Notas de Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

9 de abril de 2024

Índice general

Capítulo 2

Convolución

Se sabe que el producto puntual de dos funciones integrables no necesariamente es una función integrable (por ejemplo, $f(x) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\chi_{]0,1[}$). Sin embargo, es posible definir un auténtico producto en $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ que sea compatible con la adición y el producto por escalares, con el cual $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ sea un **álgebra de Banach conmutativa sin elemento identidad**. Tal operación se llama **convolución**.

2.1. Preliminares

Lema 2.1.1
Si M es un subconjunto despreciable de $\mathbb{R}^n$, entonces $M \times \mathbb{R}^m$ es despreciable en $\mathbb{R}^{n+m}$.

Demostración:
Escriba a $\mathbb{R}^m$ como unión numerable de rectángulos acotados disjuntos. Basta probar que si Q es un rectángulo acotado en $\mathbb{R}^m$, entonces $M \times Q$ es despreciable en $\mathbb{R}^{n+m}$.

Sea $\varepsilon > 0$. Si $\mathrm{Vol}(Q) = 0$, el resultado es inmediato, pues se sigue que $\mathrm{Vol}(P \times Q) = 0$. Suponga que $\mathrm{Vol}(Q) > 0$, se tiene para $M \subseteq \mathbb{R}^n$ que por definición de medida exterior existe $\{P_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ sucesión de rectángulos acotados disjuntos tales que $M \subseteq \bigcup_{\nu=1}^{\infty} P_\nu$ y:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(P_\nu) < \frac{\varepsilon}{\mathrm{Vol}(Q)}$$

Entonces, $\{P_\nu \times Q\}_{\nu=1}^{\infty}$ es una sucesión de rectángulos acotados en $\mathbb{R}^{n+m}$ tales que $M \times Q \subseteq \bigcup_{\nu=1}^{\infty} P_\nu \times Q$, y

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(P_\nu \times Q) &= \mathrm{Vol}(Q) \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(P_\nu) \\ &< \mathrm{Vol}(Q) \cdot \frac{\varepsilon}{\mathrm{Vol}(Q)} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

luego, el conjunto $M \times Q$ es despreciable, con lo cual el conjunto $M \times \mathbb{R}^m$ también lo es. ∎

Definición 2.1.1
Si $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{K}$ y $g : \mathbb{R}^q \to \mathbb{K}$ son funciones, se define el **producto tensorial de** f **y** g como la

función: $f \otimes g : \mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{K}$, dada por:

$$f \otimes g(x,y) = f(x)g(y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^{p+q}$$

Proposición 2.1.1
Si $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{K}$ y $g : \mathbb{R}^q \to \mathbb{K}$ son funciones medibles, entonces $f \otimes g : \mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{K}$ es medible.

Demostración:
Se probarán dos casos:

1. Afirmamos que el resultado es cierto para funciones escalonadas $\varphi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{K}$ y $\psi : \mathbb{R}^q \to \mathbb{K}$ escritas canónicamente como:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{r} c_i \chi_{P_i} \quad \text{y} \quad \psi = \sum_{j=1}^{s} d_j \chi_{Q_j}$$

donde los P_i y Q_j son rectángulos acotados disjuntos. En efecto, en este caso:

$$\begin{aligned} \varphi \otimes \psi(x,y) &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} c_i d_j \chi_{P_i}(x)\chi_{Q_j}(y) \\ &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} c_i d_j \chi_{P_i \times Q_j}(x,y) \end{aligned}$$

la cual es una función escalonada en $\mathbb{R}^{p+q}$, luego medible.

2. En el caso general, se sabe que existen $\{\varphi_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ en $\mathcal{E}(\mathbb{R}^p, \mathbb{K})$ y $\{\psi_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ en $\mathcal{E}(\mathbb{R}^q, \mathbb{K})$ y conjuntos despreciables $M \subseteq \mathbb{R}^p$, $N \subseteq \mathbb{R}^q$ tales que:

$$\lim_{\nu\to\infty} \varphi_\nu(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^p \backslash M$$

y,

$$\lim_{\nu\to\infty} \psi_\nu(x) = g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^q \backslash N$$

luego, se tiene que:

$$\begin{aligned} \lim_{\nu\to\infty} \varphi_\nu \otimes \psi_\nu(x,y) &= \lim_{\nu\to\infty} \varphi_\nu(x)\psi_\nu(y) \\ &= f(x)g(y) \end{aligned}$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^{p+q} \backslash \left[M \times \mathbb{R}^q \cup \mathbb{R}^p \times N\right]$. Por el lema anterior se tine que $M \times \mathbb{R}^q \cup \mathbb{R}^p \times N$ es despreciable en $\mathbb{R}^{p+q}$. Como $\varphi_\nu \otimes \psi_\nu$ son medibles para todo $\nu \in \mathbb{N}$, entonces $f \otimes g$ es medible.

$\blacksquare$

Corolario 2.1.1
Si $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{K}$ es medible, entonces $F : \mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{K}$ dada como:

$$F(x,y) = f(x), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^{p+q}$$

es medible.

Demostración:
Es inmediata de la proposición anterior tomando a f y $g = \chi_{\mathbb{R}^q}$.

$\blacksquare$

Corolario 2.1.2
Si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^p, \mathbb{K})$, $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^q, \mathbb{K})$, entonces $f \otimes g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^{p+q}, \mathbb{K})$ y:

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f \otimes g = \int_{\mathbb{R}^p} f \cdot \int_{\mathbb{R}^q} g$$

Demostración:
Es inmediato del teorema de Tonelli. ■

2.2. Convolución

Definición 2.2.1
Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ funciones medibles. La **convolución de f por g** se define como la función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{K}$ tal que:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy$$

para toda $x \in \mathbb{R}^n$ tal que la integral exista.

Ejemplo 2.2.1
Considere la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

entonces,

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dx = \int_{0}^{\infty} f(y)g(x-y)dx$$

se tienen dos casos, por como están dadas las funciones f y g:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f(y)g(x-y)dx &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x \\ \int_0^x f(y)g(x-y)dy & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x \\ \int_0^x f(y)g(x-y)dy & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \int_0^1 f(y)g(x-y)dy & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x \\ \int_0^x g(x-y)dy & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \int_0^1 g(x-y)dy & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x \\ \int_0^x g(x-y)dy & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \int_0^1 g(x-y)dy & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x \\ \int_0^x g(x-y)dy & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \int_0^1 g(x-y)dy & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ \int_0^1 g(x-y)dy & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty f(y)g(x-y)dx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x \\ \int_0^x (x-y)dy & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \int_{x-1}^1 g(x-y)dy & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x \\ -\frac{(x-y)^2}{2}\Big|_0^x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \int_{x-1}^1 (x-y)dy & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x \\ \frac{x^2}{2} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ -\frac{(x-y)^2}{2}\Big|_{x-1}^1 & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x \\ \frac{x^2}{2} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ -\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{1}{2} & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x \\ \frac{x^2}{2} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ -\frac{x^2}{2} + x & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Observación 2.2.1

Note que la función $f * g$ es continua. (esto servirá para ver que la convolución obtenida es correcta).

Ejemplo 2.2.2

Recuerde la fórmula de Cauchy para la n-ésima integral reiterada:

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{n-1}}dt$$

la igualdad anterior es la misma que la de la función:

$$\int_0^x \frac{f(t)dt}{\Gamma(n)(x-t)^{n-1}} = f * g(x)$$

donde

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{\Gamma(n)x^{n-1}} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Si $0 < \alpha \leq 1$, definimos:

$$\int_0^x \frac{f(t)dt}{\Gamma(\alpha)(x-t)^{1-\alpha}} = I_0^\alpha[f](x)$$

llamada la **integral fraccional de orden α de f en x**. Por ejemplo:

$$I_0^{1/2}[t](x) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}}x^{3/2}$$

$$I_0^{1/2}\left[\frac{4}{3\sqrt{\pi}}t^{3/2}\right](x) = \frac{x^2}{2}$$

que concuerda con la integral normal de t.

Ahora estudiaremos algunas propiedades de este operador.

Proposición 2.2.1 (**Asociatividad y conmutatividad de la convolución**)
Sean $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ funciones medibles.

1. Si para algún $x \in \mathbb{R}^n$ existe la convolución $f * g(x)$, entonces también existe $g * f(x)$, y,

$$f * g(x) = g * f(x)$$

2. Si la función $|f| * |g|$ está definida c.t.p. en $\mathbb{R}^n$ y, para algún $x \in \mathbb{R}^n$ existe $(|f| * |g|) * |h|(x)$, entonces existen $(f * g) * h(x)$, $f * (g * h)(x)$ y,

$$(f * g) * h(x) = f * (g * h)(x)$$

Demostración:
De (1): Se tiene que:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-u)g(u)du = \int_{\mathbb{R}^n} g(u)f(x-u)du = g * f(x)$$

por el cambio de variable $u = x - y$, de Jacobiano $\left|(-1)^n\right| = 1$. En particular, esto garantiza la existencia de $g * f(x)$.

De (2): Se demostrará primero que la función

$$(y, z) \mapsto f(z)g(y-z)h(x-y)$$

es medible como función de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{K}$, para un $x \in \mathbb{R}^n$ fijo. Ya se sabe que $(y, z) \mapsto f(z)$ es medible (por una proposición sobre productos tensoriales).

Se afirma que la función $(y, z) \mapsto h(x - y)$ es medible. En efecto, $u \mapsto h(u)$ es medible. Por el cambio de variable $u = x - y$, la función $y \mapsto h(x - y)$ también es medible (por el teorema de cambio de variable). Luego, como con f, se sigue que $(y, z) \mapsto h(x - y)$ es medible.

También $(y, z) \mapsto g(y - z)$ es medible. Por productos tensoriales:

$$G(u, v) = g(u)$$

es medible. La función $\Phi(r, s) = (r - s, s)$ es un isomorfismo C^∞ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Por el teorema de cambio de variable se sigue que es medible la función:

$$G \circ \Phi(y, z) = g(y - z)$$

Por lo tanto, la función inicial es medible.

Puesto que para $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h(x-y)|dy \int_{\mathbb{R}^n} |f(z)||g(y-z)|dz = \int_{\mathbb{R}^n} |h(x-y)|(|f| * |g|)(y)dy = (|f| * |g|) * |h|(x) < \infty$$

(para los x en que esté definida la función), entonces por Tonelli la función $(y, z) \mapsto f(z)g(y-z)h(x-y)$ es integrable y, por Fubini:

$$(f * g) * h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x-y)dy \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(y-z)dz$$

además,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} h(x-y)f(z)g(y-z)dydz &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)dx \int_{\mathbb{R}^n} h(x-y)g(y-z)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)dz \int_{\mathbb{R}^n} h((x-z)-u)g(y-z)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)(g*h)(x-z)dz \\
&= f*(g*h)(x)
\end{aligned}$$

En particular, existen y son iguales $f*(g*h)(x)$ y $(f*g)*h(x)$. ∎

Teorema 2.2.1
Si $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, se cumplen las afirmaciones siguientes.

1. Para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$, existe $f*g(x)$.
2. La función $f*g$, definida c.t.p. en $\mathbb{R}^n$, es integrable en $\mathbb{R}^n$.
3. $\int_{\mathbb{R}^n} f*g = \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)$.
4. $\mathcal{N}_1(f*g) \leq \mathcal{N}_1\left(|f|*|g|\right) = \mathcal{N}_1(f)\,\mathcal{N}_1(g)$.

Demostración:
De (1): Ya se sabe que la función $(x,y)\mapsto f(y)g(x-y)$ es medible (ver la proposición anterior). Como

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|dy \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|dx = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|dy\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(z)|dz\right) < \infty$$

haciendo el cambio de variable $x = y+z$ y por ser f, g integrables, entonces la función $(x,y)\mapsto f(y)g(x-y)$ es integrable en $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$. Por el teorema de Fubini, la función $y\mapsto f(y)g(x-y)$ es integrable para casi toda $x\in\mathbb{R}^n$, lo cual prueba el primer inciso.

De (2): Además, por Fubini nuevamente, la función $x\mapsto f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy$ definida c.t.p. en $\mathbb{R}^n$ también es integrable, lo cual prueba el segundo inciso.

De (3): Y, por Fubini:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (f*g)(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)dy \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)dy \int_{\mathbb{R}^n} g(u)du \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)dy\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} g(u)du\right)
\end{aligned}$$

lo cual prueba el tercer inciso.

De (4): Aplicando (3) a $|f|, |g|$, resulta que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_1(f*g) &= \int_{\mathbb{R}^n} |f*g|(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \Big| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\Big|dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(x-y)|dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (|f|*|g|)(x)dx \\
&= \mathcal{N}_1(|f|*|g|) \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} |g|\right) \\
&= \mathcal{N}_1(f)\mathcal{N}_1(g)
\end{aligned}$$

lo cual prueba el cuarto inciso. ■

Observación 2.2.2
Se tiene lo siguiente:

1. La existencia y el valor de la convolución dependen solamente de las clases de equivalencia de f y g, se puede pues considerar la convolución como una aplicación de $L_1(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})\times L_1(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ en $L_1(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$, tal que:
$$\mathcal{N}_1(f*g) \leq \mathcal{N}_1(f)\mathcal{N}_1(g)$$
2. Es claro que:
$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)*g = \alpha_1(f_1*g)+\alpha_2(f_2*g)$$
y
$$f*(\beta_1 g_1+\beta_2 g_2) = \beta_1(f*g_1)+\beta(f*g_2)$$
o sea, que la convolución es un aplicación bilineal y asociativa.

Definición 2.2.2
Un **Álgebra de Banach** es un espacio de Banach $(E,\|\cdot\|)$ provisto de un producto $(x,y)\mapsto x\cdot y$. Este producto es bilineal y, además,

$$\|x\cdot y\| \leq \|x\|\|y\|$$

si el producto es conmutativo, se dice que el álgebra de Banach es **conmutativa**.

Ejercicio 2.2.1
En un álgebra de Banach, la función $(x,y)\mapsto x\cdot y$ es continua del espacio normado producto $E\times E$ en E.

Demostración:
Sean $\varepsilon > 0$ y $(x_0,y_0)\in E\times E$. Tomemos $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2(\|x_0\|+1)}, \frac{\varepsilon}{2(\|y_0\|+1)}, 1\right\} > 0$, entonces, si $(x,y)\in E\times E$ es tal que:

$$\|(x_0,y_0)-(x,y)\| < \delta$$

entonces,

$$\|x_0 - x\| < \delta \quad \text{y} \quad \|y_0-y\| < \delta \Rightarrow \|y\| < 1+\|y_0\|$$

luego, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\|x_0 \cdot y_0 - x \cdot y\| &= \|x_0 \cdot y_0 - x_0 \cdot y + x_0 \cdot y - x \cdot y\| \\
&\leq \|x_0 \cdot (y_0 - y)\| + \|(x_0 - x) \cdot y\| \\
&\leq \|x_0\|\|y_0 - y\| + \|x_0 - x\|\|y\| \\
&< \|y_0 - y\|(\|x_0\| + 1) + \|x_0 - x\|(\|y_0\| + 1) \\
&< \frac{\varepsilon}{2(\|x_0\| + 1)}(\|x_0\| + 1) + \frac{\varepsilon}{2(\|y_0\| + 1)}(\|y_0\| + 1) \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

por tanto, $(x, y) \mapsto x \cdot y$ es continua en $(x_0, y_0) \in E \times E$. Por ser este elemento de $E \times E$ arbitrario, se sigue que es continua en todo $E \times E$.

■

Ejemplo 2.2.3
Considere $\mathbb{K}$ como espacio vectorial sobre sí mismo con la norma usual y, provisto de la multiplicación usual en $\mathbb{K}$, es un álgebra de Banach conmutativa con elemento uno.

Ejemplo 2.2.4
Sea S un conjunto no vacío. El espacio vectorial $\mathcal{B}(S, \mathbb{K})$ de las funciones acotadas de S en $\mathbb{K}$, provisto de la norma uniforme $\|\cdot\|_\infty$ y con la multiplicación definida puntualmente, es un álgebra de Banach conmutativa con elemento uno (la función constante de valor uno).

Ejemplo 2.2.5
Sea S un espacio métrico. El subespacio $\mathcal{BC}(S, \mathbb{K})$ de las funciones continuas y acotadas de S en $\mathbb{K}$ es una sub-álgebra de Banach del ejemplo anterior con elemento uno.

Ejemplo 2.2.6
El subespacio $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ de las funciones continuas nulas en infinito es una sub-álgebra de Banach de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ sin elemento uno.

Ejemplo 2.2.7
Sea E un espacio de Banach. El espacio normado $\mathrm{End}(E)$ de todos los endomorfismos continuos de E provisto del producto $(A, B) \mapsto A \circ B$ es un álgebra de Banach no conmutativa con elemento uno.

Ejemplo 2.2.8
$L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ provisto de la convolución también es un álgebra de Banach conmutativa (¿con elemento identidad?).

2.3. Convolución en $\mathcal{L}_p$

Teorema 2.3.1 (**Desigualdad de Hölder Generalizada**)
Sean $p_1, ..., p_m$ números positivos tales que:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_m} = 1$$

entonces, si $f_1 \in \mathcal{L}_{p_1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}), f_2 \in \mathcal{L}_{p_2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}), ..., f_m \in \mathcal{L}_{p_m}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, entonces $f_1 \cdot f_2 \cdots f_m \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, y

$$\mathcal{N}_1(f_1 \cdot f_2 \cdots f_m) \leq \mathcal{N}_{p_1}(f_1)\mathcal{N}_{p_2}(f_2) \cdots \mathcal{N}_{p_m}(f_m)$$

Demostración:

Procederemos por inducción sobre $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. El caso $n = 2$ es inmediato de la desigualdad de Hölder clásica.

Suponga que el resultado se cumple para algún $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Veamos que se cumple para $m + 1$. En efecto, sean $f_1 \in \mathcal{L}_{p_1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}), f_2 \in \mathcal{L}_{p_2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}), ..., f_{m+1} \in \mathcal{L}_{p_{m+1}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ con $p_1, ..., p_{m+1}$ números positivos tales que:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_{m+1}} = 1$$
$$\Rightarrow \frac{1}{p^*_{m+1}} = 1 - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_m}$$

afirmamos que $f_1 \cdots f_m \in \mathcal{L}_{p^*_{m+1}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. En efecto, observemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} ||$$

■

Proposición 2.3.1
Si $f : \mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{K}$ es medible, se cumple lo siguiente:

1. Para casi toda $x \in \mathbb{R}^p$, la función $f_x(y) = f(x, y)$ de $\mathbb{R}^q$ en $\mathbb{K}$ es medible.

2. Si para casi toda $x \in \mathbb{R}^p$, la función f_x es integrable en $\mathbb{R}^q$, entonces:

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f_x = \int_{R^q} f(x, y)dy$$

definida c.t.p. es medible.

Teorema 2.3.2 (**Teorema de Young**)
Sean $p, q \in [1, \infty[$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$ y defina r como sigue:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$$

Entonces, si $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y $g \in \mathcal{L}_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, se cumple lo siguiente:

1. Para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$, existe la convolución $f * g$, es decir:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)dy$$

para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$.

2. $f * g \in \mathcal{L}_r(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$.

3. $\mathcal{N}_r(f * g) \leq \mathcal{N}_p(f)\mathcal{N}_q(g)$.

Demostración:
Observemos primero que los números p, q, r satisfacen lo siguiente:

$$r > 1, \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{r} \geq 0, \quad \frac{1}{q} - \frac{1}{r} \geq 0$$

En efecto,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \leq 2 - 1 = 1 \Rightarrow r \geq 1$$

las otras dos son inmediatas, ya que:

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{r} > 1 - \frac{1}{q} \geq 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{q} - \frac{1}{r} > 1 - \frac{1}{p} \geq 0$$

Se verá que para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$, la función $y \mapsto f(y)g(x-y)$ es integrable en $\mathbb{R}^n$. Por un teorema anterior, ya se sabe que dicha función es medible. Escriba

$$|f(y)||g(x-y)| = \left(|f(y)|^p |g(x-y)|^q\right)^{\frac{1}{r}} \left(|f(y)|^p\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \left(|g(x-y)|^q\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}$$

Para probar el resultado, se probarán dos casos:

1. $p > 1$ y $q > 1$ En este caso, $\frac{1}{p} - \frac{1}{r} > 0$ y $\frac{1}{q} - \frac{1}{r} > 0$. Si

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{r}, \quad \frac{1}{\beta} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r}, \quad \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{r}$$

entonces,

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 1$$

La función $y \mapsto \left(|f(y)|^p |g(x-y)|^q\right)^{\frac{1}{r}}$ está en $\mathcal{L}_\alpha(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ (pues, existe la convolución $|f|^p * |g|^q(x)$ para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$). También, $y \mapsto \left(|f(y)|^p\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}$ está en $\mathcal{L}_\beta(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y $y \mapsto \left(|g(x-y)|^q\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}$ está en $\mathcal{L}_\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$.
Por Hölder generalizado, se tiene que $y \mapsto |f(x)||g(x-y)|$ es integrable, en particular, existe la convolución $f * g$, lo que prueba (1). Además,

$$\begin{aligned}
|f * g|(x) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)||g(x-y)| dy \\
&\leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p |g(x-y)|^q dy\right]^{\frac{1}{r}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p dy\right]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^q dy\right]^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} \\
&= \left[|f|^p * |g|^q(x)\right]^{\frac{1}{r}} \mathcal{N}_p(f)^{1-\frac{p}{r}} \mathcal{N}_q(g)^{1-\frac{q}{r}}
\end{aligned}$$

luego,

$$|f * g|^r(x) \leq \mathcal{N}_p(f)^{r-p} \mathcal{N}_q(g)^{r-q} \left(|f|^p * |g|^q(x)\right)$$

por el teorema anterior (el cual asegura que $|f|^p * |g|^q$ es integrable), implica que $|f| * |g| \in \mathcal{L}_3(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, lo cual prueba (2).

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}_r(f*g)^r &= \int_{\mathbb{R}^n} \left|f*g(x)\right|^r dx \\
&\leq \mathcal{N}_p(f)^{r-q}\mathcal{N}_q(g)^{r-p}\int_{\mathbb{R}^n} \left|f\right|^p * \left|g\right|^q(x)dx \\
&= \mathcal{N}_p(f)^{r-q}\mathcal{N}_q(g)^{r-p}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|f\right|^p\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|g\right|^q\right) \\
&= \mathcal{N}_p(f)^{r-q}\mathcal{N}_q(g)^{r-p}\mathcal{N}_p(f)^p\mathcal{N}_q(g)^q \\
&= \left(\mathcal{N}_p(f)\mathcal{N}_q(g)\right)^r \\
\Rightarrow \mathcal{N}_r(f*g) &\leq \mathcal{N}_p(f)\mathcal{N}_q(g)
\end{aligned}
$$

2. $p > 1$, $q = 1$. En este caso, $r = p$, luego se sigue que:

$$
\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{r} = \frac{1}{p}, \quad \frac{1}{\beta} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r} = 0, \quad \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{r} = \frac{1}{p^*}
$$

Luego, si $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\left|f(y)\right|\left|g(x-y)\right| &= \left(\left|f(y)\right|^p\left|g(x-y)\right|^q\right)^{\frac{1}{r}}\left(\left|f(y)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}\left(\left|g(x-y)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} \\
&= \left(\left|f(y)\right|^p\left|g(x-y)\right|\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left|f(y)\right|^p\right)^0\left(\left|g(x-y)\right|^q\right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&= \left(\left|f(y)\right|^p\left|g(x-y)\right|\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left|g(x-y)\right|^q\right)^{\frac{1}{p^*}}
\end{aligned}
$$

Como $y \mapsto \left(\left|f(y)\right|^p\left|g(x-y)\right|\right)^{\frac{1}{p}}$ está en $\mathcal{L}_p(\mathbb{R},\mathbb{K})$ (pues existe $\left|f\right|^p * \left|g\right|(x)$ para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$) y $y \mapsto \left(\left|g(x-y)\right|^q\right)^{\frac{1}{p^*}}$ está en $\mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$, entonces por Hölder y la ecuación anterior, se sigue que $y \mapsto \left|f(y)g(x-y)\right|$ es integrable en $\mathbb{R}^n$, luego existe $\left|f\right| * \left|g\right|(x)$ para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$, lo que prueba (1). Además,

$$
\begin{aligned}
\left|f*g\right|(x) &\leq \int_{\mathbb{R}^n}\left|f(y)\right|\left|g(x-y)\right|dy \\
&\leq \left[\int_{\mathbb{R}^n}\left|f(y)\right|^p\left|g(x-y)\right|dy\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\left|g(x-y)\right|dy\right]^{\frac{1}{p^*}} \\
&= \left[\left|f\right|^p * \left|g\right|(x)\right]^{\frac{1}{p}}\mathcal{N}_1(g)^{\frac{1}{p^*}=1-\frac{1}{p^*}} \\
\Rightarrow \left|f*g\right|^p(x) &\leq \left[\left|f\right|^p * \left|g\right|(x)\right]\mathcal{N}_1(g)^{1-p}
\end{aligned}
$$

luego, $f*g \in \mathcal{L}_r(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ (recuerde que $r = p$) lo cual prueba (2), y

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}\left|f*g\right|^p(x)dx &\leq \mathcal{N}_1(g)^{p-1}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|f\right|^p\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|g\right|\right) \\
&\leq \mathcal{N}_1(g)^{p-1}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|f\right|^p\right)\mathcal{N}_1(q) \\
&\leq \mathcal{N}_p(f)^p\mathcal{N}_1(g)^p
\end{aligned}
$$

lo cual prueba (3).

El caso $p = q = 1$ es el teorema anterior, y por la conmutatividad de la convolución, no es necesario probar el caso $q = 1$, $p > 1$. ■

Observación 2.3.1
El caso $q = 1$ y $r = p$ es importante, dice: Si $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ entonces, para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$ existe $f * g(x) \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y $\mathcal{N}_p(f * g) \leq \mathcal{N}_p(f)\mathcal{N}_1(g)$.

Teorema 2.3.3
Fije $p \in [1, \infty]$. Si $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y $g \in \mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ entonces, para toda $x \in \mathbb{R}^n$ (no solamente para casi toda x) existe $f * g(x)$,$f * g$ es medible acotada y:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| f * g(x) \right| \leq \mathcal{N}_p(f)\mathcal{N}_{p^*}(g)$$

Demostración:
La función $y \mapsto f(y)$ está en $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $y \mapsto g(x - y)$ está en $\mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Entonces, $y \mapsto f(y)g(x - y)$ es integrable, luego existe $f * g(x)$ y, por Hölder:

$$\begin{aligned}
\left| f * g(x) \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)dx \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)||g(x - y)|dy \\
&= \mathcal{N}_p(f) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x - y)|^{p^*} dy \right)^{1/p^*} \\
&= \mathcal{N}_p(f) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(z)|^{p^*} dz \right)^{1/p^*} \quad \text{por T.C.V. con } z = x - y \\
&\leq \mathcal{N}_p(f)\mathcal{N}_{p^*}(g)
\end{aligned}$$

Esto prueba que $f * g$ es acotada y, tomando supremos:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| f * g(x) \right| \leq \mathcal{N}_p(f)\mathcal{N}_{p^*}(g)$$

además, por un resultado anterior, $f * g$ es medible. ■

Observación 2.3.2
Recuerde que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ entonces, para cada $h \in \mathbb{R}^n$ la función $f_h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ dada por $f_h(x) = f(x + h)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ es medible.

Lema 2.3.1
Sea $p \in [1, \infty[$, $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Entonces, para cada $h \in \mathbb{R}^n$, $f_h \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y $\mathcal{N}_p(f_h) = \mathcal{N}_p(f)$. Además, la aplicación $h \mapsto f_h$ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$.

Demostración:
Se tienen que probar varias cosas:

1. Por el teorema de cambio de variable, para todo $h \in \mathbb{R}^n$, f_h es medible y

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p dy = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x + h)|^p dy = \int_{\mathbb{R}^n} |f_h(y)|^p dy$$

por tanto, $f_h \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y, más aún, $\mathcal{N}_p(f) = \mathcal{N}_p(f_h)$.

2. Se prueba que si $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, entonces $h \mapsto g_h$ de $\mathbb{R}^n$ en el subespacio denso $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ en $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ es uniformemente continua.

   Sea $\varepsilon > 0$ y $K = \operatorname{Spt}(K)$. Entonces, K es compacto en $\mathbb{R}^n$. Existe un rectángulo acotado con medida positiva $P \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $K \subseteq \mathring{P}$.

   Sea $\|\cdot\|$ una norma de $\mathbb{R}^n$ y d la correspondiente distancia inducida. Entonces, $d(K, \mathbb{R}^n \backslash \mathring{P}) > 0$. Como g es uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$ (pues es continua en un conjunto compacto, a saber, $\overline{P}$ y fuera de este conjunto es nula) existe $0 < \delta < d(K, \mathbb{R}^n \backslash \mathring{P})$ tal que:

$$x_1, y_1 \in \mathbb{R}^n, \|x_1 - y_1\| < \delta \Rightarrow \left|g(x_1) - g(y_1)\right| < \frac{\varepsilon}{(\operatorname{Vol}(P))^{1/p}}$$

   Sean $s, t \in \mathbb{R}^n$ tales que $\|s - t\| < \delta$. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_p\left(g_s - g_t\right) &= \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left|g(x+s) - g(x+t)\right|^p dx\right]^{1/p} \\ &= \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left|g(y+s-y) - g(y)\right|^p dy\right]^{1/p} \end{aligned}$$

   haciendo el cambio de variable $x = y - t$ y, como para $y \in \mathbb{R}^n \backslash \mathring{P}$ se tiene que $y + s - k \notin K$ (pues, $\|s - t\| < d(K, \mathbb{R}^n \backslash \mathring{P})$) luego, el integrando se anula fuera de P. Se sigue que:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_p\left(g_s - g_t\right) &= \left[\int_P \left|g(y+s-y) - g(y)\right|^p dy\right]^{1/p} \\ &= \left[\int_P \left|\frac{\varepsilon}{(\operatorname{Vol}(P))^{1/p}}\right|^p dy\right]^{1/p} \\ &= \left[\int_P \frac{\varepsilon^p}{(\operatorname{Vol}(P))} dy\right]^{1/p} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

   lo que prueba el resultado.

3. Sea $\varepsilon > 0$. Existe $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ tal que:

$$\mathcal{N}_p\left(f - g\right) z < \frac{\varepsilon}{3}$$

   Por (2), existe $\delta > 0$ tal que:

$$s, t \in \mathbb{R}^n, \|s - t\| < \delta \Rightarrow \mathcal{N}_p\left(g_s - g_t\right) < \frac{\varepsilon}{3}$$

   Dados $s, t \in \mathbb{R}^n$ tales que $\|s - t\| < \delta$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_p\left(f_s - f_t\right) &\leq \mathcal{N}_p\left(f_s - g_s\right) + \mathcal{N}_p\left(g_s - g_t\right) + \mathcal{N}_p\left(f_t - g_t\right) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

   lo cual prueba la continuidad uniforme de $h \mapsto f_h$.

■

Proposición 2.3.2
Fije $p \in [1, \infty]$. Si $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y $g \in \mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, entonces $f * g$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$.

Demostración:
Se puede suponer que, por ejemplo, $p^* < \infty$. Por Hölder, para todo $s, t \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
\left|f * g(s) - f * g(t)\right| &= \int_{\mathbb{R}^n} \left|f(y)[g(s-y) - g(t-y)]\right| dy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|f(y)\right|\left|g(s-y) - g(t-y)\right| dy \\
&\leq \mathcal{N}_p(f) \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left|g(s-y) - g(t-y)\right|^{p^*} dy\right]^{1/p^*} \\
&\leq \mathcal{N}_p(f) \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left|g(s+x) - g(t+x)\right|^{p^*} dx\right]^{1/p^*} \\
&= \mathcal{N}_p(f) \mathcal{N}_{p^*}(g_s - g_t)
\end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $y = -x$. Por la continuidad uniforme de $h \mapsto f_h$, se tiene que $f * g$ también debe ser uniformemente continua. En efecto, sea $\varepsilon > 0$, como $h \mapsto g_h$ es uniformemente continua, (usando el teorema anterior y ya que $p^* < \infty$), existe $\delta > 0$ tal que si $s, t \in \mathbb{R}^n$ son tales que:

$$\|s - t\| < \delta \Rightarrow \mathcal{N}_{p^*}(g_s - g_t) < \frac{\varepsilon}{\mathcal{N}_p(f) + 1}$$

Luego,

$$\|s - t\| < \delta \Rightarrow \left|f * g(s) - f * g(t)\right| < (\mathcal{N}_p(f) + 1) \cdot \frac{\varepsilon}{\mathcal{N}_p(f) + 1} = \varepsilon$$

lo que prueba la continuidad uniforme de $f * g$. ■

Proposición 2.3.3
Fije $p \in]1, \infty[$. Si $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in \mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, entonces:

$$\lim_{x \to \infty} f * g(x) = 0$$

Demostración:
Fije una norma en $\mathbb{R}^n$, digamos $\|\cdot\|$. Sea $\varepsilon > 0$. Para cada $M > 0$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\left|f * g(x)\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|f(y)\right|\left|g(x-y)\right| dy \\
&\leq \int_{\|y\| \leq M} \left|f(y)\right|\left|g(x-y)\right| dy + \int_{\|y\| > M} \left|f(y)\right|\left|g(x-y)\right| dy \\
&\leq \mathcal{N}_p(f) \left[\int_{\|y\| \leq M} \left|g(x-y)\right|^{p^*} dy\right]^{1/p^*} + \mathcal{N}_{p^*}(g) \left[\int_{\|y\| > M} \left|f(y)\right|^p dy\right]^{1/p}
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Por Lebesgue,

$$\lim_{M \to \infty} \int_{\|y\| > M} \left|f(y)\right|^p dy = 0$$

Entonces, existe $M > 0$ tal que

$$\left[\int_{\|y\| > M} \left|f(y)\right|^p dy\right]^{1/p} < \frac{\varepsilon}{1 + \mathcal{N}_p(f) + \mathcal{N}_{p^*}(g)}$$

Por el cambio de variable $y = x - z$, resulta lo siguiente:

$$\int_{\|y\|\leq M} \left|g(x-y)\right|^{p^*} dy = \int_{\|x-z\|\leq M} \left|g(z)\right|^{p^*} dz$$

Se sigue también del teorema de Lebesgue que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\|z\|>R} \left|g(z)\right|^{p^*} dz = 0$$

Entonces, para $\varepsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que si $\|z\| > R$, entonces:

$$\int_{\|z\|>R} \left|g(z)\right|^{p^*} dz < \frac{\varepsilon}{1 + \mathcal{N}_p(f) + \mathcal{N}_{p^*}(g)}$$

Ahora, como

$$\left\{z \in \mathbb{R}^n \middle| \|x - z\| \leq M\right\} \subseteq \left\{z \in \mathbb{R}^n \middle| \|x\| - M \leq \|z\|\right\}$$

tomando $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x\| > R + M$, se sigue que:

$$\int_{\|x-z\|\leq M} \left|g(z)\right|^{p^*} dz \leq \int_{\|z\|>R} \left|g(z)\right|^{p^*} dz < \frac{\varepsilon}{1 + \mathcal{N}_p(f) + \mathcal{N}_{p^*}(g)}$$

Por tanto, tomando $\|x\| > R + M$ se sigue que:

$$\begin{aligned} \left|f * g(x)\right| &\leq \left[\mathcal{N}_p(f) + \mathcal{N}_{p^*}(g)\right] \cdot \frac{\varepsilon}{1 + \mathcal{N}_p(f) + \mathcal{N}_{p^*}(g)} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

por tanto:

$$\lim_{x\to\infty} f * g(x) = 0$$

■

Observación 2.3.3
El resultado anterior no se generaliza al caso $p > 1$ y $p^* = \infty$. En efecto, si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ con $\int_{\mathbb{R}^n} f \neq 0$ y $g = \chi_{\mathbb{R}^n}$, entonces:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)dy \neq 0$$

la cual no es nula en el infinito.

Proposición 2.3.4
Si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y $g \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ es tal que

$$\lim_{y\to\infty} g(y) = 0$$

entonces,

$$\lim_{x\to\infty} f * g(x) = 0$$

Demostración:
Por Hölder tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\left|f * g(x)\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|f(x-y)\right|\left|g(y)\right| dy \\
&= \int_{\|y\|\leq M} \left|f(x-y)\right|\left|g(y)\right| dy + \int_{\|y\|>M} \left|f(x-y)\right|\left|g(y)\right| dy \\
&\leq \mathcal{N}_\infty\left(g\right) \int_{\|y\|\leq M} \left|f(x-y)\right| dy + \mathcal{N}_1\left(f\right) \sup_{\|y\|>M} \left|g(y)\right|
\end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Existe $M > 0$ tal que:

$$\sup_{\|y\|>M} \left|g(y)\right| < \frac{\varepsilon}{1 + \mathcal{N}_1\left(f\right) + \mathcal{N}_\infty\left(g\right)}$$

lo cual sucede, ya que $\lim_{y\to\infty} g(y) = 0$. Ahora, se tiene que:

$$\int_{\|y\|\leq M} \left|f(x-y)\right| dy = \int_{\|x-z\|\leq M} \left|f(z)\right| dz$$

Por Lebesgue, existe $R > 0$ tal que:

$$\int_{\|z\|>R} \left|f(z)\right| dz < \frac{\varepsilon}{1 + \mathcal{N}_1\left(f\right) + \mathcal{N}_\infty\left(g\right)}$$

si $\|x\| > R + M$, entocnes:

$$\begin{aligned}
\int_{\|y\|\leq M} \left|f(x-y)\right| dy &\leq \int_{\|z\|>R} \left|f(z)\right| dz \\
&< \frac{\varepsilon}{1 + \mathcal{N}_1\left(f\right) + \mathcal{N}_\infty\left(g\right)}
\end{aligned}$$

Por tanto, si $\|x\| > R + M$:

$$\begin{aligned}
\left|f * g(x)\right| &\leq \left[\mathcal{N}_1\left(f\right) + \mathcal{N}_\infty\left(g\right)\right] \cdot \frac{\varepsilon}{1 + \mathcal{N}_1\left(f\right) + \mathcal{N}_\infty\left(g\right)} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

lo cual prueba el resultado. ■

2.4. Convolución y diferenciación

Proposición 2.4.1
Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ es integrable (está en $\mathcal{L}_1$) y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ es de clase C^r de tal suerte que g y todas sus derivadas parciales hasta el orden r (incluive) son acotadas, entonces $f * g$ es de clase C^r.

Además, si $D = \partial_{\alpha_1} \cdots \partial_{\alpha_k}$ con $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in \{1, ..., n\}$ y $k \in \{1, ..., r\}$, se tiene:

$$D(f * g) = f * Dg$$

Demostración:

Como $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y $g \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, entonces existen $f * g$ y $f * Dg$ (pues, tanto g como Dg son acotadas) en todo punto de $\mathbb{R}^n$.

Se afirma que $D(f * g) = f * Dg$. Procederemos por inducción sobre k, basta probar que

$$\partial_{\alpha_k}(f * g) = (f * \partial_{\alpha_k})g$$

(si se puede para una derivada parcial, se puede continuar con las demás derivadas parciales para obtener el operador D). Se tiene que:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy$$

y

$$(f * \partial_{\alpha_k} g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\partial_{\alpha_k} g(x-y)dy$$

Si $M = \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \left|\partial_{\alpha_k} g(z)\right|$, entonces

$$\left|f(y)\partial_{\alpha_k} g(x-y)\right| \leq M\left|f(y)\right|, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

donde la función de la derecha es integrable e independiente de x. Por el teorema de derivación de funciones definidas por integrales, existe $\partial_{\alpha_k}(f * g)$ y su valor es:

$$\partial_{\alpha_k}(f * g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\partial_{\alpha_k} g(x-y)dy = (f * \partial_{\alpha_k} g)(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. ■

Definición 2.4.1

Se dice que una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ es **localmente integrable**, si f es integrable en todo compacto de $\mathbb{R}^n$. Se denota por $\mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ al espacio vectorial de estas funciones.

Observación 2.4.1

Toda función integrable es localmente integrable, pero no viceversa. En particular, $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \subseteq \mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y, en particular, todos los polinomios están en $\mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$.

Podemos entonces definir al espacio $\mathcal{L}_p^{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ de todas las funciones tales que su módulo a la p están en $\mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Pero, en particular se tendría que:

$$\mathcal{L}_p^{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \subseteq \mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$$

para todo $p \in [1, \infty[$.

Proposición 2.4.2

Si $f \in \mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y $g \in \mathcal{C}_c^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, entonces $f * g$ existe en todo punto de $\mathbb{R}^n$, es de clase C^r (g es de clase C^r) y para todo $D = \partial_{\alpha_1} \cdots \partial_{\alpha_k}$, con $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in \{1, ..., n\}$ y $k \in \{1, ..., r\}$, se tiene:

$$D(f * g) = f * D(g)$$

Demostración:

Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ el soporte de g (el cual es compacto). Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, existe la integral:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy$$

Esa integral es no cero si $x - y \in K$, es decir si $y \in x - K$. Por ende:

$$f * g(x) = \int_{x-K} f(y)g(x-y)dy$$

el conjunto $x - K$ es compacto. Como f es localmente integrable, es integrable en $x - K$ y g es medible acotada, luego está en $\mathcal{L}_\infty^{loc}(x-K, \mathbb{K})$.

Sea $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{R}^n$. Entonces:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{f(y)\chi_{x-K}(y)}_{\in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})} g(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f_1(y)g(x-y)dy$$

no se puede usar directamente el teorema de derivación, ya que $f_1(y) = f(y)\chi_{x-K}(y)$ depende de x. Para ello, sea $R > 0$ y

$$B'_R = \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| \|x\| \leq R\right\}$$

Para cada $x \in B'_R$, $x - K \subseteq B'_R + (-K)$ y:

$$\begin{aligned}
f * g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy \\
&= \int_{B'_R+(-K)} f(y)g(x-y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left[f(y)\chi_{B'_R+(-K)}(y)\right] g(x-y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f_1(y)g(x-y)dy \\
&= f_1 * g(x)
\end{aligned}$$

para todo $x \in B'_R$. Por la proposición anterior, $f_1 * g$ es de clase C^r en $\mathbb{R}^n$, luego $f * g$ es de clase C^r en B'_R. Además, para cada $x \in B'_R$,

$$D(f * g)(x) = D(f_1 * g)(x) = (f_1 * Dg)(x)$$

y

$$\begin{aligned}
(f_1 * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f_1(y)Dg(x-y)dy \\
&= \int_{B'_R+(-K)} f(y)Dg(x-y)dy \\
&= \int_{x-K} f(y)Dg(x-y)dy \\
&= f * Dg(x) \\
\Rightarrow D(f * g)(x) &= f * Dg(x)
\end{aligned}$$

pues, Dg es nula fuera de K. Como el $R > 0$ fue arbitrario, se sigue que el resultado anterior es válido para todo $x \in \mathbb{R}^n$. ■

Definición 2.4.2
Sea $p \in [1, \infty[$ y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$. Se dice que $f \in \mathcal{L}_p^{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ si la reestricción de f a cada compacto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ pertenece a $\mathcal{L}_p(C, \mathbb{K})$.

Observación 2.4.2
Es claro que si $f \in \mathcal{L}_p^{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, entonces $f \in \mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ (pues, para todo compacto $C \subseteq \mathbb{R}^n$, se tiene que $\mathcal{L}_p(C, \mathbb{K}) \subseteq \mathcal{L}_1(C, \mathbb{K})$). Y $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \subseteq \mathcal{L}_p^{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$

Así pues, el último resultado es válido con la hipótesis alternativa de que $f \in \mathcal{L}_p^{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, en particular, de que $f \in \mathcal{L}_p^{(}\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$

2.5. Sucesiones de Dirac

El álgebra de Banach $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ no posee elemento uno, es decir, no existe $\delta \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ tal que

$$f * \delta = f \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n \quad \forall f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$$

tampoco existe $\delta \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ tal que:

$$f * \delta = f \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n \quad \forall f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$$

Demostración:
En efecto, suponga que exista tal $\delta > 0$. Sea $P \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectángulo acotado tal que $\mathring{P} \neq \emptyset$. Se sabe que

$$\delta * \chi_P = \chi_P \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n$$

por un resultado anterior, $\delta * \chi_P$ es una función continua en $\mathbb{R}^n$ ($\delta \in \mathcal{L}_1$ y $\chi_P \in \mathcal{L}_\infty$). Entonces:

$$\delta * \chi_p = \chi_P = 1 \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n$$

como ambas son cintunas, entonces:

$$\delta * \chi_P(x) = \chi_P(x) = 1, \quad \forall x \in \mathring{P}$$

y

$$\delta * \chi_P(x) = \chi_P(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{P}$$

esto contradeciría la continuidad de $\delta * \chi_P$ en $\mathbb{R}^n$. ■

Las sucesiones de Dirac hacen el papel del elemento uno.

Definición 2.5.1
Una sucesión $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ se dice que es una **sucesión de Dirac** si satisface lo siguiente:

I. $\rho_\nu \geq 0$ para todo $\nu \in \mathbb{N}$.

II. $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\nu = 1$, para todo $\nu \in \mathbb{N}$.

III. Para todo $\delta > 0$, $\lim_{\nu \to \infty} \int_{\|x\| < \delta} \rho_\nu(x) dx = 1$.

usar (ii) y (iii), (iii) es equivalente a:

IV. Para todo $\delta > 0$, $\lim_{\nu \to \infty} \int_{\|x\| \geq \delta} \rho_\nu(x) dx = 0$.

Esta definición es independiente de la norma elegida.

Ejemplo 2.5.1
Considere la sucesión de picos (especificar). Para todo $\nu \in \mathbb{N}$, ρ_ν es la función cuya gráfica es triangular de base $\left[\frac{1}{\nu}, -\frac{1}{\nu}\right]$ sobre el eje x y cuyo vértice está en el punto $(0, \nu)$ sobre el eje y y que es cero fuera del intervalo.

Entonces, $\{\rho_\nu\}$ es una sucesión de dirac en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Ejemplo 2.5.2
Sea $\delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función no negativa tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\nu = 1$. Para cada $\nu \in \mathbb{N}$ se define:

$$\rho_\nu(x) = \nu^n \rho_\nu(\nu x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Entonces, $\{\rho_\nu\}$ es una sucesión de Dirac en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$.

Claramente cumple (i). Para (ii), veamos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\nu(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \nu^n \rho(\nu x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(y)dy = 1$$

haciendo el cambio de variable $x = \frac{y}{\nu}$ de Jacobiano $\frac{1}{\nu^n}$.

De (iii). Por el mismo cambio de variable:

$$\int_{\|x\|>\delta} \rho_\nu(x)dx = \nu^n \int_{\|x\|>\delta} \rho(\nu x)dx = \int_{\|y\|>\nu\delta} \rho(y)dy \longrightarrow_{\nu\to\infty} 0$$

por el Teorema de Lebesgue. Luego, $\{\rho_\nu\}$ es una sucesión de Dirac.

2.5.1. Convolución de sucesiones de Dirac con funciones en $\mathcal{L}_p$, $1 \leq p < \infty$

Teorema 2.5.1 (**Desigualdad de Jensen**)
Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\rho : E \to \mathbb{R}$ tal que $\rho \geq 0$, para todo $x \in E$, ρ integrable en E y

$$\int_E \rho = 1$$

Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo en $\mathbb{R}$, $f : E \to I$ una función y $\varphi : I \to \mathbb{R}$ una función convexa. Si $f \cdot \rho$ y $(\varphi \circ f)\rho$ son integrables en E, entonces

$$\int_E f \cdot \rho \in I$$

y

$$\varphi\left(\int_E f \cdot \rho\right) \leq \int_E (\varphi \circ f)\rho$$

Demostración:
Se probarán dos cosas:

1. Veamos que $\int_E f \cdot \rho \in I$. En efecto, analicemos por casos:

I) Suponga que para algún $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq \alpha$, para todo $x \in E$ (en este caso, se tiene que I es cerrado por la izquierda). Entonces, $f(x)\rho(x) \geq \alpha\rho(x)$ para todo $x \in E$, luego

$$\int_E f \cdot \rho \geq \int_E \alpha\rho = \alpha$$

Suponga ahora que $f(x) > \alpha$, para todo $x \in E$ (en este caso, se tiene que I es abierto por la izquierda). Entonces

$$\int_E f \cdot \rho \geq \alpha$$

si $\int_E f \cdot \rho = \alpha$, debe suceder entonces que $\int_E (f \cdot \rho - \alpha\rho) = 0$, por lo cual $f \cdot \rho - \alpha\rho = 0$ c.t.p. en E, de donde $f(x) - \alpha = 0$ para casi toda $x \in S$, donde

$$S = \left\{ y \in E \middle| \rho(y) > 0 \right\}$$

Como $m(S) > 0$ ya que $\int_E \rho = \int_S \rho = 1$, entonces existe $x_0 \in E$ tal que $f(x_0) = \alpha$, lo cual contradice el hecho de que $f(x) > \alpha$ para toda $x \in E$. Por tanto:

$$\int_E f \cdot \rho > \alpha$$

II) De forma análoga al inciso anterior, se prueba que si $f(x) \leq \beta$ para toda $x \in E$, entonces $\int_E f \cdot \rho \leq \beta$ y, si $f(x) < \beta$ para toda $x \in E$, entonces $\int_E f \cdot \rho < \beta$

por los dos incisos anteriores, se concluye que $\int_E f \cdot \rho \in I$.

2. Defina $c = \int_E f \cdot \rho \in I$. Se tienen dos casos:

I) Suponga que $c \in \mathring{I}$. Como φ es convexa en I, si $s, t \in I$ son tales que $s < c < t$, entonces:

$$\frac{\varphi(c) - \varphi(s)}{c - s} \leq \frac{\varphi(t) - \varphi(c)}{t - c}$$

sea $\alpha = \sup \left\{ \frac{\varphi(c)-\varphi(s)}{c-s} \middle| s < c \right\}$. Entonces si $s \in I$,

$$\frac{\varphi(c) - \varphi(s)}{c - s} \leq \alpha, \quad \forall s < c$$
$$\Rightarrow \varphi(c) + \alpha \cdot (s - c) \leq \varphi(s), \quad \forall s \leq c$$

Como $t \in I$ es tal que $c < t$, entonces por ser α el supremo, debe suceder que

$$\alpha \leq \frac{\varphi(t) - \varphi(c)}{t - c}, \quad \forall t > c$$
$$\Rightarrow \varphi(c) + \alpha \cdot (t - c) \leq \varphi(t), \quad \forall t \geq c$$

Por tanto, de las dos desigualdades anteriores, se sigue que:

$$\varphi(c) + \alpha \cdot (u - c) \leq \varphi(u), \quad \forall u \in I$$

como $f(x) \in I$ para todo $x \in E$, se sigue que:

$$\varphi(c) + \alpha \cdot (f(x) - c) \leq \varphi(f(x)), \quad \forall x \in E$$
$$\Rightarrow \varphi(c)\rho(x) + \alpha \cdot (f(x) - c)\rho(x) \leq \varphi(f(x))\rho(x), \quad \forall x \in E$$

de esta forma, integrando ambos lados:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_E \varphi(c)\rho(x)dx + \int_E \alpha\cdot(f(x)-c)\rho(x)dx &\leq \int_E \varphi(f(x))\rho(x)dx \\
\Rightarrow \varphi(c)\int_E \rho(x)dx + \alpha\int_E (f(x)-c)\rho(x)dx &\leq \int_E \varphi(f(x))\rho(x)dx \\
\Rightarrow \varphi(c)\cdot 1 + \alpha\int_E f(x)\rho(x)dx - \alpha\cdot c\int_E \rho(x)dx &\leq \int_E \varphi(f(x))\rho(x)dx \\
\Rightarrow \varphi(\int_E f(x)\rho(x))dx + \alpha\int_E f(x)\rho(x)dx - \alpha\cdot\int_E f(x)\rho(x)dx &\leq \int_E \varphi(f(x))\rho(x)dx \\
\Rightarrow \varphi(\int_E f(x)\rho(x))dx &\leq \int_E \varphi(f(x))\rho(x)dx
\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\varphi\left(\int_E f\cdot\rho\right) \leq \int_E (\varphi\circ f)\rho$$

que es lo que se quería probar.

II) Suponga que $a = \int_E f\cdot\rho$ (en este caso, la integral coincide con el valor del extremo izquierdo del intervalo I), luego $a\in I$.
Se tiene entonces que $f(x)\geq a$ para todo $x\in E$. Luego, $\int_E (f-a)\rho = 0$, por ende $f(x)=a$ para casi todo $x\in S$, donde

$$S = \left\{x\in E \middle| \rho(x)>0\right\}$$

así pues

$$\begin{aligned}
\int_E (\varphi\circ f)\rho &= \int_S (\varphi\circ f)\rho \\
&= \int_S \varphi(a)\cdot\rho \\
&= \varphi(a)\int_S \rho \\
&= \varphi(a)\int_E \rho \\
&= \varphi(a) \\
&= \varphi\left(\int_E f\cdot\rho\right) \\
\Rightarrow \int_E (\varphi\circ f)\rho &= \varphi\left(\int_E f\cdot\rho\right)
\end{aligned}$$

lo que prueba el resultado.

III) El caso $b = \int_E f\cdot\rho$ es análogo al anterior.

Por los incisos anteriores, se sigue el resultado de la prueba. ■

Observación 2.5.1
Note que $\int_E f\cdot\rho$ representa un promedio de los valores de f, por lo cual el hecho de que $a=\int_E f\cdot\rho$ sea un extremo del intervalo I implica que f debe tomar el valor constante a c.t.p. en E.

Ejemplo 2.5.3
Suponga que $I=[0,\infty[$ en el teorema anterior, luego f debe ser no negativa en E.

1. Si $\varphi(t) = t^p$, $t \geq 0$ con $p \geq 1$, la desigualdad de Jensen dice que

$$\left(\int_E f \cdot \rho\right)^p \leq \int_E f^p \cdot \rho$$

siempre que las integrales existan. La conclusión persiste si f es medible no negativa y $\int_E f \cdot \rho < \infty$ y $\int_E f^p \cdot \rho \leq \infty$.

2. Si $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$e^{\alpha \int_E f \cdot \rho} \leq \int_E e^{\alpha f} \rho$$

Igual que en caso anterior, si f es medible no negativa y $\int_E f \cdot \rho$, la conclusión persiste.

3. Si $m(E) = 1$ y ρ es tal que $\rho(x) = 1$ para todo $x \in E$, se tiene que:

$$\varphi\left(\int_E f(x)dx\right) \leq \int_E \varphi(f(x))dx$$

Teorema 2.5.2
Sean $1 \leq p \leq \infty$ y $f \in L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Si $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ es una sucesión de Dirac en $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ entoces, $\{\rho_\nu * f\}_{\nu=1}^{\infty}$ converge a f en p-promedio.

Demostración:
Como $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ es una sucesión de Dirac, entonces

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\rho_\nu(y)dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

para todo $\nu \in \mathbb{N}$. Además,

$$f * \rho_\nu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\rho_\nu(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\rho_\nu(y)dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

para todo $\nu \in \mathbb{N}$. Por ende:

$$\begin{aligned}
(f - f * \rho_\nu)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(f(x) - f(x-y)\right)\rho_\nu(y)dy \\
\Rightarrow \left|(f - f * \rho_\nu)(x)\right|^p &= \Big|\int_{\mathbb{R}^n} \left(f(x) - f(x-y)\right)\rho_\nu(y)dy\Big|^p \\
&\leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left|f(x) - f(x-y)\right|\rho_\nu(y)dy\right]^p \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|f(x) - f(x-y)\right|^p \rho_\nu(y)dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ y } \forall \nu \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

donde la primera desigualdad es por desigualdad del triángulo, la segunda por desigualdad de Jensen, tomando $\varphi(t) = t^p$ para todo $t \geq 0$, tratando al segundo miembro como una función medible no negativa. Integrando respecto a $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_p\left(f - f * \rho_\nu\right)^p &\leq \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^n} \left|f(x) - f(x-y)\right|^p \rho_\nu(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\nu(y)dy \int_{\mathbb{R}^n} \left|f(x) - f(x-y)\right|^p dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\nu(y)\mathcal{N}_p\left(f - f_{-y}\right)^p dy, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Donde $f_{-y}(x) = f(x-y)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Como la función $y \mapsto f_{-y}$ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ es continua (pues es uniformemente continua), dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|y\| < \delta$ entonces

$$\mathcal{N}_p(f - f_{-y}) < \frac{\varepsilon}{2^{1/p}}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_p(f - f * \rho_\nu)^p &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\nu(y) \mathcal{N}_p(f - f_{-y})^p \, dy \\
&= \int_{\|y\|<\delta} \rho_\nu(y) \mathcal{N}_p(f - f_{-y})^p \, dy + \int_{\delta \leq \|y\|} \rho_\nu(y) \mathcal{N}_p(f - f_{-y})^p \, dy \\
&\leq \int_{\|y\|<\delta} \rho_\nu(y) \frac{\varepsilon^p}{2} dy + \int_{\delta \leq \|y\|} \rho_\nu(y) \mathcal{N}_p(f - f_{-y})^p \, dy \\
&= \frac{\varepsilon^p}{2} \int_{\|y\|<\delta} \rho_\nu(y) dy + \int_{\delta \leq \|y\|} \rho_\nu(y) \mathcal{N}_p(f - f_{-y})^p \, dy \\
&\leq \frac{\varepsilon^p}{2} + \int_{\delta \leq \|y\|} \rho_\nu(y) \mathcal{N}_p(f - f_{-y})^p \, dy, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

además,

$$\begin{aligned}
\int_{\delta \leq \|y\|} \rho_\nu(y) \mathcal{N}_p(f - f_{-y})^p \, dy &\leq \int_{\delta \leq \|y\|} \rho_\nu(y) \left[\mathcal{N}_p(f) + \mathcal{N}_p(f_{-y})\right]^p dy \\
&= \left[2\mathcal{N}_p(f)\right]^p \int_{\delta \leq \|y\|} \rho_\nu(y) dy \\
&= 2^p \mathcal{N}_p(f)^p \int_{\delta \leq \|y\|} \rho_\nu(y) dy, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Como $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ es sucesión de Dirac, por (iv) se tiene que existe $\nu_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $\nu \geq \nu_0$, entonces:

$$2^p \mathcal{N}_p(f)^p \int_{\delta \leq \|y\|} \rho_\nu(y) dy < \frac{\varepsilon^p}{2}$$

Por tanto, si $\nu \geq \nu_0$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mathcal{N}_p(f - f * \rho_\nu)^p &\leq \frac{\varepsilon^p}{2} + 2^p \mathcal{N}_p(f)^p \int_{\delta \leq \|y\|} \rho_\nu(y) dy \\
&< \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} \\
&= \varepsilon^p \\
\Rightarrow \mathcal{N}_p(f - f * \rho_\nu) &< \varepsilon
\end{aligned}$$

por ende,

$$\lim_{\nu \to \infty} \mathcal{N}_p(f - f * \rho_\nu) = 0$$

lo que prueba el resultado. ■

Lema 2.5.1
Si $f.g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ son funciones medibles de soporte compacto y $f * g$ está definida c.t.p. en $\mathbb{R}^n$ entonces, $f * g$ tiene soporte compacto, más precisamente, existe un compacto en $\mathbb{R}^n$ fuera del cual $f * g$ existe y se anula.

Demostración:

Notemos que $f * g(x)$ existe para algún $x \in \mathbb{R}^n$ si y sólo si existe y se cumple:

$$f + g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy = \int_{\mathrm{Spt}(f)} f(y)g(x-y)dy$$

Se afirma que si $x \notin \mathrm{Spt}\,(f) + \mathrm{Spt}\,(g)$ entonces existe la convolución $f * g(x)$ y vale cero. En efecto, sea $x \notin \mathrm{Spt}\,(f) + \mathrm{Spt}\,(g)$ entonces, $x - y \notin \mathrm{Spt}\,(g)$ para todo $y \in \mathrm{Spt}\,(f)$. De donde:

$$\int_{\mathrm{Spt}(f)} f(y)g(x-y)dy = 0, \quad \forall x \notin \mathrm{Spt}\,(f) + \mathrm{Spt}\,(g)$$

Por ende, $\mathrm{Spt}\,(f * g) \subseteq \mathrm{Spt}\,(f) + \mathrm{Spt}\,(g)$. Note que $\mathrm{Spt}\,(f * g)$ es un cerrado en un compacto (ya que la suma de dos compactos es compacto), luego compacto para el cual $f * g$ se anula. ■

Teorema 2.5.3

El $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ es denso en $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, para $1 \leq p < \infty$.

Demostración:

Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función tal que

$$t \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-t}} & \text{si} \quad t < 1 \\ 0 & \text{si} \quad t \geq 1 \end{cases}$$

φ es continua de clase C^∞ en $\mathbb{R}$. Sea $\|\cdot\|$ la norma euclideana. Se define $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como $\rho(x) = 0$ si $\|x\| \geq 1$ y:

$$\rho(x) = \frac{e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}}}{\int_{\|x\|<1} e^{-\frac{1}{1-\|y\|^2}} dy} \text{ si } \|x\| < 1$$

es decir, que $\rho(x) = c\varphi(\|x\|^2)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ con c constante. Es claro que ρ es de clase C^∞ en $\mathbb{R}^n$, no negativa y:

$$\mathrm{Spt}\,(\rho) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| \|x\| \leq 1 \right\}$$

y, su integral sobre $\mathbb{R}^n$ es igual a 1. Considere la sucesión de Dirac $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ daad por:

$$\rho_\nu(x) = \nu^n \rho(\nu x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Note que $\rho_\nu \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, de hecho:

$$\mathrm{Spt}\,(\rho_\nu) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| \|x\| \leq \frac{1}{\nu} \right\}, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$$

Sea $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y tomemos $\varepsilon > 0$. Por la densidad de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, en $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, existe $\psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ tal que:

$$\mathcal{N}_p\,(f - \psi) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por el teorema anterior,

$$\lim_{\nu \to \infty} \mathcal{N}_p\,(\psi - \psi * \rho_\nu) = 0$$

Fije $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{N}_p\,(\psi - \psi * \rho_\nu) < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces:

$$\mathcal{N}_p\,(f - \psi * \rho_\nu) \leq \mathcal{N}_p\,(f - \psi) + \mathcal{N}_p\,(\psi - \psi * \rho_\nu) < \varepsilon$$

Como $\psi \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y ρ_ν es de clase C^∞ de soporte comapcto, entonces $\psi * \rho_\nu$ es de clase C^∞. Además, por el teorema anterior, $\psi * \rho_\nu$ tiene soporte compacto ya que ambas funciones, ψ y ρ_ν lo tienen. Luego, se tiene el resultado. ■

2.6. Convolución de sucesiones de Dirac con funciones en $\mathcal{L}_\infty$

Teorema 2.6.1 (**Teorema de Heine**)
Sean X y Y espacios métricos y $f : X \to Y$ continua en todo punto de un compacto $K \subseteq X$ (no basta suponer que $f\Big|_K$ es función continua). Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$x \in K \text{ y } y \in X, d(x,y) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Demostración:
Ejercicio. ■

Teorema 2.6.2
Sea $f \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ una sucesión de Dirac en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Si f es continua en todo punto de un compacto K, entonces:

$$\lim_{\nu\to\infty} f * \rho_\nu = f \text{ uniformemente en } K$$

Demostración:
Se sabe que existe la convolución $f * \rho_\nu(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y, para todo $\nu \in \mathbb{N}$.

Se tiene:

$$\big|f(x) - f * \rho_\nu(x)\big| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \big|f(x) - f(x-y)\big|\rho_\nu(y)dy$$

sea $\varepsilon > 0$. Por el teorema de Heine, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in K, y \in \mathbb{R}^n, \|x-y\| < \delta \Rightarrow \big|f(x) - f(y)\big| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Para $x \in K$, con este δ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\big|f(x) - f * \rho_\nu(x)\big| &\leq \int_{\|y\|<\delta} \big|f(x) - f(x-y)\big|\rho_\nu(y)dy + \int_{\delta\leq\|y\|} \big|f(x) - f(x-y)\big|\rho_\nu(y)dy \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \int_{\delta\leq\|y\|} \big|f(x) - f(x-y)\big|\rho_\nu(y)dy \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \int_{\delta\leq\|y\|} \left(\big|f(x)\big| + \big|f(x-y)\big|\right)\rho_\nu(y)dy \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \left(\sup_{x\in K}\big|f(x)\big| + \mathcal{N}_\infty(f)\right)\int_{\delta\leq\|y\|} \rho_\nu(y)dy
\end{aligned}$$

Por la condición (iv) de sucesiones de Dirac, existe $\nu_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\nu \geq \nu_0 \Rightarrow \left[\left(\sup_{x\in K}\big|f(x)\big| + \mathcal{N}_\infty(f)\right)\int_{\delta\leq\|y\|} \rho_\nu(y)dy\right] < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por tanto, si $\nu \geq \nu_0$:

$$\sup_{x\in K}\big|f(x) - f * \rho_\nu(x)\big| \leq \varepsilon$$

Luego, se tiene la convergencia uniforme en K. ■

Corolario 2.6.1
Bajo las mismas condiciones del teorema, si f es continua en un punto $x \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\lim_{\nu \to \infty} f * \rho_\nu(x) = f(x)$$

Demostración:
Es inmediato del teorema anterior tomando $K = \{x\}$. ■

Teorema 2.6.3
Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ es acotada y uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$ y $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ es una sucesión de Dirac en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, entonces

$$\lim_{\nu \to \infty} f * \rho_\nu = f \text{ uniformemente en } \mathbb{R}^n$$

También, si $f \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y es continua en un abierto Ω y $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ es una sucesión de Dirac en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, entonces

$$\lim_{\nu \to \infty} f * \rho_\nu = f \text{ uniformemente en } C$$

donde C es un conjunto compacto arbitrario contenido en Ω.

Demostración:
Analicemos la prueba del teorema anterior, ■

Teorema 2.6.4 (**Teorema de Weierestrass**)
Sea $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$ el espacio vectorial de funciones continuas de $[a,b]$ en $\mathbb{K}$, provisto de la norma uniforme. Si $\mathcal{P}([a,b], \mathbb{K})$ es el espacio vectorial de todas las funciones polinómicas de $[a,b]$ en $\mathbb{K}$ entonces, $\mathcal{P}([a,b], \mathbb{K})$ es denso en $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$.

Demostración:
Hay que hacer varias cosas:

1. Basta probar el resultado para $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{K})$. En efecto, suponga cierto el teorema para este caso. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ una función continua. Sea $g : [0,1] \to \mathbb{K}$ dada por:

   $$g(t) = f((1-t)a + tb)$$

   entonces, $g \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{K})$. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe una función polinómica p tal que:

   $$\sup_{t \in [0,1]} \big| g(t) - p(t) \big| < \varepsilon$$

   o sea:

   $$\sup_{x \in [a,b]} \Big| f(x) - p\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \Big| < \varepsilon$$

   tomando como polinomio a $q \in \mathcal{P}([a,b], \mathbb{K})$ tal que $q(x) = p(\frac{x-a}{b-a})$. Luego, se tiene el resultado.

2. Basta probar el resultado para el subespacio vectorial $\widetilde{\mathcal{C}}([0,1], \mathbb{K})$ de todas las funciones continuas de $[0,1]$ en $\mathbb{K}$ nulas en 0 y 1. En efecto, suponga el resultado probado en este caso. Sea $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{K})$. Note que la función siguiente:

   $$x \mapsto f(x) - f(0) - x(f(1) - f(0))$$

pertenece a $\widetilde{\mathcal{C}}([0,1],\mathbb{K})$. Dado $\varepsilon > 0$ existe una función polinómica p tal que

$$\sup_{x\in[0,1]} \left| f(x) - f(0) - x(f(1) - f(0) - p(x)) \right| \leq \varepsilon$$

tomemos al polinomio $q(x) = p(x) - x(f(1) - f(0)) - f(0)$ es tal que $q \in \mathcal{P}([0,1],\mathbb{K})$.

3. Resta probar que si $f \in \widetilde{\mathcal{C}}([0,1],\mathbb{K})$ y $\varepsilon > 0$, existe una función polinómica p tal que:

$$\sup_{x\in[0,1]} \left| f(x) - p(x) \right| < \varepsilon$$

Sea $\rho_\nu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función siguiente:

$$\rho_\nu(t) = \frac{(1-t^2)^\nu}{\int_{-1}^{1}(1-\theta^2)^\nu d\theta} \text{ si } t \in [-1,1]$$

y $\rho_\nu(t) = 0$ si $t \in [-1,1]$, para todo $\nu \in \mathbb{N}$. Esta sucesión es llamada el **Núcleo de Landau**. Se afirma que $\{\rho_\nu\}_{\nu=\infty}^{\infty}$ es una sucesión de Dirac en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Claramente cumplen (i) y (ii). Se verá que se cumple (iv). Usando la paridad de ρ_ν, basta probar que si $0 < \delta < 1$, entonces:

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\int_{\delta}^{1}(1-t^2)^\nu dt}{\int_{-1}^{1}(1-\theta^2)^\nu d\theta} = 0$$

Se tiene

$$\int_{-1}^{1}(1-\theta^2)^\nu d\theta = 2\int_{0}^{1}(1-\theta^2)^\nu d\theta = 2\int_{0}^{1}(1-\theta)^\nu(1+\theta)^\nu d\theta \geq 2\int_{0}^{1}(1-\theta)^\nu d\theta = \frac{2}{\nu+1}$$

y

$$\int_{\delta}^{1}(1-t^2)^\nu dt \leq (1-\delta^2)^\nu \int_{\delta}^{1} dy = (1-\delta^2)^\nu(1-\delta)$$

por tanto,

$$\frac{\int_{\delta}^{1}(1-t^2)^\nu dt}{\int_{-1}^{1}(1-\theta^2)^\nu d\theta} \leq \frac{\nu+1}{2}(1-\delta)(1-\delta^2)^\nu$$

donde el lado de la derecha tiende a cero si $\nu \to \infty$. Con ello, se tiene el resultado.

Ahora, si $\widetilde{f}$ es la ampliación canónica de $f \in \widetilde{\mathcal{C}}([0,1],\mathbb{K})$ entonces, es uniformemente continua en $\mathbb{R}$ y acotada. Luego, por el teorema anterior, la convolución converge a $\widetilde{f}$ en el compacto $[0,1]$.

Para $x \in [0,1]$,

$$\rho_\nu * f(x) = \int_{0}^{1} f(t)\rho_\nu(x-t)dt$$

como $x - t \in [-1,1]$ para todo $t \in [0,1]$, entonces:

$$\begin{aligned}
\rho_\nu * f(x) &= \int_{0}^{1} f(t)\frac{(1-(x-t)^2)^\nu}{\int_{-1}^{1}(1-\theta^2)^\nu d\theta}dt \\
&= \int_{0}^{1} f(t)c_\nu(1-(x-t)^2)^\nu dt
\end{aligned}$$

donde $c_\nu = \frac{1}{\int_{-1}^{1}(1-\theta^2)}$. Siendo claramente dicha integral anterior un polinomio en la variable x de grado 2ν, lo cual concluye la demostración.

■

2.7. Los espacios $\mathcal{L}_p^T$ de funciones periódicas

Definición 2.7.1
Se dice que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ es **periódica con período** $T > 0$, si

$$f(x+T) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En tal caso, tal función queda completamente determinada por su reestricción a cualquier intervalo de longitud T, es decir de la forma: $[\alpha, \alpha+T]$, siendo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Observación 2.7.1
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ una función periódica. Entonces

1. f es medible si y sólo si $f\chi_{[\alpha,\alpha+T]}$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Si f es integrable en todo intervalo de la forma $[\alpha, \alpha+T]$, entonces lo es en todo intervalo de esa forma, y sus integrales son iguales en todo $[\alpha, \alpha+T]$.

Demostración:
De (2): En efecto, ya se tiene que f es integrable en todo intervalo de la forma $[\alpha, \alpha+T]$ (por traslación). Veamos que la integral es la misma. Para ello, se probará que:

$$\int_0^T f = \int_a^{a+T} f$$

en efecto, veamos que si $a \in \mathbb{R}$, entonces debe existir un entero k tal que:

$$\alpha \leq kT < \alpha + T$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+T} f(x)dx &= \int_a^{kT} f(x)dx + \int_{kT}^{a+T} f(x)dx \\
&= \int_{a+T}^{kT+T} f(y-T)dy + \int_{kT}^{a+T} f(x)dx \\
&= \int_{a+T}^{(k+1]T} f(y)dy + \int_{kT}^{a+T} f(x)dx \\
&= \int_{kT}^{(k+1)T} f(x)dx \\
&= \int_0^T f(x)dx
\end{aligned}$$

■

Definición 2.7.2
Sea $1 \leq p < \infty$. Se denota por $\mathcal{L}_p^T$ al espacio vectorial de todas las funciones periódicas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ periódicas de período $T > 0$ tal que $\left|f\right|^p$ es integrable en $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right[$.

Si $f \in \mathcal{L}_p^T$, se define

$$\mathcal{N}_p(f) = \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left|f\right|^p\right]^{1/p}$$

Se denota por $\mathcal{L}_\infty^T$ al espacio vectorial de todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ periódicas de período

$T > 0$ tales que f es medible y esencialmente acotada en $\mathbb{R}$, equivalentemente en $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right[$. Si $f \in \mathcal{L}_\infty^T$, se define

$$\mathcal{N}_\infty(f) = \operatorname{supesc}_{\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right[} \left|f\right|$$

Observación 2.7.2
Sea $1 \leq p < \infty$. La aplicación que a cada $f \in \mathcal{L}_p^T$ le asigna su reestricción a $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right[$, es un isomorfismo de $\mathcal{L}_p^T$ sobre $\mathcal{L}_p(\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right[, \mathbb{K})$. A través de este isomorfismo se verifica de inmediato que $\mathcal{N}_p(\cdot)$ es una seminorma sobre $\mathcal{L}_p^T$, convirtiendo a este isomorfismo en una isometría.

Sea L_p^T el espacio normado asociado a $\mathcal{L}_p^T$, donde $\mathcal{N}_p(\cdot)$ denota la norma correspondiente. La isometría anterior induce una isometría entre L_p^T sobre $L_p(\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right[, \mathbb{K})$.

Se concluye de lo anterior lo siguiente:

1. L_p^T es un espacio de Banach.
2. L_2^T es un espacio Hilbertiano.

Ya que la clase de equivalencia de una función $f \in \mathcal{L}_p^T$ depende solamente de la reestricción de f a $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right[$ o $\left]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right[$ o $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, L_p^T se puede identificar también con $L_p(S, \mathbb{K})$, donde S es uno de los conjuntos anteriores.

Como $\left]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right[$ tiene medida finita, entonces si $q > p$ de forma inmediata se tiene que $L_q^T \subseteq L_p^T$.

En particular, $L_p^T \subseteq L_1^T$, para todo $p \in [1, \infty]$.

Definición 2.7.3
Se denota por $\mathcal{E}^T$ al espacio vectorial de todas las funciones periódicas con período $T > 0$ tales que su reestricción a $\left]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right[$ es escalonada en $\left]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right[$.

También, se denota por $\mathcal{C}^T$ al espacio vectorial de funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ periódicas de período $T > 0$ que son continuas en $\mathbb{R}$, equivalentemente en $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$

Observación 2.7.3
Recuerde que una función $\varphi : \Omega \to \mathbb{K}$ donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto, se dice que es escalonada en el abierto Ω, si es de la forma:

$$\varphi = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \chi_{A_k}$$

donde $\alpha_1, ..., \alpha_r \in \mathbb{K}$ y $A_1, ..., A_r \subseteq \mathbb{R}^n$ son rectángulos acotados disjuntos tales que:

$$\overline{A_r} \subseteq \Omega, \forall k \in [\![1, r]\!]$$

Lema 2.7.1
Toda función en $\mathcal{C}^T$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

Demostración:
Sea $f \in \mathcal{C}^T$ es continua en $[0, 3T]$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, donde $0 < \delta < T$ con la siguiente propiedad:

$$x, y \in [0, 3T] \text{ y } \left|x - y\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - f(y)\right| < \varepsilon$$

sean ahora $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $\left|x-y\right| < \delta$, es decir que

$$x - \delta < y < x + \delta$$

de donde:

$$x - T < y < x + T$$

existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$kT \leq x < (k+1)T$$

entonces,

$$(k-1)T < y < (k+2)T$$

Luego,

$$0 \leq y - (k-1)T \leq 3T$$

y

$$0 \leq x - (k-1)T \leq 2T < 3T$$

luego, $x-(k-1)T, y-(k-1)T \in [0, 3T]$ y, además:

$$\left|x-(k-1)T-(y-(k-1)T)\right| = \left|x-y\right| < \delta$$

Entonces,

$$\left|f(x)-f(y)\right| = \left|f(x-(k-1)T)-f(y-(k-1)T)\right| < \varepsilon$$

Por tanto, f es uniformemente continua. ■

Teorema 2.7.1
Sean $1 \leq p < \infty$ y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Entonces, el espacio vectorial $\mathcal{E}(\Omega, \mathbb{K})$ (funciones escalonadas en el abierto Ω) es denso en $L_p(\Omega, \mathbb{K})$.

Demostración:
Sea $f \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathbb{K})$ y $\varepsilon > 0$. Como $\widetilde{f} \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ es denso en $L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, existe $\psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ tal que:

$$\mathcal{N}_p\left(\widetilde{f}-\psi\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Escriba a Ω como unión a lo sumo numerable de cubos disjuntos C_ν tales que $\overline{C_\nu} \subseteq \Omega$, para toda $\nu \in \mathbb{N}$, y defina

$$Q_k = \bigcup_{\nu=1}^{k} C_\nu, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Observe que Q_k es un conjunto elemental tal que $\overline{Q_k} \subseteq \Omega$. Se tiene

$$\lim_{k\to\infty} \widetilde{f}\chi_{Q_k} = \widetilde{f}$$

puntualmente en $\mathbb{R}^n$, y $\left|\widetilde{f}\xi_{Q_k}\right| \leq \left|f\right|$, para todo $k \in \mathbb{N}$, siendo $\left|\widetilde{f}\right| \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ independiente de k. Por el teorema de Lebesgue en $L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$

$$\lim_{k\to\infty} \mathcal{N}_p\left(\widetilde{f}-\widetilde{f}\chi_{Q_k}\right) = 0$$

Fijemos $k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\mathcal{N}_p\left(\widetilde{f}-\widetilde{f}\chi_{Q_k}\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Como

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}_p\left(\widetilde{f}\chi_{Q_k} - \psi\chi_{Q_k}\right) &= \left[\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{Q_k}|\widetilde{f} - \psi|^p\right]^{1/p} \\
&\leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\widetilde{f} - \psi|^p\right]^{1/p} \\
&= \mathcal{N}_p\left(\widetilde{f} - \psi\right) \\
&< \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$\mathcal{N}_p\left(f - \psi\chi_{Q_k}\right) < \varepsilon$$

La demostración concluye porque la reestricción φ de $\psi\chi_{Q_k}$ a Ω es una función continua escalonada en el abierto Ω. ■

Teorema 2.7.2
Sean $1 \leq p < \infty$ y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto. Entonces, el espacio vectorial $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{K})$ de funciones de clase C^∞ de Ω en $\mathbb{K}$ de soporte compacto contenido en Ω, es denso en $L_p(\Omega, \mathbb{K})$.

Demostración:
Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-t}} & \text{si} \quad t < 1 \\ 0 & \text{si} \quad t \geq 1 \end{cases}$$

entonces, φ es de clase C^∞ en $\mathbb{R}$. Sea $\|\cdot\|$ la norma euclideana en $\mathbb{R}^n$. Defina $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como $\rho(x) = 0$ si $\|x\| \geq 1$ y

$$\rho(x) = \frac{e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}}}{\int_{\|x\|\leq 1} e^{-\frac{1}{1-\|y\|^2}} dy}, \qquad \text{si } \|x\| < 1$$

Es decir, $\rho(x) = c \cdot \varphi(\|x\|^2)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ (con constante). Entonces, ρ es de clase C^∞ en $\mathbb{R}^n$, no negativa, y

$$\operatorname{Spt}(\rho) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| \|x\| \leq 1\right\}$$

y, la integral de ρ sobre $\mathbb{R}^n$ es 1.

Considere la sucesión de Dirac $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ dada por

$$\rho_\nu(x) = \nu^n \rho(\nu x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ y } \forall \nu \in \mathbb{N}$$

Note que $\rho_\nu \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. De hecho,

$$\operatorname{Spt}(\rho_\nu) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| \|x\| \leq \frac{1}{\nu}\right\} = B_{\frac{1}{\nu}}, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$$

Sea $\varepsilon > 0$ y $f \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathbb{K})$. Por el resultado anterior, existe $\psi \in \mathcal{E}(\Omega, \mathbb{K})$ tal que

$$\mathcal{N}_p(f - \psi) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por un resultado anterior

$$\lim_{\nu\to\infty} \mathcal{N}_p\left(\widetilde{\psi} - \widetilde{\psi} * \rho_\nu\right) = 0$$

Existe $\nu_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathcal{N}_p\left(\widetilde{\psi} - \widetilde{\psi} * \rho_\nu\right) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall \nu \geq \nu_0$$

Note que

$$\operatorname{Spt}\left(\widetilde{\psi * \rho_\nu}\right) \subseteq \operatorname{Spt}\left(\widetilde{\psi}\right) + \operatorname{Spt}\left(\widetilde{\rho_\nu}\right) \subseteq \operatorname{Spt}(\psi) + B_{\frac{1}{\nu}} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| d(x, K) \leq \frac{1}{\nu} \right\}, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$$

donde $K = \operatorname{Spt}(\psi)$. Como K es compacto contenido en el abierto Ω, exsite $N \geq \nu_0$ tal que

$$\operatorname{Spt}(\psi) + B_{\frac{1}{N}} \subseteq \Omega$$

Sea φ la restricción de $\rho_n * \widetilde{\psi}$ a Ω. Entonces, φ es de clase C^∞ de soporte compacto contenido en Ω. Además,

$$\mathcal{N}_p(f - \varphi) \leq \mathcal{N}_p(f - \psi) + \mathcal{N}_p(\psi - \varphi) < \frac{\varepsilon}{2} + \mathcal{N}_p\left(\widetilde{\psi} + \widetilde{\psi} * \rho_N\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

■