Tema 1: Lógica Proposicional

Lógica Matemática (Licenciatura en Física y Matemáticas)

Prof. David Fernández Bretón

1. Una **conectiva Booleana n-aria** es una función $B : \{T, F\}^n \longrightarrow \{T, F\}$ (la idea intuitiva es que la función codifica una tabla de verdad). Considere la conectiva Booleana ternaria dada por:

$$\begin{array}{ll} B(T,T,T) = F, & B(F,T,T) = F, \\ B(T,T,F) = F, & B(F,T,F) = T, \\ B(T,F,T) = F, & B(F,F,T) = T, \\ B(T,F,F) = T, & B(F,F,F) = T. \end{array}$$

   Escriba una fórmula bien formada, utilizando las conectivas $\{\neg, \wedge, \vee\}$, que realize esta función Booleana.

2. Muestre que el conjunto de conectivas $\{\perp, \Rightarrow\}$ es completo (en donde $\perp$ es la conectiva 0-aria con valor constante F).

3. Las siguientes son fórmulas en notación polaca; reescríbalas en la notación "usual".
   (a) $\neg\neg \Rightarrow \vee \wedge p_3 p_8 \neg p_{10} \neg \vee p_1 p_5$,
   (b) $\wedge \neg \Rightarrow p_3 \vee p_4 p_1 \leftrightarrow \vee \neg p_{10} \leftrightarrow p_{15} p_{18}$,
   (c) $\wedge \Rightarrow p_3 \wedge p_2 p_1 \neg \vee \wedge p_4 p_5 \neg p_{10}$

4. Demuestre que toda fórmula bien formada (en el formato definido en clase, es decir, en notación polaca) en la que no aparezca el símbolo $\neg$ debe de tener longitud impar.

5. Sea φ una fórmula bien formada. Sea c la cantidad de veces que aparece el símbolo $\Rightarrow$ en la fórmula φ, y sea s la cantidad de veces que aparecen variables en la fórmula φ (en donde, si alguna variable aparece varias veces, se cuenta cada una de sus apariciones por separado). Demuestre que $s = c + 1$.

6. Sea φ una fórmula bien formada, y suponga que todos los símbolos de variable que aparecen en φ se encuentran entre $p_1, \dots, p_n$. Supóngase que m, m' son dos modelos que satisfacen $m(p_i) = m'(p_i)$ para todo $1 \leq i \leq n$. Demuestre que $\overline{m}(\varphi) = \overline{m'}(\varphi)$.

7. Demuestre o refute, para un conjunto de fórmulas Σ y φ, ψ dos fórmulas:
   (a) Si o bien $\Sigma \vDash \varphi$, o bien $\Sigma \vDash \psi$, entonces $\Sigma \vDash \varphi \wedge \psi$;
   (b) si $\Sigma \vDash \varphi \wedge \psi$, entonces o bien $\Sigma \vDash \varphi$, o bien $\Sigma \vDash \psi$.

8. (Sustitución): Suponga que tenemos una lista de fórmulas bien formadas $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$. Quisiéramos definir formalmente la operación que, dada una fórmula bien formada ψ, reemplaza cada aparición del símbolo de variable p_i con la fórmula φ_i, de modo que se obtiene una nueva fórmula bien formada ψ^*. Por ejemplo, si ψ es $(p_4) \Rightarrow (p_{32})$, entonces ψ^* sería la fórmula bien formada $(\alpha_4) \Rightarrow (\alpha_{32})$.
   (a) ¿Cómo definiría formalmente la operación $\psi \longmapsto \psi^*$ por recursión?
   (b) Sea m cualquier modelo, y defina m' como el modelo dado por $m'(p_i) = \overline{m}(\psi_i)$. Demuestre que $\overline{m'}(\psi) = \overline{m}(\psi^*)$, para cada fórmula bien formada ψ.
   (c) Concluya que, si ψ es una tautología, entonces tambié lo es ψ^*.

9. Sea Σ un conjunto de fórmulas bien formadas. Definimos la operación $\mathcal{C}(\Sigma)$ mediante

$$\mathcal{C}(\Sigma) = \Sigma \cup \{\varphi \big| \neg\varphi \in \Sigma\} \cup \{\varphi \big| \varphi \wedge \psi \in \Sigma \text{ or } \psi \wedge \varphi \in \Sigma \text{ para alguna fórmula bien formada } \psi\}.$$

(a) Considere $\Sigma = \{(p_1) \wedge (\neg(p_2)), \neg((p_3) \wedge ((p_4) \wedge (p_5)))\}$. Calcule $\mathcal{C}(\Sigma)$ y $\mathcal{C}(\mathcal{C}(\Sigma))$.

Inspirados por el ejercicio previo, definimos recursivamente, para cada conjunto de fórmulas bien formadas Σ, los conjuntos $\mathcal{C}^n(\Sigma)$ como sigue:

- $\mathcal{C}^0(\Sigma) = \Sigma$,
- $\mathcal{C}^{n+1}(\Sigma) = \mathcal{C}(\mathcal{C}^n(\Sigma))$.

Más aún, definimos $\mathcal{C}^\infty(\Sigma) = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \mathcal{C}^n(\Sigma)$.

(b) Si Σ es como en el inciso (a), ¿a qué es igual $\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$?

(c) Ahora, sea

$$\Sigma = \left\{ \underbrace{p_n \wedge \cdots \wedge p_n}_{n \text{ veces}} \middle| n \in \mathbb{N} \right\}.$$

¿A qué es igual $\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$?

(d) ¿Se te puede ocurrir alguna manera intuitiva (verbal, corta) de describir a qué es igual $\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$?

10. Demuestre que existe una demostración que hace válidos cada uno de los argumentos siguientes.

(a) $A \Rightarrow (B \wedge \neg C)$
$(B \vee C) \Rightarrow D$
A
$\therefore D$

(b) $A \Rightarrow B$
$A \vee (B \vee \neg C)$
$\neg B$
$\therefore \neg C \wedge \neg B$

(c) $A \Rightarrow B$
$B \Rightarrow C$
$(A \Rightarrow C) \Rightarrow (B \Rightarrow D)$
$(A \Rightarrow D) \Rightarrow E$
$\therefore E$

(d) $A \Rightarrow (B \wedge C)$
$\neg A \Rightarrow ((D \Rightarrow E) \wedge (F \Rightarrow H))$
$(B \wedge C) \vee ((\neg A \Rightarrow D) \wedge (\neg A \Rightarrow F))$
$\neg(B \wedge C) \wedge \neg(H \wedge D)$
$\therefore E \wedge H$

(e) $(A \Rightarrow B) \wedge (C \Rightarrow D)$
$(B \Rightarrow E) \wedge (D \Rightarrow F)$
$(\neg A \Rightarrow E) \wedge (\neg B \Rightarrow D)$
$\neg E$
$\therefore \neg C \vee \neg B$

(f) $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$
$\therefore B \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

(g) $A \Rightarrow (B \wedge C)$
$\therefore A \Rightarrow B$

(h) $A \Rightarrow (B \wedge C)$
$C \Rightarrow (D \wedge E)$
$\therefore A \Rightarrow (B \wedge D)$.

(i) $A \Rightarrow B$
$C \Rightarrow B$
$\therefore (A \vee C) \Rightarrow B$

(j) $((A \vee B) \Rightarrow C) \wedge (\neg D \Rightarrow (B \wedge \neg C))$
$\therefore A \Rightarrow D$

(k) $(A \vee B) \Rightarrow C$
$D \Rightarrow (E \wedge F)$
$\therefore (A \Rightarrow C) \wedge (D \Rightarrow E)$

(l) $(A \Rightarrow B) \wedge (C \Rightarrow D)$
$(B \vee D) \Rightarrow ((E \Rightarrow (E \vee F)) \Rightarrow (A \wedge C))$
$\therefore A \iff C$

(m) $A \vee (B \Rightarrow C)$
$(B \Rightarrow (B \wedge C)) \Rightarrow (D \vee E)$
$(D \Rightarrow A) \wedge (E \Rightarrow F)$
$\therefore A \vee F$

(n) $(A \Rightarrow (\neg B \wedge \neg C)) \wedge (D \Rightarrow \neg(B \vee C))$
$(\neg E \Rightarrow A) \wedge (\neg F \Rightarrow D)$
$(E \Rightarrow B) \wedge (F \Rightarrow C)$
$\therefore B \iff C$

(o) $(A \vee B) \Rightarrow (C \Rightarrow D)$
$(C \Rightarrow (C \wedge D)) \Rightarrow E$
$E \Rightarrow ((\neg F \vee \neg\neg F) \Rightarrow (A \wedge F))$
$\therefore A \iff E$

(p) $\therefore (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

(q) $\therefore (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \wedge C) \Rightarrow (B \wedge C))$

(r) $\therefore ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A.$

(s) $A \vee (B \wedge C)$
$A \Rightarrow C$
$\therefore C$

(t) $(A \vee B) \Rightarrow (C \Rightarrow D)$
$(\neg D \vee E) \Rightarrow (A \wedge C)$
$\therefore D$

(u) $(A \vee B) \Rightarrow (C \wedge D)$
$(C \vee E) \Rightarrow (\neg F \wedge H)$
$(F \vee G) \Rightarrow (A \wedge I)$
$\therefore \neg F$

(v) $\therefore (A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow C)$

(w) $\therefore A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B),$

(x) $\therefore (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)),$

(y) $\therefore (A \wedge B) \Rightarrow B,$

(z) $\therefore A \Rightarrow (B \Rightarrow (A \wedge B)).$