# Lista 4 AnM III

Cristo Daniel Alvarado

7 de enero de 2024

# Índice general

# Capítulo 1

# Lista 4

## 1.1. Ejercicios

**Ejercicio 1.1.1** I. Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ la función

$$f(x)=\int_0^{x+e^{x^2}}\log\left(\frac{t+1}{t^2+1}\right)dt,\quad \forall x\geq 0.$$

**Verifique** que $f$ está bien definida y que es derivable en $[0,\infty[$. **Calcule** $f'(x)$, $\forall x\geq 0$.

II. Sea $f:[0,\infty[\to\mathbb{R}$ la función

$$f(x)=\left(\int_0^{\sqrt{x+1}\log\left(x^2+1\right)}e^{-t^2+1}dt\right)^2,\quad \forall x\geq 0.$$

**Demuestre** que $f$ está bien definida y que es derivable en $[0,\infty[$. **Calcule** $f'(x)$, $\forall x\geq 0$.

**Solución:**

De (I): Veamos que la función está bien definida. Para ello, notemos que la función $t\mapsto\log\left(\frac{t+1}{t^2+1}\right)$ es integrable en todo subintervalo compacto de $[0,\infty[$ (por ser continua). Luego $f$ está bien definida. Notemos que podemos reescribir a $f$ como

$$f(x)=G\circ h(x)\tag{1.1}$$

donde $G(x)=\int_0^x\log\left(\frac{t+1}{t^2+1}\right)dt$ y $h(x)=x+e^{x^2}$. Siendo que $t\mapsto\log\left(\frac{t+1}{t^2+1}\right)$ es integrable en todo subintervalo compacto, la función $G$ es diferenciable c.t.p. en $[0,\infty[$, y

$$G'(x)=\log\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)$$

c.t.p. en $[0,\infty[$. Para ver que la igualdad es en todo el dominio de la función, basta ver que la función $G'$ es continua en $[0,\infty[$. En efecto, notemos que □

**Ejercicio 1.1.2**
Sea $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ una función integrable en $[-\pi,\pi]$. Sea $F:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ la integral indefinida de $f$, dada por

$$F(x)=\int_{-\pi}^x(f(t)-c)\,dt,\quad \forall x\in[-\pi,\pi]$$

donde $c$ es constante. Defina

$$c_k' = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx \quad \text{y} \quad c_k = \int_{-\pi}^{\pi} F(x)e^{-ikx}dx$$

donde $k \in \mathbb{Z}$. **Determine** la relación entre $c_k$ y $c_k'$.

**Solución:**

Determinemos la relación entre las variables $c_k$ y $c_k'$. Para ello, notemos que podemos escribir

$$\begin{aligned} c_k' &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx \\ \Rightarrow c_k' - c\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - c\right) e^{ikx}\,dx \end{aligned}$$

□

**Ejercicio 1.1.3**

Integrando por partes, **calcule** las integrales siguientes

$$\int_a^b e^{\alpha x}\sin(\beta x)dx \quad \text{y} \quad \int_a^b e^{\alpha x}\cos(\beta x)dx$$

donde $\alpha$ y $\beta$ son constantes.

**Solución:**

□

**Ejercicio 1.1.4**

Sean $0 < a < 1$ y $-\pi < \lambda < \pi$ fijos. **Verifique** que existen las integrales siguientes y mediante una integración por partes **pruebe** la identidad:

$$\int_0^\infty \frac{-e^{i\lambda}x^a}{(e^{i\lambda}x+1)^2}dx = \int_0^\infty \frac{ax^{a-1}}{e^{i\lambda}x+1}dx$$

**Solución:**

Primero veamos que las funciones $x \mapsto \frac{-e^{i\lambda}x^a}{(e^{i\lambda}x+1)^2}$ y $x \mapsto \frac{ax^{a-1}}{e^{i\lambda}x+1}$ son integrables en $[0,\infty[$. En efecto, notemos que

$$
\begin{aligned}
|\frac{ax^{a-1}}{e^{i\lambda}x+1}| &= \frac{|ax^{a-1}|}{|e^{i\lambda}x+1|} \\
&= \frac{ax^{a-1}}{|x\left(\cos(\lambda)+i\operatorname{sen}(\lambda)\right)+1|} \\
&= \frac{ax^{a-1}}{|x\cos(\lambda)+1+ix\operatorname{sen}(\lambda)|} \\
&= \frac{ax^{a-1}}{\sqrt{x^2\cos^2(\lambda)+2x\cos(\lambda)+1+x^2\operatorname{sen}^2(\lambda)}} \\
&= \frac{ax^{a-1}}{\sqrt{x^2+2x\cos(\lambda)+1}} \\
&= \frac{ax^{a-1}}{\sqrt{x^2+2x\cos(\lambda)+1}}
\end{aligned}
$$

□

**Ejercicio 1.1.5**
**Determine** cuáles de las siguientes funciones son de clase $C^1$, de variación acotada y/o absolutamente continuas en $[0,1]$.

I.

$$
f(x) = \begin{cases} x^{4/3}\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right), & \text{si } x \in ]0,1] \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}
$$

II.

$$
f(x) = \begin{cases} x^{2}\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right), & \text{si } x \in ]0,1] \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}
$$

**Solución:**

□

**Ejercicio 1.1.6**
**Proporcione** un contraejemplo de una función que sea absolutamente continua en todo intervalo $[a,1]$, $0 < a \leq 1$, y continua en cero, pero que no sea absolutamente continua en $[0,1]$.

**Solución:**

□

**Ejercicio 1.1.7**
**Demuestre** que si una función $f$ es absolutamente continua en todo intervalo $[a,1]$, $0 < a \leq 1$, continua en cero y de variación acotada en $[0,1]$, entonces $f$ es absolutamente continua en $[0,1]$.
*Sugerencia.* Verifique que $f'$ es integrable en $[0,1]$ y utilice la función $G(x) = \int_1^x f'$, $\forall x \in ]0,1]$.

**Solución:**

$\square$

**Ejercicio 1.1.8**
**Determine** si la función $f(x) = x^{1/2}$ es o no de clase $C^1$, de variación acotada y/o absolutamente continua en $[0,1]$.

**Solución:**

$\square$

**Ejercicio 1.1.9**
**Determine** si la función

$$f(x) = \begin{cases} x^{3/2}\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right), & \text{si } x \in ]0,1] \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es o no de clase $C^1$, absolutamente continua y/o de variación acotada en $[0,1]$.

**Solución:**

$\square$

**Ejercicio 1.1.10**
Se dice que una función $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ satisface la **condición de Lipschitz** en $[a,b]$ si existe una constante $M \geq 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|, \quad \forall x, y \in [a,b].$$

I. **Pruebe** que si $f$ satisface la condición de Lipschitz en $[a,b]$, entonces $f$ es absolutamente continua en $[a,b]$.

II. **Demuestre** que si $f$ es absolutamente continua, entonces $f$ satisface la condición de Lipschitz en $[a,b]$ si y sólo si $|f'|$ es acotada en $[a,b]$.

III. Si $f$ es continua en $[a,b]$ y una de sus derivadas (digamos $D^+$) es acotada en $[a,b]$, **muestre** que $f$ satisface la condición de Lipschitz en $[a,b]$.

**Solución:**
De (I): Suponga que $f$ satisface la condición de Lipschitz, es decir existe una constante $M \geq 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y| < (M+1)|x-y|$$

Lo haremos por la definición. Sea $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \frac{\varepsilon}{M+1} > 0$. Si $\{]x_k, x_k'[\}_{k=1}^m$ es una familia de intervalos abiertos disjuntos contenidos en $[a,b]$ tales que

$$\sum_{k=1}^m |x_k' - x_k| = \sum_{k=1}^m (x_k' - x_k) \leq \delta = \frac{\varepsilon}{M+1}$$

entonces, por la condición de Lipschitz se tiene

$$\sum_{k=1}^m |f(x_k') - f(x_k)| \leq \sum_{k=1}^m M|x_k' - x_k| < (M+1) \cdot \frac{\varepsilon}{M+1} = \varepsilon$$

Luego, $f$ es absolutamente continua en $[a,b]$.

De (II): Suponga que $f$ es absoultamente continua.

$\Rightarrow$): Suponga que $f$ satisface la condición de Lipschitz, entonces existe $M \geq 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y| < (M+1)|x-y|$$

Como $f$ es de variación acotada, es diferenciable c.t.p. en $[a,b]$. Sea $A$ el conjunto de puntos en los que $f$ es diferenciable. Si $x \in A$ y $y \in [a,b]/\{x\}$ se tiene que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| \leq& M|x-y| \\ \Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq& M \end{aligned}$$

siendo $y \in [a,b]/\{x\}$ arbitrario. Tomando límites con respecto a $x$ se tiene que

$$|f'(x)| \leq M$$

para todo $x \in A$. Es decir, la función $f'$ definida c.t.p. en $A$ es acotada (en particular lo es en $[a,b]$).

$\Leftarrow$): Suponga que $f'$ es acotada en $[a,b]$.

□

**Ejercicio 1.1.11**
**Determine** si la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{si } x \in ]0,1] \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es o no de clase $C^1$, absoultamente continua y/o de variación acotada en $[0,1]$.

**Solución:**

□

**Ejercicio 1.1.12**
Considere la función $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{si } x \in [-1,1]/\{0\} \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

**Calcule** las cuatro derivadas de $f$ en cero. ¿Es $f$ de variación acotada en $[-1,1]$?

**Solución:**

□

**Ejercicio 1.1.13**
Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$ y alcanza un máximo local en un punto $c \in ]a,b[$, **pruebe** que

$$D_+f(x) \leq D^+f(x) \leq D_-f(c) \leq D^-f(c)$$

¿Qué relaciones se darían si $f$ alcanzara un máximo local en $a$ o $b$?

**Solución:**

$\square$

**Ejercicio 1.1.14**
Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y alguna de sus derivadas (digamos $D^+$) es no negativa en todo punto de $[a, b]$, **demuestre** que $f(b) \geq f(a)$.

**Solución:**

$\square$

**Ejercicio 1.1.15**
Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones

I. **Muestre** que $D^+(f + g) \leq D^+f + D^+g$ en todo punto de $[a, b[$. **Establezca** desigualdades similares para las otras derivadas.

II. **Pruebe** que si $f$ y $g$ son no negativas y continuas en un punto $c \in [a, b[$, entonces

$$D^+(fg)(c) \leq f(c)D^+g(c) + g(c)D^+f(c)$$

**Solución:**

$\square$

**Ejercicio 1.1.16**
**Proporcione** un ejemplo de una función monótona en $[0, 1]$ que sea discontinua en cada número racional.

**Solución:**

$\square$

**Ejercicio 1.1.17**
**Demuestre** las proposiciones 4.18, 4.21 y 4.36.

**Solución:**

$\square$

**Ejercicio 1.1.18**
Sea $\{f_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones en $\mathscr{V}([a, b], \mathbb{K})$ que converge puntualmente en $[a, b]$ a una función $f$. **Pruebe** que

$$V_f([a, b]) \leq \liminf_{\nu\to\infty} V_{f_\nu}([a, b])$$

**Solución:**

$\square$

**Ejercicio 1.1.19**
**Pruebe** que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función de variación acotada en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b |f'| \leq V_f([a, b]);$$

y si $f$ es, además, absolutamente continua en $[a, b]$, **muestre** que

$$\int_a^b |f'| = V_f([a, b]).$$

**Solución:**

$\square$

**Ejercicio 1.1.20**
**Demuestre** que si $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ es una función monótona, absolutamente continua en $[0, 1]$ y $A$ es un conjunto despreciable contenido en $[0, 1]$, entonces $f(A)$ es un conjunto despreciable.

**Solución:**
Sea $A$ un conjunto despreciable, es decir $m\,(A) = 0$ y sea $\varepsilon > 0$. Como $f$ es absolutmente continua, entonces para todo $\square$

**Ejercicio 1.1.21**
Haga lo siguiente

I. **Proporcione** un ejemplo de una función $f$ estrictamente creciente y absolutamente continua en $[0, 1]$ tal lque $f' = 0$ en algún conjunto con medida positiva.

   *Sugerencia.* Sea $A$ el complemento de un conjunto de Cantor generalizado $\mathscr{C}_\alpha$ con medida $1 - \alpha > 0$. Tome como $f$ la integral indefinida de $\chi_A$.

II. **Pruebe** que existe un conjunto despreciable $E$ contenido en $[0, 1]$ tal que $f^{-1}(E)$ no es medible.

**Solución:**

$\square$

**Ejercicio 1.1.22 (Teorema de Cambio de Variable)**
Sea $\phi : [a, b] \to [c, d]$ una función creciente absolutamente continua en $[a, b]$ tal que $\phi(a) = c$ y $\phi(b) = d$. Observe que $\phi$ **NO** necesariamente debe ser un isomorfismo $C^1$ de $[a, b]$ en $[c, d]$.

I. **Muestre** que para cualquier conjunto abierto $W$ contenido en $[c, d]$ se cumple

$$m(W) = \int_{\phi^{-1}(W)} \phi'(x)dx.$$

II. Sea $N = \{x \in [a,b] | \phi'(x) \neq 0\}$. Si $C$ es un subconjunto despreciable de $[c,d]$, **demuestre** que $\phi^{-1}(C) \cap N$ es un subconjunto despreciable de $[a,b]$.

III. Si $D$ es un subconjunto medible de $[c,d]$, **pruebe** que $B = \phi^{-1}(D) \cap N$ es un subconjunto medible de $[a,b]$ y

$$m(D) = \int_B \phi' = \int_c^d \chi_D(\phi(x))\phi'(x)dx.$$

IV. Si $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ es una función medible no negativa, **muestre** que la función $(f \circ \phi) \cdot \phi' : [a,b] \to \mathbb{R}$ es medible no negativa y

$$\int_c^d f(y)dy = \int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)dx.$$

**Solución:**

Esta cosa es una prueba. $\square$