Taller: Espacios de configuraciones de gráficas. Tres enfoques distintos.

Cristo Daniel Alvarado

10 de julio de 2024

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Taller impartido por María Teresa Idskgen.

1.1. Conceptos Fundamentales

En un **espacio de configuraciones**, se tiene una gráfica y objetos/particulas que se mueven sobre la gráfica sin choques.

Definición 1.1.1
Dada una gráfica $\mathcal{G}$, se definimos su **gráfica de k-fichas** $F_k(\mathcal{G})$, como:

- Los vértices son conjuntos de vértices de $\mathcal{G}$.
- Las aristas son (A, B) si
$$A \triangle B = \{x, y\}$$
con $(x, y) \in A(\mathcal{G})$.

Observación 1.1.1
Podemos hacer una distinción de casos en que las fichas son iguales o son distinguibles, pero para el caso haremos que son distinguibles.

Observación 1.1.2
En la gráfica de fichas, no todas se mueven al mismo tiempo. Se mueve una por una. Es por ello que se da una observación posterior. Cuando movemos una ficha es como mover un hueco.

Observación 1.1.3
Una forma de construir la gráfica de k-fichas de una gráfica $\mathcal{G}$, es haciendo el producto de $\mathcal{G}$ consigo mismo k-veces y, eliminando los casos en que hay fichas en el mismo lugar. Sería pues
$$\underbrace{\mathcal{G}\square\mathcal{G}\square\cdots\square\mathcal{G}}_{k\text{-veces}}$$
notemos que en el caso más simple de una trayectoria simple (como el que se muestra en el diagrama), en el caso en que las fichas sean distinguibles, se tiene un grafo disconexo.

¿Qué pasa en el caso en que tenemos la siguiente gráfica?

(hacer gráfica de las imágenes que se hicieron anteriormente).

Definición 1.1.2
Sean $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ gráficas. Decimos que una función $f : V(\mathcal{G}) \to V(\mathcal{H})$ es una **función de gráficas**, si es tal que $(x, y) \in A(\mathcal{G})$ implica que $(f(x), f(y)) \in A(\mathcal{H})$. Decimos este es un **isomorfismo de gráficas** si f es biyección.

Observación 1.1.4
Si $\mathcal{G}$ tiene n-vértices, entonces

$$F_k(\mathcal{G}) \cong F_{n-k}(\mathcal{G})$$

En el caso que $k = n - 1$, $F_{n-1}(\mathcal{G}) \cong F_1(\mathcal{G})$.

Si $\{x_1, .., x_k\}$ es un conjunto independiente, entonces $d(V) = \sum_{i=1}^{k} d(x_i)$ (un vértice en la gráfica de fichas). En general, se le resta 2 por cada arista en $\langle x_1, ..., x_k \rangle$.

Definición 1.1.3
Un **núcleo** de una gráfica $\mathcal{G}$ es un conjunto $N \subseteq V(\mathcal{G})$ independiente y absorbente, esto es, para todo $v \in V(\mathcal{G}) \setminus N$ existe $w \in N$ tal que $(v, w) \in F(\mathcal{G})$.

Teorema 1.1.1
Si $\mathcal{G}$ no tiene ciclos dirigidos de longitud impar, entonces $\mathcal{G}$ tiene núcleo.

Teorema 1.1.2
Si $\mathcal{G}$ es bipartita, entonces $F_k(\mathcal{G})$ es bipartita.

Ejemplo 1.1.1
Hacer ejemplo de las fotos de las dos gráficas, una con núcleo y otra sin núcleo tal que sus gráficas de fichas no tienen núcleo y si tienen, respectivamente.

Teorema 1.1.3
Sea C_a un ciclo dirigido. Enotnces, $F_k(C_a)$ tiene núcleo.

Sea DP_u la gráfica que se obtiene de un cíclo dirigido pegándole una flecha que entra. Entonces, $F_k(DP_u)$ tiene núcleo si $k = 2, 3, 4$.

Definición 1.1.4
Un **automorfismo** es un morfismo de gráficas $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$

Definición 1.1.5
$Aut(\mathcal{G})$ denota al grupo de automorfismos de una gráfica con la composiicón usual de funciones y el neutro es la función identidad.

Sea $f \in Aut(\mathcal{G})$, entonces existe $\varphi \in Aut(F_k(\mathcal{G}))$ dado por: si $V = \{x_1, ..., x_k\}$, entonces $\varphi(v) = \{f(x_1), ..., f(x_k)\}$.

Teorema 1.1.4
Si $\mathcal{G}$ no contiene como subgráfica indicuda a C_4 y diamante, entonces $Aut(\mathcal{G}) \cong Aut(F_k(\mathcal{G}))$.

1.2. Punto de vista topológico

Definición 1.2.1
Sea X un espacio topológico. Definimos su **espacio de configuraciones ordenado** como

$$Conf_n(X) = \underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{n\text{-veces}} \setminus \Delta$$

donde

$$\Delta = \left\{ (x_1, ..., x_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i \middle| x_i \neq x_j \quad \forall i, j \in [\![1, n]\!] \right\}$$

y, de manera similar se define el **espacio de configuraciones deordenado de X en n puntos** $\cup Conf_n(X)$ como el cociente de $Conf_n(X)/\Sigma_n$.

Teorema 1.2.1
$Conf_n(I)$ tiene $n!$ componentes conexas todas contraíbles a un punto.

Si $\mathcal{G}$ es una gráfica distinta a la trayectoria, entonces $Conf_n(\mathcal{G})$ es conexo. En general, $\dot{\cup}Conf_n(\mathcal{G})$ es conexo si $\mathcal{G}$ es conexa.

Definición 1.2.2
Sea X un espacio topológico. Definimos su **espacio de configuraciones ordenado discretizado** como

$$D_n(X) = \underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{n\text{-veces}} \setminus \Delta'$$

donde Δ' son las celdas abiertas cuya cerradura intersecta a Δ. De manera similar se define el **espacio de configuraciones deordenado discretizado de X en n puntos** $\cup D_n(X)$ como el cociente de $D_n(X)/\Sigma_n$.

Teorema 1.2.2
Sea $\mathcal{G}$ una gráfica tal que

- Entre dos vértices que no son de grado 2 hay al menos $n - 1$ aristas.
- Todo cíclo es de longitud al menos $n + 1$. Entonces, $Conf_n(\mathcal{G})$ se retrae fuertemente por deformación en $D_n(\mathcal{G})$ y $\bigcup Conf_n(\mathcal{G})$ en $\cup D_n(\mathcal{G})$.

1.3. Espacios de Cerradura

Definición 1.3.1
Sea X un conjunto. Un **operador cerradura** en X es un mapeo $c : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ tal que

- $c(\emptyset) = \emptyset$.

- $A \subseteq c(A)$ para todo $A \in \mathcal{P}(X)$.
- $c(A \cup B) = c(A) \cup c(B)$ para todo $A, B \in \mathcal{P}(X)$.

La pareja (X, c) es llamada **espacio de cerradura**.

Ejemplo 1.3.1
Si $c(A) = A$ para todo $A \in \mathcal{P}(X)$, decimos que c es la **cerradura discreta**.

Ejemplo 1.3.2
Si $c(A) = X$ para todo $A \in \mathcal{P}(X)$, decimos que c es la **cerradura indiscreta**.

Observación 1.3.1
No toda cerradura induce una topología en un conjunto pues necesitamos que $c^2 = c$.

A una gráfica se le puede dar una estructura de operador cerradura como $(V(\mathcal{G}), N[])$ si tomamos como conjunto al conjunto de vértices y como operador la vecindad cerrada.

Definición 1.3.2
Sean (X, c_X) y (Y, c_Y) espacios cerrada. Decimos que un mapeo $f : X \to Y$ es **continuo** si para todo $U \subseteq X$ se tiene que

$$f(c_X(U)) \subseteq c_Y(f(U)) \tag{1.1}$$

Observación 1.3.2
En el caso que c_Y sea la cerradura indiscreta, toda función simepre es continua. En cambio, casi nunca es continua si c_Y es indiscreta.

Definición 1.3.3
Sea (X, c_X) un espacio de cerradura. Se define el mapeo $\tau_{c_X} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ el mapeo

$$\tau_{c_X}(A) = \bigcap \left\{ F \subseteq X \middle| c_X(F) = F \text{ y } A \subseteq F \right\}$$

llamamos a τ_{c_X} la **modificación topológica de** c_X.

Observación 1.3.3
En la definición anterior se cumplen:

1. $\tau_{c_X}^2 = \tau_{c_X}$.
2. $c_X < \tau_{c_X}$.
3. Para todo c tal que $c^2 = c$ y $c_X < c$ tenemos que $\tau_{c_X} < c$.

Proposición 1.3.1
$\tau : \mathbf{Cl} \to \mathbf{Top}$ es un funtor adjunto izquierdo del funtor inclusión $i : \mathbf{Top} \to \mathbf{Cl}$, donde $\mathbf{Cl}$ denota la categoría de todos los espacios de cerradura y $\mathbf{Top}$ es la categoría de espacios topológicos.

Definición 1.3.4
Sean $f, g : (X, c) \to (Y, c')$ dos funciones continuas y supongamos que $X' \subseteq X$, entonces decimos que f es **homotópica a** g **relativo a** X' si existe un mapeo continuo $H : (X, c) \times I \to (Y, c)$ tal que

$$H(x, 0) = f(x) \quad \text{y} \quad H(x, 1) = g(x), \quad \forall x \in X$$

(viendo a I como espacio de cerradura y definiendo el producto entre espacios cerradura) y,

$$H(x, t) = f(x) = g(x), \quad \forall x \in X'$$

Observación 1.3.4
Se cumple lo siguiente:

1. Las gráficas completas son contraíbles.
2. Si $v, w \in V(\mathcal{G})$ son tales que $N[v] = N[w]$, entonces $\mathcal{G} \simeq \mathcal{G} \setminus \{v\}$.

¿Qué pasa si existe $w \in V(\mathcal{G})$ tal que $N[v] = V(\mathcal{G})$? Se tiene pues que $\mathcal{G}$ es contraíble.

Teorema 1.3.1
$c \cup Conf_2(P_n) \simeq \{*\}$. $cConf_2(P_n) \simeq \{*.\star\}$.

Teorema 1.3.2
$\cup Conf_k(P_n) \simeq \{*\}$.

Teorema 1.3.3
Sea $\mathcal{G}$ una gráfica. Enotnces $c \cup Conf_n(\mathcal{G})$ es una gráfica completa si y sólo si $\mathcal{G}^c$ no tiene como sugráfica ninguna completa bipartita $K_{m,k}$ con $m + k > n$, $m, k \geq 0$.

Teorema 1.3.4
Sea $K_{1,n}$ la gráfica estrella. Entonces $c \cup Conf_2(K_{1,n})$ es contraíble.

Sea T un árbol. Entonces, $c \cup Conf_2(T)$ es homotópico a la

Capítulo 2

Ejercicios