Exámenes Parciales Topología I Quintín

Cristo Daniel Alvarado

3 de marzo de 2024

Índice general

Capítulo 1

Primer Examamen Parcial

1.1. Ejercicios

Ejercicio 1.1.1

Capítulo 2

Segundo Examen Parcial

2.1. Ejercicios

Ejercicio 2.1.1

Capítulo 3

Tercer Examen Parcial

3.1. Ejercicios

Ejercicio 3.1.1

Capítulo 4

ETS Ordinario

4.1. Ejercicios

Ejercicio 4.1.1
Sea $A = \left\{\sin n \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$. Pruebe que $\overline{A} = [-1, 1]$ en $(\mathbb{R}, \tau_u)$.

Demostración:
Notemos que $A = \sin(\mathbb{N})$. Sea $C = \sin(\mathbb{Z})$.

Es claro que $C \subseteq [-1, 1]$ donde $[-1, 1]$ es un cerrado en $(\mathbb{R}, \tau_u)$, por tanto $\overline{C} \subseteq [-1, 1]$, veremos que se cumple la otra contención. Sea $x \in [-1, 1]$,

- Si $x \in C$, es claro que $x \in \overline{C}$ ya que $C \subseteq \overline{C}$.
- Si $x \notin C$, como la función $t \mapsto \operatorname{sen} t$ de $\mathbb{R}$ a $[-1, 1]$ es suprayectiva, entonces existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $\sin \theta = x$.

  Ahora, por la proposición 4.2.2, el conjunto

  $$B = \left\{a + 2\pi b \middle| a, b \in \mathbb{Z}\right\}$$

  es denso en $\mathbb{R}$ por ser 2π irracional. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\theta_n = a_n + 2\pi b_n \in B$ tal que $\left|\theta - \theta_n\right| < \frac{1}{n}$, es decir que la sucesión $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a θ. Como $t \mapsto \sin t$ es continua, entonces:

  $$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left| \sin\theta - \sin\theta_n \right| &= 0 \\ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left| x - \sin\left(a_n + 2\pi b_n\right) \right| &= 0 \end{aligned}$$

  pero,

  $$\begin{aligned} \sin\left(a_n + 2\pi b_n\right) &= \sin\left(a_n\right)\cos\left(2\pi b_n\right) + \cos\left(a_n\right)\sin\left(2\pi b_n\right) \\ &= \sin\left(a_n\right) \end{aligned}$$

  pues $\cos(2\pi k) = 1$ y $\sin(2\pi k) = 0$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Luego,

  $$\lim_{n\to\infty} \left|x - \sin a_n\right| = 0$$

  es decir que para $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\left|x - \sin a_n\right| < \varepsilon$, donde $a_n \in \mathbb{Z}$.

Por los dos incisos anteriores, se sigue que lo que $\overline{C} \subseteq [-1, 1] \Rightarrow \overline{C} = [-1, 1]$, es decir que $\sin(\mathbb{Z})$ es denso en $[-1, 1]$, pero $t \mapsto \sin t$ es continua y periódica entre $[-1, 1]$, por tanto de la proposición 4.2.3 se sigue que $A = \sin(\mathbb{N})$ es denso en $[-1, 1]$. ■

4.2. Resultados Preeliminares

Proposición 4.2.1
Considere al grupo aditivo $(\mathbb{R}, +)$. Entonces todo subgrupo H de éste es denso en la topología $(\mathbb{R}, \tau_u)$ ó es cíclico.

Demostración:
Se tienen que probar dos cosas:

1. Suponga que G es denso. Se probará que G no puede ser cíclico. En efecto, si G fuera cíclico, existiría $g \in G$ tal que
$$G = \langle g \rangle$$
es claro que $g \neq 0$, pues en caso contrario se tendría que $G = \{0\}$, que no puede suceder ya que G es denso en $\mathbb{R}$, así $g > 0$; además, existe $h \in G$ tal que $0 < h < g$ ya que el conjunto $]0, g[$ es abierto en $\mathbb{R}$.

   Como $G = \langle g \rangle$ existe entonces $n \in \mathbb{N}$ tal que $g = hn$ (por ser $h, g > 0$), es decir que $g \leq h\#_c$, pues $h < g$. Por tanto, G no es cíclico.

2. Suponga que G no es denso. Probaremos que G es cíclico, sea
$$g = \inf \left\{ x \in G \middle| x > 0 \right\}$$
Se tienen dos casos. Afirmamos que $g > 0$. En efecto, suponga que $g = 0$, sea $U \subseteq \mathbb{R}$ abierto no vacío y, $x \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subseteq U$. Como $g = 0$, existe $g_\varepsilon \in G$ tal que $0 < g_\varepsilon < \varepsilon$, sea ahora $k \in \mathbb{Z}$ tal que:
$$kg_\varepsilon \leq x < (k+1)g_\varepsilon$$
es claro que $kg_\varepsilon \in G$, y además:
$$\begin{aligned} 0 \leq & x - kg_\varepsilon \\ < & (k+1)g_\varepsilon - kg_\varepsilon \\ = & g_\varepsilon \\ < & \varepsilon \end{aligned}$$
es decir, $\left| x - kg_\varepsilon \right| < \varepsilon$ y por ende $kg_\varepsilon \in U$. Por tanto, G es denso en $\mathbb{R}\#_c$. Por tanto, $g > 0$. Veamos ahora que $g \in G$.

   Suponga que $g \notin G$, entonces existen $h_1, h_2 \in G$ positivos tales que:
$$g < h_1 < h_2 < 2g$$
(por propiedades del ínfimo), luego $h_2 - h_1 \in G$ y son tales que $0 < h_2 - h_1 < g\#_c$, pues g es el ínfimo. Luego, $g \in G$.

   Sea $x \in G$, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que
$$kg \leq x < (k+1)g$$
Así, $kg \in G$ lo cual implica que $x - kg \in H$, por ende:
$$\begin{aligned} 0 \leq & x - kg \\ < & (k+1)g - kg \\ = & \, g \end{aligned}$$
al ser g el ínfimo, debe suceder que $x - kg = 0$, es decir que $x = kg$. Por tanto, $G = \langle g \rangle$.

por los dos incisos anteriores, se sigue que G es denso ó es cíclico. ∎

Proposición 4.2.2
Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces el conjunto:

$$A = \left\{ a + b\alpha \middle| a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

es denso en $\mathbb{R}$ con la topología usual.

Demostración:
Afirmamos que A es un subgrupo de $\mathbb{R}$ el cual no es cíclico, por tanto, de la proposición anterior, se sigue que A es denso en $\mathbb{R}$ con la topología usual.

Es claro que A es subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$, pues si $a_1 + b_1\alpha, a_2 + b_2\alpha \in A$, se tiene que el elemento $(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\alpha \in A$ ya que $a_1 - a_2, b_1 - b_2 \in \mathbb{Z}$.

Ahora, supongamos que A es cíclico, entonces existiría $a + b\alpha \in A$ positivo (lo podemos elegir positivo y no puede ser cero ya que $\alpha \in A$) tal que $A = \langle a + b\alpha \rangle$. En particular, $\alpha \in A$, por tanto, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\begin{aligned} \alpha =& m(a + b\alpha) \\ \Rightarrow (1 - mb)\alpha =& ma \end{aligned}$$

entonces, $mb = 1$, lo cual implica que $m = b = \pm 1$ (en caso contrario, un lado de la ecuación sería irracional y el otro entero), y que $a = 0$. Por tanto, $A = \langle \alpha \rangle = \langle -\alpha \rangle$, pero esto no puede suceder pues el elemento $1 + 2\alpha \notin \langle \alpha \rangle$, pero $1 + 2\alpha \in A\#_c$.

Por tanto, A no es cíclico. Luego, de la proposición anterior, se sigue que A es denso en $\mathbb{R}$ con la topología usual. ■

Proposición 4.2.3
Sea $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ función continua y periódica de período $T > 0$. Entonces, si $f(\mathbb{Z})$ es denso en $(\mathbb{R}, \tau_u)$, entonces $f(\mathbb{N})$ también lo es.

Demostración:
Si T es racional, entonces $f(\mathbb{Z}) = T$ el cual no es denso en $[-1, 1]$, por tanto, T debe ser irracional. Como f es continua y acotada, entonces es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

Sea $x \in [-1, 1]$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $\left| f(m) - x \right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Como f es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que si $\left| u - v \right| < \delta$ entones $\left| f(u) - f(v) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Si $m \in \mathbb{N}$, se tiene el resultado. Suponga que $m \leq 0$. Existen $p, q \in \mathbb{N}$ tales que

$$\left| p - Tq \right| < \delta$$

donde $p > -m$ y $q > 1/\delta$, esto pues el conjunto $]T, \infty[\cap \mathbb{Q}$ es denso en $[T, \infty[$. Entonces:

$$\begin{aligned} \left| f(m + p) - \alpha \right| &\leq \left| f(m + p) - f(m) \right| + \left| f(m) - \alpha \right| \\ &\leq \left| f(m + (p - Tq)) - f(m) \right| + \left| f(m) - \alpha \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

con $p + m \in \mathbb{N}$. Luego $f(\mathbb{N})$ es denso en $[-1, 1]$.

■