

# Ejercicios Dugundji Topology y Problemas Varios

Cristo Daniel Alvarado

7 de mayo de 2024

# Índice general

<b>1. Espacios Topológicos</b>	<b>2</b>
1.1. Conceptos Fundamentales . . . . .	2
1.3. Creación de topologías dados conjuntos . . . . .	7
1.4. Conceptos Elementales . . . . .	8
1.5. Creando topologías a partir de operaciones elementales . . . . .	17
1.6. $G_\delta$ , $F_\sigma$ y conjuntos de Borel . . . . .	20
1.7. Relativización . . . . .	21
1.8. Funciones continuas . . . . .	22
1.9. Definición por partes de funciones . . . . .	23
1.10. Funciones continuas en $\mathbb{E}^1$ . . . . .	24
1.11. Funciones abiertos y cerradas . . . . .	25
1.12. Homeomorfismos . . . . .	26
<b>2. Segundo Parical</b>	<b>27</b>
2.1. Axiomas de Separación . . . . .	27

# Capítulo 1

## Espacios Topológicos

### 1.1. Conceptos Fundamentales

#### Observación 1.1.1

El símbolo  $\aleph(X)$ , donde  $X$  es un conjunto, denota al cardinal del conjunto (realmente denota a otra cosa que viene a ser lo mismo, pero para usos prácticos tomaremos lo anterior como cierto).

#### Ejercicio 1.1.1

Pruebe lo siguiente:

1. Sea  $X$  un conjunto infinito. Pruebe que  $\mathcal{A}_0 = \{A \subseteq X \mid X - A \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$  es una topología sobre  $X$ .
2. Sea  $\aleph(X) \geq \aleph_0$ . Pruebe que  $\mathcal{A}_1 = \{A \subseteq X \mid \aleph(X - A) < \aleph(X)\} \cup \{\emptyset\}$  es una topología sobre  $X$ .

#### Demostración:

De (1): Es la topología de los complementos finitos (la prueba de esto se hizo en las notas).

De (2): Veamos que se verifican las tres condiciones:

1. Por definición de  $\mathcal{A}_1$  se tiene que  $\emptyset \in \mathcal{A}_1$  y, como  $\aleph(\emptyset) < \aleph_0$ , entonces  $\aleph(X - \emptyset) < \aleph(X)$ , por ende  $X \in \mathcal{A}_1$ .
2. Sea  $\mathcal{E}$  una subfamilia no vacía arbitraria de  $\mathcal{A}_1$ . Considere a  $\bigcup \mathcal{E}$ . Como la familia es no vacía, existe  $E_0 \in \mathcal{E}$ , se tiene así que:

$$\begin{aligned} E_0 \subseteq \bigcup \mathcal{E} &\Rightarrow X - \bigcup \mathcal{E} \subseteq X - E_0 \\ &\Rightarrow \aleph\left(X - \bigcup \mathcal{E}\right) \subseteq \aleph(X - E_0) \end{aligned}$$

por Cantor-Bernstein. Por lo cual al tenerse que  $\bigcup \mathcal{E} \subseteq X$ , se sigue que  $\bigcup \mathcal{E} \in \mathcal{A}_1$ .

3. Sean  $A, B \in \mathcal{A}_1$ , entonces  $\aleph(X - A) < \aleph(X)$  y  $\aleph(X - B) < \aleph(X)$ . Notemos que

$$X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B)$$

Entonces  $\aleph(X - (A \cap B)) = \aleph((X - A) \cup (X - B)) \leq \aleph(X - A) + \aleph(X - B) < \aleph(X) + \aleph(X) = 2\aleph(X) = \aleph(X)$ , pues  $\aleph(X) \geq \aleph_0$ . Por tanto, al ser  $A \cap B \subseteq X$ , se sigue que  $A \cap B \in \mathcal{A}_1$ .

Por las tres condiciones anteriores, se sigue que  $\mathcal{A}_1$  es una topología sobre  $X$ . ■

**Ejercicio 1.1.2**

¿Cuántas topologías distintas puede tener un conjunto de tres elementos? ¿Cuál es su orden parcial?

**Solución:**

Considere  $X = \{a, b, c\}$ . De todas las topologías que puede tener, deben de estar al menos la topología discreta y la indiscreta, formada por los conjuntos:

$$\begin{aligned}\tau_D &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b, c\}\} = \mathcal{P}(\{a, b, c\}) \\ \tau_I &= \{\emptyset, \{a, b, c\}\}\end{aligned}$$

Ahora, las otras que se pueden tener son aquellas que solo contienen a uno de los elementos, es decir las siguientes:

$$\begin{aligned}\tau_a &= \{\emptyset, \{a\}, \{a, b, c\}\} \\ \tau_b &= \{\emptyset, \{b\}, \{a, b, c\}\} \\ \tau_c &= \{\emptyset, \{c\}, \{a, b, c\}\}\end{aligned}$$

y, también aquellas que contengan a un par de elementos, pero de esta forma:  $\{a, b\}$ , que serían las siguientes:

$$\begin{aligned}\tau_{a,b} &= \{\emptyset, \{a, b\}, \{a, b, c\}\} \\ \tau_{b,c} &= \{\emptyset, \{b, c\}, \{a, b, c\}\} \\ \tau_{c,a} &= \{\emptyset, \{c, a\}, \{a, b, c\}\}\end{aligned}$$

(en esta se verifica casi de forma inmediata que es una topología sobre  $X$ ). Ahora, se deben considerar aquellas en las que se tiene más de un elemento no trivial (cuando menciono la palabra trivial, me refiero a que no sea alguno de  $\emptyset$  o  $X = \{a, b, c\}$ ). Por ejemplo, consideremos a  $\{a, b\}$  un elemento no trivial, y sea  $\tau$  una topología sobre  $X$  que contiene a este elemento. Se tienen seis casos:

1.  $a \in \tau$ , entonces al ser cerrado bajo uniones e intersecciones se tiene que (al menos)  $\tau$  debe ser de la forma:

$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$

2.  $\{b\} \in \tau$ , como con el caso anterior, se tendría que (al menos)  $\tau$  debe ser de la forma:

$$\tau = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$

Ahora, si  $\{a\} \in \tau$ , entonces (al menos)  $\tau$  debe ser de la forma:

$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$

3.  $\{c\} \in \tau$ , se tiene entonces que una topología sobre  $X$  (al menos), debe ser:

$$\tau = \{\emptyset, \{c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$

4.  $\{b, c\} \in \tau$ , se tiene entonces que  $\tau$  debe ser de la forma (al menos):

$$\tau = \{\emptyset, \{b\}, \{b, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$

Son un vergo, nmms.

□

**Ejercicio 1.1.3**

Sean  $\tau_X$  y  $\tau_Y$  dos topologías en  $X$  y  $Y$ , respectivamente. ¿Es

$$\tau = \{A \times B \mid A \in \tau_X, B \in \tau_Y\}$$

una topología en  $X \times Y$ ?

**Solución:**

Veamos si se cumplen las tres condiciones para que  $\tau$  sea una topología sobre  $X$ .

1. Es claro que  $\emptyset, X \times Y \in \tau$ , pues  $\emptyset \in \tau_X, \tau_Y$  y  $X \in \tau_X$  y  $Y \in \tau_Y$ .
2. Sea  $\mathcal{C}$  una subfamilia no vacía de  $\tau$ . Entonces, cada elemento de  $\mathcal{C} = \{C_\alpha \mid \alpha \in I\}$  es de la forma:

$$C_\alpha = A_\alpha \times B_\alpha$$

donde  $A_\alpha \in \tau_X$  y  $B_\alpha \in \tau_Y$ , para todo  $\alpha \in I$ . Luego:

$$\bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \times B_\alpha$$

Veamos que en general no es cierto que  $\bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha \in \tau$ . En efecto, tomemos  $X = Y = \mathbb{R}$  (con la topología usual) y como conjuntos de la familia a:  $C_1 = (0, 1) \times (0, 1)$ , y  $C_2 = (1, 2) \times (1, 2)$ . Se tiene que:

$$C_1 \cup C_2 \notin \tau$$

ya que, en caso contrario se tendría que  $C_1 \cup C_2 = A \times B$ , con  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  abiertos con la topología usual.

Entonces, en particular los elementos  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) \in C_1 \cup C_2$ , por lo cual los elementos  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) \in C_1 \cup C_2 \#_c$ , por la forma en que se tomaron  $C_1$  y  $C_2$ . Por lo cual,  $C_1 \cup C_2$  no puede expresarse como el producto cartesiano de dos abiertos.

3. Sean  $C, D \in \tau$ , es decir que  $C = A_1 \times B_1$  y  $D = A_2 \times B_2$ , donde  $A_i \in \tau_X$  y  $B_i \in \tau_Y$  para  $i \in \{1, 2\}$ . Entonces:

$$\begin{aligned} C \cap D &= (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) \\ &= (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \end{aligned}$$

donde  $A_1 \cap A_2 \in \tau_X$  y  $B_1 \cap B_2 \in \tau_Y$ , por ende  $C \cap D \in \tau$ .

Por el inciso (2), se tiene que  $\tau$  (al menos en un caso particular) no es una topología sobre  $X \times Y$ .  $\square$

Recordemos la definición de un preorden y orden parcial:

**Definición 1.1.1**

Una relación binaria  $R$  en un conjunto  $A$  es llamada un **preorden** si es reflexiva y transitiva, esto es:

1.  $\forall a \in A, aRa$ .
2.  $(aRb) \vee (bRc) \Rightarrow aRc$ .

denotamos (en general) al preorden por  $\prec$ .

**Definición 1.1.2**

Sea  $(A, \prec)$  un conjunto preordenado.

1.  $m \in A$  es llamado **elemento maximal** en  $A$  si para todo  $a \in A$  tal que  $m \prec a \Rightarrow a \prec m$ .
2. Un elemento  $a_0 \in A$  es llamado **cota superior de un subconjunto**  $B \subseteq A$  si para todo  $b \in B$ ,  $b \prec a_0$ .
3. Un subconjunto  $B \subseteq A$  es llamado una **cadena** si cualesquiera dos elementos de  $B$  están relacionados, es decir que  $a, b \in B$  implica que  $a \prec b$  o  $b \prec a$ .

**Definición 1.1.3**

Sea  $A$  un conjunto preordenado. Un **orden parcial** es un preorden en  $A$  junto con la propiedad adicional:

$$(a \prec b) \wedge (b \prec a) \Rightarrow (a = b)$$

esta propiedad es llamada antisimetría. Un conjunto  $A$  adjutandole además un orden parcial es llamado un **conjunto parcialmente ordenado**. Un conjunto parcialmente ordenado que es también una cadena es llamado un **conjunto totalmente ordenado**.

**Ejercicio 1.1.4**

Sea  $X$  un conjunto parcialmente ordenado. Defina  $U \subseteq X$  abierto si y sólo si satisface la condición:  $(x \in U) \wedge (y \prec x) \Rightarrow y \in U$ . Pruebe que la familia

$$\mathcal{A} = \{U \subseteq X \mid U \text{ es abierto}\}$$

es una topología sobre  $X$ .

**Demostración:**

Se deben verificar que se cumplen las tres condiciones.

1.  $\emptyset \in \mathcal{A}$ , pues por vacuidad se cumple que  $\emptyset$  satisface la condición. Ahora, sea  $x \in X$  y  $y \prec x$ , entonces  $y \in X$  (pues es dónde se define el preorden). Por tanto,  $X \in \mathcal{A}$ .
2. Sea  $\mathcal{B}$  una familia no vacía de subconjuntos de  $\mathcal{A}$ . Si  $x \in \bigcup \mathcal{B}$ , entonces existe  $B_0 \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B_0$ .  
Ahora, si  $y \in X$  es tal que  $y \prec x$ , como  $x \in B_0$ , por ser  $B_0$  abierto se tiene que  $y \in B_0 \subseteq \bigcup \mathcal{B}$ . Por lo cual  $\bigcup \mathcal{B}$  es abierto.
3. Sean  $U, V \in \mathcal{A}$ , si  $U \cap V = \emptyset$  es claro que  $U \cap V \in \mathcal{A}$ . Suponga que la intersección es no vacía y sean  $x \in U \cap V$  y  $y \in X$  tal que  $y \prec x$ . En particular  $(x \in U) \wedge (y \prec x)$  y  $(x \in V) \wedge (y \prec x)$ , por ende  $y \in U \cap V$ , es decir que  $U \cap V \in \mathcal{A}$ .

Por los incisos anteriores, se tiene que  $\mathcal{A}$  es una topología sobre  $X$ . ■

**Ejercicio 1.1.5**

En  $\mathbb{Z}^+$  defina  $U \subseteq \mathbb{Z}^+$  que sea abierto si satisface la condición  $n \in U \Rightarrow$  cada divisor de  $n$  pertenece a  $U$ . Pruebe que esta es una topología en  $\mathbb{Z}^+$  y que no es la topología discreta.

**Demostración:**

Llamemos  $\tau$  a la familia de todos los conjuntos abiertos en  $\mathbb{Z}^+$ . Veamos que para  $\tau$  se cumplen las tres condiciones:

1.  $\emptyset \in \tau$ , esto es cierto por vacuidad. Ahora si  $n \in \mathbb{Z}^+$ , entonces todos sus divisores están en  $\mathbb{Z}^+$  (divisores positivos), por lo cual  $\mathbb{Z}^+ \in \tau$ .
2. Sea  $\mathcal{A}$  una familia no vacía de elementos de  $\tau$ , y sea  $n \in \bigcap \mathcal{A}$ , entonces existe  $A_0$  tal que  $n \in A_0$ , pero  $A_0$  es abierto, por lo cual contiene a todos los divisores de  $n$ . Como  $A \subseteq \bigcup \mathcal{A}$  entonces  $\bigcup \mathcal{A}$  contiene a todos los divisores de  $n$ , luego  $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$ .
3. Sean  $A, B \in \tau$  tales que  $A \cap B \neq \emptyset$ . Si  $n \in A \cap B$  entonces  $n \in A$  y  $n \in B$ , como  $A$  y  $B$  son abiertos, entonces estos dos conjuntos cumplen que cada divisor de  $n$  pertenece a  $A$  y  $B$ , en particular cada divisor de  $n$  pertenece a  $A \cap B$ . Por tanto,  $A \cap B \in \tau$ .

Por los tres incisos anteriores, se sigue que  $\tau$  es una topología sobre  $\mathbb{Z}^+$ . ■

**Ejercicio 1.1.6**

Pruebe lo siguiente:  $\tau$  es la topología discreta en  $X$  si y sólo si todo punto de  $X$  es un conjunto abierto (hablando de los conjuntos unipuntuales).

**Demostración:**

Se probará la doble implicación:  $\Rightarrow$ ): Suponga que  $\tau$  es la topología discreta, entonces  $\tau = \mathcal{P}(X)$ , en particular  $\{x\} \in \mathcal{P}(X)$ , para cada  $x \in X$ , esto es  $\{x\} \in \tau$ .

$\Leftarrow$ ): Suponga que todo conjunto unipuntual de  $X$  está en  $\tau$ , y sea  $A \in \mathcal{P}(X)$ , entonces:

$$A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$$

donde  $\{a\}$  es abierto y, por ende  $A$  es abierto al ser una unión arbitraria de abiertos. Por tanto,  $A \in \tau$ , Por ende  $\mathcal{P}(X) \subseteq \tau$ , pero siempre se tiene que  $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ , luego  $\tau = \mathcal{P}(X) = \tau_D$ . ■

## 1.3. Creación de topologías dados conjuntos

Mis ejercicios de la sección: 5 y 9.

### Ejercicio 1.3.1



## 1.4. Conceptos Elementales

Mis ejercicios de la sección: 8, 10, 14, 18, 22.

### Ejercicio 1.4.4

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. Pruebe que  $G$  es abierto en  $X$ , si y sólo si  $\overline{G \cap \overline{A}} = \overline{G} \cap \overline{A}$  para todo  $A \subseteq X$ .

### Demostración:

Se probará la doble implicación.

$\Rightarrow$ ): Suponga que  $G$  es abierto, Como  $A \subseteq \overline{A}$  para todo  $A \in X$ , se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} G \cap A &\subseteq G \cap \overline{A} \\ \Rightarrow \overline{G \cap A} &\subseteq \overline{G \cap \overline{A}} \end{aligned}$$

por lo cual basta probar la otra contención. Si  $x \in \overline{G \cap \overline{A}}$ , entonces para toda vecindad  $U$  de  $x$  se cumple que  $U \cap (G \cap \overline{A}) \neq \emptyset$ , sea  $y \in U \cap (G \cap \overline{A})$  entonces, como el conjunto  $U \cap G$  es una vecindad de  $y$ , se tiene que  $U \cap (G \cap A) \neq \emptyset$ , es decir que existe un elemento  $z \in U$  tal que  $z \in G \cap A$ , pero  $U$  originalmente era una vecindad de  $x$ , luego  $x \in \overline{G \cap A}$ , lo cual prueba la otra contención. ■

### Ejercicio 1.4.5

Pruebe que si  $(X, \tau)$  es un espacio topológico, entonces si  $A \subseteq X$  tal que  $A' = \emptyset$  implica que  $A$  es cerrado.

### Demostración:

Sea  $A \subseteq X$  tal que  $A' = \emptyset$ . Como

$$\overline{A} = A \cup A' = A$$

se tiene entonces que  $A$  coincide con su cerradura, la cual es cerrada. Por tanto,  $A$  es cerrado. ■

### Ejercicio 1.4.6

Sea  $A = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathbb{E}^1$ . Pruebe que  $A' = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$  y que  $A'' = \{0\}$ .

### Demostración:

### Ejercicio 1.4.7

Sea  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$  una familia de subconjuntos de  $X$ . Suponga que  $\bigcup_{\alpha \in I} \overline{A_\alpha}$  es cerrado. Pruebe que  $\bigcup_{\alpha \in I} \overline{A_\alpha} = \overline{\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha}$ .

### Demostración:

Ya se sabe que

$$\bigcup_{\alpha \in I} \overline{A_\alpha} \subseteq \overline{\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha}$$

Hay que ver la otra contención. Observemos que  $\bigcup_{\alpha \in I} \overline{A_\alpha}$  es un cerrado que contiene a  $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ , luego, por minimalidad de la cerradura, debe suceder que:

$$\overline{\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha} \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} \overline{A_\alpha}$$

pues, la cerradura de un conjunto debe estar contenida en cualquier cerrado que contenga al conjunto. Luego, por las dos contenciones, se sigue que:

$$\bigcup_{\alpha \in I} \overline{A_\alpha} = \overline{\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha}$$

■

#### Ejercicio 1.4.8

Pruebe que  $\text{Fr}(A) = \emptyset$  si y sólo si  $A$  es abierto y cerrado.

#### Demostración:

$\Rightarrow$ ) : Suponga que  $\text{Fr}(A) = \emptyset$ . Se tiene entonces que:

$$\emptyset = \text{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{X - A}$$

Afirmamos que  $A = \overline{A}$  y que  $X - A = \overline{X - A}$ . En efecto, ya se sabe que  $A \subseteq \overline{A}$ .

Suponga que existe  $x \in \overline{A}$  tal que  $x \notin A$ , como  $X = A \cup (X - A)$ , se sigue que  $x \in X - A \subseteq \overline{X - A}$ , luego  $x \in \overline{A} \cap \overline{X - A} = \emptyset$  lo cual contradice la igualdad anterior. Por tanto,  $\overline{A} \subseteq A$ , se decir que  $A = \overline{A}$ .

De forma análoga se prueba que  $X - A = \overline{X - A}$ . Entonces,  $A$  es un conjunto cerrado, ya que coincide con su cerradura, y abierto ya que su complemento es cerrado. Por ende,  $A$  es abierto y cerrado.

$\Leftarrow$ ) : Suponga que  $A$  es abierto y cerrado, entonces se tiene que  $A = \overline{A}$  y  $X - A = \overline{X - A}$ . Por ende:

$$\text{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{X - A} = A \cap (X - A) = \emptyset$$

como se quería demostrar.

■

#### Ejercicio 1.4.9

Pruebe las siguientes fórmulas:

1.  $\text{Fr}(\text{Fr}(\text{Fr}(A))) = \text{Fr}(\text{Fr}(A))$ .
2.  $\text{Fr}(\overset{\circ}{A}) \subseteq \text{Fr}(A)$ .
3.  $\overbrace{A - B}^{\circ} \subseteq \overset{\circ}{A} - \overset{\circ}{B}$ .

#### Demostración:

De (1): Sea  $B \subseteq X$ . Entonces,

$$\text{Fr}(B) = \overline{B} \cap \overline{X - B}$$

por tanto,

$$\begin{aligned} \text{Fr}(\text{Fr}(B)) &= \overline{\overline{B} \cap \overline{X - B}} \cap \overline{\overline{B} \cap \overline{X - B}} \\ &= (\overline{\overline{B} \cap \overline{X - B}}) \cap \overline{\overline{B} \cap \overline{X - B}} \\ &= \text{Fr}(B) \cap \overline{\text{Fr}(B)} \end{aligned}$$

por tanto,  $\text{Fr}(\text{Fr}(B)) \subseteq \text{Fr}(B)$ . En particular, para  $A \subseteq X$  se sigue que  $\text{Fr}(\text{Fr}(\text{Fr}(A))) \subseteq \text{Fr}(\text{Fr}(A))$  (tomando  $B = \text{Fr}(A)$ ).

Ahora, tenemos que:

$$\text{Fr}(\text{Fr}(\text{Fr}(A))) = \text{Fr}(\text{Fr}(A)) \cap \overline{X - \text{Fr}(\text{Fr}(A))}$$

Probaremos la otra contención. Afirmamos que  $\text{Fr}(\text{Fr}(A)) \subseteq \overline{X - \text{Fr}(\text{Fr}(A))}$ . En efecto, si  $x \in$

Suponga que  $x \in \text{Fr}(\text{Fr}(A))$  es tal que  $x \notin \overline{X - \text{Fr}(\text{Fr}(A))}$ . Entonces, existe  $U \subseteq X$  abierto que contiene a  $x$  tal que:

$$U \cap (X - \text{Fr}(\text{Fr}(A))) = \emptyset$$

por tanto,  $U \subseteq \text{Fr}(\text{Fr}(A))$ . De esta forma, al ser  $x$  arbitrario, se sigue que el conjunto  $\text{Fr}(\text{Fr}(A)) - \overline{X - \text{Fr}(\text{Fr}(A))}$  es abierto, en particular,  $\text{Fr}(\text{Fr}(A)) - \overline{X - \text{Fr}(\text{Fr}(A))} \subseteq \overbrace{\text{Fr}(\text{Fr}(A))}^{\circ}$ .

De (2): Se tiene que

$$\overset{\circ}{A} \subseteq A \subseteq \overline{A}$$

Por tanto,

$$\overline{\overset{\circ}{A}} \subseteq \overline{A}$$

Además,

$$\begin{aligned} X - A &\subseteq X - \overset{\circ}{A} \\ \Rightarrow \overline{X - A} &\subseteq \overline{X - \overset{\circ}{A}} \end{aligned}$$

pero,  $X - \overset{\circ}{A}$  es cerrado, luego  $X - \overset{\circ}{A} = \overline{X - \overset{\circ}{A}}$ . Por ende:

$$\overline{X - A} \subseteq X - \overset{\circ}{A}$$

Para probar el resultado, basta con probar que  $\overline{X - A} = X - \overset{\circ}{A}$ . Si  $x \in X - \overset{\circ}{A}$  entonces,  $x \notin \overset{\circ}{A}$  por tanto, para todo abierto  $U \subseteq X$  tal que  $x \in U$ , se tiene que:

$$U \not\subseteq A$$

por tanto,  $U \cap (X - A) \neq \emptyset$ . Se sigue entonces que  $x \in \overline{X - A}$ , de donde se sigue que  $X - \overset{\circ}{A} \subseteq \overline{X - A}$ . Por la contención anterior, se tiene que  $\overline{X - A} = X - \overset{\circ}{A}$ . Así:

$$\begin{aligned} \text{Fr}(\overset{\circ}{A}) &= \overline{\overset{\circ}{A}} \cap \overline{X - \overset{\circ}{A}} \\ &= \overline{\overset{\circ}{A}} \cap (X - \overset{\circ}{A}) \\ &= \overline{\overset{\circ}{A}} \cap \overline{X - A} \\ &\subseteq \overline{A} \cap \overline{X - A} \\ &= \text{Fr}(A) \\ \Rightarrow \text{Fr}(\overset{\circ}{A}) &\subseteq \text{Fr}(A) \end{aligned}$$

De (3):

■

#### Ejercicio 1.4.10

Suponga que  $\text{Fr}(A) \cap \text{Fr}(B) = \emptyset$ . Pruebe que  $\overbrace{A \cup B}^{\circ} = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$  y que  $\text{Fr}(A \cap B) = [\overline{A} \cap \text{Fr}(B)] \cup [\text{Fr}(A) \cap \overline{B}]$ .

**Demostración:**

Ya se sabe que  $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subseteq \overset{\circ}{A \cup B}$ . Probemos la otra contención.

Suponga que existe  $x \in \overset{\circ}{A \cup B}$  tal que  $x \notin \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ , es decir que  $x \in X - (\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}) = (X - \overset{\circ}{A}) \cap (X - \overset{\circ}{B})$ .

Por tanto, para todo abierto  $U \subseteq X$  tal que  $x \in U$  se tiene que  $U \not\subseteq A$  y  $U \not\subseteq B$ . Se tienen tres casos:

1.  $x \in A \cap B$ : En tal caso, se sigue que  $x \in \text{Fr}(A) \cap \text{Fr}(B)$ , ya que los conjuntos:

$$U \cap A, U \cap (X - A), U \cap B, U \cap (X - B) \neq \emptyset$$

son no vacíos, para todo  $U$  abierto que contiene a  $x$ , pero esto es una contradicción, ya que  $\text{Fr}(A) \cap \text{Fr}(B) = \emptyset \#_c$ .

2.  $x \in A - B$ . Como  $x \in \overset{\circ}{A \cup B}$ , existe un abierto  $V \subseteq X$  que contiene a  $x$  tal que  $V \subseteq A \cup B$ . Sea  $U \subseteq X$  abierto que contiene a  $x$ . Se tiene que:

$$U \cap A, U \cap (X - B) \neq \emptyset$$

pues,  $x$  está en ambos conjuntos. Ahora, como  $U \not\subseteq A$ , entonces la intersección  $U \cap (X - A) \neq \emptyset$ , luego  $x \in \text{Fr}(A)$ .

Considere al abierto  $U_0 = U \cap V$ . Este es un abierto que contiene a  $x$  tal que  $U_0 \subseteq A \cup B$  (pues,  $V \subseteq A \cup B$ ). Pero, como  $U_0 \not\subseteq A$ , debe tenerse que existe  $y \in U_0$  tal que  $y \in B$ . Luego, la intersección:

$$U_0 \cap B \neq \emptyset \Rightarrow U \cap B \neq \emptyset$$

por ende,  $x \in \text{Fr}(B)$ , de donde se sigue que  $x \in \text{Fr}(A) \cap \text{Fr}(B)$ , pero esto es una contradicción, ya que  $\text{Fr}(A) \cap \text{Fr}(B) = \emptyset \#_c$ .

3.  $x \in B - A$ . De forma similar al caso anterior, se llega a que  $x \in \text{Fr}(A) \cap \text{Fr}(B) \#_c$ .

los tres incisos llevan a que  $x \in \text{Fr}(A) \cap \text{Fr}(B) \#_c$ . Por tanto,  $x \in \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ .

Para la segunda parte, observemos que:

$$\begin{aligned} \text{Fr}(A \cap B) &= \overline{A \cap B} \cap \overline{X - A \cap B} \\ &= \overline{A \cap B} \cap \overline{(X - A) \cup (X - B)} \\ &= \overline{A \cap B} \cap ((\overline{X - A}) \cup \overline{X - B}) \\ &= (\overline{A \cap B} \cap \overline{(X - A)}) \cup (\overline{A \cap B} \cap \overline{X - B}) \end{aligned}$$

para probar el resultado, basta con probar que  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ . Para ello, probaremos que si  $C \subseteq X$ , entonces:

$$X - \overline{C} = \overset{\circ}{X - C}$$

En efecto, como  $X - \overline{C} \subseteq X - C$  siendo el primer conjunto abierto, se sigue que  $X - \overline{C} \subseteq \overset{\circ}{X - C}$ . Ahora, el conjunto  $X - \overset{\circ}{X - C}$  es un cerrado que contiene a  $C$ . En efecto, es cerrado por ser el complemento de un abierto.

Ahora, si  $x \in C$ , entonces  $x \in X - (X - C)$ . Como  $\overset{\circ}{X - C} \subseteq X - C$ , se sigue que  $x \in X - \overset{\circ}{X - C}$ . Por tanto,  $C \subseteq X - \overset{\circ}{X - C}$ . Luego, por minimalidad de la cerradura, se sigue que  $\overline{C} \subseteq X - \overset{\circ}{X - C}$ , es decir que  $\overset{\circ}{X - C} = X - (X - \overset{\circ}{X - C}) \subseteq X - \overline{C}$ .

Se tienen las contenciones  $X - \overline{C} \subseteq \overbrace{X - C}^{\circ}$  y  $\overbrace{X - C}^{\circ} \subseteq X - \overline{C}$ , por tanto, se sigue que  $X - \overline{C} = \overbrace{X - C}^{\circ}$ .

Con esto probado, tomemos  $C = A \cap B$ , entonces:

$$\begin{aligned} X - \overline{A \cap B} &= \overbrace{X - A \cap B}^{\circ} \\ &= \overbrace{(X - A) \cup (X - B)}^{\circ} \\ &= \overbrace{X - A}^{\circ} \cup \overbrace{X - B}^{\circ} \\ &= (X - \overline{A}) \cup (X - \overline{B}) \\ &= X - \overline{A \cap B} \\ \Rightarrow \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cap \overline{B} \end{aligned}$$

donde, el paso de la segunda a la tercera igualdad se da ya que  $\text{Fr}(X - A) \cap \text{Fr}(X - B) = \text{Fr}(A) \cap \text{Fr}(B) = \emptyset$ . Luego, se tiene que:

$$\begin{aligned} \text{Fr}(A \cap B) &= (\overline{A \cap B} \cap \overline{(X - A)}) \cup (\overline{A \cap B} \cap \overline{X - B}) \\ &= (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{(X - A)}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{X - B}) \\ &= ([\overline{A} \cap \overline{X - A}] \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap [\overline{B} \cap \overline{X - B}]) \\ &= (\text{Fr}(A) \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \text{Fr}(B)) \\ &= [\overline{A} \cap \text{Fr}(B)] \cup [\text{Fr}(A) \cap \overline{B}] \end{aligned}$$

lo cual prueba el resultado. ■

#### Ejercicio 1.4.11

¿Para qué espacios topológicos  $(X, \tau)$  el único conjunto denso es  $X$ ?

#### Demostración:

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico tal que  $X$  es el único conjunto denso en sí mismo. Si  $x \in X$ , entonces el conjunto  $X - \{x\}$  no es denso en  $X$ , por lo cual:

$$\overline{X - \{x\}} = X - \{x\}$$

luego,  $X - \{x\}$  es cerrado en  $X$ , es decir que  $\{x\}$  es abierto. Como  $x \in X$  fue arbitrario, se sigue que  $\{x\}$  es abierto, para todo  $x \in X$ . Por ende,  $\tau = \tau_D$  (en caso que de  $X$  no sea vacío).

Por tanto, los únicos espacios en los que ocurre esto, son aquellos en los que la topología es la discreta. ■

#### Ejercicio 1.4.12

Sea  $(X, \tau)$  espacio topológico y  $E, G \subseteq X$  abiertos densos en  $X$ . Pruebe que  $E \cap G$  es denso en  $X$ .

#### Demostración:

Sea  $U \subseteq X$  abierto. Para probar el resultado, debemos probar que  $U \cap (E \cap G) \neq \emptyset$ . Como  $U \cap E$  es abierto, entonces  $(U \cap E) \cap G = U \cap (E \cap G) \neq \emptyset$ .

En este caso, no es necesario que los dos sean abiertos a la vez, basta con que uno de ellos lo sea. ■

**Ejercicio 1.4.13**

Sean  $(X, \tau)$  un espacio topológico y  $D \subseteq X$  un conjunto denso en  $X$ . Pruebe que  $\overline{D \cap G} = \overline{G}$ , para todo  $G \subseteq X$  abierto.

**Demostración:**

Sea  $G \subseteq X$  abierto. Ya se tiene que:

$$\overline{D \cap G} \subseteq \overline{G}$$

pues,  $D \cap G \subseteq G$ . Se ahora  $x \in \overline{G}$ , entonces si  $U \subseteq X$  es abierto, se tiene que  $U \cap G \neq \emptyset$ . Como  $D$  es denso en  $X$ , entonces  $U \cap (D \cap G) = U \cap (G \cap D) = (U \cap G) \cap D \neq \emptyset$ , es decir que  $x \in \overline{D \cap G}$ .

De aquí se sigue la otra contención. Por las dos, se tiene que  $\overline{D \cap G} = \overline{G}$ . ■

**Ejercicio 1.4.14**

Sean  $(X, \tau)$  un espacio topológico y  $\mathcal{S}$  una sub-base para  $\tau$ , y  $D \subseteq X$  tal que  $D \cap S \neq \emptyset$  para todo  $S \in \mathcal{S}$  ¿Esto implica que  $D$  es denso en  $X$ ?

**Demostración:**

Como  $\mathcal{S}$  es una sub-base de  $\tau$ , entonces la colección formada por todas las intersecciones finitas de elementos de  $\mathcal{S}$ , forman una base de la topología  $\tau$ . No necesariamente se tiene que  $D$  es denso en  $X$ , pues si  $B \in \mathcal{B}$  es un básico, entonces existen  $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{S}$  tales que:

$$B = \bigcap_{i=1}^n S_i$$

Luego,  $D \cap S_i$  es no vacío para todo  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , pero no necesariamente  $D \cap \bigcap_{i=1}^n S_i \neq \emptyset$ .

En efecto, considere el espacio  $X = \{a, e, i, o, u\}$  y  $\mathcal{S} = \{\{a, e\}, \{e, i\}\}$ . Se tiene que  $\mathcal{S}$  es subbase de de la topología  $\tau = \tau(\mathcal{S}) = \{X, \{a, e, i\}, \{a, e\}, \{e, i\}, \{e\}, \emptyset\}$ . En el espacio topológico  $(X, \tau)$ , el conjunto  $D = \{a, i\}$  cumple que  $D \cap S \neq \emptyset$  para todo  $S \in \mathcal{S}$ , pero  $D$  no es denso en  $X$  ya que el abierto  $\{e\}$  no contiene puntos de  $D$ . ■

**Ejercicio 1.4.15****Ejercicio 1.4.16****Ejercicio 1.4.17****Ejercicio 1.4.18**

Se define el **exterior de un conjunto**  $A \subseteq X$ , denotado por  $\text{Ext}(A)$ , como el conjunto  $\text{Ext}(A) = \overbrace{X - A}$ . Pruebe lo siguiente:

1.  $\text{Ext}(A \cup B) = \text{Ext}(A) \cap \text{Ext}(B)$ .
2.  $A \cap \text{Ext}(A) = \emptyset$ .
3.  $X = \text{Ext}(\emptyset)$ .

$$4. \text{Ext}(X - \text{Ext}(A)) = \text{Ext}(A).$$

**Demostración:**

De (1): Notemos que:

$$\begin{aligned} \text{Ext}(A \cup B) &= \overbrace{X - A \cup B}^{\circ} \\ &= \overbrace{(X - A) \cap (X - B)}^{\circ} \\ &= \overbrace{X - A}^{\circ} \cap \overbrace{X - B}^{\circ} \\ &= \text{Ext}(A) \cap \text{Ext}(B) \end{aligned}$$

De (2): Sea  $A \subseteq X$ , se tiene que  $\overbrace{X - A}^{\circ} \subseteq X - A$ , por tanto,  $A \cap \text{Ext}(A) \subseteq A \cap (X - A) = \emptyset$ . Luego,  $A \cap \text{Ext}(A) = \emptyset$ .

De (3): Notemos que:

$$\begin{aligned} \text{Ext}(\emptyset) &= \overbrace{X - \emptyset}^{\circ} \\ &= \overset{\circ}{X} \\ &= X \end{aligned}$$

pues, el conjunto  $X$  es abierto.

De (4): Sea  $A \subseteq X$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \text{Ext}(X - \text{Ext}(A)) &= \overbrace{X - \text{Ext}(A)}^{\circ} \\ &= \overbrace{X - (X - \text{Ext}(A))}^{\circ} \\ &= \overset{\circ}{\text{Ext}(A)} \\ &= \text{Ext}(A) \end{aligned}$$

pues,  $\text{Ext}(A)$  es un conjunto abierto. ■

**Ejercicio 1.4.19**

**Ejercicio 1.4.20**

**Ejercicio 1.4.21**

**Ejercicio 1.4.22**

Un conjunto abierto  $U \subseteq X$  de un espacio topológico  $(X, \tau)$  es llamado **abierto regular** si  $U = \overset{\circ}{\overline{U}}$ ; un conjunto cerrado  $C \subseteq X$  es llamado **cerrado regular**, si  $C = \overline{\overset{\circ}{C}}$ . Pruebe lo siguiente:

1. Si  $A$  es cerrado, entonces  $\overset{\circ}{A}$  es un conjunto abierto regular.
2. Si  $U$  es abierto, entonces  $\overline{U}$  es un conjunto cerrado regular.
3. El complemento de un conjunto abierto regular (resp. cerrado) es un conjunto cerrado regular (resp. abierto).

4. Si  $U, V \subseteq X$  son conjuntos abiertos regulares, entonces  $U \subseteq V$  si y sólo si  $\overline{U} \subseteq \overline{V}$ .
5. Si  $A, B \subseteq X$  son conjuntos cerrados regulares, entonces  $A \subseteq B$  si y sólo si  $\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}$ .
6. Si  $U, V \subseteq X$  son abiertos regulares, entonces  $U \cap V$  también es abierto regular.
7. Si  $A, B \subseteq X$  son cerrados regulares, entonces  $A \cup B$  también es cerrado regular.

**Demostración:**

De (1): Sea  $A \subseteq X$  un conjunto cerrado. Hay que probar que  $\overset{\circ}{A}$  es abierto regular, es decir, que:

$$\overset{\circ}{A} = \overline{\overset{\circ}{A}}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{A} &\subseteq A \\ \Rightarrow \overline{\overset{\circ}{A}} &\subseteq \overline{A} = A \\ \Rightarrow \overline{\overset{\circ}{A}} &\subseteq \overset{\circ}{A}\end{aligned}$$

para la otra contención analicemos.  $\overline{\overset{\circ}{A}}$  es un cerrado para el que se cumple que  $\overset{\circ}{A} \subseteq \overline{\overset{\circ}{A}}$ , luego sacando interior de ambos lados, se sigue que:

$$\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}} \subseteq \overline{\overset{\circ}{A}}$$

por tanto, de las dos contenciones se sigue que:

$$\overset{\circ}{A} = \overline{\overset{\circ}{A}}$$

luego,  $\overset{\circ}{A}$  es un abierto regular.

De (2): Sea  $U \subseteq X$  abierto. Hay que probar que:

$$\overline{U} = \overline{\overline{U}}$$

En efecto, veamos que:

$$\begin{aligned}\overline{U} &\subseteq \overline{U} \\ \Rightarrow \overline{\overline{U}} &\subseteq \overline{\overline{U}} = \overline{U}\end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}U &\subseteq \overline{U} \\ \Rightarrow U &= \overset{\circ}{U} \subseteq \overline{\overset{\circ}{U}} \\ \Rightarrow \overline{U} &\subseteq \overline{\overline{\overset{\circ}{U}}}\end{aligned}$$

lo cual prueba la otra contención, así  $\overline{U} = \overline{\overline{U}}$ . Luego,  $\overline{U} = \overline{\overline{U}}$  por lo cual,  $\overline{U}$  es cerrado regular.

De (3): Basta con probar que el complemento de un conjunto abierto regular es un conjunto cerrado regular. Sea  $U \subseteq X$  abierto regular, es decir que:

$$U = \overline{\overset{\circ}{U}}$$

Entonces, su complemento  $C = X - U$  cumple que:

$$\overset{\circ}{C} \subseteq C \Rightarrow \overline{\overset{\circ}{C}} \subseteq C$$



Si  $x \in C$ , entonces  $x \in X - U = X - \overset{\circ}{\overline{U}}$ , luego  $x \notin \overset{\circ}{\overline{U}}$ , por tanto, para todo abierto  $V \subseteq X$  que contiene a  $x$  se tiene que  $V \not\subseteq \overline{U}$ , es decir, que existe un  $y \in V$  tal que  $y \notin \overline{U}$  esto es  $y \in X - \overline{U}$ .

Pero,  $X - \overline{U} = \overset{\circ}{\overbrace{X - U}}$  (esto se probó en un ejercicio anterior), es decir que  $y \in \overset{\circ}{C}$ . Por tanto,  $V \cap \overset{\circ}{C} \neq \emptyset$ . Luego,  $x \in \overline{\overset{\circ}{C}}$ .

Así, se tiene la contención  $C \subseteq \overline{\overset{\circ}{C}}$ . Por esta y otra contención, se sigue que  $C = \overline{\overset{\circ}{C}}$ , es decir que  $X - U$  es cerrado regular.

De (4): La ida es inmediata. Suponga que  $\overline{U} \subseteq \overline{V}$ , tomando interiores se sigue que  $U = \overset{\circ}{\overline{U}} \subseteq \overset{\circ}{\overline{V}} = V$ , lo cual prueba el resultado.

De (5): Es análogo a (4).

De (6): Sean  $U, V \subseteq X$  abiertos regulares, es decir que:  $U = \overset{\circ}{\overline{U}}$  y  $V = \overset{\circ}{\overline{V}}$ . Se tiene que:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\overline{U \cap V}} &\subseteq \overset{\circ}{\overline{\overline{U \cap V}}} \\ &= \overset{\circ}{\overline{\overline{U} \cap \overline{V}}} \\ &= U \cap V \end{aligned}$$

para ver la otra contención, notemos que

$$\begin{aligned} U \cap V &\subseteq U \cap V \\ \Rightarrow U \cap V &\subseteq \overline{U \cap V} \\ \Rightarrow U \cap V &= \overset{\circ}{\overline{U \cap V}} \subseteq \overset{\circ}{\overline{\overline{U} \cap \overline{V}}} \end{aligned}$$

de las dos contenciones se sigue que  $U \cap V = \overset{\circ}{\overline{U \cap V}}$ .

De (7): Es análogo a (6). ■

## 1.5. Creando topologías a partir de operaciones elementales

### Ejercicio 1.5.1

Sean  $X$  un conjunto, y  $A \mapsto u(A)$ ,  $A \mapsto v(A)$  dos operaciones de cerradura, es decir que cumplen que:

1.  $u(\emptyset) = \emptyset$ .
2.  $A \subseteq u(A)$ , para todo  $A \subseteq X$ .
3.  $u \circ u(A) = u(A)$ , para todo  $A \subseteq X$ .
4.  $u(A \cup B) = u(A) \cup u(B)$ , para todos  $A, B \subseteq X$ .

(por un resultado anterior, la familia  $\tau_u = \{X - u(A) \mid A \subseteq X\}$  es una topología sobre  $X$ . Lo análogo se cumple para  $v$ ).

Suponga que se cumple que  $v \circ u(A)$  es  $u$ -cerrado para todo  $A \subseteq X$ . Pruebe que  $A \mapsto v \circ u(A)$  es una operación de cerradura y que  $v \circ u(A)$  es de hecho la intersección de todos los conjuntos que contienen a  $A$  que son cerrados tanto en  $v$  como en  $u$ .

Finalmente, muestre que  $u \circ v(A) \subseteq v \circ u(A)$ .

### Demostración:

Probaremos varias cosas:

1.  $A \mapsto v \circ u(A)$  es una operación de cerradura. En efecto, hay que verificar que se cumplen varias condiciones:

I) Se tiene que:

$$\begin{aligned} v \circ u(\emptyset) &= v(u(\emptyset)) \\ &= v(\emptyset) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

II) Sea  $A \subseteq X$ . Se tiene que  $A \subseteq u(A)$ , luego  $v(A) \subseteq v \circ u(A)$ , como  $A \subseteq v(A)$ , entonces se sigue que  $A \subseteq v \circ u(A)$ .

III) Sea  $A \subseteq X$ . Como  $v \circ u(A)$  es  $u$ -cerrado, entonces  $u((v \circ u)(A)) = v \circ u(A)$ , aplicando  $v$  se sigue que  $(v \circ u) \circ (v \circ u)(A) = v \circ (v \circ u)(A) = (v \circ v) \circ u(A) = v \circ u(A)$ .

IV) Sean  $A, B \subseteq X$ , entonces:

$$\begin{aligned} v \circ u(A \cup B) &= v(u(A \cup B)) \\ &= v(u(A) \cup u(B)) \\ &= v(u(A)) \cup v(u(B)) \\ &= v \circ u(A) \cup v \circ u(B) \end{aligned}$$

por los incisos i)-iv) se sigue que  $A \mapsto v \circ u(A)$  es una operación de cerradura.

2. Sea  $A \subseteq X$ . El conjunto  $v \circ u(A)$  es  $v$ -cerrado y, por hipótesis es  $u$ -cerrado.

Sea

$$\mathcal{C} = \left\{ C \subseteq X \mid C \text{ es } u\text{-cerrado y } v\text{-cerrado y } A \subseteq C \right\}$$

Tomemos  $\widehat{C} = \bigcap \mathcal{C}$ . Por la observación anterior, como  $A \subseteq v \circ u(A) \in \mathcal{C}$  (por ser operación de cerradura), se tiene que  $\widehat{C} \subseteq v \circ u(A)$  ya que  $v \circ u(A) \in \mathcal{C}$ .

Sea ahora  $C \in \mathcal{C}$ . Para probar el resultado, hay que ver que  $v \circ u(A) \subseteq C$ . Como  $C$  es  $u$ -cerrado, y  $A \subseteq C$ , entonces  $u(A) \subseteq u(C) = C$ . Pero, además  $C$  es  $v$ -cerrado, por lo cual  $v \circ u(A) \subseteq v(C) = C$ .

Por tanto,  $v \circ u(A) = \widehat{C}$ .

3. Sea  $A \subseteq X$ , entonces  $A \subseteq u(A)$  y, por ende  $v(A) \subseteq v \circ u(A)$ . Como  $v \circ u(A)$  es  $u$ -cerrado, entonces:

$$u \circ v(A) \subseteq u(v \circ u(A)) = v \circ u(A)$$

como se quería demostrar. ■

### Ejercicio 1.5.2

Sean  $X, Y$  conjuntos y  $\varphi : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  una función. Para  $A \subseteq X$ , defina:

$$\varphi(A) = \bigcup \{ \varphi(x) \mid x \in A \}$$

y, para  $B \subseteq Y$ , sea  $\varphi^{-1}(B) = \{x \in X \mid \varphi(x) \subseteq B \text{ y } \varphi(x) \neq \emptyset\}$ . Pruebe que  $u(A) = \varphi \circ \varphi^{-1}(A)$  satisface lo siguiente:

1.  $u(\emptyset) = \emptyset$ .
2.  $A \subseteq u(A)$ , para todo  $A \subseteq X$ .
3.  $u \circ u(A) = u(A)$ , para todo  $A \subseteq X$ .
4.  $(A \subseteq B) \Rightarrow (u(A) \subseteq u(B))$ , para todo  $A, B \subseteq X$ .

### Demostración:

### Ejercicio 1.5.3

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico, y sea  $\tau : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  una función que cumple lo siguiente:

1.  $\tau(A, B \cup C) \cup \tau(B, C \cup A) = \tau(A \cup B, C) \cup \tau(A, B)$
2.  $\tau(\emptyset, X) = \emptyset$ .
3.  $\tau(\overline{A}, \overline{X - A}) \subseteq \overline{A}$ .
4.  $\tau(A, B) \subseteq A \cup B$ .

Pruebe que  $\tau(A, B) = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$ .

### Demostración:

Veamos que propiedades cumple esta operación. Sean  $A, B, C \subseteq X$ . Se cumple que:

$$\begin{aligned} \tau(A, A) &\subseteq A \cup A \\ &= A \\ \Rightarrow \tau(A, A) &\subseteq A \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}\tau(\emptyset, B \cup C) \cup \tau(B, C) &= \tau(\emptyset, B \cup C) \cup \tau(B, C \cup \emptyset) \\ &= \tau(\emptyset \cup B, C) \cup \tau(\emptyset, B)\end{aligned}$$

Tomando  $B = X$  se tiene que:

$$\tau(\emptyset, X \cup C) \cup \tau(X, C)$$

■

## 1.6. $G_\delta$ , $F_\sigma$ y conjuntos de Borel

Mis ejercicios de la sección: 4.

## 1.7. Relativización

Mis ejercicios de la sección: 2, 7 y 12.

## 1.8. Funciones continuas

Mis ejercicios de la sección: 6 y 10.

## 1.9. Definición por partes de funciones

Mis ejercicios de la sección: 2.



## 1.10. Funciones continuas en $\mathbb{E}^1$

## 1.11. Funciones abiertos y cerradas

## 1.12. Homeomorfismos

# Capítulo 2

## Segundo Parical

### 2.1. Axiomas de Separación

#### Ejercicio 2.1.1

Sean  $(X, \tau)$  y  $(Y, \sigma)$  espacios topológicos siendo  $(Y, \sigma)$  un espacio Hausdorff. Si  $f, g : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  son funciones continuas, entonces

1. El conjunto  $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$  es cerrado en  $(X, \tau)$ .
2. Si  $D \subseteq X$  es denso y  $f|_D = g|_D$ , entonces  $f = g$  en  $X$ .
3. La gráfica de la función continua  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ , esto es, el conjunto

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$$

es cerrado en  $X \times Y$  con la topología producto.

4. Si  $f$  es inyectiva y continua, entonces  $(X, \tau)$  es Hausdorff.

#### Demostración:

De (1): Sea

$$C = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

para probar que este conjunto es cerrado, se probará que  $U = X - C$  es abierto en  $(X, \tau)$ . En efecto, si  $x \in X - C$  se tiene que

$$f(x) \neq g(x)$$

como el espacio  $(Y, \sigma)$  es  $T_2$ , existen dos abiertos  $U, V \subseteq Y$  tales que

$$f(x) \in U, \quad g(x) \in V \quad U \cap V = \emptyset$$

se tiene entonces que  $x \in W = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \neq \emptyset$ , donde el conjunto  $W \subseteq X$  es abierto por ser intersección de dos abiertos y ser las funciones  $f, g$  continuas. Afirmamos que

$$W \subseteq X - C$$

Procederemos por contradicción. Suponga que existe  $y \in W$  tal que  $y \notin X - C$ , es decir  $y \in C$ . Como  $y \in W$  se tiene que

$$f(y) \in U, \quad g(y) \in V$$

además, al tenerse que  $y \in C$  se sigue que  $f(y) = g(y)$ . Por tanto,  $U \cap V \neq \emptyset \#_c$ . Luego debe suceder que  $W \subseteq X - C$ . Así, para cada  $x \in X - C$  se tiene que existe un abierto tal que  $x \in W \subseteq X - C$ . Se sigue entonces que el conjunto  $X - C$  es abierto, es decir que  $C$  es cerrado en  $(X, \tau)$ .

De (2): Hay que probar que

$$f(x) = g(x), \quad \forall x \in X$$

se tienen dos casos (en caso de que  $D \subsetneq X$ , si  $D = X$  el resultado es inmediato):

1.  $x \in D$ , como  $f|_D = g|_D$  se sigue que  $f(x) = f|_D(x) = g|_D(x) = g(x)$ .
2.  $x \in X - D$ . Procederemos por contradicción. Suponga que  $f(x) \neq g(x)$ . Como  $(Y, \sigma)$  es  $T_2$  existen dos abiertos  $V_1, V_2 \subseteq Y$  tales que

$$f(x) \in V_1, \quad g(x) \in V_2, \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

se tiene que  $x \in U = f^{-1}(V_1) \cap g^{-1}(V_2) \in \tau$ , pues las funciones son continuas. Como  $D$  es denso en  $X$  y  $U \subseteq X$  es un abierto no vacío, existe un elemento  $y \in D$  tal que  $y \in U$ , esto es que

$$f(y) \in V_1 \quad g(y) \in V_2$$

donde, al tenerse que  $f(y) = g(y)$  se sigue que  $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset \#_c$ . Por tanto, debe suceder que  $f(x) = g(x)$ .

por los dos incisos anteriores se sigue que  $f = g$  en  $X$ .

De (3): Sea  $A = X \times Y - \Gamma(f)$ . Probaremos que  $A$  es abierto. En efecto, si  $(x, y) \in C$  se tiene que  $y \neq f(x)$ . Como  $(Y, \sigma)$  es  $T_2$  existen dos abiertos  $V_1, V_2 \subseteq Y$  tales que

$$y \in V_1, \quad f(x) \in V_2 \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

Como  $f$  es continua, el conjunto  $U = f^{-1}(V_2) \subseteq X$  es abierto. Ahora, el conjunto

$$W = U \times V$$

donde  $V = V_1$  es un básico (en particular un abierto) para el cual se tiene que  $(x, y) \in W$  y  $W \subseteq A$ . En efecto, lo primero se tiene de forma inmediata. Suponga que existe  $(z, w) \in W$  tal que  $(z, w) \notin A$ , entonces

$$z \in U, \quad w \in V, \quad y \quad w = f(z)$$

es decir,

$$z \in f^{-1}(V_2), \quad f(z) \in V_1$$

por lo cual

$$f(z) \in V_2, f(z) \in V_1 \Rightarrow V_1 \cap V_2 \neq \emptyset \#_c$$

por ende,  $W \subseteq A$ . Luego como en (1) debe tenerse que  $A$  es abierto en  $(X \times Y, \tau_p)$ , es decir que  $\Gamma(f)$  es cerrado en  $(X \times Y, \tau_p)$ .

De (4): Sean  $x, y \in X$  tales que  $x \neq y$ . Como  $f$  es inyectiva se sigue que  $f(x) \neq f(y)$ , luego por ser  $(Y, \sigma)$   $T_2$  existen dos abiertos  $V_1, V_2 \subseteq Y$  tales que

$$f(x) \in V_1, \quad f(y) \in V_2, \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

sean  $U_i = f^{-1}(V_i)$  para  $i = 1, 2$ . Estos conjuntos son abiertos en  $(X, \tau)$  ya que  $f$  es continua. Además

$$U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

ya que en caso contrario se tendría que si  $z \in U_1 \cap U_2$  entonces  $f(z) \in V_1 \cap V_2 = \emptyset \#_c$ . Por ende,  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ , siendo tales que  $x \in U_1$  y  $y \in U_2$ . Por ser los  $x, y$  arbitrarios en  $X$  se tiene entonces que  $(X, \tau)$  es  $T_2$ . ■

**Ejercicio 2.1.2**

Sea  $(Y, \tau)$  un espacio Hausdorff  $T_3$  y  $A \subseteq Y$  un conjunto infinito. Entonces, existe una familia

$$\left\{ U_n \subseteq Y \mid U_n \text{ es abierto para todo } n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

de conjuntos cuyas cerraduras son disjuntas a pares y tales que

$$A \cap U_n \neq \emptyset, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

**Demostración:**

Tomemos  $U_0 = \emptyset$ . Suponga elegidos  $U_1, \dots, U_n \subset X$  abiertos con cerraduras disjuntas a pares tales que

$$A \cap U_k = \emptyset, \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$$

siendo el conjunto

$$A_n = A - \bigcup_{k=1}^n \overline{U_k}$$

infinito. Tomemos  $a, b \in A_n$  con  $a \neq b$ . Como el espacio es Hausdorff se tiene que  $\{b\} \subseteq X$  es un conjunto cerrado y es tal que  $a \notin \{b\}$ . Ahora,  $A - (\bigcup_{k=1}^n \overline{U_k} \cup \{b\})$  es un abierto que contiene a  $a$ . Como el espacio es  $T_3$  existe un abierto  $V \subseteq X$  tal que

$$a \in V \subseteq \overline{V} \subseteq A - \left( \bigcup_{k=1}^n \overline{U_k} \cup \{b\} \right)$$

y con ello un abierto  $W \subseteq X$  tal que

$$b \in W \subseteq \overline{W} \subseteq A - \left( \bigcup_{k=1}^n \overline{U_k} \cup \overline{V} \right)$$

definamos

$$U_{n+1} = \begin{cases} V & \text{si } A \cap \overline{V} \text{ es finito} \\ W & \text{e.o.c} \end{cases}$$

es claro que  $U_{n+1}$  es abierto. Se tienen dos casos:

1.  $U_{n+1} = V$ :

2.  $U_{n+1} = W$ :

■

**Ejercicio 2.1.3**

Sea  $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in I}$  una familia de espacios topológicos. Tomando

$$X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$$

se tiene que si el espacio  $(X, \tau_p)$  es normal, entonces  $(X_\alpha, \tau_\alpha)$  es normal para todo  $\alpha \in I$ .

**Ejercicio 2.1.4**

Sea  $X$  un conjunto,  $p \in X$  y  $K \subseteq X$  tal que  $|K| \geq 2$

**Ejercicio 2.1.5**

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico.

1. Encuentre un ejemplo de un filtro definido sobre  $X$  que converja a dos puntos distintos.
2. Sea  $\Delta = \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}$ , demuestre que  $\Delta$  es un conjunto cerrado en  $(X \times X, \tau_p)$  si y sólo si dado un filtro  $\mathcal{F}$  sobre  $X$  convergente, este converge a un único punto.

**Ejercicio 2.1.6**

Sean  $X, Y$  dos conjuntos y  $f : X \rightarrow Y$  una función. Si  $\xi$  es un ultrafiltro sobre  $X$ , entonces el filtro  $f(\xi)^+$ , generado por la base de filtro  $f(\xi)$  es un ultrafiltro en  $Y$ .

**Demostración:**

Recordemos que

$$f(\xi)^+ = \left\{ A \subseteq Y \mid \text{existe } E \in \xi \text{ tal que } f(E) \subseteq A \right\}$$

Por una proposición anterior ya se sabe que  $f(\xi)^+$  es filtro sobre  $Y$ . Veamos que es ultrafiltro. Primero, probaremos que dado un conjunto  $A \subseteq Y$ , uno de los dos conjuntos  $A, Y - A$  está en  $f(\xi)^+$ . En efecto, sea

$$B = f^{-1}(A)$$

Como  $B \subseteq X$ , entonces  $B \in \xi$  ó  $X - B \in \xi$ .

- Suponga que  $B \in \xi$ , entonces se sigue por la definición de  $B$  que

$$f(B) \in f(\xi)$$

y, como  $f(f^{-1}(A)) \subseteq A$ , se sigue que  $f(B) \subseteq A$ , luego  $A \in \xi$ .

- Suponga que  $X - B \in \xi$ . Afirmamos que

$$X - B = X - f^{-1}(A) = f^{-1}(Y - A)$$

en efecto, veamos que

$$\begin{aligned} x \in X - f^{-1}(A) &\iff f(x) \notin A \\ &\iff f(x) \in Y - A \\ &\iff x \in f^{-1}(Y - A) \end{aligned}$$

lo cual prueba el resultado. Por tanto, como  $X - B = X - f^{-1}(A) \in \xi$ , se sigue que  $f^{-1}(Y - A) \in \xi$ . Luego, como  $f(f^{-1}(Y - A)) \subseteq Y - A$ , entonces se tiene que  $Y - A \in f(\xi)^+$ .

Por tanto,  $A \in f(\xi)^+$  ó  $Y - A \in f(\xi)^+$  (no pueden estar los dos a la vez por ser  $f(\xi)^+$  filtro). Luego, por una proposición  $f(\xi)^+$  es ultrafiltro. ■

**Ejercicio 2.1.7**

Sean  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$  filtros definidos sobre  $X$  y  $\mathcal{U}$  un ultrafiltro sobre  $X$  tal que  $\mathcal{F}_1 \cap \dots \cap \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{U}$ . Demuestre que existe  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tal que  $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{U}$ .

**Demostración:**

Procederemos por inducción sobre  $n$ . Considere el caso  $n = 2$ . Se tienen dos casos:

1.  $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{U}$ , en cuyo caso ya hemos terminado.
2.  $\mathcal{F}_1 \not\subseteq \mathcal{U}$ .

**Ejercicio 2.1.8**