Notas Curso Álgebra Moderna III
Una Introducción a la Teoría de Galois Finita

Cristo Daniel Alvarado

25 de junio de 2024

Índice general

Capítulo 1

Extensiones de Campos

1.1. Fundamentos

Observación 1.1.1
El símbolo $\rlap{\forall}{\smile}$ significa para casi todo salvo una cantidad finita de elementos.

Definición 1.1.1
Sean E y F campos. Decimos que E/F es una **extensión de campos** si se cumple que $F \subseteq E$. Se denomina como **grado de la extensión** E/F a la dimensión de E como espacio vectorial sobre F, denotado por $[E : F]$, esto es

$$[E : F] = \dim_F(E)$$

Definición 1.1.2
Decimos que una extensión de campos E/F es una **extensión finita**, si $[E : F] < \infty$. En caso contrario, decimos que es una **extensión infinita**, y lo escribimos como $[E : F] = \infty$.

Teorema 1.1.1
Sea $K \subseteq F \subseteq E$ una torre de campos (también llamada cadena de campos). Entonces,

$$[E : K] = [E : F] \cdot [F : K]$$

Demostración:
Sea $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ y $\{\beta_j\}_{j\in J}$ bases de F sobre K y E sobre F, respectivamente.

$$\begin{array}{l} E \\ \ \ | \leftarrow \{\beta_j\}_{j\in J} \\ F \\ \ \ | \leftarrow \{\alpha_i\}_{i\in I} \\ K \end{array}$$

Afirmamos que $\{\alpha_i\beta_j\}_{(i,j)\in I\times J}$ es base de E sobre K. En efecto, claramente $\alpha_i\beta_j \in E$ para todo $(i, j) \in I \times J$. Notemos que necesariamente

$$\left|\left\{\alpha_i \middle| i \in I\right\}\right| = |I| \quad \text{y} \quad \left|\left\{\beta_j \middle| j \in J\right\}\right| = |J|$$

por ser ambas bases. Sea $u \in E$, entonces u se expresa de forma única como combinación lineal de elementos de la base $\{\beta_j\}_{j\in J}$ con coeficientes en F, digamos

$$u = \sum_{j\in J} f_j \beta_j$$

donde $f_j \in F$ para todo $j \in J$ y $f_j = 0 \forall\!\!\!\forall\, j \in J$. Por otro lado, cada $f_j \in F$ se expresa de forma única como una combinación lineal de elementos de la base $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ sobre K:

$$f_j = \sum_{i\in I} k_{i,j} \alpha_i$$

donde $k_{i,j} \in K$ para todo $i \in I$ siendo $k_{i,j} = 0 \forall\!\!\!\forall\, i \in I$, para cada $j \in J$. Luego,

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j\in J} f_j \beta_j \\ &= \sum_{j\in J} \left(\sum_{i\in I} k_{i,j} \alpha_i \right) \beta_j \\ &= \sum_{(i,j)\in I\times J} k_{i,j} \alpha_i \beta_j \end{aligned}$$

donde $k_{i,j} \in K$ y $k_{i,j} = 0 \forall\!\!\!\forall\, (i,j) \in I \times J$. Luego

$$E = \mathcal{L}\left(\left\{ \alpha_i \beta_j \middle| (i,j) \in I \times J \right\} \right)$$

Probemos que $\{\alpha_i \beta_j\}_{(i,j)\in I\times J}$ es l.i. sobre K ∎