Teoría de la medida

Instituto Politecnico Nacional

Profesor: José Oscar González Cervantes

2 de marzo de 2025

Índice general

Evaluación parcial (al finalizar cada caítulo):

50 % entregra de ejercicios + 50 % examen escrito.

Bibliografía:

1. Introductory Real Analysis. A. N. Kolmogorov, S.V. Fomin, Ed. Dover publications.

2. Measure Theory. Paul Halmos. Springer Verlag.

3. Introduction to Real Analysis, Bartle, Ed. John Wiley.

4. Real and Complex Analysis. W. Rudin, Ed. Mc Graw-Hill.

Capítulo 1

Preliminares

Ejercicio 1.1.

1. *Son las leyes de distributividad de la teoría de conjuntos:*
   - $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cap (B \cap C), \quad (A \cap B) \cap C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$
   - $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$
   - $(A \cap B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cap C).$
   - $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cup C), \quad (A \cup B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$

2. *Son los principios de dualidad (leyes de Morgan):*

- $\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^c, \quad \left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^c.$
- $\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^c, \quad \left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha.$
- $\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^c, \quad \left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha^c.$
- $\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^c, \quad \left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha^c.$

3. Es la diferencia simétrica entre A y B:

- $A\Delta B := (A \setminus B) \cap (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
- $A\Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cup B)$.
- $A\Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
- $A\Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \cup (A \cap B)$.

4. *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$ *tales que* $a < b$. *Hallar*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right], \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right).$$

- (a, b) *y* $[a, b]$, *respectivamente.*
- $[a, b]$ *y* (a, b), *respectivamente.*
- $\emptyset$ *y* $\mathbb{R}$, *respectivamente.*
- $\mathbb{R}$ *y* $\emptyset$, *respectivamente.*

5. *Sean N,M conjuntos no vacíos y sea $f : N \to M$, dados $A, B \subset M$ se cumple:*

    - $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B), \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$
    - $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B), \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$
    - $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B), \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$
    - $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B), \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$

6. *Dado un conjunto no vacío A. Una relación R en A es un subconjunto de $A \times A$. Diremos que R, $(\sim)$ es que equivalencia si es*

   - *reflexiva, anti-simétrica y transitiva.*
   - *reflexiva, simétrica y transitiva.*
   - *reflexiva y simétrica.*
   - *simétrica y transitiva.*

7. *Un conjunto no vacío A y una relación R en A. Entonces A es descompuesto por conjuntos $\{y \in A \mid xRy\} = [y]$ si y solo si*

   - *R es una relación.*
   - *R es un orden parcial.*
   - *R es una relación de equivalencia.*
   - *R es una relación transitiva.*

8. *Considere* $f(x, y) = x - y$, *para cada* $(x, y) \in \mathbb{N}^2$. *Defina:* $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow f(a, b) = f(c, d)$ *para cada* $(a, b) \in \mathbb{N}^2$. *La relación es:*

   - *Reflexiva, simétrica y transitiva.*
   - *Reflexiva, pero no simétrica y ni transitiva.*
   - *Simétrica pero no reflexiva, ni transitiva.*
   - *Transitiva pero no reflexiva, ni simétrica*

9. *Diremos que A es numerable o contable si es finito o infinito numerable. Ejemplos de conjuntos infinito numerables*

   - $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.
   - $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$.
   - $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$.
   - $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $[0, 1]$.

10. Dado un conjunto A. Los siguientes hechos son equivalentes:

- *1) A es numerable.*
  2) Existe $f : \mathbb{N} \to A$ inyectiva.
  3) Existe $g : A \to \mathbb{N}$ inyectiva.
- *1) A es numerable.*
  2) Existe $f : \mathbb{N} \to A$ inyectiva.
  3) Existe $g : A \to \mathbb{N}$ suprayectiva.
- *1) A es numerable.*
  2) Existe $f : \mathbb{N} \to A$ suprayectiva.
  3) Existe $g : A \to \mathbb{N}$ inyectiva.
- *1) A es numerable.*
  2) Existe $f : \mathbb{N} \to A$ suprayectiva.
  3) Existe $g : A \to \mathbb{N}$ suprayectiva.

11. Si A_n es infinito numerable para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces

- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *es finito.*
- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *es infinito no numerable.*
- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *es vacío.*
- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *es infinito numerable.*

12. *Teorema de Cantor: Dado un conjunto no vacío A entonces no existe $g : A \to \mathcal{P}(A)$ que sea*

    - *inyectiva.*
    - *suprayectiva.*
    - *lineal*
    - *no lineal*

13. *Por* $\aleph_0$ *(Aleph cero) representaremos la cantidad de números naturales. Se verifica que* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$*,* $[0,1]$ *y* $\mathbb{R}$ *son todos equivalentes. Como* $[0,1]$ *es infinito no numerable se dice que tiene la cardinalidad*

    - *del contínuo o la cardinalidad* $\aleph_1$ *(Aleph uno).*
    - *de* $\mathbb{N}$*.*
    - $\aleph_0$ *(Aleph cero).*
    - $\aleph_2$ *(Aleph dos).*

14. *Teorema de Cantor-Bernstein: Sea A y B dos conjuntos tales que existen $A_1 \subset A$ y $B_1 \subset B$ donde A_1 es equivalente a B y B_1 es equivalente a A.*

    - *Entonces A_1 y B_1 son equivalentes.*
    - *Entonces A_1 y B son equivalentes.*
    - *Entonces A y B son equivalentes.*
    - *Entonces A y B_1 son equivalentes.*

15. *Dado un conjunto no vació A. Una relación R en A se dice orden parcial si*

    a) • *es reflexiva, simétrica, transitiva.*

    b) • *es antisimétrica, transitiva y no es reflexiva.*

    c) • *es reflexiva, simétrica y no es transitiva.*

    d) • *es reflexividad, antisimetría, transitividad.*

16. $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \subset)$, $(\mathbb{N} \setminus \{0\},\ |)$*(división) son ejemplos de conjuntos*

- *parcialmente ordenados.*
- *ordenados.*
- *bien ordenados.*
- *ninguno de los de arriba.*

17. *Sea (A, R) un conjunto parcialmente ordenado. Diremos que $B \subset A$ es una cadena en A si*

- xRx *para cada* $x \in B$
- xRy *ó* yRx *para cualesquiera* $x, y \in B$.
- xRy *ó* yRx *para cualesquiera* $x, y \in A$.
- xRy *ó* yRx *para cualesquiera* $x, y \in A \setminus B$.

18. (A, R) *se dice ordenado, simple, linealmente o totalmente ordenado, si*

- *es un conjunto parcialmente ordenado* A.
- *es no es un conjunto parcialmente ordenado* A.
- *es un conjunto parcialmente ordenado* A *y no existen cadenas en* A.
- *es un conjunto parcialmente ordenado y* A *es un cadena en* A.

19. *Un conjunto bien ordenado es un conjunto*

- *es un conjunto parcialmente ordenado* A.
- *es no es un conjunto parcialmente ordenado* A.
- *ordenado* (A, R) *en el que todo subconjunto no vacío tiene un elemento mínimo (o primer elemento).*
- *es un conjunto parcialmente ordenado y* A *es un cadena en* A.

20. Conjuntos finitos y $\mathbb{N}$ *son ejemplos de conjuntos*

- *bien ordenados.*
- *que no son parcialmente ordenados.*
- *infnitos no numerables.*
- *que nos son ordenados.*

Sobre algunos resultados importantes de la teoría de conjuntos en la matemática discreta. Los siguientes hechos son equivalentes:

1. Principio del buen orden: Todo conjunto puede ser dotado de un buen orden. 1904. Ernst Zermelo. Universidad de Berlin.

2. Axioma maximal de Hausdorff. En un conjunto parcialmente ordenado siempre existe al menos una cadena maximal. 1909. Felix Hausdorff. Alemania.

3. Lema de Zorn: Todo conjunto parcialmente ordenado en el que toda cadena tiene una cota superior contiene al menos una elemento maximal. 1935. Max Zorn. Alemania.

4. Axioma de elección: Dado cualquier conjunto A existe una función de elección f tal que $f(B) \in B$ para cada $B \subset A$ no vacío. Erns Zermelo.

5. Axioma de inducción matemática. Ejercicio: Redactar.

Capítulo 2

Teoría de la medida

2.1. Sistemas de conjuntos

Semianillos, anillos, álgebras y σ-álgebras de conjuntos.

Definición 2.1. *Una familia R, o un sistema, de conjuntos no vacía es llamada anillo si $A\Delta B,\ A\cap B\in\mathcal{R}$ para cada $A,B\in\mathcal{R}$.*

Como $A\cup B=(A\Delta B)\Delta(A\cap B)$ y $A\setminus B=A\Delta(A\cap B)$ para cada $A,B\in\mathcal{R}$ entonces en un anillo también se cumple que $A\cup B, A\setminus B\in\mathcal{R}$ para cada $A,B\in\mathcal{R}$.
Note que $\emptyset=A\setminus A$ para $A\in\mathcal{R}$ tenemos que $\emptyset\in\mathcal{R}$.
Más aún, si $A_1,\ldots,A_n\in\mathcal{R}$ entonces $\bigcap_{k=1}^{n}A_k,\bigcup_{k=1}^{n}A_k\in\mathcal{R}$ para cada $A_1,\ldots,A_n\in\mathcal{R}$.

Definición 2.2. *Un elemento $E\in A$ de una familia R de conjuntos no vacía es llamado unidad si $A\cap E=A$ para cada $A\in\mathcal{R}$.*
Una familia R de conjuntos no vacía es llamada álgebra si es un anillo con unidad.

Dado un conjunto A no vacío claramente tenemos que el conjunto potencia de A, denotado por $\mathcal{P}(A)$, es un álgebra donde A es la identidad.

Ejercicio 2.3.

1. *Dado A un conjunto no vacío muestre que $\{\emptyset,A\}$ es un álgebra con unidad A*

2. *Dado A un conjunto no vacío muestre que $\{F\subset A\mid F \text{ es finito }\}$ es un anillo, pero si A es finito entonces es un álgebra con unidad A.*

3. *Muestre que* $\{B \subset \mathbb{R}^n \mid B$ *es acotado*$\}$ *es una anillo pero no un álgebra.*

4. *Muestre que la intersección de cualquier familia de anillos es un anillo.*

Teorema 2.4. *Dada una familia de conjuntos* Φ *no vacía existe un anillo* $\mathcal{R}$ *tal que* $\Phi \subset \mathcal{R}$ *y si* $\mathcal{R}'$ *es otro anillo que cumple* $\Phi \subset \mathcal{R}'$ *entonces* $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}'$

Demostración. Sea $A = \bigcup_{B\in\Phi} B$. Así que $\mathcal{P}(A)$ es un anillo y $\Phi \subset \mathcal{P}(A)$. Defina

$$\mathcal{R} = \bigcap_{\substack{\Phi \subset R \subset \mathcal{P}(A) \\ R \text{ es anillo}}} R.$$

Luego $\mathcal{R}$ es un anillo y si $\mathcal{R}'$ es otro anillo que cumple $\Phi \subset \mathcal{R}'$ entonces $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{R}' \subset \mathcal{R}'$. □

Notación: Dada una familia de conjuntos Φ no vacía. El anillo $\mathcal{R}$ mostrado en el teorema anterior se denotará por $\mathcal{R}(\Phi)$.

Definición 2.5. *Una familia* $\mathcal{S}$ *de conjuntos no vacía es llamada semianillo de conjuntos si y sólo si*

1. $\emptyset \in \mathcal{S}$.

2. $A \cap B \in \mathcal{A}$ *para cada* $A, B \in \mathcal{S}$.

3. *Si* $A, A_1 \in \mathcal{S}$ *con* $A_1 \subset A$ *entonces existen* $A_2, \ldots A_n \in \mathcal{S}$ *ajenos a pares tales que* $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$. *Además, la familia* $\{A_1, \ldots, A_n\}$ *es llamada expansión finita de* A.

Ejercicio 2.6. *Muestre lo siguiente:*

1. *Todo anillo es un semianillo.*

2. *La familia de conjuntos formada por intervalos de la forma* (a, b), $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ *con* $a \leq b$ *es un semianillo pero no es un anillo.*

3. *La familia de rectángulos* $I \times J$ *en* $\mathbb{R}^2$, *donde* I *y* J *son intervalos dados por el ejercicio anterior, es un semianillo pero no es un anillo.*

Lema 2.7. *Dado un semianillo* $\mathcal{S}$ *y* $A, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$ *tales que* $A_1, \ldots, A_n$ *son subconjuntos ajenos a pares de* A. *Entonces* A *tiene una expansión finita de la forma* $A = A_1 \cup \cdots \cup A_s$ *con* $s \geq n$.

Demostración. Inducción matemática.
Si $n = 1$ y como $\mathcal{S}$ es un semianillo existen $A_2, \ldots, A_s \in \mathcal{S}$ tales que $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_s = A$.
Hipotesis de inducción. Suponga que el hecho es cierto para $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$ son subconjuntos ajenos a pares de A.
Sean $A, A_1, \ldots, A_n, A_{n+1} \in \mathcal{S}$ subconjuntos ajenos a pares de A. Como $A_1, \ldots, A_n$ y A cumplen la hipótesis de inducción existen $B_{n+1}, \ldots, B_s \in S$ ajenos a pares tales que

$$A = A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup B_{n+1} \cup \cdots \cup B_s.$$

Además, $A_{n+1} = (B_{n+1} \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_s \cap A_{n+1})$. Por otra parte, para cada $i = n+1, \ldots, s$ tenemos que $B_i \cap A_{n+1} \subset B_i$ son elementos de S. Así que existen $C_1^i, \ldots, C_{p_i}^i \in S$ tales que una expansión finita de B_i partiendo de $B_i \cap A_{n+1}$ es $B_i = (B_i \cap A_{n+1}) \cup C_1^i \cup \cdots \cup C_{p_i}^i$, para $i = n+1, \ldots, s$. Entonces

$$\begin{aligned}
A =& A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup B_{n+1} \cup \cdots \cup B_s \\
=& A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup \left[\bigcup_{i=n+1}^{s} (B_i \cap A_{n+1}) \cup C_1^i \cup \cdots \cup C_{p_i}^i \right] \\
=& A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup \left[\bigcup_{i=n+1}^{s} (B_i \cap A_{n+1}) \right] \cup \left[\bigcup_{i=n+1}^{s} C_1^i \cup \cdots \cup C_{p_i}^i \right] \\
=& A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1} \cup \left[\bigcup_{i=n+1}^{s} C_1^i \cup \cdots \cup C_{p_i}^i \right].
\end{aligned}$$

La cual es una expansión finita de A.

□

Proposición 2.8. *Si S es un semianillo entonces $\mathcal{R}(S)$ esta formado por todas las expansiones finitas en elementos de S; es decir, $A \in \mathcal{R}(S)$ si y sólo si existen $A_1, \ldots, A_n \in S$ ajenos a pares tales que $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$.*

Demostración. Veremos que la familia de expansiones finitas en elementos de S forman un anillo. Sean $\bigcup_{i=1}^{n} A_i, \bigcup_{j=1}^{m} B_j$ expansiones finitas en elementos de S; es decir, $\{A_i \in S \mid i = 1, \cdots, n\}$ y $\{B_j \in S \mid j = 1, \cdots, m\}$ son familias de conjuntos ajenos a pares.

Denote $C_{ij} = A_i \cap B_j \in S$ y use el lema anterior en $A_i, C_{i1}, \cdots C_{im}$. Luego A_i tiene una expansión finita de la forma

$$A_i = \left(\bigcup_{j=1}^{m} C_{ij}\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{r_i} D_{ik}\right) \quad (D_{ik} \in S)$$

Similarmente, el lema anterior en $B_j, C_{1j}, \cdots C_{nj}$ nos da la expansión finita:

$$B_j = \left(\bigcup_{i=1}^{n} C_{ij}\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{s_j} E_{kj}\right) \quad (E_{kj} \in S)$$

Vemos que

$$\begin{aligned}
\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} B_j\right) &= \bigcup_{j=1}^{m}\bigcup_{i=1}^{n} C_{ij}, \\
\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \Delta \left(\bigcup_{j=1}^{m} B_j\right) &= \left(\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{k=1}^{r_i} D_{ik}\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m}\bigcup_{k=1}^{s_j} E_{kj}\right).
\end{aligned}$$

Las cuales son de nuevo expansiones finitas en elementos de S.

Por último, note que cualquier anillo que contenga a S debe tener cualquier expansión finita entre sus elementos. Por lo tanto $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ está formada por expansiones finitas en elementos de S

□

Ejemplo 2.9.

1. *Dados $a < b$. La familia formada por uniones de intervalos ajenos a pares contenidos en $[a, b]$ es un álgebra.*

2. *Dado $n \in \mathbb{N}$. Por simplicidad diremos que un rectángulo en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto de la forma $I_1 \times \cdots \times I_n$, donde $I_1, \ldots, I_n \subset \mathbb{R}$ son intervalos. Se verifica que la familia formada por uniones de rectángulos en $\mathbb{R}^n$ ajenos a pares contenidos en $[0, 1]^n$ es un álgebra.*

Definición 2.10.

1. *Un anillo R es llamado σ-anillo, si para cada familia $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de elementos de R se cumple que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in R$.*

2. *Un anillo R es llamado δ-anillo, si para cada familia $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de elementos de R se cumple que $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \in R$.*

3. *Un σ-anillo con identidad es llamado σ-álgebra.*

4. *Un δ-anillo con identidad es llamado δ-álgebra.*

Teorema 2.11. *Toda σ-álgebra es δ-álgebra y recíprocamente.*

Demostración. Es consecuencia de las identidades

$$E \setminus (\bigcap_{i\in\mathbb{N}} E \setminus A_i) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i, \quad E \setminus (\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E \setminus A_i) = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i,$$

donde E es la unidad. □

Ejercicio 2.12. *Muestre que las siguientes familias son σ-álgebras.*

1. *Sea $E = \{1,2,3,4,5\}$. Considere las familias $A = \{\emptyset, E, \{1,2,3\}, \{4,5\}\}$, $B = \{\emptyset, E, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3,4,5\}, \{2,3,4,5\}, \{1,3,4,5\}\}$.*

2. *La familia $F = \{A \subset \mathbb{R}^n \mid A \text{ es contable } \text{ o } A^c \text{ es contable}\}$.*

Definición 2.13. *Dado un espacio topológico (X, τ), el álgebra de Borel, o B-álgebra, asociada a τ, es la σ-álgebra generada por τ, es decir, es la mínima σ-álgebra que contiene a τ. Es la intersección de todas las σ-álgebras que contienen a τ.*

Note que si A es un conjunto no vacío entonces $\mathcal{P}(A)$ es una B-álgebra, la cual esta asociada a la topología discreta en A. Más aún, si ϕ es una familia de conjuntos entonces $\mathcal{P}(\bigcup_{A\in\phi} A)$ es una B-álgebra que contiene a ϕ.

Sea $\mathcal{B}$ una B-álgebra y ϕ una familia de conjuntos tal que $\phi \subset \mathcal{B}$. Entonces $\bigcup_{A\in\phi} A \subset E$, donde E es la identidad de $\mathcal{B}$. Si $\bigcup_{A\in\phi} A = E$ entonces de dice que $\mathcal{B}$ es irreducible respecto de ϕ.

Teorema 2.14. *Sea ϕ una familia de conjuntos no vacía. Existe una única B-álgebra $\mathcal{B}(\phi)$ que contiene a ϕ, es irreducible respecto de ϕ y que está contenida en cualquier B-álgebra que contiene a ϕ.*

Demostración. Ejercicio. □

$\mathcal{B}(\phi)$ es llamada la Borel cerradura de ϕ.

Ejercicio 2.15. *Escriba un ejemplo de cada uno de los siguientes conceptos: σ-anillo, δ-anillo, σ-álgebra y δ-álgebra.*

2.2. Medida en el plano

2. Medidas sobre semianillos 3. Medidas exteriores. 4. Conjuntos medibles. 5. La medida exterior generada por una medida. 6. La medida de Lebesgue. 7. La medida de Borel.

Comenzaremos por establecer el concepto de medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^2$ debido a su accesibilidad y a que su extensión hacia $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 3$, se da de manera natural.

Definición 2.16. *Por A denotaremos a la familia de intervalos abiertos, cerrado, o semiabiertos contenidos en $\mathbb{R}$. Considere el semianillo*

$$\varphi := \{I \times J \mid I, J \in A\}.$$

Para cada rectágulo P dado por $[a, b] \times (c, d)$, $(a, b) \times [c, d]$, $(a, b) \times (c, d)$, $[a, b] \times [c, d]$ o como $(a, b] \times [c, d)$, con $a \leq b$, defina su medida como $m(P) := (b - a)(d - c)$.

Proposición 2.17. *Propiedades de m.*

1. *$m(P) \geq 0$ para cada $P \in \varphi$.*

2. *Sean $P, P_1, \ldots, P_n \in \varphi$ tales que $P = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} P_i$ y $P_i \cap P_j = \emptyset$, si $i \neq j$. Entonces $m(P) = \sum_{i=1}^{n} m(P_i)$.*

Demostración. Ejercicio. □

Definición 2.18. *La unión de una cantidad finita de rectangulos ajenos a pares es llamada conjunto elemental.*

Teorema 2.19. *La unión, intersección, diferencia y la diferencia simétrica de conjuntos elementales con también conjuntos elementales*

Demostración. Sea $A = \bigcup P_k$, $B = \bigcup Q_l$, notemos que $A \cap B = \bigcup P_k \cap Q_l$, donde los conjuntos $P_k \cap Q_l$ son rectangulos y ajenos a pares; es decir, $A \cap B$ es elemental. Note que si P y Q son rectangulos entonces $P \backslash Q$ es un conjunto elemental. Más aún, un rectangulo P menos un conjunto elemental se verifica que es de nuevo un conjunto elemental. De esta manera si P es un rectangulo que contiene a A y a B tenemos que

$$A \cup B = P \setminus [(P \setminus A) \cap (P \setminus B)]$$

el cual por razonamientos anterior es elemental.

Además

$$A \setminus B = A \cap (P \setminus B)$$

$$A \bigtriangleup B = (A \cap B) \setminus (A \cap B)$$

muestran que también son conjuntos elementales. □

Lo anterior muestra que la familia de todos los conjuntos elementales en el plano forman un anillo.

Definición 2.20. *Dado $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto elemental con $A = \bigcup_{i=1}^n Q_i$, donde $\{Q_i\}_{i=1}^n$ es una familia de rectángulos ajenos a pares. Entonces definimos a medida de A como $\tilde{m}(A) = \sum_{i=0}^n m(Q_i)$.*

Si $A = \bigcup_{j=1}^r P_j$, donde $\{P_j\}_{j=1}^m$ es otra familia de rectángulos ajenos a pares. Entonces

$$\bigcup_{i=1}^n Q_i = \bigcup_{i=1}^n (\bigcup_{j=1}^r Q_i \cap P_j) = \bigcup_{j=1}^r (\bigcup_{i=1}^n P_j \cap Q_i) = \bigcup_{j=1}^r P_j$$

De las propiedades de la medida de rectángulo vemos que

$$\sum_{i=1}^n m(Q_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r m(Q_i \cap P_j) = \sum_{j=1}^r m(P_j).$$

Entonces la medida de un conjunto elemental dado en la definición anterior esta bien establecida ya que es independiente de la familia de rectángulos ajenos a pares. Además, tenemos que $\tilde{m}(A) \geq 0$ para cada conjunto elemental A en el plano.

Además note que si A y B son conjuntos elementales ajenos entonces $\tilde{m}(A \cup B) = \tilde{m}(A) + \tilde{m}(B)$; es decir, $\tilde{m}$ es aditiva en la familia de conjuntos elementales.

Note que cualquier rectángulo A es un conjunto elemental y $m(A) = \tilde{m}(A)$.

Proposición 2.21. *Sea A un conjunto elemental y sea $(A_n)_{n \in I}$ una familia numerable de conjuntos elementales tales que $A \subset \bigcup_{n \in I} A_n$. Entonces*

$$\tilde{m}(A) \leq \sum_{n \in I} \tilde{m}(A_n).$$

Demostración. Dado $\epsilon > 0$ sea C un conjunto elemental cerrado tal que $C \subset A$ y

$$\tilde{m}(A) \leq \tilde{m}(C) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Para cada $n \in I$ sea B_n un elemental abierto tal que $A_n \subset B_n$ y

$$\tilde{m}(B_n) \leq \tilde{m}(A_n) + \frac{\epsilon}{2^{n+1}}.$$

Así que $C \subset \bigcup_{n\in I} B_n$. Del Teorema de Heine -Borel sabemos que C es un conjunto compacto luego

$$C \subset B_{n_1} \cup \cdots \cup B_{n_m}$$

y se verifica de manera directa que

$$\tilde{m}(C) \leq \tilde{m}(B_{n_1}) + \cdots + \tilde{m}(B_{n_m}).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\tilde{m}(A) \leq& \tilde{m}(C) + \frac{\epsilon}{2} \\
\leq& \tilde{m}(B_{n_1}) + \cdots + \tilde{m}(B_{n_m}) + \frac{\epsilon}{2} \\
\leq& \sum_{n\in I} \tilde{m}(B_n) + \frac{\epsilon}{2} \\
\leq& \sum_{n\in I} \left(\tilde{m}(A_n) + \frac{\epsilon}{2^{n+1}}\right) + \frac{\epsilon}{2} \\
\leq& \sum_{n\in I} \tilde{m}(A_n) + \epsilon.
\end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ fue arbitrario se concluye

$$\tilde{m}(A) \leq \sum_{n\in I} \tilde{m}(A_n).$$

□

El siguiente razonamiento puede presentarse considerando cualquier rectángulo como unidad pero sin pérdida de generalidad supondremos $E = [0,1] \times [0,1]$.

Definición 2.22. *Dado $A \subset E$. La media exterior de A se define como*

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_{i\in I} m(Q_i) \mid A \subset \bigcup_{i\in I} Q_i, \text{ una cubierta numerable de rectángulos de } A\}.$$

Por otra parte, la medida interior de A se define como

$$\mu_*(A) = 1 - \mu^*(E \setminus A).$$

Teorema 2.23. *Para cada $A \subset E$ se cumple que*

$$\mu_*(A) \leq \mu^*(A).$$

Demostración. Supongamos que existe $A \subset E$ tal que

$$\mu_*(A) > \mu^*(A).$$

Entonces

$$1 > \mu^*(E \setminus A) + \mu^*(A).$$

Por lo tanto, existe $(Q_i)_{i\in I}$ cubierta numerable de rectángulos de $E \setminus A$ y $(P_j)_{i\in J}$ cubierta numerable de rectángulos de A tales que

$$1 > \sum_{i\in I} m(Q_i)) + \sum_{j\in J} m(P_j).$$

Pero $E = A \cup (E \setminus A) \subset (\bigcup_{i\in I} Q_i) \sup(\bigcup_{j\in J} P_j)$ y por la Proposición 2.21 sabemos que

$$1 = m(E) \leq \sum_{i\in I} m(Q_i) + \sum_{j\in J} m(P_j),$$

lo cual es una contradicción.

Por lo tanto,

$$\mu_*(A) \leq \mu^*(A), \quad \forall A \subset E.$$

□

Definición 2.24. *Diremos que $A \subset E$ es medible, si $\mu_*(A) = \mu^*(A)$*

Definición 2.25. *Si $A \subset E$ es medible entonces $\mu(A) := \mu_*(A) = \mu^*(A)$ es llamada medida (medida de Lebesgue) de A.*

Teorema 2.26. *Dados $A \subset E$ y una familia numerable $(A_i)_{i\in I}$ de subconjuntos de E tales que $A \subset \bigcup_{i\in I} A_i$. Entonces*

$$\mu^*(A) \leq \sum_{i\in I} \mu^*(A_i).$$

Demostración. Dado $\epsilon > 0$ para cada $i \in I$ existe una familia numerable de rectángulos $(Q_{j,i})_{j\in I_i}$ tales que

$$A_i \subset \bigcup_{j\in I_i} Q_{j,i} \quad \text{y} \quad \sum_{j\in I_i} m(Q_{j,i}) < \mu^*(A_i) + \frac{\epsilon}{2^i}.$$

Entonces

$$A \subset \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in I_i} Q_{j,i}$$

Por definiciónde medida exterior sabemos que

$$\mu^*(A) \leq \sum_{i\in I}\sum_{j\in I_i} m(Q_{j,i}) < \sum_{i\in I}(\mu^*(A_i) + \frac{\epsilon}{2^i}) \leq \sum_{i\in I}\mu^*(A_i) + \epsilon$$

Como $\epsilon > 0$ fue arbitrario concluimos que

$$\mu^*(A) \leq \sum_{i\in I}\mu^*(A_i).$$

□

Teorema 2.27. *Sea $A \subset E$. Si A es elemental entonces es medible y $\mu(A) = \tilde{m}(A)$.*

Demostración. Sea $(P_i)_{i=1}^n$ una familia de rectángulos ajenos a pares tales que $A = \bigcup_{i=1}^n P_i$. Luego $\tilde{m}(A) = \sum_{i=1}^n m(P_i)$. De la definición de medida exterior tendremos que $\mu^*(A) \leq \tilde{m}(A)$.

Además, para cualquier cubierta numerable de rectangulos $(Q_i)_{i\in}$ de A se cumple que $\tilde{m}(A) \leq \sum_{i\in I} m(Q_i)$ por lo tanto $\tilde{m}(A) \leq \mu^*(A)$. En consecuencia, $\tilde{m}(A) = \mu^*(A)$.

Por otra parte, $E \setminus A$ es otro elemental y por lo anterior vemos que $\mu^*(E \setminus A) = \tilde{m}(E \setminus A) = 1 - \tilde{m}(A)$. Por la definición de medida interior tenemos que

$$\mu_*(A) = 1 - \mu^*(E \setminus A) = 1 - \tilde{m}(E \setminus A) = 1 - (1 - \tilde{m}(A)) = \tilde{m}(A) = \mu^*(A).$$

Por lo tanto A es medible.

□

Proposición 2.28. *Para cada $A, B \subset E$ se cumple que*

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A\Delta B).$$

Demostración. Como $A \subset B \cup (A\Delta B)$ y $B \subset A \cup (A\Delta B)$. Del Teorema 2.26 tendremos que

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B) + \mu^*(A\Delta B), \quad \mu^*(B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(A\Delta B),$$

es decir

$$-\mu^*(A\Delta B) \leq \mu^*(B) - \mu^*(A) \leq \mu^*(A\Delta B).$$

□

Teorema 2.29. *Sea $A \subset E$. Luego A es medible si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe un conjunto elemental $B \subset E$ tal que*

$$\mu^*(A\Delta B) < \epsilon.$$

Demostración.
Suficiencia. De la proposición anterior y como

$$(E \setminus A)\Delta(E \setminus B) = A\Delta B$$

tenemos que

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)|,\ |\mu^*(E \setminus A) - \mu^*(E \setminus B)| < \epsilon;$$

es decir

$$\mu^*(B) - \epsilon < \mu^*(A) < \mu^*(B) + \epsilon,$$
$$\mu^*(E \setminus B) - \epsilon < \mu^*(E \setminus A) < \mu^*(E \setminus B) + \epsilon.$$

Como B y $E \setminus B$ son elementales recuerde que

$$\mu^*(B) + \mu^*(E \setminus B) = \tilde{m}(B) + \tilde{m}(E \setminus B) = 1.$$

Entonces sumando las los términos de las anteriores desigualdades tendremos

$$1 - 2\epsilon \leq \mu^*(A) + \mu^*(E \setminus A) \leq 1 + 2\epsilon,$$

es decir $|\mu^*(A)+\mu^*(E\setminus A)-1| < 2\epsilon$. Entonces $\mu^*(A) = 1-\mu^*(E\setminus A) = \mu_*(A)$.
Necesidad. Dado $\epsilon > 0$ existen dos familias numerables de rectágulos $(B_i)_{i\in I}$ y $(C_j)_{j\in J}$ en E tales que $A \subset \bigcup B_{i\in I}$ y $E \setminus A \subset \bigcup C_{j\in J}$ con

$$\sum_{i\in I} m(B_i) < \mu^*(A) + \epsilon, \quad \sum_{j\in J} m(C_j) < \mu^*(E \setminus A) + \epsilon.$$

Como $\sum_{i\in I} m(B_i)$ converge existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n>N} m(B_n) < \epsilon.$$

Sea $B = \bigcup_{n=1}^{N} B_n$ y note que

$$A \setminus B \subset P := \bigcup_{n>N} B_n, \quad B \setminus A \subset Q := \bigcup_{j\in J} C_j \cap B.$$

Además, $A\Delta B \subset P \cup Q$ y

$$\begin{aligned}
\mu^*(P) \leq \sum_{n>N} m(B_n) &< \epsilon, \\
\sum_{i\in I} m(B_i) + \sum_{j\in J} m(C_j) &< \mu^*(A) + \mu^*(E \setminus A) + 2\epsilon = 1 + 2\epsilon, \\
\sum_{i\in I} m(B_i) + \sum_{j\in J} \tilde{m}(C_j - B) &\geq 1,
\end{aligned}$$

Lo último se debe a que $(\bigcup_{i\in I} B_i) \cup (\bigcup_{j\in J}(C_j \setminus B)) = E$. Por lo tanto,

$$\sum_{j\in J} m(C_j) - \sum_{j\in J} \tilde{m}(C_j - B) < 2\epsilon,$$

Debido a que

$$\sum_{j\in J} m(C_j) = \sum_{j\in J} m(C_j \cap B) + \sum_{j\in J} \tilde{m}(C_j - B),$$

tenemos

$$\mu^*(Q) \leq \sum_{j\in J} m(C_j \cap B) < 2\epsilon.$$

Por último note que

$$\mu^*(A\Delta B) \leq \mu^*(P \cup Q) \leq \mu^*(P) + \mu^*(Q) < 3\epsilon.$$

□

Teorema 2.30. *La unión e intersección de una cantidad finita de conjuntos medibles es medible.*

Demostración. Dados A_1,A_2 medibles y $\epsilon > 0$, del teorema anterior existen B_1, B_2 conjuntos elementales tales que

$$\mu^*(A_1\Delta B_1) < \frac{\epsilon}{2}, \qquad \mu^*(A_2\Delta B_2) < \frac{\epsilon}{2}$$

Luego $(A_1 \cup A_2)\Delta(B_1 \cup B_2) \subset (A_1\Delta B_1) \cup (A_2\Delta B_2)$ implica

$$\mu^*((A_1 \cup A_2)\Delta(B_1 \cup B_2)) \leq \mu^*(A_1\Delta B_1) + \mu^*(A_2\Delta B_2) < \epsilon$$

Como $B_1 \cup B_2$ es un conjunto elemental de nuevo el teorema anterior nos muestra que $A_1 \cup A_2$ es medible.

Noté que A_1 es medible si y sólo si $\mu^*(A_1) + \mu^*(E \setminus A_1) = 1$, es decir, si y sólo si $E \setminus A_1$ es medible. Lo mismo para A_2. Así que

$$A_1 \cap A_2 = E \setminus [(E \setminus A_1) \cup (E \setminus A_2)]$$

Por lo tanto, $A_1 \cap A_2$ es medible □

Corolario 2.31. *La diferencia y la diferencia simétrica de dos conjuntos medibles es medible.*

Demostración. Ejercicio. □

Teorema 2.32. *Si A_1 y A_2 conjuntos medibles y ajenos entonces $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$*

Demostración. Sea $A = A_1 \cup A_2$ entonces, por el Teorema 2.26 sabemos que

$$\mu(A) \leq \mu(A_1) + \mu(A_2). \tag{2.1}$$

Como A_1 y A_2 son conjuntos medibles sabemos que dado $\epsilon > 0$ existen conjuntos elementales B_1 y B_2 tales que $\mu^*(A_1 \Delta B_1) < \epsilon$ y $\mu^*(A_2 \Delta B_2) < \epsilon$.

Sea $B = B_1 \cup B_2$, por otro lado como A_1 y A_2 son ajenos tenemos que $B_1 \cap B_2 \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$ (en efecto, dado $x \in B_1 \cap B_2$, los posibles casos: a) $x \in A_1$ y $x \notin A_2$, b) $x \notin A_1$ y $x \in A_2$ y c) $x \notin A_1$ y $x \notin A_2$ nos ayudan a ver que $x \in (B_1 \setminus A_1) \cup (B_2 \setminus A_2)$). Por lo tanto, del Teorema 2.26 vemos que

$$\tilde{m}(B_1 \cap B_2) = \mu^*(B_1 \cap B_2) \leq \mu^*(A_1 \Delta B_1) + \mu^*(A_2 \Delta B_2) < 2\epsilon. \tag{2.2}$$

Del Teorema 2.29 tenemos que

$$|\tilde{m}(B_1) - \mu^*(A_1)| \leq \mu^*(A_1 \Delta B_1) < \epsilon, \quad |\tilde{m}(B_2) - \mu^*(A_2)| < \epsilon. \tag{2.3}$$

Como la medida es aditiva en conjuntos elementales sabemos que

$$\begin{aligned} \tilde{m}(B) =& \tilde{m}(B_1) + \tilde{m}(B_2) - \tilde{m}(B_1 \cap B_2) > \tilde{m}(B_1) + \tilde{m}(B_2) - 2\epsilon \\ \geq& \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 4\epsilon, \end{aligned} \tag{2.4}$$

en donde fueron usadas las ecuaciones (2.2) y (2.3).

Se verifica que $A \Delta B \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$. Luego,

$$\mu^*(A \Delta B) \leq \mu^*(A_1 \Delta B_1) + \mu^*(A_2 \Delta B_2) < 2\epsilon. \tag{2.5}$$

Además, como $B \subset (A\Delta B) \cup A$ tenemos que

$$\begin{aligned}\mu^*(A) >&\tilde{m}(B) - \mu^*(A\Delta B)\\ >&\tilde{m}(B) - 2\epsilon\\ \geq&\mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 6\epsilon\\ \therefore \quad \mu^*(A) \geq&\mu^*(A_1) + \mu^*(A_2),\end{aligned}$$

en donde hemos usado (2.4) y (2.5). De la ecuación anterior y de (2.1) se conluye la demostración. □

Teorema 2.33. *La unión e intersección de una cantidad infinita numerable de conjuntos medibles son conjuntos medibles*

Demostración. Considere $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos medibles y defina

$$A'_1 = A_1, \quad A'_2 = A_2 \setminus A_1, \quad \dots \quad A'_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right), \ \dots$$

Como las operaciones usadas arriba son cerradas en la familai de los conjuntos medibles. Tenemos que $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de conjuntos medibles ajenos a pares que cumple:

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n.$$

Del teorema anterior y de la definición de medida exterior sabemos que

$$\sum_{n=1}^{N} \mu(A'_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A'_n\right) \leq \mu^*(A)$$

para cada $N \in \mathbb{N}$. Así que la serie de términos no negativos $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A'_n)$ al ser acotada sabemos que converge.

Por lo tanto, dado $\epsilon > 0$ existe $l \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=l+1}^{\infty} \mu(A'_n) < \epsilon.$$

Como $\bigcup_{n=1}^{l} A'_n$ es medible existe un conjunto elemental B tal que

$$\mu^*\left[\left(\bigcup_{n=1}^{l} A'_n\right) \Delta B\right] < \epsilon.$$

Además, $A\Delta B \subset \left[\left(\bigcup_{n=1}^{l} A'_n\right)\Delta B\right] \cup \left(\bigcup_{n=l+1}^{\infty} A'_n\right)$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\mu^*(A\Delta B) \leq& \mu^*\left[\left(\bigcup_{n=1}^{l} A'_n\right)\Delta B\right] + \mu^*\left(\bigcup_{n=l+1}^{\infty} A'_n\right)\\ <&\epsilon + \sum_{n=l+1}^{\infty} \mu^*(A'_n)\\ <&2\epsilon\end{aligned}$$

Por tanto A es medible

Por último note que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(E \setminus A_n)$$

Así que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ es también un conjunto medible □

Teorema 2.34. *Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de conjuntos medibles que son ajenos a pares entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Demostración. Sea $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Del Teorema 2.26 sabemos que $\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Por otra parte, como $\bigcup_{n=1}^{N} A_n \subset A$ tenemos que

$$\sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) = \mu\left(\sum_{n=1}^{N} A_n\right) < \mu(A) \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu(A)$. □

Teorema 2.35. *Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos medibles decreciente, es decir, $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

Demostración. Suponga que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, luego $A_1 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \cdots$ y en general para cada $n \in \mathbb{N}$ $\quad A_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \setminus A_{k+1}$. Del teorema anterior tenemos que

$$\mu(A_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \setminus A_{k+1}),$$

es decir, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \setminus A_{k+1})$ converge y entonces

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k \setminus A_{k+1}) = 0 = \mu(\emptyset) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

Si $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$ defina $A'_k = A_k \setminus (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$ y note que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A'_k = \emptyset$. Por lo anterior

$$0 = \lim_{k\to\infty} \mu(A'_k) = \lim_{k\to\infty} \mu\left[A_k \setminus \left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\right)\right] = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

□

Corolario 2.36. *Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos medible creciente, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

Demostración. Consiere $A'_n = E \setminus A_n$ y aplique el teorema anterior a $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}}$
□

Observación 2.37. *La medida μ es aditiva, pues si A_1 y A_2 son conjuntos medibles ajenos entonces $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$. Además, también se llama σ-aditiva, pues si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de conjuntos medibles ajenos a pares se cumple $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.*

Por otra parte, vemos que los conjuntos abiertos son uniones numerables de rectángulos y por lo tanto son medibles. Los conjuntos cerrados también son medibles al ser complementos de conjuntos abiertos en E.

Notación 2.38. *Defina las siguientes familias de conjuntos:*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_m &: \textit{Familia de rectangulos contenidos en } E, \\ \mathcal{F}_{\tilde{m}} &: \textit{Familia de conjuntos elementales en } E, \\ \mathcal{F}_\mu &: \textit{Familia de conjuntos medibles en } E. \end{aligned}$$

Vemos que $\mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_{\tilde{m}} \subset \mathcal{F}_\mu$. Además, $\mathcal{F}_m$ es un semianillo y $\mathcal{F}_{\tilde{m}}$ es un anillo. Porúltimo, la familia $\mathcal{F}_\mu$ es una σ-álgebra.

Observación 2.39. *En los cálculos anteriores se consideran sólo subconjuntos de E. Pero podemos extender los resultados a todo el plano en dos formas*

1. *Denote* $E_{mn} := [m, m+1] \times [n, n+1]$ *para* $m, n \in \mathbb{Z}$ *de esta manera diremos que* $A \subset \mathbb{R}^2$ *es medible si y solo si para cada* $m, n \in \mathbb{Z}$ *el conjunto* $A_{mn} = A \cap E_{mn}$ *es medible. Además, si la serie* $\sum \mu(A_{mn})$ *converge, diremos que su medida es* $\mu(A) = \sum\sum(A_{mn})$*. Por otra parte, si* $\sum(A_{mn})$ *diverge diremos que el conjunto medible* A *tiene medida infinita.*

2. *Considere* $E_n := [-n, n] \times [-n, n]$*, para cada* $n \in \mathbb{N}$*. Diremos que* $A \subset \mathbb{R}^2$ *es medible si y sólo si* $A_n = A \cap E_n$ *es medible para cada* $n \in \mathbb{N}$*. Si la sucesión* $(\mu(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge la medida de* A *es* $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ *en caso contrario diremos que* A *tiene medida infinita.*

La medida μ *extendida de cualquiera de las dos formas anteriores continua siendo aditiva y* σ*-aditiva. Más aún, se trata de la misma medida* μ *extendida.*

Ejercicio 2.40.

1. *Construya la medida de Lebesgue en* $\mathbb{R}$ *empleando intervalos en lugar de rectángulos.*

2. *Muestre que si* A *es medible en* $\mathbb{R}^2$ *entonces para todo* $a \in \mathbb{R}^2$*,* $A + a = \{x + a | x \in A\}$ *es también medible y* $\mu(A) = \mu(A + a)$*.*

   Sugerencia: Note que si $P \subset \mathbb{R}^2$ *es un rectángulo entonces* $P + a$ *es otro rectángulo y* $m(P) = m(P + a)$*.*

3. *Sea* $A \subset E$ *tal que* $\mu^*(A) < +\infty$*. Muestre que si existe* $B \subset A$ *conjunto medible con* $\mu(B) = \mu^*(A)$*, entonces* A *es medible ¿Qué sucede si* $\mu^*(A) = +\infty$*?*

   Sugerencia: Note que $E \setminus A \subset E \setminus B$ *y* $\mu(B) = \mu^*(A)$ *implican*

   $$1 \leq \mu^*(E \setminus A) + \mu^*(A) \leq \mu^*(E \setminus B) + \mu(B) = \mu^*(E \setminus B) + \mu^*(B) = 1.$$

4. *Muestre que si* $A \subset E = [0, 1] \times [0, 1]$ *es un conjunto cuya frontera es un conjunto medible de medida cero es medible.*

   Sugerencia: Note que $\overline{A}$ *y* A° *son conjuntos medibles. Además,* $A^\circ \subset A \subset \overline{A}$*,* $\overline{A} = \partial A \cup A^\circ$ *implican* $\mu^*(A^\circ) = \mu^*(A) = \mu^*(\overline{A})$*. Al final use el ejercicio anterior.*

5. *Sea* $A \subset \mathbb{R}^2$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Muestre que* $\mu^*(\alpha A) = \alpha^2 \mu^*(A)$ *donde* $\alpha A = \{\alpha x | x \in A\}$ *y que si* A *es medible entonces* αA *es también medible.*

6. *Muestre que todo conjunto finito en el rectángulo* $E = [0,1] \times [0,1]$ *es medible y tiene medida cero.*

   Sugerencia: Si $A = \{(x,y)\}$ *entonces para cada* $\epsilon > 0$ *tenemos* $A \subset (x - \frac{\sqrt{\epsilon}}{2}, x + \frac{\sqrt{\epsilon}}{2}) \times (y - \frac{\sqrt{\epsilon}}{2}, y + \frac{\sqrt{\epsilon}}{2})$. *Luego* $\mu^*(A) < \epsilon$ *y* $1 - \epsilon < \mu^*(E \backslash A) < 1$

7. *Pruebe que* $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ *es medible y tiene medida cero.*

   Sugerencia: $\mathbb{Q}$ *es un conjunto infinito numerable. Entonces denotemos cada número racional por* q_n, *donde* $n \in \mathbb{N}$. *Luego* $\mathbb{Q} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \{q_n\}$ *y para cada* $\epsilon > 0$ *se cumple*

$$\mathbb{Q} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (q_n - \frac{\epsilon}{2^n}, q_n + \frac{\epsilon}{2^n}).$$

8. *Considere* $F_0 = [0,1]$, $F_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$, $F_2 = [0,1/9] \cup [2/9,3/9] \cup [6/9,7/9] \cup [8/9,1]$. *Así sucesivamente, el siguiente conjunto se forma de dividir cada intervalo en tres y solo tomamos en cuenta las dos partes extremas. En general* $F_0 \supset F_1 \supset F_2 \supset \cdots$. *El conjunto de cantor se define como* $\bigcap_{n=0}^{\infty} F_n$, *muestre que el conjunto de cantor es medible y tiene medida cero.*

   Sugerencia: Teorema 2.35.

9. *Muestre que la cardinalidad de la familia de todos los conjuntos medibles contenidos en* $[0,1]$ *es mayor o igual que la del continuo.*

   Sugerencia: Para cada $x \in [0,1]$ *defina* $f(x) = [0,x]$ *el cual es un conjunto medible. Así que la función* f *es inyectiva. Luego la cardinalidad de familia de todos los conjuntos medibles contenidos en* $[0,1]$ *es mayor o igual que la del continuo.*

10. *Muestre que todo conjunto medible de medida positiva en el intervalo* $[0,1]$ *contiene un par de puntos cuya distancia es un número racional*

Demostración. Contradicción. Suponemos que $A \subset [0,1]$ tiene medida positiva y que ningún par de elementos de A tienen distancia un número racional.

Veamos dos casos:

a) Suponga que $\sup A < 1$. Por la propiedad Arquimediana existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < 1 - \sup A$ luego $\frac{1}{n} < 1 - \sup A$ para cada $n \geq N$. Entonces, $\sup A + \frac{1}{n} < 1$ para cada $n \geq N$. Note que cada elemento de $A + \frac{1}{n}$ con $n \geq N$ es de la forma $a + \frac{1}{n}$ con $a \in A$ luego $0 \leq a + \frac{1}{n} \leq \sup A + \frac{1}{n} < 1$; es decir, $a + \frac{1}{n} \in [0,1]$. Entonces $A + \frac{1}{n} \subset [0,1]$ para cada $n \geq N$.

Note que si $x \in (A + \frac{1}{n}) \cap A$, con $n \geq N$, entonces existen $a, b \in A$ tales que $x = a + \frac{1}{n} = b$. Luego $|a - b| = \frac{1}{n}$. Lo cual no puede ocurrir. Así que $(A + \frac{1}{n}) \cap A = \emptyset$ para cada $n \geq N$. De forma similar se verifica que si $n, m \in \mathbb{N}$ son diferentes entonces $(A + \frac{1}{n}) \cap (A + \frac{1}{n}) = \emptyset$.

Por lo anterior $\bigcup_{n \geq N} (A + \frac{1}{n}) \subset [0,1]$ y

$$\infty = \sum_{n \geq N} \mu(A) = \sum_{n \geq N} \mu(A + \frac{1}{n}) = \mu(\bigcup_{n \geq N} (A + \frac{1}{n})\ ) \leq \mu([0,1]) = 1.$$

Lo cual es una contradicción.

b) En caso de que $\sup A = 1$. Por la propiedad Arquimediana existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \mu(A)$. Note que el conjunto $B = A \setminus [1 - \frac{1}{N}, 1]$ tiene medida positiva y que ningún par de elementos de B tienen distancia un número racional. Ya que $\mu(B) \geq \mu(A) - \frac{1}{N} > 0$ y $B \subset A$. Además, $\sup B \leq 1 - \frac{1}{N} < 1$. Por el caso anterior llegaremos a una contradicción.

$\square$

11. *Sea $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Sea $\alpha \in \mathbb{I}$, defina $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \sim z_2$ si y solo si z_2 se obtiene vía una rotación un ángulo $n\pi\alpha$ ($n \in \mathbb{Z}$) de z_1. Verifique que $\sim$ es una relación de equivalencia y muestre que Φ_0 formado eligiendo un punto de cada clase, no es medible.*

Demostración. Contradicción. Suponga que Φ_0 es medible. Para $n, m \in \mathbb{Z}$ diferentes si $z \in e^{in\pi\alpha}\Phi_0 \cap e^{im\pi\alpha}\Phi_0$ entonces existen $z_1, z_2 \in \Phi_0$ tales que

$$z = e^{in\pi\alpha} z_1 = e^{im\pi\alpha} z_2$$

$$z_1 = e^{i(-n+m)\pi\alpha} z_2,$$

entonces $z_1 \sim z_2$ por lo que z_1 y z_2 están en la misma clase. Debido a la creación de Φ_0 tendremos que $z_1 = z_2$. Entonces $1 = e^{i(-n+m)\pi\alpha}$, lo cual implica $(-n+m)\pi\alpha = 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Así que $\alpha = \dfrac{2k}{-n+m} \in \mathbb{Q}$. Pero $\alpha \in \mathbb{I}$, así que

$$e^{in\pi\alpha}\Phi_0 \cap e^{im\pi\alpha}\Phi_0 = \emptyset.$$

Dado $z \in C$ entonces existe $w \in \Phi_0$ tal que $w \in [z]$ luego $z \sim w$ y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $z = e^{in\pi\alpha} w$. Entonces $z \in e^{in\pi\alpha}\Phi_0$. Así que $C = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} e^{in\pi\alpha}\Phi_0$.

Si Φ_0 es medible y $\mu(\Phi_0) > 0$ entonces

$$\mu(C) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu(e^{in\pi\alpha}\Phi_0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu(\Phi_0) = \infty.$$

Si Φ_0 es medible y $\mu(\Phi_0) = 0$ entonces

$$\mu(C) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu(e^{in\pi\alpha}\Phi_0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu(\Phi_0) = 0.$$

Lo cual es falso.

□

Observación 2.41. *Un conjunto $B \subset \mathbb{R}^2$, considere μ^* la medida exterior, se dice de Caratheodory medible si $\mu^*(C) = \mu^*(C \cap B) + \mu^*(C \setminus B)$ para todo $C \subset \mathbb{R}^2$. Además, si $B \subset E$ entonces B es Caratheodory medible si y sólo si es Lebesgue medible en E. Por ejemplo, si B es Caratheodory medible entonces $C = E$ tenemos*

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \setminus B),$$

$$1 = \mu^*(B) + \mu^*(E \setminus B).$$

2.3. Teoría de la medida general

Definición 2.42. *Dado un semianillo de conjuntos φ_m, una función $m : \varphi_\mu \to \mathbb{R}$ es llamada medida, si*

a) $m(A) \geq 0, \quad \forall A \in \varphi_\mu$.

b) m *es aditiva.*

Observación 2.43. *Note que $m(\emptyset) = 0$. Ya que $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$ y μ es aditiva tendremos que $m(\emptyset) = m(\emptyset) + m(\emptyset)$. Por lo tanto $m(\emptyset) = 0$.*

Teorema 2.44. *Sea m una medida en el semianillo φ_m. Si $A, A_1, \cdots, A_n \in \varphi_m$ tales que $A_1, \cdots, A_n$ son ajenos a pares y son subconjuntos de A entonces*

$$\sum_{k=1}^{n} m(A_k) \leq m(A)$$

Demostración. Sabemos que existe una expansión finita de A de la forma $A = \bigcup_{k=1}^{s} A_k$ con $s \geq n$. Luego

$$\sum_{k=1}^{n} m(A_k) \leq \sum_{k=1}^{s} m(A_k) = m(A).$$

□

Teorema 2.45. *Sea m una medida sobre un semianillo φ_m, sean $A, A_1, \cdots, A_n \in \varphi_m$, tales que $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Entonces*

$$m(A) \leq \sum_{k=1}^{n} m(A_k).$$

Demostración. Existe una familia finita $\{B_1, \cdots, B_n\}$ de elementos de φ_m, ajenos a pares tales que $A = \bigcup_{s \in M_0} B_s$ y $A_k = \bigcup_{s \in M_k} B_s$ para $k = 1, \cdots, n$. Para esto se emplea la propiedad de expansiones finitas del semianillo.

Por último,

$$m(A) = \sum_{s \in M_0} m(B_s) \leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{s \in M_k} m(B_s) \leq \sum_{k=1}^{n} m(A_k).$$

□

Corolario 2.46. *Si $A, A' \in \varphi_m$ y $A \subset A'$, entonces $m(A) \leq m(A')$.*

Definición 2.47. *La medida μ es llamada extensión de la medida m si $\varphi_m \subset \varphi_\mu$ y $m(A) = \mu(A)$ para toda $A \in \varphi_m$.*

Teorema 2.48. *Toda medida m en un semianillo φ_m tiene una única extensión $\tilde{m}$ definida en $\mathcal{R}(\varphi_m)$, el anillo generado por φ_m.*

Demostración. Recuerde que $\mathcal{R}(\varphi_m)$ esta formado por uniones finitas de elementos de φ_m, ajenos a pares. De esta manera

$$\tilde{m}(A) = \tilde{m}\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{m}(B_k) = \sum_{k=1}^{n} m(B_k).$$

Note que está bien definida. Por último si μ es una extensión de m en $\mathcal{R}(\varphi_m)$ entonces

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) = \sum_{k=1}^{n} m(B_k) = \tilde{m}(A).$$

Es decir, $\mu = m$. $\square$

Definición 2.49. *Una medida m en un semianillo φ_m se dice $\sigma-$aditiva, si para cualquier subfamilia de φ_m infinita numerables de ajenos a pares $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tales que $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \varphi_m$ se cumple*

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k).$$

Teorema 2.50. *Si m es una medida σ-aditvia en φ_m, entonces su extensión $\tilde{m}$ a $\mathcal{R}(\varphi_m)$ también es σ-aditiva*

Demostración. Sea $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una subfamilia de $\mathcal{R}(\varphi_m)$ de conjuntos ajenos a pares tales $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{R}(\varphi_m)$. Como $A, B_k \in \mathcal{R}(\varphi_m)$ para cada $k \in \mathbb{N}$ existen $A_j, B_{n,k}$ en φ_m tales que $A = \bigcup A_j$ y $B_k = \bigcup B_{n,k}$ (uniones finitas de conjuntos ajenos a pares). Note que los conjuntos de la forma $A_j \cap B_{n,k}$ son ajenos a pares. Más aún

$$A_j = \bigcup_{k}\bigcup_{n} A_j \cap B_{n,k} \qquad B_{n,k} = \bigcup_{j} A_j \cap B_{n,k}$$

Así que

$$\begin{aligned}\tilde{m}(A) &= \sum_j m(A_j) = \sum_j \sum_k \sum_n m(A_j \cap B_{n,k}) \\ &= \sum_k \sum_n \sum_j m(A_j \cap B_{n,k}) \\ &= \sum_k \sum_n m(B_{n,k}) = \sum_k \tilde{m}(B_k).\end{aligned}$$

□

Corolario 2.51. *Sea m una medida σ-aditiva en el semianillo φ_m. Considere $A, A_1, \cdots, A_k, \cdots$, elementos de φ_m tales que $A_1, \cdots, A_k, \cdots$, son subconjuntos de A y son ajenos a pares. Entonces*

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) \leq m(A).$$

Demostración. Se sigue de $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} m(A_k) \leq m(A)$ para cada $N \in \mathbb{N}$ y luego hacemos $N \to \infty$. □

Corolario 2.52. *Sea m una medida $\sigma-$aditiva en el semianillo φ_m. Sean $A, A_1, \cdots, A_k, \cdots$, elementos de φ_m tales que $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Entonces*

$$m(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$$

Corolario 2.53. *Sea $\tilde{m}$ a la extensión de m en $\mathcal{R}(\varphi_m)$. Los dos corolario anteriores son válidos en $\mathcal{R}(\varphi_m)$.*

Sugerencia para el último corolario: Sea $B_n = (A \cap A_n) \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$. De esta manera $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, $A_n \supset B_n$, la familia $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ esta contenida en $\mathcal{R}(\varphi_m)$ y es de conjuntos ajenos a pares. Luego

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Definición 2.54. *Sea m una medida $\sigma-$aditiva en un semianillo φ_m con unidad E. Dado $A \subset E$ defina*

1. *Medida exterior de A denotada por $\mu^*(A)$ definida como*

$$\mu^*(A) = \text{ínf}\{\sum_{k\in I\subset\mathbb{N}} m(B_k) \ \mid \ A \subset \bigcup_{k\in I} B_k, \quad B_k \in \varphi_m, \quad k \in I\}.$$

2. *Medida interior de A dada por $\mu_*(A) = m(E) - \mu^*(E \setminus A)$.*

3. *Diremos que $A \subset E$ es Lebesgue medible si y solo si $\mu^*(A) + \mu_*(A) = m(E)$. La medida de Lebesgue de A es $\mu(A) := \mu^*(A) = \mu_*(A)$.*

Observación 2.55. *Las siguientes propiedades tienen demostraciones profundamente análogas a sus homólogas dadas en la sección anterior. Por tal motivo solo se omiten las demostraciones.*

1. *Para cada $A \subset E$ se verifica que $\mu_*(A) \leq \mu^*(A)$. Además, $A \subset E$ es Lebesgue medible si y sólo si $\mu^*(A) + \mu^*(E \setminus A) = m(E)$, o equivalentemente, $E \setminus A$ es Lebesgue medible.*

2. *Dados $A \subset E$ y (A_n) una familia a lo sumo numerable de subconjuntos de E tales que $A \subset \bigcup_n A_n$, entonces*
$$\mu^*(A) \leq \sum_n \mu^*(A_n).$$

3. *Todo elemento $A \in \mathcal{R}(\varphi_m)$ es medible y $\mu(A) = \tilde{m}(A)$, extensión de m a $\mathcal{R}(\varphi_m)$.*

4. *$A \subset E$ es medible si y solo si para cada $\epsilon > 0$ existe $B \in \mathcal{R}(\varphi_m)$ tal que $\mu(A\Delta B) < \epsilon$.*

5. *La familia φ_μ de todos los subconjuntos medibles de E es un álgebra con unidad E.*

6. *φ_μ es un álgebra de Borel.*

En algunas ocasiones un conjunto $A \subset E$ se dice medible si para todo $\epsilon > 0$ existe $B \in \mathcal{R}(\varphi_m)$ tal que $\mu^*(A\Delta B) < \epsilon$.

Ejercicio 2.56.

1. *Sea m una medida $\sigma-$aditiva en un semianillo φ_m con unidad E. Sea μ la extensión de Lebesgue de m y sea $\tilde{\mu}$ cualquier medida $\sigma-$aditiva que es extensión de m. Muestre que $\mu_*(A) \leq \tilde{\mu}(A) \leq \mu^*(A)$ para cada $A \subset E$ en que este definida $\tilde{\mu}$. En particular, vemos que si A es medible y $\tilde{\mu}(A)$ está definida entonces $\mu(A) = \tilde{\mu}(A)$.*

   Demostración. Para cualquier $(P_i)_{i\in I\subset\mathbb{N}}$ familia numerable de elementos de φ_m tal que $A \subset \cup_{i\in I} P_i$ entonces
$$\tilde{\mu}(A) \leq \tilde{\mu}(\cup_{i\in I} P_i) \leq\leq \sum_{i\in I} \tilde{\mu}(P_i);$$

De la definición de μ^* tenemos que $\tilde{\mu}(A) \leq \mu^*(A)$ para cada $A \subset E$ en que este definida $\tilde{\mu}$.

Además, $\tilde{\mu}(E \setminus A) \leq \mu^*(E \setminus A)$, luego

$$\mu_*(A) = m(E) - \mu^*(E \setminus A) \leq m(E) - \tilde{\mu}(E \setminus A) = \tilde{m}(E) - (\tilde{\mu}(E) - \tilde{\mu}(A)) = \tilde{\mu}(A).$$

Entonces $\mu_*(A) \leq \tilde{\mu}(A) \leq \mu^*(A)$ para cada $A \subset E$ en que este definida $\tilde{\mu}$.

□

2. *Sea $\tilde{m}$ la extensión de m a $\mathcal{R}(\varphi_m)$. Muestre que la medida exterior de $A \subset E$ está dada como*

$$\mu^*(A) = \text{ínf}\{\sum_{k \in I \subset \mathbb{N}} \tilde{m}(B_k) \ \mid \ A \subset \bigcup_{k \in I} B_k, \ \mid \ B_k \in \mathcal{R}(\varphi_m), \ \forall k \in I\}.$$

Demostración. Sea

$$\begin{aligned} T_A =& \{\sum_{i \in I \subset \mathbb{N}} m(P_i) \ \mid \ A \subset \bigcup_{i \in I} P_i, \ \mid \ P_i \in \varphi_m, \ \forall i \in I\}, \\ S_A =& \{\sum_{k \in I \subset \mathbb{N}} \tilde{m}(B_k) \ \mid \ A \subset \bigcup_{k \in I} B_k, \ \mid \ B_k \in \mathcal{R}(\varphi_m), \ \forall k \in I\}. \end{aligned}$$

Como $P_i \in \varphi_m \subset \mathcal{R}(\varphi_m)$, para cada $i \in I$ entonces $\displaystyle\sum_{i \in I \subset \mathbb{N}} m(P_i) \in S_A$.

Por lo tanto, $T_A \subset S_A$

Recíprocamente, si $B_k \in \mathcal{R}(\varphi_m)$, para cada $k \in I$. entonces existen $P_1^k, \ldots, P_{j_k}^k \in \varphi_m$ ajenos a pares tales que $B_k = \displaystyle\bigcup_{\ell=1}^{j_k} P_\ell^k$. Entonces

$$\tilde{m}(B_k) = \sum_{\ell=1}^{j_k} m(P_\ell^k)$$

y

$$\sum_{k \in I \subset \mathbb{N}} \tilde{m}(B_k) = \sum_{k \in I \subset \mathbb{N}} \sum_{\ell=1}^{j_k} m(P_\ell^k) = \sum_{n \in L \subset \mathbb{N}} m(C_n),$$

donde $C_n \in \varphi_m$ para cada $n \in L$. Entonces

$$\sum_{k \in I \subset \mathbb{N}} \tilde{m}(B_k) \in T_A.$$

Así que $S_A \subset T_A$. □

Observación 2.57. *Una medida en una σ-álgebra se dice completa completa si todo subconjunto no vacío de cada conjunto medible de medida cero es medible (y tiene medida cero).*
La medida de Lebesgue es completa completa. Ya que si todo subconjunto no vacío de un conjunto medible de medida cero es medible y de medida cero.

Capítulo 3

Integración

3.1. Funciones medibles y funciones simples

Definición 3.1. *Dada* $f : X \to Y$ *y dadas* φ, φ' *familias de subconjuntos de* X *y de* Y*, respectivamente. Diremos que* f *es* $(\varphi, \varphi')-$*medible si* $A \in \varphi'$ *implica* $f^{-1}(A) \in \varphi$

Observación 3.2. *Si* (X, T_x) *y* (Y, T_y) *son espacios topológicos, entonces* $f : X \to Y$ *es continua si y sólo si es* $(T_x, T_y)-$*medible. En particular, si* $X = Y = \mathbb{R}$ *con* $T_x = T_y$ *siendo el álgebra de Borel* $\mathcal{B}^1$ *inducida por la topología usual en* $\mathbb{R}$ *entonces* f *se dice Borel-medible o B-medible. Recuerde que un álgebra de Borel es la* $\sigma-$*álgebra generada por una topología.*

Definición 3.3. *Sea* μ *una medida en un álgebra de Borel* φ_μ *de subconjuntos de* X*, con* X *la unidad de* φ_μ*. Considere* $f : X \to \mathbb{R}$*. Entonces* f *se dice* $\mu-$*medible en* X *si* $A \in \mathcal{B}^1$ *implica* $f^{-1}(A) \in \varphi_\mu$*, o equivalentemente* $f^{-1}(\mathcal{B}^1) \subset \varphi_\mu$*.*

En nuestro caso supondremos $X = \mathbb{R}^n$ con $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.4. *La función* f *es* μ*-medible si y sólo si* $\{x \in X \mid f(x) < c\}$ *es* $\mu-$*medible para cada real* c*.*

Demostración. Si f es μ-medible como $\{x \in X \mid f(x) < c\} = f^{-1}((-\infty, c))$ y $(-\infty, c) \in \mathcal{B}^1$ entonces $\{x \in X \mid f(x) < c\}$ es μ-medible. Note que $\mathcal{B}^1$ es la mínima σ-álgebra que contiene a los intervalos cerrados en $\mathbb{R}$ y usando las siguientes identidades

$$(-\infty, c) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[-n, c - \frac{1}{n}\right]$$

$$[a,b] = (-\infty, a)^c \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\infty, b + \frac{1}{n} \right) \right)$$

Notamos que $\mathcal{B}^1$ es también la mínima σ-álgebra que contiene a $(-\infty, c)$ para cada $c \in \mathbb{R}$. Por último empleando las siguientes identidades:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha} f^{-1}(A_\alpha), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha} f^{-1}(A_\alpha), \quad f^{-1}(A)^c = f^{-1}(A^c)$$

Se verifica que $f^{-1}(\mathcal{B}^1) \subset \varphi_\mu$ □

Teorema 3.5. *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles en X y sea f una función en X tal que $\lim f_n(x) = f(x)$ para toda $x \in X$. Entonces f es medible.*

Demostración. Se deduce de la identidad

$$\{x \in X \Big| f(x) < c\} = \bigcup_{k} \bigcup_{n} \bigcap_{m\geq n} \left\{ x \in X \;\Big| f_m(x) < c - \frac{1}{k} \right\}.$$

Verifiquemos dicha identidad. Si $x \in X$ es tal que $f(x) < c$ entonces existen $k, N \in \mathbb{N}$ tales que

$$f(x) < c - \frac{2}{k}, \quad f_n(x) - f(x) < \frac{1}{k}, \quad \forall n \geq N.$$

Luego $f_n(x) < c - \frac{1}{k}$.
Recíprocamente, si

$$x \in \bigcup_{k} \bigcup_{n} \bigcap_{m\geq n} \left\{ x \quad \Big| f_m(x) < c - \frac{1}{k} \right\}.$$

Entonces existen $k, N \in \mathbb{N}$ tal que $f_n(x) < c - 1/k$ para toda $n \geq N$ y haciendo $n \to \infty$ obtenemos $f(x) \leq c - \dfrac{1}{k} < c$. □

Teorema 3.6. *La composición de una función μ-medible $\psi : X \to \mathbb{R}$ con una función $\mathcal{B}$-medible $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es μ-medible.*

Demostración. Sea $f = \varphi \circ \psi$, luego note que $f^{-1}(A) = \psi^{-1}(\varphi^{-1}(A))$ para todo $A \subset \mathbb{R}$. □

Corolario 3.7. *La composición de una función medible con una continua es una función medible.*

Demostración. Se debe a que una función continua es una función $\mathcal{B}$-medible. □

Definición 3.8. *Una función simple es una función medible con una cantidad numerable de valores diferentes.*

Teorema 3.9. *Si f toma los valores $(y_n)_{n\in I\subset\mathbb{N}}$, entonces f es simple si y solo si $A_n = \{x \in X \mid f(x) = y_n\}$ es medible para cada $n \in I$.*

Demostración. Necesidad. Como $\{y_n\} \in \mathcal{B}^1$ entonces $A_n = f^{-1}(\{y_n\}) \in \varphi_\mu$ para cada $n \in I$.
Suficiencia. Para cada $c \in \mathbb{R}$ tenemos

$$f^{-1}((-\infty, c)) = \bigcup_{y_n<c} \{x|f(x) = y_n\}$$

es un conjunto medible. Así que f es una función medible. □

Teorema 3.10. *Una función f es μ-medible si y solo si existe una sucesión de funciones simples que converge uniformemente a f*

Demostración. Suficiencia. La convergencia uniforme implica convergencia puntual y el Teorema 3.5 nos muestra que f es medible.
Necesidad. Sea f una función μ-medible, para cada $n \in \mathbb{N}$ defina

$$f_n(x) = \frac{m}{n}, \quad \text{si} \quad \frac{m}{n} \le f(x) < \frac{m+1}{n}, \quad \text{con } m \in \mathbb{Z}.$$

Note que $A_m = f^{-1}\left(\left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right)\right)$ es un conjunto medible. Así que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones simples.

Por último, vemos que $0 \le f(x) - f_n(x) < \frac{1}{n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, de donde se deduce la convergencia uniforme. □

Observación 3.11. *Dado $A \subset X$ define la función característica de A como $\mathcal{X}_A$:*

$$\mathcal{X}_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A, \\ 0, & \text{si } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Además, se verifica de manera directamente $f : X \to \mathbb{R}$ es una función simple si y sólo si existen $\lambda_n \in \mathbb{R}$ y $A_n \subset X$ un conjunto medible para cada $n \in I \subset \mathbb{N}$ tales que

$$f(x) = \sum_{n\in I} \lambda_n \mathcal{X}_{A_n}.$$

Teorema 3.12. *Si f, g son funciones medibles y $c \in \mathbb{R}$ entonces $f+g$ y cf son funciones medibles.*

Demostración. Mostremos que sumas y producto por una constante de funciones simples son funciones simples. Si f, g son funciones simples. Sean $A_n = \{x \in X \ |f(x) = y_n\}$ y $B_n = \{x \in X \ |g(x) = z_n\}$ entonces

$$\{x \in X \mid f+g = y_n + z_m\} = \bigcup_{y_n+z_m=y_{n'}+z_{m'}} (A_{n'} \cap B_{m'})$$

el cual resulta ser conjunto medible.
Si $c \neq 0$ entonces $\{x \in X \ |cf(x) = cy_n\} = A_n$.
Si (f_n) y (g_n) son sucesiones de funciones simples que convergen uniformemente a f y g respectivamente. Entonces $(f_n + g_n)$ y (cf_n) son sucesiones de funciones simples que convergen uniformemente a $f+g$ y cf respectivamente y del teorema anterior conluimos que $f+g$ y cf son funciones medibles. □

Observación 3.13. *Si f y g son funciones simples entonces existen $\lambda_n \delta_m \in \mathbb{R}$ y $A_n B_m \subset X$ medibles para $n \in I \subset \mathbb{N}$ y $m \in J \subset \mathbb{N}$ tales que*

$$f(x) = \sum_{n \in I \subset \mathbb{N}} \lambda_n \mathcal{X}_{A_n}, \quad g(x) = \sum_{m \in J \subset \mathbb{N}} \delta_m \mathcal{X}_{B_m}.$$

Entonces

$$(f+g)(x) = \sum_{(n,m) \in I \times J} (\lambda_n + \delta_m) \mathcal{X}_{A_n \cap B_m},$$
$$(fg)(x) = \sum_{(n,m) \in I \times J} \lambda_n \delta_m \mathcal{X}_{A_n \cap B_m}.$$

Corolario 3.14. *Si f, g son funciones medibles entonces fg es también medible*

Demostración. Si h es una función medible y $c \in \mathbb{R}$ entonces la identidades

$$\{x \in X \ \mid (h(x))^2 < c\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } c \leq 0, \\ \{x \in X \ \mid -\sqrt{c} < h(x) < \sqrt{c}\}, & \text{si } c > 0. \end{cases}$$

nos muestra que $\{x \in X \ \mid (h(x))^2 < c\}$ un conjunto medible. Por lo tanto, h^2 es otra función medible.
Por último, note que

$$fg = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2]$$

□

Teorema 3.15. *Si f no tiene ceros y es medible, entonces $\dfrac{1}{f}$ es medible.*

Demostración. Dado $c \in \mathbb{R}$ vea los siguientes casos:
Si $c > 0$ entonces
$$\left\{x \in X \,\middle|\, \tfrac{1}{f(x)} < c\right\} = \{x \in X \mid f(x) \leq 0\} \cup \left\{x \in X \mid f(x) > \tfrac{1}{c}\right\}.$$
Si $c = 0$ entonces
$$\left\{x \in X \,\middle|\, \tfrac{1}{f(x)} < c\right\} = \{x \in X \mid f(x) < 0\}.$$
Si $c < 0$ entonces
$$\left\{x \in X \,\middle|\, \tfrac{1}{f(x)} < c\right\} = \{x \in X \mid \tfrac{1}{c} < f(x) < 0\}.$$

Como todos los conjuntos anteriores son medibles concluimos que $\dfrac{1}{f}$ es una función medible. $\square$

Corolario 3.16. *Si f, g son funciones medibles y g no tiene ceros entonces $\dfrac{f}{g}$ es una función medible.*

Definición 3.17. *Sean f, g funciones medibles, diremos que f y g son equivalentes respecto a la medida μ, si $\mu(\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0$. También se dice que f y g son iguales salvo un conjunto de medida cero o que son iguales c.t.p. (casi en todas partes) y de denota como $f \sim g$.*

Observación 3.18. *La relación $\sim$ es una relación de equivalencia en el espacio de funciones medibles. Las propiedades de reflexividad y simetría se verifican de manera directa. Por tal motivo sólo platicaremos las propiedad transitiva. Si f, g, h son funciones medibles tales que $f \sim g$ y $g \sim h$. Entonces*
$$\mu(\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}) = \mu(\{x \in X \mid g(x) \neq h(x)\}) = 0.$$
Note que
$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \cap \{x \in X \mid g(x) = h(x)\} \subset \{x \in X \mid f(x) = h(x)\}$$
y al considerar los complementos tendremos
$$\{x \in X \mid f(x) \neq h(x)\} \subset \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\} \cup \{x \in X \mid g(x) \neq h(x)\}.$$
Así que
$$\mu(\ \{x \in X \mid f(x) \neq h(x)\}\ ) \leq$$
$$\mu(\ \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}\ ) + \mu(\ \{x \in X \mid g(x) \neq h(x)\}\ ) = 0.$$

Teorema 3.19. *Sean f y g dos funciones continuas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ que son equivalentes de acuerdo a la medida de Lebesgue construida en $\mathbb{R}$. Entonces $f \equiv g$*

Demostración. (Contradicción) Si existe $x_0 \in I$ tal que $f(x_0) \neq g(x_0)$, de la continuidad de f y g existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) \neq g(x)$ para toda $x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, pero el conjunto $I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tiene medida positiva. Por lo tanto, $\mu(\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq g(x)\}) > 0$. Lo cual es falso. □

Teorema 3.20. *Una función equivalente a una función medible es también medible.*

Demostración. Si f es medible y $f \sim g$ entonces

$$\{x \in X \mid g(x) < c\} = (\{x \in X \mid f(x) < c\} \cap M^c) \cup (\{x \in X \mid g(x) < c\} \cap M)$$

Donde $M = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$ es medible y de medida cero □

Definición 3.21. *Considere (f_n) una sucesión de funciones en X y sea f una función definida en X. Diremos que (f_n) converge c.t.p. a f si $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para casi toda $x \in X$, es decir*

$$\mu\left(\{x \in X | \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x) \quad o \quad \nexists \lim_{n\to\infty} f_n(x)\}\right) = 0$$

Teorema 3.22. *Si (f_n) es una sucesión de funciones medibles en X que converge c.t.p. a f, definida en X, entonces f es medible .*

Demostración. Defina $A := \{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\}$. Entonces $\mu(X \setminus A) = 0$. Luego $X \setminus A$ y A son medibles. Luego $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f en A y por el Teorema 3.5 obtenemos que f es medible en A. Como μ es completa tendremos que f es medible en $X \setminus A$, pues todo subconjunto de este es medible y de medida cero.
Por tanto f es medible en $(X \setminus A) \cup A = X$. □

Teorema 3.23. *(Egorov). Sea (f_n) una sucesión de funciones medibles que converge c.t.p. a una función f, en un conjunto medible E. Entonces para cualquier $\delta > 0$ existe un conjunto medible $E_\delta \subset E$ tal que*

1. *$\mu(E_\delta) > \mu(E) - \delta$*
2. *(f_n) converge uniformemente a f en E_δ*

Demostración. Note que f es medible y defina

$$\begin{aligned} E_n^m &:= \bigcap_{i\geq n} \left\{x \in E \;\middle|\; |f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m}\right\} \\ &= \left\{x \in E \;\middle|\; |f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m}, \forall i \geq n\right\}. \end{aligned}$$

Note que $E_1^m \subset E_2^m \subset \cdots E_n^m \subset E_{n+1}^m \subset \cdots$ y defina $E^m := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^m$, entonces

$$(E^m \setminus E_1^m) \supset (E^m \setminus E_2^m) \supset \cdots \supset (E^m \setminus E_n^m) \supset (E^m \setminus E_{n+1}^m) \supset \cdots$$

y $\bigcap_{n=1}^{\infty}(E^m \setminus E_n^m) = \emptyset$.

Por un resultado anterior tendremos que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E^m \setminus E_n^m) = \lim_{n\to\infty} \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty}(E^m \setminus E_n^m)) = 0.$$

Por lo tanto, dado $\delta > 0$ existe $n_0(m) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu(E^m \setminus E_{n_0(m)}^m) < \frac{\delta}{2^m}$$

y defina $E_\delta = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_{n_0(m)}$. Además, si $x \in E_\delta$ entonces

$$|f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \quad \forall i \geq n_0(m)$$

es decir, (f_n) converge uniformemente a f en E_δ.
Además, $\mu(E \setminus E^m) = 0$. Ya que si $x \in E \setminus E^m$ entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $i \geq n$ tal que $|f_i(x) - f(x)| > \dfrac{1}{m}$. Por lo que, si $x \in E \setminus E^m$ tendremos que $(f_n(x))$ no converge a $f(x)$.

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\mu\left(E \setminus E_{n_0(m)}^m\right) =&\mu\left((E \setminus E^m) \cup (E^m \setminus E_{n_0(m)}^m) \right)\\ \leq&\mu\left(E \setminus E^m\right) + \mu\left(E^m \setminus E_{n_0(m)}^m\right)\\ \leq&\mu(E^m \setminus E_{n_0(m)}^m) < \frac{\delta}{2^m}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\mu(E) - \mu(E_\delta) =&\mu(E \setminus E_\delta)\\ =&\mu\left(E \setminus \bigcap_{m=1}^{\infty} E_{n_0(m)}^m\right) = \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}(E \setminus E_{n_0(m)}^m)\right)\\ \leq&\sum_{m=1}^{\infty} \mu(E \setminus E_{n_0(m)}^m) < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^m} = \delta.\end{aligned}$$

Entonces $\mu(E_\delta) > \mu(E) - \delta$.

$\square$

Definición 3.24. *Una sucesión de funciones medibles $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en medida a una función f en X si para cada $\epsilon > 0$ se cumple*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X \ \mid \ |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) = 0.$$

Teorema 3.25. *Si una sucesión de funciones medibles $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge c.t.p. a f en X entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en medida a f en X.*

Demostración. Del Teorema 3.5 sabemos que f es una función medible. Defina

$$E_{k,\epsilon} :=\{x \in X \ \mid \ |f_k(x) - f(x)| \geq \epsilon\}, \quad F_{n,\epsilon} := \bigcup_{k\geq n} E_{k,\epsilon},$$
$$G_\epsilon := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{n,\epsilon}$$

Note que todos estos son conjuntos medibles y que $F_{n+1,\epsilon} \subset F_{n,\epsilon}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y por un resultado sobre sucesiones decrecientes de conjuntos medibles tendremos que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(F_{n,\epsilon}) = \mu(G_\epsilon).$$

Por último, sea

$$A = \{x \in X | \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x) \quad o \quad \nexists \lim_{n\to\infty} f_n(x)\}$$

Vemos que si $x \notin A$ entonces para $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para cada $k \geq n$ tendremos $|f_k(x) - f(x)| < \epsilon$; es decir, $x \notin G_\epsilon$. Por lo tanto $G_\epsilon \subset A$ y $\mu(G_\epsilon) = 0$. Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \mu(F_{n,\epsilon}) = 0.$$

□

Observación 3.26. *El razonamiento recíproco del teorema anterior no es válido. Por ejemplo, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $i \in \{1, \ldots, n\}$ considere las funciones*

$$f_n^i(x) = \begin{cases} 1, & si \ \ x \in (\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \\ 0, & en \ otro \ caso, \end{cases} \qquad \forall x \in (0, 1]$$

Note que si $f(x) = 0$ y $0 < \epsilon < 1$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in (0, 1] \ \mid \ |f_n^i(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) = \lim_{n\to\infty} \mu(\ (\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]\ ) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Por lo tanto (f_n^i) converge en medida a la función cero. Pero no converge a ninguna función. Ya que para cualquier $x \in (0, 1]$ y cualquier valor $n \in \mathbb{N}$

existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ *tal que* $x \in (\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$, *es decir,* $f_n^i(x) = 1$ *pero para* $j \neq i$ $f_n^j(x) = 0$.

Sin embargo, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en medida a una función* f *se puede plantear un algoritmo para elegir subíndices* $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *y obtener una subsucesión* $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *que converge c.t.p. a* f.

Por último, el Teorema de Luzin muestra que una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es medible si y sólo para cada* $\epsilon > 0$ *si existe* $\varphi_\epsilon \in C([a, b], \mathbb{R})$ *tal que*

$$\mu(\ \{x \in [a, b] \ \mid \ f(x) \neq \varphi(x)\}\ ) < \epsilon.$$

Teorema 3.27. *Sean* $u, v : X \to \mathbb{R}$ *funciones medibles y sea* $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una función continua. Entonces la función* $h(x) := \phi(u(x), v(x))$, *con* $x \in X$, *es medible.*

Demostración. Como ϕ es continua, solo falta mostrar que la función $f(x) = (u(x), v(x))$ es medible y para ello note que si $R = I_1 \times I_2$ es un rectángulo en $\mathbb{R}^2$ con $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ intervalos, entonces $f^{-1}(R) = u^{-1}(I_1) \cap v^{-1}(I_2)$ el cual es medible. Asi que si consideramos cualquier unión infinita numerable de rectángulos $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} R_k$ tendremos $f^{-1}(A) = f^{-1}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} R_k\right) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}(f^{-1}(R_k))$ que es medible. $\square$

Recuerde que $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$ son espacios normados reales isométricos e isomorfos.

Corolario 3.28. *Considere* $f : X \to \mathbb{C}$.

1. *Si* $\Re f$, $\Im f : X \to \mathbb{R}$ *son medibles entonces* f *es medible en* X.
2. *Si* f *es una función medible entonces* $\Re f$, $\Im f$ *y* $|f|$ *son funciones medibles.*
3. *Si* $f, g : X \to \mathbb{C}$ *son funciones medibles entonces* $f \pm g$, fg *son medibles en* X.

Ejercicio 3.29.

1. *Considere* $f : X \to \mathbb{R}$. *Si* $|f|$ *es medible muestre que no siempre* f *es medible.*

   Sugerencia: Sea $C \subset [0, 1]$ *un subconjunto no medible. Defina*

   $$f(x) := \begin{cases} 1, & si\ x \in C, \\ -1, & si\ x \in [0, 1] \setminus C. \end{cases}$$

   Note que $f^{-1}(\{1\}) = C$ *pero* $|f(x)| = 1$ *para cada* $x \in [0, 1]$.

2. *Si $f, g : X \to \mathbb{R}$ muestre que las funciones* $\max\{f, g\}$ *y* $\min\{f, g\}$ *son funciones medibles.*

   Sugerencia: Note que

$$\begin{aligned}\max\{f,g\}(x) =& \frac{1}{2}\left\{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|\right\},\\ \min\{f,g\}(x) =& \frac{1}{2}\left\{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|\right\}, \quad \forall x \in X.\end{aligned}$$

3. *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles de X a $\mathbb{R}$. Muestre que las funciones* $\sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n\}$ *e* $\inf_{n\in\mathbb{N}}\{f_n\}$ *son medibles.*

   Sugerencia:

$$\{x \in X \;\mid\; \inf_{n\in\mathbb{N}}\{f_n\}(x) < c\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x \in X \;\mid\; f_n(x) < c\}$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n\} = -\inf_{n\in\mathbb{N}}\{-f_n\}.$$

4. *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles de X a $\mathbb{R}$. Muestre que las funciones* $\limsup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n\}$ *e* $\liminf_{n\in\mathbb{N}}\{f_n\}$ *son medibles.*

   Sugerencia:

$$\begin{aligned}\limsup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n\} =& \inf_{n\in\mathbb{N}}\{\sup_{k\geq n}\{f_k\}\},\\ \liminf_{n\in\mathbb{N}}\{f_n\} =& \sup_{n\in\mathbb{N}}\{\inf_{k\geq n}\{f_k\}\}.\end{aligned}$$

5. *Muestre que la sucesión de funciones medibles $f_n(x) = x^n$, para cada $x \in [0,1]$, converge c.t.p. a la función constante 0.*

   Sugerencia: Note que $\{x \in [0,1] \;\mid\; \lim_{n\to\infty} x^n \neq 0\} = \{1\}$.

6. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina*

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & \textit{si} \;\; x \in [\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}], \\ 1, & \textit{en otro caso,} \end{cases} \qquad \textit{para cada } x \in [0,1].$$

   Muestre que (f_n) converge en medida a la función constante $f(x) = 1$ para cada $x \in [0,1]$.

   Sugerencia: Dado $0 < \epsilon \leq 1$ luego

$$\begin{aligned}\mu(\;\{x \in [0,1] \;\mid\; |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}\;) =& \mu(\;\{x \in [\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}] \;\mid\; 1 \geq \epsilon\}\;)\\ =& \frac{1}{(n-1)n}.\end{aligned}$$

3.1.1. Integración de Lebesgue

Definición 3.30. *Sea f una función simple con $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sus diferentes valores definida en X. Sea $A \subset X$ un conjunto medible, por la integral de Lebesgue de f sobre A (con respecto a μ) entenderemos*

$$\int_A f(x)d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} y_n\mu(A_n),$$

donde $A_n = \{x \in A | f(x) = y_n\}$ y la serie es absolutamente convergente.

Lema 3.31. *Sea f una función simple definida en la unión $A = \bigcup B_k$ de conjuntos medibles y ajenos a pares tales que f toma un solo valor c_k en B_k. Entonces f es integrable en A si y solo si, la serie*

$$\sum_k c_k\mu(B_k)$$

es absolutamente convergente y en este caso

$$\int_A f(x)d\mu = \sum_k c_k\mu(B_k)$$

Demostración. Si $A_n = \{x \in A \mid f(x) = y_n\}$ entonces

$$\sum_n y_n\mu(A_n) = \sum_n y_n \left(\bigcup_{c_k=y_n} B_k\right) = \sum_n y_n \sum_{c_k=y_n} \mu(B_k) = \sum_k c_k\mu(B_k)$$

Como μ es no negativa:

$$\sum_n |y_n|\mu(A_n) = \sum_n |y_n| \sum_{c_k=y_n} \mu(B_k) = \sum_k |c_k|\mu(B_k)$$

□

Para acortar la redacción todos los conjuntos se considerarán medibles.

Teorema 3.32. *Si f, g son funciones simples e integrables en A y $k \in \mathbb{R}$. Entonces $f + g$ y kf son integrables en A. Más aún,*

$$\int_A (f(x) + g(x))d\mu = \int_A f(x)d\mu + \int_A g(x)d\mu, \tag{3.1}$$

$$\int_A kf(x)d\mu = k\int_A f(x)d\mu. \tag{3.2}$$

Demostración. Sean $F_n = \{x \in A \mid f(x) = y_n\}$ y $G_m = \{x \in A \mid g(x) = z_m\}$. Denote

$$B_{nm} = F_n \cap G_m = \{x \in A \mid (f+g)(x) = y_n + z_m\}$$

y vemos que $F_n = \bigcup_m B_{nm}$, $G_m = \bigcup_n B_{nm}$ siendo estos conjuntos ajenos a pares. Luego

$$\begin{aligned}
\int_A f(x)d\mu + \int_A g(x)d\mu &= \sum_n y_n \mu(F_n) + \sum_m z_m \mu(G_m) \\
&= \sum_n y_n \sum_m \mu(B_{nm}) + \sum_m z_m \sum_n \mu(B_{nm}) \\
&= \sum_n \sum_m (y_n + z_m)\mu(B_{nm}) \\
&= \int_A (f(x) + g(x))d\mu.
\end{aligned}$$

Muestre (3.2). □

Teorema 3.33. *Sea f una función simple y sea $A \subset X$ en un conjunto medible. Si $|f(x)| \leq M$, para toda $x \in A$, entonces f es integrable y*

$$\left| \int_A f(x)d\mu \right| \leq M\mu(A).$$

Demostración. Sea $A_n = \{x \in A \mid f(x) = y_n\}$. Luego

$$\left| \sum_n y_n \mu(A_n) \right| \leq \sum_n |y_n| \mu(A_n) \leq \sum_n M\mu(A_n) = M\mu(A).$$

□

Definición 3.34. *Una función f se dice sumable o integrable en A (con respecto a la medida μ) si existe una sucesión de funciones (f_n) simples e integrables en A que converge uniformemente a f en A. La integral de Lebesgue de f en A se define como*

$$\int_A f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)d\mu.$$

Observación 3.35.

1. *La desigualdad*

$$\begin{aligned}\left|\int_A f_m(x)d\mu - \int_A f_n(x)d\mu\right| &= \left|\int_A (f_m(x) - f_n(x))d\mu\right| \\ &\leq \sup\{|f_m(x) - f_n(x)| \;\mid\; x \in A\}\,\mu(A)\end{aligned} \tag{3.3}$$

   muestra que existe $\displaystyle\int_A f(x)d\mu$.

2. *Más aún,* $\int_A f(x)d\mu$ *es independiente de la sucesión de funciones simples e integrables en* A *que convergen uniformemente a* f*. Pues si* (f_n) *y* (g_n) *son tales sucesiones. Entonces la sucesion* $f_1, g_1, f_2, g_2, \cdots$ *converge uniformemente a* f *en* A*. Por* (3.3) *existe el límite de*

$$\int_A f_1(x)d\mu, \int_A g_1(x)d\mu, \int_A f_2(x)d\mu, \cdots$$

   y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\int_A g(x)d\mu.$$

3. *Si* f *es simple e integrable en* A *entonces la definición anterior coincide con la integral de la función simple* f*.*

Teorema 3.36. *Sean* f, φ *funciones definidas en* $A \subset X$ *medible. Si* φ *es no negativa e integrable en* A *y* $|f(x)| \leq \varphi(x)$ *c.t.p. en* A *entonces* f *es integrable en* A *y*

$$\left|\int_A f(x)du\right| < \int_A \varphi(x)du.$$

Demostración. Sean f, φ funciones simples y denote $E = \{x \in A \mid |f(x)| > \varphi(x)\}$. Sean

$$A_n = \{x \in A | f(x) = y_n\} = \{x \in A | \varphi(x) = \rho_n\}.$$

Luego

$$\begin{aligned}\sum |y_n|\mu(A_n) &= \sum |y_n|[\mu(A_n \cap E) + \mu(A_n \cap E^c)] \\ &= \sum |y_n|\mu(A_n \cap E^c) \leq \sum \rho_n\mu(A_n \cap E^c) \\ &\leq \sum \rho_n\mu(A_n).\end{aligned}$$

Por lo tanto f es integrable y

$$\left|\int_A f(x)du\right| \leq \sum |y_n|\mu(A_n) \leq \sum \rho_n\mu(A_n).$$

Por otra parte, si f, φ son funciones medibles, considere las sucesiones de fuciones simples (f_n) y (φ_n) creadas como

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{m}{n}, \text{ si } \frac{m}{n} \leq f(x) < \frac{m+1}{n}, \\ \varphi_n(x) &= \frac{m+1}{n}, \text{ si } \frac{m}{n} < \varphi(x) \leq \frac{m+1}{n}, \end{aligned}$$

Entonces $|f_n(x)| \leq \varphi_n(x)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y por el hecho anterior se tiene que $|\int_A f_n(x)|du \leq \int_A \varphi_n(x)du$ para cada $n \in \mathbb{N}$. El resultado es obtenido haciendo n tender a ∞. □

Corolario 3.37. *Si f es medible y acotada en A entonces f es integrable en A*

Demostración. Si $|f(x)| < M$ para toda $x \in A$ basta con definir $\varphi(x) = M$ para toda $x \in A$ y aplicar el resultado anterior. □

Teorema 3.38. *Sea $A = \bigcup_{n\in J\subset\mathbb{N}} A_n$ unión a lo sumo numerable de conjuntos medibles. Si f es integrable en A, entonces f es integrable en cada A_n y*

$$\int_A f(x)du = \sum_{n\in J} \int_{A_n} f(x)du,$$

donde la serie es absolutamente convergente

Demostración. Verificamos la identidad para funciones simples: Sea φ una función simple en A y sean $(\lambda_m)_{m\in I\subset\mathbb{N}}$ los diferentes valores y sea $B_m = \{x \in A \mid f(x) = \lambda_m\}$ para cada $m \in I$. Los conjuntos $(A_n \cap B_m)_{(m,n)\in I\times J}$ son ajenos a pares y en $A_n \cap B_m$ la funcion φ toma el valor λ_m y del Lema 3.31 tenemos que

$$\begin{aligned} \int_A \varphi(x)d\mu &= \sum_{(m,n)\in I\times J} \lambda_m\mu(A_n \cap B_m) \\ &= \sum_{n\in J}(\sum_{m\in I} \lambda_m\mu(A_n \cap B_m)) = \sum_{n\in J} \int_{A_n} \varphi(x)du. \end{aligned}$$

Si $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones simples que convergen unifomemente a f tendremos

$$\begin{aligned}\int_A f(x)d\mu &= \lim_{m\to\infty}\int_A \varphi_m(x)d\mu = \lim_{m\to\infty}\sum_{n\in J}\int_{A_n}\varphi_m(x)du\\ &=\sum_{n\in J}\lim_{m\to\infty}\int_{A_n}\varphi_m(x)du = \sum_{n\in J}\int_{A_n} f(x)d\mu.\end{aligned}$$

□

Corolario 3.39. *Si f es integrable en A y $A'\subset A$ es medible, entonces f es integrable en A'*

Demostración. Verificamos la identidad para funciones simples: Sea φ una función simple en A y sean $(\lambda_m)_{m\in I\subset\mathbb{N}}$ los diferentes valores y sea $B_m = \{x\in A \mid f(x)=\lambda_m\}$ para cada $m\in I$. Los conjuntos $(A'\cap B_m)_{m\in I}$ son ajenos a pares y en $A'\cap B_m$ la funcion φ toma el valor λ_m y del Lema 3.31 tenemos que

$$\sum_{m\in I}|\lambda_m|\mu(A'\cap B_m)\leq\sum_{m\in I}|\lambda_m|\mu(B_m).$$

Así que existe $\int_{A'}\varphi(x)d\mu$.

Para las demás funciones se deduce de la propiedad anterior.

□

Teorema 3.40. *(Desigualdad de Chebyshev) Si f es integrable y no negativa en A y $c>0$ entonces*

$$\mu(\{x\in A \mid f(x)\geq c\})\leq\frac{1}{c}\int_A f(x)du.$$

Demostración. El conjunto $B=\{x\in A \mid f(x)\geq c\})$ es medible y si $g(x)=c$ para cada $x\in B$ tenemos que $g\leq f$ en B. Por el Teorema 3.36 concluimos

$$c\mu(\{x\in A \mid f(x)\geq c\}) = c\mu(B) = \int_B g(x)d\mu\leq\int_B f(x)d\mu.$$

Por último, como f es no negativa y $B\subset A$ se muestra

$$\int_B f(x)d\mu\leq\int_A f(x)d\mu$$

partiendo de funciones simples.

□

Corolario 3.41. *Sea f una función integrable y no negativa en A. Si* $\displaystyle\int_A f(x)du = 0$ *entonces* $f(x) = 0$ *c.t.p. en A*

Demostración. Ejercicio. Sugerencia: Use la Desigualdad de Chebyshev. □

Teorema 3.42. *Si f es integrable en A, entonces para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$\left| \int_E f(x)du \right| < \epsilon$$

para todo $E \subset A$ conjunto medible y con medida menor que δ

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ define

$$A_n = \{x \in A \ \mid \ n - 1 \leq |f(x)| < n\}.$$

Note que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ luego

$$\int_A |f(x)|d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} |f(x)|d\mu < \infty.$$

Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \int_{A_n} |f(x)|d\mu < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sea $B_N = \bigcup_{n=1}^{N} A_n$ y $C_N = \bigcup_{n=N+1}^{\infty} A_n$.

Por último, consideremos $0 < \delta < \frac{\epsilon}{2N}$. Así que para cada $E \subset A$ tal que $\mu(E) < \delta$ tendremos

$$\begin{aligned}
\left| \int_E f(x)du \right| \leq \int_E |f(x)|\, du = & \int_{E\cap B_N} |f(x)|\, du + \int_{E\cap C_N} |f(x)|\, du \\
\leq & N\mu(E) + \int_{C_N} |f(x)|\, du \\
\leq & N\frac{\epsilon}{2N} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \int_{A_n} |f(x)|d\mu < \epsilon.
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.43. *(Lebesgue). Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones medibles que converge a f en A, $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y φ es integrable en A entonces f es integrable en A y*

$$\text{lím} \int_A f_n(x)du = \int_A f(x)du.$$

Demostración. Haciendo $n \to \infty$ de las hipótesis se tiene $|f(x)| \leq \varphi(x)$. Del Teorema 3.36 sabemos que f es integrable en A.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ defina $A_k := \{x \in A | k-1 \leq \varphi(x) < k\}$ y $B_m := \bigcup\limits_{k \geq m} A_k$. Los cuales son conjuntos medibles. Luego

$$\int_A \varphi du = \sum_k \int_{A_k} \varphi du < \infty$$

Dado $\epsilon > 0$ existe $m^* \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{B_{m^*}} \varphi du < \frac{\epsilon}{5}$$

y vemos que $\varphi(x) < m^*$ para cada $x \in A \setminus B_{m^*}$.

Del teorema de Egorov existen conjuntos medibles C, D tales que $A \setminus B_{m^*} = C \cup D$ con $\mu(D) < \dfrac{\epsilon}{5m^*}$ y $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en C. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\epsilon}{5\mu(C)}$ para toda $n \geq N$, en C. Luego

$$\int_A (f_n - f)du = \int_{B_{m^*}} f_n du - \int_{B_{m^*}} f du + \int_D f_n du - \int_D f du + \int_C (f_n - f)du$$

Asi que

$$\left| \int_A (f_n - f)du \right| \leq \frac{\epsilon}{5} + \frac{\epsilon}{5} + m^*\mu(D) + m^*\mu(D) + \frac{\epsilon}{5\mu(C)}\mu(C) = \epsilon$$

□

Teorema 3.44. *(Beppo-Levi). Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones medibles tal que $f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_n \leq \cdots$ en A. Si f_n es integrable en A y existe $k \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\int_A f_n du \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

entonces existe $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ c.t.p. en A que es integrable en A y

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n = \int_A f.$$

Demostración. Suponga $f_1 \geq 0$ en A o en caso contrario trabaje con $g_n = f_n - f_1$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Defina $\Omega = \left\{x \in A | \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \infty\right\}$ y $\Omega_n^{(r)} = \{x \in A | f_n(x) > r\}$ para cada $n, r \in \mathbb{N}$.
Se deduce que $\Omega = \bigcap_{r\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n^{(r)}$ y de la desigualdad de Chébishev se obtiene que

$$\mu(\Omega_n^{(r)}) \leq \frac{k}{r}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Note que $\Omega_1^{(r)} \subset \Omega_2^{(r)} \subset \cdots$, por lo que

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n^{(r)}\right) \leq \frac{k}{r}$$

Además,

$$\Omega \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n^{(r)}, \quad \forall r \in \mathbb{N}.$$

Luego $\mu(\Omega) < k/r$ para cada $r \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $\mu(\Omega) = 0$. Asi que existe $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ c.t.p. en A.

Defina $\varphi(x) = r$ si $r - 1 \leq f(x) < r$ para $r = 1, 2, 3, \cdots$. Luego $f(x) < \varphi(x)$ para cada $x \in A$. Usando el Teorema 3.36 basta mostrar que φ es integrable.

Sea $A_r = \{x \in A | \varphi(x) = r\}$ y sea $B_s = \bigcup_{r=1}^{s} A_r$ con $s \in \mathbb{N}$. Note que f y f_n son acotadas en B_s. Luego $\varphi(x) < f(x) + 1$ en A, implica

$$\begin{aligned}\int_{B_s} \varphi du \leq& \int_{B_s} f du + \mu(A) = \lim_{n\to\infty} \int_{B_s} f_n du + \mu(A) \\ \leq& k + \mu(A)\end{aligned}$$

Como

$$\int_{B_s} \varphi du = \sum_{r=1}^{s} r\mu(A_r) \leq k + \mu(A)$$

para cada s, se tiene que la serie es convergente, luego φ es integrable en B_s para cada $s \in \mathbb{N}$. Así que

$$\sum_{r=1}^{s} \int_{A_r} \varphi du \leq k + \mu(A).$$

Entonces

$$\int_A \varphi du = \sum_{r=1}^{\infty} \int_{A_r} \varphi du \leq k + \mu(A).$$

□

Corolario 3.45. *Si* $\varphi_n \geq 0$ *en* A *si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_A \varphi_n du < \infty$$

Entonces $(\sum_{n=1}^{s} \varphi_n)_{s\in\mathbb{N}}$ *converge c.t.p. en* A *y*

$$\int_A \left(\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n du \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A \varphi_n du$$

Demostración. Ejercicio.

Sugerencia: Considere $f_n = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y emplee el teorema anterior. □

Teorema 3.46. *(Fatou). Sea* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones medibles no negativas que converge c.t.p. a* f *en* A *y*

$$\int_A f_n du \leq k$$

Entonces f *es integrable en* A *y*

$$\int_A f du \leq k$$

Demostración. Para $n \in \mathbb{N}$ defina $\varphi_n(x) := \inf\{f_k(x)|k \geq n\}$ para cada $x \in A$. Como

$$\{x \in A|\varphi_n(x) < c\} = \bigcup_{k\geq n} \{x \in A|f_k(x) < c\}$$

Se deduce que φ_n es medible para cada $n \in \mathbb{N}$. Además, $0 \leq \varphi_n \leq f_n$ en A. Por lo tanto

$$\int_A \varphi_n du \leq \int_A f_n du \leq k$$

Note que $\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \cdots \varphi_n \leq \cdots$ en A y $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$. Del teorema anterior tenemos se tiene que f es integrable en A y

$$\int_A f = \lim_{n\to\infty} \int_A \varphi_n \leq k.$$

□

Capítulo 4

Espacio de funciones L_p

4.1. Sobre espacios reales lineales

Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ Dado V un espacio $\mathbb{K}$-lineal es un conjunto equipado con dos operaciones suma $+V \times V \to V$ y la multiplicación por escalar real $* : \mathbb{K} \times V \to V$ tales que

1.- $(f+g)+h = f+(g+h)$ para cada $f, g, h \in V$

2.- $f+g = g+f$ para cada $f, g\ inV$

3.- Existe $0 \in V$ tal que $0+f = f$ para cada $f \in V$

4.- Para cada $f \in V$ existe $-f \in V$ tal que $f+(-f) = 0$.

5.- $r*(f+g) = r*f + r*g$ para cada $r \in \mathbb{K}$ y cada $f, g \in V$.

6.- $(r+s)*f = r*f + s*f$ para cada $r, s \in \mathbb{K}$ y cada $f \in V$.

7.- $r*(s*f) = (rs)*f$ para cada $r, s \in \mathbb{K}$ y cada $f \in V$.

8.- $1*f = f$ para cada $f \in V$.

Para simplificar denotamos $r*f$ como rf.

Recuerde que $\{f_1, \ldots, f_n\} \subset V$ es un conjunto l.i. (linealmente independientes) si y sólo si

$$a_1 f_1 + \cdots a_n f_n = 0, \quad \text{con} \quad a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K},$$

implica $a_1 = \cdots = a_n = 0$. En caso contrario, $\{f_1, \ldots, f_n\}$ se dice l.d. (linealmente dependientes)

Sabemos que $W \subset V$ es un subespacio de V si W dotado con las operaciones heredadas de V es un espacio $\mathbb{R}$-lineal. Claramente se verifica que la intersección de cualquier familia de subespacios vectoriales de V es también un subespacio vectorial de V

Una familia F de elementos de V es l.i. si cualquier subconjunto finito de F es l.i.

Se puede mostrar que toda familia de elementos de V contiene una subfamilia maximal, no necesariamente única, de elementos l.i. y todas estas subfamilias tienen la misma potencia. En general V contiene subfamilias maximales de elementos l.i. llamadas bases algebraicas de V y la potencia de cada una de estas es llamada dimensión algebraica de V.

Recordemos lo siguiente:

1. Dado cualquier subconjunto U de V sabemos que existe el menor subespacio de V que contiene a U y es denotado por $[U]$. Se verifica que

$$[U] = \{a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n \mid a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K},\ f_1, \ldots, f_n \in U\}$$

   y es llamado subespacio vectorial generado por U. Toda subfamilia maximal l.i. de U es una base algebraica de U.

2. Si W_1, W_2 son subespacios de V. Diremos que W es suma W_1 y W_2 ($W = W_1 + W_2$) sii todo elemento f de W se representa como $f = f_1 + f_2$ con $f_k \in W_k$ para $k = 1, 2$. Diremos que W es suma direta de W_1 y W_2 ($W = W_1 \oplus W_2$), si $W = W_1 + W_2$ y la representación de cada elemento de W en términos de la suma de lementos de W_1 y W_2 es única. Se verifica que $W = W_1 \oplus W_2$ sii $W = W_1 + W_2$ y $\emptyset = W_1 \cap W_2$.

3. Un espacio $\mathbb{K}$-lineal V con una topología τ se dice topológicamente compatible con la estructura de espacio $\mathbb{K}$-lineal de V si las operaciones suma y multiplicación por escalar de V son funciones continuas con respecto a τ.

4. Dado un espacio $\mathbb{K}$-lineal V. Una función $N : V \to \mathbb{R}$ es llamada norma si

$$\begin{aligned} N(f) &\geq 0, \quad \forall f \in V, \\ N(f) &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0, \\ N(\lambda f) &= |\lambda| N(f), \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall f \in V, \\ N(f+g) &\leq N(f) + N(g), \quad \forall f, g \in V. \end{aligned}$$

   Un espacio $\mathbb{K}$-lineal V equipado con una norma N se llamará espacio normado y denotado como (V, N).

5. En un conjunto no vacío V una función $\rho : V \to \mathbb{R}$ es llamada métrica si

$$\begin{aligned} \rho(f,g) &\geq 0, \quad \forall f, g \in V, \\ \rho(f,g) &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = g, \\ \rho(f,g) &\leq \rho(f,h) + \rho(h,g), \quad \forall f, g, h \in V. \end{aligned}$$

El conjunto V equipado con una métrica ρ se llamará espacio métrico y denotado como (V, ρ).

Si (V, N) es espacio normado entonces se verifica de manera directa que $\rho(f, g) = N(f - g)$ para cada $f, g \in V$ es una métrica en V.

6. Un espacio métrico (V, ρ) se dice completo si toda sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que cumple la condición de Cauchy:

$$\forall \epsilon < 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \pitchfork \rho(f_n, f_m) < \epsilon, \quad \forall n, m \geq N$$

es una sucesi
'on convergente.

7. Un espacio $\mathbb{K}$-lineal normado es llamado $\mathbb{K}$ espacio se Banach si el espacio métrico (V, ρ) es completo, donde $\rho(f, g) = N(f - g)$ para cada $f, g \in V$.

8. Dado un espacio $\mathbb{C}$-lineal V. Una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ es llamado producto escalar o interno si

   a) $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$,
   b) $\langle f, g + h \rangle = \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle$,
   c) $\langle \lambda f, g \rangle = \lambda \langle f, g \rangle$,
   d) $\langle f, f \rangle \geq 0$. Por otra parte, $\langle f, f \rangle = 0$ sii $f = 0$,

   para cada $f, g, h \in V$ y para cada $\lambda \in \mathbb{C}$. La pareja $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ suele llamarse espacio euclideano complejo y se verifica que la función

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}, \quad \forall f \in V,$$

   es una norma.

   En el caso de un espacio $\mathbb{R}$-lineal V. Una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ es llamado producto escalar o interno si cumple las propiedades anteriores salvo la primera que se convierte en

$$\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle, \forall f, g \in V$$

   y la pareja $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se llama espacio euclideano real. También

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}, \quad \forall f \in V,$$

   es una norma.

(Desigualdad de Cauchy-Buniakowsky) Dados $, xy$ en un espacio euclideano $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ se cumple que

$$|\langle f, g\rangle \leq \|f\|\|g\|$$

La igualdad se cumple si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $f = \lambda g$ o $f = 0$.

9. Un espacio euclideano (complejo o real) es una espacio $\mathbb{K}$-lineal con producto interno: $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Ejemplos:

   a) El espacio $\mathbb{C}-$lineal $\mathbb{C}^n$ dotado con

   $$\langle (z_1,\dots,z_n),(w_1,\dots,w_n)\rangle = \sum_{k=1}^{n} z_k\overline{w_k}, \quad \forall (z_1,\dots,z_n),(w_1,\dots,w_n) \in \mathbb{C}^n$$

   es un espacio euclideano.

   b) El espacio $\mathbb{C}-$lineal formado por sucesiones de números complejos $(z_n)_{n\geq 0}$ tales que $\sum_{k=0}^{\infty} \|z_k\|^2 < \infty$ dotado con

   $$\langle (z_n),(w_n)\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} z_k\overline{w_k}$$

   es un espacio euclideano.

   c) Dados $a < b$, el espacio $\mathbb{C}-$lineal $C([a,b],\mathbb{C})$ dotado con

   $$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt, \quad \forall f,g \in C([a,b],\mathbb{C}).$$

   es un espacio euclideano.

En un espacio euclideano $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ la norma $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$, para cada $f \in V$ cumple la identidad del paralelogramo:

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2, \quad \forall f,g \in V.$$

Un espacio normado no euclideano no necesariamente satisface la propiedad del paralelogramo. Por ejemplo en $(C([0,2\pi],\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ la norma no se cumple la identidad. Basta con elegir $f(t) = \cos^2(t)$ y $g(t) = \sin^2(t)$.

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ espacio euclideano. Una familia $F = \{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de elementos de V se dirá ortogonal si $\alpha \neq \beta$ entonces $\langle x_\alpha, x_\beta\rangle = 0$. Además, F se dirá ortogonormal $\langle x_\alpha, x_\beta\rangle = \delta_{\alpha,\beta}$, donde $\delta_{\alpha,\beta}$ es la delta de Kronecker, i.e.,

$$\delta_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Una familia de elementos $G = \{y_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de elementos de V se dirá biortogonal a la familia F si $\alpha \neq \beta$ implica $\langle x_\alpha, y_\beta\rangle = 0$. Admás, si $\langle x_\alpha, y_\beta\rangle = \delta_{\alpha,\beta}$ entonces G se dirá biortonormal a F.

10. Un espacio $\mathbb{K}$-lineal con producto interno que es de Banach con la norma inducida por el producto interno es llamado $\mathbb{K}$ espacio de Hilbert.

4.2. Sobre los espacios L_p y ℓ_p

1. Considere una función medible $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ y $p > 1$ diremos que $f \in L_p(0,1)$, si

$$\int_0^1 |f(t)|^p dt < \infty$$

Si $f, g \in L_p(0,1)$ se verifica directamente que

$$|f(t) + g(t)|^p \leq 2^p(|f(t)|^p + |g(t)|^p), \quad \forall t \in [0,1]$$

(Mostrar)

Demostración. Sean $f, g \in L_p(0,1)$, se tiene que

$$\begin{aligned} |f(t) + g(t)| &\leq (|f(t)| + |g(t)|) \\ &\leq 2\,\text{máx}\,\{|f(t)|, |g(t)|\} \end{aligned}$$

como la función $x \mapsto x^p$ es creciente en $[0,\infty)$, se sigue que:

$$\begin{aligned} |f(t) + g(t)|^p &\leq 2^p\,\text{máx}\,\{|f(t)|^p, |g(t)|^p\} \\ &\leq 2^p\,\text{máx}\,\{|f(t)|^p, |g(t)|^p\} + 2^p\,\text{mín}\,\{|f(t)|^p, |g(t)|^p\} \\ &= 2^p\,(|f(t)|^p + |g(t)|^p)\,, \quad \forall t \in [0,1] \end{aligned}$$

□

Luego $f + g \in L_p(0,1)$.

Lema 4.1. *Sean $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y $\alpha, \beta > 0$ tales que $\alpha + \beta = 1$, entonces:*

$$ab \leq \alpha a^{1/\alpha} + \beta b^{1/\beta}$$

Demostración. Considere la función $x \mapsto \ln(x)$. Esta función es cóncava, por lo cual:

$$\ln(\alpha a^{\frac{1}{\alpha}} + \beta b^{1/\beta}) \geq \ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$$

y, como esta función es creciente se sigue que:

$$ab \leq \alpha a^{\frac{1}{\alpha}} + \beta b^{1/\beta}$$

□

Si $f \in L_p(0,1)$ y $g \in L_q(0,1)$ con $p, q > 0$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (p y q se llaman números conjugados) se muestra la desigualdad de Hölder:

$$\int_0^1 |f(t)g(t)|dt \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |g(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

(Mostrar)

Demostración. Si $f = 0$ c.t.p. o $g = 0$ c.t.p. la desigualdad se tiene de forma inmediata. Supongamos que no sucede tal cosa, entonces se tiene que:

$$\left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} > 0 \quad \text{y} \quad \left(\int_0^1 |g(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} > 0$$

Si $t \in [0,1]$ se tiene usando el Lema anterior tomando:

$$a(t) = \frac{|f(t)|}{\left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}} \quad \text{y} \quad b(t) = \frac{|g(t)|}{\left(\int_0^1 |g(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}}$$

y, $\alpha = \frac{1}{p}$ y $\beta = \frac{1}{q}$, que:

$$a(t)b(t) \leq \alpha a(t)^{\frac{1}{\alpha}} + \beta b(t)^{\frac{1}{\beta}}, \quad \forall t \in [0,1]$$

es decir:

$$\frac{|f(t)g(t)|}{\left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |g(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|f(t)|^{\frac{1}{p}}}{\int_0^1 |f(t)|^p dt} + \frac{1}{1} \cdot \frac{|g(t)|^{\frac{1}{q}}}{\int_0^1 |g(t)|^q dt}$$

para todo $t \in [0,1]$. Integrando ambos lados de 0 a 1 se sigue que:

$$\frac{\int_0^1 |f(t)g(t)dt|}{\left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |g(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{\int_0^1 |f(t)|^p dt}{\int_0^1 |f(t)|^p dt} + \frac{1}{q} \cdot \frac{\int_0^1 |g(t)|^q dt}{\int_0^1 |g(t)|^q dt}$$

$$\Rightarrow \frac{\int_0^1 |f(t)g(t)dt|}{\left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |g(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 |f(t)g(t)dt| \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |g(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

□

Si $p = q = 2$ la desigualdad anterior es llamada desigualdad de Schwarz en $L_2(0,1)$.

Se tiene la desigualdad de Minkowski para $f, g \in L_p(0,1)$:

$$\left(\int_0^1 |f(t) + g(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^1 |g(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

(Mostrar)

Demostración. El resultado se tiene de forma inmediata si $\int_0^1 |f(t) + g(t)|^p \, dt = 0$. Suponga lo contrario, entonces $\left(\int_0^1 |f(t) + g(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} > 0$.

Se tiene entonces que:

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(t) + g(t)|^p \, dt &\leq \int_0^1 |f(t) + g(t)|^{p-1} (|f(t)| + |g(t)|) dt \\ &\leq \int_0^1 |f(t) + g(t)|^{p-1} |f(t)| \, dt + \int_0^1 |f(t) + g(t)|^{p-1} |g(t)| \, dt\end{aligned}$$

Como $p > 1$ entonces existe $q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, en particular $pq - q = p$. Se tiene así que $|f + g|^{p-1} \in L_q(0,1)$ pues:

$$\begin{aligned}(|f + g|^{p-1})^q &= |f + g|^{pq-q} \\ &= |f + g|^p\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (|f(t) + g(t)|^{p-1})^q = \int_0^1 |f(t) + g(t)|^p$$

Luego, por la desigualdad de Hölder:

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(t)+g(t)|^{p-1}|f(t)|\,dt &\leq \left(\int_0^1 (|f(t)+g(t)|^{p-1})^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_0^1 |f(t)+g(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

y, de forma análoga:

$$\int_0^1 |f(t)+g(t)|^{p-1}|g(t)|\,dt \leq \left(\int_0^1 |f(t)+g(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |g(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}&\int_0^1 |f(t)+g(t)|^p\,dt \\ &\leq \left(\int_0^1 |f(t)+g(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\left(\int_0^1 |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^1 |g(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\right) \\ \Rightarrow &\left(\int_0^1 |f(t)+g(t)|^p\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}} = \left(\int_0^1 |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^1 |g(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \\ \Rightarrow &\left(\int_0^1 |f(t)+g(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^1 |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^1 |g(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

□

Con lo anterior vemos que $L_p(0,1)$ es un espacio lineal complejo y que definiendo la relación de equivalencia $f \sim g$ sii $f = g$ c.t.p. para cada $f, g \in L_p(0,1)$ tendremos que el mapeo

$$[f] \mapsto \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = N_p(f)$$

está bien definido en $L_p(0,1)\diagup\sim$ y más aún que es una norma. Luego

$$\rho([f],[g]) = \left(\int_0^1 |f(t)-g(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

es una métrica en $L_p(0,1)\diagup\sim$

Lema 4.2. *Sea $p > 1$ y $\varepsilon > 0$. Si $f \in L_p(0,1)$ es tal que $(\int_0^1 |f(t)|^p\, dt)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{2}{p}}$, entonces el conjunto:*

$$A = \left\{ x \in [0,1] \middle| \, |f(x)| > \varepsilon^{\frac{1}{p}} \right\}$$

tiene medida menor o igual a ε.

Demostración. Veamos que:

$$\varepsilon^2 > \int_0^1 |f(t)|^p\, dt \geq \int_A |f(t)|^p\, dt \geq \varepsilon \cdot \mu(A)$$

por ende, $\mu(A) < \varepsilon$. □

Lema 4.3. *Sea $p > 1$. Si $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $L_p(0,1)$, entonces existen una función creciente α de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ y una función f de $[0,1]$ en $\mathbb{C}$ tal que $\left(f_{\alpha(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ converge c.t.p. a f.*

Demostración. Como la sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $L_p(0,1)$, entonces existe una función creciente α de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ tal que:

$$N_p(f_{\alpha(n+1)} - f_{\alpha(n)}) < \left(\frac{1}{2^n}\right)^{\frac{2}{p}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Sea:

$$A_n = \left\{ t \in [0,1] \middle| \, \left|f_{\alpha(n+1)}(t) - f_{\alpha(n)}(t)\right| \geq \left(\frac{1}{2^n}\right)^{\frac{1}{p}} \right\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

por el Lema anterior se tiene que $\mu(A_n) < \frac{1}{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$\left|f_{\alpha(n+1)}(t) - f_{\alpha(n)}(t)\right| < \left(\frac{1}{2^n}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall t \in [0,1] \setminus A_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Tomemos $M_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, entonces $\mu(M_n) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego:

$$\left|f_{\alpha(n+1)}(t) - f_{\alpha(n)}(t)\right| < \left(\frac{1}{2^n}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall t \in [0,1] \setminus M_k, \forall n \geq k$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

se sigue por el Criterio M de Weierestrass que la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|f_{\alpha(n+1)} - f_{\alpha(n)}\right|$$

converge puntualmente (pues converge uniformemente) en $[0,1] \setminus M_k$. Como $\mathbb{C}$ es de Banach entonces la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{\alpha(n+1)} - f_{\alpha(n)}$$

converge puntualmente en $[0,1] \setminus M_k$. Luego, como:

$$f_{\alpha(n)} = f_{\alpha(1)} + \sum_{i=1}^{n-1} [f_{\alpha(i+1)} - f_{\alpha(i)}], \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

converge puntualmente en $[0,1] \setminus M_k$ a una función g_k de $[0,1] \setminus M_k$ en $\mathbb{C}$. Como:

$$M_{k+1} \subseteq M_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

y $\mu(M_k) < \frac{1}{2^{k-1}}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces existe una función f de $[0,1]$ en $\mathbb{C}$ tal que:

$$f\Big|_{[0,1]\setminus M_k} = g_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

asıque $\left(f_{\alpha(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ converge a f c.t.p. □

Se tiene que el espacio $L_p(0,1)$ es completo.

(Mostrar)

Demostración. Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $L_p(0,1)$. Por el Lema anterior existe una función creciente α de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$. y una función f de $[0,1]$ en $\mathbb{C}$ tal que $\left(f_{\alpha(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ converge a f c.t.p. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$m, n \geq N \Rightarrow \int_0^1 |f_n - f_m|^p < \varepsilon^p$$

como $\alpha(m) \geq m$ para todo $m \in \mathbb{N}$, entonces:

$$m, n \geq N \Rightarrow \int_0^1 \left|f_n - f_{\alpha(m)}\right|^p < \varepsilon^p$$

además, se tiene para $n \geq N$ fijo:

$$\lim_{m\to\infty} \left|f_n - f_{\alpha(m)}\right|^p = |f_n - f|^p \text{ c.t.p. en } [0,1]$$

por el Lema de Fatou se sigue que:

$$\int_0^1 |f_n - f|^p \leq \liminf_{m\to\infty} \int_0^1 \left|f_n - f_{\alpha(m)}\right|^p \leq \varepsilon^p$$

Por tanto:

$$\left(\int_0^1 |f_n - f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon$$

así que $n \geq N$ implica que $N_p(f_n - f) \leq \varepsilon$. Por tanto, la sucesión de Cauchy converge a f en $L_p(0,1)$ y se tiene que $f_1 - f \in L_p(0,1)$, como $f_1 \in L_p(0,1)$ se sigue que $f_1 \in L_p(0,1)$. Por tanto, $L_p(0,1)$ es de Banach. □

2. Por ℓ_p entendemos el espacio de sucesiones de números complejos $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^p < \infty.$$

Si $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p$ y $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_q$ con $p, q > 0$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ se muestra la desigualdad de Hölder:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n w_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Si $p = q = 2$ la desigualdad anterior es llamada desigualdad de Schwarz en ℓ_2.

(Mostrar)

Demostración. Se tienen tres casos:

a) Alguna de las dos sucesiones $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es cero, en cuyo caso se tiene la desigualdad de forma inmediata.

b) Las sucesiones $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son ambas no cero tales que:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|w_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}=1$$

Por el Lema (4.1) para todo $n\in\mathbb{N}$ tomando $a(n)=|z_n|$, $b(n)=|w_n|$, $\alpha=\frac{1}{p}$ y $\beta=\frac{1}{q}$ se tiene que:

$$\begin{aligned}|z_nw_n| &\leq \frac{1}{p}|z_n|^p+\frac{1}{q}|w_n|^q, \quad \forall n\in\mathbb{N}\\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|z_nw_n| &\leq \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|^p+\frac{1}{q}\sum_{n=1}^{\infty}|w_n|^q\\ &=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\\ &=1\\ &=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|w_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

c) Las sucesiones $(z_n)_{n\in\mathbb{N}},(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son ambas no cero. Tomemos las sucesiones:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}=\left(\frac{z_n}{\left(\sum_{k=1}^{\infty}|z_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{y} \quad (y_n)_{n\in\mathbb{N}}=\left(\frac{w_n}{\left(\sum_{k=1}^{\infty}|w_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Entonces se tiene de forma inmediata que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p=\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p=1$$

por tanto $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell_p$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell_q$, de la parte anterior se tiene que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_ny_n|\leq 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z_nw_n|}{\left(\sum_{k=1}^{\infty}|z_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|w_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}}\leq 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|z_nw_n|\leq\left(\sum_{k=1}^{\infty}|z_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|w_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

lo cual prueba el resultado.

$\square$

La desigualdad de Minkowski para $p > 1$:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |z_n + w_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

(Mostrar)

Demostración. Se tiene que:

$$\begin{aligned} |z_n + w_n| &\leq (|z_n| + |w_n|)^p \\ &\leq (2\,\text{máx}\,\{|z_n|, |w_n|\})^p \\ &\leq 2^p\,\text{máx}\,\{|z_n|^p, |w_n|^p\} + 2^p\,\text{mín}\,\{|z_n|^p, |w_n|^p\} \\ &= 2^p\,(|z_n|^p + |w_n|^p), \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

por tanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n + w_n|^p \leq 2^p \left(\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^p + \sum_{n=1}^{\infty} |w_n|^p\right) < \infty$$

así que $(z_n + w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p$. La desigualdad se tiene de forma inmediata si la sucesión $(z_n + w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es cero, asÃ que supongamos que no lo es. Se tiene que:

$$\begin{aligned} |z_n + w_n|^p &\leq |z_n + w_n|^{p-1}(|z_n| + |w_n|) \\ &= |z_n + w_n|^{p-1}|z_n| + |z_n + w_n|^{p-1}|w_n|, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |z_n + w_n|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n + w_n|^{p-1}|z_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |z_n + w_n|^{p-1}|w_n|$$

Como $(|z_n + w_n|^{p-1})_{n=1}^{\infty} \in \ell_{\frac{p}{p-1}}$ y:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{\frac{p}{p-1}} = 1$$

se sigue por Hölder que:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |z_n + w_n|^{p-1}|z_n| &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(|z_n + w_n|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |z_n + w_n|^p\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

de forma análoga:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n + w_n|^{p-1} |w_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |z_n + w_n|^p\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Por tanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n + w_n|^p \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |z_n + w_n|^p\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

lo cual implica por ser $(z_n + w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no cero que:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |z_n + w_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$\square$

Con lo anterior vemos que ℓ_p es un espacio lineal complejo y que

$$z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \left(\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = N_p(z)$$

es una norma en ℓ_p. Luego

$$\rho((z_n),(w_n)) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |z_n - w_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

es una métrica en ℓ_p. Se tiene que ℓ_p es completo (Mostrar)

Demostración. Sea $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left((z_k^n)_{k\in\mathbb{N}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en ℓ_p, es decir que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n, m \geq N \Rightarrow N_p(\zeta_n - \zeta_m) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |z_k^n - z_k^m|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

Se tiene que la sucesión en $\mathbb{C}$, $(z_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, para todo $k \in \mathbb{N}$, pues por lo anterior:

$$n, m \geq N \Rightarrow |z_k^n - z_k^m| < \varepsilon, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Por ser $\mathbb{C}$ completo, para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $w_k \in \mathbb{C}$ tal que:

$$\lim_{n\to\infty} z_k^n = w_k$$

Afirmamos que $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ está en ℓ_p y que $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a esta en ℓ_p. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n, m \geq N \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |z_k^n - z_k^m|^p < \varepsilon^p$$

En particular para $M \in \mathbb{N}$ fijo:

$$n, m \geq N \Rightarrow \sum_{k=1}^{M} |z_k^n - z_k^m|^p < \varepsilon^p$$

fijando n y tomando límite cuando $m \to \infty$ se obtiene que:

$$n \geq N \Rightarrow \sum_{k=1}^{M} |z_k^n - w_k|^p \leq \varepsilon^p$$

y, como el $M \in \mathbb{N}$ fue arbitrario, se sigue que al ser la serie no decreciente:

$$n \geq N \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |z_k^n - w_k|^p \leq \varepsilon^p$$

así que:

$$n \geq N \Rightarrow N_p(\zeta_n - (w_k)_{k\in\mathbb{N}}) \leq \varepsilon$$

con lo que la sucesión $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en ℓ_p, además $(w_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_p$ ya que en particular:

$$N_p(\zeta_n - (w_k)_{k\in\mathbb{N}}) < \varepsilon$$

se tiene que $\zeta_n \in \ell_p$ y por lo anterior $\zeta_n - (w_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_p$, por lo cual $(w_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_p$.

Se sigue que ℓ_p es de Banach. $\square$

Ejemplo 4.4.

1. *Considere el espacio de Bergman en el disco unitario: Hol*$(\mathbb{D}) \cap L_2(\mathbb{D}, \mathbb{C})$.

Note que si $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ con $n < m$ tendremos que

$$\begin{aligned}
\langle z^n, z^m \rangle &= \int_{\mathbb{B}(0,1)} w^n \overline{(w^m)} dw = \int_{\partial\mathbb{B}(0,1)} \|w\|^{2n} (\overline{w})^{m-n} dw \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \|re^{i\theta}\|^{2n} (\overline{re^{i\theta}})^{m-n} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^{m+n+1} e^{-i\theta(m-n)} dr d\theta \\
&= \frac{1}{m+n+2} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta(m-n)} d\theta = 0
\end{aligned}$$

Así que la familia $(z^n)_{n\geq 0}$ es ortogonal y que la familia $(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{\pi}} z^n)_{n\geq 0}$ es una familia ortonormal. Ya que

$$\|z^n\| = \sqrt{\langle z^n, z^n \rangle} = \sqrt{\frac{1}{2n+2} 2\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n+1}},$$

para cada $n \geq 0$.

2. *Si $(x_n)_{n\in I\subset\mathbb{N}}$ es una base del espacio euclideano $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ y la familia $(y_n)_{n\in I}$ es biortonormal a la base $(x_n)_{n\in I}$ entonces podemos calcular de manera directa los coeficientes en que cada elemento de V se escribe en términos de la base como se muestra:*

$$\langle x, y_k \rangle = \langle \sum_{n\in I} c_n x_n, y_k \rangle = c_k \langle x_k, y_k \rangle = c_k.$$

para cada $k \in I$. Por lo tanto,

$$x = \sum_{n\in I} c_n x_n = \sum_{n\in I} \langle x, y_n \rangle x_n.$$

3. *Empleando biortogonalidad, una parte del concepto comentado en 2, en el espacio de Bergman comentado en 1. Tendremos que todo elemento del espacio de Bergman se escribe como*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

Entonces $\langle f, z^k \rangle = a_k \langle z^k, z^k \rangle = a_k \frac{\pi}{k+1}$ para cada $k \geq 0$. Así que $a_k = \frac{k+1}{\pi} \langle f, z^k \rangle$ para cada k. Continuando con este análisis tendremos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\pi} \langle f, z^n \rangle z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, (\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{\pi}} z^n) \rangle (\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{\pi}} z^n),$$

que era de esperarse ya que $(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{\pi}} z^n)_{n\geq 0}$ *es una familia ortonormal, o equivalentemente esta familia es biortonormal de sí misma.*