# Lista de Ejercicios de Extensiones Separables

Cristo Daniel Alvarado

8 de febrero de 2024

# Ejercicio 3.1.1

Sea  $f(X) \in F$  un polinomio mónico irreducible de grado  $\geq 2$  tal que f(X) tiene todas sus raíces iguales en algún campo de descomposición. Pruebe que  $\operatorname{car}(F) = p > 0$  y que  $f(X) = X^{p^n} - a$ , para algún  $n \in \mathbb{N}$  y  $a \in F$ .

## Demostración:

Esto es una contradicción. $\#_c$ 

$$asd \quad sadf \#_c$$
 (3.1)

# Ejercicio 3.1.2

Sea  $f(X) \in F[X]$  un polinomio irreducible de grado  $m \in \mathbb{N}^*$ , y car(F) no divide a m. Demuestre que f(X) es separable.

## Demostración:

## Ejercicio 3.1.3

sea F un campo de caracterísitica  $p \in \mathbb{N}^*$ , y sea  $a \in F$  tal que  $a \notin F^p$ . Pruebe que el polinomio  $f(X) = X^{p^n} - a \in F[X]$  es irreducible para cada  $n \ge 1$ .

## Demostración:

## Ejercicio 3.1.4

Sea F un campo de característica cero, y supóngase que existe un polinomoi de grado dos irredicible sobre F[X]. Probar que hay un número infinito de polinomios irreducibles sobre F[x] de grado dos.

#### Demostración:

## Ejercicio 3.1.5

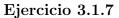
Sea E/F la extensión de campos con  $\operatorname{car}(F) = p > 0$ . Pruebe que si  $\alpha \in E$  es algebraico sobre F, entonces  $\alpha^{p^n}$  es separable sobre F para algún  $n \geq 0$ .

# Demostración:

# Ejercicio 3.1.6

Sea F un campo de caracterísitica p>0, y esa  $\alpha$  algebraico sobre F. Demuestre que  $\alpha$  es separable sobre F si y sólo si  $F(\alpha)=F(\alpha^{p^n})$  para cada  $n\geq 1$ .

### Demostración:



Sea E/F una extensión de campos con  $\operatorname{car}(F) = p > 0$ , y sea  $n \ge \operatorname{tal}$  que (n, p) = 1. Pruebe que para cada  $\alpha \in E$ , con  $n\alpha \in F$ , se tiene que  $\alpha \in F$ .

## Demostración:

# Ejercicio 3.1.8

Sea  $\alpha$  algebraico sobre F. Demuestre que  $[F(\alpha):F]_i$  es la multiplicidad de  $\alpha$  en su polinomio irredicuble sobre F.

# Demostración:

# Ejercicio 3.1.9

Sea E/F una extensión de campos finita con E campo perfecto. Demuestre que F es también campo perfecto.

## Demostración:

# Ejercicio 3.1.10

Sea F un campo y  $\bar{F}$  una cerradura algebraica de F. Pruebe que  $\bar{F}$  es un campo perfecto.

## Demostración:

# Ejercicio 3.1.11

Sea E/F uan extensión finita de campos con car(F) = p > 0. Pruebe que la extensión E/F es separable si y sólo si  $E = E^p F$ .

# Demostración:

# Ejercicio 3.1.12

Sea E/F una extensión finita y separable con  $\operatorname{car}(F) = p > 0$ . Pruebe que si  $\{u_1, ..., u_n\}$  es una base de E sobre F, entonces también lo es  $\{u_1^{p^m}, ..., u_n^{p^m}\}$  para cualquier  $m \geq 0$ .

## Demostración:

# Ejercicio 3.1.13

Sea E/F una extensión finita de campos con F campo infinito. Pruebe que E/F es una extensión simple si y sólo si existe solamente un número finito de campos intermedios en la extensión E/F.

## Demostración:

# Ejercicio 3.1.14

Sea E/F una extensión de campos con  $\operatorname{car}(F) = p > 0$ , y sea  $\alpha \in E$  algebraico sobre F. Pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes:

- 1).  $\alpha$  es puramente inseparable sobre F.
- 2). El polinomio irredicuble de  $\alpha$  sobre F es de la forma  $(X \alpha)^m$  para algún  $m \ge 1$ , donde m es una potencia de p.

## Demostración:

## Ejercicio 3.1.15

Sea E/F una extensión de campos con  $\operatorname{car}(F) = p > 0$ , y sean  $\alpha \in E$  separable sobre F y  $\beta \in E$  puramente inseparables sobre F. Pruebe que  $F(\alpha, \beta) = F(\alpha + \beta)$ . Si  $\alpha \neq 0 \neq \beta$ , entonces  $F(\alpha, \beta) = F(\alpha\beta)$ .

## Demostración:

## Ejercicio 3.1.16

Dar un ejemplo de una extensión finita de campos que no sea separable ni puramente inseparable.

## Demostración:

## Ejercicio 3.1.17

Encuentre un elemento  $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3})$  tal que  $(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3})$ .

## Demostración:

# Ejercicio 3.1.18

Sea E/F una extensión de campos finita con  $\operatorname{car}(F) = p > 0$ , y sea  $p^r = [E:F]_i$ . Supóngase que no existe una potencia  $p^s$ , con s < r tal que  $E^{p^s}F$  sea separable sobre F. Pruebe que la extensión E/F es simple. (Sugerencia: Suponga primeramente que E/F es una extensión puramente inseparable).

## Demostración:

## Ejercicio 3.1.19

Sea F un campo de caracterísitica p > 0, y sea  $E = F(\alpha, \beta)$  con  $\alpha, \beta \notin F$ . Supóngase que  $\alpha^p, \beta^p \in F$  y que  $[E:F] = p^2$ . Pruebe que E/F no es una extensión simple. Exhibta un número infinito de campos intermedios.

## Demostración: