Curso de Variable Compleja

Cristo Daniel Alvarado

3 de noviembre de 2024

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. Fundamentos

El objetivo principal de la teoría de las funciones analíticas es el análisis de funciones que localmente pueden ser descritas en términos de una serie de potencias convergente, dispuesta como:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n + ... \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k, \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\end{aligned} \tag{1.1}$$

siendo $f : I \to \mathbb{R}$ con I un intervalo, $x_0 \in I$ y $\delta > 0$ tal que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subseteq]a, b[$. Cuando una funcion de este tipo puede ser descrita de la forma anterior para algún par x_0 y δ, decimos en este caso que f **es analítica en** x_0.

En el caso que I sea un intervalo abierto y f sea analítica en x_0 para todo $x_0 \in I$, decimos que f **es analítica en** I.

Ejemplo 1.1.1
Las funciones $x \mapsto P(x)$, $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \sin x$ y $x \mapsto \cos x$ son analíticas en $\mathbb{R}$

Debido a que como resultado de efectuar operaciones algebraicas y analíticas (suma, resta, multiplicación, división, integración y derivación) sobre series de potencias resulta nuevamente en una serie de potencias convergente, es de gran interés conocer las propiedades de estas funciones (más que nada debido a las ecuaciones diferenciales). Esto motiva el estudio particular de este tipo de funciones.

A pesar de lo amplia que es esta clase de funciones, ésta solamente forma una parte regular de las funciones *infinitamente diferenciables.*

Proposición 1.1.1
Sea $f :]x_0 - r, x_0 + r[\to \mathbb{R}$ una función, siendo $r > 0$ y $x_0 \in \mathbb{R}$. Entonces, f es analítica en x_0 si y sólo si se satisfacen las condiciones siguientes:

1. f tiene derivadas de todos los órdenes en un entorno de x_0.
2. Existen $\delta, M > 0$ tales que para todo $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ y para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple:

$$\left| f^{(k)}(x) \right| < M \frac{k!}{\delta^k}$$

Demostración:

$\Rightarrow)$: Suponga que f es analítica en x_0, entonces existen $a_0, a_1, ..., a_n, ... \in \mathbb{R}$ y $\rho > 0$ tal que

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ...$$

para todo $x \in]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ (note que $\rho < r$). Se sabe por resultados de análisis real que f tiene derivadas de todos los órdenes en $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ y, en particular para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$f^{(k)}(x) = k!a_k + \frac{(k+1)!}{1!}a_{k+1}(x - x_0) + \frac{(k+2)!}{2!}a_{k+2}(x - x_0)^2 + ... + \frac{(k+n)!}{n!}a_{k+n}(x - x_0)^n + ...$$

para todo $x \in]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$. Fijemos $k \in \mathbb{N}$ y tomemos $\delta > 0$ tal que $0 < 2\delta < \rho$. Si $x = x_0 + 2\delta$, entonces la serie anterior convergerá y, por ende en el límite debe suceder que

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \frac{(k+n)!}{n!}a_{k+n}(x - x_0)^n = 0 \\ \iff &\lim_{n\to\infty} a_{k+n}(x_0 + 2\delta - x_0)^n = 0 \\ &\iff a^k \lim_{n\to\infty} a_n(2\delta)^n = 0 \\ &\iff \lim_{n\to\infty} a_n(2\delta)^n = 0 \end{aligned}$$

(pues, $\lim_{n\to\infty} \frac{(k+n)!}{n!} = 1$). En particular, de lo anterior se deduce que $\{a_n(2\delta)^n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada, luego existe $M > 0$ tal que

$$|a_n(2\delta)^n| < M', \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, se tiene que para todo $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, al ser la serie de potencias convergente y ser el espacio $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ completo, es absolutamente convergente, luego:

$$\begin{aligned} \left|f^{(k)}(x)\right| &\leq k!\,|a_k| + \frac{(k+1)!}{1!}\,|a_{k+1}|\,|x - x_0| + ... + \frac{(k+n)!}{n!}\,|a_{k+n}|\,|x - x_0|^n + ... \\ &\leq k!\,|a_k| + \frac{(k+1)!}{1!}\,|a_{k+1}|\,|x_0 + \delta - x_0| + ... + \frac{(k+n)!}{n!}\,|a_{k+n}|\,|x_0 + \delta - x_0|^n + ... \\ &\leq k!\,|a_k| + \frac{(k+1)!}{1!}\,|a_{k+1}|\,\delta + ... + \frac{(k+n)!}{n!}\,|a_{k+n}|\,\delta^n + ... \\ &< k!\frac{M'}{(2\delta)^k} + \frac{(k+1)!}{1!} \cdot \frac{M'}{(2\delta)^{k+1}}\delta + ... + \frac{(k+n)!}{n!} \cdot \frac{M'}{(2\delta)^{k+n}}\delta^n + ... \\ &= \frac{k!M'}{2^k}\left[1 + \frac{k+1}{1!} \cdot \frac{1}{2} + ... + \frac{(k+1)(k+2)\cdot ... \cdot(k+n)}{n!} \cdot \frac{1}{2^n} + ...\right] \end{aligned}$$

■

Capítulo 2

Propiedades Elementales y Ejemplos de Funciones Analíticas

2.1. Series de Potencias

Se darán ejemplos y se hablará sobre las propiedades fundamentales de las series de potencias.

Definición 2.1.1
Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{C}$. Decimos que la serie de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge a** $z \in \mathbb{C}$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow \left|\sum_{k=1}^{n} a_n - z\right| < \varepsilon$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge absolutamente**, si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Proposición 2.1.1
Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

Demostración:
Inmediata de las propiedades del módulo. ■

Definición 2.1.2
Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{R}$. Se definen:

- $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_n, a_{n+1}, ...\}$.
- $\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{a_n, a_{n+1}, ...\}$.

como el número real en $\overline{\mathbb{R}}$.

Observación 2.1.1
El límite superior y límite inferior de una sucesión siempre existe.

Definición 2.1.3
Una **serie de potencias alrededor de** $a \in \mathbb{C}$ es una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$, siendo $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{C}$ y $z \in \mathbb{C}$.

Ejemplo 2.1.1
La serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

es convergente a $\frac{1}{1-z}$ si y sólo si $|z| < 1$.

Teorema 2.1.1 (**Critero** M **de Weierestrass**)
Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $u_n : X \to \mathbb{C}$ una función tal que existe $M_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$|u_n|(x) < M_n, \quad \forall x \in X$$

entonces, si $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ se tiene que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

converge uniformemente.

Demostración:
Se hizo en Análisis Matemático I. ■

Teorema 2.1.2
Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ una serie de potencias, defina el número $R \in [0, \infty]$ tal que

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$$

entonces:

1. Si $z \in \mathbb{C}$ es tal que $|z-a| < R$, la serie converge absolutamente.
2. Si $z \in \mathbb{C}$ es tal que $|z-a| > R$, los términos de la serie no son acotados, por lo que la serie diverge.
3. Si $0 < r < R$, la serie converge uniformemente en $\left\{z \in \mathbb{C} \middle| |z| \leq r\right\}$.

El elemento no negativo de la recta real extendida R es el único con las propiedades (1) y (2), y es llamado el **radio de convergencia de la serie** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$.

Demostración:
De (1): Se tienen dos casos; si $R > 0$ y $R = 0$:

- $R > 0$: Podemos suponer que $a = 0$. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < R$. Existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $|z| < r < R$. $\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n|^{1/n} < \frac{1}{r}, \quad \forall n \geq N$$

pues, $1/R < 1/r$. Entonces:

$$|a_n| < \frac{1}{r^n}, \quad \forall n \geq N$$

se sigue así que:

$$|a_n z^n| \leq \left(\frac{|z|}{r}\right)^n, \quad \forall n \geq N$$

Por ende:

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n z^n| \leq \sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{|z|}{r}\right)^n < \infty$$

pues $|z|/r < 1$. Por tanto, la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

es absolutamente convergente.

- Si $R = 0$, entonces no existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < R$. Por tanto, el resultado se cumple por vacuidad.

De (2): El procedimiento es análogo (pero mostrando la divergencia de una serie geométrica) al de (1).

De (3): Sea $r \in \mathbb{R}$ tal que $0 < r < R$. Tomemos $\rho \in \mathbb{R}$ tal que $r < \rho < R$. Como en (1) existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n| < \frac{1}{\rho}, \quad \forall n \geq N$$

Entonces, si $|z| \leq r$ se tiene que

$$|a_n z^n| \leq \left(\frac{r}{\rho}\right)^n, \quad \forall n \geq N$$

siendo $r/\rho < 1$. Por el Criterio M de Weierestrass se sigue que la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n z^n|$$

converge uniformemente en $\left\{z \in \mathbb{C} \middle| |z| \leq r\right\}$.

La unicidad de R se sigue de (1) y (2). ■

Proposición 2.1.2
Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-a)^n$ es una serie de potencias con radio de convergencia $R \in [0, \infty]$, entonces

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

si el límite existe.

Demostración:
Poedmos suponer que $a = 0$. Si el límite anterior existe, denotémoslo por

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Probaremos que $\alpha = R$. Sea $z \in \mathbb{C}$:

- Suponga que $r \in \mathbb{R}$ es tal que $|z| < r < \alpha$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

  $$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| > r, \quad \forall n \geq N$$

  (pues, el límite converge a α). Sea $B = |a_n| r^N$. Entonces:

  $$\begin{aligned} |a_{N+1}| r^{N+1} &= |a_{N+1}| r r^N \\ &< |a_N| r^N \\ &= B \end{aligned}$$

  por inducción se prueba rápidamente que:

  $$|a_n r^n| \leq B, \quad \forall n \geq N$$

  Entonces:

  $$\begin{aligned} |a_n z^n| &= |a_n r^n| \cdot \frac{|z^n|}{r^n} \\ &= B \cdot \frac{|z|^n}{r^n}, \quad \forall n \geq N \end{aligned}$$

  Como $|z| < r$, entonces $\frac{|z|}{r} < 1$. Por lo cual la serie

  $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

  es absolutamente convergente para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < \alpha$. Por (1) del Teorema anterior, debe suceder que $\alpha \leq R$.

- Un procedimiento análogo al anterior pero con $|z| > \alpha$ prueba que la serie

  $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

  no converge para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\alpha < |z|$. Por ende, $R \leq \alpha$

Por los dos incisos anteriores se sigue que $\alpha = R$. ■

Ejemplo 2.1.2
La serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

tiene radio de convergencia $R = \infty$.

Demostración:
En efecto, veamos que:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} \\ &= \lim_{n\to\infty} (n+1) \\ &= \infty \end{aligned}$$

por lo cual, $R = \infty$. ■

Definición 2.1.4
Se define la **función exponencial**, como la función $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por:

$$z \mapsto e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

por la parte anterior, esta serie es absolutamente convergente en $\mathbb{C}$, por lo que la función exp está bien definida.

Proposición 2.1.3
Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dos series absolutamente convergentes, y sea

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

entonces, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ es absolutamente convergente, y:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

Demostración:
Ejercicio. ■

2.2. Funciones Analíticas

Se definen las funciones analíticas y se dan algunos ejemplos.

Definición 2.2.1
Sea $G \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $f : G \to \mathbb{C}$ una función. Entonces, f es **diferenciable en** $a \in G$, si el límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe; el valor de este límite es denotado por $f'(a)$ y es llamado la **derivada de** f **en** a. Si f es diferenciable en todo punto de G, decimos que f es **diferenciable en** G.

Puede entonces definirse una función $f' : G' \subseteq G \to \mathbb{C}$, donde $G' \subseteq G$ es el conjunto de puntos donde f es diferenciable. En caso de que f sea diferenciable en todo G, se sigue que $G' = G$.

Si f' es continua, decimos que f es **diferenciable continua**. Si f' es diferenciable, decimos que f es **dos veces diferenciable**, continuando, una función f tal que cada derivada sucesiva es diferenciable se dice **infinitamente diferenciable**.

Proposición 2.2.1
Si una función $f : G \to \mathbb{C}$ es diferenciable en $a \in G$, entonces f es continua en a.

Demostración:
Veamos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to a}|f(z)-f(a)| &= \lim_{z\to a}\left(\frac{|f(z)-f(a)|}{|z-a|}\cdot|z-a|\right)\\
&= \lim_{z\to a}\left(\frac{|f(z)-f(a)|}{|z-a|}\right)\cdot\lim_{z\to a}|z-a|\\
&= \left|\lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\right|\cdot 0\\
&= |f'(a)|\cdot 0\\
&= 0
\end{aligned}$$

lo cual prueba el resultado. ■

Definición 2.2.2
Una función $f: G\to\mathbb{C}$ es **analítica** si es diferenciable continua en G.

Se sigue rápidamente (como en cálculo), que las sumas y productos de funciones analíticas siguen siendo analíticas. Si f y g son analíticas en G y G_1 es el conjunto de puntos donde g no es cero, entonces f/g es analítica en G_1.

Como la función constante y z son analíticas, se sigue que todas las funciones racionales son analíticas en el complemento de los ceros del denominador.

Más aún, todas las leyes de diferenciación de sumas, productos y cocientes siguen siendo válidas.

Teorema 2.2.1 (Regla de la Cadena)
Sean f, g funciones analíticas en G y Ω, respectivamente y suponga que $f(G)\subseteq\Omega$. Entonces, $f\circ g$ es analítica en G y:

$$(g\circ f)'(z) = g'(f(z))\cdot f'(z),\quad \forall z\in G$$

Demostración:
Sea $z_0\in G$. Como G es abierto, existe $r>0$ tal que

$$\left\{|z_0-z|<r\middle|z\in\mathbb{C}\right\}\subseteq G$$

para probar que el límite

$$\lim_{h\to 0}\frac{g\circ f(z_0+h)-g\circ f(z_0)}{h}$$

existe, basta con mostrar que para toda sucesión $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ que converja a 0 se cumple que el límite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g\circ f(z_0+h_n)-g\circ f(z_0)}{h_n}$$

existe y es igual a $g'(f(z_0))\cdot f'(z_0)$. En efecto, sea $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión que converge a 0, podemos asumir que:

$$0<|h_n|<r,\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Haremos la prueba por casos:

Caso 1: Suponga que $f(z_0)\neq f(z_0+h_n)$ para todo $n\in\mathbb{N}$. En este caso:

$$\frac{g\circ f(z_0+h_n)-g\circ f(z_0)}{h_n}=\frac{g\circ f(z_0+h_n)-g\circ f(z_0)}{f(z_0+h_n)-f(z_0)}\cdot\frac{f(z_0+h_n)-f(z_0)}{h_n}$$

por ser f continua, se sigue que:

$$\lim_{n\to\infty} f(z_0+h_n)-f(z_0)=0$$

por lo que, al tomar límite cuando $n\to\infty$ se obtiene que:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g\circ f(z_0+h_n)-g\circ f(z_0)}{h_n}=g'(f(z_0))\cdot f'(z_0)$$

Caso 2: $f(z_0)=f(z_0+h_n)$ para todo $n\in J\subseteq\mathbb{N}$, donde J es un conjunto infinito.

■

Definición 2.2.3
Una función compleja f se dirá **analítica en** $A\subseteq\mathbb{C}$, si existe $G\subseteq\mathbb{C}$ tal que f es analítica en G y $A\subseteq G$.

En lo que sigue de este curso, se hará el mayor esfuerzo para ver porqué la teoría de las funciones analíticas es MUY diferente del cálculo tradicional.

Proposición 2.2.2
Sea $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R>0$. Entonces:

(1) Para cada $k\geq 1$, la serie:

$$\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-a)^{n-k} \tag{2.1}$$

tiene radio de convergencia $R>0$.

(2) La función f es infinitamente diferenciable en $B(a,R)$ y más aún, $f^{(k)}$ está dada por la serie en la ecuación (2.1).

(3) Para todo $n\geq 0$:

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)$$

Demostración:
Podemos asumir que $a=0$, ya que la función $z\mapsto z-a$ es diferenciable en $\mathbb{C}$.

De *(a)*: Basta probar el caso con $k=1$, ya que por inducción se sigue rápidamente que se cumple para todo $k\geq 1$. Probaremos que el radio de convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_nz^{n-1}$$

es R. Para ello, recordemos que como $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$ tiene radio de convergencia R, se tiene:

$$\frac{1}{R}=\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}$$

queremos probar que:

$$\frac{1}{R}=\limsup_{n\to\infty}|na_n|^{1/n-1}$$

veamos que el límite $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n-1}}$ existe, pues se tiene que:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n-1} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\\ &= 0\\ \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\ln\left(n^{\frac{1}{n-1}}\right) &= 0\end{aligned}$$

al ser $x\mapsto \ln x$ una función continua, se sigue que:

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n-1}} = 1$$

Del ejercicio (2.3.3) se sigue que:

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}|na_n|^{\frac{1}{n-1}} &= 1\cdot\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n-1}}\\ &= \limsup_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n-1}}\end{aligned}$$

veamos que el límite superior anterior es $\frac{1}{R}$. Sea $R'>0$ tal que:

$$s$$

■

2.3. Ejercicios

Ejercicio 2.3.1
Pruebe que si $z_1,z_2\in\mathbb{C}$, entonces:

$$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_1}$$

Demostración:
En efecto, veamos que:

$$\begin{aligned}e^{x+iz_2} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_1+z_2)^n}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z_1^kz_2^{n-k}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n!}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}z_1^kz_2^{n-k}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{z_1^k}{k!}\cdot\frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!}\end{aligned}$$

donde, recordemos que:

$$e_1^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_1^n}{n!}\quad\text{y}\quad e^{z_2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_2^n}{n!}$$

por tanto, de la Proposición 2.1.3 se sigue que:

$$e^{z_1+z_2}=e_1^ze^{z_2}$$

■

Ejercicio 2.3.2
Pruebe que

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

donde $z = x + iy$.

Demostración:
Sea $z \in \mathbb{C}$. Se tiene que:

$$e^z = e^x e^{iy}$$

Veamos que:

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

■

Ejercicio 2.3.3
Pruebe que si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ son dos sucesiones de números no negativos tales que $0 \leq b = \lim_{n\to\infty} b_n$ y $a = \limsup_{n\to\infty} a_n$, entonces:

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$$

Demostración:
Antes, notemos que al tenerse:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = a$$

se tiene que el siguiente límite existe:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right)$$

por tanto, la sucesión $\left\{\sup_{k\geq n} a_k\right\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada. Así que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que el supremo:

$$\sup_{k\geq n} a_k$$

existe. Veamos ahora que:

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) &= \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} a_k b_k\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\left(\sup_{k\geq n} a_k\right)\left(\sup_{k\geq n} b_k\right)\right) \end{aligned}$$

donde el supremo se puede separar ya que ambos supremos existen y ser las dos sucesiones acotadas y de números no negativos. Por ende:

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) &= \lim_{n\to\infty}\left(\left(\sup_{k\geq n} a_k\right)\left(\sup_{k\geq n} b_k\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right)\cdot \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} b_k\right) \\
&= \left(\limsup_{n\to\infty} a_n\right)\cdot\left(\limsup_{n\to\infty} b_n\right) \\
&= \left(\limsup_{n\to\infty} a_n\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) \\
&= ab
\end{aligned}$$

■

Bibliografía

- A. Markusevich, *Teoría de las funciones analíticas*, Ed. Mir Moscu.
-
- J. Conway, *Complex Analysis*, Ed. Mir Moscu.