Introducción a las singularidades

Cristo Daniel Alvarado

11 de noviembre de 2024

Índice general

Cristo Daniel Alvarado ESFM

Capítulo 1

Nociones Básicas

1.1. Variedades Algebraicas

En síntesis, las singularidades abarcan muchas ramas de las matemáticas, como son la geometría algebraica, el álgebra conmutativa, el análisis compleo, la topología algebraica y cosas sobre teoría de nudos.

Considremos a K un campo (o cuerpo), en ocasiones este puede ser considerado simplemente como un anillo, el cuál siempre será de característica 0.

En el anillo de polinomios $K[x_1, ..., x_n]$ tenemos los monomios

$$x^d = x_1^{d_1} \cdots x_n^{d_n}$$

donde $d_1 + ... + d_n = d$. Así que todo polinomio f se puede ver como:

$$f = \sum_{\text{finita}} c_d x^d$$

donde $c_d \in K \setminus \{0\}$. Se define el **grado de f** por:

$$\deg f = \text{máx}\left\{d_1 + ... + d_n \middle| c_d \neq 0\right\}$$

Consideramos el **espacio afín** K^n de todas las tuplas $(a_1, ..., a_k)$. Podemos también ver el **espacio proyectivo** $\mathbb{P}_k^n$, con coordenadas homogéneas $[x_0 : x_1 : ... : x_n]$.

Observación 1.1.1
En las coordenadas homogéneas, $[x_0 : x_1 : ... : x_n]$ es tal que x_i no es cero para todo i. En particular también se tiene que:

$$[x] = [\lambda x] = [\lambda x_0 : \lambda x_1 : ... : \lambda x_n]$$

con $\lambda \in K \setminus \{0\}$

Observación 1.1.2
Podemos descomponer a la variedad proyectiva $\mathbb{P}_k^n$ como:

$$\mathbb{P}_k^n = K^n \cup \mathbb{P}_k^{n-1}$$

donde la primera parte es una variedad afín y la segunda es un hiperplano en el infinito (no sé a qué se refiera esto). Repitiendo este proceso podemos verlo como:

$$\mathbb{P}_k^n = K^n \cup K^{n-1} \cup \cdots \cup K \cup p^t$$

Observación 1.1.3
Podemos también descomponer al espacio proyectivo como:

$$\mathbb{P}_k^n = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$$

donde

$$U_i = \left\{ [x] \middle| x_i \neq 0 \right\}$$

cada uno de estos U_i es isomorfo a K^n, con isomorfismo dado por:

$$[x] = [x_0 : x_1 : \dots : x_{i-1} : x_i : x_{i+1} : \dots : x_n] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \frac{x_1}{x_i}, \cdots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

Consideraremos variedades algebraicas:

$$V(f) = \left\{ x \in K^n \middle| f(x) = 0 \right\}$$

Definición 1.1.1
Decimos que un polinomio $F \in K[x_0, x_1, \dots, x_n]$ es **homogéneo**, si todos sus monomios tienen el mismo grado.

Observación 1.1.4
La definición anterior es equivalente a que para todo $\lambda \in K$:

$$F(\lambda x) = \lambda^{\deg F} F(x)$$

para todo $x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in K^{n+1}$.

Definición 1.1.2
Si F es homogéneo, entonces $V(F)$ es una **hipersuperficie**.

Podemos hacer un proceso para deshomogeneizar un polinomio homogéneo, de la siguiente manera:

$$F\left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) = f(x_1, \dots, x_n)$$

y, podemos homogeneizar un polinomio haciendo:

$$F(x_0, x_1, \dots, x_n) = x^{\deg f} f\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)$$

Ejemplo 1.1.1

Cristo Daniel Alvarado ESFM

Considere el polinomio $f = 3 + x_1 + x_2$, entonces F homogéneo sería:

$$\begin{aligned} F(x_0, x_1, x_2) &= x_0^1 f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) \\ &= 3x_0 + x_1 + x_2 \end{aligned}$$

Observación 1.1.5
En ocasiones interesa que K sea algebraicamente cerrado. En este caso, se nos permite escribir un polinomio como:

$$f = c \cdot (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_d), \quad a_i \in K$$

donde d es el grado del polinomio, esto para polinomios en una variable.

Observación 1.1.6
En el caso en que F sea un polinomio homogéneo en varias variables, podemos escribirlo como:

$$F = c \cdot (b_1 x - a_1 y) \cdots (bd_x - a_d y), \quad a_i, b_i \in K$$

por lo que resulta importante tener la noción de polinomio homogéneo.

Definición 1.1.3
Dados $f = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m$ y $g = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1} x + b_n$. Se define el **resultante de f y g**, como:

$$Res(f, g) = \det A_{m+n}(a_i, b_j)$$

Esta matriz se vería de esta manera:

$$\left(\begin{array}{cccccccccc}
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_m & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{m-1} & a_m & 0 & \cdots & 0 \\
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_m & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \underbrace{\cdots}_{(n-1)\text{-veces recorrido}} & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_m \\
b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & b_n & 0 & \cdots & 0 \\
b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \underbrace{\cdots}_{(m-1)\text{-veces recorrido}} & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n
\end{array}\right)$$

Proposición 1.1.1
$Res(f, g) = 0$ si y sólo si f y g tienen una raíz común.

Demostración:

$\Rightarrow)$:

$\Leftarrow)$: Suponga que existe $r \in K$ tal que $f(r) = g(r)$, entonces:

$$f(x) = (x - r)p(x) \quad \text{y} \quad g(x) = (x - r)q(x)$$

Cristo Daniel Alvarado ESFM

donde $\deg p = m-1$ y $\deg q = n-1$. Se cumple además la igualdad:

$$fq - gp = 0$$

la ecuación anterior, la podemos ver como la matriz cuadrada $B_{m+n}(a_i, b_j)$ de tamaño $m+n$. Si hacemos

$$p(x) = \alpha_0 x^{m-1} + \cdots + \alpha_{m-1}$$

y,

$$q(x) = \beta_0 x^{n-1} + \cdots + \beta_{n-1}$$

Se reduciría todo a un sistema:

$$B_{n+m}(a_i, b_j) \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

(completar la demostración). ■

Ejercicio 1.1.1
Hacer lo de la proposición anterior cuando $f_1 = f_2 = x^2 - 3x + 2$ y $g_1 = x - 1$ (calcular los sistemas necesarios).

Solución:

□

Ejemplo 1.1.2
Considere los polinomios $f = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ y $g = x^2 - x + 2$. Entonces $m = 3$ y $n = 2$, por lo que:

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

sería la matriz asociada al resultante de los polinomios f y g.

Para la siguiente proposición, K es un campo algebraicamente cerrado.

Proposición 1.1.2
Sean $f, g \in K[\underline{x}]$ (anillo de polinomios en varias variables). Entonces:

1. $V(f) = V(g)$ si y sólo si f y g tienen las mismas componentes irreducibles.
2. $V(f) \neq \emptyset$ si y sólo si $f \in K \setminus \{0\}$.

Demostración:

■

Definición 1.1.4
Sea $p \in V(f) \subseteq K^n$. Decimos que p es un **punto singular de** $V(f)$, si

$$f(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0$$

para todo $i = 1, ..., n$. El conjunto de puntos singulares de f se denota por $Sing(V(f))$. Si $p \notin Sing(V(f))$, se dice que p es **no singular** o **liso**.

Si $V(f)$ es tal que $Sing(V(f)) = \emptyset$, se dice que $V(f)$ es **no singular**.

Ejemplo 1.1.3
Considere el polinomio $f = ax + by$, $a, b \in K$ no ambas nulas. Entonces, $V(f)$ es no singular.

Ejemplo 1.1.4
Considere $f = xy$. Entonces:

$$Sing(V(f)) = \{(0, 0, *, *, ..., *) \in K^n\}$$

En el caso de $K^n = \mathbb{C}^2$, se tiene que:

$$Sing(V(f)) = \{(0, 0)\} \subseteq \mathbb{C}^2$$

se dice **singularidad aislada**.

Si estamos en $\mathbb{C}^3$, entonces

$$Sing(V(f)) = \{(0, 0, *)\} \subseteq \mathbb{C}^3$$

es **no aislada**.

Ejemplo 1.1.5
En el caso en que $f = f_1 \cdot f_2$, se tiene que $V(f_1) \cap V(f_2) \subseteq Sing(V(f))$.

Ejemplo 1.1.6
Los siguientes tienen puntos singulares de diferentes tipos:

- $g = y^2 - x^3$.
- $h = y^2 - x^2(x + 1)$.
- $k = z^2 - xy^3$.

1.2. Geometría y Topología de Curvas Algebraicas en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ (o en $\mathbb{C}^2$).

En esta parte, tendremos como objetivos dos cosas:

(1) Entender la topología abstracta de $C = V(F) \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

(2) Entender la geometría de $C = V(F) \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

Teorema 1.2.1 (**Teorema de Bezout**)
Sean $C = V(P)$ y $D = V(Q)$ curvas contenidas en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ con $\deg P = n$ y $\deg Q = m$. Entonces, $C \cap D$ es un conjunto de $n \cdot m$ puntos (contando multiplicidades).

Teorema 1.2.2 (**Fórmula de género-grado**)
Sea $C = V(P) \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ no singular y de grado n. Entonces, C es topológicamente una superficie (dimensión 2 sobre $\mathbb{R}$) conexa, compacta, orientable y sin borde con $\chi = 2 - (n-1)(n-2)$ (siendo χ la característica de Euler de la superficie).

Luego hubo una explicación sobre la característica de Euler para superficices (en particular, algunas triangulaciones de la 2-esfera).

Teorema 1.2.3 (**Teorema de Clasificación de Superficies**)
La característica de Euler de toda superficie compacta, orientable, conexa y sin borde es:

$$\chi = 2 - 2g$$

donde g es el género de la superficie.

Cristo Daniel Alvarado ESFM