Ejercicios Dugundji Topology y Problemas Varios

Cristo Daniel Alvarado

11 de junio de 2024

Índice general

Capítulo 1

Espacios Topológicos

1.1. Conceptos Fundamentales

Observación 1.1.1
El símbolo $\aleph(X)$, donde X es un conjunto, denota al cardinal del conjunto (realmente denota a otra cosa que viene a ser lo mismo, pero para usos prácticos tomaremos lo anterior como cierto).

Ejercicio 1.1.1
Pruebe lo siguiente:

1. Sea X un conjunto infinto. Pruebe que $\mathcal{A}_0 = \left\{A \subseteq X \middle| X - A \text{ es finito}\right\} \cup \{\emptyset\}$ es una topología sobre X.

2. Sea $\aleph(X) \geq \aleph_0$. Pruebe que $\mathcal{A}_1 = \left\{A \subseteq X \middle| \aleph(X - A) < \aleph(X)\right\} \cup \{\emptyset\}$ es una topología sobre X.

Demostración:

De (1): Es la topología de los complementos finitos (la prueba de esto se hizo en las notas).

De (2): Veamos que se verifican las tres condiciones:

1. Por definición de $\mathcal{A}_1$ se tiene que $\emptyset \in \mathcal{A}_1$ y, como $\aleph(\emptyset) < \aleph_0$, entonces $\aleph(X - X) < \aleph(X)$, por ende $X \in \mathcal{A}_1$.

2. Sea $\mathcal{E}$ una subfamilia no vacía arbitraria de $\mathcal{A}_1$. Considere a $\bigcup \mathcal{E}$. Como la familia es no vacía, existe $E_0 \in \mathcal{E}$, se tiene así que:

$$\begin{aligned} E_0 \subseteq \bigcup \mathcal{E} &\Rightarrow X - \bigcup \mathcal{E} \subseteq X - E_0 \\ &\Rightarrow \aleph\left(X - \bigcup \mathcal{E}\right) \subseteq \aleph(X - E_0) \end{aligned}$$

   por Cantor-Bernstein. Por lo cual al tenerse que $\bigcup \mathcal{E} \subseteq X$, se sigue que $\bigcup \mathcal{E} \in \mathcal{A}_1$.

3. Sean $A, B \in \mathcal{A}_1$, entonces $\aleph(X - A) < \aleph(X)$ y $\aleph(X - B) < \aleph(X)$. Notemos que

$$X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B)$$

   Entonces $\aleph(X - (A \cap B)) = \aleph((X - A) \cup (X - B)) \leq \aleph(X - A) + \aleph(X - B) < \aleph(X) + \aleph(X) = 2\aleph(X) = \aleph(X)$, pues $\aleph(X) \geq \aleph_0$. Por tanto, al ser $A \cap B \subseteq X$, se sigue que $A \cap B \in \mathcal{A}_1$.

Por las tres condiciones anteriores, se sigue que $\mathcal{A}_1$ es una topología sobre X. ■

Ejercicio 1.1.2
¿Cuántas topologías distintas puede tener un conjunto de tres elemento? ¿Cuál es su orden parcial?

Solución:
Considere $X = \{a, b, c\}$. De todas las topologías que puede tener, deben de estar al menos la topología discreta y la indiscreta, formada por los conjuntos:

$$\begin{aligned}\tau_D &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b, c\}\} = \mathcal{P}(\{a, b, c\}) \\ \tau_I &= \{\emptyset, \{a, b, c\}\}\end{aligned}$$

Ahora, las otras que se pueden tener son aquellas que solo contienen a uno de los elementos, es decir las siguientes:

$$\begin{aligned}\tau_a &= \{\emptyset, \{a\}, \{a, b, c\}\} \\ \tau_b &= \{\emptyset, \{b\}, \{a, b, c\}\} \\ \tau_c &= \{\emptyset, \{c\}, \{a, b, c\}\}\end{aligned}$$

y, también aquellas que contengan a un par de elementos, pero de esta forma: $\{a, b\}$, que serían las siguientes:

$$\begin{aligned}\tau_{a,b} &= \{\emptyset, \{a, b\}, \{a, b, c\}\} \\ \tau_{b,c} &= \{\emptyset, \{b, c\}, \{a, b, c\}\} \\ \tau_{c,a} &= \{\emptyset, \{c, a\}, \{a, b, c\}\}\end{aligned}$$

(en esta se verifica casi de forma inmediata que es una topología sobre X). Ahora, se deben considerar aquellas en las que se tiene más de un elemento no trivial (cuando menciono la palabra trivial, me refiero a que no sea alguno de $\emptyset$ o $X = \{a, b, c\}$). Por ejemplo, consideremos a $\{a, b\}$ un elemento no trivial, y sea τ una topología sobre X que contiene a este elemento. Se tienen seis casos:

1. $a \in \tau$, entonces al ser cerrado bajo uniones e intersecciones se tiene que (al menos) τ debe ser de la forma:
$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$
2. $\{b\} \in \tau$, como con el caso anterior, se tendría que (al menos) τ debe ser de la forma:
$$\tau = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$
Ahora, si $\{a\} \in \tau$, entonces (al menos) τ debe ser de la forma:
$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$
3. $\{c\} \in \tau$, se tiene entonces que una topología sobre X (al menos), debe ser:
$$\tau = \{\emptyset, \{c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$
4. $\{b, c\} \in \tau$, se tiene entonces que τ debe ser de la forma (al menos):
$$\tau = \{\emptyset, \{b\}, \{b, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$

Son un vergo, nmms. $\square$

Ejercicio 1.1.3
Sean τ_X y τ_Y dos topologías en X y Y, respectivamente. ¿Es

$$\tau = \left\{A \times B \middle| A \in \tau_X, B \in \tau_Y\right\}$$

una topología en $X \times Y$?

Solución:
Veamos si se cumplen las tres condiciones para que τ sea una topología sobre X.

1. Es claro que $\emptyset, X \times Y \in \tau$, pues $\emptyset \in \tau_X, \tau_Y$ y, $X \in \tau_X$ y $Y \in \tau_Y$.
2. Sea $\mathcal{C}$ una subfamilia no vacía de τ. Entonces, cada elemento de $\mathcal{C} = \left\{C_\alpha \middle| \alpha \in I\right\}$ es de la forma:

$$C_\alpha = A_\alpha \times B_\alpha$$

donde $A_\alpha \in \tau_X$ y $B_\alpha \in \tau_Y$, para todo $\alpha \in I$. Luego:

$$\bigcup_{\alpha\in I} C_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \times B_\alpha$$

Veamos que en general no es cierto que $\bigcup_{\alpha\in I} C_\alpha \in \tau$. En efecto, tomemos $X = Y = \mathbb{R}$ (con la topología usual) y como conjuntos de la familia a: $C_1 = (0, 1) \times (0, 1)$, y $C_2 = (1, 2) \times (1, 2)$. Se tiene que:

$$C_1 \cup C_2 \notin \tau$$

ya que, en caso contrario se tendría que $C_1 \cup C_2 = A \times B$, con $A, B \subseteq \mathbb{R}$ abiertos con la topología usual.

Entonces, en particular los elementos $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) \in C_1 \cup C_2$, por lo cual los elementos $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) \in C_1 \cup C_2\#_c$, por la forma en que se tomaron C_1 y C_2. Por lo cual, $C_1 \cup C_2$ no puede expresarse como el producto cartesiano de dos abiertos.

3. Sean $C, D \in \tau$, es decir que $C = A_1 \times B_1$ y $D = A_2 \times B_2$, donde $A_i \in \tau_X$ y $B_i \in \tau_Y$ para $i \in \{1, 2\}$. Entonces:

$$\begin{aligned} C \cap B &= (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) \\ &= (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \end{aligned}$$

donde $A_1 \cap A_2 \in \tau_X$ y $B_1 \cap B_2 \in \tau_Y$, por ende $C \cap B \in \tau$.

Por el inciso (2), se tiene que τ (al menos en un caso particular) no es una topología sobre $X \times Y$. $\square$

Recordemos la definición de un preorden y orden parcial:

Definición 1.1.1
Una relación binaria R en un conjunto A es llamada un **preorden** si es reflexiva y transitiva, esto es:

1. $\forall a \in A, aRa$.
2. $(aRb) \vee (bRc) \Rightarrow aRc$.

denotamos (en general) al preorden por $\prec$.

Definición 1.1.2
Sea $(A, \prec)$ un conjunto preordenado.

1. $m \in A$ es llamado **elemento maximal** en A si para todo $a \in A$ tal que $m \prec a \Rightarrow a \prec m$.
2. Un elemento $a_0 \in A$ es llamado **cota superior de un subconjunto** $B \subseteq A$ si para todo $b \in B$, $b \prec a_0$.
3. Un subconjunto $B \subseteq A$ es llamado una **cadena** si cualesquiera dos elementos de B están relacionados, es decir que $a, b \in B$ implica que $a \prec b$ o $b \prec a$.

Definición 1.1.3
Sea A un conjunto preordenado. Un **orden parcial** es un preorden en A junto con la propiedad adicional:

$$(a \prec b) \wedge (b \prec a) \Rightarrow (a = b)$$

esta propiedad es llamada antisimetría. Un conjunto A adjutandole además un orden parcial es llamado un **conjunto parcialmente ordenado**. Un conjunto parcialente ordenado que es también una cadena es llamado un **conjunto totalmente ordenado**.

Ejercicio 1.1.4
Sea X un conjunto parcialmente ordenado. Defina $U \subseteq X$ abierto si y sólo si satisface la condición: $(x \in U) \wedge (y \prec x) \Rightarrow y \in U$. Pruebe que la familia

$$\mathcal{A} = \left\{ U \subseteq X \middle| U \text{ es abierto} \right\}$$

es una topología sobre X.

Demostración:
Se deben verificar que se cumplen las tres condiciones.

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$, pues por vacuidad se cumple que $\emptyset$ satisface la condición. Ahora, sea $x \in X$ y $y \prec x$, entonces $y \in X$ (pues es dónde se define el preorden). Por tanto, $X \in \mathcal{A}$.
2. Sea $\mathcal{B}$ una familia no vacía de subconjuntos de $\mathcal{A}$. Si $x \in \bigcup \mathcal{B}$, entonces existe $B_0 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_0$.

   Ahora, si $y \in X$ es tal que $y \prec x$, como $x \in B_0$, por ser B_0 abierto se tiene que $y \in B_0 \subseteq \bigcup \mathcal{B}$. Por lo cual $\bigcup \mathcal{B}$ es abierto.
3. Sean $U, V \in \mathcal{A}$, si $U \cap V = \emptyset$ es claro que $U \cap V \in \mathcal{A}$. Suponga que la intersección es no vacía y sean $x \in U \cap V$ y $y \in X$ tal que $y \prec x$. En particular $(x \in U) \wedge (y \prec x)$ y $(x \in V) \wedge (y \prec x)$, por ende $y \in U \cap V$, es decir que $U \cap V \in \mathcal{A}$.

Por los incisos anteriores, se tiene que $\mathcal{A}$ es una topología sobre X. ■

Ejercicio 1.1.5
En $\mathbb{Z}^+$ defina $U \subseteq \mathbb{Z}^+$ que sea abierto si satisface la condición $n \in U \Rightarrow$ cada divisor de n pertenece a U. Pruebe que esta es una topología en $\mathbb{Z}^+$ y que no es la topología discreta.

Demostración:

Llamemos τ a la familia de todos los conjuntos abiertos en $\mathbb{Z}^+$. Veamos que para τ se cumplen las tres condiciones:

1. $\emptyset \in \tau$, esto es cierto por vacuidad. Ahora si $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces todos sus divisores están en $\mathbb{Z}^+$ (divisores positivos), por lo cual $\mathbb{Z}^+ \in \tau$.

2. Sea $\mathcal{A}$ una familia no vacía de elementos de τ, y sea $n \in \bigcap \mathcal{A}$, entonces existe A_0 tal que $n \in A_0$, pero A_0 es abierto, por lo cual contiene a todos los divisores de n. Como $A \subseteq \bigcup \mathcal{A}$ entonces $\bigcup \mathcal{A}$ contiene a todos los divisores de n, luego $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$.

3. Sean $A, B \in \tau$ tales que $A \cap B \neq \emptyset$. Si $n \in A \cap B$ entonces $n \in A$ y $n \in B$, como A y B son abiertos, entonces estos dos conjuntos cumplen que cada divisor de n pertenece a A y B, en particular cada divisor de n pertenece a $A \cap B$. Por tanto, $A \cap B \in \tau$.

Por los tres incisos anteriores, se sigue que τ es una topología sobre $\mathbb{Z}^+$. ■

Ejercicio 1.1.6
Pruebe lo siguiente: τ es la topología discreta en X si y sólo si todo punto de X es un conjunto abierto (hablando de los conjuntos unipuntuales).

Demostración:

Se probará la doble implicación: $\Rightarrow$): Suponga que τ es la topología discreta, entonces $\tau = \mathcal{P}(X)$, en particular $\{x\} \in \mathcal{P}(X)$, para cada $x \in X$, esto es $\{x\} \in \tau$.

$\Leftarrow$): Suponga que todo conjunto unipuntual de X está en τ, y sea $A \in \mathcal{P}(X)$, entonces:

$$A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$$

donde $\{a\}$ es abierto y, por ende A es abierto al ser una unión arbitraria de abiertos. Por tanto, $A \in \tau$, Por ende $\mathcal{P}(X) \subseteq \tau$, pero siempre se tiene que $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$, luego $\tau = \mathcal{P}(X) = \tau_D$. ■

1.3. Creación de topologías dados conjuntos

Mis ejercicios de la sección: 5 y 9.

Ejercicio 1.3.1

1.4. Conceptos Elementales

Mis ejercicios de la sección: 8, 10, 14, 18, 22.

Ejercicio 1.4.4
Sea (X,τ) un espacio topológico. Pruebe que G es abierto en X, si y sólo si $\overline{G\cap\overline{A}}=\overline{G\cap A}$ para todo $A\subseteq X$.

Demostración:
Se probará la doble implicación.

$\Rightarrow$): Suponga que G es abierto, Como $A\subseteq\overline{A}$ para todo $A\in X$, se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} G\cap A &\subseteq G\cap\overline{A} \\ \Rightarrow \overline{G\cap A} &\subseteq \overline{G\cap\overline{A}} \end{aligned}$$

por lo cual basta probar la otra contención. Si $x\in\overline{G\cap\overline{A}}$, entonces para toda vecindad U de x se cumple que $U\cap(G\cap\overline{A})\neq\emptyset$, sea $y\in U\cap(G\cap\overline{A})$ entonces, como el conjunto $U\cap G$ es una vecindad de y, se tiene que $U\cap(G\cap A)\neq\emptyset$, es decir que existe un elemento $z\in U$ tal que $z\in G\cap A$, pero U originalmente era una vecindad de x, luego $x\in\overline{G\cap A}$, lo cual prueba la otra contención. ∎

Ejercicio 1.4.5
Pruebe que si (X,τ) es un espacio topológico, entonces si $A\subseteq X$ tal que $A'=\emptyset$ implica que A es cerrado.

Demostración:
Sea $A\subseteq X$ tal que $A'=0$. Como

$$\overline{A}=A\cup A'=A$$

se tiene entonces que A coincide con su cerradura, la cual es cerrada. Por tanto, A es cerrado. ∎

Ejercicio 1.4.6
Sea $A=\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\middle| m,n\in\mathbb{N}\right\}\subseteq\mathbb{E}^1$. Pruebe que $A'=\left\{\frac{1}{n}\middle| n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{0\}$ y que $A''=\{0\}$.

Demostración:

∎

Ejercicio 1.4.7
Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de subconjuntos de X. Suponga que $\bigcup_{\alpha\in I}\overline{A_\alpha}$ es cerrado. Pruebe que $\bigcup_{\alpha\in I}\overline{A_\alpha}=\overline{\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha}$.

Demostración:
Ya se sabe que

$$\bigcup_{\alpha\in I}\overline{A_\alpha}\subseteq\overline{\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha}$$

Hay que ver la otra contención. Observemos que $\bigcup_{\alpha\in I}\overline{A_\alpha}$ es un cerrado que contiene a $\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$, luego, por minimalidad de la cerradura, debe suceder que:

$$\overline{\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha}\subseteq\bigcup_{\alpha\in I}\overline{A_\alpha}$$

pues, la cerradura de un conjunto debe estar contenida en cualquier cerrado que contenga al conjnunto. Luego, por las dos contenciones, se sigue que:

$$\bigcup_{\alpha\in I}\overline{A_\alpha}=\overline{\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha}$$

■

Ejercicio 1.4.8
Pruebe que $\mathrm{Fr}\,(A)=\emptyset$ si y sólo si A es abierto y cerrado.

Demostración:
$\Rightarrow)$: Suponga que $\mathrm{Fr}\,(A)=\emptyset$. Se tiene entonces que:

$$\emptyset=\mathrm{Fr}\,(A)=\overline{A}\cap\overline{X-A}$$

Afirmamos que $A=\overline{A}$ y que $X-A=\overline{X-A}$. En efecto, ya se sabe que $A\subseteq\overline{A}$.

Suponga que existe $x\in\overline{A}$ tal que $x\notin A$, como $X=A\cup(X-A)$, se sigue que $x\in X-A\subseteq\overline{X-A}$, luego $x\in\overline{A}\cap\overline{X-A}\#_c$lo cual contradice la igualdad anterior. Por tanto, $\overline{A}\subseteq A$, se decir que $A=\overline{A}$.

De forma análoga se prueba que $X-A=\overline{X-A}$. Entonces, A es un conjunto cerrado, ya que coincide con su cerradura, y abierto ya que su complemento es cerrado. Por ende, A es abierto y cerrado.

$\Leftarrow)$: Suponga que A es abierto y cerrado, entonces se tiene que $A=\overline{A}$ y $X-A\overline{X-A}$. Por ende:

$$\mathrm{Fr}\,(A)=\overline{A}\cap\overline{X-A}=A\cap(X-A)=\emptyset$$

como se quería demostrar.

■

Ejercicio 1.4.9
Pruebe las siguientes fórmulas:

1. $\mathrm{Fr}\,(\mathrm{Fr}\,(\mathrm{Fr}\,(A)))=\mathrm{Fr}\,(\mathrm{Fr}\,(A))$.
2. $\mathrm{Fr}\left(\mathring{A}\right)\subseteq\mathrm{Fr}\,(A)$.
3. $\overbrace{A-B}^{\circ}\subseteq\mathring{A}-\mathring{B}$.

Demostración:
De (1): Sea $B\subseteq X$. Entonces,

$$\mathrm{Fr}\,(B)=\overline{B}\cap\overline{X-B}$$

por tanto,

$$\begin{aligned}\mathrm{Fr}\,(\mathrm{Fr}\,(B))&=\overline{\overline{B}\cap\overline{X-B}}\cap\overline{X-\overline{B}\cap\overline{X-B}}\\&=(\overline{B}\cap\overline{X-B})\cap\overline{X-\overline{B}\cap\overline{X-B}}\\&=\mathrm{Fr}\,(B)\cap\overline{X-\mathrm{Fr}\,(B)}\end{aligned}$$

por tanto, $\mathrm{Fr}\,(\mathrm{Fr}\,(B))\subseteq\mathrm{Fr}\,(B)$. En particular, para $A\subseteq X$ se sigue que $\mathrm{Fr}\,(\mathrm{Fr}\,(\mathrm{Fr}\,(A)))\subseteq\mathrm{Fr}\,(\mathrm{Fr}\,(A))$ (tomando $B=\mathrm{Fr}\,(A)$).

Ahora, tenemos que:

$$\mathrm{Fr}\left(\mathrm{Fr}\left(\mathrm{Fr}\left(A\right)\right)\right) = \mathrm{Fr}\left(\mathrm{Fr}\left(A\right)\right) \cap \overline{X - \mathrm{Fr}\left(\mathrm{Fr}\left(A\right)\right)}$$

Probaremos la otra contención. Afirmamos que $\mathrm{Fr}\left(\mathrm{Fr}\left(A\right)\right) \subseteq \overline{X - \mathrm{Fr}\left(\mathrm{Fr}\left(A\right)\right)}$. En efecto, si $x \in$

Suponga que $x \in \mathrm{Fr}\left(\mathrm{Fr}\left(A\right)\right)$ es tal que $x \notin \overline{X - \mathrm{Fr}\left(\mathrm{Fr}\left(A\right)\right)}$. Entonces, existe $U \subseteq X$ abierto que contiene a x tal que:

$$U \cap \left(X - \mathrm{Fr}\left(\mathrm{Fr}\left(A\right)\right)\right) = \emptyset$$

por tanto, $U \subseteq \mathrm{Fr}\left(\mathrm{Fr}\left(A\right)\right)$. De esta forma, al ser x arbitrario, se sigue que el conjunto $\mathrm{Fr}\left(\mathrm{Fr}\left(A\right)\right) - \overline{X - \mathrm{Fr}\left(\mathrm{Fr}\left(A\right)\right)}$ es abierto, en particular, $\mathrm{Fr}\left(\mathrm{Fr}\left(A\right)\right) - \overline{X - \mathrm{Fr}\left(\mathrm{Fr}\left(A\right)\right)} \subseteq \overbrace{\mathrm{Fr}\left(\mathrm{Fr}\left(A\right)\right)}^{\circ}$.

De (2): Se tiene que

$$\mathring{A} \subseteq A \subseteq \overline{A}$$

Por tanto,

$$\overline{\mathring{A}} \subseteq \overline{A}$$

Además,

$$\begin{aligned} X - A &\subseteq X - \mathring{A} \\ \Rightarrow \overline{X - A} &\subseteq \overline{X - \mathring{A}} \end{aligned}$$

pero, $X - \mathring{A}$ es cerrado, luego $X - \mathring{A} = \overline{X - \mathring{A}}$. Por ende:

$$\overline{X - A} \subseteq X - \mathring{A}$$

Para probar el resultado, basta con probar que $\overline{X - A} = X - \mathring{A}$. Si $x \in X - \mathring{A}$ entonces, $x \notin \mathring{A}$ por tanto, para todo abierto $U \subseteq X$ tal que $x \in U$, se tiene que:

$$U \not\subseteq A$$

por tanto, $U \cap (X - A) \neq \emptyset$. Se sigue entonces que $x \in \overline{X - A}$, de donde se sigue que $X - \mathring{A} \subseteq \overline{X - A}$. Por la contención anterior, se tiene que $\overline{X - A} = X - \mathring{A}$. Así:

$$\begin{aligned} \mathrm{Fr}\left(\mathring{A}\right) &= \overline{\mathring{A}} \cap \overline{X - \mathring{A}} \\ &= \overline{\mathring{A}} \cap (X - \mathring{A}) \\ &= \overline{\mathring{A}} \cap \overline{X - A} \\ &\subseteq \overline{A} \cap \overline{X - A} \\ &= \mathrm{Fr}\left(A\right) \\ \Rightarrow \mathrm{Fr}\left(\mathring{A}\right) &\subseteq \mathrm{Fr}\left(A\right) \end{aligned}$$

De (3):

■

Ejercicio 1.4.10

Suponga que $\mathrm{Fr}\left(A\right) \cap \mathrm{Fr}\left(B\right) = \emptyset$. Pruebe que $\overbrace{A \cup B}^{\circ} = \mathring{A} \cup \mathring{B}$ y que $\mathrm{Fr}\left(A \cap B\right) = \left[\overline{A} \cap \mathrm{Fr}\left(B\right)\right] \cup \left[\mathrm{Fr}\left(A\right) \cap \overline{B}\right]$.

Demostración:

Ya se sabe que $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subseteq \overbrace{A \cup B}^{\circ}$. Probemos la otra contención.

Suponga que existe $x \in \overbrace{A \cup B}^{\circ}$ tal que $x \notin \mathring{A} \cup \mathring{B}$, es decir que $x \in X - (\mathring{A} \cup \mathring{B}) = (X - \mathring{A}) \cap (X - \mathring{B})$.

Por tanto, para todo abierto $U \subseteq X$ tal que $x \in U$ se tiene que $U \nsubseteq A$ y $U \nsubseteq B$. Se tienen tres casos:

1. $x \in A \cap B$: En tal caso, se sigue que $x \in \mathrm{Fr}\,(A) \cap \mathrm{Fr}\,(B)$, ya que los conjuntos:

$$U \cap A, U \cap (X - A), U \cap B, U \cap (X - B) \neq \emptyset$$

son no vacíos, para todo U abierto que contiene a x, pero esto es una contradicción, ya que $\mathrm{Fr}\,(A) \cap \mathrm{Fr}\,(B) = \emptyset \#_c$.

2. $x \in A - B$. Como $x \in \overbrace{A \cup B}^{\circ}$, existe un abierto $V \subseteq X$ que contiene a x tal que $V \subseteq A \cup B$. Sea $U \subseteq X$ abierto que contiene a x. Se tiene que:

$$U \cap A, U \cap (X - B) \neq \emptyset$$

pues, x está en ambos conjuntos. Ahora, como $U \nsubseteq A$, entonces la intersección $U \cap (X - A) \neq \emptyset$, luego $x \in \mathrm{Fr}\,(A)$.

Considere al abierto $U_0 = U \cap V$. Este es un abierto que contiene a x tal que $U_0 \subseteq A \cup B$ (pues, $V \subseteq A \cup B$). Pero, como $U_0 \nsubseteq A$, debe tenerse que existe $y \in U_0$ tal que $y \in B$. Luego, la intersección:

$$U_0 \cap B \neq \emptyset \Rightarrow U \cap B \neq \emptyset$$

por ende, $x \in \mathrm{Fr}\,(B)$, de donde se sigue que $x \in \mathrm{Fr}\,(A) \cap \mathrm{Fr}\,(B)$, pero esto es una contradicción, ya que $\mathrm{Fr}\,(A) \cap \mathrm{Fr}\,(B) = \emptyset \#_c$.

3. $x \in B - A$. De forma similar al caso anterior, se llega a que $x \in \mathrm{Fr}\,(A) \cap \mathrm{Fr}\,(B) \#_c$.

los tres incisos llevan a que $x \in \mathrm{Fr}\,(A) \cap \mathrm{Fr}\,(B) \#_c$. Por tanto, $x \in \mathring{A} \cup \mathring{B}$.

Para la segunda parte, observemos que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Fr}\,(A \cap B) &= \overline{A \cap B} \cap \overline{X - A \cap B} \\
&= \overline{A \cap B} \cap \overline{(X - A) \cup (X - B)} \\
&= \overline{A \cap B} \cap (\overline{(X - A)} \cup \overline{X - B}) \\
&= (\overline{A \cap B} \cap \overline{(X - A)}) \cup (\overline{A \cap B} \cap \overline{X - B})
\end{aligned}$$

para probar el resultado, basta con probar que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. Para ello, probaremos que si $C \subseteq X$, entonces:

$$X - \overline{C} = \overbrace{X - C}^{\circ}$$

En efecto, como $X - \overline{C} \subseteq X - C$ siendo el primer conjunto abierto, se sigue que $X - \overline{C} \subseteq \overbrace{X - C}^{\circ}$. Ahora, el conjunto $X - \overbrace{X - C}^{\circ}$ es un cerrado que contiene a C. En efecto, es cerrado por ser el complemento de un abierto.

Ahora, si $x \in C$, entonces $x \in X - (X - C)$. Como $\overbrace{X - C}^{\circ} \subseteq X - C$, se sigue que $x \in X - \overbrace{X - C}^{\circ}$. Por tanto, $C \subseteq X - \overbrace{X - C}^{\circ}$. Luego, por minimalidad de la cerradura, se sigue que $\overline{C} \subseteq X - \overbrace{X - C}^{\circ}$, es decir que $\overbrace{X - C}^{\circ} = X - (X - \overbrace{X - C}^{\circ}) \subseteq X - \overline{C}$.

Se tienen las contenciones $X - \overline{C} \subseteq \overbrace{X - C}^{\circ}$ y $\overbrace{X - C}^{\circ} \subseteq X - \overline{C}$, por tanto, se sigue que $X - \overline{C} = \overbrace{X - C}^{\circ}$.

Con esto probado, tomemos $C = A \cap B$, entonces:

$$\begin{aligned}
X - \overline{A \cap B} &= \overbrace{X - A \cap B}^{\circ} \\
&= \overbrace{(X - A) \cup (X - B)}^{\circ} \\
&= \overbrace{X - A}^{\circ} \cup \overbrace{X - B}^{\circ} \\
&= (X - \overline{A}) \cup (X - \overline{B}) \\
&= X - \overline{A} \cap \overline{B} \\
\Rightarrow \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cap \overline{B}
\end{aligned}$$

donde, el paso de la segunda a la tercera igualdad se da ya que $\mathrm{Fr}\,(X - A) \cap \mathrm{Fr}\,(X - B) = \mathrm{Fr}\,(A) \cap \mathrm{Fr}\,(B) = \emptyset$. Luego, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Fr}\,(A \cap B) &= (\overline{A \cap B} \cap \overline{(X - A)}) \cup (\overline{A \cap B} \cap \overline{X - B}) \\
&= (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{(X - A)}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{X - B}) \\
&= ([\overline{A} \cap \overline{X - A}] \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap [\overline{B} \cap \overline{X - B}]) \\
&= (\mathrm{Fr}\,(A) \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \mathrm{Fr}\,(B)) \\
&= \left[\overline{A} \cap \mathrm{Fr}\,(B)\right] \cup \left[\mathrm{Fr}\,(A) \cap \overline{B}\right]
\end{aligned}$$

lo cual prueba el resultado. ■

Ejercicio 1.4.11
¿Para qué espacios topológicos (X, τ) el único conjunto denso es X?

Demostración:
Sea (X, τ) un espacio topológico tal que X es es el único conjunto denso en sí mismo. Si $x \in X$, entonces el conjunto $X - \{x\}$ no es denso en X, por lo cual:

$$\overline{X - \{x\}} = X - \{x\}$$

luego, $X - \{x\}$ es cerrado en X, es decir que $\{x\}$ es abierto. Como $x \in X$ fue arbitrario, se sigue que $\{x\}$ es abierto, para todo $x \in X$. Por ende, $\tau = \tau_D$ (en caso que de X no sea vacío).

Por tanto, los únicos espacios en los que ocurre esto, son aquellos en los que la topología es la discreta. ■

Ejercicio 1.4.12
Sea (X, τ) espacio topológico y $E, G \subseteq X$ abiertos densos en X. Pruebe que $E \cap G$ es denso en X.

Demostración:
Sea $U \subseteq X$ abierto. Para probar el resultado, debemos probar que $U \cap (E \cap G) \neq \emptyset$. Como $U \cap E$ es abierto, entonces $(U \cap E) \cap G = U \cap (E \cap G) \neq \emptyset$.

En este caso, no es necesario que los dos sean abiertos a la vez, basta con que uno de ellos lo sea.
■

Ejercicio 1.4.13
Sean (X,τ) un espacio topológico y $D\subseteq X$ un conjunto denso en X. Pruebe que $\overline{D\cap G}=\overline{G}$, para todo $G\subseteq X$ abierto.

Demostración:
Sea $G\subseteq X$ abierto. Ya se tiene que:

$$\overline{D\cap G}\subseteq\overline{G}$$

pues, $D\cap G\subseteq G$. Se ahora $x\in\overline{G}$, entonces si $U\subseteq X$ es abierto, se tiene que $U\cap G\neq\emptyset$. Como D es denso en X, entonces $U\cap(D\cap G)=U\cap(G\cap D)=(U\cap G)\cap D\neq\emptyset$, es decir que $x\in\overline{G\cap D}$.

De aquí se sigue la otra contención. Por las dos, se tiene que $\overline{D\cap G}=\overline{G}$. ■

Ejercicio 1.4.14
Sean (X,τ) un espacio topológico y $\mathcal{S}$ una sub-base para τ, y $D\subseteq X$ tal que $D\cap S\neq\emptyset$ para todo $S\in\mathcal{S}$ ¿Esto implica que D es denso en X?

Demostración:
Como $\mathcal{S}$ es una sub-base de τ, entonces la colección formada por todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathbb{S}$, forman una base de la topología τ. No necesariamente se tiene que D es denso en X, pues si $B\in\mathcal{B}$ es un básico, entonces existen $S_1,...,S_n\in\mathcal{S}$ tales que:

$$B=\bigcap_{i=1}^{n}S_i$$

Luego, $D\cap S_i$ es no vacío para todo $i\in[\![1,n]\!]$, pero no necesariamente $D\cap\bigcap_{i=1}^{n}S_i\neq\emptyset$.

En efecto, considere el espacio $X=\{a,e,i,o,u\}$ y $\mathcal{S}=\{\{a,e\},\{e,i\}\}$. Se tiene que $\mathcal{S}$ es subbase de de la topología $\tau=\tau(\mathcal{S})=\{X,\{a,e,i\},\{a,e\},\{e,i\},\{e\},\emptyset\}$. En el espacio topológico (X,τ), el conjunto $D=\{a,i\}$ cumple que $D\cap S\neq\emptyset$ para todo $S\in\mathcal{S}$, pero D no es denso en X ya que el abierto $\{e\}$ no contiene puntos de D. ■

Ejercicio 1.4.15

Ejercicio 1.4.16

Ejercicio 1.4.17

Ejercicio 1.4.18
Se define el **exterior de un conjunto** $A\subseteq X$,denotado por $\mathrm{Ext}\,(A)$, como el conjunto $\mathrm{Ext}\,(A)=\overbrace{X-A}^{\circ}$. Pruebe lo siguiente:

1. $\mathrm{Ext}\,(A\cup B)=\mathrm{Ext}\,(A)\cap\mathrm{Ext}\,(B)$.

2. $A\cap\mathrm{Ext}\,(A)=\emptyset$.

3. $X=\mathrm{Ext}\,(\emptyset)$.

4. $\operatorname{Ext}(X - \operatorname{Ext}(A)) = \operatorname{Ext}(A)$.

Demostración:

De (1): Notemos que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ext}(A \cup B) &= \overbrace{X - A \cup B}^{\circ} \\
&= \overbrace{(X - A) \cap (X - B)}^{\circ} \\
&= \overbrace{X - A}^{\circ} \cap \overbrace{X - B}^{\circ} \\
&= \operatorname{Ext}(A) \cap \operatorname{Ext}(B)
\end{aligned}$$

De (2): Sea $A \subseteq X$, se tiene que $\overbrace{X - A}^{\circ} \subseteq X - A$, por tanto, $A \cap \operatorname{Ext}(A) \subseteq A \cap (X - A) = \emptyset$. Luego, $A \cap \operatorname{Ext}(A) = \emptyset$.

De (3): Notemos que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ext}(\emptyset) &= \overbrace{X - \emptyset}^{\circ} \\
&= \mathring{X} \\
&= X
\end{aligned}$$

pues, el conjunto X es abierto.

De (4): Sea $A \subseteq X$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ext}(X - \operatorname{Ext}(A)) &= \overbrace{X - \operatorname{Ext}(A)}^{\circ} \\
&= \overbrace{X - (X - \operatorname{Ext}(A))}^{\circ} \\
&= \overset{\circ}{\operatorname{Ext}}(A) \\
&= \operatorname{Ext}(A)
\end{aligned}$$

pues, $\operatorname{Ext}(A)$ es un conjunto abierto. ∎

Ejercicio 1.4.19

Ejercicio 1.4.20

Ejercicio 1.4.21

Ejercicio 1.4.22
Un conjunto abierto $U \subseteq X$ de un espacio topológico (X, τ) es llamado **abierto regular** si $U = \overline{\mathring{U}}$; un conjunto cerrado $C \subseteq X$ es llamado **cerrado regular**, si $C = \overline{\mathring{C}}$. Pruebe lo siguiente:

1. Si A es cerrado, entonces $\mathring{A}$ es un conjunto abierto regular.
2. Si U es abierto, entonces $\overline{U}$ es un conjunto cerrado regular.
3. El complemento de un conjunto abierto regular (resp. cerrado) es un conjunto cerrado regular (resp. abierto).

4. Si $U, V \subseteq X$ son conjuntos abiertos regulares, entonces $U \subseteq V$ si y sólo si $\overline{U} \subseteq \overline{V}$.
5. Si $A, B \subseteq X$ son conjuntos cerrados regulares, entonces $A \subseteq B$ si y sólo si $\mathring{A} \subseteq \mathring{B}$.
6. Si $U, V \subseteq X$ son abiertos regulares, entonces $U \cap V$ también es abierto regular.
7. Si $A, B \subseteq X$ son cerrados regulares, entonces $A \cup B$ también es cerrado regular.

Demostración:
De (1): Sea $A \subseteq X$ un conjunto cerrado. Hay que probar que $\mathring{A}$ es abierto regular, es decir, que:

$$\mathring{A} = \overset{\circ}{\overline{\mathring{A}}}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} &\mathring{A} \subseteq A \\ \Rightarrow &\overline{\mathring{A}} \subseteq \overline{A} = A \\ \Rightarrow &\overset{\circ}{\overline{\mathring{A}}} \subseteq \mathring{A} \end{aligned}$$

para la otra contención analicemos. $\overline{\mathring{A}}$ es un cerrado para el que se cumple que $\mathring{A} \subseteq \overline{\mathring{A}}$, luego sacando interior de ambos lados, se sigue que:

$$\mathring{A} = \mathring{\mathring{A}} \subseteq \overset{\circ}{\overline{\mathring{A}}}$$

por tanto, de las dos contenciones se sigue que:

$$\mathring{A} = \overset{\circ}{\overline{\mathring{A}}}$$

luego, $\mathring{A}$ es un abierto regular.

De (2): Sea $U \subseteq X$ abierto. Hay que probar que:

$$\overline{U} = \overline{\overset{\circ}{\overline{U}}}$$

En efecto, veamos que:

$$\begin{aligned} &\overset{\circ}{\overline{U}} \subseteq \overline{U} \\ \Rightarrow &\overline{\overset{\circ}{\overline{U}}} \subseteq \overline{\overline{U}} = \overline{U} \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} U &\subseteq \overline{U} \\ \Rightarrow U = \mathring{U} &\subseteq \overset{\circ}{\overline{U}} \\ \Rightarrow \overline{U} &\subseteq \overline{\overset{\circ}{\overline{U}}} \end{aligned}$$

lo cual prueba la otra contención, así $\overline{U} = \overline{\overset{\circ}{\overline{U}}}$. Luego, $\overline{U} = \overline{\overset{\circ}{\overline{U}}}$ por lo cual, $\overline{U}$ es cerrado regular.

De (3): Basta con probar que el complemento de un conjunto abierto regular es un conjunto cerrado regular. Sea $U \subseteq X$ abierto regular, es decir que:

$$U = \overset{\circ}{\overline{U}}$$

Entonces, su complemento $C = X - U$ cumple que:

$$\mathring{C} \subseteq C \Rightarrow \overline{\mathring{C}} \subseteq C$$

Si $x \in C$, entonces $x \in X - U = X - \mathring{\overline{U}}$, luego $x \notin \mathring{\overline{U}}$, por tanto, para todo abierto $V \subseteq X$ que contiene a x se tiene que $V \nsubseteq \overline{U}$, es decir, que existe un $y \in V$ tal que $y \notin \overline{U}$ esto es $y \in X - \overline{U}$.

Pero, $X - \overline{U} = \overbrace{X - U}^{\circ}$ (esto se probó en un ejercicio anterior), es decir que $y \in \mathring{C}$. Por tanto, $V \cap \mathring{C} \neq \emptyset$. Luego, $x \in \overline{\mathring{C}}$.

Así, se tiene la contención $C \subseteq \overline{\mathring{C}}$. Por esta y otra contención, se sigue que $C = \overline{\mathring{C}}$, es decir que $X - U$ es cerrado regular.

De (4): La ida es inmediata. Suponga que $\overline{U} \subseteq \overline{V}$, tomando interiores se sigue que $U = \mathring{\overline{U}} \subseteq \mathring{\overline{V}} = V$, lo cual pruebra el resultado.

De (5): Es análogo a (4).

De (6): Sean $U, V \subseteq X$ abiertos regulares, es decir que: $U = \mathring{\overline{U}}$ y $V = \mathring{\overline{V}}$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} \overbrace{\overline{U \cap V}}^{\circ} &\subseteq \overbrace{\overline{U} \cap \overline{V}}^{\circ} \\ &= \mathring{\overline{U}} \cap \mathring{\overline{V}} \\ &= U \cap V \end{aligned}$$

para ver la otra contención, notemos que

$$\begin{aligned} U \cap V &\subseteq U \cap V \\ \Rightarrow U \cap V &\subseteq \overline{U \cap V} \\ \Rightarrow U \cap V = \overbrace{U \cap V}^{\circ} &\subseteq \overbrace{\overline{U \cap V}}^{\circ} \end{aligned}$$

de las dos contenciones se sigue que $U \cap V = \overbrace{\overline{U \cap V}}^{\circ}$.

De (7): Es análogo a (6). ■

1.5. Creando topologías a partir de operaciones elementales

Ejercicio 1.5.1
Sean X un conjunto, y $A \mapsto u(A)$, $A \mapsto v(A)$ dos operaciones de cerradura, es decir que cumplen que:

1. $u(\emptyset) = \emptyset$.
2. $A \subseteq u(A)$, para todo $A \subseteq X$.
3. $u \circ u(A) = u(A)$, para todo $A \subseteq X$.
4. $u(A \cup B) = u(A) \cup u(B)$, para todos $A, B \subseteq X$.

(por un resultado anterior, la familia $\tau_u = \left\{X - u(A) \middle| A \subseteq X\right\}$ es una topología sobre X. Lo análogo se cumple para v).

Suponga que se cumple que $v \circ u(A)$ es u-cerrado para todo $A \subseteq X$. Pruebe que $A \mapsto v \circ u(A)$ es una operación de cerradura y que $v \circ u(A)$ es de hecho la intersección de todos los conjuntos que contienen a A que son cerrados tanto en v como en u.

Finalmente, muestre que $u \circ v(A) \subseteq v \circ u(A)$.

Demostración:
Probaremos varias cosas:

1. $A \mapsto v \circ u(A)$ es una operación de cerradura. En efecto, hay que verificar que se cumplen varias condiciones:

   I) Se tiene que:

   $$\begin{aligned} v \circ u(\emptyset) &= v(u(\emptyset)) \\ &= v(\emptyset) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

   II) Sea $A \subseteq X$. Se tiene que $A \subseteq u(A)$, luego $v(A) \subseteq v \circ u(A)$, como $A \subseteq v(A)$, entonces se sigue que $A \subseteq v \circ u(A)$.

   III) Sea $A \subseteq X$. Como $v \circ u(A)$ es u-cerrado, entonces $u((v \circ u)(A)) = v \circ u(A)$, aplicando v se sigue que $(v \circ u) \circ (v \circ u)(A) = v \circ (v \circ u)(A) = (v \circ v) \circ u(A) = v \circ u(A)$.

   IV) Sean $A, B \subseteq X$, entonce:

   $$\begin{aligned} v \circ u(A \cup B) &= v(u(A \cup B)) \\ &= v(u(A) \cup u(B)) \\ &= v(u(A)) \cup v(u(B)) \\ &= v \circ u(A) \cup v \circ u(B) \end{aligned}$$

   por los incisos i)-iv) se sigue que $A \mapsto v \circ u(A)$ es una operación de cerradura.

2. Sea $A \subseteq X$. El conjunto $v \circ u(A)$ es v-cerrado y, por hipótesis es u-cerrado.

   Sea

   $$\mathcal{C} = \left\{C \subseteq X \middle| C \text{ es } u\text{-cerrado y } v\text{-cerrado y } A \subseteq C\right\}$$

Tomemos $\widehat{C} = \bigcap \mathcal{C}$. Por la observación anterior, como $A \subseteq v \circ u(A) \in \mathcal{C}$ (por ser operación de cerradura), se tiene que $\widehat{C} \subseteq v \circ u(A)$ ya que $v \circ u(A) \in \mathcal{C}$.

Sea ahora $C \in \mathcal{C}$. Para probar el resultado, hay que ver que $v \circ u(A) \subseteq C$. Como C es u-cerrado, y $A \subseteq C$, entocnes $u(A) \subseteq u(C) = C$. Pero, además C es v-cerrado, por lo cual $v \circ u(A) \subseteq v(C) = C$.

Por tanto, $v \circ u(A) = \widehat{C}$.

3. Sea $A \subseteq X$, entonces $A \subseteq u(A)$ y, por ende $v(A) \subseteq v \circ u(A)$. Como $v \circ u(A)$ es u-cerrado, entonces:

$$u \circ v(A) \subseteq u(v \circ u(A)) = v \circ u(A)$$

como se quería demostrar.

■

Ejercicio 1.5.2
Sean X, Y conjuntos y $\varphi : X \to \mathcal{P}(Y)$ una función. Para $A \subseteq X$, defina:

$$\varphi(A) = \bigcup \left\{ \varphi(x) \middle| x \in A \right\}$$

y, para $B \subseteq Y$, sea $\varphi^{-1}(B) = \{\varphi(x) \subseteq B \text{ y } \varphi(x) \neq \emptyset\}$. Pruebe que $u(A) = \varphi \circ \varphi^{-1}(A)$ satisface lo siguiente:

1. $u(\emptyset) = \emptyset$.
2. $A \subseteq u(A)$, para todo $A \subseteq X$.
3. $u \circ u(A) = u(A)$, para todo $A \subseteq X$.
4. $(A \subseteq B) \Rightarrow (u(A) \subseteq u(B))$, para todo $A, B \subseteq X$.

Demostración:

■

Ejercicio 1.5.3
Sea (X, τ) un espacio topológico, y sea $\tau : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ una función que cumple lo siguiente:

1. $\tau(A, B \cup C) \cup \tau(B, C \cup A) = \tau(A \cup B, C) \cup \tau(A, B)$
2. $\tau(\emptyset, X) = \emptyset$.
3. $\tau(\overline{A}, \overline{X - A}) \subseteq \overline{A}$.
4. $\tau(A, B) \subseteq A \cup B$.

Pruebe que $\tau(A, B) = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.

Demostración:
Veamos que propiedades cumple esta operación. Sean $A, B, C \subseteq X$. Se cumple que:

$$\begin{aligned} \tau(A, A) &\subseteq A \cup A \\ &= A \\ \Rightarrow \tau(A, A) &\subseteq A \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}\tau(\emptyset, B \cup C) \cup \tau(B, C) &= \tau(\emptyset, B \cup C) \cup \tau(B, C \cup \emptyset) \\ &= \tau(\emptyset \cup B, C) \cup \tau(\emptyset, B)\end{aligned}$$

Tomando $B = X$ se tiene que:

$$\tau(\emptyset, X \cup C) \cup \tau(X, C)$$

$\blacksquare$

1.6. G_δ, F_σ y conjuntos de Borel

Mis ejercicios de la sección: 4.

1.7. Relativización

Mis ejercicios de la sección: 2, 7 y 12.

1.8. Funciones continuas

Mis ejercicios de la sección: 6 y 10.

1.9. Definición por partes de funciones

Mis ejercicios de la sección: 2.

1.10. Funciones continuas en $\mathbb{E}^1$

1.11. Funciones abiertos y cerradas

1.12. Homeomorfismos

Capítulo 2

Segundo Parical

2.1. Axiomas de Separación

Ejercicio 2.1.1
Sean (X,τ) y (Y,σ) espacios topológicos siendo (Y,σ) un espacio Hausdorff. Si $f,g:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ son funciones continuas, entonces

1. El conjunto $\left\{x\in X\middle|f(x)=g(x)\right\}$ es cerrado en (X,τ).
2. Si $D\subseteq X$ es denso y $f\big|_D=g\big|_D$, entonces $f=g$ en X.
3. La gráfica de la función continua $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\tau)$, esto es, el conjunto
$$\Gamma(f)=\left\{(x,f(x))\in X\times Y\middle|x\in X\right\}$$
es cerrado en $X\times Y$ con la topología producto.
4. Si f es inyectiva y continua, entonces (X,τ) es Hausdorff.

Demostración:
De (1): Sea
$$C=\left\{x\in X\middle|f(x)=g(x)\right\}$$
para probar que este conjunto es cerrado, se probará que $U=X-C$ es abierto en (X,τ). En efecto, si $x\in X-C$ se tiene que
$$f(x)\neq g(x)$$
como el espacio (Y,σ) es T_2, existen dos abiertos $U,V\subseteq Y$ tales que
$$f(x)\in U,\quad g(x)\in V\quad U\cap V=\emptyset$$
se tiene entonces que $x\in W=f^{-1}(U)\cap g^{-1}(V)\neq\emptyset$, donde el conjunto $W\subseteq X$ es abierto por ser intersección de dos abiertos y ser las funciones f,g continuas. Afirmamos que
$$W\subseteq X-C$$
Procederemos por contradicción. Suponga que existe $y\in W$ tal que $y\notin X-C$, es decir $y\in C$. Como $y\in W$ se tiene que
$$f(y)\in U,\quad g(y)\in V$$

además, al tenerse que $y \in C$ se sigue que $f(y) = g(y)$. Por tanto, $U \cap V \neq \emptyset \#_c$. Luego debe suceder que $W \subseteq X - C$. Así, para cada $x \in X - C$ se tiene que existe un abierto tal que $x \in W \subseteq X - C$. Se sigue entonces que el conjunto $X - C$ es abierto, es decir que C es cerrado en (X, τ).

De (2): Hay que probar que

$$f(x) = g(x), \quad \forall x \in X$$

se tienen dos casos (en caso de que $D \subsetneq X$, si $D = X$ el resultado es inmediato):

1. $x \in D$, como $f|_D = g|_D$ se sigue que $f(x) = f|_D(x) = g|_D(x) = g(x)$.

2. $x \in X - D$. Procederemos por contradicción. Suponga que $f(x) \neq g(x)$. Como (Y, σ) es T_2 existen dos abiertos $V_1, V_2 \subseteq Y$ tales que

$$f(x) \in V_1, \quad g(x) \in V_2, \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

se tiene que $x \in U = f^{-1}(V_1) \cap g^{-1}(V_2) \in \tau$, pues las funciones son continuas. Como D es denso en X y $U \subseteq X$ es un abierto no vacío, existe un elemento $y \in D$ tal que $y \in U$, esto es que

$$f(y) \in V_1 \quad g(y) \in V_2$$

donde, al tenerse que $f(y) = g(y)$ se sigue que $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset \#_c$. Por tanto, debe suceder que $f(x) = g(x)$.

por los dos incisos anteriores se sigue que $f = g$ en X.

De (3): Sea $A = X \times Y - \Gamma(f)$. Probaremos que A es abierto. En efecto, si $(x, y) \in C$ se tiene que $y \neq f(x)$. Como (Y, σ) es T_2 existen dos abiertos $V_1, V_2 \subseteq Y$ tales que

$$y \in V_1, \quad f(x) \in V_2 \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

Como f es continua, el conjunto $U = f^{-1}(V_2) \subseteq X$ es abierto. Ahora, el conjunto

$$W = U \times V$$

donde $V = V_1$ es un básico (en particular un abierto) para el cual se tiene que $(x, y) \in W$ y $W \subseteq A$. En efecto, lo primero se tiene de forma inmediata. Suponga que existe $(z, w) \in W$ tal que $(z, w) \notin A$, entonces

$$z \in U, \quad w \in V, \quad \text{y} \quad w = f(z)$$

es decir,

$$z \in f^{-1}(V_2), \quad f(z) \in V_1$$

por lo cual

$$f(z) \in V_2, f(z) \in V_1 \Rightarrow V_1 \cap V_2 \neq \emptyset \#_c$$

por ende, $W \subseteq A$. Luego como en (1) debe tenerse que A es abierto en $(X \times Y, \tau_p)$, es decir que $\Gamma(f)$ es cerrado en $(X \times Y, \tau_p)$.

De (4): Sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Como f es inyectiva se sigue que $f(x) \neq f(y)$, luego por ser (Y, σ) T_2 existen dos abiertos $V_1, V_2 \subseteq Y$ tales que

$$f(x) \in V_1, \quad f(y) \in V_2, \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

sean $U_i = f^{-1}(V_i)$ para $i = 1, 2$. Estos conjuntos son abiertos en (X, τ) ya que f es continua. Además

$$U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

ya que en caso contrario se tendría que si $z \in U_1 \cap U_2$ entonces $f(z) \in V_1 \cap V_2 = \emptyset \#_c$. Por ende, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, siendo tales que $x \in U_1$ y $y \in U_2$. Por ser los x, y arbitrarois en X se tiene entonces que (X, τ) es T_2. ∎

Ejercicio 2.1.2
Sea (Y,τ) un espacio Hausdorff T_3 y $A\subseteq Y$ un conjunto infinito. Entonces, existe una familia

$$\left\{U_n\subseteq Y\middle|U_n \text{ es abierto para todo } n\in\mathbb{N}^*\right\}$$

de conjuntos cuyas cerraduras son disjuntas a pares y tales que

$$A\cap U_n\neq\emptyset,\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Demostración:
Tomemos $U_0=\emptyset$. Suponga elegidos $U_1,...,U_n\subset X$ abiertos con cerraduras disjuntas a pares tales que

$$A\cap U_k=\emptyset,\quad \forall k\in[\![1,n]\!]$$

siendo el conjunto

$$A_n=A-\bigcup_{k=1}^n\overline{U_k}$$

infinito. Tomemos $a,b\in A_n$ con $a\neq b$. Como el espacio es Hausdorff se tiene que $\{b\}\subseteq X$ es un conjunto cerrado y es tal que $a\notin\{b\}$. Ahora, $A-\left(\bigcup_{k=1}^n\overline{U_k}\cup\{b\}\right)$ es un abierto que contiene a a. Como el espacio es T_3 existe un abierto $V\subseteq X$ tal que

$$a\in V\subseteq\overline{V}\subseteq A-\left(\bigcup_{k=1}^n\overline{U_k}\cup\{b\}\right)$$

y con ello un abierto $W\subseteq X$ tal que

$$b\in W\subseteq\overline{W}\subseteq A-\left(\bigcup_{k=1}^n\overline{U_k}\cup\overline{V}\right)$$

definamos

$$U_{n+1}=\begin{cases}V & \text{si} \quad A\cap\overline{V} \text{ es finito}\\ W & \text{e.o.c}\end{cases}$$

es claro que U_{n+1} es abierto. Se tienen dos casos:

1. $U_{n+1}=V$:
2. $U_{n+1}=W$:

■

Ejercicio 2.1.3
Sea X un conjunto infinito. Demuestre que (X,τ_{cf}) no es un espacio T_2.

Demostración:

■

Ejercicio 2.1.4
Sea $\{(X_\alpha,\tau_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ una familia de espacios topológicos. Tomando

$$X=\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$$

se tiene que si el espacio (X, τ_p) es normal, entonces (X_α, τ_α) es normal para todo $\alpha \in I$.

Ejercicio 2.1.5
Sea X un conjunto, $p \in X$ y $K \subseteq X$ tal que $|K| \geq 2$

Demostración:

■

Ejercicio 2.1.6
Sea (X, τ) un espacio topológico. Demuestre que (X, τ) es T_2 si y sólo si el conjunto

$$\Delta = \left\{(x, y) \in X \times X \middle| x = y\right\}$$

es cerrado en $(X \times X, \tau_p)$.

Demostración:

■

Ejercicio 2.1.7
Sea (X, τ) un espacio topológico T_1. Demuestre que

1. Si $x \in X$ y $A = \{x\}$, entonces $A' = \emptyset$.
2. Si $x_1, ..., x_n \in X$ y $A = \{x_1, ..., x_n\}$, entonces $A' = \emptyset$.

Demostración:

■

Ejercicio 2.1.8
Sea (X, τ) un espacio topológico T_2 y, $A, B \subseteq X$ compactos disjuntos. Pruebe que existen $U, V \in \tau$ tales que

$$A \subseteq U, \quad B \subseteq V \quad \text{y} \quad U \cap V = \emptyset$$

Demostración:

■

Ejercicio 2.1.9
Sea (X, τ) un espacio topológico regular. Demuestre que, dados $x, y \in X$ distintos existen $U, V \in \tau$ tales que

$$x \in U, \quad y \in V, \quad \text{y} \quad \overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$$

Demostración:

■

Ejercicio 2.1.10
Sea (X, τ) un espacio T_2. Pruebe que si $x \in X$

I. $\bigcap \left\{F \subseteq X \middle| x \in F \text{ y } F \text{ es cerrado}\right\} = \{x\}$.

II. $\bigcap\left\{U\subseteq X\middle| x\in U \text{ y } U \text{ es abierto}\right\}=\{x\}$.

pruebe que ninguna de las dos propiedades anteriores es equivalente a que el espacio sea T_2.

Demostración:
De (i): Como (X,τ) es T_2, en particular es T_1, luego $\tau_{cf}\subseteq\tau$, así que el conjunto

$$\{x\}$$

es cerrado (por ser finito) y tal que $x\in\{x\}$. Por tanto,

$$\bigcap\left\{F\subseteq X\middle| x\in F \text{ y } F \text{ es cerrado}\right\}=\{x\}$$

(pues la otra contención se tiene de forma inmediata). Observe que no es necesario que el espacio sea T_2 para que la condición anterior se cumpla.

De (ii): Suponga que

$$\bigcap\left\{U\subseteq X\middle| x\in U \text{ y } U \text{ es abierto}\right\}\neq\{x\}$$

como x se encunetra en todo abierto que lo contiene, forzosamente debe existir $y\in X$ tal que

$$y\in\bigcap\left\{U\subseteq X\middle| x\in U \text{ y } U \text{ es abierto}\right\}$$

Entonces, para todo $U\in\tau$ tal que $x\in\tau$ implica que $y\in\tau$. Como (X,τ) es T_2 existen $V,W\in\tau$ tales que

$$x\in W,\quad y\in V,\quad \text{y}\quad W\cap V=\emptyset$$

pero, la segunda condición implica que $y\notin W\#_c$. Por tanto,

$$\bigcap\left\{U\subseteq X\middle| x\in U \text{ y } U \text{ es abierto}\right\}=\{x\}$$

Para el ejemplo, tome $(\mathbb{N},\tau_{cf})$. Este espacio claramente no es T_2, pero si cumple la condición requerida. ■

Ejercicio 2.1.11
Sea X un conjunto finito. Pruebe que la única topología τ que hace de (X,τ) un espacio T_2 es la discreta.

Demostración:
Supongamos que $X=\{x_1,...,x_n\}$. Hay que probar que

$$\tau_D\subseteq\tau$$

(suponiendo que (X,τ) es T_2). En efecto, como (X,τ) es T_2, entonces los conjuntos $\{x_i\}$ son cerrados, para todo $i\in[\![1.n]\!]$. En particular, para todo $i\in[\![1,n]\!]$:

$$\bigcup_{j\in[\![1,n]\!],j\neq i}\{x_j\}=X-\{x_i\}$$

es cerrado (por ser unión finita de cerrados), luego su complemento $\{x_i\}$ es abierto en (X,τ). Por tanto, $\tau_D\subseteq\tau$. ■

Ejercicio 2.1.12
Sea (X,τ) un espacio T_2. Pruebe que si $A\subseteq X$, entonces

I. A' es cerrado.

II. $(A')'\subseteq A'$.

III. $\left(\overline{A}\right)'=A'$.

Demostración:
Sea $A\subseteq X$.

De (i): Veamos que $X-A'$ es abierto. En efecto, primero recordemos que

$$x\in A' \iff \forall V\in\tau \text{ tal que } x\in V\Rightarrow (V-\{x\})\cap A\neq\emptyset$$

Por tanto,

$$x\in X-A' \iff \exists U_0\in\tau \text{ tal que } x\in U_0 \text{ y } (U_0-\{x\})\cap A=\emptyset$$

Afirmamos que para $x\in X-A'$, $U_0\subseteq X-A'$. En efecto, en caso contrario si existiera $y\in U_0$ tal que $y\in A'$ (en particular, $y\neq x$ pues $x\in X-A'$), por la primera condición:

$$(U_0-\{y\})\cap A\neq\emptyset$$

Si $x\notin A$, entonces

$$(U_0-\{x\})\cap A\supseteq(U_0-\{y\})\cap A\neq\emptyset$$

lo cual es una contradición. Si $x\in A$, como el espacio es T_2 existen dos abiertos $W,V\in\tau$ tales que

$$y\in V,\quad x\in W,\quad V\cap W=\emptyset$$

Tomemos $V_0=U_0\cap V$. Se tiene que

$$(V_0-\{y\})\cap A\neq\emptyset$$

pues $y\in A'$. Luego, como $x\notin V_0$ (pues $x\notin V$), se sigue que existe $z\in(V_0-\{y\})\cap A$, en particular $z\neq x$ y $z\in U_0$, luego

$$(U_0-\{x\})\cap A=\emptyset$$

lo cual es una contradicción. Por ende, $U_0\subseteq X-A'$. Así, el conjunto $X-A'$ es abierto, luego A' es cerrado.

De (ii): Si $x\in(A')'$, entonces

$$\forall U\in\tau \text{ tal que } x\in U\Rightarrow(U-\{x\})\cap A'\neq\emptyset$$

sea $V=U-\{x\}=U\cap(X-\{x\})\in\tau$ (pues $\{x\}$ es abierto). Entonces, al tenerse que $V\cap A'\neq\emptyset$, existe $y\in X$ tal que $y\in V\cap A'$, en particular $y\in A'$, luego como $V\in\tau$ es tal que $y\in V$, se sigue que

$$(V-\{y\})\cap A\neq\emptyset$$

así, existe $z\in V-\{y\}$ tal que $z\in A$, en particular,

$$z\in V\cap A\Rightarrow(U-\{x\})\cap A\neq\emptyset$$

es decir, que $x\in A'$. Por tanto,

$$(A')'\subseteq A'$$

De (iii): Una contención es inmediata del hecho de que $A \subseteq \overline{A}$, pues

$$\begin{aligned} x \in A' &\iff \forall U \in \tau \text{ tal que } x \in U \Rightarrow (U - \{x\}) \cap A \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \forall U \in \tau \text{ tal que } x \in U \Rightarrow (U - \{x\}) \cap \overline{A} \neq \emptyset \\ &\iff x \in \left(\overline{A}\right)' \end{aligned}$$

Así, $A' \subseteq \left(\overline{A}\right)'$. Si $x \in \left(\overline{A}\right)'$, entonces

$$\forall U \in \tau \text{ tal que } x \in U \Rightarrow (U - \{x\}) \cap \overline{A} \neq \emptyset$$

entonces, existe $y \in U - \{x\}$ tal que $y \in \overline{A}$. Si $y \in A$ hemos terminado. Suponga que $y \notin A$. Como $V = U - \{x\}$ es un abierto tal que $y \in V$, entonces

$$V \cap A \neq \emptyset$$

así, existe $z \in V$ tal que $z \in A$, en particular

$$(U - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

por tanto, $x \in A'$. ■

Ejercicio 2.1.13
Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ y $g : (Y, \sigma) \to (X, \tau)$ funciones continuas tales que $g \circ f = 1_X$. Pruebe que si (Y, τ) es T_2 implica que (X, τ) es T_2, y que $f(X)$ es cerrado en (Y, σ).

Demostración:
Notemos que como

$$g \circ f = 1_X$$

entonces g es suprayectiva y f es inyectiva. En efecto, veamos que g es suprayectiva, sea $x \in X$, entonces existe $f(x) \in Y$ tal que

$$g(f(x)) = x$$

Ahora, sean $x_1, x_2 \in X$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$, entonces

$$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Luego, se sigue lo deseado.

Suponga que (Y, σ) es T_2. Sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Como (Y, σ) es T_2 y $f(x) \neq f(y)$ entonces existen dos abiertos $V_1, V_2 \in \sigma$ tales que

$$f(x) \in V_1, \quad f(y) \in V_2, \quad \text{y} \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

tomemos $U_1 = f^{-1}(V_1)$ y $U_2 = f^{-1}(V_2)$. Se tiene que

$$x_1 \in U_1 \quad x_2 \in U_2$$

y, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. En efecto, si $x \in U_1 \cap U_2$ entonces $x \in f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2)$, esto es que $f(x) \in V_1$ y $f(x) \in V_2 \#_c$. Por ende, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Así, (X, τ) es T_2.

Ahora, veamos que $f(X)$ es cerrado en (Y, σ). En efecto, veamos que su complemento es abierto. Si $y \in Y - f(X)$, entonces

$$\begin{aligned} y \in Y - f(X) &\iff y \notin f(X) \\ &\iff y \neq f(x), \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

■

2.2. Filtros

Ejercicio 2.2.1
Sea (Y,d) un espacio métrico, y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en Y. Pruebe que $y_n \to y_0$ si y sólo si $d(y_n, y_0) \to 0$.

Demostración:
$\Rightarrow$): Suponga que $y_n \to y_0$ con $y_0 \in Y$. Entonces

$$U \in \tau \text{ tal que } y_0 \in U \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \text{ para el cual } n \geq N \text{ implica que } y_n \in U$$

en particular:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq N \Rightarrow y_n \in B(y_0, \varepsilon)$$

es decir que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq N \Rightarrow |d(y_n, y_0) - 0| < \varepsilon$$

lo cual prueba el resultado. ■

Ejercicio 2.2.2
Sea (X, τ) un espacio topológico.

I. Encuentre un ejemplo de un filtro definido sobre X que converja a dos puntos distintos.

II. Sea $\Delta = \left\{(x,y) \in X \times X \middle| x = y\right\}$, demuestre que Δ es un conjunto cerrado en $(X \times X, \tau_p)$ si y sólo si dado un filtro $\mathcal{F}$ sobre X convergente, este converge a un único punto.

Ejercicio 2.2.3
Sean X, Y dos conjuntos y $f : X \to Y$ una función. Si ξ es un ultrafiltro sobre X, entonces el filtro $f(\xi)^+$, generado por la base de filtro $f(\xi)$ es un ultrafiltro en Y.

Demostración:
Recordemos que

$$f(\xi)^+ = \left\{A \subseteq Y \middle| \text{existe } E \in \xi \text{ tal que } f(E) \subseteq A\right\}$$

Por una proposición anterior ya se sabe que $f(\xi)^+$ es filtro sobre Y. Veamos que es ultrafiltro. Primero, probaremos que dado un conjunto $A \subseteq Y$, uno de los dos conjuntos $A, Y - A$ está en $f(\xi)^+$. En efecto, sea

$$B = f^{-1}(A)$$

Como $B \subseteq X$, entonces $B \in \xi$ ó $X - B \in \xi$.

- Suponga que $B \in \xi$, entonces se sigue por la definición de B que

$$f(B) \in f(\xi)$$

  y, como $f(f^{-1}(A)) \subseteq A$, se sigue que $f(B) \subseteq A$, luego $A \in \xi$.

- Suponga que $X - B \in \xi$. Afirmamos que

$$X - B = X - f^{-1}(A) = f^{-1}(Y - A)$$

en efecto, veamos que

$$\begin{aligned} x \in X - f^{-1}(A) &\iff f(x) \notin A \\ &\iff f(x) \in Y - A \\ &\iff x \in f^{-1}(Y - A) \end{aligned}$$

lo cual prueba el resultado. Por tanto, como $X - B = X - f^{-1}(A) \in \xi$, se sigue que $f^{-1}(Y - A) \in f(\xi)$. Luego, como $f(f^{-1}(Y - A)) \subseteq Y - A$, entonces se tiene que $Y - A \in f(\xi)^+$.

Por tanto, $A \in f(\xi)^+$ ó $Y - A \in f(\xi)^+$ (no pueden estar los dos a la vez por ser $f(\xi)^+$ filtro). Luego, por una proposición $f(\xi)^+$ es ultrafiltro. ■

Ejercicio 2.2.4
Sean $\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_n$ filtros definidos sobre X y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre X tal que $\mathcal{F}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{U}$. Demuestre que existe $i \in [\![1, n]\!]$ tal que $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{U}$.

Demostración:
Procederemos por inducción sobre n.

- Considere el caso $n = 2$. Suponga que $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \nsubseteq \mathcal{U}$, entonces existen $A_1 \in \mathcal{F}_1$ y $A_2 \in \mathcal{F}_2$ tales que $A_1, A_2 \notin \mathcal{U}$, en particular por ser $\mathcal{U}$ ultrafiltro se tiene que $A_1 \cup A_2 \notin \mathcal{U}$. Tomemos

  $$A = A_1 \cup A_2$$

  se tiene por absorción que $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$. Por tanto,

  $$A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{U}$$

  luego, $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{U}\#_c$. Por tanto, alguno de los dos $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ tiene que estar contenido en $\mathcal{U}$.

- Suponga que existe $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ tal que si $\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_k$ son filtros sobre X y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro tal que $\mathcal{F}_1 \cap ... \cap \mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{U}$, entonces existe $i \in [\![1, k]\!]$ tal que $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{U}$.

- Veamos que se cumple para $k+1$. En efecto, sean $\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_{k+1}$ filtros sobre X y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre X tal que

  $$\mathcal{F}_1 \cap ... \cap \mathcal{F}_k \cap \mathcal{F}_{k+1} \subseteq \mathcal{U}$$

  Sea $\xi = \mathcal{F}_1 \cap ... \cap \mathcal{F}_k$. Por una proposición ξ es un filtro, luego por el caso $n = 2$ se debe tener que $\xi \subseteq \mathcal{U}$ o $\mathcal{F}_{k+1} \subseteq \mathcal{U}$. Si se tiene el segundo caso, se sigue el resultado tomando $i = k + 1$. En el primer caso, usando la hipótesis de inducción se sigue que existe $i \in [\![1, k]\!]$ tal que $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{U}$.

  En ambos casos, se tiene que existe $i \in [\![1, k + 1]\!]$ tal que $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{U}$.

Aplicando inducción, el resultado se tiene para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Ejercicio 2.2.5
Sea $\mathcal{U} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una base de filtro en X y $\mathcal{B} = \{B_\beta\}_{\beta \in J}$ una base de filtro en Y (siendo X, Y conjuntos no vacíos). Pruebe que

$$\mathcal{U} \times \mathcal{B} = \left\{ A_\alpha \times B_\beta \middle| (\alpha, \beta) \in I \times J \right\}$$

es una base de filtro en $X \times Y$.

Demostración:
En efecto, hay que verificar que se cumplen dos condiciones:

I. Claramente la familia $\mathcal{U}\times\mathcal{B}$ es de conjuntos no vacíos, pues cada una de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{B}$ es no vacía de conjuntos no vacíos, luego todo elemento del producto de ambos es no vacío.

II. Sean $A_{\alpha_1}\times B_{\beta_1}, A_{\alpha_2}\times B_{\beta_2}\in\mathcal{U}\times\mathcal{B}$. Como $A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}\in\mathcal{U}$ y $B_{\beta_1}, B_{\beta_2}\in\mathcal{B}$, entonces al ser bases de filtro se tiene que existen $A_{\alpha_3}\in\mathcal{U}$ y $B_{\beta_3}\in\mathcal{B}$ tales que

$$A_{\alpha_3}\subseteq A_{\alpha_1}\cap A_{\alpha_2} \quad \text{y} \quad B_{\beta_3}\subseteq B_{\beta_1}\cap B_{\beta_2}$$

Se tiene luego que $A_{\alpha_3}\times B_{\beta_3}\in\mathcal{U}\times\mathcal{B}$. Además,

$$A_{\alpha_3}\times B_{\beta_3}\subseteq A_{\alpha_1}\times B_{\beta_1}\cap A_{\alpha_2}\times B_{\beta_2}$$

por la forma en que se tomaron estos elementos.

por los dos incisos anteriores, se sigue que $\mathcal{U}\times\mathcal{B}$ es base de filtro sobre $X\times Y$. ■

Ejercicio 2.2.6
Sea $f: X\to Y$ una función (siendo X, Y conjuntos no vacíos) y $\mathcal{B}$ una base de filtro en Y. Pruebe que

$$f^{-1}(\mathcal{B})=\left\{f^{-1}(B)\Big|B\in\mathcal{B}\right\}$$

es una base de filtro en X si y sólo si $f^{-1}(B)\neq\emptyset$ para todo $B\in\mathcal{B}$.

Demostración:
$\Rightarrow)$: Suponga que $f^{-1}(\mathcal{B})$ es una base de filtro en X, en particular se tiene que es una familia no vacía de conjuntos no vacíos, es decir que

$$f^{-1}(B)\neq\emptyset, \quad \forall B\in\mathcal{B}$$

(pues todo elemento de la base de filtro es de esa forma) lo que prueba el resultado.

$\Leftarrow)$: Suponga que $f^{-1}(B)\neq\emptyset$ para todo $B\in\mathcal{B}$. Veamos que $f^{-1}(B)$ es base de filtro. En efecto, se deben verificar dos condiciones:

I. $f^{-1}(\mathcal{B})$ es una familia no vacía, pues $\mathcal{B}$ es una familia no vacía, y es de conjuntos no vacíos, pues por hipótesis todo elemento es de la forma

$$f^{-1}(B)\neq\emptyset, \quad \forall B\in\mathcal{B}$$

el cual es no vacío.

II. Sean $B_1, B_2\in\mathcal{B}$. Entonces, existe $B_3\in\mathcal{B}$ tal que

$$B_3\subseteq B_1\cap B_2$$

tomando imágenes inversas se tiene que

$$f^{-1}(B_3)\subseteq f^{-1}(B_1\cap B_2)$$

Ahora, veamos que

$$\begin{aligned} x\in f^{-1}(B_1\cap B_2) &\iff f(x)\in B_1\cap B_2\\ &\iff f(x)\in B_1 \text{ y } f(x)\in B_2\\ &\iff x\in f^{-1}(B_1) \text{ y } x\in f^{-1}(B_2)\\ &\iff x\in f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2)\end{aligned}$$

por tanto,

$$f^{-1}(B_3) \subseteq f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

donde los dos elementos de la derecha están en $f^{-1}(\mathcal{B})$ y el de la izquierda también lo está.

Por los dos incisos anteriores se sigue que $f^{-1}(\mathcal{B})$ es base de filtro. ■

Ejercicio 2.2.7
Pruebe que el conjunto de puntos de acumulación de una base de filtro es cerrado (posiblemente vacío).

Demostración:
Sea (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{B}$ una base de filtro. Recordemos que

$$x \in X \text{ es punto de acumulación de } \mathcal{B} \iff x \in \overline{B}, \quad \forall B \in \mathcal{B}$$

es decir que x es punto de acumulación de $\mathcal{B}$ si y sólo si

$$x \in \bigcap_{i \in I} \overline{B_i}$$

donde $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in I}$. Es decir que el conjunto de puntos de acumulación de una base de filtro es

$$\mathcal{B}' = \bigcap_{i \in I} \overline{B_i}$$

el cual es cerrado por ser intersección arbitraria de cerrados. ■

2.3. Compacidad

Ejercicio 2.3.1
Sea (X, τ) un espacio topológico que no es compacto. Pruebe que

$$\mathcal{B} = \left\{ U \subseteq X \middle| U = X - C \text{ donde } C \subseteq X \text{ es compacto} \right\}$$

es base de un filtro sobre X. Pruebe además que si (X, τ) es compacto, entonces $\mathcal{B}$ no es un filtro.

Demostración:
Primero veamos que si el espacio (X, τ) es compacto, $\mathcal{B}$ no es filtro. En efecto, en particular se tendría que $X \subseteq X$ es compacto, luego

$$\emptyset = X - X \in \mathcal{F}$$

así, $\mathcal{B}$ no puede ser filtro.

Suponga que (X, τ) no es compacto. Veamos que $\mathcal{F}$ es un fitro. En efecto, se deben cumplir cuatro condiciones:

i. $\emptyset \notin \mathcal{B}$, como (X, τ) no es compacto, entonces X no es un subconjunto compacto de (X, τ), luego $\emptyset = X - X \notin \mathcal{B}$.

ii. $\mathcal{B} \neq \emptyset$, como $\emptyset$ es compacto en (X, τ), entonces $X = X - \emptyset \in \mathcal{B}$, luego $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

III. Sean $A, B \in \mathcal{B}$, entonces existen $C_1, C_2 \subseteq X$ compactos tales que

$$A = X - C_1, \quad \text{y} \quad B = X - C_2$$

así,

$$\begin{aligned} A \cap B &= (X - C_1) \cap (X - C_2) \\ &= X - (C_1 \cup C_2) \end{aligned}$$

donde $C_1 \cup C_2$ es compacto en (X, τ) (por ser unión finita de compactos). Luego, $A \cap B \in \mathcal{B}$.

Por los tres incisos anteriores, se sigue que $\mathcal{B}$ es base de un filtro sobre X. ■

Ejercicio 2.3.2
Sea $f : X \to Y$ una función. Pruebe que f es inyectiva si y sólo si para todo filtro $\mathcal{F}$ sobre Y, $f^{-1}(\mathcal{F})$ es filtro sobre X.

Demostración:

■

Ejercicio 2.3.3
Sean (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) espacios topológicos T_2 localmente compactos que no son compactos. Si (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) son homeomorfos, demuestre que $(\hat{X}_1, \hat{\tau}_1)$ y $(\hat{X}_2, \hat{\tau}_2)$ también lo son.

Demostración:
Supongamos que la compactificación de Alexandroff es tal que

$$\hat{X}_1 = X_1 \cup \{\infty_1\} \quad \text{y} \quad \hat{X}_2 = X_2 \cup \{\infty_2\}$$

donde $\infty_1 \notin X_1$ y $\infty_2 \notin X_2$.

Sea $f : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$ el homeomorfismo entre ambos espacios. Defina $\hat{f} : (\hat{X}_1, \hat{\tau}_1) \to (\hat{X}_2, \hat{\tau}_2)$ como sigue

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in X_1 \\ \infty_2 & \text{si} \quad x = \infty_1 \end{cases}$$

Veamos que esta función es homeomorfismo. En efecto, primero veamos que es biyección.

- $\hat{f}$ **es inyectiva**. Sean $x, y \in \hat{X}_1$ tales que $x \neq y$. Si $x, y \in X_1$ entonces como f es inyectiva, se tiene que
$$\hat{f}(x) = f(x) \neq f(y) = \hat{f}(y)$$
Si $x = \infty_1$, entonces $\hat{f}(x) = \infty_2 \notin X_2$, luego $\hat{f}(x) \neq \hat{f}(y)$ (independientemente del valor de y). De forma análoga se tiene el resultado si $y = \infty_1$.

  Por tanto, $\hat{f}$ es inyectiva.

- $\hat{f}$ **es suprayectiva**. Sea $u \in \hat{X}_2$, si $u \in X_2$ como f es suprayectiva, existe $x \in X_1$ tal que $f(x) = \hat{f}(x) = u$. Si $u = \infty_2$, existe $x = \infty_1$ tal que $\hat{f}(x) = u$.

Por tanto, de los dos incisos anteriores se sigue que $\hat{f}$ es biyectiva. Para ver que es homeomorfismo, basta con verificar que es continua y abierta.

- $\hat{f}$ **es continua**. Sea $V \in \hat{\tau}_2$. Se tienen dos casos:

I. $V \in \tau_2$, en cuyo caso se tiene que

$$\hat{f}^{-1}(V) = f^{-1}(V) \in \tau_1 \subseteq \hat{\tau}_1$$

pues, $V \subseteq X_2$.

II. $V = \hat{X}_2 - C$, donde $C \subseteq X_2$ es compacto en (X_2, τ_2). Veamos que

$$\begin{aligned}\hat{f}^{-1}(V) &= \hat{f}^{-1}(X_2 - C) \\ &= \hat{f}^{-1}(X_2) - \hat{f}^{-1}(C) \\ &= X_1 - f^{-1}(C)\end{aligned}$$

pues, $C \subseteq X_2$. Afirmamos que $f^{-1}(C)$ es compacto. En efecto, como $f^{-1} : (X_2, \tau_2) \to (X_1, \tau_1)$ es continua, la imagen de compactos es compacta, luego $f^{-1}(C)$ es un compacto en (X_1, τ_1), luego $\hat{f}^{-1}(V) \in \hat{\tau}_1$.

por los dos incisos anteriores se sigue que $\hat{f}$ es continua.

- $\hat{f}$ **es abierta**. Sea $U \in \hat{\tau}_1$, se tienen dos casos:

I. $U \in \tau_2$, entonce

$$\hat{f}(U) = f(U) \in \tau_2 \subseteq \hat{\tau}_2$$

II. $U = \hat{X}_1 - C$ donde $C \subseteq (X_1, \tau_1)$ es compacto. Veamos que

$$\begin{aligned}\hat{f}(U) &= \hat{f}(\hat{X}_1 - C) \\ &= \hat{f}(\hat{X}_1) - \hat{f}(C) \\ &= \hat{X}_2 - f(C)\end{aligned}$$

donde $f(C)$ es compacto en (X_2, τ_2) pues C es compacto en (X_1, τ_1), luego $\hat{f}(U) \in \hat{\tau}_2$.

por los dos incisos anteriores se sigue que $\hat{f}$ es abierta.

Como f es una función biyectiva, continua y abierta, se sigue que $\hat{f}$ es homeomorfismo. Así, $(\hat{X}_1, \hat{\tau}_1)$ y $(\hat{X}_2, \hat{\tau}_2)$ son homeomorfos. ■

Ejercicio 2.3.4

Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ una familia de espacios topológicos localmente compactos y suponga que existe $J \subseteq I$ finito tal que

$$\forall \beta \in I - J, (X_\beta, \tau_\beta) \text{ es compacto}$$

Demuestre que $\left(X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha, \tau_p\right)$ es localmente compacto.

Demostración:

Sea $x = (x_i)_{i \in I} \in X$ arbitrario. Debemos encontrar una vecindad $C = \prod_{i \in I} C_i \subseteq X$ compacta de x.

Sea $i \in I$, se tienen dos casos:

- $i \in I - J$: Tomemos $C_i = X_i$, el cual es compacto en (X_i, τ_i).
- $i \in J$: Como (X_i, τ_i) es localmente compacto y $x_i \in X_i$, existe $C_i \subseteq C_i$ vecindad compacta de X.

Tomemos $C = \prod_{i \in I} C_i$. Esta es una vecindad (*¿Por qué?*) de x. Además es compacta pues cada C_i es compacto, luego por Tikhonov el producto cartesiano dotado de la topología producto es compacto. ■

Capítulo 3

Tercer Parcial

3.1. Axiomas de Numerabilidad

3.2. Separabilidad

Ejercicio 3.2.1
Sea (X, τ) un espacio topológico separable. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \tau$ tal que

$$U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset, \quad \forall \alpha, \beta \in I, \alpha \neq \beta$$

Demuestre que $\mathcal{U}$ es a lo sumo numerable.

Demostración:
Como el espacio (X, τ) es separble, existe $A \subseteq X$ a lo sumo numerable tal que

$$\overline{A} = X$$

(es decir que A es denso en (X, τ)). Veamos que $\mathcal{U}$ es a lo sumo numerable. En efecto, como A es denso en (X, τ), entonces para cada $\alpha \in I$ se tiene que

$$U_\alpha \cap A \neq \emptyset, \text{ pues } U_\alpha \in \tau$$

Para cada $\alpha \in I$ escogemos un único $x_\alpha \in X$ tal que $x_\alpha \in U_\alpha \cap A$. Construyamos así al función $f : I \to X$ tal que $\alpha \mapsto x_\alpha$. Por construcción esta función está bien definida.

Afirmamos que f es inyectiva. En efecto, sean $\alpha, \beta \in I$ tales que $\alpha \neq \beta$. Como $\alpha \neq \beta$ entonces

$$U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$$

Dado a que $x_\alpha \in U_\alpha \cap A$ y $x_\beta \in U_\beta \cap A$, no puede suceder que $x_\alpha = x_\beta$, pues en tal caso se tendría que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset \#_c$. Luego, f es inyectiva. Por Cantor-Bernstein se sigue que

$$|I| \leq |f(I)| \leq |A| \leq \aleph_0$$

pues, $f(I) \subseteq A$. Por tanto, I es a lo sumo numerable, es decir que $\mathcal{U}$ es a lo sumo numerable. ■

Definición 3.2.1
Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Dado $x \in X$ se dice que x **es punto de condensación de** A si para todo $U \in \mathcal{V}_x$ se tiene que $U \cap A$ es un conjunto no numerable.

Proposición 3.2.1
Sean (X, τ) un espacio Lindelöf y $A \subseteq X$ cerrado. Entonces, (A, τ_A) es Lindelöf.

Demostración:
Sea $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \tau_A$ una cubierta abierta de A, es decir

$$\bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha = A$$

■

Ejercicio 3.2.2
Si (X, τ) es un espacio Lindelöf y $A \subseteq X$ es no numerable, demuestre que existe $x \in X$ tal que x es punto de condensación de A.

Demostración:
Procederemos por contradicción. Suponga que para todo $x \in X$, x no es punto de condensación de A, es decir que para todo $x \in X$ existe $U_x \in \mathcal{V}_x$ (una vecindad que en particular podemos tomar abierta de x) tal que

$$U_x \cap A \text{ es a lo sumo numerable}$$

Constrúyase así la cubierta abierta $\{U_x\}_{x \in X}$ de X. Como (X, τ) es Lindelöf, entonces existe $\{U_{x_i}\}_{i=1}^{\infty}$ subcubierta a lo sumo numerable de X, esto es

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_{x_i}$$

luego,

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_{x_i} \cap A$$

donde $U_{x_i} \cap A$ es a lo sumo numerable, luego A es a lo sumo numerable$\#_c$. Por tanto, A tiene al menos un punto de condensación. ■

Definición 3.2.2
Sea (X, τ) un espacio topológico y Y un conjunto. Si función $f : X \to Y$, entonces

$$\tau_f = \left\{ A \subseteq Y \middle| f^{-1}(A) \in \tau \right\}$$

es una topología sobre Y y es la topología más gruesa que se puede definir sobre Y tal que la función $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_f)$ es continua.

Ejercicio 3.2.3
Sean (X_1, τ_1) y (X_1, τ_2) espacios topológicos y $f : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$ una función continua, suprayectiva y abierta. Entonces, $\tau_2 = \tau_f$.

Demostración:
Veamos que se cumple la doble contención.

- Sea $U \in \tau_2$, entonces se tiene que como la función f es abierta, $f(U) \in \tau_2$. En particular como f es suprayectiva,

■

Ejercicio 3.2.4
Sean (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) espacios topológicos y Y un conjunto. Sea $f : X_1 \to Y$ una función. Demuestre que una función $g : (Y, \tau_f) \to (X_2, \tau_2)$ es continua si y sólo si $g \circ f : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$ es continua.

Demostración:

■

Ejercicio 3.2.5
Sean (X, τ) un espacio con una base a lo sumo numerable y $A \subseteq X$ subconjunto no numerable de X. Pruebe que una cantidad no numerable de puntos de A son puntos límites de A.

Demostración:

■

3.3. Conexidad

Ejercicio 3.3.1
Sean τ y τ' dos topologías definidas sobre X. Si $\tau \subseteq \tau'$, ¿qué se puede decir de la conexión de X respecto de una topología y respecto de la otra?

Demostración:
Si (X, τ) es disconexo, entonces también lo será (X, τ'), ya que como (X, τ) es disconexo existen dos conjuntos abiertos $A, B \in \tau$ tales que

$$A \cap B = \emptyset \quad \text{y} \quad A \cup B = X$$

En particular, $A, B \in \tau'$, luego (X, τ') es disconexo.

Si (X, τ') es conexo, entonces (X, τ) es conexo también, ya que no existen conjuntos abiertos y cerrados en τ que sean abiertos y cerrados, pues éstos no existen en τ'. ■

Ejercicio 3.3.2
Sea (X, τ) un espacio topológico y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos conexos de (X, τ) tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$. Demuestre que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es conexo.

Demostración:
Para todo $m \in \mathbb{N}$ defina

$$B_m = \bigcup_{k=1}^{m} A_k$$

Afirmamos que B_m es conexo, para todo $m \in \mathbb{N}$. En efecto, procederemos por inducción sobre m.

- Si $m = 2$, veamos que
$$B_2 = A_1 \cup A_2$$
donde A_1, A_2 son conexos y son tales que $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_{1+1} \neq \emptyset$. Por tanto, de un teorema se sigue que B_2 es conexo.

- Suponga que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que B_m es conexo. Veamos que B_{m+1} es conexo. En efecto, se tiene que:
$$B_{m+1} = \bigcup_{k=1}^{m+1} A_k = \left(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\right) \cup A_{m+1} = B_m \cup A_m$$
donde B_m y A_{m+1} son conexos en (X, τ) tales que
$$\emptyset \neq A_m \cap A_{m+1} \subseteq B_m \cap A_{m+1}$$
luego $B_m \cup A_{m+1}$ es conexo, es decir que B_{m+1} es conexo.

Por inducción se sigue que B_m es conexo para todo $m \in \mathbb{N}$. Ahora, si $m, n \in \mathbb{N}$ son tales que $n < m$, se tiene que
$$B_m \cap B_n \neq \emptyset$$
ya que $m \leq n$ o $n \leq m$ (de donde se sigue que $B_n \subseteq B_m$ o $B_m \subseteq B_n$) y, $A_1 \neq \emptyset$ (pues $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$). Por tanto, al ser cada uno conexo y tener intersección no vacía a pares, se sigue que
$$\bigcup_{m=1}^{\infty} B_m = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{m} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$
es conexo en (X, τ). ■

Ejercicio 3.3.3
Sean $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una sucesión de espacios conexos en un espacio topológico (X, τ) y A un subespacio conexo de (X, τ). Demuestre que si $A \cap A_\alpha \neq \emptyset$ para todo $\alpha \in I$, entonces $A \cup \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)$ es conexo en (X, τ).

Demostración:

■

Ejercicio 3.3.4
Demuestre que si X es un conjunto infinito, entonces X es conexo con la topología de los complementos finitos (o topología cofinita).

Demostración:
Sea X un conjunto infinito y considere el espacio topológico (X, τ_{cf}). Recordemos que
$$\tau_{cf} = \left\{A \subseteq X \middle| X - A \text{ es finito}\right\} \cup \{\emptyset\}$$
Probaremos que si $A, B \subseteq X$ son abiertos no vacíos, entonces $A \cap B \neq \emptyset$. En efecto, si $A, B \in \tau_{cf} - \{\emptyset\}$ son tales que $A \cap B = \emptyset$ se tiene que
$$X - A \cap B = X \Rightarrow X = (X - A) \cup (X - B)$$
donde $X - A$ y $X - B$ son finitos, luego X es finito$\#_c$. Por ende $A \cap B \neq \emptyset$. Pero lo anterior implica que no existe una partición de X en dos conjuntos abiertos no vacíos, pues siempre sucede que $A \cap B \neq \emptyset$. Por tanto, (X, τ_{cf}) debe ser conexo. ■

Definición 3.3.1
Un espacio topológico (X, τ) es **totalmente disconexo** si sus únicos subespacios conexos son los conjuntos unipuntuales.

Ejercicio 3.3.5
Sea (X, τ_D) un espacio topológico dotado de la topología discreta. Pruebe que (X, τ_D) es totalmente disconexo. ¿Es cierto el recíproco?

Demostración:

$\blacksquare$

Ejercicio 3.3.6
Sea $A \subseteq X$. Demuestre que si C es un subespacio conexo de X que interseca tanto a A como a $X - A$, entonces C interseca a $\mathrm{Fr}\,(A)$.

Demostración:
Se tiene que

$$C \cap A \neq \emptyset \quad \text{y} \quad C \cap (X - A) = \emptyset$$

Suponga que $C \cap \mathrm{Fr}\,(A) = \emptyset$. Como

$$X = \overbrace{X - A}^{\circ} \cup \mathrm{Fr}\,(A) \cup \mathring{A}$$

donde los tres conjuntos de la derecha son disjuntos a pares. Debe suceder entonces que

$$C \subseteq \overbrace{X - A}^{\circ} \cup \mathring{A}$$

Afirmamos que $C \cap \mathring{A} \neq \emptyset$ y $C \cap \overbrace{X - A}^{\circ} \neq \emptyset$. En efecto, si $C \cap \mathring{A} = \emptyset$ se tendría que

$$C \cap A \subseteq \overbrace{X - A}^{\circ} \subseteq X - A$$

lo cual no puede suceder. De forma análoga, $C \cap \overbrace{X - A}^{\circ} \neq \emptyset$. Tomemos $U = C \cap \mathring{A}$ y $V = C \cap \overbrace{X - A}^{\circ}$, se tiene que $U, V \in \tau_C$ son no vacíos para los cuales

$$C = U \cup V = (C \cap \overbrace{X - A}^{\circ}) \cup (C \cap \mathring{A}) = C \cap \left(\overbrace{X - A}^{\circ} \cup \mathring{A}\right)$$

se tendría entonces que C no es conexo$\#_c$. Por tanto, $C \cap \mathrm{Fr}\,(A) \neq \emptyset$. $\blacksquare$

Ejercicio 3.3.7
Sean A un subconjunto propio de X y B un subconjunto propio de Y. Si X e Y son conexos, demuestre que

$$(X \times Y) - (A \times B)$$

es conexo.

Demostración:

$\blacksquare$

Ejercicio 3.3.8
Sea $Y \subseteq X$ y supongamos que X e Y son conexos. Demuestre que si A y B forman una separación de $X - Y$, entonces $Y \cup A$ e $Y \cup B$ son conexos.

Demostración:

■

Ejercicio 3.3.9
En $\mathbb{R}^n$ la conexidad se preserva bajo traslaciones.

Demostración:
Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ conexo y $x \in \mathbb{R}^n$. Probaremos que el conjunto

$$C + x = \left\{y + x \in \mathbb{R}^n \middle| y \in C\right\}$$

es conexo en $\mathbb{R}^n$. En efecto, considere la aplicación $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $y \mapsto y + x$. Es claro que esta función es continua y, se tiene que

$$f\Big|_C : C \to C + x$$

es una función continua suprayectiva, luego por un teorema se sigue que $C + x$ es conexo en $\mathbb{R}^n$. ■

Ejercicio 3.3.10
Sea $n > 1$, y $B \subseteq \mathbb{R}^n$ numerable. Entonces, $\mathbb{R}^n - B$ es conexo.

Demostración:
Antes, para cada par $x, y \in \mathbb{R}^n$ se define el segmento que une a x y y como el conjunto:

$$L_{xy} = \left\{ty + (1 - t)x \middle| t \in [0, 1]\right\}$$

Este conjunto es conexo pues es homeomorfo al subespacio conexo $([0, 1], \tau_{u[0,1]})$ y tiene más de dos puntos siempre que $x \neq y$.

Ahora, suponga que $B \neq \emptyset$ (pues si $B = \emptyset$ el resultado es inmediato ya que $\mathbb{R}$ es conexo). Por el ejercicio anterior podemos suponer que $0 \notin B$. Para cada $x \in \mathbb{R}^n - (B \cup \{0\})$ considere

$$L_{0x} = \left\{tx \in \mathbb{R}^n \middle| t \in [0, 1]\right\}$$

y, dado $x \in \mathbb{R}^n - (B \cup \{0\})$ sea $l(x, a)$ una linea de longitud $a > 0$ en $\mathbb{R}^n$ tal que $l(x, a)$ interseca a L_{0x} es un punto distinto de 0 y x (lo cual es posible pues L_x tiene más de dos puntos pues $x \neq 0$). Afirmamos que existe $z \in l(x, a)$ tal que el conjunto

$$L_{0z} \cup L_{zx}$$

está totalmente contenido en $\mathbb{R}^n - B$. En efecto, si para todo $z \in l(x, a)$ se tiene que $L_{0z} \cup L_{zx}$ no está totalmente contenido en $\mathbb{R}^n - B$, entonces existiría $b_z \in l_x$ tal que $b_z \in B$. No puede suceder que $b_z = 0$ o $b_z = x$ pues $0, x \notin B$. Además, si $z, w \in l(x, a)$ son tales que $z \neq w$, entonces $b_z \neq b_w$, ya que los únicos puntos que tienen en común los conjuntos $L_{0z} \cup L_{zx}$ y $L_{0w} \cup L_{wx}$ son 0 y x (esto se deduce de forma inmediata mediante un sistema de ecuaciones lineales). Por tanto, la aplicación

$$z \mapsto b_z$$

de $l(x,a)$ en B es inyectiva. Como $a > 0$ entonces se tendría que B es no numerable (pues $l(x,a)$ es no numerable)$\#_c$. Por tanto, existe $z \in l(x,a)$ tal que

$$L_{0z} \cup L_{zx}$$

está totalmente contenido en $\mathbb{R}^n - B$. Este conjunto es conexo, pues $L_{0z} \cap L_{zx} = \{z\}$ y ambos segmentos son conexos. Defina así para cada $x \in \mathbb{R}^n - B$

$$l_x = L_{0z} \cup L_{zx}$$

Entonces, se tiene que

$$\bigcup_{x \in \mathbb{R}^n - B} l_x$$

es un conjunto conexo, ya que cada l_x es conexo y, para todo par $x, y \in \mathbb{R}^n - B$, $l_x \cap l_y \neq \emptyset$, pues $0 \in l_x \cap l_y$. Pero

$$\bigcup_{x \in \mathbb{R}^n - B} l_x = \mathbb{R}^n - B$$

pues $l_x \subseteq \mathbb{R}^n - B$, para todo $x \in \mathbb{R}^n - B$. Así, $\mathbb{R}^n - B$ es conexo. ■

Ejercicio 3.3.11
Sean A, B subconjuntos de un espacio topológico (X, τ).

I. Demuestre que si A y B son cerrados y $A \cap B$ y $A \cup B$ son conexos, entonces A y B son conexos en. Proporcione un ejemplo donde la proposición no se cumple si uno de los dos conjuntos A o B no es cerrado.

II. Suponga que A y B son conexos y que $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$, demuestre que $A \cup B$ es conexo.

Demostración:
De (i): Suponga que uno de los dos A o B no es conexo, sin pérdida de generalidad, supongamos que A no lo es. Como no es conexo, existen dos abiertos no vacíos $U, V \in \tau_A$ tales que

$$U \cup V = A \quad \text{y} \quad U \cap V = \emptyset$$

en particular, se tiene que $A - U, A - V \in \tau$, siendo $U = A - V$ y $V = A - U$ son conjuntos cerrados, esto es que U, V son cerrados en (A, τ_A). Como A es cerrado en (X, τ), entonces U y V también son cerrados en (X, τ).

Se tienen dos casos:

- $A \cap B = \emptyset$. Tomemos $M = B \cup V$ y $N = U$. Ambos conjuntos son cerrados en $(A \cup B, \tau_{A \cup B})$, pues lo son en (X, τ). Además, se cumple que

$$\begin{aligned} M \cap N &= (B \cup V) \cap U \\ &= (B \cap U) \cup (V \cap U) \\ &\subseteq (A \cap B) \cup (V \cap U) \\ &= \emptyset \cup \emptyset \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

  y, $M \cup N = A \cup B$. Por tanto, $A \cup B$ no puede ser conexo$\#_c$.

- $A \cap B \neq \emptyset$. Como U y V forman una separación de A y $A \cap B \subseteq A$, al ser $A \cap B$ conexo se tiene que $A \cap B \subseteq U$ ó $A \cap B \subseteq V$.

  Supongamos sin péridad de generalidad que $A \cap B \subseteq U$. Considere los conjuntos $M = U$ y $N = A \cup B - U$. Es claro que

  $$M \cap N = \emptyset \quad \text{y} \quad M \cup N = A \cup B$$

  También, M es cerrado en $A \cup B$ por serlo U en X, y N es cerrado en

De (ii) ∎

> **Ejercicio 3.3.12**
> Sea (X, τ) un espacio topológico tal que dados $x, y \in X$ existe $C \subseteq X$ conexo tal que $x, y \in C$. Demuestre que (X, τ) es un espacio conexo.

Demostración:
Sea $x \in X$ arbitrario fijo. Por hipótesis, para cada $y \in X$ existe $C_y \subseteq X$ conexo tal que $x, y \in C_y$. Se tiene que

$$\bigcap_{y \in X} C_y \neq \emptyset$$

pues $x \in C_y$ para todo $y \in X$, luego por un teorema al ser cada C_y conexo, se tiene que

$$\bigcup_{y \in X} C_y = X$$

es conexo. Por tanto, (X, τ) es conexo. ∎

> **Ejercicio 3.3.13**
> Sea (X, τ) un espacio localmente conexo.
>
> I. Dado $x \in X$ sea C_x la componente conexa de x. Demuestre que $C_x \in \tau$.
>
> II. Definimos una relación de equivalencia sobre X por: $x\mathcal{R}y$ si y sólo si $C_x = C_y$. Demuestre que $\tau/\mathcal{R}$ es la topología discreta.

Demostración:
De (i): Sea $y \in C_x$. Como (X, τ) es localmente conexo, luego existe una vecindad V de y que es conexa. Se tiene que

$$V \cap C_x \neq \emptyset$$

por tanto, $V \cup C_x$ es un conjunto conexo que contiene a y, luego debe suceder que $V \cup C_x \subseteq C_y = C_x$, lo cual implica que $V \subseteq C_x$. Como V es vecindad de y, existe $U_y \in \tau$ tal que $y \in U_y \subseteq V$, así $U_y \subseteq C_x$. Por ende:

$$C_x = \bigcup_{y \in C_x} U_y \in \tau$$

De (ii): Por una proposición, se sabe que

$$A \in \tau/\mathcal{R} \iff \bigcup_{[x] \in A} [x] \in \tau$$

Sea $A = \{[x]\}$, con $x \in X$. Se tiene que

$$\bigcup_{[x]\in A} [x] = [x] = C_x \in \tau$$

luego entonces $A \in \tau/\mathcal{R}$. Como $x \in X$, se sigue que todo subconjunto unipuntual de $X/\mathcal{R}$ es abierto, es decir que $\tau/\mathcal{R}$ es la topología discreta. ■

Ejercicio 3.3.14
Pruebe que S^n es conexo para todo $n \geq 1$.

Demostración:
Procederemos por inducción sobre n.

- $n = 1$. Considere
$$S^1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 = 1\right\}$$
Sea $p = (1, 0)$ elemento de S^1. Se sabe que para cada $(x, y) \in S^1 - \{p\}$ existe un único $\theta_x \in]0, 2\pi[$ tal que
$$(x, y) = (\cos\theta_x, \sin\theta_x)$$
Defina
$$S^1_x = \left\{(\cos t\theta_x, \sin t\theta_x) \in S^1 \middle| t \in [0, 1]\right\}$$
Es claro que este conjunto une a p con (x, y) y, está totalmente contenido en S^1 (por identidades trigonométricas). Además es conexo, pues existe una función continua y suprayectiva de $([0, 1], \tau_{u[0,1]})$ en (S^1_x, τ_{uS^1}) ($t \mapsto (\cos t\theta_x, \sin t\theta_x)$, sólo habría que probar que es continua, procediendo por sucesiones se tiene el resultado) donde el primer espacio es conexo. Luego, el conjunto
$$\bigcup_{x\in S^1-\{p\}} S^1_x = S_1$$
es conexo en $(\mathbb{R}^2, \tau_u)$ pues $p \in S^1_x$, para todo $x \in S^1 - \{p\}$. Por tanto, S_1 es conexo en $(\mathbb{R}^2, \tau_u)$.
- Suponga que existe $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ tal que S^{n-1} es conexo en $\mathbb{R}^n$. Probaremos que S^n es conexo en $\mathbb{R}^{n+1}$. En efecto, observemos que
$$S^n = \left\{(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \middle| \sum_{k=1}^{n+1} x_k^2 = 1\right\}$$

■

3.4. Espacio Cociente

Ejercicio 3.4.1
Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $\mathcal{R}$ una relación ed equivalencia sobre X. Demuestre lo siguiente:

I. $(X/\mathcal{R}, \tau/\mathcal{R})$ es T_1 si y sólo si $\forall x \in X$, $[x]$ es un subcojnunto cerrado de (X, τ).

II. Si $(X/\mathcal{R}, \tau/\mathcal{R})$ es un espacio T_2, entonces $\mathcal{R}$ es un subconjunto cerrado de $(X \times X, \tau_p)$.

III. Sea $\phi : X \to X/\mathcal{R}$ la función definida por $\phi(x) = [x]$. Si $\mathcal{R}$ es un subconjunto cerrado de $(X \times X, \tau_p)$ y ϕ es una función abierta, entonces $(X/\mathcal{R}, \tau/\mathcal{R})$ es T_2.

iv. Si (X, τ) es un espacio compacto, entonces $(X/\mathcal{R}, \tau/\mathcal{R})$ es un espacio compacto.

Demostración:

■