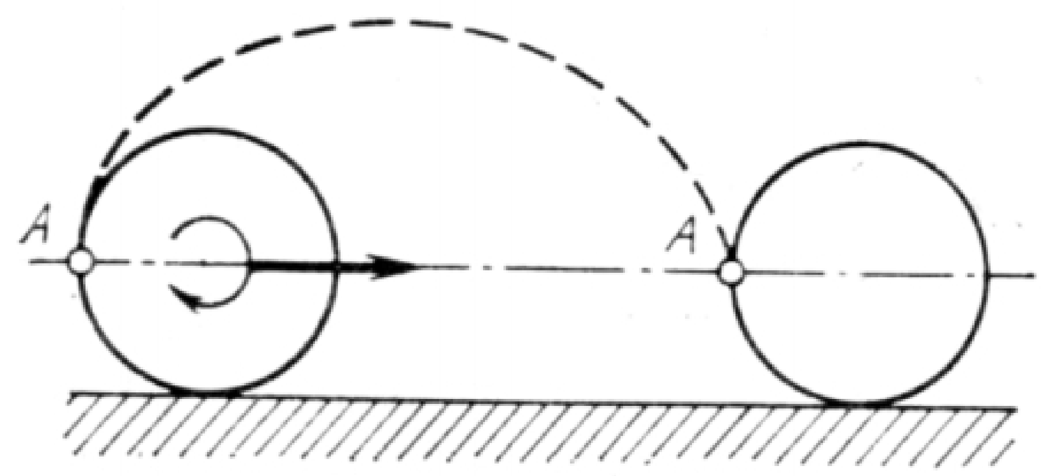
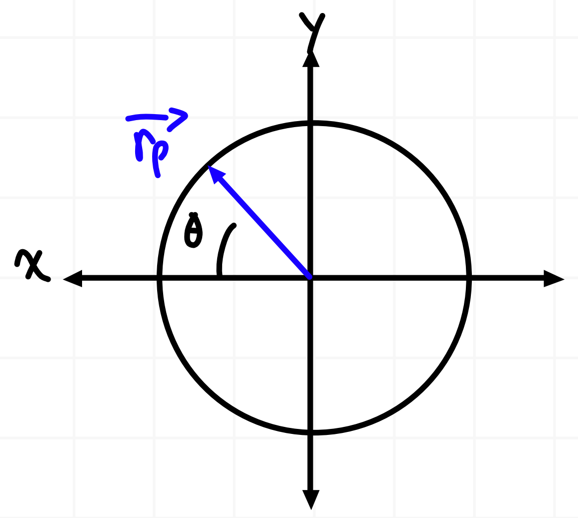
2. Una rueda de radio R se mueve sin deslizar uniformemente por una superficie horizontal. Del punto A de la rueda se desprende una partícula de lodo. ¿Con qué velocidad v se mueve la rueda si la partícula después de estar en el aire cae sobre el mismo punto de la rueda?



R. $v = \sqrt{\pi g R}$

Sol.

Con la rueda moviéndose a velocidad v, tenemos entonces que la componente en x $v_x = v$. Para la v_y, veamos la velocidad de un punto sobre la superficie de la rueda.



Con la rueda viajando a una velocidad v, para que dé una vuelta completa, el periodo debe ser:

$$\frac{2\pi R}{v} = T \Rightarrow \theta(t) = \frac{2\pi v}{2\pi R} t = \frac{v}{R} t$$

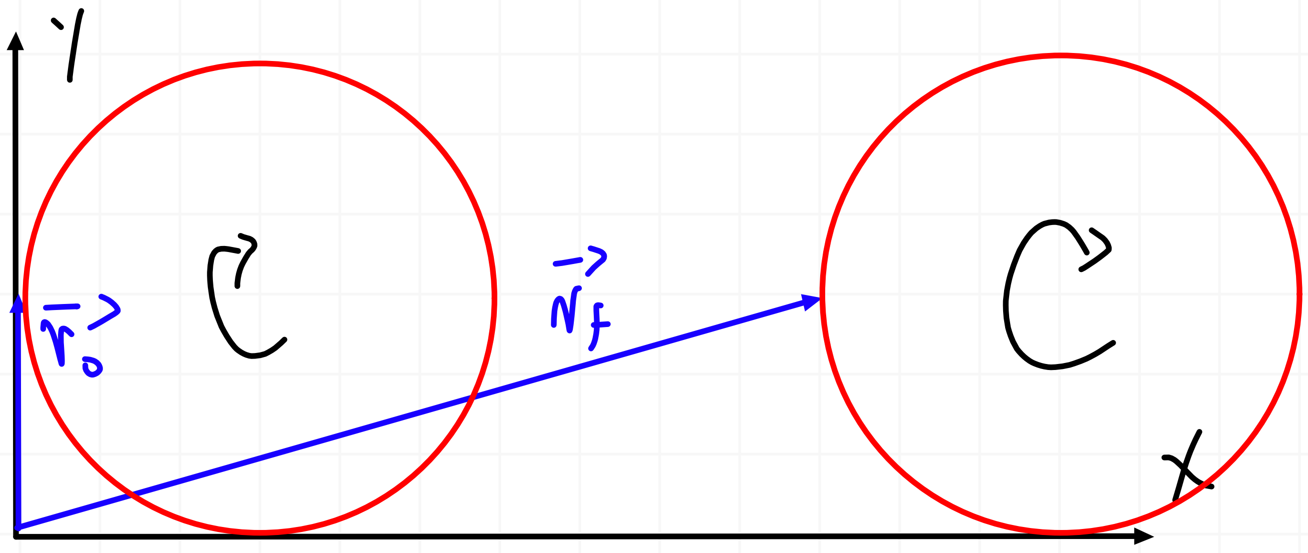
Por tanto, el vector $r_p(t) = R\hat{e}_r$, de posición de un punto p sobre la rueda, su velocidad:

$$\vec{v_p}(t) = v\,\hat{e}_\theta \Rightarrow \|\vec{v_p}\| = v$$

Por tanto, la velocidad $\vec{v_0}$ de la partícula de lodo es:

$$\vec{v_0} = (v, v).$$

En el sistema:



Con $\vec{r_0} = (0, R)$ y $\vec{r_f} = (2\pi R, R)$.

Por la ec. de caída libre.

$$\vec{r}(t) = \vec{r_0} + t\vec{v_0} + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

donde $\vec{g} = (0, -g)$, así:

$$\vec{r}(t) = (tv, R + tv - \tfrac{1}{2}gt^2)$$

Con $\vec{r_f} = \vec{r}(t)$, con $t = T = \frac{2\pi R}{v}$:

$$(2\pi R, R) = \left(2\pi R, R + 2\pi R - \frac{1}{2} g \left(\frac{2\pi R}{v}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow 2\pi R = \frac{1}{2} g \left(\frac{2\pi R}{v}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\pi R}{g} = \left(\frac{2\pi R}{v}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{4\pi R}{g} = \frac{4\pi^2 R^2}{v^2}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\pi R g} \quad //$$

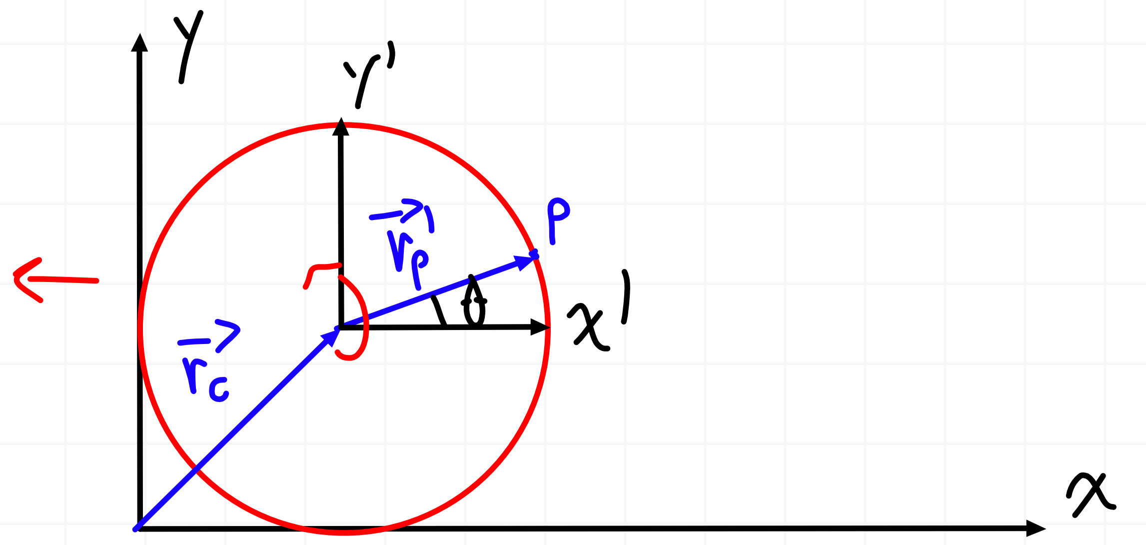
$\square$

3. Desde el borde de una rueda de radio b que se mueve sin deslizar sobre el suelo se desprenden partículas de lodo. Si la velocidad de la rueda hacia adelante es v_0. Calcule la máxima altura con respecto al suelo a la que el lodo puede llegar. ¿De qué parte de la rueda sale el lodo en este caso? (es necesario suponer que $v_0^2 \geq bg$).

   R. $y_{max} = b + \frac{v_0^2}{2g} + \frac{gb^2}{2v_0^2}$

Sol.

Considere una rueda moviéndose a una velocidad v_0. Para un punto p sobre la rueda, calcularemos su velocidad $\vec{v_p}$, a partir de $\vec{r_p}$:



Con el diagrama de la izquierda, $\vec{r_p}$ será:

$$\vec{r_p} = \vec{r_p}' + \vec{r_c}$$

Donde $\vec{r_p}'(t) = (b\cos\theta_p(t), b\,\text{sen}\,\theta_p(t))$,

y $\vec{r_c} = (b - v_0 t, b)$. Luego:

$$\vec{r_p}(t) = (b\cos\theta_p(t) + b - v_0 t, b\,\text{sen}\,\theta_p(t) + b)$$

$$\Rightarrow \vec{v_p}(t) = (-b\dot{\theta}_p(t)\,\text{sen}\,\theta_p(t) - v_0, b\dot{\theta}_p(t)\cos\theta_p(t))$$

Donde $\dot{\theta}_p(t)$:

$$\theta_p(t) = \frac{2\pi t}{T} + \theta_0, \quad T = \frac{2\pi b}{v_0}$$

$$= \frac{v_0}{b} t + \theta_0$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}_p(t) = \frac{v_0}{b}. \text{ Por tanto:}$$

$$\vec{v_p}(t) = \left(-v_0 \operatorname{sen}\left(\frac{v_0}{b}t + \theta_0\right) - v_0,\ v_0 \cos\left(\frac{v_0}{b}t + \theta_0\right)\right)$$

Si la partícula fue lanzada en el momento $t=0$, su velocidad inicial será:

$$\vec{v_p}(0) = \vec{v_0} = \left(-v_0 \operatorname{sen}\theta_0 - v_0,\ v_0 \cos\theta_0\right)$$

Para un ángulo θ_0 arbitrario desde el que parte la partícula. Con $\theta_0 \in [0, 2\pi]$.

Para encontrar la altura máxima a la que llega, por ser justo en $t=0$ una partícula en caída libre:

$$\begin{aligned}
\vec{r_p}(t) &= \vec{r_0} + t\vec{v_0} + \frac{1}{2}t^2\vec{g} \\
&= (0, b) + (-v_0 t \operatorname{sen}\theta_0 - v_0 t,\ v_0 t \cos\theta_0) + (0, -\tfrac{1}{2}t^2 g) \\
&= (-v_0 t \operatorname{sen}\theta_0 - v_0 t,\ b + v_0 t \cos\theta_0 - \tfrac{1}{2}g t^2)
\end{aligned}$$

Para que $y(t) = b + v_0 t \cos\theta_0 - \frac{1}{2}g t^2$ sea máxima, estimamos:

$$\begin{aligned}
&\dot{y}(t) = 0 \\
&\Rightarrow v_0 \cos\theta_0 - g t = 0 \\
&\Rightarrow t = \frac{v_0 \cos\theta_0}{g}
\end{aligned}$$

La altura máxima será:

$$\begin{aligned}
y_{max} &= b + v_0 \cos\theta_0 \left(\frac{v_0 \cos\theta_0}{g}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \cos\theta_0}{g}\right)^2 \\
&= b + \frac{v_0^2 \cos^2\theta_0}{g} - \frac{1}{2}\frac{v_0^2 \cos^2\theta_0}{g^2} \\
&= b + \frac{1}{2}\frac{v_0^2 \cos^2\theta_0}{g}
\end{aligned}$$