

# Grupos Topológicos

Cristo Daniel Alvarado

14 de marzo de 2024

# Índice general

<b>1. Elementos de la teoría de grupos topológicos</b>	<b>2</b>
1.1. Preliminares . . . . .	2
1.1.1. Grupos Ordenados . . . . .	11
1.1.2. Grupos Booleanos . . . . .	12
1.2. Homomorfismos e isomorfismos . . . . .	12
1.3. Subgrupos topológicos y grupo cociente . . . . .	13
1.4. Grupos cocientes . . . . .	17

# Capítulo 1

## Elementos de la teoría de grupos topológicos

### 1.1. Preliminares

#### Definición 1.1.1

Sea  $G$  un conjunto no vacío dotado de una operación binaria (denotada por  $\cdot$ ) y una familia  $\tau$  de subconjuntos de  $G$ .  $G$  es llamado **grupo topológico** si

1.  $(G, \cdot)$  es un grupo.
2.  $(G, \tau)$  es un espacio topológico.
3. Las funciones  $g_1 : (G, \tau) \times (G, \tau) \rightarrow (G, \tau)$  y  $g_2 : (G, \tau) \rightarrow (G, \tau)$  dadas por  $(x, y) \mapsto x \cdot y$  y  $x \mapsto x^{-1}$ , respectivamente, son continuas, siendo  $x^{-1}$  el inverso de  $x$  en  $G$ .

Se denotará a la operación  $\cdot$  por yuxtaposición, es decir  $x \cdot y = xy$ .

#### Observación 1.1.1

Una equivalencia de la condición (3) de la proposición anterior es la siguiente:

Sea  $G$  un grupo topológico. Denotamos por  $\mathcal{N}(x)$  a **la familia de todas las vecindades de  $x \in G$** . 3) es equivalente a

4. Si  $x, y \in G$ , entonces para cada  $U \in \mathcal{N}(xy)$  existen vecindades  $V \in \mathcal{N}(x)$  y  $W \in \mathcal{N}(y)$  tales que  $V \cdot W \subseteq U$ , donde

$$V \cdot W = \{vw \mid v \in V \text{ \& } w \in W\}$$

y, para cada  $U \in \mathcal{N}(x^{-1})$  existe  $V \in \mathcal{N}(x)$  tal que  $V^{-1} \subseteq U$ , siendo

$$V^{-1} = \{v^{-1} \mid v \in V\}$$

esta equivalencia es inmediata de la definición de continuidad de una función en un espacio topológico.

#### Observación 1.1.2

El símbolo  $e_G$  denotará siempre a la identidad de un grupo  $G$ .

Con frecuencia se referirá al grupo topológico  $G$ , con operación binaria  $\cdot$  y topología  $\tau$  como la terna  $(G, \cdot, \tau)$ . Si no hay ambigüedad, se denotará simplemente por  $G$ .

---

**Lema 1.1.1**

Sean  $(G, \cdot)$  un grupo, y  $\tau$  una topología en  $G$ . Entonces,  $(G, \cdot, \tau)$  es un grupo topológico si y sólo si la función

$$g_3 : (G, \tau) \times (G, \tau) \rightarrow (G, \tau) \\ (x, y) \mapsto xy^{-1}$$

es continua.

---

**Demostración:**

$\Rightarrow$ ) : Suponga que  $G$  es un grupo topológico, entonces las funciones  $g_1$  y  $g_2$  son continuas (por la condición 3) de la definición anterior). Notemos que

$$g_3 = g_1(x, g_2(y)), \quad \forall x, y \in G$$

por ende,  $g_3$  es continua.

$\Leftarrow$ ) : Suponga que la función  $g_3$  es continua. Notemos que

$$g_2(x) = g_3(x, e_G), \quad \forall x \in G$$

por ser  $g_3$  continua, se sigue que  $g_2$  también lo es. Además

$$g_1(x, y) = g_3(x, g_2(y)), \quad \forall x, y \in G$$

por lo cual,  $g_1$  también es continua. Por tanto,  $G$  es grupo topológico. ■

Una de las primeras ventajas que surgen en el estudio de los grupos topológicos es que, ciertas propiedades locales se vuelven globales desde el punto de vista de la topología.

---

**Teorema 1.1.1**

Sea  $G$  un grupo topológico. Si  $g \in G$  es un elemento fijo arbitrario, entonces las funciones  $\varphi_g(x) = xg$  y  $\sigma_g(x) = gx$ , para todo  $x \in G$ , de  $G$  en  $G$ , son homeomorfismos. La inversión  $f : G \rightarrow G$ , definida por  $f(y) = y^{-1}$ , también es un homeomorfismo. Las funciones  $\varphi_g$  y  $\sigma_g$  son llamadas **traslaciones por la derecha e izquierda**, respectivamente.

---

**Demostración:**

Por la definición de grupo topológico, las funciones  $\varphi_g$ ,  $\sigma_g$  y  $f$  son continuas. Veamos que son homeomorfismos de  $G$  en  $G$ .

1. Veamos que  $\varphi_g$  es inyectiva. Si  $a, b \in G$  son tales que  $\varphi_g(a) = \varphi_g(b)$ , entonces  $ag = bg \Rightarrow a = b$ , con lo que se tiene el resultado.

Además es suprayectiva, pues para cada  $b \in G$  existe  $g^{-1}b \in G$  tal que  $\varphi_g(bg^{-1}) = b$ .

Luego,  $\varphi$  es homeomorfismo de  $G$ , con inversa  $\varphi_{g^{-1}}$ . Además es homomorfismo.

2. Para  $\sigma_g$  el caso es similar a  $\varphi_g$ .
3. Para  $f$  el resultado es inmediato, pues es biyectiva, homomorfismo y su inversa es ella misma. ■

Los resultados siguientes nos permitirán estudiar las propiedades topológicas locales de un grupo topológico  $G$  en un solo punto, que por simplificar siempre tomaremos como la identidad  $e_G$  del grupo.

---

**Corolario 1.1.1**

Todo grupo topológico  $G$  es un espacio homogéneo.

---

**Demostración:**

Debemos probar que dados dos elementos arbitrarios del grupo topológico  $G$ , digamos  $g, h \in G$ , existe un homeomorfismo de  $G$  sobre sí mismo tal que manda un elemento en el otro. Por el teorema anterior, tomando como homeomorfismo a  $\varphi_{g^{-1}h}$  se tiene el resultado, pues  $\varphi_{g^{-1}h}(g) = h$ . ■

Como en grupos y espacios topológicos, nos interesan las funciones que preservan las propiedades entre éstos. Por lo cual se estudiarán los siguientes tipos de funciones:

**Definición 1.1.2**

Decimos que una función biyectiva  $f : G \rightarrow G'$  entre dos grupos topológicos  $G$  y  $G'$  es un **isomorfismo topológico** si  $f$  y  $f^{-1}$  son homomorfismos continuos.

Si  $G = G'$ , el isomorfismo  $f$  se llama **automorfismo topológico**. Dos grupos topológicos son **topológicamente isomorfos** si existe un isomorfismo topológico de uno al otro. Utilizaremos el símbolo  $G \cong H$  para indicar que los grupos  $G$  y  $H$  son topológicamente isomorfos.

El objetivo del siguiente teorema es ver que un grupo topológico no abeliano admite muchos automorfismos.

---

**Teorema 1.1.2**

Si  $G$  es un grupo topológico y  $a \in G$  está fijo, entonces la función  $g(x) = axa^{-1}$  es un automorfismo topológico.

---

**Demostración:**

Observemos que  $g(x) = \sigma_a(\varphi_a^{-1}(x))$ , donde las dos funciones de la composición definidas como en el teorema anterior son homeomorfismos, y por ende  $g$  lo es. Además  $g$  es homomorfismo ya que

$$g(xy) = axya^{-1} = (axa^{-1})(aya^{-1}) = g(x)g(y)$$

el cual es invertible, con inversa  $f(x) = a^{-1}xa$ . ■

**Observación 1.1.3**

En el caso de que el grupo  $G$  sea abeliano, el automorfismo topológico  $G$  definido en el teorema anterior, es trivial ya que coincide con la identidad.

El siguiente resultado tiene como objetivo el describir la topología del grupo, que en este caso resulta más sencillo que describir la topología de un espacio topológico. Para ello, basta describir una base local para la identidad del grupo  $e_G$ .

---

**Lema 1.1.2**

Sea  $G$  un grupo topológico, y sea  $\mathcal{N}(e_G)$  una base local para la identidad del grupo  $e_G$ . Entonces las familias  $\{xU\}$  y  $\{Ux\}$ , donde  $x$  toma los valores en los elementos de  $G$  y  $U$  varía sobre todos los elementos de  $\mathcal{N}(e_G)$ , son bases para la topología de  $G$ .

---

**Demostración:**

Sea  $W$  un abierto no vacío de  $G$  y  $a \in G$  un elemento de  $W$ . Probaremos que existe un elemento  $\hat{U}$  de alguna de las familias descritas anteriormente tal que

$$a \in \hat{U} \subseteq W$$

Considere la función  $f : G \rightarrow G$ ,  $x \mapsto a^{-1}x$ . Esta función es un homeomorfismo, el cual transforma a  $W$  en  $a^{-1}W$ . Notemos que  $e_G \in a^{-1}W$ , pues el elemento  $e_G = a^{-1}a \in a^{-1}W$ . Como  $\mathcal{N}(e_G)$  es una base local de  $e_G$ , entonces existe  $U \in \mathcal{N}(e_G)$  tal que

$$e_G \in U \subseteq a^{-1}W$$

Por lo cual

$$a \in aU \subseteq aa^{-1}W = W$$

Por tanto, tomando  $\hat{U} = aU$  se tiene el resultado para la primera familia. Para la segunda se procede de forma análoga cambiando el orden del producto en la función  $f$ . ■

El siguiente lema nos proporciona una base local para la identidad formada por vecindades tales que  $V^{-1} = V$ . Estas vecindades reciben el nombre de **simétricas**.

### Lema 1.1.3

Sea  $G$  un grupo topológico y  $U \in \mathcal{N}(e_G)$ , entonces existe  $V \in \mathcal{N}(e_G)$  tal que  $V^{-1} = V \subseteq U$ . Por lo tanto, las vecindades simétricas de la identidad constituyen una base local de  $e_G$ .

### Demostración:

Sean  $U \in \mathcal{N}(e_G)$  y  $f : G \rightarrow G$ ,  $x \mapsto x^{-1}$ . Como  $f$  es un homeomorfismo de  $G$  sobre  $G$ , entonces  $f(U) = U^{-1}$  es abierto y  $e_G \in U^{-1}$ . Por lo cual  $V = U \cap U^{-1}$  es abierto y  $V^{-1} = V$  es tal que  $e_G \in V \subseteq U$ . ■

En lo sucesivo denotaremos por  $\mathcal{N}^*(e_G)$  a la base local de vecindades de  $e_G$  que son abiertas y simétricas en un grupo topológico  $G$ .

Otra propiedad importante de la identidad del grupo topológico  $G$ , es que admite una base local formada por subconjuntos cerrados.

### Lema 1.1.4

Sea  $G$  grupo topológico.

1. Si  $U \in \mathcal{N}(e_G)$ , entonces para cada  $n \in \mathbb{N}^+$  existe  $V \in \mathcal{N}(e_G)$  con  $V^n \subseteq U$ , donde

$$V^n = \underbrace{V \cdots V}_{n\text{-veces}}$$

2. Si  $U \in \mathcal{N}(e_G)$ , entonces existe  $V \in \mathcal{N}(e_G)$  con  $\bar{V} \subseteq U$ . En particular, las vecindades cerradas de  $e_G$  constituyen una base local de la identidad  $e_G$  cuyos elementos son subconjuntos cerrados.

### Demostración:

De 1): Procederemos por inducción sobre  $n$ . Para  $n = 1$  el resultado es inmediato, pues tomando  $V = U$  se sigue el resultado.

Suponga el resultado cierto para algún  $n \in \mathbb{N}^+$ , entonces para  $U$  existe  $W \in \mathcal{N}(e_G)$  tal que  $W^n \subseteq U$ . Como la multiplicación es continua  $g_1(x, y) = xy$ , y  $g_1(e_G, e_G) = e_G$ , entonces para  $W$  existen vecindades  $V_1, V_2 \in \mathcal{N}(e_G)$  tales que  $f(V_1 \times V_2) = V_1 \cdot V_2 \subseteq W$ . Tomemos  $V = V_1 \cap V_2$ , claro que  $e_G \in V$ , por lo cual  $V \in \mathcal{N}(e_G)$  y, además:

$$V^{n+1} = V \cdot V \cdot V^{n-1} \subseteq V_1 \cdot V_2 \cdot W^{n-1} \subseteq W \cdot W^{n-1} = W^n \subseteq U$$

Aplicando inducción se sigue el resultado.

De 2): Por 1) y por el hecho de que  $\mathcal{N}^*(e_G)$  es una base local de  $e_G$ , existe  $V \in \mathcal{N}^*(e_G)$  tal que  $V^2 \subseteq U$ . Si  $x \in \bar{V}$ , entonces como  $xV$  es una vecindad de  $x$ , la intersección  $xV \cap V \neq \emptyset$  (pues  $x$  está en la adherencia de  $V$ ), es decir, existen  $v_1, v_2 \in V$  tales que

$$xv_1 = v_2 \Rightarrow x = v_2v_1^{-1} \in V \cdot V^{-1} = V^2 \subseteq U$$

Por ende,  $\bar{V} \subseteq U$ . ■

### Teorema 1.1.3

Sea  $G$  un grupo topológico,  $a \in G$  y  $A, B, O, M$  subconjuntos de  $G$ . Entonces

1. Si  $O$  es abierto, entonces los conjuntos  $aO, Oa, O^{-1}, MO$  y  $OM$  son abiertos.
2. Si  $A$  es cerrado, entonces  $aA, Aa, A^{-1}$  son conjuntos cerrados.
3. Si  $A$  y  $B$  son compactos, también lo son  $AB$  y  $A^{-1}$ .
4. Se cumple que

$$\bar{A} = \bigcap_{W \in \mathcal{N}(e_G)} AW = \bigcap_{W \in \mathcal{N}(e_G)} WA$$

### Demostración:

De 1): Por el teorema 1.1.1,  $\varphi_a, \sigma_a$  y  $f(x) = x^{-1}$  son homeomorfismos, para cualquier  $a \in G$  fijo. Por lo tanto, si  $O$  es abierto, entonces la imagen directa de  $O$  bajo estas funciones (es decir, los conjuntos  $aO, Oa, O^{-1}$ ) son abiertos. Para los dos últimos conjuntos, basta ver que

$$\begin{aligned} MO &= \bigcup \{mO \mid m \in M\} \\ OM &= \bigcup \{Om \mid m \in M\} \end{aligned}$$

por ser uniones arbitrarias de abiertos, los conjuntos  $MO$  y  $OM$  son abiertos.

De 2): Es análogo a 1), usando el hecho de que los homomorfismos son aplicaciones cerradas.

De 3): Notemos que  $A \times B$  es compacto en el espacio topológico producto  $G \times G$ , por lo cual al ser  $g_1 : G \times G \rightarrow G, (x, y) \mapsto xy$  una función continua, se sigue que la imagen de este compacto  $f(A \times B) = AB$  es compacto. De forma similar con  $A^{-1}$  con la función  $f(x) = x^{-1}$  se obtiene que  $A^{-1}$  es compacto.

De 4): Nuestro objetivo será intentar caracterizar a  $AW$  y  $WA$  (donde  $W \in \mathcal{N}(e_G)$ ) antes de ver los elementos de la intersección. Sea  $W \in \mathcal{N}(e_G)$ , entonces existe un abierto  $V \in \mathcal{N}^*(e_G)$  tal que  $V \subseteq W$ . Por 1) el producto  $AV$  es abierto y  $A \subseteq AV$  (pues  $e_G \in V$ ).

Además,  $\bar{A} \subseteq AW$ , pues si  $x \in \bar{A}$ , entonces  $xV$  es una vecindad de  $x$  y por lo tanto  $xV \cap A \neq \emptyset$ , así existen  $v \in V$  y  $a \in A$  tales que  $xv = a \Rightarrow x = av^{-1} \in AV^{-1} = AV \subseteq AW$ . Como el  $W$  fue arbitrario, se sigue que

$$\bar{A} \subseteq \bigcap_{W \in \mathcal{N}(e_G)} AW$$

(de forma análoga con  $\bigcap_{W \in \mathcal{N}(e_G)} WA$ ). Ahora, sean  $x \in \bigcap_{W \in \mathcal{N}(e_G)} AW$  y  $V \in \mathcal{N}(x)$ . Debemos probar que  $V \cap A \neq \emptyset$  (con ello, se tendría que  $x \in \bar{A}$ ). Se tiene que  $x^{-1}V \in \mathcal{N}(e_G)$  y, por ende  $V^{-1}x \in \mathcal{N}(e_G)$ .

Por tanto, como  $x \in \bigcap_{W \in \mathcal{N}(e_G)} AW$  en particular  $x \in AV^{-1}x$ , así existen  $a \in A$  y  $v \in V$  tales que  $x = av^{-1}x$ , es decir  $a = v \in V$  y  $a \in A$ , por lo cual  $a \in A \cap V$ . Por tanto,  $A \cap V \neq \emptyset$ . ■

Como ya se sabe que todo grupo topológico es un espacio homogéneo, para verificar propiedades locales del grupo (tales como la conexidad local, compacidad local, carácter numerable, etc...), basta con verificar la propiedad en la identidad del grupo. Una de éstas propiedades es la  $T_3$ .

---

**Lema 1.1.5**

Todo grupo topológico  $G$  cumple las propiedades siguientes:

1.  $G$  es un espacio  $T_3$ .
  2. Si  $A \subseteq G$  es compacto y  $B \subseteq G$  cerrado, entonces  $AB$  y  $BA$  son cerrados.
- 

**Demostración:**

De 1): Se debe probar que  $G$  es un espacio regular, es decir, hay que probar que  $G$  es  $T_1$  y que para todo  $x \in G$  y toda vecindad  $V$  de  $x$  existe una vecindad  $U$  de  $x$  tal que  $\overline{U} \subseteq V$ . Esto es inmediato del lema 1.1.4 2).

De 2). Probaremos que  $BA$  es cerrado. Para ello, se probará que  $G \setminus BA$  es abierto. Sea  $a \in G \setminus BA$ . Para cada  $x \in A$ , el conjunto  $Bx$  es cerrado (por ser  $B$  cerrado), así que existen vecindades  $U_x, V_x \in \mathcal{N}^*(e_G)$  con  $aU_x \cap Bx = \emptyset$  y  $V_x^2 \subseteq U_x$ . Por ello,  $aV_x \cap BxV_x = \emptyset$ .

Ahora, como  $xV_{xx \in A}$  es una cubierta abierta de  $A$ , al ser  $A$  compacto existen  $x_1, \dots, x_n \in A$  tales que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^n x_i V_{x_i}$$

Sea

$$W = \bigcap_{i=1}^n x_i V_{x_i}$$

Este conjunto es abierto y simétrico, y además  $aW \cap BxV_{x_i} = \emptyset$  para todo  $i \in [1, n]$ . Por tanto,  $aW \cap BA = \emptyset$ . Así que  $aW$  es una vecindad de  $a$  ajena a  $BA$ . De forma análoga se prueba que  $BA$  es cerrado. ■

**Ejemplo 1.1.1**

Sea  $G$  un grupo no trivial dotado de la topología indiscreta. Entonces  $G$  es un grupo topológico que no es ni  $T_0$  ni  $T_1$  (en esta topología solo hay dos conjuntos:  $\emptyset$  y  $G$ ).

Ahora, si tenemos un grupo topológico que es  $T_0$  esto es equivalente a que sea  $T_1$ . En efecto, supongamos que es  $T_0$  y sean  $x_1, x_2 \in G$  elementos distintos. Como es  $T_0$  existe  $U \subseteq G$  abierto que contiene a  $e_G$  ó  $x_1x_2^{-1}$ . Si  $e_G \in U$ , entonces existe  $V \in \mathcal{N}^*(e_G)$  tal que  $V \subseteq U$ , en particular  $e_G \in V$  y  $x_1x_2^{-1} \notin V$ , por lo cual  $x_2, x_1^{-1} \notin V$ , luego  $Vx_2$  es un abierto que contiene a  $x_2$  y no a  $x_1$ , y  $Vx_1$  es un abierto  $x_1$  que contiene a  $x_1$  pero no a  $x_2$ .

Si  $x_1x_2^{-1} \in U$ , entonces  $W = Ux_2x_1^{-1} \in \mathcal{N}(e_G)$ , y  $x_1x_2 \notin W$ . Haciendo lo análogo a lo anterior, se llega al resultado. Por tanto, la propiedad de ser  $T_0$  y  $T_1$  en un grupo topológico  $G$  son equivalentes.

De esta forma, todo grupo que sea  $T_0$  es automáticamente un espacio regular, y más aún, es Hausdorff.

De ahora en adelante sólo se considerarán grupos topológicos  $T_0$  (en automático, esto serán espacios regulares). Más adelante se probará que todo grupo  $T_0$  es Tikhonov.

**Observación 1.1.4**

En todo grupo topológico que sea un espacio  $T_0$  se tiene que el conjunto  $e_G$  es cerrado.

**Demostración:**

En efecto, sea  $G$  un grupo topológico con las propiedades anteriores. Considere:

$$A = \bigcap_{U \in \mathcal{N}(e_G)} \overline{U}$$



Claro que  $e_G \in A$ . Suponga que existe  $a \in A$  tal que no es la identidad del grupo topológico, como  $G$  es  $T_1$  existe  $V$  abierto tal que  $e_G \in V$  pero  $a \notin V$ . Como la cerradura de los elementos de  $\mathcal{N}(e_G)$  forman una base local para  $e_G$ , existe  $U_0 \in \mathcal{N}(e_G)$  tal que  $\overline{U_0} \subseteq V$ . Por tanto,  $a \notin \bigcap_{U \in \mathcal{N}(e_G)} \overline{U}$  pues  $a \notin \overline{U_0} \#_c$ . Luego  $A = \{e_G\}$ , pero  $A$  es cerrado por ser intersección arbitraria de cerrados. Por tanto, el conjunto unipuntual  $\{e_G\}$  es cerrado (más aún, el conjunto  $\{x\}$  es cerrado, para todo  $x \in G$ ). ■

En los grupos topológicos, los subespacios compactos tienen propiedades similares a las de los puntos en relación con las condiciones de separación:

---

**Teorema 1.1.4**

Sea  $G$  un grupo topológico,  $K \subseteq U \subseteq G$ ,  $U$  abierto y  $K$  compacto. Entonces, existe  $W \in \mathcal{N}(e_G)$  con la siguiente propiedad:

$$K \subseteq KW \subseteq U$$


---

**Demostración:**

Para cada  $x \in K$  existe  $V_x \in \mathcal{N}(e_G)$  con  $xV_x \subseteq U$ . Además, existe  $W_x \in \mathcal{N}(e_G)$  tal que  $W_x^2 \subseteq V_x$ .

Como  $K$  es compacto, y  $K \subseteq \bigcup_{x \in K} xW_x$ , entonces existen  $x_1, \dots, x_n \in K$  tales que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^n x_i W_{x_i}$$

Sea  $W = \bigcap_{i=1}^n W_{x_i}$ . El conjunto  $W$  es una vecindad abierta de  $e_G$  y, por ende  $K \subseteq KW$ .

Si  $x \in K$ , entonces por la contención anterior se sigue que existe  $i \in [1, n]$  tal que  $x \in x_i W_{x_i}$ . Así:

$$xW \subseteq x_i W_{x_i} W \subseteq x_i W_{x_i} W_{x_i} \subseteq x_i V_{x_i} \subseteq U$$

es decir,  $KW \subseteq U$ . ■

El siguiente teorema tiene como objetivo el resumir varias de las propiedades obtenidas anteriormente para la familia  $\mathcal{N}(e_G)$ ; de hecho esta familia se caracteriza completamente. Esta propiedad es una de las que distinguen a los grupos topológicos de los espacios topológicos arbitrarios. Además, dicho teorema nos proporciona un método para definir topologías de grupos topológicos.

---

**Teorema 1.1.5**

Sea  $G$  un grupo topológico de Hausdorff. Existe una base local  $\mathcal{V}$  para  $e_G$  tal que cumple las siguientes condiciones:

1.  $\bigcap \mathcal{V} = \{e_G\}$ .
2. Si  $U, V$  son dos elementos arbitrarios de  $\mathcal{V}$ , entonces existe  $W \in \mathcal{V}$  tal que  $W \subseteq U \cap V$ .
3. Para cada  $U \in \mathcal{V}$  existe  $V \in \mathcal{V}$  tal que  $VV^{-1} \subseteq U$ .
4. Para cada  $U \in \mathcal{V}$  y para cada  $x \in U$  existe  $V \in \mathcal{V}$  con  $xV \subseteq U$ .
5. Para cada  $U \in \mathcal{V}$  y  $a \in G$  existe  $W \in \mathcal{V}$  con  $aWa^{-1} \subseteq U$ .

Recíprocamente, si tenemos un grupo  $G$  y una familia  $\mathcal{V}$  no vacía de subconjuntos de  $G$  que contienen a  $e_G$ , tales que satisfacen las condiciones de (1) a (5) para  $\mathcal{V}$ , entonces cada una de las familias  $\{xU \mid U \in \mathcal{V}, x \in G\}$  y  $\{Ux \mid U \in \mathcal{V}, x \in G\}$  es base para una topología de grupo  $\tau$  para  $G$ . Además,  $\mathcal{V}$  es una base local para  $e_G$  en  $(G, \tau)$ .

---

**Demostración:**

$\Rightarrow$ ): Sea  $G$  un grupo topológico **Hasdorff** (de forma inmediata es un espacio  $T_0$  y, por ende es un espacio regular). Considere la familia:

$$\mathcal{V} = \{V \cap V^{-1} \mid V \in \mathcal{N}(e_G)\}$$

es inmediato que  $\mathcal{V}$  cumple las condiciones (1) y (2) (por la observación 1.1.4 y la otra por ser  $\mathcal{V}$  una base local de  $e_G$ ). Para probar (3), sea  $U \in \mathcal{V}$ . Por un lema anterior existe  $V \in \mathcal{N}(e_G)$  tal que  $V^2 \subseteq U$ ; entonces  $W = V \cap V^{-1}$  pertenece a  $\mathcal{V}$ , y se tiene que  $W^{-1} = W$  y  $WW^{-1} = W^2 \subseteq V^2 \subseteq U$ .

Para (4), sean  $U \in \mathcal{V}$  y  $x \in U$ . Como la multiplicación es una operación continua y  $xe_G = x$ , existen vecindades abiertas  $V_x$  y  $W$  de  $x$  y  $e_G$  respectivamente, tales que  $V_x W \subseteq U$ . El conjunto  $V = W \cap W^{-1}$  pertenece a  $\mathcal{V}$  y se cumple que  $xV \subseteq V_x W \subseteq U$ .

Para (5), si  $a \in G$  y  $U \in \mathcal{V}$ , como  $aa^{-1} = ae_Ga$  y por ser continua la multiplicación, existen vecindades abiertas  $W_a, V, W_{a^{-1}}$  de  $a, e_G$  y  $a$ , respectivamente tales que

$$W_a V W_{a^{-1}} \subseteq U$$

entonces,  $W = V \cap V^{-1}$  pertenece a  $\mathcal{V}$ , y  $aW a^{-1} \subseteq W_a V W_{a^{-1}} \subseteq U$ .

$\Leftarrow$ ): Sea  $\mathcal{V}$  una familia de subconjuntos de  $G$  que satisfacen las condiciones (1) a (5) del teorema. Debemos probar que

$$\mathcal{B} = \{xU \mid U \in \mathcal{V}, x \in G\}$$

es una base para una topología de grupo  $\tau$  en  $G$ . Sea  $\tau$  la familia de subconjuntos de  $G$  que son uniones arbitrarias de subconjuntos de  $\mathcal{B}$ , es decir  $U \in \tau$  si y sólo si  $U = \bigcup \mathcal{A}$ , donde  $\mathcal{A}$  es una subfamilia de  $\mathcal{B}$ .

Se tienen que verificar dos condiciones:

1. Sean  $x_1, x_2 \in G$  y  $U_1, U_2 \in \mathcal{V}$ . Si  $x_3 \in x_1 U_1 \cap x_2 U_2$ , entonces  $x_1^{-1} x_3 \in U_1$  y  $x_2^{-1} x_3 \in U_2$ , por (4) existen  $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$  tales que

$$\begin{aligned} x_1^{-1} x_3 V_1 &\subseteq U_1 \\ x_2^{-1} x_3 V_2 &\subseteq U_2 \end{aligned}$$

por ende,

$$\begin{aligned} x_3 V_1 &\subseteq x_1 U_1 \\ x_3 V_2 &\subseteq x_2 U_2 \end{aligned}$$

Tomemos  $U_3 \in \mathcal{V}$  tal que  $U_3 \subseteq V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}$  (lo cual se puede por la condición (2)). Luego,  $x_3 U_3 \subseteq x_3 V_1 \cap x_3 V_2 \subseteq x_1 U_1 \cap x_2 U_2$ .

2. Sea  $x \in G$ . Si  $U \in \mathcal{V}$  entonces  $x \in xU$ , por lo cual:

$$G = \bigcup_{x \in G} xU$$

por las dos condiciones anteriores, se sigue que  $\mathcal{B}$  es una base para la topología  $\tau$  definida anteriormente.

Ahora, probemos que  $\mathcal{V}$  es base local para  $e_G$ . Sea  $U \in \tau$  tal que  $e_G \in U$ . Como  $U \in \tau$  entonces podemos escribir:

$$U = \bigcup \mathcal{A}$$

donde  $\mathcal{A}$  es una subfamilia de  $\mathcal{B}$ . Entonces por estar en la unión, existe  $x \in G$  y  $V \in \mathcal{V}$  tal que  $e_G \in xV \subseteq U$ . En particular,  $x^{-1} \in V$ , luego por (4) podemos encontrar  $W \in \mathcal{V}$  tal que  $x^{-1}W \subseteq V$ , es decir  $W \subseteq xV$ . Pero  $e_G \in W$ , por ende:

$$e_G \in W \subseteq xV \subseteq U$$

Luego,  $\mathcal{V}$  es una base local de  $e_G$ .

Ahora probaremos que  $\tau$  es una topología del grupo  $G$ . Para ello hay que ver que la función  $(a, b) \mapsto ab^{-1}$  es continua. Sean  $a, b \in G$  y  $U$  una vecindad de  $ab^{-1}$ . De la condición (4) existe  $V \in \mathcal{V}$  tal que  $ab^{-1}V \subseteq U$ , y por (5) y (3) existen  $W_1, W_2 \in \mathcal{V}$  tales que  $bW_1b^{-1} \subseteq V$  y  $W_2W_2^{-1} \subseteq W_1$ .

Entonces,  $aW_2$  y  $bW_2$  son vecindades de los puntos  $a$  y  $b$  para las cuales se tiene que

$$\begin{aligned} (aW_2)(bW_2)^{-1} &= aW_2W_2^{-1}b^{-1} \\ &\subseteq aW_1b^{-1} \\ &\subseteq ab^{-1}(bW_1b^{-1}) \\ &\subseteq ab^{-1}(bW_1b^{-1}) \\ &\subseteq ab^{-1}V \\ &\subseteq U \end{aligned}$$

lo cual prueba que la operación considerada es continua.

Para terminar la demostración, hay que ver que la familia:

$$\{Ux \mid x \in G, U \in \mathcal{V}\}$$

es también una base para la topología  $\tau$ . Sean  $a \in G$  y  $U \in \tau$  tales que  $a \in U$ . Por (4) existe  $V \in \mathcal{V}$  tal que  $aV \subseteq U$ , y por (5) existe  $W \in \mathcal{V}$  tal que  $a^{-1}Wa \subseteq V$ . Entonces:

$$a \in Wa \subseteq aV \subseteq U$$

lo cual prueba que la familia es una base para la topología  $\tau$ , terminando así la prueba. ■

De un lema anterior sabemos que si  $A, B \subseteq G$  con  $G$  grupo topológico,  $A$  compacto y  $B$  cerrado, entonces  $AB$  y  $BA$  son cerrados. La hipótesis de que  $A$  sea compacto no es imprescindible.

### Ejemplo 1.1.2

Sea  $G$  un grupo arbitrario con la topología discreta, es decir, aquella formada por todos los subconjuntos de  $G$ ; entonces  $G$  forma un grupo topológico llamado **grupo discreto**.

### Ejemplo 1.1.3

Cualquier grupo  $G$  con la topología indiscreta, es decir, aquella que consiste únicamente en el conjunto vacío y  $G$  mismo, es un grupo topológico. Éste no es un grupo topológico  $T_0$  si  $G$  contiene más de un elemento.

### Ejemplo 1.1.4

El conjunto de los números reales  $\mathbb{R}$  con su topología y operación de suma usuales es un grupo topológico.

### Ejemplo 1.1.5

En el grupo aditivo de los números enteros,  $(\mathbb{Z}, +)$ , definiremos varias topologías de grupo:

1. Sea  $p \in \mathbb{Z}$  un número primo fijo y para cada  $k \in \mathbb{N}$  sea  $U_k = p^k \mathbb{Z}$ ; entonces la familia  $\mathcal{V} = \{U_k | k \in \mathbb{N}\}$  satisface las condiciones del teorema anterior: todos los miembros de  $\mathcal{V}$  contienen al cero y se prueba que su intersección es el cero. La condición (3) se deduce de la relación  $U_k = -U_k$ . Las propiedades (2) y (4) se obtienen a partir de la contención  $2(U_k) \subseteq U_k$  y de la definición de  $U_k$ . Por último, (5) se cumple por ser  $(\mathbb{Z}, +)$  abeliano.

Esta topología de  $G$  recibe el nombre de  **$p$ -ádica**. Para números primos distintos  $p$  y  $q$ , las topologías obtenidas de esta manera son distintas porque el conjunto  $M = \{p, p^2, \dots, p^n, \dots\}$  tiene al  $0 \in \mathbb{Z}$  como punto de acumulación en la  $p$ -ádica. Por el contrario, el  $0$  no es punto de acumulación de  $M$  en la  $q$ -ádica.

### Ejemplo 1.1.6

El **grupo lineal general de orden  $n$  sobre  $\mathbb{R}$** . Considere el grupo  $GL(n, \mathbb{R})$  de las matrices no singulares (invertibles) de orden  $n$  con elementos en el campo  $\mathbb{R}$  y como operación de grupo la multiplicación de matrices.

En  $GL(n, \mathbb{R})$  considere la topología heredada por ser un subespacio del espacio euclideo real de dimensión  $n^2$ , es decir, con la topología generada por la métrica:

$$d(A, B) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |A_{i,j} - B_{i,j}|^2},$$

para cualesquier  $A = (A_{i,j})$ ,  $B = (B_{i,j})$ . Observe que la función  $(A, B) \mapsto AB^{-1}$  es continua pues los elementos de la matriz producto son sumas de productos de los elementos de  $A$  y  $B$ .

## 1.1.1. Grupos Ordenados

Se presentarán en esta parte dos ejemplos de grupos topológicos cuya construcción es interesante. Estos ejemplos (aunque no se analicen a profundidad más adelante en el texto) se exponen con el propósito de ayudar al lector a familiarizarse con la noción de grupo topológico. Se estudiará la estructura de grupo ordenado.

Sea  $G$  un grupo con más de un elemento que está ordenado linealmente por una relación  $<$ , es decir,  $<$  cumple las condiciones siguientes:

- $<$  es irreflexiva (para toda  $x \in G$ ,  $x \not< x$ ).
- $<$  es antisimétrica (para todo  $x, y \in G$  se tiene que  $x < y$  ó  $y < x$ ).
- Cualesquiera dos elementos de  $G$  son comparables (ley de tricotomía).

Falta establecer una conexión entre este orden lineal y las operaciones del grupo, para lo cual se supone además lo siguiente:

- Si  $x, y \in G$  son tales que  $x < y$ , entonces para todo  $a \in G$  se tiene que  $ax < ay$  y  $xa < ya$ .

Los grupos con esta estructura se conocen como **grupos linealmente ordenados**.

Hay varias propiedades que tienen estos grupos, las cuales se probarán a continuación:

---

**Proposición 1.1.1**

Sea  $G$  un grupo linealmente ordenado por  $<$ . Entonces,  $G$  no tiene elementos máximo y mínimo (esto implica que  $G$  es infinito si  $G$  tiene más de un elemento).

---

**Demostración:**

Observemos que  $e_G$  no puede ser máximo o mínimo, ya que si  $a < e_G$  entonces  $e_G < a^{-1}$ , para todo  $a \in G$ . Por otro lado si  $x$  fuera elemento mínimo de  $G$ , en particular  $x < e_G$  (ya que  $x \neq e_G$ ) y, por ende  $x^2 < x \#_c$ . Por tanto  $G$  no tiene elementos máximo o mínimo. ■

Definamos con lo anterior una topología en  $G$  como sigue: si  $a, b \in G$  y  $a < b$ , sea  $(a, b) = \{x \in G \mid a < x < b\}$ ; la familia

$$\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a, b \in G, a < b\}$$

forma una base de una topología en  $G$ . En efecto, veamos que se cumplen las dos condiciones:

1. Si  $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathcal{B}$ , donde  $a_1 < b_1$  y  $a_2 < b_2$  entonces si  $x \in (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2)$ , se tiene que  $a_2 < b_1$ , ya que en otro caso  $x$  no podría estar en la intersección, luego el conjunto  $(a_2, b_1) \in \mathcal{B}$  y se tiene que  $x \in (a_2, b_1)$ .
2. Sea  $x \in G$ . Como  $G$  no admite elementos máximos ni mínimos, existen  $a, b \in G$  tales que  $a < x < b$ . Por ende,  $x \in (a, b) \in \mathcal{B}$ .

Por las dos condiciones anteriores, se tiene que al cumplirlas  $\mathcal{B}$  existe una única topología  $\tau$  para la cual  $\mathcal{B}$  es una base. Consideremos de ahora en adelante tal topología. Veamos que las funciones

$$\begin{aligned} h : G &\rightarrow G \\ a &\mapsto a^{-1} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} g : G \times G &\rightarrow G \\ (a, b) &\mapsto ab \end{aligned}$$

son funciones continuas en  $G$ . En efecto, sea  $(a, b) \in \mathcal{B}$ , donde  $a, b \in G$ . Entonces:

$$\begin{aligned} h^{-1}((a, b)) &= \{x \in G \mid a < h(x) < b\} \\ &= \{x \in G \mid a < x^{-1} < b\} \end{aligned}$$

pero, si  $a < x^{-1} \Rightarrow xa < e_G \Rightarrow x < a^{-1}$ . Por ende:

$$\begin{aligned} h^{-1}((a, b)) &= \{x \in G \mid b^{-1} < x < a^{-1}\} \\ &= (b^{-1}, a^{-1}) \end{aligned}$$

es decir, que imágenes inversas de vecindades abiertas son abiertas. Por tanto,  $h$  es continua.

Ahora para  $g$

### 1.1.2. Grupos Booleanos

## 1.2. Homomorfismos e isomorfismos

**Definición 1.2.1**

Decimos que el homomorfismo  $f : G \rightarrow G'$  es **homomorfismo abierto** si  $f$  es una función abierta (es decir, que manda abiertos en abiertos).

Este concepto es importante pues permite establecer el concepto de grupo topológicos equivalentes. A continuación se enunciarán y demostrarán propiedades elementales importantes de los homomorfismos continuos.

### Lema 1.2.1

Sea  $\varphi : G \rightarrow H$  un homomorfismo entre grupos topológicos. El homomorfismo  $\varphi$  es continuo (respectivamente, abierto) si lo es en la identidad  $e_G$ , es decir, si  $\varphi$  satisface la condición (1) (respectivamente (2)) siguiente:

1. Para toda  $W$  vecindad de  $e_H$  en  $H$ , existe  $U$  vecindad de  $e_G$  en  $G$  tal que  $\varphi(U) \subseteq W$ .
2. Para toda vecindad  $U$  de  $e_G$  en  $G$ , existe  $W$  vecindad de  $e_H$  tal que  $W \subseteq \varphi(U)$ .

### Demostración:

Supongamos que se cumple la condición (1), debemos probar que  $\varphi$  es continua en todo punto de  $G$ . Para ello, basta con ver que si  $g \in G$  es arbitrario y  $W$  es una vecindad de  $\varphi(g)$  en  $H$ , entonces existe una vecindad  $U$  de  $G$  tal que  $\varphi(U) \subseteq W$ .

Sean  $g \in G$  y  $W$  es una vecindad de  $h = \varphi(g)$  en  $H$ . Se puede expresar a  $W = hW'$   $W'$  es una vecindad de  $e_H$ . Por (1) existe una vecindad  $U'$  de  $e_G$  tal que  $\varphi(U') \subseteq W'$ . Entonces  $U = gU'$  es una vecindad de  $g$  y,

$$\varphi(U) = \varphi(gU') = \varphi(g)\varphi(U') = h\varphi(U') \subseteq hW' = W$$

por tanto,  $\varphi$  es continua en  $g$ .

Para (2), debemos probar que dado un abierto  $O$  en  $G$ , su imagen respecto a  $\varphi$  es abierta en  $H$ .

Sea entonces  $O$  abierto en  $G$  y  $h \in \varphi(O)$ ; entonces  $h = \varphi(g)$  para alguna  $g \in G$ . Por lo anterior,  $g^{-1}O$  es una vecindad de  $e_G$ , aunado con la condición (2) se sigue que existe una vecindad  $W$  de  $e_H$  tal que  $W \subseteq \varphi^{-1}(g^{-1}O) = \varphi^{-1}(g)\varphi(O)$ , por lo cual  $hW = \varphi(g)W \subseteq \varphi(O)$ , siendo  $hW$  vecindad de  $h$ . ■

¿Existen homomorfismos entre grupos topológicos que no sean abiertos? La respuesta a esta pregunta es que sí.

### Ejemplo 1.2.1

Sea  $(G, \tau)$  un grupo topológico no discreto. Considere los grupos  $(G, \tau)$  y  $(G, \tau_D)$ , donde  $\tau_D$  es la topología discreta sobre  $G$ . Entonces la función identidad  $id_G : G \rightarrow G$  es un homomorfismo de  $G$  sobre sí mismo el cual es continuo, pero no es un mapeo abierto entre los grupos topológicos  $(G, \tau_D)$  y  $(G, \tau)$ .

## 1.3. Subgrupos topológicos y grupo cociente

Una nueva forma de producir grupos topológicos es mediante los subgrupos de un grupo topológico y, mediante el grupo cociente (dotado de la topología cociente). Se pretende estudiar estas estructuras con el afán de producir más grupos de este tipo.

### Definición 1.3.1

Sea  $G$  un grupo topológico; un subconjunto no vacío  $H$  de  $G$  se llama **subgrupo topológico** de  $G$  si

1.  $H$  es subgrupo de  $G$ .

2.  $H$  es un subespacio con la topología inducida por  $G$ .

El siguiente resultado justifica la definición de subgrupo topológico en el sentido de que este último es por sí mismo un grupo topológico.

**Proposición 1.3.1**

Sean  $G$  un grupo topológico y  $H$  un subgrupo topológico de  $G$ . Entonces,  $H$  es un grupo topológico con la topología que hereda de  $G$ .

**Demostración:**

Es inmediata del hecho de que la función  $(x, y) \mapsto xy^{-1}$  es continua restringida a  $H \times H$ , y va en  $H$ . ■

Se presentan ahora propiedades generales de cerradura dentro de un grupo topológico.

**Proposición 1.3.2**

Si  $A$  y  $B$  son subconjuntos de un grupo topológico  $G$ , entonces:

1.  $\overline{A \cdot B} \subseteq \overline{AB}$ .
2.  $(\overline{A})^{-1} = \overline{A^{-1}}$
3.  $x\overline{A}y = \overline{xAy}$ , para cualesquier  $x, y \in G$ .
4. Si  $ab = ba$  para toda  $a \in A$  y  $b \in B$ , entonces  $ab = ba$  para toda  $a \in \overline{A}$  y  $b \in \overline{B}$ .

**Demostración:**

De (1): Sean  $x \in \overline{A}$  y  $y \in \overline{B}$  y  $W$  un abierto tal que  $xy \in W$ . Debemos probar que  $W \cap (AB) \neq \emptyset$ . En efecto, como  $(x, y) \mapsto x \cdot y$  es continua, existen  $V_1$  y  $V_2$  vecindades de  $x$  y  $y$ , respectivamente, tales que  $V_1 \cdot V_2 \subseteq W$ . Por como se eligieron  $x$  y  $y$ , existen  $a \in V_1$  y  $b \in V_2$  tales que  $a \in A$  y  $b \in B$ , luego  $ab \in (AB) \cap W$ , pues  $ab \in V_1 \cdot V_2 = W$ . Así,  $xy \in \overline{AB}$ .

De (2) y (3): Son inmediatas del hecho de que para cualquier homeomorfismo  $f : G \rightarrow G$  se tiene que  $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ , siendo  $A \subseteq G$  arbitrario, en particular tomamos como  $f$  a las funciones  $z \mapsto z^{-1}$  y  $z \mapsto xzy$ , siendo  $x, y \in G$  arbitrarios fijos.

De (4): Considere  $h : G \times G \rightarrow G$  tal que  $(a, b) \mapsto aba^{-1}b^{-1}$ . Esta función es continua, por lo cual el conjunto:

$$\begin{aligned} H &= h^{-1}(e_G) \\ &= \left\{ (a, b) \in G \times G \mid h(a, b) = e_G \right\} \\ &= \left\{ (a, b) \in G \times G \mid aba^{-1}b^{-1} = e_G \right\} \end{aligned}$$

es cerrado. Además,  $A \times B \subseteq H$ , por lo cual  $\overline{A \times B} \subseteq H$ . Además, ya se sabe que  $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ , por tanto  $\overline{A} \times \overline{B} \subseteq H$ , es decir que para todo  $a \in \overline{A}$  y  $b \in \overline{B}$ ,  $ab = ba$ . ■

**Definición 1.3.2**

Sea  $G$  grupo y  $N$  un subgrupo de  $H$ . Decimos que  $N$  es **subgrupo normal de  $G$** , si  $a^{-1}Na \subseteq N$ , para todo  $a \in G$ .

Esto es equivalente a que  $a^{-1}Na = N$ , para todo  $a \in G$ .

---

**Proposición 1.3.3**

Sean  $G$  grupo topológico y  $H, N$  subgrupos de  $G$ . Entonces

1.  $\overline{H}$  es subgrupo de  $G$ .
  2. Si  $N$  es subgrupo normal de  $G$ , entonces  $\overline{N}$  también es subgrupo normal de  $G$ .
  3.  $H$  es abierto si y sólo si su interior es no vacío.
  4. Si  $H$  es abierto, entonces  $\overline{H} = H$ .
- 

**Demostración:**

De (1): Veamos que  $\overline{H}$  es un subgrupo de  $G$ . En efecto, como  $H$  es un subgrupo de  $G$ , entonces  $H^2 \subseteq H$  y, por (1) de la proposición anterior,  $(\overline{H})^2 \subseteq \overline{H^2} \subseteq \overline{H}$  (es decir que  $\overline{H}$  es cerrado bajo el producto). Además,  $H^{-1} \subseteq H$  y, por (2) de la proposición anterior,  $\overline{H}^{-1} = \overline{H^{-1}} \subseteq \overline{H}$  (es decir que  $\overline{H}$  es cerrado bajo inversos). Luego,  $\overline{H}$  es subgrupo de  $G$  (por ser  $H$  subgrupo,  $\overline{H}$  es no vacío).

De (2): Como  $N$  es subgrupo normal de  $G$ , en particular es subgrupo de  $G$ , luego  $\overline{N}$  es subgrupo de  $G$  (por (1)). Para ver que es subgrupo normal de  $G$  hay que verificar la contención:

$$a\overline{N}a^{-1} \subseteq \overline{N}, \quad \forall a \in G$$

pero, por hipótesis y usando (3) de la proposición anterior, se tiene que:

$$\begin{aligned} aNa^{-1} &\subseteq N, \quad \forall a \in G \\ \Rightarrow \overline{aNa^{-1}} &\subseteq \overline{N}, \quad \forall a \in G \\ \Rightarrow a\overline{N}a^{-1} &\subseteq \overline{N}, \quad \forall a \in G \end{aligned}$$

por tanto,  $\overline{N}$  es subgrupo normal de  $G$ .

De (3): Proabremos la doble implicación:

$\Rightarrow$ ): Suponga que  $H$  es abierto, entonces es claro que su interior es no vacío ya que todos los puntos de  $H$  son puntos interiores del mismo.

$\Leftarrow$ ): Suponga que  $H$  tiene interior no vacío, sea  $x \in H$  un punto interior, entonces existe  $U$  vecindad de  $e_G$  tal que  $xU \subseteq H$ . Ahora, para todo  $y \in H$  se tiene que:

$$yU = (yx^{-1})xU \subseteq yx^{-1}H = H$$

por tanto,  $yU$  es una vecindad de  $y$  contenida en  $H$ , luego  $y$  es un punto interior. Por lo cual,  $H$  es abierto ya que está contenido en su interior.

De (4): Suponga que  $H$  es abierto. Se tiene que el conjunto:

$$G - H = \bigcup_{x \in G - H} Hx$$

es abierto, pues  $Hx$  es abierto para cada  $x \in G - H$ . Luego  $H$  es cerrado, es decir que  $H = \overline{H}$ . ■

El próximo resultado tiene como objetivo generar subgrupos abiertos a partir de vecindades de la identidad.

---

**Teorema 1.3.1**



Sean  $G$  un grupo topológico y  $U$  cualquier vecindad abierta de  $e_G$ . Entonces, el conjunto:

$$L = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$$

es un subgrupo abierto y cerrado de  $G$ .

---

**Demostración:**

Es claro que  $L \neq \emptyset$  ya que  $e_G \in L$ . Sean ahora  $x, y \in G$ , entonces existen  $k, l \in \mathbb{N}$  tales que  $x \in U^k$  y  $y \in U^l$  luego,  $xy \in U^{k+l}$  y  $x^{-1} \in (U^k)^{-1} = (U^{-1})^k = U^k$ , es decir que  $xy, x^{-1} \in L$ . Por tanto,  $L$  es subgrupo de  $G$ .

Además, es abierto por ser unión arbitraria de abiertos, y cerrado por el inciso (4) de la proposición anterior. ■

**Observación 1.3.1**

Un subespacio topológico de un espacio topológico es **discreto** si todos los puntos del subespacio son aislados, que es lo mismo que decir que está dotado de la topología discreta.

---

**Proposición 1.3.4**

Un subgrupo  $H$  de un grupo topológico  $G$  es discreto si y sólo si tiene un punto aislado.

---

**Demostración:**

$\Rightarrow$ ): Se tiene que  $H$  es un subgrupo discreto, es decir que está dotado de la topología discreta luego, el conjunto  $\{e_G\}$  es una vecindad abierta de  $e_G$  para la cual se cumple que  $\{e_G\} \cap H = \{e_G\}$ , es decir que es un punto aislado de  $H$ .

$\Leftarrow$ ): Sea  $x \in H$  un punto aislado de  $H$ ; es decir que existe una vecindad abierta  $U$  de  $e_G$  tal que  $xU \cap H = \{x\}$ . Si ahora  $y \in H$ , se tiene entonces que:

$$yU \cap H = yU \cap yx^{-1}H = yx^{-1}(xU \cap H) = yx^{-1}\{x\} = \{y\}$$

es decir, que todos los puntos de  $H$  son aislados. Por tanto,  $H$  es discreto. ■

El siguiente lema proporciona una condición suficiente para probar que un subgrupo topológico es cerrado.

---

**Lema 1.3.1**

Sean  $G$  un grupo topológico y  $H$  un subgrupo de  $G$  tales que  $\overline{U} \cap H$  es cerrado en  $G$  para alguna vecindad abierta  $U$  de  $e_G$ . Entonces,  $H$  es cerrado.

---

**Demostración:**

Sea  $U$  una vecindad abierta de  $e_G$  tal que  $\overline{U} \cap H$  es cerrado, y sea  $V$  una vecindad abierta de  $e_G$  tal que  $V^2 \subseteq U$ . Probaremos que  $H = \overline{H}$ .

En efecto, sea  $x \in \overline{H}$ , entonces el conjunto  $xV \cap H \neq \emptyset$ , sea  $y \in xV \cap H$ . Afirmamos que  $xy \in \overline{U} \cap H$ . En efecto, suponga que esto no es cierto, entonces al ser este un conjunto cerrado, existiría una vecindad abierta  $W$  de  $e_G$  tal que

$$Wxy \cap \overline{U} \cap H = \emptyset$$

Ahora, es claro que  $x \in (W \cap V)x$  y, como  $x \in \overline{H}$ , entonces existiría  $z \in (W \cap V)x \cap H$ . Este elemento cumple que:

- $zy \in HH = H$ .
- $zy \in Vxx^{-1}V = V^2 \subseteq U \subseteq \overline{U}$ .
- $zy \in (Wx)y = Wxy$

por ende,  $zy \in Wxy \cap \overline{U} \cap H \#_c$ , pues hemos dicho que tal conjunto es vacío. Luego  $xy \in \overline{U} \cap H$ , en particular  $xy \in H$ . Como  $y^{-1} \in H^{-1} \subseteq H$  se sigue que  $x = (xy)y^{-1} \in HH = H$ , lo cual termina la demostración. ■

Este siguiente teorema presenta una propiedad exclusiva de los grupos topológicos, pues no todo subespacio discreto de un espacio topológico es cerrado.

---

### Proposición 1.3.5

Todo subgrupo discreto  $H$  de un grupo topológico  $G$  es cerrado.

---

#### Demostración:

Sea  $U$  una vecindad abierta de  $e_G$  tal que  $U \cap H = \{e_G\}$ . Por un lema anterior existe  $V$  vecindad de  $e_G$  tal que  $\overline{V} \subseteq U$ . Por tanto:

$$\overline{V} \cap H = \{e_G\}$$

donde, por ser  $G$  un espacio de Hausdorff se sigue que  $\{e_G\}$  es cerrado en  $G$ . Por tanto, del lema anterior se sigue que  $H$  es cerrado. ■

## 1.4. Grupos cocientes

Se estudiarán ahora el grupo cociente de un grupo topológico.

Recordemos que si  $G$  es un grupo y  $H$  un subgrupo de  $H$ , entonces se define una relación de equivalencia en  $G$  como sigue:

$$a \sim b \text{ si y sólo si } ab^{-1} \in H$$

Las clases de equivalencia de esta relación reciben el nombre de **clases laterales derechas de  $H$** . Denotaremos por  $G/_DH$  al conjunto formado por las clases laterales derechas, es decir:

$$G/_DH = \{Ha \mid a \in G\}$$

de manera similar se definen las clases laterales laterales izquierdas de  $H$ . Se denota por  $G/_IH$  al conjunto:

$$G/_IH = \{aH \mid a \in G\}$$

En caso de que el grupo sea normal, se tiene que  $G/_IH = G/_DH = G/H$ . Los siguientes resultados se establecen para clases laterales derechas y de forma análoga se cumplen para clases laterales izquierdas.

Introducimos ahora en  $G/H$  una topología de la siguiente manera. Sea  $\mathcal{B}$  una base del grupo topológico  $G$  y  $H$  un subgrupo de  $G$ . Para cada  $U \in \mathcal{B}$  definamos:

$$U^* = \{Hx \mid x \in U\}$$

y:

$$\mathcal{B}^* = \{U^* \mid U \in \mathcal{B}\}$$

---

**Proposición 1.4.1**

Para todo subgrupo  $H$  de  $G$ ,  $\mathcal{B}^*$  es una base de una topología sobre  $G/_DH$ . Si  $H$  es cerrado, entonces esta topología sobre  $G/_DH$  es  $T_1$ .

---

**Demostración:**

Para la primera parte se deben verificar dos condiciones:

1. Sean  $U^*, V^* \in \mathcal{B}^*$ . Si  $Ha \in U^* \cap V^*$  debemos encontrar  $W^* \in \mathcal{B}^*$  tal que  $Ha \in W^* \subseteq U^* \cap V^*$ .  
Como  $U^*, V^* \in \mathcal{B}^*$ , entonces existe  $u \in U$  y  $v \in V$  tales que:

$$Ha = Hu = Hv$$

por lo cual,  $Ha \subseteq HU, HV$ , es decir que  $Ha \subseteq HU \cap HV$ . Además,  $HU \cap HV$  es un conjunto abierto (por ser intersección de dos abiertos). Como  $u \in HU \cap HV$ , entonces existe  $W \in \mathcal{B}$  tal que:

$$u \in W \subseteq HU \cap HV$$

Claramente se tiene que  $Ha = Hu \in W^*$ . Veremos que  $W^* \subseteq U^* \cap V^*$ . En efecto, sea  $Hw \in W^*$ , es decir que  $w \in W$ . Por la contención anterior,  $w \in HU \cap HV$ , es decir que existen  $h_1, h_2 \in H$ ,  $u_1 \in U$  y  $v_1 \in V$  tales que:

$$w = h_1u_1 = h_2v_1$$

Luego:

$$Hw = Hh_1u_1 = Hu_1 \in U^* \quad \text{y} \quad Hw = Hh_2v_1 = Hv_1 \in V^*$$

Por lo cual,  $Hw \in U^* \cap V^*$ . Finalmente, se sigue que  $W^* \subseteq U^* \cap V^*$ .

2. Sea  $Hx \in G/_DH$ . Como  $\mathcal{B}$  es base para  $G$ , entonces existe  $U \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in U$ , luego  $Hx \in U^*$ . Así que

$$G/_DH = \bigcup \mathcal{B}^*$$

por ambos incisos, se sigue que  $\mathcal{B}^*$  es base de una topología sobre  $G/_DH$ .

Para la otra parte, suponga que  $H$  es cerrado. Sean  $Ha \neq Hb$  dos elementos de  $G/_DH$ . Como  $Ha$  es cerrado (pues  $H$  es cerrado) y  $b \notin Ha$ , entonces existe  $U \in \mathcal{B}$  tal que  $b \in U$  y  $U \cap Ha = \emptyset$  (pues,  $G$  es un espacio  $T_3$ ). Entonces,  $Hb \in U^*$  y  $Ha \notin U^*$ . Por tanto,  $G/_DH$  es un espacio  $T_1$ . ■

**Observación 1.4.1**

El espacio topológico  $G/H$  así construido recibe el nombre de **espacio cociente de  $G$  entre  $H$** , o **grupo cociente de  $G$  entre  $H$** , si  $H$  es cerrado y normal en  $G$ .

Ahora se estudian las propiedades de la función canónica  $\pi : G \rightarrow G/_DH$ , tal que  $x \mapsto Hx$ .

---

**Proposición 1.4.2**

Sean  $G$  un grupo topológico,  $H$  un subgrupo cerrado de  $G$  y  $\pi : G \rightarrow G/_DH$  la función canónica tal que  $x \mapsto Hx$ . Entonces,  $\pi$  es continua y abierta.

---

**Demostración:**

Sea  $x \in G$  y  $U \subseteq G$  un abierto tal que  $\pi(x) = Hx \in U^*$ . Para probar que  $\pi$  es continua, hay que encontrar un abierto  $V$  en  $G$  tal que

$$\pi(V) \subseteq U^*$$

tomemos  $V = HU$ , el cual es abierto por ser  $U$  abierto en  $G$ , además  $x \in V$  y:

$$\pi(V) = \pi(HU) = \pi(U) = U^*$$

por tanto,  $\pi$  es continua.

Veamos ahora que es un mapeo abierto. Sea  $U \subseteq G$  abierto y tomemos  $\mathcal{B}$  una base de la topología de  $G$ ; entonces:

$$U = \bigcup_{j \in J} B_j$$

donde  $\{B_j\}_{j \in J} \subseteq \mathcal{B}$ . Tenemos que:

$$\pi(U) = \pi\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{j \in J} \pi(B_j) = \bigcup_{j \in J} B_j^*$$

donde  $B_j^* \in \mathcal{B}^*$ , para todo  $j \in J$ . Luego,  $\pi(U)$  es un mapeo abierto. ■

En general la función canónica  $\pi : G \rightarrow G/DH$  no es cerrada como lo muestra el siguiente ejemplo. Sin embargo, si  $H$  es compacto entonces la función sí es cerrada (esto se verá en el siguiente capítulo).

#### Ejemplo 1.4.1

Considere  $G = \mathbb{R}$  como grupo aditivo de los reales dotado de la topología usual, y  $H = \mathbb{Z}$  el subgrupo de los números enteros. Entonces, definimos la función  $\psi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow [0, 1[$  dada por:

$$\psi(\mathbb{Z} + x) = x - [x]$$

donde  $[x]$  denota a la parte entera de  $x$ . Esta función es biyectiva (más aún, es un isomorfismo de grupos, dotando a  $[0, 1[$  con cierta operación binaria que lo haga grupo) y es un homeomorfismo si se le dota a este conjunto de la topología usual de  $[0, 1[$ .

Se tiene además, que el conjunto  $A = \{2 + \frac{1}{2}, \dots, n + \frac{1}{n}, \dots\}$  es cerrado en  $\mathbb{R}$ , pero su imagen bajo la función canónica es  $\pi(A) = \{\mathbb{Z} + \frac{1}{2}, \dots, \mathbb{Z} + \frac{1}{n}, \dots\}$ , el cual es homeomorfo a  $\{\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$  no es cerrado en  $[0, 1[$ , por lo cual no el conjunto  $\pi(A)$  no es cerrado en  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

El siguiente resultado muestra que las propiedades topológicas locales del espacio cociente de  $G$  en  $H$  también se pueden estudiar en un solo punto.

#### Proposición 1.4.3

Sean  $G$  un grupo topológico y  $H$  un subgrupo cerrado de  $G$ . Entonces,  $G/DH$  es un espacio homogéneo.

#### Demostración:

Hay que probar que para todo par de puntos  $Ha, Hb \in G/DH$  existe un homeomorfismo  $f$  de  $G/DH$  en sí mismo tal que  $f(Ha) = Hb$ .

Sea  $\psi_a : G/DH \rightarrow G/DH$  dada por:  $Hx \mapsto H(xa)$ . Es claro que esta función está bien definida y, afirmamos que es un homeomorfismo.

Veamos que es inyectiva, en efecto, si  $\psi_a(Hx) = \psi_a(Hy)$ , entonces  $H(xa) = H(ya)$ , luego  $(xa)(ya)^{-1} = xaa^{-1}y^{-1} = xy^{-1} \in H$ , luego  $Hx = Hy$ .

Y, es suprayectiva, pues para todo  $x \in G$ ,  $\psi_a(H(xa^{-1})) = Hx$ .

Además, tiene como función inversa a  $(\psi_a)^{-1} = \psi_{a^{-1}}$ . Por lo cual, para ver que es un homeomorfismo, basta con ver que ella y su inversa son mapeos inversos, pero, por como está dada la función inversa, es suficiente con ver que  $\psi_a$  es abierta (ya que, el  $a \in G$  fue arbitrario).

Considere  $\pi : G \rightarrow G/_D H$  la función canónica, y sea  $U \subseteq G$  abierto, entonces  $U = \pi(U)^*$  es abierto en  $G/_D H$ . Entonces,

$$\begin{aligned}\psi_a(U^*) &= \left\{ \psi_a(Hx) \mid Hx \in U^* \right\} \\ &= \left\{ H(xa) \mid x \in U \right\} \\ &= \left\{ Hy \mid y \in Ua \right\} \\ &= \pi(Ua)\end{aligned}$$

donde, como  $U$  es abierto en  $G$ , entonces  $Ua$  también lo es y, al ser  $\pi$  un mapeo abierto, se sigue que  $\psi_a(U^*)$  es abierta.

Por tanto,  $\psi_a$  es homeomorfismo. Obsevemos ahora que si  $Ha, Hb \in G/_D H$ , entonces:

$$\psi_{a^{-1}b}(Ha) = H(aa^{-1}b) = Hb$$

con lo que se tiene que  $G/_D H$  es un espacio homogéneo. ■

El siguiente resultado es un lema auxiliar que nos permitirá establecer dos propiedades topológicas de  $G/_D H$ .

#### Lema 1.4.1

Sean  $G$  un grupo topológico y  $H$  un subgrupo cerrado de  $G$ ,  $U, V$  vecindades abiertas de  $e_G$  en  $G$  tales que  $VV^{-1} \subseteq U$ ; entonces, si  $\pi : G \rightarrow G/_D H$  es la función canónica, se cumple que

$$\overline{\pi(V)} \subseteq \pi(U)$$

#### Demostración:

Sea  $Hx \in \overline{\pi(V)}$  donde  $x \in G$ ; entonces,  $\pi(xV)$  es una vecindad abierta que contiene a  $Hx$  y, por ende, contiene puntos de  $\pi(V)$ . Esto es que la intersección:

$$\pi(xV) \cap \pi(V)$$

es no vacía, luego existen,  $v_1, v_2 \in V$  tales que

$$Hxv_1 = Hv_2$$

esto es, que  $Hx = Hv_2v_1^{-1} \in H(VV^{-1}) \subseteq H(U)$ . Por tanto se sigue la contención deseada. ■

#### Teorema 1.4.1

Sean  $G$  un grupo topológico y  $H$  un subgrupo cerrado de  $G$ . Entonces,

1.  $G/_D H$  es un espacio regular y por tanto de Hausdorff.
2.  $G/_D H$  es un espacio discreto si y sólo si  $H$  es abierto en  $G$ .

#### Demostración:

De (1): Por hipótesis,  $H$  es cerrado en  $G$ , luego el conjunto  $Ha$  es cerrado en  $G$ , para todo  $a \in G$ . Sea  $a \in G$ , se tiene que el conjunto:

$$G/_D H \setminus \{Ha\} = \left\{ Hx \in G/_D H \mid Hx \neq Ha \right\} = \pi(G \setminus Ha)$$

es abierto, pues es la imagen de un abierto y el mapeo  $\pi$  es abierto, luego cada punto  $\{Ha\}$  es un conjunto cerrado en  $G/_D H$ , es decir que  $G/_D H$  es  $T_2$ , en particular es  $T_1$ . Para probar que es regular (es decir,  $T_3$ ).

Para ello, es suficiente probar que para todo abierto  $U^*$  en  $G/_DH$  tal que  $H \in U^*$  (basta hacerlo aquí pues, el espacio es homogéneo) existe una vecindad  $V^*$  de  $H$  tal que  $\overline{V^*} \subseteq U^*$ . En efecto, si  $U^*$  es un abierto tal que  $H \in U^*$ , entonces existe  $U \subseteq G$  abierto tal que  $\pi(U) = U^*$ .

En particular, se tiene que  $e_G \in U$ , luego por un lema anterior existe  $V \subseteq G$  vecindad abierta de  $e_G$  tal que:

$$VV^{-1} \subseteq U$$

por el lema anterior, se sigue que  $\overline{\pi(V)} \subseteq \pi(U)$ , es decir que  $\overline{V^*} \subseteq U^*$ , donde  $V^*$  es un abierto que contiene a  $H$ .

De (2): Se probará la doble implicación.

$\Rightarrow$ ): Si  $G/_DH$  es discreto, entonces el conjunto  $\{H\} = \{He_G\}$  es abierto, luego su imagen inversa bajo  $\pi$ ,  $\pi^{-1}(He_G) = H$  es abierta en por ser  $\pi$  una función continua, es decir que  $H$  es abierto en  $G$ .

$\Leftarrow$ ): Si  $H$  es abierto, como  $\pi$  es un mapeo abierto, se sigue que  $\pi(H) = \{H\}$  es abierto en  $G/_DH$ , esto es, es un punto aislado de  $G/_DH$ , luego el espacio  $G/_DH$  es discreto ya que es homogéneo. ■

En el caso particular de que  $N$  sea un subgrupo normal de  $G$ , de modo que  $G/N$  sea grupo, se tiene el siguiente resultado:

---

### Teorema 1.4.2

Sean  $G$  un grupo topológico y  $N$  un subgrupo cerrado normal de  $G$ ; entonces

1.  $G/N$  con la topología cociente es un grupo topológico.
  2. La función continua  $\pi : G \rightarrow G/N$  es un homomorfismo abierto y continuo.
  3. El grupo  $G/N$  es un espacio  $T_1$  y por tanto, regular.
  4. El grupo  $G/N$  es discreto si y sólo si  $N$  es abierto.
- 

### Demostración:

De (1): Hay que probar que la función  $(Na, Nb) \mapsto Nab^{-1}$  es continua. En efecto, sean  $a, b \in G$  y  $W^* = \pi(W) \subseteq G/N$  un abierto (siendo  $W \subseteq G$  abierto) tal que  $Nab^{-1} \in W^*$  (se sigue que  $ab^{-1} \in W$ ).

Como la función  $(a, b) \mapsto ab^{-1}$  es continua, entonces existen  $U, V \subseteq G$  abiertos tales que  $a \in U$ ,  $b \in V$  y

$$UV^{-1} \subseteq W$$

por tanto, si  $u \in U$  y  $v \in V$ , se tiene que  $Nu \in U^*$ ,  $Nv \in V^*$ , con:

$$(Nu)(Nv)^{-1} = Nuv^{-1} \in W^*$$

pues,  $uv^{-1} \in W$ . Por ende,  $U^*(V^*)^{-1} \subseteq W^*$ . Por tanto, la función establecida originalmente es continua.

De (2): Ya se sabe que la función canónica  $\pi$  es continua y abierta. Además, es homomorfismo por ser  $N$  subgrupo normal de  $G$ .

De (3) Es inmediato del teorema anterior.

De (4) Es inmediato del teorema anterior. ■

Resulta que, podemos establecer el primer teorema de isomorfismos en la parte de grupos topológicos, haciendo ciertas limitaciones correspondientes para que todo funcione adecuadamente.

---

**Teorema 1.4.3**

Sean  $G$  y  $G'$  dos grupos topológicos y sea  $f : G \rightarrow G'$  un epimorfismo continuo y abierto con kernel  $N = \ker(f)$ . Entonces,  $N$  es un subgrupo normal y cerrado de  $G$  y, el isomorfismo  $h$  de  $G/N$  en  $G'$  dado por:

$$h(Nx) = f(x)$$

para todo  $Nx \in G/N$ , es un isomorfismo topológico entre  $G/N$  y  $G'$ .

---

**Demostración:**

■