Permutaciones.

Sea X un conjunto no vacío. Una permutación es cualquier función biyectiva $\varphi : X \to X$. Denotamos $S_X = \{\varphi \mid \varphi \text{ es una permutación de } X\}$. Entonces $(S_X, \circ)$ es un grupo (con la composición de funciones), llamado el grupo simétrico de X. Si X es finito con n-elementos, i.e $|X| = n$, entonces podemos suponer que $X = \{1, 2, \dots, n\}$ (pues $X \sim J_n$).
Conociendo el dominio y el contradominio de una permutación φ, podemos conocer su regla de correspondencia, y escribimos a φ como:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \cdots & \varphi(n) \end{pmatrix} \text{ con inversa: } \varphi^{-1} = \begin{pmatrix} \varphi(1) & \varphi(2) & \cdots & \varphi(n) \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

en este grupo, la identidad se denota por:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

En este grupo, se cumple que $|S_X| = n!$ si $|X| = n$, por simplicidad, escribimos: $S_X = S_n$.

S_3

Veamos como esta caracterizado S_3, con los elementos:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \neq e \quad y \quad \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \neq e$$

tanto π como σ cumplen que

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = e, \quad y \quad \pi^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = e$$

y, $\pi^2 \neq e$. Veamos que:

$$\pi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma\pi = \sigma \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\pi\sigma = \pi \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

luego tenemos 6 elementos distintos de S_3:

$$S_3 = \{e, \pi, \sigma, \pi^2, \sigma\pi, \pi\sigma\}$$

Nota: $\sigma\pi^2 = \pi\sigma \neq \sigma\pi$, luego S_3 no es abeliano, más aún, no lo es $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ el S_n.

Así pues $\sigma = \sigma^{-1}$ y $\pi^2 = \pi^{-1}$. Como ejemplo operativo:

$$\sigma\pi\sigma\pi^2\sigma\underbrace{\pi\sigma}_{=\sigma\pi^2}\pi^2 = \sigma\pi\sigma\pi^2\sigma^2\pi^4$$
$$= \sigma\pi\sigma\pi^2\pi$$
$$= \sigma\pi\sigma$$
$$= \sigma^2\pi^2$$
$$= \pi^2$$