REPRESENTACIÓN DECIMAL.

Proposición:

Cada $x \in (0,1)$ admite una representación decimal de la forma:

$$x = 0.x_1x_2x_3\ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{10^i}$$

Donde $x_i \in \{0,1,2,\ldots,9\}$, $\forall\, i \in \mathbb{N}$.

Dem:

Sea $x \in (0,1)$. Probaremos que $\exists\, x_1, x_2, x_3, \ldots \in \{0,1,\ldots,9\}$ tales que:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{10^i}$$

Primero, probaremos que $\exists$ tales x_i's. Procederemos por inducción sobre n.
Como $[0,1] = \bigcup_{i=0}^{9} \left[\frac{i}{10}, \frac{i+1}{10}\right]$ y $(0,1) \subset [0,1]$, entonces x pertenece a algún intervalo $\left[\frac{i_1}{10}, \frac{i_1+1}{10}\right]$, donde $i_1 \in \{0,1,\ldots,9\}$. Tome de esta forma $x_1 = i_1$.
Supongamos que $\exists\, x_1, x_2, \ldots, x_k \in \{0,1,\ldots,k\}$. Probaremos que $\exists\, x_{k+1}$. Como $\exists$ los x_i's ya mencionados, sabemos entonces que $x \in \left[\sum_{i=1}^{k} \frac{x_i}{10^i}, \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i}{10^i} + \frac{1}{10^k}\right]$, podemos entonces descomponer este intervalo como sigue:

$$\left[\sum_{i=1}^{k} \frac{x_i}{10^i}, \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i}{10^i} + \frac{1}{10^k}\right] = \bigcup_{i=0}^{9} \left[\sum_{i=1}^{k} \frac{x_i}{10^i} + \frac{i}{10^{k+1}}, \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i}{10^i} + \frac{i+1}{10^{k+1}}\right]$$

x debe pertenecer a alguno de estos intervalos, digamos que pertenece al i_{k+1}, $i_{k+1} \in \{0,1,\ldots,9\}$. De esta forma, tome $x_{k+1} = i_{k+1}$.
Aplicando inducción, tenemos $x_1, x_2, \ldots$ (en gral, $x_i\ \forall\, i \in \mathbb{N}$). Probaremos ahora que:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{10^i}$$

Para ello, probaremos que $\left|x - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{10^i}\right| < \varepsilon\ \forall\, \varepsilon > 0$. Suponga lo contrario, entonces $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\left|x - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{10^i}\right| \geq \varepsilon_0$$

Por la prop. arquimediana, $\exists\ n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon_0$. Como $\frac{1}{n} > \frac{1}{10^n}$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\left|x - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{10^i}\right| > \frac{1}{10^n} \quad \dots (1)$$

Por como fueron construidos los x_i's, tenemos que: $x \in \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{10^i}, \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{10^i} + \frac{1}{10^n}\right]}_{I}$.

Luego, como $\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{x_i}{10^i} \leqslant \frac{1}{10^n}$, se tiene que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{10^i} \in I$. Así:

$$\frac{1}{10^n} \geqslant \left|x - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{10^i}\right| \quad \dots (2)$$

Por (1) y (2), $\frac{1}{10^n} > \frac{1}{10^n}$, lo cual es un absurdo. Por tanto:

$$x = 0.x_1x_2\dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{10^i}$$

q.e.d.

Proposición:

Sean $x, y \in (0,1)$, y $0.x_1x_2\dots$, $0.y_1y_2\dots$ sus expansiones decimales. Entonces $0.x_1x_2\dots = 0.y_1y_2\dots$ si y sólo si $x_n = y_n$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$, o bien $\exists\ N \in \mathbb{N}$ m $x_i = y_i$ $\forall\ i \in J_{N-1}$, $x_N = y_N + 1$, $x_i = 0$ y $y_i = 9$ $\forall\ i \in \mathbb{N}, i > N$.

Dem:

$\Leftarrow$) Si $x_i = y_i$ $\forall\ i \in \mathbb{N}$, entonces

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{10^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{10^i}$$

$$\Rightarrow x = y$$

Si ocurre lo otro, probaremos que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{10^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{10^i}$$

Como $x_i = 0$ $\forall\ i \in \mathbb{N}, i > N$, entonces podemos escribir:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{10^i} \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} \frac{x_i}{10^i} + \frac{x_N}{10^N} \end{aligned}$$

Como $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{10^i}$ es absolutamente convergente, podemos dividir la serie en 2:

$$y = \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i}{10^i} + \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{y_i}{10^i}$$

$y_i = 9 \ \forall i \in \mathbb{N}, \ i > N$, entonces:

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{y_i}{10^i} = \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{9}{10^i}$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{9}{10^{N+i}}$$
$$= \frac{1}{10^N} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{9}{10^i}$$
$$= \frac{1}{10^N} \left(\frac{9/10}{1 - 1/10} \right) = \frac{1}{10^N}$$

Por lo tanto:

$$y = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{y_i}{10^i} + \frac{y_N}{10^N} + \frac{1}{10^N}$$

Pero $\sum_{i=1}^{N-1} \frac{x_i}{10^i} = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{y_i}{10^i}$ y $\frac{x_N}{10^N} = \frac{y_N + 1}{10^N}$. Por lo tanto:

$$x = y.$$

$\Rightarrow$) Me da flojera.

q.e.d.

Las ideas de ambas proposiciones pueden usarse para hacer proposiciones semejantes, pero con representaciones en otras bases (binaria, ternaria, etc...).

Claramente, los puntos en cualquier base, con doble representación decimal, son todos racionales, pues son una suma finita de racionales. Estos números, en base decimal, binaria y ternaria, son:

$$Z_{10} = \left\{ \frac{p}{10^N} \mid N, p \in \mathbb{N}, \ p < 10^N \right\}$$
$$Z_2 = \left\{ \frac{p}{2^N} \mid N, p \in \mathbb{N}, \ p < 2^N \right\}$$
$$Z_3 = \left\{ \frac{p}{3^N} \mid N, p \in \mathbb{N}, \ p < 3^N \right\}$$