Lista 4 pt. 3

4.10. Sean A un conjunto arbitrario en E y $r > 0$. **Pruebe** que

$$U_r = \{x \in E \mid d(x, A) < r\} = A + B(0, r)$$

y **concluya** que U_r es un conjunto abierto en E. ¿Es

$$V_r = \{x \in E \mid d(x, A) \leq r\}$$

un conjunto cerrado en E? Sea ahora C es un conjunto compacto en E. **Muestre** que

$$W_r = \{x \in E \mid d(x, C) \leq r\} = C + B'(0, r)$$

y **concluya** que W_r un conjunto cerrado en E. ¿Cuándo será seguramente W_r un conjunto compacto en E? **Justifique**.

Dem:

Probaremos que $U_r = \{x \in E \mid d(x, A) < r\} = A + B(0, r)$.

i) Sea $x \in U_r$, entonces $d(x, A) < r$. Por tanto $\inf_{a \in A} N(x-a) < r$. Por ser el ínfimo, para $\varepsilon = \frac{r - d(x,A)}{2} > 0$, $\exists$ $a \in A$ tal que $N(x-a) < d(x,A) + \frac{r}{2} - \frac{d(x,A)}{2}$
$\Rightarrow N(x-a) < \frac{d(x,A)+r}{2} < \frac{2r}{2} = r$. Entonces $x - a \in B(0,r)$, y $a \in A$. Luego $x = a + x - a$ donde $a \in A$ y $x - a \in B(0,r)$. Por tanto $U_r \subseteq A + B(0,r)$.

ii) Sea $x \in A + B(0,r)$, entonces $\exists$ $a \in A$ y $b \in B(0,r)$ tq $x = a + b \Rightarrow x - a = b$. por tanto $N(x-a) < r \Rightarrow d(x,A) = \inf_{a' \in A} N(x-a') \leq N(x-a) < r$. Por tanto, $x \in U_r$, así $A + B(0,r) \subseteq U_r$.

Por i) y ii), $U_r = A + B(0,r)$. Como E es espacio normado y $B(0,r)$ es abierta, entonces $A + B(0,r) = U_r$ es abierto en E, por una proposición anterior.

Para la otra parte, probaremos que:

$$V_r = \{x \in E \mid d(x, A) \leq r\} = A + B'(0,r)$$

iii) Sea $x \in V_r$, entonces $d(x, A) \leq r \Rightarrow \inf_{a \in A} N(x-a) \leq r$