Notas curso Topología I.
Conexidad, Compacidad y Separabilidad

Cristo Daniel Alvarado

25 de marzo de 2024

Índice general

Capítulo 2

Separabilidad

2.1. Axiomas de separación

Definición 2.1.1
Sea (X, τ) un espacio topológico.

1. (X, τ) se dice un **espacio** T_0 si dados $a, b \in X$ con $a \neq b$ existe un abierto que contiene a alguno de los dos puntos, pero no contiene al otro.

2. (X, τ) se dice un **espacio** T_1 si dados $a, b \in X$ con $a \neq b$ existen $U, V \subseteq X$ abiertos tales que $a \in U$, $b \in V$ y, $a \notin V$, $b \notin U$.

3. (X, τ) se dice un **espacio** T_2 si dados $a, b \in X$ con $a \neq b$ existen $U, V \subseteq X$ abiertos tales que $a \in U$, $b \in V$ y, $U \cap V = \emptyset$. Esto es equivalente a que el espacio sea de Hausdorff.

4. (X, τ) se dice un **espacio** T_3 si dados $p \in X$ y $A \subseteq X$ cerrado tal que $p \notin A$, existen $U, V \in \tau$ tales que $p \in U$, $A \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

5. (X, τ) se dice un **espacio** T_4 si dados $A, B \subseteq X$ cerrados y disjuntos, existen $U, V \in \tau$ tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y, $U \cap V = \emptyset$.

6. (X, τ) se dice un **espacio regular** si es un espacio T_3 y T_1.

7. (X, τ) se dice un **espacio normal** si es un espacio T_4 y T_1.

Observación 2.1.1
Notemos que:

$$T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$$

Ejemplo 2.1.1
Considere al conjunto $X = \{1, 2\}$ y $\tau = \{X, \emptyset, \{1\}\}$. Afirmamos que (X, τ) es T_0, pero no es T_1 y, por ende tampoco puede ser T_2.

Ejemplo 2.1.2
Sea $(\mathbb{R}, \tau_{cf})$. Afirmamos que $(\mathbb{R}, \tau_u)$ es T_1. En efecto, sean $r, s \in \mathbb{R}$ tales que $r \neq s$. Los conjuntos $U = \mathbb{R} - \{s\}, V = \mathbb{R} - \{r\} \in \tau_{cf}$ pues sus complementos son finitos, además:

$$r \in U \quad \text{y} \quad s \in V$$

además, $r \notin V$ y $s \notin U$. Por tanto, el espacio de T_1. Pero no es T_2.

En efecto, suponga que existen $U, V \in \tau_{cf}$ abiertos tales que $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \in U$, $\frac{1}{\pi} \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. En particular, se tiene que $\mathbb{R} - U$ y $\mathbb{R} - V$ son finitos. Por tanto:

$$\begin{aligned}(\mathbb{R} - U) \cup (\mathbb{R} - V) &= \mathbb{R} - (U \cap V) \\ &= \mathbb{R}\end{aligned}$$

es finito, por tanto, $\mathbb{R}$ es finito$\#_c$.

Ejemplo 2.1.3
Considere al espacio $(\mathbb{R}, \tau_I = \{X, \emptyset\})$. Afirmamos que $(\mathbb{R}, \tau_I)$ es T_4 y T_3, pero NO es T_0, pues si $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{\pi} \in \mathbb{R}$, solo hay un abierto que contiene a alguno de los dos puntos, el cual es $\mathbb{R}$, que siempre tiene a los dos puntos. Por ende, el espacio no es T_0.

Proposición 2.1.1
T_4 y $T_1 \Rightarrow T_3$ y $T_1 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.

Demostración:
La prueba se hará más adelante. ■