Integración de K-formas.

Teorema.

Sean $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos, $f: U \to V$ difeomorfismo C^1. Ent. para toda func. cont. $\phi: V \to \mathbb{R}$ se tiene que la integral

$$\int_V \phi(y)\,dy$$

Existe si y sólo si la integral

$$\int_U |Jf(x)| \cdot \phi \circ f(x)\,dx$$

y si alguna existe, ent.

$$\int_V \phi(y)\,dy = \int_U |Jf(x)| \cdot \phi \circ f(x)\,dx$$

El objetivo es probar este resultado.

Def. Sea $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$. Se define el soporte de la K-forma ω, como el conjunto:

$$\operatorname{Supp}(\omega) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid \omega_x \neq 0\}}$$

Se dice que ω tiene soporte compacto, si $\operatorname{supp}(\omega)$ es compacto.

$\Omega^k_c(\mathbb{R}^n)$ denota al conjunto de todas las K-formas con soporte compacto. Si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto, $\Omega^k_c(U)$ denota al conjunto de todas las K-formas con soporte compacto m

$$\operatorname{Supp}(\omega) \subseteq U.$$

Def. Sea $\omega = f\,dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \in \Omega^n_c(\mathbb{R}^n)$, i.e $f \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$. Se define la int. de la K-forma:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx$$

Def. Sean $a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2, \dots, a_n \leq b_n \in \mathbb{R}$. Se define el n-rectángulo $Q \subseteq \mathbb{R}^n$, como:

$$Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$$

Teorema (Lema de Poincaré para Q).

Sea $\omega \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$ m $supp(\omega) \subseteq int(Q)$. Las sig. afirmaciones son equivalentes:

i) $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0$.

ii) Existe una $(n-1)$-forma μ con soporte compacto, $supp(\mu) \subseteq int(Q)$ que satisface que $d\mu = \omega$.

Dem (1).

ii) $\Rightarrow$ i) Suponga (ii), ent. $\exists\ \mu \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ dada por:

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} f_i\, dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$$

ent.

$$d\mu = \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

Note que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)\, dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)\, dx$$

$$= \dots = 0.$$

$$\therefore \int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0$$

i) $\Rightarrow$ ii): Para probar el resultado, se probará una prop. antes.

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Se dice que U tiene la propiedad P si para toda $\omega \in \Omega_c^m(U)$ tal que $\int_U \omega = 0$, ent. $\omega \in d\Omega_c^{m-1}(U)$.

* Teorema (intermedio).

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ abierto y $A \subseteq \mathbb{R}$ intervalo abierto. Entonces si U tiene la propiedad P, $U \times A \subseteq \mathbb{R}^n$ también la tiene.

Dem (2).

Antes de probar esto, se probará el caso en que $n = 1$.

Ejercicio (Auxiliar).

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función con soporte compacto clase C^r m $\operatorname{supp}(f) \subseteq]a,b[$. Ent. las

Sig. son equivalentes:

(1) $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

(2) Existe $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función de clase C^{r+1} m $\operatorname{supp}(g) \subseteq]a,b[$ y:

$$\frac{dg}{dx} = f$$

Dem (3).

Es inmediata tomando a g como:

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

3 $\square$

Regresando a la prueba del teorema. Considere a $U \times A$ expresado como:

$$U \times A = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, t) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1, \dots, x_{n-1}) \in U \text{ y } t \in A\}$$

Sea $\omega \in \Omega_c^n(U \times A)$ una n-forma m $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0$. ω puede ser escrita como:

$$\omega = dt \wedge \alpha$$

donde $\alpha(x,t) = f(x,t)\,dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}$ con $f \in C_0^\infty(U \times A)$. Definamos $\theta \in \Omega_c^{n-1}(U)$

a la $n-1$-forma dada por:

$$\theta = \left(\int_A f(x,t)\,dt \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}$$

Afirmamos que $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \theta = 0$. En efecto:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \theta &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_A f(x,t)\,dt \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x,t)\,dt\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(u)\,du \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \omega \\
&= 0
\end{aligned}$$

Y como U cumple la propiedad P, ent. $\exists\, \mu \in \Omega_c^{n-2}(U)$ m $\theta = d\mu$. Sea ahora $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$

una función de prueba (bump function) ρ $\mathrm{supp}(\rho) \subseteq A$ y

$$\int_A \rho(t)\,dt = 1$$

Sea $\mathcal{K} = \rho\, dt \wedge \mu$ una $n-1$-forma. Ent.

$$\begin{aligned} d\mathcal{K} &= -d(\rho\, dt) \wedge \mu + \rho\, dt \wedge d\mu \\ &= \rho\, dt \wedge \theta \end{aligned}$$

y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \omega - d\mathcal{K} &= dt \wedge (\alpha - \rho\theta) \\ &= dt \wedge u(x,t)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1} \end{aligned}$$

donde

$$u(x,t) = f(x,t) - \rho(t) \int_A f(x,t')\,dt'$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_A u(x,t)\,dt &= \int_A f(x,t)\,dt - \int_A \rho(t)\left(\int_A f(x,t')\,dt'\right) dt \\ &= \int_A f(x,t)\,dt - \int_A f(x,t')\,dt' \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto, del ejercicio auxiliar, $u(x,t)$ se ve como:

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} v(x,t), \text{ dónde:}$$

$$v(x,t) = \int_a^t u(x,s)\,ds$$

con $v(x,a) = 0$ y $v(x,b) = 0$, $\forall x \in U$. Luego $v \in C_c^\infty(U \times A)$. Defina con esto

$$r = v(x,t)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1} \in \Omega_c^{n-1}(U \times A)$$

ent. $dr = \frac{\partial v}{\partial t}(x,t)\, dt \wedge \ldots \wedge dx_{n-1} = u(x,t)\, dt \wedge \ldots \wedge dx_{n-1}$

$$\begin{aligned} &= dt \wedge u(x,t)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1} \\ &= \omega - d\mathcal{K} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ \omega &= dr + d\mathcal{K} \\ &= d(r + \mathcal{K}) \end{aligned}$$

Con $\gamma + \mathcal{K} \in \Omega_c^{n-1}(U \times A)$, i.e $U \times A$ tiene la propiedad P.

$^{2}\square$

Particiones De La Unidad.

Def. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $\{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta finita de U. Una C^∞ partición de la unidad subordinada en $\{U_i\}_{i\in I}$ es una colección de funciones $\{\rho_i\}_{i\in I}$ C^∞ no neg. que satisfacen:

i) $\sum_{i\in I} \rho_i = 1$.

ii) $\operatorname{supp}(\rho_i) \subseteq U_i \; \forall i \in I$.

Cuando I es un conjunto infinito, para que la condición i) tenga sentido se requiere una condición de finitud local).

Def. Una colección $\{A_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de subconjuntos de un esp. topológico S es finito localmente si para todo punto q en S tiene una vecindad que sólo intersecta un número finito de conjuntos A_α con $\alpha \in A$.

Def. Una C^∞ partición de la unidad sobre $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto es una colección de funciones C^∞ $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ tal que:

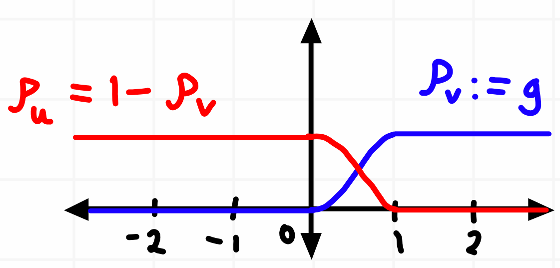
i) La colección de soportes $\{\operatorname{supp}(\rho_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ es localmente finita.

ii) $\sum_{\alpha\in A} \rho_\alpha = 1$.

Dada una cubierta abierta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de $U \subseteq \mathbb{R}^n$, se dice que la partición de la unidad $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es subordinada a una cubierta abierta si $\operatorname{supp}(\rho_\alpha) \subseteq U_\alpha$, $\forall \alpha \in A$.

Ejemplo.

1) Sean $U =]-\infty, 2[$ y $V =]-1, \infty[$ abiertos en $\mathbb{R}^n$ y sea $\rho_V = g$ una función C^∞:



Observemos que $\operatorname{supp}(\rho_V) \subseteq V$ y definiendo $\rho_U := 1 - \rho_V$, se sigue que

$Supp(\rho_u) \subseteq U$ y:

$$\rho_u + \rho_v = 1$$

i.e. $\{\rho_u, \rho_v\}$ es part. de la unidad.

Lema de Poincaré para formas con soporte compacto en subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$.

Teorema.

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y conexo, $\omega \in \Omega^n_c(\mathbb{R}^n)$ ⫙ $supp(\omega) \subseteq U$. Ent. las sig. afirmaciones son equivalentes:

1) $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0$.

2) Existe una $(n-1)$-forma μ con soporte compacto tal que $supp(\mu) \subseteq U$ y $\omega = d\mu$.

Dem.

(2) ⇒ (1): Es inmediata ya que $\exists\, Q \subseteq \mathbb{R}^n$ rect. acotado ⫙ $supp(\omega) \subseteq Q$ y, por el lema de Poincaré para Q se tiene que $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0$.

(1) ⇒ (2): Sean ω_1 y ω_2 n-formas con soporte compacto tales que

$$supp(\omega_1),\ supp(\omega_2) \subseteq U.$$

Se escribe $\omega_1 \sim \omega_2$ para denotar la sig. condición: Existe una $(n-1)$-forma con soporte compacto μ, tal que $Supp(\mu) \subseteq U$ y $\omega_1 - \omega_2 = d\mu$.

Para probar el resultado se necesitan algunas cosas. Sea $Q_0 \subseteq U$ un rect. y ω_0 una n-forma suave ⫙ $Supp(\omega_0) \subseteq Q_0$ y

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega_0 = 1$$

Teorema (Auxiliar).

Si ω es una n-forma con soporte compacto ⫙ $supp(\omega) \subseteq U$, $c := \int_{\mathbb{R}^n} \omega$, ent. $\omega \sim c\omega_0$.

Dem.

Cuando se pruebe lo ant. se probara que $\omega = d\mu$, ya que $c = 0 = \int_{\mathbb{R}^n} \omega$. Ahora si con la prueba.

Sean $\{Q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una colección de rectángulos $\ni$

$$U = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Q_i$$

Y sean $\{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una part. de la unidad subordinada a $\{Q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, i.e $\operatorname{Supp}(\phi_i) \subseteq \operatorname{int}(Q_i)$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Se afirma que $\exists\ m\in\mathbb{N} \ni$

$$\omega = \sum_{j=1}^{m} \phi_i \omega$$

Para el resultado, es suficiente probar el t. ant. para un sumando $\phi_i\omega$. En otras palabras:

$$\operatorname{Supp}(\omega) \subseteq \operatorname{int}(Q_i)$$

Sea $Q = Q_i$. Afirmamos que es posible conectar a Q con Q_0 con una sucesión finita

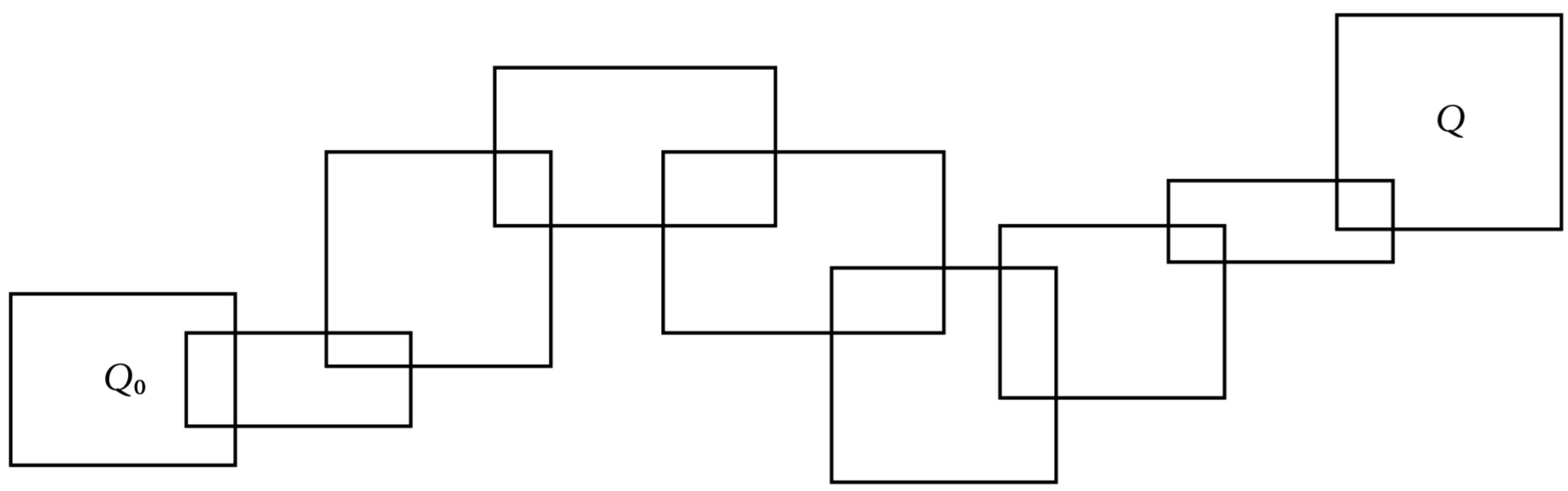


Figure 3.3.1. A sequence of rectangles joining the rectangles Q_0 and Q

de rectángulos.

Lema

Existe una sucesión de rectángulos $R_0, R_1, \dots, R_{N+1} \ni R_0 = Q_0$, $R_{N+1} = Q$ y $\operatorname{int}(R_i \cap R_{i+1}) \neq \emptyset$.

Notas.