Espacios Métricos Separables.

Def. Se dice que un $A \subset \overline{X}$ es *denso en* $\overline{X}$ si $\overline{A} = \overline{X}$.

Proposición:

(i) A es denso en $\overline{X} \iff$ todo abierto no vacío de $\overline{X}$ contiene elementos de A, es decir:

$$\forall x \in \overline{X}, \ \forall r > 0, \ B(x,r) \cap A \neq \emptyset.$$

(ii) A es denso en $\overline{X} \iff \forall x \in \overline{X} \ \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en A de puntos de A que converge a x.

Dem:

De (i):

$\Rightarrow)$ Suponga que A es denso en $\overline{X}$. Como A es denso en $\overline{X}$ entonces $\overline{X} = \overline{A} = A^{\circ} \cup \operatorname{Fr} A$. Sea $G \subset \overline{X}$ un abierto no vacío, tenemos 2 casos:

a) $G \subset A^{\circ}$, si esto sucede como $G \neq \emptyset$ $\exists x \in G$, luego $x \in A^{\circ} \subset A$, así $x \in A$.

b) $G \not\subset A^{\circ}$, entonces como $\overline{X} = A^{\circ} \cup \operatorname{Fr} A$, $\exists x \in G$ tal que $x \in \operatorname{Fr} A$. Por estar en la frontera, como $G \in \mathcal{V}(x)$ entonces $G \cap A \neq \emptyset$ y $G \cap \complement A \neq \emptyset$, luego $\exists y \in A$ tal que $y \in G$.

Por a) y b), se cumple la condición.

$\Leftarrow)$ Suponga que $\forall G \subset \overline{X}$ abierto $\exists a \in G$ tal que $a \in A$. Probaremos que $\overline{A} = \overline{X}$ en efecto, sea $x \in \overline{X}$. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \subset \overline{X}$ tal que $x_n \in A$, sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión formada por estos elementos, claramente $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x, luego $x \in \overline{A}$, así $\overline{X} \subset \overline{A}$. Como $\overline{A} \subset \overline{X}$, se sigue que $\overline{A} = \overline{X}$, i.e, A es denso en $\overline{X}$.

De (ii): Se deduce de la anterior.

q.e.d.

Def. Se dice que un esp. métrico X es **separable** si contiene un conjunto denso a lo sumo numerable en X.

Ejemplo:

a) Un espacio métrico discreto X es separable $\Leftrightarrow$ X es a lo sumo numerable.

Dem:

Si X es separable, como X es discreto, entonces $\forall\, A \subset X$, A es abierto y cerrado. Si $A \neq X$, entonces $\bar{A} \neq X$, luego X es separable si y sólo si X es a lo sumo numerable, pues X es el único conjunto que cumple que su cerradura es X.

b) El espacio normado (l_p, N_p), $1 \leq p < \infty$ es separable.

Dem:

Sea $D = \{ a = \{a(n)\}_{n=1}^{\infty} \mid a(n) \in \mathbb{Q}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ y $\exists\, N \in \mathbb{N} \ni$ si $m > N$, entonces $a(m) = 0 \}$. Claramente $D \subset l_p$, se afirma que D es denso en l_p, en efecto. Sea $x \in l_p$ y $\varepsilon > 0$. Como $p \neq \infty$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty$$

Así pues, $\exists\, N \in \mathbb{N} \ni$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |x(n)|^p < \frac{\varepsilon^p}{2} \quad \ldots (*)$$

Tome $a = \{a(n)\}_{n=1}^{\infty}$, como $a(n) = 0\ \forall\, n > N$ y $a(n) \in \mathbb{Q}$ tal que:

$$|x(n) - a(n)| < \frac{\varepsilon}{(2N)^{1/p}},\ \forall\, n \in J_N$$

Claramente $a \in D$. y

$$d(x,a) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} |x(n) - a(n)|^p \right]^{1/p}$$

$$= \left[\sum_{n=1}^{N} |x(n)-a(n)|^p + \sum_{n=N+1}^{\infty} |x(n)-a(n)|^p \right]^{1/p}$$

$$= \left[\sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon^p}{2N} + \sum_{n=N+1}^{\infty} |x(n)|^p \right]^{1/p} < \left[\frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} \right]^{1/p}$$

$$= \left[\varepsilon^p \right]^{1/p} = \varepsilon$$

Por tanto, $a \in B(x,\varepsilon)$, luego por la proposición anterior, D es denso en l_p, claramente D es numerable, así (l_p, N_∞) es separable.

q.e.d.

c) El espacio normado (l_∞, N_∞) no es separable.

Sol.

Tome:

$$A = \{ x \in l_\infty \mid x_n \in \{0,1\} \ \forall n \in \mathbb{N}, x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \}$$

Veamos que $\forall x,y \in A$, $x \neq y$ se tiene que

$$d(x,y) = N_\infty(x-y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n| = 1$$

$d(x,y) = 1$, pues si $d(x,y) = 0$ (el único otro resultado posible), se tendría que $x_n = y_n \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x = y$ #c, luego $d(x,y) = 1$.

Claramente A es no numerable (probado anteriormente), así, sea

$$\mathcal{B} = \{ B(x,1/2) \subset l_\infty \mid x \in A \}$$

$\mathcal{B}$ es no numerable, y $\forall x \in A$, $B(x,1/2) \cap A = \{x\}$. Como $B(x,1/2)$ es abierto, si l_∞ fuera separable (i.e $\exists D \subset l_\infty \ni D$ es numerable y $\overline{D} = l_\infty$), entonces $\forall B(x,1/2) \in \mathcal{B} \ \exists y \in D \ni y \in B(x,1/2)$. Claramente y solo puede pertenecer a una $B(x,1/2)$, pues de otra forma, si $y \in B(x,1/2)$ y $y \in B(x',\frac{1}{2})$ donde $x \neq x'$, entonces

$$d(x,y) < \tfrac{1}{2} \quad y \quad d(x',y) < \tfrac{1}{2}$$

$$\Rightarrow d(x,x') \leq d(x,y) + d(y,x') < \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 \ \#c$$

Por tanto, y solo pertenece a un $B(x,1/2)$, así D debe ser no numerable.

...

Def. Sea $\mathcal{B}$ una familia de conjuntos abiertos en un esp. métrico $(\mathbb{X}, d)$. Se dice que $\mathcal{B}$ es una base de la topología de $\mathbb{X}$ si todo abierto $U \subset \mathbb{X}$ se puede escribir como unión de elementos de $\mathcal{B}$.

Ejemplos:

1) Si $\mathcal{B} = \tau$, entonces $\mathcal{B}$ es base de $\mathbb{X}$.

2) En el caso de un espacio métrico discreto, la familia $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in \mathbb{X}\}$ es una base de la topología de $\mathbb{X}$.

3) En $(\mathbb{R}^n, N_p)$ con $1 \leq p \leq \infty$, una base de la topología de $\mathbb{X}$ es:

$$\mathcal{B} = \{B(a, \tfrac{1}{k}) \mid a \in \mathbb{Q}^n \text{ y } k \in \mathbb{N}\}$$

En efecto. Sea $G \subset \mathbb{R}^n$ abierto, entonces $\forall x \in G \ \exists\, r_0 > 0 \ \text{m}\ B(x, r_0) \subset G$. Para este $r_0 > 0 \ \exists\, k \in \mathbb{N} \ \text{m}\ \frac{2}{k} < r_0$, luego $B(x, \frac{1}{2k}) \subset B(x, r_0)$. Por la densidad de los racionales en $\mathbb{R}^n$, $\exists\, a \in \mathbb{Q}^n \ \text{m}\ a \in B(x, \frac{1}{2k})$.

$x \in B(a, \frac{1}{k})$, en efecto, como $d(x,a) < \frac{1}{2k} \Rightarrow d(a,x) < \frac{1}{2k} < \frac{1}{k}$, luego se tiene la pertenencia. Probaremos que $B(a, \frac{1}{k}) \subset G$.

Sea $y \in B(a, \frac{1}{k})$, entonces $d(a,y) < \frac{1}{k}$, y $d(a,x) < \frac{1}{k}$, luego $d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y) < \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k} < r_0$, luego $y \in B(x, r_0) \subset G$, por tanto $B(a, \frac{1}{k}) \subset G$.

Lo anterior prueba que $\forall x \in G \ \exists\, a \in \mathbb{Q}^n$ y $k \in \mathbb{N} \ \text{m}\ x \in B(a, 1/k) \subset G$.

Sea $\{B_x \in \mathcal{B} \mid \text{para } x \in G \ \exists\, a \in \mathbb{Q}^n \text{ y } k \in \mathbb{N} \ \text{m}\ x \in B(a, 1/k) \subset G\}$. Claramente

$$G = \bigcup_{x \in G} B_x$$

Proposición:

Si $\mathcal{B}$ es una base de la topología de $\mathbb{X}$, entonces existe un conjunto D denso en $\mathbb{X}$ tal que

$$\text{Card}\, D \leq \text{Card}\, \mathcal{B}$$

Dem:

Para cada $U \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}$ se escoge $x_u \in U$, y se define
$$D = \{x_u \in X \mid U \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\} \text{ y } x_u \in U\}$$
Se afirma que D es denso en X. En efecto, sea $G \subset X$ abierto, entonces como G es unión de elementos de $\mathcal{B}$, entonces $U \subset G$ para algún $U \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}$ (si $G \neq \emptyset$), luego como $x_u \in D$ cumple que $x_u \in U \subset G$, se tiene que $x_u \in G$. Luego D es denso en X, además:
$$\text{Card } D \leq \text{Card } \mathcal{B}$$
Sea $f: \mathcal{B} \to U$, donde $f(u) = x_u$ $\forall$ $U \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}$. Claramente f es supr-ayectiva, así: $\text{Card } D \leq \text{Card } \mathcal{B}$.

q.e.d.

Teorema:

Un espacio métrico es separable $\Leftrightarrow$ su topología posee una base a lo sumo numerable.

Dem:

$\Leftarrow$) Suponga que la topología de X posee una base $\mathcal{B}$ a lo sumo numerable, esto es $\text{Card } \mathcal{B} \leq \aleph_0$. Por la proposición anterior existe un conjunto D denso en X tal que $\text{Card } D \leq \text{Card } \mathcal{B}$, luego D es denso en X y $\text{Card } D \leq \aleph_0$, por tanto (X, d) es separable.

$\Rightarrow$) Suponga que X es separable, entonces existe un conjunto $D \subset X$ denso en X a lo sumo numerable. Por un lema anterior podemos escribir a D como:
$$D = \{x_n \in X \mid n \in \mathbb{N}\}$$
Afirmamos que:
$$\mathcal{B} = \{B_{n,k} = B(x_n, \tfrac{1}{2k}) \mid n, k \in \mathbb{N}\}$$
es una base de la topología de X, la cual es a lo sumo numerable. Claramente es a lo sumo numerable, pues es numerable.

Sea ahora $G \subset \mathbb{X}$ abierto no vacío arbitrario y sea $x \in G$. Con $x \in G$ entonces $\exists\, K \in \mathbb{N}$ $\ni$ $B(x, \frac{1}{K}) \subset G$.

Por ser D denso en $\mathbb{X}$, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ $\ni$ $x_n \in B(x, \frac{1}{2K}) \subset B(x, \frac{1}{K})$, luego:

$$d(x, x_n) < \frac{1}{2K}$$

$$\Rightarrow x \in B(x_n, \frac{1}{2K}) = B_{n,K}$$

Ahora, queda por probar que $B_{n,K} \subset G$. En efecto: Sea $y \in B_{n,K}$, entonces

$$d(y, x_n) < \frac{1}{2K}. \text{ Como } d(x, x_n) < \frac{1}{2K}$$

$$\Rightarrow d(y, x) \leqslant d(y, x_n) + d(x_n, x) < \frac{1}{2K} + \frac{1}{2K} = \frac{1}{K}$$

$$\Rightarrow y \in B(x, \frac{1}{K}) \subset G$$

$$\Rightarrow B_{n,K} \subset G$$

Esto se puede hacer $\forall\, x \in G$, lo que implica que G es unión de elementos de $\mathcal{B}$, i.e $\mathcal{B}$ es una base de la topología de $\mathbb{X}$.

q.e.d.

Teorema (de Lindelöf)

Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia arbitraria de abiertos en un espacio métrico separable $\mathbb{X}$, y sea:

$$G = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$$

Entonces existe una subfamilia a lo sumo numerable $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ tal que

$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$$

Dem:

Como $\mathbb{X}$ es separable, entonces $\exists\, \mathcal{B}$ una base de la topología de $\mathbb{X}$ a lo sum. o numerable, digamos $\mathcal{B} = \{B_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Sea $x \in G$, entonces $\exists\, \alpha \in I$ $\ni$ $x \in G_\alpha$, por ser $\mathcal{B}$ base de la topología de $\mathbb{X}$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ $\ni$ $x \in B_{n_0} \subset G_\alpha \ldots (1)$.

Defina $\mathcal{B}' = \{ B_n \in \mathcal{B} \mid \exists \alpha \in I \ni B_n \subset G_\alpha \}$. Claramente $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, luego $\mathcal{B}'$ es a lo sumo numerable, así $\mathcal{B}' = \{ B_{\beta(n)} \mid n \in \mathbb{N} \}$.

Por (1):

$$G \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{\beta(n)}$$

Por como se definió $\mathcal{B}'$, $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\ \alpha(n) \in I \ni B_{\beta(n)} \subset G_{\alpha(n)}$, luego

$$G \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{\beta(n)} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} G_{\alpha(n)} \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha = G$$

$$\Rightarrow G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{\alpha(n)}$$

q.e.d

(*)

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie convergente, entonces $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}$ ⫪

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} x_n < \varepsilon$$