{-1}, h^{-1})$$

$\Rightarrow$ ): Suponga que  $H$  es un subgrupo normal de  $N \rtimes_{\varphi} H$ , esto es que el grupo  $H$  visto como subgrupo de  $N \rtimes_{\varphi} H$ :

$$H = \{(e_N, h) \mid h \in H\}$$

es subgrupo normal de  $N \rtimes_{\varphi} H$ . Como es normal, se sigue que:

$$(n_1, h_1)(e_N, h)(n_1, h_1)^{-1} \in H$$

para todo  $(n_1, h_1) \in H$  y para todo  $h \in H$ . ■

**Ejercicio 1.1.5**

Demuestra que el producto libre en  $n$  generadores  $F_n$  es isomorfo al producto libre de  $n$  copias de  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}$ .

**Demostración:****Ejercicio 1.1.6**

Demuestra que el producto libre  $G * H$  de grupos no triviales  $H$  y  $G$  tiene centro trivial. ■

**Demostración:**

Sean  $G$  y  $H$  grupos no triviales. Considere  $G * H$  su producto libre. El centro de  $G * H$  se define por:

$$Z(G * H) = \left\{ x \in G * H \mid xy = yx, \forall y \in G * H \right\}$$

**Ejercicio 1.1.7**

Demuestra que  $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$  es isomorfo a  $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$ . ■

**Demostración:****Ejercicio 1.1.8**

Denotemos por  $F_n$  al grupo libre en  $n$  generadores. Demuestre que  $F_n$  es isomorfo a  $F_m$  si y sólo si  $n = m$ . ■

**Demostración:**

$\Rightarrow$ ) : Supongamos que  $F_n$  es isomorfo a  $F_m$ . ■