

Notas curso Topología I.  
Separabilidad, Filtros

Cristo Daniel Alvarado

19 de abril de 2024

# Índice general

<b>2. Separabilidad</b>	<b>2</b>
2.1. Axiomas de separación . . . . .	2
2.2. Espacios $T_1$ . . . . .	3
2.3. Espacios $T_3$ . . . . .	6
2.4. Espacios $T_4$ . . . . .	8
<b>3. Filtros</b>	<b>13</b>
3.1. Conceptos Fundamentales . . . . .	13

# Capítulo 2

## Separabilidad

### 2.1. Axiomas de separación

#### Definición 2.1.1

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico.

1.  $(X, \tau)$  se dice un **espacio**  $T_0$  si dados  $a, b \in X$  con  $a \neq b$  existe un abierto que contiene a alguno de los dos puntos, pero no contiene al otro.
2.  $(X, \tau)$  se dice un **espacio**  $T_1$  si dados  $a, b \in X$  con  $a \neq b$  existen  $U, V \subseteq X$  abiertos tales que  $a \in U, b \in V$  y  $a \notin V, b \notin U$ .
3.  $(X, \tau)$  se dice un **espacio**  $T_2$  si dados  $a, b \in X$  con  $a \neq b$  existen  $U, V \subseteq X$  abiertos tales que  $a \in U, b \in V$  y  $U \cap V = \emptyset$ . Esto es equivalente a que el espacio sea de Hausdorff.
4.  $(X, \tau)$  se dice un **espacio**  $T_3$  si dados  $p \in X$  y  $A \subseteq X$  cerrado tal que  $p \notin A$ , existen  $U, V \in \tau$  tales que  $p \in U, A \subseteq V$  y  $U \cap V = \emptyset$ .
5.  $(X, \tau)$  se dice un **espacio**  $T_4$  si dados  $A, B \subseteq X$  cerrados y disjuntos, existen  $U, V \in \tau$  tales que  $A \subseteq U, B \subseteq V$  y  $U \cap V = \emptyset$ .
6.  $(X, \tau)$  se dice un **espacio regular** si es un espacio  $T_3$  y  $T_1$ .
7.  $(X, \tau)$  se dice un **espacio normal** si es un espacio  $T_4$  y  $T_1$ .

#### Observación 2.1.1

Notemos que:

$$T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$$

#### Ejemplo 2.1.1

Considere al conjunto  $X = \{1, 2\}$  y  $\tau = \{X, \emptyset, \{1\}\}$ . Afirmamos que  $(X, \tau)$  es  $T_0$ , pero no es  $T_1$  y, por ende tampoco puede ser  $T_2$ .

#### Ejemplo 2.1.2

Sea  $(\mathbb{R}, \tau_{cf})$ . Afirmamos que  $(\mathbb{R}, \tau_u)$  es  $T_1$ . En efecto, sean  $r, s \in \mathbb{R}$  tales que  $r \neq s$ . Los conjuntos  $U = \mathbb{R} - \{s\}, V = \mathbb{R} - \{r\} \in \tau_{cf}$  pues sus complementos son finitos, además:

$$r \in U \quad \text{y} \quad s \in V$$

además,  $r \notin V$  y  $s \notin U$ . Por tanto, el espacio de  $T_1$ . Pero no es  $T_2$ .

En efecto, suponga que existen  $U, V \in \tau_{cf}$  abiertos tales que  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \in U$ ,  $\frac{1}{\pi} \in V$  y  $U \cap V = \emptyset$ . En particular, se tiene que  $\mathbb{R} - U$  y  $\mathbb{R} - V$  son finitos. Por tanto:

$$\begin{aligned}(\mathbb{R} - U) \cup (\mathbb{R} - V) &= \mathbb{R} - (U \cap V) \\ &= \mathbb{R}\end{aligned}$$

es finito, por tanto,  $\mathbb{R}$  es finito#<sub>c</sub>.

### Ejemplo 2.1.3

Considere al espacio  $(\mathbb{R}, \tau_I = \{X, \emptyset\})$ . Afirmamos que  $(\mathbb{R}, \tau_I)$  es  $T_4$  y  $T_3$ , pero NO es  $T_0$ , pues si  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ,  $\frac{1}{\pi} \in \mathbb{R}$ , solo hay un abierto que contiene a alguno de los dos puntos, el cual es  $\mathbb{R}$ , que siempre tiene a los dos puntos. Por ende, el espacio no es  $T_0$ .

---

### Proposición 2.1.1

$T_4$  y  $T_1 \Rightarrow T_3$  y  $T_1 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$ .

---

#### Demostración:

La prueba se hará más adelante. ■

## 2.2. Espacios $T_1$

---

### Proposición 2.2.1

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. Entonces  $(X, \tau)$  es un espacio  $T_1$  si y sólo si todo subconjunto unitario de  $X$  es cerrado.

---

#### Demostración:

Se probará la doble implicación.

$\Rightarrow$ ) : Suponga que  $(X, \tau)$  es  $T_1$ . Sea  $x \in X$ . Hay que probar que  $X - \{x\} \in \tau$ . En efecto, sea  $y \in X - \{x\}$ , entonces  $x \neq y$ . Como el espacio es  $T_1$  existen un par de abiertos  $U, V \in \tau$  tales que  $x \in U$ ,  $y \in V$  y  $x \notin V$  y  $y \notin U$ .

Como  $y \in V$  y  $x \notin V$ , entonces  $y \in V \subseteq X - \{x\}$ . Luego  $X - \{x\}$  es unión arbitraria de abiertos, luego es abierto. Por ende,  $\{x\}$  es cerrado.

$\Leftarrow$ ) : Suponga que todo subconjunto unitario de  $X$  es cerrado. Sean  $x, y \in X$  tales que  $x \neq y$ . Como  $\{x\}, \{y\}$  son cerrados, entonces  $U = X - \{y\}$  y  $V = X - \{x\}$  son abiertos y cumplen que:

$$x \in U, y \in V \quad x \notin V, y \notin U$$

por tanto, como fueron arbitrarios los dos elementos  $x, y \in X$  distintos, se sigue que  $(X, \tau)$  es  $T_1$ . ■

---

### Corolario 2.2.1

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico.  $(X, \tau)$  es  $T_1$  si y sólo si todo subconjunto finito de  $X$  es cerrado.

---

#### Demostración:

Es inmediata de la proposición anterior. ■

---

**Corolario 2.2.2**

Sea  $X$  un conjunto finito y  $\tau$  una topología definida sobre  $X$ .  $(X, \tau)$  es  $T_1$  si y sólo  $\tau = \tau_D$ .

---

**Demostración:**

Es inmediata de la proposición anterior. ■

---

**Proposición 2.2.2**

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. Entonces,  $(X, \tau)$  es  $T_1$  si y sólo si  $\tau_{cf} \subseteq \tau$ .

---

**Demostración:**

Se probarán las dos implicaciones.

$\Rightarrow$ ) : Sea  $A \in \tau_{cf}$  con  $A \neq \emptyset$ , luego  $X - A$  es un conjunto finito. Como  $(X, \tau)$  es  $T_1$ , entonces  $X - A$  es cerrado (debe serlo por ser finito), luego  $A$  es abierto, es decir  $A \in \tau$ .

$\Leftarrow$ ) : Supongamos que  $\tau_{cf} \subseteq \tau$ . Sean  $x \in X$ . El conjunto  $X - \{x\}$  es finito, luego  $X - \{x\} \in \tau$ , por ende el conjunto  $\{x\}$  es cerrado. Como el  $x$  fue arbitrario, se sigue que todo conjunto unipuntual es cerrado luego, por una proposición anterior, se sigue que  $(X, \tau)$  es  $T_1$ . ■

---

**Corolario 2.2.3**

La topología  $\tau_{cf}$  es la topología más gruesa (o menos fina) que podemos definir sobre un conjunto para que el espacio topológico  $(X, \tau_{cf})$  sea  $T_1$ .

---

**Demostración:**

Es inmediata de la proposición anterior. ■

---

**Proposición 2.2.3**

La propiedad de ser un espacio topológico  $T_1$  es hereditaria.

---

**Demostración:**

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico  $T_1$  y, tomemos  $Y \subseteq X$ . Formemos así al espacio  $(Y, \tau_Y)$ , queremos ver que este espacio es  $T_1$ . En efecto, sea  $y \in Y$ , entonces:

$$\{y\} = \{y\} \cap Y$$

luego,  $\{y\} \subseteq Y$  es un conjunto cerrado en  $(Y, \tau_Y)$ , ya que  $\{y\} \subseteq X$  es un conjunto cerrado en  $(X, \tau)$ . Por ende, todo conjunto unipuntual es cerrado en  $(Y, \tau_Y)$ , luego este subespacio es  $T_1$ . ■

---

**Proposición 2.2.4**

La propiedad de ser un espacio topológico  $T_1$  es topológica.

---

**Demostración:**

Sean  $(X_1, \tau_1)$  y  $(X_2, \tau_2)$  espacios topológicos homeomorfos y, suponga que  $(X_1, \tau_1)$  es un espacio  $T_1$ . Sea  $h : (X_1, \tau_1) \rightarrow (X_2, \tau_2)$  el homeomorfismo entre estos dos espacios. Como esta función es homeomorfismo, es una biyección cerrada y continua. Sea  $x_2 \in X_2$ . Entonces, existe  $x_1 \in X_1$  tal que:

$$h(x_1) = x_2$$

luego, por ser biyección:

$$h(\{x_1\}) = \{x_2\}$$

donde  $\{x_1\}$  es cerrado en  $(X_1, \tau_1)$ . Como  $h$  es cerrada entonces,  $\{x_2\}$  es cerrado en  $(X_2, \tau_2)$ . Por tanto, todo conjunto unipuntual es cerrado en  $(X_2, \tau_2)$ , así  $(X_2, \tau_2)$  es  $T_1$ . ■

---

**Proposición 2.2.5**

Sea  $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in I}$  una familia de espacios topológicos. Sea

$$X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$$

entonces,  $(X, \tau_p)$  es  $T_1$  si y sólo si  $(X_\alpha, \tau_\alpha)$  es  $T_1$ , para todo  $\alpha \in I$ .

---

**Demostración:**

Se probarán las dos implicaciones.

$\Rightarrow$ ) : Suponga que  $(X, \tau_p)$  es  $T_1$ . Como la propiedad de ser un espacio  $T_1$  es hereditaria y topológica, entonces al tenerse que  $(X_\alpha, \tau_\alpha)$  es homeomorfo a un subespacio de  $(X, \tau_p)$ , tal subespacio es  $T_1$  y la propiedad se conserva bajo homeomorfismos luego, se tiene que  $(X_\alpha, \tau_\alpha)$  es  $T_1$ , para todo  $\alpha \in I$ .

$\Leftarrow$ ) : Suponga que  $(X_\alpha, \tau_\alpha)$  es  $T_1$ , para todo  $\alpha \in I$ . Sean  $x = (x_\alpha)_{\alpha \in I}, y = (y_\alpha)_{\alpha \in I} \in X$  con  $x \neq y$ . Por ser diferentes, existe  $\alpha_0 \in I$  tal que

$$x_{\alpha_0} \neq y_{\alpha_0}$$

Como  $(X_{\alpha_0}, \tau_{\alpha_0})$  es  $T_1$ , existen  $U, V \in \tau_{\alpha_0}$  tales que:

$$x_{\alpha_0} \in U, y_{\alpha_0} \in V \quad x_{\alpha_0} \notin V, y_{\alpha_0} \notin U$$

tomemos  $M = \prod_{\alpha \in I} M_\alpha$  y  $N = \prod_{\alpha \in I} N_\alpha$ , donde:

$$M_\alpha = \begin{cases} X_\alpha & \text{si } \alpha \neq \alpha_0 \\ U & \text{si } \alpha = \alpha_0 \end{cases}$$

y

$$N_\alpha = \begin{cases} X_\alpha & \text{si } \alpha \neq \alpha_0 \\ V & \text{si } \alpha = \alpha_0 \end{cases}$$

para todo  $\alpha \in I$ . Entonces,  $x \in M, y \in N$  con  $N, M \in \tau_p$ , pero  $x \notin N, y \notin M$ .

Por tanto,  $(X, \tau_p)$  es  $T_1$ . ■

---

**Proposición 2.2.6**

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico, y sea

$$\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$$

entonces,  $(X, \tau)$  es  $T_2$  si y sólo si  $\Delta$  es un subconjunto cerrado de  $(X \times X, \tau_p)$  (da igual si es la topología producto o de caja ya que ambas coinciden).

---

**Demostración:**

Se probarán las dos implicaciones.

$\Rightarrow$ ) : Suponga que  $(X, \tau)$  es  $T_2$ . Veamos que  $\Delta$  es cerrado en  $(X \times X, \tau_p)$ . Tomemos  $(a, b) \in X \times X$  tal que  $(a, b) \notin \Delta$ , luego  $a \neq b$ . Como  $(X, \tau)$  es  $T_2$ , existen dos abiertos  $U, V \in \tau$  tales que:

$$a \in U, b \in V \quad U \cap V = \emptyset$$

Sea  $L = U \times V$ . Se tiene que  $(a, b) \in L$  y  $L \in \tau_p$ . Además,  $\Delta \cap L = \emptyset$ . En efecto, suponga que existe un elemento  $(x, x) \in L$ , entonces  $x \in U$  y  $x \in V$ , luego  $U \cap V \neq \emptyset$ . Por tanto,  $\Delta \cap L = \emptyset$ . Así, el conjunto  $X \times X - \Delta$  es abierto por ser unión arbitraria de abiertos, luego  $\Delta$  es cerrado en  $(X \times X, \tau_p)$ .

$\Leftarrow$ ) : Suponga que  $\Delta$  es cerrado en  $(X \times X, \tau_p)$ . Sean  $x, y \in X$  con  $x \neq y$ . Entonces,  $(x, y) \notin \Delta$ , luego  $(x, y) \in X \times X - \Delta$  el cual es abierto, luego existe un básico  $B = U \times V$  tal que  $(x, y) \in U \times V \subseteq X \times X - \Delta$ , siendo  $U, V \in \tau$ .

Por la parte anterior, se tiene que  $U \cap V = \emptyset$ . Por tanto:

$$x \in U, y \in V \quad U \cap V = \emptyset$$

por ende, al ser los elementos diferentes  $x, y \in X$  arbitrarios, se sigue que  $(X, \tau)$  es  $T_2$ . ■

## 2.3. Espacios $T_3$

### Proposición 2.3.1

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. Entonces, el espacio es  $T_3$  si y sólo si dado  $x \in X$  y  $U \in \tau$  tal que  $x \in U$  existe  $V \in \tau$  tal que  $x \in V$  y  $\overline{V} \subseteq U$ .

### Demostración:

$\Rightarrow$ ) : Suponga que  $(X, \tau)$  es  $T_3$ . Sea  $x \in X$  y  $U \in \tau$  tal que  $x \in U$ , luego  $x \notin X - U$ , el cual es cerrado, luego por ser el espacio  $T_3$  existen  $W, V \in \tau$  abiertos disjuntos tales que:

$$x \in V \quad \text{y} \quad X - U \subseteq W$$

es claro que  $V \subseteq U$  (pues,  $W \subseteq X - U$  y  $W \cap V = \emptyset$ ). Veamos que  $\overline{V} \subseteq U$ . En efecto, supongamos que  $y \in \overline{V}$  y  $y \notin U$ , entonces  $y \in W$ , luego el conjunto  $W \cap V \neq \emptyset$ . Por ende,  $\overline{V} \subseteq U$ .

$\Leftarrow$ ) : Sea  $x \in X$  y  $F \subseteq X$  cerrado tal que  $x \notin F$ , entonces  $x \in X - F$  el cual es abierto. Luego por hipótesis existe un cerrado  $\overline{V}$  tal que  $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq X - F$ .

Luego,  $F \subseteq X - \overline{V}$ . Tomemos  $W = X - \overline{V}$ . Entonces,  $V$  y  $W$  son abiertos tales que  $x \in V$ ,  $F \subseteq W$  y,  $W \cap V = \emptyset$ . Por tanto,  $(X, \tau)$  es  $T_3$ . ■

### Ejemplo 2.3.1

Considere el espacio topológico  $(X = \{1, 2\}, \tau_I)$ . Este espacio es  $T_3$  pero no es  $T_0$ .

### Ejemplo 2.3.2

Sea  $K = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ , tomemos  $\mathcal{B}$  la colección de subconjuntos de  $\mathbb{R}$  formada por los siguientes conjuntos:

1. Todos los intervalos abiertos  $(a, b)$ .
2. Todos los conjuntos de la forma  $(a, b) - K$ .

Tenemos que  $\mathcal{B}$  es una base para una topología sobre  $\mathbb{R}$ .

Sea  $\tau_K$  la topología generada por la colección  $\mathcal{B}$ . Tenemos que  $\tau_u \subseteq \tau_K$ . Por ende, como  $(\mathbb{R}, \tau_u)$  es  $T_2$ , se sigue que  $(\mathbb{R}, \tau_K)$  también lo es.

Sean  $l \notin \mathbb{R} - K$  y  $L = (l - 1, l + 1) - K$ . Tenemos que  $l \in L$ . El conjunto  $L$  es un básico y, además,  $L \subseteq \mathbb{R} - K$ . Por tanto,  $\mathbb{R} - K \in \tau_K$ , luego  $K$  es un conjunto cerrado en  $(\mathbb{R}, \tau_K)$ .

Tenemos que  $0 \notin K$ . Suponga que  $U, V \in \tau$  son abiertos tales que  $0 \in U$ ,  $K \subseteq V$  y  $U \cap V = \emptyset$ . Como  $0 \in U$ . Sea  $B \in \mathcal{B}$  un básico tal que  $x \in B \subseteq U$ . Tenemos que, dado un intervalo abierto que contenga al 0, este siempre contiene puntos de  $K$ , luego  $B$  debe ser de la forma  $B = (a, b) - K$ .

Sea  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{m} \in (a, b)$ . Se tiene que  $\frac{1}{m} \in K \subseteq V$ , luego existe un básico  $(c, d)$  (debe ser de esta forma) tal que  $\frac{1}{m} \in (c, d) \subseteq V$ . Ahora, podemos suponer que  $a < 0 < c < d < b$ . Sea  $\zeta \in \mathbb{R}$

tal que  $\zeta < \frac{1}{m}$  y  $\max\{c, \frac{1}{m+1}\} < \zeta$ , luego:

$$c < \zeta < \frac{1}{m}$$

entonces, en particular,  $\zeta \in (c, d)$ ,  $\zeta \notin K$  ya que  $\frac{1}{m+1} < \zeta < \frac{1}{m}$  y  $\zeta \in (a, b)$ . Por tanto,  $\zeta \in U \cap V \#_c$ . Así,  $(\mathbb{R}, \tau_K)$  no es  $T_3$ .

---

### Proposición 2.3.2

La propiedad de ser  $T_3$  cumple:

1. Se hereda.
  2. Es topológica.
- 

### Demostración:

De (1): Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico  $T_3$  y sea  $Y \subseteq X$ . Probaremos que  $(Y, \tau_Y)$  es  $T_3$ . Tomemos  $A \subseteq Y$  cerrado con la topología  $\tau_Y$  y  $p \in Y - A$ .

Como  $A$  es cerrado en el subespacio, existe  $C \subseteq X$  cerrado en  $(X, \tau)$  tal que:

$$A = Y \cap C$$

En particular,  $A \subseteq C$ , es decir que  $Y - C \subseteq Y - A$ , luego  $p \notin C$ . Como  $(X, \tau)$  es  $T_3$ , existen  $U, V \in \tau$  disjuntos tales que:

$$p \in V \quad \text{y} \quad C \subseteq U$$

luego, los conjuntos  $Y \cap U, Y \cap V \in \tau_Y$  son tales que:

$$p \in Y \cap V \quad \text{y} \quad A = Y \cap C \subseteq Y \cap U$$

siendo estos disjuntos (pues  $U$  y  $V$  lo son). Por tanto,  $(Y, \tau_Y)$  es  $T_3$ .

De (2): Sean  $(X, \tau)$  y  $(Y, \sigma)$  espacios topológicos homeomorfos, y  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  el homeomorfismo entre ambos.

Suponga que  $(X, \tau)$  es  $T_3$ . Probaremos que  $(Y, \sigma)$  también es  $T_3$ . En efecto, sean  $p \in Y$  y  $F \subseteq Y$  cerrado tales que  $p \notin F$ , es decir que  $p \in Y - F$ . Sea

$$F' = f^{-1}(F)$$

y  $p' = f^{-1}(p)$ . Por ser homeomorfismo, se tiene que  $F'$  es cerrado en  $(X, \tau)$  y, por ser inyectiva se tiene que  $p' \notin F'$ . Luego, como  $(X, \tau)$  es  $T_3$  existen  $U', V' \in \tau$  disjuntos tales que:

$$p' \in V' \quad \text{y} \quad F' \subseteq U'$$

Sean  $U = f(U')$  y  $V = f(V')$ , los cuales son abiertos en  $(Y, \sigma)$  tales que:

$$p = f(p') \in V \quad \text{y} \quad F = f(F') \subseteq U$$

siendo  $U, V$  disjuntos por serlo  $U', V'$ . Luego,  $(Y, \sigma)$  es  $T_3$ . ■

---

### Proposición 2.3.3

Sea  $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in I}$  una familia de espacios topológicos, sea

$$X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$$



entonces,  $(X, \tau_p)$  es  $T_3$  si y sólo si  $(X_\alpha, \tau_\alpha)$  es  $T_3$ , para todo  $\alpha \in I$ .

---

**Demostración:**

$\Rightarrow$ ) : Es inmediata del hecho de que la propiedad de que un espacio sea  $T_3$  es hereditaria y topológica.

$\Leftarrow$ ) : Suponga que para todo  $\alpha \in I$ ,  $(X_\alpha, \tau_\alpha)$  es  $T_3$ . Veamos que  $(X, \tau_p)$  es  $T_3$ . Sea  $x \in X$  y  $U \in \tau_p$  un abierto tal que  $x \in U$ .

Como  $U \in \tau_p$ , podemos encontrar un básico  $B$ , que podemos expresar como  $B = \prod_{\alpha \in I} B_\alpha$ , donde  $B_\alpha = X_\alpha$  para casi todo salvo una cantidad finita de  $\alpha \in I$ , y  $B_\alpha$  es abierto en  $(X_\alpha, \tau_\alpha)$  para todo  $\alpha \in I$ .

Como cada  $(X_\alpha, \tau_\alpha)$  es  $T_3$ , entonces para cada  $B_\alpha$  existe  $V_\alpha \in \tau_\alpha$  tal que  $x_\alpha \in V_\alpha$  y  $\overline{V_\alpha} \subseteq B_\alpha$ , para todo  $\alpha \in I$ .

Si  $B_\alpha = X_\alpha$ , tomemos  $V_\alpha = X_\alpha$ , en caso contrario lo dejamos igual. Entonces, el conjunto  $V = \prod_{\alpha \in I} V_\alpha$  es un básico, en particular, abierto, tal que  $x \in V$ , y

$$\overline{V} = \overline{\prod_{\alpha \in I} V_\alpha} = \prod_{\alpha \in I} \overline{V_\alpha} \subseteq \prod_{\alpha \in I} B_\alpha = B \subseteq U$$

por tanto,  $(X, \tau_p)$  es  $T_3$ . ■

---

**Corolario 2.3.1**

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico.

1. Si  $(X, \tau)$  es regular, entonces y  $Y \subseteq X$ , entonces  $(Y, \tau_Y)$  es regular.
  2. Si  $(X, \tau)$  y  $(X', \tau')$  son espacios homeomorfos y,  $(X, \tau)$  es regular, entonces  $(X', \tau')$  es regular.
  3. Si  $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in I}$  es una familia de espacios topológicos. Si  $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ , entonces  $(X, \tau_p)$  es regular si y sólo si  $(X_\alpha, \tau_\alpha)$  es regular, para todo  $\alpha \in I$ .
- 

**Demostración:**

Son inmediatas del hecho que la propiedad de ser  $T_1$  y  $T_3$  se hereda y es topológica y, de que esta propiedad se preserva bajo productos y elementos del producto. ■

## 2.4. Espacios $T_4$

---

**Proposición 2.4.1**

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. Entonces,  $(X, \tau)$  es  $T_4$  si y sólo si dados  $A \subseteq X$  cerrado y  $U \in \tau$  tales que  $A \subseteq U$ , existe un abierto  $V$  tal que  $A \subseteq V$  y  $\overline{V} \subseteq U$ .

---

**Demostración:**

$\Rightarrow$ ) : Supongamos que  $(X, \tau)$  es  $T_4$ . Sean  $A \subseteq X$  cerrado y  $U \in \tau$  tal que  $A \subseteq U$ . El conjunto  $B = X - U$  es un cerrado tal que  $A \cap B = \emptyset$ . Como el espacio  $(X, \tau)$  es  $T_4$ , existen dos abiertos  $V, W \in \tau$  tales que:

$$A \subseteq V \quad \text{y} \quad B \subseteq W$$

y,  $V \cap W = \emptyset$ . Como  $V \cap W = \emptyset$ , entonces  $V \subseteq X - W \subseteq X - B = U$ . Afirmamos que  $\overline{V} \subseteq U$ . En efecto, notemos que  $X - W$  es un cerrado que contiene a  $V$ , por ende  $\overline{V} \subseteq X - W \subseteq U$ , luego  $\overline{V} \subseteq U$ . Con lo cual se sigue el resultado.

$\Leftarrow$ ) : Sean  $A, B \subseteq X$  cerrados tales que  $A \cap B = \emptyset$ . Se tiene entonces que:

$$A \subseteq X - B$$

donde  $X - B \in \tau$ , luego por hipótesis existe  $U \in \tau$  abierto tal que:

$$A \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq X - B$$

el conjunto  $V = X - \overline{U}$  es un abierto para el cual, se tiene que  $B \subseteq V$ . Luego,  $U, V \in \tau$  son tales que  $A \subseteq U$ ,  $B \subseteq V$  y  $U \cap V = \emptyset$ . Luego el espacio es  $T_4$ . ■

---

### Proposición 2.4.2

Sea  $(X, \tau)$  un espacio  $T_4$  y sea  $A \subseteq X$  un conjunto cerrado. Entonces,  $(A, \tau_A)$  es  $T_4$ .

---

### Demostración:

Sean  $M, N \subseteq (A, \tau_A)$  cerrados tales que  $M \cap N = \emptyset$ . Como  $A$  es cerrado en  $(X, \tau)$ , entonces  $M, N$  son cerrados en  $(X, \tau)$ . Luego, como  $(X, \tau)$  es  $T_4$ , existen dos abiertos  $U', V' \in \tau$  tales que

$$M \subseteq U', \quad N \subseteq V', \quad U' \cap V' = \emptyset$$

Luego, los conjuntos  $U = A \cap U', V = A \cap V' \in \tau_A$  son disjuntos tales que  $M \subseteq U$  y  $N \subseteq V$ , ya que  $M, N \subseteq A$ . Así,  $(A, \tau_A)$  es  $T_4$ . ■

---

### Lema 2.4.1

Sean  $(X_1, \tau_1)$  y  $(X_2, \tau_2)$  dos espacios topológicos homeomorfos. Entonces, si  $f : (X_1, \tau_1) \rightarrow (X_2, \tau_2)$  es el homeomorfismo entre ambos espacios, se tiene que  $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ , para todo  $A \subseteq X_1$ .

---

### Demostración:

Como  $f$  es homeomorfismo, en particular es continua. ■

---

### Proposición 2.4.3

La propiedad de ser  $T_4$  es topológica.

---

### Demostración:

Sean  $(X_1, \tau_1)$  y  $(X_2, \tau_2)$  espacios topológicos homeomorfos tales que  $(X_1, \tau_1)$  es  $T_4$ . Sea  $f : (X_1, \tau_1) \rightarrow (X_2, \tau_2)$  el homeomorfismo entre ellos.

Veamos que  $(X_2, \tau_2)$  es  $T_4$ . En efecto, sea  $A \subseteq X_2$  cerrado y  $U \in \tau_2$  abierto tal que  $A \subseteq U$ . Como  $f$  es homeomorfismo, entonces  $f^{-1}(A) \subseteq X_1$  es cerrado y,  $f^{-1}(U) \in \tau_1$  son tales que:

$$f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(U)$$

Luego, como  $(X_1, \tau_1)$  es  $T_4$ , existe  $W \in \tau_1$  tal que:

$$f^{-1}(A) \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq f^{-1}(U)$$

Sea  $V = f(W)$ . Como  $f$  es homeomorfismo, es una función abierta, luego  $V \in \tau_2$ , para la cual se cumple que:

$$A \subseteq V \subseteq U$$

pero,  $f(\overline{V}) = \overline{f(V)}$  (por ser  $f$  homeomorfismo), se tiene que:

$$A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$$

por tanto,  $(X_2, \tau_2)$  es  $T_4$ . ■

---

**Lema 2.4.2 (Lema de Urysohn)**

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. Entonces,  $(X, \tau)$  es  $T_4$  si y sólo si para todos  $A, B \subseteq X$  cerrados disjuntos, existe una función continua  $f : (X, \tau) \rightarrow ([0, 1], \tau_u)$  tal que  $f(A) = \{1\}$  y  $f(B) = \{0\}$ .

---

**Demostración:**

$\Rightarrow$ ) : Para probar el resultado, debemos hacer varias cosas antes:

1. Sea

$$P = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$$

Nuestro objetivo es que para cada  $p \in P$  le asignemos un conjunto abierto  $U_p \subseteq X$  tal que si  $p, q \in P$  son tales que

$$p < q \Rightarrow \overline{U_p} \subseteq U_q$$

de esta forma, la familia  $\{U_p \mid p \in P\}$  estará simplemente ordenada de la misma forma en la que sus subíndices lo están en  $P$ . Como el conjunto  $P$  es numerable, podemos usar inducción para definir cada uno de los  $U_p$ . Ordenemos los elementos de  $P$  en una sucesión de tal forma que los números 0 y 1 son los primeros de la sucesión (denotada de ahora en adelante por  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ ).

Definiremos ahora los conjuntos  $U_p$  como sigue: defina

$$U_1 = X - B$$

Como  $A$  es un cerrado contenido en  $U_1$ , por ser  $(X, \tau)$   $T_4$ , se tiene que existe un conjunto abierto  $U_0 \subseteq X$  tal que

$$A \subseteq U_0 \quad \text{y} \quad \overline{U_0} \subseteq U_1$$

En general, sea  $P_n$  el conjunto de los primeros  $n$  números racionales en la sucesión de los elementos de  $P$ . Suponga que  $U_p$  está definido para cada  $p \in P_n$  y, satisface la condición:

$$p, q \in P_n \text{ tal que } p < q \Rightarrow \overline{U_p} \subseteq U_q$$

Sea  $r$  el siguiente número racional en la sucesión  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ , esto es  $r = p_{n+1}$ . Definiremos  $U_r$ .

Considere el conjunto

$$P_{n+1} = P_n \cup \{r\}$$

Este es un subconjunto finito del intervalo  $[0, 1]$  y, tiene un orden simple derivado del orden simple  $<$  de  $[0, 1]$ .

En un conjunto finito simplemente ordenado, todo elemento tiene un predecesor inmediato y un sucesor inmediato. El número 0 es el elemento más pequeño y, 1 es el elemento más grande de  $P_{n+1}$  y,  $r$  no es 0 o 1. Por tanto,  $r$  tiene un sucesor y un predecesor inmediato, denotados respectivamente por  $q$  y  $p$ . Los conjuntos  $U_p$  y  $U_q$  están definidos y son tales que

$$\overline{U_p} \subseteq U_q$$

por hipótesis de inducción. Como  $(X, \tau)$  es  $T_4$ , entonces existe un conjunto abierto  $U_r \subseteq X$  tal que

$$\overline{U_p} \subseteq U_r \quad \text{y} \quad \overline{U_r} \subseteq U_q$$

Es claro (pues los conjuntos  $U_p$  con  $p \in P_n$  están ordenados por la contención), que

$$p, q \in P_{n+1} \text{ tal que } p < q \Rightarrow \overline{U_p} \subseteq U_q$$

Usando inducción, tenemos definidos los conjuntos  $U_p$ , para todo  $p \in P$ .

2. Ahora que se tiene definido  $U_p$  para todo número en  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ , extenderemos esta definición a todo  $\mathbb{Q}$ , haciendo

$$\begin{aligned} U_p &= \emptyset, & p < 0 \\ U_p &= X, & 1 < p \end{aligned}$$

para todo  $p \in \mathbb{Q}$ . Se sigue cumpliendo que para todo  $p, q \in \mathbb{Q}$

$$p < q \Rightarrow \overline{U_p} \subseteq U_q$$

3. Dado un punto  $p \in X$ , definamos el conjunto  $\mathbb{Q}(x)$  como el conjunto de todos los números racionales  $p \in \mathbb{Q}$  tales que los correspondientes  $U_p$  contengan a  $x$ , es decir:

$$\mathbb{Q}(x) = \left\{ p \in \mathbb{Q} \mid x \in U_p \right\}$$

Este conjunto no contiene a ningún número menor que 0 ya que  $x \notin U_p$  para todo  $p \in \mathbb{Q}^-$ , además, contiene a todo número mayor que 1, pues  $x \in U_p$  para todo  $p \in \mathbb{Q}$ ,  $p > 1$ . Por tanto,  $\mathbb{Q}(x)$  es acotado inferiormente y no vacío, luego tiene ínfimo en el intervalo  $[0, 1]$ . Defina

$$f(x) = \inf \mathbb{Q}(x) = \inf \left\{ p \in \mathbb{Q} \mid x \in U_p \right\}$$

4. Afirmamos que  $f$  es la función deseada. Si  $x \in A$ , entonces  $x \in U_p$  para todo  $p \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ , luego

$$f(x) = \inf \mathbb{Q}(x) = 0$$

Similarmente, si  $x \in B$ , entonces  $x \notin U_p$  para todo  $p \in \mathbb{Q}$  con  $p \leq 1$ . Luego,  $\mathbb{Q}(x)$  consiste de todos los números racionales mayores a 1 y, por ende,  $f(x) = 1$ .

Probaremos que  $f$  es continua. Para ello, probaremos que se cumplen dos cosas:

- I)  $x \in \overline{U_r}$  implica que  $f(x) \leq r$ .
- II)  $x \notin U_r$  implica que  $f(x) \geq r$ .

Para probar (1), notemos que si  $x \in \overline{U_r}$ , entonces  $x \in U_s$ , para todo  $s > r$ . Entonces,  $\mathbb{Q}(x)$  contiene a todos los números racionales mayores que  $r$ , así que, por definición tenemos que

$$f(x) = \inf \mathbb{Q}(x) \leq r$$

Para probar (2), notemos que si  $x \notin U_r$ , entonces  $x$  no está en  $U_s$  para todo  $s < r$ . Por tanto,  $\mathbb{Q}(x)$  no contiene números racionales menores que  $r$ , por lo cual

$$f(x) = \inf \mathbb{Q}(x) \geq r$$

Ahora probaremos la continuidad de  $f$ . Sea  $x_0 \in X$  y un intervalo abierto  $(c, d)$  en  $\mathbb{R}$  tal que

$$c < f(x_0) < d$$

podemos encontrar números racionales  $p, q \in \mathbb{Q}$  tales que

$$c < p < f(x_0) < q < d$$

Afirmamos que el conjunto

$$U = U_q - \overline{U_p}$$

es un abierto que cumple que  $f(U) \subseteq (c, d)$  y es tal que  $x_0 \in U$ . En efecto, notemos que  $x_0 \in U_q$  pues  $f(x_0) < q$  implica por (2) que  $f(x_0) \in U_q$  y, como  $p < f(x_0)$ , implica por (1) que  $f(x_0) \notin \overline{U_p}$ . Por tanto,  $f(x_0) \in U$ .

Sea  $x \in U$ , entonces  $x \in U_q \subseteq \overline{U_q}$ , por lo cual de (1),  $f(x) \leq q$  y,  $x \notin \overline{U_p}$  implica que  $x \notin \overline{U_p}$  por lo cual de (2) se sigue que  $p \leq f(x)$ . Por tanto,  $f(x) \in [p, q] \subseteq (c, d)$ .

Luego,  $f(U) \subseteq (c, d)$ . Así,  $f$  es continua en  $x_0 \in X$ . Como el punto fue arbitrario, se sigue que  $f$  es continua en  $X$ .

Por los 4 incisos anteriores, se sigue el resultado.

$\Leftarrow$ ) : Sean  $A, B \subseteq X$  cerrados disjuntos. Por hipótesis existe una función continua  $f : (X, \tau) \rightarrow ([0, 1], \tau_u)$  tal que  $f(A) = 1$  y  $f(B) = 0$ . Los conjuntos  $U = f^{-1}((r, 1])$   $V = f^{-1}([0, r))$ , donde  $r \in (0, 1)$ , son dos abiertos (ya que  $f$  es continua y  $[0, r), (r, 1] \in \tau_u$ ) tales que:

$$A \subseteq U \quad B \subseteq V$$

y,  $U \cap V = \emptyset$ . ■

# Capítulo 3

## Filtros

### 3.1. Conceptos Fundamentales

#### Definición 3.1.1

Sean  $X$  un conjunto no vacío y  $\mathcal{F}$  una familia no vacía de subconjuntos no vacíos de  $X$ .  $\mathcal{F}$  se dice que es un **filtro** si cumple lo siguiente:

1.  $\emptyset \notin \mathcal{F}$ .
2. Si  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ , entonces  $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ .
3. Si  $K \subseteq X$  y  $F \subseteq K$  para algún  $F \in \mathcal{F}$ , entonces  $K \subseteq \mathcal{F}$ . (*Propiedad de absorción*).

#### Ejemplo 3.1.1

Sea  $X$  un conjunto no vacío. Entonces,  $\{X\}$  es un filtro sobre  $X$ .

#### Observación 3.1.1

Si  $\mathcal{F}$  es un filtro sobre un conjunto no vacío  $X$  entonces, se cumple lo siguiente:

1.  $\forall A, B \in \mathcal{F}, A \cap B \neq \emptyset$ .
2. Si  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ , entonces  $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$  y es no vacía.

#### Ejemplo 3.1.2

Sea  $X$  un conjunto no vacío y  $A \subseteq X$  no vacío. Entonces,

$$\mathcal{F}_A = \left\{ M \subseteq X \mid A \subseteq M \right\}$$

es un filtro sobre  $X$ .

#### Observación 3.1.2

Si  $A = \{x\}$ , escribiremos  $\mathcal{F}_x$  en vez de  $\mathcal{F}_{\{x\}}$ .

**Ejemplo 3.1.3**

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico con  $X$ . Sea

$$\xi_x = \left\{ V \subseteq X \mid V \in \mathcal{V}(x) \right\}$$

con  $x \in X$  (recordando que  $\mathcal{V}(x)$  es el conjunto de todas las vecindades de  $x$ ). Entonces,  $\xi_x$  es un filtro sobre  $X$ . Este filtro es llamado el **filtro de vecindades sobre el punto  $x$** .

**Demostración:**

Tenemos que verificar 4 condiciones:

1.  $X \in \xi_x$ .
2.  $\emptyset \notin \xi_x$ .
3.  $M, N \in \mathcal{V}(x)$  implica que  $M \cap N \in \mathcal{V}(x)$ .
4. Sea  $L \subseteq X$  tal que  $V \in \mathcal{V}(x)$  cumple que  $V \subseteq L$ , entonces  $L \in \mathcal{V}(x)$ .

Luego,  $\xi_x$  es un filtro sobre  $X$ . ■

**Observación 3.1.3**

Si  $\mathcal{F}$  es un filtro sobre  $X$ , entonces  $X \in \mathcal{F}$ .

**Proposición 3.1.1**

Sean  $X$  un conjunto no vacío y  $\{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in I}$  una familia de filtros sobre  $X$ . Entonces,  $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha$  es un filtro en  $X$ .

**Demostración:**

Sea

$$\mathcal{K} = \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha$$

1.  $\mathcal{K} \neq \emptyset$ , pues  $X \in \mathcal{F}_\alpha$ , para todo  $\alpha \in I$ .
2.  $\emptyset \notin \mathcal{K}$ , pues  $\emptyset \notin \mathcal{F}_\alpha$  para todo  $\alpha \in I$ .
3. Sean  $A, B \in \mathcal{K}$ , entonces  $A, B \in \mathcal{F}_\alpha$  para todo  $\alpha \in I$ . Por ser filtros se sigue que  $A \cap B \in \mathcal{F}_\alpha$  para todo  $\alpha \in I$ , luego  $A \cap B \in \mathcal{K}$ .
4. Sea  $M \subseteq X$  y sea  $L \in \mathcal{K}$  tal que  $L \subseteq M$ , entonces  $L \in \mathcal{F}_\alpha$  para todo  $\alpha \in I$ . Como cada  $\mathcal{F}_\alpha$  cumple la propiedad de absorción, se tiene que  $M \in \mathcal{F}_\alpha$  para todo  $\alpha \in I$ , luego  $M \in \mathcal{K}$ .

Por los 4 incisos anteriores, se sigue que  $\mathcal{K}$  es un filtro sobre  $X$ . ■

**Ejemplo 3.1.4**

Sea  $X = \{a, b\}$  con  $a \neq b$ . Tomemos  $\mathcal{F}_1 = \{X, \{a\}\}$  y  $\mathcal{F}_2 = \{X, \{b\}\}$ . Entonces  $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$  no es un filtro, ya que en caso contrario se tendría que  $\{a\} \cap \{b\} = \emptyset \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ , lo cual no puede ser.

Así, la unión de filtros no necesariamente es un filtro.

---

**Proposición 3.1.2**

Si  $\{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in I}$  es una familia de filtros sobre  $X$  tal que dados  $\alpha, \beta \in I$  se tiene que

$$\mathcal{F}_\alpha \subseteq \mathcal{F}_\beta \text{ o } \mathcal{F}_\beta \subseteq \mathcal{F}_\alpha$$

entonces  $\mathcal{F} = \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha$  es un filtro.

---

**Demostración:**

En efecto, veamos que  $\mathcal{F}$  es un filtro.

1.  $\mathcal{F} \neq \emptyset$  ya que  $X \in \mathcal{F}_\alpha$  para algún  $\alpha \in I$ .
2.  $\emptyset \notin \mathcal{F}$ , pues  $\emptyset \notin \mathcal{F}_\alpha$  para todo  $\alpha \in I$ .
3. Sean  $A, B \in \mathcal{F}$ . Entonces, existen  $\alpha, \beta \in I$  tales que  $A \in \mathcal{F}_\alpha$  y  $B \in \mathcal{F}_\beta$ , entonces se tiene una de las dos contenciones:

$$\mathcal{F}_\alpha \subseteq \mathcal{F}_\beta \text{ o } \mathcal{F}_\beta \subseteq \mathcal{F}_\alpha$$

supongamos que  $\mathcal{F}_\alpha \subseteq \mathcal{F}_\beta$ , entonces  $A, B \in \mathcal{F}_\beta$ . Por tanto,  $A \cap B \in \mathcal{F}_\beta$ . Así,  $A \cap B \in \mathcal{F}$ .

4. Sea  $M \subseteq X$  y  $L \in \mathcal{F}$  tal que  $L \subseteq M$ . Como  $L \in \mathcal{F}$  existe  $\alpha \in I$  tal que  $L \in \mathcal{F}_\alpha$ , luego por la propiedad de absorción  $M \in \mathcal{F}_\alpha$ . Por tanto,  $M \in \mathcal{F}$ .

Por los cuatro incisos anteriores, se sigue que  $\mathcal{F}$  es un filtro sobre  $X$ . ■

**Definición 3.1.2**

Sea  $\mathcal{F}$  un filtro sobre  $X$ . Una familia no vacía  $\mathcal{B}$  de subconjuntos de  $X$  es **una base para el filtro  $\mathcal{F}$**  si se cumple lo siguiente:

1.  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ .
2.  $\forall F \in \mathcal{F}$  existe  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $B \subseteq F$ .

**Observación 3.1.4**

Observamos que

1. Si  $\mathcal{F}$  es un filtro sobre un conjunto  $X$ , entonces  $\mathcal{F}$  es una base para sí mismo.
2. Si  $\mathcal{B}$  es una base para el filtro  $\mathcal{F}$  sobre  $X$  y,  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ , entonces existe  $B_3 \in \mathcal{B}$  tal que  $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ .

**Definición 3.1.3**

Sea  $X$  un conjunto no vacío y  $\mathcal{B}$  una familia no vacía de subconjuntos no vacíos de  $X$ . Se dice que  $\mathcal{B}$  es **una base de filtro en  $X$** , si se cumple lo siguiente: Dados  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  existe  $B_3 \in \mathcal{B}$  tal que  $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ .

---

**Proposición 3.1.3**

Sea  $X$  un conjunto no vacío y  $\mathcal{B}$  una base de filtro en  $X$ . Entonces:

$$\mathcal{B}^+ = \left\{ A \subseteq X \mid \exists B \in \mathcal{B} \text{ tal que } B \subseteq A \right\}$$



es un filtro en  $X$  y este se dice **el filtro generado por la base  $\mathcal{B}$** . Además,  $\mathcal{B}$  es una base para  $\mathcal{B}^+$ .

---

**Demostración:**

Se tienen que probar dos cosas:

1. Es claro que  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}^+$ . Por tanto,  $\mathcal{B}^+ \neq \emptyset$ .
2.  $\emptyset \notin \mathcal{B}^+$  es cierto pues  $\emptyset \notin \mathcal{B}$ , ya que  $\mathcal{B}$  es una subcolección no vacía de conjuntos no vacíos.
3. Tomemos  $K, M \in \mathcal{B}^+$  luego, existen  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  tal que  $B_1 \subseteq K$  y  $B_2 \subseteq M$ . Por tanto,  $B_1 \cap B_2 \subseteq K \cap M$ . Por ser  $\mathcal{B}$  base para un filtro sobre  $X$ , existe  $B_3 \in \mathcal{B}$  tal que  $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq K \cap M$ . Luego,  $K \cap M \in \mathcal{B}^+$ .
4. Sea  $W \subseteq X$  y  $L \in \mathcal{B}^+$  tal que  $L \subseteq W$ . Existe  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $B \subseteq L \subseteq W$ , luego  $B \subseteq W$ . Por tanto,  $W \in \mathcal{B}^+$ .

Por los cuatro incisos anteriores, se sigue que  $\mathcal{B}^+$  es un filtro sobre  $X$ . ■

---

**Proposición 3.1.4**

Sea  $\mathcal{F}$  un filtro sobre  $X$  y  $A \subseteq X$  tal que  $\forall F \in \mathcal{F}, A \cap F \neq \emptyset$ . Entonces

$$\mathcal{B} = \left\{ A \cap F \mid F \in \mathcal{F} \right\}$$

es una base de filtro y, el filtro generado por ella  $\mathcal{B}^+$  cumple lo siguiente:

1.  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}^+$ .
  2.  $A \in \mathcal{B}^+$ .
- 

**Demostración:**

Se deben cumplir varios incisos:

1.  $\mathcal{B} \neq \emptyset$ , pues el conjunto  $A \cap X = A \in \mathcal{B}$  ya que  $X \in \mathcal{F}$ .
2.  $\emptyset \notin \mathcal{B}$  ya que se contradeciría la hipótesis de que  $A \cap F = \emptyset$  para todo  $F \in \mathcal{F}$ .
3.  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  implica que existen  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$  tales que  $B_1 = A \cap F_1$  y  $B_2 = A \cap F_2$ . Por tanto

$$B_1 \cap B_2 = A \cap (F_1 \cap F_2)$$

donde,  $A \cap (F_1 \cap F_2) \in \mathcal{B}$  pues,  $\mathcal{F}$  es un filtro sobre  $X$ . Luego, tomando  $B_3 = B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$ , se sigue que  $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ .

por los tres incisos anteriores, se sigue que  $\mathcal{B}$  es base para un filtro sobre  $X$ . Ya se tiene que  $A \in \mathcal{B}^+$ , pues  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}^+$ .

Sea ahora  $F \in \mathcal{F}$ . Entonces,  $F \cap A \in \mathcal{B}^+$ . Por propiedad de absorción se debe tener que como  $F \cap A \subseteq F$ , entonces  $F \in \mathcal{B}^+$ . ■

---

**Proposición 3.1.5**

Sean  $X$  y  $Y$  dos conjuntos no vacíos. Sea  $\mathcal{F}$  un filtro en  $X$  y  $f : X \rightarrow Y$  una función. Entonces,

$$\mathcal{B} = \left\{ f(A) \mid A \in \mathcal{F} \right\}$$

es una base de filtro en  $Y$ . En este caso, se denotará por  $f(\mathcal{F})$  a  $\mathcal{B}^+$ , esto es  $f(\mathcal{F}) = \mathcal{B}^+$ .

**Demostración:**

Se deben verificar tres condiciones

1.  $\mathcal{B} \neq \emptyset$ , pues  $f(X) \in \mathcal{B}$ .
2. Todos los elementos de  $\mathcal{B}$  son no vacíos, pues como  $\mathcal{F}$  es un filtro sobre  $X$ , todos sus elementos son no vacíos, así  $f(F) \neq \emptyset$  para todo  $F \in \mathcal{F}$ .
3. Si  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ , entonces existen  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$  tales que  $B_1 = f(F_1)$  y  $B_2 = f(F_2)$ . Por tanto, el conjunto

$$B_3 = f(F_1 \cap F_2) \subseteq f(F_1) \cap f(F_2) = B_1 \cap B_2$$

es tal que  $B_3 \in \mathcal{B}$ , ya que  $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ .

por los incisos anteriores, se sigue que  $\mathcal{B}$  es base de un filtro en  $Y$ . ■

**Ejemplo 3.1.5**

Considere  $X = \{a, b\}$ ,  $a \neq b$ . Sea  $f : X \rightarrow X$  dada como sigue:

$$f(a) = a = f(b)$$

el conjunto  $\mathcal{F} = \{X, \{a\}\}$  es un filtro sobre  $X$ . la colección

$$f(\mathcal{F}) = \{\{a\}\}$$

no es un filtro en  $X$  ya que  $X \notin f(\mathcal{F})$ .

**Proposición 3.1.6**

Sean  $X$  y  $Y$  dos conjuntos no vacíos,  $\mathcal{F}$  un filtro en  $X$  y  $f : X \rightarrow Y$  una función. Entonces,  $f$  es una función suprayectiva si y sólo si  $\left\{f(F) \mid F \in \mathcal{F}\right\}$  es un filtro en  $Y$ .

**Demostración:**

Necesidad: Suponga que  $f$  es suprayectiva. Ya se sabe que

$$\mathcal{K} = \left\{f(F) \mid F \in \mathcal{F}\right\}$$

es una base de filtro. Se tiene que por ser  $f$  suprayectiva que

$$f(f^{-1}(A)) = A, \quad \forall A \subseteq Y$$

Se cumplen tres condiciones:

1.  $\mathcal{K} \neq \emptyset$  pues,  $f(X) \in \mathcal{K}$ .
2. Como  $\mathcal{F}$  no contiene al vacío, entonces  $\mathcal{K}$  tampoco lo contiene.
3. Sea  $L \subseteq Y$  tal que existe  $F \in \mathcal{F}$  con  $f(F) \subseteq L$ . Entonces:

$$F \subseteq f^{-1}(f(F)) \subseteq f^{-1}(L)$$

por ser  $\mathcal{F}$  un filtro, luego:  $f^{-1}(L) \in \mathcal{F}$ . Así,  $L = f(f^{-1}(L)) \in \mathcal{K}$ .

4. Sean  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ . Se tiene que  $f(F_1), f(F_2) \in \mathcal{K}$ . Luego:

$$F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$$

además,  $f(F_1 \cap F_2) \subseteq f(F_1) \cap f(F_2)$ . Luego, por la propiedad anterior se sigue que  $f(F_1) \cap f(F_2) \in \mathcal{K}$  ya que  $f(F_1 \cap F_2) \in \mathcal{K}$ .

Por los 4 incisos anteriores se sigue que  $\mathcal{K}$  es un filtro.

Suficiencia: Es inmediata del hecho de que  $Y$  está en la familia  $f(\mathcal{F})$ , luego  $f(X) = Y$ . ■

#### Definición 3.1.4

Sea  $X$  un conjunto no vacío. Un **ultrafiltro**  $\mathcal{F}$  en  $X$  es un filtro maximal respecto a la inclusión.

#### Proposición 3.1.7

Sea  $X$  un conjunto no vacío y sea  $\xi$  un filtro en  $X$ . Entonces existe un ultrafiltro  $\mathcal{U}$  en  $X$  tal que  $\xi \subseteq \mathcal{U}$ .

#### Demostración:

Considere la familia

$$\mathcal{L} = \left\{ \xi_\alpha \mid \alpha \in I \right\}$$

de todos los filtros  $\xi_\alpha$  en  $X$  que contienen a  $\xi$ . Esta familia es no vacía ya que  $\xi \in \mathcal{L}$ . Además, esta familia está parcialmente ordenada bajo la relación  $\subseteq$ . Sea  $\mathcal{C}$  una cadena de  $(\mathcal{L}, \subseteq)$ . Tomemos

$$\rho = \bigcup_{\xi \in \mathcal{C}} \xi$$

por tanto,  $\rho$  es un filtro en  $X$  (ver observación anterior para garantizar que la unión de filtros sea un filtro); además,  $\xi \subseteq \rho$ . Tenemos que  $\rho \in \mathcal{L}$  y, por construcción para todo  $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ ,  $\mathcal{F} \subseteq \rho$ .

Por el lema de Zorn existe un elemento maximal  $\mathcal{U}$  de  $(\mathcal{L}, \subseteq)$  el cual es el ultrafiltro buscado que contiene a  $\xi$ . ■

#### Ejemplo 3.1.6

Sea  $X = \{a, b\}$  con  $a \neq b$ . Tomemos al filtro

$$\mathcal{F} = \{X\}, \quad \mathcal{U}_1 = \{X, \{a\}\} \quad \mathcal{U}_2 = \{X, \{b\}\}$$

se tiene que  $\mathcal{F}$  es un filtro y,  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$  son ultrafiltros en  $X$ . Además  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}_1$  y  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}_2$ .

Es decir, la existencia del ultrafiltro no es única.

#### Proposición 3.1.8

Sea  $\xi$  un ultrafiltro en el conjunto no vacío  $X$ . Entonces se cumple lo siguiente:

1. Si  $A, B \subseteq X$  y  $A \cup B \in \xi$ , entonces alguno de los dos  $A, B$  es elemento del filtro.
2. Si  $A_1, \dots, A_k \subseteq X$  tales que  $\bigcup_{i=1}^k A_i \in \xi$ , entonces existe  $l \in \llbracket 1, k \rrbracket$  tal que  $A_l \in \xi$ .

**Demostración:**

De (1): Sean  $A, B \subseteq X$  tales que  $A \cup B \in \xi$ . Se tienen varios casos:

1. Suponga que para todo  $C \in \xi$  se tiene que  $C \cap A \neq \emptyset$ . Entonces, el conjunto

$$\mathcal{B} = \{C \cap A \mid A \in \xi\}$$

es una base de filtro y,  $\mathcal{B}$  cumple que  $\xi \subseteq \mathcal{B}$ . Por tanto,  $\xi = \mathcal{B}$ . Pero,  $A \in \mathcal{B}$ , luego  $A \in \xi$ .

2. Suponga que existe  $C_0 \in \xi$  tal que  $C_0 \cap A = \emptyset$ . Entonces:

$$\begin{aligned} C \cap B &= (C \cap A) \cup (C \cap B) \\ &= C \cap (A \cup B) \end{aligned}$$

donde  $C \in \xi$  y  $A \cup B \in \xi$ . Por tanto,  $C \cap B \in \xi$ . Pero,  $C \cap B \subseteq B$ , luego por absorción se sigue que  $B \in \xi$ .

De (2): Se hace usando inducción sobre  $k$ . ■

**Proposición 3.1.9**

Sea  $\xi$  un filtro en  $X$ . Entonces,  $\xi$  es un ultrafiltro si y sólo si para todo subconjunto  $A \subseteq X$ ,  $A \in \xi$  ó  $X - A \in \xi$ .

**Demostración:**

Necesidad: Sea  $A \subseteq X$ . Escribimos  $X = A \cup (X - A)$ . Como  $\xi$  es un filtro, entonces  $X \in \xi$ . Por la proposición anterior se tiene que  $A \in \xi$  ó  $X - A \in \xi$ .

Suficiencia: Sea  $\eta$  un filtro en  $X$  tal que  $\xi \subseteq \eta$ . Tomemos  $A \subseteq X$  tal que  $A \in \eta$ . Entonces,  $X - A \notin \eta$ , luego  $X - A \notin \xi$ . Por hipótesis, debe suceder que  $A \in \xi$ . De esta forma,  $\xi = \eta$ .

Luego,  $\xi$  es un ultrafiltro. ■

**Ejercicio 3.1.1**

Sean  $X$  y  $Y$  conjuntos,  $\xi$  un ultrafiltro de  $X$  y sea  $f : X \rightarrow Y$  una función suprayectiva. Entonces,  $f(\xi)$  es un ultrafiltro en  $Y$ .

**Demostración:**

Ya se tiene que  $f(\xi)$  es un filtro en  $Y$ . ■

**Ejemplo 3.1.7**

Sea  $X$  un conjunto no vacío y sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de puntos en  $X$ , entonces

$$\rho = \{A \subseteq X \mid \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall k \geq N, x_k \in A\}$$

es un filtro en  $X$  y, se dice el **filtro asociado a la sucesión**.

**Demostración:**

Hay que verificar 4 condiciones:

1.  $\emptyset \notin \rho$ .
2.  $X \in \rho$  ya que la sucesión está en  $X$ .

3. Sean  $A, B \in \rho$ . Entonces, existen  $N, M \in \mathbb{N}$  tales que  $k \geq N \Rightarrow x_k \in A$  y  $k \geq M \Rightarrow x_k \in B$ .  
Sea

$$N_0 = \max\{N, M\} \in \mathbb{N}$$

entonces, si  $k \geq N_0$  se tiene que  $x_k \in A$  y  $x_k \in B$ , luego  $x_k \in A \cap B$ . Por ende,  $A \cap B \in \rho$ .

4. Sea  $L \subseteq X$  y  $A \in \rho$  tal que  $A \subseteq L$ . Como  $A \in \rho$  entonces existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $k \geq N \Rightarrow x_k \in A \subseteq L$ . Por ende,  $L \in \rho$ .

por los incisos anteriores, se sigue que  $\rho$  es un filtro en  $X$ . ■

### Definición 3.1.5

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. Una sucesión de puntos de  $X$ ,  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  se dice que **converge** a un punto  $l \in X$  si para todo  $U \in \tau$  tal que  $l \in U$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $k \geq N$ ,  $x_k \in U$ .

### Proposición 3.1.10

Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de puntos de  $X$  y sea  $\rho$  el filtro asociado a la sucesión. Sea  $l \in X$ , entonces  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge al punto  $l$  si y sólo si  $\xi_l \subseteq \rho$ .

### Demostración:

Necesidad: Suponga que la sucesión converge a  $l \in X$ . Sea  $V \in \xi_l$ , entonces existe un abierto  $U \subseteq X$  tal que  $l \in U \subseteq V$ . Como la sucesión converge a  $l$  y  $U$  es abierto, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $k \geq N$  se tiene que  $x_k \in U \subseteq V$ . Por tanto,  $V \in \rho$ .

Luego,  $\xi_l \subseteq \rho$ .

Suficiencia: Suponga que  $\xi_l \subseteq \rho$ . Si  $U \subseteq X$  es abierto tal que  $l \in U$ , entonces  $U \in \xi_l \subseteq \rho$ , luego existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $k \geq N$  implica que  $x_k \in U$ .

Así, la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $l$ . ■

### Ejemplo 3.1.8

Sea  $X = \{1, 2, 3\}$  y considere la topología  $\tau = \{X, \emptyset, \{1, 2\}, \{3\}\}$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$  se define  $X_n = 1$ .

Se tiene que la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a 1 y 2.