

Notas de Álgebra Moderna IV.
Una introducción a la teoría de categorías.

Cristo Daniel Alvarado

22 de abril de 2024

Índice general

3. Funtores	2
3.1. Conceptos Fundamentales	2

Capítulo 3

Funtores

3.1. Conceptos Fundamentales

Definición 3.1.1

Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} dos categorías. Un **functor covariante** (respectivamente, **functor contravariante**), denotado por $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, consta de

1. Un mapeo $F : \text{Obj}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{D}$ tal que $A \mapsto F(A)$.
2. Para cualesquier dos pares de objetos $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, un mapeo $F : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ (resp. $F : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(B), F(A))$) tal que $f \mapsto F(f)$, que cumple las condiciones siguientes:
 - i) Para cada $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, $F(1_A) = 1_{F(A)}$.
 - ii) Para cada $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ y $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$, se tiene que

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

$$(\text{resp. } F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)).$$

Un **bifunctor** es un functor que va del producto de dos categorías en una categoría.

Definición 3.1.2

La **imagen de un functor F entre las categorías \mathcal{C} y \mathcal{D}** , consta de una clase $\{F(C) \mid C \in \text{Obj}(\mathcal{C})\}$ junto con todos los conjuntos $\{F(f) \mid f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \text{ con } A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})\}$.

Observación 3.1.1

La imagen de un functor no necesariamente es una categoría. En cambio, si el functor es inyectivo sobre objetos, se tiene que la imagen de un functor si es una categoría.

Demostración:

En efecto, sean \mathcal{C} y \mathcal{D} dos categorías. Para cualesquiera $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ y $D_1, D_2, D_3 \in \text{Obj}(\mathcal{D})$, $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1, C_2)$ y $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C_3, C_4)$, $h \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(D_1, D_2)$ y $k \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(D_2, D_3)$. Se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} C_1 &\longrightarrow C_2 \text{ y } C_3 \longrightarrow C_4 \\ D_1 &\longrightarrow D_2 \longrightarrow D_3 \end{aligned}$$

la imagen de $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ no es una categoría, pues si hacemos que

$$F(C_1) = D_1, F(C_2) = F(C_3) = D_2 \text{ y } F(C_4) = D_4$$

haciendo

$$F(f) = h, F(g) = k$$

además,

$$F(1_{C_1}) = 1_{D_1} \quad F(1_{C_2}) = F(1_{C_3}) = 1_{D_2} \quad F(1_{C_4}) = 1_{D_4}$$

pues, h y k pertenecen a la imagen de F , pero su composición no lo está. ■

Observación 3.1.2

Si F es inyectiva, entonces la imagen de F será una categoría.

Proposición 3.1.1

Si $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es un funtor covariante (resp. contravariante), entonces $F' : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{D}$ es un funtor contravariante (resp. covariante).

Demostración:

Se hará el segundo caso. Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} dos categorías y $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un funtor contravariante. Definimos F' tal que

$$F(A) = F'(A), \quad \forall A \in \text{Obj}(\mathcal{C}^{op})$$

y,

$$F(1_A) = F'(1_A), \quad \forall A \in \text{Obj}(\mathcal{C}^{op})$$

1. Sea f un morfismo de A en B , con $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C}^{op}) = \text{Obj}(\mathcal{C})$. Entonces su respectivo elemento f^{op} en \mathcal{C}

$$F(f) = F'(f^{op})$$

Claramente esto está bien definido. Con lo cual se tiene que $F'(f^{op}) : F(B) \rightarrow F(A)$, que es la primera parte para probar que F es funtor covariante.

2. Sean $f^{op} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(B, A)$ y $g^{op} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(C, B)$. Entonces, existen $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ y $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} F'(f^{op} \circ g^{op}) &= F'((g \circ f)^{op}) \\ &= F(g \circ f) \\ &= F(f) \circ F(g) \\ &= F'(f^{op}) \circ F'(g^{op}) \end{aligned}$$

por tanto, de los dos incisos anteriores se sigue que F' es un funtor covariante. ■

Definición 3.1.3

Sea \mathcal{C} una categoría.

1. Si \mathcal{C}' es una subcategoría de \mathcal{C} , definimos el **functor inclusión** $I : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ el cual asigna a cada objeto y cada morfismo a sí mismo. En el caso que $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$, tendremos simplemente que $I : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ es el **functor identidad**, denotado por $1_{\mathcal{C}}$.
2. Sea \sim una congruencia en \mathcal{C} categoría y \mathcal{C}/\sim la categoría cociente correspondiente. Se define el **functor cociente**, denotado por $\pi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/\sim$ de la siguiente manera:
 - $\pi(C) = C$ para todo $C \in \text{Obj}(\mathcal{C})$.
 - $\pi(f) = \bar{f}$ para todo morfismo f en la categoría \mathcal{C} .

donde \bar{f} denota a la clase de equivalencia de los morfismos de f en \mathcal{C} .

Además, si $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ son morfismos en \mathcal{C} , con $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, se tiene que

$$\pi(g \circ f) = \overline{g \circ f} = \bar{g} \circ \bar{f} = \pi(g) \circ \pi(f)$$

3. Si $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ son dos funtores, siendo $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ categorías, podemos definir el **functor composición puntual** $G \circ F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ como sigue:

$$G \circ F(C) = G(F(C)), \quad \forall C \in \text{Obj}(\mathcal{C})$$

y,

$$G \circ F(f) = G(F(f)), \quad \forall f \text{ morfismo en } \mathcal{C}$$

- i) Si F y G son ambos covariantes ó contravariantes, entonces $G \circ F$ es un functor covariante.
- ii) Si uno de ellos es covariante y el otro contravariante, entonces $G \circ F$ es contravariante.

Demostración:

Verifiquemos en 3 que es un functor. En efecto, claramente manda objetos en objetos y morfismos en morfismos de \mathcal{C} en \mathcal{E} .

Suponga que F y G son ambos contravariantes (el caso en el que son covariantes es inmediato). Entonces para $F : A \rightarrow B$ morfismo en \mathcal{C} :

$$\begin{aligned} F(f) : F(B) &\rightarrow F(A) \\ \Rightarrow G(F(f)) : G(F(A)) &\rightarrow G(F(B)) \end{aligned}$$

además, si f, g son morfismos en \mathcal{C} :

$$\begin{aligned} G \circ F(g \circ f) &= G(F(g \circ f)) \\ &= G(F(f) \circ F(g)) \\ &= G(F(g)) \circ G(F(f)) \end{aligned}$$

luego, el functor composición puntual es covariante.

Para el caso en el que uno sea covariante y otro contravariante, el caso es similar. ■

Definición 3.1.4

Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} dos categorías.

1. Fijemos un objeto $D_0 \in \text{Obj}(\mathcal{D})$. Definimos el **functor constante**, $A_{D_0} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ el cual asigna a cada objeto $C \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ al objeto D_0 y a cada morfismo f de \mathcal{C} el morfismo 1_{D_0} de \mathcal{D} .
2. Considere la categoría producto $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$. Definimos los **funtores proyección** de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \times \mathcal{D} &\rightarrow \mathcal{C}, & (C, D) &\mapsto C & (f, g) &\mapsto f \\ \rho_{\mathcal{D}} : \mathcal{C} \times \mathcal{D} &\rightarrow \mathcal{D}, & (C, D) &\mapsto D & (f, g) &\mapsto g \end{aligned}$$

Definición 3.1.5

Sea \mathcal{C} una categoría. Definimos el **bifunctor** $\text{HOM}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ como $\text{HOM}_{\mathcal{C}}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, para todo $(A, B) \in \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}$.

Además, si $(f^{op}, g) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}}((A, B), (C, D))$, entonces se tiene que $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$ y

$g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, D)$.

Luego

$$\begin{aligned} \text{HOM}_{\mathcal{C}} : \text{Hom}_{\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}}((A, B), (C, D)) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(\text{HOM}_{\mathcal{C}(A, B)}, \text{HOM}_{\mathcal{C}(C, D)}) \\ (f^{op}, g) &\mapsto \text{HOM}_{\mathcal{C}}(f^{op}, g) \end{aligned}$$

donde $\text{HOM}_{\mathcal{C}}(f^{op}, g)(h) = g \circ h \circ f$, para todo $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.

Demostración:

Probaremos que $\text{HOM}_{\mathcal{C}}$ es un funtor. Hay que ver que se cumplen algunas condiciones:

1. $\text{HOM}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$, tal que $(A, B) \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, y $(f^{op}, g) \mapsto (h \mapsto g \circ h \circ f)$ para todo $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ (siendo los f y g como se dió en la definición). Así, está bien definido.
2. Sean $(A, B) \in \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}$, $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, entonces:

$$\begin{aligned} \text{HOM}_{\mathcal{C}}((1_A, 1_B))(h) &= \text{HOM}_{\mathcal{C}}((1_A^{op}, 1_B))(h) \\ &= 1_B \circ g \circ 1_A \\ &= h \\ &= 1_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)}(h) \\ &= 1_{\text{HOM}_{\mathcal{C}}(A, B)(h)} \end{aligned}$$

luego manda identidades en identidades.

3. Sean ahora $(f^{op}, g) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}}((A, B), (C, D))$ y $(r^{op}, t) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}}((C, D), (E, F))$. Tomemos $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.

Se tiene que $\text{HOM}_{\mathcal{C}}(r^{op}, t) \in \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B), \text{Hom}_{\mathcal{C}}(E, F))$ y $g \circ h \circ f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$, de manera que

$$\text{HOM}_{\mathcal{C}}(r^{op}, t)(g \circ h \circ f) = t \circ (g \circ h \circ f) \circ r$$

luego,

$$\begin{aligned} \text{HOM}_{\mathcal{C}}((r^{op}, t) \circ (f^{op}, g))(h) &= \text{HOM}_{\mathcal{C}}(r^{op} \circ f^{op}, t \circ g)(h) \\ &= \text{HOM}_{\mathcal{C}}((f \circ r)^{op}, t \circ g)(h) \\ &= (t \circ g) \circ h \circ (f \circ r) \\ &= \text{HOM}_{\mathcal{C}}(r^{op}, t)(g \circ h \circ f) \\ &= \text{HOM}_{\mathcal{C}}(r^{op}, t) \circ \text{HOM}_{\mathcal{C}}(f^{op}, g)(h) \\ \Rightarrow \text{HOM}_{\mathcal{C}}((r^{op}, t) \circ (f^{op}, g)) &= \text{HOM}_{\mathcal{C}}(r^{op}, t) \circ \text{HOM}_{\mathcal{C}}(f^{op}, g)(h) \end{aligned}$$

Por los incisos anteriores, se sigue que este es un bifuntor, denominado **bifuntor Hom**. ■

Ejemplo 3.1.1

Los funtores olvidados (o *forgetful*). Consideremos por ejemplo a las categorías **Rng** y **Ab**. Entonces:

1. $F : \mathbf{Ring} \rightarrow \mathbf{Ab}$ tal que $(A, +, \cdot) \mapsto (A, +)$ y a cada morfismo lo manda a sí mismo es un funtor, el cual "olvida" propiedades del objeto original del que partió. En este caso, olvida el producto entre dos elementos del anillo.
2. $\mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$. A cada grupo lo manda al conjunto de sus elementos y morfismo a la función entre grupos.

Proposición 3.1.2

Las categorías pequeñas y los funtores entre ellas forman una categoría (localmente pequeña), la cual denotamos como **Cat**, definiendo:

1. $\text{Obj}(\mathbf{Cat}) = \{\mathcal{C} \mid \mathcal{C} \text{ es una categoría pequeña}\}.$
2. Para cada par de objetos $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \text{Obj}(\mathbf{Cat})$, el conjunto:

$$\text{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \{F \mid F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D} \text{ es un funtor}\}$$

(como \mathcal{C} y \mathcal{D} son conjuntos, entonces la clase anterior debe ser un conjunto).

3. La composición de morfismos en esta categoría se define como la composición funtorial puntual de dos funtores. Además, la identidad es el funtor identidad de la misma categoría.
-

Demostración:

Basta con ver que la composición es asociativa en la categoría **Cat**. En efecto, sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{T}$ categorías pequeñas y, $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ y $H : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{T}$ funtores. Se tiene que:

$$\begin{aligned}(H \circ (G \circ F))(A) &= H(G \circ F(A)) \\ &= (H \circ G)(F(A)) \\ &= H \circ G \circ F(A)\end{aligned}$$

(pues la composición de funtores como se definió es asociativa en objetos). ■

Proposición 3.1.3

Sea $F : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ un bifuntor. Entonces, para todo $A \in \text{Obj}(\mathcal{A})$ existe un funtor $F_A : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$, llamado el **funtor asociado derecho respecto a A** y está definido como sigue:

1. $F_A(B) = F(A, B)$ para todo $B \in \text{Obj}(\mathcal{B})$.
2. $F_A(f) = F = (1_A, f)$ para todo f morfismo en la categoría \mathcal{B} .

Similaremente, para cada $B \in \text{Obj}(\mathcal{B})$, existe un funtor $F^B : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$, llamado **funtor asociado izquierdo respecto a B**, como sigue:

1. $F^B(A) = F(A, B)$ para todo $A \in \text{Obj}(\mathcal{A})$.
2. $F^B(f) = F = (f, 1_B)$ para todo f morfismo en la categoría \mathcal{A} .

Y, si F es covariante (resp. contravariante), entonces F_A y F^B son covariantes (resp. contravariantes).

Demostración:

Sea $A \in \text{Obj}(\mathcal{A})$. Se probará que el funtor asociado derecho respecto a $A \in \text{Obj}(\mathcal{A})$ es un funtor. Claramente está bien definido (manda objetos de \mathcal{A} en objetos de \mathcal{C} y lo mismo con morfismos). Veamos que se cumplen dos condiciones:

1. Sea $B \in \mathcal{B}$. Entonces,

$$\begin{aligned} F_A(1_B) &= F(1_A, 1_B) \\ &= 1_{F(A, B)} \\ &= 1_{F_A(B)} \end{aligned}$$

2. Suponga que F es covariante. Sean $A, B, C \in \text{Obj}(\mathcal{B})$, $f \in \text{Hom}_{\mathcal{B}}(A, B)$ y $g \in \text{Hom}_{\mathcal{B}}(B, C)$. Entonces:

$$\begin{aligned} F_A(g \circ f) &= F(1_A, g \circ f) \\ &= F(1_A \circ 1_A, g \circ f) \\ &= F((1_A, g) \circ (1_A, f)) \\ &= F(1_A, g) \circ F(1_A, f) \\ &= F_A(g) \circ F_A(f) \end{aligned}$$

de los incisos anteriores, se sigue que F_A es un funtor covariante (los demás casos son análogos). ■

Ejemplo 3.1.2

Sea \mathcal{C} una categoría y $C \in \text{Obj}(\mathcal{C})$. El funtor $\text{HOM}_{\mathcal{C}C} = \text{HOM}_{\mathcal{C}}(C, -)$ es el funtor asociado derecho respecto a C y $\text{HOM}_{\mathcal{C}}^C = \text{HOM}_{\mathcal{C}}(-, C)$ es el funtor asociado izquierdo respecto a C .

Ejemplo 3.1.3

El bifuntor producto cartesiano $- \times - : \mathbf{Set} \times \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$, $(- \times -)(A, B) \mapsto A \times B$ y tal que $(- \times -)(f, g) \mapsto f \times g$, donde si $(f, g) \in \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(A, C) \times \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(B, D)$, entonces

$$\begin{aligned} f \times g : A \times B &\rightarrow C \times D \\ (a, b) &\mapsto (f(a), g(b)) \end{aligned}$$

Ejemplo 3.1.4

Para cualquier conjunto X , los funtores producto cartesiano $X \times -$ y $- \times X$ son los funtores derecho e izquierdo asociados con respecto a X del bifuntor producto cartesiano, respectivamnete.