Subespacios Metricos

Def. Si d_X es una métrica sobre un conjunto X y $A \subset X$ arbitrario, entonces es la restricción $d_X|_{A \times A}$ es una métrica, i.e $d_A : A \times A \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\forall x,y \in A, \quad d_A(x,y) = d_X(x,y)$$

es una métrica sobre A.

Nota: Si no hay peligro de confusión, se escribe indistintamente $d_X = d_A = d$. Los conceptos denotados a un subespacio se denotarán con un subíndice A: $B_A(x,r)$, $(\bar{S})_A$, $(S^\circ)_A$, ...

Teorema:

Sea $A \subset X$, $a \in A$, $S \subset A$ y $r > 0$.

i) $B_A(a,r) = B(a,r) \cap A$.

ii) $W \subset A$ es vecindad de a $\iff \exists V \in \mathcal{V}(a) \ni W = V \cap A$.

Dem:

De (i):

Sea $x_0 \in A$ y $r > 0$, entonces:

$$B_A(x_0,r) = \{ x \in A \mid d_A(x,x_0) < r \} = A \cap \{ x \in X \mid d(x,x_0) < r \} = B(x_0,r) \cap A.$$

De (ii):

$\Rightarrow$) Suponga que $W \subset A$ es vecindad de a, i.e $W \in \mathcal{V}_A(a)$, entonces $\exists r_0 > 0$ tal que $B_A(a,r_0) \subset W \Rightarrow B(a,r_0) \cap A \subset W$.

Sea $V = W \cup B(a,r_0)$. Probaremos que $V \in \mathcal{V}(a)$, en efecto, $\exists r_0 > 0 \ni B(a,r_0/2) \subset B(a,r_0) \subset W \cup B(a,r_0) = V$, luego $V \in \mathcal{V}(a)$. Además

$$V \cap A = (W \cup B(a,r_0)) \cap A = (W \cap A) \cup (B(a,r_0) \cap A),$$ como $W \subset A$ y $B_A(a,r_0) \subset W$, entonces:

$$\Rightarrow V \cap A = W \cup B_A(a, r_0) = W$$

$\Leftarrow$) Suponga que $\exists\ V \in \mathcal{V}(a)$ tal que $W = V \cap A$. Como V es vecindad de a, $\exists\ r_0 > 0$ tal que $B(a, r_0) \subset V$, luego $B_A(a, r_0) = B(a, r_0) \cap A \subset V \cap A = W$. Por tanto, $W \in \mathcal{V}_A(a)$.

q.e.d.

Teorema (más propiedades de los conjuntos en los subespacios).

Sea $A \subset \mathbb{X}$, $a \in A$, $S \subset A$ y $r > 0$.

(i) $(\bar{S})_A = \bar{S} \cap A$.

(ii) S es cerrado en un subespacio métrico $A \Leftrightarrow S = F \cap A$ para algún F cerrado F en $\mathbb{X}$.

En particular, si A es cerrado en $\mathbb{X}$, entonces todos los cerrados de A son los cerrados de $\mathbb{X}$ contenidos en A.

(iii) S es abierto en $A \Leftrightarrow S = G \cap A$ para algún G abierto en $\mathbb{X}$.

En particular, si A es abierto en $\mathbb{X}$, entonces los abiertos de A son los abiertos de $\mathbb{X}$ contenidos en A.

Dem:

De (i):

$x \in (\bar{S})_A \Leftrightarrow \forall\ r > 0,\ B_A(x, r) \cap S \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall\ r > 0,\ B(x, r) \cap A \cap S \neq \emptyset \Leftrightarrow$ $\forall\ r > 0,\ B(x, r) \cap S \neq \emptyset$ y $x \in A \Leftrightarrow x \in \bar{S}$ y $x \in A \Leftrightarrow x \in \bar{S} \cap A$.

De (ii):

$\Rightarrow$) Suponga que S es cerrado en A, entonces $(\bar{S})_A = S_A = S$, pues $S \subset A$, por (i) $S = (\bar{S})_A = \bar{S} \cap A$, donde $\bar{S}$ es cerrado en $\mathbb{X}$. Tome $F = \bar{S}$ un cerrado en $\mathbb{X}$, entonces $S = F \cap A$.

$\Leftarrow$) Suponga que $S = F \cap A$ para algún cerrado F en $\mathbb{X}$. Por (i):

$$(\bar{S})_A = (\overline{F \cap A})_A = \overline{F \cap A} \cap A.$$

Como $\overline{F\cap A}\subset \bar{F}\cap\bar{A}$, entonces
$$(\bar{S})_A\subset(\bar{F}\cap\bar{A})\cap A = F\cap A = S$$
por ser F cerrado, luego como $(\bar{S})_A\cap A=(\bar{S}\cap A)\cap A=\bar{S}\cap A=(\bar{S})_A$, entonces
$$(\bar{S})_A\subset S\cap A = S_A$$
Como $S_A\subset(\bar{S})_A$ por definición, entonces $S_A=(\bar{S})_A$, por ser $(\bar{S})_A$ cerrado en A, se tiene que S es cerrado en A.

De (iii):

Nota: S es abierto en $A \Leftrightarrow A\setminus S$ es cerrado en A.

$\Rightarrow$) Suponga que S es abierto en A, entonces $A\setminus S$ es cerrado en A. Por (ii) $\exists F$ cerrado en $\mathbb{X}$ tal que $A\setminus S = F\cap A$. Veamos que:
$$S = A\setminus(A\setminus S) = A\cap(A\setminus S)^c = A\cap(F\cap A)^c=(A\cap F^c)\cup(A\cap A^c)$$
$$=(A\cap \complement F)\cup\emptyset = A\cap\complement F$$
Donde $\complement F$ es abierto.

$\Leftarrow$) Suponga que $S=G\cap A$ donde G es un abierto de $\mathbb{X}$. Como G es abierto entonces $\forall\, x\in G\cap A\ \exists\, r>0 \ni B(x,r)\subset G$, luego $B_A(x,r)=B(x,r)\cap A \subset G\cap A = S$, i.e S es abierto en A.

q.e.d.

Teorema:

Sea $A\subset\mathbb{X}$ y $S\subset A$. Entonces $x\in(\bar{S})_A \Leftrightarrow x\in A$ y $\exists\ \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos de S que converge a x.

Además, S es cerrado en el subespacio $A \Leftrightarrow$ toda sucesión de S que converge a algún punto de A, lo hace a un punto de $\mathbb{X}$.

Dem:

De la primera parte:

$\Rightarrow$) Sea $x\in(\bar{S})_A$, entonces $\forall\, r>0$ $B_A(x,r)\cap S\neq\emptyset$. Entonces $\forall\, n\in\mathbb{N}\ \exists$ $x_n\in B_A(x,r)\cap S$. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, claramente $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ está en S y converge a

x.

$(\Leftarrow)$ Suponga que $\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en S que converge a $x \in A$. Sea $r > 0$. Como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x, $\exists N \in \mathbb{N} \ni$ si $n \geq N$ entonces $d(x, x_n) < r$, luego $B(x,r) \cap S \neq \emptyset$, pues $x_N \in B(x,r)$ y $x_N \in S$. Por tanto, $x \in (\bar{S})_A$.

q.e.d.

Ejemplos:

Teorema.

Todo subespacio de un espacio métrico separable, es separable.

Dem:

Sea (X,d) un espacio métrico y (A,d) un subespacio métrico de (X,d). Supongamos que (X,d) es separable, entonces $\exists\ \mathcal{B}$ una base de la topología de (X,d) a lo sumo numerable, digamos $\mathcal{B}=\{B_i \mid i\in\mathbb{N}\}$, donde B_i es abierto en X $\forall i\in\mathbb{N}$.

Afirmamos que $\mathcal{B}_A=\{B_i\cap A \mid i\in\mathbb{N}\}$ es una base de la topología de A. En efecto, si H es un abierto en A, entonces $\exists\ G$ un abierto en X tal que

$$H=G\cap A$$

Como $\mathcal{B}$ es base de la topología de X:

$$G=\bigcup_{i=1}^{\infty} B_{\alpha(i)}$$

$$\Rightarrow H=\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_{\alpha(i)}\right)\cap A=\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(B_{\alpha(i)}\cap A\right)$$

Luego, $\mathcal{B}_A$ es una base a lo sumo numerable de la topología de A, así A es separable.