10° Escuela Oaxaqueña de Matemáticas
Notas

Cristo Daniel Alvarado

7 de enero de 2025

Capítulo 1

Básicos de Teoría de Grupos y Acciones de Grupos

Estudiaremos en todo el curso algo llamado la **teoría geométrica de grupos**. Esta teoría está en la intersección de varias áreas, como son la teoría de grupos, la topología algebraica y la geometría diferencial.

Veremos básicos de teoría de grupos (junto con cosas de acciones de grupos) y cosas de topología algebraica.

§1.1 Grupos Libres

La motivación de grupos libres es que cuando tenemos dos espacios vectoriales V y W, para definir un morfismo f entre ambos espacios basta con definirlo en la base de V. Sin embargo, en grupos resulta más complicado hacer esta definición para poder definir el morfismo.

Definición 1.1.1
Sea S un conjunto y $\hat{S}$ un conjunto disjunto de S y biyectivo a S. Una **palabra** en $S \cup \hat{S}$ es una sucesión finita en $S \cup \hat{S}$. Denotamos por $A(S)$ al conjunto de todas las palabras en S.

Observación 1.1.1
Lo último en la definición anterior quiere decir que tomemos una función biyectiva $\varphi : S \to \hat{S}$.

Proposición 1.1.1
Sea S un conjunto, entonces $A(S)$ es un monoide con la operación de concatenación. Tal que:

1. La palabra vacía $\emptyset = \varepsilon$ es el elemento neutro.
2. La operación es asociativa.

Demostración:

■

Pero, ¿cómo agregamos inversos?

Definición 1.1.2
Sea S un conjunto. Definimos la relación $\sim$ en $A(S)$ como la generada por:

$$\forall x, y \in A(S) \forall s \in S xs\hat{s}y \sim xy;$$
$$\forall x, y \in A(S) \forall s \in S x\hat{s}sy \sim xy;$$

Proposición 1.1.2
El espacio cociente $F(S) = A[S]/\sim$ es un grupo con la operación concatenación $[w] \cdot [v] = [wv]$. $F(S)$ es llamado **grupo libre**.

Demostración:

■

Ejemplo 1.1.1
Si $S = \{a\}$, entonces $F(S) = \{, ..., \hat{a}\hat{a}\hat{a}, \hat{a}\hat{a}, \hat{a}, \emptyset, a, aa, aaa, ...\} \cong \mathbb{Z}$.

En el ejemplo anterior la concatenación de palabras se denotará simplemente por potencia y, al elemento asociado en $\hat{S}$ se le denotará por s^{-1}.

Ejemplo 1.1.2
Si $|S| > 1$, entonces $F(S)$ no es abeliano.

Proposición 1.1.3 (Propiedad Universal de Grupos Libres)
Sea $F(S)$ el grupo libre generado por S. Para todo grupo H y toda función $f : S \to H$ existe un único homomorfismo de grupos $\hat{f} : F(S) \to H$ tal que el diagrama:

es conmutativo, esto es que:

$$\hat{f} \circ \iota = f$$

Demostración:

■

Definición 1.1.3
Sea $n \in \mathbb{N}$ y $S = \{x_1, ..., x_n\}$ con $x_i \neq x_j$ para todo $i, j \in [|1, n|]$ con $i \neq j$. Enotnces, escribimos por F_n al **grupo libre generado por** S y F_n es llamado **grupo libre de rango** n.

§1.2 Generadores y Relaciones

Definición 1.2.1
Sea G un grupo y $S \subseteq G$. El subgrupo normal generado por S es el subgrupo normal más pequeño que contiene a S, denotamos este conjunto por: $\langle S \rangle^{\triangleleft} = \langle \langle S \rangle \rangle$.

Ejemplo 1.2.1
Si G es un grupo abeliano, entonces para todo $S \subseteq G$:

$$\langle S \rangle^{\triangleleft} = \langle S \rangle$$

Definición 1.2.2
Sea S un conjunto y considere el conjunto de palabras de $S\cup S^{-1}$ denotado por $(S\cup S^{-1})^*$. Entonces, para $R\subseteq S\cup S^{-1}$ definimos:

$$\langle S|R\rangle = F(S)/\langle R\rangle^{\triangleleft}$$

Si G es grupo con $G\cong\langle S|R\rangle$, entonces el par (S,R) es llamado una **presentación de** G.

Ejemplo 1.2.2
Para todo $n\in\mathbb{N}$, $\langle x|x^n\rangle\cong\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Ejemplo 1.2.3
$\mathbb{Z}\cong\langle a|\emptyset\rangle$.

Ejemplo 1.2.4
Considere F_n y $\mathbb{Z}^n$. Ambos no son isomorfos ya que F_n no necesariamente es abeliano. Sea:

$$R=\left\{x_ix_jx_i^{-1}x_j^{-1}\Big|x_i,x_j\in F_n\right\}\subseteq F_n$$

entonces:

$$\mathbb{Z}^n\cong F_n/\langle R\rangle^{\triangleleft}$$

tal que:

$$(0,)$$

Proposición 1.2.1 (**Propiedad Universal de la presentación de Grupos**)

Demostración:

■

El problema de la palabra: Sea $G=\langle S|R\rangle$, dar un algoritmo que determine cuando una palabra representa una palabra trivial o no.

Definición 1.2.3
Sea G un grupo. Decimos que G es **finitamente presentado** (abreviado por f.p.) si existe un conjunto finito S y un conjunto finito $S\subseteq(S\cup S^{-1})^*$ tal que:

$$\langle S|R\rangle\cong G$$

Ejemplo 1.2.5
$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^n$ y $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ son f.p.

§1.3 Producto Libre de Grupos

Definición 1.3.1
Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía de grupos. El **producto libre de** $\{G_i\}_{i\in I}$, denotado por:

$$*_{i\in I}G_i$$

es el conjunto Ω de todas las palabras reducidas $g_1\cdots g_n$, donde $g_i\in G$ y $g_i\neq e_i$. Además, g_i y g_{i+1} no están en el mismo G_j.

Proposición 1.3.1
Ω con la operación de concatenación y reducción es un grupo.

Demostración:

■

Ejercicio 1.3.1
Si $G_i=\langle S_i|R_i\rangle$, entonces $*_{i\in I}G_i=\langle\bigcup_{i\in I}S_i|\bigcup_{i\in I}R_i\rangle$.

Demostración:

■

Ejercicio 1.3.2
Investigar la propiedad universal del producto libre de grupos.

§1.4 Pushout de Grupos

Supongamos que tenemos el siguiente diagrama de grupos:

¿será posible construir el grupo L junto con los morfismos β_1 y β_2?

Resulta que esto también satisface una propiedad universal.

Definición 1.4.1
Sean A un grupo y $\alpha_i:A\to G_i$, $i=1,2$ morfismos de grupos. Un grupo G junto con morfismos $\beta_i:G_i\to G$ satisfaciendo:

$$\beta_1\circ\alpha_1=\beta_2\circ\alpha_2$$

es llamado un **pushout de** G_1 **y** G_2 sobre A si la siguiente propiedad universal se satisface:

§1.5 Acciones de Grupos

Definición 1.5.1
Sean G un grupo y X un conjunto. **Una acción de** G **en** X es una función binaria $G\times X\to X$, $(g,x)\mapsto gx$ que satisface dos axiomas:

1. $ex=x$.
2. $\forall g,h\in G$, $g(hx)=(gh)x$, para todo $x\in X$.

Esta acción se denota por $G\curvearrowright X$.

Ejemplo 1.5.1
$\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}$ dada por $(n, x) \mapsto n + x$.

Esta acción se puede generalizar a una $\mathbb{Z}^n \curvearrowright \mathbb{R}^n$, tal que $(\vec{n}, \vec{x}) \mapsto \vec{n} + \vec{x}$.

Estas dos acciones cumplen los dos axiomsa de la definición anterior.

Ejemplo 1.5.2
$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{S}^2$. Tomando $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle a|a^2\rangle$, hacemos $ax = -x$ para todo $x \in \mathbb{S}^2$. Esta acción es llamada **acción antipodal**.

Ejemplo 1.5.3
$GL(n, \mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}^n$ tal que $(A, \vec{x}) \mapsto A\vec{x}$ el producto de matrices usual viendo a $\vec{x}$ como vector columna.

Observación 1.5.1
Una acción $G \curvearrowright X$ es lo mismo que un morfismo de grupos $\varphi : G \to \mathrm{Aut}\,(X)$.

Dependiendo de X, podemos pedir diferentes cosas para $\mathrm{Aut}\,(X)$. En el caso anterior hacemos $g \mapsto \varphi_g$ donde $\varphi_g : X \to X$ es tal que $x \mapsto \varphi_g(x) = gx$.

De forma viceversa, podemos definir un morfimso de grupos a partir de una acción de grupos.

Definición 1.5.2
Sea $G \curvearrowright X$. Dado $x \in X$ definimos la **órbita de** x como:

$$\mathcal{O}_x = \left\{ gx \middle| g \in G \right\}$$

Ejemplo 1.5.4
En la acción $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}$

Definición 1.5.3
Dada una acción de grupos $G \curvearrowright X$, definimos el **espacio cociente** X/G como el espacio cociente generado a partir de la relación $\sim$ dada por:

$$x \sim y \text{ si y sólo si } \exists g \in G \text{ tal que } y = gx$$

Ejemplo 1.5.5
Si $\mathbb{Z}^2 \curvearrowright \mathbb{R}^2$, entonces el espacio $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = \mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Ejemplo 1.5.6
En la acción $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{S}^2$, el espacio resulta que $\mathbb{S}^2/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{R}P^2$.

Capítulo 2

Gráficas y Árboles

§2.1 Básicos

Observación 2.1.1
En lo que sigue, todas las gráficas serán no dirigidas, simples y sin lazos.

Que sean no dirigidas es que las aristas no tienen dirección, que sean simples es que no haya más de una arista uniendo dos vértices y que no tengan lazos es que un vértice no sea unido hacia sí mismo por una arista.

Definición 2.1.1
Sea A un conjunto, se define el conjunto de **k-tuplas de** A, denotado por $[A]^k$, como el conjunto de todos los subconjuntos de A de cardinalidad k.

Definición 2.1.2
Una **gráfica** es un par $G = (V, E)$ de conjuntos disjuntos, donde V es un conjunto no vacío de **vértices** o **nodos** V y un conjunto E de **aristas** tal que $E \subseteq [V]^2$.

Ejemplo 2.1.1
Considere la gráfica $G = (V, E)$ donde $V = \{a, b, c, d\}$ y $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$.

Definición 2.1.3
Sea (V, E) una gráfica.

1. Decimos que dos vértices $v, v' \in V$ son **vecinos** o **adyacentes** si están unidos por una arista, es decir si $\{v, v'\} \in E$.

2. El número de vecinos de un vértice v es el **grado del vértice**, denotado por $\deg(v)$.

3. Si el grado de todos los vértices de una gráfica es el mismo, decimos que la gráfica es **regular**.

Definición 2.1.4
Una gráfica se dice **completa** si todos los vértices son vecinos unos de otros (salvo él mismo).

Ejemplo 2.1.2
$(\{a,b\},\{\{a,b\}\})$ es completa y regular.

$(\{a,b,c\},\{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\})$ es completa y regular.

$(\{a,b,c,d\},\{\{a,b\},\{b,c\},\{c,d\},\{d,a\}\})$ no es completa y pero sí es regular.

Definición 2.1.5
Sean X y Y gráficas.

1. Una función $f : V(X) \to V(Y)$ es de **gráficas** si envía aristas en aristas, es decir para todo $\{v,w\} \in E(X) \Rightarrow \{f(v), f(w)\} \in E(Y)$.
2. Decimos que X y Y son **isomorfas** si existe una función de gráficas que es biyectiva.

Definición 2.1.6
Sea X una gráfica. Un **camino de longitud** $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ **en** X es una sucesión de vértices $v_0, v_1, ...$ tal que $v_i \neq v_j$ si $i \neq j$ y $\{v_i, v_{i+1}\} \in E(X)$.

Si $n < \infty$, decimos que v_0 y v_n son unidos por un camino.

1. Decimos que X es **conexo** si cualesquiera dos vértices están unidos por un camino.
2. Sea $n \in \mathbb{N}$. Un **ciclo** de longitud n es un camino $v_0, ..., v_{n-1}$ en X con $\{v_{n-1}, v_0\} \in X$.

Definición 2.1.7
Decimos que una gráfica X es un **árbol** si es conexa y no tiene ciclos.

Proposición 2.1.1
Una gráfica es un árbol si y sólo si para cualesquiera dos vértices existe un único camino que une a ambos vértices.

Demostración:
Ejercicio. ■

Definición 2.1.8
Un grupo G **actúa libremente en un conjunto** X si $g \cdot x \neq x$ para todo $g \in G \setminus \{e_G\}$.

Teorema 2.1.1
Un grupo G actúa libremente en un árbol si y sólo si G es grupo libre.

Demostración:
Esto será inmediata después de que veamos la parte de topología algebraica. ■

Naturalmente surge la siguiente pregunta: ¿qué pasa si relajamos la condición de actuar libremente? ¿qué tipos de grupos pueden aparecer? Resulta que hay un teorema que enuncia lo que sucede en esta sucesión y aparecen productos libres de grupos, pushouts de grupos y grupos HNN. Esto es conocido como la **teoría de Basser-Serre**.

Definición 2.1.9
Una n-**variedad** es un espacio topológico (X,τ) que localmente es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 2.1.3
Ejemplos de 3-variedades son $\mathbb{T}^3=\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$, $\mathbb{R}^3$, cualquier abierto de $\mathbb{R}^3$, una superficie Σ producto con $\mathbb{S}^1$ es también una 3-variedad.

Resulta que hay un teorema que si, tomamos una 3-variedad M^3, podemos ver a:

$$M^3=M_1\#M_2\#\cdots\#M_r$$

(donde se está haciedo aquí suma conexa). Va a resultar que:

$$\pi_1(M^3)=\pi_1(M_1)*\pi_1(M_2)*\cdots*\pi_1(M_r)$$

es el producto libre de estos grupos.

Capítulo 3

Ejercicios y Problemas Teoría de Grupos

§3.1 Preliminares Teoría de Grupos

Ejercicio 3.1.1
Supongamos que G es un grupo que tiene un subgrupo de índice finito H. Demuestra que G tiene un subgrupo normal de índice finito.

Demostración:
Sea:

$$N = \langle H \rangle^{\triangleleft}$$

tenemos los siguientes subgrupos de G:

$$H < N < G$$

que satisfacen (por ser el índice multiplicativo):

$$[G : H] = [G : N][N : H]$$

como $[G : H] < \infty$, se sigue que $[G : N] < \infty$, con lo que N es el subgrupo normal buscado. ■

Ejercicio 3.1.2
¿Cuál es el grupo de automorfismos del grupo aditivo $\mathbb{Z}$?

Solución:
Considere al grupo de automorfismos del grupo aditivo $\mathbb{Z}$, digamos:

$$A = \mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z}) = \left\{ f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \middle| f \text{ es isomorfismo} \right\}$$

Afirmamos que $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ donde $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ es el grupo aditivo de los enteros módulo 2. En efecto, afirmamos que:

$$\mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z}) = \{\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}, -\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}\}$$

donde $\mathbb{1}_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ es la identidad de $\mathbb{Z}$ y $-\mathbb{1}_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ es tal que $-\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}\,(m) = -m$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. En efecto, es claro que $\{\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}, -\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}\} \subseteq \mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z})$.

Sea ahora $f \in \mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z})$, se tiene que:

$$f(m) = f(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{m\text{-veces}}) = \underbrace{f(1) + \cdots + f(1)}_{m\text{-veces}} = mf(1)$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. De forma análoga se demuestra que:

$$f(-m) = -mf(1), \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Así que:

$$f(m) = mf(1), \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

por lo que f está únicamente determinada por su valor en 1. Como $\mathbb{Z}$ tiene únicamente dos generadores (por ser un grupo cíclico infinito), al ser f automorfismo debe suceder que $\mathbb{Z} = \langle f(1) \rangle$, así que $f(1) = 1$ ó $f(1) = -1$, es decir que:

$$\begin{aligned} f(m) &= mf(1) \\ &= \begin{cases} m & \text{si } f(1) = 1 \\ -m & \text{si } f(1) = -1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}}(m) & \text{si } f(1) = 1 \\ -\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}(m) & \text{si } f(1) = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

es decir, que $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}}$ o $f = -\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}$. Por tanto, $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z}) = \{\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}, -\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}\}$. Para la otra parte, es inmediato que el grupo $\{\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}, -\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}\}$ con la composición de funciones es isomorfo al grupo aditivo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. □

Ejercicio 3.1.3
Supongamos que tenemos una sucesión exacta corta de grupos:

$$1 \to N \to G \to K \to 1$$

demuestra que si N y K son grupos finitamente generados, entonces G es finitamente generado.

Demostración:

Al tenerse la sucesión exacta corta de grupos, estamos diciendo que existen homomorfismos $f_0 : \langle 1 \rangle \to N$, $f_1 : N \to G$, $f_2 : G \to K$ y $f_3 : K \to \langle 1 \rangle$ tales que:

$$\mathrm{Im}\,(f_{i-1}) = \ker\,(f_i)\,, \quad \forall i = 1, 2, 3$$

En particular, notemos que f_1 es monomorfismo y que f_2 es epimorfismo, ya que:

$$\ker\,(f_1) = \mathrm{Im}\,(f_0) = \langle e_N \rangle$$

siendo e_N la identidad del grupo N y, además:

$$\mathrm{Im}\,(f_2) = \ker\,(f_3) = K$$

por lo que se tiene lo afirmado.

Supongamos ahora que N y K son finitamnete generados, entonces existen elementos $n_1, ..., n_m \in N$ y $k_1, ..., k_l \in K$ tales que:

$$N = \langle n_1, ..., n_m \rangle \quad \text{y} \quad K = \langle k_1, ..., k_l \rangle$$

Como f_3 es epimorfismo, entonces del Primer Teorema de Isomorfismo se sigue que:

$$K \cong G/\ker(f_3) = G/\mathrm{Im}\,(f_2) = G/N'$$

donde $N' = f_2(N)$.

Afirmamos que:

$$G = \langle f_1(n_1), ..., f_1(n_m), f_2^{-1}(k_1), ..., f_2^{-1}(k_l) \rangle$$

■

Ejercicio 3.1.4
Demuestra que en el producto semidirecto $N \rtimes_\varphi H$, H es un subgrupo normal si y sólo si φ es el homomorfismo trivial.

Demostración:
Recordemos que el producto semidirecto $N \rtimes_\varphi H$ es el grupo $N \times H$ dotado de la operación:

$$(n,h)(n',h') = (n\varphi_h(n'), hh')$$

donde $\varphi : H \to \mathrm{Aut}\,(N)$ es un homomorfismo tal que $h \mapsto \varphi_h$. El elemento neutro de este grupo es (e_N, e_H), donde cada elemento tiene como inverso:

$$(n,h)^{-1} = \left((\varphi_{h^{-1}}(n))^{-1}, h^{-1}\right)$$

Sean $(n_1, h_1) \in N \rtimes_\varphi H$ y $h \in H$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
(n_1,h_1)(e_N,h)(n_1,h_1)^{-1} &= (n_1,h_1)(e_N,h)\left((\varphi_{h_1^{-1}}(n_1))^{-1}, h_1^{-1}\right)\\
&= (n_1\varphi_{h_1}(e_N), h_1h)\left((\varphi_{h_1^{-1}}(n_1))^{-1}, h_1^{-1}\right)\\
&= (n_1\varphi_{h_1}(e_N), h_1h)\left((\varphi_{h_1^{-1}}(n_1))^{-1}, h_1^{-1}\right)\\
&= (n_1e_N, h_1h)\left((\varphi_{h_1^{-1}}(n_1))^{-1}, h_1^{-1}\right)\\
&= (n_1, h_1h)\left((\varphi_{h_1^{-1}}(n_1))^{-1}, h_1^{-1}\right)\\
&= \left(n_1\varphi_{h_1h}\left((\varphi_{h_1^{-1}}(n_1))^{-1}\right), h_1hh_1^{-1}\right)\\
&= \left(n_1\varphi_{h_1h}\left((\varphi_{h_1^{-1}}(n_1^{-1}))\right), h_1hh_1^{-1}\right)\\
&= \left(n_1\varphi_{h_1hh_1^{-1}}\left(n_1^{-1}\right), h_1hh_1^{-1}\right)
\end{aligned}$$

pues, $\varphi_{h_1}(e_N) = e_N$ y por ser $h \mapsto \varphi_h$ homomorfismo.

$\Rightarrow$): Suponga que H es un subgrupo normal de $N \rtimes_\varphi H$, esto es que el grupo H visto como subgrupo de $N \rtimes_\varphi H$:

$$H = \left\{(e_N, h)\middle| h \in H\right\}$$

es subgrupo normal de $N \rtimes_\varphi H$. Como es normal, se sigue que:

$$(n_1,h_1)(e_N,h)(n_1,h_1)^{-1} \in H$$

para todo $(n_1, h_1) \in N \rtimes_\varphi H$ y $h \in H$, por lo que:

$$\left(n_1\varphi_{h_1hh_1^{-1}}\left(n_1^{-1}\right), h_1hh_1^{-1}\right) \in H$$

nuevamente, para todo $(n_1, h_1) \in N \rtimes_\varphi H$ y $h \in H$. En particular:

$$n_1\varphi_{h_1hh_1^{-1}}\left(n_1^{-1}\right) = e_N$$

por lo que para todo $n \in N$ y $h \in H$:

$$n^{-1}\varphi_h\left(n\right) = e_N \Rightarrow \varphi_h(n) = n$$

es decir, que $\varphi_h = \mathbb{1}_H$, por lo que $h \mapsto \varphi_h$ es el homomorfismo trivial.

$\Leftarrow$) : Suponga que φ es trivial, se sigue que:

$$
\begin{aligned}
(n_1,h_1)(e_N,h)(n_1,h_1)^{-1} &= \left(n_1\varphi_{h_1hh_1^{-1}}\left(n_1^{-1}\right),h_1hh_1^{-1}\right)\\
&= (n_1\mathbb{1}_H(n_1^{-1}),h_1hh_1^{-1})\\
&= (n_1n_1^{-1},h_1hh_1^{-1})\\
&= (e_N,h_1hh_1^{-1})\in H
\end{aligned}
$$

para todo $(n_1,h_1)\in N\rtimes_\varphi H$ y $h\in H$, por lo que H es normal en $N\rtimes_\varphi H$. ■

Ejercicio 3.1.5
Demuestra que el producto libre en n generadores F_n es isomorfo al producto libre de n copias de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}*\mathbb{Z}*\cdots*\mathbb{Z}$.

Demostración:

■

Ejercicio 3.1.6
Demuestra que el producto libre $G*H$ de grupos no triviales H y G tiene centro trivial.

Demostración:
Sean G y H grupos no triviales. Considere $G*H$ su producto libre. El centro de $G*H$ se define por:

$$
Z(G*H)=\left\{x\in G*H\middle|xy=yx,\forall y\in G*H\right\}
$$

Sea $u\in Z(G*H)$, se tiene que:

$$
ux=xu,\quad \forall x\in G*H
$$

como G y H son no triviales, podemos tomar $u=gh$ donde $g\in G\setminus\{e_G\}$ y $h\in H\setminus\{e_H\}$. Se sigue así que:

$$
ugh=ghu
$$

Si $u\neq e_{G*H}$, entonces existirían $x_1,...,x_n\in G\cup H$ (alternándose un elemento con otro estando uno en G y otro en H) junto con $m_1,...,m_n\in\mathbb{Z}$ tales que:

$$
u=x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}
$$

así que:

$$
x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}gh=ghx_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}
$$

reduciendo ambas palabras resulta que x_n está en G y H a la vez, cosa que no puede suceder ya que ello implicaría que $x_i\in G\cap H$ para todo $i=1,...,n$. Por tanto, $u=e_{G*H}$. ■

Ejercicio 3.1.7
Demuestra que $\mathbb{Z}_2*\mathbb{Z}_2$ es isomorfo a $\mathbb{Z}\rtimes\mathbb{Z}_2$.

Demostración:

■

Ejercicio 3.1.8
Denotemos por F_n al grupo libre en n generadores. Demuestre que F_n es isomorfo a F_m si y sólo si $n=m$.

Demostración:

Como F_n es grupo libre en n generadores y F_m lo es en m, tomamos $x_1, ..., x_n$ y $y_1, ..., y_m$ tales que:

$$F_n =$$

$\Rightarrow)$: Supongamos que F_n es isomorfo a F_m. ■

Ejercicio 3.1.9
Demuestra que todo grupo admite una presentación.

Demostración:

Sea G un grupo y tomemos $S = G$. Considere $F(S)$ el grupo libre sobre el conjunto S. Sea $f : S \to G$ la función dada por:

$$f(s) = s, \quad \forall s \in S = G$$

entonces, por la propiedad universal de grupos libres existe un único homomorfismo $\hat{f} : F(S) \to G$ tal que:

$$\hat{f} \circ \iota = f$$

en particular, $\hat{f}$ es epimorfismo, pues:

$$\hat{f} \circ \iota(S) = f(S) = G$$

así que, por el primer teorema de isomorfismos existe un único isomorfismo $g : G \to F(S)/\ker(\hat{f})$. Tomando:

$$K = \ker(\hat{f})$$

se sigue que:

$$\langle K \rangle^{\triangleleft} = \ker(\hat{f})$$

por lo que $G \cong F(S)/\langle K \rangle^{\triangleleft}$ ■

Ejercicio 3.1.10
Demuestra que el grupo con presentación:

$$\langle x, y | xyx^{-1}y^{-1} \rangle$$

es isomorfo a $\mathbb{Z}^2$.

§3.2 Acciones de Grupos

Ejercicio 3.2.1
Sean G un grupo y X un G-conjunto, es decir que G actúa en X. Para $x \in X$ definimos el **estabilizador de** x como:

$$G_x = \left\{ g \in G \middle| gx = x \right\}$$

Sean $x, y \in X$ tales que existe $g \in G$ tal que $y = gx$. Demuestre que $G_y = gG_xg^{-1}$.

Demostración:
Veamos la doble contención:

- Sea $g_1 \in G_y$, entonces $g_1 y = y$, por lo cual $g_1 g x = gx$, luego $g^{-1} g_1 g x = g^{-1} g x = x$, así que $g^{-1} g_1 g \in G_x$, por tanto $g_1 \in g G_x g^{-1}$.
- Sea $g g_1 g^{-1} \in g G_x g^{-1}$, entonces se cumple que $g_1 x = x$, así que:
$$\begin{aligned} g g_1 g^{-1} y &= g g_1 (g^{-1} y) \\ &= g g_1 x \\ &= gx \\ &= y \end{aligned}$$
por tanto, $g g_1 g^{-1} \in G_y$.

por los dos incisos se sigue la igualdad. ■

Ejercicio 3.2.2
Sean G un grupo y X un G-conjunto, es decir, G actúa en X. Haga lo siguiente:

(a) Demuestra que la siguiente relación en X es una relación de equivalencia: $x \sim y$ si y sólo si existe $g \in G$ tal que $y = gx$.

(b) Demuestra que G_x es un subgrupo de G para todo $x \in X$.

Demostración:
De *(a)*: Veamos que la relación $\sim$ en X es de equivalencia:

- **(Reflexividad)** Sea $x \in X$, entonces existe $e_G \in G$ tal que $x = e_G x$, por lo cual $x \sim x$.
- **(Simetría)** Sean $x, y \in X$ tales que $x \sim y$, entonces existe $g \in G$ tal que $y = gx$. Se cumple además que existe $g^{-1} \in G$ tal que:
$$\begin{aligned} g^{-1} y &= g^{-1}(gx) \\ &= (g^{-1} g) x \\ &= e_G x \\ &= x \end{aligned}$$
por lo cual, $y \sim x$.
- **(Transitividad)**: Sean $x, y, z \in X$ tales que $x \sim y$ y $y \sim z$, entonces existen $g_1, g_2 \in G$ tales que:
$$y = g_1 x \text{ y } z = g_2 y$$
por lo cual:
$$\begin{aligned} z &= g_2 y \\ &= g_2(g_1 x) \\ &= (g_2 g_1) x \end{aligned}$$
así que existe $g_2 g_1 \in G$ tal que $z = (g_2 g_1) x$, por ende $x \sim z$.

de los tres incisos anteriores se sigue que $\sim$ es relación de equivalencia.

De *(b)*: Sea $x \in X$ y considere el conjunto G_x. Este conjunto es no vacío pues $e_G \in G_x$. Sean $a, b \in G_x$, se tiene que:

$$x = ax \text{ y } x = bx$$

en particular, de la segunda igualdad se tiene que $x = b^{-1}x$, por lo cual $x = ax = a(b^{-1}x) = (ab^{-1})x$. Por tanto, $ab^{-1} \in G_x$. Luego, G_x es subgrupo de G. ■

Definición 3.2.1 (**Árboles como espacios métricos**)
Sea T un árbol. Una **geodésica entre dos puntos x_1 y x_2 de T** es un camino de longitud mínima que une x_1 y x_2.

Definición 3.2.2
Sea G un grupo actuando en una gráfica Y. Una **inversión** consiste de un elemento $g \in G$ y una arista $\{u, v\}$ de Y tal que $g\{u, v\} = \{u, v\}$ y $gu = v$.

Ejercicio 3.2.3
Sean T un árbol y s un automorfismo de T. Si α es una geodésica, entonces $s\alpha$ es una geodésica.

Demostración:
Sea α una geodésica entre dos vértices del árbol T, digamos v_1 y v_2. Como s es un automorfismo de T, entonces s es una función de gráficas (que va de T en sí misma) que es biyectiva.

Además, al ser s automorfismo se sigue que los vértices $s(v_1)$ y $s(v_2)$ son unidos por el camino $s\alpha$. Veamos que $s\alpha$ es una geodésica. En efecto, en caso de que no fuese un camino de longitud mínima, existiría otro camino, digamos β que une a los vértices $s(v_1)$ con $s(v_2)$.

Por ser s automorfismo, podemos tomar automorfismo inverso s^{-1} y sería tal que $s^{-1}\beta$ es un camino que une a los vértices v_1 y v_2, el cual debe tener longitud menor que el camino α (ya que los caminos α y $s\alpha$ tienen la misma longitud)$\#_c$, pues α es una geodésica. Por tanto, $s\alpha$ es geodésica. ■

Proposición 3.2.1
Sea X una gráfica y G un grupo actúando sin inversiones en X y $H < G$. Si $x, y \in X$ son elementos distintos, entonces:

$$x, y \in X^H \text{ si y sólo si } \{x, y\} \in X^H$$

Demostración:
Recordemos que una acción de un grupo G en una gráfica X es simplemente un homomorfismo entre G y $\mathrm{Aut}(X)$, $g \mapsto \varphi_g$, por lo que el hecho de que un punto $x \in X$ se quede fijo significa que:

$$\varphi_g(x) = x, \quad \forall g \in G$$

$\Rightarrow$) : Suponga que $x, y \in X^H$, entonces para todo $h \in H$: $\varphi_h(x) = x$ y $\varphi_h(y) = y$. En particular, como φ_h es automorfismo para todo $h \in G$, se tiene que el vértice:

$$\{\varphi_h(x), \varphi_h(y)\} = \{x, y\}$$

debe estar en la gráfica X. En particular, sigue que $h\{x, y\} = \{x, y\}$ para todo $h \in H$, por lo que $\{x, y\} \in X^H$.

$\Leftarrow$) : Suponga que $\{x,y\}\in X^H$, entonces:

$$h\{x,y\}=\{x,y\}\,,\quad \forall h\in H$$

como G actúa sin inversiones, en particular no puede suceder que exista $g\in G$ tal que $g\{x,y\}=\{x,y\}$ y $y=gx$, así que en particular para todo $h\in H$ sucede que $hx=x$ y $hy=y$, es decir que $x,y\in X^H$. ∎

Ejercicio 3.2.4
Sea T un árbol y G un grupo actuando en T sin inversiones. Sea H un subgrupo de G tal que el conjunto de puntos fijos:

$$T^H=\left\{x\in T\middle| hx=x,\forall h\in H\right\}$$

es no vacío. Entonces, T^H es un subárbol de T.

Demostración:
Es inmediato que T^H es una subgráfica de T. Para ver que es subárbol de T basta con ver que T^H es conexo y que no tiene ciclos. En caso de que tenga solamente un vértice, es inmediato que es un árbol, por lo que supongamos que tiene a lo sumo 2 vértices.

- Sean $x,y\in T^H$ diferentes, entonces $hx=x$ y $hy=y$ para todo $h\in H$. Como T es un árbol, existe un único camino α que une a x con y, sean $v_1,...,v_n$. Procederemos por inducción sobre n. Para $n=2$ el resultado es inmediato. Suponga que existe $k\in\mathbb{N}$ tal que si $n\leq k$ y los vértices $v_1,v_n\in T^H$, entonces existe un camino que une a los puntos está en T^H.

  Sean $x,y\in T^H$ vértices tales que el camino α que los une tiene longitud $k+1$. Suponga que existe $i_0\in\left[\left|2,k\right|\right]$ tal que $v_{i_0}\notin T^H$ (ya que en caso contrario por hipótesis de inducción se tendría que existe un camino que une a v_1 con v_{k+1}). Por la proposición anterior se sigue que los vértices que unen a v_{i_0} con v_{i_0-1} y v_{i_0+1} no están en T^H, respectivamente.

  Considere el conjunto:

- Veamos que no tiene ciclos. Suponga que T^H tiene un cíclo, entonces T no podría ser un árbol, ya que por ser T^H subgráfica de T se seguiría que T tiene al menos un ciclo$\#_c$. Por tanto, T^H no tiene ciclos.

por ambos incisos se sigue el resultado. ∎

Ejercicio 3.2.5
Sea γ la línea recta real con su estructura de gráfica canónica, es decir los vértices son los enteros $\mathbb{Z}$, y las aristas son $\{n,n+1\}$ con $n\in\mathbb{Z}$. Demuestra que el grupo $\mathrm{Aut}(\gamma)$ es isomorfo a D_∞.

Demostración:
Recordemos que:

$$D_\infty=\langle r,s\middle| s^2=1 \text{ y } srs=r^{-1}\rangle$$

Sea $f\in\mathrm{Aut}(\gamma)$, entonces $f:\gamma\to\gamma$ es función entre dos gráficas y es biyectiva.

Sean $g,h:\gamma\to\gamma$ los automorfismos dados por:

$$g(m)=-m,\quad \forall m\in\mathbb{Z}$$

y,

$$h(m)=m+1,\quad \forall m\in\mathbb{Z}$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} g\circ h\circ g(m) &= g\circ h(-m)\\ &= g(-m+1)\\ &= m-1\\ &= h^{-1}(m),\quad \forall m\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$

donde $h^{-1}:\gamma\to\gamma$ es tal que $m\mapsto m-1$. $g^2=\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}$.

Afirmamos que f se expresa como composición de g y h sucesivamente. En efecto, todo automorfismo de γ está caracterizado por su valor en 0 y lo que haga con sus dos vecinos. Sea:

$$n=f(0)$$

Se tienen dos casos:

- $n\geq 0$: en cuyo caso se sigue que $f=\underbrace{h\circ\cdots\circ h}_{n-\text{veces}}$.
- $n<0$, en cuyo caso se sigue que $f=\underbrace{h^{-1}\circ\cdots\circ h^{-1}}_{-n-\text{veces}}=g\circ\underbrace{h\circ\cdots\circ h}_{-n-\text{veces}}\circ g$.

en ambos casos, se obtiene el resultado. ■

Ejercicio 3.2.6
Demuestra que todo grupo finito actuando en un árbol tiene un punto fijo.

Demostración:
Sea T un árbol y $G\curvearrowright T$ una acción del grupo G en T, siendo G grupo finito. Veamos que T tiene un punto fijo, es decir que existe $x\in T$ tal que:

$$gx=x,\quad \forall g\in G$$

En efecto, suponga que no existe $x\in T$ tal que sucede lo anterior, por lo que para todo $x\in T$ existe $g_x\in G$ tal que:

$$g_xx\neq x$$

Sea:

$$\left\{g_xx\middle|x\in T\right\}$$

■