Curso de Variable Compleja

Cristo Daniel Alvarado

30 de julio de 2024

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. Fundamentos

El objetivo principal de la teoría de las funciones analíticas es el análisis de funciones que localmente pueden ser descritas en términos de una serie de potencias convergente, dispuesta como:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + ... + a_n(x-x_0)^n + ... \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k, \quad \forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\end{aligned} \tag{1.1}$$

siendo $f : I \to \mathbb{R}$ con I un intervalo, $x_0 \in I$ y $\delta > 0$ tal que $]x_0-\delta, x_0+\delta[\subseteq]a, b[$. Cuando una funcion de este tipo puede ser descrita de la forma anterior para algún par x_0 y δ, decimos en este caso que f **es analítica en** x_0.

En el caso que I sea un intervalo abierto y f sea analítica en x_0 para todo $x_0 \in I$, decimos que f **es analítica en** I.

Ejemplo 1.1.1
Las funciones $x \mapsto P(x)$, $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \sin x$ y $x \mapsto \cos x$ son analíticas en $\mathbb{R}$

Debido a que como resultado de efectuar operaciones algebraicas y analíticas (suma, resta, multiplicación, división, integración y derivación) sobre series de potencias resulta nuevamente en una serie de potencias convergente, es de gran interés conocer las propiedades de estas funciones (más que nada debido a las ecuaciones diferenciales). Esto motiva el estudio particular de este tipo de funciones.

A pesar de lo amplia que es esta clase de funciones, ésta solamente forma una parte regular de las funciones *infinitamente diferenciables.*

Proposición 1.1.1
Sea $f :]x_0-r, x_0+r[\to \mathbb{R}$ una función, siendo $r > 0$ y $x_0 \in \mathbb{R}$. Entonces, f es analítica en x_0 si y sólo si se satisfacen las condiciones siguientes:

1. f tiene derivadas de todos los órdenes en un entorno de x_0.
2. Existen $\delta, M > 0$ tales que para todo $x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$ y para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple:

$$\left| f^{(k)}(x) \right| < M\frac{k!}{\delta^k}$$

Demostración:

$\Rightarrow)$: Suponga que f es analítica en x_0, entonces existen $a_0, a_1, ..., a_n, ... \in \mathbb{R}$ y $\rho > 0$ tal que

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ...$$

para todo $x \in]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ (note que $\rho < r$). Se sabe por resultados de análisis real que f tiene derivadas de todos los órdenes en $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ y, en particular para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$f^{(k)}(x) = k!a_k + \frac{(k+1)!}{1!}a_{k+1}(x - x_0) + \frac{(k+2)!}{2!}a_{k+2}(x - x_0)^2 + ... + \frac{(k+n)!}{n!}a_{k+n}(x - x_0)^n + ...$$

para todo $x \in]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$. Fijemos $k \in \mathbb{N}$ y tomemos $\delta > 0$ tal que $0 < 2\delta < \rho$. Si $x = x_0 + 2\delta$, entonces la serie anterior convergerá y, por ende en el límite debe suceder que

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \frac{(k+n)!}{n!}a_{k+n}(x - x_0)^n = 0 \\ \iff &\lim_{n\to\infty} a_{k+n}(x_0 + 2\delta - x_0)^n = 0 \\ &\iff a^k \lim_{n\to\infty} a_n(2\delta)^n = 0 \\ &\iff \lim_{n\to\infty} a_n(2\delta)^n = 0 \end{aligned}$$

(pues, $\lim_{n\to\infty} \frac{(k+n)!}{n!} = 1$). En particular, de lo anterior se deduce que $\{a_n(2\delta)^n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada, luego existe $M > 0$ tal que

$$|a_n(2\delta)^n| < M', \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, se tiene que para todo $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, al ser la serie de potencias convergente y ser el espacio $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ completo, es absolutamente convergente, luego:

$$\begin{aligned} \left|f^{(k)}(x)\right| &\leq k!\,|a_k| + \frac{(k+1)!}{1!}\,|a_{k+1}|\,|x - x_0| + ... + \frac{(k+n)!}{n!}\,|a_{k+n}|\,|x - x_0|^n + ... \\ &\leq k!\,|a_k| + \frac{(k+1)!}{1!}\,|a_{k+1}|\,|x_0 + \delta - x_0| + ... + \frac{(k+n)!}{n!}\,|a_{k+n}|\,|x_0 + \delta - x_0|^n + ... \\ &\leq k!\,|a_k| + \frac{(k+1)!}{1!}\,|a_{k+1}|\,\delta + ... + \frac{(k+n)!}{n!}\,|a_{k+n}|\,\delta^n + ... \\ &< k!\frac{M'}{(2\delta)^k} + \frac{(k+1)!}{1!} \cdot \frac{M'}{(2\delta)^{k+1}}\delta + ... + \frac{(k+n)!}{n!} \cdot \frac{M'}{(2\delta)^{k+n}}\delta^n + ... \\ &= \frac{k!M'}{2^k}\left[1 + \frac{k+1}{1!} \cdot \frac{1}{2} + ... + \frac{(k+1)(k+2)\cdot ... \cdot (k+n)}{n!} \cdot \frac{1}{2^n} + ...\right] \end{aligned}$$

■

Bibliografía

- A. Markusevich, *Teoría de las funciones analíticas*, Ed. Mir Moscu.