

Lista 2 de Ejercicios  
Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

23 de marzo de 2024

# Índice general

1. Ejercicios Convolución
---------------------------

2
---

# Capítulo 1

## Ejercicios Convolución

### Ejercicio 1.1.1

Sean  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  funciones nulas en  $] - \infty, 0[$ . Si existe  $f * g(x)$ , demuestre que:

$$f * g(x) = \begin{cases} \int_0^\infty f(y)g(x-y)dy & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En los casos siguientes  $f$  y  $g$  son nulas en  $] - \infty, 0[$  y sus valores en  $[0, \infty[$  se indican abajo. Calcule  $f * g$ .

I.  $f(x) = e^{-x}$  y  $g(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

II.  $f(x) = g(x) = e^{-x}$ .

III.  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$  y  $g(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

IV.  $f(x) = g(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

**Solución:**

□

### Ejercicio 1.1.2

Haga lo siguiente:

I. Para toda  $m \in \mathbb{N}$  se define  $e_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como:

$$e_m(x) = \begin{cases} \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

**Pruebe** que

$$e_p * e_q = e_{p+q}$$

II. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  integrable en todo intervalo acotado tal que  $f(x) = 0$  para todo  $x \leq a$ .

**Muestre** que

$$e_m * f(x) = \begin{cases} \int_a^x \frac{(x-y)^{m-1}}{(m-1)!} f(y)dy & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

III. **Deduzca** que para  $x \geq a$  se cumple la siguiente **fórmula de Cauchy para la  $n$ -ésima integral indefinida**

$$\int_a^x dx_{m-1} \int_a^{x_{m-1}} dx_{m-2} \cdots \int_a^{x_2} dx_1 \int_a^{x_1} f(x_0) dx_0 = \int_a^x \frac{(x-y)^{m-1}}{(m-1)!} f(y) dy$$

**Demostración:**

### Ejercicio 1.1.3

La integral fraccional de orden  $\alpha > 0$  sobre un intervalo  $[a, x]$  de una función medible  $f$  se define como:

$$I_a^\alpha[f](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt$$

para toda  $x \geq a$  tal que la integral exista.

I. Fije  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . Para cada  $\alpha > 0$  se define

$$g_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{x^{1-\alpha}} \chi_{]0, b-a[}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

**Pruebe** que si  $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ , entonces existe la convolución  $\tilde{f} * g_\alpha$ . **Calcule**  $\tilde{f} * g_\alpha$ .

II. **Calcule**  $I_0^{1/2}[t](x)$  y  $I_0^{1/2}[I_0^{1/2}[t]](x)$ . **¿Conclusión?** Justifique.

**Demostración:**

### Ejercicio 1.1.4

Para todo  $p > 0$  se define:

$$f_p(t) = \begin{cases} t^{p-1}e^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

Calculando de dos modos distintos la integral  $\int_{-\infty}^{\infty} f_p * f_q$  con  $p, q > 0$ , **pruebe** la fórmula

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

donde  $B(p, q)$  es la función beta y  $\Gamma(q)$  es la función gama.

**Demostración:**

### Ejercicio 1.1.5

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  una función localmente integrable en  $\mathbb{R}$ . Defina para todo  $h > 0$ , la función

$$J_h f = f * \left( \frac{1}{h} \chi_{]-h, 0[} \right)$$

I. **Muestre** que,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$J_h f(x) = \frac{1}{h} \int_0^h f(x+y) dy$$

y que  $J_h f$  es continua en  $\mathbb{R}$ .

II. Si  $f$  es integrable en  $\mathbb{R}$ , **pruebe** que también lo es  $J_h f$  y que

$$\int_{\mathbb{R}} J_h f = \int_{\mathbb{R}} f$$

III. Si  $f$  es de clase  $C^r$  en  $\mathbb{R}$ , **muestre** que también lo es  $J_h f$  y que  $(J_h f)^{(k)} = J_h f^{(k)}$  para  $k = 1, \dots, r$ .

**Solución:**

□

### Ejercicio 1.1.6

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$  una función localmente integrable en  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq R\}$ . Defina:

$$\mathcal{M}_R f = f * \frac{\chi_B}{\text{Vol}(B)}$$

I. **Muestre** que, para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ :

$$\mathcal{M}_R f(x) = \frac{1}{\text{Vol}(B)} \int_{\|x-y\| \leq R} f(y) dy$$

y que  $\mathcal{M}_R f$  es continua en  $\mathbb{R}^n$ .

II. Si  $f$  es integrable en  $\mathbb{R}^n$ , **pruebe** que también lo es  $\mathcal{M}_R f$  y que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}_R f = \int_{\mathbb{R}^n} f$$

III. Si  $f$  es de clase  $C^r$  en  $\mathbb{R}^n$ , **muestre** que también lo es  $\mathcal{M}_R f$  y que  $D(\mathcal{M}_R f) = \mathcal{M}_R(Df)$  para todo operador  $D = \partial_{\alpha_1} \cdots \partial_{\alpha_k}$ , con  $k \in \{1, \dots, r\}$ .

**Solución:**

□

### Ejercicio 1.1.7

Haga lo siguiente:

I. Sean  $f$  y  $g$  dos funciones en  $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ . Sea  $\lambda \in \mathbb{K}$  tal que  $\mathcal{N}_1(f) < 1/|\lambda|$ . **Demuestre** que la ecuación

$$x = \lambda x * f + g$$

admite una solución  $x \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  salvo equivalencias. **Muestre** que la solución puede ser representada en forma de una serie

$$x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^{\nu} g * \underbrace{f * \cdots * f}_{\nu\text{-veces}}$$

que es convergente en el espacio de Banach  $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ .

- II. Al suponer  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  y  $g \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ , estudie la misma ecuación con la incógnita  $x$  en  $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ .

**Demostración:**

### Ejercicio 1.1.8

Haga lo siguiente:

- I. Sea  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$  una función medible. **Muestre** que existe una función medible acotada  $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$  tal que  $|g| = \alpha g$  en todo punto de  $\mathbb{R}^n$ .

*Sugerencia.* Intente con la función  $\frac{g+\chi_S}{|g+\chi_S|}$  donde  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0\}$ .

- II. Sean  $1 < p < \infty$  y  $g \in \mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ . Defina  $\phi_g : \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  como:

$$\phi_g(f) = \int_{\mathbb{R}^n} fg, \quad \forall f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$$

**Pruebe** que  $\phi_g$  es una aplicación lineal continua sobre  $L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  y que  $\|\phi_g\| = \mathcal{N}_{p^*}(g)$ .

Así pues, la aplicación  $g \mapsto \phi_g$  es una isometría de  $\mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  en  $\mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  (dicha isometría también es suprayectiva, pero este hecho más profundo no se pide probar aquí).

*Sugerencia.* Para probar la desigualdad  $\mathcal{N}_{p^*}(g) \leq \|\phi_g\|$  considere la función  $f = \alpha|g|^{p^*-1}$ , donde  $\alpha$  es la función del inciso (i).

- III. Sea  $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  una sucesión de Dirac en  $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ . Se quiere demostrar, sin usar la desigualdad de Jensen, que si  $1 \leq p < \infty$  y  $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ , entonces

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{N}_p(f - \rho_\nu * f) = 0$$

Defina  $g_\nu = f - \rho_\nu * f$  y considere la aplicación lineal  $\phi_{g_\nu} \in L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})^*$ , donde

$$\phi_{g_\nu}(h) = \int_{\mathbb{R}^n} hg_\nu, \quad \forall h \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$$

**Establezca** la desigualdad

$$|\phi_{g_\nu}| \leq \mathcal{N}_{p^*}(h) \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\nu(y) \mathcal{N}_p(f_{-y} - f) dy$$

Sea  $\varepsilon > 0$ . **Demuestre** que para  $\nu$  suficientemente grande,

$$|\phi_{g_\nu}| \leq \mathcal{N}_{p^*}(h) \varepsilon$$

Utilizando el inciso (ii) termine la demostración.

**Demostración:**

### Ejercicio 1.1.9

Demuestre que el sistema de potencias enteras  $\{x^\nu \mid \nu \in \mathbb{N}^*\}$  es total en  $L_p([a, b], \mathbb{C})$  para  $p \in [1, \infty[$ .

*Sugerencia.* Basta demostrarlo para  $L_1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ . El sistema trigonométrico es total en este espacio. Desarrolle  $e^{ik\pi}$  en serie de potencias de Maclaurin.

**Demostración:**

■

**Ejercicio 1.1.10**

Demuestre que el sistema de potencias enteras  $\{x^\nu \mid \nu \in \mathbb{N}^*\}$  es completo en  $L_p([a, b], \mathbb{C})$  para  $p \in [1, \infty[$ .

**Demostración:**

■

**Ejercicio 1.1.11**

Sean  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto medible con medida finita y  $1 < p < \infty$ . **Muestre** que si una familia de funciones  $\{\varphi_i \mid i \in I\}$  es completa en  $L_p(E, \mathbb{K})$ , entonces dicha familia es total en  $L_{p^*}(E, \mathbb{K})$ .

*Sugerencia.* Sea  $f \in \mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ . Se supone que  $\int_E f \varphi_i = 0$  para toda  $i \in I$ . Sea  $\alpha$  una función medible acotada tal que  $|f| = \alpha f$ . Por hipótesis existe una sucesión de funciones  $\{\psi_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  en  $\mathcal{L}(\{\varphi_i \mid i \in I\})$  tal que  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{N}_p(\alpha - \psi_\nu) = 0$ .

**Demostración:**

■