Lista. 0.

1. Usando la definición de convergencia uniforme, **determine** si las sucesiones de funciones siguientes son o no uniformemente convergentes en los intervalos que se indican.

   a) $f_n(x) = x^n(1-x^n), \quad 0 \le x \le 1.$

   b) $f_n(x) = \frac{1}{nx}, \quad 0 < x \le 1.$

   c) $f_n(x) = n^3x^n(1-x), \quad 0 \le x \le 1.$

   d) $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}, \quad 0 < x < 1.$

Sol.

a) Veamos que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente. En efecto: sea $x \in [0,1]$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n(1-x^n) = \lim_{n\to\infty} x^n \cdot \lim_{n\to\infty}(1-x^n) = 0$$

por tanto, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a $\underline{0}$. Veamos que no lo hace uniformemente: en efecto, como f_n es diferenciable en $]0,1[$, y continua en $[0,1]$, donde $f_n(0) = f_n(1) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces f_n alcanza su máximo en algún punto crítico. Veamos que:

$$f_n'(x) = 0$$
$$\Rightarrow nx^{n-1}(1-x^n) - nx^n \cdot x^{n-1} = 0$$
$$\Rightarrow nx^{n-1} - nx^{2n-1} - nx^{2n-1} = 0$$
$$\Rightarrow nx^{n-1} = 2nx^{2n-1}$$
$$\Rightarrow x^n = 1/2 \Rightarrow x = (1/2)^{1/n}$$

por tanto, f_n tiene un punto crítico en $x = (1/2)^{1/n}$, como $f_n(x) \geq 0$, $\forall x \in [0,1]$, f_n alcanza su máximo en $x = (1/2)^{1/n}$, el cual es:

$$f_n((1/2)^{1/n}) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - \underline{0}(x)| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$$

Luego, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ no converge uniformemente a $\underline{0}$ en $[0,1]$.

$\square$

b) Veamos que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a $\underline{0}$ en $]0,1]$:

Sea $x \in]0,1]$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nx} = \frac{1}{x} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{x}\cdot 0 = 0$$

pero, no lo hace uniformemente. En efecto, sea $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$. Como $\frac{1}{nx} \to \infty$ cuando $x \to 0^+$, entonces para $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} > 0$, $\exists\, 0 < \delta_n < 1 \ni$ si $0 < x < \delta_n \Rightarrow f_n(x) \geq \varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, por tanto:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ N_\infty(f_n - f) \geqslant |f_n(x) - f(x)|,\ \text{con } 0 < x < \delta_n$$

$$= |f_n(x) - \underline{0}(x)|$$

$$= |f_n(x)| \geqslant \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} N_\infty(f_n - f) \geqslant \frac{1}{2}$$

Por tanto, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ no converge a $\underline{0}$ uniformemente.

$\square$

c) $f_n(x) = n^3 x^n (1-x)$, $x \in [0,1]$. Veamos si converge puntualmente ó no. Sea $x \in [0,1]$.

1) Si $x = 0, 1$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} n^3 x^n (1-x) = 0$$

2) Si $x \in]0,1[$, como

$$\lim_{n\to\infty} n^3 x^n = 0$$

entonces:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = (1-x) \cdot \lim_{n\to\infty} n^3 x^n$$

$$= 0$$

Por tanto, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\underline{0}$ puntualmente en $[0,1]$. Veamos qué no lo hace uniformemente.

En efecto: sea $n \in \mathbb{N}$, como f_n es continua en $[0,1]$, y $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 0$, entonces al ser $f_n(x) \geqslant 0$, $\forall x \in [0,1]$, f_n alcanza su máximo en algún punto crítico. Veamos:

$$f_n'(x) = n^4 x^{n-1}(1-x) - n^3 x^n$$

$$= n^4 x^{n-1} - n^4 x^n - n^3 x^n$$

$$= 0$$

$$\Leftrightarrow x^n(n^4+n^3) = n^4 x^{n-1},$$ como $x \neq 0$:

$$\Rightarrow x = \frac{n^4}{n^4+n^3} = \frac{1}{1+1/n}$$

Así, f_n alcanza su máximo en $\frac{1}{1+1/n}$, el cuál es:

$$f_n\left(\frac{1}{1+1/n}\right) = n^3\left(\frac{1}{1+1/n}\right)^n\left(1-\frac{1}{1+1/n}\right)$$

$$= n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\cdot\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{n^3}{n+1}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{-1}$$

Como $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{-1}$, luego:

$$f_n\left(\frac{1}{1+1/n}\right) \geq \frac{n^3}{n+1}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\geq \frac{1}{4}$$

Por tanto:

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - \underline{0}(x)| \geq \left|f_n\left(\frac{1}{1+1/n}\right)\right|$$

$$\geq \frac{1}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Así, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ no converge a $\underline{0}$ uniformemente en $[0,1]$.

$\square$

d) Sea $x \in]0,1[$, entonces:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/n + x}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1/n + x} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\\ &= \frac{1}{x} \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

por tanto, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a $\underline{0}$ en $]0,1[$. Pero no converge uniformemente. En efecto: como f_n es continua en 0, para $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ $\exists\, \delta_n > 0$, $0 < \delta_n < 1$ tal que:

$$\begin{aligned}\text{Si } 0 < x < \delta_n &\Rightarrow |f_n(0) - f_n(x)| < \frac{1}{2}\\ &\Rightarrow |1 - f_n(x)| < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < f_n(x)\end{aligned}$$

por tanto:

$$\begin{aligned}\sup_{x\in]0,1[} |f_n(x) - \underline{0}(x)| &= \sup_{x\in]0,1[} |f_n(x)|\\ &\geq \frac{1}{2} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Luego $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ no converge uniformemente a $\underline{0}$ en $]0,1[$.

$\square$

2. **Encuentre** todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales la sucesión de funciones

$$f_n(x) = n^\alpha x(1-x^2)^n$$

es uniformemente convergente en $[0,1]$.

Sol.

Primero, veamos que f_n es continua en $[0,1]$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Sea $n \in \mathbb{N}$, como $f_n(0) = f_n(1) = 0$ y $f_n(x) \geq 0$, $\forall\, x \in [0,1]$, entonces f_n alcanza su máximo en algún punto crítico. Como:

$$\begin{aligned}f_n'(x) &= n^\alpha (1-x^2)^n - n^\alpha x \cdot n (1-x^2)^{n-1}(-2x)\\ &= n^\alpha \left((1-x^2)^n - 2x^2 n (1-x^2)^{n-1} \right)\\ &= 0\\ \Leftrightarrow\ (1-x^2)^n - 2x^2 n (1-x^2)^{n-1} &= 0\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (1-x^2)^{n-1}(1-x^2-2x^2n)=0, \text{ como } x\neq 1:$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{1}{1+2n} \Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{1+2n}}, \text{ pues } x\in\,]0,1[.$$

Por tanto, f_n alcanza su máximo en $\frac{1}{\sqrt{1+2n}}$, el cuál es:

$$f_n\left(1/\sqrt{1+2n}\right) = n^\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{1+2n}}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{1+2n}\right)^n$$

$$= n^\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{1+2n}}\right)\cdot\left(\quad\quad\right)^n$$

3. **Determine** si las sucesiones de funciones siguientes son o no uniformemente convergentes en los intervalos que se indican.

a) $f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}, \quad 0 \le x \le 1.$

b) $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}, \quad 0 \le x \le 1.$

c) $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx^2}, \quad 0 \le x \le 1.$

Sol.

a) Veamos si converge puntualmente. Sea $x \in [0,1]$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } x=0. \\ 0 & \text{si } 0<x\le 1. \end{cases} = f(x)$$

Probaremos que no lo hace uniformemente. En efecto: como f_n es continua en 0, $\forall n\in\mathbb{N}$, para $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, $\exists\, 0<\delta_n<1$ tq

$$\text{si } 0<x<\delta_n \Rightarrow |f_n(0)-f_n(x)| < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |1-f_n(x)| < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < f_n(x)$$

por lo tanto:

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)-f(x)| \ge |f_n(c)-f(c)|, \text{ con } 0<c<\delta_n$$

$$= |f_n(c)-0|$$

$$= f_n(c)$$

$$> \frac{1}{2}$$

Luego $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)-f(x)| \ge \frac{1}{2}$. Por tanto, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ no converge a f uniformemente.

$\square$

b) Veamos si converge puntualmente: sea $x\in[0,1]$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+nx}$$

$$= 0 = \underline{0}(x)$$

por tanto, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a $\underline{0}$ en $[0,1]$.

Veamos que lo hace uniformemente. Sea $n\in\mathbb{N}$, entonces:

$$\forall x\in[0,1],\ f_n(x)=\frac{x}{1+nx}$$

Como $f_n(x)\geq 0$, $\forall x\in[0,1]$, y f_n es continua en $[0,1]$ compacto, siendo diferenciable en $]0,1[$, encontremos sus puntos críticos para determinar si su máximo es $f_n(1)$ ó $f_n(c)$ donde $c\in]0,1[$:

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \frac{1}{1+nx}-\frac{x}{(1+nx)^2}\cdot n \\ &= \frac{1+nx-nx}{(1+nx)^2} \\ &= \frac{1}{(1+nx)^2}\neq 0,\ \forall x\in]0,1[\end{aligned}$$

Por tanto, f_n no tiene puntos críticos en $]0,1[$, así $f_n(1)$ es su máximo, i.e:

$$\begin{aligned} \frac{x}{1+nx} &\leq f_n(1) \\ &= \frac{1}{1+n} \end{aligned}$$

Sea $\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$ tq $\frac{1}{N+1}<\varepsilon$. Si $n\geq N$:

$$\begin{aligned} \sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)| &= \sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-\underline{0}(x)| \\ &= \sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)| \\ &= \frac{1}{1+n} \\ &\leq \frac{1}{1+N} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

por tanto:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-\underline{0}(x)|\leq\varepsilon$$

así, $\{f_n=\frac{x}{1+nx}\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a $\underline{0}$ en $[0,1]$.

$\square$

c) Veamos si $\{f_n(x)=\frac{nx}{1+nx^2}\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente en $[0,1]$. Sea $x\in[0,1]$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+nx^2}=x\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+nx^2}$$

Si $x=0$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+nx^2}=\lim_{n\to\infty}0=0$$

Si $x>0$:

$$x \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1+nx^2} = x \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}+x^2} = x \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}$$

Por tanto, sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada como:

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in]0,1] \end{cases}$$

Así, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a f en $[0,1]$, pero no uniformemente. Como:

$$\forall x \in]0,1],\ |f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{nx}{1+nx^2} - \frac{1}{x} \right|$$
$$= \left| \frac{nx^2 - 1 - nx^2}{x(1+nx^2)} \right|$$
$$= \frac{1}{x(1+nx^2)}$$

Y,

$$|f_n(0) - f(0)| = |0 - 0| = 0$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, tenemos entonces que:

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in]0,1]} \frac{1}{x(1+nx^2)} = +\infty$$

Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = +\infty$$

Así, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ no converge a f uniformemente en $[0,1]$.

$\square$

4. **Proporcione** contraejemplos en cada uno de los siguientes casos.

a) Una sucesión de funciones continuas que converja puntualmente a una función no continua.

b) Una sucesión de funciones continuas que converja puntualmente a una función continua pero nó uniformemente.

Sol.

a) Tome $\left\{ f_n = \frac{1}{1+nx} \right\}_{n=1}^{\infty}$ en $[0,1]$. Vemos que:

$$\forall x \in [0,1], \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}.$$

Así, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones continuas que converge puntualmente a $f \notin \mathcal{C}([0,1])$.

b) Tome $\{f_n = x^n(1-x^n)\}_{n=1}^{\infty}$. Converge puntualmente a $\underline{0} \in \mathcal{C}([0,1])$, pero no lo hace uniformemente (ver ejercicio 1).

$\square$

5. **Demuestre** que si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones tal que cada una es acotada y la sucesión converge uniformemente en algún conjunto X, entonces la sucesión de funciones es equiacotada o uniformemente acotada en X, es decir, existe $M \geq 0$ tal que

$$|f_n(x)| \leq M, \quad \forall x \in X \quad \text{y} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dem:

Sea $\varepsilon = 1 > 0$, como $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f, $\exists N \in \mathbb{N}$ $\ni$ si $n \geq N$:

$$N_\infty(f_n - f) \leq \varepsilon = 1.$$

$$\Rightarrow N_\infty(f_n) \leq 1 + N_\infty(f) \quad \ldots \quad (1)$$

Como el conjunto $\{N_\infty(f_m) \mid m \leq N\}$ es finito, su máximo M_0 existe. Sea $M = \text{máx}\{M_0, 1 + N_\infty(f)\}$, entonces:

Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $n > N$, por (1) $N_\infty(f_n) \leq 1 + N_\infty(f) \leq M$. Si $n \leq N \Rightarrow N_\infty(f_n) \leq M_0 \leq M$. Por tanto:

$$N_\infty(f_n) \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in X} |f_n(x)| \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow |f_n(x)| \leq M, \ \forall x \in X, \ y \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

con $M \geq 0$.

q.e.d.

6. Sean $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de funciones que convergen uniformemente en algún conjunto X.

   a) **Pruebe** que $\{f_n + g_n\}_{n=1}^{\infty}$ es uniformemente convergente en X.

   b) **Muestre** que si cada f_n y g_n son funciones acotadas en X, entonces $\{f_n g_n\}_{n=1}^{\infty}$ es uniformemente convergente en X.

Dem:

a) Sea $\varepsilon > 0$. Como $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergen uniformemente (digamos, a f y g, respectivamente) en X, $\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ $\ni$

$$n \geq N_1 \Rightarrow N_\infty(f_n - f) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \ y$$

$$m \geq N_2 \Rightarrow N_\infty(g_m - g) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$. Si $n \geq N$:

$$\Rightarrow N_\infty(f_n + g_n - f - g) \leq N_\infty(f_n - f) + N_\infty(g_n - g)$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

por tanto, $\{f_n + g_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a $f+g$ en $\bar{X}$.

$\square$

b) Sea $\varepsilon > 0$. Como $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergen uniformemente (digamos, a f y g, respectivamente) en $\bar{X}$, $\exists\ N_1, N_2 \geq N$ tq

$$n \geq N_1 \Rightarrow N_\infty(f_n - f) \leq \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2(1+N_\infty(g))}\right\}, \text{ y}$$
$$n \geq N_2 \Rightarrow N_\infty(g_n - g) \leq \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2(1+N_\infty(f))}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$. Si $n \geq N$:

$$N_\infty(f_n g_n - fg) \leq N_\infty(f_n g_n - f_n g) + N_\infty(f_n g - fg)$$
$$= \sup_{x \in \bar{X}} |f_n(x) g_n(x) - f_n(x) g(x)| + \sup_{x \in \bar{X}} |f_n(x) g(x) - f(x) g(x)|$$
$$\leq \sup_{x \in \bar{X}} |f_n(x)| \cdot \sup_{x \in \bar{X}} |g_n(x) - g(x)| + \sup_{x \in \bar{X}} |g(x)| \cdot \sup_{x \in \bar{X}} |f_n(x) - f(x)|$$
$$= N_\infty(f_n) \cdot N_\infty(g_n - g) + N_\infty(g) \cdot N_\infty(f_n - f)$$

por 1), $N_\infty(f_n) \leq 1 + N_\infty(f)$. Por tanto:

$$N_\infty(f_n g_n - fg) \leq (1 + N_\infty(f)) N_\infty(g_n - g) + (1 + N_\infty(g)) N_\infty(f_n - f)$$
$$\leq (1 + N_\infty(f)) \cdot \frac{\varepsilon}{2(1+N_\infty(f))} + (1 + N_\infty(g)) \cdot \frac{\varepsilon}{2(1+N_\infty(g))}$$
$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Por lo tanto, $\{f_n g_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a fg en $\bar{X}$.

$\square$

q.e.d.

7. **Demuestre** que si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones continuas de un espacio métrico compacto X en $\mathbb{R}$, entonces $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a alguna función f si f continua de $\bar{X}$ en $\mathbb{R}$.
y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$$

para toda sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergente a cualquier punto $x \in X$.

Dem:

$\Rightarrow)$ Sea $\varepsilon > 0$, $x \in X$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X que converge a x. Como $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f, $\exists\, N_1 \in \mathbb{N}$ / si $n \geq N_1$:

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x y f es continua, $\exists\, N_2 \in \mathbb{N}$ / si $n \geq N_2$:

$$|f(x_n) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por tanto: $\forall\, n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$:

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)|$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Luego: $\lim_{n \to \infty} f_n(x_n) = f(x)$.

$\Leftarrow)$

8. Sea

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x}.$$

Determine todos los valores de x en el dominio natural de f para los cuales la serie de funciones converge absolutamente. **Indique** en qué intervalos (contenidos en el dominio natural de f) dicha serie deja de converger uniformemente y en qué intervalos sí converge uniformemente. ¿Es f continua? ¿Es f acotada? **Justifique.**

No es necesario probar que f es continua.

9. **Determine** si es o no uniformemente convergente en $[0,1[$ la serie de funciones

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n.$$

(Aunque no se necesita para lo anterior) **calcule** también la suma puntual de la serie en $[0,1[$. Intentar criterio de Cauchy.

Sol

Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $m > n$. Veamos que $\forall x \in]0,1[$:

$$
\begin{aligned}
|S_n(x) - S_m(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{m} k x^k \right| \\
&\leq m \cdot \sum_{k=n+1}^{m} x^k \\
&= m \cdot \frac{x^{n+1} - x^{m+1}}{1-x} \\
&= m\, x^{n+1} \cdot \frac{1 - x^{m-n}}{1-x} \\
&\leq m \cdot \frac{x^{n+1}}{1-x} \leq m \cdot x^{n+1}
\end{aligned}
$$

Sea $\varepsilon > 0$, como $\lim_{n\to\infty} x^{n+1} = 0$, $\exists\, N_1 \in \mathbb{N}$ m si $n \geq N_1$: $x^{n+1} < \frac{\varepsilon}{N_2}$. en donde $N_2 \in \mathbb{N}$ m $\frac{1}{N_2} < \varepsilon$. Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$, entonces:

$$m > n \geq N \Rightarrow x^{n+1} < \frac{\varepsilon}{N_2} \quad y \quad \frac{1}{m} < \frac{1}{N} \leq \frac{1}{N_2}, \text{ luego:}$$

10. Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones monótonas en $[a, b]$ (f_n puede ser creciente para algunos valores de n y decreciente para otros) que converge puntualmente a una función f continua en $[a, b]$, **demuestre** que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a f uniformemente en $[a, b]$.

Sugerencia. Pruebe primero que f debe ser monótona. Suponiendo que f es creciente, deduzca que $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$. Dado $\varepsilon > 0$, considere una subdivisión de $[f(a), f(b)]$ por un número finito de puntos tal que la distancia entre dos puntos consecutivos sea menor que ε.

Dem:

Probaremos que f es monótona. Sean x y $\in [a,b]$, $x \leq y$.

Sean $C = \{n \mid f_n \text{ es no decreciente}\}$ y $D = \{n \mid f_n \text{ es no creciente}\}$. Tenemos 3 casos:

1) C es finito.

Si C es finito, $\exists\ N \in \mathbb{N} \ni N = \text{máx}\{C\}$. Por tanto, $\forall\ n \geq N+1$, $n \in D$. Así:

$$\lim_{n\to\infty} \left(f_n(x) - f_n(y)\right) = \lim_{n\to\infty} \left(f_{N+n}(x) - f_{N+n}(y)\right)$$

Como f_{N+n} es no creciente $\forall\ n \in \mathbb{N}$, entonces $x \leq y \Rightarrow f_{n+N}(x) \geq f_{n+N}(y)$, así $f_{N+n}(x) - f_{n+N}(y) \geq 0$. Por tanto:

$$f(x) - f(y) = \lim_{n\to\infty} \left(f_{N+n}(x) - f_{N+n}(y)\right) \geq 0$$

$$\Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

Así, f es monótona no creciente.

2) D es finito. De manera análoga a 1), se concluye que f es monótona no decreciente.

3) C y D son infinitos.

En este caso, probaremos que $f(x) = f(a)$, $\forall\ x \in [a,b]$, i.e f es la función constante de valor $f(a)$ (misma que es monótona).

Sea $x \in [a,b]$, y $\alpha : \mathbb{N} \to C$, $\beta : \mathbb{N} \to D$ biyecciones crecientes. Para $n \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$$a \leq x \Rightarrow f_{\alpha(n)}(a) \leq f_{\alpha(n)}(x) \quad \text{y} \quad f_{\beta(n)}(x) \leq f_{\beta(n)}(a)$$

Por tanto:

$$f(a) = \lim_{n\to\infty} f_{\alpha(n)}(a) \leq \lim_{n\to\infty} f_{\alpha(n)}(x) = f(x) = \lim_{n\to\infty} f_{\beta(n)}(x) \leq \lim_{n\to\infty} f_{\beta(n)}(a) = f(a)$$

Pues $\{f_{\alpha(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{f_{\beta(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ son subsucesiones de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ que deben converger a f. Por tanto:

$$f(x) = f(a)$$

Por 1) - 3), f es monótona.

Suponga que f es creciente, p.d: $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$.

a) Sea $x \in f([a,b])$, entonces $\exists\, c \in [a,b] \ni x = f(c)$. Como $a \leq c \leq b$ y f es creciente, entonces $f(a) \leq f(c) \leq f(b) \Rightarrow x \in [f(a), f(b)]$.

b) Si $x \in [f(a), f(b)]$, como f es continua, por el t. del val. int. $\exists\, c \in [a,b] \ni f(a) \leq f(c) \leq f(b)$, pues $f(a) \leq f(y) \leq f(b), \forall\, y \in [a,b]$. Luego $x = f(c) \in f([a,b])$.

Por a) y b), $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$.

Sea $\varepsilon > 0$. Considere:

$$B = \left\{ \left] f(x) - \frac{\varepsilon}{2}, f(x) + \frac{\varepsilon}{2} \right[\;\middle|\; x \in [a,b] \right\}$$

B es una cubierta abierta de $[f(a), f(b)]$, por ser compacto, $\exists\, x_1, x_2, \dots, x_m \in [a,b]$ tales que $a = x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_m = b$, y:

$$[f(a), f(b)] \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \left] f(x_i) - \frac{\varepsilon}{2}, f(x_i) + \frac{\varepsilon}{2} \right[$$

Como $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a f puntualmente, $\forall\, i \in [\![1, m]\!], \exists\, N_i \in \mathbb{N} \ni \forall\, n \geq N_i$:

$$|f_n(x_i) - f(x_i)| \leq \frac{\varepsilon}{2m}$$

Sea $x \in [a,b]$ y $n \geq N = \max\{N_i \mid i \in [\![1,m]\!]\}$. Como $f(x) \in [f(a), f(b)]$, $\exists\, i_0 \in [\![1,m]\!] \ni$

$$f(x) \in \left] f(x_{i_0}) - \frac{\varepsilon}{2}, f(x_{i_0}) + \frac{\varepsilon}{2} \right[$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_{i_0})| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Además, como $x \in [a,b]$ y f_n es monótona, $\exists\, k \in [\![1, m-1]\!] \ni x_k \leq x \leq x_{k+1}$ y $f_n(x)$ pertenece al intervalo de extremos $f_n(x_k), f_n(x_{k+1})$.

11. Sea X un espacio métrico. Si $\mathcal{E}$ es un subconjunto denso de $(\mathcal{BC}(X), \mathcal{N}_\infty)$, **demuestre** que $\mathcal{E}$ separa puntos en X.

Dem:

Sean $x, y \in X$, $x \neq y$. $\exists f \in BC(X)$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Sea $\varepsilon = \frac{|f(x)-f(y)|}{2} > 0$. Como $\mathcal{E}$ es denso en $(BC(X), N_\infty)$, $\exists g \in \mathcal{E}$ m

$$N_\infty(f-g) < \varepsilon$$

Si $f(x)-f(y) > 0$:

$$\Rightarrow |f(x)-g(x)| < \frac{f(x)-f(y)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{f(y)-f(x)}{2} < g(x)-f(x) < \frac{f(x)-f(y)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{f(y)+f(x)}{2} < g(x) < \frac{3f(x)-f(y)}{2}$$

y:

$$|f(y)-g(y)| < \frac{f(x)-f(y)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{f(y)-f(x)}{2} < g(y)-f(y) < \frac{f(x)-f(y)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3f(y)-f(x)}{2} < g(y) < \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

$$\therefore g(y) < g(x), \text{ i.e } g(x) \neq g(y).$$

Si $f(x)-f(y) < 0$, de manera análoga a lo anterior, obtenemos $g(x) \neq g(y)$. Por tanto, $\mathcal{E}$ separa puntos de $(BC(X), N_\infty)$.

q.e.d.

12. **Pruebe** que toda $f \in \mathcal{C}([0,1])$ puede ser uniformemente aproximada tanto como se quiera por polinomios tales que sus coeficientes impares son cero.

Dem:

Sea $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = \{p : [0,1] \to \mathbb{R} \mid p(x) = a_0 + \sum_{m=1}^{n} a_m x^{2m}, \text{ donde } n \in \mathbb{N},\ a_m \in \mathbb{R} \text{ y } x \in [0,1]\}$$

Claramente $\mathcal{E}$ es subespacio vectorial de $\mathcal{C}([0,1])$ y, un subálgebra de $\mathcal{C}([0,1])$, pues si $p, q \in \mathcal{E} \Rightarrow pq \in \mathcal{E}$.

Como $1:[0,1]\to\mathbb{R}$, $1(x)=1$, $\forall x\in[0,1]$, $1\in\mathcal{E}$, y, también si $x,y\in[0,1]$, $x\neq y$ $\exists\, p\in\mathcal{E}$, $p(x)=x^2$ $\forall x\in[0,1]$, entonces:

$$x\neq y,\ x,y\in[0,1]\Rightarrow x^2\neq y^2$$
$$\Rightarrow p(x)\neq p(y)$$

Por tanto, $\mathcal{E}$ separa puntos de $[0,1]$. Luego $\mathcal{E}$ es denso en $\mathcal{C}([0,1])$.

q.e.d.

13. Una función $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ se dice que es **impar** si $f(-x)=-f(x)$, $\forall x\in[-1,1]$. **Muestre** que toda función continua impar sobre $[-1,1]$ puede ser uniformemente aproximada tanto como se quiera por polinomios tales que todos sus coeficientes pares son cero.

Dem:

Sea $\varepsilon>0$ y $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ una función impar continua en $[-1,1]$. Como es continua y $[-1,1]$ es compacto, $\exists\, p:[-1,1]\to\mathbb{R}$ polinomio tal que:

$$N_\infty(f-p)\leq\frac{\varepsilon}{2}$$

Donde $p(t)=\sum_{i=0}^{m}a_i t^i$, $\forall t\in[-1,1]$. Sea $x\in[-1,1]$, entonces:

$$\begin{aligned}
f(x)-p(x)&=-f(-x)-\sum_{i=0}^{m}a_ix^i\\
&=-f(-x)-\sum_{i\ \text{par}}^{m}a_ix^i-\sum_{i\ \text{impar}}^{m}a_ix^i\\
&=-f(-x)-\sum_{i\ \text{par}}^{m}a_i(-x)^i+\sum_{i\ \text{impar}}^{m}a_i(-x)^i\\
&=-f(-x)+\sum_{i\ \text{par}}^{m}a_i(-x)^i+\sum_{i\ \text{impar}}^{m}a_i(-x)^i-2\sum_{i\ \text{par}}^{m}a_i(-x)^i
\end{aligned}$$

Si $p'(x)=\sum_{i\ \text{par}}^{m}a_ix^i$, entonces:

$$f(x)-p(x)=-f(-x)+p(-x)-2p'(-x),\ \forall x\in[-1,1]$$

Por tanto:

$$N_\infty(f-p)=N_\infty(-f+p-2p')=N_\infty(2p'-p+f)$$

Luego:

$$\begin{aligned}
N_\infty(2p')&=N_\infty(2p'-p+f-f+p)\\
&\leq N_\infty(2p'-p+f)+N_\infty(f-p)
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow N_\infty(p') \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Veamos que $p-p'$ es un polinomio con coeficientes impares, y además:

$$N_\infty(f-p+p') \leq N_\infty(f-p) + N_\infty(p')$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \varepsilon$$

Lo cuál prueba el resultado.

q.e.d.

14. **Demuestre** que el espacio de Banach $(\mathcal{C}([0,1]), \mathcal{N}_\infty)$ es separable.

Dem:

Sea:

$$\mathcal{E} = \{p : [0,1] \to \mathbb{R} \mid p = a_0 + \sum_{n=1}^{n} a_n x^n, \text{ con } a_i \in \mathbb{Q}, i \in [\![0,n]\!] \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$$

probaremos que $\mathcal{E}$ es denso en $\mathcal{C}([0,1])$. Claramente $\mathcal{E}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{C}([0,1])$ sobre $\mathbb{Q}$, y es un subálgebra, pues si $p, q \in \mathcal{E} \Rightarrow pq \in \mathcal{E}$.

Además $\underline{1} \in \mathcal{E}$, y separa puntos de $[0,1]$. En efecto: como $p(x) = 1 \cdot x$, $\forall x \in [0,1]$ cumple que $p \in \mathcal{E}$, para $x, y \in [0,1]$, $x \neq y$:

$$x \neq y \Rightarrow p(x) \neq p(y)$$

Por tanto, $\mathcal{E}$ es denso en $\mathcal{C}([0,1])$. Pero $\mathcal{E}$ es numerable (se probó en análisis I), por tanto, $(\mathcal{C}([0,1]), \mathcal{N}_\infty)$ es separable.

q.e.d.

15. Sean X y Y dos espacios métricos compactos. Si $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ es continua, **pruebe** que para cada $\varepsilon > 0$ existen funciones continuas $g_1, \ldots, g_n : X \to \mathbb{R}$ y $h_1, \ldots, h_n : Y \to \mathbb{R}$ tales que

$$\sup_{(x,y) \in X \times Y} \left| f(x,y) - \sum_{i=1}^{n} g_i(x) h_i(y) \right| \leq \varepsilon \ .$$

Como $\underline{X} \times \underline{Y}$ es compacto (por ser $\underline{X}$ y $\underline{Y}$ compactos), para probar el resultado, basta con probar que:

$$\mathcal{E} = \{\sum_{i=1}^{n} g_i \cdot h_i : \underline{X} \times \underline{Y} \to \mathbb{R} \mid g_i \cdot h_i(x,y) = g_i(x) h_i(y), \forall (x,y) \in \underline{X} \times \underline{Y}, \text{ con } g_i \text{ y } h_i \text{ funciones continuas}, \forall i \in [\![1,n]\!]; n \in \mathbb{N}\}$$

Cumple $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{C}(\underline{X} \times \underline{Y})$, $\mathcal{E}$ es un subálgebra que separa puntos de $\underline{X} \times \underline{Y}$ y, contiene a $\underline{1} : \underline{X} \times \underline{Y} \to \mathbb{R}$, $\underline{1}(x,y) = 1$, $\forall (x,y) \in \underline{X} \times \underline{Y}$.

a) Sea $g \in \mathcal{E}$, digamos $g = \sum_{i=1}^{m} g_i h_i$, $(x,y) \in \underline{X} \times \underline{Y}$ y $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\underline{X} \times \underline{Y}$ que converge a (x,y)

Entonces $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to x$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \to y$. Como g_i, h_i son continuas, $\forall i \in [\![1,m]\!]$:

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} g_i(x_n) = g_i(x) \text{ y } \lim_{n\to\infty} h_i(x_n) = h_i(x)$$

$\forall i \in [\![1,m]\!]$. Por tanto:

$$g(x_n,y_n) = \left(\sum_{i=1}^{m} g_i h_i\right)(x_n,y_n) = \sum_{i=1}^{m} g_i h_i(x_n,y_n) = \sum_{i=1}^{m} g_i(x_n) h_i(y_n)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} g(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} g_i(x_n) h_i(y_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \lim_{n\to\infty} (g_i(x_n) h_i(y_n))$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \lim_{n\to\infty} g_i(x_n) \cdot \lim_{n\to\infty} h_i(y_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{m} g_i(x) h_i(y)$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{m} g_i h_i\right)(x,y)$$
$$= g(x,y)$$

Así, g es continua $\Rightarrow \mathcal{E} \subseteq \mathcal{C}(\bar{X} \times \bar{Y})$

b) Veamos que $\mathcal{E}$ es subálgebra de $\mathcal{C}(\bar{X}\times\bar{Y})$. Sean $g, h \in \mathcal{E}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, con $g = \sum_{i=1}^{n} g_i h_i$ y $h = \sum_{j=1}^{m} f_j l_j$, entonces: $\forall (x,y) \in \bar{X} \times \bar{Y}$:

$$(g+\alpha h)(x,y) = g(x,y) + \alpha h(x,y)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} g_i(x) h_i(y) + \alpha \sum_{j=1}^{m} f_j(x) l_j(y)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} g_i(x) h_i(y) + \sum_{j=1}^{m} \alpha f_j(x) \cdot l_j(y)$$

Luego, $g+\alpha h \in \mathcal{E}$, pues es suma finita de funciones continuas $(\alpha f_j \in \mathcal{C}(\bar{X}), \forall j \in [\![1,m]\!])$.

Probaremos ahora que $gh \in \mathcal{E}$. Procederemos por inducción sobre n.

1) $n=1$. En este caso:

$$gh = \left(\sum_{i=1}^{1} g_i h_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} f_j l_j\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{m} (g_1 \cdot h_1) \cdot (f_j \cdot l_j)$$
$$= \sum_{j=1}^{m} (g_1 f_j) \cdot (h_1 l_j)$$

donde $g_1 f_j$ es continua en $\bar{X}$ y $h_1 l_j$ en $\bar{Y}$, $\forall j \in [\![1,m]\!]$. Así $gh \in \mathcal{E}$.

2) Suponga que se cumple para $n=K$.

3) Probaremos que se cumple para $n=K+1$. En efecto:

$$gh = \left(\sum_{i=1}^{K+1} g_i h_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{m} f_j l_j\right)$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{K} g_i h_i + g_{K+1} h_{K+1}\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{m} f_j l_j\right)$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{K} g_i h_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{m} f_j l_j\right) + g_{K+1} h_{K+1}\cdot\left(\sum_{j=1}^{m} f_j l_j\right)$$

Por 2) y 3), $gh \in \mathcal{E}$.

Por lo anterior, $\mathcal{E}$ es un subálgebra de $\mathcal{C}(\overline{X}\times\overline{Y})$.

c) $\mathcal{E}$ separa puntos de $\overline{X}\times\overline{Y}$. Sean $(x,y), (u,v) \in \overline{X}\times\overline{Y}$ tales que $(x,y)\neq(u,v)$. Existen

$g(x) = x$

Notas:

1) Sea $x \in \mathbb{R}$ m $|x|<1$. Veamos que $\lim_{n\to\infty} nx^n = 0$. En efecto: si $x>0$, $\exists\, t \in \mathbb{R}$ tal que:

$$x = \frac{1}{t+1}$$

Donde:

$$(1+t)^n = 1+nt+\frac{n(n-1)}{2}t^2+\dots \geq 1+nt+\frac{n(n-1)}{2}t^2$$

$$\Rightarrow x^n = \frac{1}{(1+t)^n} \leq \frac{1}{1+nt+\frac{n(n-1)}{2}t^2}$$

Por tanto:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} nx^n \leq \lim_{n\to\infty} n\frac{1}{1+nt+\frac{n(n-1)}{2}t^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}+t+\frac{(n-1)}{2}t^2}$$

$$= 0$$

i.e, $\lim_{n\to\infty} nx^n = 0$. Si $x=0$ el resultado es inmediato, si $x<0$, se hace de manera análoga.