Lista 4.

1. Una partícula que realiza un movimiento armónico simple tiene una velocidad v_1 cuando el desplazamiento es x_1 y una velocidad v_2 cuando el desplazamiento es x_2. Calcular el periodo y la amplitud del movimiento en términos de las cantidades dadas.

   R. $T = 2\pi\sqrt{(x_1^2 - x_2^2)/(v_2^2 - v_1^2)}$ $\quad$ $A = \sqrt{(v_1^2 x_2^2 - x_1^2 v_2^2)/(v_1^2 - v_2^2)}$

Sol.

Como la partícula realiza un movimiento armónico simple, su ecuación de movimiento (suponiendo que oscila en el eje x) es:

$$x(t) = A\,\text{sen}(w_n t - \phi)$$

A la amplitud del movimiento y w_n la frecuencia (ϕ es la fase). Como:

$$v(t) = \dot{x}(t) = A w_n \cos(w_n t - \phi)$$

Para t_1, $x(t_1) = x_1$ y $v(t_1) = v_1$. Con t_2: $x(t_2) = x_2$ y $v(t_2) = v_2$. Por tanto:

$$x_1 = A\,\text{sen}(w_n t_1 - \phi),\; v_1 = A w_n \cos(w_n t_1 - \phi),\; x_2 = A\,\text{sen}(w_n t_2 - \phi) \;\text{ y }\; v_2 = A w_n \cos(w_n t - \phi)$$

$$\Rightarrow x_1^2 w_n^2 + v_1^2 = A^2 w_n^2, \;\text{ y }\; x_2^2 w_n^2 + v_2^2 = A^2 w_n^2$$

Obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} w_n^2 (A^2 - x_1^2) = v_1^2 \\ w_n^2 (A^2 - x_2^2) = v_2^2 \end{cases}$$

Luego:

$$\frac{v_1^2}{A^2 - x_1^2} = \frac{v_2^2}{A^2 - x_2^2}$$

$$\Rightarrow A^2 v_1^2 - x_2^2 v_1^2 = A^2 v_2^2 - x_1^2 v_2^2$$

$$\Rightarrow A^2 (v_1^2 - v_2^2) = x_2^2 v_1^2 - x_1^2 v_2^2$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{\frac{x_2^2 v_1^2 - x_1^2 v_2^2}{v_1^2 - v_2^2}} \quad \square$$

Luego:

$$w_n^2 = \frac{v_2^2}{\dfrac{x_2^2 v_1^2 - x_1^2 v_2^2}{v_1^2 - v_2^2} - x_2^2}$$

$$= \frac{v_2^2 (v_1^2 - v_2^2)}{\cancel{x_2^2 v_1^2} - x_1^2 v_2^2 - \cancel{x_2^2 v_1^2} + x_2^2 v_2^2}$$

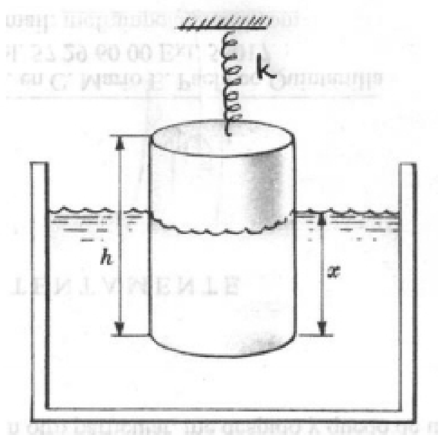
$$= \frac{v_2^2 (v_1^2 - v_2^2)}{x_2^2 v_2^2 - x_1^2 v_2^2}$$

$$= \frac{v_1^2 - v_2^2}{x_2^2 - x_1^2}$$

Como $T = \frac{2\pi}{\omega_n}$:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{x_2^2 - x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}} \quad \square$$

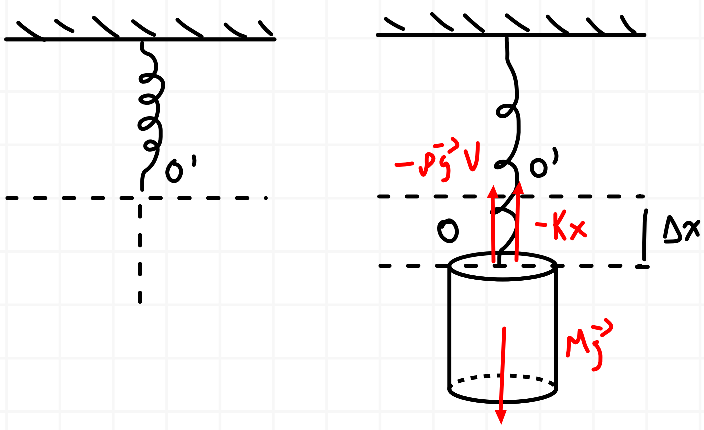
2. Un cilindro de masa M, radio r y altura h está suspendido por un resorte de constante k y sumergido en un líquido de densidad ρ como se muestra en la figura. En equilibrio el cilindro está sumergido la mitad de su altura. Demuestre que el movimiento del cilindro será armónico simple y calcule la frecuencia de oscilación. Inicialmente el cilindro se sumerge 2/3 de su altura y entonces, desde el reposo inicia su movimiento vertical. Calcule la ecuación de movimiento del cilindro con relación a la posición de equilibrio.



R. $x = \frac{h}{6} cos\omega t, \ \omega = \sqrt{(k + \pi\rho g r^2)/M}$

Sol.

Considere primero un sistema colocado en el extremo del resorte, cuando el mismo no se encuentra elongado (no hay masa M), digamos O'.



En la posición de equilibrio (es decir, con la masa colocada y la aceleración del bloque 0), el resorte se desplaza Δx, medido desde O'. La ecuación de movimiento viene dada por:

$$-\rho g V_0 - K\Delta x + Mg = 0$$

Donde $V_0 = \frac{1}{2}\pi r^2 h$. Despejando $-K\Delta x$:

$$-K\Delta x = \frac{1}{2}\pi \rho g r^2 h - Mg \quad \dots \quad (1)$$

Si la masa se cambia a una posición x' (respecto a O') y x (respecto a O, el punto de equilibrio de la masa), entonces:

$$-\rho g V - Kx' + Mg = M\ddot{x}'$$

Con $x' = x + \Delta x$, y $V = \pi r^2 \left(\frac{1}{2}h + x\right)$ (pues, x es la distancia que se sumergió), entonces:

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\pi\rho g r^2 h - \pi\rho g r^2 x - Kx - K\Delta x + Mg = M\ddot{x}$$

Sustituyendo 1) obtenemos:

$$-\pi \rho g r^2 x - Kx = M\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{K+\pi\rho g r^2}{M} x = 0 \quad \dots \quad (2)$$

2) es la ecuación de movimiento armónico simple, que describe el movimiento de M, con frecuencia angular:

$$\omega = \sqrt{\frac{K+\pi\rho g r^2}{M}}$$

y, con ecuación de movimiento:

$$x(t) = A_0 \operatorname{sen}(\omega t - \phi)$$

Donde $A_0 = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$, con $x_0 = x(0) = \frac{1}{6}h$: $A_0 = \frac{1}{6}h = \frac{h}{6}$. Además:

$$\dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t - \phi)$$

En $t=0$:

$$0 = A\omega\cos(-\phi)$$

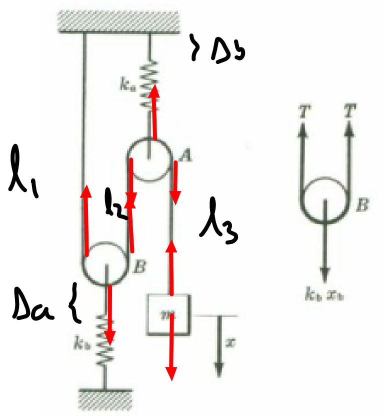
$$\Rightarrow \cos\phi = 0$$

Por tanto, $\phi = \pm\frac{\pi}{2}$. Pero $x(0) = \frac{h}{6} = \frac{h}{6}\sin(-\phi) \Rightarrow -\phi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \phi = -\frac{\pi}{2}$. Por tanto:

$$x(t) = \frac{h}{6}\operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{h}{6}\cos\omega t \quad \square$$

3. En el sistema mostrado en la figura, una cuerda inextensible pasa sobre dos cilindros de masa despreciable. Escriba la ecuación diferencial de movimiento para la masa m y determine la frecuencia natural ω.



Sugerencia: Considere uno de los cilindros fijo y calcule la relación del desplazamiento de la masa m y el alargamiento del resorte correspondiente; después haga lo mismo considerando el otro cilindro fijo. Finalmente, si ambos cilindros están libres y la masa m se desplaza una longitud x, ¿cuánto se deformaron los resortes?

$R.\, m\ddot{x} + k_{eq}x = 0, \quad k_{eq} = \dfrac{k_a k_b}{4(k_a + k_b)}$

Sol.

Para un instante t del tiempo, sean Δa y Δb las deformaciones de los resortes A y B, resp. Del diagrama, vemos que:

$$l_1 + \Delta a = cte.$$

$$l_2 + \Delta a + \Delta b = cte.$$

$$l_3 + \Delta b - x' = cte$$

Pero, por ser la cuerda inextensible, vemos que $l_1 + l_2 + l_3 = cte$. Por tanto, sumando las ecs. anteriores:

$$l_1 + l_2 + l_3 + 2\Delta a + 2\Delta b - x' = cte$$

$$\Rightarrow 2\Delta a + 2\Delta b - x' = cte$$

En $t=0$ (antes de que esté la masa): $\Delta a = \Delta b = x' = 0$. Por tanto:

$$2(\Delta a + \Delta b) = x' \ldots (0)$$

Medido desde $0'$ (una posición donde la masa no cuelga libremente de la cuerda). Por Newton, a la masa m, y las poleas A y B, tenemos:

$$-T + mg = m\ddot{x}' \ldots (1)$$

$$2T - K_a \Delta a = 0 \ldots (2)$$

$$-2T + K_b \Delta b = 0 \ldots (3)$$

Por 2) y 3): (y 0)):

$$2T K_b + 2T K_a = K_a K_b (\Delta a + \Delta b)$$

$$\Rightarrow T = \underbrace{\frac{K_a K_b}{4(K_a + K_b)}}_{K_{eq}} x'$$

Por lo cual:

$$-K_{eq} x' + mg = m\ddot{x}' \ldots (4)$$

Esto desde 0'. Medido desde 0 (la pos. de equilibrio de m):

$$T = mg$$

Cuando se desplazan los resortes un Δa_0, Δb_0, y $x_0 = 2(\Delta a_0 + \Delta b_0)$, tenemos que:

$$T = K_{eq} x_0 \ldots (5)$$

Desde 0 y moviendo a la masa de la pos. de equilibrio. Como:

$$x' = x_0 + x$$

$$\Rightarrow \ddot{x}' = \ddot{x}$$

Por tanto, por 4) y 5):

$$-K_{eq}(x_0 + x) + mg = m\ddot{x}$$

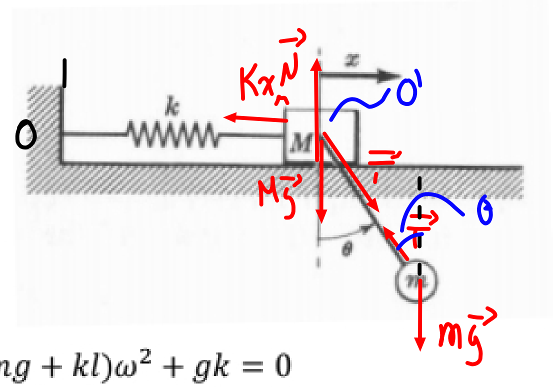
$$\Rightarrow \underbrace{-K_{eq} x_0 + mg}_{=0} = m\ddot{x} + K_{eq} x$$

$$\therefore \ddot{x} + \frac{K_{eq}}{m} x = 0$$

y, la frecuencia natural es: $\omega = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m}}$.

$\square$

4. Un péndulo simple de longitud l y masa m está pivoteado a una masa M que se desliza sin fricción en un plano horizontal como se muestra en la figura. Determine la ecuación que permita conocer las frecuencias naturales del sistema. Considere oscilaciones pequeñas.



R. $Ml\omega^4 - (Mg + mg + kl)\omega^2 + gk = 0$

Apliquémos la 2^{da} Ley de Newton a la masa M: con x_M medida desde el sistema colocado en O:

$$K\vec{x}_M + \vec{N} + M\vec{g} + \vec{T} = M\ddot{\vec{r}}_M$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -Kx_M + T\operatorname{sen}\theta = M\ddot{x}_M \\ -N + Mg + T\cos\theta = 0 \end{cases}$$

y, para la masa m (midiendo x_m y y_m desde O):

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\ddot{\vec{r}}_m$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -T\sin\theta = m\ddot{x}_m \\ -T\cos\theta + mg = m\ddot{y}_m \end{cases}$$

Pero, para osilaciones pequeñas: $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$ y, tenemos la sig. ec. de restricción:

$$x_m = x_M + l\operatorname{sen}\theta$$

$$\Rightarrow x_m = x_M + l\theta$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_m = \ddot{x}_M + l\ddot{\theta}$$

Además, $y_m = l\cos\theta \approx l$, luego $\ddot{y}_m = 0$. Por lo cual las ecs. cambian a:

$$\Rightarrow \begin{cases} -Kx_M + T\theta = M\ddot{x}_M & \dots (1) \\ -N + Mg + T = 0 & \dots (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -T\theta = m\ddot{x}_m & \dots (3) \\ -T + mg = 0 & \dots (4) \end{cases}$$

(2) nos da N, (4) nos da $T = mg$. Sustituyendo en (1) y (3):

$$\Rightarrow \begin{cases} -Kx_M + mg\theta = M\ddot{x}_M \\ -mg\theta = m\ddot{x}_m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -Kx_M + mg\left(\frac{x_m - x_M}{l}\right) = M\ddot{x}_M \\ -g\left(\frac{x_m - x_M}{l}\right) = \ddot{x}_m \end{cases}$$

Para encontrar las frecuencias naturales ω, proponemos soluciones de la forma: $x_M(t) = Ae^{i\omega t}$ y $x_m(t) = Be^{i\omega t}$. Luego:

$$\dot{x}_M(t) = Ai\omega e^{i\omega t}, \quad \dot{x}_m(t) = Bi\omega e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_M(t) = -A\omega^2 e^{i\omega t}, \quad \ddot{x}_m(t) = -B\omega^2 e^{i\omega t}$$

Sustituyendo:

$$\Rightarrow \begin{cases} -KAe^{i\omega t} + \frac{mg}{l}Be^{i\omega t} - \frac{mg}{l}Ae^{i\omega t} = -M\omega^2 Ae^{i\omega t} \\ -\frac{g}{l}Ae^{i\omega t} + \frac{g}{l}Be^{i\omega t} = -B\omega^2 e^{i\omega t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A\left(-K + M\omega^2 - \frac{mg}{l}\right) + B\left(\frac{mg}{l}\right) = 0. \\ A\left(-\frac{g}{l}\right) + B\left(\omega^2 + \frac{g}{l}\right) = 0. \end{cases}$$

Calculamos el determinante e igualamos a 0:

$$\begin{vmatrix} -K + M\omega^2 - \frac{mg}{l} & \frac{mg}{l} \\ -\frac{g}{l} & \omega^2 + \frac{g}{l} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -K\omega^2 + M\omega^4 - \frac{mg}{l}\omega^2 + \frac{Kg}{l} - \frac{Mg}{l}\omega^2 - \cancel{\frac{mg^2}{l^2}} + \cancel{\frac{mg^2}{l^2}} = 0$$

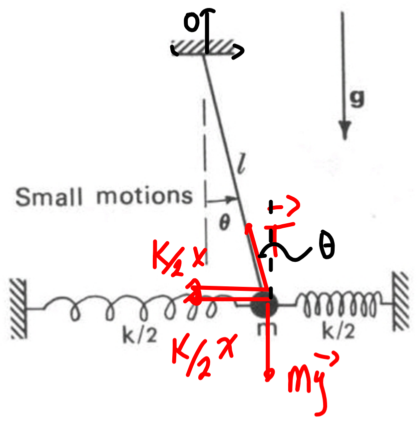
$$\Rightarrow -Kl\omega^2 + Ml\omega^4 - mg\,\omega^2 + Kg - Mg\,\omega^2 = 0$$

$$\Rightarrow Ml\omega^4 - (Kl + mg + Mg)\omega^2 + gK = 0$$

$$\therefore Ml\omega^4 - (Kl + mg + Mg)\omega^2 + gK = 0.$$

$\square$

5. Determine la frecuencia natural ω para el sistema mostrado en la figura. Considere oscilaciones pequeñas.



R. $\omega = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{k}{m}}$

Sol.

Apliquémos la 2da Ley de Newton a la masa m: (en coordenadas cartesianas)

$$\begin{cases} T\cos\theta - mg = m\ddot{y} \\ -T\sin\theta - \frac{K}{2}x - \frac{K}{2}x = m\ddot{x} \end{cases}$$

Para osilaciones pequeñas, $\operatorname{sen}\theta \cong \theta$, $\cos\theta \cong 1$ y, $x = l\theta$. Por tanto:

$$\Rightarrow \begin{cases} T = m(\ddot{y} + g) \\ -T\frac{x}{l} - Kx = m\ddot{x} \end{cases}$$

Como el péndulo tiene osilaciones pequeñas, y es casi constante. Luego $(y \approx l)$ $\ddot{y} = 0$. Así:

$$\Rightarrow -m\frac{g}{l}x - Kx = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \left(\frac{g}{l} + \frac{K}{m}\right)x = 0$$

La cual es la ec. de movimiento armónico simple, con frecuencia natural:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{K}{m}}$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{K}{m}} \quad //$$

6. Considere que la amplitud de un oscilador armónico amortiguado disminuye $1/e$ de su valor inicial después de n ciclos. Calcule la razón del periodo de oscilación al periodo del mismo oscilador sin amortiguamiento.

R. $\frac{T}{T_o} = \left(1 + \frac{1}{4\pi^2 n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cong 1 + \frac{1}{8\pi^2 n^2}$

Sol.

Para un oscilador armónico amortiguado, su ec. de movimiento es:

$$x(t) = A_0 e^{-\omega \zeta t} \operatorname{sen}\left(\omega \sqrt{1-\zeta^2}\, t - \phi\right)$$

El periodo de este oscilador es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \ldots \quad (1)$$

A_0 la amplitud, ω la frecuencia, ϕ la cte. de fase y ζ la viscosidad. Si el oscilador no fuese amortiguado, su periodo T_0 sería:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$$

Ahora, como la amplitud disminuye $\frac{1}{e}$ en n-ciclos (n veces el periodo), entonces:

$$A e^{-1} = A e^{-\omega \zeta n T}$$

$$\Rightarrow 1 = \omega \zeta n T$$

$$\Rightarrow \frac{1}{nT} = \omega \zeta$$

De (1), tenemos que:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\omega^2 - \omega^2\zeta^2}$$

$$= \frac{4\pi^2}{\frac{1}{n^2\zeta^2 T^2} - \frac{1}{n^2 T^2}}$$

$$= \frac{4\pi^2 n^2 \zeta^2 T^2}{1-\zeta^2}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{4\pi^2 n^2 \zeta^2}{1-\zeta^2}$$

$$\Rightarrow 1-\zeta^2 = 4\pi^2 n^2 \zeta^2$$

$$\Rightarrow 1 = \zeta^2(1+4\pi^2 n^2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+4\pi^2 n^2} = \zeta^2 \quad \ldots \quad (2)$$

Luego, por (2) el cociente será:

$$T/T_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{1+4\pi^2 n^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{4\pi^2 n^2}{1+4\pi^2 n^2}}}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{4\pi^2 n^2}\right)^{1/2}$$

$$\simeq 1 + \frac{1}{8\pi^2 n^2}$$

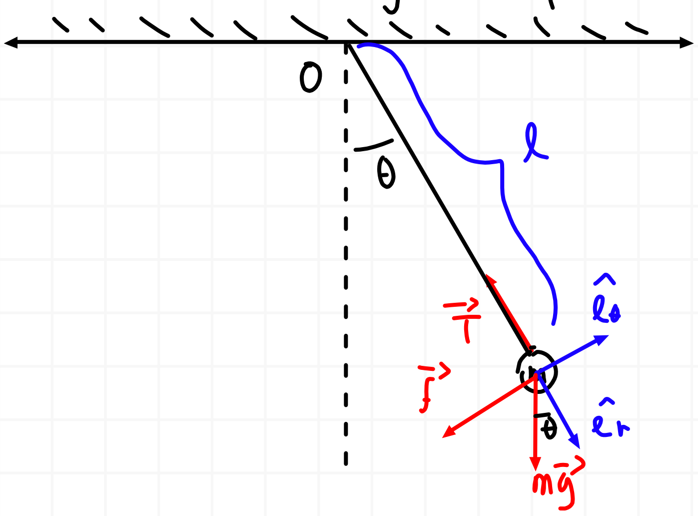
$\square$

7. Un péndulo simple de masa m y longitud l se mueve en un medio viscoso de fuerza resistente $2m\sqrt{gl}\dot{\theta}$. Calcule $\theta(t)$ con las condiciones iniciales $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(0) = 0$.

R. $\theta(t) = \theta_0(1 + \omega_n t)e^{-\omega_n t}$

Sol.

Hágamos un diagrama para ver las fuerzas:



Con $\vec{r} = l\,\hat{e}_r$, por Newton:

$$\vec{T} + \vec{f} + m\vec{g} = m\ddot{\vec{r}}$$

y $\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{e}_\theta$. Vemos:

$$\begin{cases} -T + mg\cos\theta = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ -f - mg\sin\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \end{cases}$$

Donde $f = 2m\sqrt{gl}\,\dot{\theta}$. Como $r = l$ (cte) entonces lo anterior se simplifica a:

$$\begin{cases} -T + mg\cos\theta = -ml\dot{\theta}^2 \quad \ldots (1) \\ -2m\sqrt{gl}\,\dot{\theta} - mg\sin\theta = ml\ddot{\theta} \quad \ldots (2) \end{cases}$$

Para valores de θ muy pequeños, en 2):

$$ml\ddot{\theta} + 2m\sqrt{gl}\,\dot{\theta} + mg\theta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + 2\sqrt{\frac{g}{l}}\,\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \quad \ldots (3)$$

Determinamos el polinomio característico de 3):

$$\Rightarrow s^2 + 2\omega s + \omega^2 = 0$$

$$\Rightarrow s = -\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Así, la solución de la E.D.O será:

$$\theta(t) = C_1 e^{-\omega t} + C_2 t e^{-\omega t}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}(t) = -C_1\omega e^{-\omega t} + C_2 e^{-\omega t} - C_2\omega t e^{-\omega t}$$

En $\theta(0) = \theta_0$, luego:

$$C_1 = \theta_0$$

y, como en $\dot{\theta}(0) = 0$:

$$\Rightarrow 0 = -\theta_0\omega + C_2 \Rightarrow C_2 = \theta_0\omega$$

Por tanto:

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\omega t} + \theta_0 \omega t e^{-\omega t}$$
$$= \theta_0 (1+\omega t) e^{-\omega t}$$

$\square$

8. Una partícula de masa m se localiza en un potencial unidimensional,

$$U(x) = \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x}$$

donde a, b son constantes positivas. Demuestre que el periodo de las oscilaciones pequeñas que efectúa la partícula con respecto a la posición de equilibrio es

$$T = 4\pi\sqrt{2ma^3/b^4}$$

Sol.

Encontremos las posiciones de equilibrio. Para ello, veamos $\frac{du}{dx}$:

$$\frac{du}{dx} = \frac{b}{x^2} - \frac{2a}{x^3}$$

Cuando $\frac{du}{dx}(x) = 0$:

$$\frac{du}{dx}(0) = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{b}{x^2} - \frac{2a}{x^3} = 0$$
$$\Leftrightarrow xb = 2a$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{2a}{b}$$

Así $x_{eq} = \frac{2a}{b}$. Para determinar el periodo de oscilación del sistema, aproximemos a U en serie de Taylor:

$$U(x) = U(x_{eq}) + \frac{du}{dx}\Big|_{x_{eq}}(x - x_{eq}) + \frac{1}{2!}\frac{d^2u}{dx^2}\Big|_{x_{eq}}(x - x_{eq})^2 + \dots$$

Como tomamos posiciones cercanas a x_{eq}, entonces aproximamos $(x - x_{eq})^n = 0 \; \forall$ $n \geq 3$. Por tanto:

$$U(x) = U(x_{eq}) + \frac{1}{2!}\frac{d^2u}{dx^2}\Big|_{x_{eq}}(x - x_{eq})^2$$

Con $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{6a}{x^4} - \frac{2b}{x^3}$, tenemos:

$$U(x_{eq}) = \frac{a}{\left(\frac{2a}{b}\right)^2} - \frac{b}{\left(\frac{2a}{b}\right)}$$
$$= \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} = \frac{ab^2 - 2ab^2}{4a^2} = -\frac{b^2}{4a}$$

Y

$$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_{eq}} = \frac{6a}{\left(\frac{2a}{b}\right)^4} - \frac{2b}{\left(\frac{2a}{b}\right)^3}$$

$$= \frac{6ab^4}{16a^4} - \frac{2b^4}{8a^3}$$

$$= \frac{b^4}{8a^3}$$

Por tanto:

$$U(x) \approx -\frac{b^2}{4a} + \frac{1}{16}\cdot\frac{b^4}{a^3}\left(x-\frac{2a}{b}\right)^2$$

Luego:

$$F(x) = -\frac{dU}{dx}$$

$$= -\frac{1}{8}\frac{b^4}{a^3}\left(x-\frac{2a}{b}\right)$$

Y, por Newton:

$$-\frac{b^4}{8a^3}\left(x-\frac{2a}{b}\right) = m\ddot{x} \quad \ldots \quad (1)$$

Con x medida desde el origen de coordenadas. Como:

$$x = \frac{2a}{b} + x'$$

donde x' es la dist. medida desde la pos. de equilibrio:

$$\Rightarrow \ddot{x} = \ddot{x}', \; y$$

$$x - \frac{2a}{b} = x'$$

Sustituyendo en (1):

$$-\frac{b^4}{8a^3}x' = m\ddot{x}'$$

$$\Rightarrow \ddot{x}' + \frac{b^4}{8a^3 m}x' = 0$$

La cual es la ec. de movimiento armónico simple, donde el periodo T es:

$$T = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{8a^3 m}{b^4}} = 4\pi\sqrt{\frac{2a^3 m}{b^4}}$$

$$\therefore T = 4\pi\sqrt{\frac{2a^3 m}{b^4}} \;//$$