Lista 2 de Ejercicios
Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

14 de abril de 2024

Índice general

Capítulo 1

Ejercicios Convolución

Ejercicio 1.1.1
Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ funciones nulas en $]-\infty, 0[$. Si existe $f * g(x)$, demuestre que:

$$f * g(x) = \begin{cases} \int_0^\infty f(y)g(x-y)dy & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

En los casos siguientes f y g son nulas en $]-\infty,0[$ y sus valores en $[0, \infty[$ se indican abajo. Calcule $f * g$.

I. $f(x) = e^{-x}$ y $g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

II. $f(x) = g(x) = e^{-x}$.

III. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

IV. $f(x) = g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

Solución:

Para la demostracíón, el caso $x \geq 0$ es inmediato de la definición de convolución y del hecho de que f es nula en $]-\infty, 0[$. Suponga que existe $f * g(x)$ con $x < 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy \\ &= \int_0^{\infty} f(y)g(x-y)dy \end{aligned}$$

sea $y \in [0, \infty[$, es decir que $0 \leq y < \infty$, por lo cual $-\infty < -y \leq 0$. Sumando x a ambos lados se sigue que:

$$-\infty < x - y \leq x < 0 \Rightarrow x - y \in]-\infty, 0[$$

por tanto, $g(x-y) = 0$, para todo $y \in [0, \infty[$. Por tanto, $f * g(x) = 0$.

De (i): Veamos que:

$$f * g(x) = \begin{cases} \int_0^\infty e^{-y}g(x-y)dy & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Sea $x \geq 0$. Analicemos varios casos:

- $0 \leq x \leq 1$, en este caso $0 \leq x-y \leq 1$ si y sólo si $y \leq x$ y $x-1 \leq y$ (pero, $x-1 \leq 0$, por lo cual $0 \leq y$), por ende:

$$\begin{aligned}
f * g(x) &= \int_0^x e^{-y} g(x-y) dy \\
&= \int_0^x e^{-y} (x-y) dy \\
&= x \int_0^x e^{-y} dy - \int_0^x y e^{-y} dy \\
&= x \left[-e^{-y}\right]_0^x - \left[-e^{-y}(y+1)\right]_0^x \\
&= x - xe^{-x} + \left[e^{-y}(y+1)\right]_0^x \\
&= x - xe^{-x} + (x+1)e^{-x} - 1 \\
&= (x-1) + e^{-x}
\end{aligned}$$

- $1 < x$, en este caso $0 \leq x-y \leq 1$ si y sólo si $y \leq x$ y $x-1 \leq y$ (donde $0 < x-1$ por como se eligió el x). Por ende:

$$\begin{aligned}
f * g(x) &= \int_{x-1}^x e^{-y} g(x-y) dy \\
&= \int_{x-1}^x e^{-y} (x-y) dy \\
&= x \int_{x-1}^x e^{-y} dy - \int_{x-1}^x y e^{-y} dy \\
&= x \left[-e^{-y}\right]_{x-1}^x + \left[(y+1)e^{-y}\right]_{x-1}^x \\
&= xe^{1-x} - xe^{-x} + (x+1)e^{-x} - (x-1+1)e^{1-x} \\
&= xe^{1-x} - xe^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} - xe^{1-x} \\
&= e^{-x}
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$f * g(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si} \quad 1 < x \\ (x-1) + e^{-x} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

De (ii): Veamos que:

$$f * g(x) = \begin{cases} \int_0^\infty e^{-y} g(x-y) & \text{si} \quad 0 \leq x \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

analicemos a $g(x-y)$. Si $x \geq 0$ entonces, $x - y \geq 0$ si y sólo si $x \geq y$. Por tanto, para $x \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-y} g(x-y) &= \int_0^x e^{-y} e^{y-x} dy \\
&= \int_0^x e^{-x} dy \\
&= xe^{-x}
\end{aligned}$$

de esta forma:

$$f * g(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{si} \quad 0 \leq x \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

De (iii): Veamos que:

$$f * g(x) = \begin{cases} \int_0^1 g(x-y) dy & \text{si} \quad 0 \leq x \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

$\square$

Ejercicio 1.1.2
Haga lo siguiente:

I. Para toda $m\in\mathbb{N}$ se define $e_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ como:

$$e_m(x)=\begin{cases}\frac{x^{m-1}}{(m-1)!} & \text{si} \quad x\geq 0\\ 0 & \text{si} \quad x<0\end{cases}$$

Pruebe que

$$e_p*e_q=e_{p+q}$$

II. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{K}$ integrable en todo intervalo acotado tal que $f(x)=0$ para todo $x\leq a$. **Muestre** que

$$e_m*f(x)=\begin{cases}\int_a^x\frac{(x-y)^{m-1}}{(m-1)!}f(y)dy & \text{si} \quad x\geq a\\ 0 & \text{si} \quad x<a\end{cases}$$

III. **Deduzca** que para $x\geq a$ se cumple la siguiente **fórmula de Cauchy para la n-ésima integral indefinida**

$$\int_a^x dx_{m-1}\int_a^{x_{m-1}}dx_{m-2}\cdots\int_a^{x_2}dx_1\int_a^{x_1}f(x_0)dx_0=\int_a^x\frac{(x-y)^{m-1}}{(m-1)!}f(y)dy$$

Demostración:
De (i): Sean $p,q\in\mathbb{N}$. Entonces:

$$e_p(x)=\begin{cases}\frac{x^{p-1}}{(p-1)!} & \text{si} \quad x\geq 0\\ 0 & \text{si} \quad x<0\end{cases} \quad \text{y} \quad e_q(x)=\begin{cases}\frac{x^{q-1}}{(q-1)!} & \text{si} \quad x\geq 0\\ 0 & \text{si} \quad x<0\end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}e_p*e_q(y)&=\int_{-\infty}^{\infty}e_p(x)\cdot e_q(y-x)dx\\ &=\int_0^{\infty}\frac{x^{p-1}}{(p-1)!}\cdot e_q(y-x)dx\end{aligned}$$

analicemos dos casos:

- $y<0$: Entonces, para todo $x\geq 0$, se sigue que $-x\leq 0$, luego $y-x<0$. Por ende, $e(y-x)=0$. Luego:

$$e_p*e_q(y)=0=e_{p+q}(y)$$

- $y\geq 0$: Entonces, $y-x\geq 0$ si y sólo si $x\in[0,y]$. Por tanto, la integral se vuelve en:

$$\begin{aligned}e_p*e_q(y)&=\int_0^y\frac{x^{p-1}}{(p-1)!}\cdot e_q(y-x)dx\\ &=\int_0^y\frac{x^{p-1}}{(p-1)!}\cdot\frac{(y-x)^{q-1}}{(q-1)!}dx\\ &=\frac{1}{(p-1)!(q-1)!}\cdot\int_0^y x^{p-1}(y-x)^{q-1}dx\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\int_0^y x^{p-1}(y-x)^{q-1}dx &= \int_0^y x^{p-1}\sum_{k=0}^{q-1}\binom{q-1}{k}(-1)^{q-1}x^k(-y)^{q-1-k}dx \\
&= (-1)^{q-1}\int_0^y\sum_{k=0}^{q-1}\binom{q-1}{k}x^{p+k-1}(-y)^{q-1-k}dx \\
&= (-1)^{q-1}\sum_{k=0}^{q-1}\binom{q-1}{k}(-y)^{q-1-k}\int_0^y x^{p+k-1}dx \\
&= (-1)^{q-1}\sum_{k=0}^{q-1}\binom{q-1}{k}(-y)^{q-1-k}\left[\frac{x^{p+k}}{p+k}\right]_0^y \\
&= (-1)^{q-1}\sum_{k=0}^{q-1}\binom{q-1}{k}(-y)^{q-1-k}\frac{y^{p+k}}{p+k} \\
&= (-1)^{2q-2}\sum_{k=0}^{q-1}\binom{q-1}{k}\frac{(-1)^k y^{p+q-1}}{p+k} \\
&= y^{p+q-1}\sum_{k=0}^{q-1}\binom{q-1}{k}\frac{(-1)^k}{p+k}
\end{aligned}$$

veamos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(p-1)!(q-1)!}\sum_{k=0}^{q-1}\binom{q-1}{k}\frac{(-1)^k}{p+k} &= \frac{1}{(p-1)!(q-1)!}\sum_{k=0}^{q-1}\frac{(q-1)!}{k!(q-1-k)!}\cdot\frac{(-1)^k}{p+k} \\
&= \frac{1}{(p-1)!(q-1)!}\sum_{k=0}^{q-1}\frac{(-1)^k(q-1)!}{k!(q-1-k)!(p+k)} \\
&= \frac{1}{(p-1)!}\sum_{k=0}^{q-1}\frac{(-1)^k}{k!(q-1-k)!(p+k)} \\
&= ... \\
&= \frac{1}{(p-1)!}\cdot\frac{(p-1)!}{(p+q-1)!} \\
&= \frac{1}{(p+q-1)!}
\end{aligned}$$

por tanto,

$$e_p * e_q(y) = \frac{y^{p+q-1}}{(p+q-1)!} = e_{p+q}(y)$$

por ambos incisos, se sigue que $e_p * e_q = e_{p+q}$.

De (ii): Veamos que:

$$f * e_m(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e_m(x-y)dy$$

Como $f(y) = 0$ para todo $y \leq a$, se sigue que:

$$f * e_m(x) = \int_a^{\infty} f(y)e_m(x-y)dy$$

Se tienen dos casos:

- Si $x < a$, entonces para todo $a \leq y$ se tiene que $x - y < 0$, luego $e_m(x-y) = 0$. Por tanto:

$$f * e_m(x) = 0$$

- Si $a \leq x$, entonces $x - y \geq 0$ si y sólo si $a \leq y \leq x$. Por tanto,

$$\begin{aligned} f * e_m(x) &= \int_a^x f(y)e_m(x-y)dy \\ &= \int_a^x f(y)\frac{(y-x)^{m-1}}{(m-1)!}dy \\ &= \int_a^x \frac{(y-x)^{m-1}}{(m-1)!}f(y)dy \end{aligned}$$

  donde, esta integral existe, pues la función $y \mapsto (x-y)^{m-1}$ es acotada en $[a, x]$ y, $y \mapsto f(y)$ es integrable en este intervalo acotado.

Por ambos incisos, se sigue que la convolución existe para todo $x \in \mathbb{R}$ y, su valor es:

$$f * e_m(x) = e_m * f(x) = \begin{cases} \int_a^x \frac{(x-y)^{m-1}}{(m-1)!}f(y)dy & \text{si} \quad x \geq a \\ 0 & \text{si} \quad x < a \end{cases}$$

De (iii): Procederemos por inducción sobre m.

- Para $m = 1$ el resultado es inmediato, pues

$$\begin{aligned} \int_a^x f(x_0)dx_0 &= \int_a^x \frac{1}{1}f(y)dy \\ &= \int_a^x \frac{(x-y)^{1-1}}{(1-1!)}f(y)dy \end{aligned}$$

- Suponga el resultado válido para algún $m \in \mathbb{N}$. Probaremos que se cumple para $m+1$. En efecto, primero notemos que la función $e_m * f$ es una función integrable en todo intervalo acotado (ya que la integral de la convolución es el producto de las integrales de las funciones en la convolución), nula para todo $x \leq a$. Por ende:

$$(e_m * f) * e_1(x) = \begin{cases} \int_a^x \frac{(x-y)^{1-1}}{(1-1)!}(e_m * f)(y)dy & \text{si} \quad x \geq a \\ 0 & \text{si} \quad x < a \end{cases}$$

  en el caso que $x \geq a$:

$$(e_m * f) * e_1(x) = \int_a^x \frac{(x-y)^{1-1}}{(1-1)!}(e_m * f)(y)dy$$

Por tanto, se sigue que

$$
\begin{aligned}
\int_a^x dx_m \int_a^{x_m} dx_{m-1} \cdots \int_a^{x_2} dx_1 \int_a^{x_1} f(x_0)dx_0 &= \int_a^x dx_m \int_a^{x_m} \frac{(x_m-y)^{m-1}}{(m-1)!} f(y)dy \\
&= \int_a^x (e_m * f)(x_m)dx_m \\
&= \int_a^x \frac{(x-y)^{1-1}}{(1-1)!}(e_m * f)(y)dy \\
&= (e_m * f) * e_1(x) \\
&= (f * e_m) * e_1(x) \\
&= f * (e_m * e_1)(x) \\
&= f * e_{m+1}(x) \\
&= \int_a^x f(y)\frac{(x-y^m)}{m!}dy \\
&= \int_a^x \frac{(x-y)^m}{m!} f(y)dy \\
&= \int_a^x \frac{(x-y)^{m+1-1}}{(m+1-1)!} f(y)dy
\end{aligned}
$$

por lo cual, el resultado se cumple para $m+1$.

Aplicando inducción, se obtiene lo deseado. ■

Ejercicio 1.1.3
La integral fraccional de orden $1 \geq \alpha > 0$ sobre un intervalo $[a,x]$ de una función medible f se define como:

$$
I_a^\alpha[f](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt
$$

para toda $x \geq a$ tal que la integral exista.

I. Fije $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Para cada $1 \geq \alpha > 0$ se define

$$
g_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{x^{1-\alpha}} \chi_{]0,b-a[}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}
$$

Pruebe que si $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$, entonces existe la convolución $\widetilde{f} * g_\alpha$. **Calcule** $\widetilde{f} * g_\alpha$.

II. **Calcule** $I_0^{1/2}[t](x)$ y $I_0^{1/2}[I_0^{1/2}[t]](x)$. ¿**Conclusión**? Justifique.

Demostración:
De (i): Sea $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$. Veamos que existe la convolución. En efecto, se tiene que $\widetilde{f} \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R},\mathbb{K})$, para todo $p \in [1,\infty]$. Ahora, notemos que:

$$
1 - \alpha \geq 0
$$

■

Ejercicio 1.1.4
Para todo $p > 0$ se define:

$$
f_p(t) = \begin{cases} t^{p-1}e^{-t} & \text{si} \quad t > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \end{cases}
$$

Calculando de dos modos distintos la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f_p * f_q$ con $p, q > 0$, **pruebe** la fórmula

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

donde $B(p,q)$ es la función beta y $\Gamma(q)$ es la función gama.

Demostración:

Sean $p, q > 0$. Como las funciones $f_p, f_q \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ (ver la definición de la función Gamma) entonces, por el teorema de Young, $f_p * f_q \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{K})$. Ahora, se tiene además que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_p * f_q(y)dy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_p(y)dy\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_p(y)dy\right) = \Gamma(p)\Gamma(q)$$

(ya que $\int -\infty^{\infty} f_p = \int_0^{\infty} t^{p-1}e^{-t}dt = \Gamma(p)$). Ahora, si $y \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$\begin{aligned} f_p * f_q(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_p(t) f_q(y-t)dt \\ &= \int_0^{\infty} t^{p-1}e^{-t} f_q(y-t)dt \end{aligned}$$

Por un ejercicio anterior, si $y \leq 0$, la convolución es cero (suponemos entonces que $y > 0$). Entonces, $y - t > 0$ si y sólo si $y > t$. Por ende:

$$\begin{aligned} f_p * f_q(y) &= \int_0^{y} t^{p-1}e^{-t} f_q(y-t)dt \\ &= \int_0^{y} t^{p-1}e^{-t}(y-t)^{q-1}e^{-y+t}dt \\ &= e^{-y}\int_0^{y} t^{p-1}(y-t)^{q-1}dt \end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $x = \frac{t}{y}$, obtenemos que

$$\begin{aligned} e^{-y}\int_0^{y} t^{p-1}(y-t)^{q-1}dt &= e^{-y}\int_0^{1} (xy)^{p-1}(y-xy)^{q-1}ydx \\ &= e^{-y}y^{p+q-1}\int_0^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \\ &= e^{-y}y^{p+q-1}B(p,q) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_p * f_q(y)dy &= \int_0^{\infty} e^{-y}y^{p+q-1}B(p,q)dy \\ &= B(p,q)\int_0^{\infty} e^{-y}y^{p+q-1}dy \\ &= B(p,q)\Gamma(p+q) \end{aligned}$$

de ambas igualdades, se sigue que

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= B(p,q)\Gamma(p+q) \\ \Rightarrow B(p,q) &= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \end{aligned}$$

■

Ejercicio 1.1.5
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ una función localmente integrable en $\mathbb{R}$. Defina para todo $h > 0$, la función

$$J_h f = f * \left(\frac{1}{h}\chi_{]-h,0[}\right)$$

I. **Muestre** que, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$J_h f(x) = \frac{1}{h}\int_0^h f(x+y)dy$$

y que $J_h f$ es continua en $\mathbb{R}$.

II. Si f es integrable en $\mathbb{R}$, **pruebe** que también lo es $J_h f$ y que

$$\int_{\mathbb{R}} J_h f = \int_{\mathbb{R}} f$$

III. Si f es de clase C^r en $\mathbb{R}$, **muestre** que también lo es $J_h f$ y que $(J_h f)^{(k)} = J_h f^{(k)}$ para $k = 1, ..., r$.

Solución:

De (i): Sea $x \in \mathbb{R}$. Calculemos $J_h f$, para ello, calcularemos $\left(\frac{1}{h}\chi_{]-h,0[}\right) * f(x)$. Veamos que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{h}\chi_{]-h,0[}\right) * f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h}\chi_{]-h,0[}(y) f(x-y)dy \\
&= \frac{1}{h}\int_{-h}^{0} f(x-y)dy \\
&= \frac{1}{h}\int_{0}^{h} f(x+u)du
\end{aligned}$$

pues, como f es localmente integrable, se sigue que la función $y \mapsto f(x-y)$ también lo es y, haciendo el cambio de variable $u = -y$.

Veamos la continuidad, en efecto, sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Queremos que

$$\begin{aligned}
\big|J_h f(x_0) - J_h f(x)\big| &= \frac{1}{h}\cdot\Big|\int_0^h f(x_0+y) - f(x+y)dy\Big| \\
&\leq \frac{1}{h}\cdot\int_0^h \big|f(x_0+y) - f(x+y)\big|dy
\end{aligned}$$

...

De (ii): Suponga que f es integrable en $\mathbb{R}$, es decir que $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, como la función $x \mapsto \frac{1}{h}\chi_{]-h,0[}(x)$ es una función acotada nula fuera de un conjunto con medida finita así, está en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, luego por el teorema de Young se sigue que $J_h f = f * \left(\frac{1}{h}\chi_{]-h,0[}\right)$ es una función definida c.t.p. en $\mathbb{R}$ la cual es integrable, para la que se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} J_h f(y)dy = \left(\int_{\mathbb{R}} f(y)dy\right)\cdot\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{h}\chi_{]-h,0[}(y)dy\right) = \int_{\mathbb{R}} f(y)dy$$

De (iii): Como f es de clase C^r, en particular hasta la r-ésima derivada es una función continua. Luego, las funciones $f^{(k)}$ con $k = 0, 1, ..., r$ son continuas en $\mathbb{R}$, en particular, localmente integrables en $\mathbb{R}$. Luego, por (i) las convoluciones $J_h f^{(k)}$ existen en todo $\mathbb{R}$ y son funciones continuas. Para probar el resultado, basta con ver que

$$(J_h f)^{(1)} = J_h f^{(1)}$$

(aplicando inducción sobre r, se obtendría que $J_h f$ es una función clase C^r tal que $(J_h f)^{(k)} = J_h f^{(k)}$, para todo $k = 1, ..., r$). En efecto, sea $x \in \mathbb{R}$ y considere la vecindad $]x-h, x+h[$ de x. Se tiene que:

$$J_h f^{(1)}(x) = \frac{1}{h}\int_0^h f^{(1)}(x+y)dy$$

donde, $y \mapsto f^{(1)}(x+y)$ es una función continua, en particular alcanza su máximo en todo intervalo compacto. Observemos que si $M = \sup\left\{\left|f^{(1)}(z)\right| \middle| z \in]x-h, x+y[\right\}$, se tiene que:

$$\left|\chi_{[0,h]}(y)f(x+y)\right| \leq M\chi_{[0,h]}(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

donde $y \mapsto M\chi_{[0,h]}(y)$ es una función integrable independiente de x. Luego, por el teorema de derivación, se sigue del teorema de derivación de funciones definidas por integrales, que existe $(J_h f)^{(1)}$ en $]x-h, x+h[$ y, su valor es:

$$(J_h f)^{(1)}(z) = J_h f^{(1)}(z) \quad \forall x \in]x-h, x+h[$$

Como el $x \in \mathbb{R}$ fue arbitrario y esto se cumple para la vecindad $]x-h, x+h[$ de x, entonces el resultado se cumple para todo $\mathbb{R}$, es decir que:

$$(J_h f)^{(1)} = J_h f^{(1)}$$

$\square$

Ejercicio 1.1.6
Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n$. Sea $B = \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| \|x\| \leq R\right\}$. Defina:

$$\mathcal{M}_R f = f * \frac{\chi_B}{\mathrm{Vol}\,(B)}$$

I. **Muestre** que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{M}_R f(x) = \frac{1}{\mathrm{Vol}\,(B)}\int_{\|x-y\|\leq R} f(y)dy$$

y que $\mathcal{M}_R f$ es continua en $\mathbb{R}^n$.

II. Si f es integrable en $\mathbb{R}^n$, **pruebe** que también lo es $\mathcal{M}_R f$ y que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}_R f = \int_{\mathbb{R}^n} f$$

III. Si f es de clase C^r en $\mathbb{R}^n$, **muestre** que también lo es $\mathcal{M}_R f$ y que $D(\mathcal{M}_R f) = \mathcal{M}_R(Df)$ para todo opeardor $D = \partial_{\alpha_1} \cdots \partial_{\alpha_k}$, con $k \in \{1, ..., r\}$.

Solución:

$\square$

Definición 1.1.1
Sea $F : X \to X$ con (X, d) espacio métrico. Se dice que F es una **función contractante** si existe $\alpha \in]0, 1[$ tal que

$$d(F(x), F(y)) \leq \alpha \cdot d(x, y), \quad \forall x, y \in X$$

claramente, F es lipschitziana y, por lo tanto, uniformemente continua.

Teorema 1.1.1 (Teorema del punto fijo)
Si F es una función contractante de un espacio métrico completo (X, d) en sí mismo, entonces F posee un único punto fijo, es decir $\exists! x_0 \in X$ tal que

$$F(x_0) = x_0$$

Además, si $x \in X$ es arbitrario, entonces

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} F^n(x)$$

Ejercicio 1.1.7
Haga lo siguiente:

I. Sean f y g dos funciones en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Sea $\lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$ tal que $\mathcal{N}_1(f) < 1/\left|\lambda\right|$. **Demuestre** que la ecuación
$$x = \lambda x * f + g$$
admite una solución $x \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ salvo equivalencias. **Muestre** que la solución puede ser representada en forma de una serie
$$x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^\nu g * \underbrace{f * \cdots * f}_{\nu\text{-veces}}$$
que es convergente en el espacio de Banach $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$.

II. Al suponer $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y $g \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, estudie la misma ecuación con la incógnita x en $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$.

Demostración:
De (i): Sea $F : \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \to \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ la función tal que

$$x \mapsto F(x) = \lambda x * f + g$$

Podemos considerar a esta función del espacio de Banach $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ en sí mismo. Para probar el resultado, usaremos el teorema del punto fijo, con lo cual se probará la existencia de $x \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ tal que
$$x = \lambda x * f + g$$
el cual es único salvo equivalencias (esto, pues la solución es única en el espacio de Banach $L_1(\mathbb{R}, \mathbb{K})$). En efecto, para esto basta con probar que F es contractante. Veamos que si $x_1, x_2 \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_1(F(x_1) - F(x_2)) &= \mathcal{N}_1(\lambda x_1 * f + g - \lambda x_2 * f - g) \\
&= \left|\lambda\right| \mathcal{N}_1(x_1 * f - x_2 * f) \\
&= \left|\lambda\right| \mathcal{N}_1((x_1 - x_2) * f) \\
&\leq \left|\lambda\right| \mathcal{N}_1(f)\, \mathcal{N}_1(x_1 - x_2)
\end{aligned}$$

donde, $0 \leq \lambda \mathcal{N}_1(f) < 1$. Por tanto, F es contractante. Luego existe tal $x \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

Veamos que la solución puede ser representada en forma de la serie:

$$x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^\nu g * \underbrace{f * \cdots * f}_{\nu-\text{veces}}$$

Por el teorema del punto fijo, sabemos que la solución está dada por:

$$x = \lim_{\nu\to\infty} F^\nu(y)$$

donde $y \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ es un elemento arbitrario de este espacio. Tomando $y = g$, obtenemos que

$$x = \lim_{k\to\infty} F^k(g)$$

donde F^k es la composición de F k-veces. Afirmamos que

$$F^k(g) = \sum_{\nu=0}^{k} \lambda^\nu g * \underbrace{f * \cdots * f}_{\nu-\text{veces}}$$

En efectom procederemos por inducción sobre k. Para $k = 1$ el resultado es inmediato de la definición de F. Suponga que el resultado se cumple para algún $k \in \mathbb{N}$. Veamos que se cumple para $k + 1$. En efecto, notemos que

$$\begin{aligned}
F^{k+1}(g) &= F(F^k(g)) \\
&= F\left(\sum_{\nu=0}^{k} \lambda^\nu g * \underbrace{f * \cdots * f}_{\nu-\text{veces}}\right) \\
&= \lambda\left(\sum_{\nu=0}^{k} \lambda^\nu g * \underbrace{f * \cdots * f}_{\nu-\text{veces}}\right) * f + g \\
&= \sum_{\nu=0}^{k} \lambda^{\nu+1} g * \underbrace{f * \cdots * f}_{\nu+1-\text{veces}} + g \\
&= \sum_{\nu=1}^{k+1} \lambda^{\nu} g * \underbrace{f * \cdots * f}_{\nu-\text{veces}} + g \\
&= \sum_{\nu=0}^{k+1} \lambda^{\nu} g * \underbrace{f * \cdots * f}_{\nu-\text{veces}}
\end{aligned}$$

lo cual prueba el resultado. Por tanto:

$$\begin{aligned}
x &= \lim_{k\to\infty} F^k(g) \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{\nu=0}^{k} \lambda^\nu g * \underbrace{f * \cdots * f}_{\nu-\text{veces}} \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^\nu g * \underbrace{f * \cdots * f}_{\nu-\text{veces}}
\end{aligned}$$

De (ii): ■

Ejercicio 1.1.8
Haga lo siguiente:

I. Sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ una función medible. **Muestre** que existe una función medible acotada $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ tal que $\left|g\right| = \alpha g$ en todo punto de $\mathbb{R}^n$.

Sugerencia. Intente con la función $\frac{\left|g+\chi_S\right|}{g+\chi_S}$ donde $S = \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| g(x) = 0\right\}$.

II. Sean $1 < p < \infty$ y $g \in \mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Defina $\phi_g : \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ como:

$$\phi_g(f) = \int_{\mathbb{R}^n} fg, \quad \forall f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$$

Pruebe que ϕ_g es una aplicación lineal continua sobre $L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y que $\|\phi_g\| = \mathcal{N}_{p^*}(g)$.

Así pues, la aplicación $g \mapsto \phi_g$ es una isometría de $\mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ en $\mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ (dicha isometría también es suprayectiva, pero este hecho más profundo no se pide probar aquí).

Sugerencia. Para probar la desigualdad $\mathcal{N}_{p^*}(g) \leq \|\phi_g\|$ considere la función $f = \alpha\left|g\right|^{p^*-1}$, donde α es la función del inciso (i).

III. Sea $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ una sucesión de Dirac en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Se quiere demostrar, sin usar la desigualdad de Jensen, que si $1 \leq p < \infty$ y $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, entonces

$$\lim_{\nu\to\infty} \mathcal{N}_p\left(f - \rho_\nu * f\right) = 0$$

Defina $g_\nu = f - \rho_\nu * f$ y considere la aplicación lineal $\phi_{g_\nu} \in L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})^*$, donde

$$\phi_{g_\nu}(h) = \int_{\mathbb{R}^n} hg_\nu, \quad \forall h \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$$

Establezca la desigualdad

$$\left|\phi_{g_\nu}(h)\right| \leq \mathcal{N}_{p^*}(h) \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\nu(y)\mathcal{N}_p\left(f_{-y} - f\right) dy$$

Sea $\varepsilon > 0$. **Demuestre** que para ν suficientemente grande,

$$\left|\phi_{g_\nu}(h)\right| \leq \mathcal{N}_{p^*}(h)\, \varepsilon$$

Utilizando el inciso (ii) termine la demostración.

Demostración:
De (i): Tomemos la función $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ dada como sigue

$$\alpha = \frac{\left|g + \chi_S\right|}{g + \chi_S}$$

donde $S = \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| g(x) = 0\right\}$. Esta función está bien definida y cumple que $\left|g\right| = \alpha g$, pues si $x \in \mathbb{R}^n$, se tienen dos casos:

- $x \in \mathbb{R}^n \backslash S$, en este caso $\chi_S(x) = 0$ y $g(x) \neq 0$. Por tanto,

$$\alpha(x) = \frac{\left|g(x)\right|}{g(x)} \Rightarrow \left|g(x)\right| = \alpha g(x)$$

- $x \in S$, en cuyo caso se tiene que $\chi_S(x) = 1$ y, $g(x) = 0$. Por lo cual

$$\alpha(x) = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \left|g(x)\right| = 0 = \alpha g(x) = 0$$

así, α está bien definida y cumple lo deseado. Además, es medible por ser el cociente de dos funciones medibles. También es acotada, ya que por los dos incisos anteriores se tiene que

$$\left|\alpha\right| = 1$$

De (ii): Es claro por la linealidad de la integral y por Hölder que φ_g es un operador lineal, para todo $g \in \mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Veamos que es continuo, en efecto, por Hölder se tiene que:

$$\begin{aligned}
\left|\phi_g(f)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} fg\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |fg| \\
&= \mathcal{N}_1\left(fg\right) \\
&\leq \mathcal{N}_p\left(f\right)\mathcal{N}_{p^*}\left(g\right) \\
&= \mathcal{N}_{p^*}\left(g\right)\mathcal{N}_p\left(f\right)
\end{aligned}$$

por tanto, ϕ_g es acotado, luego continuo. Se tiene entonces que

$$\|\phi_g\| \leq \mathcal{N}_{p^*}\left(g\right)$$

Probaremos la otra desigualdad. Se tiene que $\alpha\left|g\right|^{p^*-1} \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. En efecto, veamos que

$$\begin{aligned}
\left|\alpha\left|g\right|^{p^*-1}\right|^p &= \left|g\right|^{pp^*-p} \\
&= \left|g\right|^{p^*} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})
\end{aligned}$$

pues, $g \in \mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y, por definición de $p, p^* \in]0, \infty[$. Luego $\alpha\left|g\right|^{p^*-1} \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Se sigue entonces que

$$\begin{aligned}
\left|\phi_g(\alpha\left|g\right|^{p^*-1})\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}} \alpha\left|g\right|^{p^*-1} g\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}} |g|\left|g\right|^{p^*-1}\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}} \left|g\right|^{p^*}\right| \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left|g\right|^{p^*} \\
&= \mathcal{N}_{p^*}\left(g\right)^{p^*}
\end{aligned}$$

y, además

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_p\left(\alpha\left|g\right|^{p^*-1}\right) &= \left(\int_{\mathbb{R}} \left|\alpha\right|^p \left|g\right|^{pp^*-p}\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} \left|g\right|^{p^*}\right)^{1/p} \\
&= \mathcal{N}_{p^*}\left(g\right)^{p^*/p}
\end{aligned}$$

por tanto, al tenerse que

$$
\begin{aligned}
\left|\phi_g(\alpha\left|g\right|^{p^*-1})\right| &\leq \|\phi_g\|\mathcal{N}_p\left(\alpha\left|g\right|^{p^*-1}\right)\\
\Rightarrow \mathcal{N}_{p^*}\left(g\right)^{p^*} &\leq \|\phi_g\|\mathcal{N}_{p^*}\left(g\right)^{p^*/p}
\end{aligned}
$$

si $\mathcal{N}_{p^*}\left(g\right)=0$, es claro que $\left|\phi_g\right|=\mathcal{N}_{p^*}\left(g\right)$. En caso contrario, se sigue de la ecuación anterior que

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \mathcal{N}_{p^*}\left(g\right)^{p^*-\frac{p^*}{p}} &\leq \|\phi_g\|\\
\Rightarrow \mathcal{N}_{p^*}\left(g\right) &\leq \|\phi_g\|
\end{aligned}
$$

Por ambas desigualdades, se sigue que $\left|\phi_g\right|=\mathcal{N}_{p^*}\left(g\right)$.

De (iii): Veamos que

■

Ejercicio 1.1.9
Demuestre que el sistema de potencias enteras $\left\{x^\nu\middle|\nu\in\mathbb{N}^*\right\}$ es total en $L_p([a,b],\mathbb{C})$ para $p\in[1,\infty[$.

Sugerencia. Basta demostrarlo para $L_1([-\pi,\pi],\mathbb{C})$. El sistema trigonométrico es total en este espacio. Desarrolle $e^{ik\pi}$ en serie de potencias de Maclaurin.

Demostración:

■

Ejercicio 1.1.10
Demuestre que el sistema de potencias enteras $\left\{x^\nu\middle|\nu\in\mathbb{N}^*\right\}$ es completo en $L_p([a,b],\mathbb{C})$ para $p\in[1,\infty[$.

Demostración:

■

Ejercicio 1.1.11
Sean $E\subseteq\mathbb{R}^n$ un conjunto medible con medida finita y $1<p<\infty$. **Muestre** que si una familia de funciones $\left\{\varphi_i\middle|i\in I\right\}$ es completa en $L_p(E,\mathbb{K})$, entonces dicha familia es total en $L_{p^*}(E,\mathbb{K})$.

Sugerencia. Sea $f\in\mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$. Se supone que $\int_E f\varphi_i=0$ para toda $i\in I$. Sea α una función medible acotada tal que $\left|f\right|=\alpha f$. Por hipótesis existe una sucesión de funciones $\{\psi_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ en $\mathcal{L}(\left\{\varphi_i\middle|i\in I\right\})$ tal que $\lim_{\nu\to\infty}\mathcal{N}_p\left(\alpha-\psi_\nu\right)=0$.

Demostración:

■