Notas del curso Topología I

Cristo Daniel Alvarado

15 de febrero de 2024

Índice general

Capítulo 0

Introduccion

0.1. Temario

Checar el Munkres

0.2. Bibliografía

1. J. R. Munkres 'Topología' - Prentices Hall.
2. M. Gemignsni 'Elementary Topology' - Dover.
3. J. Dugundji 'Topology' - Allyn Bacon.

Capítulo 1

Conceptos Fundamentales

1.1. Fundamentos

Definición 1.1.1
Sea X un conjunto y $\mathcal{A}$ una familia no vacía de subconjuntos de X. Definamos los **complementos de $\mathcal{A}$**

$$\mathcal{A}' := \left\{X - A \middle| A \in \mathcal{A}\right\}$$

(básicamente es el conjunto de todos los complementos de los conjuntos en $\mathcal{A}$). Para no perder ambiguedad, no denotaremos al complemento de un conjunto por B^c, sino por $X - B$ (para denotar quien es el conjunto sobre el que se toma el complemento del conjunto).

La **unión de los elementos** de $\mathcal{A}$ se define como el conjunto:

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \left\{x \in X \middle| x \in A \text{ para algún elemento } A \in \mathcal{A}\right\}$$

denotada por el símbolo de la izquierda.

La **intersección de los elementos** de $\mathcal{A}$ se define como el conjunto:

$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \left\{x \in X \middle| x \in A \text{ para todo elemento } A \in \mathcal{A}\right\}$$

Observación 1.1.1
En caso de que la colección $\mathcal{A}$ sea vacía, no se puede hacer lo que marca la definición anterior. Como $\mathcal{A}$ es vacía, entonces $\mathcal{A}'$ también es vacía.

1. Suponga que $\cup\mathcal{A} \neq \emptyset$, entonces existe $x \in X$ tal que $x \in \cup\mathcal{A}$, luego existe algún elemento $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A$, pero esto no puede suceder, pues la familia $\mathcal{A}$ es vacía. $\#_c$. Por tanto, $\cup\mathcal{A} = \emptyset$.

2. Ahora, si aplicamos las leyes de Morgan, y tomamos

$$X - \cap\mathcal{A} = X - \cap\emptyset = \cup\emptyset' = \cup\emptyset = \emptyset$$

luego, $\cap\mathcal{A} = X$.

En definitiva, si $\mathcal{A}$ es una colección vacía, entonces definimos $\cup\mathcal{A} = \emptyset$ y $\cap\mathcal{A} = X$.

La observación junto con la definición anterior se usarán a lo largo de todo el curos y serán de utilidad.

Definición 1.1.2
Sea X un conjunto y sea τ una familia de subconjuntos de X. Se dice que τ es una **una topología definida sobre** X si se cumple lo siguiente:

1. $\emptyset, X \in \tau$.
2. Si $\mathcal{A}$ es una subcolección de τ, entonces $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$.
3. Si $A, B \in \tau$, entonces $A \cap B \in \tau$.

Observación 1.1.2
En algunos libros viejos viene la siguiente condición adicional a la definición:

4. Si $p, q \in X$ con $p \neq q$, entonces existen $U, V \in \tau$ tales que $p \in U$, $q \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

en este caso se dirá que el espacio es **Hausdorff**.

Observación 1.1.3
Se tienen las siguientes observaciones:

1. Sea X un conjunto y $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de X. Si
$$\mathcal{A} = \left\{ A_\alpha \middle| \alpha \in I \right\}$$
entonces podemos escribir
$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$
e igual con la intersección:
$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$$
Si $\mathcal{A}$ es una familia vacía, y se toma como definición lo dicho en la observación 1.0.1, entonces podemos omitir el primer inciso de la definición anterior.
2. Si τ es una topología sobre X y para $n \in \mathbb{N}$, $A_1, ..., A_n \in \tau$, entonces $A_1 \cap ... \cap A_n \in \tau$.

Ejemplo 1.1.1
Sea X un conjunto no vacío.

1. El conjunto potencia (denotado por $\mathcal{P}$) de X es una topología sobre X, la cual se llama la **topología discreta**, y se denota por τ_D.
2. La colección formada únicamente por X y $\emptyset$ es una topolgía sobre X, es decir $\tau = \{\emptyset, X\}$ es llamada la **topología indiscreta**, y se escribe como τ_I.
3. En el caso de que $X = \{1\}$, se tendría que $\tau_D = \{\emptyset, \{1\}\}$ y $\tau_I = \{\emptyset, \{1\}\}$.
Si $X = \{1, \zeta\}$, entonces $\tau_D = \{\emptyset, \{1\}, \{\zeta\}, \{1, \zeta\}\}$ y $\tau_I = \{\emptyset, \{1, \zeta\}\}$.
4. Si τ es una topología sobre X, entonces
$$\tau_I \subseteq \tau \subseteq \tau_D$$
5. Sea $a \in X$. Entonces $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \}$ es una topología sobre X.

6. Sea $A \subseteq X$ y sea $\tau(A) = \left\{B \subseteq X \middle| A \subseteq B\right\} \bigcup \{\emptyset\}$. Esta familia $\tau(A)$ es una topología sobre X.

Solución:
Para el inciso 6., veamos que $\tau(A)$ es una topología sobre X. En efecto, verificaremos que se cumplen las 3 condiciones:

1. Claro que $\emptyset \in \tau(A)$ por definición de $\tau(A)$. Además $X \in \tau(A)$ ya que $X \subseteq X$ y $A \subseteq X$.

2. Sea $\mathcal{B}$ una familia no vacía de subconjuntos de $\tau(A)$, entonces existe $B_0 \in \mathcal{B}$ tal que $A \subseteq B_0$, por lo cual
$$A \subseteq B_0 \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subseteq X$$
por tanto $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \in \tau(A)$.

3. Sean $C, D \in \tau(A)$, entonces $A \subseteq C$ y $A \subseteq B$, por ende $A \subseteq B \cap C \subseteq X$. Así, $B \cap C \in \tau(A)$.

Por los incisos anteriores, la familia descrita en el inciso 6. es una topología sobre X. □

Observación 1.1.4
Sea X un conjunto no vacío. Si $A = \{a\} \subseteq X$, entonces escribimos τ_a en vez de $\tau(A)$.

Ejemplo 1.1.1
Se continuan con los ejemplos anteriores:

7. Sea $\tau_{cf} = \left\{A \subseteq X \middle| X - A \text{ es un conjunto finito}\right\} \bigcup \{\emptyset\}$. Esta es una topología sobre X y se llama la **topología de los complementos finitos**.

8. Si X es un conjunto finito, entonces $\tau_{cf} = \tau_D = \mathcal{P}$.

9. Considere (en un conjunto finito X) a τ_{cf} y sean $a, b \in X$ con $a \neq b$. Si $U_a = X - \{b\}$, $U_b = X - \{a\}$, entonces $U_a, U_b \in \tau_{cf}$ y además, $a \in U_a$ pero $b \notin U_a$ y $a \notin U_b$ pero $b \in U_b$. Esta propiedad es muy importante tenerla en mente pues más adelante se usará.

Solución:
Veamos que la famila del ejemplo 7. es una topología sobre X. En efecto, veamos que se cumplen las 3 condiciones:

1. Claro que $\emptyset \in \tau_{cf}$ (por definición de τ_{cf}). Y además $X \in \tau_{cf}$ ya que $\emptyset = X - X$ es un conjunto finito y $X \subseteq X$.

2. Sea $\mathcal{A}$ una familia no vacía de subconjuntos de τ_{cf}. Se cumple entonces que existe $A_0 \in \mathcal{A}$ tal que $X - A_0$ es finito. Por lo cual como
$$X - \bigcup \mathcal{A} \subseteq X - A$$
ya que $A \subseteq \bigcup \mathcal{A}$, se tiene que $X - \bigcup \mathcal{A}$ es finito y $\bigcup \mathcal{A} \subseteq X$. Por tanto, $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{A}$.

3. Sean $A, B \in \tau_{cf}$. Probaremos que $A \cap B \in \tau_{cf}$. Afirmamos que $X - A \cap B$ es finito, en efecto, por leyes de Morgan se tiene que
$$X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B) \subseteq X$$
donde $X - A$ y $X - B$ son finitos, por lo cual su unión también lo es. Por tanto $A \cap B \in \tau_{cf}$.

Por los tres incisos anteriores, se sigue que τ_{cf} es una topología sobre X. $\square$

A continuación se verá una proposición la cual tiene como objetivo el inducir una topología sobre un espacio métrico (X,d) arbitrario.

Proposición 1.1.1
Sea (X,d) un espacio métrico. Dados $a \in X$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, al conjunto $B_d(x,\varepsilon) = \left\{ y \in X \middle| d(x,y) < \varepsilon \right\}$ se llama **ε-bola con centro en x y radio ε**.

Sea

$$\tau_d = \left\{ A \subseteq X \middle| \forall a \in A \exists r > 0 \text{ tal que } B_d(a,r) \subseteq A \right\}$$

Esta colección es una topología sobre X.

Demostración:

$\blacksquare$