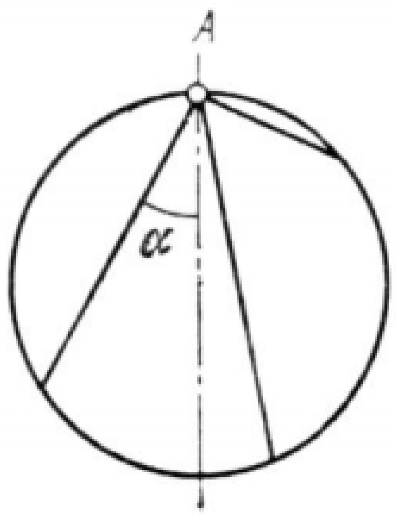
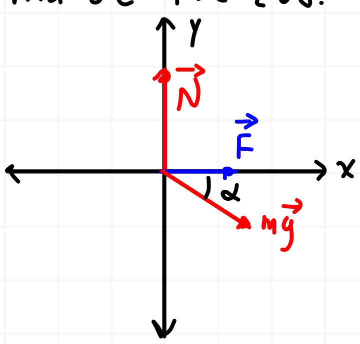
Lista 1.

1. Desde el punto A situado en el extremo superior del diámetro de una circunferencia se deslizan simultáneamente sin fricción diferentes cuerpos hacia otros puntos de la circunferencia por las cuerdas mostradas en la figura bajo la acción de la gravedad. ¿Cómo depende el tiempo de recorrido del ángulo α con respecto a la vertical?



Sol.

Analicemos el caso para un ángulo α respecto a la vertical. Colocando el eje coordenado en el punto desde el que se suelta el cuerpo. Obtenemos entonces el siguiente diagrama de fuerzas:



Por la 2da Ley de Newton, obtenemos que:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Donde $\vec{F} = \vec{N} + m\vec{g}$, como no hay movimiento en el eje y, la fuerza neta resultante va en la dirección de $+x$. En coordenadas cartesianas:

$$(0,N) + (mg\cos\alpha, -mg\,\text{sen}\,\alpha) = (ma, 0)$$

$$\Rightarrow (mg\cos\alpha, N - mg\,\text{sen}\,\alpha) = (ma, 0)$$

Por tanto, $N = mg\,\text{sen}\,\alpha$ y $ma = mg\cos\alpha \Rightarrow a = g\cos\alpha$. Por tanto:

$$\vec{a} = (g\cos\alpha, 0)$$

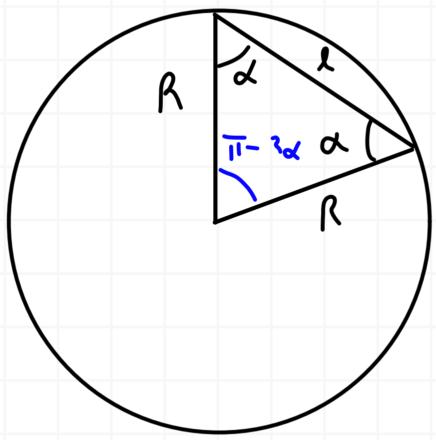
Ahora, determinaremos la ecuación de movimiento (es decir, $\vec{r}(t)$), para ello, con condiciones iniciales $\vec{r}(0) = (0,0)$ y $\vec{v}(0) = (0,0)$, obtenemos que:

$$\vec{v}(t) = t\vec{a} + \vec{v}(0)$$

$$= (gt\cos\alpha, 0)$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \int_0^t \vec{v}(t)\,dt$$
$$= \left(\tfrac{1}{2} g t^2 \cos\alpha, 0\right) + \vec{r}(0)$$
$$= \left(\tfrac{1}{2} g t^2 \cos\alpha, 0\right)$$

Queremos saber cuanto tiempo le llevó al cuerpo llegar a la circunferencia, i.e en qué momento $\vec{r}(t) = \vec{r_f}$, donde $\vec{r_f} = (l, 0)$, donde l es tal que:



$$\frac{l}{\sin(\pi - 2\alpha)} = \frac{R}{\operatorname{sen}\alpha}$$

donde $\operatorname{sen}(\pi - 2\alpha) = \operatorname{sen}(\pi)\cos(2\alpha) - \cos(\pi)\operatorname{sen}(2\alpha) = \operatorname{Sen}(2\alpha)$

así:

$$\vec{r_f} = (2R\cos\alpha, 0)$$

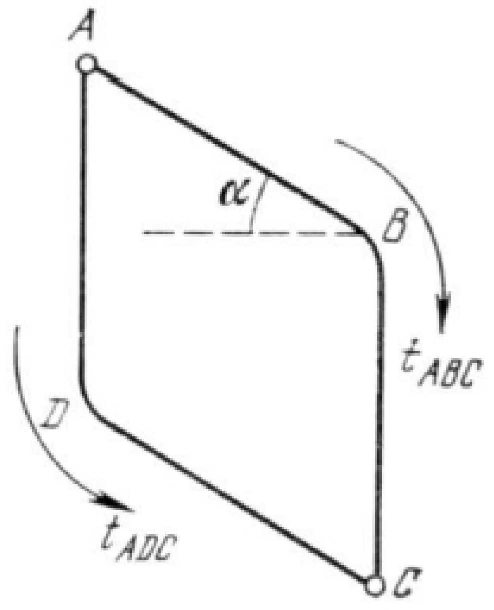
Así:

$$\vec{r}(t) = \vec{r_f} \Leftrightarrow \frac{1}{2} g t^2 \cos\alpha = 2R\cos\alpha$$
$$\Leftrightarrow t^2 = \frac{4R}{g}$$
$$\Leftrightarrow t = 2\sqrt{\frac{R}{g}}, \text{ con } t \geq 0.$$

es decir, el tiempo no depende del ángulo α que se forma con la vertical.

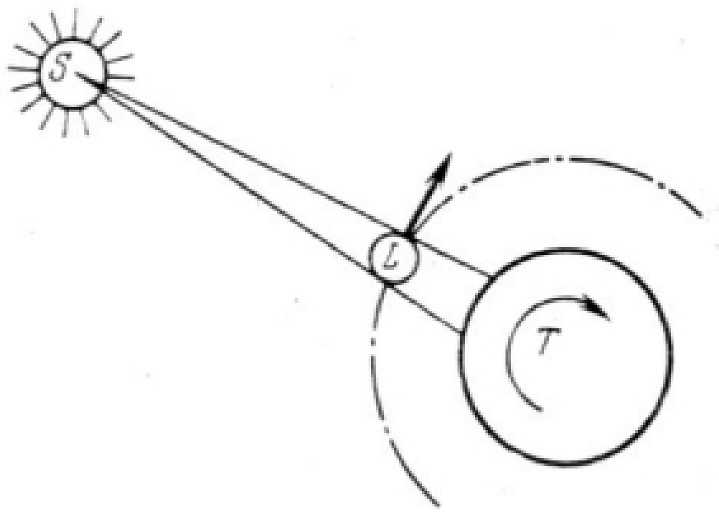
$\square$

2. Una bolita se mueve sin rozamiento una vez por el canal ABC y otra por el ADC. Las partes de los canales AD y BC son verticales y los ángulos ABC y ADC están redondeados. Represente gráficamente para ambos casos cómo depende la velocidad v de la bolita del tiempo t si $AB = BC = AD = DC = h$. La velocidad de las bolitas en el punto A es nula. ¿Por cuál de los caminos (ABC o ADC) llegará antes la bolita desde el punto A al punto C?



3. Determine la velocidad con que se mueve la sombra de la Luna por la superficie de la Tierra durante un eclipse total de Sol, no tome en cuenta la corrección debida al movimiento orbital de la Tierra. Para simplificar supóngase que el eclipse se observa en el ecuador terrestre a mediodía y que el eje de la Tierra es perpendicular al plano de la órbita lunar. Considere que: coinciden el sentido de rotación de la Tierra alrededor de su eje y el movimiento de la Luna por su órbita; la distancia entre la Tierra y la Luna $R_L = 3{,}8 \cdot 10^5\ km$, el radio de la Tierra $R_T = 6{,}4 \cdot 10^3 km$; el mes lunar igual a 28 días terrestres. Al hacer los cálculos téngase en cuenta que la distancia de la Tierra al Sol es mucho mayor que la de la Tierra a la Luna.

R. $0{,}52\ km/s$

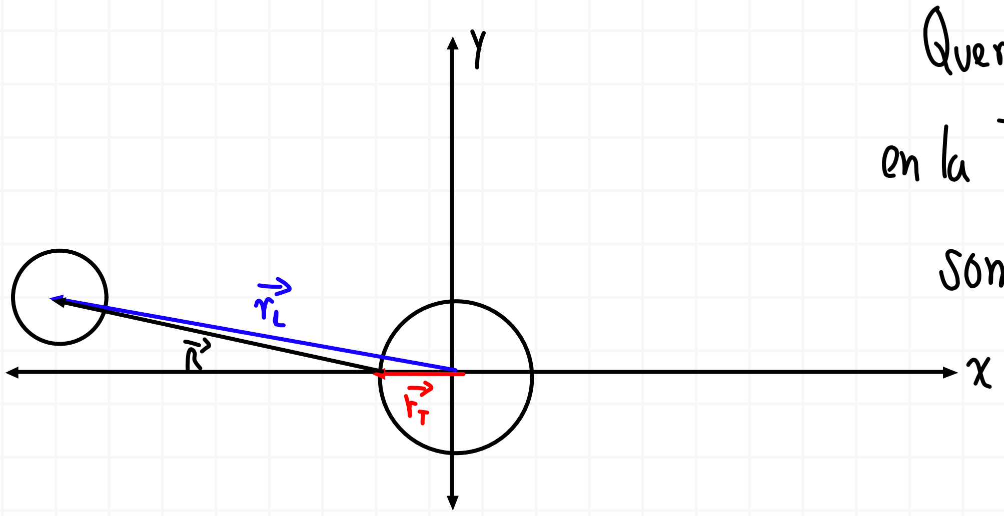


Sol.

Considere el sistema Tierra-Luna, con origen en el centro de la Tierra. Para un punto sobre la superficie de la Tierra, su vector posición $\vec{r_p}(t)$ será:

$$\vec{r_p}(t) = R_T\, \hat{e_r}, \quad \text{con } \theta_T(t) = \frac{2\pi}{T_T} \cdot t$$

donde T_T es el periodo de la Tierra.



Queremos conocer, siendo nosotros un observador en la Tierra, la velocidad a la que se mueve la sombra de la Luna en un eclipse total. Como la distancia de la Tierra al Sol es muy grande, podemos considerar que los rayos de Sol llegan todos paralelos a la Tierra. Si estamos situados exactamente en el ecuador al medio día, entonces, con la luna estando exactamente sobre nosotros, su velocidad será la misma que la de su sombra (por un corto periodo), la velocidad de la Luna se determina con su vector de posición $\vec{r_L}(t)$:

$$\vec{r_L}(t) = R_L\,\hat{e}_r, \quad \theta_L(t) = \frac{2\pi}{T_L}t$$

Con T_L el periodo de la Luna. Para obtener la velocidad de la sombra respecto a nosotros, basta con encontrar la de nosotros con respecto a la Luna, cuya relación es:

$$\vec{r_T} + \vec{R} = \vec{r_L}$$
$$\Rightarrow \vec{R} = \vec{r_L} - \vec{r_T}$$
$$\Rightarrow \vec{v} = \vec{v_L} - \vec{v_T}$$

Con $\vec{v_L}(t) = R_L \frac{2\pi}{T_L}\hat{e}_\theta$ y $\vec{v_T}(t) = R_T \frac{2\pi}{T_T}\hat{e}_\theta$, así:

$$\vec{v} = 2\pi\left(\frac{R_L}{T_L} - \frac{R_T}{T_T}\right)\hat{e}_\theta$$
$$= 0.52\ \frac{Km}{s}\,\hat{e}_\theta$$
$$\Rightarrow \|\vec{v}\| = 0.52\ \frac{Km}{s}$$
$$\therefore \|\vec{v}\| = 0.52\ \frac{Km}{s}$$

$\square$

4. Una partícula se mueve en una trayectoria parabólica $y = cx^2$ con una rapidez constante v_0. Encuentre expresiones para la velocidad $\boldsymbol{v}$ y aceleración $\boldsymbol{a}$ de la partícula cuando se encuentra en la posición (x, y).

R. $\boldsymbol{v} = \frac{v_0}{\sqrt{1+4c^2x^2}}(\hat{\imath} + 2cx\hat{\jmath})$ $\quad \boldsymbol{a} = \frac{2cv_0^2}{(1+4c^2x^2)^2}(-2cx\hat{\imath} + \hat{\jmath})$

Sol.

Con la trayectoria $y = cx^2$ la trayectoria de la partícula, parametrizando con un parámetro x:

$$\vec{r}(x) = (x, cx^2)$$

en coordenadas rectangulares, la velocidad es:

$$\vec{r}(x) = (\dot{x}, 2cx\dot{x})$$

Conocemos que $\|\vec{v}(x)\| = v_0$, $\forall x \geq 0$. Por tanto:

$$\sqrt{\dot{x}^2 + 4c^2x^2\dot{x}^2} = v_0$$

$$\Rightarrow |\dot{x}| = \frac{v_0}{\sqrt{1+4c^2x^2}} \Rightarrow \dot{x} = \frac{v_0}{\sqrt{1+4c^2x^2}}$$

Por lo tanto:

$$\vec{v}(x) = \frac{v_0}{\sqrt{1+4c^2x^2}}(1, 2cx)$$

y:

$$\vec{a} = (\ddot{x}, 2c\dot{x}^2 + 2cx\ddot{x})$$

Con

$$\ddot{x} = \frac{-v_0}{2(1+4c^2x^2)^{3/2}} \cdot 8c^2x\dot{x} = -\frac{4v_0^2c^2x}{(1+4c^2x^2)^2}$$

entonces:

$$\Rightarrow \vec{a} = \left(-\frac{4v_0^2c^2x}{(1+4c^2x^2)^2}, \frac{2cv_0^2}{1+4c^2x^2} - \frac{8v_0^2c^3x^2}{(1+4c^2x^2)^2}\right)$$

$$= \frac{2cv_0^2}{(1+4c^2x^2)^2}(-2cx, 1 + 4cx^2 - 4cx^2)$$

$$= \frac{2cv_0^2}{(1+4c^2x^2)^2}(-2cx, 1)$$

$$\therefore \vec{v} = \frac{v_0}{\sqrt{1+4c^2x^2}}(1, 2cx) \text{ y } \vec{a} = \frac{2cv_0^2}{(1+4c^2x^2)^2}(-2cx, 1) \,//$$

5. Una partícula se mueve en una espiral $r = Ae^{k\theta}$ de modo que su rapidez se mantiene constante e igual a v_0. Determine $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{a}$ en función de r y θ. Demuestre que en todo instante la aceleración es perpendicular a la velocidad. Encuentre θ y $\dot{\theta}$ como función del tiempo.

R. $\boldsymbol{v} = \frac{v_0}{\sqrt{1+k^2}}(k\hat{r} + \hat{\theta})$ $\boldsymbol{a} = \frac{v_0^2}{r(1+k^2)}(-\hat{r} + k\hat{\theta})$

$$\theta(t) = \frac{1}{k} ln\left(e^{k\theta_o} + \frac{kv_0t}{A\sqrt{1+k^2}}\right) \quad \dot{\theta}(t) = \frac{v_0}{Ae^{k\theta_o}\sqrt{1+k^2} + kv_0t}$$

Sol.

En coordenadas polares, $\vec{r}$ está dado como:

$$\vec{r}(t) = r\hat{e_r}$$
$$= Ae^{K\theta}\hat{e_r}$$

Con θ variando en t, entonces $\vec{v}(t)$ sería:

$$\vec{v}(t) = \dot{r}\hat{e_r} + r\dot{\theta}\hat{e_\theta}$$
$$= AKe^{K\theta}\cdot\dot{\theta}\hat{e_r} + r\dot{\theta}\hat{e_\theta}$$
$$= \dot{\theta}\left(AKe^{K\theta}\hat{e_r} + Ae^{K\theta}\hat{e_\theta}\right)$$

Como $\|\vec{v}(t)\| = v_0$, $\forall t \geq 0$, entonces:

$$\dot{\theta}Ae^{K\theta}\sqrt{1+K^2} = V_0$$
$$\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{V_0}{Ae^{K\theta}\sqrt{1+K^2}} \quad \ldots \quad (1)$$

por lo tanto:

$$\vec{v}(t) = \frac{V_0}{\sqrt{1+K^2}}(K\hat{e_r} + \hat{e_\theta})$$

y, para la aceleración, como $\dot{\hat{e_r}} = \dot{\theta}\hat{e_\theta}$ y $\dot{\hat{e_\theta}} = -\dot{\theta}\hat{e_r}$, entonces:

$$\vec{a}(t) = \frac{V_0}{\sqrt{1+K^2}}\left(-\dot{\theta}\hat{e_r} + K\dot{\theta}\hat{e_\theta}\right)$$
$$= \frac{V_0^2}{Ae^{K\theta}(1+K^2)}\left(-\hat{e_r} + K\hat{e_\theta}\right)$$

Resolvamos la ecuación diferencial 1):

$$\dot{\theta} = \frac{V_0}{A\sqrt{1+K^2}}e^{-K\theta}$$
$$\int_{\theta_0}^{\theta}\dot{\theta}e^{K\theta}d\theta = \int_0^t \frac{V_0}{A\sqrt{1+K^2}}dt$$
$$\Rightarrow \frac{1}{K}\left(e^{K\theta} - e^{K\theta_0}\right) = \frac{V_0 t}{A\sqrt{1+K^2}}$$

$$\Rightarrow e^{K\theta(t)} = e^{K\theta_0} + \frac{K v_0 t}{A\sqrt{1+K^2}}$$

$$\Rightarrow \theta(t) = \frac{1}{K}\ln\left(e^{K\theta_0} + \frac{K v_0 t}{A\sqrt{1+K^2}}\right)$$

y $\dot{\theta}(t)$ es:

$$\dot{\theta}(t) = \frac{1}{K}\cdot\frac{1}{e^{K\theta_0} + \frac{K v_0 t}{A\sqrt{1+K^2}}}\cdot\frac{K v_0}{A\sqrt{1+K^2}}$$

$$= \frac{1}{K}\,\frac{A\sqrt{1+K^2}}{Ae^{K\theta_0}\sqrt{1+K^2}+K v_0 t}\cdot\frac{K v_0}{A\sqrt{1+K^2}}$$

$$= \frac{v_0}{Ae^{K\theta_0}\sqrt{1+K^2}+K v_0 t}$$

$\vec{v}(t) = \frac{v_0}{\sqrt{1+K^2}}\left(K\hat{e}_r + \hat{e}_\theta\right)$, $\vec{a} = \frac{v_0^2}{Ae^{K\theta}(1+K^2)}\left(-\hat{e}_r + K\hat{e}_\theta\right)$, $\theta(t) = \frac{1}{K}\ln\left(e^{K\theta_0} + \frac{K v_0 t}{A\sqrt{1+K^2}}\right)$ y

$$\dot{\theta}(t) = \frac{v_0}{Ae^{K\theta_0}\sqrt{1+K^2}+K v_0 t} \quad //$$

6. Calcule la velocidad y aceleración en coordenadas cilíndricas.

R. $\boldsymbol{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\varphi}\hat{\varphi} + \dot{z}\hat{k}$ $\qquad$ $\boldsymbol{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\hat{\varphi} + \ddot{z}\hat{k}$

Sol.

Considere el vector posición $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$, en coordenadas rectangulares.

Pasando a polares:

$$\vec{r} = r\cos\theta\,\hat{\imath} + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\jmath} + z\hat{k}$$

Los vectores $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\theta$ y $\hat{e}_z$ serán:

$$\hat{e}_r = \frac{\partial\vec{r}/\partial r}{\|\partial\vec{r}/\partial r\|} = \frac{\cos\theta\hat{\imath} + \mathrm{sen}\,\theta\hat{\jmath}}{1} = \cos\theta\hat{\imath} + \mathrm{sen}\,\theta\hat{\jmath}$$

$$\hat{e}_\theta = \frac{\partial\vec{r}/\partial\theta}{\|\partial\vec{r}/\partial\theta\|} = \frac{-r\,\mathrm{sen}\,\theta\hat{\imath} + r\cos\theta\hat{\jmath}}{r} = -\mathrm{sen}\,\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{\jmath}$$

$$\hat{e}_z = \hat{k}$$

Con derivadas:

$$\frac{\partial\hat{e}_r}{\partial t} = -\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\hat{\imath} + \dot{\theta}\cos\theta\hat{\jmath} = \dot{\theta}\,\hat{e}_\theta$$

$$\frac{\partial\hat{e}_\theta}{\partial t} = -\dot{\theta}\cos\theta\hat{\imath} - \dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\hat{k} = -\dot{\theta}\,\hat{e}_r$$

$$\frac{\partial\hat{e}_z}{\partial t} = 0$$

De esta forma, si $\vec{r} = r\hat{e}_r + z\hat{e}_z$, entonces:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e_r} + r\frac{\partial \hat{e_r}}{\partial t} + \dot{z}\hat{e_z}$$
$$= \dot{r}\hat{e_r} + r\dot{\theta}\hat{e_\theta} + \dot{z}\hat{e_z}$$

Y:

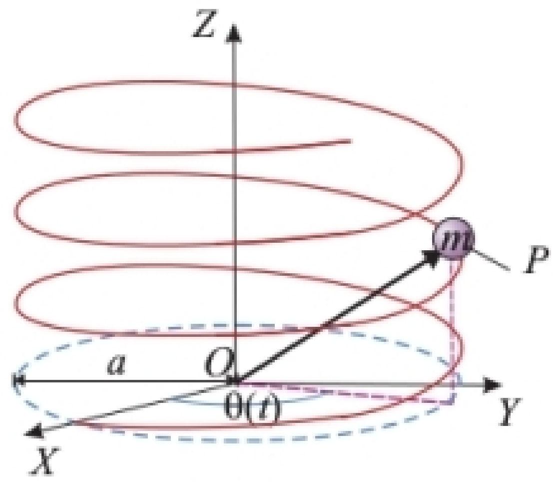
$$\vec{a} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\dot{r}\hat{e_r} + r\dot{\theta}\hat{e_\theta} + \dot{z}\hat{e_z}\right)$$
$$= \ddot{r}\hat{e_r} + \dot{r}\frac{\partial \hat{e_r}}{\partial t} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e_\theta} + r\ddot{\theta}\hat{e_\theta} + r\dot{\theta}\frac{\partial \hat{e_\theta}}{\partial t} + \ddot{z}\hat{e_z}$$
$$= \ddot{r}\hat{e_r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e_\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e_\theta} + r\ddot{\theta}\hat{e_\theta} - r\dot{\theta}^2\hat{e_r} + \ddot{z}\hat{e_z}$$
$$= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{e_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} - r\ddot{\theta}\right)\hat{e_\theta} + \ddot{z}\hat{e_z}$$

$\therefore\ \vec{v} = \dot{r}\hat{e_r} + r\dot{\theta}\hat{e_\theta} + \dot{z}\hat{e_z}$ y $\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{e_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} - r\ddot{\theta}\right)\hat{e_\theta} + \ddot{z}\hat{e_z}$ //

7. Considere una partícula que se mueve sobre una hélice circular de radio a con vector de posición

$$\boldsymbol{r} = a\,cos\theta\,\boldsymbol{i} + a\,sen\theta\,\boldsymbol{j} + a\theta\,tan\alpha\,\boldsymbol{k}$$

Calcule la curvatura y la torsión de la curva.



R. $\kappa = \frac{1}{a}\cos^2\alpha$ $\qquad \lambda = -\frac{1}{a}\,sen\alpha\,cos\alpha$

Sol.

Parametrizando a la curva por el parámetro s (longitud de arco).

$$s(t) := \int_0^t \|\dot{\vec{r}}\|\,dt = \int_0^t \|(-a\,sen\theta,\ a\cos\theta,\ a\tan\alpha)\|\,dt$$
$$= \int_0^t \sqrt{a^2 + a^2\tan^2\alpha}\,dt = a\int_0^t \sqrt{1+\tan^2\alpha} = a\int_0^t \sec\alpha\,dt$$
$$= a\sec\alpha \cdot t = at\sec\alpha$$

Luego $t(s) = \dfrac{s}{a\sec\alpha}$, por tanto:

$$\vec{r}(s) = a\cos\left(\frac{s}{a\sec\alpha}\right)\hat{i} + a\,sen\left(\frac{s}{a\sec\alpha}\right)\hat{j} + \frac{a\tan\alpha\,t}{a\sec\alpha}$$