IDEALES

Def. Sea A un anillo e I un subconjunto de A no vacío. Decimos que I es un ideal izquierdo (resp. derecho) de A si $\forall\ a,b \in I$, y $\forall\ r \in A$:

i) $a-b \in I$. &

ii) $ra \in I$ (resp. $ar \in I$).

Decimos que I es ideal de A, si lo es tanto por la izquierda como por la derecha.

Obs: Si A es anillo conmutativo, se tiene que I es ideal izquierdo (ó derecho) $\Leftrightarrow$ I es ideal.

Todo ideal izquierdo (resp. derecho, ideal), es subanillo del anillo.

La recíproca no se cumple. Por ejemplo, $\mathbb{Z}$ es subanillo de $\mathbb{Q}$, pero no es ideal, pues
Pues $\exists\ \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ y $1 \in \mathbb{Z}$ m $\frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

Obs: Sea A anillo e $I \subseteq A$ con $I \neq \emptyset$. Definimos $AI = \{\sum_{i=1}^{n} r_i a_i \mid r_i \in A$ y $a_i \in I$, $\forall\ i \in [\![1,n]\!]; n \in \mathbb{N}\}$. Similarmente $IA = \{\sum_{i=1}^{n} a_i r_i \mid a_i \in I, r_i \in A, \forall\ i \in [\![1,n]\!]; n \in \mathbb{N}\}$. Bajo esta def. tenemos que:

I es ideal izquierdo (resp. derecho, ideal) si y sólo si $AI \subseteq I$ (resp $IA \subseteq I$, AI & $IA \subseteq I$), y $(I,+) < (A,+)$.

EJEMPLOS

<3

1) Si A es anillo. Entonces $\{0\}$ y A son ideales (izq. y der.) de A. :)

Todo anillo A cuyos únicos ideales son $\{0\}$ y A, se dice que son simples.

2) En $\mathbb{Z}$ sus ideales son de la forma $n\mathbb{Z}$, $n \geq 0$.

3) Sea A un anillo y $a \in A$. Tenemos que:

$$Aa = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i a \;\middle|\; r_i \in A \; \forall\, i \in [1,n] ;\, n \in \mathbb{N} \right\} = \{ ra \mid r \in A \}$$

Aa es un ideal izquierdo. Similarmente aA es un ideal derecho. Si A es conmutativo: $Aa = aA$ es ideal. Estos ideales son llamados ideales principales.

En un anillo conmutativo con identidad, dónde todos sus ideales son principales, se dice que A es un anillo de ideales principales.

4) Sea X un conjunto no vacío y A un anillo. Consideremos $\mathcal{F}(X, A)$, el anillo de funciones de X en A. Sea $x \in X$ y definimos $\mathfrak{m}_x := \{ f \in \mathcal{F}(X, A) \mid f(x) = 0 \}$. Entonces $\mathfrak{m}_x$ es un ideal de $\mathcal{F}(X, A)$. Es claro que:

$$(\mathfrak{m}_x, +) < (\mathcal{F}(X, A), +).$$

Si $h \in \mathcal{F}(X, A)$ y $f \in \mathfrak{m}_x$, entonces:

$$h \cdot f(x) = h(x) \cdot f(x) = h(x) \cdot 0 = 0 = f(x) h(x) = fh(x)$$

por tanto, $hf, fh \in \mathfrak{m}_x$. Así $\mathfrak{m}_x$ es ideal de $\mathcal{F}(X, A)$. Podemos generalizar esta situación. Sea $S \subseteq X$, $S \neq \phi$. Definimos:

$$\mathfrak{m}_S = \{ f \in \mathcal{F}(X, A) \mid f(x) = 0 \; \forall\, x \in S \}$$

$\mathfrak{m}_S$ es un ideal de $\mathcal{F}(X, A)$. Notemos que:

$$\mathfrak{m}_S \subseteq \mathfrak{m}_x \; \forall\, x \in S.$$

5) Consideremos el anillo no conmutativo $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$. Definimos: $I = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \right\}$. Se tiene que I es ideal izquierdo: pues:

$$\begin{bmatrix} c & d \\ e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac + db & 0 \\ ae + fb & 0 \end{bmatrix} \in I$$

pero no derecho pues:

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix} \notin I$$

Si $J = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \right\}$. J es ideal derecho, pero no izquierdo. Un ideal sería $2\mathcal{M} = \left\{ \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$. Finalmente, sea $K = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}) \;\middle|\; a, b, c, d \in 2\mathbb{Z} \right\}$. K es un ideal de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$.

Proposición.

Sea A un anillo e I un ideal, se tiene que si A tiene 1 y $1 \in I \Rightarrow I = A$.

Dem:

$\forall r \in A$, como $1 \in I \Rightarrow 1 \cdot r = r \in I \Rightarrow I = A$.

q.e.d.

Proposición.

Sea A un anillo y $\{I_i\}_{i \in \Lambda}$ una familia de ideales (izquierdos, derechos) de A. Entonces, $I := \bigcap_{i \in \Lambda} I_i$ también lo es.

Dem:

$I \neq \emptyset$, pues $0 \in I_i$, $\forall i \in \Lambda$. Sean $a, b \in I$ y $r \in A$. Luego $a, b \in I_i$ $\forall i \in \Lambda$. Como I_i es ideal de A, $a - b \in I_i$ y $ra \in I_i$ y $ar \in I_i$ $\forall i \in \Lambda$. Así $a-b$, ar, $ra \in I$.

Por tanto, I es ideal de A.

q.e.d.

Obs: También se cumple que si $\{A_i\}_{i \in \Lambda}$ es una familia de subanillos de A, entonces $B = \bigcap_{i \in \Lambda} I_i$ es un subanillo de A.

Sea A un anillo y $S \subseteq A$. Se define el ideal (izq., der.) generado por S de A, como:

$$\langle S \rangle = \bigcap_{\substack{I \text{ ideal de } A \\ S \subseteq I}} I$$

de otra forma, tome $B = \{ I \mid I \text{ es ideal de } A \text{ y } S \subseteq I \}$. Entonces:

$$\langle S \rangle = \bigcap_{I \in B} I$$

$\langle S \rangle$ está bien definido, pues $B \neq \emptyset$ ($A \in B$, pues A es ideal de A y $S \subseteq A$).

Proposición.

Sea A un anillo y $S \subseteq A$. Entonces:

i) $\langle S \rangle$ es un ideal (izq., der.) de A.

ii) Si $S = \emptyset \Rightarrow \langle S \rangle = \{0\} = \langle \{0\} \rangle$.

iii) $S \subseteq \langle S \rangle$.

iv) $\langle S \rangle$ es el mínimo ideal (izq., der.) de A que contiene a S; es decir si K es ideal de A que contiene a S, entonces $\langle S \rangle \subseteq K$.

Dem:

Es inmediata[1].

q.e.d.

Obs: Generalmente, al definir un subanillo de un anillo A generado por un conjunto $S \subseteq A$, éste se escribe como $[S]$. (la definición de éste es análoga es a la del ideal generado[2]).

Al conjunto S se dice ser un conjunto de generadores del ideal $I := \langle S \rangle$. Si S es un conjunto finito, con $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, entonces expresamos a $I := \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ y decimos que I es finitamente generado (abreviado f.g.), por los elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Si J es un ideal de A entonces se dice que J es f.g. si $\exists\, b_1, \ldots, b_m \in A \ni J = \langle b_1, \ldots, b_m \rangle$. Todo esto también es aplicable para subanillos.

Proposición.

Sea A un anillo e I un subconjunto de A. Entonces I es ideal (izq, der) de $A \Leftrightarrow \exists\, S \subseteq A \ni I = \langle S \rangle$.

Dem:

$\Leftarrow$) Es inmediata.

$\Rightarrow$) $\exists\, S = I \ni \langle S \rangle = \langle I \rangle = I$.

Obs: Usamos las notaciones $\langle\,\rangle$, $\langle\,\rangle_i$, $\langle\,\rangle_d$, para ideales, ideales izquierdos e ideales derechos, respectivamente.
En particular, si $S\subseteq A$ con A anillo: $\langle S\rangle_i\subseteq\langle S\rangle$ y $\langle S\rangle_d\subseteq\langle S\rangle$.

Sea A un anillo y $a\in A$. Tenemos que:

$$\langle a\rangle_i=\{ra+ma \mid r\in A \text{ y } m\in\mathbb{Z}\}.$$

En efecto: sea $B=\{ra+ma \mid r\in A \text{ y } m\in\mathbb{Z}\}$, $B\neq\emptyset$ pues $a\in B$. Si $x,y\in B$ y $t\in A$, con $x=ra+ma$ y $y=sa+na$. Entonces:

$$x-y=(r-s)a+(m-n)a\in B$$

y:

$$\begin{aligned} tx &= t(ra+ma)=(tr)a+t(ma)\\ &=(tr)a+(mt)a\\ &=(tr+mt)a+0a \end{aligned}$$

Con $tr+mt\in A$ y $0\in\mathbb{Z}$. Luego $tx\in B$. Así B es ideal izq. de A. Como $a\in B\Rightarrow\langle a\rangle_i\subseteq B$. Por otro lado, como B es ideal izq. que contiene a a, se cumple que $\forall r\in A$, y $\forall m\in\mathbb{Z}$, $ra\in\langle a\rangle_i$ y $ma\in\langle a\rangle_i$. Luego $ra+ma\in\langle a\rangle_i$. Así $B\subseteq\langle a\rangle_i$.
Por tanto $\langle a\rangle_i=B$.

Similarmente:

$$\langle a\rangle_d=\{ar+ma \mid r\in A \text{ y } m\in\mathbb{Z}\}, \text{ y:}$$

$$\langle a\rangle=\{ra+as+ma+\sum_{i=1}^{n}x_iay_i \mid r,s,x_i,y_i\in A,\ m\in\mathbb{Z},\ \forall i\in[\![1,n]\!], \text{ con } n\in\mathbb{N}\}.$$

Si el anillo A es conmutativo:

$$\langle a\rangle=\{ra+ma \mid r\in A \text{ y } m\in\mathbb{Z}\}$$

Y, para un $b\in A$:

$$\langle a,b\rangle = \{ra+sb+tab+ma+nb+kab \mid r,s,t\in A;\ m,n,k\in\mathbb{Z}\}.$$

Si A además, tiene identidad:

$$\langle a\rangle = \{ra \mid r\in A\}$$

en esta situación, si $a_1,\dots,a_t\in A$, entonces:

$$\langle a_1,\dots,a_t\rangle = \{r_1a_1+\dots+r_ta_t \mid r_i\in A,\ \forall i\in [\![1,t]\!]\}.$$

Sea A un anillo y $\{I_i\}_{i\in\Lambda}$ una familia de ideales de A. Definimos la suma de $\{I_i\}_{i\in\Lambda}$ como:

$$I=\sum_{i\in\Lambda} I_i := \left\{\sum_{i\in\Lambda} a_i \,\middle|\, a_i\in I_i,\ \forall i\in\Lambda;\ \text{pero } a_j=0\ \forall\!\!\!\!/\ j\in\Lambda\right\}$$

Si $|\Lambda|<\infty$, podemos suponer $\Lambda=[\![1,n]\!]$. Así:

$$I=\sum_{i=1}^{n} I_i = I_1+I_2+\dots+I_n$$

Si $|\Lambda|=\aleph_0$, entonces en el caso de de $\Lambda=\mathbb{N}$:

$$I=\sum_{i=1}^{\infty} I_i = I_1+I_2+\dots$$

Aquí, $I\neq\emptyset$, pues $0\in I$. En general, para la familia $\{I_i\}$, pedimos que $I_i\neq\{0\}$ $\forall i\in\Lambda$.

Además, I es un ideal de A. En efecto, sean $x,y\in I$ y $r\in A$. Entonces:

$$x=\sum_{i\in\Lambda} a_i \quad y \quad y=\sum_{i\in\Lambda} b_i$$

$$\Rightarrow x-y=\sum_{i\in\Lambda} a_i-b_i,\ \text{donde } a_i-b_i\in I_i,\ \forall i\in\Lambda.$$

Pero $a_i-b_i=0$ $\forall\!\!\!\!/\ i\in\Lambda$, y a lo sumo $a_i-b_i\neq 0$ para a lo sumo, la suma de los elementos $a_i\neq 0$ y $b_i\neq 0$. Además:

$$rx=r\cdot\left(\sum_{i\in\Lambda} a_i\right)$$

Como la suma es finita:

$$=\sum_{i\in\Lambda} ra_i \quad y \quad ra_i\in I_i\ \forall i\in\Lambda$$

pues I_i es ideal de A. También:

$$xr = \sum_{i\in\Lambda} a_i r \quad y \quad a_i r \in I_i \;\; \forall\, i\in\Lambda$$

Donde $ra_j = 0$ y $a_k r = 0$ $\forall\, i,j\in\Lambda$. Luego $rx, xr\in I$. Así, I es ideal de A.

Si se tuviera que $A = \sum_{i\in\Lambda} I_i$, se dice que A es la suma de la familia $\{I_i\}_{i\in\Lambda}$. En general, se dice que el ideal I es la suma de $\{I_i\}_{i\in\Lambda}$.

Def. Sea A un anillo, $\{I_i\}_{i\in\Lambda}$ una familia de ideales de A e I un ideal de A. Decimos que I es suma directa de $\{I_i\}_{i\in\Lambda}$, a lo que se escribe:

$$I = \bigoplus_{i\in\Lambda} I_i$$

Si $I = \sum_{i\in\Lambda} I_i$, y cada elemento $x\in I$ se expresa de manera única como:

$$x = \sum_{i\in\Lambda} a_i$$

donde $a_i\in I_i$, $\forall\, i\in\Lambda$, pero $a_j = 0$ $\forall\, j\in\Lambda$. Es decir, si x tiene dos representaciones $x = \sum_{i\in\Lambda} a_i$ y $x = \sum_{i\in\Lambda} b_i \Rightarrow a_i = b_i$ $\forall\, i\in\Lambda$.

Proposición.

En las condiciones de la def. anterior: $I = \bigoplus_{i\in\Lambda} I_i \iff I = \sum_{i\in\Lambda} I_i$ y $I_j \cap \left(\sum_{\substack{i\in\Lambda\\ i\neq j}} I_i\right) = \{0\}$, $\forall\, j\in\Lambda$.

Dem:

$\Rightarrow$) Supongamos $I = \bigoplus_{i\in\Lambda} I_i$, entonces $I = \sum_{i\in\Lambda} I_i$. Sea $j\in\Lambda$ y $x\in I_j \cap \left(\sum_{\substack{i\in\Lambda\\ i\neq j}} I_i\right)$. Tenemos que $x = \sum_{\substack{i\in\Lambda\\ i\neq j}} a_i$ donde $a_i\in I_i$ $\forall\, i\in\Lambda$, $i\neq j$, pero $a_k = 0$ $\forall\, k\in\Lambda$, con $k\neq j$. También $x = \sum_{i\in\Lambda_i} b_i$ donde $b_i = 0$ si $i\neq j$ y $b_j = x$.

Así que:

$$\sum_{i\in\Lambda} b_i = x = \sum_{\substack{i\in\Lambda\\ i\neq j}} a_i = \sum_{i\in\Lambda} a_i, \quad \text{con } a_j = 0$$

Como I es suma directa: $\Rightarrow b_i = a_i$ $\forall\, i\in\Lambda$. Luego como $b_i = 0$ $\forall\, i\in\Lambda\setminus\{j\}$ y $a_j = 0 = b_j \Rightarrow a_i = 0$, $\forall\, i\in\Lambda$. Luego $x = 0$. Por tanto:

$$I_j \cap \left(\sum_{\substack{i\in\Lambda\\ i\neq j}} I_i\right) = \{0\}$$

$\Leftarrow$) Suponga $I = \sum_{i\in A} I_i$ y, $\forall j \in A$: $I_j \cap \left(\sum_{\substack{i\in A \\ i\neq j}} I_i \right) = \{0\}$. Sea ahora $x \in I$. Si
$$\sum_{i\in A} a_i = x = \sum_{i\in A} b_i$$
Sea $j \in A \Rightarrow b_j - a_j = \sum_{\substack{i\in A \\ i\neq j}} (a_i - b_i) \in I_j \cap \left(\sum_{\substack{i\in A \\ i\neq j}} I_i \right) = \{0\}$, luego $b_j = a_j$. Así $a_i = b_i$ $\forall i \in A$. Luego $I = \bigoplus_{i\in A} I_i$.

q.e.d.

Corolario.

Sean A un anillo e I, J dos ideales de A. Entonces $I + J$ es suma directa $\Leftrightarrow$ $I \cap J = \{0\}$.

Dem:

Es inmediato.

q.e.d.

Obs: Se tiene que: $\sum_{i\in A} I_i = \langle \bigcup_{i\in A} I_i \rangle$. En efecto, expresamos $I = \sum_{i\in A} I_i$. Tenemos que $\forall j \in A$, $I_j \subseteq I$. Luego $\bigcup_{i\in A} I_i \subseteq I \Rightarrow \langle \bigcup_{i\in A} I_i \rangle \subseteq I$. Si $x \in I$ con $x = \sum_{i\in A} a_i$, entonces $a_j \in \langle \bigcup_{i\in A} I_i \rangle$, $\forall j \in A$. Luego $x = \sum_{i\in A} a_i \in \langle \bigcup_{i\in A} I_i \rangle \Rightarrow I \subseteq \langle \bigcup_{i\in A} I_i \rangle$. Así:
$$\sum_{i\in A} I_i = \left\langle \bigcup_{i\in A} I_i \right\rangle$$

Def. Sea A anillo, e I, J dos ideales de A. Se define el **producto** de I & J, como:
$$IJ = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \;\middle|\; a_i \in I,\ b_i \in J,\ \forall i \in A;\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

Tenemos $IJ \neq \emptyset$, pues $0 \in IJ$. Además, IJ es un ideal de A. Pues, si $x, y \in IJ$ y $r \in A$, expresamos $x = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ y $y = \sum_{j=1}^{m} c_j d_j$.
$$\Rightarrow x - y = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i - \sum_{j=1}^{m} c_j d_j$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{j=1}^{m} (-c_j) d_j \in IJ$$

y:

$$rx = \sum_{i=1}^{n} (ra_i) b_i \in IJ \quad y \quad xr = \sum_{i=1}^{n} a_i (b_i r) \in IJ$$

$$\therefore IJ \text{ es ideal de } A.$$

Obs: notemos que, si I es ideal izquierdo y J es ideal derecho, entonces IJ es ideal de A.

También, se define por inducción el producto de una cantidad finita de ideales $I_1, \dots, I_n$, a saber:

$$I_1 \cdot \ldots \cdot I_n = (I_1 \cdot \ldots \cdot I_{n-1}) \cdot I_n$$

Es decir:

$$I_1 \cdot \ldots \cdot I_n = \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_{i_1} a_{i_2} \cdot \ldots \cdot a_{i_n} \,\middle|\, a_{i_j} \in I_j, \ \forall j \in [\![1, n]\!] \ \& \ i \in [\![1, m]\!]; \ m \in \mathbb{N} \right\}$$

En general $IJ \neq JI$. Si $I_1 = I_2 = \ldots = I_n = I$, expresamos (donde I es ideal de A), como:

$$I_1 \cdot \ldots \cdot I_n = \underbrace{I \cdot \ldots \cdot I}_{i\text{-veces}} = I^n$$

Notemos que $I \supseteq I^2 \supseteq I^3 \supseteq \ldots \supseteq I^n \supseteq \ldots \supseteq \{0\}$. Con lo anterior, se denota $I_0 = A$. En general, si $I_1, \dots, I_n$ son ideales del anillo A, entonces: $\forall j \in [\![1, n]\!]$,

$$I_1 \cdot \ldots \cdot I_n \subseteq I_j$$

es decir: $I_1 \cdot \ldots \cdot I_n \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} I_i$.

EJEMPLOS.

1) Sean $n, m \in \mathbb{Z}$, $n, m \geq 0$. Entonces si $n = 0 \Rightarrow n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$. Si $m = 0 \Rightarrow n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = n\mathbb{Z}$. Supongamos $n, m \in \mathbb{N}$. Sea $d = (m, n) = \text{mcd}\{m, n\}$. Afirmamos qué:

$$m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$$

En efecto, como $\exists\, r, s \in \mathbb{Z} \ni d = mr + ns$, entonces $d \in m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}$, donde $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}$

es ideal de $\mathbb{Z}$. Luego $d\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z}+n\mathbb{Z}$.

Como $d=(m,n) \Rightarrow d|m$ y $d|n \Rightarrow m\in d\mathbb{Z}$ y $n\in d\mathbb{Z} \Rightarrow m\mathbb{Z} \subseteq d\mathbb{Z}$ y $n\mathbb{Z}\subseteq d\mathbb{Z}$.

Luego $m\mathbb{Z}+n\mathbb{Z} \subseteq d\mathbb{Z}$. Así $m\mathbb{Z}+n\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$.

Si $(m,n)=1$, entonces tendremos que $m\mathbb{Z}+n\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$.

2) Sea A un anillo conmutativo con 1, y sean I, J ideales de A $\ni$ $A=I+J$.

Entonces, $IJ = I\cap J$. En efecto, ya tenemos que $IJ \subseteq I\cap J$. Sea $a\in I$ y $b\in J$ $\ni$ $a+b=1$. Sea $x\in I\cap J$, tenemos:

$$\begin{aligned} x &= x\cdot 1 \\ &= x(a+b) \\ &= ax+xb \in IJ \end{aligned}$$

$\therefore I\cap J \subseteq IJ$. Así $IJ = I\cap J$.

3) Si $m,n\in \mathbb{N}$, entonces

$$(n\mathbb{Z})(m\mathbb{Z}) = nm\mathbb{Z}$$

Si $nm\mathbb{Z} = n\mathbb{Z}\cap m\mathbb{Z}$. Sean $c=[a,b]$ y $d=(a,b)$. Veamos que:

$$n\mathbb{Z}\cap m\mathbb{Z} = c\mathbb{Z}$$

Como $n|c$ y $m|c \Rightarrow c\in n\mathbb{Z}\cap m\mathbb{Z}$, luego $c\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z}\cap m\mathbb{Z}$. Si $x\in n\mathbb{Z}\cap m\mathbb{Z}$ $\Rightarrow ns = x = mr \Rightarrow n|x$ y $m|x \Rightarrow c|x \Rightarrow x = cr \in c\mathbb{Z} \Rightarrow n\mathbb{Z}\cap m\mathbb{Z} \subseteq c\mathbb{Z}$.

Por tanto $c\mathbb{Z} = n\mathbb{Z}\cap m\mathbb{Z}$. Si $nm\mathbb{Z} = n\mathbb{Z}\cap m\mathbb{Z} \Rightarrow cd\mathbb{Z} = c\mathbb{Z}$, pues $nm = cd$.

Probaremos que $d=1$. En efecto: Si $d>1$, $c\mathbb{Z} \not\subseteq dc\mathbb{Z}$, pues $c\notin dc\mathbb{Z}$. Por tanto $d=1 \Rightarrow (m,n)=1$. Así pues

$$(n,m)=1 \Leftrightarrow nm\mathbb{Z} = n\mathbb{Z}\cap m\mathbb{Z}.$$

4) Si $m,n\in\mathbb{N}$, entonces ¿es posible que $n\mathbb{Z}+m\mathbb{Z}$ sea suma directa? Y, si lo es, ¿de qué forma es m y n? No es posible, sean $m,n\in\mathbb{N}$, como $mn\in n\mathbb{Z}\cap m\mathbb{Z}$, en

tonces $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} \neq \{0\}$. Luego $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z}$ no puede ser suma directa.

5) Sea A un anillo entero, y sean I, J ideales de A tq $I \neq \langle 0 \rangle \neq J$. Entonces $I + J$ nunca es suma directa. En efecto: suponemos $I + J = I \oplus J$, así qué:

$$I \cap J = \langle 0 \rangle$$

Sea $a \in I$ y $b \in J$ tq $a, b \neq 0$. Entonces $ab \in IJ \subseteq I \cap J$, luego $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ o $b = 0$ $\#c$. Por tanto $I + J$ no es suma directa.

Notas:

1) (i) por la prop. anterior, pues $\langle S \rangle$ es intersección de ideales (izq, der) de A.

(ii) $\langle \emptyset \rangle = \bigcap_{I \in \mathcal{B}} I$, $\mathcal{B} = \{ I \mid I$ es ideal de A y $\emptyset \subseteq I \} = \{ I \mid I$ es ideal de $A \}$

Como $\{0\}$ es ideal de $A \Rightarrow \{0\} \in \mathcal{B}$, y $\{0\} \subseteq I$, $\forall I \in \mathcal{B}$. Luego $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$.

De manera similar, $\langle \{0\} \rangle = \{0\}$.

(iii) Es inmediato de la def.

(iv) $K \in \mathcal{B} \Rightarrow \langle S \rangle \subseteq K$.

2) Se define el subanillo generado por $S \subseteq A$, como:

$$[S] := \bigcap_{\substack{I \text{ subanillo} \\ \text{de } A \text{ m } S \subseteq I}} I$$