Espacios Normados:

Def. Sea E un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$. Se dice que $\mathcal{N}: E \to \mathbb{R}$ es una norma sobre E si:

i) $\mathcal{N}(x) \geq 0$.

ii) $\mathcal{N}(\lambda x) = |\lambda| \mathcal{N}(x)$.

iii) $\mathcal{N}(x+y) \leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y)$.

iv) $\mathcal{N}(x) = 0 \iff x = 0$.

$\forall\, x, y \in E,\ \lambda \in \mathbb{R}$. A $(E, \mathcal{N})$ se le llama espacio normado.

Proposición:

Sea $(E, \mathcal{N})$ un espacio normado, entonces $d: E \times E \to \mathbb{R}$ definido como:

$$d(x,y) = \mathcal{N}(x-y) \quad \forall\, x, y \in E$$

es una métrica sobre E, a la cual se le llama la métrica inducida por la norma.

Dem:

Probaremos que d es una métrica.

i) Sean $x, y \in E$, entonces $d(x,y) = \mathcal{N}(x-y) \geq 0$.

ii) Sean $x, y \in E$, entonces $d(x,y) = \mathcal{N}(x-y) = \mathcal{N}(-1 \cdot (y-x)) = |-1| \cdot \mathcal{N}(y-x)$
$= 1 \cdot \mathcal{N}(y-x) = d(y,x)$

iii) Sean $x, y, z \in E$, entonces:

$$d(x,z) = \mathcal{N}(x-z) = \mathcal{N}(x-y+y-z) \leq \mathcal{N}(x-y) + \mathcal{N}(y-z)$$
$$= d(x,y) + d(y,z)$$

iv) Sean $x, y \in E$, entonces:

$$d(x,y) = 0 \iff \mathcal{N}(x-y) = 0 \iff x-y = 0 \iff x = y$$

q.e.d.

Proposición:

Sea (E, N) un espacio normado. Entonces:

$$|N(x) - N(y)| \leqslant N(x-y), \forall x, y \in E$$

Dem:

Sean $x, y \in E$ y $d: E \times E \to \mathbb{R}$ la métrica inducida por la norma N. Por una proposición anterior:

$$|d(x,0) - d(0,y)| \leqslant d(x,y)$$
$$\Rightarrow |d(x,0) - d(y,0)| \leqslant d(x,y)$$
$$\Rightarrow |N(x) - N(y)| \leqslant N(x-y)$$

q.e.d.

Para todo par de sucesiones $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{R}$, y $\alpha \in \mathbb{R}$ se definen las siguientes operaciones:

$$x \cdot y = \{x_n y_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad x + y = \{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ y } \alpha x = \{\alpha x_n\}_{n=1}^{\infty}$$

Donde $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$. El conjunto de sucesiones reales con estas operaciones es un espacio vectorial.

A la sucesión constante de valor $c \in \mathbb{R}$ es la sucesión $\underline{c}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} = \underline{c}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Def. Sea $p \in \overline{\mathbb{R}}$, $1 \leqslant p < \infty$. Se define l_p como el conjunto de sucesiones reales x tales que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$$

Se define $N_p: l_p \to \mathbb{R}$ como

$$N_p(x) := \left[\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right]^{1/p}, \forall x \in l_p$$

Y también se define l_∞ como el conjunto de sucesiones reales acotadas x, i.e, tales que:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty$$

Se define $N_\infty : l_\infty \to \mathbb{R}$ como:

$$N_\infty(x) := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

Proposición:

Sea $p \in \overline{\mathbb{R}}$, $1 \leq p \leq \infty$. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $x \in l_p$, entonces $\alpha x \in l_p$, $N_p(\alpha x) = |\alpha| N_p(x)$. Además $N_p(x) = 0 \iff x = \underline{0}$.

Dem:

1) Suponga que $1 \leq p < \infty$. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $x \in l_p$, entonces $\alpha x \in l_p$, pues:

$$\alpha x = \{\alpha x_n\}_{n=1}^{\infty} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha x_n|^p = |\alpha|^p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < |\alpha|^p \cdot \infty = \infty$$

por tanto, $\alpha x \in l_p$.

Ahora,

$$N_p(\alpha x) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha x_n|^p\right]^{1/p} = \left[|\alpha|^p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right]^{1/p} = |\alpha| \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right]^{1/p}$$
$$= |\alpha| N_p(x)$$

y,

$$N(x) = 0 \iff \left[\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right]^{1/p} = 0 \iff x_n = 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N} \iff x = \underline{0}.$$

2) Suponga que $p = \infty$. Sean $x \in l_\infty$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\alpha x = \{\alpha x_n\}_{n=1}^{\infty} \Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha x_n| = |\alpha| \cdot \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < |\alpha| \cdot \infty = \infty$$

por tanto, $\alpha x \in l_\infty$.

Ahora,

$$N_\infty(\alpha x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha x_n| = |\alpha| \cdot \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = |\alpha| \cdot N_\infty(x)$$

y, además:

$$N_\infty(x) = 0 \iff \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = 0 \iff \forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leq |x_n| \leq 0 \iff$$
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ x_n = 0 \iff x = \underline{0}.$$

1) y 2) demuestran la afirmación.

q.e.d.

Lema:

$\forall\, \alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha, \beta \geq 0$ y $0 < \lambda < 1$, se tiene:

$$\alpha^{\lambda} \cdot \beta^{1-\lambda} \leq \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta$$

Dem:

Si $\beta = 0$, la desigualdad se cumple trivialmente.

Si $\beta > 0$, la desigualdad es equivalente a:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\lambda} \leq \lambda\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + 1 - \lambda$$

Considere la función $\varphi(t) := (1-\lambda) + \lambda t - t^{\lambda}$ $\forall\, t \geq 0$. Probaremos que esta función es siempre positiva.

Se tiene $\varphi'(t) = \lambda(1 - t^{\lambda-1})$ $\forall\, t > 0$. Como $\lambda - 1 < 0$, entonces $\varphi'(t) < 0$ si $0 < t < 1$ y $\varphi'(t) > 0$ si $t \geq 1$. Entonces φ es creciente en $(1, +\infty)$ y decreciente en $(0,1)$, luego, alcanza su mínimo en $t = 1$.

Como $\varphi(1) = 1 - \lambda + \lambda - 1 = 0$, así:

$$\varphi(t) \geq 0 \quad \forall\, t \in (1, +\infty)$$

Si $t = 0$: $\varphi(0) = 1 - \lambda > 0$, pues $0 < \lambda < 1$. Así:

$$(1-\lambda) + \lambda t \geq t^{\lambda}$$

Con $t = \frac{\alpha}{\beta}$, se llega a la conclusión.

q.e.d.

Teorema (Desigualdad de Hölder).

Sean $p, q \in [1, +\infty]$ $\sqcap$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $p, q \in (1, +\infty)$, con $x \in \ell_p$ y $y \in \ell_q$, entonces $xy \in \ell_1$ y $N_1(xy) \leq N_p(x) N_q(y)$, esto es,

$$N_1(xy) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \left[\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right]^{1/p} \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right]^{1/q} = N_p(x) N_q(y)$$

Si $p = 1$ y $q = +\infty$, entonces $xy \in \ell_1$ y $N_1(xy) \leq N_1(x) N_\infty(y)$, i.e.:

$$N_1(xy) = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n y_n| \leq \left[\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|\right] \left[\sup_{n \in \mathbb{N}} |y_n|\right]$$

Dem:

Si $p=1$ y $q=\infty$, entonces:

$$N_1(xy)=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n y_n|\leq\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|\cdot\left(\sup_{i\in\mathbb{N}}|y_i|\right)=\left(\sup_{i\in\mathbb{N}}|y_i|\right)\cdot\left[\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|\right]=\left[\sum_{n=1}^{\infty}|x_n\right]\cdot\left[\sup_{n\in\mathbb{N}}|y_n|\right]$$

Si $p,q\in(1,+\infty)$, la igualdad se cumple trivialmente cuando $x=\underline{0}$ o $y=\underline{0}$. Supongamos entonces que $x\neq\underline{0}$ y $y\neq\underline{0}$. Veamos 2 casos:

a) En el caso en que $N_p(x)=N_q(y)=1$, aplicamos el lema anterior. Con

$$\alpha=|x_n|^p,\ \beta=|y_n|^q,\ \lambda=\frac{1}{p}\ \text{y}\ 1-\lambda=\frac{1}{q},\ \forall\, n\in\mathbb{N}$$

entonces:

$$\alpha^{\lambda}\beta^{1-\lambda}\leq\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta$$
$$\Rightarrow |x_n y_n|\leq\frac{1}{p}|x_n|^p+\frac{1}{q}|y_n|^q$$

por tanto:

$$N_1(xy)=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n y_n|\leq\frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p+\frac{1}{q}\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1=N_p(x)N_q(y)$$

b) En el caso gral, se normalizan a ambos vectores:

$$\frac{x}{N_p(x)}\in l_p\ \text{y}\ \frac{y}{N_q(y)}\in l_q$$

son tales que:

$$N_p\left(\frac{x}{N_p(x)}\right)=N_q\left(\frac{y}{N_q(y)}\right)=1$$

por tanto:

$$N_1\left(\frac{xy}{N_p(x)N_q(y)}\right)\leq 1\Rightarrow\frac{1}{|N_p(x)N_q(y)|}\cdot N_1(xy)\leq 1\Rightarrow N_1(xy)\leq N_p(x)N_q(y)$$

q.e.d.

Teorema (Desigualdad de MinowsKy).

Sea $p\in[1,+\infty]$. Si $x,y\in l_p$, entonces $x+y\in l_p$ y $N_p(x+y)\leq N_p(x)+N_p(y)$.

Dem:

a) Si $p=1$, entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|\leq\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|+\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|<+\infty+\infty=+\infty,\ \text{luego}\ x+y\in l_1.$$

además, por lo anterior, $N_1(x+y) \leq N_1(x) + N_1(y)$.

b) Si $p=\infty$, entonces:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n+y_n| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|+|y_n| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| + \sup_{n\in\mathbb{N}} |y_n| < \infty + \infty = +\infty$$

luego, $x+y \in l_\infty$, además: $N_\infty(x+y) \leq N_\infty(x) + N_\infty(y)$.

c) Si $p\in(1,\infty)$, $x+y$ tiene 2 casos, si $x+y=\underline{0}$, entonces $x+y\in l_p$, si $x+y \neq \underline{0}$, entonces:

$$\begin{aligned} |x_n+y_n|^p &\leq (|x_n|+|y_n|)^p \\ &\leq (2\max\{|x_n|,|y_n|\})^p \\ &= 2^p \max\{|x_n|^p,|y_n|^p\} \\ &\leq 2^p(|x_n|^p + |y_n|^p) \end{aligned}$$

por tanto:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n+y_n|^p &\leq 2^p \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p + 2^p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p \\ &< 2^p \cdot (+\infty) + 2^p \cdot (+\infty) = \infty + \infty = \infty \end{aligned}$$

luego, $x+y \in l_p$.

Observe que $N_p(x+y) > 0$. Por otra parte:

$$\begin{aligned} |x_n+y_n|^p &= |x_n+y_n|^{p-1} \cdot |x_n+y_n| \\ &\leq |x_n| \cdot |x_n+y_n|^{p-1} + |y_n| \cdot |x_n+y_n|^{p-1} \end{aligned}$$

por tanto:

$$N_p(x+y)^p = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n+y_n|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|\cdot|x_n+y_n|^{p-1} + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|\cdot|x_n+y_n|^{p-1} \quad \ldots (1)$$

ahora, ya que $x+y\in l_p$, entonces $\{|x_n+y_n|^{p-1}\}_{n=1}^{\infty} \in l_{p/p-1}$, en efecto:

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} (|x_n+y_n|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}}\right]^{\frac{p-1}{p}} = \left[\sum_{n=1}^{\infty} |x_n+y_n|^p\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

; Como $N_p(x+y)^p < \infty$, entonces $\{|x_n+y_n|\}_{n=1}^{\infty} \in l_{p/p-1}$.

y $x,y\in l_p$, veamos que:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{\frac{p}{p-1}} = \frac{1+p-1}{p} = 1$$

por tanto, por Hölder

$$N_1(x\cdot\underbrace{\{|x_n+y_n|^{p-1}\}_{n=1}^{\infty}}_{=u})+N_1(y\cdot\{|x_n+y_n|^{p-1}\}_{n=1}^{\infty})\leq N_p(x)\cdot N_{\frac{p}{p-1}}(u)+N_p(y)\cdot N_{p/_{p-1}}(u)$$

Como:

$$N_{p/_{p-1}}(u)=\left[\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^p\right]^{\frac{p-1}{p}}=\left(N_p(x+y)\right)^{p-1}$$

se tiene que, por (1):

$$N_p(x+y)^p\leq N_p(x)\cdot N_p(x+y)^{p-1}+N_p(y)\cdot N_p(x+y)^{p-1}$$
$$\Rightarrow N_p(x+y)\leq N_p(x)+N_p(y).$$

q.e.d.

Espacio Normado De Sucesiones Reales.

El espacio vectorial l_p, provisto de la función $N_p: l_p \to \mathbb{R}$ como

$$N_p(x):=\left[\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right]^{1/p} \text{ si } 1\leq p<\infty$$
$$\text{y } N_\infty(x)=\sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n| \text{ si } p=\infty$$

Es un espacio normado, llamado el espacio de sucesiones reales $((l_p, N_p)$ y $(l_\infty, N_\infty))$.

En particular, aplicando los resultados anteriores a sucesiones $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $x_{N+i}=0$ $\forall i\in\mathbb{N}$, se demuestra que $(\mathbb{R}^N, N_p)$, $1\leq p\leq\infty$ (donde N_p es la norma-p) es un espacio normado, donde:

$$N_p(x)=\left[\sum_{i=1}^{N}|x_i|^p\right]^{1/p} \quad \text{y}$$
$$N_\infty(x)=\max_{1\leq i\leq N}|x_i|$$

Def. Sea X un conjunto arbitrario no vacío. Dadas dos funciones $f,g: X\to\mathbb{R}$ y $\lambda\in\mathbb{R}$, se definen puntualmente nuevas funciones:

$$\lambda f,\ f+g,\ f\cdot g: X \to \mathbb{R}$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x),\quad (f+g)(x) = f(x)+g(x) \ \text{y}\ (f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)\ \forall x\in X$$

A la función constante de valor c se le denota por $\underline{c}(x) = c\ \forall x \in X$. El conjunto $\mathcal{F}(X)$ denota al conjunto de funciones de X en $\mathbb{R}$, el cual, con las operaciones anteriores tiene estructura de campo vectorial.

Si $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ sería el conjunto de sucesiones reales, y si $X = J_N$, una función $f: J_N \to \mathbb{R}$ puede verse como el vector $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ donde $x_i = f(i)\ \forall i \in J_N$, así $\mathcal{F}(J_N) = \mathbb{R}^N$.

Espacio De Funciones Continuas

Sea $C([a,b])$ el conjunto de funciones continuas de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$ provisto con las operaciones definidas puntualmente de suma, producto y producto por escalar, las cuales hacen de $C([a,b])$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Se define:

$$N_p(f) := \left[\int_a^b |f(x)|^p dx\right]^{1/p} \text{ si } 1 \leq p < \infty$$

$$N_\infty(f) := \max_{a\leq x\leq b} |f(x)|$$

Entonces, $C([a,b])$ con N_p es un espacio normado. Para probarlo, probaremos unos resultados preeliminares:

Prop. (Desigualdad de Hölder).

Sean $p, q \in [1, +\infty]$ tales que $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Con $f, g \in C([a,b])$, entonces $N_1(f\cdot g) \leq N_p(f)\cdot N_q(g)$.

Dem:

Si $p=1$ y $q = +\infty$, entonces:

$$N_1(f_g) = \left[\int_a^b |(f\cdot g)(x)| dx\right] \leq \left[\int_a^b |f(x)| \cdot \max_{a\leq y\leq b} |g(y)| dx\right] = \max_{a\leq x\leq b} |g(x)| \cdot \left[\int_a^b |f|\right]$$

$$= N_\infty(g)\cdot N_1(f) = N_1(f)\cdot N_\infty(g).$$

Si $p,q \in (1,+\infty)$, entonces:

a) Suponga que $N_p(f) = N_q(g) = 1$, usando el lema anterior, con:

$$\alpha := |f(x)|^p,\ \beta = |g(x)|^q,\ \lambda = \frac{1}{p} \text{ y } 1-\lambda = \frac{1}{q}$$

$\forall x \in [a,b]$ se tiene:

$$\alpha^\lambda \cdot \beta^{1-\lambda} \leqslant \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta$$
$$\Rightarrow |f(x)\cdot g(x)| \leqslant \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q$$

Por tanto:

$$N_1(f\cdot g) = \int_a^b |f(x)\cdot g(x)|\,dx \leqslant \frac{1}{p}\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right) + \frac{1}{q}\left(\int_a^b |g(x)|^q\right)$$
$$= \frac{1}{p}N_p(f)^p + \frac{1}{q}N_q(g)^q$$
$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = N_p(f)\cdot N_q(g)$$

Lo que prueba el resultado.

b) Si $N_p(f) \neq 0$ y $N_q(g) \neq 0$ (si uno de ellos cero, la desigualdad es trivial, pues $f = \underline{0}$ o $g = \underline{0}$), entonces, como

$$N_p\left(\frac{f}{N_p(f)}\right) = N_q\left(\frac{g}{N_q(g)}\right) = 1$$

se tiene:

$$N_1\left(\frac{f\cdot g}{N_p(f)\cdot N_q(g)}\right) \leqslant N_p\left(\frac{f}{N_p(f)}\right)\cdot N_q\left(\frac{g}{N_q(g)}\right) \Rightarrow N_1(f\cdot g) \leqslant N_p(f)\cdot N_q(g)$$

q.e.d.

Proposición:

Esta proposición va antes que la anterior. Para $N_p : C([a,b]) \to \mathbb{R}$, $p \in [1,+\infty]$ se tiene que:

i) $N_p(f) \geqslant 0$.

ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $N_p(\alpha f) = |\alpha| N_p(f)$.

iii) $N_p(f) = 0 \Leftrightarrow f = \underline{0}$

$\forall f \in C([a,b])$.

Dem:

De i): Sea $f\in C([a,b])$, entonces:

- Si $p\in[1,+\infty)$, $N_p(f)=\left[\int_a^b|f|^p\right]^{1/p}$. Como $|f|^p\geq 0$, entonces $N_p(f)\geq 0$.
- Si $p=+\infty$, entonces: $N_\infty(f)=\max_{a\leq x\leq b}|f(x)|\geq 0$

De ii): Sean $f\in C([a,b])$ y $\alpha\in\mathbb{R}$, entonces:

- Si $p\in[1,+\infty)$, $N_p(\alpha f)=\left[\int_a^b|\alpha f|^p\right]^{1/p}=\left[|\alpha|^p\int_a^b|f|^p\right]^{1/p}=|\alpha|\cdot\left(\int_a^b|f|^p\right)^{1/p}=|\alpha|N_p(f)$
- Si $p=+\infty$, entonces $N_\infty(\alpha f)=\max_{a\leq x\leq b}|\alpha f(x)|=|\alpha|\max_{a\leq x\leq b}|f(x)|=|\alpha|N_\infty(f)$.

De iii):

- Si $p\in[1,+\infty)$, $N_p(f)=0\iff\left[\int_a^b|f|^p\right]^{1/p}=0\iff\int_a^b|f|^p=0\iff|f|^p=0$ $\iff f=\underline{0}$
- Si $p=\infty$, $N_\infty(f)=0\iff\max_{a\leq x\leq b}|f(x)|=0\iff f(x)=0\ \forall x\in[a,b]\iff f=\underline{0}$

q.e.d.

Proposición:

Sean $f,g\in C([a,b])$, entonces $N_p(f+g)\leq N_p(f)+N_p(g)$ $\forall\, p\in[1,+\infty]$.

Dem:

Si $p=1$, entonces:

$$N_1(f+g)=\int_a^b|f+g|\leq\int_a^b|f|+\int_a^b|g|=N_1(f)+N_1(g)$$

Si $p=+\infty$:

$$N_\infty(f+g)=\max_{a\leq x\leq b}|f+g(x)|\leq\max_{a\leq x\leq b}\left(|f(x)|+|g(x)|\right)\leq\max_{a\leq x\leq b}|f(x)|+\max_{a\leq x\leq b}|g(x)|$$
$$=N_\infty(f)+N_\infty(g).$$

Si $p\in(1,+\infty)$, notemos que

$$|f(x)+g(x)|^p=|f(x)+g(x)|^{p-1}\cdot|f(x)+g(x)|$$
$$=|f(x)+g(x)|^{p-1}\cdot|f(x)|+|f(x)+g(x)|^{p-1}\cdot|g(x)|$$

$$\Rightarrow N_p(f+g)^p=\int_a^b|f+g|^p=\int_a^b|f+g|^{p-1}\cdot|f|+\int_a^b|f+g|^{p-1}\cdot|g|=N_1(f\cdot(f+g)^{p-1})+N_1(g\cdot(f+g)^{p-1})$$

por Hölder tenemos que:

$$N_1\left(f(x)\cdot(f(x)+g(x))^{p-1}\right)+N_1\left(g(x)\cdot(f(x)+g(x))^{p-1}\right)\leq N_p(f)\,N_{\frac{p}{p-1}}\left((f+g)^{p-1}\right)+N_p(g)\cdot$$

$$N_{p/p-1}((f+g)^{p-1})$$

Donde

$$N_{\frac{p}{p-1}}((f+g)^{p-1}) = \left[\int_a^b (f+g)^p\right]^{\frac{p-1}{p}} = N_p(f+g)^{p-1}$$

Por tanto:

$$N_p(f+g)^p \leq N_p(f+g)^{p-1} \cdot N_p(f) + N_p(f+g)^{p-1} \cdot N_p(g)$$

$$\Rightarrow N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g)$$

q.e.d

Por las proposiciones anteriores, $(C([a,b]), N_p)$ con $1 \leq p \leq \infty$ es un espacio normado.

EJEMPLOS:

1) Sean d, d' dos métricas sobre X y $1 \leq p \leq \infty$. Se define $d_p: X \times X \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$d_p(x,y) := \left[d(x,y)^p + d'(x,y)^p\right]^{\frac{1}{p}}, \text{ si } 1 \leq p < \infty$$

$$\text{y } d_\infty(x,y) = \max\{d(x,y), d'(x,y)\}$$

$\forall x,y \in X$. Entonces (X, d_p) es un espacio métrico.

Dem:

Ya probamos que d_∞ es una métrica sobre X. Solo probaremos que d_p lo es con $1 \leq p < \infty$.

1) Sean $x,y \in X$, entonces $0 \leq d(x,y)^p + d'(x,y)^p$, luego $0 \leq d_p(x,y)$.

2) $d_p(x,y) = [d(x,y)^p + d'(x,y)^p]^{1/p} = [d(y,x)^p + d'(y,x)]^{p} = d_p(y,x)$

3) $d_p(x,z) = [d(x,z)^p + d'(x,z)^p]^{1/p} \leq$