Notas, Ejercicios y Problemas sobre funciones de variable compleja

Cristo Daniel Alvarado

20 de agosto de 2024

Índice general

Capítulo 1

Ejercicios y Problemas

1.1. Parte 1

Primero se verán algunas definiciones fundamentales para poder entender los ejercicios.

1.1.1. Problemas y Ejercicios

Ejercicio 1.1.1
Encuentre los números complejos tales que sus conjugados son iguales a:

I. Sus cuadrados.

II. Sus cubos.

Solución:
De (i): Consideremos un número complejo $z = a + ib \in \mathbb{C}$ tal que

$$\begin{aligned} &\overline{z} = z^2 \\ \iff\ & a - ib = (a^2 - b^2) + 2iab \\ \iff\ & \begin{cases} a = & a^2 - b^2 \\ -b = & 2ab \end{cases} \\ \iff\ & \begin{cases} a = & a^2 - b^2 \\ (2a-1)b = & 0 \end{cases} \end{aligned}$$

de la segunda ecuación se deduce que $a = \frac{1}{2}$ o $b = 0$. Si $a = \frac{1}{2}$, entonces

$$\begin{aligned} & a^2 - b^2 = a \\ \iff\ & b^2 = a^2 - a \\ \iff\ & b^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \\ \iff\ & b^2 = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

siendo $b \in \mathbb{R}$, tal cosa no puede suceder, por lo que $b = 0$, lo cual implica que

$$\begin{aligned} & a^2 - b^2 = a \\ \iff\ & a^2 = a \\ \iff\ & a(a-1) = 0 \end{aligned}$$

es decir, si $a = 0$ o si $a = 1$.

De (ii): Consideremos un número complejo $z = a + ib \in \mathbb{C}$ tal que

$$\begin{aligned} & \overline{z} = z^3 \\ \Longleftrightarrow\ & a - ib = a^3 + 3ia^2b - 3ab^2 - ib^3 \\ \Longleftrightarrow\ & a - ib = a^3 - 3ab^2 + i(3a^2b - b^3) \\ \Longleftrightarrow\ & \begin{cases} a = & a^3 - 3ab^2 \\ -b = & 3a^2b - b^3 \end{cases} \\ \Longleftrightarrow\ & \begin{cases} a(a^2 - 3b^2 - 1) = & 0 \\ b(3a^2 - b^2 + 1) = & 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Analicemos por casos cada ecuación.

- Suponga que $a = 0$, entonces:

$$b(1 - b^2) = 0$$

  luego $b = 0$ o $1 - b^2 = 0 \Rightarrow b^2 = 1$, es decir que $z = 0$ ó $z = \pm i$.

- Suponga que $a^2 - 3b^2 - 1 = 0$, entonces $a^2 = 3b^2 + 1$. Por tanto:

$$\begin{aligned} b(3a^2 - b^2 + 1) &= 0 \\ \Rightarrow b(9b^2 + 3 - b^2 + 1) &= 0 \\ \Rightarrow b(9b^2 + 3 - b^2 + 1) &= 0 \\ \Rightarrow 4b(2b^2 + 1) &= 0 \\ \Rightarrow 4b(2b^2 + 1) &= 0 \end{aligned}$$

  esto es, $b = 0$ o $2b^2 + 1 = 0$, el segundo caso no puede ocurrir pues $b \in \mathbb{R}$, luego si $b = 0$ se tiene que $a^2 = 1$, es decir que $z = \pm 1$.

En resumen, z toma uno y sólo uno de los valores del conjunto $\{0, -1, 1, -i, i\}$. □

Ejercicio 1.1.2
Suponga que un número complejo $u \in \mathbb{C}$ es obtenido a partir de aplicar un número finito de veces operaciones racionales a los números complejos $z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}$. Pruebe que las mismas operaciones aplicadas a $\overline{z_1}, ..., \overline{z_n} \in \mathbb{C}$ resultan en $\overline{u}$.

Demostración:
Notemos que cada operación (suma y multiplicación) son operaciones binarias y que, el aplicar un número finito de veces operaciones racionales a los números complejos $z_1, ..., z_n$ es equivalente a componer un número finito de veces las operaciones binarias de suma y multiplicación (tomando suma de inverso aditivo en caso de la resta y multiplicación por inverso multiplicativo en caso de la división), por lo que para probar el resultado basta con probar que

$$\overline{x + y} = \overline{x} + \overline{y} \quad \text{y} \quad \overline{x \cdot y} = \overline{x} \cdot \overline{y}, \quad \forall x, y \in \mathbb{C}$$

En efecto, sean $x = a + ib$ y $y = c + id$ números complejos. Entonces:

$$\begin{aligned} \overline{x + y} &= \overline{a + ib + c + id} \\ &= \overline{(a + c) + i(b + d)} \\ &= a + c - i(b + d) \\ &= (a - ib) + (c - id) \\ &= \overline{x} + \overline{y} \end{aligned}$$

(de forma análoga se prueba la otra igualdad). ■

Ejercicio 1.1.3
Por un argumento puramente geométrico, pruebe la desigualdad:

$$|z-1| \leq ||z|-1| + |z|\,|\arg z|$$

Demostración:

$\blacksquare$

Ejercicio 1.1.4
Resuelva las siguientes ecuaciones:

- $|z| - z = 1 + 2i$.
- $|z| + z = 2 + i$.

Solución:
De (i): Suponga que existe $z = a + ib \in \mathbb{C}$ tal que

$$|z| - z = 1 + 2i$$

entonces,

$$\begin{aligned}
& \sqrt{a^2+b^2} - a - ib = 1 + 2i \\
\iff & \left\{ \begin{array}{rcl} \sqrt{a^2+b^2} - a & = & 1 \\ -b & = & 2 \end{array} \right. \\
\iff & \left\{ \begin{array}{rcl} \sqrt{a^2+b^2} - a & = & 1 \\ b & = & -2 \end{array} \right. \\
\iff & \left\{ \begin{array}{rcl} \sqrt{a^2+4} & = & 1 + a \\ b & = & -2 \end{array} \right. \\
\iff & \left\{ \begin{array}{rcl} a^2+4 & = & 1 + 2a + a^2 \\ b & = & -2 \end{array} \right. \\
\iff & \left\{ \begin{array}{rcl} a^2+4 & = & 1 + 2a + a^2 \\ b & = & -2 \end{array} \right. \\
\iff & \left\{ \begin{array}{rcl} 2a & = & 3 \\ b & = & -2 \end{array} \right. \\
\iff & \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & \frac{3}{2} \\ b & = & -2 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

por tanto, $z = \frac{3}{2} - 2i$.
De (ii): Suponga que... $\square$

Ejercicio 1.1.5
Pruebe que todo número excepto -1 de módulo unitario puede ser expresado en la forma

$$z = \frac{1+it}{1-it}$$

donde $t \in \mathbb{R}$.

Demostración:

Sea $z \in \mathbb{C}$ y tomemos $t = \tan\frac{\arg z}{2}$. Se tiene que $t \in \mathbb{R}$ si $z \neq -1$ (ya que $\frac{\arg z}{2} = \frac{p}{2}$, el único punto donde no está definida ya que $0 \leq \frac{\arg z}{2} \leq \pi$). Además, a cada punto de módulo unitario le corresponde uno y sólo un argumento $\arg z$.

Afirmamos que se cumple la igualdad. En efecto:

$$\begin{aligned}
\frac{1+it}{1-it} &= \frac{1+it}{1-it} \cdot \frac{1+it}{1+it} \\
&= \frac{1-t^2+2it}{1+t^2} \\
&= \frac{1-\tan^2\frac{\arg z}{2}}{1+\tan^2\frac{\arg z}{2}} + i\frac{2\tan\frac{\arg z}{2}}{1+\tan^2\frac{\arg z}{2}} \\
&= \cos\left(2 \cdot \frac{\arg z}{2}\right) + i\sin\left(2 \cdot \frac{\arg z}{2}\right) \\
&= \cos\arg z + i\sin\arg z \\
&= z
\end{aligned}$$

pues, para todo $\theta \in \mathbb{R}$ (para el que todo esté bien definido), se cumplen las igualdades:

$$\begin{cases}
\sin\theta &= \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} \\
\cos\theta &= \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} \\
\tan\theta &= \frac{2\tan^2\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}
\end{cases}$$

Lo que prueba el resultado. ■

Ejercicio 1.1.6

Pruebe que si $|z| < \frac{1}{2}$, entonces $|(1+i)z^3 + iz| < \frac{3}{4}$.

Demostración:

Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < \frac{1}{2}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left|(1+i)z^3 + iz\right| &\leq \left|(1+i)z^3\right| + |iz| \\
&\leq |1+i|\left|z^3\right| + |i|\,|z| \\
&< (|1|+|i|)\,|z|^3 + \frac{1}{2} \\
&< \frac{2}{2^3} + \frac{1}{2} \\
&\leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 1.1.7

Pruebe que

$$\arg\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{1}{2}\arg\frac{z_2}{z_1}$$

siendo $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ tales que $|z_1| = |z_2| = |z_3|$.

Demostración:

Considere los tres números escritos en su forma trigonométrica, es decir:

$$\begin{cases} z_1 = r_1 \cos\theta_1 + i \sin\theta_1 \\ z_2 = r_1 \cos\theta_2 + i \sin\theta_2 \\ z_3 = r_1 \cos\theta_3 + i \sin\theta_3 \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \arg\frac{z_2}{z_1} &= \arg\left(\frac{|z_2|}{|z_1|}\left[\cos\left(\theta_2 - \theta_1\right) + i \sin\left(\theta_2 - \theta_1\right)\right]\right) \\ &= \arg\left(\cos\left(\theta_2 - \theta_1\right) + i \sin\left(\theta_2 - \theta_1\right)\right) \\ &= \theta_2 - \theta_1 \end{aligned}$$

pues, $|z_1| \neq 0$ y se tiene la igualdad de ambos módulos.

Ahora, también se cumple:

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} =$$

■