# Curso de Lógica Matemática

Cristo Daniel Alvarado

6 de septiembre de 2024

# Índice general

# Capítulo 0

# Introducción

## 0.1. Temario

Los siguientes temas se verán a lo largo del curso:

1. Lógica (Teoría de Modelos).
   1.1) Lógica proposicional.
   1.2) Lógica de primer orden.
2. Teoría de la Computabilidad.
   2.1) Conjuntos/Funciones computables.
   2.2) Teoremas de incompletitud.
3. Teoría de Conjuntos.
   3.1) Ordinales.
   3.2) Cardinalidad.

Y la bibliografía para el curso es la siguiente:

- Enderton, 'Introducción matemática a la lógica'.
- Enderton, 'Teoría de la computabilidad'.
- Copi, 'Lógica Simbólica' o 'Computability Theory'.
- Rebeca Weber 'Computability Theory'.
- Hrbacek, Seda.
- Herrnández Herrnández.

## 0.2. Conectivas Lógicas

La disyunción ($\wedge$), conjunción ($\vee$), negación ($\neg$), implicación ($\Rightarrow$) y si y sólo si ( $\iff$ ) son las conectivas lógicas usadas usualmente. Para las demostraciones se tienen que tomar los casos que se cumplan con estas implicaciones, por lo que si podemos simplificar el conjunto de conectivas lógicas, todo se simplificará.

Para ello, veamos que

$$P \Rightarrow Q \equiv \neg(P \wedge \neg Q)$$

tienen las mismas tablas de verdad. Por ejemplo también se tiene

$$P \wedge Q \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q)$$

ó

$$P \vee Q \equiv \neg(\neg P \wedge \neg Q)$$

A $\{\wedge, \vee, \neg\}$ se le conoce como un **conjunto completo de conectivas lógicas** (es decir que toda conectiva se expresa como combinaciones de ellas). Nos podemos quedar simplemente con conjuntos completos de disyuntivas con solo dos elementos, a saber: $\{\wedge, \neg\}$ y $\{\vee, \neg\}$, ya que $P \vee Q$ es $\neg(\neg P \wedge \neg Q)$. (de forma similar a lo otro $P \wedge Q$ es $\neg(\neg P \vee \neg Q)$).

También $\{\Rightarrow, \neg\}$ es otro conjunto completo de conectivas lógicas, ya que $P \wedge Q$ es $\neg(P \Rightarrow \neq Q)$.

Y, $\{|\}$ es un conjunto completo, donde $|$ es llamado la **barra de Scheffel**, que tiene la siguiente tabla de verdad.

| $P$ | $Q$ | $P\|Q$ |
|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $V$ |

con este, se tiene un conjunto completo de conectivas lógicas. Veamos que

$$P|P \equiv \neg P$$

y,

$$P \wedge Q \equiv \neg(P|Q) \equiv (P|Q)|(P|Q)$$

Como muchas veces se usan conectivas de este tipo:

$$(P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow ((P \Rightarrow R) \wedge \neg(Q \Rightarrow S) \wedge T)$$

al ser muy largas, a veces es más conveniente escribirlas en forma Polaca. De esta forma, lo anterior quedaría de la siguiente manera:

$$\Rightarrow \Rightarrow P \neg Q \wedge \wedge P R \neg \Rightarrow Q S T$$

Ahora empezamos con el estudio formal de la lógica.

## 0.3. Ejercicios

Convierta a/de notación Polaca, según sea el caso.

1. $P \Rightarrow (Q \wedge \neg A)$. Sería $\Rightarrow P \wedge Q \neg A$.

2. $\Rightarrow A \neg \wedge CD$. Sería $A \Rightarrow \neg(C \wedge D)$.

3. $(A \Rightarrow B) \iff (\neg A \vee \neg(\neg B \vee C))$. Sería $\iff \Rightarrow AB \vee \neg A \neg \vee \neg BC$.

4. $\vee \neg\neg \Rightarrow BC \wedge \Rightarrow A \wedge BCA$. Sería $(\neg\neg(B \Rightarrow C)) \vee ((A \Rightarrow (B \wedge C)) \wedge A)$.

5. $(P \Rightarrow Q) \iff (\neg Q \Rightarrow \neg P)$. Sería $\iff \Rightarrow PQ \Rightarrow \neg Q \neg P$.

# Capítulo 1

# Lógica Proposicional

## 1.1. Alfabeto

Hablaremos un poco de sintaxis y semántica.

- Sintaxis: la forma en la que vamos a ordenar nuestras variables y conectivas.
- Semántica: da significado al orden de nuestras variables y conectivas.

Definiremos el lenguaje de la lógica proposicional. Para ello primero definiremos el alfabeto.
El **alfabeto** de la lógica proposicional es un conjunto que consta de dos tipos de símbolos:

1. **Variables**, denotadas por $p_1, p_2, ..., p_n, ...$ (a lo más una cantidad numerable). Estas representan proposiciones o enunciados (tengo un paraguas, me caí de las escaleras, no tengo café en la cafetera, etc...).
2. **Conectivas**, como $\Rightarrow$ y $\neg$.

El alfabeto que usaremos es: $\{\Rightarrow, \neg, p_1, p_2, ...\}$.

**Observación 1.1.1**
Podríamos usar otro alfabeto, pero dado a que $\{\Rightarrow, \neg\}$ es un conjunto completo de conectivas lógicas (y resulta más sencillo usarlas que la barra de Scheffel), se tomará este alfabeto con estas conectivas.

Aceptamos la existencia de estas cosas (pues, al menos debemos aceptar la existencia de algo).
Se van a trabajar con sucesiones finitas de símbolos del alfabeto descrito anteriormente. Ahora necesitaremos especificar que tipos de sucesiones van a servirnos para tener un significado formal.

**Ejemplo 1.1.1**
Por ejemplo la sucesión $(p_3)$, $\emptyset$, $(\Rightarrow, p_2, \neg, p_5)$. Básicamente estas sucesiones finitas representan fórmulas en notación polaca.

**Definición 1.1.1**
En el conjunto de sucesiones finitas de símbolos del alfabeto, definimos una **fórmula bien formada** (abreviada como **FBF**) como sigue:

1. Cada variable es una **FBF**.
2. Si $\varphi, \psi$ son **FBF**, entonces $\neg\varphi$ y $\Rightarrow \varphi\psi$ también lo son.

**Observación 1.1.2**
Recordar que usamos la notación Polaca en la definición anterior. Cuando se colocan en (2) $\neg\varphi$ y $\Rightarrow \varphi\psi$, hace referencia a concatenar estas sucesiones finitas.

A continuación unos ejemplos:

**Ejemplo 1.1.2**
$p_{17}$, $p_{54}$ y $\Rightarrow p_2 p_{25}$ son FBF. Las primeras dos son llamadas **variables aisladas**. También lo es $\neg \Rightarrow p_2 p_{25}$ (en este ejemplo, los $p_i$ son variables).

Pero, por ejemplo $\Rightarrow \neg p_1 p_2 p_3$ y $\Rightarrow p_4$ no son FBF.

Viendo el ejemplo anterior, notamos que el operador $\Rightarrow$ es binario (solo usa dos entradas) y $\neg$ es unario (solo una entrada). Por lo cual, añadir o no demás variables a los opeadores dentro de la fórmula, hace que la fórmula ya no sea una FBF.

**Observación 1.1.3**
Eventualmente se va a sustituir la notación Polaca por la normal, para que se pueda leer la FBF y el proceso no sea robotizado.

Definiremos ahora más conectivas lógicas para poder trabajar más cómodamente.

**Definición 1.1.2**
Se definirán tres conectivas lógicos adicionales.

1. Se define la **disyunción** $\varphi \vee \psi$ como $\Rightarrow \neg\psi\varphi$ (en notación Polaca).
2. Se define la **conjunción** $\varphi \wedge \psi$ como $\neg(\neg\psi \vee \neg\varphi)$.
3. Se define el **si sólo si** $\psi \iff \varphi$ como $(\psi \Rightarrow \varphi) \wedge (\varphi \Rightarrow \psi)$.

## 1.2. Modeos o Estructuras

En el fondo, queremos que las FBF sean cosas verdaderas o falsas. Un Modelo o Estructura es algo que le va a dar significado a las FBF, esta es la parte de la semántica. De alguna manera va a ser una forma de asignarle el valor de verdadero o falso a cada una de las variables.

**Definición 1.2.1**
Un **Modelo o Estructura** de la lógica proposicional es una función $m : \mathrm{Var} \to \{V, F\}$, donde Var denota al conjunto de símbolos que son variables. Básicamente estamos diciendo que hay variables que son verdaderas y otras que son falsas.

---

**Teorema 1.2.1**
Para todo modelo $m$, existe una única extensión $\overline{m} : \mathrm{FBF} \to \{V, F\}$, donde FBF denota al conjunto de las fórmulas bien formadas, tal que

1. $\overline{m}(p) = m(p)$ para todo $p \in \mathrm{Var}$.
2. Para todo $\varphi, \psi \in \mathrm{FBF}$:
$$\overline{m}(\neg\varphi) = V \text{ si y sólo si } \overline{m}(\varphi) = F$$

y,

$$\overline{m}(\Rightarrow \varphi\psi) = F \text{ si y sólo si } \overline{m}(\varphi) = V \text{ y } \overline{m}(\psi) = F$$

**Demostración:**

La prueba aún no se hará, pero es por recursión. ■

**Definición 1.2.2**
Sea $m$ un modelo, $\varphi$ una fórmula y $\Sigma$ un cojunto de fórmulas. Decimos que

1. $m$ **satisface** $\varphi$ (denotado por $m \vDash \varphi$) si $\overline{m}(\varphi) = V$.
2. $m$ **satisface** $\Sigma$ (denotado por $m \vDash \Sigma$) si $m \vDash \varphi$ para cada $\varphi \in \Sigma$.

**Ejemplo 1.2.1**
Sea $m$ un modelo tal que $m(p_1) = V$ y $m(p_i) = F$, para todo $i \geq 2$. En este caso $m \nvDash \Rightarrow p_1p_3$, pero $m \vDash \neg p_5$.

**Definición 1.2.3**
Sea $\varphi$ una fórmula y $\Sigma$ un conjunto de fórmulas.

1. Decimos que $\varphi$ es **consecuencia lógica** de $\Sigma$ o que $\Sigma$ **lógicamente implica** $\varphi$ (denotado por $\Sigma \vDash \varphi$) si para todo modelo $m$ tal que $m \vDash \Sigma$, se cumple que $m \vDash \varphi$.
2. Decimos que $\varphi$ es una **tautología** si $\emptyset \vDash \varphi$.
3. Decimos que $\varphi$ es una **contradicción** si $\emptyset \vDash \neg\varphi$ es una tautología.

Veamos ejemplos para aclarar las ideas:

**Ejemplo 1.2.2**
Se tiene $\{\Rightarrow p_1p_2, p_2\} \nvDash p_1$. En efecto, para un modelo $m$ tal que $m(p_2) = V$ y $m(p_1) = F$ es tal que $m$ no satisface $p_1$.

**Ejemplo 1.2.3**
Muestre que $\{\Rightarrow p_1p_2, \Rightarrow p_2p_3\} \vDash \Rightarrow p_1p_3$.

**Observación 1.2.1**
De ahora en adelante, $f \restriction A$ denotará la reestricción de $f$ al conjunto $A$.

**Lema 1.2.1**
Sean $n, m$ dos modelos y sea $\varphi$ una fórmula. Sean $p_{i_1}, p_{i_2}, ..., p_{i_k}$ las variables que ocurren en $\varphi$. Si $n \restriction \{p_{i_1}, p_{i_2}, ..., p_{i_k}\} = m \restriction \{p_{i_1}, p_{i_2}, ..., p_{i_k}\}$, entonces

$$n \vDash \varphi \text{ si y sólo si } m \vDash \varphi$$

**Demostración:**

Por la definición de $\models$, basta con demostrar que

$$\overline{n}(\varphi) = \overline{m}(\varphi)$$

Esto lo haremos por inducción sobre $\varphi$.

- Si $\varphi$ es una variable $p_t$, entonces

$$\begin{aligned}\overline{n}(\varphi) &= \overline{n}(p_t)\\ &= n(p_t)\\ &= m(p_t)\\ &= \overline{m}(p_t)\\ &= \overline{m}(\varphi)\end{aligned}$$

- Hay que ver que se cumple también para las conectivas:

  1. Supongamos que $\varphi = \neg\psi$, siendo $\psi$ una FBF tal que $\overline{n}(\psi) = \overline{m}(\psi)$. Entonces,

  $$\overline{n}(\varphi) = \overline{n}(\neg\psi)$$

  se tiene que

  $$\begin{aligned}\overline{n}(\neg\psi) = V &\text{ si y sólo si } \overline{n}(\psi) = F\\ &\text{ si y sólo si } \overline{m}(\psi) = F\\ &\text{ si y sólo si } \overline{m}(\neg\psi) = V\\ &\text{ si y sólo si } \overline{m}(\varphi) = V\end{aligned}$$

  por tanto, $\overline{m}(\varphi) = V$ si y sólo si $\overline{m}(\varphi) = V$. De forma análoga se llega a que $\overline{m}(\varphi) = F$ si y sólo si $\overline{m}(\varphi) = F$. Por tanto:

  $$\overline{m}(\varphi) = \overline{n}(\varphi)$$

  2. Supongamos que $\varphi$ es de la forma $\Rightarrow \psi\chi$ y que $\overline{m}(\psi) = \overline{n}(\psi)$, y $\overline{m}(\chi) = \overline{n}(\chi)$.
  Se tiene que $\overline{m}(\Rightarrow \psi\chi) = F$ si y sólo si $\overline{m}(\psi) = V$ y $\overline{m}(\chi) = F$, si y sólo si $\overline{n}(\psi) = V$ y $\overline{n}(\chi) = F$, si y sólo si $\overline{n}(\Rightarrow \psi\chi) = F$ (que es el único caso en que es falso). Por tanto:

  $$\overline{m}(\varphi) = \overline{n}(\varphi)$$

por inducción se sigue que

$$n \models \varphi \text{ si y sólo si } m \models \varphi$$

■

Con este lema, se tiene que el ejemplo 1.2.2 ya tiene fundamentación, ya que únicamente basta que el modelo sea válido en las variables $p_1$ y $p_2$ (no en la cantidad infinita de variables que podemos llegar a tener).

**Observación 1.2.2**
Si $\Sigma$ es un conjunto finito de fórmulas (digamos $\Sigma = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$), entonces $\Sigma \models \varphi$ si y sólo si $(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \Rightarrow \varphi$ es una tautología.

## 1.3. Cálculo Proposicional

Nuestro cálculo proposicional se compondrá de lo siguiente:

1. **Axiomas Lógicos**.
2. **Reglas de inferencia**.

más adelante se probará que si hubiesemos elegido diferentes axiomas lógicos y reglas de inferencia, habríamos llegado al mismo resultado (siempre que se haya cumplido una hipótesis adicional ¿?).

**Definición 1.3.1** (**Axiomas Lógicos**)
Tenemos para nuestro cálculo proposicional los siguientes axiomas lógicos:

1. $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$.
2. $\varphi \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \neg\varphi) \Rightarrow \neg\psi)$.
3. $\varphi \Rightarrow \varphi'$ siempre que $\varphi$ resulte de sustituir $\psi$ por $\neg\neg\psi$ o viceversa (siendo $\psi$ una subfórmula de $\varphi$).
4. $\varphi \Rightarrow \varphi'$ siempre que $\varphi$ resulte de sustituir $\psi \Rightarrow \chi$ por $\neg\chi \Rightarrow \neg\psi$ o viceversa (siendo $\psi$ y $\chi$ subfórmulas de $\varphi$).
5. $\varphi \Rightarrow \varphi'$ siempre que $\varphi$ resulte de sustitur $\neg\psi \Rightarrow \psi$ por $\psi$ (siendo $\psi$ una subfórmula de $\varphi$).
6. $(\varphi \Rightarrow (\chi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi))$.

siendo $\varphi$ una FBF dada y $\psi$ una FBF arbitraria en 1 y 2, y $\varphi, \psi, \chi$ FBF dadas.

**Ejemplo 1.3.1**
Ejemplo del axioma 1: si $p_1$ es una variable,

$$p_1 \Rightarrow (p_3 \Rightarrow p_1)$$

siendo $p_3$ una variable arbitraria.

**Ejemplo 1.3.2**
Ejemplo del axioma 3:

$$(p_1 \Rightarrow \neg\neg p_3) \Rightarrow (p_1 \Rightarrow p_3)$$

o

$$(p_1 \Rightarrow p_3) \Rightarrow (p_1 \Rightarrow \neg\neg p_3)$$

**Definición 1.3.2** (**Reglas de Inferencia**)
Se tiene una única regla de inferencia, denominada **Modus Ponens** (abreviada **MP**) dada por:

$$\begin{array}{lcl} \varphi & \Rightarrow & \psi \\ \varphi & & \\ \hline & \therefore & \psi \end{array}$$

**Definición 1.3.3**
Sea $\Sigma$ un conjunto y $\varphi$ una fórmula.

1. Una **demostración** de $\varphi$ a partir de $\Sigma$ es una sucesión finita de fórmulas $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ tal que:

   1.I) $\varphi_n = \varphi$.

   1.II) Para cada $i \in \{1, ..., n\}$ se tiene una de las tres:

      I.II.a) $\varphi_i \in \Sigma$.

      I.II.b) $\varphi_i$ es axioma lógico.

      I.II.c) existen $k, j \in \{1, ..., n\}$ con $k < j < i$ tales que $\varphi_j$ es $\Rightarrow \varphi_k \varphi_i$.

2. Decimos que $\varphi$ es **demostrable a partir de** $\Sigma$, o que $\varphi$ es un **teorema de** $\Sigma$ si existe una demostración de $\varphi$ a partir de $\Sigma$, esto se simboliza por $\Sigma \vdash \varphi$.

**Ejemplo 1.3.3**
Se cumple que $\{\neg p_3, p_1 \Rightarrow p_3, p_1 \vee (p_2 \Rightarrow p_3), \neg p_3 \Rightarrow (p_3 \Rightarrow p_5), p_2\} \vdash p_5$.

**Demostración:**
Se tiene la siguiente demostración de $p_5$:

■

**Definición 1.3.4**
Convenimos que

- $\varphi \vee \psi \equiv \neg\varphi \Rightarrow \psi$.
- $\varphi \wedge \psi \equiv \neg(\varphi \Rightarrow \neg\psi)$.
- $\varphi \iff \psi \equiv (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$.

Tenemos las siguientes reglas de inferencia adicionales:

---

**Proposición 1.3.1**
Se cumple lo siguiente:

**Modus Tollens**

$$\begin{array}{l} \varphi \Rightarrow \psi \\ \neg\psi \\ \hline \therefore \neg\varphi \end{array}$$

**Silogismo Disyuntivo**

$$\begin{array}{l} \varphi \vee \psi \\ \neg\varphi \\ \hline \therefore \psi \end{array}$$

**Adición**

$$\begin{array}{l} \varphi \\ \hline \therefore \varphi \vee \psi \end{array}$$

**Simplificación**

$$\begin{array}{ccc} \varphi & \wedge & \psi \\ \hline & \therefore & \varphi \end{array}$$

**Conjunción**

$$\begin{array}{ll} \varphi & \\ \psi & \\ \hline \quad\therefore & \varphi \wedge \psi \end{array}$$

---

**Demostración:**

En efecto, veamos que existen las demostraciones:

- **Modus Tollens**:

$$\begin{array}{llclr} 1) & \varphi & \Rightarrow & \psi & \text{Premisa} \\ 2) & \neg\psi & & & \text{Premisa} \\ 3) & (\varphi \Rightarrow \psi) & \Rightarrow & (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi) & 1 \text{ Ax. } 4 \\ 4) & \neg\psi & \Rightarrow & \neg\varphi & 1{,}3 \text{ M.P.} \\ 5) & \neg\varphi & & & 2{,}4 \text{ M.P.} \\ \hline & & \therefore & \neg\varphi & \end{array}$$

- **Silogismo Disyuntivo**:

$$\begin{array}{llclr} 1) & \varphi & \vee & \psi & \text{Premisa} \\ 2) & \neg\varphi & & & \text{Premisa} \\ 3) & \neg\varphi & \Rightarrow & \psi & 1 \text{ R.E.} \\ 4) & \neg\psi & & & 2{,}1 \text{ M.P.} \\ \hline & & \therefore & \neg\psi & \end{array}$$

- **Adición**:

$$\begin{array}{llclr} 1) & \varphi & & & \text{Premisa} \\ 2) & \varphi & \Rightarrow & (\neg\psi \Rightarrow \varphi) & 1 \text{ Ax. } 1 \\ 3) & \neg\psi & \Rightarrow & \varphi & 1{,}2 \text{ M.P.} \\ 4) & (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi) & \Rightarrow & (\neg\varphi \Rightarrow \neg\neg\psi) & 3 \text{ Ax. } 4 \\ 5) & \neg\varphi & \Rightarrow & \neg\neg\psi & 3{,}4 \text{ M.P.} \\ 6) & (\neg\varphi \Rightarrow \neg\neg\psi) & \Rightarrow & (\neg\varphi \Rightarrow \psi) & 5 \text{ Ax. } 3 \\ 7) & \neg\varphi & \Rightarrow & \psi & 5{,}6 \text{ M.P.} \\ 8) & \varphi & \vee & \psi & 7 \text{ R.E.} \\ \hline & & \therefore & \neg\psi & \end{array}$$

- **Simplificación**:

$$\begin{array}{llclr} 1) & \varphi & \wedge & \psi & \text{Premisa} \\ 2) & \neg(\varphi & \Rightarrow & \neg\psi) & 1 \text{ R.E.} \\ 3) & \neg\varphi & \Rightarrow & \neg(\psi \Rightarrow \neg\psi) & 2 \text{ Ax. } 1 \\ 4) & (\neg\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \neg\varphi)) & \Rightarrow & (\neg\varphi \Rightarrow (\neg\neg\varphi \Rightarrow \neg\psi)) & 2 \text{ Ax. } 1 \\ 5) & \neg\varphi & \Rightarrow & (\neg\neg\varphi \Rightarrow \neg\psi) & 3{,}4 \text{ M.P.} \\ 6) & (\neg\varphi \Rightarrow (\neg\neg\varphi \Rightarrow \neg\psi)) & \Rightarrow & (\neg\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \neg\psi)) & 5 \text{ Ax. } 3 \\ 7) & \neg\varphi & \Rightarrow & (\varphi \Rightarrow \neg\psi) & 6{,}5 \text{ M.P.} \\ 8) & \neg(\varphi \Rightarrow \neg\psi) & \Rightarrow & \neg\neg\varphi & \text{Ax. } 4 + \text{M.P.} \\ 9) & \neg\neg\varphi & & & \text{M.P.} \\ 10) & \varphi & & & \text{M.P.} \\ \hline & & \therefore & \neg\psi & \end{array}$$

- **Conjunción**:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1) | $\varphi$ | | | Premisa |
| 2) | $\psi$ | | | Premisa |
| 3) | $\varphi$ | $\Rightarrow$ | $((\psi \Rightarrow \neg\varphi) \Rightarrow \neg\psi)$ | Ax. 2 |
| 4) | $(\psi \Rightarrow \neg\varphi)$ | $\Rightarrow$ | $\neg\psi$ | M.P. |
| 5) | $((\psi \Rightarrow \neg\varphi) \Rightarrow \neg\psi)$ | $\Rightarrow$ | $(\neg\neg\psi \Rightarrow \neg(\psi \Rightarrow \neg\varphi))$ | Ax. |
| 6) | $\neg\neg\psi$ | $\Rightarrow$ | $\neg(\psi \Rightarrow \neg\varphi)$ | M.P. |
| 7) | $\psi$ | $\Rightarrow$ | $\neg\neg\psi$ | Ax. |
| 8) | $\neg\neg\psi$ | | | M.P. |
| 9) | $\neg(\psi$ | $\Rightarrow$ | $\neg\varphi)$ | M.P. |
| 10) | $\psi$ | $\wedge$ | $\varphi$ | M.P. |
| | | $\therefore$ | $\psi \wedge \varphi$ | |

∎

**Observación 1.3.1**
De ahora en adelante **R.E.** simplifica reescritura.

**Ejercicio 1.3.1**
Demuestre que existe una demostración de los siguientes:

1. $\{p_1 \vee (p_5 \vee p_7), (p_5 \vee p_7) \Rightarrow (p_{13} \vee p_{14}), (p_3 \vee p_{14}) \Rightarrow (p_1 \vee p_7), \neg p_1\} \vdash p_7$.

2. $\{p_4 \Rightarrow (p_5 \Rightarrow p_6), (p_5 \Rightarrow p_6) \Rightarrow p_{10}, (p_{20} \vee p_{30}) \Rightarrow \neg p_{40}, \neg p_{40} \Rightarrow (p_5 \iff \neg p_{45}), \neg p_{10}, \neg(p_5 \iff \neg p_{45})$ $\neg p_4 \wedge \neg(p_{20} \vee p_{30})$.

**Demostración:**
De (1):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1) | $p_1$ | $\vee$ | $(p_5 \vee p_7)$ | Premisa |
| 2) | $(p_5 \vee p_7)$ | $\Rightarrow$ | $(p_{13} \vee p_{14})$ | Premisa |
| 3) | $(p_{13} \vee p_{14})$ | $\Rightarrow$ | $(p_1 \vee p_7)$ | Premisa |
| 4) | $\neg p_1$ | | | Premisa |
| 5) | $(p_5 \vee p_7)$ | | | S.D. |
| 6) | $(p_{13} \vee p_{14})$ | | | M.P. |
| 7) | $(p_1 \vee p_7)$ | | | M.P. |
| 8) | $p_1$ | $\vee$ | $p_7$ | R.E. |
| 9) | $p_7$ | | | S.D. |
| | | $\therefore$ | $p_7$ | |

De (2):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1) | $p_4$ | $\Rightarrow$ | $(p_5 \Rightarrow p_7)$ | Premisa |
| 1) | $(p_5 \Rightarrow p_7)$ | $\Rightarrow$ | $p_{10}$ | Premisa |
| 1) | $(p_{20} \Rightarrow p_{30})$ | $\Rightarrow$ | $\neg p_{40}$ | Premisa |
| 1) | $\neg p_{40}$ | $\Rightarrow$ | $(p_5 \iff \neg p_{45})$ | Premisa |
| 1) | $\neg p_{10}$ | | | Premisa |
| 1) | $\neg(p_5$ | $\iff$ | $\neg p_{45})$ | Premisa |
| 1) | $\neg(p_5 \iff \neg p_{45})$ | $\Rightarrow$ | $p_{40}$ | Ax. |
| 1) | $p_{40}$ | | | M.P. |
| 1) | $p_{40}$ | $\Rightarrow$ | $\neg(p_{20} \Rightarrow p_{30})$ | Ax. |
| 1) | $\neg(p_{20} \Rightarrow p_{30})$ | | | M.P. |
| 1) | $\neg p_{10}$ | $\Rightarrow$ | $\neg(p_5 \Rightarrow p_7)$ | Ax. |
| 1) | $\neg(p_5 \Rightarrow p_7)$ | | | Ax. |
| 1) | $\neg(p_5 \Rightarrow p_7)$ | $\Rightarrow$ | $\neg p_4$ | Ax. |
| 1) | $\neg p_4$ | | | M.P. |
| 1) | $\neg p_4$ | $\wedge$ | $\neg(p_{20} \Rightarrow p_{30})$ | Ad. |
| | | $\therefore$ | $\neg p_4 \wedge \neg(p_{20} \vee p_{30})$ | |

■

**Ejercicio 1.3.2**
Demuestre que existe una demostración formal de los siguientes argumentos:

**Demostración:**
De (a):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1) | $A$ | $\Rightarrow$ | $B$ | Premisa |
| 2) | $C$ | $\Rightarrow$ | $D$ | Premisa |
| 3) | $\neg B$ | $\vee$ | $\neg D$ | Premisa |
| 4) | $\neg\neg A$ | | | Premisa |
| 5) | $E \wedge F$ | $\Rightarrow$ | $C$ | Premisa |
| 6) | $A$ | | | 4 Ax. 3 |
| 7) | $B$ | | | 1,6 M.P. |
| 8) | $\neg(\neg B)$ | | | 7 Ax. 3 |
| 9) | $\neg D$ | | | 3,8 S.D. |
| 10) | $\neg D$ | $\Rightarrow$ | $\neg C$ | 1 Ax. 4 |
| 11) | $\neg C$ | | | 9,10 M.P. |
| 12) | $\neg C$ | $\Rightarrow$ | $\neg(E \wedge F)$ | 5 Ax. 4 |
| 13) | $\neg(E \wedge F)$ | | | 11,12 M.P. |
| | | $\therefore$ | $\neg(E \wedge F)$ | |

De (b):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1) | $E$ | $\Rightarrow$ | $(F \wedge \neg G)$ | Premisa |
| 2) | $(F \vee G)$ | $\Rightarrow$ | $H$ | Premisa |
| 3) | $E$ | | | Premisa |
| 4) | $F$ | $\wedge$ | $\neg G$ | 1,3 M.P. |
| 5) | $F$ | | | 4, Simp. |
| 6) | $F$ | $\vee$ | $G$ | 4 Ad. |
| 7) | $H$ | | | 2,6 M.P. |
| | | $\therefore$ | $H$ | |

■

**Proposición 1.3.2**
Se cumple lo siguiente:

**Doble Negación**

$$\begin{array}{l}\varphi \\ \hline \therefore \quad \neg\neg\varphi\end{array}$$

y,

$$\begin{array}{l}\neg\neg\varphi \\ \hline \therefore \quad \varphi\end{array}$$

**Transposición**

$$\begin{array}{lcl}\varphi & & \\ \varphi & \Rightarrow & \varphi' \text{ (con Ax. 4)} \\ \hline \therefore & & \varphi'\end{array}$$

**Tautología**

$$\begin{array}{lcl}\neg\psi & \Rightarrow & \psi \\ \hline & \therefore & \psi\end{array}$$

**Conmutatividad de $\vee$**

$$\begin{array}{lcl}\varphi & \vee & \psi \\ \hline & \therefore & \psi \vee \varphi\end{array}$$

**Conmutatividad de $\wedge$**

$$\begin{array}{lcl}\varphi & \wedge & \psi \\ \hline & \therefore & \psi \wedge \varphi\end{array}$$

**Demostración:**

- **Conmutatividad de $\vee$**

$$\begin{array}{llcll}1) & \varphi & \vee & \psi & \text{Premisa} \\ 1) & \neg\varphi & \Rightarrow & \psi & \text{1 R.E.} \\ 1) & \neg\psi & \Rightarrow & \neg\neg\varphi & \\ 1) & \neg\psi & \Rightarrow & \varphi & \\ 1) & \psi & \vee & \varphi & \\ \hline & & \therefore & \psi \vee \varphi & \end{array}$$

■

**Observación 1.3.2**
Para los siguientes ejercicios se asume la conmutatividad de $\vee$ y $\wedge$, que se denota simplemente por Conm.

**Ejercicio 1.3.3**
Demuestre que existe una demostración formal de los siguientes argumentos:

**Demostración:**
De (c):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1) | $J$ | $\Rightarrow$ | $K$ | Premisa |
| 2) | $J$ | $\vee$ | $(K \vee \neg L)$ | Premisa |
| 3) | $\neg K$ | | | Premisa |
| 4) | $\neg J$ | | | 1,3 M.T. |
| 5) | $K$ | $\vee$ | $\neg L$ | 2,4 S.D. |
| 6) | $\neg L$ | | | 3,5 S.D. |
| 7) | $\neg L$ | $\vee$ | $\neg K$ | 6 Ad. |
| | | $\therefore$ | $\neg L \vee \neg K$ | |

De (d):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1) | $(R \Rightarrow \neg S)$ | $\wedge$ | $(T \Rightarrow \neg U)$ | Premisa |
| 2) | $(V \Rightarrow \neg W)$ | $\wedge$ | $(X \Rightarrow \neg Y)$ | Premisa |
| 3) | $(T \Rightarrow W)$ | $\wedge$ | $(U \Rightarrow S)$ | Premisa |
| 4) | $V$ | | | Premisa |
| 5) | $R$ | | | Premisa |
| 6) | $R$ | $\Rightarrow$ | $\neg S$ | 1 Simp. |
| 7) | $\neg S$ | | | 6,5 M.P. |
| 8) | $(U \Rightarrow S)$ | $\wedge$ | $(T \Rightarrow W)$ | 3 Conm. |
| 9) | $U$ | $\Rightarrow$ | $S$ | 3 Simp. |
| 10) | $\neg U$ | | | 9,7 M.T. |
| 11) | $V$ | $\Rightarrow$ | $\neg W$ | 2 Simp. |
| 12) | $\neg W$ | | | 4,11 M.P. |
| 13) | $T$ | $\Rightarrow$ | $W$ | 3 Simp. |
| 14) | $\neg T$ | | | 13,12 M.T. |
| 15) | $\neg T$ | $\wedge$ | $\neg U$ | 14,10 Conj. |
| | | $\therefore$ | $\neg T \wedge \neg U$ | |

■