

Notas Grupos Topológicos

Cristo Daniel Alvarado

20 de abril de 2024

Índice general

2. Compacidad	2
2.1. Grupos compactos y localmente compactos	2

Capítulo 2

Compacidad

En este capítulo se estudiarán algunas de las propiedades más investigadas en grupos topológicos.

2.1. Grupos compactos y localmente compactos

Este primer teorema es una generalización de un teorema de la sección anterior.

Teorema 2.1.1

Sean G un grupo topológico, U una vecindad de e_G y F un subconjunto compacto de G . Entonces, existe una vecindad V de e_G tal que

$$xVx^{-1} \subseteq U \quad \forall x \in F$$

Demostración:

Sea $W \subseteq G$ una vecindad simétrica de e_G , esto es que $W^3 \subseteq U$. Como

$$F \subseteq \bigcup_{x \in F} Wx$$

al tenerse que F es compacto, existen $x_1, \dots, x_k \in F$ tales que

$$F \subseteq \bigcup_{i=1}^k Wx_i$$

Sea $V = \bigcap_{i=1}^k x_i^{-1}Wx_i$. Es claro que V es una vecindad de e_G y que $V \subseteq x_i^{-1}Wx_i$, para todo $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$. Si $x \in F$ entonces existe $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ tal que

$$x \in Wx_i$$

es decir $x = wx_i$ para algún $w \in W$. Luego,

$$\begin{aligned} xVx^{-1} &= wx_iVx_i^{-1}w^{-1} \\ &\subseteq wWw^{-1} \\ &\subseteq W^3 \\ &\subseteq U \end{aligned}$$

■

Se sabe de la sección anterior que si G es un grupo topológico y H es un subgrupo cerrado de G , entonces la función canónica $\pi : G \rightarrow G/H$ es continua y abierta. En el caso en que H sea compacto, este resultado puede mejorarse:

Teorema 2.1.2

Sea G un grupo topológico y H un subgrupo compacto de G . Entonces, la función canónica $\pi : G \rightarrow G/H$ es una función cerrada.

Demostración:

Sea $A \subseteq G$ cerrado. Para probar el resultado bastará con probar que el complemento de $\pi(A)$ es abierto en G/H . Sea $x \in G$ tal que $\pi(x) \notin \pi(A)$. Notemos que

$$\pi(A) = AH$$

donde el conjunto $AH \subseteq G$ es cerrado en G (ya que A es cerrado y H es compacto), luego como $x \notin AH$ existe un abierto $U \subseteq G$ tal que $x \in U$ y

$$U \cap AH = \emptyset$$

Afirmamos que $U^* = \pi(U)$ es un abierto que contiene a $\pi(x)$ ajeno a $\pi(A)$. En efecto, es claro que contiene a $\pi(x)$. Suponga que existe $z \in G$ tal que $\pi(z) = zH \in \pi(U) \cap \pi(A)$, luego existen $u \in U$ y $a \in A$ tales que:

$$zH = uH = aH$$

luego $a^{-1}u \in H$ de donde se sigue que $u \in AH$, es decir que $U \cap AH \neq \emptyset$. Por tanto, $\pi(U) \cap \pi(A) = \emptyset$. Así, el conjunto $G/H \setminus \pi(A)$ es abierto, luego $\pi(A)$ es cerrado. ■

Observación 2.1.1

Note que la condición de que H sea compacto es necesaria para que el conjunto AH sea cerrado.

Las propiedades de compacidad y compacidad local se heredan a espacios cocientes de G entre subgrupos cerrados H .

Teorema 2.1.3

Sean G un grupo topológico y H un subgrupo cerrado de G . Si G es compacto, entonces H y G/H también lo son. Si G es localmente compacto, entonces H y G/H también lo son.

Demostración:

Es claro que la compacidad y la compacidad local se hereda a subgrupos cerrados de G .

Dado que la función canónica $\pi : G \rightarrow G/H$ es continua y sobre, la imagen $\pi(G) = G/H$ es un conjunto compacto en G/H , es decir que G/H es compacto.

Ahora probaremos que si G es localmente compacto, entonces G/H también lo es. En efecto, suponga que G es localmente compacto. Sea $\pi(a) \in G/H$, debemos encontrar una vecindad compacta de $\pi(a)$. Como $a \in G$ existe una vecindad U de a tal que $a \in U \subseteq \bar{U}$, siendo \bar{U} compacto en G .

Como π es continua, se tiene que $\pi(\bar{U})$ es compacto en G/H , en particular, cerrado. Además, como $U \subseteq \bar{U}$, entonces

$$\pi(U) \subseteq \pi(\bar{U}) \Rightarrow \overline{\pi(U)} \subseteq \pi(\bar{U})$$

es decir, que $\pi(U)$ es una vecindad de $\pi(a)$ tal que $\overline{\pi(U)}$ es compacta (por ser un cerrado contenido en un compacto). Luego, G/H es localmente compacto. ■

Hemos usado el hecho de que si $\pi : G \rightarrow G/H$ es la función canónica y $K \subseteq G$ es compacto, entonces $\pi(K)$ es compacto en G/H . El recíproco de este resultado también es cierto con una hipótesis adicional: la imagen inversa de un compacto en el espacio cociente G/H es compacta si H es compacto. Antes de probar este resultado necesitamos de algunos hechos auxiliares.

Definición 2.1.1

Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Decimos que f es **perfecta** si f es cerrada y todas las fibras $f^{-1}(y) \subseteq X$ son compactas para todo $y \in Y$.

El teorema 2.1.2 se puede generalizar al afirmar que la función canónica $\pi : G \rightarrow G/H$ es perfecta si el subgrupo H de G es compacto.

Se harán a continuación la prueba de algunos resultados necesarios para un teorema posterior.

Proposición 2.1.1

Si $f : X \rightarrow Y$ es una función cerrada, entonces para cualquier subespacio $L \subseteq Y$ la restricción $f_L = f|_{f^{-1}(L)} : f^{-1}(L) \rightarrow L$ es cerrada.

Demostración:

Sea $A \subseteq X$ un conjunto cerrado en X , entonces

$$\begin{aligned} f_L(A \cap f^{-1}(L)) &= f(A \cap f^{-1}(L)) \\ &= f(A) \cap L \end{aligned}$$

pues, $f(f^{-1}(L)) = L$. Por ende, como f es cerrada se sigue que $f(A) \cap L$ es cerrado en el subespacio de L de Y . Así, f_L es cerrada. ■

Proposición 2.1.2

Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ una función perfecta, entonces para cualquier cerrado $A \subseteq X$ y cualquier subespacio $B \subseteq Y$ las restricciones $f|_A : A \rightarrow Y$ y $f_B = f|_{f^{-1}(B)} : f^{-1}(B) \rightarrow B$ son perfectas.

Demostración:

■

Teorema 2.1.4

Sean X, Y espacios topológicos. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función perfecta, entonces para todo subconjunto compacto $Z \subseteq Y$, su imagen inversa $f^{-1}(Z)$ es compacta en X . En particular, si Y es compacto, X también lo es.

Demostración:

■

Suponga que tenemos un grupo G , un subgrupo H de G y una propiedad topológica \mathcal{P} . Un problema muy conocido en la teoría de grupos topológicos es: si G/H y H tienen la propiedad \mathcal{P} , ¿también G posee la propiedad \mathcal{P} ? En este libro se responderá afirmativamente esta pregunta para varias propiedades \mathcal{P} , por ejemplo, conexidad, compacidad, etc... Comencemos con la compacidad.

Teorema 2.1.5**Demostración:**

■