

Espacios Hilbertianos

Cristo Daniel Alvarado

20 de febrero de 2024

Índice general

1. Espacios Hilbertianos	2
1.1. Conceptos básicos. Proyecciones ortogonales	2
1.2. Autodualidad de espacios hilbertianos	13

Capítulo 1

Espacios Hilbertianos

1.1. Conceptos básicos. Proyecciones ortogonales

Definición 1.1.1

Sea H un espacio vectorial sobre el campo \mathbb{K} . Decimos que H es un **espacio prehilbertiano** si está dotado de una aplicación $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto (\vec{x}|\vec{y})$ con las propiedades siguientes:

- 1). $\forall \vec{y} \in H$ fijo, $\vec{x} \mapsto (\vec{x}|\vec{y})$ es una aplicación lineal de H en \mathbb{K} , o sea

$$\begin{aligned}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2|\vec{y}) &= (\vec{x}_1|\vec{y}) + (\vec{x}_2|\vec{y}) \\ (\alpha\vec{x}|\vec{y}) &= \alpha \cdot (\vec{x}|\vec{y})\end{aligned}$$

para todo $\vec{x}, \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in H$ y $\alpha \in \mathbb{K}$.

- 2). $(\vec{y}|\vec{x}) = \overline{(\vec{x}|\vec{y})}$, para todo $\vec{x} \in H$.

- 3). $(\vec{x}|\vec{x}) \geq 0$, para todo $\vec{x} \in H$.

- 4). $(\vec{x}|\vec{x}) = 0$ si y sólo si $\vec{x} = 0$.

Observación 1.1.1

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces 1) y 2) implican que $\forall \vec{x} \in H$ fijo, la aplicación $\vec{y} \mapsto (\vec{x}|\vec{y})$ de H en \mathbb{R} es lineal. En este caso se dice que $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto (\vec{x}|\vec{y})$ es una **forma bilineal sobre H** .

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, entonces

$$\begin{aligned}(\vec{x}|\vec{y}_1 + \vec{y}_2) &= (\vec{x}|\vec{y}_1) + (\vec{x}|\vec{y}_2) \\ (\vec{x}|\alpha\vec{y}) &= \overline{\alpha} (\vec{x}|\vec{y})\end{aligned}$$

Se dice que $\vec{y} \mapsto (\vec{x}|\vec{y})$ es entonces **semilineal** y que $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto (\vec{x}|\vec{y})$ es **sesquilineal** (1_2^1 -lineal).

La aplicación $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto (\vec{x}|\vec{y})$ se llama **producto escalar sobre H** .

Definición 1.1.2

Para todo $\vec{x} \in H$ se define la **norma de \vec{x}** como: $\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}|\vec{x})}$.

Ejemplo 1.1.1

Sea $H = \mathbb{K}^n$

Ejemplo 1.1.2

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y sea $H = L_2(S, \mathbb{K})$. Para todo $f, g \in H$ se define

$$(f|g) = \int_S f \bar{g}$$

La integral existe por Hölder con $p = p^* = 2$. Este es un producto escalar sobre H y, en este caso:

$$\|f\| = \left[\int_S |f|^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \mathcal{N}_2(f), \quad \forall f \in H$$

Ejemplo 1.1.3

Sea $H = l_2(\mathbb{K})$ el espacio de sucesiones en \mathbb{K} que son cuadrado sumables. Se sabe que $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots) \in l_2(\mathbb{K})$ si y sólo si

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$$

$l_2(\mathbb{K})$ es un espacio prehilbertiano con el producto escalar:

$$(\vec{x}|\vec{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i$$

donde la serie es convergente por Hölder. En este caso:

$$\|\vec{x}\| = \left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \mathcal{N}_2(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in l_2(\mathbb{K})$$

Teorema 1.1.1 (Desigualdad de Cauchy-Schwartz)

Sea H un espacio prehilbertiano. Entonces:

- 1). Se cumple la desigualdad de Cauchy-Schwartz:

$$|(\vec{x}|\vec{y})| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in H$$

y, la igualdad se da si y sólo si los vectores son linealmente dependientes.

- 2). Se cumple la desigualdad triangular:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in H$$

y la igualdad se da si y sólo si uno de los vectores es múltiplo no negativo del otro.

Demostración:

De 1): Se supondrá que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (el caso en que sea \mathbb{R} es similar y se deja como ejercicio).

Sean $\vec{x}, \vec{y} \in H$. En el caso de que alguno de los vectores sea $\vec{0}$, el resultado es inmediato (ambos miembros de la desigualdad son cero). Por lo cual, supongamos que ambos son no cero. Se tiene para

todo $\lambda \in \mathbb{K}$ que

$$\begin{aligned}
0 &\leq (\vec{x} + \lambda \vec{y} | \vec{x} + \lambda \vec{y}) \\
&= (\vec{x} | \vec{x}) + \overline{\lambda} (\vec{x} | \vec{y}) + \lambda (\vec{y} | \vec{x}) + \lambda \overline{\lambda} (\vec{y} | \vec{y}) \\
&= (\vec{x} | \vec{x}) + \overline{\lambda} (\vec{y} | \vec{x}) + \lambda (\vec{y} | \vec{x}) + \lambda \overline{\lambda} (\vec{y} | \vec{y}) \\
&= \|\vec{x}\|^2 + 2\Re \lambda (\vec{y} | \vec{x}) + |\lambda|^2 \|\vec{y}\|^2
\end{aligned} \tag{1.1}$$

En particular, para

$$\lambda(t) = \begin{cases} t \frac{(\vec{x} | \vec{y})}{|(\vec{x} | \vec{y})|} & \text{si } (\vec{x} | \vec{y}) \neq 0 \\ t & \text{si } (\vec{x} | \vec{y}) = 0 \end{cases}$$

con $t \in \mathbb{R}$, la desigualdad (1) se convierte en

$$0 \leq \|\vec{x}\|^2 + 2t |(\vec{y} | \vec{x})| + t^2 \|\vec{y}\|^2 \tag{1.2}$$

El trinomio anterior es mayor o igual a cero si y sólo si su discriminante:

$$|(\vec{x} | \vec{y})|^2 - \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 \leq 0$$

es decir

$$|(\vec{x} | \vec{y})| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$$

Si $|(\vec{x} | \vec{y})| = \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2$, entonces el trinomio en (2) tiene una raíz doble. Luego, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que

$$(\vec{x} + \lambda \vec{y} | \vec{x} + \lambda \vec{y}) = 0$$

pero lo anterior solo sucede si y sólo si $\vec{x} + \lambda \vec{y} = 0$, es decir si \vec{x} y \vec{y} son linealmente dependientes.

De 2): Se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 &= (\vec{x} + \vec{y} | \vec{x} + \vec{y}) \\
&= \|\vec{x}\|^2 + 2\Re (\vec{y} | \vec{x}) + \|\vec{y}\|^2 \\
&\leq \|\vec{x}\|^2 + 2|(\vec{y} | \vec{x})| + \|\vec{y}\|^2 \\
&\leq \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\| \|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 \\
&= (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2
\end{aligned}$$

lo cual implica la desigualdad que se quiere probar. Ahora, la igualdad se cumple si y sólo si

$$|(\vec{x} | \vec{y})| = \Re (\vec{x} | \vec{y}) \text{ y } |(\vec{x} | \vec{y})| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$$

la primera igualdad implica que $(\vec{x} | \vec{y})$ es real (en particular, ≥ 0 por el valor absoluto) y la segunda implica que \vec{x} y \vec{y} son linealmente dependientes. Es decir, si y sólo si un vector es múltiplo no negativo del otro. ■

Se concluye del teorema anterior que $\|\cdot\|$ es una norma sobre H . En lo sucesivo se considerará a H como espacio normado dotado de esta norma.

Proposición 1.1.1

La aplicación $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto (\vec{x} | \vec{y})$ es una función continua del espacio normado producto $H \times H$ en \mathbb{K} .

Demostración:

Sean $\vec{x}, \vec{y} \in H$ y, $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{\vec{y}_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones que convergen a \vec{x} y \vec{y} , respectivamente. Se probará que $\{(\vec{x}_n|\vec{y}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $(\vec{x}|\vec{y})$ en \mathbb{K} . Se tiene que

$$\begin{aligned} |(\vec{x}|\vec{y}) - (\vec{x}_n|\vec{y}_n)| &\leq |(\vec{x} - \vec{x}_n|\vec{y})| + |(\vec{x}_n|\vec{y} - \vec{y}_n)| \\ &\leq \|\vec{x} - \vec{x}_n\| \|\vec{y}\| + \|\vec{x}_n\| \|\vec{y} - \vec{y}_n\| \end{aligned} \quad (1.3)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\{\vec{x}_n\}$ es convergente, es acotada. Luego existe $M > 0$ tal que

$$\|\vec{x}_n\| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Se sigue de (3) que

$$|(\vec{x}|\vec{y}) - (\vec{x}_n|\vec{y}_n)| \leq \|\vec{x} - \vec{x}_n\| \|\vec{y}\| + M \|\vec{y} - \vec{y}_n\|$$

y, por ende

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(\vec{x}|\vec{y}) - (\vec{x}_n|\vec{y}_n)| = 0$$

con lo que se tiene el resultado. ■

Definición 1.1.3

Decimos que un espacio prehilbertiano se llama **Hilbertiano**, si la norma $\|\cdot\|$ hace de él un espacio normado completo (o sea, un espacio normado de Banach).

Ejemplo 1.1.4

Los espacios $L_2(S, \mathbb{K})$, $l_2(\mathbb{K})$ y todo espacio prehilbertiano de dimensión finita (\mathbb{K}^n) son hilbertianos (ya que, todo espacio prehilbertiano de dimensión finita es isomorfo a \mathbb{R}^k , para algún $k \in \mathbb{N}$).

De ahora en adelante, H denotará siempre a un espacio prehilbertiano (a menos que se indique lo contrario).

Definición 1.1.4

Sean $\vec{x}, \vec{y} \in H$. Se dice que \vec{x} y \vec{y} son **ortogonales** y se escribe $\vec{x} \perp \vec{y}$, si $(\vec{x}|\vec{y}) = 0$.

Observación 1.1.2

La condición $\vec{x} \perp \vec{y}$ para todo $\vec{x} \in H$ implica que $\vec{y} = \vec{0}$, pues en particular $(\vec{y}|\vec{y}) = 0 \Rightarrow \vec{y} = \vec{0}$.

Teorema 1.1.2 (Teorema de Pitágoras)

Si $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ es un sistema de vectores ortogonales (a pares), entonces

$$\|\vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_n\|^2 = \|\vec{x}_1\|^2 + \dots + \|\vec{x}_n\|^2$$

Demostración:

Se procederá por inducción sobre n . Veamos el caso $n = 2$. En este caso, veamos que

$$\begin{aligned} \|\vec{x}_1 + \vec{x}_2\|^2 &= (\vec{x}_1 + \vec{x}_2|\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \\ &= \|\vec{x}_1\|^2 + (\vec{x}_1|\vec{x}_2) + (\vec{x}_2|\vec{x}_1) + \|\vec{x}_2\|^2 \\ &= \|\vec{x}_1\|^2 + \|\vec{x}_2\|^2 \end{aligned}$$

Suponga que el resultado se cumple para $n \geq 2$. Sea $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n+1} \in H$ un sistema de vectores ortogonales. Observemos que

$$\begin{aligned} (\vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_n | \vec{x}_{n+1}) &= (\vec{x}_1 | \vec{x}_{n+1}) + \dots + (\vec{x}_n | \vec{x}_{n+1}) \\ &= 0 + \dots + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

por lo cual, $\vec{x}_{n+1} \perp \vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_n$. Por el caso $n = 2$ se sigue que:

$$\|\vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_{n+1}\|^2 = \|\vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_n\|^2 + \|\vec{x}_{n+1}\|^2$$

Pero, por hipótesis de inducción:

$$\|\vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_n\|^2 = \|\vec{x}_1\|^2 + \dots + \|\vec{x}_n\|^2$$

Por lo cual:

$$\|\vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_{n+1}\|^2 = \|\vec{x}_1\|^2 + \dots + \|\vec{x}_n\|^2 + \|\vec{x}_{n+1}\|^2$$

Aplicando inducción se sigue el resultado. ■

Proposición 1.1.2 (Identidad del paralelogramo)

Para todo $\vec{x}, \vec{y} \in H$ se cumple la identidad del paralelogramo:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2)$$

Demostración:

Sean $\vec{x}, \vec{y} \in H$. Veamos que

$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 &= (\vec{x} + \vec{y} | \vec{x} + \vec{y}) + (\vec{x} - \vec{y} | \vec{x} - \vec{y}) \\ &= \|\vec{x}\|^2 + 2\Re(\vec{y} | \vec{x}) + \|\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}\|^2 - 2\Re(\vec{y} | \vec{x}) + \|\vec{y}\|^2 \\ &= 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2) \end{aligned}$$

■

Este resultado anterior es importante, pues en espacios donde la norma no venga de un producto escalar, no necesariamente se cumple la igualdad.

Ejemplo 1.1.5

Los vectores $\chi_{[0,1]}$ y $\chi_{[1,2]}$ son ortogonales en $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (es inmediato del producto escalar en $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$).

Ejemplo 1.1.6

Los vectores \sin y \cos son ortogonales en $L_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$. En efecto, veamos que

$$(\sin | \cos) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x dx = 0$$

En particular, por Pitágoras se tiene que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x + \cos x|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|^2 dx + \int_{-\pi}^{\pi} |\cos x|^2 dx$$

Ejemplo 1.1.7

Si $\vec{x} = (1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{3}, \dots)$ y $\vec{y} = (1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{3}, \dots)$ son elementos de $l_2(\mathbb{R})$, se tiene que $\vec{x} \perp \vec{y}$. En efecto, veamos que

$$\begin{aligned} (\vec{x}|\vec{y}) &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \end{aligned}$$

donde $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de sumas parciales, siendo $s_{2m} = 0$ y $s_{2m-1} = \frac{1}{m}$. Por lo cual

$$(\vec{x}|\vec{y}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$$

Teorema 1.1.3

Sea M un subespacio de un espacio prehilbertiano H y sea $\vec{x} \in H$.

- 1). Suponiendo que existe $\vec{x}_0 \in M$ tal que $\vec{x} - \vec{x}_0 \perp M$, es decir que $\vec{x} - \vec{x}_0 \perp \vec{y}$, para todo $\vec{y} \in M$, se tiene

$$\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \|\vec{x} - \vec{y}\|, \quad \forall \vec{y} \in M, \vec{y} \neq \vec{x}_0$$

Así pues, si existe \vec{x}_0 , tal vector es único y es llamado **la proyección ortogonal de \vec{x} sobre M** . Además

$$d(\vec{x}, M)^2 = \|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2 = \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{x}_0\|^2$$

- 2). Recíprocamente, si existe un $\vec{x}_0 \in M$ tal que $d(\vec{x}, M) = \|\vec{x} - \vec{x}_0\|$, entonces \vec{x}_0 es la proyección ortogonal de \vec{x} sobre M . En particular, si $\vec{x} \in M$ entonces $\vec{x} = \vec{x}_0$, es decir que \vec{x} es su propia proyección ortogonal sobre M .

Demostración:

De 1): Suponga que existe $\vec{x}_0 \in M$ con la condición especificada. Sea $\vec{y} \in M$ distinto de \vec{x}_0 . Como $\vec{x}_0 - \vec{x} \perp \vec{x}_0 - \vec{y}$, por el Teorema de Pitágoras se tiene que

$$\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2 + \|\vec{x}_0 - \vec{y}\|^2 > \|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2 \quad (1.4)$$

pues $\vec{x}_0 \neq \vec{y}$. Así pues, \vec{x}_0 es único. Además $d(\vec{x}, M) = \|\vec{x} - \vec{x}_0\|$. Aplicando la ecuación 4) con $\vec{y} = \vec{0}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|\vec{x}\|^2 &= \|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2 + \|\vec{x}_0\|^2 \\ \Rightarrow d(\vec{x}, M)^2 &= \|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2 = \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{x}_0\|^2 \end{aligned}$$

De 2) Si existe $\vec{x}_0 \in M$ tal que $d(\vec{x}, M) = \|\vec{x} - \vec{x}_0\|$, entonces \vec{x}_0 debe ser la proyección ortogonal de \vec{x} sobre M . En efecto, para todo $\vec{y} \in M$ y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{aligned} \|\vec{x} - (\vec{x}_0 + \lambda \vec{y})\|^2 &\geq \|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2 \\ \Rightarrow \|(\vec{x} - \vec{x}_0) - \lambda \vec{y}\|^2 &\geq \|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2 \\ \Rightarrow \|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2 + 2\Re[\overline{\lambda} (\vec{x} - \vec{x}_0|\vec{y})] + |\lambda|^2 \|\vec{y}\|^2 &\geq \|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2 \\ \Rightarrow -2\Re[\lambda (\vec{x} - \vec{x}_0|\vec{y})] + |\lambda|^2 \|\vec{y}\|^2 &\geq 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

en particular, para $\lambda = t (\vec{x} - \vec{x}_0|\vec{y})$, con $t \in \mathbb{R}$, la ecuación anterior se transforma en:

$$|(\vec{x} - \vec{x}_0|\vec{y})|^2 [-2t + t^2 \|\vec{y}\|^2] \geq 0$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Esto exige que $(\vec{x} - \vec{x}_0|\vec{y}) = 0$, o sea que $\vec{x} - \vec{x}_0 \perp \vec{y}$. ■

Dado un subespacio M de un espacio prehilbertiano H un vector $\vec{x} \in H$, puede no existir la proyección ortogonal de \vec{x} sobre M . Esto motiva la siguiente definición:

Definición 1.1.5

Un subespacio M de H se dice que es **distinguido** si para cada $\vec{x} \in H$ existe la proyección ortogonal de \vec{x} sobre M .

Ejemplo 1.1.8

El subespacio ϕ_0 de las sucesiones eventualmente constantes de valor cero es un subespacio del espacio hilbertiano $l_2(\mathbb{R})$. Sea M el subespacio de ϕ_0 dado como sigue:

$$M = \{\vec{x} \in \phi_0 \mid x_2 = 0\}$$

Sea $\vec{x} = (0, \frac{1}{2^{0/2}}, \frac{1}{2^{1/2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^{3/2}}, \dots)$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} d(\vec{x}, M) &= \inf_{\vec{y} \in M} \{\|\vec{x} - \vec{y}\|\} \\ &= \inf_{\vec{y} \in M} \left\{ \left[|y_1| + \sum_{i=2}^{\infty} \left| \frac{1}{2^{(i-2)/2}} - y_i \right|^2 \right]^{1/2} \right\} \\ &= 1 \\ &= \inf_{\vec{y} \in M} \left\{ \left[|y_1| + 1 + \sum_{i=3}^{\infty} \left| \frac{1}{2^{(i-2)/2}} - y_i \right|^2 \right]^{1/2} \right\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(pues, $y_2 = 0$). Pero $\|\vec{x} - \vec{y}\| > 1$, para todo $\vec{y} \in M$. En efecto, sea $\vec{y} \in M$, entonces $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq m$ se tiene que $y_k = 0 = y_2$. Veamos que

$$\begin{aligned} \|\vec{x} - \vec{y}\| &= \left[|y_1| + 1 + \sum_{i=3}^{\infty} \left| \frac{1}{2^{(i-2)/2}} - y_i \right|^2 \right]^{1/2} \\ &\geq \left[1 + \sum_{i=3}^{k-1} \left| \frac{1}{2^{(i-2)/2}} - y_i \right|^2 + \sum_{i=k}^{\infty} \left| \frac{1}{2^{(i-2)/2}} - y_i \right|^2 \right]^{1/2} \\ &= \left[1 + \sum_{i=3}^{k-1} \left| \frac{1}{2^{(i-2)/2}} - y_i \right|^2 + \sum_{i=k}^{\infty} \left| \frac{1}{2^{(i-2)/2}} \right|^2 \right]^{1/2} \\ &\geq \left[1 + \sum_{i=k}^{\infty} \left| \frac{1}{2^{(i-2)/2}} \right|^2 \right]^{1/2} \\ &> [1]^{1/2} \\ &> 1 \end{aligned}$$

Luego no existe $\vec{x}_0 \in M$ tal que $d(\vec{x}, M) = \|\vec{x} - \vec{x}_0\|$. Por lo tanto, no existe la proyección ortogonal de \vec{x} sobre M (es decir, M no es distinguido).

Sin embargo, si $\vec{x} = (1, 1, 0, \dots) \in l_2(\mathbb{R})$, entonces si existe la proyección ortogonal de \vec{x} sobre

M , pues

$$\begin{aligned} d(\vec{x}, M) &= \inf_{\vec{y} \in M} \{\|\vec{x} - \vec{y}\|\} \\ &= \inf_{\vec{y} \in M} \left\{ \left[|1 - y_1|^2 + 1^2 + \sum_{i=3}^{\infty} |y_i|^2 \right]^{1/2} \right\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

y $\|\vec{x} - \vec{e}_1\| = 1$, donde $\vec{e}_1 \in M$. Por tanto, \vec{e}_1 es la proyección ortogonal de \vec{x} sobre M .

Teorema 1.1.4

Si M es un subespacio completo de un espacio prehilbertiano, entonces M es distinguido. En particular todo subespacio de dimensión finita de un espacio prehilbertiano siempre es distinguido.

Demostración:

Sea $\vec{x} \in H$. Se debe probar que existe un $\vec{x}_0 \in M$ tal que $d(\vec{x}, M) = \|\vec{x} - \vec{x}_0\|$. Sea $a = d(\vec{x}, M)$. Por propiedades del ínfimo existe una sucesión $\{\vec{y}_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|\vec{x} - \vec{y}_\nu\| = a \quad (1.6)$$

Sean $\nu, \mu \in \mathbb{N}$ arbitrarios. Por la identidad del paralelogramo se tiene que

$$\begin{aligned} 2(\|\vec{x} - \vec{y}_\nu\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}_\mu\|^2) &= \|\vec{y}_\nu - \vec{y}_\mu\|^2 + \|2\vec{x} - (\vec{y}_\nu + \vec{y}_\mu)\|^2 \\ &= \|\vec{y}_\nu - \vec{y}_\mu\|^2 + 4\left\|\vec{x} - \frac{\vec{y}_\nu + \vec{y}_\mu}{2}\right\|^2 \\ &\geq \|\vec{y}_\nu - \vec{y}_\mu\|^2 + 4a^2 \end{aligned}$$

de donde

$$\|\vec{y}_\nu - \vec{y}_\mu\|^2 \leq 2(\|\vec{x} - \vec{y}_\nu\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}_\mu\|^2) - 4a^2$$

Tomando límite cuando ν, μ tienden a infinito y por (6), se tiene que

$$\lim_{\nu, \mu \rightarrow \infty} \|\vec{y}_\nu - \vec{y}_\mu\|^2 = 0$$

por tanto, $\{\vec{y}_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Por ser M completo, existe $\vec{x}_0 \in M$ tal que $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \vec{y}_\nu = \vec{x}_0$. Por (6):

$$a = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \|\vec{x} - \vec{y}_\nu\| = \|\vec{x} - \vec{x}_0\|$$

■

Ejemplo 1.1.9

¿Es distinguido el subespacio de $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dado por:

$$M = \{f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) = 0 \text{ c.t.p. en } [1, 2]\}$$

?

La respuesta es que sí, ya que M es cerrado. En efecto, sea $\{f_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ una sucesión en M convergente en promedio cuadrático a una $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, es decir:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{N}_2(f_\nu - f) = 0$$

Se sabe que existe una subsucesión de $\{f_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$, digamos $\{f_{\alpha(\nu)}\}_{\nu=1}^{\infty}$ que converge c.t.p. a f en \mathbb{R} . Como $f_{\alpha(\nu)} = 0$ c.t.p. en $[1, 2]$, entonces $f = 0$ c.t.p. en $[1, 2]$, es decir $f \in M$. Por tanto, M es distinguido.

Ahora, dada $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, ¿Cuál será la proyección ortogonal de f sobre M ? Es claro que

$$f_0 = f \cdot \chi_{\mathbb{R} \setminus [1,2]} \in M$$

es la proyección ortogonal de f sobre M , y además $f - f_0 \perp M$.

Definición 1.1.6

Sea $S \subseteq H$ un conjunto arbitrario. Para este conjunto se define

$$S^\perp = \{\vec{x} \in H \mid \vec{x} \perp \vec{s}, \forall \vec{s} \in S\}$$

Es claro que S^\perp es un subespacio cerrado de H .

Solución:

En efecto, si $\{\vec{x}_\nu\}$ es una sucesión en S^\perp que converge a $\vec{x} \in H$, entonces

$$(\vec{x} \mid \vec{s}) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} (\vec{x}_\nu \mid \vec{s}) = 0, \quad \forall \vec{s} \in S$$

por continuidad y para todo $\vec{s} \in S$. Luego $\vec{x} \in S^\perp$. Otra forma es definiendo una función $T_{\vec{s}} : H \rightarrow \mathbb{K}$ como

$$T_{\vec{s}}(\vec{x}) = (\vec{x} \mid \vec{s}), \quad \forall \vec{x} \in H$$

Entonces

$$S^\perp = \bigcap_{\vec{s} \in S} \ker T_{\vec{s}}$$

Como $T_{\vec{s}}$ es lineal continua para todo $\vec{s} \in S$, entonces se sigue que S^\perp es cerrado. \square

Proposición 1.1.3

Un subespacio M de un espacio prehilbertiano H es distinguido si y sólo si

$$H = M \oplus M^\perp$$

Demostración:

\Rightarrow): Suponga que M es distinguido. Como $M \cap M^\perp = \{\vec{0}\}$, para probar que $H = M \oplus M^\perp$, basta probar que es la suma simplemente, es decir que $H = M + M^\perp$.

Sea $\vec{x} \in H$, como M es distinguido entonces existe $\vec{x}_1 \in M$ tal que $\vec{x} - \vec{x}_1 \perp M$, tomando $\vec{x}_2 = \vec{x} - \vec{x}_1$ se tiene que $\vec{x}_2 \in M^\perp$. Además $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$, lo que prueba el resultado.

\Leftarrow): Suponga que $H = M \oplus M^\perp$. Hay que probar que M es distinguido. Sea $\vec{x} \in H$ arbitrario. Por hipótesis existen $\vec{x}_1 \in M$ y $\vec{x}_2 \in M^\perp$ únicos tales que $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$. Se afirma que \vec{x}_1 es la proyección ortogonal de \vec{x} sobre M .

En efecto,

$$\vec{x} - \vec{x}_1 = \vec{x}_2 \in M^\perp$$

pero $\vec{x}_2 \perp M$, por tanto \vec{x}_1 es la proyección ortogonal. \blacksquare

Ejemplo 1.1.10

Sea $M = \{x \in l_2(\mathbb{R}) \mid x(2n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}\}$. Afirmamos que M es distinguido, para lo cual basta ver que este subespacio es cerrado (por ser $l_2(\mathbb{R})$ completo, es decir por ser un espacio Hilbertiano).

Sea $\{\vec{x}_n\}$ una sucesión en $l_2(\mathbb{R})$ que converge a $\vec{x} \in l_2(\mathbb{R})$, es decir

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}_2(\vec{x} - \vec{x}_n) &= 0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} (\vec{x}(2k) - \vec{x}_n(2k)) &= 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \vec{x}(2k) &= 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{1.7}$$

por lo cual, $\vec{x} \in M$. Luego, M es cerrado. Dado que M es distinguido, si $\vec{x} \in l_2(\mathbb{R}) = M \oplus M^\perp$, se tiene

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$$

donde $\vec{x}_1 \in M$ y $\vec{x}_2 \in M^\perp$ son únicos y están dados por:

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= (\vec{x}(1), 0, \vec{x}(3), \dots) \\ \vec{x}_2 &= (0, \vec{x}(2), 0, \vec{x}(4), \dots) \end{aligned}$$

Corolario 1.1.1

Si M es un subespacio distinguido de H , entonces M^\perp es también un subespacio distinguido.

Demostración:

Se probará que cualquier $\vec{x} \in H$ posee una proyección ortogonal sobre M^\perp . Por el teorema anterior:

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$$

con $\vec{x}_1 \in M$ y $\vec{x}_2 \in M^\perp$ únicos. Luego, $\vec{x} - \vec{x}_2 = \vec{x}_1 \in M$, por lo que cualquier vector en M^\perp se cumple que $\vec{x}_1 \perp \vec{y}$, para todo $\vec{y} \in M$, es decir que \vec{x}_2 es la proyección ortogonal de \vec{x} sobre M^\perp . ■

Proposición 1.1.4

Si M es un subespacio distinguido de H , entonces $M^{\perp\perp} = M$.

Demostración:

Claramente $M \subseteq M^{\perp\perp}$. Ahora, sea $\vec{x} \in M^{\perp\perp}$, por el teorema $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ donde $\vec{x}_1 \in M$ y $\vec{x}_2 \in M^\perp$ únicos.

Se tiene que

$$0 = (\vec{x}|\vec{x}_2) = (\vec{x}|\vec{x}_1) + (\vec{x}_2|\vec{x}_2) = (\vec{x}_2|\vec{x}_2)$$

es decir que $\vec{x}_2 = \vec{0}$. Por tanto, $\vec{x} \in M$.

Luego, $M = M^{\perp\perp}$. ■

Corolario 1.1.2

En un espacio hilbertiano H , un subespacio es distinguido si y sólo si es cerrado.

Demostración:

Si es cerrado es inmediato que es distinguido. Ahora, si es distinguido entonces es cerrado, pues por el corolario anterior $M = M^{\perp\perp}$, donde $M^{\perp\perp}$ es cerrado por ser intersección arbitraria de cerrados, luego M es cerrado. ■

Proposición 1.1.5

Sea H un espacio prehilbertiano y sea M un subespacio distinguido de H (que no se reduce al $\{\vec{0}\}$). $\forall \vec{x} \in H$ sea $\pi(\vec{x})$ la **proyección ortogonal de \vec{x} sobre M** .

Entonces $\pi : H \rightarrow M$ es lineal continua y tal que $\|\pi\| = 1$. Además, $\pi \circ \pi = \pi$, y $(\pi(\vec{x})|\vec{y}) =$

$$(\vec{x}|\pi(\vec{y})).$$

Demostración:

Sea $\vec{x} \in H$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Si $\alpha = 0$, el resultado es inmediato. Suponga que $\alpha \neq 0$. Se tiene que $\alpha\pi(\vec{x}) \in M$ por ser subespacio, y

$$\alpha\vec{x} - \alpha\pi(\vec{x}) = \alpha(\vec{x} - \pi(\vec{x})) \perp M$$

Luego, $\alpha\pi(\vec{x})$ es una proyección ortogonal de $\alpha\vec{x}$ sobre M , pero por unicidad de la proyección ortogonal, se tiene que $\pi(\alpha\vec{x}) = \alpha\pi(\vec{x})$.

Ahora, sean $\vec{x}, \vec{y} \in H$. Entonces, $\pi(\vec{x}) + \pi(\vec{y}) \in M$ y:

$$(\vec{x} + \vec{y}) - (\pi(\vec{x}) + \pi(\vec{y})) = (\vec{x} - \pi(\vec{x})) + (\vec{y} - \pi(\vec{y})) \perp M$$

es decir que $\pi(\vec{x}) + \pi(\vec{y})$ es una proyección ortogonal de $\vec{x} + \vec{y}$ sobre M . Por unicidad,

$$\pi(\vec{x} + \vec{y}) = \pi(\vec{x}) + \pi(\vec{y})$$

Por tanto, π es lineal.

Ahora, veamos que es continua. Se sabe que:

$$\begin{aligned} d(\vec{x}, M)^2 &= \|\vec{x} - \pi(\vec{x})\|^2 \\ &= \|\vec{x}\|^2 - \|\pi(\vec{x})\|^2 \\ \Rightarrow \|\pi(\vec{x})\|^2 &= \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{x} - \pi(\vec{x})\|^2 \\ &\leq \|\vec{x}\|^2 \end{aligned}$$

luego, π es continua y, $\|\pi\| \leq 1$.

Sea ahora $\vec{x} \in M$, $\vec{x} \neq \vec{0}$. Entonces:

$$\|\vec{x}\| = \|\pi(\vec{x})\| \leq \|\pi\| \|\vec{x}\|$$

por tanto, $\|\pi\| \geq 1$, por lo anterior se sigue que $\|\pi\| = 1$.

Ya se sabe que $\pi \circ \pi = \pi^2 = \pi$ (por la proposición anterior).

Sean $\vec{x}, \vec{y} \in H$ arbitrarios. Entonces, $\pi(\vec{x}) \in M$ y $\vec{y} - \pi(\vec{y}) \perp M$, por lo cual

$$\begin{aligned} 0 &= (\pi(\vec{x})|\vec{y} - \pi(\vec{y})) \\ &= (\pi(\vec{x})|\vec{y}) - (\pi(\vec{x})|\pi(\vec{y})) \\ \Rightarrow (\pi(\vec{x})|\vec{y}) &= (\pi(\vec{x})|\pi(\vec{y})) \end{aligned}$$

Intercambiando los papeles de \vec{x} y \vec{y} se obtiene que: $(\pi(\vec{y})|\vec{x}) = (\pi(\vec{y})|\pi(\vec{x}))$ o sea:

$$(\vec{x}|\pi(\vec{y})) = (\pi(\vec{x})|\pi(\vec{y}))$$

por lo cual $(\pi(\vec{x})|\vec{y}) = (\vec{x}|\pi(\vec{y}))$. ■

Proposición 1.1.6

Sea H prehilbertiano. Suponga que π es una aplicación lineal de H en H tal que

- $\pi^2 = \pi$.
- $(\pi(\vec{x})|\vec{y}) = (\vec{x}|\pi(\vec{y})), \forall \vec{x}, \vec{y} \in H$.

Entonces existe un único subespacio distinguido M de H tal que π es la proyección ortogonal de H sobre M .

Demostración:

Claramente, si M existe debe ser $M = \pi(H)$, o sea:

$$M = \pi(H) = \{ \pi(\vec{x}) \mid \vec{x} \in H \}$$

Se debe probar que si $\vec{x} \in H$ es arbitrario $\vec{x} - \pi(\vec{x}) \perp M$, o sea

$$(\vec{x} - \pi(\vec{x}) \mid \pi(\vec{y})) = 0, \quad \forall \vec{y} \in H$$

Sean $\vec{x}, \vec{y} \in H$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} (\vec{x} - \pi(\vec{x}) \mid \pi(\vec{y})) &= (\vec{x} \mid \pi(\vec{y})) - (\pi(\vec{x}) \mid \pi(\vec{y})) \\ &= (\vec{x} \mid \pi(\vec{y})) - (\vec{x} \mid \pi(\vec{y})) \\ &= 0 \end{aligned}$$

usando las dos propiedades de π . Por tanto, $\pi(\vec{x})$ es la proyección ortogonal de \vec{x} , es decir que M es distinguido. La unicidad se sigue de la construcción de M . ■

1.2. Autodualidad de espacios hilbertianos

Si E es un espacio normado, E^* denota su **dual topológico** formado por todas las aplicaciones lineales continuas de E en \mathbb{K} . Si $W \in E^*$, se define la $\|W\|$ como

$$\|W\| = \inf \{ a \in \mathbb{R} \mid \|W(\vec{x})\| \leq a \|\vec{x}\|, \forall \vec{x} \}$$

Recuerde que E^* es siempre un espacio de Banach aunque E no lo sea.

Teorema 1.2.1 (Teorema de Riesz)

Sea H un espacio hilbertiano (no reducido a $\{\vec{0}\}$). Para cada $\vec{y} \in H$ se define una aplicación $G_{\vec{y}} : H \rightarrow \mathbb{K}$ como sigue:

$$G_{\vec{y}}(\vec{x}) = (\vec{x} \mid \vec{y}), \forall \vec{x} \in H$$

Entonces, $G_{\vec{y}}$ es un funcional lineal continuo sobre H . Además, la aplicación $G : H \rightarrow H^*$ dada por:

$$\vec{y} \mapsto G_{\vec{y}}$$

es una isometría semilineal de H en H^* que es suprayectiva.

Demostración:

Se probarán varias cosas:

- 1). Por propiedades del producto escalar, para cada $\vec{y} \in H$ la aplicación $G_{\vec{y}} : H \rightarrow \mathbb{K}$ es lineal. Dicha aplicación lineal es continua, pues

$$|G_{\vec{y}}(\vec{x})| = |(\vec{x} \mid \vec{y})| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|, \quad \forall \vec{x} \in H$$

(por Cauchy-Schwartz). Así que $G_{\vec{y}} \in H^*$. Además, $\|G_{\vec{y}}\| \leq \|\vec{y}\|$. Por otra, parte, si $\vec{y} \neq \vec{0}$, entonces

$$G_{\vec{y}}(\vec{y}) = (\vec{y} \mid \vec{y}) = \|\vec{y}\|^2$$

pero, como el operador es continuo, se tiene que $|G_{\vec{y}}(\vec{y})| \leq \|G_{\vec{y}}\| \|\vec{y}\|$. Por lo cual, $\|\vec{y}\| \leq \|G_{\vec{y}}\|$. Así pues, $\|G_{\vec{y}}\| = \|\vec{y}\|$.

Si $\vec{y} = \vec{0}$, entonces $\|G_{\vec{y}}\| = 0 = \|\vec{y}\|$, pues $G_{\vec{y}} = 0$.

2). La aplicación $G : H \rightarrow H^*$, $\vec{y} \mapsto G_{\vec{y}}$ es semilineal, es decir que $G_{\alpha\vec{y}} = \bar{\alpha}G_{\vec{y}}$ y separa sumas. En efecto, sea $\vec{y} \in H$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Entonces:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\vec{y}}(\vec{x}) &= (\vec{x} | \alpha\vec{y}) \\ &= \bar{\alpha} (\vec{x} | \vec{y}) \\ &= G_{\vec{y}}(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in H \end{aligned}$$

y además, para $\vec{z} \in H$ se tiene que

$$\begin{aligned} G_{\vec{y}+\vec{z}}(\vec{x}) &= (\vec{x} | \vec{y} + \vec{z}) \\ &= (\vec{x} | \vec{y}) + (\vec{x} | \vec{z}) \\ &= G_{\vec{y}}(\vec{x}) + G_{\vec{z}}(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in H \end{aligned}$$

por tanto, G es semilineal. Ahora, veamos que es isometría; sean $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in H$, entonces:

$$\begin{aligned} \|G_{\vec{y}_1} - G_{\vec{y}_2}\| &= \|G_{\vec{y}_1 - \vec{y}_2}\| \\ &= \|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\| \end{aligned}$$

así, isometría. Automáticamente, G es inyectiva. Note que $\vec{y} \in (\ker G_{\vec{y}})^\perp$ y $G_{\vec{y}}(\vec{y}) = \|\vec{y}\|^2$.

Sea $W \in H^*$,

■