Lista 2 de Ejercicios
Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

20 de marzo de 2024

Índice general

Capítulo 1

Ejercicios Convolución

Ejercicio 1.1.1
Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ funciones nulas en $]-\infty, 0[$. Si existe $f * g(x)$, demuestre que:

$$f * g(x) = \begin{cases} \int_0^\infty f(y)g(x-y)dy & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

En los casos siguientes f y g son nulas en $]-\infty,0[$ y sus valores en $[0, \infty[$ se indican abajo. Calcule $f * g$.

I. $f(x) = e^{-x}$ y $g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

II. $f(x) = g(x) = e^{-x}$.

III. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

IV. $f(x) = g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

Solución:

$\square$

Ejercicio 1.1.2
Haga lo siguiente:

I. Para toda $m \in \mathbb{N}$ se define $e_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como:

$$e_m(x) = \begin{cases} \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Pruebe que

$$e_p * e_q = e_{p+q}$$

II. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ integrable en todo intervalo acotado tal que $f(x) = 0$ para todo $x \leq a$. **Muestre** que

$$e_m * f(x) = \begin{cases} \int_a^x \frac{(x-y)^{m-1}}{(m-1)!} f(y)dy & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

III. **Deduzca** que para $x \geq a$ se cumple la siguiente **fórmula de Cauchy para la n-ésima integral indefinida**

$$\int_a^x dx_{m-1} \int_a^{x_{m-1}} dx_{m-2} \cdots \int_a^{x_2} dx_1 \int_a^{x_1} f(x_0)dx_0 = \int_a^x \frac{(x-y)^{m-1}}{(m-1)!} f(y)dy$$

Demostración:

■

Ejercicio 1.1.3
La integral fraccional de orden $\alpha > 0$ sobre un intervalo $[a, x]$ de una función medible f se define como:

$$I_a^x[f](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt$$

para toda $x \geq a$ tal que la integral exista.

I. Fije $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Para cada $\alpha > 0$ se define

$$g_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{x^{1-\alpha}} \chi_{]0,b-a[}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Pruebe que si $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$, entonces existe la convolución $\widetilde{f} * g_\alpha$. Calcule $\widetilde{f} * g_\alpha$.