Espacios Normados De Dimension Finita

Lema.

Si A es un subespacio cerrado de un esp. normado (E, N) y B es un subespacio de dimensión finita de E, entonces $A+B$ es un subespacio cerrado de E.

Dem.

Por inducción sobre la dimensión de B. Suponga que $\dim B = 1$. Sea $b \in B$ m $B = \text{lin}\{b\}$. Si $b \in A$ entonces $A+B = A$ el cual es subespacio y es cerrado.

Si $b \notin A$, como A es cerrado:

$$\delta = d(b, A) > 0$$

Entonces $A+B = A + \text{lin}\{b\}$. Sea $x \notin A + \text{lin}\{b\}$, basta probar que $x \notin \overline{A + \text{lin}\{b\}}$ esto es

$$d(x, A + \text{lin}\{b\}) > 0$$

Observe que

$$B = \text{lin}\{b\} = \{\lambda b \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = B_1 \cup B_2$$

donde

$$B_1 = \left\{\lambda b \mid |\lambda| \leq \frac{2N(x)}{\delta}\right\}$$
$$B_2 = \left\{\lambda b \mid |\lambda| > \frac{2N(x)}{\delta}\right\}$$

Entonces $A + \text{lin}\{b\} = (A+B_1) \cup (A+B_2)$. Se afirma que $d(x, A+B_1) > 0$. En efecto, como A es cerrado y B_1 es compacto (pues B_1 es la imagen de $\left[-\frac{2N(x)}{\delta}, \frac{2N(x)}{\delta}\right]$ en $\mathbb{R}$ bajo la función $\lambda \mapsto \lambda b$, de $\mathbb{R}$ en E, que es continua).

Entonces $d(x, A+B_1) > 0$. Se afirma que $d(x, A+B_2) > 0$. En efecto, sean $a \in A$ y $\lambda b \in B_2$ $\left(\text{con } |\lambda| > \frac{2N(x)}{\delta}\right)$. Se tiene:

$$d(x, a+\lambda b) = N(a+\lambda b - x)$$

$$\geq N(a+\lambda b) - N(x)$$
$$= |\lambda| N\left(\frac{a}{\lambda}+b\right) - N(x)$$
$$= |\lambda| \cdot N\left(b - \left(-\frac{a}{\lambda}\right)\right) - N(x)$$

Con $-\frac{a}{\lambda} \in A \Rightarrow N\left(b - \left(-\frac{a}{\lambda}\right)\right) \geq \delta$. Así

$$= |\lambda| \cdot \delta - N(x)$$
$$> 2N(x) - N(x) = N(x) > 0$$

$$\Rightarrow d(x, A+B_2) = \inf_{\substack{a \in A \\ \lambda b \in B_2}} d(x, a+\lambda b) \geq N(x) > 0.$$

Se concluye que

$$d(x, A+B) = \inf_{\substack{z \in A+B \\ =(A+B_1) \cup (A+B_2)}} d(x,z) \geq \min\{d(x, A+B_1), d(x, A+B_2)\}$$
$$> 0$$

Por tanto, $A+B$ es cerrado.

Suponga que el resultado es cierto si $\dim B = n$. Sea B con $\dim B = n+1$, y $\{b_1, \dots, b_{n+1}\}$ una base de B. Entonces:

$$A+B = A + \text{lin}\{b_1, \dots, b_{n+1}\}$$
$$= \underbrace{\left(A + \text{lin}\{b_1, \dots, b_n\}\right)}_{\text{Cerrado}} + \text{lin}\{b_{n+1}\}$$

por hip. inductiva, $A+B$ es cerrado.

q.e.d.

Corolario.

Cualquier subespacio de dimensión finita de un espacio normado, es un conjunto cerrado.

Teorema.

Sea T una aplicación lineal de un esp. normado E en F, esp. normado. Si

Ker f es un subespacio cerrado de E, y el rango $T(E)$ de T es un subespacio de dimensión finita de F, entonces T es continua.

Dem:

Corolario.

Si E es de dimensión finita, toda aplicación lineal de E en F es continua.

Corolario.

Si E es de dimensión finita, cualesquier 2 normas sobre E son equivalentes.

Corolario.

Si $\dim E = n$, entonces $E \cong \mathbb{R}^n$ provisto de cualquier norma.

Corolario.

Todo espacio normado de dimensión finita es de Banach.

Corolario.

En espacios normados de dimensión finita, un conjunto es compacto sí y sólo si es cerrado y acotado.

Corolario.

En un espacio normado E de dimensión finita, $\mathcal{U}_E$ y S_E son conjuntos compactos.