

Notas del curso Topología I

Cristo Daniel Alvarado

16 de febrero de 2024

Índice general

0. Introduccion	2
0.1. Temario	2
0.2. Bibliografía	2
1. Conceptos Fundamentales	3
1.1. Fundamentos	3

Capítulo 0

Introduccion

0.1. Temario

Checar el Munkres

0.2. Bibliografía

1. J. R. Munkres 'Topología' - Prentices Hall.
2. M. Gemignani 'Elementary Topology' - Dover.
3. J. Dugundji 'Topology' - Allyn Bacon.

Capítulo 1

Conceptos Fundamentales

1.1. Fundamentos

Definición 1.1.1

Sea X un conjunto y \mathcal{A} una familia no vacía de subconjuntos de X . Definamos los **complementos de \mathcal{A}**

$$\mathcal{A}' := \{X - A \mid A \in \mathcal{A}\}$$

(básicamente es el conjunto de todos los complementos de los conjuntos en \mathcal{A}). Para no perder ambigüedad, no denotaremos al complemento de un conjunto por B^c , sino por $X - B$ (para denotar quien es el conjunto sobre el que se toma el complemento del conjunto).

La **unión de los elementos** de \mathcal{A} se define como el conjunto:

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \in X \mid x \in A \text{ para algún elemento } A \in \mathcal{A}\}$$

denotada por el símbolo de la izquierda.

La **intersección de los elementos** de \mathcal{A} se define como el conjunto:

$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \in X \mid x \in A \text{ para todo elemento } A \in \mathcal{A}\}$$

Observación 1.1.1

En caso de que la colección \mathcal{A} sea vacía, no se puede hacer lo que marca la definición anterior. Como \mathcal{A} es vacía, entonces \mathcal{A}' también es vacía.

1. Suponga que $\bigcup \mathcal{A} \neq \emptyset$, entonces existe $x \in X$ tal que $x \in \bigcup \mathcal{A}$, luego existe algún elemento $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A$, pero esto no puede suceder, pues la familia \mathcal{A} es vacía. $\#_c$. Por tanto, $\bigcup \mathcal{A} = \emptyset$.
2. Ahora, si aplicamos las leyes de Morgan, y tomamos

$$X - \bigcap \mathcal{A} = X - \bigcap \emptyset = \bigcup \emptyset' = \bigcup \emptyset = \emptyset$$

luego, $\bigcap \mathcal{A} = X$.

En definitiva, si \mathcal{A} es una colección vacía, entonces definimos $\bigcup \mathcal{A} = \emptyset$ y $\bigcap \mathcal{A} = X$.

La observación junto con la definición anterior se usarán a lo largo de todo el curso y serán de utilidad.

Definición 1.1.2

Sea X un conjunto y sea τ una familia de subconjuntos de X . Se dice que τ es una **topología definida sobre X** si se cumple lo siguiente:

1. $\emptyset, X \in \tau$.
2. Si \mathcal{A} es una subcolección de τ , entonces $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$.
3. Si $A, B \in \tau$, entonces $A \cap B \in \tau$.

Observación 1.1.2

En algunos libros viejos viene la siguiente condición adicional a la definición:

4. Si $p, q \in X$ con $p \neq q$, entonces existen $U, V \in \tau$ tales que $p \in U$, $q \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

en este caso se dirá que el espacio es **Hausdorff**.

Observación 1.1.3

Se tienen las siguientes observaciones:

1. Sea X un conjunto y \mathcal{A} una familia de subconjuntos de X . Si

$$\mathcal{A} = \{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$$

entonces podemos escribir

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

e igual con la intersección:

$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$$

Si \mathcal{A} es una familia vacía, y se toma como definición lo dicho en la observación 1.0.1, entonces podemos omitir el primer inciso de la definición anterior.

2. Si τ es una topología sobre X y para $n \in \mathbb{N}$, $A_1, \dots, A_n \in \tau$, entonces $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \tau$.

Ejemplo 1.1.1

Sea X un conjunto no vacío.

1. El conjunto potencia (denotado por \mathcal{P}) de X es una topología sobre X , la cual se llama la **topología discreta**, y se denota por τ_D .
2. La colección formada únicamente por X y \emptyset es una topología sobre X , es decir $\tau = \{\emptyset, X\}$ es llamada la **topología indiscreta**, y se escribe como τ_I .
3. En el caso de que $X = \{1\}$, se tendría que $\tau_D = \{\emptyset, \{1\}\}$ y $\tau_I = \{\emptyset, \{1\}\}$.
Si $X = \{1, \zeta\}$, entonces $\tau_D = \{\emptyset, \{1\}, \{\zeta\}, \{1, \zeta\}\}$ y $\tau_I = \{\emptyset, \{1, \zeta\}\}$.
4. Si τ es una topología sobre X , entonces

$$\tau_I \subseteq \tau \subseteq \tau_D$$

5. Sea $a \in X$. Entonces $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \}$ es una topología sobre X .

6. Sea $A \subseteq X$ y sea $\tau(A) = \{B \subseteq X \mid A \subseteq B\} \cup \{\emptyset\}$. Esta familia $\tau(A)$ es una topología sobre X .

Solución:

Para el inciso 6., veamos que $\tau(A)$ es una topología sobre X . En efecto, verificaremos que se cumplen las 3 condiciones:

1. Claro que $\emptyset \in \tau(A)$ por definición de $\tau(A)$. Además $X \in \tau(A)$ ya que $X \subseteq X$ y $A \subseteq X$.
2. Sea \mathcal{B} una familia no vacía de subconjuntos de $\tau(A)$, entonces existe $B_0 \in \mathcal{B}$ tal que $A \subseteq B_0$, por lo cual

$$A \subseteq B_0 \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subseteq X$$

por tanto $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \in \tau(A)$.

3. Sean $C, D \in \tau(A)$, entonces $A \subseteq C$ y $A \subseteq D$, por ende $A \subseteq C \cap D \subseteq X$. Así, $C \cap D \in \tau(A)$.

Por los incisos anteriores, la familia descrita en el inciso 6. es una topología sobre X . \square

Observación 1.1.4

Sea X un conjunto no vacío. Si $A = \{a\} \subseteq X$, entonces escribimos τ_a en vez de $\tau(A)$.

Ejemplo 1.1.1

Se continúan con los ejemplos anteriores:

7. Sea $\tau_{cf} = \{A \subseteq X \mid X - A \text{ es un conjunto finito}\} \cup \{\emptyset\}$. Esta es una topología sobre X y se llama la **topología de los complementos finitos**.
8. Si X es un conjunto finito, entonces $\tau_{cf} = \tau_D = \mathcal{P}$.
9. Considere (en un conjunto finito X) a τ_{cf} y sean $a, b \in X$ con $a \neq b$. Si $U_a = X - \{b\}$, $U_b = X - \{a\}$, entonces $U_a, U_b \in \tau_{cf}$ y además, $a \in U_a$ pero $b \notin U_a$ y $a \notin U_b$ pero $b \in U_b$. Esta propiedad es muy importante tenerla en mente pues más adelante se usará.

Solución:

Veamos que la familia del ejemplo 7. es una topología sobre X . En efecto, veamos que se cumplen las 3 condiciones:

1. Claro que $\emptyset \in \tau_{cf}$ (por definición de τ_{cf}). Y además $X \in \tau_{cf}$ ya que $\emptyset = X - X$ es un conjunto finito y $X \subseteq X$.
2. Sea \mathcal{A} una familia no vacía de subconjuntos de τ_{cf} . Se cumple entonces que existe $A_0 \in \mathcal{A}$ tal que $X - A_0$ es finito. Por lo cual como

$$X - \bigcup \mathcal{A} \subseteq X - A_0$$

ya que $A_0 \subseteq \bigcup \mathcal{A}$, se tiene que $X - \bigcup \mathcal{A}$ es finito y $\bigcup \mathcal{A} \subseteq X$. Por tanto, $\bigcup \mathcal{A} \in \tau_{cf}$.

3. Sean $A, B \in \tau_{cf}$. Probaremos que $A \cap B \in \tau_{cf}$. Afirmamos que $X - A \cap B$ es finito, en efecto, por leyes de Morgan se tiene que

$$X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B) \subseteq X$$

donde $X - A$ y $X - B$ son finitos, por lo cual su unión también lo es. Por tanto $A \cap B \in \tau_{cf}$.

Por los tres incisos anteriores, se sigue que τ_{cf} es una topología sobre X . \square

A continuación se verá una proposición la cual tiene como objetivo el inducir una topología sobre un espacio métrico (X, d) arbitrario.

Proposición 1.1.1

Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $a \in X$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, al conjunto $B_d(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ se llama **ε -bola con centro en x y radio ε** .

Sea

$$\tau_d = \{A \subseteq X \mid \forall a \in A \exists r > 0 \text{ tal que } B_d(a, r) \subseteq A\}$$

Esta colección es una topología sobre X .

Demostración:

Se verificará que se cumplen las tres condiciones.

1. Por vacuidad, $\emptyset \in \tau_d$. Además, $X \in \tau_d$, pues para todo $x \in X$, $B_d(x, 1) \subseteq X$.
2. Sean \mathcal{A} una familia no vacía de subconjuntos de τ_d . Sea $p \in \cup \mathcal{A}$, es decir que existe $A_\beta \in \mathcal{A}$ tal que $p \in A_\beta$, así existe $r > 0$ tal que $B_d(p, r) \subseteq A_\beta \subseteq \cup \mathcal{A}$, luego $\cup \mathcal{A} \in \tau_d$.
3. Sean $M, N \in \tau_d$, y sea $p \in M \cap N$, es decir que $p \in M$ y $p \in N$, por lo cual existen $r_1, r_2 > 0$ tales que $B_d(p, r_1) \subseteq M$ y $B_d(p, r_2) \subseteq N$. Sea $r = \min\{r_1, r_2\}$, es inmediato que $B_d(p, r) \subseteq B_d(p, r_i)$, para $i = 1, 2$. Por tanto, $B_d(p, r) \subseteq M \cap N$. Luego, como el p fue arbitrario, se sigue que $M \cap N \in \tau_d$.

■

Definición 1.1.3

La topología de la proposición anterior es llamada la **topología generada por la métrica d** .

Ejercicio 1.1.1

Sea (X, d) espacio métrico. Veamos que, dados $x \in X$ y $r > 0$, se cumple que $B_d(x, r) \in \tau_d$.

Solución:

Sea $y \in B_d(x, r)$, entonces $d(x, y) < r$. Sea $\varepsilon = d(x, y)$ y, supongamos que $x \neq y$ (pues en caso contrario, el caso es inmediato ya que $B_d(x, r) \subseteq B_d(x, r)$) luego $\varepsilon > 0$ y además $\varepsilon < r$. Sea $s = r - \varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

Afirmamos que $B_d(y, s) \subseteq B_d(x, r)$. En efecto, sea $z \in B_d(y, s)$, entonces

$$\begin{aligned} d(z, y) &< s \\ \Rightarrow d(z, y) &< r - \varepsilon \\ \Rightarrow d(z, y) + \varepsilon &< r \\ \Rightarrow d(z, y) + d(y, x) &< r \\ \Rightarrow d(z, x) &< r \end{aligned}$$

por tanto, $x \in B_d(x, r)$. Luego, $B_d(x, r) \in \tau_d$. \square

Lema 1.1.1

Todo espacio métrico (X, d) es Hausdorff.

Demostración:

Veamos que dados $x, y \in X$, $x \neq y$ existen $r, s \in \mathbb{R}^+$ tales que $B_d(x, r) \cap B_d(y, s) = \emptyset$. Como $x \neq y$ entonces $d(x, y) = m \in \mathbb{R}^+$. Tomemos $r = \frac{m}{\pi}$ y $s = \frac{\pi-1}{\pi}m$ y veamos que la intersección es vacía.

En efecto, en caso de que no lo fuese se tendría que si existiera $p \in B_d(x, r) \cap B_d(y, s)$, entonces $d(p, x) < \frac{m}{\pi}$ y $d(p, y) < \frac{\pi-1}{\pi}m$, por lo cual de la desigualdad triangular se sigue que:

$$d(x, y) \leq d(p, x) + d(p, y) < \frac{1 + \pi - 1}{\pi}m = m = d(x, y)$$

lo cual es una contradicción. Por tanto, la intersección es vacía. ■

Retomando al espacio métrico (X, d) , tenemos que para $A \subseteq X$, $A \in \tau_d$ si y sólo si existen $\{a_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq A$ y $\{\varepsilon_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathbb{R}^+$ tales que

$$\bigcup_{\alpha \in I} B_d(a_\alpha, \varepsilon_\alpha) = A$$

donde $\forall \alpha \in I$ se tiene que $A_\alpha \in \mathcal{A}$.

Corolario 1.1.1

Sea (X, d) un espacio métrico y

$$\mathcal{B}_d = \{B_d(x, \varepsilon) | x \in X, \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$$

entonces, para $A \subseteq X$ se tiene que $A \in \tau_d$ si y sólo si existe una colección $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathcal{B}_d$ tal que $A = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$. La colección $\mathcal{B}_d \subseteq \tau_d$.

Ejemplo 1.1.2

Sea $m \in \mathbb{N}$ y considere el espacio métrico \mathbb{R}^m con la métrica d_u , siendo:

$$d_u(x, y) = [(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_m - y_m)^2]^{\frac{1}{2}}$$

para $x = (x_1, \dots, x_m), y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$. Esta métrica será denominada **métrica usual**. Vamos a escribir a la topología generada por esta métrica como τ_u , y se dice la **topología usual definida sobre \mathbb{R}^m** . En particular, cuando $m = 1$ tenemos que τ_u la topología usual definida sobre \mathbb{R} . En este caso, se tiene que $A \in \tau_u$ si y sólo si existen $\{a_\alpha\}_{\alpha \in I}$ y $\{b_\alpha\}_{\alpha \in I}$ subfamilias de \mathbb{R} tal que $A = \bigcup_{\alpha \in I} (a_\alpha, b_\alpha)$.

Observación 1.1.5

Tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, los conjuntos $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \in \tau_u$, y $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \{0\} \notin \tau_u$. Es decir, que la topología solo es cerrada (en general) bajo intersecciones finitas.

Definición 1.1.4

Sea X un conjunto, y sean τ_1 y τ_2 topologías sobre X . Decimos que τ_2 es **más fina** que la topología τ_1 si se tiene que $\tau_1 \subseteq \tau_2$ (a veces también se dice que τ_1 es **menos fina** que τ_2).

Ejemplo 1.1.3

Sea $X = \{1, 2, 3\}$, $\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}\}$, $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2\}\}$. Tomemos

$$\tau_1 \cup \tau_2 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{2\}\}$$

la familia $\tau_1 \cup \tau_2$ no es una topología sobre X , pues no es cerrada bajo uniones arbitrarias. Con esto se tiene que la unión de dos topologías no necesariamente es una topología.

Teorema 1.1.1

Sea X un conjunto, y sea $\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de topologías sobre X , entonces $\tau = \bigcap_{\alpha \in I} \tau_\alpha$ es una topología sobre X .

Demostración:

Veamos que se cumplen las tres condiciones.

1. Claro que $X, \emptyset \in \tau$, pues $X, \emptyset \in \tau_\alpha$, para todo $\alpha \in I$.
2. Sea $\mathcal{A} = \{A_\beta\}_{\beta \in J} \subseteq \tau = \bigcap_{\alpha \in I} \tau_\alpha$ una subcolección arbitraria de elementos de τ . Por ser τ_α una topología, se sigue que $\bigcup \mathcal{A} \in \tau_\alpha$, para todo $\alpha \in I$. Por tanto, $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$.
3. Sean $K, L \in \tau$, entonces $K, L \in \tau_\alpha$, para todo $\alpha \in I$, luego como τ_α es una topología sobre X , se tiene que $L \cap K \in \tau_\alpha$, para todo $\alpha \in I$, por tanto $L \cap K \in \tau$.

Por los tres incisos anteriores, se sigue que τ es una topología sobre X . ■

Corolario 1.1.2

Sea X un conjunto y sean \mathcal{A} una familia de subconjuntos de X . Definimos

$$\mathcal{K} = \{\tau \mid \tau \text{ es una topología sobre } X \text{ y } \mathcal{A} \subseteq \tau\}$$

Entonces:

1. $\tau_D \in \mathcal{K}$.
 2. Definiendo $\tau(\mathcal{A}) = \bigcap_{\tau \in \mathcal{K}} \tau$, se tiene que $\tau(\mathcal{A})$ es una topología sobre X .
 3. Para toda topología $\tau \in \mathcal{K}$, $\tau(\mathcal{A}) \subseteq \tau$.
 4. $\tau(\mathcal{A}) \in \mathcal{K}$.
-

Demostración:

De 1. Es inmediato, pues como $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P} = \tau_D$ y τ_D es una topología sobre X , se sigue que $\tau_D \in \mathcal{K}$.

De 2. Es inmediato del teorema anterior.

De 3. Como $\tau(\mathcal{A}) = \bigcap_{\tau \in \mathcal{K}} \tau$, entonces $\tau(\mathcal{A}) \subseteq \tau$, para toda $\tau \in \mathcal{K}$.

De 4. Por 2. $\tau(\mathcal{A})$ es una topología sobre X , y además $\mathcal{A} \subseteq \tau(\mathcal{A})$, pues $\mathcal{A} \subseteq \tau$, para todo $\tau \in \mathcal{K}$, luego $\mathcal{A} \subseteq \bigcap_{\tau \in \mathcal{K}} \tau = \tau(\mathcal{A})$. Por ende, $\tau(\mathcal{A}) \in \mathcal{K}$. ■

Definición 1.1.5

Un **espacio topológico** es una pareja (X, τ) en donde X es un conjunto y τ es una topología sobre X . A los elementos de τ los llamaremos los **conjuntos abiertos** del espacio (X, τ) a veces también se les nombra como los **τ -abiertos de X** .

Ejemplo 1.1.4

Ejemplos de espacios topológicos son (\mathbb{R}, τ_D) , (\mathbb{R}, τ_I) , (\mathbb{R}, τ_{cf}) , (\mathbb{R}, τ_u) , etc... Las diferencias notables son que $\{1, \sqrt{2}\}$ es abierto en (\mathbb{R}, τ_D) , pero no en (\mathbb{R}, τ_u) .

Sea X un conjunto y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$. Por el corolario anterior, podemos trabajar con la topología $\tau(\mathcal{A})$, y tenemos así al espacio topológico $(X, \tau(\mathcal{A}))$, el cual en particular tiene como abiertos a los elementos de la familia \mathcal{A} .

Definición 1.1.6

Sea (X, τ) un espacio topológico.

1. Un subconjunto $C \subseteq X$ es un **conjunto cerrado** del espacio topológico (X, τ) si $X - C \in \tau$.

Ejemplo 1.1.5

En (\mathbb{R}, τ_u) se tiene que \mathbb{R} y \emptyset son abiertos y cerrados a la vez, pero el conjunto $[1, 2[$ no es abierto ni cerrado, $]1, 2[$ es abierto pero no cerrado y $[1, 2]$ no es abierto pero sí es cerrado.