

Grupos Topológicos

Cristo Daniel Alvarado

30 de agosto de 2024

Índice general

1. Elementos de la teoría de grupos topológicos	2
1.1. Preliminares	2
1.1.1. Grupos Ordenados	11
1.1.2. Grupos Booleanos	12
1.2. Homomorfismos e isomorfismos	12
1.3. Subgrupos topológicos y grupo cociente	13
1.4. Grupos cocientes	17
1.5. Productos Directos	23
1.6. Cardinales invariantes elementales	25
1.7. Metrizabilidad	28

Capítulo 1

Elementos de la teoría de grupos topológicos

1.1. Preliminares

Definición 1.1.1

Sea G un conjunto no vacío dotado de una operación binaria (denotada por \cdot) y una familia τ de subconjuntos de G . G es llamado **grupo topológico** si

1. (G, \cdot) es un grupo.
2. (G, τ) es un espacio topológico.
3. Las funciones $g_1 : (G, \tau) \times (G, \tau) \rightarrow (G, \tau)$ y $g_2 : (G, \tau) \rightarrow (G, \tau)$ dadas por $(x, y) \mapsto x \cdot y$ y $x \mapsto x^{-1}$, respectivamente, son continuas, siendo x^{-1} el inverso de x en G .

Se denotará a la operación \cdot por yuxtaposición, es decir $x \cdot y = xy$.

Observación 1.1.1

Una equivalencia de la condición (3) de la proposición anterior es la siguiente:

Sea G un grupo topológico. Denotamos por $\mathcal{N}(x)$ a **la familia de todas las vecindades de $x \in G$** . 3) es equivalente a

4. Si $x, y \in G$, entonces para cada $U \in \mathcal{N}(xy)$ existen vecindades $V \in \mathcal{N}(x)$ y $W \in \mathcal{N}(y)$ tales que $V \cdot W \subseteq U$, donde

$$V \cdot W = \{vw \mid v \in V \text{ \& } w \in W\}$$

y, para cada $U \in \mathcal{N}(x^{-1})$ existe $V \in \mathcal{N}(x)$ tal que $V^{-1} \subseteq U$, siendo

$$V^{-1} = \{v^{-1} \mid v \in V\}$$

esta equivalencia es inmediata de la definición de continuidad de una función en un espacio topológico.

Observación 1.1.2

El símbolo e_G denotará siempre a la identidad de un grupo G .

Con frecuencia se referirá al grupo topológico G , con operación binaria \cdot y topología τ como la terna (G, \cdot, τ) . Si no hay ambigüedad, se denotará simplemente por G .

Lema 1.1.1

Sean (G, \cdot) un grupo, y τ una topología en G . Entonces, (G, \cdot, τ) es un grupo topológico si y sólo si la función

$$g_3 : (G, \tau) \times (G, \tau) \rightarrow (G, \tau) \\ (x, y) \mapsto xy^{-1}$$

es continua.

Demostración:

\Rightarrow) : Suponga que G es un grupo topológico, entonces las funciones g_1 y g_2 son continuas (por la condición 3) de la definición anterior). Notemos que

$$g_3 = g_1(x, g_2(y)), \quad \forall x, y \in G$$

por ende, g_3 es continua.

\Leftarrow) : Suponga que la función g_3 es continua. Notemos que

$$g_2(x) = g_3(x, e_G), \quad \forall x \in G$$

por ser g_3 continua, se sigue que g_2 también lo es. Además

$$g_1(x, y) = g_3(x, g_2(y)), \quad \forall x, y \in G$$

por lo cual, g_1 también es continua. Por tanto, G es grupo topológico. ■

Una de las primeras ventajas que surgen en el estudio de los grupos topológicos es que, ciertas propiedades locales se vuelven globales desde el punto de vista de la topología.

Teorema 1.1.1

Sea G un grupo topológico. Si $g \in G$ es un elemento fijo arbitrario, entonces las funciones $\varphi_g(x) = xg$ y $\sigma_g(x) = gx$, para todo $x \in G$, de G en G , son homeomorfismos. La inversión $f : G \rightarrow G$, definida por $f(y) = y^{-1}$, también es un homeomorfismo. Las funciones φ_g y σ_g son llamadas **traslaciones por la derecha e izquierda**, respectivamente.

Demostración:

Por la definición de grupo topológico, las funciones φ_g , σ_g y f son continuas. Veamos que son homeomorfismos de G en G .

1. Veamos que φ_g es inyectiva. Si $a, b \in G$ son tales que $\varphi_g(a) = \varphi_g(b)$, entonces $ag = bg \Rightarrow a = b$, con lo que se tiene el resultado.

Además es suprayectiva, pues para cada $b \in G$ existe $g^{-1}b \in G$ tal que $\varphi_g(bg^{-1}) = b$.

Luego, φ es homeomorfismo de G , con inversa $\varphi_{g^{-1}}$. Además es homomorfismo.

2. Para σ_g el caso es similar a φ_g .
3. Para f el resultado es inmediato, pues es biyectiva, homomorfismo y su inversa es ella misma. ■

Los resultados siguientes nos permitirán estudiar las propiedades topológicas locales de un grupo topológico G en un solo punto, que por simplificar siempre tomaremos como la identidad e_G del grupo.

Corolario 1.1.1

Todo grupo topológico G es un espacio homogéneo.

Demostración:

Debemos probar que dados dos elementos arbitrarios del grupo topológico G , digamos $g, h \in G$, existe un homeomorfismo de G sobre sí mismo tal que manda un elemento en el otro. Por el teorema anterior, tomando como homeomorfismo a $\varphi_{g^{-1}h}$ se tiene el resultado, pues $\varphi_{g^{-1}h}(g) = h$. ■

Como en grupos y espacios topológicos, nos interesan las funciones que preservan las propiedades entre éstos. Por lo cual se estudiarán los siguientes tipos de funciones:

Definición 1.1.2

Decimos que una función biyectiva $f : G \rightarrow G'$ entre dos grupos topológicos G y G' es un **isomorfismo topológico** si f y f^{-1} son homomorfismos continuos.

Si $G = G'$, el isomorfismo f se llama **automorfismo topológico**. Dos grupos topológicos son **topológicamente isomorfos** si existe un isomorfismo topológico de uno al otro. Utilizaremos el símbolo $G \cong H$ para indicar que los grupos G y H son topológicamente isomorfos.

El objetivo del siguiente teorema es ver que un grupo topológico no abeliano admite muchos automorfismos.

Teorema 1.1.2

Si G es un grupo topológico y $a \in G$ está fijo, entonces la función $g(x) = axa^{-1}$ es un automorfismo topológico.

Demostración:

Observemos que $g(x) = \sigma_a(\varphi_a^{-1}(x))$, donde las dos funciones de la composición definidas como en el teorema anterior son homeomorfismos, y por ende g lo es. Además g es homomorfismo ya que

$$g(xy) = axya^{-1} = (axa^{-1})(aya^{-1}) = g(x)g(y)$$

el cual es invertible, con inversa $f(x) = a^{-1}xa$. ■

Observación 1.1.3

En el caso de que el grupo G sea abeliano, el automorfismo topológico G definido en el teorema anterior, es trivial ya que coincide con la identidad.

El siguiente resultado tiene como objetivo el describir la topología del grupo, que en este caso resulta más sencillo que describir la topología de un espacio topológico. Para ello, basta describir una base local para la identidad del grupo e_G .

Lema 1.1.2

Sea G un grupo topológico, y sea $\mathcal{N}(e_G)$ una base local para la identidad del grupo e_G . Entonces las familias $\{xU\}$ y $\{Ux\}$, donde x toma los valores en los elementos de G y U varía sobre todos los elementos de $\mathcal{N}(e_G)$, son bases para la topología de G .

Demostración:

Sea W un abierto no vacío de G y $a \in G$ un elemento de W . Probaremos que existe un elemento \hat{U} de alguna de las familias descritas anteriormente tal que

$$a \in \hat{U} \subseteq W$$

Considere la función $f : G \rightarrow G$, $x \mapsto a^{-1}x$. Esta función es un homeomorfismo, el cual transforma a W en $a^{-1}W$. Notemos que $e_G \in a^{-1}W$, pues el elemento $e_G = a^{-1}a \in a^{-1}W$. Como $\mathcal{N}(e_G)$ es una base local de e_G , entonces existe $U \in \mathcal{N}(e_G)$ tal que

$$e_G \in U \subseteq a^{-1}W$$

Por lo cual

$$a \in aU \subseteq aa^{-1}W = W$$

Por tanto, tomando $\hat{U} = aU$ se tiene el resultado para la primera familia. Para la segunda se procede de forma análoga cambiando el orden del producto en la función f . ■

El siguiente lema nos proporciona una base local para la identidad formada por vecindades tales que $V^{-1} = V$. Estas vecindades reciben el nombre de **simétricas**.

Lema 1.1.3

Sea G un grupo topológico y $U \in \mathcal{N}(e_G)$, entonces existe $V \in \mathcal{N}(e_G)$ tal que $V^{-1} = V \subseteq U$. Por lo tanto, las vecindades simétricas de la identidad constituyen una base local de e_G .

Demostración:

Sean $U \in \mathcal{N}(e_G)$ y $f : G \rightarrow G$, $x \mapsto x^{-1}$. Como f es un homeomorfismo de G sobre G , entonces $f(U) = U^{-1}$ es abierto y $e_G \in U^{-1}$. Por lo cual $V = U \cap U^{-1}$ es abierto y $V^{-1} = V$ es tal que $e_G \in V \subseteq U$. ■

En lo sucesivo denotaremos por $\mathcal{N}^*(e_G)$ a la base local de vecindades de e_G que son abiertas y simétricas en un grupo topológico G .

Otra propiedad importante de la identidad del grupo topológico G , es que admite una base local formada por subconjuntos cerrados.

Lema 1.1.4

Sea G grupo topológico.

1. Si $U \in \mathcal{N}(e_G)$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}^+$ existe $V \in \mathcal{N}(e_G)$ con $V^n \subseteq U$, donde

$$V^n = \underbrace{V \cdots V}_{n\text{-veces}}$$

2. Si $U \in \mathcal{N}(e_G)$, entonces existe $V \in \mathcal{N}(e_G)$ con $\bar{V} \subseteq U$. En particular, las vecindades cerradas de e_G constituyen una base local de la identidad e_G cuyos elementos son subconjuntos cerrados.

Demostración:

De 1): Procederemos por inducción sobre n . Para $n = 1$ el resultado es inmediato, pues tomando $V = U$ se sigue el resultado.

Suponga el resultado cierto para algún $n \in \mathbb{N}^+$, entonces para U existe $W \in \mathcal{N}(e_G)$ tal que $W^n \subseteq U$. Como la multiplicación es continua $g_1(x, y) = xy$, y $g_1(e_G, e_G) = e_G$, entonces para W existen vecindades $V_1, V_2 \in \mathcal{N}(e_G)$ tales que $f(V_1 \times V_2) = V_1 \cdot V_2 \subseteq W$. Tomemos $V = V_1 \cap V_2$, claro que $e_G \in V$, por lo cual $V \in \mathcal{N}(e_G)$ y, además:

$$V^{n+1} = V \cdot V \cdot V^{n-1} \subseteq V_1 \cdot V_2 \cdot W^{n-1} \subseteq W \cdot W^{n-1} = W^n \subseteq U$$

Aplicando inducción se sigue el resultado.

De 2): Por 1) y por el hecho de que $\mathcal{N}^*(e_G)$ es una base local de e_G , existe $V \in \mathcal{N}^*(e_G)$ tal que $V^2 \subseteq U$. Si $x \in \bar{V}$, entonces como xV es una vecindad de x , la intersección $xV \cap V \neq \emptyset$ (pues x está en la adherencia de V), es decir, existen $v_1, v_2 \in V$ tales que

$$xv_1 = v_2 \Rightarrow x = v_2v_1^{-1} \in V \cdot V^{-1} = V^2 \subseteq U$$

Por ende, $\bar{V} \subseteq U$. ■

Teorema 1.1.3

Sea G un grupo topológico, $a \in G$ y A, B, O, M subconjuntos de G . Entonces

1. Si O es abierto, entonces los conjuntos aO, Oa, O^{-1}, MO y OM son abiertos.
2. Si A es cerrado, entonces aA, Aa, A^{-1} son conjuntos cerrados.
3. Si A y B son compactos, también lo son AB y A^{-1} .
4. Se cumple que

$$\bar{A} = \bigcap_{W \in \mathcal{N}(e_G)} AW = \bigcap_{W \in \mathcal{N}(e_G)} WA$$

Demostración:

De 1): Por el teorema 1.1.1, φ_a, σ_a y $f(x) = x^{-1}$ son homeomorfismos, para cualquier $a \in G$ fijo. Por lo tanto, si O es abierto, entonces la imagen directa de O bajo estas funciones (es decir, los conjuntos aO, Oa, O^{-1}) son abiertos. Para los dos últimos conjuntos, basta ver que

$$\begin{aligned} MO &= \bigcup \{mO \mid m \in \mathbb{M}\} \\ OM &= \bigcup \{Om \mid m \in \mathbb{M}\} \end{aligned}$$

por ser uniones arbitrarias de abiertos, los conjuntos MO y OM son abiertos.

De 2): Es análogo a 1), usando el hecho de que los homomorfismos son aplicaciones cerradas.

De 3): Notemos que $A \times B$ es compacto en el espacio topológico producto $G \times G$, por lo cual al ser $g_1 : G \times G \rightarrow G, (x, y) \mapsto xy$ una función continua, se sigue que la imagen de este compacto $f(A \times B) = AB$ es compacto. De forma similar con A^{-1} con la función $f(x) = x^{-1}$ se obtiene que A^{-1} es compacto.

De 4): Nuestro objetivo será intentar caracterizar a AW y WA (donde $W \in \mathcal{N}(e_G)$) antes de ver los elementos de la intersección. Sea $W \in \mathcal{N}(e_G)$, entonces existe un abierto $V \in \mathcal{N}^*(e_G)$ tal que $V \subseteq W$. Por 1) el producto AV es abierto y $A \subseteq AV$ (pues $e_G \in V$).

Además, $\bar{A} \subseteq AW$, pues si $x \in \bar{A}$, entonces xV es una vecindad de x y por lo tanto $xV \cap A \neq \emptyset$, así existen $v \in V$ y $a \in A$ tales que $xv = a \Rightarrow x = av^{-1} \in AV^{-1} = AV \subseteq AW$. Como el W fue arbitrario, se sigue que

$$\bar{A} \subseteq \bigcap_{W \in \mathcal{N}(e_G)} AW$$

(de forma análoga con $\bigcap_{W \in \mathcal{N}(e_G)} WA$). Ahora, sean $x \in \bigcap_{W \in \mathcal{N}(e_G)} AW$ y $V \in \mathcal{N}(x)$. Debemos probar que $V \cap A \neq \emptyset$ (con ello, se tendría que $x \in \bar{A}$). Se tiene que $x^{-1}V \in \mathcal{N}(e_G)$ y, por ende $V^{-1}x \in \mathcal{N}(e_G)$.

Por tanto, como $x \in \bigcap_{W \in \mathcal{N}(e_G)} AW$ en particular $x \in AV^{-1}x$, así existen $a \in A$ y $v \in V$ tales que $x = av^{-1}x$, es decir $a = v \in V$ y $a \in A$, por lo cual $a \in A \cap V$. Por tanto, $A \cap V \neq \emptyset$. ■

Como ya se sabe que todo grupo topológico es un espacio homogéneo, para verificar propiedades locales del grupo (tales como la conexidad local, compacidad local, carácter numerable, etc...), basta con verificar la propiedad en la identidad del grupo. Una de éstas propiedades es la T_3 .

Lema 1.1.5

Todo grupo topológico G cumple las propiedades siguientes:

1. G es un espacio T_3 .
 2. Si $A \subseteq G$ es compacto y $B \subseteq G$ cerrado, entonces AB y BA son cerrados.
-

Demostración:

De 1): Se debe probar que G es un espacio regular, es decir, hay que probar que G es T_1 y que para todo $x \in G$ y toda vecindad V de x existe una vecindad U de x tal que $\overline{U} \subseteq V$. Esto es inmediato del lema 1.1.4 2).

De 2). Probaremos que BA es cerrado. Para ello, se probará que $G \setminus BA$ es abierto. Sea $a \in G \setminus BA$. Para cada $x \in A$, el conjunto Bx es cerrado (por ser B cerrado), así que existen vecindades $U_x, V_x \in \mathcal{N}^*(e_G)$ con $aU_x \cap Bx = \emptyset$ y $V_x^2 \subseteq U_x$. Por ello, $aV_x \cap BxV_x = \emptyset$.

Ahora, como $xV_{xx \in A}$ es una cubierta abierta de A , al ser A compacto existen $x_1, \dots, x_n \in A$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^n x_i V_{x_i}$$

Sea

$$W = \bigcap_{i=1}^n x_i V_{x_i}$$

Este conjunto es abierto y simétrico, y además $aW \cap BxV_{x_i} = \emptyset$ para todo $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Por tanto, $aW \cap BA = \emptyset$. Así que aW es una vecindad de a ajena a BA . De forma análoga se prueba que BA es cerrado. ■

Ejemplo 1.1.1

Sea G un grupo no trivial dotado de la topología indiscreta. Entonces G es un grupo topológico que no es ni T_0 ni T_1 (en esta topología solo hay dos conjuntos: \emptyset y G).

Ahora, si tenemos un grupo topológico que es T_0 esto es equivalente a que sea T_1 . En efecto, supongamos que es T_0 y sean $x_1, x_2 \in G$ elementos distintos. Como es T_0 existe $U \subseteq G$ abierto que contiene a e_G ó $x_1x_2^{-1}$. Si $e_G \in U$, entonces existe $V \in \mathcal{N}^*(e_G)$ tal que $V \subseteq U$, en particular $e_G \in V$ y $x_1x_2^{-1} \notin V$, por lo cual $x_2, x_1^{-1} \notin V$, luego Vx_2 es un abierto que contiene a x_2 y no a x_1 , y Vx_1 es un abierto x_1 que contiene a x_1 pero no a x_2 .

Si $x_1x_2^{-1} \in U$, entonces $W = Ux_2x_1^{-1} \in \mathcal{N}(e_G)$, y $x_1x_2 \notin W$. Haciendo lo análogo a lo anterior, se llega al resultado. Por tanto, la propiedad de ser T_0 y T_1 en un grupo topológico G son equivalentes.

De esta forma, todo grupo que sea T_0 es automáticamente un espacio regular, y más aún, es Hausdorff.

De ahora en adelante sólo se considerarán grupos topológicos T_0 (en automático, esto serán espacios regulares). Más adelante se probará que todo grupo T_0 es Tikhonov.

Observación 1.1.4

En todo grupo topológico que sea un espacio T_0 se tiene que el conjunto e_G es cerrado.

Demostración:

En efecto, sea G un grupo topológico con las propiedades anteriores. Considere:

$$A = \bigcap_{U \in \mathcal{N}(e_G)} \overline{U}$$

Claro que $e_G \in A$. Suponga que existe $a \in A$ tal que no es la identidad del grupo topológico, como G es T_1 existe V abierto tal que $e_G \in V$ pero $a \notin V$. Como la cerradura de los elementos de $\mathcal{N}(e_G)$ forman una base local para e_G , existe $U_0 \in \mathcal{N}(e_G)$ tal que $\overline{U_0} \subseteq V$. Por tanto, $a \notin \bigcap_{U \in \mathcal{N}(e_G)} \overline{U}$ pues $a \notin \overline{U_0} \#_c$. Luego $A = \{e_G\}$, pero A es cerrado por ser intersección arbitraria de cerrados. Por tanto, el conjunto unipuntual $\{e_G\}$ es cerrado (más aún, el conjunto $\{x\}$ es cerrado, para todo $x \in G$). ■

En los grupos topológicos, los subespacios compactos tienen propiedades similares a las de los puntos en relación con las condiciones de separación:

Teorema 1.1.4

Sea G un grupo topológico, $K \subseteq U \subseteq G$, U abierto y K compacto. Entonces, existe $W \in \mathcal{N}(e_G)$ con la siguiente propiedad:

$$K \subseteq KW \subseteq U$$

Demostración:

Para cada $x \in K$ existe $V_x \in \mathcal{N}(e_G)$ con $xV_x \subseteq U$. Además, existe $W_x \in \mathcal{N}(e_G)$ tal que $W_x^2 \subseteq V_x$.

Como K es compacto, y $K \subseteq \bigcup_{x \in K} xW_x$, entonces existen $x_1, \dots, x_n \in K$ tales que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^n x_i W_{x_i}$$

Sea $W = \bigcap_{i=1}^n W_{x_i}$. El conjunto W es una vecindad abierta de e_G y, por ende $K \subseteq KW$.

Si $x \in K$, entonces por la contención anterior se sigue que existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tal que $x \in x_i W_{x_i}$. Así:

$$xW \subseteq x_i W_{x_i} W \subseteq x_i W_{x_i} W_{x_i} \subseteq x_i V_{x_i} \subseteq U$$

es decir, $KW \subseteq U$. ■

El siguiente teorema tiene como objetivo el resumir varias de las propiedades obtenidas anteriormente para la familia $\mathcal{N}(e_G)$; de hecho esta familia se caracteriza completamente. Esta propiedad es una de las que distinguen a los grupos topológicos de los espacios topológicos arbitrarios. Además, dicho teorema nos proporciona un método para definir topologías de grupos topológicos.

Teorema 1.1.5

Sea G un grupo topológico de Hausdorff. Existe una base local \mathcal{V} para e_G tal que cumple las siguientes condiciones:

1. $\bigcap \mathcal{V} = \{e_G\}$.
2. Si U, V son dos elementos arbitrarios de \mathcal{V} , entonces existe $W \in \mathcal{V}$ tal que $W \subseteq U \cap V$.
3. Para cada $U \in \mathcal{V}$ existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $VV^{-1} \subseteq U$.
4. Para cada $U \in \mathcal{V}$ y para cada $x \in U$ existe $V \in \mathcal{V}$ con $xV \subseteq U$.
5. Para cada $U \in \mathcal{V}$ y $a \in G$ existe $W \in \mathcal{V}$ con $aWa^{-1} \subseteq U$.

Recíprocamente, si tenemos un grupo G y una familia \mathcal{V} no vacía de subconjuntos de G que contienen a e_G , tales que satisfacen las condiciones de (1) a (5) para \mathcal{V} , entonces cada una de las familias $\{xU \mid U \in \mathcal{V}, x \in G\}$ y $\{Ux \mid U \in \mathcal{V}, x \in G\}$ es base para una topología de grupo τ para G . Además, \mathcal{V} es una base local para e_G en (G, τ) .

Demostración:

\Rightarrow): Sea G un grupo topológico **Hasdorff** (de forma inmediata es un espacio T_0 y, por ende es un espacio regular). Considere la familia:

$$\mathcal{V} = \{V \cap V^{-1} \mid V \in \mathcal{N}(e_G)\}$$

es inmediato que \mathcal{V} cumple las condiciones (1) y (2) (por la observación 1.1.4 y la otra por ser \mathcal{V} una base local de e_G). Para probar (3), sea $U \in \mathcal{V}$. Por un lema anterior existe $V \in \mathcal{N}(e_G)$ tal que $V^2 \subseteq U$; entonces $W = V \cap V^{-1}$ pertenece a \mathcal{V} , y se tiene que $W^{-1} = W$ y $WW^{-1} = W^2 \subseteq V^2 \subseteq U$.

Para (4), sean $U \in \mathcal{V}$ y $x \in U$. Como la multiplicación es una operación continua y $xe_G = x$, existen vecindades abiertas V_x y W de x y e_G respectivamente, tales que $V_x W \subseteq U$. El conjunto $V = W \cap W^{-1}$ pertenece a \mathcal{V} y se cumple que $xV \subseteq V_x W \subseteq U$.

Para (5), si $a \in G$ y $U \in \mathcal{V}$, como $aa^{-1} = ae_Ga$ y por ser continua la multiplicación, existen vecindades abiertas $W_a, V, W_{a^{-1}}$ de a, e_G y a , respectivamente tales que

$$W_a V W_{a^{-1}} \subseteq U$$

entonces, $W = V \cap V^{-1}$ pertenece a \mathcal{V} , y $aW a^{-1} \subseteq W_a V W_{a^{-1}} \subseteq U$.

\Leftarrow): Sea \mathcal{V} una familia de subconjuntos de G que satisfacen las condiciones (1) a (5) del teorema. Debemos probar que

$$\mathcal{B} = \{xU \mid U \in \mathcal{V}, x \in G\}$$

es una base para una topología de grupo τ en G . Sea τ la familia de subconjuntos de G que son uniones arbitrarias de subconjuntos de \mathcal{B} , es decir $U \in \tau$ si y sólo si $U = \bigcup \mathcal{A}$, donde \mathcal{A} es una subfamilia de \mathcal{B} .

Se tienen que verificar dos condiciones:

1. Sean $x_1, x_2 \in G$ y $U_1, U_2 \in \mathcal{V}$. Si $x_3 \in x_1 U_1 \cap x_2 U_2$, entonces $x_1^{-1} x_3 \in U_1$ y $x_2^{-1} x_3 \in U_2$, por (4) existen $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ tales que

$$\begin{aligned} x_1^{-1} x_3 V_1 &\subseteq U_1 \\ x_2^{-1} x_3 V_2 &\subseteq U_2 \end{aligned}$$

por ende,

$$\begin{aligned} x_3 V_1 &\subseteq x_1 U_1 \\ x_3 V_2 &\subseteq x_2 U_2 \end{aligned}$$

Tomemos $U_3 \in \mathcal{V}$ tal que $U_3 \subseteq V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}$ (lo cual se puede por la condición (2)). Luego, $x_3 U_3 \subseteq x_3 V_1 \cap x_3 V_2 \subseteq x_1 U_1 \cap x_2 U_2$.

2. Sea $x \in G$. Si $U \in \mathcal{V}$ entonces $x \in xU$, por lo cual:

$$G = \bigcup_{x \in G} xU$$

por las dos condiciones anteriores, se sigue que \mathcal{B} es una base para la topología τ definida anteriormente.

Ahora, probemos que \mathcal{V} es base local para e_G . Sea $U \in \tau$ tal que $e_G \in U$. Como $U \in \tau$ entonces podemos escribir:

$$U = \bigcup \mathcal{A}$$

donde \mathcal{A} es una subfamilia de \mathcal{B} . Entonces por estar en la unión, existe $x \in G$ y $V \in \mathcal{V}$ tal que $e_G \in xV \subseteq U$. En particular, $x^{-1} \in V$, luego por (4) podemos encontrar $W \in \mathcal{V}$ tal que $x^{-1}W \subseteq V$, es decir $W \subseteq xV$. Pero $e_G \in W$, por ende:

$$e_G \in W \subseteq xV \subseteq U$$

Luego, \mathcal{V} es una base local de e_G .

Ahora probaremos que τ es una topología del grupo G . Para ello hay que ver que la función $(a, b) \mapsto ab^{-1}$ es continua. Sean $a, b \in G$ y U una vecindad de ab^{-1} . De la condición (4) existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $ab^{-1}V \subseteq U$, y por (5) y (3) existen $W_1, W_2 \in \mathcal{V}$ tales que $bW_1b^{-1} \subseteq V$ y $W_2W_2^{-1} \subseteq W_1$.

Entonces, aW_2 y bW_2 son vecindades de los puntos a y b para las cuales se tiene que

$$\begin{aligned} (aW_2)(bW_2)^{-1} &= aW_2W_2^{-1}b^{-1} \\ &\subseteq aW_1b^{-1} \\ &\subseteq ab^{-1}(bW_1b^{-1}) \\ &\subseteq ab^{-1}(bW_1b^{-1}) \\ &\subseteq ab^{-1}V \\ &\subseteq U \end{aligned}$$

lo cual prueba que la operación considerada es continua.

Para terminar la demostración, hay que ver que la familia:

$$\{Ux \mid x \in G, U \in \mathcal{V}\}$$

es también una base para la topología τ . Sean $a \in G$ y $U \in \tau$ tales que $a \in U$. Por (4) existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $aV \subseteq U$, y por (5) existe $W \in \mathcal{V}$ tal que $a^{-1}Wa \subseteq V$. Entonces:

$$a \in Wa \subseteq aV \subseteq U$$

lo cual prueba que la familia es una base para la topología τ , terminando así la prueba. ■

De un lema anterior sabemos que si $A, B \subseteq G$ con G grupo topológico, A compacto y B cerrado, entonces AB y BA son cerrados. La hipótesis de que A sea compacto no es imprescindible.

Ejemplo 1.1.2

Sea G un grupo arbitrario con la topología discreta, es decir, aquella formada por todos los subconjuntos de G ; entonces G forma un grupo topológico llamado **grupo discreto**.

Ejemplo 1.1.3

Cualquier grupo G con la topología indiscreta, es decir, aquella que consiste únicamente en el conjunto vacío y G mismo, es un grupo topológico. Éste no es un grupo topológico T_0 si G contiene más de un elemento.

Ejemplo 1.1.4

El conjunto de los números reales \mathbb{R} con su topología y operación de suma usuales es un grupo topológico.

Ejemplo 1.1.5

En el grupo aditivo de los números enteros, $(\mathbb{Z}, +)$, definiremos varias topologías de grupo:

1. Sea $p \in \mathbb{Z}$ un número primo fijo y para cada $k \in \mathbb{N}$ sea $U_k = p^k \mathbb{Z}$; entonces la familia $\mathcal{V} = \{U_k | k \in \mathbb{N}\}$ satisface las condiciones del teorema anterior: todos los miembros de \mathcal{V} contienen al cero y se prueba que su intersección es el cero. La condición (3) se deduce de la relación $U_k = -U_k$. Las propiedades (2) y (4) se obtienen a partir de la contención $2(U_k) \subseteq U_k$ y de la definición de U_k . Por último, (5) se cumple por ser $(\mathbb{Z}, +)$ abeliano.

Esta topología de G recibe el nombre de **p -ádica**. Para números primos distintos p y q , las topologías obtenidas de esta manera son distintas porque el conjunto $M = \{p, p^2, \dots, p^n, \dots\}$ tiene al $0 \in \mathbb{Z}$ como punto de acumulación en la p -ádica. Por el contrario, el 0 no es punto de acumulación de M en la q -ádica.

Ejemplo 1.1.6

El **grupo lineal general de orden n sobre \mathbb{R}** . Considere el grupo $GL(n, \mathbb{R})$ de las matrices no singulares (invertibles) de orden n con elementos en el campo \mathbb{R} y como operación de grupo la multiplicación de matrices.

En $GL(n, \mathbb{R})$ considere la topología heredada por ser un subespacio del espacio euclideo real de dimensión n^2 , es decir, con la topología generada por la métrica:

$$d(A, B) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |A_{i,j} - B_{i,j}|^2},$$

para cualesquier $A = (A_{i,j})$, $B = (B_{i,j})$. Observe que la función $(A, B) \mapsto AB^{-1}$ es continua pues los elementos de la matriz producto son sumas de productos de los elementos de A y B .

1.1.1. Grupos Ordenados

Se presentarán en esta parte dos ejemplos de grupos topológicos cuya construcción es interesante. Estos ejemplos (aunque no se analicen a profundidad más adelante en el texto) se exponen con el propósito de ayudar al lector a familiarizarse con la noción de grupo topológico. Se estudiará la estructura de grupo ordenado.

Sea G un grupo con más de un elemento que está ordenado linealmente por una relación $<$, es decir, $<$ cumple las condiciones siguientes:

- $<$ es irreflexiva (para toda $x \in G$, $x \not< x$).
- $<$ es antisimétrica (para todo $x, y \in G$ se tiene que $x < y$ ó $y < x$).
- Cualesquiera dos elementos de G son comparables (ley de tricotomía).

Falta establecer una conexión entre este orden lineal y las operaciones del grupo, para lo cual se supone además lo siguiente:

- Si $x, y \in G$ son tales que $x < y$, entonces para todo $a \in G$ se tiene que $ax < ay$ y $xa < ya$.

Los grupos con esta estructura se conocen como **grupos linealmente ordenados**.

Hay varias propiedades que tienen estos grupos, las cuales se probarán a continuación:

Proposición 1.1.1

Sea G un grupo linealmente ordenado por $<$. Entonces, G no tiene elementos máximo y mínimo (esto implica que G es infinito si G tiene más de un elemento).

Demostración:

Observemos que e_G no puede ser máximo o mínimo, ya que si $a < e_G$ entonces $e_G < a^{-1}$, para todo $a \in G$. Por otro lado si x fuera elemento mínimo de G , en particular $x < e_G$ (ya que $x \neq e_G$) y, por ende $x^2 < x \#_c$. Por tanto G no tiene elementos máximo o mínimo. ■

Definamos con lo anterior una topología en G como sigue: si $a, b \in G$ y $a < b$, sea $(a, b) = \{x \in G \mid a < x < b\}$; la familia

$$\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a, b \in G, a < b\}$$

forma una base de una topología en G . En efecto, veamos que se cumplen las dos condiciones:

1. Si $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathcal{B}$, donde $a_1 < b_1$ y $a_2 < b_2$ entonces si $x \in (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2)$, se tiene que $a_2 < b_1$, ya que en otro caso x no podría estar en la intersección, luego el conjunto $(a_2, b_1) \in \mathcal{B}$ y se tiene que $x \in (a_2, b_1)$.
2. Sea $x \in G$. Como G no admite elementos máximos ni mínimos, existen $a, b \in G$ tales que $a < x < b$. Por ende, $x \in (a, b) \in \mathcal{B}$.

Por las dos condiciones anteriores, se tiene que al cumplirlas \mathcal{B} existe una única topología τ para la cual \mathcal{B} es una base. Consideremos de ahora en adelante tal topología. Veamos que las funciones

$$\begin{aligned} h : G &\rightarrow G \\ a &\mapsto a^{-1} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} g : G \times G &\rightarrow G \\ (a, b) &\mapsto ab \end{aligned}$$

son funciones continuas en G . En efecto, sea $(a, b) \in \mathcal{B}$, donde $a, b \in G$. Entonces:

$$\begin{aligned} h^{-1}((a, b)) &= \{x \in G \mid a < h(x) < b\} \\ &= \{x \in G \mid a < x^{-1} < b\} \end{aligned}$$

pero, si $a < x^{-1} \Rightarrow xa < e_G \Rightarrow x < a^{-1}$. Por ende:

$$\begin{aligned} h^{-1}((a, b)) &= \{x \in G \mid b^{-1} < x < a^{-1}\} \\ &= (b^{-1}, a^{-1}) \end{aligned}$$

es decir, que imágenes inversas de vecindades abiertas son abiertas. Por tanto, h es continua.

Ahora para g

1.1.2. Grupos Booleanos

1.2. Homomorfismos e isomorfismos

Definición 1.2.1

Decimos que el homomorfismo $f : G \rightarrow G'$ es **homomorfismo abierto** si f es una función abierta (es decir, que manda abiertos en abiertos).

Este concepto es importante pues permite establecer el concepto de grupo topológicos equivalentes. A continuación se enunciarán y demostrarán propiedades elementales importantes de los homomorfismos continuos.

Lema 1.2.1

Sea $\varphi : G \rightarrow H$ un homomorfismo entre grupos topológicos. El homomorfismo φ es continuo (respectivamente, abierto) si lo es en la identidad e_G , es decir, si φ satisface la condición (1) (respectivamente (2)) siguiente:

1. Para toda W vecindad de e_H en H , existe U vecindad de e_G en G tal que $\varphi(U) \subseteq W$.
2. Para toda vecindad U de e_G en G , existe W vecindad de e_H tal que $W \subseteq \varphi(U)$.

Demostración:

Supongamos que se cumple la condición (1), debemos probar que φ es continua en todo punto de G . Para ello, basta con ver que si $g \in G$ es arbitrario y W es una vecindad de $\varphi(g)$ en H , entonces existe una vecindad U de G tal que $\varphi(U) \subseteq W$.

Sean $g \in G$ y W es una vecindad de $h = \varphi(g)$ en H . Se puede expresar a $W = hW'$ W' es una vecindad de e_H . Por (1) existe una vecindad U' de e_G tal que $\varphi(U') \subseteq W'$. Entonces $U = gU'$ es una vecindad de g y,

$$\varphi(U) = \varphi(gU') = \varphi(g)\varphi(U') = h\varphi(U') \subseteq hW' = W$$

por tanto, φ es continua en g .

Para (2), debemos probar que dado un abierto O en G , su imagen respecto a φ es abierta en H .

Sea entonces O abierto en G y $h \in \varphi(O)$; entonces $h = \varphi(g)$ para alguna $g \in G$. Por lo anterior, $g^{-1}O$ es una vecindad de e_G , aunado con la condición (2) se sigue que existe una vecindad W de e_H tal que $W \subseteq \varphi^{-1}(g^{-1}O) = \varphi^{-1}(g)\varphi(O)$, por lo cual $hW = \varphi(g)W \subseteq \varphi(O)$, siendo hW vecindad de h . ■

¿Existen homomorfismos entre grupos topológicos que no sean abiertos? La respuesta a esta pregunta es que sí.

Ejemplo 1.2.1

Sea (G, τ) un grupo topológico no discreto. Considere los grupos (G, τ) y (G, τ_D) , donde τ_D es la topología discreta sobre G . Entonces la función identidad $id_G : G \rightarrow G$ es un homomorfismo de G sobre sí mismo el cual es continuo, pero no es un mapeo abierto entre los grupos topológicos (G, τ_D) y (G, τ) .

1.3. Subgrupos topológicos y grupo cociente

Una nueva forma de producir grupos topológicos es mediante los subgrupos de un grupo topológico y, mediante el grupo cociente (dotado de la topología cociente). Se pretende estudiar estas estructuras con el afán de producir más grupos de este tipo.

Definición 1.3.1

Sea G un grupo topológico; un subconjunto no vacío H de G se llama **subgrupo topológico** de G si

1. H es subgrupo de G .

2. H es un subespacio con la topología inducida por G .

El siguiente resultado justifica la definición de subgrupo topológico en el sentido de que este último es por sí mismo un grupo topológico.

Proposición 1.3.1

Sean G un grupo topológico y H un subgrupo topológico de G . Entonces, H es un grupo topológico con la topología que hereda de G .

Demostración:

Es inmediata del hecho de que la función $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ es continua restringida a $H \times H$, y va en H . ■

Se presentan ahora propiedades generales de cerradura dentro de un grupo topológico.

Proposición 1.3.2

Si A y B son subconjuntos de un grupo topológico G , entonces:

1. $\overline{A \cdot B} \subseteq \overline{AB}$.
2. $(\overline{A})^{-1} = \overline{A^{-1}}$
3. $x\overline{A}y = \overline{xAy}$, para cualesquier $x, y \in G$.
4. Si $ab = ba$ para toda $a \in A$ y $b \in B$, entonces $ab = ba$ para toda $a \in \overline{A}$ y $b \in \overline{B}$.

Demostración:

De (1): Sean $x \in \overline{A}$ y $y \in \overline{B}$ y W un abierto tal que $xy \in W$. Debemos probar que $W \cap (AB) \neq \emptyset$. En efecto, como $(x, y) \mapsto x \cdot y$ es continua, existen V_1 y V_2 vecindades de x y y , respectivamente, tales que $V_1 \cdot V_2 \subseteq W$. Por como se eligieron x y y , existen $a \in V_1$ y $b \in V_2$ tales que $a \in A$ y $b \in B$, luego $ab \in (AB) \cap W$, pues $ab \in V_1 \cdot V_2 = W$. Así, $xy \in \overline{AB}$.

De (2) y (3): Son inmediatas del hecho de que para cualquier homeomorfismo $f : G \rightarrow G$ se tiene que $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$, siendo $A \subseteq G$ arbitrario, en particular tomamos como f a las funciones $z \mapsto z^{-1}$ y $z \mapsto xzy$, siendo $x, y \in G$ arbitrarios fijos.

De (4): Considere $h : G \times G \rightarrow G$ tal que $(a, b) \mapsto aba^{-1}b^{-1}$. Esta función es continua, por lo cual el conjunto:

$$\begin{aligned} H &= h^{-1}(e_G) \\ &= \left\{ (a, b) \in G \times G \mid h(a, b) = e_G \right\} \\ &= \left\{ (a, b) \in G \times G \mid aba^{-1}b^{-1} = e_G \right\} \end{aligned}$$

es cerrado. Además, $A \times B \subseteq H$, por lo cual $\overline{A \times B} \subseteq H$. Además, ya se sabe que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$, por tanto $\overline{A} \times \overline{B} \subseteq H$, es decir que para todo $a \in \overline{A}$ y $b \in \overline{B}$, $ab = ba$. ■

Definición 1.3.2

Sea G grupo y N un subgrupo de H . Decimos que N es **subgrupo normal de G** , si $a^{-1}Na \subseteq N$, para todo $a \in G$.

Esto es equivalente a que $a^{-1}Na = N$, para todo $a \in G$.

Proposición 1.3.3

Sean G grupo topológico y H, N subgrupos de G . Entonces

1. \overline{H} es subgrupo de G .
 2. Si N es subgrupo normal de G , entonces \overline{N} también es subgrupo normal de G .
 3. H es abierto si y sólo si su interior es no vacío.
 4. Si H es abierto, entonces $\overline{H} = H$.
-

Demostración:

De (1): Veamos que \overline{H} es un subgrupo de G . En efecto, como H es un subgrupo de G , entonces $H^2 \subseteq H$ y, por (1) de la proposición anterior, $(\overline{H})^2 \subseteq \overline{H^2} \subseteq \overline{H}$ (es decir que \overline{H} es cerrado bajo el producto). Además, $H^{-1} \subseteq H$ y, por (2) de la proposición anterior, $\overline{H}^{-1} = \overline{H^{-1}} \subseteq \overline{H}$ (es decir que \overline{H} es cerrado bajo inversos). Luego, \overline{H} es subgrupo de G (por ser H subgrupo, \overline{H} es no vacío).

De (2): Como N es subgrupo normal de G , en particular es subgrupo de G , luego \overline{N} es subgrupo de G (por (1)). Para ver que es subgrupo normal de G hay que verificar la contención:

$$a\overline{N}a^{-1} \subseteq \overline{N}, \quad \forall a \in G$$

pero, por hipótesis y usando (3) de la proposición anterior, se tiene que:

$$\begin{aligned} aNa^{-1} &\subseteq N, \quad \forall a \in G \\ \Rightarrow \overline{aNa^{-1}} &\subseteq \overline{N}, \quad \forall a \in G \\ \Rightarrow a\overline{N}a^{-1} &\subseteq \overline{N}, \quad \forall a \in G \end{aligned}$$

por tanto, \overline{N} es subgrupo normal de G .

De (3): Proabremos la doble implicación:

\Rightarrow): Suponga que H es abierto, entonces es claro que su interior es no vacío ya que todos los puntos de H son puntos interiores del mismo.

\Leftarrow): Suponga que H tiene interior no vacío, sea $x \in H$ un punto interior, entonces existe U vecindad de e_G tal que $xU \subseteq H$. Ahora, para todo $y \in H$ se tiene que:

$$yU = (yx^{-1})xU \subseteq yx^{-1}H = H$$

por tanto, yU es una vecindad de y contenida en H , luego y es un punto interior. Por lo cual, H es abierto ya que está contenido en su interior.

De (4): Suponga que H es abierto. Se tiene que el conjunto:

$$G - H = \bigcup_{x \in G-H} Hx$$

es abierto, pues Hx es abierto para cada $x \in G - H$. Luego H es cerrado, es decir que $H = \overline{H}$. ■

El próximo resultado tiene como objetivo generar subgrupos abiertos a partir de vecindades de la identidad.

Teorema 1.3.1

Sean G un grupo topológico y U cualquier vecindad abierta de e_G . Entonces, el conjunto:

$$L = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$$

es un subgrupo abierto y cerrado de G .

Demostración:

Es claro que $L \neq \emptyset$ ya que $e_G \in L$. Sean ahora $x, y \in G$, entonces existen $k, l \in \mathbb{N}$ tales que $x \in U^k$ y $y \in U^l$ luego, $xy \in U^{k+l}$ y $x^{-1} \in (U^k)^{-1} = (U^{-1})^k = U^k$, es decir que $xy, x^{-1} \in L$. Por tanto, L es subgrupo de G .

Además, es abierto por ser unión arbitraria de abiertos, y cerrado por el inciso (4) de la proposición anterior. ■

Observación 1.3.1

Un subespacio topológico de un espacio topológico es **discreto** si todos los puntos del subespacio son aislados, que es lo mismo que decir que está dotado de la topología discreta.

Proposición 1.3.4

Un subgrupo H de un grupo topológico G es discreto si y sólo si tiene un punto aislado.

Demostración:

\Rightarrow): Se tiene que H es un subgrupo discreto, es decir que está dotado de la topología discreta luego, el conjunto $\{e_G\}$ es una vecindad abierta de e_G para la cual se cumple que $\{e_G\} \cap H = \{e_G\}$, es decir que es un punto aislado de H .

\Leftarrow): Sea $x \in H$ un punto aislado de H ; es decir que existe una vecindad abierta U de e_G tal que $xU \cap H = \{x\}$. Si ahora $y \in H$, se tiene entonces que:

$$yU \cap H = yU \cap yx^{-1}H = yx^{-1}(xU \cap H) = yx^{-1}\{x\} = \{y\}$$

es decir, que todos los puntos de H son aislados. Por tanto, H es discreto. ■

El siguiente lema proporciona una condición suficiente para probar que un subgrupo topológico es cerrado.

Lema 1.3.1

Sean G un grupo topológico y H un subgrupo de G tales que $\overline{U} \cap H$ es cerrado en G para alguna vecindad abierta U de e_G . Entonces, H es cerrado.

Demostración:

Sea U una vecindad abierta de e_G tal que $\overline{U} \cap H$ es cerrado, y sea V una vecindad abierta de e_G tal que $V^2 \subseteq U$. Probaremos que $H = \overline{H}$.

En efecto, sea $x \in \overline{H}$, entonces el conjunto $xV \cap H \neq \emptyset$, sea $y \in xV \cap H$. Afirmamos que $xy \in \overline{U} \cap H$. En efecto, suponga que esto no es cierto, entonces al ser este un conjunto cerrado, existiría una vecindad abierta W de e_G tal que

$$Wxy \cap \overline{U} \cap H = \emptyset$$

Ahora, es claro que $x \in (W \cap V)x$ y, como $x \in \overline{H}$, entonces existiría $z \in (W \cap V)x \cap H$. Este elemento cumple que:

- $zy \in HH = H$.
- $zy \in Vxx^{-1}V = V^2 \subseteq U \subseteq \overline{U}$.
- $zy \in (Wx)y = Wxy$

por ende, $zy \in Wxy \cap \overline{U} \cap H \#_c$, pues hemos dicho que tal conjunto es vacío. Luego $xy \in \overline{U} \cap H$, en particular $xy \in H$. Como $y^{-1} \in H^{-1} \subseteq H$ se sigue que $x = (xy)y^{-1} \in HH = H$, lo cual termina la demostración. ■

Este siguiente teorema presenta una propiedad exclusiva de los grupos topológicos, pues no todo subespacio discreto de un espacio topológico es cerrado.

Proposición 1.3.5

Todo subgrupo discreto H de un grupo topológico G es cerrado.

Demostración:

Sea U una vecindad abierta de e_G tal que $U \cap H = \{e_G\}$. Por un lema anterior existe V vecindad de e_G tal que $\overline{V} \subseteq U$. Por tanto:

$$\overline{V} \cap H = \{e_G\}$$

donde, por ser G un espacio de Hausdorff se sigue que $\{e_G\}$ es cerrado en G . Por tanto, del lema anterior se sigue que H es cerrado. ■

1.4. Grupos cocientes

Se estudiarán ahora el grupo cociente de un grupo topológico.

Recordemos que si G es un grupo y H un subgrupo de H , entonces se define una relación de equivalencia en G como sigue:

$$a \sim b \text{ si y sólo si } ab^{-1} \in H$$

Las clases de equivalencia de esta relación reciben el nombre de **clases laterales derechas de H** . Denotaremos por $G/_DH$ al conjunto formado por las clases laterales derechas, es decir:

$$G/_DH = \{Ha \mid a \in G\}$$

de manera similar se definen las clases laterales laterales izquierdas de H . Se denota por $G/_IH$ al conjunto:

$$G/_IH = \{aH \mid a \in G\}$$

En caso de que el grupo sea normal, se tiene que $G/_IH = G/_DH = G/H$. Los siguientes resultados se establecen para clases laterales derechas y de forma análoga se cumplen para clases laterales izquierdas.

Introducimos ahora en G/H una topología de la siguiente manera. Sea \mathcal{B} una base del grupo topológico G y H un subgrupo de G . Para cada $U \in \mathcal{B}$ definamos:

$$U^* = \{Hx \mid x \in U\}$$

y:

$$\mathcal{B}^* = \{U^* \mid U \in \mathcal{B}\}$$

Proposición 1.4.1

Para todo subgrupo H de G , \mathcal{B}^* es una base de una topología sobre $G/_DH$. Si H es cerrado, entonces esta topología sobre $G/_DH$ es T_1 .

Demostración:

Para la primera parte se deben verificar dos condiciones:

1. Sean $U^*, V^* \in \mathcal{B}^*$. Si $Ha \in U^* \cap V^*$ debemos encontrar $W^* \in \mathcal{B}^*$ tal que $Ha \in W^* \subseteq U^* \cap V^*$.
Como $U^*, V^* \in \mathcal{B}^*$, entonces existe $u \in U$ y $v \in V$ tales que:

$$Ha = Hu = Hv$$

por lo cual, $Ha \subseteq HU, HV$, es decir que $Ha \subseteq HU \cap HV$. Además, $HU \cap HV$ es un conjunto abierto (por ser intersección de dos abiertos). Como $u \in HU \cap HV$, entonces existe $W \in \mathcal{B}$ tal que:

$$u \in W \subseteq HU \cap HV$$

Claramente se tiene que $Ha = Hu \in W^*$. Veremos que $W^* \subseteq U^* \cap V^*$. En efecto, sea $Hw \in W^*$, es decir que $w \in W$. Por la contención anterior, $w \in HU \cap HV$, es decir que existen $h_1, h_2 \in H$, $u_1 \in U$ y $v_1 \in V$ tales que:

$$w = h_1u_1 = h_2v_1$$

Luego:

$$Hw = Hh_1u_1 = Hu_1 \in U^* \quad \text{y} \quad Hw = Hh_2v_1 = Hv_1 \in V^*$$

Por lo cual, $Hw \in U^* \cap V^*$. Finalmente, se sigue que $W^* \subseteq U^* \cap V^*$.

2. Sea $Hx \in G/_DH$. Como \mathcal{B} es base para G , entonces existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U$, luego $Hx \in U^*$. Así que

$$G/_DH = \bigcup \mathcal{B}^*$$

por ambos incisos, se sigue que \mathcal{B}^* es base de una topología sobre $G/_DH$.

Para la otra parte, suponga que H es cerrado. Sean $Ha \neq Hb$ dos elementos de $G/_DH$. Como Ha es cerrado (pues H es cerrado) y $b \notin Ha$, entonces existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $b \in U$ y $U \cap Ha = \emptyset$ (pues, G es un espacio T_3). Entonces, $Hb \in U^*$ y $Ha \notin U^*$. Por tanto, $G/_DH$ es un espacio T_1 . ■

Observación 1.4.1

El espacio topológico G/H así construido recibe el nombre de **espacio cociente de G entre H** , o **grupo cociente de G entre H** , si H es cerrado y normal en G .

Ahora se estudian las propiedades de la función canónica $\pi : G \rightarrow G/_DH$, tal que $x \mapsto Hx$.

Proposición 1.4.2

Sean G un grupo topológico, H un subgrupo cerrado de G y $\pi : G \rightarrow G/_DH$ la función canónica tal que $x \mapsto Hx$. Entonces, π es continua y abierta.

Demostración:

Sea $x \in G$ y $U \subseteq G$ un abierto tal que $\pi(x) = Hx \in U^*$. Para probar que π es continua, hay que encontrar un abierto V en G tal que

$$\pi(V) \subseteq U^*$$

tomemos $V = HU$, el cual es abierto por ser U abierto en G , además $x \in V$ y:

$$\pi(V) = \pi(HU) = \pi(U) = U^*$$

por tanto, π es continua.

Veamos ahora que es un mapeo abierto. Sea $U \subseteq G$ abierto y tomemos \mathcal{B} una base de la topología de G ; entonces:

$$U = \bigcup_{j \in J} B_j$$

donde $\{B_j\}_{j \in J} \subseteq \mathcal{B}$. Tenemos que:

$$\pi(U) = \pi\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{j \in J} \pi(B_j) = \bigcup_{j \in J} B_j^*$$

donde $B_j^* \in \mathcal{B}^*$, para todo $j \in J$. Luego, $\pi(U)$ es un mapeo abierto. ■

En general la función canónica $\pi : G \rightarrow G/DH$ no es cerrada como lo muestra el siguiente ejemplo. Sin embargo, si H es compacto entonces la función sí es cerrada (esto se verá en el siguiente capítulo).

Ejemplo 1.4.1

Considere $G = \mathbb{R}$ como grupo aditivo de los reales dotado de la topología usual, y $H = \mathbb{Z}$ el subgrupo de los números enteros. Entonces, definimos la función $\psi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow [0, 1[$ dada por:

$$\psi(\mathbb{Z} + x) = x - [x]$$

donde $[x]$ denota a la parte entera de x . Esta función es biyectiva (más aún, es un isomorfismo de grupos, dotando a $[0, 1[$ con cierta operación binaria que lo haga grupo) y es un homeomorfismo si se le dota a este conjunto de la topología usual de $[0, 1[$.

Se tiene además, que el conjunto $A = \{2 + \frac{1}{2}, \dots, n + \frac{1}{n}, \dots\}$ es cerrado en \mathbb{R} , pero su imagen bajo la función canónica es $\pi(A) = \{\mathbb{Z} + \frac{1}{2}, \dots, \mathbb{Z} + \frac{1}{n}, \dots\}$, el cual es homeomorfo a $\{\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ no es cerrado en $[0, 1[$, por lo cual no el conjunto $\pi(A)$ no es cerrado en \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

El siguiente resultado muestra que las propiedades topológicas locales del espacio cociente de G en H también se pueden estudiar en un solo punto.

Proposición 1.4.3

Sean G un grupo topológico y H un subgrupo cerrado de G . Entonces, G/DH es un espacio homogéneo.

Demostración:

Hay que probar que para todo par de puntos $Ha, Hb \in G/DH$ existe un homeomorfismo f de G/DH en sí mismo tal que $f(Ha) = Hb$.

Sea $\psi_a : G/DH \rightarrow G/DH$ dada por: $Hx \mapsto H(xa)$. Es claro que esta función está bien definida y, afirmamos que es un homeomorfismo.

Veamos que es inyectiva, en efecto, si $\psi_a(Hx) = \psi_a(Hy)$, entonces $H(xa) = H(ya)$, luego $(xa)(ya)^{-1} = xaa^{-1}y^{-1} = xy^{-1} \in H$, luego $Hx = Hy$.

Y, es suprayectiva, pues para todo $x \in G$, $\psi_a(H(xa^{-1})) = Hx$.

Además, tiene como función inversa a $(\psi_a)^{-1} = \psi_{a^{-1}}$. Por lo cual, para ver que es un homeomorfismo, basta con ver que ella y su inversa son mapeos inversos, pero, por como está dada la función inversa, es suficiente con ver que ψ_a es abierta (ya que, el $a \in G$ fue arbitrario).

Considere $\pi : G \rightarrow G/_D H$ la función canónica, y sea $U \subseteq G$ abierto, entonces $U = \pi(U)^*$ es abierto en $G/_D H$. Entonces,

$$\begin{aligned}\psi_a(U^*) &= \left\{ \psi_a(Hx) \mid Hx \in U^* \right\} \\ &= \left\{ H(xa) \mid x \in U \right\} \\ &= \left\{ Hy \mid y \in Ua \right\} \\ &= \pi(Ua)\end{aligned}$$

donde, como U es abierto en G , entonces Ua también lo es y, al ser π un mapeo abierto, se sigue que $\psi_a(U^*)$ es abierta.

Por tanto, ψ_a es homeomorfismo. Observe ahora que si $Ha, Hb \in G/_D H$, entonces:

$$\psi_{a^{-1}b}(Ha) = H(aa^{-1}b) = Hb$$

con lo que se tiene que $G/_D H$ es un espacio homogéneo. ■

El siguiente resultado es un lema auxiliar que nos permitirá establecer dos propiedades topológicas de $G/_D H$.

Lema 1.4.1

Sean G un grupo topológico y H un subgrupo cerrado de G , U, V vecindades abiertas de e_G en G tales que $VV^{-1} \subseteq U$; entonces, si $\pi : G \rightarrow G/_D H$ es la función canónica, se cumple que

$$\overline{\pi(V)} \subseteq \pi(U)$$

Demostración:

Sea $Hx \in \overline{\pi(V)}$ donde $x \in G$; entonces, $\pi(xV)$ es una vecindad abierta que contiene a Hx y, por ende, contiene puntos de $\pi(V)$. Esto es que la intersección:

$$\pi(xV) \cap \pi(V)$$

es no vacía, luego existen, $v_1, v_2 \in V$ tales que

$$Hxv_1 = Hv_2$$

esto es, que $Hx = Hv_2v_1^{-1} \in H(VV^{-1}) \subseteq H(U)$. Por tanto se sigue la contención deseada. ■

Teorema 1.4.1

Sean G un grupo topológico y H un subgrupo cerrado de G . Entonces,

1. $G/_D H$ es un espacio regular y por tanto de Hausdorff.
2. $G/_D H$ es un espacio discreto si y sólo si H es abierto en G .

Demostración:

De (1): Por hipótesis, H es cerrado en G , luego el conjunto Ha es cerrado en G , para todo $a \in G$. Sea $a \in G$, se tiene que el conjunto:

$$G/_D H \setminus \{Ha\} = \left\{ Hx \in G/_D H \mid Hx \neq Ha \right\} = \pi(G \setminus Ha)$$

es abierto, pues es la imagen de un abierto y el mapeo π es abierto, luego cada punto $\{Ha\}$ es un conjunto cerrado en $G/_D H$, es decir que $G/_D H$ es T_2 , en particular es T_1 . Para probar que es regular (es decir, T_3).

Para ello, es suficiente probar que para todo abierto U^* en $G/_D H$ tal que $H \in U^*$ (basta hacerlo aquí pues, el espacio es homogéneo) existe una vecindad V^* de H tal que $\overline{V^*} \subseteq U^*$. En efecto, si U^* es un abierto tal que $H \in U^*$, entonces existe $U \subseteq G$ abierto tal que $\pi(U) = U^*$.

En particular, se tiene que $e_G \in U$, luego por un lema anterior existe $V \subseteq G$ vecindad abierta de e_G tal que:

$$VV^{-1} \subseteq U$$

por el lema anterior, se sigue que $\overline{\pi(V)} \subseteq \pi(U)$, es decir que $\overline{V^*} \subseteq U^*$, donde V^* es un abierto que contiene a H .

De (2): Se probará la doble implicación.

\Rightarrow): Si $G/_D H$ es discreto, entonces el conjunto $\{H\} = \{He_G\}$ es abierto, luego su imagen inversa bajo π , $\pi^{-1}(He_G) = H$ es abierta en por ser π una función continua, es decir que H es abierto en G .

\Leftarrow): Si H es abierto, como π es un mapeo abierto, se sigue que $\pi(H) = \{H\}$ es abierto en $G/_D H$, esto es, es un punto aislado de $G/_D H$, luego el espacio $G/_D H$ es discreto ya que es homogéneo. ■

En el caso particular de que N sea un subgrupo normal de G , de modo que G/N sea grupo, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 1.4.2

Sean G un grupo topológico y N un subgrupo cerrado normal de G ; entonces

1. G/N con la topología cociente es un grupo topológico.
 2. La función continua $\pi : G \rightarrow G/N$ es un homomorfismo abierto y continuo.
 3. El grupo G/N es un espacio T_1 y por tanto, regular.
 4. El grupo G/N es discreto si y sólo si N es abierto.
-

Demostración:

De (1): Hay que probar que la función $(Na, Nb) \mapsto Nab^{-1}$ es continua. En efecto, sean $a, b \in G$ y $W^* = \pi(W) \subseteq G/N$ un abierto (siendo $W \subseteq G$ abierto) tal que $Nab^{-1} \in W^*$ (se sigue que $ab^{-1} \in W$).

Como la función $(a, b) \mapsto ab^{-1}$ es continua, entonces existen $U, V \subseteq G$ abiertos tales que $a \in U, b \in V$ y

$$UV^{-1} \subseteq W$$

por tanto, si $u \in U$ y $v \in V$, se tiene que $Nu \in U^*, Nv \in V^*$, con:

$$(Nu)(Nv)^{-1} = Nuv^{-1} \in W^*$$

pues, $uv^{-1} \in W$. Por ende, $U^*(V^*)^{-1} \subseteq W^*$. Por tanto, la función establecida originalmente es continua.

De (2): Ya se sabe que la función canónica π es continua y abierta. Además, es homomorfismo por ser N subgrupo normal de G .

De (3) Es inmediato del teorema anterior.

De (4) Es inmediato del teorema anterior. ■

Resulta que, podemos establecer el primer teorema de isomorfismos en la parte de grupos topológicos, haciendo ciertas limitaciones correspondientes para que todo funcione adecuadamente.

Teorema 1.4.3

Sean G y G' dos grupos topológicos y sea $f : G \rightarrow G'$ un epimorfismo continuo y abierto con kernel $N = \ker(f)$. Entonces, N es un subgrupo normal y cerrado de G y, el isomorfismo h de G/N en G' dado por:

$$h(Nx) = f(x)$$

para todo $Nx \in G/N$, es un isomorfismo topológico entre G/N y G' .

Demostración:

El conjunto N es un subgrupo normal de G pues es el núcleo del homomorfismo f . Además, N es cerrado ya que es la imagen inversa del cerrado $\{e'\} \subseteq G'$.

Sea $\pi : G \rightarrow G/N$ el homomorfismo canónico. Conviene notar que h se ha definido de tal manera que $f = h \circ \pi$. Veamos que h es una biyección continua y abierta (con lo cual, se sigue que h es isomorfismo topológico ya que es homomorfismo y homeomorfismo). En efecto, probar que h es biyección no es complicado, al igual que probar que es homomorfismo (ver la demostración del primer teorema de isomorfismo de grupos). Veamos que es abierta y continua:

- **h es continua.** En efecto, sea $V \subseteq G'$ abierto. Afirmamos que:

$$h^{-1}(V) = \pi(f^{-1}(V)) \tag{1.1}$$

en efecto, se tiene que:

$$f^{-1}(V) = (h \circ \pi)^{-1}(V) = \pi^{-1}(h^{-1}(V))$$

Como π es suprayectiva, se cumple entonces que:

$$\pi(f^{-1}(V)) = \pi(\pi^{-1}(h^{-1}(V))) = h^{-1}(V)$$

con lo que se tiene la afirmación. Como f es continua, entonces $f^{-1}(V)$ es abierto en G luego, al ser π un mapeo abierto, se tiene que $\pi(f^{-1}(V)) = h^{-1}(V)$ es abierto. Por ende, h es continua.

- **h es abierta.** En efecto, sea $U \subseteq G/N$ abierto, entonces existe $V \subseteq G$ abierto tal que $\pi(V) = U$. Por ende:

$$h(U) = h(\pi(V)) = f(V)$$

donde el miembro de la izquierda es abierto ya que f es función abierta. Por tanto, h es abierto.

Luego, h es isomorfismo topológico. ■

Definición 1.4.1

El **grupo del círculo** se define como:

$$\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

Observación 1.4.2

Como \mathbb{Z} es un subgrupo cerrado y normal de \mathbb{R} , entonces \mathbb{T} es grupo topológico. Un conjunto completo de representantes es $R = [0, 1]$, es decir:

$$\mathbb{T} = \left\{ r + \mathbb{Z} \mid r \in R \right\}$$

donde $r + \mathbb{Z} = [r]$ es la clase de equivalencia con representante r . Considere ahora a la circunferencia unitaria

$$S^1 = \left\{ e^{2\pi i x} \in \mathbb{C} \mid x \in [0, 1] \right\}$$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ tal que $x \mapsto e^{2\pi i x}$. Es claro que f es un epimorfismo continuo y abierto (no es difícil de probar). Por tanto, como $\ker(f) = \mathbb{Z}$, se sigue que \mathbb{T} y S^1 son topológicamente isomorfos.

Además como $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$ es continua, como $[0, 1]$ es compacto, se sigue que $\pi([0, 1]) = \mathbb{T}$ también es compacto.

1.5. Productos Directos

Sea $\{G_i\}_{i \in I}$ una familia de grupos topológicos. Damos una estructura de grupo al conjunto $G = \prod_{i \in I} G_i$, definiendo:

$$(x_i)_{i \in I} \cdot (y_i)_{i \in I} = (x_i y_i)_{i \in I}$$

Si para cada $i \in I$, $e_i \in G_i$ es el elemento identidad, entonces $e = (e_i)_{i \in I}$ es el elemento identidad de G , y

$$(x_i)_{i \in I}^{-1} = (x_i^{-1})_{i \in I}$$

para cada $(x_i)_{i \in I} \in G$. La topología producto es compatible con esta estructura de grupo pues, la función $h : G \times G \rightarrow G$ dada por:

$$((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) \mapsto (x_i y_i^{-1})_{i \in I}$$

es la composición de las funciones $((x_i, y_i))_{i \in I} \mapsto (x_i y_i^{-1})_{i \in I}$ de $\prod_{i \in I} (G_i \times G_i)$ en G y, la proyección $((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) \mapsto ((x_i, y_i))_{i \in I}$ de $G \times G$ en $\prod_{i \in I} (G_i \times G_i)$ son continuas (esto en la topología producto).

Definición 1.5.1

Sea $\{G_i\}_{i \in I}$ una familia de grupos topológicos. El **producto directo** de los grupos topológicos $\{G_i \mid i \in I\}$ se obtiene al dar al producto

$$G = \prod_{i \in I} G_i$$

la topología producto.

Proposición 1.5.1 (Asociatividad del producto directo de grupos)

Sea $\{G_i\}_{i \in I}$ una familia de grupos topológicos. Si $\{I_x\}_{x \in K}$ es una partición de I entonces, G es isomorfo al producto de los grupos topológicos $\prod_{i \in I_x} G_i$, es decir:

$$G = \prod_{i \in I} G_i \equiv \prod_{x \in K} \prod_{i \in I_x} G_i$$

Demostración:

La prueba no se hace en el libro, pero se deja pendiente. ■

Observación 1.5.1

Para cada $j \in I$, la función **proyección natural**, $\pi_j : G \rightarrow G_j$ tal que $\pi_j(x) = x_j$, para todo $x = (x_i)_{i \in I}$ es un homomorfismo continuo. Este último hecho se deduce de la construcción de la topología producto sobre G .

Más aún, la función $\phi_j : G_j \rightarrow G$ definida por $\phi_j(x) = (y_i)_{i \in I}$, donde:

$$y_i = \begin{cases} e_i & \text{si } i \neq j. \\ x & \text{si } i = j. \end{cases} \quad \forall y \in I$$

es un isomorfismo topológico entre G_j y $N_j = \phi_j(G_j)$. Es decir, ϕ_j es una inmersión de G_j en G .

Teorema 1.5.1

Sea $\{G_i\}_{i \in I}$ una familia de grupos topológicos y sea H el subconjunto de $G = \prod_{i \in I} G_i$ que consta de todos los $x = (x_i)_{i \in I}$ tales que x_i es el elemento identidad de G_i para todo $i \in I$ salvo un número finito de índices; H es entonces un subgrupo normal denso en G .

Demostración:

■

El objetivo de este teorema es el de determinar bajo que condiciones se puede agregar la parte topológica al concepto de descomposición algebraica de un grupo en subgrupos. Sea $\{G_i\}_{i=1}^n$ una familia finita de grupos topológicos y G su producto directo. Es fácil ver que para vecindades arbitrarias U_1, \dots, U_n de e_1, \dots, e_n relativas a G_1, \dots, G_n , respectivamente, el producto $U_1 \times \dots \times U_n$ es una vecindad de e_G en la topología de grupo G . Por todo esto, podemos plantear una definición de producto interno de grupos topológicos. Por todo esto, podemos plantear una definición de producto interno de grupos topológicos.

Definición 1.5.2

Sea G un grupo topológico y N_1, \dots, N_n subgrupos cerrados normales de G . Diremos que el grupo topológico G se **descompone topológicamente en el producto directo de los subgrupos** N_1, \dots, N_n si G se descompone (en el sentido algebraico) en producto directo de estos subgrupos y, además, para cualquier colección de vecindades abiertas U_1, \dots, U_n de e , relativas a N_1, \dots, N_n , existe una vecindad de e relativa a todo el grupo G tal que

$$U \subseteq U_1 \cdot \dots \cdot U_n$$

Proposición 1.5.2

Supongamos que el grupo topológico G se descompone topológicamente en el producto directo de los subgrupos N_1, \dots, N_n , y sea H el producto directo de estos subgrupos. A cada elemento $x = (x_1, \dots, x_n) \in H$ le asociamos el elemento $\psi(x) = x_1 \cdot \dots \cdot x_n \in G$. Entonces, ψ es un isomorfismo topológico entre G y H . Además, $\psi \circ \phi_j = \text{id}_{N_j}$, donde las ϕ_j están dadas por $\phi_j(x) = (y_i)_{i=1}^n$, siendo

$$y_i = \begin{cases} e_i & \text{si } i \neq j \\ x & \text{si } i = j \end{cases}, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$$

Demostración:

Ya se sabe de la parte algebraica que ψ es un isomorfismo de grupos entre G y H . Observemos que

$$\begin{aligned} \psi \circ \phi_j(x) &= \psi(\phi_j(x)) \\ &= \psi((y_i)_{i=1}^n) \\ &= y_1 \cdot \dots \cdot y_n \\ &= e \cdot \dots \cdot e \cdot x \cdot e \cdot \dots \cdot e \\ &= x \\ &= \text{id}_{N_j}(x) \end{aligned}$$

para todo $x \in N_j$, $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, siendo x el j -ésimo elemento del producto en la tercera línea de la igualdad. Por tanto, $\psi \circ \phi_j = \text{id}_{N_j}$ para todo $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Para terminar de probar el resultado, basta con probar que ψ es un homeomorfismo. Como es biyectivo, solo hay que probar que es una función continua y abierta.

1. ψ es continua. Sea $U \subseteq G$ una vecindad arbitraria de e en G y $V \subseteq G$ otra vecindad de e tal que $V^n \subseteq U$. Definimos

$$V_i = N_i \cap V, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$$

Es claro que V_i es una vecindad de e en N_i , para todo $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Tomemos

$$V' = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in H \mid x_i \in V_i, \text{ para todo } i \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\}$$

Este conjunto cumple que es una vecindad de la identidad de H (pues, $V' = V_1 \times \dots \times V_n$ es un elemento básico de la topología producto). Además,

$$\begin{aligned} \psi(V') &= \psi(V_1 \times \dots \times V_n) \\ &= V_1 \cdot \dots \cdot V_n \\ &\subseteq \underbrace{V \cdot \dots \cdot V}_{n\text{-veces}} \\ &= V^n \\ &\subseteq U \\ \Rightarrow \psi(V') &\subseteq U \end{aligned}$$

por tanto, ψ es continua.

2. ψ es **abierto**. Sea W una vecindad abierta de la identidad, entonces contiene un conjunto de la forma $V_1 \times \dots \times V_n$, donde cada V_i es un conjunto abierto, vecindad de la identidad en N_i . Por hipótesis, existe una vecindad U abierta de la identidad tal que

$$U \subseteq V_1 \cdot \dots \cdot V_n = \psi(V)$$

por tanto, ψ es abierto ¿?

■

1.6. Cardinales invariantes elementales

Ahora se estudiarán algunas propiedades de las funciones cardinales definidas en grupos.

La primera propiedad, respecto a las funciones cardinales, que encuentra una expresión muy especial en el caso de grupos topológicos se describe en el corolario que sigue a estos dos resultados.

Lema 1.6.1

Sea G un grupo topológico. Suponga que D es un subconjunto denso en G y que U es una vecindad de la identidad en e_G ; entonces, $G = DU$.

Demostración:

Es claro que $DU \subseteq G$. Probaremos que $G \subseteq DU$. Sea $g \in G$. Dado que D es denso y gU^{-1} es un conjunto abierto no vacío que contiene a g , existe un elemento $x \in D \cap gU^{-1}$. Por tanto, $g \in xU \subseteq DU$. Por tanto, $G \subseteq DU$.

Por ambas contenciones, se sigue que $G = DU$.

■

Teorema 1.6.1

Sea G un grupo topológico y \mathcal{B} una base local para e_G . Suponga que para cada $B \in \mathcal{B}$ existe $D_B \subseteq G$ tal que $G = D_B B$. Entonces el conjunto

$$\left\{ xB \mid x \in D_b \text{ con } B \in \mathcal{B} \right\}$$

es una base para G .

Demostración:

Sea $g \in G$ y U un abierto en G que contiene a g . Por un teorema existe una vecindad V de la identidad tal que

$$gV \subseteq U$$

Considere una vecindad de e_G , W tal que

$$W^{-1}W \subseteq V$$

(esta existe por un teorema), existe pues un elemento $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq W$. Como $G = D_B B$, existe $x \in D_B$ tal que $g \in xB$. Por tanto,

$$g \in xB \subseteq gB^{-1}B \subseteq gW^{-1}W \subseteq gV \subseteq U \Rightarrow g \in xB \subseteq U$$

Así, el conjunto anterior es base para la topología definida sobre G . ■

Corolario 1.6.1

Si G es un grupo topológico, entonces $w(G) = d(G) \cdot \chi(G)$.

Demostración:

Ya se sabe que

$$\begin{cases} d(G) & \leq w(G) \\ \chi(G) & \leq w(G) \end{cases}$$

(la primera se da por definición y, la segunda por el hecho de que estamos considerando grupos topológicos que son T_0 , en particular, son Hausdorff, luego se tiene la desigualdad) por tanto $d(G) \cdot \chi(G) \leq w(G)$. Para la otra desigualdad, considere un conjunto D denso en G de cardinalidad $d(G)$. Sea \mathcal{B} una base local para e_G tal que

$$|\mathcal{B}| = \chi(G)$$

Por el lema anterior se sabe que $G = BD$, para todo $B \in \mathcal{B}$ y, del teorema anterior se deduce que la familia

$$\mathcal{V} = \{xB \mid x \in D \text{ y } B \in \mathcal{B}\}$$

es una base para G , con cardinalidad no mayor a $d(G) \cdot \chi(G)$. Por ende, $w(G) \leq d(G) \cdot \chi(G)$.

De ambas desigualdades se sigue que $w(G) = d(G) \cdot \chi(G)$. ■

Teorema 1.6.2

Sea G un grupo topológico. Entonces

1. $\pi\chi(G) = \chi(G)$.
 2. $\pi w(G) = w(G)$.
-

Demostración:

Para evitar situaciones obvias, supondremos que G no es discreto.

De (1): Como toda base local es una π -base local, se sigue que

$$\pi\chi(x, G) \leq \chi(x, G), \quad \forall x \in G$$

(pues estamos sacando mínimos) por tanto, sacando supremo en G se sigue que

$$\pi\chi(G) \leq \chi(G)$$

Para la otra desigualdad, basta con probar que si \mathcal{B} es una π -base local en e_G , entonces el conjunto

$$\left\{ BB^{-1} \mid B \in \mathcal{B} \right\}$$

es una base local en e_G . En efecto, sea U una vecindad de e_G , entonces existe otra vecindad V de e_G tal que

$$V \subseteq VV^{-1} \subseteq U$$

por ser \mathcal{B} una π -base local, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que

$$B \subseteq V$$

luego, $e_G \in BB^{-1} \subseteq VV^{-1} \subseteq U$ siendo BB^{-1} abierto. Por tanto, esta familia es una base local en e_G .

Así, toda π -base local induce una base local de misma cardinalidad. Se sigue entonces que

$$\chi(G) \leq \pi\chi(G)$$

De (2): De (1) y del corolario anterior se tiene que

$$\begin{aligned} w(G) &\leq d(G) \cdot \chi(G) \\ &\leq \pi w(G) \cdot \pi\chi(G) \\ &\leq \pi w(G) \cdot \pi w(G) \\ &= \pi w(G) \\ \Rightarrow w(G) &\leq \pi w(G) \end{aligned}$$

y, como en todo espacio topológico se tiene que $w\pi(G) \leq w(G)$, se sigue entonces que

$$w\pi(G) = w(G)$$

■

Se presenta ahora una desigualdad cardinal válida en cualquier grupo topológico.

Proposición 1.6.1

Sean G un grupo topológico y H un subgrupo normal cerrado de G . Entonces, $w(H) \leq w(G)$ y $w(G/H) \leq w(G)$.

Además, $\chi(G/H) \leq \chi(G)$.

Demostración:

De la definición de peso es inmediato que

$$w(H) \leq w(G/H)$$

para la otra desigualdad, note que si $U \subseteq G$ es abierto, entonces su correspondiente conjunto en G/H , $U^* = \pi(U)$, es abierto en G/H (siendo $\pi : G \rightarrow G/H$ el mapeo cociente). Además, si \mathcal{B} es una base para G , el conjunto

$$\pi(\mathcal{B}) = \left\{ \pi(U) \mid U \in \mathcal{B} \right\}$$

es una base en G/H . Luego, $w(G/H) \leq w(G)$. La desigualdad $\chi(G/H) \leq \chi(G)$ se prueba de forma análoga tomando una base local para la identidad. ■

Ahora demostraremos un resultado un poco sorprendente, el cual es válido sólo en grupos topológicos.

Teorema 1.6.3

Sea G un grupo topológico tal que $d(G) < |G|$. Entonces, $\Delta(G) = |G|$.

Demostración:

Para el caso, recordemos que estamos trabajando en grupos infinitos. Sea $D' \subseteq G$ un conjunto denso en G de cardinalidad $d(G)$. Considere

$$D = \langle D' \rangle$$

D es un subgrupo de G tal que

$$\begin{aligned} |D| &= |\langle D' \rangle| \\ &= \aleph_0 \cdot |D'| \\ &= |D'| \\ &= d(G) \end{aligned}$$

(pues al menos D' es de cardinalidad \aleph_0). Como $d(G) < |G|$, entonces el conjunto $G \setminus D \neq \emptyset$. Sea $g_1 \in G \setminus D$ y, tomemos $D_0 = D$.

Definamos con ello $D_1 = g_1 D_0$. D_1 es un conjunto denso ajeno a D_0 en G y de cardinalidad $d(G)$. Supongamos de esta forma que hemos construido conjuntos densos D_α para toda $\alpha < \beta$, con $\beta < |G|$. Sea $g_\beta \in G \setminus \left(\bigcup_{\alpha < \beta} D_\alpha \right)$. Podemos encontrar tal g_β , pues

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{\alpha < \beta} D_\alpha \right| &\leq \sum_{\alpha < \beta} |D_\alpha| \\ &\leq \beta |D| \\ &< |G| \end{aligned}$$

siempre que $\beta < |G|$. Continuando este proceso logramos $|G|$ conjuntos densos ajenos entre sí. Cada denso debe intersectar a todo abierto no vacío y, por lo tanto, debe tener cardinalidad de $|G|$; en consecuencia, $\Delta(G) = |G|$. ■

1.7. Metrizabilidad

Definición 1.7.1

Sea G un grupo. Una **pseudonorma en G** es una función $N : G \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple las siguientes condiciones:

- I. $N(x) \geq 0$, para todo $x \in G$.
- II. $N(e) = 0$, con $e \in G$ la identidad del grupo.
- III. $N(x \cdot y^{-1}) \leq N(x) + N(y)$, para todo $x, y \in G$.

(iii) puede ser reformulado de la siguiente forma:

$$N(x \cdot y) \leq N(x) + N(y) \quad \text{y} \quad N(x) = N(x^{-1})$$

para todo $x, y \in G$.

Proposición 1.7.1

Sea G un grupo y N una pseudonorma. Entonces:

1. $r \cdot N$ es una pseudonorma en G para todo $r \geq 0$.
2. Para cada $g \in G$, la función N_g en G dada por:

$$N_g(x) = N(gxg^{-1}), \quad \forall x \in G$$

es una pseudonorma.

3. La suma de dos pseudonormas en G es una pseudonorma en G .
4. Para cualquier función $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ acotada, la función $N_f : G \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$N_f(x) = \sup_{y \in G} |f(y \cdot x) - f(y)|, \quad \forall x \in G$$

es una pseudonorma en G .

Demostración:

De (4): Sea $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Veamos que se cumplen las tres condiciones:

- I. Sea $x \in G$, entonces

$$\begin{aligned} N_f(x) &= \sup_{y \in G} |f(y \cdot x) - f(y)| \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

- II. Sea $e \in G$ la identidad del grupo. Entonces:

$$\begin{aligned} N_f(e) &= \sup_{y \in G} |f(y \cdot e) - f(y)| \\ &= \sup_{y \in G} |f(y) - f(y)| \\ &= \sup_{y \in G} |0| \\ &= 0 \end{aligned}$$

- III. Sean $x_1, x_2 \in G$. Se tiene que

$$\begin{aligned} N_f(x_1 \cdot x_2^{-1}) &= \sup_{y \in G} |f(yx_1x_2^{-1}) - f(y)| \\ &= \sup_{y \in G} |f(yx_1x_2^{-1}) - f(y) + f(x_1y) - f(x_1y)| \\ &= \sup_{y \in G} |[f(x_1y) - f(y)] + [f(yx_1x_2^{-1}) - f(x_1y)]| \\ &\leq \sup_{y \in G} |f(x_1y) - f(y)| + \sup_{y \in G} |f(yx_1x_2^{-1}) - f(x_1y)| \\ &\leq \sup_{y \in G} |f(x_1y) - f(y)| + \sup_{z \in G} |f(zx_2^{-1}) - f(z)| \\ &= N(x_1) + N(x_2^{-1}) \end{aligned}$$

Por (i)-(iii) se sigue que N_f es una pseudonorma en G . ■

Trabajando con grupos topológicos, uno está interesado en las pseudonormas continuas. Debido a que todo grupo topológico es un espacio homogéneo, se verifica la siguiente proposición de forma inmediata.

Proposición 1.7.2

Sea G un grupo topológico y N una pseudonorma. Entonces N es continua si y sólo si es continua en la identidad del grupo.

Teorema 1.7.1

Sea G un grupo topológico, $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente de vecindades abiertas de e tales que

$$U_n^{-1} = U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(es decir que son vecindades simétricas), y

$$U_{n+1}^2 \subseteq U_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces, existe una pseudonorma continua N en G tal que

$$\left\{x \in G \mid N(x) < \frac{1}{2^n}\right\} \subseteq U_n \subseteq \left\{x \in G \mid N(x) \leq \frac{1}{2^{n-1}}\right\}$$

para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Demostración:

Procederemos por inducción sobre n . Para $n = 0$ haga $U(1) = U_0$ vecindad abierta simétrica de e .

Suponga que para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se han definido vecindades abiertas simétricas de e , $U(m/2^n)$, donde $m = 1, 2, \dots, 2^n$. Definimos recursivamente

$$U(1/2^{n+1}) = U_{n+1} \quad \text{y} \quad U((2m+1)/2^{n+1}) = U(m/2^n) \cdot U_{n+1}$$

para todo $m = 1, 2, \dots, 2^n - 1$. ■

Corolario 1.7.1

Sea G grupo topológico. Para cada vecindad U de $e \in G$ existe una pseudonorma continua N en G tal que $\left\{x \in G \mid N(x) < 1\right\} \subseteq U$.

Demostración:

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que U es abierto. Sea

$$U_0 = U \cap U^{-1}$$

Por un teorema anterior existe U_1 vecindad abierta simétrica de e tal que

$$U_1^2 \subseteq U_0$$

Suponga elegidos U_1, \dots, U_n vecindades abiertas de la identidad tales que

$$U_{i+1}^2 \subseteq U_i, \quad \forall i = 0, 1, \dots, n$$

Por un teorema anterior existe U_{n+1} vecindad abierta simétrica de e tal que

$$U_{n+1}^2 \subseteq U_n$$

por ende, se cumple que

$$U_{i+1}^2 \subseteq U_i, \quad \forall i = 0, 1, \dots, n+1$$

Por inducción se construye una sucesión $\{U_n\}_{i=n}^{\infty}$ de vecindades abiertas simétricas de la identidad tales que

$$U_{n+1}^2 \subseteq U_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por el teorema anterior existe una pseudonorma continua N en G que satisface:

$$\left\{x \in G \mid N(x) < 1/2^n\right\} \subseteq U_i \subseteq \left\{x \in G \mid N(x) \leq 1/2^{n-1}\right\}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

En particular, para $n = 0$ se tiene que

$$\left\{x \in G \mid N(x) < 1\right\} \subseteq U_0 = U$$

lo que prueba el resultado. ■

Teorema 1.7.2

Todo grupo topológico es metrizable si y sólo si posee una base numerable en la identidad.

Demostración:

La necesidad del teorema es inmediata, pues si es metrizable se deduce que posee una base numerable en todo punto del grupo, en particular de la identidad.

Sea G un grupo topológico tal que posee una base numerable en la identidad. ■

Corolario 1.7.2

Todo grupo topológico es metrizable si y sólo si es primero numerable.

Demostración:

Es inmediata del teorema anterior y del hecho que todo grupo topológico es un espacio homogéneo. ■