

Notas Extensiones Separables AM III

Cristo Daniel Alvarado

Diciembre de 2023

Índice general

4. Extensiones Separables	2
4.1. Resultados preeliminares	2
4.2. Extensiones separables	4
4.3. Extesiones puramente inseparables	12

Capítulo 4

Extensiones Separables

4.1. Resultados preeliminares

Para enunciar lo que es una extensión separable, se necesitarán demostrar algunos resultados preeliminares para enunciarlo de forma adecuada.

Proposición 4.1.1

Sea F un campo y $f(X) \in F[X]$ un polinomio no constante. Si

1. $\text{car}(F) = 0$, entonces $f'(X) \neq 0$.
 2. $\text{car}(F) = p > 0$, entonces $f'(X) = 0$ si y sólo si $\exists g(X) \in F[X]$ tal que $f(X) = g(X^p)$.
-

Demostración:

En ambos casos, para la demostración se requiere de usar el polinomio $f'(X)$. Expresamos

$$f(X) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, \quad n \geq 1, a_n \neq 0 \quad (4.1)$$

De (1): Se tiene que

$$f'(X) = \cdots + na_nx^{n-1}$$

donde $na_n \neq 0$ ya que $\text{car}(F) = 0$. Por tanto, $f'(X) \neq 0$.

De (2): Se probará el si, sólo si.

\Leftarrow): Supongamos que $\exists g(X) \in F[X]$ tal que $f(X) = g(X^p)$. Expresamos a $g(X) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$, donde $b_m \neq 0$. Entonces

$$\begin{aligned} f(X) &= g(X^p) \\ &= b_0 + b_1X^p + \cdots + b_mX^{pm} \\ \Rightarrow f'(X) &= pb_1X^{p-1} + \cdots + pm b_mX^{pm-1} \\ &= 0 \cdot X^{p-1} + \cdots + 0 \cdot X^{pm-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

\Rightarrow): Supongamos que $f'(X) = 0$, donde $f'(X) = \sum_{i=1}^m ia_i x^{i-1}$, entonces $ia_i = 0$, para todo $i = 1, \dots, m$. Si $a_i \neq 0$ para algún i , entonces debe suceder que $i \cdot 1 = i = 0$, por lo cual $\text{car}(F) = p \mid i$. Luego si $a_i \neq 0$, existe $m_i \in \mathbb{N}$ tal que $i = pm_i$. Escribiendo a $f(X)$ con todos sus términos no cero, se tiene que

$$\begin{aligned} f(X) &= a_0 + a_{pm_1}X^{pm_1} + \cdots + a_{pm_n}X^{pm_n} \\ &= a_0 + a_{pm_1}(X^p)^{m_1} + \cdots + a_{pm_n}(X^p)^{m_n} \\ &= g(X^p) \end{aligned}$$

donde $g(X) = a_0 + a_{pm_1}X + \cdots + a_{pm_n}X^{m_n}$, siendo $a_{pm_n} \neq 0$, pues $f(X) \neq 0$ □

De este teorema anterior y de un teorema del capítulo pasado, se deduce de forma inmediata el siguiente corolario:

Corolario 4.1.1

Sea F un campo y $f(X) \in F[X]$ un polinomio irreducible. Si

1. $\text{car}(F) = 0$, entonces todas las raíces de $f(X)$ son simples.
 2. $\text{car}(F) = p > 0$, entonces $f(X)$ tiene una raíz simple si y sólo si, $\exists g(X) \in F[X]$ tal que $f(X) = g(X^p)$.
-

Demostración:

Es inmediata de la proposición anterior. □

El siguiente teorema tiene como objetivo caracterizar las extensiones separables, enunciando un resultado importante para su definición.

Teorema 4.1.1

Sea F un campo con $\text{car}(F) = p > 0$. Sea $f(X) \in F[X]$ un polinomio irreducible, y $e \in \mathbb{N}^*$ tal que $f(X) \in F[x^{p^e}]$, pero $f(X) \notin F[x^{p^{e+1}}]$. Sea $\Psi(X) \in F[X]$ el polinomio tal que $f(X) = \Psi(X^{p^e})$. Entonces

1. $\Psi(X)$ es un polinomio irreducible en $F[X]$.
 2. Todas las raíces de $\Psi(X)$ son simples.
 3. Todas las raíces de $f(X)$ tienen la misma multiplicidad, a saber, p^e .
 4. Si $m = \deg(\Psi)$, entonces $\deg(f) = p^e m$.
-

Demostración:

De (1): Supongamos que $\Psi(X)$ es descomponible, entonces existen $g(X), h(X) \in F[X]$ con grados ≥ 1 tales que

$$\begin{aligned}\Psi(X) &= g(X)h(X) \\ \Rightarrow f(X) &= g(X^p)h(X^p) \\ &= g_1(X)h_1(X)\end{aligned}$$

donde $g_1(X) = g(X^p)$ y $h_1(X) = h(X^p)$ con grados ≥ 1 , lo cual implicaría que $f(X)$ es reducible. Luego $\Psi(X)$ tiene que ser irreducible.

De (2): Supongamos que $\Psi(X)$ admite una raíz múltiple, entonces $\exists g(X) \in F[X]$ tal que $\Psi(X) = g(X^p)$. Así

$$\begin{aligned}f(X) &= \Psi(X^{p^e}) \\ &= g(X^{p^{e+1}}) \\ &\in F[x^{p^{e+1}}]\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\Psi(X)$ debe tener todas sus raíces simples.

De (3): Sea $m = \deg(\Psi)$. Sean $\beta_1, \dots, \beta_m \in \bar{F}$ todas las raíces de $\Psi(X)$ en alguna cerradura algebraica de F . Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}\Psi(X) &= a(x - \beta_1) \cdots (x - \beta_m) \\ \Rightarrow f(X) &= \Psi(X^{p^e}) \\ &= a(x^{p^e} - \beta_1) \cdots (x^{p^e} - \beta_m)\end{aligned}$$

Donde $a \in F$ es alguna constante. Ahora, para cada $i = 1, \dots, m$ sea $\alpha_i \in \bar{F}$ una raíz del polinomio $X^{p^e} - \beta_i = 0$, esto es $\beta_i = \alpha_i^{p^e}$. Notemos que si $i \neq j$, debe suceder que $\alpha_i \neq \alpha_j$. Por tanto

asd

De (4): Es inmediata. □

Se deduce de forma inmediata el siguiente corolario.

Corolario 4.1.2

Sea F campo y $f(X) \in F[X]$ un polinomio irreducible. Entonces todas las raíces de $f(X)$ tienen la misma multiplicidad. Si $\text{car}(F) = 0$, la multiplicidad de estas raíces es 1, y si $\text{car}(F) = p > 0$, tienen multiplicidad p^e , para algún $e \in \mathbb{N}^*$ (este e se obtiene del teorema anterior).

4.2. Extensiones separables

Ahora estamos en las condiciones de enunciar la definición de separabilidad.

Definición 4.2.1

De acuerdo con las notaciones del teorema anterior y de su demostración, tenemos que el número $\deg(\Psi)$ es llamado **el grado de separabilidad de f** , y al entero no negativo e es llamado **el grado de inseparabilidad de f** .

En otras palabras, podemos ver que el grado de separabilidad de f es el número de raíces distintas de f .

Definición 4.2.2

Sea F un campo y \bar{F} una cerradura algebraica de F . Si $\alpha \in \bar{F}$ y $f(X) = \text{irr}(\alpha, F, X)$, entonces se define **el grado de separabilidad de α** , como el grado de separabilidad de f , y al exponente e de inseparabilidad de f , será el **exponente de inseparabilidad de α** .

En el caso en que $\text{car}(F) = 0$, el exponente y grado de inseparabilidad de f y α no tienen sentido en estar definidos, pues en ambos casos su valor siempre será de 1.

En cualquier caso, si $\alpha \in \bar{F}$ se denota al grado de separabilidad de α como

$$[F(\alpha) : F]_s \tag{4.2}$$

En el caso de que $\text{car}(F) = 0$, se tiene que

$$[F(\alpha) : F]_s = [F(\alpha) : F] = \deg(\text{irr}(\alpha, F, X)) \tag{4.3}$$

y, si $\text{car}(F) = p > 0$, entonces

$$[F(\alpha) : F]_s = \frac{[F(\alpha) : F]}{p^e} \tag{4.4}$$

Proposición 4.2.1

Sea F un campo, \bar{F} una cerradura algebraica de F y $\alpha \in \bar{F}$. Entonces, $[F(\alpha) : F]_s = N$, donde $N \in \mathbb{N}$ es el número de F -homomorfismos de $F(\alpha)$ en \bar{F} .

Demostración:

Sea $f(X) = \text{irr}(\alpha, F, X)$. Tomemos $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \bar{F}$ las raíces distintas de $f(X)$. Se tiene por definición que

$$m = [F(\alpha) : F]_s$$

Sea $\phi : F(\alpha) \rightarrow \bar{F}$ un F -homomorfismo. Sabemos que ϕ está completamente determinada por su acción sobre α , teniendo que $\phi(\alpha)$ es raíces de $f(X)$, esto es debe ser que $\phi(\alpha) = \alpha_i$, con $i \in [1, m]$. luego, a lo más tenemos m F -homomorfismos de $F(\alpha)$ en \bar{F} , con lo cual se tiene el resultado. \square

Definición 4.2.3

Sea E/F una extensión algebraica. Se define el **grado de separabilidad de E sobre F** como la cardinalidad del conjunto de F -homomorfismos que van de E en \bar{F} , donde \bar{F} es una cerradura algebraica de F que contiene a E . Tal cardinal es denotado por $[E : F]_s$.

De resultados de capítulo anterior, se deduce de forma inmediata el siguiente teorema.

Teorema 4.2.1

Sea E/F una extensión finita y K un campo intermedio de la extensión E/F . Entonces

$$[E : F]_s = [E : K]_s [K : F]_s \quad (4.5)$$

Demostración:

Es inmediata de un teorema anterior. \square

Definición 4.2.4

Sea F un campo y $\alpha \in \bar{F}$. Decimos que α es **separable sobre F** si $[F(\alpha) : F]_s = [F(\alpha) : F]$. Si E/F es una extensión algebraica, entonces se dice que E/F es **separable** o E es **separable sobre F** , si todo elemento de E es separable sobre F .

Veremos ahora algunas caracterizaciones de las extensiones separables.

Observación 4.2.1

Sea F campo y \bar{F} cerradura algebraica de F .

1. Si $\alpha \in \bar{F}$, entonces α es separable sobre F si y sólo si $f(X) = \text{irr}(\alpha, F, X)$ es tal que todas sus raíces son simples. Cuando esto ocurra decimos que $f(X)$ es **separable sobre F** .
2. Si $g(X) \in F[X]$, decimos que $g(X)$ es **separable sobre F** si todos sus factores irreducibles son separables sobre F .

Proposición 4.2.2

Sea E/F una extensión finita con $\text{car}(F) = p > 0$. Entonces existe un elemento $t \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$[E : F] = p^t [E : F]_s \quad (4.6)$$

En particular, si $p \nmid [E : F]$, entonces $[E : F] = [E : F]_s$.

Demostración:

Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in E$ tales que $E = F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Consideraremos la torre de campos $F \subseteq F(\alpha_1) \subseteq \dots \subseteq F(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \subseteq F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Sea e^i es exponente de inseparabilidad de α_i sobre $F(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})$, con $i \in [2, n]$ y e_1 el grado de inseparabilidad de α_1 sobre F . Entonces

$$\begin{aligned} [E : F]_s &= [F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : F(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})]_s \cdots [F(\alpha_1) : F]_s \\ &= \frac{1}{p^{e_n}} [F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : F(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})] \cdots \frac{1}{p^{e_1}} [F(\alpha_1) : F] \\ \Rightarrow [E : F] &= p^{e_1 + e_2 + \dots + e_n} [E : F]_s \end{aligned}$$

tomando $t = e_1 + \dots + e_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ se sigue el resultado. \square

Observación 4.2.2

Si E/F es una extensión finita y $\text{car}(F) = 0$, entonces $[E : F] = [E : F]_s$.

Proposición 4.2.3

Sea E/F una extensión de campos con $\text{car}(F) = p > 0$ y $\alpha \in E$ algebraico sobre F . Sea e el exponente de inseparabilidad de α sobre F . Entonces

1. α^{p^e} es separable sobre F .
2. Las siguientes condiciones son equivalentes:
 - I) α es separable sobre F .
 - II) $[F(\alpha) : F]_s = [F(\alpha) : F]$.
 - III) $e = 0$.
 - IV) $F(\alpha) = F(\alpha^p)$.

Demostración:

De (1): Sea $f(X) = \text{irr}(\alpha, F, X)$ y $\psi(x) \in F[X]$ tal que $\psi(X^{p^e}) = f(X)$, pero $f(X) \notin F[X^{p^{e+1}}]$. Sabemos que $\psi(X)$ es irreducible sobre F y que todas sus raíces son simples, donde

$$0 = f(\alpha) = \psi(\alpha^{p^e})$$

esto es, α^{p^e} es raíz de $\psi(X)$, por lo cual $\psi(X) = \text{irr}(\alpha^{p^e}, F, X)$. Por tanto, α^{p^e} es separable sobre F .

De (2): Es claro que $\text{I} \iff \text{II} \iff \text{III}$. Probaremos que $\text{I} \iff \text{IV}$. Antes, notemos que

$$F \subseteq F(\alpha^p) \subseteq F(\alpha)$$

$\text{I} \Rightarrow \text{IV}$): Sea $f(X) = \text{irr}(\alpha, F, X)$. Tenemos que $g(X) = X^p - \alpha^p \in F(\alpha^p)[X]$ y α es raíz de $g(X)$. Por lo cual $\text{irr}(\alpha, F(\alpha^p), X) \mid g(X)$ y $\text{irr}(\alpha, F(\alpha^p), X) \mid f(X)$ en $F(\alpha^p)[X]$.

Entonces, como todas las raíces de $f(X)$ son simples, las raíces de $h(X) = \text{irr}(\alpha, F(\alpha^p), X)$ también lo son; además $h(X) \mid X^p - \alpha^p = (X - \alpha)^p \Rightarrow h(X) = (x - \alpha) \Rightarrow \alpha \in F(\alpha^p)$. Por tanto, $F(\alpha) = F(\alpha^p)$.

$\text{IV} \Rightarrow \text{I}$): Recíprocamente, supongamos que $F(\alpha) = F(\alpha^p)$ pero α no es separable sobre F . Siendo $f(X) = \text{irr}(\alpha, F, X)$, tenemos que $f(X) \in F[X^p]$, esto es, existe $g(X) \in F[X]$ tal que $f(X) = g(X^p)$ donde $\deg(f) = p \cdot \deg(g) > \deg(g)$.

Notemos que $g(X)$ tiene por raíz a α^p , pues $g(\alpha^p) = f(\alpha) = 0$, de esta forma $\text{irr}(\alpha^p, F, X) \mid g(X) \Rightarrow [F(\alpha^p) : F] = \deg(\text{irr}(\alpha^p, F, X)) = \deg(g) < \deg(f) = [F(\alpha) : F]$, luego $F(\alpha^p) \subsetneq F(\alpha)$, lo cual es una contradicción. Por tanto, α es separable sobre F . \square

Proposición 4.2.4

Sea E/F una extensión finita. Entonces E/F es separable si y sólo si $[E : F]_s = [E : F]$.

Demostración:

\Rightarrow) : Suponga que E/F es separable. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in E$ tales que $F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = E$. Consideremos la torre de campos:

$$F \subsetneq F(\alpha_1) \subsetneq \dots \subsetneq F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = E$$

para cada $i \in [2, n]$, tenemos que α_i es separable y, por ende, lo es sobre $F(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})$. Luego,

$$\begin{aligned} [E : F]_s &= [F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : F(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})]_s \cdot \dots \cdot [F(\alpha_1) : F]_s \\ &= [F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : F(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})] \cdot \dots \cdot [F(\alpha_1) : F] \\ &= [E : F] \end{aligned}$$

\Leftarrow) : Sea $\alpha \in E$ arbitrario. Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} [E : F(\alpha)]_s \cdot [F(\alpha) : F]_s &= [E : F]_s \\ &= [E : F] \\ &= [E : F(\alpha)] \cdot [F(\alpha) : F] \end{aligned}$$

donde $[E : F(\alpha)]_s \leq [E : F(\alpha)]$ y $[F(\alpha) : F]_s \leq [F(\alpha) : F]$. Por la igualdad anterior debe suceder que

$$[F(\alpha) : F]_s = [F(\alpha) : F]$$

esto es, que α es separable sobre F . Como el α fue arbitrario, entonces se sigue que la extensión E/F es una extensión separable. \square

Observación 4.2.3

Sea $F \subseteq K \subseteq E$ una torre de campos y $\alpha \in E$ separable sobre F . Entonces α es separable sobre K . Más generalmente, sean E/F y K/F extensiones de campos y $\alpha \in E$ separable sobre F . Si α es elemento de un campo L extensión de K , entonces α es separable sobre K .

Proposición 4.2.5

Sea E/F una extensión de campos y $S \subseteq E$ tal que $E = F(S)$. Sea.

$$K = \{\alpha \in E \mid \alpha \text{ es separable sobre } F\} \tag{4.7}$$

Entonces

1. K es un subcampo intermedio de la extensión E/F .
2. E/F es separable si y sólo si α es separable sobre F , para todo $\alpha \in S$.

Demostración:

De (1): Probaremos que K es campo y que $F \subseteq K \subseteq E$. En efecto, sea $\alpha \in F$, se tiene que α es algebraico sobre F , con polinomio irreducible $f(X) = X - \alpha$, el cual tiene todas sus raíces distintas, por lo cual α es separable sobre F . Entonces $F \subseteq K \subseteq E$. Sean ahora $\alpha, \beta \in K \neq \emptyset$, pues $F \subseteq K$. Consideremos el campo intermedio de la extensión E/F , $F(\alpha, \beta)$. Se tiene entonces la torre de campos

$$F \subseteq F(\alpha) \subseteq F(\alpha, \beta) \subseteq E$$

Como β es separable sobre F , lo es sobre $F(\alpha)$, luego como el grado de separabilidad es multiplicativo, se tiene que

$$\begin{aligned} [F(\alpha, \beta) : F]_s &= [F(\alpha, \beta) : F(\alpha)]_s [F(\alpha) : F]_s \\ &= [F(\alpha, \beta) : F(\alpha)] [F(\alpha) : F] \\ &= [F(\alpha, \beta) : F] \end{aligned}$$

por lo cual, la extensión $F(\alpha, \beta)/F$ es separable, luego los elementos $\alpha - \beta, \alpha\beta, \alpha^{-1} \in F(\alpha, \beta)$ son separables sobre F . Por tanto, K es campo y por lo anterior, es subcampo intermedio de la extensión E/F .

De (2): Veamos que

\Rightarrow): Es inmediata, pues si E/F es separable todo elemento de E es separable sobre F . En particular todo elemento de S es separable sobre F .

\Leftarrow): Supongamos que α es separable sobre F , para todo $\alpha \in S$. Por (1) se tiene que $S \subseteq K$ y $F \subseteq K$, pero como K es subcampo de E , se tiene que $F(S) \subseteq K$, por lo cual $F(S) = E = K$. Así, todos los elementos de E son separables sobre F , es decir E/F es una extensión separable. \square

Definición 4.2.5

El campo K de la definición (4.7) es llamado **la cerradura separable** o de la extensión E/F o simplemente de E/F , o de F en E .

Si consideramos la extensión \bar{F}/F , entonces la cerradura separable de F en \bar{F} simplemente se dice es la **cerradura separable de F** .

Observación 4.2.4

Si E/F es una extensión algebraica de tal manera que $E \subseteq \bar{F}$, entonces la cerradura separable de F en E , K , es la intersección de la cerradura separable de F con E .

Observación 4.2.5

En la literatura no existe notación establecida para referirse a la cerradura normal. En este momento nosotros acordaremos la siguiente. Sobre la extensión E/F , se denotará a la cerradura separable de F en E por:

$$F_{S, E/F} \quad \text{o} \quad F_{S, F}^E$$

Cuando la extensión es \bar{F}/F será

$$F_S$$

y a veces a la cerradura algebraica se le denota por $\bar{F} = F^a$.

Proposición 4.2.6

Sea E/F una extensión normal & F_S la cerradura separable de E/F . Entonces, la extensión F_S/F es normal.

Demostración:

Sea $\alpha \in F_S$ con $f(X) = \text{irr}(\alpha, F, X)$, y $\beta \in \bar{F}$ tal que α y β son F -conjugados, es decir que ambos son raíces del polinomio $f(X)$. Como la extensión E/F es normal, entonces $\beta \in E$, donde $\text{irr}(\beta, F, X) = f(X)$ es separable sobre F , pues α es separable sobre F , es decir, β es separable sobre F . Luego $\beta \in F_S$. Por tanto, la extensión F_S/F es normal. \square

Observación 4.2.6

Si F es campo, la extensión \bar{F}/F es normal, por lo cual las extensiones \bar{F}/F_S y F_S/F son ambas normales (siendo F_S la cerradura separable de F).

Proposición 4.2.7

Sea E/F una extensión finita. y F_S la cerradura separable de F en E . Entonces,

$$[F_S : F] = [E : F]_s \quad (4.8)$$

Demostración:

Tenemos dos casos:

- Si $\text{car}(F) = 0$, entonces la extensión E/F es separable y por tanto $F_S = E$. Por tanto

$$\begin{aligned} [F_S : F] &= [E : F] \\ &= [E : F]_s \end{aligned}$$

- Si $\text{car}(F) = p > 0$. Tenemos que

$$\begin{aligned} [E : F]_S &= [E : F_S]_S [F_S : F]_S \\ &= [E : F_S]_S [F_S : F] \end{aligned}$$

Para probar el resultado, basta con probar que $[E : F_S]_S = 1$. Recordemos que $[E : F_S]_S$ es el cardinal de F_S -homomorfismos de E en $\bar{F} = \bar{F}_S$. Sea entonces $f : E \rightarrow \bar{F}$ un F_S -homomorfismo. Sea $\alpha \in E$. Si $\alpha \in F_S$ entonces $f(\alpha) = \alpha$. Si $\alpha \notin F_S$, se tiene por definición de F_S que α no es separable sobre F .

Sea $f(X) = \text{irr}(\alpha, F, X)$, y tomemos $e \in \mathbb{N}^*$ su exponente de inseparabilidad. Por un resultado anterior sucede que α^{p^e} es separable sobre F , es decir $\alpha^{p^e} \in F_S$. Luego,

$$\begin{aligned} f(\alpha^{p^e}) &= \alpha^{p^e} \\ \Rightarrow (\alpha - f(\alpha))^{p^e} &= \alpha^{p^e} - f(\alpha)^{p^e} \\ &= 0 \\ \Rightarrow f(\alpha) - \alpha &= 0 \\ \Rightarrow f(\alpha) &= \alpha \end{aligned}$$

Es decir, $f = \text{id}_E$. Por tanto $[E : F_S] = 1$. Así por la ecuación anterior

$$[E : F]_S [F_S : F]$$

\square

Teorema 4.2.2

La clase de extensiones separables es una clase distinguida.

Demostración:

De (a): Sea $F \subseteq K \subseteq E$ una torre de campos. Probaremos que E/F es separable si, y sólo si E/K y K/F son separables.

\Rightarrow): Supongamos que E/F es separable. Sabemos ya que E/K es separable. Pero, por otro lado, es claro que la extensión K/F es separable.

\Leftarrow): Supongamos que las extensiones E/K y K/F son separables. Sea $\alpha \in E$ arbitrario y tomemos $f(X) = \text{irr}(\alpha, K, X)$, digamos

$$f(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_{m-1}X^{m-1} + X^m \in K[X]$$

Tenemos que $f(X)$ es separable sobre K , es decir todas las raíces de $f(X)$ son simples. Consideremos la torre de campos:

$$F \subseteq F(a_0, a_1, \dots, a_{m-1}) \subseteq F(a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, \alpha)$$

donde $F(a_0, a_1, \dots, a_{m-1})/F$ es finita y separable, al igual que $F(a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, \alpha)/F(a_0, a_1, \dots, a_{m-1})$. Notemos que $f(X) = \text{irr}(\alpha, F(a_0, a_1, \dots, a_{m-1}), X)$. Entonces

$$\begin{aligned} [F(a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, \alpha) : F] &= [F(a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, \alpha) : F(a_0, a_1, \dots, a_{m-1})] [F(a_0, a_1, \dots, a_{m-1}) : F] \\ &= [F(a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, \alpha) : F(a_0, a_1, \dots, a_{m-1})]_s [F(a_0, a_1, \dots, a_{m-1}) : F]_s \\ &= [F(a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, \alpha) : F]_s \end{aligned}$$

es decir, $F(a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, \alpha)/F$ es una extensión separable, en particular se tiene que α es separable sobre F . Por ser el α arbitrario en E , se sigue que E/F es una extensión separable.

De (b): Sean E/F y K/F extensiones separables, donde E/F es separable y, E y K subcampos de un campo común L . Como $K(E) = KE$, entonces basta ver que los elementos de E son separables sobre K , lo cual ya se tiene.

Entonces, KE/F es una extensión separable. □

Corolario 4.2.1

Sean E/F y K/F extensiones separables, con E y K subcampos de un campo común L . Entonces, KE/F es separable.

Demostración:

Es inmediato de la proposición teorema. □

Definición 4.2.6

Sea F un campo. Se dice que F es **perfecto** si toda extensión algebraica de F es separable.

Observación 4.2.7

Todo campo de característica 0 es perfecto (ya que toda extensión algebraica de un campo con característica 0 sigue teniendo característica 0, es decir que la extensión siempre va a ser separable).

Definición 4.2.7

Sea F campo de característica $p > 0$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Se define la función $\phi_n : F \rightarrow F$, $\alpha \mapsto \alpha^{p^n}$.

Se tiene que ϕ_n es un homomorfismo, llamado **el homomorfismo de Fröbenius de grado n** . Para $n = 1$ se dice simplemente que ϕ_1 es el homomorfismo de Fröbenius, y se denota por ϕ .

Teorema 4.2.3

Sea F un campo de caracterísitca $p > 0$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. F es perfecto.
2. Toda extensión finita de F es separable.
3. Todo polinomio irreducible sobre F es separable.
4. Todo polinomio sobre F es separable.
5. El homomorfismo de Fröbenius es un automorfismo de F .

Demostración:

(1) \Rightarrow (2): Es inmediato.

(2) \Rightarrow (3): Sea $f(X) \in F[X] \setminus F$ irreducible y sea $\alpha \in \bar{F}$ una raíz de $f(X)$. Por hipótesis, $F(\alpha)$ es una extensión separable de F , luego α es separable sobre F . Como $f(X)$ es asociado con $\text{irr}(\alpha, F, X)$, entonces f es separable sobre F .

(3) \iff (4): Es inmediato.

(4) \Rightarrow (5): Es claro que $\phi : F \rightarrow F$ es un monorfismo. Sea $\alpha \in F$ y considérese $f(X) = X^p - \alpha \in F[X]$. Sea $\beta \in \bar{F}$ una raíz de $f(X)$ y sea $g(X) = \text{irr}(\beta, F, X)$, el cual es separable y divide a $f(X)$. Pero $f(X) = X^p - \alpha^p = (X - \alpha)^p$, así β es la única raíz de $f(X)$, por lo que también lo es de $g(X)$. Por tanto, $g(X) = X - \beta \in F[X]$.

Luego, $\beta \in F$. Así pues, ϕ es suprayectiva, luego es un automorfismo de F .

(5) \Rightarrow (1): Sea E/F una extensión algebraica. Sean $\alpha \in E$ y $f(X) = \text{irr}(\alpha, F, X)$, cuyas raíces tienen multiplicidad p^e , con $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, siendo e el exponente de inseparabilidad de α . Suponiendo que $e \geq 1$, entonces α es raíz múltiple de $f(X)$, por lo que existe $g(x) \in F[X]$ tal que $f(X) = g(X^p)$. Sea

$$g(X) = b_0 + b_1X + \cdots + b_mX^m$$

Por hipótesis, para todo $i \in \{0, \dots, m\}$ existe $c_i \in F$ tal que $b_i = c_i^p$. Pero, esto implica que

$$f(X) = c_0^p + c_0^pX^p + \cdots + c_m^pX^{mp} = (c_0 + c_1X + \cdots + c_mX^m)^p$$

lo cual contradice el hecho de que $f(X)$ sea irredicible. Por tanto, $e = 0$, luego α es separable sobre F y, en consecuencia, E/F es una extensión separable. \square

Teorema 4.2.4

Todo campo finito es perfecto.

Demostración:

Considerando el homomorfismo de Fröbenius $\phi : F \rightarrow F$, se tiene que ϕ es inyectivo, por lo cual $|\phi(F)| = |F|$. Pero, como F es finito, entonces $\phi(F) = F$, luego ϕ es automorfismo de F . Así pues, F es perfecto. \square

Definición 4.2.8

Sea E/F una extensión de campos y α inseparable sobre F . Entonces $f(X) = \text{irr}(\alpha, F, X)$ es de la forma $f(X) = (X - \alpha_1)^{p^e} \cdot \dots \cdot (X - \alpha_m)^{p^e}$ con $e \geq 1$. Se dice que α es **puramente inseparable sobre F** si y sólo si existe $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $\alpha^{p^t} \in F$.

4.3. Extesiones puramente inseparables

Definición 4.3.1

Sea E/F una extensión de campos con $\text{car}(F) = p > 0$ y $\alpha \in E$. Decimos que α es **puramente inseparable** si existe $t \in \mathbb{Z}$, $t \geq 0$ tal que $\alpha^{p^t} \in F$. La extensión E/F es **p.i.** si todo elemento de E es p.i. sobre F .

Observación 4.3.1

Si E/F es una extensión de campos, entonces todos los elementos de F son p.i. (separables) sobre F .

Proposición 4.3.1

Sea E/F una extensión de campos con $\text{car}(F) = p > 0$. Sea

$$K := \{\alpha \in E \mid \alpha \text{ es puramente inseparable sobre } F\}$$

(por la observación anterior, $K \neq \emptyset$). Entonces, K es subcampo de E que contiene a F .

Demostración:

Es claro que $K \neq \emptyset$ y $F \subseteq K \subseteq E$. Sean $\alpha, \beta \in K$, y $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tales que

$$\alpha^{p^{t_1}}, \beta^{p^{t_2}} \in F$$

Sea $t = \max\{t_1, t_2\}$. Por lo cual $\alpha^{p^t}, \beta^{p^t} \in F$, así

$$(\alpha - \beta)^{p^t} = \alpha^{p^t} - \beta^{p^t} \in F$$

$$(\alpha\beta)^{p^t} = \alpha^{p^t}\beta^{p^t} \in F$$

$$(\alpha^{-1})^{p^t} = \left(\alpha^{p^t}\right)^{-1} \in F \text{ donde } \alpha \neq 0$$

por lo cual K es campo intermedio de la extensión E/F . □

Proposición 4.3.2

Sea E/F una extensión algebraica, con $\text{car}(F) = p > 0$. Sea $S \subseteq E$ tal que $E = F(S)$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. E/F es puramente inseparable.
2. Todo elemento de S es puramente inseparable sobre F .
3. Los elementos de E que son puramente inseparables y separables sobre F son exactamente los de F .

4. Si $\phi : E \rightarrow \bar{F}$ es un F -homomorfismo, entonces $\phi(\alpha) = \alpha$, para todo $\alpha \in E$.

Demostración:

(1) \Rightarrow (2): Es inmediato.

(2) \Rightarrow (3): Sea $\alpha \in E$ tal que es puramente inseparable sobre F y separable sobre F , y $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ el exponente de inseparabilidad de α sobre F .

Tenemos que α^{p^e} es separable sobre F (por una proposición anterior). Por otro lado, sea $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $\alpha^{p^t} \in F$. Podemos suponer que $t \geq e$. Luego, α es raíz del polinomio $g(X) = X^{p^t} - \alpha^{p^t} = (X - \alpha)^{p^t}$, por lo cual $f(X) | g(X)$, donde $f(X) = \text{irr}(\alpha, F, X)$.

Así $f(x) = (X - \alpha)^{p^t}$. Como α es separable sobre F , se tiene que $e = 0$, es decir que $f(X) = X - \alpha \in F[X]$, en particular, $\alpha \in F$.

(3) \Rightarrow (4): Sea $\phi : E \rightarrow \bar{F}$ un F -homomorfismo arbitrario, y $\alpha \in E$, con $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ su exponente de inseparabilidad. Sabemos que α^{p^e} es separable sobre F . Por hipótesis, $\alpha^{p^e} \in F$. Por lo cual

$$\begin{aligned}\phi(\alpha^{p^e}) &= \alpha^{p^e} \\ \Rightarrow (\phi(\alpha) - \alpha)^{p^e} &= (\phi(\alpha^{p^e}) - \alpha^{p^e}) = 0 \\ \Rightarrow \phi(\alpha) &= \alpha\end{aligned}$$

(4) \Rightarrow (1): sea $\alpha \in E$ arbitrario. Probaremos que existe $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $\alpha^{p^t} \in F$. Sea $\beta \in \bar{F}$ un F -conjugado de α . Sabemos que existe un F -isomorfismo $\psi : F(\alpha) \rightarrow F(\beta)$ tal que $\psi(\alpha) = \beta$. Extendemos ψ a un F -homomorfismo $\phi : E \rightarrow \bar{F}$. Por hipótesis, se tiene que $\phi(\gamma) = \gamma$, para todo $\gamma \in E$, en particular $\beta = \psi(\alpha) = \phi(\alpha) = \alpha$. Luego, si $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ es el exponente de inseparabilidad de α , entonces

$$\begin{aligned}f(X) &= \text{irr}(\alpha, F, X) \\ &= (X - \alpha)^{p^e} \\ &= X^{p^e} - \alpha^{p^e} \in F[X]\end{aligned}$$

por tanto $\alpha^{p^e} \in F$. Luego α es p.i. sobre F . □

Definición 4.3.2

Si E/F es una extensión algebraica con $\text{car}(F) = p > 0$, entonces la **cerradura puramente inseparable** de la extensión E/F o de E en F , es el campo intermedio de todos los elementos $\alpha \in E$ tal que son puramente inseparables sobre F .

Observación 4.3.2

Si E/F es finita, entonces E/F es p.i. $\iff [E : F]_S = 1$.

Observación 4.3.3

Sea E/F una extensión algebraica la cual es p.i. y separable. Entonces, tenemos que $E = F$.

Teorema 4.3.1

La clase de extensiones p.i. forman una clase distinguida.

Demostración:

(a): Sea $F \subseteq K \subseteq E$ una torre de campos con $\text{car}(F) = p > 0$. Supóngase que E/F es puramente inseparable. Sea $\alpha \in E$, entonces existe $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $\alpha^{p^t} \in F \subseteq K$, por tanto E/K es puramente inseparable.

Por otro lado, es claro que todos los elementos de K son p.i. sobre F , por lo cual K/F es puramente inseparable.

Recíprocamente, suponga que E/K y K/F son p.i. Sea $\alpha \in E$, entonces existe $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $\alpha^{p^r} \in K$. Pero para este elemento existe $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $(\alpha^{p^r})^{p^s} \in F$, es decir $\alpha^{p^{r+s}} \in F$. Por tanto, E/F es puramente inseparable.

(b): Sean E/F y K/F extensiones de campos con $\text{car}(F) = p > 0$, donde E y K son subcampos de un campo común L . Supóngase que la extensión E/F es p.i. Probaremos que la extensión EK/K es p.i.

Tenemos que $EK = K(E)$. Si $\alpha \in E$, entonces existe $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $\alpha^{p^t} \in F \subseteq K$. Por tanto, EK/K es p.i.

Por (a) y (b), se sigue que la clase de extensiones p.i. es una clase distinguida. \square

Corolario 4.3.1

Sean E/F y K/F extensiones de campos tales que $\text{car}(F) = p > 0$, donde K y E son subcampos de un campo común L . Si E/F y K/F son p.i., entonces EK/F es p.i.

Demostración:

Es inmediato del teorema anterior. \square

Sea E/F una extensión algebraica con $\text{car}(F) = p > 0$, y sean F_i y F_s las cerraduras p.i. y separables, respectivamente. Entonces tenemos el siguiente diagrama:

donde $F_i \cap F_s = F$.

Proposición 4.3.3

En las condiciones de las notaciones anteriores, tenemos lo siguiente

1. E/F_s es p.i.
2. E/F_i es separable si y sólo si $E = F_i F_s$.

Demostración:

De (1): Sea $\alpha \in E$, y $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ su exponente de inseparabilidad sobre F . Sabemos que α^{p^e} es separable sobre F , por lo cual $\alpha \in F_s$. De esta forma, E/F_s es puramente inseparable.

De (2):

\Rightarrow): Supóngase que E/F_i es separable, entonces $E/F_i F_s$ es separable y p.i., por lo cual $E = F_i F_s$.

\Leftarrow): Es inmediata. \square

Proposición 4.3.4

Sea F un campo cualquiera tal que $\text{car}(F) = p > 0$. Sea \bar{F} su cerradura algebraica y F_i la cerradura p.i. de F en \bar{F} . Tenemos lo siguiente

1. El campo F_i es perfecto.
2. $F_i \cap F_s = F$ y $F_i F_s = \bar{F}$, donde F_s es la cerradura separable de F en \bar{F} .

3. Si K es un campo perfecto tal que $F \subseteq K$, con $K \subseteq \bar{F}$, entonces $F_i \subseteq K$.

Demostración:

De (1): Probemos que $F_i^p = F_i$, donde

$$F_i^p = \{\alpha^p \mid \alpha \in F_i\}$$

ya se tiene que $F_i^p \subseteq F_i$. Sea $\alpha \in F_i$, y $\beta \in \bar{F}$ tal que $\alpha = \beta^p$. Luego, existe $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $\beta^{p^{t+1}} = \alpha^{p^t} \in F$, por lo cual $\beta \in F_i$. Así $\alpha = \beta^p \in F_i$.

Por tanto, $F_i = F_i^p$. Luego, F_i es un campo perfecto.

De (2): Ya sabemos que $F_i \cap F_s = F$. Para la otra igualdad, como F_i es un campo perfecto, entonces la extensión \bar{F}/F_i es separable, lo cual implica que $F_i F_s = \bar{F}$.

De (3): Sea K un campo intermedio de la extensión \bar{F}/F el cual es perfecto. Probemos que $F_i \subseteq K$. Sea $\alpha \in F_i$. Consideremos la extensión $K(\alpha)/K$, esta extensión es separable; por otro lado, existe un elemento $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $\alpha^{p^t} \in F \subseteq K$, luego la extensión $K(\alpha)/K$ es p.i., así $K(\alpha) = K$ lo cual implica que $\alpha \in K$.

Por ende, $F_i \subseteq K$. □

Corolario 4.3.2

Sea F un campo con $\text{car}(F) = p > 0$. Entonces, la intersección de cualquier familia de subcampos de \bar{F} que contienen a F es un campo perfecto.

Demostración:

Es inmediata. □

Definición 4.3.3

Sea E/F una extensión finita arbitraria. Se define el **grado de inseparabilidad de la extensión** E/F como:

$$[E : F]_i := \frac{[E : F]}{[E : F]_s}$$

Notemos que si $\text{car}(F) = 0$, entonces $[E : F]_i = 1$. Si $\text{car}(F) = p > 0$, entonces $[E : F]_i = p^t$, para algún $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Observación 4.3.4

Sea E/F una extensión finita. Si K es un campo intermedio de la extensión E/F , entonces

$$[E : F]_i = [E : K]_i \cdot [K : F]_i$$

Si E/F es una extensión finita con $\text{car}(F) = p > 0$, entonces E/F es p.i. si y sólo si $[E : F] = [E : F]_i$.

Observación 4.3.5

Sea E/F una extensión finita con $\text{car}(F) = p > 0$. Si $p \nmid [E : F]$ entonces $[E : F]_i = 1$, es decir la extensión E/F es separable.