# Grupos Topológicos

Cristo Daniel Alvarado

6 de febrero de 2024

# Índice general

**1. Elementos de la teoría de grupos topológicos** **2**
1.1. Preliminares . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2

# Capítulo 1

# Elementos de la teoría de grupos topológicos

## 1.1. Preliminares

**Definición 1.1.1**
Sea $G$ un conjunto no vacío dotado de una operación binaria (denotada por $\cdot$) y una familia $\tau$ de subconjuntos de $G$. $G$ es llamado **grupo topológico** si

1). $(G, \cdot)$ es un grupo.

2). $(G, \tau)$ es un espacio topológico.

3). Las funciones $g_1 : (G,\tau) \times (G,\tau) \to (G,\tau)$ y $g_2 : (G,\tau) \to (G,\tau)$ dadas por $(x,y) \mapsto x \cdot y$ y $x \mapsto x^{-1}$, respectivamente, son continuas, siendo $x^{-1}$ el inverso de $x$ en $G$.

Se denotará a la operación $\cdot$ por yuxtaposición, es decir $x \cdot y = xy$.

**Observación 1.1.1**
Una equivalencia de la condición (3) de la proposición anterior es la siguiente:
Sea $G$ un grupo topológico. Denotamos por $\mathcal{N}(x)$ a **la familia de todas las vecindades de** $x \in G$. 3) es equivalente a

4). Si $x, y \in G$, entonces para cada $U \in \mathcal{N}(xy)$ existen vecindades $V \in \mathcal{N}(x)$ y $W \in \mathcal{N}(y)$ tales que $V \cdot W \subseteq U$, donde
$$V \cdot W = \left\{ vw \middle| v \in V \ \&\ w \in W \right\}$$
y, para cada $U \in \mathcal{N}(x^{-1})$ existe $V \in \mathcal{N}(x)$ tal que $V^{-1} \subseteq U$, siendo
$$V^{-1} = \left\{ v^{-1} \middle| v \in V \right\}$$

esta equivalencia es inmediada de la definición de continuidad de una función en un espacio topológico.

**Observación 1.1.2**
El símbolo $e_G$ denotará siempre a la identidad de un grupo $G$.
Con frecuencia se referirá al grupo topológico $G$, con operación binaria $\cdot$ y topología $\tau$ como la terna $(G, \cdot, \tau)$. Si no hay ambiguedad, se denotará simplemente por $G$.

**Lema 1.1.1**
Sean $(G, \cdot)$ un grupo, y $\tau$ una topología en $G$. Entonces, $(G, \cdot, \tau)$ es un grupo topológico si y sólo si la función

$$\begin{aligned} g_3 : (G, \tau) \times (G, \tau) &\to (G, \tau) \\ (x, y) &\mapsto xy^{-1} \end{aligned}$$

es continua.

**Demostración:**
$\Rightarrow)$ : Suponga que $G$ es un grupo topológico, entonces las funciones $g_1$ y $g_2$ son continuas (por la condición 3) de la definición anterior). Notemos que

$$g_3 = g_1(x, g_2(y)), \quad \forall x, y \in G$$

por ende, $g_3$ es continua.
$\Leftarrow)$ : Suponga que la función $g_3$ es continua. Notemos que

$$g_2(x) = g_3(x, e_G), \quad \forall x \in G$$

por ser $g_3$ continua, se sigue que $g_2$ también lo es. Además

$$g_1(x, y) = g_3(x, g_2(y)), \quad \forall x, y \in G$$

por lo cual, $g_1$ también es continua. Por tanto, $G$ es grupo topológico. $\square$