

Ejercicio 1.1.1

Let A be a square matrix that is filled with all zeros except for the coordinates where the row number equals the column number. In those cells, the numbers from 1 to n appear in alphabetical order based on each number's English spelling. For example if $n=3$ then the order would be 1-3-2. Find the trace of A^2

(A) n^2

(B) $n(n+1)/2$

(C) $n(n+1)(2n+1)/6$

(D) n^3

Solución:

First, let's compute A^2 . We have for all $i, j = 1, \dots, n$;

$$(A^2)_{i,j} = \sum_{k=1}^n (A)_{i,k} (A)_{k,j}$$

because A is filled with zeros except for the coordinates where the row number equals the column number, when $i \neq j$ we have that:

$$(A)_{i,k} (A)_{k,j} = 0, \quad \forall k = 1, \dots, n$$

which implies that $(A^2)_{i,j} = 0$ when $i \neq j$. When $i = j$ the sum becomes:

$$\begin{aligned} (A^2)_{i,i} &= \sum_{k=1}^n (A)_{i,k} (A)_{k,i} \\ &= \sum_{k=1}^n (A)_{i,k}^2 \\ &= (A)_{i,i}^2 \end{aligned}$$

so now, the trace of A^2 would be:

$$\begin{aligned} \text{Trace}(A) &= \sum_{i=1}^n (A^2)_{i,i} \\ &= \sum_{i=1}^n (A)_{i,i}^2 \end{aligned}$$

because all the numbers from 1 to n appear in the diagonal of A , then we are just making the sum of all squared numbers from 1 to n , so rearranging all the terms, the sum becomes:

$$\text{Trace}(A) = \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

so the answer is (C). □

Ejercicio 1.1.2

Let a be a prime number bigger than 3 and b an integer coprime to a . What is the smallest prime number that divides both $a^4 b^4$ and $a^2 + ab$?

(A) The smallest prime divisor of b

(B) The smallest prime divisor of ab

(C) a

(D) b

Solución:

It can't be (D) because b not necessarily is a prime number. Also, it can't be (A) because the smallest prime divisor of b not necessarily divides $a^2 + ab = a(a + b)$.

If p is prime such that $p \mid a^4 b^4$ then because a and b are coprime we must only one of these: $p \mid a$ or $p \mid b$.

In the second part, we have that $p \mid a(a + b)$. If $p \mid b$ then p can't divide a , so $p \mid a + b$ which by linearity implies that $p \mid a$, a contradiction.

So, $p \mid a$, which implies that $p = a$. Therefore the answer is (C).

□

Ejercicio 1.1.3

Let m, n be the 11th and 12-th Fibonacci numbers where the first and second Fibonacci numbers are both 1. How many subgroups of $Z_{m \cdot n}$ are there?

(A) 20

(B) 25

(C) 30

(D) 35

Solución:

We compute the Fibonacci numbers up to 11 and 12 position:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

so we must compute all subgroups of $Z_{89 \cdot 144}$. Recall that:

$$89 \cdot 144 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 89$$

we note first that $Z_{89 \cdot 144}$ is isomorphic to $Z/89 \cdot 144Z$. Let $n = 89 \cdot 144$. Now, by correspondence theorem, all subgroups of Z/nZ (namely rZ/nZ) are in correspondence with the subgroups of Z such that:

$$nZ \subseteq rZ \subseteq Z$$

the condition $nZ \subseteq rZ$ implies that $r \mid n$, so the set of all subgroups of Z/nZ is:

$$\left\{ rZ/nZ \mid r \mid n \right\}$$

so, we must compute all divisors of n , with the prime decomposition of $89 \cdot 144$ it's seen that there are 30 divisors, so the answer is (C).

□

Ejercicio 1.1.4

Let $v = [1, 2]$ be a vector in the plane and let $A = 2\left[\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right], \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right]$. What is $(A^8)v$?

(A) v

(B) $256v$

(C) $[128, 0]$

Solución:

Recall the matrix A is:

$$A = 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

we remember the form of the rotation matrix of angle θ in the euclidean plane:

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

so, $A = 2R_\theta$ where $\theta = \frac{\pi}{4}$. We observe that:

$$A^8 = (2R_\theta)^8 = 2^8 R_\theta^8 = 256 R_\theta^8$$

but rotation matrix has the property that:

$$R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta}$$

so,

$$R_\theta^8 = R_{8\theta} = R_{2\pi} = I$$

We conclude that $A^8 = 256I$, which implies that $(A^8)v = 256Iv = 256v$, so the answer is (B). \square

Ejercicio 1.1.5

Consider the subset of the real line $A = (-\infty, 0]$. Which of the following are open sets (there may be more than 1 correct answer)?

(A) $A \cap [0, 1]$

(B) $A \cap (-\infty, -1)$

(C) $A \cup \{1/2\}$

(D) $A \cup (-1, 1)$

(E) $A \cup (0, 1, 1)$

Solución:

(A) cannot be, because closed sets are closed under intersection, also with (C) but now with union of sets. (E) is not even a subset of the real line.

Now, $A \subseteq (-\infty, -1)$, so $A \cap (-\infty, -1) = A$, it can't be open because A is closed, which discards (B)

Finally, $A \cup (-1, 1) = (-\infty, 1)$, which is open. So the answer is (D). \square

- Hint (1): The square of a diagonal matrix is just the squares of its elements. Its trace is just the sum of the squared numbers from 1 to n , regardless of the order. Use the formula of the sum of squares.
- Hint (2): If p is a prime number that divides $a^4 b^4$ then it must divide only a or b because both of them are coprime. Proof that if we suppose p divides b
- Hint (3): Use the fact that Z_{m*n} is isomorphic to $Z/m * nZ$. By correspondence theorem all subgroups of $Z/m * nZ$ are in correspondence with the subgroups of Z such that those contain $m * nZ$.

Subgroups of $Z/m * nZ$ are of the form $rZ/m * nZ$ with $m * nZ \subseteq rZ$. Proof this implies $r \mid n$. Then, all subgroups of $Z/m * nZ$ are of the form: $\left\{ rZ/m * nZ \mid r \mid m * n \right\}$ find all positive integer divisors of $m * n$, then use the latter fact to count all subgroups of Z_{m*n} .

Ejercicio 1.2.6

Solución:

$$n^2 - n + 1 \pmod 3 \equiv n^2 \pmod 3 - n \pmod 3 + 1 \pmod 3$$

1	1	0
2	1	0
3	0	1
4	1	1
5	1	0
6	0	0

$$(3n - 1)^2 - (3n - 1) + 1 \pmod 3 \equiv$$

$$\begin{aligned} n^2 - n + 1 = 3^k &\Rightarrow n^2 - n + 1 - 3^k = 0 \\ &\Rightarrow n(n - 1) + 1 - 3^k = 0 \\ &\Rightarrow n(n - 1) = 3^k - 1 \end{aligned}$$

el producto de dos números consecutivos debe ser tal que sucede eso, para algún k, uno de los dos debe ser par.

$$(3n - 1)^2 - (3n - 1) + 1 = 9n^2 - 6n + 1 - 3n + 1 + 1 = 9n^2 - 9n + 3 = 3(3n^2 - 3n + 1)$$

□

Ejercicio 1.2.7

$$x^4 - 2x^3 - 35x^2 + 36x + 180 = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4)$$

Solución:

Se tiene que:

$$(-a_1)(-a_2)(-a_3) + (-a_1)(-a_2)(-a_4) + (-a_1)(-a_4)(-a_3) + (-a_4)(-a_2)(-a_3) = -2$$

tiene como raíces:

$$b_1 - b_3 = -5 - 3 = -8$$

Factorize 180 in its prime decomposition and substitute

1. Find roots of the polynomial. 2. Order roots from least to greatest. 3. Compute $b_1 - b_3$. 4. Convert from decimal to binary the result of $b_1 - b_3$.

□

Solución:

$$[-5, 5] \cap (1, \infty] \cap [2, 6] \setminus \{2, 3\} = (2, 5] \setminus \{3\}.$$

$$[-5, 5] \cap (1, \infty] \cap [2, 6] = [2, 5]$$

□

First, compute the domain of each of the function summands in $f(x)$, then for each function we compute it's domain. Next, find the intersection of all domains to find the domain of f . Finally count all prime numbers in the domain of f .

Demostración:

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \bigcup_{a \in \mathbb{Q}} \left\{ (a, b) \mid b \in \mathbb{Q} \right\}$$

Sea $a \in \mathbb{Q}$. Entonces el conjunto:

$$\left\{ (a, b) \mid a < b, b \in \mathbb{Q} \right\} \subseteq \mathcal{L}$$

es numerable.

Si \mathcal{L} fuese finito, entonces:

$$a = \min \{a_i\}$$

$(a - 1, a)$. ■

Demostración:

Recordemos:

$$\overline{A} = A \cup A'$$

y la otra equivalencia es que:

$$x \in \overline{A} \text{ sii } \exists \{x_n\} \text{ en } A \text{ que converge a } x$$

$$x \in \overline{A} \text{ sii } \forall r > 0, B_d(x, r) \cap A \neq \emptyset$$

Un conjunto U es abierto si para todo $x \in U$ existe $r > 0$ tal que $B_d(x, r) \subseteq U$.

\Rightarrow) : Suponga que $x \in \overline{A}$, entonces

■ $x \in A$, entonces:

$$0 \leq d(x, A) = \inf \left\{ d(x, a) \mid a \in A \right\} \leq d(x, x) = 0 \Rightarrow d(x, A) = 0$$

■ $x \in A'$, si para toda vecindad (para todo $r > 0$) se tiene que

$$(B_d(x, r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

entonces existe $a_x \in (B_d(x, r) \setminus \{x\}) \cap A$, por lo que:

$$0 \leq \inf \left\{ d(x, a) \mid a \in A \right\} \leq d(x, a_x) < r$$

donde el $r > 0$ fue arbitrario.

Por tanto:

$$d(x, A) = \inf \left\{ d(x, a) \mid a \in A \right\} = 0$$

\Leftarrow): ■

Demostración:

Sea (X, d) , como es separable existe un conjunto denso D a lo sumo numerable.
 Sea A el conjunto de puntos aislados de X .

- Si A es finito ya hemos terminado.
- Suponga que A es infinito.

$$x \in A \text{ si y sólo si } \exists r > 0 \text{ abierto es tal que } B_d(x, r) = B_d(x, r) \cap X = \{x\}$$

Ahora, como D es denso entonces:

$$\overline{D} = X$$

lo que quiere decir que

$$\forall x \in X, \forall r > 0 \quad B_d(x, r) \cap D \neq \emptyset$$

Entonces, $A \subseteq D$ lo cual implica que A es numerable.

■

Demostración:

$$A = \left\{ f \in \mathcal{C}([0, 1]) \mid f(1/2) = 1 \right\}$$

el complemento de A es:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}A &= \left\{ f \in \mathcal{C}([0, 1]) \mid f(1/2) \neq 1 \right\} \\ &= \left\{ f \in \mathcal{C}([0, 1]) \mid f(1/2) < 1 \right\} \cup \left\{ f \in \mathcal{C}([0, 1]) \mid f(1/2) > 1 \right\} \end{aligned}$$

objetivo: probar que

$$B = \left\{ f \in \mathcal{C}([0, 1]) \mid f(1/2) < 1 \right\}$$

es abierto. Sea $f \in B$, se tiene que:

$$f(1/2) < 1$$

Recordemos que:

$$\mathcal{N}_\infty(g) = \sup \left\{ |g(x)| \mid x \in [0, 1] \right\}, g \in \mathcal{C}([0, 1]) \quad (1.1)$$

tomemos:

$$0 < 1 - f(1/2) = r$$

$x \mapsto d(x, A)$ es continua. Sea $f(x) = d(x, A)$.

Veamos que:

$$\begin{aligned} f^{-1}(]-\infty, \delta]) &= \left\{ x \in X \mid f(x) \in]-\infty, \delta] \right\} \\ &= \left\{ x \in X \mid -\infty < d(x, A) < \delta \right\} \\ &= \left\{ x \in X \mid d(x, A) < \delta \right\} \\ &= G_\delta \end{aligned}$$

■

Demostración:

Considere la función:

$$h : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

tal que $x \mapsto d(x, f(x))$.

$$d(x, f(x)) > 0, \quad \forall x \in X \iff x \neq f(x), \quad \forall x \in X$$

Objetivo: ver que h vale cero en algún punto.

Veamos que h es continua. En efecto, pues $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ y $f : X \rightarrow X$ es continua, luego la composición:

$$x \mapsto (x, f(x))$$

es continua, luego la composición de esta función con d es continua. Así que h es continua.

Como X es compacto, entonces $h(X) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ es compacto.

Si $0 \notin h(X)$, entonces denotemos por $k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ al elemento mínimo de $h(X)$.

Entonces, existe $x' \in X$ tal que:

$$h(x') = d(x', f(x')) = k$$

Luego:

$$h(f(x')) = d(f(x'), f^2(x')) < h(x') = k$$

#_c. Por tanto, $0 \in h(X)$ luego existe $x \in X$ tal que $h(x) = 0 \Rightarrow d(x, f(x)) = 0 \Rightarrow x = f(x)$.

Supongamos que existe $y \in X$ tal que:

$$h(y) = 0 \Rightarrow y = f(y)$$

queremos probar que $x = y$. En efecto:

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y) \Rightarrow x = y$$

Por ende, X tiene un único punto fijo. ■

Demostración:

Sea $r > 0$. Considere la función $f : E \rightarrow E$:

$$x \mapsto \frac{1}{r} \cdot x$$

de esta forma $B'(0, r)$ es mapeada a $B'(0, 1)$. f es continua y es una aplicación lineal acotada. Tiene inversa continua.

f es isomorfismo continuo. Se tiene que

$$B'(0, r) \text{ es compacta} \iff B'(0, 1) \text{ es compacta}$$

Aplicando el Corolario al teorema de Riez:

$$B'(0, r) \text{ es compacta} \iff E \text{ tiene dimensión finita}$$

para todo $r > 0$.

Se tiene que: W_r será compacto si E es de dimensión finita es condición suficiente.

Probaremos ahora que:

$$W_r = \left\{ x \in X \mid d(x, C) \leq r \right\} = C + B'(0, r)$$

Como C es compacto, es cerrado. Luego:

$$x \in \overline{C} = C \text{ si y sólo si } d(x, C) = 0$$

■ Suponga que $x \in W_r$, entonces $d(x, C) \leq r$. Se tienen dos casos:

- $0 = d(x, C)$ por lo anterior se tiene que $x \in C$. Tomamos $c = x$ y $b = 0$, se tiene que:

$$x = c + b$$

con $c \in C$ y $b = 0 \in B'(0, r)$. Por ende, $x \in C + B'(0, r)$.

- $0 < d(x, C) \leq r$. Entonces $x \notin C$, por lo que existe $\epsilon > 0$ tal que:

$$B(x, \epsilon) \subseteq X \setminus C$$

La función $c \mapsto d(x, c)$ es continua. Entonces como C es compacto, luego alcanza su mínimo:

$$\inf \left\{ d(x, c) \mid c \in C \right\} = d(x, C)$$

por lo que, existe $c \in C$ tal que:

$$d(x, c) = d(x, C)$$

Tomemos:

$$b = x - c$$

afirmamos que $b \in B'(0, r)$. En efecto, veamos que:

$$d(0, b) = \|0 - b\| = \|-x + c\| = \|x - c\| = d(x, c) = d(x, C) \leq r$$

por tanto, $b \in B'(0, r)$. Así que $x = c + b \in C + B'(0, r)$.

■ Si $c + b \in C + B'(0, r)$:

$$d(c + b, C) = \inf \left\{ \|c + b - c'\| \mid c' \in C \right\} \leq \|c - c + b\| = \|b\| = d(0, b) \leq r$$

pues, $c \in C$. Por tanto:

$$d(c + b, C) \leq r$$

es decir, que $c + b \in W_r$.

De ambas contenciones se sigue la igualdad. ■

Demostración:

Considere la ecuación:

$$\begin{aligned} \cos x + 4e^x - 4xe^x &= 0 \\ \iff \cos x + 4e^x &= 4xe^x \\ \iff \frac{\cos x}{4e^x} + 1 &= x \end{aligned}$$

por lo que la ecuación original tiene solución si la ecuación anterior la tiene. Considere la función $g : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$g(x) = \frac{\cos x}{4e^x} + 1, \quad \forall x \in [0, \infty[$$

es continua por ser producto, suma y composición de funciones continuas. Afirmamos $g \geq 0$.

$$g(x) = \frac{\cos x}{4e^x} + 1 \geq -\frac{1}{4e^x} + 1 \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \geq 0, \quad \forall x \in [0, \infty[$$

Por lo que $g : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$. El subespacio métrico $([0, \infty[, |\cdot|)$ es completo pues $[0, \infty[$ es cerrado.

Además, se cumple que:

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= \left| \frac{\cos x}{4e^x} + 1 - \frac{\cos y}{4e^y} - 1 \right| \\ &= \left| \frac{\cos x}{4e^x} - \frac{\cos y}{4e^y} \right| \\ &= \frac{1}{4} \left| \frac{\cos x}{e^x} - \frac{\cos y}{e^y} \right| \end{aligned}$$

La función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable (por ser cociente de funciones diferenciables y una que no se anula en \mathbb{R}). Su derivada es:

$$\begin{aligned} \dot{g}(x) &= \frac{-4e^x \sin x - 4e^x \cos x}{(4e^x)^2} \\ \dot{g}(x) &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{\sin x + \cos x}{e^x}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Sean $x, y \in [0, \infty[$ distintos. Por el teorema del valor medio existe $c \in [x, y]$ tal que:

$$\frac{g(x) - g(y)}{x - y} = \dot{g}(c)$$

por lo que:

$$|g(x) - g(y)| = |\dot{g}(c)| |x - y|$$

se tiene que $c \in [0, \infty[$, así que:

$$\begin{aligned} 0 &\leq |\dot{g}(c)| \\ &= \left| -\frac{1}{4} \cdot \frac{\sin c + \cos c}{e^c} \right| \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left| \frac{\sin c + \cos c}{e^c} \right| \\ &\leq \frac{1}{4} \cdot \frac{|\sin c| + |\cos c|}{e^c} \\ &\leq \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{e^c} \\ &\leq \frac{1}{2e^c} \\ &\leq \frac{1}{2} \\ &< 1 \end{aligned}$$

Así que:

$$|g(x) - g(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y|$$

Se tiene que parecer a algo de la forma:

$$|g(x) - g(y)| \leq \alpha |x - y|$$

con $0 \leq \alpha < 1$. Por tanto, la desigualdad se cumple con $\alpha = \frac{1}{2}$. Por el teorema del punto fijo existe un único $x_0 \in [0, \infty]$ tal que:

$$g(x_0) = x_0$$

es decir que:

$$\frac{\cos x_0}{4e^{x_0}} + 1 = x_0$$

es decir que la ecuación original tiene solución única en $[0, \infty[$. ■

Demostración:

Primero, como $\{G_i\}_{i \in I}$ es una cubierta abierta de X , entonces para todo $x \in X$ existe $i_x \in I$ tal que:

$$x \in G_{i_x}$$

El conjunto G_{i_x} es abierto, por lo que existe $2r_x > 0$ tal que:

$$B(x, 2r_x) \subseteq G_{i_x}$$

Considere la cubierta abierta $\{B(x, r_x)\}_{x \in X}$ de X . Por ser X compacto, existen $x_1, \dots, x_n \in X$ tales que:

$$X = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, r_{x_i})$$

Tomemos:

$$\alpha = \min \{r_{x_i} \mid i = 1, \dots, n\} > 0$$

Sea $y \in X = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, r_{x_i})$ y considere la $B(y, \alpha)$. Existe $j = 1, \dots, n$ tal que:

$$y \in B(x_j, r_{x_j})$$

Queremos ver que $B(y, \alpha) \subseteq G_i$ para algún $i \in I$. ¿Qué sabemos?

$$B(x_j, 2r_{x_j}) \subseteq G_i$$

Tomemos:

$$i = i_{x_j}$$

En efecto, sea $z \in B(y, \alpha)$. Se tiene que:

$$d(z, x_j) \leq d(z, y) + d(y, x_j) < \alpha + r_{x_j} \leq r_{x_j} + r_{x_j} = 2r_{x_j}$$

por lo que $z \in B(x_j, 2r_{x_j}) \subseteq G_i$. Por ende:

$$B(y, \alpha) \subseteq G_i$$

■

Demostración:

Sean $A, B \subseteq X$ espacio métrico conexo, cerrados no vacíos. Pruebe que existe $x_0 \in X$ tal que:

$$d(x_0, A) = d(x_0, B) \iff d(x_0, A) - d(x_0, B) = 0$$

Se tiene que las funciones $x \mapsto d(x, A)$ y $x \mapsto d(x, B)$ son continuas, luego la función f :

$$x \mapsto f(x) = d(x, A) - d(x, B)$$

es continua. El espacio métrico X es conexo, por lo que el subespacio $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ es conexo. La función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que:

$$f(a) = d(a, A) - d(a, B) = -d(a, B) < 0$$

pues $d(a, B) > 0 \iff -d(a, B) < 0$ ya que B es cerrado y $a \notin B$. De forma análoga:

$$f(b) > 0$$

para algún $b \in B$. Así que:

$$f(a) < 0 < f(b)$$

Por el teorema del valor intermedio existe $x_0 \in X$ tal que:

$$f(x_0) = 0$$

es decir:

$$d(x_0, A) - d(x_0, B) = 0 \iff d(x_0, A) = d(x_0, B)$$

■

Teorema 1.2.1 (Teorema del valor intermedio)

Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua de un espacio métrico conexo. Si $a, b \in X$ son tales que $f(a) < f(b)$, entonces para todo $c \in [f(a), f(b)]$ existe $z \in X$ tal que:

$$f(z) = c$$
