Lista 3 de Ejercicios Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

9 de mayo de 2024

Índice general

Capítulo 3

Ejercicios

Ejercicio 3.1.1
Pruebe que, para todo $x \in]0, 2\pi[$,

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$$

Usando la identidad de Parseval, **demuestre** que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Demostración:
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}, \quad \forall x \in [0, 2\pi[$$

y extiéndase por periodicidad a todo $\mathbb{R}$. Es claro que $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{R})$, sea ahora $x \in]0, 2\pi[$. Por el teorema fundamental para la convergencia puntual de una serie de Fourier hay que encontrar un $0 < \delta < \pi$ tal que

$$\lim_{m \to \infty} \int_0^{\delta} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) dt$$

tomemos $\delta = \min\{x, 2\pi - x\} > 0$. Se tienen dos casos:

1. $\delta = x$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^{\delta} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) dt \\
&= \int_0^{\delta} \frac{1}{t}\left[\frac{\pi - x - t}{2} + \frac{\pi - x + t}{2} - \frac{2(\pi - x)}{2}\right] \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) dt \\
&= \int_0^{\delta} \frac{1}{t}\left[\pi - x - \pi + x\right] \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) dt \\
&= \int_0^{\delta} 0\, dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

por tanto, el límite cuando $m \to \infty$ resulta que da cero.

2. $\delta = 2\pi x$. El caso es análogo al anterior.

por ambos incisos se concluye que

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^{\delta}\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)dt=0$$

por tanto, la serie de Fourier de f converge a f puntualmente en x. Computemos ahora los coeficientes de la serie de Fourier de f. Si $n\geq 0$:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\cos nx dx\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} \frac{\pi-x}{2}\cos nx dx\\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} \cos nx dx-\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} x\cos nx dx \text{ haciendo } u=nx\\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{2n\pi} \cos u\frac{du}{n}-\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2n\pi} \frac{u}{n}\cos u\frac{du}{n}\\
&= \frac{1}{2n}\sin u\Big|_0^{2n\pi}-\frac{1}{2\pi n^2}\int_{0}^{2n\pi} u\cos u du\\
&= \frac{1}{2n}\left[\sin 2\pi n-\sin 0\right]-\frac{1}{2\pi n^2}\left(u\sin u\Big|_0^{2n\pi}+\int_0^{2n\pi}\sin u du\right)\\
&= -\frac{1}{2\pi n^2}\left(u\sin u\Big|_0^{2n\pi}+\int_0^{2n\pi}\sin u du\right)\\
&= -\frac{1}{2\pi n^2}\left(\left[2n\pi\sin 2n\pi-0\right]-\cos u\Big|_0^{2n\pi}\right)\\
&- \frac{1}{2\pi n^2}\left(0-0-1+1\right)\\
&= 0
\end{aligned}$$

para todo $n \geq 0$. Si $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\sin nx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} \frac{\pi - x}{2}\sin nx dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} \sin nx dx - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} x\sin nx dx \text{ haciendo } u = nx \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{2n\pi} \sin u \frac{du}{n} - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2n\pi} \frac{u}{n}\sin u \frac{du}{n} \\
&= \frac{1}{2n}(-\cos u)\Big|_{0}^{2n\pi} - \frac{1}{2\pi n^2}\int_{0}^{2n\pi} u\sin u du \\
&= \frac{1}{2n}(-\cos 2n\pi + 1) - \frac{1}{2\pi n^2}\left(-u\cos u\Big|_{0}^{2n\pi} + \int_{0}^{2n\pi} \cos u du\right) \\
&= \frac{1}{2n}(-1 + 1) - \frac{1}{2\pi n^2}\left(-2n\pi\cos 2n\pi + 0 + \sin u\Big|_{0}^{2n\pi}\right) \\
&= -\frac{1}{2\pi n^2}\left(-2n\pi\cos 2n\pi + \sin 2n\pi - \sin 0\right) \\
&= -\frac{1}{2\pi n^2}\left(-2n\pi + \sin 2n\pi - \sin 0\right) \\
&= -\frac{1}{2\pi n^2}\left(-2n\pi\right) \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Por tanto, la serie de Fourier de f en $x \in]0, 2\pi[$ está dada por:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cos kx + b_k \sin kx] = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

Por el criterio de Dini se sigue que

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}, \quad \forall x \in]0, 2\pi[$$

Ahora, como $x \mapsto \frac{\pi-x}{2}$ es una función en $\mathcal{L}_2^{2\pi}$, por Parseval se tiene que

$$
\begin{aligned}
\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[|a_n|^2 + |b_n|^2\right] &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\pi-x}{2}\right|^2\, dx \\
\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}|\pi-x|^2\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}|\pi-x|^2\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)^2\, dx \text{ haciendo el cambio de variable } u=\pi-x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{0}-u^2\, du \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{-u^3}{3}\Big|_{\pi}^{0} \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot[-\frac{0}{3}+\frac{\pi^3}{3}] \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi^3}{3} \\
&= \frac{\pi^2}{6} \\
\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}
$$

Como se quería demostrar. ■

Ejercicio 3.1.2
Sea $f \in \mathcal{L}_2^{2\pi}(\mathbb{R})$ y sean a_n, b_n los coeficientes de Fourier de f. **Pruebe** que

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} xf(x)dx = \pi a_0 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}.$$

Demostración:

■

Ejercicio 3.1.3
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de periodo 2π definida como

$$f(x) = \begin{cases} \pi^2 & \text{si} \quad -\pi \leq x < 0, \\ (x-\pi)^2 & \text{si} \quad 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

calcule los coeficientes de Fourier a_n, con $n = 0, 1, 2, ...$ de f y **pruebe** las fórmulas

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Demostración:

■

Ejercicio 3.1.4
Pruebe que
$$\frac{1}{3}x(\pi - x)(\pi - 2x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2nx}{n^3}, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$
Deduzca el valor de
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}.$$

Demostración:

■

Ejercicio 3.1.5
Haga lo siguiente:

i. **Pruebe** que
$$\int_0^{\pi} \log \operatorname{sen} \frac{x}{2} dx = -\pi \log 2.$$
Sugerencia. Haga el cambio de variables $x = 2t$ y escriba $\operatorname{sen} t = 2 \operatorname{sen} \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}$.

ii. **Muestre** que
$$-\log \left| 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}, \qquad \text{si } x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$
Sugerencia. Use el inciso (i) para probar que $a_0 = 0$. A fin de calcular a_n para $n \in \mathbb{N}$, escriba $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \log \cos \frac{x}{2} dx$, efectúe una integración por partes y transforme el nuevo integrando de suerte que aparezca el núcleo de Dirichlet.

iii. **Deduzca** de (ii) la fórmula
$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

iv. **Desarrolle** en serie de Fourier la función
$$x \mapsto \log \left| 2 \cos \frac{x}{2} \right|$$

Solución:

De (i): (justificar porqué esa función es integrable). Veamos que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \log \operatorname{sen} \frac{x}{2}\, dx &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{sen} t\, dt \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\right)\, dt \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\log 2 + \log\sin\frac{t}{2} + \log\cos\frac{t}{2}\right]\, dt \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\log 2 + \log\sin\frac{t}{2} + \log\cos\frac{t}{2}\right]\, dt \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log 2\, dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\frac{t}{2}\, dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos\frac{t}{2}\, dt \\
&= \pi\log 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\frac{t}{2}\, dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos\frac{t}{2}\, dt
\end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos\frac{t}{2}\, dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right)\, dt \\
&= \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} -\log\sin\left(\frac{u}{2}\right)\, dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log\sin\left(\frac{u}{2}\right)\, dt
\end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $u = \pi - t$. Por ende,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \log \operatorname{sen} \frac{x}{2}\, dx &= \pi\log 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\frac{t}{2}\, dt + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log\sin\frac{u}{2}\, du \\
&= \pi\log 2 + 2\int_0^{\pi} \log \operatorname{sen}\frac{x}{2}\, dx \\
\Rightarrow \int_0^{\pi} \log \operatorname{sen} \frac{x}{2}\, dx &= -\pi\log 2
\end{aligned}$$

De (ii): Por lo anterior, $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}$ donde $f(x) = -\log\left|2\sin\frac{x}{2}\right|$ para todo $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$. Ahora, como f es par, se tiene que

$$b_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ahora, veamos que

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\, dx \\
&= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} -\log\left|2\sin\frac{x}{2}\right|\, dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left[\log 2 + \log\sin\frac{x}{2}\right]\, dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi} \log 2 + \int_0^{\pi} \log\sin\frac{x}{2}\right]\, dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\pi\log 2 - \pi\log 2\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ahora, si $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
a_n &= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \log\left|2\sin\frac{x}{2}\right|\cos nx\,dx \\
&= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \log\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\cos nx\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-\log\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2n}\int_0^{\pi}\frac{\cos\frac{x}{2}\sin nx}{\sin\frac{x}{2}}\,dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi}\frac{\cos\frac{x}{2}\sin nx}{\sin\frac{x}{2}}\,dx
\end{aligned}$$

pero,

$$\sin A\cos B = \frac{1}{2}\left[\sin(A+B)+\sin(A-B)\right]$$

Por ende,

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2\pi n}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x + \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}\,dx \\
&= \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[D_n(x)+D_{n-1}(x)\right]\,dx \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

De (iii): Veamos la convergencia (usar el teorema de Carleson y más cosas), de donde se deduce el hecho sorprendente que

$$\int_0^{\pi}\left(\log\left|2\cos\frac{x}{2}\right|\right)^2\,dx = \frac{\pi^2}{6}$$

□

Ejercicio 3.1.6
Sea $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{R})$ y sea $x \in \mathbb{R}$. Se supone que para algúun $\alpha > 0$ se cumple

$$f(x+t)-f(x) = O(|t^{\alpha}|), \quad \text{cuando} t \to 0$$

Demuestre que la serie de Fourier de f en x converge a $f(x)$.

Demostración:

■

Ejercicio 3.1.7
Por el problema **3.1.1** se sabe que

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} nx}{n}$$

i. Póngase

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} kx}{k}.$$

Muestre que

$$\frac{x}{2} + s_n(x) = \pi\int_0^{\pi} D_n(t)dt,$$

donde D_n es el núcleo de Dirichlet.

ii. Si $x \in]0, 2\pi[$, **pruebe** que

$$\lim_{n\to\infty} \left[\pi \int_0^x D_n(t)dt - \int_0^x \frac{\operatorname{sen} nt}{t} dt \right] = 0.$$

iii. **Deduzca** una nueva demostración de la fórmula

$$\int_0^{\to\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Demostración:

■

Ejercicio 3.1.8
Sea $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ y sean $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ los coeficientes de Fourier de f. **Demuestre** que

$$\int_0^x f = c + c_0 x + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{c_k e^{ikx}}{ik}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

donde c es una constante, la convergencia siendo uniforme en $\mathbb{R}$.

Sugerencia. Considere la función $F(x) = \int_0^x (f - c_0)$.

Deduzca que los coeficientes de Fourier b_n de cualquier función $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ satisfacen la condición de que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$$

es convergente. **Concluya** que la aplicación $f \mapsto \{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ no es una aplicación suprayectiva de $\mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ en $c_0(\mathbb{Z})$.

Demostración:

■

Ejercicio 3.1.9
Haga lo siguiente:

i. Sea α un número real no entero. **Pruebe** que

$$\pi \cos \alpha x = 2\alpha \operatorname{sen} \pi\alpha \left(\frac{1}{2\alpha^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{\alpha^2 - n^2} \right), \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

De ahí obtenga las fórmulas clásicas

$$\frac{\pi\alpha}{\operatorname{sen} \pi\alpha} = 1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} \quad \text{y} \quad \pi\alpha \cot \pi\alpha = 1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}.$$

ii. Sea $x \in]0, 1[$. **Pruebe** que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{n^2 - \alpha^2}$$

se puede integrar término por término en el intervalo $[0, x]$. De la última fórmula del inciso (i) **deduzca** la fórmula

$$\operatorname{sen} \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right), \quad \forall x \in]-1, 1[.s$$

Demostración:

■

Ejercicio 3.1.10
Se supone que la serie de Fourier de una función $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{K})$ converge en el sentido de Cesáro uniformemente en $\mathbb{R}$. **Pruebe** que f es equivalente a una función continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{K}$.

Demostración:

■

Ejercicio 3.1.11
Sea $f \in \mathcal{C}^{2\pi}(\mathbb{R})$ la función

$$f(x) = \pi - |2x|, \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

Aplique el teorema 3.9 para mostrar que la serie de Fourier de f converge a f uniformemente en $\mathbb{R}$. **Calcule**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}.$$

Solución:

□

Ejercicio 3.1.12
Sea $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{R})$ la función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{si} & -\pi \leq x < 0, \\ x^2 & \text{si} & 0 \leq x < \pi. \end{array} \right\}$$

Calcule la serie de Fourier de f. Usando el teorema fundamental para la convergencia de una serie de Fourier, **muestre** que la serie de Fourier de f converge a alguna suma $s(x)$ para todo $x \in [-\pi, \pi]$. **Calcule** $s(x)$ para todo $x \in [-\pi, \pi]$.

Solución:

□

Ejercicio 3.1.13
Haga lo mismo que en el problema **3.12** con $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{R})$ dada por

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{si} & -\pi \leq x < 0, \\ x & \text{si} & 0 \leq x < \pi. \end{array} \right.$$

Solución:

□