Lista 1.

1.1 Sean X un conjunto, A un subconjunto de X y $\{E_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de subconjuntos de X. **Demuestre** las identidades siguientes:

i. (**Leyes de De Morgan.**)

$$\left[\bigcup_{\alpha\in I} E_\alpha\right]^c = \bigcap_{\alpha\in I} E_\alpha{}^c, \qquad \left[\bigcap_{\alpha\in I} E_\alpha\right]^c = \bigcup_{\alpha\in I} E_\alpha{}^c;$$

$$1)\ A\setminus\left[\bigcup_{\alpha\in I} E_\alpha\right] = \bigcap_{\alpha\in I}(A\setminus E_\alpha), \qquad 2)\ A\setminus\left[\bigcap_{\alpha\in I} E_\alpha\right] = \bigcup_{\alpha\in I}(A\setminus E_\alpha).$$

ii. (**Leyes Distributivas.**)

$$3)\ A\cap\left[\bigcup_{\alpha\in I} E_\alpha\right] = \bigcup_{\alpha\in I}(A\cap E_\alpha), \qquad 4)\ A\cup\left[\bigcap_{\alpha\in I} E_\alpha\right] = \bigcap_{\alpha\in I}(A\cup E_\alpha);$$

$$5)\ \left[\bigcup_{\alpha\in I} E_\alpha\right]\setminus A = \bigcup_{\alpha\in I}(E_\alpha\setminus A), \qquad 6)\ \left[\bigcap_{\alpha\in I} E_\alpha\right]\setminus A = \bigcap_{\alpha\in I}(E_\alpha\setminus A).$$

Dem:

Se probarán las identidades no probadas:

$x\in A\setminus\left[\bigcup_{\alpha\in I} E_\alpha\right] \Leftrightarrow x\in A$ y $x\notin \bigcup_{\alpha\in I} E_\alpha \Leftrightarrow x\in A$ y $x\notin E_\alpha,\ \forall\alpha\in I \Leftrightarrow x\in A\setminus E_\alpha,\ \forall\alpha\in I$

$\Leftrightarrow x\in \bigcap_{\alpha\in I}[A\setminus E_\alpha]$

Lo que prueba 1).

2) $x\in A\setminus\left[\bigcap_{\alpha\in I} E_\alpha\right] \Leftrightarrow x\in A$ y $x\notin\bigcap_{\alpha\in I} E_\alpha \Leftrightarrow x\in A$ y $x\in\bigcup_{\alpha\in I} E_\alpha^c \Leftrightarrow x\in A$ y $x\in E_\alpha^c$ para algún $\alpha\in I$

$\Leftrightarrow x\in A$ y $x\notin E_\alpha$ para algún $\alpha\in I \Leftrightarrow x\in A\setminus E_\alpha$ para algún $\alpha\in I \Leftrightarrow x\in\bigcup_{\alpha\in I} A\setminus E_\alpha$.

3) $x\in A\cap\left[\bigcup_{\alpha\in I} E_\alpha\right] \Leftrightarrow x\in A$ y $x\in\bigcup_{\alpha\in I} E_\alpha \Leftrightarrow x\in A$, y $x\in E_\alpha$ para algún $\alpha\in I \Leftrightarrow x\in\bigcup_{\alpha\in I} A\cap E_\alpha$.

4) $x\in A\cup\left[\bigcap_{\alpha\in I} E_\alpha\right] \Leftrightarrow x\in A$ o $x\in\bigcap_{\alpha\in I} E_\alpha \Leftrightarrow x\in A$ ó $x\in E_\alpha,\ \forall\alpha\in I \Leftrightarrow x\in\bigcap_{\alpha\in I} A\cup E_\alpha$.

6) $x\in\left[\bigcap_{\alpha\in I} E_\alpha\right]\setminus A \Leftrightarrow x\in E_\alpha$ y $x\notin A,\ \forall\alpha\in I \Leftrightarrow x\in E_\alpha\setminus A,\ \forall\alpha\in I \Leftrightarrow x\in\bigcap_{\alpha\in I} E_\alpha\setminus A$.

5) $x\in\left[\bigcup_{\alpha\in I} E_\alpha\right]\setminus A \Leftrightarrow x\in E_\alpha$ y $x\notin A$, para algún $\alpha\in I \Leftrightarrow x\in E_\alpha\setminus A$ para algún $\alpha\in I \Leftrightarrow x\in\bigcup_{\alpha\in I} E_\alpha\setminus A$.

q.e.d.

1.2. Usando la definición de m para conjuntos elementales, **calcule** la medida en $\mathbb{R}^3$ del conjunto

$$A = [1,3]\times[1,4]\times[0,3]\cup[2,4]\times[2,6]\times[1,4].$$

Usando algunas propiedades de la función $m\colon\mathcal{E}\to\mathbb{R}$, **pruebe** la identidad

$$m(A)+m(B) = m(A\cup B)+m(A\cap B), \qquad \forall A,B\in\mathcal{E}.$$

Calcule nuevamente la medida de A usando esta identidad.

Sol.

Veamos que podemos escribir a A como:

$A =$

1.3. Sea $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. **Muestre** que si $\{I_\nu\}_{\nu=1}^{l}$ es una familia finita de intervalos abiertos tales que $A \subset \bigcup_{\nu=1}^{l} I_\nu$, entonces

$$\sum_{\nu=1}^{l} L(I_\nu) \geq 1,$$

donde L denota longitud.

Dem:

Sea $B = \bigcup_{\nu=1}^{l} I_\nu$. Tenemos 2 casos:

a) $[0,1] \subseteq B$, en tal caso, por ser m monótona y finitamente aditiva:

$$m(B) \geqslant m([0,1]) = 1$$
$$\Rightarrow \sum_{\nu=1}^{l} L(I_\nu) \geqslant 1$$

b) $[0,1] \nsubseteq \bigcup_{\nu=1}^{l} I_\nu$. Sea A:

$$A = \{x \in [0,1] \mid x \notin \bigcup_{\nu=1}^{l} I_\nu\}$$

Claramente $A \neq \emptyset$, y $[0,1] \setminus A \subseteq \bigcup_{\nu=1}^{l} I_\nu$. Probaremos que $A \subseteq \{a_1, b_1, \dots, a_l, b_l\}$ donde $a_\nu < b_\nu$ son los extremos del intervalo I_ν, $\nu \in [\![1, l]\!]$.

Sea $x \in A$. Claramente $x \notin \mathbb{Q}$, pues $[0,1] \cap \mathbb{Q} \subseteq \bigcup_{\nu=1}^{l} I_\nu$, así $x \in \mathbb{I}$. Afirmamos que $a_{k+1} = b_k$, $\forall k \in [\![1, l-1]\!]$ (suponiendo sin pérdida de generalidad que $a_1 \leqslant 0 \leqslant b_1 \leqslant a_2 < b_2 \leqslant \dots \leqslant a_l \leqslant 1 \leqslant b_l$). En efecto, si $\exists k_0 \in [\![1, l]\!]$ m $b_{k_0} < a_{k_0}$, por la densidad de $\mathbb{I}$ en $\mathbb{R}$, $\exists$ $r \in \mathbb{Q}$ m $b_{k_0} < r_0 < a_{k_0}$, pero $r \in [0,1]$, luego $r \in \bigcup_{\nu=1}^{l} I_\nu$ $\times_c$. Por tanto $b_{k_0} = a_{k_0}$. Así:

$$a_1 \leqslant 0 \leqslant a_2 < a_3 < \dots < a_l \leqslant 1 \leqslant b_l = a_{l+1}$$

Si $x \notin \{a_1, \dots, a_{k+1}\} \Rightarrow$ como $x \in [0,1]$, $\exists k \in [\![1, l]\!]$ m $a_k \leqslant x \leqslant a_{k+1}$, pero $x \notin I_\nu$, $\forall \nu \in [\![1, l]\!]$, luego $x = a_k$ ó $x = a_{k+1}$ $\times_c$. Por tanto $x \in \{a_1, \dots, a_{k+1}\} = \{a_1, b_1, \dots, a_l, b_l\}$. Así A es finito, y

$$\lambda([0,1] \setminus A) = \lambda[0,1] - \lambda(A), \text{ pues } A \subseteq [0,1]$$
$$\Rightarrow \lambda([0,1] \setminus A) = 1 - 0 = 1$$

Como $[0,1] \setminus A \subseteq \bigcup_{\nu=1}^{l} I_\nu$:

$$\Rightarrow \lambda([0,1] \setminus A) \leqslant \lambda\left(\bigcup_{\nu=1}^{l} I_\nu\right)$$
$$\Rightarrow \sum_{\nu=1}^{l} L(I_\nu) \geqslant 1$$

q.e.d.

1.4. Sea $A \in \mathcal{E}$. **Demuestre** que para todo $\forall \varepsilon > 0$, existen conjuntos $F, G \in \mathcal{E}$ tales que F es cerrado, G es abierto, $F \subset A \subset G$ y

$$m(G \backslash A) < \varepsilon \qquad \text{y} \qquad m(A \backslash F) < \varepsilon.$$

Dem:

Se probó en la nota de medibilidad.

1.5. Sean A y B dos subconjuntos arbitrarios de $\mathbb{R}^n$. **Pruebe** que si $m^*(A) = 0$, entonces $m^*(A \cup B) = m^*(B)$.

1.6. Muestre que todo conjunto elemental y todo conjunto con medida exterior cero son

Dem:

Como m^* es monótona: $B \subseteq A \cup B \Rightarrow m^*(B) \leqslant m^*(A \cup B)$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces $\exists \{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de conjuntos en $\mathcal{E}$ tq:

$$B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \quad y \quad A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

y $\sum_{n=1}^{\infty} m(B_n) < m^*(B) + \frac{\varepsilon}{2}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) < m^*(A) + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$. Si $m^*(B) = \infty \Rightarrow m^*(A \cup B) = \infty = m^*(B)$. Si $m^*(B) < \infty$, entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(B_n) + \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) < m^*(B) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) + m(B_n) < m^*(B) + \varepsilon$$

Como m es finitamente aditiva: $m(A_n \cup B_n) \leqslant m(A_n) + m(B_n)$. Luego:

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n \cup B_n) < m^*(B) + \varepsilon$$

Por ser $\mathcal{E}$ anillo, $A_n \cup B_n \in \mathcal{E}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Además:

$$A \cup B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup B_n$$

Luego $m^*(A_n \cup B_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n \cup B_n)$. Así:

$$m^*(A \cup B) < m^*(B) + \varepsilon$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant m^*(A \cup B) - m^*(B) < \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0$. Por tanto $m^*(A \cup B) = m^*(B)$.

q.e.d.

1.6. Muestre que todo conjunto elemental y todo conjunto con medida exterior cero son conjuntos medibles.

1.7. Proporcione un ejemplo de una sucesión decreciente $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos medibles tal

Dem:

Sea $A \in \mathcal{E}$ y $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ tq $m^*(B) = 0$. Probaremos que $\exists \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de conjuntos en $\mathcal{M}_f$ tq:

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad y \quad B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

Como $A, B \in \mathcal{M}_f$, pues la sucesión $\{A\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{E}$ converge a A, pues:

$$\lim_{n\to\infty} d(A,A) = \lim_{n\to\infty} m^*(A \Delta A) = m^*(\emptyset) = 0$$

y, la sucesión $\{\emptyset\}_{n=1}^{\infty}$ converge a B en $\mathcal{E}$, pues:

$$\lim_{n\to\infty} d(B,\emptyset) = \lim_{n\to\infty} m^*(B) = m^*(B) = 0$$

Tomando $A_n = A$ y $B_n = B$, $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene que:

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad y \quad B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

Con $A_n, B_n \in M_J$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Luego $A, B \in M$.

q.e.d.

conjuntos medibles.

1.7. Proporcione un ejemplo de una sucesión decreciente $\{A_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ de conjuntos medibles tal que la sucesión $\{m(A_\nu)\}_{\nu=1}^{\infty}$ no converja a $m(\bigcap_{\nu=1}^{\infty} A_\nu)$.

1.8. Sea μ una función de conjunto definida sobre una σ-álgebra A de subconjuntos de un

Dem:

$\forall n \in \mathbb{N}$, tome $A_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \times [0, \infty[$. Claramente $A_{n+1} \subseteq A_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y, cada uno es medible, pues:

$$A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} [-\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}] \times [m-1, m[$$

Donde $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \times [m-1, m[\in \mathcal{E}$, $\forall m \in \mathbb{N}$. luego A_n es medible, $\forall n \in \mathbb{N}$. Veamos que:

$$\begin{aligned} A &= \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \\ &= \{0\} \times [0, +\infty[\end{aligned}$$

y, además $m^*(A) = 0$. En efecto: sea $\varepsilon > 0$, $\exists \{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en $\mathcal{E}$ dada como:

$$B_n = [-\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}] \times [n-1, n[$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, tal que

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

$$\begin{aligned} y \quad m^*(A) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(B_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(B_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \cdot 1 \\ &= \varepsilon \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Luego $m^*(A) \leq \varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow m^*(A) = 0$ (por ser no negativa). Pero:

$$m^*(A_n) = \infty, \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, $\lim_{n \to \infty} m^*(A_n) = +\infty \neq m^*(A)$.

$\square$

1.8. Sea μ una función de conjunto definida sobre una σ −álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un conjunto X que sea no negativa y aditiva. Si μ es tal que para toda sucesión decreciente $\{A_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ en $\mathcal{A}$ se cumple que

$$\bigcap_{\nu=1}^{\infty} A_\nu = \emptyset \qquad \text{implica} \qquad \lim_{\nu \to \infty} \mu(A_\nu) = 0,$$

demuestre que μ debe ser σ −aditiva.

Dem:

Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una familia de conjuntos en $\mathcal{A}$ ajenos a pares. Probaremos que:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Como $\mathcal{A}$ es un σ-álgebra, en particular es un σ-anillo y, como μ es no negativa, a lo más toma el valor de $+\infty$. Sea

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Si $\exists m \in \mathbb{N} \ni \mu(A_m) = +\infty$, como μ es finitamente aditiva

$$\mu(A \setminus A_m) + \mu(A_m) = \mu(A)$$

Por ser μ no negativa:

$$\Rightarrow \mu(A_m) \leq \mu(A) \Rightarrow \mu(A) = +\infty$$

Luego:

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Si $\mu(A_n) < \infty, \forall n \in \mathbb{N}$, tome $B_n = A \setminus \left(\bigcup_{m=1}^{n} A_m\right), \forall n \in \mathbb{N}$. Claramente $B_{n+1} \subseteq B_n, \forall n \in \mathbb{N}$ y $B_n \in \mathcal{A}$ (pues $\mathcal{A}$ es σ-anillo). Luego:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A \setminus \left(\bigcup_{m=1}^{n} A_m\right)$$
$$= \emptyset$$

Por tanto $\lim_{n \to \infty} \mu(B_n) = 0$. Como μ es aditiva:

$$\mu(B_n) = \mu\left(A \setminus \dot{\bigcup_{m=1}^{n}} A_m\right)$$
$$= \mu(A) - \mu\left(\dot{\bigcup_{m=1}^{n}} A_m\right), \text{ pues } \mu\left(\dot{\bigcup_{m=1}^{n}} A_m\right) = \sum_{m=1}^{n} \mu(A_m) < \infty \text{ (suma finita).}$$

Pero $\mu\left(\dot{\bigcup_{m=1}^{n}} A_m\right) = \sum_{m=1}^{n} \mu(A_m)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, luego:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\mu(A) - \sum_{m=1}^{n} \mu(A_m)\right) = 0$$
$$\Rightarrow \mu(A) = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \mu(A_m)$$
$$\therefore \mu\left(\dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

q.e.d.

1.9. Pruebe que la intersección de cualquier familia de σ −álgebras de un conjunto X es una σ −álgebra de X.

Dem:

Sea $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de σ-álgebras de X. Probaremos que:

$$\mathcal{A} = \bigcap_{\alpha\in I} \mathcal{A}_\alpha$$

es un subálgebra de X. En efecto, como $X \in \mathcal{A}_\alpha$, $\forall\, \alpha \in I$, entonces $X \in \mathcal{A}$ (1).

Sea $A \in \mathcal{A}$, entonces $A \in \mathcal{A}_\alpha$, $\forall\, \alpha \in I \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}_\alpha$, $\forall\, \alpha \in I \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$. (2).

Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{A} \Rightarrow \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ está en $\mathcal{A}_\alpha$, $\forall\, \alpha \in I \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_\alpha$, $\forall\, \alpha \in I \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. (3).

Por (1)-(3), $\mathcal{A}$ es un σ-álgebra.

q.e.d.

1.10. Muestre que el conjunto ternario de Cantor C puede ser escrito en la forma

$$C = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \,\middle|\, x_n \in \{0,2\}, \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Deduzca de lo anterior que C es un conjunto infinito no numerable.

1.11. Fije $0<\alpha\leq 1$. Sea $\mathcal{C}^\alpha$ el subconjunto de $[0,1]$ construido del mismo modo que el conjunto de Cantor excepto que los intervalos removidos en la n −ésima etapa de la construcción tienen longitud $\alpha/3^n$, $\forall n\in\mathbb{N}$. **Muestre** que $\mathcal{C}^\alpha$ es un conjunto no vacío, compacto, $[0,1]\backslash\mathcal{C}^\alpha$ es denso en $[0,1]$ y $m(\mathcal{C}^\alpha)=1-\alpha$. El conjunto $\mathcal{C}^\alpha$ se llama **Conjunto de Cantor Generalizado** o **Conjunto de Cantor de medida** $1-\alpha$.

Dem:

Primero, hagámos la construcción de este conjunto. Tome $E_0=[0,1]$. Para construir el E_1, tomemos al intervalo $[0,1]$ (identificado como $J_{0,1}$), restando el intervalo $I_{1,1}$ de longitud $\frac{\alpha}{3}$ centrado en el punto medio de $J_{0,1}$ (siendo $I_{1,1}$ abierto). obtenemos los intervalos cerrados disjuntos $J_{1,1}$ y $J_{1,2}$ ambos de longitud $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}(3-\alpha)$. Tomemos $E_1=J_{1,1}\cup J_{1,2}$, claramente $E_0\subseteq E_1$ y E_1, E_0 son medibles.

Suponga construidos $E_2,\dots,E_n$, donde E_n es la unión de los 2^n intervalos $J_{n,1},J_{n,2},\dots,J_{n,2^n}$ disjuntos, cada uno de longitud $\frac{1}{2^n}\left(1-\alpha\sum_{i=1}^{n}\frac{2^{i-1}}{3^i}\right)=\frac{1}{2^n}\left(1-\alpha\cdot\left(1-\frac{2^n}{3^n}\right)\right)$, tal que E_n es medible y $m(E_n)=1-\alpha\cdot\left(1-\frac{2^n}{3^n}\right)$.

$\forall K\in[\![1,2^n]\!]$, construya el intervalo abierto $I_{n+1,K}$ y, restemóslo del intervalo $J_{n,K}$ centrado en el medio de $J_{n,K}$, con $m(I_{n+1,K})=\frac{\alpha}{3^{n+1}}$. Obtenemos así los intervalos $J_{n+1,i}$, donde $i\in[\![1,2^{n+1}]\!]$, cada uno cerrado de longitud $\frac{1}{2^{n+1}}\left(1-\alpha\cdot\sum_{i=1}^{n+1}\frac{2^{i-1}}{3^i}\right)=\frac{1}{2^{n+1}}\left(1-\alpha\cdot\left(1-\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}\right)\right)$, medible. Sea $E_{n+1}=J_{n+1,1}\cup\dots\cup J_{n+1,2^{n+1}}$.

Se tiene que $E_{n+1}\subseteq E_n$, E_{n+1} es medible y $m(E_{n+1})=1-\alpha\left(1-\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}\right)$. Además, el extremo izquierdo de $J_{n+1,1}$ es el mismo que el de $J_{n,1}$ y el derecho de $J_{n+1,2}$ es el correspondiente de $J_{n,1}$.

Así, se completa la construcción de los E_n. Se construye el conjunto de Cantor Generalizado como:

$$C^\alpha=\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n$$

Como $0\in J_{n,1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$ (pues es el extremo izquierdo de cada intervalo), entonces $0\in E_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$, así $C^\alpha\neq\emptyset$. Además, como cada E_n es cerrado y acotado (por su construcción), la intersección de todos es compacta $\Rightarrow C^\alpha$ compacto.

Además:

$$m(C^\alpha) \leq m(E_n) = 1 - \alpha\left(1 - \frac{2^n}{3^n}\right), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow m(C^\alpha) = 1 - \alpha.$$

Por el teorema de continuidad ($\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de conjuntos m $m(E_0) = 1 < \infty$). Luego:

$$\begin{aligned} m(C^\alpha) &= m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} m(E_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \alpha\left(1 - \frac{2^n}{3^n}\right)\right) \\ &= 1 - \alpha \end{aligned}$$

Veamos que $[0,1] \setminus C^\alpha$ es denso en $[0,1]$. Sea $x \in [0,1]$ y $r > 0$.

Si $x \in [0,1] \setminus C^\alpha$, entonces $]x-r, x+r[\cap [0,1] \setminus C^\alpha \neq \emptyset$.

Si $x \in C^\alpha$, para $r > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ m $\frac{1}{2^N}\left(1 - \alpha\left(1 - \frac{2^N}{3^N}\right)\right) < r$, con $x \in C^\alpha$, $\exists$ $K \in [[1, 2^N]]$ tal que $x \in J_{N,K}$. $J_{N,K}$ tiene longitud $\frac{1}{2^N}\left(1 - \alpha\left(1 - \frac{2^N}{3^N}\right)\right)$, luego el punto medio x_0 (por construcción) no pertenece a C^α, y $|x - x_0| < \frac{1}{2^N}\left(1 - \alpha\left(1 - \frac{2^N}{3^N}\right)\right) < r \Rightarrow x_0 \in]x-r, x+r[\cap [0,1] \setminus C^\alpha$. Por tanto, $[0,1] \setminus C^\alpha$ es denso en $[0,1]$.

q.e.d.

1.12. Considere el conjunto no medible P contenido en $[0,1]$. **Demuestre** que si E es un conjunto medible contenido en P, entonces $m(E) = 0$.

Sugerencia. Defina $E_i = E \hat{+} q_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$. ¿Qué propiedades tiene la sucesión $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$?

1.13. Pruebe que si A es un subconjunto de $\mathbb{R}$ tal que $m^*(A) > 0$, entonces existe un conjunto no medible E contenido en A.

Sugerencia. Suponga primero que $A \subset [0,1]$. Defina $E_i = A \cap P_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Aplique el ejercicio anterior. ¿Cuál es la unión de los E_i?

1.14.i. Proporcione un ejemplo de una sucesión de conjuntos disjuntos $\{E_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ tal que

$$m^*\left[\bigcup_{\nu=1}^{\infty} E_\nu\right] < \sum_{\nu=1}^{\infty} m^*(E_\nu).$$

ii. Dé un ejemplo de una sucesión decreciente de conjuntos $\{E_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ tales que $m^*(E_\nu) < \infty$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$, pero que

$$m^*\left[\bigcap_{\nu=1}^{\infty} E_\nu\right] < \lim_{\nu\to\infty} m^*(E_\nu).$$

1.15. (Construcción de la medida de Lebesgue usando la condición de Carathéodory.) Se dirá que un subconjunto E de $\mathbb{R}^n$ es $\boldsymbol{C}$ **−medible** si satisface la condición de Carathéodory siguiente:

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c), \quad \forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n).$$

Será denotada por $C - \mathcal{M}$ la colección de todos los subconjuntos C −medibles de $\mathbb{R}^n$.

i. Pruebe primero que la familia de conjuntos $C - \mathcal{M}$ es una álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ y después, que $C - \mathcal{M}$ es una σ −álgebra.

ii. Muestre que todo rectángulo acotado en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto C −medible. **Deduzca** que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset C - \mathcal{M}$.

Sugerencia. Adapte a $\mathbb{R}^n$ la demostración de que $]a, \infty[$ es C −medible en $\mathbb{R}$ de uso común en la literatura.

iii. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$. **Demuestre** que las siguientes afirmaciones son equivalentes a pares:

a) E es C −medible.

b) $\forall \varepsilon > 0$, existe un conjunto abierto O tal que $E \subset O$ y $m^*(O \backslash E) < \varepsilon$.

c) $\forall \varepsilon > 0$, existe un conjunto cerrado F tal que $F \subset E$ y $m^*(E \backslash F) < \varepsilon$.

d) Existe un conjunto $G \in \mathcal{G}_\delta$ tal que $E \subset G$ y $m^*(G \backslash E) = 0$.

e) Existe un conjunto $F \in \mathcal{F}_\delta$ tal que $F \subset E$ y $m^*(E \backslash F) = 0$.

Si adicionalmente $m^*(E) < \infty$, **pruebe** que las afirmaciones anteriores son equivalentes a:

f) $\forall \varepsilon > 0$, existe un conjunto abierto U que es la unión de una familia finita de rectángulos acotados abiertos tal que $d(U, E) = m^*(U \Delta E) < \varepsilon$.

Sugerencias. α) Suponiendo $m^*(E) < \infty$, muestre que $(a) \Longrightarrow (b) \Longleftrightarrow (f)$. Para probar $(a) \Longrightarrow (b)$ aplique la Proposición 9. Para probar $(b) \Longrightarrow (f)$ exprese O como unión numerable de rectángulos acotados abiertos, aplique el Teorema de continuidad y finalmente la Proposición 14.

β) Escriba $\mathbb{R}^n = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} P_\nu$, donde los P_ν son rectángulos acotados, luego $E = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} (E \cap P_\nu)$. Aplique ahora ($\alpha$) para probar que $(a) \Longrightarrow (b) \Longrightarrow (d) \Longrightarrow (a)$. Para mostrar $(d) \Longrightarrow (a)$ use el hecho de que $\mathcal{G}_\delta \subset C - \mathcal{M}$.

γ) Aplique (β) para probar que $(a) \Longrightarrow (c) \Longrightarrow (e) \Longrightarrow (a)$.

Note que la parte (iv) afirma que si $E \subset \mathbb{R}^n$ es tal que $m^*(E) < \infty$, entonces E es un conjunto C −medible si y sólo si $E \in \mathcal{M}_F$. Siendo todo conjunto C −medible unión a lo sumo numerable de conjuntos C −medibles con medida exterior finita, se concluye que todo conjunto C −medible es medible. Recíprocamente, todo conjunto medible es unión a lo sumo numerable de conjuntos finitamente medibles y como $C - \mathcal{M}$ es una σ −álgebra (por (ii)), entonces todo conjunto medible es C −medible. Por lo tanto $\mathcal{M} = C - \mathcal{M}$.

1.16. Si $\{E_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos C −medibles disjuntos y $A \subset \mathbb{R}^n$ es arbitrario, entonces

$$m^*\left[A \cap \bigcup_{\nu=1}^{\infty} E_\nu\right] = \sum_{\nu=1}^{\infty} m^*(A \cap E_\nu).$$

Sugerencia. Pruebe primero el resultado por inducción para uniones finitas aplicando la condición de Carathéodory.