# Taller: Casi todas las 3-variedades son hiperbólicas

Cristo Daniel Alvarado

8 de julio de 2024

# Índice general

# Capítulo 1

# Introducción

## 1.1. Conceptos fundamentales

Taller por Andrés Rodrígues Migueles.

Se probó en cursos anteriores que toda superficie cerrada, conectada y orientable es difeomorfa a $\Sigma_g$ para algunos $g \geq 0$ (siendo $g$ el género de la 2-variedad).

**Teorema de Uniformización**. Toda superficie de tipo finito puede ser geometrizada, es decir, puede estar equipada con una métrica hiperbólica plana o elíptica.

Estos hechos ya se conocen para 2-variedades pero, ¿qué se puede decir de variedades de dimensión más grande?

Nuestro objetivo será clasificarlas (de alguna forma más o menos general, ya que no se pueden generalizar totalmente). A lo que se tiene el siguiente teorema:

**Teorema de Perelman-Thurston**. Toda 3-variedad compacta con frontera (posiblemente vaía) una colección finita de toros, tiene uan descomposición canónica en piezas geométricas. Esta descomposición está dada en una de las siguientes 8 piezas:

$$\mathbb{H}^3, \mathbb{S}^3, \ldots$$

## 1.2. Definiciones

**Definición 1.2.1**
Sea $X$ una variedad y $G$ un grupo que actúa sobre $X$. Decimos que una variedad $M$ tiene una **estructura** $(G; X)$ si para cada punto $x \in M$ existe una carta $(U, \varphi)$, es decir, una vecindad $U \subseteq M$ de $X$ y un homeomorfismo $\varphi : U \to \varphi(U) \subseteq X$.

Si dos gráficos $(U, \varphi)$ y $(V, \psi)$ se superponga, entonces el mapeo de transición o el mapa de **cambio de coordenadas**

$$\gamma = \varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$$

es un elemento de $G$.

**Observación 1.2.1**
En el caso, $X$ será simplemente conexo y $G$ será un grupo de difeomorfismos analíticos reales que actúan transitivamente sobre $X$.

**Ejemplo 1.2.1**
El toro admite una estructura $(Isom(\mathbb{R}^2), \mathbb{R}^2)$, también llamada **estructura eucliedeana**. Pero también admite una **estructura afín**, cuando $G$ sea el grupo afín ($x \mapsto Ax + b$) que actúa sobre $\mathbb{R}^2$.

En el caso anterior, el gupo afin es el grupo de las transformaciones afines de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, que son de la forma $x \mapsto Ax + b$, siendo $A \in GL_2(\mathbb{R})$

Si $M$ tiene un toro como una componente de frontera, no hay una forma canónica de rellenarlo: el objeto más simple que podememos adjuntarle es un toro sólido $D \times \mathbb{S}^2$, pero la varidedad resultante depende del mapa de pegado. Esta operación se llama **rellenado de Dehn**.

La curva cerrada $\partial D$ está pegada a alguna curva cerrada simple $\gamma \subseteq \mathbb{T}$. El resultado de esta operaciónes una nueva variedad $M(\gamma)$ que tiene una componente frontera menos que $M$.

**Lema 1.2.1**
La variedad $M(\gamma)$ depende sólo de la clase de isotopía de la curva no orientada $\gamma$.

**Demostración:**

■

**Observación 1.2.2**
Ver nudo de Boromer.

¿Qué variedades están clasificadas? Variedades de Seifert.

**Corolario 1.2.1**
Dos fibraciones de Seifert

$$(S, (p_1, q_1), ..., (p_h, q_h)) \quad \text{y} \quad (S', (p_1', q_1'), ..., (p_h', q_h'))$$

con $p_i, p_i' \geq 2$ son isomorfas (preservando orientación) si y sólo si $S = S'$, $h = h'$ y $e = e'$ (siendo ése el número de Euler) salvo reordenamiento $p_i = p_i'$ y $q_i = q_i \mod$ .

## 1.3. 3-variedades Hiperbólicas

Primero, recordemos

$$\mathbb{H}^2 = \left\{ x + iy \in \mathbb{C} \middle| y > 0 \right\} \quad \text{y} \quad \partial\mathbb{H}^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{S}$$

**Observación 1.3.1**
Recordemos que

$$\mathbb{H}^3 = \{(x + iy, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}_{>0}\} \quad \text{y} \quad \partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{S}^2$$

con la métrica

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}$$

Se tiene que las geódesicas en esta variedad son lsa líneas verticales, semicífculos que intersectan a $\partial\mathbb{H}^3$ con un ángulo recro. $Isom_+(\mathbb{H}^3) \cong$...

**Observación 1.3.2**
Recordemos que las **transformaciones de Möbius** son las funciones de la forma

$$Mob(\mathbb{C}) = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{C}, bd - ac \neq 0 \right\}$$

(ahondar más en esto pq parece importante).

## 1.4. Isometrías y Horoesferas

Sea $p$ un punto en $\partial\mathbb{H}^3$. Una **horóesfera** centrada en $p$ es una hipersuperficie completa conexa ortogonal a todas las lineas que salen de $p$. Note que, una horóesfera alrededor de $\infty$ en $\partial\mathbb{H}^3$ es un plano paralelo a $\mathbb{C}$, que consta de puntos $\{(x+iy, c) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}\}$ donde $c > 0$ es constante.

# Capítulo 2

# Ejercicios

## 2.1. Ejercicios 8 de julio

**Definición 2.1.1**
Dos difeomorfismos $f, g : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ son isotópicas si existe una función $H : \Sigma_1 \times [0,1] \to \Sigma_2$ continua tal que

$$H\Big|_{H\times\{0\}} = f \quad \text{y} \quad H\Big|_{H\times\{1\}} = g$$

y tal que $H\Big|_{H\times\{t\}} : \Sigma_1 \to \sigma_2$ es difeomorfismo para todo $t \in [0,1]$.

**Ejercicio 2.1.1**
Sea $N$ una 3-variedad con $\Sigma_1$ y $\Sigma_2$ dos componentes de $\partial N$ (compactas y difeomorfas), $f_0 : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ al difeomorfismo. Tomemos

$$M_0 = N/\left(\Sigma_1 \underset{f_0}{=} \Sigma_2\right)$$

1. Si $\Sigma_1'$ y $\Sigma_2'$ CN dos componentes de $\partial N$ tal que existe $f_1 : \Sigma_1' \to \Sigma_2'$ difeomorfismo. Tomemos

   $$M_1 = N/\left(\Sigma_1' \underset{f_0}{=} \Sigma_2'\right)$$

   tal que existe $g$ difeomorfismo de $N$ tal que $g(\Sigma_1) = \Sigma_1'$ para la que se cumple

   $$g \circ f_0 \circ g^{-1}(z) = f_1(z), \quad \forall z \in \Sigma_1'$$

   entonces, $M_0 \cong M_1$.

2. Si $\Sigma_1 = \Sigma_1'$ y $\Sigma_2 = \Sigma_2'$ pero $f_1 \neq f_0$ y son isotópicas, entonces $M_0 \cong M_1$.