Notas de Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

15 de marzo de 2024

Índice general

Capítulo 2

Convolución

Se sabe que el producto puntual de dos funciones integrables no necesariamente es una función integrable (por ejemplo, $f(x) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\chi_{]0,1[}$). Sin embargo, es posible definir un auténtico producto en $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ que sea compatible con la adición y el producto por escalares, con el cual $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ sea un **álgebra de Banach conmutativa sin elemento identidad**. Tal operación se llama la **convolución**.

2.1. Preliminares

Lema 2.1.1
Si M es un subconjunto despreciable de $\mathbb{R}^n$, entonces $M \times \mathbb{R}^m$ es despreciable en $\mathbb{R}^{n+m}$.

Demostración:
Escriba a $\mathbb{R}^m$ como unión numerable de rectángulos acotados disjuntos. Basta probar que si Q es un rectángulo acotado en $\mathbb{R}^m$, entonces $M \times Q$ es despreciable en $\mathbb{R}^{n+m}$.

Sea $\varepsilon > 0$. Por definición de medida exterior, existe $\{P_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ sucesión de rectángulos acotados tales que $M \subseteq \bigcup_{\nu=1}^{\infty} P_\nu$ y:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(P_\nu) < \varepsilon$$

Entonces, $\{P_\nu \times Q\}_{\nu=1}^{\infty}$ es una sucesión de rectángulos acotados en $\mathbb{R}^{n+m}$ tales que $M \times Q \subseteq \bigcup_{\nu=1}^{\infty} P_\nu \times Q$, y

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(P_\nu \times Q) &= \mathrm{Vol}(Q) \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(P_\nu) \\ &< \mathrm{Vol}(Q)\varepsilon \end{aligned}$$

(en caso de que $\mathrm{Vol}(Q) > 0$), luego, el conjunto $M \times Q$ es despreciable, con lo cual el conjunto $M \times \mathbb{R}^m$ también lo es. ■

Definición 2.1.1
Si $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{K}$ y $g : \mathbb{R}^q \to \mathbb{K}$, se define el **producto tensorial de** f **y** g como la función: $f \otimes g : \mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{K}$, dada por:

$$f \otimes g(x, y) = f(x)g(y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^{p+q}$$

Proposición 2.1.1
Si $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{K}$ y $g : \mathbb{R}^q \to \mathbb{K}$ son funciones medibles, entonces $f \otimes g : \mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{K}$ es medible.

Demostración:

1. Afirmamos que el resultado es cierto para funciones escalonadas $\varphi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{K}$ y $\psi : \mathbb{R}^q \to \mathbb{K}$ escritas canónicamente como:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{r} c_i \chi_{P_i} \quad \text{y} \quad \psi = \sum_{j=1}^{s} d_j \chi_{Q_j}$$

donde los P_i y Q_j son rectángulos acotados disjuntos. En este caso:

$$\begin{aligned} \varphi \otimes \psi(x, y) &= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} c_i d_j \chi_{P_i}(x) \chi_{Q_j}(y) \\ &= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} c_i d_j \chi_{P_i \times Q_j}(x, y) \end{aligned}$$

la cual es una función escalonada en $\mathbb{R}^{p+q}$, luego medible.

2. En el caso general, se sabe que existen $\{\varphi_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ en $\mathcal{E}(\mathbb{R}^p, \mathbb{K})$ y $\{\psi_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ en $\mathcal{E}(\mathbb{R}^q, \mathbb{K})$ y conjuntos despreciables $M \subseteq \mathbb{R}^p$, $N \subseteq \mathbb{R}^q$ tales que:

$$\lim_{\nu \to \infty} \varphi_\nu(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^p \backslash M$$

y,

$$\lim_{\nu \to \infty} \psi_\nu(x) = g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^q \backslash N$$

luego, se tiene que:

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \to \infty} \varphi_\nu \otimes \psi_\nu(x, y) &= \lim_{\nu \to \infty} \varphi_\nu(x) \psi_\nu(y) \\ &= f(x) g(y) \end{aligned}$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^{p+q} \backslash [M \times \mathbb{R}^q \cup \mathbb{R}^p \times N]$. Por el lema anterior se tine que $M \times \mathbb{R}^q \cup \mathbb{R}^p \times N$ es despreciable en $\mathbb{R}^{p+q}$. Como $\varphi_\nu \otimes \psi_\nu$ son medibles para todo $\nu \in \mathbb{N}$, entonces $f \otimes g$ es medible.

■

Corolario 2.1.1
Si $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{K}$ es medible, entonces $F : \mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{K}$ dada como:

$$F(x, y) = f(x), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^{p+q}$$

es medible.

Demostración:
Es inmediata de la proposición anterior tomando a f y $g = \chi_{\mathbb{R}^q}$.

■

Corolario 2.1.2
Si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^p, \mathbb{K})$, $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^q, \mathbb{K})$, entonces $f \otimes g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^{p+q}, \mathbb{K})$ y:

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f \otimes g = \int_{\mathbb{R}^p} f \cdot \int_{\mathbb{R}^q} g$$

Demostración:
Es inmediato del teorema de Tonelli. ∎

2.2. Convolución

Definición 2.2.1
Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ funciones medibles. La **convolución de f por g** se define como la función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{K}$ tal que:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy$$

para toda $x \in \mathbb{R}^n$ tal que la integral exista.

Ejemplo 2.2.1
Considere la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

entonces,

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dx = \int_0^{\infty} f(y)g(x-y)dx$$

se tienen dos casos, por como están dadas las funciones f y g:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} f(y)g(x-y)dx &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x \\ \int_0^x f(y)g(x-y)dy & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x \\ \int_0^x f(y)g(x-y)dy & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \int_0^1 f(y)g(x-y)dy & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x \\ \int_0^x g(x-y)dy & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \int_0^1 g(x-y)dy & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x \\ \int_0^x g(x-y)dy & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \int_0^1 g(x-y)dy & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x \\ \int_0^x g(x-y)dy & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \int_0^1 g(x-y)dy & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ \int_0^1 g(x-y)dy & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty f(y)g(x-y)dx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \le x \\ \int_0^x (x-y)dy & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \int_{x-1}^1 g(x-y)dy & \text{si} \quad 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \le x \\ -\frac{(x-y)^2}{2}\Big|_0^x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \int_{x-1}^1 (x-y)dy & \text{si} \quad 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \le x \\ \frac{x^2}{2} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ -\frac{(x-y)^2}{2}\Big|_{x-1}^1 & \text{si} \quad 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \le x \\ \frac{x^2}{2} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ -\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{1}{2} & \text{si} \quad 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \le x \\ \frac{x^2}{2} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ -\frac{x^2}{2} + x & \text{si} \quad 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Observación 2.2.1

Note que la función $f * g$ es continua. (esto servirá para ver que la convolución obtenida es correcta).

Ejemplo 2.2.2

Recuerde la fórmula de Cauchy para la n-ésima integral reiterada:

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-n}}dt$$

la igualdad anterior es la misma que la de la función:

$$\int_0^x f(t)\frac{dt}{\Gamma(n)(x-t)^{n-1}} = f * g(x)$$

donde

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \le 0 \\ \frac{1}{\Gamma(n)x^{n-1}} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Si $0 < \alpha \le 1$, definimos:

$$\int_0^x f(t)\frac{dx}{\Gamma(\alpha)(x-t)^{1-\alpha}} = I_0^\alpha[f](x)$$

llamada la **integral fraccional de orden α de f en x**. Por ejemplo:

$$I_0^{1/2}[t](x) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}}x^{3/2}$$

$$I_0^{1/2}\left[\frac{4}{3\sqrt{\pi}}t^{3/2}\right](x) = \frac{x^2}{2}$$

que concuerda con la integral normal de t.

Ahora estudiaremos algunas propiedades de este operador.

Proposición 2.2.1 (**Asociatividad y conmutatividad de la convolución**)
Sean $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ medibles.

1. Si para algún $x \in \mathbb{R}^n$ existe la convolución $f * g(x)$, entonces también existe $g * f(x)$, y,

$$f * g(x) = g * f(x)$$

2. Si la función $|f| * |g|$ está definida c.t.p. en $\mathbb{R}^n$ y, para algún $x \in \mathbb{R}^n$ existe $(|f| * |g|) * |h|(x)$, entonces existen $(f * g) * h(x)$, $f * (g * h)(x)$ y,

$$(f * g) * h(x) = f * (g * h)(x)$$

Demostración:
De (1): Se tiene que:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(u)du = \int_{\mathbb{R}^n} g(u)f(x-y)du = g * f(x)$$

por el cambio de variable $u = x - y$, de Jacobiano $|(-1)^n| = 1$.

En particular, esto garantiza la existencia de $g * f(x)$.

De (2): Se demostrará primero que la función

$$(y, z) \mapsto f(x)g(y-z)h(x-y)$$

es medible como función de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{K}$, para un $x \in \mathbb{R}^n$ fijo. Ya se sabe que $(y, z) \mapsto f(z)$ es medible (por una proposición sobre productos tensoriales).

Se afirma que la función $(y, z) \mapsto h(x-y)$ es medible. En efecto, $u \mapsto h(u)$ es medible. Por el cambio de variable $u = x - y$, la función $y \mapsto h(x-y)$ también es medible (por el teorema de cambio de variable). Luego, como con f, se sigue que $(y, z) \mapsto h(x-y)$ es medible.

También $(y, z) \mapsto g(y-z)$ es medible. Por productos tensoriales:

$$G(u, v) = g(u)$$

es medible. La función $\Phi(r, s) = (r - s, s)$ es un isomorfismo C^∞ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Por el teorema de cambio de variable se sigue que es medible la función:

$$G \circ \Phi(y, z) = g(y-z)$$

Por lo tanto, la función inicial es medible.

Puesto que para $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h(x-y)|dy \int_{\mathbb{R}^n} |f(z)||g(y-z)|dz = \int_{\mathbb{R}^n} |h(x-y)|(|f| * |g|)(y)dy = (|f| * |g|) * |h|(x) < \infty$$

(para los x en que esté definida la función), entonces por Tonelli la función $(y, z) \mapsto f(z)g(y-z)h(x-y)$ es integrable, y por Fubini:

$$(f * g) * h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x-y)dy \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(y-z)dz$$

y,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} h(x-y)f(z)g(y-z)dydz &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)dx \int_{\mathbb{R}^n} h(x-y)g(y-z)dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)dz \int_{\mathbb{R}^n} h((x-z)-u)g(y-z)dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)(g*h)(x-z)dz\\ &= f*(g*h)(x)\end{aligned}$$

En particular, existen y son iguales $f*(g*h)(x)$ y $(f*g)*h(x)$. ■

Teorema 2.2.1
Si $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, se cumplen las afirmaciones siguientes.

1. Para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$, existe $f*g(x)$.
2. La función $f*g$, definida c.t.p. en $\mathbb{R}^n$, es integrable en $\mathbb{R}^n$.
3. $\int_{\mathbb{R}^n} f*g = \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)$.
4. $\mathcal{N}_1(f*g) \leq \mathcal{N}_1\left(|f|*|g|\right) = \mathcal{N}_1(f)\,\mathcal{N}_1(g)$.

Demostración:
De (1): Ya se sabe que la función $(x,y)\mapsto f(y)g(x-y)$ es medible (ver la proposición anterior). Como

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|dy \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|dx = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|dy\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(z)|dz\right) < \infty$$

haciendo el cambio de variable $x = y+z$ y por ser f, g integrables, entonces la función $(x,y)\mapsto f(y)g(x-y)$ es integrable en $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$. Por el teorema de Fubini, la función $y\mapsto f(y)g(x-y)$ es integrable para casi toda $x\in\mathbb{R}^n$, lo cual prueba el primer inciso.

De (2): Además, por Fubini nuevamente, la función $x\mapsto f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy$ definida c.t.p. en $\mathbb{R}^n$ también es integrable, lo cual prueba el segundo inciso.

De (3): Y, por Fubini:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}(f*g)(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dxdy\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)dy\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)dy\int_{\mathbb{R}^n} g(u)du\\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)dy\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} g(u)du\right)\end{aligned}$$

lo cual prueba el tercer inciso.

De (4): Aplicando (3) a $|f|, |g|$, resulta que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_1(f*g) &= \int_{\mathbb{R}^n} |f*g|(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\right| dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(x-y)| dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (|f|*|g|)(x)dx \\
&= \mathcal{N}_1(|f|*|g|) \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} |g|\right) \\
&= \mathcal{N}_1(f)\mathcal{N}_1(g)
\end{aligned}$$

lo cual prueba el cuarto inciso. ■

Observación 2.2.2

1. La existencia y el valor de la convolución dependen solamente de las clases de equivalencia de f y g, se puede pues considerar la convolución como una aplicación de $L_1(\mathbb{R}^n, ᄀ) \times L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ en $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, tal que:

$$\mathcal{N}_1(f*g) \leq \mathcal{N}_1(f)\mathcal{N}_1(g)$$

2. Es claro que:

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) * g = \alpha_1(f_1 * g) + \alpha_2(f_2 * g)$$

y

$$f * (\beta_1 g_1 + \beta_2 g_2) = \beta_1(f * g_1) + \beta(f * g_2)$$

o sea, que la convolución es un aplicación bilineal y asociativa.

Definición 2.2.2

Un **Álgebra de Banach** es un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$ provisto de un producto $(x,y) \mapsto x\cdot y$. Este producto es bilineal y, además,

$$\|x\cdot y\| \leq \|x\|\|y\|$$

si el producto es conmutativo, se dice que el álgebra de Banach es **conmutativa**.

Ejercicio 2.2.1

En un álgebra de Banach, la función $(x,y) \mapsto x\cdot y$ es continua del espacio normado producto $E \times E$ en E.

Demostración:

Sea $\varepsilon > 0$ y $(x_0, y_0) \in E \times E$. Tomemos $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, entonces, si $(x,y) \in E\times E$ es tal que:

$$\|(x_0,y_0) - (x,y)\| < \delta$$

entonces,

$$\|x_0 - x\| < \delta \quad \text{y} \quad \|y_0 - y\| < \delta$$

luego, se tiene que: ■

Ejemplo 2.2.3
Considere $\mathbb{K}$ como espacio vectorial sobre sí mismo con la norma usual y, provisto de la multiplicación usual en $\mathbb{K}$, es un álgebra de Banach conmutativa con elemento uno.

Ejemplo 2.2.4
Sea S un conjunto no vacío. El espacio vectorial $\mathcal{B}(S,\mathbb{K})$ de las funciones acotadas de S en $\mathbb{K}$, provisto de la norma uniforme $\|\cdot\|_\infty$ y con la multiplicación definida puntualmente, es un álgebra de Banach conmutativa con elemento uno (la función constante de valor uno).

Ejemplo 2.2.5
Sea S un espacio métrico. El subespacio $\mathcal{BC}(S,\mathbb{K})$ de las funciones continuas y acotadas de S en $\mathbb{K}$ es una sub-álgebra de Banach del ejemplo anterior con elemento uno.

Ejemplo 2.2.6
El subespacio $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ de las funciones continuas nulas en infinito es una sub-álgebra de Banach de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ sin elemento uno.

Ejemplo 2.2.7
Sea E un espacio de Banach. El espacio normado $\mathrm{End}(E)$ de todos los endomorfismos continuos de E provisto del producto $(A,B)\mapsto A\circ B$ es un álgebra de Banach no conmutativa con elemento uno.

Ejemplo 2.2.8
$L_1(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ provisto de la convolución también es un álgebra de Banach conmutativa (¿con elemento identidad?).

2.3. Convolución en $\mathcal{L}_p$

Teorema 2.3.1 (**Desigualdad de Hölder Generalizada**)
Sean $p_1,...,p_m$ números positivos tales que:

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_m}=1$$

entonces, si $f_1\in\mathcal{L}_{p_1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}), f_2\in\mathcal{L}_{p_2}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}),...,f_n\in\mathcal{L}_{p_m}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$, entonces $f_1\cdot f_2\cdots f_m\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$, y

$$\mathcal{N}_1\left(f_1\cdot f_2\cdots f_m\right)\leq\mathcal{N}_{p_1}\left(f_1\right)\mathcal{N}_{p_2}\left(f_2\right)\cdots\mathcal{N}_{p_m}\left(f_m\right)$$

Demostración:

■

Proposición 2.3.1
Si $f:\mathbb{R}^{p+q}\to\mathbb{K}$ es medible, se cumple lo siguiente:

1. Para casi toda $x\in\mathbb{R}^p$, la función $f_x(y)=f(x,y)$ de $\mathbb{R}^q$ en $\mathbb{K}$ es medible.

2. Si para casi toda $x \in \mathbb{R}^p$, la función f_x es integrable en $\mathbb{R}^q$, entonces:

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f_x = \int_{R^q} f(x,y)dy$$

definida c.t.p. es medible.

Demostración:

■

Teorema 2.3.2 (**Teorema de Young**)
Sean $p, q \in [1, \infty[$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$ y defina r como sigue:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$$

Entonces, si $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y $g \in \mathcal{L}_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, se cumple lo siguiente:

1. Para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$, existe la convolución $f * g$, es decir:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy$$

para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$.

2. $f * g \in \mathcal{L}_r(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$.
3. $\mathcal{N}_r(f * g) \leq \mathcal{N}_p(f)\mathcal{N}_q(g)$.

Demostración:
Observemos primero que los números p, q, r satisfacen lo siguiente:

$$r > 1, \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{r} \geq 0, \quad \frac{1}{q} - \frac{1}{r} \geq 0$$

En efecto,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \leq 2 - 1 = 1 \Rightarrow r \geq 1$$

las otras dos son inmediatas, ya que:

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{r} > 1 - \frac{1}{q} \geq 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{q} - \frac{1}{r} > 1 - \frac{1}{p} \geq 0$$

Se verá que para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$, la función $y \mapsto f(y)g(x-y)$ es integrable en $\mathbb{R}^n$. Por un teorema anterior, ya se sabe que dicha función es medible. Escriba

$$|f(y)||g(x-y)| = \left(|f(y)|^p|g(x-y)|^q\right)^{\frac{1}{r}} \left(|f(y)|^p\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \left(|g(x-y)|^q\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}$$

Para probar el resultado, se probarán dos casos:

1. $p > 1$ y $q > 1$ En este caso, $\frac{1}{p} - \frac{1}{r} > 0$ y $\frac{1}{q} - \frac{1}{r} > 0$. Si

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{r}, \quad \frac{1}{\beta} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r}, \quad \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{r}$$

entonces,

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{r}=1$$

La función $y \mapsto \left(\left|f(y)\right|^p\left|g(x-y)\right|^q\right)^{\frac{1}{r}}$ está en $\mathcal{L}_\alpha(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ (pues, existe la convolución $\left|f\right|^p * \left|g\right|^q(x)$ para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$). También, $y \mapsto \left(\left|f(y)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}$ está en $\mathcal{L}_\beta(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ y $y \mapsto \left(\left|g(x-y)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}$ está en $\mathcal{L}_\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$.

Por Hölder generalizado, se tiene que $y \mapsto \left|f(x)\right|\left|g(x-y)\right|$ es integrable, en particular, existe la convolución $f * g$, lo que prueba (1). Además,

$$\begin{aligned}
\left|f*g\right|(x) &\le \int_{\mathbb{R}^n}\left|f(y)\right|\left|g(x-y)\right|dy\\
&\le \left[\int_{\mathbb{R}^n}\left|f(y)\right|^p\left|g(x-y)\right|^q dy\right]^{\frac{1}{r}}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\left|f(y)\right|^p dy\right]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\left|g(x-y)\right|^q dy\right]^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}\\
&= \left[\left|f\right|^p * \left|g\right|^q(x)\right]^{\frac{1}{r}}\mathcal{N}_p(f)^{1-\frac{p}{r}}\mathcal{N}_q(g)^{1-\frac{q}{r}}
\end{aligned}$$

luego,

$$\left|f*g\right|^r(x) \le \mathcal{N}_p(f)^{r-p}\mathcal{N}_q(g)^{r-q}\left(\left|f\right|^p * \left|g\right|^q(x)\right)$$

por el teorema anterior (el cual asegura que $\left|f\right|^p * \left|g\right|^q$ es integrable), implica que $\left|f\right| * \left|g\right| \in \mathcal{L}_3(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$, lo cual prueba (2).

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_r(f*g)^r &= \int_{\mathbb{R}^n}\left|f*g(x)\right|^r dx\\
&\le \mathcal{N}_p(f)^{r-q}\mathcal{N}_q(g)^{r-p}\int_{\mathbb{R}^n}\left|f\right|^p * \left|g\right|^q(x)dx\\
&= \mathcal{N}_p(f)^{r-q}\mathcal{N}_q(g)^{r-p}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|f\right|^p\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|g\right|^q\right)\\
&= \mathcal{N}_p(f)^{r-q}\mathcal{N}_q(g)^{r-p}\mathcal{N}_p(f)^p\mathcal{N}_q(g)^q\\
&= \left(\mathcal{N}_p(f)\mathcal{N}_q(g)\right)^r\\
\Rightarrow \mathcal{N}_r(f*g) &\le \mathcal{N}_p(f)\mathcal{N}_q(g)
\end{aligned}$$

2. $p>1$, $q=1$. En este caso, $r=p$, luego se sigue que:

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{r}=\frac{1}{p},\quad \frac{1}{\beta}=\frac{1}{p}-\frac{1}{r}=0,\quad \frac{1}{\gamma}=\frac{1}{q}-\frac{1}{r}=1-\frac{1}{r}=\frac{1}{p^*}$$

Luego, si $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\left|f(y)\right|\left|g(x-y)\right| &= \left(\left|f(y)\right|^p\left|g(x-y)\right|^q\right)^{\frac{1}{r}}\left(\left|f(y)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}\left(\left|g(x-y)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}\\
&= \left(\left|f(y)\right|^p\left|g(x-y)\right|\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left|f(y)\right|^p\right)^0\left(\left|g(x-y)\right|^q\right)^{\frac{1}{p^*}}\\
&= \left(\left|f(y)\right|^p\left|g(x-y)\right|\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left|g(x-y)\right|^q\right)^{\frac{1}{p^*}}
\end{aligned}$$

Como $y \mapsto \left(\left|f(y)\right|^p\left|g(x-y)\right|\right)^{\frac{1}{p}}$ está en $\mathcal{L}_p(\mathbb{R},\mathbb{K})$ (pues existe $\left|f\right|^p * \left|g\right|(x)$ para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$) y $y \mapsto \left(\left|g(x-y)\right|^q\right)^{\frac{1}{p^*}}$ está en $\mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$, entonces por Hölder y la ecuación anterior, se sigue que $y \mapsto \left|f(y)g(x-y)\right|$ es integrable en $\mathbb{R}^n$, luego existe $\left|f\right| * \left|g\right|(x)$ para casi toda

$x \in \mathbb{R}^n$, lo que prueba (1). Además,

$$
\begin{aligned}
\left|f*g\right|(x) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|f(y)\right|\left|g(x-y)\right|dy \\
&\leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left|f(y)\right|^p\left|g(x-y)\right|dy\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left|g(x-y)\right|dy\right]^{\frac{1}{p^*}} \\
&= \left[\left|f\right|^p * \left|g\right|(x)\right]^{\frac{1}{p}} \mathcal{N}_1\left(g\right)^{\frac{1}{p^*}=1-\frac{1}{p^*}} \\
\Rightarrow \left|f*g\right|^p(x) &\leq \left[\left|f\right|^p * \left|g\right|(x)\right] \mathcal{N}_1\left(g\right)^{1-p}
\end{aligned}
$$

luego, $f*g \in \mathcal{L}_r(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ (recuerde que $r = p$) lo cual prueba (2), y

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \left|f*g\right|^p(x)dx &\leq \mathcal{N}_1\left(g\right)^{p-1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|f\right|^p\right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|g\right|\right) \\
&\leq \mathcal{N}_1\left(g\right)^{p-1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|f\right|^p\right) \mathcal{N}_1\left(q\right) \\
&\leq \mathcal{N}_p\left(f\right)^p \mathcal{N}_1\left(g\right)^p
\end{aligned}
$$

lo cual prueba (3).

El caso $p = q = 1$ es el teorema anterior, y por la conmutatividad de la convolución, no es necesaroi probar el caso $q = 1$, $p > 1$. ■

Observación 2.3.1
El caso $q = 1$ y $r = p$ es importante, dice: Si $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ entonces, para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$ existe $f*g(x) \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y $\mathcal{N}_p\left(f*g\right) \leq \mathcal{N}_p\left(f\right)\mathcal{N}_1\left(g\right)$.