Lista 7.

1.1. i. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función convexa, donde I es un intervalo en $\mathbb{R}$. Sean $x_1, \ldots, x_r \in I$ y sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ números no negativos tales que $\sum_{k=1}^{r} \alpha_k = 1$. **Demuestre** que $\sum_{k=1}^{r} \alpha_k x_k \in I$ y

$$f\left[\sum_{k=1}^{r} \alpha_k x_k\right] \leqslant \sum_{k=1}^{r} \alpha_k f(x_k).$$

ii. Sean $a_1, \ldots, a_r \geqslant 0$ y sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_r > 0$ tales que $\sum_{k=1}^{r} \alpha_k = 1$. **Pruebe** que

$$a_1 \cdots a_r \leqslant \sum_{k=1}^{r} \alpha_k a_k^{1/\alpha_k}.$$

Dem:

De (i): Procedamos por inducción sobre r. Para $r=2$ el resultado es inmediato. Suponga el resultado válido par $r=K$.

Probaremos que se cumple para $r=K+1$. En efecto: Sean $x_1, \ldots, x_{K+1} \in I$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_{K+1}$ números no neg. m $\sum_{i=1}^{K+1} \alpha_i = 1$. Entonces:

$$f\left(\sum_{i=1}^{K+1} \alpha_i x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{K-1} \alpha_i x_i + \alpha_K x_K + \alpha_{K+1} x_{K+1}\right)$$

Supongamos que $\alpha_K, \alpha_{K+1} \neq 0$ (si son cero, el resultado es inmediato), luego $\alpha_K + \alpha_{K+1} = 1 - \sum_{i=1}^{K-1} \alpha_i \neq 0$. Tenemos que:

$$= f\left(\sum_{i=1}^{K-1} \alpha_i x_i + \left[1 - \sum_{i=1}^{K-1} \alpha_i\right] \cdot \underbrace{\frac{\alpha_K x_K + \alpha_{K+1} x_{K+1}}{1 - \sum_{i=1}^{K-1} \alpha_i}}_{= x_K + x_{K+1}}\right)$$

Como el resultado se cumple para $r=K$, tenemos:

$$\leqslant \sum_{i=1}^{K-1} \alpha_i f(x_i) + \left(1 - \sum_{i=1}^{K-1} \alpha_i\right) f\left(\frac{\alpha_K x_K + \alpha_{K+1} x_{K+1}}{1 - \sum_{i=1}^{K-1} \alpha_i}\right)$$

Aplicando el resultado para $r=2$, y como $\dfrac{\alpha_K + \alpha_{K+1}}{1 - \sum_{i=1}^{K-1} \alpha_i} = 1$, tenemos:

$$\leqslant \sum_{i=1}^{K-1} \alpha_i f(x_i) + \left(1 - \sum_{i=1}^{K-1} \alpha_i\right) \left[\frac{\alpha_K}{1 - \sum_{i=1}^{K-1} \alpha_i} f(x_K) + \frac{\alpha_{K+1}}{1 - \sum_{i=1}^{K-1} \alpha_i} f(x_{K+1})\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{K+1} \alpha_i f(x_i)$$

$\square$

De (ii): Como log es cóncava, entonces de (i):

$$\Rightarrow \log\left[\sum_{K=1}^{r} \alpha_K a_K^{1/\alpha_K}\right] \geqslant \sum_{K=1}^{r} \alpha_K \log\left(a_K^{1/\alpha_K}\right) = \sum_{K=1}^{r} \log(a_K) = \log\left[\prod_{K=1}^{r} a_K\right]$$

Como log es creciente, tenemos que:

$$\Rightarrow \prod_{K=1}^{r} a_K \leqslant \sum_{K=1}^{r} \alpha_K a_K^{1/\alpha_K}$$

$\square$

1.2. **(Desigualdad de Hölder Generalizada.)**

i. Sean $p, q \in [1, \infty]$ tales que $1/p + 1/q \leqslant 1$. Se define

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Muestre que si $f \in \mathscr{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y $g \in \mathscr{L}_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, entonces $fg \in \mathscr{L}_s(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y

$$\mathscr{N}_s(fg) \leqslant \mathscr{N}_p(f)\mathscr{N}_q(g).$$

ii. Sean $k_1, \ldots, k_r > 1$ tales que $1/k_1 + \cdots + 1/k_r \leqslant 1$. Se define

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_r}.$$

Demuestre que si $f_j \in \mathscr{L}_{k_j}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ para $j = 1, \ldots, r$, entonces $f_1 \cdots f_r \in \mathscr{L}_s(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y

$$\mathscr{N}_s(f_1 \cdots f_r) \leqslant \mathscr{N}_{k_1}(f_1) \cdots \mathscr{N}_{k_r}(f_r).$$

Dem:

De (i): Notemos que $s \geqslant 1$, pues $\frac{1}{s} \leqslant 1$. Si $N_p(f) = 0$ o $N_q(g) = 0$, la desigualdad se sigue de forma inmediata (pues $f = 0$ o $g = 0$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$). Suponga entonces que $N_p(f) > 0$ y $N_q(g) > 0$. Defina:

$$F(x) = \left(\frac{f(x)}{N_p(f)}\right)^s \quad y \quad G(x) = \left(\frac{g(x)}{N_q(x)}\right)^s, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Veamos que $\frac{s}{p} + \frac{s}{q} = 1$ (por def. de s). Por tanto, usando un lema anterior, obtenemos que:

$$|F(x)G(x)| \leqslant \frac{s}{p}|F(x)|^{p/s} + \frac{s}{q}|G(x)|^{q/s}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Por ser $s \geqslant 1$, entonces:

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{fg}{N_p(f)N_q(g)}\right|^s \leqslant \frac{s}{p}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f|^p}{N_p(f)^p} + \frac{s}{q}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|g|^q}{N_q(g)^q}$$

Y $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f|^p}{N_p(f)^p} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|g|^q}{N_q(g)^q} = 1$. Luego:

$$\Rightarrow \quad 0 \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |fg|^s \leqslant \left(\frac{s}{p} + \frac{s}{q}\right)(N_p(f)N_q(g))^s = (N_p(f)N_q(g))^s < \infty$$

Así, $fg \in \mathcal{L}_s(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y:

$$N_s(fg) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |fg|^s\right)^{1/s} \leqslant N_p(f)N_q(g)$$

De (ii):

1.3. Sea $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{C})$ el espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{C}$ de las funciones continuas en $[0,1]$ con valores complejos. Para cada $p \in [1,\infty[$, se define

$$\mathscr{N}_p(f) = \left[\int_0^1 |f|^p\right]^{1/p}, \quad \forall f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{C}).$$

Pruebe que $\mathscr{N}_p$ es una norma (no sólo una seminorma) sobre $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{C})$ y que todas estas normas son inequivalentes a pares.

Sugerencia. Considere la sucesión de funciones $\{f_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ dada por

$$f_\nu(x) = \begin{cases} \nu(1-\nu x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1/\nu, \\ 0 & \text{si } 1/\nu \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Dem:

En la teoría se probó que N_p es una seminorma sobre $\mathcal{L}_p([0,1],\mathbb{C})$. Como $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{C})$ es un subespacio de éste, $\forall p \in [1,\infty[$ (pues toda función continua en un compacto es acotada), entonces N_p es seminorma sobre $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{C})$.

Veamos que es norma. Como:

$$N_p(f) = 0 \iff f = 0 \text{ c.t.p. en } [0,1], \ \forall f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{C})$$

Pero $f = 0$ c.t.p. en $[0,1] \iff |f| = 0$ c.t.p. en $[0,1]$. Sea

$$Z = \{x \in [0,1] \mid |f(x)| > 0\} = |f|^{-1}(]0,\infty[)$$

Como f es continua, $|f|$ lo es, así Z es abierto. Pero $m(Z) = 0$ (Z es desp.), por tanto $Z = \emptyset$. Luego $f = 0$ c.t.p. en $[0,1] \iff f = 0$. Por tanto, N_p es norma en $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{C})$.

Veamos que las normas son inequivalentes a pares. Sea $\nu \in \mathbb{N}$, y $1 \leq p < \infty$, entonces:

$$N_\infty(f_\nu) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \text{esc} |f(x)|$$

Para el caso, $f_\nu \leq \nu$ en $[0,1]$. Por tanto $N_\infty(f_\nu) \leq \nu$. Pero $f_\nu(0) = \nu$, así $N_\infty(f_\nu) = \nu$. Ahora:

$$\begin{aligned}
N_p(f_\nu) &= \left(\int_0^1 |f_\nu|^p\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_0^{1/\nu} \nu^p (1-\nu x)^p\right)^{1/p} \\
&= \nu \int_0^{1/\nu} (1-\nu x)^p \\
&= \nu \cdot \left(-\frac{(1-\nu x)^{p+1}}{(p+1)\nu}\Bigg|_0^{1/\nu}\right)^{1/p} \\
&= \nu \cdot \left(\frac{1}{\nu(p+1)}\right)^{1/p} \left(1^{p+1}\right)^{1/p} \\
&= \nu^{1-\frac{1}{p}} \cdot \frac{1}{(p+1)^{1/p}}
\end{aligned}$$

Si $\exists\, \alpha \geq 0$ m $N_\infty(f) \leq \alpha N_p(f)$, $\forall f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{C})$, en part. $\forall\, v \in \mathbb{N}$:

$$N_\infty(f_v) \leq \alpha N_p(f_v) \iff v \leq \alpha\, v^{1-\frac{1}{p}} \cdot \frac{1}{(p+1)^{1/p}}$$

$$\Rightarrow v^{1/p} \leq \alpha \cdot \frac{1}{(p+1)^{1/p}},\ \forall\, v \in \mathbb{N}$$

Lo cual no puede suceder, pues $\lim_{v\to\infty} v^{1/p} = \infty$. Por tanto N_p y N_∞ no son equivalentes.

Sea ahora $1 \leq p < q < \infty$. Si N_p y N_q son equivalentes $\exists\, \beta \geq 0$ m $N_q(f) \leq \beta N_p(f)$. En part. $\forall\, v \in \mathbb{N}$:

$$N_q(f_v) \leq \beta N_p(f_v) \iff v^{1-\frac{1}{q}} \frac{1}{(q+1)^{1/q}} \leq \beta \cdot v^{1-\frac{1}{p}} \frac{1}{(p+1)^{1/p}}$$

$$\iff v^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \frac{(p+1)^{1/p}}{(q+1)^{1/q}} \leq \beta,\ \forall\, v \in \mathbb{N}$$

Donde $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} > 0$, luego $\lim_{v\to\infty} v^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} = \infty$, por tanto tal β no puede existir, así N_p y N_q no son equivalentes.

$\square$

1.4. Sea $1 \leqslant p < \infty$. **Muestre** que si $\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ es una sucesión de funciones en $\mathscr{L}_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ tal que

$$\sum_{\nu=1}^\infty \mathscr{N}_p(f_\nu) < \infty,$$

entonces existe $f \in \mathscr{L}_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ tal que

i. La serie de término general f_ν converge a f en p-promedio, es decir,

$$\lim_{\nu\to\infty} \mathscr{N}_p\left(f - \sum_{k=1}^\nu f_k\right) = 0.$$

ii. La serie de término general f_ν converge a f absolutamente c.t.p. en $\mathbb{R}^n$.

iii. $\mathscr{N}_p(f) \leqslant \sum_{\nu=1}^\infty \mathscr{N}_p(f_\nu)$.

Dem:

Defina $g_m = \sum_{v=1}^m f_v$, $\forall\, m \in \mathbb{N}$. Como $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ es esp. vect. entonces $\{g_m\}_{m=1}^\infty$ es una sucesión en $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ la cual cumple que:

$$\lim_{m\to\infty} N_p(g_m) \leq \lim_{m\to\infty} \sum_{v=1}^m N_p(f_v)$$

$$= \sum_{v=1}^\infty N_p(f_v) < \infty$$

Afirmamos que $\{g_m\}_{m=1}^\infty$ es de Cauchy en $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$. En efecto, si $l, K \in \mathbb{N}$ m $l < K$:

$$N_p(g_K - g_l) = N_p\Big(\sum_{v=l+1}^K f_v\Big)$$

$$\leq \sum_{v=l+1}^K N_p(f_v)$$

Pero $\sum_{v=1}^\infty N_p(f_v) < \infty$. Por tanto para $\varepsilon > 0$ $\exists\, N \in \mathbb{N}$ m $K, l \geq N$ implican:

$$N_p(g_K - g_l) \leq \sum_{v=l+1}^{K} N_p(f_v) < \varepsilon$$

Así, $\{g_m\}_{m=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Como $L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ es completo, $\exists$ $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ m:

$$\lim_{m \to \infty} N_p(f - g_m) = 0 \text{, i.e:}$$

$$\lim_{m \to \infty} N_p\left(f - \sum_{v=1}^{m} f_v\right) = 0 \quad \dots \quad (i)$$

Para (ii), queremos que $\lim_{m \to \infty} \sum_{v=1}^{r} |f_v| = h$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$, con $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ med. def. c.t.p.

Tomemos $g_m = \left(\sum_{k=1}^{m} |f_k|\right)^p$.

1.5. Sea $1 \leqslant p < \infty$. Sea $\{f_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones en $\mathscr{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ tal que

$$\lim_{\nu\to\infty} f_\nu = f \quad \text{c.t.p. en } \mathbb{R}^n,$$

para alguna función $f \in \mathscr{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. **Demuestre** que $\{f_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ converge a f en p-promedio si y sólo si

$$\lim_{\nu\to\infty} \mathscr{N}_p(f_\nu) = \mathscr{N}_p(f).$$

Sugerencia. Una implicación es inmediata y la otra se puede demostrar aplicando, por ejemplo, el lema de Fatou.

Dem:

$\Rightarrow$) Como $\{f_v\}_{v=1}^{\infty}$ converge en p-promedio a f, entonces:

$$\lim_{v\to\infty} N_p(f_v - f) = 0$$

Pero $|N_p(f_v) - N_p(f)| \leq N_p(f_v - f)$. Por tanto $\lim_{v\to\infty} |N_p(f_v) - N_p(f)| = 0$. Como la función val. absoluto es continua, debe pasar que:

$$\lim_{v\to\infty} N_p(f_v) = N_p(f)$$

$\Leftarrow$) Notemos que:

$$|f_v - f|^p \leq (|f_v| + |f|)^p$$

$$\Rightarrow 0 \leq (|f_v| + |f|)^p - |f_v - f|^p$$

Luego, como f_v y f son medibles, $\forall\ v \in \mathbb{N}$, $g_v = (|f_v| + |f|)^p - |f_v - f|^p$ es medible no neg. $\forall\ v \in \mathbb{N}$, y se cumple:

$$\lim_{v\to\infty} g_v = 2^p |f|^p \quad \text{c.t.p. en } \mathbb{R}^n$$

Por Fatou:

$$\Rightarrow 2^p \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \leq \liminf_{v\to\infty} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} (|f_v| + |f|)^p - \int_{\mathbb{R}^n} |f_v - f|^p \right\}$$

$$\Rightarrow 2^p \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \leq \liminf_{v\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (|f_v| + |f|)^p + \liminf_{v\to\infty} -\int_{\mathbb{R}^n} |f_v - f|^p$$

$$\Rightarrow \limsup_{v\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f_v - f|^p \leq \liminf_{v\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (|f_v| + |f|)^p - 2^p \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p$$

Pero, tenemos que:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} (|f_v| + |f|)^p \right)^{1/p} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_v|^p \right)^{1/p} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \right)^{1/p}$$

$$\Rightarrow \liminf_{v\to\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|f_v| + |f|)^p \right)^{1/p} \leq \liminf_{v\to\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_v|^p \right)^{1/p} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \right)^{1/p}$$

$$\Rightarrow \liminf_{v\to\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|f_v| + |f|)^p \right)^{1/p} \leq 2 \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \right)^{1/p} \quad \text{pues} \quad \lim_{v\to\infty} N_p(f_v) = N_p(f).$$

$$\Rightarrow \liminf_{v \to \infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|f_v| + |f|)|^p \right) \leq 2^p \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p$$

$$\therefore \limsup_{v \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f_v - f|^p \leq 0 \leq \liminf_{v \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f_v - f|^p$$

$$\therefore \lim_{v \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f_v - f|^p = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{v \to \infty} N_p(f_v - f) = 0$$

$\square$

1.6. Sea $1 < p < \infty$. Sea $\{f_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones en $\mathscr{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ tal que

$$\lim_{\nu\to\infty} f_\nu = f \quad \text{c.t.p. en } \mathbb{R}^n,$$

para alguna función $f \in \mathscr{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Suponga además que existe una constante $M \geqslant 0$ tal que $\mathscr{N}_p(f_\nu) \leqslant M$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$. **Pruebe** que para cada función $g \in \mathscr{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, se cumple

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_\nu g = \int_{\mathbb{R}^n} fg.$$

¿Es cierto el resultado para $p = 1$? **Justifique.**

Sugerencia. Intente aplicar los ejercicios 3.18 y 3.24 del semestre pasado a la función integrable $|g|^{p^*}$ y finalmente el teorema de Egorov.

Dem:

Sea $g \in \mathscr{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Si $N_{p^*}(g) = 0$, el resultado es inmediato. Suponga $N_{p^*}(g) > 0$ y sea $\varepsilon > 0$.

Por Hölder, como $f_\nu - f \in \mathscr{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$:

$$\Rightarrow \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f_\nu - f) g \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f_\nu - f||g| \leq N_p(f_\nu - f) N_{p^*}(g) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_\nu - f|^p \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g|^{p^*} \right)^{1/p^*} \ldots (1)$$

Como $|g|^{p^*} \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, por un resultado, para $\varepsilon' > 0$ $\exists$ $C \subseteq \mathbb{R}^n$ finitamente medible $\ni$

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus C} |g|^{p^*} \leqslant \varepsilon'$$

Además, para $\varepsilon'' > 0$ $\exists$ $\delta > 0$ $\ni$ si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es med. y $m(A) < \delta \Rightarrow \int_A |g|^{p^*} < \varepsilon''$. Luego, de (1):

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_\nu - f|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g|^{p^*} \right)^{1/p^*} = \left(\int_C |f_\nu - f|^p + \int_{\mathbb{R}^n \setminus C} |f_\nu - f|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\int_C |g|^{p^*} + \int_{\mathbb{R}^n \setminus C} |g|^{p^*} \right)^{1/p^*}$$

$$\leqslant \left(\int_C |f_\nu - f|^p + \int_{\mathbb{R}^n \setminus C} |f_\nu - f|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\int_C |g|^{p^*} + \varepsilon' \right)^{1/p^*} \ldots (2)$$

Por Egorov, como $\{f_\nu \chi_C\}_{\nu=1}^{\infty}$ es una sucesión de func. medibles

1.7. Sea $1 < p < \infty$. Sea $\{f_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones en $\mathscr{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ que converge en p-promedio a una función $f \in \mathscr{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. **Muestre** que si $\{g_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones medibles de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{K}$ tal que $|g_\nu| \leqslant M$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$, donde $M \geqslant 0$ es constante, y

$$\lim_{\nu \to \infty} g_\nu = g \quad \text{c.t.p. en } \mathbb{R}^n,$$

para alguna función $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$, entonces $\{f_\nu g_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ converge en p-promedio a fg.

Dem: Observemos que:

$$|f_\nu g_\nu| \leq M|f_\nu| \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n, \ \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

Como $f_\nu \in \mathscr{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, entonces $f_\nu g_\nu \in \mathscr{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$, y al tenerse que:

$$|g_\nu| \leq M \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow |g| \leq M \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n$$

Así $fg \in \mathscr{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Considere las sucesiones $\{(M^p - |g_\nu|^p)|f_\nu|^p\}_{\nu=1}^{\infty}$ y $\{(M^p + |g_\nu|^p)|f_\nu|^p\}_{\nu=1}^{\infty}$ en $\mathscr{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Se tiene:

$$\lim_{\nu \to \infty} (M^p - |g_\nu|^p)|f_\nu|^p = (M^p - |g|^p)|f|^p$$

$$\lim_{\nu \to \infty} (M^p + |g_\nu|^p)|f_\nu|^p = (M^p + |g|^p)|f|^p \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n.$$

Por Fatou:

$$\int_{\mathbb{R}^n} M^p |f|^p - \int_{\mathbb{R}^n} |gf|^p \leq \liminf_{\nu \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} M^p |f_\nu|^p - \limsup_{\nu \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |g_\nu f_\nu|^p$$

$$\Rightarrow \limsup_{\nu \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |g_\nu f_\nu|^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} |gf|^p,$$

$$\& \int_{\mathbb{R}^n} M^p |f|^p + \int_{\mathbb{R}^n} |gf|^p \leq \liminf_{\nu \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} M^p |f_\nu|^p + \liminf_{\nu \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |g_\nu f_\nu|^p$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |gf|^p \leq \liminf_{\nu \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |g_\nu f_\nu|^p$$

$$\therefore \lim_{\nu \to \infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g_\nu f_\nu|^p \right)^{1/p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |gf|^p \right)^{1/p}$$

$$\Rightarrow \lim_{\nu \to \infty} N_p(g_\nu f_\nu) = N_p(gf)$$

Por 1.5, como $\lim_{\nu \to \infty} f_\nu g_\nu = fg$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$, entonces:

$$\lim_{\nu \to \infty} N_p(g_\nu f_\nu - gf) = 0$$

$\square$

1.8. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función convexa, donde I es un intervalo en $\mathbb{R}$. **Demuestre** que en todo punto interior de I, f posee derivadas por la derecha y por la izquierda. **Deduzca** que f es continua en el interior de I.

Dem:

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ los extremos de I, i.e $\mathring{I} =]a, b[$. Si $a < s < t < u < b$, entonces si $f = \varphi$:

$$\frac{t-s}{u-s} + \frac{u-t}{u-s} = 1, \quad t-s,\ u-t > 0$$

$$\Rightarrow \varphi\left(\left(\frac{t-s}{u-s}\right)u + \left(\frac{u-t}{u-s}\right)s\right) \leq \left(\frac{t-s}{u-s}\right)\varphi(u) + \left(\frac{u-t}{u-s}\right)\varphi(s)$$

donde $\left(\frac{t-s}{u-s}\right)u + \left(\frac{u-t}{u-s}\right)s = t$. Por ende:

$$\left(\frac{t-s}{u-s} + \frac{u-t}{u-s}\right)\varphi(t) \leq \left(\frac{t-s}{u-s}\right)\varphi(u) + \left(\frac{u-t}{u-s}\right)\varphi(s)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{t-s}{u-s}\right)(\varphi(t)-\varphi(u)) \leq \left(\frac{u-t}{u-s}\right)(\varphi(s)-\varphi(t))$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(t)-\varphi(u)}{u-t} \leq \frac{\varphi(s)-\varphi(t)}{t-s}$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(s)-\varphi(t)}{s-t} \leq \frac{\varphi(t)-\varphi(u)}{t-u}$$

Sea $g:]0, b-x[\setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$g(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Sean $0 < h_1 < h_2 < b-x$. Como $\frac{h_2-h_1}{h_2} + \frac{h_1}{h_2} = 1$, y $\frac{h_2-h_1}{h_2}, \frac{h_1}{h_2} > 0$, entonces al ser f convexa:

$$f(x+h_1) = f\left(\frac{h_2-h_1}{h_2}x + \frac{h_1}{h_2}(x+h_2)\right)$$
$$\leq \frac{h_2-h_1}{h_2}f(x) + \frac{h_1}{h_2}f(x+h_2)$$

$$\Rightarrow h_2 f(x+h_1) - h_2 f(x) \leq h_1 f(x+h_2) - h_1 f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x+h_1)-f(x)}{h_1} \leq \frac{f(x+h_2)-f(x)}{h_2}$$

$$\Rightarrow g(h_1) \leq g(h_2)$$

Por tanto, g es creciente y está acotada inferiormente, pues si $a < u < x < x+h < b$:

$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(u)}{x-u} \leq \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad \forall h \in]0, b-x[.$$

Tome $M = \frac{f(x)-f(u)}{x-u}$ $\left(u = \frac{x+a}{2}\right)$, ent. $M \leq g(h), \forall h \in]0, b-x[$. Luego el conjunto

$$g(]0, b-x[) \subseteq \mathbb{R}$$

es no vacío y acotado inferiormente, por tanto tiene ínfimo, digamos $l = \inf g(]0, b-x[)$. Así:

$$l \leq g(h), \ \forall h \in]0, b-x[$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como l es el ínfimo, $\exists\ \delta > 0$ tq

$$g(\delta) - \varepsilon < l$$

$$\Rightarrow 0 \leq g(\delta) - l < \varepsilon$$

Si $0 < h < \delta \Rightarrow g(h) \leq g(\delta) \Rightarrow 0 \leq g(h) - l \leq g(\delta) - l < \varepsilon$. Por tanto:

$$\lim_{h \to 0^+} g(h) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lambda = f'(x)^+$$

De forma análoga se prueba la existencia de $f'(x)^-$, $\forall x \in]a,b[$. Probemos que f es continua en $\mathring{I}$.

Sea $x \in]a,b[$. Entonces:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = l_1 \quad y \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = l_2$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0^+} f(x+h) - f(x) = 0 \quad y \quad \lim_{h \to 0^-} f(x+h) - f(x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} f(x+h) - f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$$

Por tanto, f es continua en $\mathring{I}$.

$\square$

1.9. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ una función medible que no es la función cero c.t.p. en $\mathbb{R}^n$. Sea

$$I = \{p \in [1, \infty[\,|\, f \in \mathscr{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})\}.$$

Se sabe que I es un subintervalo de $[1, \infty[$. Defina $\varphi : I \to \mathbb{R}$ como

$$\varphi(p) = \mathscr{N}_p(f)^p, \quad \forall p \in I.$$

i. **Pruebe** que $\log \varphi$ es una función convexa en I.

ii. **Deduzca** que si $r, p, s \in I$, $r < p < s$, entonces

$$\mathscr{N}_p(f) \leqslant \text{máx}\{\mathscr{N}_r(f), \mathscr{N}_s(f)\}.$$

iii. **Muestre** que φ es continua en el interior de I.

Sugerencia. El ejercicio 1.8 puede ser de utilidad para probar (iii).

Dem:

De (i): Sean $a, b \in I$ y $\alpha, \beta \geq 0$ m $\alpha + \beta = 1$. Probaremos que:

$$\log(\varphi(\alpha a + \beta b)) \leq \alpha \log(\varphi(a)) + \beta \log(\varphi(b)) \text{, i.e.:}$$

$$\log\left(N_{\alpha a + \beta b}(f)^{\alpha a + \beta b}\right) \leq \alpha \log\left(N_a(f)^a\right) + \beta \log\left(N_b(f)^b\right)$$

Si $\alpha = 0$ ó $\beta = 0$, el resultado es inmediato. Suponga $\alpha > 0$ y $\beta > 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta} > 0$. Como:

$$|f|^{\alpha a + \beta b} = |f|^{\alpha a} \cdot |f|^{\beta b} \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

y $|f|^{\alpha a} \in \mathscr{L}_{\frac{1}{\alpha}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $|f|^{\beta b} \in \mathscr{L}_{\frac{1}{\beta}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, donde $\alpha + \beta = 1$, ent. por Hölder:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{\alpha a + \beta b} \leq N_{\frac{1}{\alpha}}\left(|f|^{\alpha a}\right) \cdot N_{\frac{1}{\beta}}\left(|f|^{\beta b}\right)$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^a\right)^{\alpha} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^b\right)^{\beta}$$

$$\therefore \log(\varphi(\alpha a+\beta b)) = \log\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{\alpha a+\beta b}\right)$$
$$\leq \alpha \log\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{a}\right) + \beta \log\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{b}\right)$$
$$= \alpha \log(\varphi(a)) + \beta \log(\varphi(b))$$

así, $\log \circ \varphi$ es convexa en I.

De (iii): Es inmediato del ejercicio anterior.

De (ii): Sea $\varphi : [0,1] \to [r,s]$ dada como:

$$\varphi(t) = tr + (1-t)s, \forall t \in (0,1]$$

φ es cont. y $\varphi(0) = s$, $\varphi(1) = r$. Por tanto, para $p \in]r,s[$ $\exists$ $\alpha, \beta > 0$ m

$$p = \alpha r + \beta s \quad \ldots (1)$$

Llamemos $g = \log \circ \varphi : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Por (i), g es convexa, i.e:

$$g(\alpha r + \beta s) \leq \alpha g(r) + \beta g(s)$$
$$\Rightarrow \log(\varphi(\alpha r+\beta s)) \leq \alpha \log(\varphi(r)) + \beta \log(\varphi(s))$$
$$\Rightarrow \varphi(\alpha r+\beta s) \leq \varphi(r)^{\alpha} \cdot \varphi(s)^{\beta}$$
$$\Rightarrow N_p(f)^p \leq N_r(f)^{r\alpha} \cdot N_s(f)^{\beta s}$$
$$\Rightarrow N_p(f) \leq N_r(f)^{\frac{r\alpha}{p}} \cdot N_s(f)^{\frac{\beta s}{p}}$$

Como $\frac{r\alpha}{p} + \frac{\beta s}{p} = 1$, por un Lema:

$$N_p(f) \leq \frac{r\alpha}{p} N_r(f) + \frac{\beta s}{p} N_s(f)$$

Sin pérdida de generalidad, suponga que $N_s(f) \leq N_r(f)$. Como $\alpha r = p - \beta s$:

$$\Rightarrow N_p(f) \leq \frac{p-\beta s}{p} N_r(f) + \frac{\beta s}{p} N_s(f)$$
$$= N_r(f) + \frac{\beta s}{p}\left(N_s(f) - N_r(f)\right)$$

donde $\frac{\beta s}{p}(N_s(f) - N_r(f)) \leq 0$. Por tanto:

$$N_p(f) \leq N_r(f)$$
$$= \max\{N_r(f), N_s(f)\}.$$

$\square$

1.10. **Determine** el conjunto de puntos $p \in [1, \infty]$ para los cuales:

i. $x \mapsto \dfrac{x^{1/2}}{\operatorname{sen} x}$ pertenece a $\mathscr{L}_p(]0,1[,\mathbb{R})$.

ii. $x \mapsto \dfrac{x^{1/3}}{x^2-1}$ pertenece a $\mathscr{L}_p(]1,\infty[,\mathbb{R})$.

Sol.

De (i): Sea $1 < \delta < 0$ arbitrario. Defina $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $f(x) = \dfrac{x^{1/2}}{\operatorname{sen} x} \chi_{]0,1[}(x)$. f es medible pues $f|_{]0,1[}$ y $f|_{]-\infty,0]\cup[1,\infty[}$ son ambas continuas. Por tanto:

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^p = \int_0^1 \frac{x^{p/2}}{\operatorname{sen}^p x}$$
$$= \int_0^\delta \frac{x^{p/2}}{\operatorname{sen}^p x} + \int_\delta^1 \frac{x^{p/2}}{\operatorname{sen}^p x}$$

Como la función $x \mapsto \dfrac{x^{p/2}}{\operatorname{sen}^p x}$ es continua en $[\delta, 1]$, es unif. cont. y por tanto acotada. Luego

$$\int_\delta^1 \frac{x^{p/2}}{\operatorname{sen}^p x} < \infty, \ \forall \ 1 \leq p < \infty.$$

Ahora analicemos $\displaystyle\int_0^\delta \frac{x^{p/2}}{\operatorname{sen}^p x}$.

1) $1 \leq p \leq 2$. Si esto sucede, como $\operatorname{sen} x \leq x$, $\forall x \in]0,\delta[\Rightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\operatorname{sen} x}$, $\forall x \in]0,\delta[$. Por tanto:

$$\int_0^\delta \frac{x^{p/2}}{\operatorname{sen}^p x} \geq \int_0^\delta \frac{x^{p/2}}{x^p}$$
$$= \int_0^\delta x^{-\frac{p}{2}}$$

Como $1 \leq p \leq 2 \Rightarrow -1 \leq -\frac{p}{2} \leq -\frac{1}{2}$. Pero x^q es integrable en $]0,\delta[\iff q < -1$, pero $-\frac{p}{2} \geq -1$, luego $\int_0^\delta x^{-p/2} = \infty \Rightarrow \int_0^\delta \frac{x^{p/2}}{\operatorname{sen}^p x} = \infty$, por tanto $f \notin \mathscr{L}_p(]0,1[,\mathbb{R})$ si $1 \leq p \leq 2$.

2) $2 < p$. Como $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{x^p}{\operatorname{sen}^p x} = 1$. Por tanto, para $1 > 0$ $\exists \ 0 < \delta' < 1$ m si $0 < x < \delta' \Rightarrow \left|\frac{x^p}{\operatorname{sen}^p x} - 1\right| \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{sen}^p x} \leq \frac{2}{x^p}$, $\forall \ 0 < x < \delta'$.

Como el δ fue arbitrario, podemos tomar $\delta = \delta'$, así:

$$\int_0^\delta \frac{x^{p/2}}{\operatorname{sen}^p x} \leq \int_0^\delta \frac{2x^{p/2}}{x^p}$$
$$= 2\int_0^\delta x^{-p/2}$$

Como $p > 2 \Rightarrow -\frac{p}{2} < -1$, luego $\int_0^\delta x^{-p/2} < \infty \Rightarrow \int_0^\delta \frac{x^{p/2}}{\operatorname{sen}^p x} < \infty$. Por tanto $\int_0^1 \frac{x^{p/2}}{\operatorname{sen}^p x} < \infty$
$\Rightarrow f \in \mathscr{L}_p(]0,1[,\mathbb{R})$ $\forall \ p > 2$.

3) $p = \infty$. Afirmamos que $f \notin \mathscr{L}_\infty(]0,1[,\mathbb{R})$. En efecto, sea $Z \subseteq]0,1[$ despreciable.

Como

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{1/2}}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\operatorname{sen} x}\cdot\frac{1}{x^{1/2}}$$
$$= 1\cdot \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^{1/2}}$$
$$= +\infty$$

Entonces, $\forall\ N\in\mathbb{N}\ \exists\ \delta>0$ m si $0<x<\delta \Rightarrow \frac{x^{1/2}}{\operatorname{sen} x}\geq N$. Como Z es despreciable, ent.

$$m(]0,\delta[\setminus Z) = m(]0,\delta[)$$
$$= \delta > 0$$

Por tanto, $]0,\delta[\setminus Z \neq \emptyset$, así, $\exists\ x\in\,]0,\delta[\setminus Z$ m

$$\frac{x^{1/2}}{\operatorname{sen} x}\geq N$$

i.e, $\forall\ N\in\mathbb{N}\ \exists\ x\in\,]0,1[\setminus Z$ m $\frac{x^{1/2}}{\operatorname{sen} x}\geq N$. Por tanto f no es esencialmente acotada $\Rightarrow f\notin \mathcal{L}_\infty(]0,1[,\mathbb{R})$.

Por tanto, $f\in \mathcal{L}_p(]0,1[,\mathbb{R})$, $\forall\ 2<p<\infty$.

De (ii):

1.11. **Demuestre** que el espacio de Banach $L_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ no es separable.

Sugerencia. Determine un subconjunto de $\mathscr{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ que sea infinito no numerable y tal que la distancia entre cualquier par de sus puntos sea mayor o igual a uno.

Dem:

Sea

$$A = \{\chi_{[0,a]} \mid a \in \mathbb{R}^+\}$$

A es un subconjunto infinito no numerable de funciones medibles, donde

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \text{esc}\, \chi_{[0,a]} = 1, \ \forall a \in \mathbb{R}^+.$$

Por tanto, $A \subseteq \mathscr{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Y además $\forall a, b \in \mathbb{R}^+, a<b$:

$$\begin{aligned} N_\infty(\chi_{[0,a]} - \chi_{[0,b]}) &= N_\infty(\chi_{]a,b]}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Pues $\overset{\circ}{]a,b]} =]a,b[$. Por ende, $L_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ no puede ser separable.

$\square$

1.12. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ una función.

i. **Pruebe** que f es integrable en $\mathbb{R}^n$ si y sólo si f es límite c.t.p. en $\mathbb{R}^n$ de una sucesión de Cauchy, respecto a la norma $\mathscr{N}_1$, de funciones continuas de soporte compacto.

ii. **Muestre** que f es medible si y sólo si f es límite c.t.p. en $\mathbb{R}^n$ de una sucesión de funciones continuas de soporte compacto.

Sugerencia. Adapte la demostración del teorema 4.12 del semestre pasado.

Dem:

De (i):

$\Rightarrow$) Suponga que f es integrable. Como $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ es denso en $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, $\forall \nu \in \mathbb{N}\ \exists g_\nu \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ m:

$$N_1(f - g_\nu) \leq \frac{1}{\nu}$$

Entonces $\lim_{\nu \to \infty} N_1(f - g_\nu) = 0$, i.e $\{g_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ converge en 1-promedio a $f \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Como converge, $\{g_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ es de Cauchy en $\mathscr{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Por un corolario, $\exists \{g_{\alpha(\nu)}\}_{\nu=1}^\infty$ que conv. a $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$ (siendo $\{g_{\alpha(\nu)}\}_{\nu=1}^\infty$ de Cauchy).

$\Leftarrow$) Como la sucesión es de Cauchy y $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ es completo, $\exists g \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ m

$$\lim_{\nu \to \infty} N_1(f_\nu - g) = 0$$

Pero, como $\lim_{r \to \infty} f_r = f$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$, por un corolario $f = g$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n \Rightarrow f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$.

De (ii):

$\Leftarrow$) Es inmediato

$\Rightarrow$) Suponga que f es medible. Por un teorema ant.

1.13. **(Teorema de Luzin.)**

i. Sea $f : S \to \mathbb{K}$ una función medible, donde S es un conjunto medible en $\mathbb{R}^n$. **Demuestre** que $\forall \varepsilon > 0$ existe un subconjunto medible N_ε de S tal que $m(N_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ y la restricción $f|_{S\setminus N_\varepsilon}$ de f a $S \setminus N_\varepsilon$ es continua.

ii. **Pruebe** el recíproco de (i).

Sugerencia. Para probar (i), primero considere el caso en el que $m(S) < \infty$, use el ejercicio 1.12 y el teorema de Egorov.

De (i): Tenemos 2 casos:

1) $m(S) < \infty$. Sea $\varepsilon > 0$, como f es medible, por el ejercicio 1.12 ii), $\exists \{f_v\}_{v=1}^{\infty}$ sucesion de funciones en $\mathcal{C}_c^{\infty}(S, \mathbb{K})$ tq

$$\lim_{v \to \infty} f_v = f \quad c.t.p.$$

Por Egorov, para $\varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon \subseteq \mathbb{R}^n$ med. tq $m(N_\varepsilon) < \varepsilon$ y $\{f_v\}_{v=1}^{\infty}$ conv. unif. a f en $\mathbb{R}^n \setminus N_\varepsilon$, i.e $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $n \geqslant N \Rightarrow$:

$$\sup_{x \in S\setminus N_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Probaremos que f es continua en $S \setminus N_\varepsilon$. En efecto, sea $\varepsilon_2 > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $n \geqslant N$ implica:

$$\sup_{x \in S\setminus N_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon_2}{3}$$

Sea ahora $x_0 \in S \setminus N_\varepsilon$, como f_N es continua, en part. lo es en $S \setminus N_\varepsilon$, así para $\varepsilon_2 > 0$ $\exists \delta > 0$ tq si $y \in S \setminus N_\varepsilon$ y $\|x_0 - y\| < \delta \Rightarrow |f_N(x_0) - f_N(y)| < \frac{\varepsilon_2}{3}$. Luego, si $y \in S \setminus N_\varepsilon$ y $\|x_0 - y\| < \delta$:

$$\begin{aligned} |f_N(y) - f(y) + f(x_0) - f_N(x_0)| &\leq |f_N(y) - f(y)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \frac{2}{3}\varepsilon_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |f(x_0) - f(y)| \leq \frac{2}{3}\varepsilon_2 + |f_N(x_0) - f_N(y)| = \varepsilon_2$$

$\therefore$ f es continua.

2) $m(S) = \infty$. Sea $\varepsilon > 0$, considere la familia de conjuntos disjuntos $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} = \{(u_1, u_2, \dots, u_n) + C \mid u_i \in \mathbb{Z}, \forall i \in [\![1, n]\!]\}$$

y $C = [0,1[^n$. $\mathcal{A}$ es numerable y por ende, podemos escribirlo como $\mathcal{A} = \{A_v \mid v \in \mathbb{N}\}$. Sea $C_x =]x, 1-x[^n$, $\forall x \in [0, \frac{1}{2}]$. C_x es abierto en $\mathbb{R}^n$ y medible, con medida:

$$\begin{aligned} m(C_x) &= vol(C_x) \\ &= (1-2x)^n \end{aligned}$$

Como el polinomio $p(x) = (1-2x)^n$ es continuo en $[0,1]$, y $p(0)=1$, $p(\frac{1}{2})=0$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x_0 \in]0, \frac{1}{2}[\ \ni \ m(C \setminus C_{x_0}) < \varepsilon$.

$\forall v \in \mathbb{N} \ \exists B_v \subseteq A_v \ \ni \ m(B_v \setminus A_v) < \left(\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}\right)^v$ ($B_v \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto). Como $m(B_v \cap S) < \infty$, $\forall v \in \mathbb{N}$, entonces por i) para $\varepsilon > 0 \ \exists N_v \subseteq B_v \cap S \ \ni \ m(N_v) < \left(\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}\right)^v$ (pues $f|_{B_v \cap S}$ es medible), donde f es continua en $(B_v \cap S) \setminus N_v$. Defina:

$$N_\varepsilon = \bigcup_{v=1}^{\infty} (A_v \setminus B_v) \cup N_v$$

$$\Rightarrow m(N_\varepsilon) \leq \sum_{v=1}^{\infty} m(A_v \setminus B_v) + m(N_v)$$

$$< 2 \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}\right)^v$$

$$= 2 \cdot \frac{\varepsilon/2+\varepsilon}{1 - \varepsilon/2+\varepsilon}$$

$$= 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon-\varepsilon}$$

$$= \varepsilon$$

$$\therefore m(N_\varepsilon) < \varepsilon$$

f es continua en $S \setminus N_\varepsilon$. En efecto, sea $x \in S \setminus N_\varepsilon$, entonces $\exists v_0 \in \mathbb{N} \ \ni \ x \in (B_{v_0} \cap S) \setminus N_{v_0}$. Como B_{v_0} es abierto, $\exists r > 0 \ \ni \ B(x,r) \subseteq B_{v_0}$.

Si $\varepsilon_1 > 0$, $\exists \delta' > 0 \ \ni \ \forall y \in (B_{v_0} \cap S) \setminus N_{v_0} \ \ni \ \|x-y\| < \delta' \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon_1$. Tome $\delta = \min\{r, \delta'\} > 0$. Así, f es cont. en x, pues $\forall y \in (B_{v_0} \cap S) \setminus N_{v_0} \ \ni \ \|x-y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon_1$.

$\square$

De ii): Suponga la hipótesis. Probaremos que f es medible. Para ello probaremos que $\exists \{f_v\}_{v=1}^{\infty}$ sucesión de fun. med. que convergen a f casi uniformemente en S.

1.14. Sea $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ el espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$ de todas las funciones simples de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{K}$. **Muestre** que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ es un subespacio denso del espacio de Banach $L_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$.

Sugerencia. Aplique el teorema 2.35 del semestre pasado a las partes real e imaginaria de $f \in \mathscr{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

1.15. Sea $f \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

i. **Demuestre** que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x+y)\,dx, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

ii. **Pruebe** que si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es medible acotada en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\lim_{y \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)[f(x) - f(x+y)]|\,dx = 0.$$

Sugerencia. Si f es continua de soporte compacto, el resultado se sigue de la continuidad uniforme de f. Aplique el teorema 1.33.

1.16. Sea $1 \leqslant p < \infty$ y sea Ω un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$.

i. Se dice que $\varphi : \Omega \to \mathbb{K}$ es una **función escalonada en el abierto** Ω si es de la forma

$$\varphi = \sum_{k=1}^{r} a_k \chi_{P_k},$$

donde P_k es un rectángulo acotado tal que $\overline{P}_k \subset \Omega$ y $a_k \in \mathbb{K}$, $k = 1, \ldots, r$, $r \in \mathbb{N}$. Se denota por $\mathscr{E}(\Omega, \mathbb{K})$ el espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$ de las funciones escalonadas en el abierto Ω. **Muestre** que $\mathscr{E}(\Omega, \mathbb{K})$ es denso en $\mathscr{L}_p(\Omega, \mathbb{K})$.

ii. Sea K un compacto contenido en Ω. **Demuestre** que existe una función continua $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que: $0 \leqslant \alpha(x) \leqslant 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha(x) = 1$, $\forall x \in K$, y $Spt(\alpha) \subset \Omega$.

iii. Sea $C_c(\Omega, \mathbb{K})$ el espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$ de las funciones continuas de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{K}$ cuyo soporte está contenido en Ω. **Pruebe** que $C_c(\Omega, \mathbb{K})$ es denso en $\mathscr{L}_p(\Omega, \mathbb{K})$.

Sugerencia. Para probar (i), dada $f \in \mathscr{L}_p(\Omega, \mathbb{K})$, aplique el Teorema 1.30 para aproximar a la ampliación canónica $\widetilde{f}$ con alguna $\varphi \in \mathscr{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Use el hecho de que el abierto Ω se puede escribir como unión creciente a lo sumo numerable de conjuntos elementales Q_ν cuyas adherencias están contenidas en Ω para aproximar en p-promedio a $f\chi_{Q_k}$ por $\varphi\chi_{Q_k}$. Para probar (ii), defina $\rho = d(\mathbb{R}^n \backslash \Omega, K)$ y $S = \{x \in \Omega | d(x, K) < \rho/2\}$. Use las funciones $x \mapsto d(x, \mathbb{R}^n \backslash S)$ y $x \mapsto d(x, K)$ para definir α. Para probar (iii), primero determine un compacto $K \subset \Omega$ tal que $\widetilde{f}\chi_K$ aproxime a $\widetilde{f}$ en p-promedio, luego aplique el teorema 1.33 para aproximar en p-promedio a $\widetilde{f}\chi_K$ con alguna función $g \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Considere entonces la función αg.

1.17. Sean $q, r \in [1, \infty]$ tales que $0 \leqslant 1/r - 1/q \leqslant 1$. Sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ una función medible. Se supone que $fg \in \mathscr{L}_r(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, $\forall f \in \mathscr{L}_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, y que $f \mapsto \Phi_g(f) = fg$ es una aplicación lineal continua de $L_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ en $L_r(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. **Muestre** que $g \in \mathscr{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, donde $1/p = 1/r - 1/q$, y que

$$\mathscr{N}_p(g) = \|\Phi_g\|.$$

Sugerencia. En el caso $r, q < \infty$, $r \neq q$ (luego también $p < \infty$), aplique la hipótesis a $f = g_k^{p/q} = g_k^{(p/r)-1}$, donde $g_k = \chi_{P_k} \min\{|g|, k\}$, con $P_k = [-k, k]^n$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Deduzca que $\mathscr{N}_p(g_k) \leqslant \|\Phi_g\|$ y de ahí concluya que $\mathscr{N}_p(g) \leqslant \|\Phi_g\|$. Para obtener la desigualdad opuesta, aplique el ejercicio 1.2. En el caso $q < \infty$, $q = r$ (luego $p = \infty$), obtenga una contradicción al suponer que $\|\Phi_g\|$ no fuese un mayorante esencial de g. Finalmente, en el caso $q = \infty$ y r arbitrario, aplique la hipótesis a $f = 1$.

1.18. Sea $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Para cada $g \in L_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ se define $\Phi_g : L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ como

$$\Phi_g(f) = \int_{\mathbb{R}^n} fg, \quad \forall f \in \mathscr{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}).$$

Demuestre que Φ_g es un funcional lineal continuo sobre $L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ de norma

$$\|\Phi_g\| = \mathscr{N}_{p^*}(g).$$

Dem:

Tenemos 3 casos:

i) $p=1$: En este caso, $p^* = \infty$, así $g \in L_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, i.e $|g| \leq N_\infty(g)$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$. Así $|fg| \leq N_\infty(g)|f|$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$, luego:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} fg \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |fg| \leq N_\infty(g) \int_{\mathbb{R}^n} |f| < \infty$$

así, $fg \in L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, $\forall f \in L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Por tanto, ϕ_g está bien definido.

Ahora, ϕ es lineal, pues $\forall f, h \in L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} \phi_g(f + \alpha h) &= \int_{\mathbb{R}^n} (f + \alpha h) g \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} fg + \alpha \int_{\mathbb{R}^n} hg \\ &= \phi_g(f) + \alpha \phi_g(h) \end{aligned}$$

Y también, es continuo, pues $\forall f \in L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$:

$$|\phi_g(f)| \leq N_\infty(g) N_1(f)$$

(ya que ϕ_g es acotado). Por tanto $\|\phi_g\| \leq N_\infty(g)$. Sea $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ $\ni$ $m(Z) = 0$ y $|g(x)| \leq N_\infty(g)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus Z$.

$\forall v \in \mathbb{N}$, defina $G_v := g^{-1}([N_\infty(g) - \frac{1}{v}, N_\infty(g)])$, como g es medible, $G_v \subseteq \mathbb{R}^n$ es medible. Defina $P_v = [-v, v]^n \cap G_v$, $\forall v \in \mathbb{N}$ y $f_v := \frac{1}{m(P_v)} \chi_{P_v}$ si $m(P_v) \neq 0$. La sucesión $\{f_v\}_{v=1}^\infty$ es de func. med. y se cumple que:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f_v| &= \frac{1}{m(P_v)} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{P_v} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow N_1(f_v) = 1, \forall v \in \mathbb{N}.$$

Se tiene que $G_{m+1} \subseteq G_m$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Como G_1 es no vacío, $\exists x \in G_1$. Como $\{x\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es acotado, $\exists$

$\nu_0 \in \mathbb{N}$ m $\{x\} \subseteq [-\nu_0, \nu_0]^n$. Así $x \in P_{\nu_0} = [-\nu_0, \nu_0]^n \cap G_{\nu_0}$, pues $G_{\nu_0} \subseteq G_1$. Por ende, $\forall \nu$

ii) $1<p<\infty$: Por Hölder, ϕ_g está bien def. ya que:

$$N_1(fg) \leq N_{p^*}(g) N_p(f), \forall f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$$

$$\Rightarrow \left|\int_{\mathbb{R}^n} fg\right| \leq |\phi_g(f)| \leq N_{p^*}(g) N_p(f) < \infty$$

Por (i), ϕ_g es lineal y además $\|\phi_g\| \leq N_{p^*}(g)$. Como $g \in \mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, entonces $g^{(p^*-1)} \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, ya que:

$$|g|^{(p^*-1)p} = |g|^{p^*p-p} = |g|^{p^*} \Rightarrow \int |g|^{(p^*-1)p} = \int |g|^{p^*} < \infty$$

Luego:

$$\phi_g(g^{(p^*-1)}) = \int_{\mathbb{R}^n} (g^{p^*})$$

Notas:

1) $\frac{\alpha_k x_k + \alpha_{k+1} x_{k+1}}{\alpha_k + \alpha_{k+1}} \in I$, pues $\frac{\alpha_k}{\alpha_k+\alpha_{k+1}} + \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k+\alpha_{k+1}} = 1$ (ver def. de conexidad).

2) En un problema, ocupamos $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ m $\alpha g = |g|$. Para ello, defina $\varphi : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ como: $\varphi(z) = \frac{|z|}{z}$, $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Sea:

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0\}$$

$$\Rightarrow \alpha(x) = \varphi\left(g(x) + \chi_A(x)\right)$$

α es medible (probar). Y cumple lo deseado.

3) $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ C \subseteq \mathbb{R}^n$ med. m $m(C) < \infty$ y:

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus C} |g| \leq \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0$ m $m(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f| \leq \varepsilon$.

Y Egorov. Esto se usa para el 1.6.