Grupos Topológicos

Cristo Daniel Alvarado

27 de febrero de 2024

Índice general

Capítulo 1

Elementos de la teoría de grupos topológicos

1.1. Preliminares

Definición 1.1.1
Sea G un conjunto no vacío dotado de una operación binaria (denotada por $\cdot$) y una familia τ de subconjuntos de G. G es llamado **grupo topológico** si

1. $(G, \cdot)$ es un grupo.
2. (G, τ) es un espacio topológico.
3. Las funciones $g_1 : (G, \tau) \times (G, \tau) \to (G, \tau)$ y $g_2 : (G, \tau) \to (G, \tau)$ dadas por $(x, y) \mapsto x \cdot y$ y $x \mapsto x^{-1}$, respectivamente, son continuas, siendo x^{-1} el inverso de x en G.

Se denotará a la operación $\cdot$ por yuxtaposición, es decir $x \cdot y = xy$.

Observación 1.1.1
Una equivalencia de la condición (3) de la proposición anterior es la siguiente:

Sea G un grupo topológico. Denotamos por $\mathcal{N}(x)$ a **la familia de todas las vecindades de** $x \in G$. 3) es equivalente a

4. Si $x, y \in G$, entonces para cada $U \in \mathcal{N}(xy)$ existen vecindades $V \in \mathcal{N}(x)$ y $W \in \mathcal{N}(y)$ tales que $V \cdot W \subseteq U$, donde
$$V \cdot W = \left\{ vw \middle| v \in V \ \& \ w \in W \right\}$$
y, para cada $U \in \mathcal{N}(x^{-1})$ existe $V \in \mathcal{N}(x)$ tal que $V^{-1} \subseteq U$, siendo
$$V^{-1} = \left\{ v^{-1} \middle| v \in V \right\}$$

esta equivalencia es inmediada de la definición de continuidad de una función en un espacio topológico.

Observación 1.1.2
El símbolo e_G denotará siempre a la identidad de un grupo G.

Con frecuencia se referirá al grupo topológico G, con operación binaria $\cdot$ y topología τ como la terna $(G, \cdot, \tau)$. Si no hay ambiguedad, se denotará simplemente por G.

Lema 1.1.1
Sean $(G, \cdot)$ un grupo, y τ una topología en G. Entonces, $(G, \cdot, \tau)$ es un grupo topológico si y sólo si la función

$$\begin{aligned} g_3 : (G,\tau) \times (G,\tau) &\to (G,\tau) \\ (x,y) &\mapsto xy^{-1} \end{aligned}$$

es continua.

Demostración:
$\Rightarrow)$: Suponga que G es un grupo topológico, entonces las funciones g_1 y g_2 son continuas (por la condición 3) de la definición anterior). Notemos que

$$g_3 = g_1(x, g_2(y)), \quad \forall x, y \in G$$

por ende, g_3 es continua.
$\Leftarrow)$: Suponga que la función g_3 es continua. Notemos que

$$g_2(x) = g_3(x, e_G), \quad \forall x \in G$$

por ser g_3 continua, se sigue que g_2 también lo es. Además

$$g_1(x, y) = g_3(x, g_2(y)), \quad \forall x, y \in G$$

por lo cual, g_1 también es continua. Por tanto, G es grupo topológico. ■

Una de las primeras ventajas que surgen en el estudio de los grupos topológicos es que, ciertas propiedades locales se vuelven globales desde el punto de vista de la topología.

Teorema 1.1.1
Sea G un grupo topológico. Si $g \in G$ es un elemento fijo arbitrario, entonces las funciones $\varphi_g(x) = xg$ y $\sigma_g(x) = gx$, para todo $x \in G$, de G en G, son homeomorfismos. La inversión $f : G \to G$, definida por $f(y) = y^{-1}$, también es un homeomorfismos. Las funciones φ_g y σ_g son llamadas **traslaciones por la derecha e izquierda**, respectivamente.

Demostración:
Por la definición de grupo topológico, las funciones φ_g, σ_g y f son continuas. Veamos que son homeomorfismos de G en G.

1. Veamos que φ_g es inyectiva. Si $a, b \in G$ son tales que $\varphi_g(a) = \varphi_g(b)$, entonces $ag = bg \Rightarrow a = b$, con lo que se tiene el resultado.

   Además es suprayectiva, pues para cada $b \in G$ existe $g^{-1}b \in G$ tal que $\varphi_g(bg^{-1}) = b$.

   Luego, φ es homeomorfismo de G, con inversa $\varphi_{g^{-1}}$. Además es homomorfismo.

2. Para σ_g el caso es similar a φ_g.

3. Para f el resultado es inmediato, pues es biyectiva, homomorfismo y su inversa es ella misma.

■

Los resultados siguientes nos perimitirán estudiar las propiedades topológicas locales de un grupo topológico G en un solo punto, que por simplificar siempre tomaremos como la identidad e_G del grupo.

Corolario 1.1.1
Todo grupo topológico G es un espacio homogéneo.

Demostración:
Debemos probar que dados dos elementos arbitrarios del grupo topológico G, digamos $g, h \in G$, existe un homeomorfismo de G sobre sí mismo tal que manda un elemento en el otro. Por el teorema anterior, tomando como homeomorfismo a $\varphi_{g^{-1}h}$ se tiene el resultado, pues $\varphi_{g^{-1}h}(g) = h$. ■

Como en grupos y espacios topológicos, nos interesan las funciones que preservan las propiedades entre éstos. Por lo cual se estudiarán los siguientes tipos de funciones:

Definición 1.1.2
Decimos que una función biyectiva $f : G \to G'$ entre dos grupos topológicos G y G' es un **isomorfismo topológico** si f y f^{-1} son homomorfismos continuos.

Si $G = G'$, el isomorfismo f se llama **automorfismo topológico**. dos grupos topológicos son **topológicamente isomorfos** si existe un isomorfismo topológico de uno al otro. Utilizaremos el símbolo $G \cong H$ para indicar que los grupos G y H son topológicamente isomorfos.

El objetivo del siguiente teorema es ver que un grupo topológico no abeliano admite muchos automorfismos.

Teorema 1.1.2
Si G es un grupo topológico y $a \in G$ está fijo, entonces la función $g(x) = axa^{-1}$ es un automorfismo topológico.

Demostración:
Observemos que $g(x) = \sigma_a(\varphi_a^{-1}(x))$, donde las dos funciones de la composición definidas como en el teorema anterior son homeomofismos, y por ende g lo es. Además g es homomorfismo ya que

$$g(xy) = axya^{-1} = \left(axa^{-1}\right)\left(aya^{-1}\right) = g(x)g(y)$$

el cual es invertible, con inversa $f(x) = a^{-1}xa$. ■

Observación 1.1.3
En el caso de que el grupo G sea abeliano, el automorfismo topológico G definido en el teorema anterior, es trivial ya que coincide con la identidad.

El siguiente resultado tiene como objetivo el describir la topología del grupo, que en este caso resulta más sencillo que describir la topología de un espacio topológico. Para ello, basta describir una base local para la identidad del grupo e_G.

Lema 1.1.2
Sea G un grupo topológico, y sea $\mathcal{N}(e_G)$ una base local para la identidad del grupo e_G. Entonces las familias $\{xU\}$ y $\{Ux\}$, donde x toma los valores en los elemntos de G y U varía sobre todos los elementos de $\mathcal{N}(e_G)$, son bases para la topología de G.

Demostración:
Sea W un abieto no vacío de G y $a \in G$ un elemento de W. Probaremos que existe un elemento $\hat{U}$ de alguna las familias descritas anteriormente tal que

$$a \in \hat{U} \subseteq W$$

Considere la función $f : G \to G$, $x \mapsto a^{-1}x$. Esta función es un homeomorfismo, el cual transforma a W en $a^{-1}W$. Notemos que $e_G \in a^{-1}W$, pues el elemento $e_G = a^{-1}a \in a^{-1}W$. Como $\mathcal{N}(e_G)$ es una base local de e_G, entonces existe $U \in \mathcal{N}(e_G)$ tal que

$$e_G \in U \subseteq a^{-1}W$$

Por lo cual

$$a \in aU \subseteq aa^{-1}W = W$$

Por tanto, tomando $\hat{U} = aU$ se tiene el resultado para la primera familia. Para la segunda se procede de forma análoga cambiando el orden del producto en la función f. ■

El siguiente lema nos proporciona una base local para la identidad formada por vecindades tales que $V^{-1} = V$. Estas vecindades reciben el nombre de **simétricas**.

Lema 1.1.3
Sea G un grupo topológico y $U \in \mathcal{N}(e_G)$, entonces existe $V \in \mathcal{N}(e_G)$ tal que $V^{-1} = V \subseteq U$. Por lo tanto, las vecindades simétricas de la identidad constituyen una base local de e_G.

Demostración:
Sean $U \in \mathcal{N}(e_G)$ y $f : G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$. Como f es un homeomorfismo de G sobre G, entonces $f(U) = U^{-1}$ es abierto y $e_G \in U^{-1}$. Por lo cual $V = U \cap U^{-1}$ es abierto y $V^{-1} = V$ es tal que $e_G \in V \subseteq U$. ■

En lo sucesivo denotaremos por $\mathcal{N}^*(e_G)$ a la base local de vecindades de e_G que son abiertas y simétricas en un grupo topológico G.

Otra propiedad importante de la identidad del grupo topológico G, es que admite una base local formada por subconjuntos cerrados.

Lema 1.1.4
Sea G grupo topológico.

1. Si $U \in \mathcal{N}(e_G)$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}^+$ existe $V \in \mathcal{N}(e_G)$ con $V^n \subseteq U$, donde

$$V^n = \underbrace{V \cdots V}_{n\text{-veces}}$$

2. Si $U \in \mathcal{N}(e_G)$, entonces existe $V \in \mathcal{N}(e_G)$ con $\overline{V} \subseteq U$. En particular, las vecindades cerradas de e_G constituyen una base local de la identidad e_G cuyos elementos son subconjuntos cerrados.

Demostración:
De 1): Procederemos por inducción sobre n. Para $n = 1$ el resultado es inmediato, pues tomando $V = U$ se sigue el resultado.

Suponga el resultado cierto para algún $n \in \mathbb{N}^+$, entonces para U existe $W \in \mathcal{N}(e_G)$ tal que $W^n \subseteq U$. Como la multiplicación es continua $g_1(x, y) = xy$, y $g_1(e_G, e_G) = e_G$, entonces para W existen vecindades $V_1, V_2 \in \mathcal{N}(e_G)$ tales que $f(V_1 \times V_2) = V_1 \cdot V_2 \subseteq W$. Tomemos $V = V_1 \cap V_2$, claro que $e_G \in V$, por lo cual $V \in \mathcal{N}(e_g)$ y, además:

$$V^{n+1} = V \cdot V \cdot V^{n-1} \subseteq V_1 \cdot V_2 \cdot W^{n-1} \subseteq W \cdot W^{n-1} = W^n \subseteq U$$

Aplicando inducción se sigue el resultado.

De 2): Por 1) y por el hecho de que $\mathcal{N}^*(e_G)$ es una base local de e_G, existe $V \in \mathcal{N}^*(e_G)$ tal que $V^2 \subseteq U$. Si $x \in \overline{V}$, entonces como xV es una vecindad de x, la intersección $xV \cap V \neq \emptyset$ (pues x está en la adherencia de V), es decir, existen $v_1, v_2 \in V$ tales que

$$xv_1 = v_2 \Rightarrow x = v_2 v_1^{-1} \in V \cdot V^{-1} = V^2 \subseteq U$$

Por ende, $\overline{V} \subseteq U$. ■

Teorema 1.1.3
Sea G un grupo topológico, $a \in G$ y A, B, O, M subconjuntos de G. Entonces

1. Si O es abierto, entonces los conjuntos aO, Oa, O^{-1}, MO y OM son abiertos.

2. Si A es cerrado, entonces aA, Aa, A^{-1} son conjuntos cerrados.

3. Si A y B son compactos, también lo son AB y A^{-1}.

4. Se cumple que
$$\overline{A} = \bigcap_{W \in \mathcal{N}(e_G)} AW = \bigcap_{W \in \mathcal{N}(e_G)} WA$$

Demostración:
De 1): Por el teorema 1.1.1, φ_a, σ_a y $f(x) = x^{-1}$ son homeomorfismos, para cualquier $a \in G$ fijo. Por lo tanto, si O es abierto, entonces la imagen directa de O bajo estas funciones (es decir, los conjuntos aO, Oa, O^{-1}) son abiertos. Para los dos últimos conjuntos, basta ver que

$$MO = \bigcup \{mO \big| m \in \mathbb{M}\}$$
$$OM = \bigcup \{Om \big| m \in \mathbb{M}\}$$

por ser uniones arbitrarias de abiertos, los conjuntos MO y OM son abiertos.

De 2): Es análogo a 1), usando el hecho de que los homomorfismos son aplicaciones cerradas.

De 3): Notemos que $A \times B$ es compacto en el espacio topológico producto $G \times G$, por lo cual al ser $g_1 : G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto xy$ una función continua, se sigue que la imagen de este compacto $f(A \times B) = AB$ es compacto. De forma similar con A^{-1} con la función $f(x) = x^{-1}$ se obtiene que A^{-1} es compacto.

De 4): Nuestro objetivo será intentar caracterizar a AW y WA (donde $W \in \mathcal{N}(e_G)$) antes de ver los elementos de la intersección. Sea $W \in \mathcal{N}(e_G)$, entonces existe un abierto $V \in \mathcal{N}^*(e_G)$ tal que $V \subseteq W$. Por 1) el producto AV es abierto y $A \subseteq AV$ (pues $e_G \in V$).

Además, $\overline{A} \subseteq AW$, pues si $x \in \overline{A}$, entonces xV es una vecindad de x y por lo tanto $xV \cap A \neq \emptyset$, así existen $v \in V$ y $a \in A$ tales que $xv = a \Rightarrow x = av^{-1} \in AV^{-1} = AV \subseteq AW$. Como el W fue arbitrario, se sigue que
$$\overline{A} \subseteq \bigcap_{W \in \mathcal{N}(e_G)} AW$$
(de forma análoga con $\bigcap_{W \in \mathcal{N}(e_G)} WA$). Ahora, sean $x \in \bigcap_{W \in \mathcal{N}(e_G)} AW$ y $V \in \mathcal{N}(x)$. Debemos probar que $V \cap A \neq \emptyset$ (con ello, se tendría que $x \in \overline{A}$). Se tiene que $x^{-1}V \in \mathcal{N}(e_G)$ y, por ende $V^{-1}x \in \mathcal{N}(e_G)$.

Por tanto, como $x \in \bigcap_{W \in \mathcal{N}(e_G)} AW$ en particular $x \in AV^{-1}x$, así existen $a \in A$ y $v \in V$ tales que $x = av^{-1}x$, es decir $a = v \in V$ y $a \in A$, por lo cual $a \in A \cap V$. Por tanto, $A \cap V \neq \emptyset$. ■

Como ya se sabe que todo grupo topológico es un espacio homogéneo, para verificar propiedades locales del grupo (tales como la conexidad local, compacidad local, carácter numerable, etc...), basta con verificar la propiedad en la identidad del grupo. Una de éstas propiedades es la T_3.

Lema 1.1.5
Todo grupo topológico G cumple las propiedades siguientes:

1. G es un espacio T_3.

2. Si $A \subseteq G$ es compacto y $B \subseteq G$ cerrado, entonces AB y BA son cerrados.

Demostración:

De 1): Se debe probar que G es un espacio regular, es decir, hay que probar que G es T_1 y que para todo $x \in G$ y toda vecindad V de x existe una vecindad U de x tal que $\overline{U} \subseteq V$. Esto es inmediato del lema 1.1.4 2).

De 2). Probaremos que BA es cerrado. Para ello, se probará que $G \backslash BA$ es abierto. Sea $a \in G \backslash BA$. Para cada $x \in A$, el conjunto Bx es cerrado (por ser B cerrado), así que existen vecindades $U_x, V_x \in \mathcal{N}^*(e_G)$ con $aU_x \cap Bx = \emptyset$ y $V_x^2 \subseteq U_x$. Por ello, $aV_x \cap BxV_x = \emptyset$.

Ahora, como $xV_{x x \in A}$ es una cubierta abierta de A, al ser A compacto existen $x_1, ..., x_n \in A$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} x_i V x_i$$

Sea

$$W = \bigcap_{i=1}^{n} x_i V x_i$$

Este conjunto es abierto y simétrico, y además $aW \cap BxV_{x_i} = \emptyset$ para todo $i \in [|1, n|]$. Por tanto, $aW \cap BA = \emptyset$. Así que aW es una vecindad de a ajena a BA. De forma análoga se prueba que BA es cerrado. ■

Ejemplo 1.1.1

Sea G un grupo no trivial dotado de la topología indscreta. Entonces G es un grupo topológico que no es ni T_0 ni T_1 (en esta topología solo hay dos conjuntos: $\emptyset$ y G).

Ahora, si tenemos un grupo topológico que es T_0 esto es equivalente a que sea T_1. En efecto, supongamos que es T_0 y sean $x_1, x_2 \in G$ elementos distingos. Como es T_0 existe $U \subseteq G$ abierto que contiene a e_G ó $x_1 x_2^{-1}$. Si $e_G \in U$, entonces existe $V \in \mathcal{N}^*(e_G)$ tal que $V \subseteq U$, en particular $e_G \in V$ y $x_1 x_2^{-1} \notin V$, por lo cual $x_2, x_1^{-1} \notin V$, luego Vx_2 es un abierto que contiene a x_2 y no a x_1, y Vx_1 es un abierto x_1 que contiene a x_1 pero no a x_2.

Si $x_1 x_2^{-1} \in U$, entonces $W = Ux_2x_1^{-1} \in \mathcal{N}(e_G)$, y $x_1 x_2 \notin W$. Haciendo lo análogo a lo anterior, se llega al resultado. Por tanto, la propiedad de ser T_0 y T_1 en un grupo topológico G son equivalentes.

De esta forma, todo grupo que sea T_0 es en automático un espacio regular, y más aún, es Hausdorff.

De ahora en adelante sólo se considerarán grupos topológicos T_0 (en automático, esto serán espacios regulares). Más adelante se probará que todo grupo T_0 es Tikhonov.

Observación 1.1.4

En todo grupo topológico que sea un espacio T_0 se tiene que el conjunto e_G es cerrado.

Demostración:

En efecto, sea G un grupo topológico con las propiedades anteriores. Considere:

$$A = \bigcap_{U \in \mathcal{N}(e_G)} \overline{U}$$

Claro que $e_G \in A$. Suponga que existe $a \in A$ tal que no es la identidad del grupo topológico, como G es T_1 existe V abierto tal que $e_G \in V$ pero $a \notin V$. Como la cerradura de los elementos de $\mathcal{N}(e_G)$ forman una base local para e_G, existe $U_0 \in \mathcal{N}(e_G)$ tal que $\overline{U_0} \subseteq V$. Por tanto, $a \notin \bigcap_{U \in \mathcal{N}(e_G)} \overline{U}$ pues $a \notin \overline{U_0} \#_c$. Luego $A = \{e_G\}$, pero A es cerrado por ser intersección arbitraria de cerrados. Por tanto, el conjunto unipuntual $\{e_G\}$ es cerrado (más aún, el conjunto $\{x\}$ es cerrado, para todo $x \in G$). ■

En los grupos topológicos, los subespacios compactos tienen propieadedes similares a las de los puntos en relación con las condiciones de separación:

Teorema 1.1.4
Sea G un grupo topológico, $K \subseteq U \subseteq G$, U abierto y K compacto. Entonces, existe $W \in \mathcal{N}(e_G)$ con la siguiente propiedad:
$$K \subseteq KW \subseteq U$$

Demostración:
Para cada $x \in K$ existe $V_x \in \mathcal{N}(e_G)$ con $xV_x \subseteq U$. Además, existe $W_x \in \mathcal{N}(e_G)$ tal que $W_x^2 \subseteq V_x$.
Como K es compacto, y $K \subseteq \bigcup_{x \in K} xW_x$, entonces existen $x_1, ..., x_n \in K$ tales que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} x_i W_{x_i}$$

Sea $W = \bigcap_{i=1}^{n} W_{x_i}$. El conjunto W es una vecindad abierta de e_G y, por ende $K \subseteq KW$.
Si $x \in K$, entonces por la contención anterior se sigue que existe $i \in \left[\left|1, n\right|\right]$ tal que $x \in x_i W_{x_i}$. Así:
$$xW \subseteq x_i W_{x_i} W \subseteq x_i W_{x_i} W_{x_i} \subseteq x_i V_{x_i} \subseteq U$$
es decir, $KW \subseteq U$. ■

El siguiente teorema tiene como objetivo el resumir varias de las propiedades obtenidas anteriormente para la familia $\mathcal{N}(e_G)$; de hecho esta familia se caracteriza completamente. Esta propiedad es un de las que distinguen a los grupos topológicos de los espacios topológicos arbitrarios. Además, dicho teorema nos proporciona un método para definir topologías de grupos topológicos.

Teorema 1.1.5
Sea G un grupo topológico de Hausdorff. Existe una base local $\mathcal{V}$ para e_G tal que cumple las siguientes condiciones:

1. $\bigcap \mathcal{V} = \{e_G\}$.
2. Si U, V son dos elementos arbitrarios de $\mathcal{V}$, entonces existe $W \in \mathcal{V}$ tal que $W \subseteq U \cap V$.
3. Para cada $U \in \mathcal{V}$ existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $VV^{-1} \subseteq U$.
4. Para cada $U \in \mathcal{V}$ y para cada $x \in U$ existe $V \in \mathcal{V}$ con $xV \subseteq U$.
5. Para cada $U \in \mathcal{V}$ y $a \in G$ existe $W \in \mathcal{V}$ con $aWa^{-1} \subseteq U$.

Recíprocamente, si tenemos un grupo G y una familia $\mathcal{V}$ no vacía de subconjuntos de G que contienen a e_G, tales que satisfacen las condiciones de (1) a (5) para $\mathcal{V}$, entonces cada una de las familias $\left\{xU \middle| U \in \mathcal{V}, x \in G\right\}$ y $\left\{Ux \middle| U \in \mathcal{V}, x \in G\right\}$ es base para una topología de grupo τ para G. Además, $\mathcal{V}$ es una base local para e_G en (G, τ).

Demostración:
$\Rightarrow$): Sea G un grupo topológico **Hasdorff** (de forma inmediata es un espacio T_0 y, por ende es un espacio regular). Considere la familia:

$$\mathcal{V} = \left\{V \cap V^{-1} \middle| V \in \mathcal{N}(e_G)\right\}$$

es inmedaito que $\mathcal{V}$ cumple las condiciones (1) y (2) (por la observación 1.1.4 y la otra por ser $\mathcal{V}$ una base local de e_G). Para probar (3), sea $U \in \mathcal{V}$. Por un lema anterior existe $V \in \mathcal{N}(e_G)$ tal que $V^2 \subseteq U$; entonces $W = V \cap V^{-1}$ pertenece a $\mathcal{V}$, y se tiene que $W^{-1} = W$ y $WW^{-1} = W^2 \subseteq V^2 \subseteq U$.
Para (4), sean $U \in \mathcal{V}$ y $x \in U$. Como la multiplicación es una operación continua y $xe_G = x$, existen vecindades abiertas V_x y W de x y e_G respectivamente, tales que $V_xW \subseteq U$. El conjunto $V = W \cap W^{-1}$ pertenece a $\mathcal{V}$ y se cumple que $xV \subseteq V_xW \subseteq U$.

Para (5), si $a \in G$ y $U \in \mathcal{V}$, como $aa^{-1} = ae_Ga$ y por ser continua la multiplicación, existen vecindades abiertas $W_a, V, W_{a^{-1}}$ de a, e_G y a, respectivamente tales que

$$W_aVW_{a^{-1}} \subseteq U$$

entonces, $W = V \cap V^{-1}$ pertenece a $\mathcal{V}$, y $aWa^{-1} \subseteq W_aVW_{a^{-1}} \subseteq U$.

$\Leftarrow$): Sea $\mathcal{V}$ una familia de subconjuntos de G que satisfacen las condiciones (1) a (5) del teorema. Debemos probar que

$$\mathcal{B} = \left\{xU \middle| U \in \mathcal{V}, x \in G\right\}$$

es una base para una topología de grupo τ en G. Sea τ la familia de subconjuntos de G que son uniones arbitrarias de subconjuntos de $\mathcal{B}$, es decir $U \in \tau$ si y sólo si $U = \bigcup \mathcal{A}$, donde $\mathcal{A}$ es una subfamilia de $\mathcal{B}$.

Se tienen que verificar dos condiciones:

1. Sean $x_1, x_2 \in G$ y $U_1, U_2 \in \mathcal{V}$. Si $x_3 \in x_1U_1 \cap x_2U_2$, entonces $x_1^{-1}x_3 \in U_1$ y $x_2^{-1}x_3 \in U_2$, por (4) existen $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ tales que

$$x_1^{-1}x_3V_1 \subseteq U_1$$
$$x_2^{-1}x_3V_2 \subseteq U_2$$

por ende,

$$x_3V_1 \subseteq x_1U_1$$
$$x_3V_2 \subseteq x_2U_2$$

Tomemos $U_3 \in \mathcal{V}$ tal que $U_3 \subseteq V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}$ (lo cual se puede por la condición (2)). Luego, $x_3U_3 \subseteq x_3V_1 \cap x_3V_2 \subseteq x_1U_1 \cap x_2U_2$.

2. Sea $x \in G$. Si $U \in \mathcal{V}$ entonces $x \in xU$, por lo cual:

$$G = \bigcup_{x \in G} xU$$

por las dos condiciones anteriores, se sigue que $\mathcal{B}$ es una base para la topología τ definida anteriormente.

Ahora, probemos que $\mathcal{V}$ es base local para e_G. Sea $U \in \tau$ tal que $e_G \in U$. Como $U \in \tau$ entonces podemos escribir:

$$U = \bigcup \mathcal{A}$$

donde $\mathcal{A}$ es una subfamilia de $\mathcal{B}$. Entonces por estar en la unión, existe $x \in G$ y $V \in \mathcal{V}$ tal que $e_G \in xV \subseteq U$. En particular, $x^{-1} \in V$, luego por (4) podemos encontrar $W \in \mathcal{V}$ tal que $x^{-1}W \subseteq V$, es decir $W \subseteq xV$. Pero $e_G \in W$, por ende:

$$e_G \in W \subseteq xV \subseteq U$$

Luego, $\mathcal{V}$ es una base local de e_G.

Ahora probaremos que τ es una topología del grupo G. Para ello hay que ver que la función $(a, b) \mapsto ab^{-1}$ es continua. Sean $a, b \in G$ y U una vecindad de ab^{-1}. De la condición (4) existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $ab^{-1}V \subseteq U$, y por (5) y (3) existen $W_1, W_2 \in \mathcal{V}$ tales que $bW_1b^{-1} \subseteq V$ y $W_2W_2^{-1} \subseteq W_1$.

Entonces, aW_2 y bW_2 son vecindades de los puntos a y b para las cuales se tiene que

$$\begin{aligned}(aW_2)(bW_2)^{-1} &= aW_2W_2^{-1}b^{-1}\\ &\subseteq aW_1b^{-1}\\ &\subseteq ab^{-1}(bW_1b^{-1})\\ &\subseteq ab^{-1}(bW_1b^{-1})\\ &\subseteq ab^{-1}V\\ &\subseteq U\end{aligned}$$

lo cual prueba que la operación considerada es continua.

Para terminar la demostració, hay que ver que la familia:

$$\left\{Ux \middle| x \in G, U \in \mathcal{V}\right\}$$

es también una base para la topología τ. Sean $a \in G$ y $U \in \tau$ tales que $a \in U$. Por (4) existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $aV \subseteq U$, y por (5) existe $W \in \mathcal{V}$ tal que $a^{-1}Wa \subseteq V$. Entonces:

$$a \in Wa \subseteq aV \subseteq U$$

lo cual prueba que la familia es una base para la topología τ, terminando así la prueba.

■

De un lema anterior sabemos que si $A, B \subseteq G$ con G grupo topológico, A compacto y B cerrado, entonces AB y BA son cerrados. La hipótesis de que A sea compacto no es imprescindible.

Ejemplo 1.1.2
Sea G un grupo arbitrario con la topología discreta, es decir, aquella formada por todos los subconjuntos de G; entonces G forma un grupo topológico llamado **grupo discreto**.

Ejemplo 1.1.3
Cualquier grupo G con la topología indiscreta, es decir, aquella que consiste únicamente en el conjunto vacío y G mismo, es un grupo topológico. Éste no es un grupo topológico T_0 si G contiene más de un elemento.

Ejemplo 1.1.4
El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ con su topología y operación de suma usuales es un grupo topológico.

Ejemplo 1.1.5
En el grupo aditivo de los números enteros, $(\mathbb{Z}, +)$, definiremos varias topologías de grupo:

1. Sea $p \in \mathbb{Z}$ un número primo fijo y para cada $k \in \mathbb{N}$ sea $U_k = p^k\mathbb{Z}$; entonces la familia $\mathcal{V} = \left\{U_k \middle| k \in \mathbb{N}\right\}$ satisface las condiciones del teorema anterior: todos los miembros de $\mathcal{V}$ contienen al cero y se prueba que su intersección es el cero. La condición (3) se deduce de la relación $U_k = -U_k$. Las propiedades (2) y (4) se obtienen a partir de la contención $2(U_k) \subseteq U_k$ y de la definición de U_k. Por último, (5) se cumple por ser $(\mathbb{Z}, +)$ abeliano.

   Esta topología de G recibe el nombre de **p-ádica**. Para números primos distintos p y q, las topologías obtenidas de esta manera son distintas porque el conjunto $M = \{p, p^2, ..., p^n, ...\}$ tiene al $0 \in \mathbb{Z}$ como punto de acumulación en la p-ádica. Por el contrario, el 0 no es punto de acumulación de M en la q-ádica.

Ejemplo 1.1.6
El **grupo lineal general de orden n sobre** $\mathbb{R}$. Considere el grupo $GL(n, \mathbb{R})$ de las matrices no sigulares (invertibles) de orden n con elementos en el campo $\mathbb{R}$ y como operación de grupo la multiplicación de matricecs.

En $GL(n, \mathbb{R})$ considere la topología heredada por ser un subesapcio del espacio euclideano real de dimensión n^2, es decir, con la topología generada por la métrica:

$$d(A, B) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |A_{i,j} - B_{i,j}|^2},$$

para cualesquier $A = (A_{i,j})$, $B = (B_{i,j})$. Observe que la función $(A, B) \mapsto AB^{-1}$ es continua pues los elementos de la matriz producto son sumas de productos de los elementos de A y B.

1.1.1. Grupos Ordenados

Se presentarán en esta parte dos ejemplos de grupos topológicos cuya construcción es interesante. Estos ejemplos (aunque no se analicen a profundidad más adelante en el texto) se exponen con el propósito de ayudar al lector a familiarizarse con la noción de grupo topológico. Se estudiará la estructura de grupo ordenado.

Sea G un grupo con más de un elemento que está ordenado linelamente por una relación $<$, es decir, $<$ cumple las condiciones siguientes:

- $<$ es irreflexiva (para toda $x \in G$, $x \not< x$).
- $<$ es antisimétrica (para todo $x, y \in G$ se tiene que $x < y$ ó $y < x$).
- Cualesquiera dos elementos de G son comparables (ley de tricotomía).

Falta establecer una conexión entre este orden lineal y las operaciones del grupo, para lo cual se supone además lo siguiente:

- Si $x, y \in G$ son tales que $x < y$, entonces para todo $a \in G$ se tiene que $ax < ay$ y $xa < ya$.

Los grupos con esta estructura se conocen como **grupos linealmente ordenados**.

Hay varias propiedades que tienen estos grupos, las cuales se probarán a continuación:

Proposición 1.1.1
Sea G un grupo linealmente ordenado por $<$. Entonces, G no tiene elementos máximo y mínimo (esto implica que G es infinito si G tiene más de un elemento).

Demostración:
Observemos que e_G no puede ser máximo o mínimo, ya que si $a < e_G$ entonces $e_G < a^{-1}$, para todo $a \in G$. Por otro lado si x fuera elemento mínimo de G, en particular $x < e_G$ (ya que $x \neq e_G$) y, por ende $x^2 < x\#_c$. Por tanto G no tiene elementos máximo o mínimo. ■

Definamos con lo anterior una topología en G como sigue: si $a, b \in G$ y $a < b$, sea $(a, b) = \{x \in G \big| a < x < b\}$; la familia

$$\mathcal{B} = \{(a, b) \big| a, b \in G, a < b\}$$

forma una base de una topología en G. En efecto, veamos que se cumplen las dos condiciones:

1. Si $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathcal{B}$, donde $a_1 < b_1$ y $a_2 < b_2$ entonces si $x \in (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2)$, se tiene que $a_2 < b_1$, ya que en otro caso x no podría estar en la intersección, luego el conjunto $(a_2, b_1) \in \mathcal{B}$ y se tiene que $x \in (a_2, b_1)$.
2. Sea $x \in G$. Como G no admite elementos máximos ni mínimos, existen $a, b \in G$ tales que $a < x < b$. Por ende, $x \in (a, b) \in \mathcal{B}$.

Por las dos condiciones anteriores, se tiene que al cumplirlas $\mathcal{B}$ existe una única topología τ para la cual $\mathcal{B}$ es una base. Consideremos de ahora en adelante tal topología. Veamos que las funciones

$$\begin{aligned} h : G &\to G \\ a &\mapsto a^{-1} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} g : G \times G &\to G \\ (a, b) &\mapsto ab \end{aligned}$$

son funciones continuas en G. En efecto, sea $(a,b) \in \mathcal{B}$, donde $a, b \in G$. Entonces:

$$\begin{aligned} h^{-1}((a,b)) &= \{x \in G \big| a < h(x) < b\} \\ &= \{x \in G \big| a < x^{-1} < b\} \end{aligned}$$

pero, si $a < x^{-1} \Rightarrow xa < e_G \Rightarrow x < a^{-1}$. Por ende:

$$\begin{aligned} h^{-1}((a,b)) &= \{x \in G \big| b^{-1} < x < a^{-1}\} \\ &= (b^{-1}, a^{-1}) \end{aligned}$$

es decir, que imágenes inversas de vecindades abiertos son abiertas. Por tanto, h es continua.

Ahora para g

1.1.2. Grupos Booleanos

1.2. Homomorfismos e isomorfismos

Definición 1.2.1
Decimos que el homomorfismo $f : G \to G'$ es **homomorfismo abierto** si f es una función abierta (es decir, que manda abiertos en abiertos).

Este concepto es importante pues permite establecer el concepto de grupso topológicos equivalentes. A continación se enunciarán y demostrarán propiedades elementales importantes de los homomorfismos continuos.

Lema 1.2.1
Sea $\varphi : G \to H$ un homomorfismo entre grupos topológicos. El homomorfismo φ es continuo (respectivamente, abierto) si lo es en la identidad e_G, es decir, si φ satisface la condición (1) (respectivamente (2)) siguiente:

1. Para toda W vecindad de e_H en H, existe U vecindad de e_G en G tal que $\varphi(U) \subseteq W$.
2. Para toda vecindad U de e_G en G, existe W vecindad de e_H tal que $W \subseteq \varphi(U)$.

Demostración:
Supongamos que se cumple la condición (1), debemos probar que φ es continua en todo punto de G. Para ello, basta con ver que si $g \in G$ es arbitrario y W es una vecindad de $\varphi(g)$ en H, entonces existe una vecindad U de G tal que $\varphi(U) \subseteq W$.

Sean $g \in G$ y W es una vecindad de $h = \varphi(g)$ en H. Se puede expresar a $W = hW'$ W' es una vecindad de e_H. Por (1) existe una vecindad U' de e_G tal que $\varphi(U') \subseteq W'$. Entonces $U = gU'$ es una vecindad de g y,

$$\varphi(U) = \varphi(gU') = \varphi(g)\varphi(U') = h\varphi(U') \subseteq hW' = W$$

por tanto, φ es continua en g.

Para la segunda parte debemos probar que dado un abierto O en G, su imagen respecto a φ es abierta en H.

Sea entonces O abierto en G y $h \in \varphi(O)$; entonces $h = \varphi(g)$ para alguna $g \in G$. Por lo anteiror, $g^{-1}O$ es una vecindad de e_G, aunado con la condición (2) se sigue que existe una vecindad W.

■