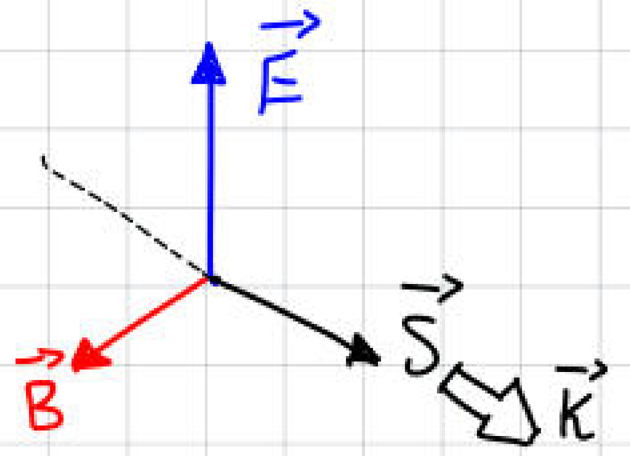
Vector de Poynting

Vector de flujo de energía asociada a una onda EM. Para ondas armónicas simples:

$$\vec{S} = c^2 \varepsilon_0 \vec{E}_0 \times \vec{B}_0 \cos^2(\vec{K}\cdot\vec{r} - \omega t) \quad \dots \quad (1)$$

$$\Rightarrow \vec{S} \propto \vec{E} \times \vec{B}$$

Visualmente:



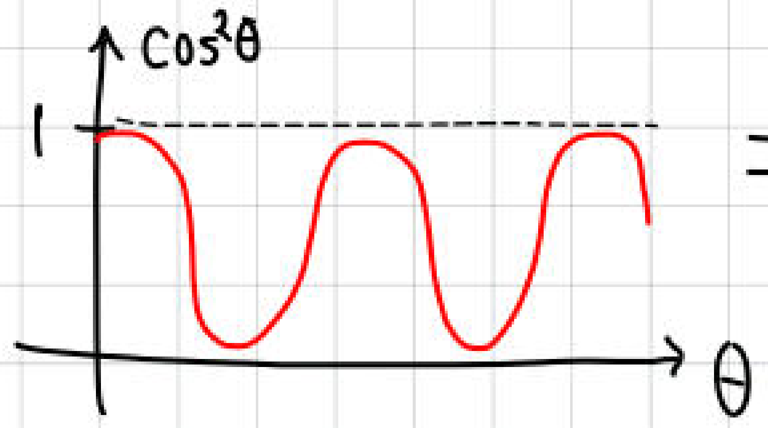
$\vec{S}$ apunta en la dirección de $\vec{K}$. De aquí:

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{K}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

$$\vec{B}(x,y,z,t) = \vec{B}_0 \cos(\vec{K}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

Donde $E_0 = cB_0$.

Veamos ahora el comportamiento de S:



$$\Rightarrow \|\vec{S}\| \propto \cos\varphi(\vec{r}, t)$$

Si el ojo detecta a S, porqué no vemos las variaciones? Porqué el ojo ve un promedio de las mismas.

Retomando, de (1), vemos que $\|\vec{S}\|$ es una función periódica que oscila entre máximos y mínimos. No vemos estos cambios, pues el ojo ve un promedio de la magnitud del vector de Poynting en un intervalo de tiempo suficientemente grande.

Para calcular el valor promedio de una función $f(t)$, se hace lo siguiente:

$$\langle f(t) \rangle_{\underbrace{T}_{\text{Intervalo de tiempo en el que se promedia}}} = \frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} f(t)\,dt$$

Para el caso de una función armónica:

$$\langle e^{i\omega t} \rangle_T = \int_{t-T/2}^{t+T/2} e^{i\omega t}\,dt = \frac{1}{i\omega t} e^{i\omega t}\Big|_{t-T/2}^{t+T/2}$$

$$= \frac{1}{i\omega T}\left(e^{i\omega(t+T/2)} - e^{i\omega(t-T/2)}\right)$$

$$= \frac{1}{i\omega T} e^{i\omega t}\left(e^{i\omega T/2} - e^{-i\omega T/2}\right)$$

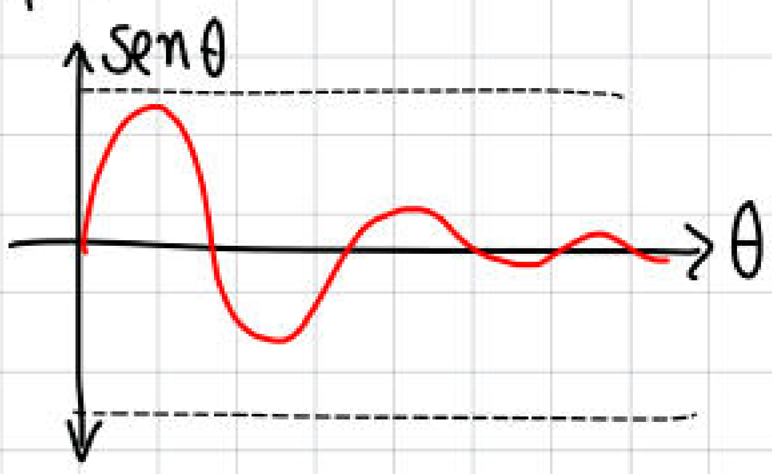
Pero: $e^{i\omega T/2} - e^{-i\omega T/2} = \cos\left(\frac{\omega T}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\omega T}{2}\right) - \underbrace{\cos\left(-\frac{\omega T}{2}\right)}_{=\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)} - \underbrace{i\,\text{sen}\left(-\frac{\omega T}{2}\right)}_{=-i\,\text{sen}\left(\frac{\omega T}{2}\right)} = 2i\,\text{sen}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$

Por tanto:

$$\langle e^{i\omega t} \rangle_T = \frac{e^{i\omega t}}{i\omega T} 2i\,\text{sen}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

$$= \frac{\text{sen}\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\omega T/2} \cdot e^{i\omega t}$$

Aquí, $\text{sen}\left(\frac{\omega T}{2}\right)/\frac{\omega T}{2}$ se conoce como seno cardinal, y:



Esta es una función que oscila con amplitud que disminuye rápidamente. A partir de lo anterior se tiene que:

$$\langle \cos(\omega t)\rangle_T = \text{senc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)\cos(\omega t)$$

Y:

$$\langle \text{sen}(\omega t)\rangle_T = \text{senc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)\cdot \text{sen}(\omega t)$$

Si el intervalo de tiempo sobre el cual se promedia, T, es igual al periodo temporal de la función, el promedio se hace cero.

Para $\cos^2(\omega t)$:

$$\underbrace{\langle \cos^2(\omega t)\rangle_T}_{\text{Función que oscila alrededor de } 1/2\text{, con frecuencia } 2\omega \text{ y que tiende a } 1/2 \text{ conforme } T\to\infty} = \frac{1}{2}\left[1+\overbrace{\text{senc}(\omega T)}^{\text{Tiende a 0 para T grande.}}\cdot\cos(2\omega t)\right]$$

En el caso de la luz natural (la que ve solo el ojo humano), la frecuencia temporal es de 10^{15} Hz, i.e el periodo es de 10^{-15} seg. El intervalo en el que el ojo promedia, es de $1/30$ a $1/12$ seg el que es bastante grande a comparación de T.

A partir de que $\langle \cos^2(\omega t)\rangle_{T\gg 1} \simeq \frac{1}{2}$:

$$\langle S\rangle_{T\gg 1} = \frac{1}{2}c^2\varepsilon_0 \,\|\vec{E}_0\|\cdot\|\vec{B}_0\|$$

$\boxed{D}$ IRRADIANCIA: Energía promedio por unidad de tiempo asociada a una onda EM. Cantidad de luz que se detecta por el ojo u otro instrumento.

$$I = \frac{1}{2}c^2\varepsilon_0\cdot E_0\cdot B_0 \qquad [I] = \frac{J}{s\cdot m^2} = \frac{W}{m^2}$$

Para ondas linealmente polarizadas: $E_0 = cB_0$ de donde:

$$I = \frac{1}{2}c^2\cdot\varepsilon_0\cdot E_0\cdot\frac{E_0}{c} = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 E_0^2$$

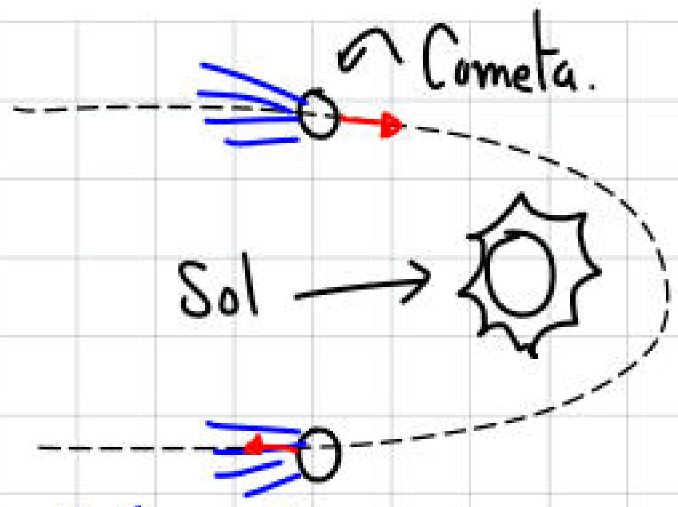
ó bien:

$$I = \frac{1}{2}c^2\varepsilon_0\cdot cB_0\cdot B_0 = \frac{1}{2}c^3\varepsilon_0 B_0^2 = \frac{c}{2\mu_0}B_0^2$$

Aunque, en general: $I = \varepsilon_0 c\langle E^2\rangle_T = \frac{c}{\mu_0}\langle B^2\rangle_T$

Momento y Presión de Radiación

Fenómeno de la cola de un cometa:



Kepler sugiere que la dirección en que apunta la cola está dada por la presión de la luz solar. Pero no, era debida a partículas (e^- y p^+) que eyecta el sol a altas velocidades.

Maxwell (1873)

"En un medio en que las ondas se propagan hay una presión en la dirección normal a las ondas numéricamente igual a la energía en una unidad de volumen".

$\vec{S}$: Energía asociada a la onda EM $\Rightarrow$ IRRADIANCIA $\Rightarrow$ ENERGÍA $\Rightarrow$ FUERZA y PRESIÓN $\Rightarrow$ Onda EM ejerce una fuerza.

La fuerza resultante puede calcularse considerando:

$$F = \frac{dP}{dt}$$ ← Asociada al flujo de energía.

Por otro lado, las densidades volumétricas de energía de campo $\vec{E}$ y $\vec{B}$, son:

$$u_E = \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot E^2 \quad y \quad u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Maxwell demuestra que:

$$\overbrace{P}^{\text{Presión de Radiación.}} = u = u_E + u_B$$

La presión de radiación está relacionada con el vector Poynting.

$$P = \frac{S}{c}$$ } Presión instantánea ejercida sobre una superficie por la que un haz incide de manera normal.

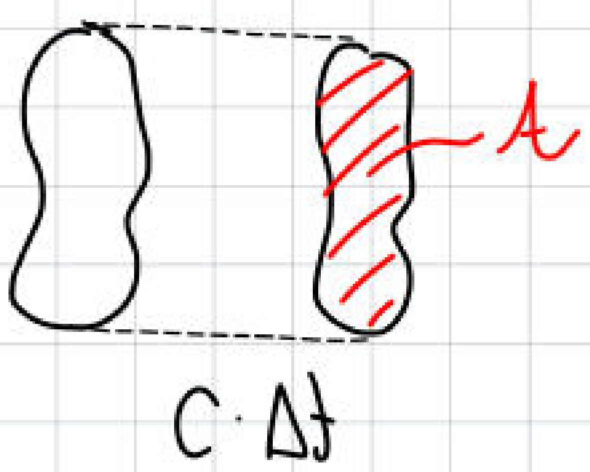
Luego, para la presión promedio:

$$\langle P \rangle_T = \frac{I}{c}$$

Sea p el momento asociado a la onda EM, la fuerza ejercida por el haz sobre una superficie absorbente A:

$$A \cdot P = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

Sea p_v el momento por unidad de volumen de la radiación. Luego:



$$\Delta p = p_v \cdot (c \cdot \Delta t \cdot A)$$

$$\Rightarrow A \cdot P = \frac{p_v (c \cdot \Delta t \cdot A)}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow P = p_v \cdot c$$

Por otro lado: $P = \frac{S}{c}$, luego:

$$P_v = \frac{S}{c^2}$$

Cuando la superficie es perfectamente reflectora, el haz que incide con velocidad c, se refleja a velocidad −c. Esto equivale a 2 veces el cambio de momento que ocurre en la absorción total.

$$\langle P(t) \rangle_T = 2 \cdot \frac{\langle S(t) \rangle_T}{c} = 2 \cdot \frac{I}{c}$$