Notas curso Topología I.
Separabilidad, Numerabilidad y Conexidad

Cristo Daniel Alvarado

8 de abril de 2024

Índice general

Capítulo 2

Separabilidad

2.1. Axiomas de separación

Definición 2.1.1
Sea (X, τ) un espacio topológico.

1. (X, τ) se dice un **espacio** T_0 si dados $a, b \in X$ con $a \neq b$ existe un abierto que contiene a alguno de los dos puntos, pero no contiene al otro.

2. (X, τ) se dice un **espacio** T_1 si dados $a, b \in X$ con $a \neq b$ existen $U, V \subseteq X$ abiertos tales que $a \in U$, $b \in V$ y, $a \notin V$, $b \notin U$.

3. (X, τ) se dice un **espacio** T_2 si dados $a, b \in X$ con $a \neq b$ existen $U, V \subseteq X$ abiertos tales que $a \in U$, $b \in V$ y, $U \cap V = \emptyset$. Esto es equivalente a que el espacio sea de Hausdorff.

4. (X, τ) se dice un **espacio** T_3 si dados $p \in X$ y $A \subseteq X$ cerrado tal que $p \notin A$, existen $U, V \in \tau$ tales que $p \in U$, $A \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

5. (X, τ) se dice un **espacio** T_4 si dados $A, B \subseteq X$ cerrados y disjuntos, existen $U, V \in \tau$ tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y, $U \cap V = \emptyset$.

6. (X, τ) se dice un **espacio regular** si es un espacio T_3 y T_1.

7. (X, τ) se dice un **espacio normal** si es un espacio T_4 y T_1.

Observación 2.1.1
Notemos que:

$$T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$$

Ejemplo 2.1.1
Considere al conjunto $X = \{1, 2\}$ y $\tau = \{X, \emptyset, \{1\}\}$. Afirmamos que (X, τ) es T_0, pero no es T_1 y, por ende tampoco puede ser T_2.

Ejemplo 2.1.2
Sea $(\mathbb{R}, \tau_{cf})$. Afirmamos que $(\mathbb{R}, \tau_u)$ es T_1. En efecto, sean $r, s \in \mathbb{R}$ tales que $r \neq s$. Los conjuntos $U = \mathbb{R} - \{s\}, V = \mathbb{R} - \{r\} \in \tau_{cf}$ pues sus complementos son finitos, además:

$$r \in U \quad \text{y} \quad s \in V$$

además, $r \notin V$ y $s \notin U$. Por tanto, el espacio de T_1. Pero no es T_2.

En efecto, suponga que existen $U, V \in \tau_{cf}$ abiertos tales que $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \in U$, $\frac{1}{\pi} \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. En particular, se tiene que $\mathbb{R} - U$ y $\mathbb{R} - V$ son finitos. Por tanto:

$$\begin{aligned}(\mathbb{R} - U) \cup (\mathbb{R} - V) &= \mathbb{R} - (U \cap V)\\ &= \mathbb{R}\end{aligned}$$

es finito, por tanto, $\mathbb{R}$ es finito$\#_c$.

Ejemplo 2.1.3
Considere al espacio $(\mathbb{R}, \tau_I = \{X, \emptyset\})$. Afirmamos que $(\mathbb{R}, \tau_I)$ es T_4 y T_3, pero NO es T_0, pues si $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{\pi} \in \mathbb{R}$, solo hay un abierto que contiene a alguno de los dos puntos, el cual es $\mathbb{R}$, que siempre tiene a los dos puntos. Por ende, el espacio no es T_0.

Proposición 2.1.1
T_4 y $T_1 \Rightarrow T_3$ y $T_1 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.

Demostración:
La prueba se hará más adelante. ■

2.2. Espacios T_1

Proposición 2.2.1
Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces (X, τ) es un espacio T_1 si y sólo si todo subconjunto unitario de X es cerrado.

Demostración:
Se probará la doble implicación.

$\Rightarrow)$: Suponga que (X, τ) es T_1. Sea $x \in X$. Hay que probar que $X - \{x\} \in \tau$. En efecto, sea $y \in X - \{x\}$, entonces $x \neq y$. Como el espacio es T_1 existen un par de abiertos $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $x \notin V$ y $y \notin U$.

Como $y \in V$ y $x \notin V$, entonces $y \in V \subseteq X - \{x\}$. Luego $X - \{x\}$ es unión arbitraria de abiertos, luego es abierto. Por ende, $\{x\}$ es cerrado.

$\Leftarrow)$: Suponga que todo subconjunto unitario de X es cerrado. Sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Como $\{x\}, \{y\}$ son cerrados, entonces $U = X = \{y\}$ y $V = X - \{x\}$ son abiertos y cumplen que:

$$x \in U, y \in V \quad x \notin V, y \notin U$$

por tanto, como fueron arbitrarios los dos elementos $x, y \in X$ distintos, se sigue que (X, τ) es T_1. ■

Corolario 2.2.1
Sea (X, τ) un espacio topológico. (X, τ) es T_1 si y sólo si todo subconjunto finito de X es cerrado.

Demostración:
Es inmediata de la proposición anterior. ■

Corolario 2.2.2
Sea X un conjunto finito y τ una topología definida sobre X. (X, τ) es T_1 si y sólo $\tau = \tau_D$.

Demostración:
Es inmediata de la proposición anterior. ■

Proposición 2.2.2
Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces, (X, τ) es T_1 si y sólo si $\tau_{cf} \subseteq \tau$.

Demostración:
Se probarán las dos implicaciones.

$\Rightarrow)$: Sea $A \in \tau_{cf}$ con $A \neq \emptyset$, luego $X - A$ es un conjunto finito. Como (X, τ) es T_1, entonces $X - A$ es cerrado (debe serlo por ser finito), luego A es abierto, es decir $A \in \tau$.

$\Leftarrow)$: Supongamos que $\tau_{cf} \subseteq \tau$. Sean $x \in X$. El conjunto $X - \{x\}$ es finito, luego $X - \{x\} \in \tau$, por ende el conjunto $\{x\}$ es cerrado. Como el x fue arbitrario, se sigue que todo conjunto unipuntual es cerrado luego, por una proposición anterior, se sigue que (X, τ) es T_1. ■

Corolario 2.2.3
La topología τ_{cf} es la topología más gruesa (o menos fina) que podemos definir sobre un conjunto para que el espacio topológico (X, τ_{cf}) sea T_1.

Demostración:
Es inmediata de la proposición anterior. ■

Proposición 2.2.3
La propiedad de ser un espacio topológico T_1 es hereditaria.

Demostración:
Sea (X, τ) un espacio topológico T_1 y, tomemos $Y \subseteq X$. Formemos así al espacio (Y, τ_Y), queremos ver que este espacio es T_1. En efecto, sea $y \in Y$, entonces:

$$\{y\} = \{y\} \cap Y$$

luego, $\{y\} \subseteq Y$ es un conjunto cerrado en (Y, τ_Y), ya que $\{y\} \subseteq X$ es un conjunto cerrado en (X, τ). Por ende, todo conjunto unipuntual es cerrado en (Y, τ_Y), luego este subespacio es T_1. ■

Proposición 2.2.4
La propiedad de ser un espacio topológico T_1 es topológica.

Demostración:
Sean (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) espacios topológicos homeomorfos y, suponga que (X_1, τ_1) es un espacio T_1. Sea $h : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$ el homeomorfismo entre estos dos espacios. Como esta función es homeomorfismo, es una biyección cerrada y continua. Sea $x_2 \in X_2$. Entonces, existe $x_1 \in X_1$ tal que:

$$h(x_1) = x_2$$

luego, por ser biyección:

$$h(\{x_1\}) = \{x_2\}$$

donde $\{x_1\}$ es cerado en (X_1, τ_1). Como h es cerrada entonces, $\{x_2\}$ es cerrado en (X_2, τ_2). Por tanto, todo conjunto unipuntual es cerrado en (X_2, τ_2), así (X_2, τ_2) es T_1. ■

Proposición 2.2.5
Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ una familia de espacios topológicos. Sea

$$X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$$

entonces, (X, τ_p) es T_1 si y sólo si (X_α, τ_α) es T_1, para todo $\alpha \in I$.

Demostración:
Se probarán las dos implicaciones.

$\Rightarrow)$: Suponga que (X, τ_p) es T_1. Como la propiedad de ser un espacio T_1 es hereditaria y topológica, entonces al tenerse que (X_α, τ_α) es homeomorfo a un subespacio de (X, τ_p), tal subespacio es T_1 y la propiedad se conserva bajo homeomorfismos luego, se tiene que (X_α, τ_α) es T_1, para todo $\alpha \in I$.

$\Leftarrow)$: Suponga que (X_α, τ_α) es T_1, para todo $\alpha \in I$. Sean $x = (x_\alpha)_{\alpha \in I}, y = (y_\alpha)_{\alpha \in I} \in X$ con $x \neq y$. Por ser diferentes, existe $\alpha_0 \in I$ tal que

$$x_{\alpha_0} \neq y_{\alpha_0}$$

Como $(X_{\alpha_0}, \tau_{\alpha_0})$ es T_1, existen $U, V \in \tau_{\alpha_0}$ tales que:

$$x_{\alpha_0} \in U, y_{\alpha_0} \in V \quad x_{\alpha_0} \notin V, y_{\alpha_0} \notin U$$

tomemos $M = \prod_{\alpha \in I} M_\alpha$ y $N = \prod_{\alpha \in I} N_\alpha$, donde:

$$M_\alpha = \begin{cases} X_\alpha & \text{si} \quad \alpha \neq \alpha_0 \\ U & \text{si} \quad \alpha = \alpha_0 \end{cases}$$

y

$$N_\alpha = \begin{cases} X_\alpha & \text{si} \quad \alpha \neq \alpha_0 \\ V & \text{si} \quad \alpha = \alpha_0 \end{cases}$$

para todo $\alpha \in I$. Entonces, $x \in M$, $y \in N$ con $N, M \in \tau_p$, pero $x \notin N$, $y \notin M$.

Por tanto, (X, τ_p) es T_1. ■

Proposición 2.2.6
Sea (X, τ) un espacio topológico, y sea

$$\Delta = \left\{(x, x) \middle| x \in X\right\}$$

entonces, (X, τ) es T_2 si y sólo si Δ es un subconjunto cerrado de $(X \times X, \tau_p)$ (da igual si es la topología producto o de caja ya que ambas coinciden).

Demostración:
Se probarán las dos implicaciones.

$\Rightarrow)$: Suponga que (X, τ) es T_2. Veamos que Δ es cerrado en $(X \times X, \tau_p)$. Tomemos $(a, b) \in X \times X$ tal que $(a, b) \notin \Delta$, luego $a \neq b$. Como (X, τ) es T_2, existen dos abiertos $U, V \in \tau$ tales que:

$$a \in U, b \in V \quad U \cap V = \emptyset$$

Sea $L = U \times V$. Se tiene que $(a, b) \in L$ y $L \in \tau_p$. Además, $\Delta \cap L = \emptyset$. En efecto, suponga que existe un elemento $(x, x) \in L$, entonces $x \in U$ y $x \in V$, luego $U \cap V \neq \emptyset \#_c$. Por tanto, $\Delta \cap L = \emptyset$. Así, el conjunto $X \times X - \Delta$ es abierto por ser unión arbitraria de abiertos, luego Δ es cerrado en $(X \times X, \tau_p)$.

$\Leftarrow$) : Suponga que Δ es cerrado en $(X \times X, \tau_p)$. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Entonces, $(x, y) \notin \Delta$, luego $(x, y) \in X \times X - \Delta$ el cual es abierto, luego existe un básico $B = U \times V$ tal que $(x, y) \in U \times V \subseteq X \times X - \Delta$, siendo $U, V \in \tau$.

Por la parte anterior, se tiene que $U \cap V = \emptyset$. Por tanto:

$$x \in U, y \in V \quad U \cap V = \emptyset$$

por ende, al ser los elementos diferentes $x, y \in X$ arbitrarios, se sigue que (X, τ) es T_2. ■

2.3. Espacios T_3

Proposición 2.3.1
Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces, el espacio es T_3 si y sólo si dado $x \in X$ y $U \in \tau$ tal que $x \in U$ existe $V \in \tau$ tal que $x \in V$ y $\overline{V} \subseteq U$.

Demostración:
$\Rightarrow$) : Suponga que (X, τ) es T_3. Sea $x \in X$ y $U \in \tau$ tal que $x \in U$, luego $x \notin X - U$, el cual es cerrado, luego por ser el espacio T_3 existen $W, V \in \tau$ abiertos disjuntos tales que:

$$x \in V \quad \text{y} \quad X - U \subseteq W$$

es claro que $V \subseteq U$ (pues, $W \subseteq X - U$ y $W \cap V = \emptyset$). Veamos que $\overline{V} \subseteq U$. En efecto, supongamos que $y \in \overline{V}$ y $y \notin U$, entonces $y \in W$, luego el conjunto $W \cap V \neq \emptyset \#_c$. Por ende, $\overline{V} \subseteq U$.

$\Leftarrow$) : Sea $x \in X$ y $F \subseteq X$ cerrado tal que $x \notin F$, entonces $x \in X - F$ el cual es abierto. Luego por hipótesis existe un cerrado $\overline{V}$ tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq X - F$.

Luego, $F \subseteq X - \overline{V}$. Tomemos $W = X - \overline{V}$. Entonces, V y W son abiertos tales que $x \in V$, $F \subseteq W$ y, $W \cap V = \emptyset$. Por tanto, (X, τ) es T_3. ■

Ejemplo 2.3.1
Considere el espacio topológico $(X = \{1, 2\}, \tau_I)$. Este espacio es T_3 pero no es T_0.

Ejemplo 2.3.2
Sea $K = \left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$, tomemos $\mathcal{B}$ la colección de subconjuntos de $\mathbb{R}$ formada por los siguientes conjuntos:

1. Todos los intervalos abiertos (a, b).
2. Todos los conjuntos de la forma $(a, b) - K$.

Tenemos que $\mathcal{B}$ es una base para una topología sobre $\mathbb{R}$.

Sea τ_K la topología generada por la colección $\mathcal{B}$. Tenemos que $\tau_u \subseteq \tau_K$. Por ende, como $(\mathbb{R}, \tau_u)$ es T_2, se sigue que $(\mathbb{R}, \tau_K)$ también lo es.

Sean $l \notin \mathbb{R} - K$ y $L = (l - 1, l + 1) - K$. Tenemos que $l \in L$. El conjunto L es un básico y, además, $L \subseteq \mathbb{R} - \mathbb{K}$. Por tanto, $\mathbb{R} - K \in \tau_K$, luego K es un conjunto cerrado en $(\mathbb{R}, \tau_K)$.

Tenemos que $0 \notin K$. Suponga que $U, V \in \tau$ son abiertos tales que $0 \in U$, $K \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. Como $0 \in U$. Sea $B \in \mathcal{B}$ un básico tal que $x \in B \subseteq V$. Tenemos que, dado un intervalo abierto que contenga al 0, este siempre contiene puntos de K, luego B debe ser de la forma $B = (a, b) - K$.

Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} \in (a, b)$. Se tiene que $\frac{1}{m} \in K \subseteq V$, luego existe un básico (c, d) (debe ser de esta forma) tal que $\frac{1}{m} \in (c, d) \subseteq V$. Ahora, podemos suponer que $a < 0 < c < d < b$. Sea $\zeta\mathbb{R}$

tal que $\zeta < \frac{1}{m}$ y $\max\left\{c, \frac{1}{m+1}\right\} < \zeta$, luego:

$$c < \zeta < \frac{1}{m}$$

entonces, en particular, $\zeta \in (c,d)$, $\zeta \notin K$ ya que $\frac{1}{m+1} < \zeta < \frac{1}{m}$ y $\zeta \in (a,b)$. Por tanto, $\zeta \in U \cap V \#_c$. Así, $(\mathbb{R}, \tau_K)$ no es T_3.

Proposición 2.3.2
La propiedad de ser T_3 cumple:

1. Se hereda.
2. Es topológica.

Demostración:
De (1): Sea (X,τ) un espacio topológico T_3 y sea $Y \subseteq X$. Probaremos que (Y, τ_Y) es T_3. Tomemos $A \subseteq Y$ cerrado con la topología τ_Y y $p \in Y - A$.

Como A es cerrado en el subespacio, existe $C \subseteq X$ cerrado en (X,τ) tal que:

$$A = Y \cap C$$

En particular, $A \subseteq C$, es decir que $Y - C \subseteq Y - A$, luego $p \notin C$. Como (X,τ) es T_3, existen $U, V \in \tau$ disjuntos tales que:

$$p \in V \quad \text{y} \quad C \subseteq U$$

luego, los conjuntos $Y \cap U, Y \cap V \in \tau_Y$ son tales que:

$$p \in Y \cap V \quad \text{y} \quad A = Y \cap C \subseteq Y \cap U$$

siendo estos disjuntos (pues U y V lo son). Por tanto, (Y, τ_Y) es T_3.

De (2): Sean (X,τ) y (Y,σ) espacios topológicos homeomorfos, y $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ el homeomorfismo entre ambos.

Suponga que (X,τ) es T_3. Probaremos que (Y,σ) también es T_3. En efecto, sean $p \in Y$ y $F \subseteq Y$ cerrado tales que $p \notin F$, es decir que $p \in Y - F$. Sea

$$F' = f^{-1}(F)$$

y $p' = f^{-1}(p)$. Por ser homeomorfismo, se tiene que F' es cerrado en (X,τ) y, por ser inyectiva se tiene que $p' \notin F'$. Luego, como (X,τ) es T_3 existen $U', V' \in \tau$ disjuntos tales que:

$$p' \in V' \quad \text{y} \quad F' \subseteq U'$$

Sean $U = f(U')$ y $V = f(V')$, los cuales son abiertos en (Y,σ) tales que:

$$p = f(p') \in V \quad \text{y} \quad F = f(F') \subseteq U$$

siendo U, V disjuntos por serlo U', V'. Luego, (Y,σ) es T_3. ■

Proposición 2.3.3
Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ una familia de espacios topológicos, sea

$$X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$$

entonces, (X, τ_p) es T_3 si y sólo si (X_α, τ_α) es T_3, para todo $\alpha \in I$.

Demostración:

$\Rightarrow)$: Es inmediata del hecho de que la propiedad de que un espacio sea T_3 es hereditaria y topológica.

$\Leftarrow)$: Suponga que para todo $\alpha \in I$, (X_α, τ_α) es T_3. Veamos que (X, τ_p) es T_3. Sea $x \in X$ y $U \in \tau_p$ un abierto tal que $x \in U$.

Como $U \in \tau_p$, podemos encontrar un básico B, que podemos expresar como $B = \prod_{\alpha \in I} B_\alpha$, donde $B_\alpha = X_\alpha$ para casi todo salvo una cantidad finita de $\alpha \in I$, y B_α es abierto en (X_α, τ_α) para todo $\alpha \in I$.

Como cada (X_α, τ_α) es T_3, entonces para cada B_α existe $V_\alpha \in \tau_\alpha$ tal que $x_\alpha \in V_\alpha$ y $\overline{V_\alpha} \subseteq B_\alpha$, para todo $\alpha \in I$.

Si $B_\alpha = X_\alpha$, tomemos $V_\alpha = X_\alpha$, en caso contrario lo dejamos igual. Entonces, el conjunto $V = \prod_{\alpha \in I} V_\alpha$ es un básico, en particular, abierto, tal que $x \in V$, y

$$\overline{V} = \overline{\prod_{\alpha \in I} V_\alpha} = \prod_{\alpha \in I} \overline{V_\alpha} \subseteq \prod_{\alpha \in I} B_\alpha = B \subseteq U$$

por tanto, (X, τ_p) es T_3. ■