

Lista 3 de Ejercicios Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

15 de mayo de 2024

Índice general

3. Ejercicios

2

Capítulo 3

Ejercicios

Ejercicio 3.1.1

Pruebe que, para todo $x \in]0, 2\pi[$,

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

Usando la identidad de Parseval, **demuestre** que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Demostración:

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}, \quad \forall x \in [0, 2\pi[$$

y extiéndase por periodicidad a todo \mathbb{R} . Es claro que $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{R})$, sea ahora $x \in]0, 2\pi[$. Por el teorema fundamental para la convergencia puntual de una serie de Fourier hay que encontrar un $0 < \delta < \pi$ tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) dt$$

tomemos $\delta = \min\{x, 2\pi - x\} > 0$. Se tienen dos casos:

1. $\delta = x$, entonces

$$\begin{aligned} & \int_0^{\delta} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) dt \\ &= \int_0^{\delta} \frac{1}{t} \left[\frac{\pi - x - t}{2} + \frac{\pi - x + t}{2} - \frac{2(\pi - x)}{2} \right] \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) dt \\ &= \int_0^{\delta} \frac{1}{t} [\pi - x - \pi + x] \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) dt \\ &= \int_0^{\delta} 0 dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

por tanto, el límite cuando $m \rightarrow \infty$ resulta que da cero.

2. $\delta = 2\pi - x$. El caso es análogo al anterior.

por ambos incisos se concluye que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^\delta \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) dt = 0$$

por tanto, la serie de Fourier de f converge a f puntualmente en x . Computemos ahora los coeficientes de la serie de Fourier de f . Si $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \cos nx dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos nx dx - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x \cos nx dx \text{ haciendo } u = nx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2n\pi} \cos u \frac{du}{n} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2n\pi} \frac{u}{n} \cos u \frac{du}{n} \\ &= \frac{1}{2n} \sin u \Big|_0^{2n\pi} - \frac{1}{2\pi n^2} \int_0^{2n\pi} u \cos u du \\ &= \frac{1}{2n} [\sin 2\pi n - \sin 0] - \frac{1}{2\pi n^2} \left(u \sin u \Big|_0^{2n\pi} + \int_0^{2n\pi} \sin u du \right) \\ &= -\frac{1}{2\pi n^2} \left(u \sin u \Big|_0^{2n\pi} + \int_0^{2n\pi} \sin u du \right) \\ &= -\frac{1}{2\pi n^2} \left([2n\pi \sin 2n\pi - 0] - \cos u \Big|_0^{2n\pi} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2\pi n^2} (0 - 0 - 1 + 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

para todo $n \geq 0$. Si $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin nx dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin nx dx - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x \sin nx dx \text{ haciendo } u = nx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2n\pi} \sin u \frac{du}{n} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2n\pi} \frac{u}{n} \sin u \frac{du}{n} \\
&= \frac{1}{2n} (-\cos u) \Big|_0^{2n\pi} - \frac{1}{2\pi n^2} \int_0^{2n\pi} u \sin u du \\
&= \frac{1}{2n} (-\cos 2n\pi + 1) - \frac{1}{2\pi n^2} \left(-u \cos u \Big|_0^{2n\pi} + \int_0^{2n\pi} \cos u du \right) \\
&= \frac{1}{2n} (-1 + 1) - \frac{1}{2\pi n^2} \left(-2n\pi \cos 2n\pi + 0 + \sin u \Big|_0^{2n\pi} \right) \\
&= -\frac{1}{2\pi n^2} (-2n\pi \cos 2n\pi + \sin 2n\pi - \sin 0) \\
&= -\frac{1}{2\pi n^2} (-2n\pi + \sin 2n\pi - \sin 0) \\
&= -\frac{1}{2\pi n^2} (-2n\pi) \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Por tanto, la serie de Fourier de f en $x \in]0, 2\pi[$ está dada por:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kx + b_k \sin kx] = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

Por el criterio de Dini se sigue que

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad \forall x \in]0, 2\pi[$$

Ahora, como $x \mapsto \frac{\pi-x}{2}$ es una función en $\mathcal{L}_2^{2\pi}$, por Parseval se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [|a_n|^2 + |b_n|^2] &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\pi-x}{2} \right|^2 dx \\
\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} |\pi-x|^2 dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} |\pi-x|^2 dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (\pi-x)^2 dx \text{ haciendo el cambio de variable } u = \pi-x \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^0 -u^2 du \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \left. \frac{-u^3}{3} \right|_{\pi}^0 \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[-\frac{0}{3} + \frac{\pi^3}{3} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi^3}{3} \\
&= \frac{\pi^2}{6} \\
\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}$$

Como se quería demostrar. ■

Ejercicio 3.1.2

Sea $f \in \mathcal{L}_2^{2\pi}(\mathbb{R})$ y sean a_n, b_n los coeficientes de Fourier de f . **Pruebe** que

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x f(x) dx = \pi a_0 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}.$$

Demostración:

Veamos que

$$\int_0^{2\pi} x f(x) dx = x f(x)$$

Recordemos que

$$b_1 = \int_0^{2\pi} \sin x f(x) dx$$
■

Ejercicio 3.1.3

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de periodo 2π definida como

$$f(x) = \begin{cases} \pi^2 & \text{si } -\pi \leq x < 0, \\ (x-\pi)^2 & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

calcule los coeficientes de Fourier a_n , con $n = 0, 1, 2, \dots$ de f y **pruebe** las fórmulas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Solución:

Primero determinemos los coeficientes de Fourier de f .

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 \pi^2 dx + \int_0^{\pi} (x - \pi)^2 dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\pi^3 + \int_{-\pi}^0 u^2 du \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\pi^3 + \int_{-\pi}^0 u^2 du \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\pi^3 + \frac{u^3}{3} \Big|_{-\pi}^0 \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\pi^3 + \frac{\pi^3}{3} \right] \\ &= \frac{4\pi^2}{3} \end{aligned}$$

ahora, para $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \cos nx dx + \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 \pi^2 \cos nx dx + \int_0^{\pi} (x - \pi)^2 \cos nx dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 \pi^2 \cos nx dx + \int_0^{\pi} (x^2 - 2x\pi + \pi^2) \cos nx dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \pi^2 \cos nx dx + \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx - \int_0^{\pi} 2x\pi \cos nx dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \pi^2 \cos nx dx + \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx - \int_0^{\pi} 2x\pi \cos nx dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi^2}{n} \int_{-n\pi}^{n\pi} \cos u du + \frac{1}{n} \int_0^{n\pi} \left(\frac{u}{n} \right)^2 \cos u du - \frac{1}{n} \int_0^{n\pi} 2 \left(\frac{u}{n} \right) \pi \cos u du \right] \\ &= \frac{1}{n\pi} \left[\pi^2 \int_{-n\pi}^{n\pi} \cos u du + \frac{1}{n^2} \int_0^{n\pi} u^2 \cos u du - \frac{2\pi}{n} \int_0^{n\pi} u \cos u du \right] \end{aligned}$$

donde

$$\pi^2 \int_{-n\pi}^{n\pi} \cos u du = 2 \sin(n\pi)$$

con

$$\int_0^{n\pi} u^2 \cos u du = (\pi^2 n^2 - 2) \sin(n\pi) + 2n\pi \cos(n\pi)$$

y

$$\int_0^{n\pi} u \cos u \, du = n\pi \sin(n\pi) + \cos(n\pi) - 1$$

por tanto,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n\pi} \left[\pi^2 \int_{-\pi}^{n\pi} \cos u \, du + \frac{1}{n^2} \int_0^{n\pi} u^2 \cos u \, du - \frac{2\pi}{n} \int_0^{n\pi} u \cos u \, du \right] \\ &= \frac{1}{n\pi} \left[\pi^2 \cdot 2 \sin(n\pi) + \frac{1}{n^2} \cdot [(\pi^2 n^2 - 2) \sin(n\pi) + 2n\pi \cos(n\pi)] - \frac{2\pi}{n} \cdot [n\pi \sin(n\pi) + \cos(n\pi) - 1] \right] \\ &= \frac{1}{n\pi} \left[2\pi^2 \sin(n\pi) + \pi^2 \sin(n\pi) - \frac{2}{n^2} \sin(n\pi) + \frac{2\pi}{n} \cos(n\pi) - 2\pi^2 \sin(n\pi) - \frac{2\pi}{n} \cos(n\pi) + \frac{2\pi}{n} \right] \\ &= \frac{1}{n\pi} \left[\pi^2 \sin(n\pi) - \frac{2}{n^2} \sin(n\pi) + \frac{2\pi}{n} \right] \\ &= \frac{1}{n\pi} \left[\frac{n^3 \pi^2 \sin(n\pi) + 2n^2 \pi - 2n \sin(n\pi)}{n^3} \right] \\ &= \frac{1}{n\pi} \left[\frac{0 + 2n^2 \pi - 0}{n^3} \right] \\ &= \frac{1}{n\pi} \left[\frac{2n^2 \pi}{n^3} \right] \\ &= \frac{2}{n^2} \end{aligned}$$

pues, $\sin(n\pi) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Notemos que la función f es monotóna decreciente, en particular es de variación acotada. Luego, por el teorema de Jordan al ser f continua en $] -\pi, \pi]$ se sigue que la serie de Fourier de f en x converge a $f(x)$ para todo $x \in] -\pi, \pi]$. Esto es:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kx + b_k \sin kx]$$

en particular, en $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \\ &= \frac{2\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{1}{2} \left[\pi^2 - \frac{2\pi^2}{3} \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{3} \\ &= \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

Para la segunda parte, notemos que

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n)^2} \right] \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} &= \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
 &= \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} \\
 &= \frac{\pi^2}{8}
 \end{aligned}$$

Por ende,

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1-1}}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{(2n)^2} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-2}}{(2n-1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n^2} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
 &= \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} \\
 &= \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} \\
 &= \frac{\pi^2 [3-1]}{24} \\
 &= \frac{\pi^2}{12}
 \end{aligned}$$

□

Ejercicio 3.1.4

Pruebe que

$$\frac{1}{3}x(\pi-x)(\pi-2x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{n^3}, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Deduzca el valor de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}.$$

Demostración:

■

Ejercicio 3.1.5

Haga lo siguiente:

- i. **Pruebe** que

$$\int_0^\pi \log \sin \frac{x}{2} dx = -\pi \log 2.$$

Sugerencia. Haga el cambio de variables $x = 2t$ y escriba $\sin t = 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}$.

ii. **Muestre** que

$$-\log \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}, \quad \text{si } x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Sugerencia. Use el inciso (i) para probar que $a_0 = 0$. A fin de calcular a_n para $n \in \mathbb{N}$, escriba $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \log \cos \frac{x}{2} dx$, efectúe una integración por partes y transforme el nuevo integrando de suerte que aparezca el núcleo de Dirichlet.

iii. **Deduzca** de (ii) la fórmula

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

iv. **Desarrolle** en serie de Fourier la función

$$x \mapsto \log \left| 2 \cos \frac{x}{2} \right|$$

Solución:

De (i): (justificar porqué esa función es integrable). Veamos que

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \log \sin \frac{x}{2} dx &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin t dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \left(2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} \right) dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\log 2 + \log \sin \frac{t}{2} + \log \cos \frac{t}{2} \right] dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\log 2 + \log \sin \frac{t}{2} + \log \cos \frac{t}{2} \right] dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log 2 dt + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin \frac{t}{2} dt + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos \frac{t}{2} dt \\ &= \pi \log 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin \frac{t}{2} dt + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos \frac{t}{2} dt \end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos \frac{t}{2} dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} \right) dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\log \sin \left(\frac{u}{2} \right) dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log \sin \left(\frac{u}{2} \right) dt \end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $u = \pi - t$. Por ende,

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \log \sin \frac{x}{2} dx &= \pi \log 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin \frac{t}{2} dt + 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \log \sin \frac{u}{2} du \\ &= \pi \log 2 + 2 \int_0^\pi \log \sin \frac{x}{2} dx \\ \Rightarrow \int_0^\pi \log \sin \frac{x}{2} dx &= -\pi \log 2\end{aligned}$$

De (ii): Por lo anterior, $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}$ donde $f(x) = -\log |2 \sin \frac{x}{2}|$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Ahora, como f es par, se tiene que

$$b_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ahora, veamos que

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi -\log \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right| dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left[\log 2 + \log \sin \frac{x}{2} \right] dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^\pi \log 2 + \int_0^\pi \log \sin \frac{x}{2} \right] dx \\ &= \frac{2}{\pi} [\pi \log 2 - \pi \log 2] \\ &= 0\end{aligned}$$

Ahora, si $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}a_n &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \log \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right| \cos nx dx \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \log \left(2 \sin \frac{x}{2} \right) \cos nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\log \left(2 \sin \frac{x}{2} \right) \frac{1}{n} \sin nx \Big|_0^\pi + \frac{1}{2n} \int_0^\pi \frac{\cos \frac{x}{2} \sin nx}{\sin \frac{x}{2}} dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi n} \int_0^\pi \frac{\cos \frac{x}{2} \sin nx}{\sin \frac{x}{2}} dx\end{aligned}$$

pero,

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A + B) + \sin(A - B)]$$

Por ende,

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{2\pi n} \int_0^\pi \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x + \sin \left(n - \frac{1}{2} \right) x}{\sin \frac{x}{2}} dx \\ &= \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [D_n(x) + D_{n-1}(x)] dx \\ &= \frac{1}{n}\end{aligned}$$

De (iii): Veamos la convergencia (usar el teorema de Carleson y más cosas), de donde se deduce el hecho sorprendente que

$$\int_0^\pi \left(\log \left| 2 \cos \frac{x}{2} \right| \right)^2 dx = \frac{\pi^2}{6}$$

□

Ejercicio 3.1.6

Sea $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{R})$ y sea $x \in \mathbb{R}$. Se supone que para algún $\alpha > 0$ se cumple

$$f(x+t) - f(x) = O(|t|^\alpha), \quad \text{cuando } t \rightarrow 0$$

Demuestre que la serie de Fourier de f en x converge a $f(x)$.

Demostración:

Como

$$f(x+t) - f(x) = O(|t|^\alpha), \quad \text{cuando } t \rightarrow 0$$

entonces existe $A > 0$ y $\delta > 0$ tales que

$$\begin{aligned} |t| < \delta &\Rightarrow |f(x+t) - f(x)| \leq A|t|^\alpha \\ &\Rightarrow -A|t|^\alpha \leq f(x+t) - f(x) \leq A|t|^\alpha \end{aligned}$$

Para ver que la serie de Fourier de f en x converge a $f(x)$, usaremos el Teorema Fundamental para la convergencia puntual de una serie de Fourier. Además, si $m \in \mathbb{N}$

$$-A \frac{|t|^\alpha}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t dt \leq \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t dt \leq A \frac{|t|^\alpha}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t dt$$

Para todo $0 < |t| < \min\{\delta, \pi\}$. Considere ahora la función $t \mapsto \frac{|t|^\alpha}{t}$ (llamémosla g) definida c.t.p. en \mathbb{R} . Esta función es la diferencia de dos funciones monótonas en $[-\pi, \pi]$, luego de variación acotada. Además es integrable. En efecto,

$$|g(t)| = |t|^{\alpha-1}$$

donde $t \mapsto |t|^{\alpha-1}$ es integrable en $[-\pi, \pi]$ pues $\alpha - 1 > -1$. Luego, por el Teorema de Jordan la serie de Fourier de g en x converge a $g(x)$. Así, por el Teorema Fundamental para la convergencia puntual de una serie de Fourier, se tiene que existe $0 < \gamma < \pi$ tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\gamma}^{\gamma'} \frac{|t|^\alpha}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t dt = 0$$

Tomemos $\delta' = \min\{\delta, \gamma\}$. Se tiene que

$$-A \frac{|t|^\alpha}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t dt \leq \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t dt \leq A \frac{|t|^\alpha}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t dt$$

■

Ejercicio 3.1.7

Por el problema 3.1.1 se sabe que

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad \forall x \in]0, 2\pi[$$

i. Póngase

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k}.$$

Muestre que

$$\frac{x}{2} + s_n(x) = \pi \int_0^x D_n(t) dt,$$

donde D_n es el núcleo de Dirichlet.

ii. Si $x \in]0, 2\pi[$, **pruebe** que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\pi \int_0^x D_n(t) dt - \int_0^x \frac{\sin nt}{t} dt \right] = 0.$$

iii. **Deduzca** una nueva demostración de la fórmula

$$\int_0^{\rightarrow \infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Demostración:

De (i): Recordemos que el núcleo de Dirichlet está dado por:

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-m}^m e^{ikx}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por ende,

$$\begin{aligned} \int_0^x D_n(t) dt &= \int_0^x \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-m}^m e^{ikt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^x \left[1 + \sum_{k=-m, k \neq 0}^m e^{ikt} \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[t \Big|_0^x + \sum_{k=-m, k \neq 0}^m \frac{e^{ikt}}{ik} \Big|_0^x \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[x + \sum_{k=-m, k \neq 0}^m \frac{e^{ikx} - 1}{ik} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[x + \sum_{k=-m, k \neq 0}^m \frac{e^{ikx}}{ik} - \underbrace{\sum_{k=-m, k \neq 0}^m \frac{1}{ik}}_{=0} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[x + \sum_{k=-m, k \neq 0}^m \frac{\cos ikx + \sin ikx}{ik} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[x + \sum_{k=-m}^{-1} \frac{\cos ikx + \sin ikx}{ik} + \sum_{k=1}^m \frac{\cos ikx + i \sin ikx}{ik} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[x + \sum_{k=1}^m \frac{\cos(-ikx) + i \sin(-ikx)}{-ik} + \sum_{k=1}^m \frac{\cos ikx + i \sin ikx}{ik} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[x + \sum_{k=1}^m \frac{-\cos ikx + i \sin ikx}{ik} + \sum_{k=1}^m \frac{\cos ikx + i \sin ikx}{ik} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[x + 2 \sum_{k=1}^m \frac{\sin ikx}{k} \right] \\ &= \frac{x}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^m \frac{\sin ikx}{k} \end{aligned}$$

luego,

$$\pi \int_0^x D(t) dt = \frac{x}{2} + s_n(x)$$

De (ii): Recordemos que podemos escribir al Núcleo de Dirichlet como:

$$D_m(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{t}{2}}, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Por tanto, si $m \in \mathbb{N}$ y $x \in]0, 2\pi[$:

$$\begin{aligned} \left| \pi \int_0^x D_m(t) dt - \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt \right| &= \left| \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{t}{2}} dt - \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\sin mt \cos \frac{t}{2} + \sin \frac{t}{2} \cos mt}{\sin \frac{t}{2}} dt - \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt \right| \\ &= \left| \int_0^x \left[\frac{\sin mt}{2 \tan \frac{t}{2}} + \frac{1}{2} \cos mt \right] dt - \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} \int_0^x \cos mt dt + \int_0^x \left[\frac{\sin mt}{2 \tan \frac{t}{2}} - \frac{\sin mt}{t} \right] dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{2m} \int_0^{mx} \cos u du + \int_0^x \left[\frac{1}{2 \tan \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right] \sin mt dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2m} |\sin u|_0^{mx} + \left| \int_0^x \left[\frac{1}{2 \tan \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right] \sin mt dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2m} |\sin mx| + \left| \int_0^x \left[\frac{1}{2 \tan \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right] \sin mt dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2m} + \left| \int_0^x \left[\frac{1}{2 \tan \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right] \sin mt dt \right| \end{aligned}$$

Pero, la función

$$t \mapsto \frac{1}{2 \tan \frac{t}{2}} - \frac{1}{t}$$

es integrable en $]0, x[$. En efecto, como es continua en $[0, x]$ haciendo que valga 0 en $t = 0$, ya que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2 \tan \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right] = 0$$

hace que la función sea continua, luego al ser continua en un compacto es integrable. Así, por el teorema de Riemman-Lebesgue se sigue que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^x \left[\frac{1}{2 \tan \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right] \sin mt dt = 0$$

Por tanto, para $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq N$:

$$\frac{1}{2m} \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \left| \int_0^x \left[\frac{1}{2 \tan \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right] \sin mt dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

luego,

$$\begin{aligned} m \geq N \Rightarrow \left| \pi \int_0^x D_m(t) dt - \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt \right| &\leq \frac{1}{2m} + \left| \int_0^x \left[\frac{1}{2 \tan \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right] \sin mt dt \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

así,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \pi \int_0^x D_m(t) dt - \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt \right| = 0$$

De (iii): Como dado $x \in]0, 2\pi[$ se tiene que

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

y,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \pi \int_0^x D_m(t) dt - \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt \right| = 0$$

entonces para $x \in]0, 2\pi[$ y $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq N$ implica que

$$\left| \frac{\pi - x}{2} - \sum_{n=1}^m \frac{\sin nx}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \left| \pi \int_0^x D_m(t) dt - \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

luego, si $m \geq N$ se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \pi \int_0^x D_m(t) dt - \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt \right| &= \left| \frac{x}{2} + s_n(x) - \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt \right| \\ &= \left| \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^m \frac{\sin kx}{k} - \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt \right| \\ &= \left| \frac{-\pi}{2} + \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^m \frac{\sin kx}{k} + \frac{\pi}{2} - \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt \right| \\ &= \left| -\left(\frac{\pi - x}{2} - \sum_{k=1}^m \frac{\sin kx}{k} \right) + \left(\frac{\pi}{2} - \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt \right) \right| \\ &\geq \left| \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt - \frac{\pi}{2} \right| - \left| \frac{\pi - x}{2} - \sum_{k=1}^m \frac{\sin kx}{k} \right| \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt - \frac{\pi}{2} \right| &\leq \left| \pi \int_0^x D_m(t) dt - \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt \right| + \left| \frac{\pi - x}{2} - \sum_{k=1}^m \frac{\sin kx}{k} \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

por ende,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

Pero, por el T.C.V. se tiene que para todo $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt &\stackrel{u=mt}{=} \int_0^{mx} \frac{\sin u}{\frac{u}{m}} \frac{du}{m} \\ &\Rightarrow \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt \stackrel{u=mt}{=} \int_0^{mx} \frac{\sin u}{u} du \end{aligned}$$

por ende,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{mx} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}$$

Veamos ahora que

$$\int_0^{\rightarrow \infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

■

Ejercicio 3.1.8

Sea $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ y sean $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ los coeficientes de Fourier de f . **Demuestre** que

$$\int_0^x f = c + c_0 x + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{c_k e^{ikx}}{ik}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

donde c es una constante, la convergencia siendo uniforme en \mathbb{R} .

Sugerencia. Considere la función $F(x) = \int_0^x (f - c_0)$.

Deduzca que los coeficientes de Fourier b_n de cualquier función $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ satisfacen la condición de que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$$

es convergente. **Concluya** que la aplicación $f \mapsto \{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ no es una aplicación suprayectiva de $\mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ en $c_0(\mathbb{Z})$.

Demostración:

■

Ejercicio 3.1.9

Haga lo siguiente:

- i. Sea α un número real no entero. **Pruebe** que

$$\pi \cos \alpha x = 2\alpha \sin \pi \alpha \left(\frac{1}{2\alpha^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{\alpha^2 - n^2} \right), \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

De ahí obtenga las fórmulas clásicas

$$\frac{\pi \alpha}{\sin \pi \alpha} = 1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} \quad \text{y} \quad \pi \alpha \cot \pi \alpha = 1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}.$$

- ii. Sea $x \in]0, 1[$. **Pruebe** que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{n^2 - \alpha^2}$$

se puede integrar término por término en el intervalo $[0, x]$. De la última fórmula del inciso (i) **deduzca** la fórmula

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right), \quad \forall x \in]-1, 1[.$$

Demostración:

■

Ejercicio 3.1.10

Se supone que la serie de Fourier de una función $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{K})$ converge en el sentido de Cesàro uniformemente en \mathbb{R} . **Pruebe** que f es equivalente a una función continua de \mathbb{R} en \mathbb{K} .

Demostración:



Ejercicio 3.1.11

Sea $f \in \mathcal{C}^{2\pi}(\mathbb{R})$ la función

$$f(x) = \pi - |2x|, \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

Aplice el teorema 3.9 para mostrar que la serie de Fourier de f converge a f uniformemente en \mathbb{R} . **Calcule**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}.$$

Solución:



Ejercicio 3.1.12

Sea $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{R})$ la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi \leq x < 0, \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Calcule la serie de Fourier de f . Usando el teorema fundamental para la convergencia de una serie de Fourier, **muestre** que la serie de Fourier de f converge a alguna suma $s(x)$ para todo $x \in [-\pi, \pi]$. **Calcule** $s(x)$ para todo $x \in [-\pi, \pi]$.

Solución:



Ejercicio 3.1.13

Haga lo mismo que en el problema 3.12 con $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{R})$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi \leq x < 0, \\ x & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Solución:

