Caso Completo.

En lo sucesivo $\mathbb{K}$ denota tanto al campo $\mathbb{R}$ como a $\mathbb{C}$.

Funciones Medibles.

Si $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ es una función, se dice que **f es medible**, si $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$ son medibles como funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ denotan los conjuntos de funciones medibles de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}$, resp.

Teorema.

i) $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

ii) $f^{-1}(G)$ es medible en $\mathbb{R}^n$ $\forall$ G abierto en $\mathbb{C}$.

iii) $f^{-1}(B)$ es medible en $\mathbb{R}^n$, $\forall$ $B \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$.

Dem:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sea G abierto en $\mathbb{C}$

Def. $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $\varphi = \mathrm{Re}\,\varphi + i\,\mathrm{Im}\,\varphi$ es una **función simple** si $\mathrm{Re}\,\varphi$ e $\mathrm{Im}\,\varphi$ son funciones simples como funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. Se define $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ y $S(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ a los conjuntos de funciones simples, escalonadas y simples nula fuera de un conjunto con medida finita.

De forma análoga con las escalonadas. Entonces $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ es simple ssi φ es medible y toma una cantidad finita de valores distintos, digamos $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{C}$. Sean $A_i = \varphi^{-1}(\{c_i\})$, $\forall i \in [\![1, r]\!]$, entonces:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{r} c_i \chi_{A_i}$$

es la **representación canónica de φ**. De forma análoga con las escalonadas.

De las propiedades del caso real, se deduce que $M(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ y $S(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ son esp. vectorial sobre el campo $\mathbb{C}$.

Proposición.

i) $f \in M(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \Rightarrow |f| \in M(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

ii) $f \in M(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \Rightarrow \bar{f} \in M(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

iii) $f, g \in M(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \Rightarrow fg \in M(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

iv) Si $f \in M(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ y f se anula sobre un conjunto despreciable, entonces $\frac{1}{f} \in M(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

Las afirmaciones (i) - (iii) son válidas al reemplazar $M(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ por $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, $S(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

Dem:

Teorema.

Si $\{f_v\}_{v=1}^{\infty}$ es una sucesión en $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ m

$$\lim_{v\to\infty} f_v = f \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n$$

entonces f es medible.

Además, $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ si y sólo si existe $\{\varphi_v\}_{v=1}^{\infty}$ en $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ (o en $S(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$) m $\lim_{v\to\infty} \varphi_v = f$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$.

Dem:

Funciones Integrables.

Def. $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ es es integrable si $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son integrables. En este caso, la integral de f se define como el número:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{Re} f + i \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{Im} f$$

$\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ denota al conjunto de funciones integrables de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{C}$.

Proposición.

$\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ es un esp. vectorial sobre el campo $\mathbb{C}$ y la aplicación $f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f$ es un funcional lineal de $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

Dem:

Sean $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ y $c \in \mathbb{C}$. Entonces:

$$f+g = (\operatorname{Re} f + \operatorname{Re} g) + i(\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$$

Con $c = a+ib$, se tiene:

$$cf = (a+ib)(\operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f) = (a\operatorname{Re} f - b\operatorname{Im} f) + i(a\operatorname{Im} f + b\operatorname{Re} f) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}).$$

y:

$$\int_{\mathbb{R}^n}(f+g) = \int_{\mathbb{R}^n}(\operatorname{Re} f + \operatorname{Re} g) + i\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$$
$$= \dots = \int_{\mathbb{R}^n} f + \int_{\mathbb{R}^n} g$$
$$\int_{\mathbb{R}^n} cf = \int_{\mathbb{R}^n}(a\operatorname{Re} f - b\operatorname{Im} f) + i\int_{\mathbb{R}^n}(a\operatorname{Im} f + b\operatorname{Re} f)$$
$$= \dots = c\int_{\mathbb{R}^n} f.$$

q.e.d.

Proposición.

i) Si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, entonces $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \iff |f| \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

ii) Si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, entonces $\left|\int_{\mathbb{R}^n} f\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f|$.

iii) $N: \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \to \mathbb{R}$,

$$N(f) = \int_{\mathbb{R}^n} |f| \ , \ \forall f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$$

es una seminorma sobre $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ m $N(f) = 0$ si y sólo si $f = 0$ c.t.p.

Dem:

De (i): Observe que $\max\{|\operatorname{Re} f|, |\operatorname{Im} f|\} \leq |f| \leq \sqrt{2} \max\{|\operatorname{Re} f|, |\operatorname{Im} f|\}$. [1)]

De (ii): $\exists \ \alpha \in \mathbb{R}$ m

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = e^{i\alpha} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f \right|$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^n} f \right| &= e^{-i\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} f \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\alpha} f \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{Re}(e^{-i\alpha} f) + i \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{Im}(e^{-i\alpha} f)
\end{aligned}$$

Como sólo hay parte real:

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{Im}(e^{-i\alpha} f) = 0$$

$$\begin{aligned}
\therefore \left| \int_{\mathbb{R}^n} f \right| &= \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{Re}(e^{-i\alpha} f) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\operatorname{Re}(e^{-i\alpha} f)| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-i\alpha} f| \ , \quad \text{como } |e^{-i\alpha}| = 1 \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |f|
\end{aligned}$$

De (iii): Ejercicio.

El Espacio Normado $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

Sea:

$$K = \{f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \mid N(f) = 0\}$$
$$= \{f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \mid f = 0 \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n\}$$

K es subespacio vectorial de $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Se define:

$$L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) = \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) / K$$

donde $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ son equivalentes $\Longleftrightarrow$ $f = g$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$. Se define $\hat{N} : L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ como:

$$\hat{N}(\hat{f}) = N(f), \ \forall f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$$

$\hat{N}$ es una norma, con lo cual se confundirán los espacios $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ y $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ conveniendo en no distinguir entre funciones equivalentes. $\hat{N}$ se denotará por N.

Def. $\{f_v\}_{v=1}^{\infty}$ en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ converge en promedio a $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ si

$$\lim_{v \to \infty} N(f - f_v) = 0$$

Entonces la aplicación $f \longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} f$ es un funcional continuo de $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ con norma $\leqslant 1$.[2)] En particular:

$$\lim_{v \to \infty} N(f_v - f) = 0 \Rightarrow \lim_{v \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_v = \int_{\mathbb{R}^n} f$$

Teorema.

$\mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ y $S(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ son subespacios densos de $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

Dem:

Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ y $\varepsilon > 0$. Entonces $\exists\ \varphi, \psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ m

$$N(\operatorname{Re} f - \varphi) < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$N(\operatorname{Im} f - \psi) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Entonces $\eta = \varphi + i\psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ m $N(f - \eta) \leqslant N(\operatorname{Re} f - \varphi) + N(\operatorname{Im} f - \psi) < \varepsilon$.

q.e.d.

Teoremas De Conv. Y Fubini.

Teorema (de Lebesgue).

Sea $\{f_v\}_{v=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Se supone:

a) $\lim_{v\to\infty} f_v = f$ c.t.p. para alguna $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$.

b) $|f_v| \leq g$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$ $\forall\, v\in\mathbb{N}$, en donde $g\in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Entonces:

i) $f\in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

ii) $\lim_{v\to\infty} N(f_v - f) = 0$

iii) $\lim_{v\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f_v = \int_{\mathbb{R}^n} f$.

Dem:

De (i): f es medible por ser límite c.t.p. de una sucesión de funciones medibles, y $|f| \leq g \overset{c.t.p.}{\Rightarrow} f$ es integrable $\Rightarrow f\in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

De (ii): $\lim_{v\to\infty} N(f-f_v) = 0$ significa $\lim_{v\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|f_v - f| = 0$. Como $\{|f_v - f|\}_{v=1}^{\infty}$ es una sucesión en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ∩ $\lim_{v\to\infty}|f_v - f| = 0$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$, $|f_v - f| \leq 2g$, $\forall\, v\in\mathbb{N}$. Por Lebesgue:

$$\lim_{v\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|f_v - f| = 0$$

De (iii): Inmediato de (ii).

q.e.d.

Teorema (Lema de Fatou).

Sea $\{f_v\}_{v=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ ∩ $\lim_{v\to\infty} f_v = f$ c.t.p. Si $\{N(f_v)\}_{v=1}^{\infty}$ no tiende a infinito, i.e $\liminf_{v\to\infty} N(f_v) < \infty$, entonces $f\in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ y:

$$N(f) \leq \liminf_{v\to\infty} N(f_v)$$

(Este resultado se usa más como criterio de integrabilidad).

Dem:

$\{|f_v|\}_{v=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones med. no neg. sobre $\mathbb{R}^n$ m $\lim_{v\to\infty} |f_v| = |f|$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$. Por Fatou:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f| \leq \liminf_{v\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f_v|$$

q.e.d.

Notas.

2) Sea $T: \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{sen}(t)\,dt$. Probar que T es continuo, lineal y $\|T\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |\mathrm{sen}\,t| = 1$.