Notas Introduction to Commutative Algebra

Cristo Daniel Alvarado

21 de enero de 2026

Índice general

Capítulo 1

Anillos e Ideales

Muchos de los resultados que se usarán se han visto en el curso de Álgebra Moderna II, por lo que solo se incluirán resultados nuevos.

A lo largo de todo el documento, todo anillo será un anillo conmutativo con identidad.

1.1. Nilradical y Radical de Jacobson

Definición 1.1.1
Sea A un anillo. Un elemento $x \in A$ es llamado **nilpotente** si $x^n = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$

Observación 1.1.1
Todo elemento nilpotente es divisor de cero, sin embargo el converso no es cierto.

Proposición 1.1.1
El conjunto $\mathfrak{N}$ de todos los elementos nilpotentes de un anillo A es un ideal, y el ideal cociente $A/\mathfrak{N}$ no tiene elmentos nilpotentes distintos de cero.

Demostración:
Veamos que $\mathfrak{N}$ es un ideal.

(1) Sean $x, y \in \mathfrak{N}$, entonces existen $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $x^n = y^m = 0$. Por ende:

$$(x+y)^{n+m} = 0$$

pues, en el desarrollo binomial de esta expresión, todo término es de la forma $c_{(r,s)}x^r y^s$ con $c_{(r,s)} \in \mathbb{N}$ el cual además cumple que

$$r + s = n + m$$

con $r, s \in \llbracket 0, n+m \rrbracket$. Si $r < n$ entonces debe suceder que $s > m$, luego $y^s = 0$. Si $r > n$ se sigue que $x^r = 0$. En cualquier caso, todos los coeficientes de la forma $x^r y^s = 0$, lo cual prueba lo enunciado.

(2) Sea $x \in \mathfrak{N}$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n = 0$, entonces:

$$(ax)^n = a^n x^n = 0$$

por lo que $ax \in \mathfrak{N}$.

Por los dos incisos anteriores se sigue que $\mathfrak{N}$ es un ideal de A. Sea $\mathfrak{N}+x\in A/\mathfrak{N}$ con $x\in A$ tal que

$$(\mathfrak{N}+x)^n=\mathfrak{N}$$

para algún $n\in\mathbb{N}$, entonces:

$$\mathfrak{N}+x^n=\mathfrak{N}\Rightarrow x^n\in\mathfrak{N}$$

luego existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $(x^n)^k=0$, esto es que $x\in\mathfrak{N}$, por lo que

$$\mathfrak{N}+x=\mathfrak{N}$$

■

Definición 1.1.2
El ideal de la proposición anterior es llamado el **nilradical de** A cuando se trabaje con varios anillos, será denotado por $\mathfrak{N}_A$.

Resulta que podemos caracterizar de otra manera al nilradical $\mathfrak{N}$:

Proposición 1.1.2
El nilradical $\mathfrak{N}$ de A es la intersección de todos los ideales primos de A.

Demostración:
Sea $\mathfrak{N}'$ la intersección de todos los ideales primos de A. Se tiene que este es un ideal de A.

- Si $x\in A$ es tal que $x\in\mathfrak{N}$, entonces existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $x^n=0$. Como $0\in\mathfrak{N}'$ y $\mathfrak{N}'$, entonces

$$x^n\in\mathfrak{p}$$

para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de A, luego por inducción se tiene que $x\in\mathfrak{p}$, es decir que $x\in\mathfrak{N}'$.
- Sea $x\in A$ tal que $x\notin\mathfrak{N}$, probaremos que $x\notin\mathfrak{N}'$. Sea

$$\Sigma=\left\{\mathfrak{a}\middle|\mathfrak{a}\text{ es ideal de }A\text{ tal que }n\in\mathbb{N}\Rightarrow x^n\notin\mathfrak{a}\right\}$$

el conjunto Σ es no vacío, pues $\langle 0\rangle\in\Sigma$. Sea $\mathcal{C}$ una cadena de elementos de Σ. Como

$$\mathcal{C}=\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$$

es tal que $I_1\subseteq I_2\subseteq\cdots\subseteq I_m\subseteq\cdots$, se sigue de una proposición que

$$I=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$$

es un ideal de A, el cual debe estar en Σ. Por el Lema de Zorn, este conjunto tiene elementos maximales, digamos $\mathfrak{p}$. Es claro que $x^n\notin\mathfrak{p}$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Veamos que $\mathfrak{p}$ es primo. En efecto, sean $y,z\notin\mathfrak{p}$, entonces los ideales

$$\mathfrak{p}+\langle y\rangle\text{ y }\mathfrak{p}+\langle z\rangle$$

son dos ideales de A que contienen propiamente a $\mathfrak{p}$, por lo que $x\in\mathfrak{p}+\langle y\rangle$ y $x\in\mathfrak{p}+\langle z\rangle$, luego existen $m,n\in\mathbb{N}$ tales que

$$x^n\in\mathfrak{p}+\langle y\rangle,\quad\text{y}\quad x^m\in\mathfrak{p}+\langle z\rangle$$

por ende,

$$x^{n+m}\in(\mathfrak{p}+\langle y\rangle)(\mathfrak{p}+\langle z\rangle)=\mathfrak{p}+\langle yz\rangle$$

por tanto, $\mathfrak{p}+\langle yz\rangle$ contiene propiamente a $\mathfrak{p}$, luego no puede estar en Σ, así que $yz\notin\mathfrak{p}$. Se sigue entonces que $\mathfrak{p}$ es primo. Por tanto, $x\notin\mathfrak{N}'$.

Por los dos incisos anteriores se sigue que $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}'$. ■

Definición 1.1.3
Sea A un anillo, el **radical de Jacobson $\mathfrak{R}$ de A** se define como la intersección de todos los ideales maximales de A. Cuando se trabaje con varios anillos, será denotado por $\mathfrak{R}_A$.

El radical de Jacobson (que claramente es un ideal), se caracteriza de la siguiente manera:

Proposición 1.1.3
Sea A un anillo. Entonces, $x \in \mathfrak{R}$ si y sólo si $1 - xy$ es una unidad en A para todo $y \in A$.

Demostración:
$\Rightarrow$) : Suponga que existe $y \in A$ tal que $1 - xy$ no es una unidad de A, entonces existe un ideal maximal que contiene a $1 - xy$, digamos $\mathfrak{m}$, pero $x \in \mathcal{R}$, en particular $x \in \mathfrak{m}$ por lo que $xy \in \mathfrak{m}$ lo cual implica que $1 \in \mathfrak{m}$, lo cual no puede suceder pues $\mathfrak{m}$ es ideal maximal.

$\Leftarrow$) : Suponga que existe un ideal maximal $\mathfrak{m}$ tal que $x \notin \mathfrak{m}$. Entonces,

$$\mathfrak{m} + \langle x \rangle = \langle \mathfrak{m} + x \rangle = A = \langle 1 \rangle$$

es decir, existe $u \in \mathfrak{m}$ y $y \in A$ tales que

$$u + xy = 1$$

luego, $1 - xy$ no puede ser unidad de A. ■

Definición 1.1.4
Sea A anillo y $\mathfrak{a}$ un ideal de A. Se define el **radical de $\mathfrak{a}$** como el conjunto

$$r(\mathfrak{a}) = \left\{ x \in A \middle| x^n \in \mathfrak{a} \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \right\}$$

Proposición 1.1.4
Dado un anillo A un ideal $\mathfrak{a}$ de A, se tiene que $r(\mathfrak{a})$ es un ideal de A.

Demostración:
Considere el homomorfismo natural $\pi : A \to A/\mathfrak{a}$, afirmamos que

$$r(A) = \pi^{-1}\left(\mathfrak{N}_{A/\mathfrak{a}}\right)$$

donde $\mathfrak{N}_{A/\mathfrak{a}}$ es el nilradical de $A/\mathfrak{a}$. En efecto, veamos que: $x \in r(\mathfrak{a})$ si y sólo si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n \in \mathfrak{a}$, lo cual ocurre si y sólo si

$$(\mathfrak{a} + x)^n = \mathfrak{a} + x^n = \mathfrak{a}$$

si y sólo si $\mathfrak{a}+x$ es un elemento nilpotente de $A/\mathfrak{a}$, si y sólo si $\mathfrak{a}+x \in \mathfrak{N}_{A/\mathfrak{a}}$, si y sólo si $x \in \pi^{-1}\left(\mathfrak{N}_{A/\mathfrak{a}}\right)$.

Lo anterior prueba la igualdad. ■

Ejercicio 1.1.1
Sea A un anillo y $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ideales de A. Se cumple lo siguiente:

(1) $\mathfrak{a} \subseteq r(\mathfrak{a})$.
(2) $r(r(a)) = r(\mathfrak{a})$.
(3) $r(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = r(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = r(\mathfrak{a}) \cap r(\mathfrak{b})$.
(4) $r(\mathfrak{a}) = \langle 1 \rangle$ si y sólo si $\mathfrak{a} = \langle 1 \rangle$.
(5) $r(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = r(r(\mathfrak{a}) + r(\mathfrak{b}))$.

(6) Si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de A, entonces $r(\mathfrak{p}^n) = \mathfrak{p}$ para todo $n > 0$.

Demostración:

De *(1)*: Tomemos $x \in \mathfrak{a}$, entonces $x^1 \in \mathfrak{a}$, así que $x \in r(\mathfrak{a})$.

De *(2)*: Por el inciso anterior ya se tiene que $r(r(\mathfrak{a})) \subseteq r(\mathfrak{a})$. Ahora, si $x \in r(\mathfrak{a})$, entonces existe $1 \in \mathbb{N}$ tal que $x^1 \in r(\mathfrak{a})$, así que $x \in r(r(\mathfrak{a}))$. Se sigue así la igualdad.

De *(3)*: Haremos la demostración por partes:

- Primero, probaremos que $r(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = r(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$. En efecto, sea $x \in r(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:
$$x^n \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}$$
Por ser $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ ideales, se sigue que $x^n \in \mathfrak{a}$ y $x^n \in \mathfrak{b}$, por lo cual $x \in r(\mathfrak{a}) \cap r(\mathfrak{b})$ y $x \in r(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$.
- Si $x \in r(\mathfrak{a}) \cap r(\mathfrak{b})$, entonces existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $x^n \in \mathfrak{a}$ y $x^m \in \mathfrak{b}$, luego $x^{nm} \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, lo cual implica que $x \in r(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$.
Si $x \in r(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n \in \mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$, así que $x^{2n} \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, esto es que $x \in r(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$.

Por ambos casos se sigue la doble igualdad.

De *(6)*: Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A. Procederemos por inducción sobre n.

- Por *(1)* se tiene que $\mathfrak{p} \subseteq r(\mathfrak{p})$. Sea $x \in r(\mathfrak{p})$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x^m \in \mathfrak{p}$. Esto implica que $x \in \mathfrak{p}$ (tal hecho se verifica usando inducción). De esta forma se sigue la igualdad.
- Supongamos que lo anterior se cumple para algún $n \in \mathbb{N}$. Sea $x \in r(\mathfrak{p}^{n+1})$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x^m \in \mathfrak{p}^{n+1} \subseteq \mathfrak{p}$, así que $x \in \mathfrak{p}$.

De ambos incisos se sigue la igualdad. ■

Observación 1.1.2
Si I y J son ideales, entonces IJ es un ideal, siendo este último definido por:
$$IJ = \left\{ \sum_{k=1}^{n} i_k j_k \middle| i_k \in I \text{ and } j_k \in J, \forall k \in [\![1, n]\!]\,; n \in \mathbb{N} \right\}$$

Proposición 1.1.5
El radical de un ideal $\mathfrak{a}$ es la intersección de todos ideales primos que contienen a $\mathfrak{a}$.

Demostración:

Consideremos el anillo $A/\mathfrak{a}$. El nilradical $\mathfrak{N}$ de $A/\mathfrak{a}$ es la intersección de todos los ideales primos de $A/\mathfrak{a}$. Ahora, por el teorema de correspondencia, para cada ideal primo $\mathfrak{p}$ de $A/\mathfrak{a}$ existe un único ideal primo P en A tal que $\mathfrak{a} \subseteq P$.

Afirmamos que:
$$\mathfrak{N} = r(\mathfrak{a})/\mathfrak{a}$$
En efecto, sea $\mathfrak{a} + x \in \mathfrak{N}$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{a} + x^n = \mathfrak{a}$, esto es que $x^n \in r(\mathfrak{a})$.

Si $\mathfrak{a} + x \in r(\mathfrak{a})/\mathfrak{a}$, entonces $x \in r(\mathfrak{a})$, luego existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n \in \mathfrak{a}$, esto es que $\mathfrak{a} + x^n = \mathfrak{a}$, luego $\mathfrak{a} + x^n = \mathfrak{a}$, es decir que $\mathfrak{a} + x \in \mathfrak{N}$. Se sigue así la contención. ■

1.2. Ideales Primos

Sean A un anillo y $\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_n$ ideales de A. Se define el homomorfismo:

$$\phi : A \to \prod_{i=1}^{n}(A/\mathfrak{a}_i)$$

Dado por: $\phi(x)=(x+\mathfrak{a}_1,\dots,x+\mathfrak{a}_n)$.

Proposición 1.2.1
Sean A un ideal y $\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_n$ ideales de A. Entonces:

$$s$$

1.3. Ejercicios Anillos e Ideales

Proposición 1.3.1
Todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A es ideal primo de A.

Demostración:
En efecto, se tiene que $A/\mathfrak{m}$ es campo, en particular es dominio entero (por no tener divisores de cero), luego $\mathfrak{m}$ es ideal primo. ■

Ejercicio 1.3.1
En el anillo $A[x]$, el radical de Jacobson es igual al nilradical.

Demostración:
Como todo ideal maximal es un ideal primo, se tiene la contención:

$$\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{R}$$

sea ahora $f(x) \in \mathfrak{R}$ se tiene que

$$1 - f(x)g(x) \text{ es unidad de } A[x] \text{ para todo } g(x) \in A[x]$$

en particular, $1 - xf(x)$ es unidad de $A[x]$, luego si $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$. Debe suceder entonces que los coeficientes de:

$$1 - xf(x) = -a_n x^{n+1} - a_{n-1}x^n - \cdots - a_0 x + 1$$

sean tales que a_i es nilpotente para todo $i \in [\![0, n]\!]$, luego $f(x)$ es elemento nilpotente de $A[x]$.

Se sigue entonces la igualdad. ■

Ejercicio 1.3.2
Sea A un anillo y sea $A[[x]]$ el anillo de series de potencias formales con coeficientes en A. Pruebe que:

1 f es unidad de ...

Demostración:
■

Ejercicio 1.3.3

Demostración:
■

Ejercicio 1.3.4
Sea A un anillo tal que para todo $x \in A$ existe $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ tal que $x^n = x$. Pruebe que todo ideal primo de A es maximal.

Demostración:

Sea $\mathfrak{p}$ un ideal propio primo de A. Probaremos que $A/\mathfrak{p}$ es campo. En efecto, no tiene divisores de cero, pues si

$$\mathfrak{p}+xy=(\mathfrak{p}+x)\,(\mathfrak{p}+y)=\mathfrak{p}$$

con $x,y\notin\mathfrak{p}$, entonces $xy\in\mathfrak{p}\#_c$. Por tanto, no tiene divisores de cero. Hay que ver que todo elemento no cero es invertible. Sea $x\in A\setminus\mathfrak{p}$. Se tiene que existe $n\in\mathbb{N}$ con $n>1$ tal que

$$\begin{aligned}\mathfrak{p}+x^n&=\mathfrak{p}+x\\ \Rightarrow(\mathfrak{p}+x)\left(\left(\mathfrak{p}+x^{n-1}\right)-(\mathfrak{p}+1)\right)&=\mathfrak{p}\end{aligned}$$

como no hay divisores de cero, debe suceder que

$$\mathfrak{p}+x^{n-1}=\mathfrak{p}+1$$

por ende, al ser $n>1$, se tiene que $n-1>0$, así que:

$$(\mathfrak{p}+x)\left(\mathfrak{p}+x^{n-2}\right)=\mathfrak{p}+1$$

con $n-2\geq 0$. Luego $\mathfrak{p}+x$ es invertible. Así que $A/\mathfrak{p}$ es campo, es decir que $\mathfrak{p}$ es ideal maximal. ■

Ejercicio 1.3.5
Sea x un elemento nilpotente de un anillo A. Muestre que $1+x$ es una unidad de A. Deduzca que la suma de elementos nilpotentes con una unidad es una unidad.

Demostración:

Dado que x es nilpotente, existe $n\in\mathbb{N}$ tal que:

$$x^n=0$$

Entonces:

$$\begin{aligned}&(1+x)\left(1-x+\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}\right)\\ &=\left[1-x+\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}\right]+\left[x-x^2+\cdots+(-1)^{n-2}x^{n-1}+(-1)^{n-1}x^n\right]\\ &=1\end{aligned}$$

Por ende, $1+x$ es unidad. Si a y b son nilpotentes, entonces existen $n,m\in\mathbb{N}$ tal que:

$$a^n=b^m=0$$

Rápidamente se verifica que $(a+b)^{nm}=0$. Se sigue así que $a+b$ es nilpotente. En particular, usando inducción se generaliza que la suma de elementos nilpotentes es nilpotente. Por ende, de lo anterior se sigue que la suma de 1 mas un elemento nilpotente es una unidad. ■

Ejercicio 1.3.6
Sea A un anillo en el cual todo elemento satisface que $x^n=x$ para algún $n\in\mathbb{N}$. Pruebe que todo ideal primo en A es maximal.

Demostración:

Sea I un ideal primo en A. Entonces, A/I es dominio entero. Afirmamos que A/I es campo. En efecto, para ello basta con mostrar que todo elemento de este anillo posee inverso. Sea $I+x\in A/I$, entonces existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $x^n=x$, luego:

$$(I+x)(I+x^{n-1})=I+x^n=I$$

Se sigue así que A/I es campo, luego I es ideal maximal. ■

Ejercicio 1.3.7
Sea A un anilo tal que cada ideal no contenido en el nilradical contiene un elemento idempotente no cero (esto es, un elemento e tal que $e^2 = e \neq 0$). Pruebe que el nilradical y el radical de Jacobson de A son iguales.

Demostración:
Recordemos que el nilradical es la itnerseccion de todos los ideales primos de A y, el radical de Jacobson es el la intersección de todos los ideales maximales de A.

Denotamos a los primer y segundo ideales mencionados anteriormente por $\mathfrak{N}$ y $\mathfrak{R}$. Dado que todo ideal maximal es en particular un ideal primo, se sigue que:

$$\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{R}$$

Supongamos que la contención es propia, se sigue por hipótesis que $\mathfrak{R}$ contiene un elemento idempotente no cero, digamos $e = e^2 \neq 0$. Observemos que:

$$(1-e)^2 = 1 - e - e + e^2 = 1 - 2e + e = 1 - e$$

por lo cual $1-e$ también es idempotente. Por la caracterización del radical de Jacobson se tiene que $1-e$ es una unidad en A.

Ahora, dado que $1-e$ es unidad en A, existe $y \in A$ tal que $(1-e)y = 1$, luego:

$$1 = (1-e)^2 y^2 = (1-e)yy = y$$

Por lo cual $1 - e = 1$, lo cual contradice la elección de e como elemento no cero. Se sigue así que $\mathfrak{N} = \mathfrak{R}$. ■

Observación 1.3.1
Créditos a la demostración del ejercicio anterior: The Jacobson Radical.

Ejercicio 1.3.8
Sea A un anillo no cero. Muestre que el conjunto de ideales primos de A tiene elemento mínimo con respecto a la relación inclusión.

Demostración:

■

Ejercicio 1.3.9
Sea $\mathfrak{a} \neq (1)$ un ideal en un anillo A. Muestre que $\mathfrak{a} = r(\mathfrak{a})$ si y solo si $\mathfrak{a}$ es la intersección de ideales primos.

Demostración:
$\Rightarrow$): Supongamos que $\mathfrak{a} = r(\mathfrak{a})$. Por la Proposición (1.1.5) se tiene que:

$$\mathfrak{a} = r(\mathfrak{a}) = \bigcap_{\substack{P \text{ primo} \\ \mathfrak{a} \subseteq P}} P$$

Lo cual prueba el resultado.

$\Leftarrow$): Supongamos que $\mathfrak{a}$ es intersección de ideales primos, entonces:

$$\mathfrak{a} = \bigcap_{\substack{P \text{ primo} \\ \mathfrak{a} \subseteq P}} P$$

Nuevamente, por la Proposición (1.1.5) se sigue que $\mathfrak{a} = r(\mathfrak{a})$. ■

Para el siguiente ejercicio usamos la siguiente proposición:

Proposición 1.3.2
Sea A un anillo y M un ideal propio de A. Entonces, M es maximal si y sólo si $\forall a \in A \setminus M$ se tiene que $(M, a) = A$.

Demostración:

$\blacksquare$

Ejercicio 1.3.10
Sea A un anillo y $\mathfrak{N}$ el nilradical de A. Pruebe que los siguientes son equivalentes:

(1) A tiene exactamente un ideal primo.

(2) Todo elemento de A es una unidad o un elemento nilpotente.

(3) $A/\mathfrak{N}$ es un campo.

Demostración:

(1) $\Rightarrow$ *(2)*: Supongamos que A tiene un ideal primo, digamos P. Por un teorema, todo anillo unitario admite un ideal maximal, digamos M. Este ideal en particular es primo, por lo que $M = P$. Ahora, por la proposición anterior:

$$(M, a) = A$$

para todo $a \notin A \setminus M$. Por la maximalidad de M, se debe tener que todo elemento de $A \setminus M$ es invertible. Ahora, $M = \mathfrak{N}$, ya que $\mathfrak{N} = P$ (por ser P el único ideal primo de A). Así que todo elemento de A es unidad o nilpotente.

(2) $\Rightarrow$ *(3)*: Si todo elemento de A es unidad o nilpotente, se tiene que $\mathfrak{N}$ debe ser un ideal maximal, así que $A/\mathfrak{N}$ es campo.

(3) $\Rightarrow$ *(1)*: Si $\mathfrak{N}$ es campo, entonces $\mathfrak{N}$ es maximal, luego no existe ningún ideal primo P tal que $\mathfrak{N} \subsetneq P \subsetneq A$, así que $\mathfrak{N}$ debe ser el único ideal primo de A. $\blacksquare$

Ejercicio 1.3.11
Un anillo A es booleano si $x^2 = x$ para todo $x \in A$. En un anillo booleano A, muestre que:

(1) $2x = 0$, para todo $x \in A$.

(2) Todo ideal primo $\mathfrak{p}$ es maximal, así que $A/\mathfrak{p}$ es un campo con dos elementos.

(3) Todo ideal finitamente generado de A es principal.

Demostración:

De *(1)*: Sea $x \in A$, entonces:

$$\begin{aligned} (x+1)^2 &= x^2 + 2x + 1 \\ \Rightarrow x + 1 &= x + 2x + 1 \\ \Rightarrow 2x &= 0 \end{aligned}$$

De *(2)*: Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A. Sea $x \in A$ tal que $x \notin \mathfrak{p}$. En $A/\mathfrak{p}$ se tiene que:

$$\mathfrak{p} + x = \mathfrak{p} + x^2 = (\mathfrak{p} + x)(\mathfrak{p} + x) \Rightarrow \mathfrak{p} + x = \mathfrak{p} + 1,$$

pues $x \notin \mathfrak{p}$ y pues $A/\mathfrak{p}$ es dominio entero. Se sigue así que $A/\mathfrak{p}$ es campo y, en particular, tiene dos elementos.

De *(3)*: Sea $I = (x_1, \ldots, x_n)$ un ideal finitamente generado. Dado que $(x_1, \ldots, x_n) = ((x_1, \ldots, x_{n-1}), (x_n))$, usando la Observación (1.3.2) e inducción se obtiene el resultado. $\blacksquare$

Observación 1.3.2
En el ejercicio anterior, si $I = (x_1, x_2)$, entonces $I = (x_1 + x_2 + x_1x_2)$, pues:

$$(x_1 + x_2 + x_1x_2)x_1 = x_1 + x_1x_2 + x_1x_2 = x_1$$

1.4. El espectro primo de un anillo

Ejercicio 1.4.1 (**Topología de Zariski**)
Sean A un anillo y X el conjunto de todos los ideales primos de A. Para cada $E \subseteq A$, sea $V(E)$ el conjunto de todos los ideales primos de A que contienen a E. Pruebe que:

(1) Si $\mathfrak{a}$ es el ideal generado por E, entonces $V(E) = V(\mathfrak{a}) = V(r(\mathfrak{a}))$.

(2) $V(0) = X$, $V(1) = \emptyset$.

(3) Si $(E_i)_{i\in I}$ es una familia de subconjuntos de A, entonces:

$$V\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) = \bigcap_{i\in I} V(E_i)$$

(4) $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$, para todo par de ideales $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ de A.

Estos enunciados muestran que los conjuntos $V(E)$ satisfacen los axiomas para conjuntos cerrados en un espacio topológico. La topología resultante es llamada la **Topología de Zariski**. El espacio topológico X es llamado el **espectro primo de** A y se denota por $\mathrm{spec}\,(A)$.

Demostración:
De *(1)*: Sea $\mathfrak{a} = (E)$ el ideal generado por E. Dado que $E \subseteq \mathfrak{a}$, de la definición de V se sigue que $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(E)$.

Si $\mathfrak{p}$ un ideal primo tal que $E \subseteq \mathfrak{p}$, entonces al ser $\mathfrak{a}$ el ideal generado por E y $\mathfrak{p}$ un ideal que contiene a E, debe suceder que $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$. Por tanto, $V(E) \subseteq V(\mathfrak{a})$. De ambas contenciones se sigue la igualdad.

De *(2)*: Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo, entonces $0 \in \mathfrak{p}$. No puede suceder que $1 \in \mathfrak{p}$ ya que en tal caso $\mathfrak{p} = A$. Por tanto:

$$V(0) = X \quad \text{y} \quad V(1) = \emptyset$$

De *(3)*: Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo tal que $\bigcup_{i\in I} E_i \subseteq \mathfrak{p}$, en particular $E_i \subseteq \mathfrak{p}$, para todo $i \in I$, luego $\mathfrak{p} \in V(E_i)$, para todo $i \in I$, esto es que $\mathfrak{p} \in \bigcap_{i\in I} V(E_i)$. Inversamente, si $\mathfrak{p} \in \bigcap_{i\in I} V(E_i)$, entonces $E_i \subseteq \mathfrak{p}$ para todo $i \in I$, por lo cual $\bigcup_{i\in I} E_i \subseteq \mathfrak{p}$.

De *(4)*: Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo.

- Si $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$. Dado que $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, se sigue que $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$.
- Si $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ tenemos dos casos:
  - Existe $b \in \mathfrak{b}$ tal que $b \notin P$. Por la contención $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ se tiene que:

    $$ab \in P,$$

    dado que $\mathfrak{p}$ es primo debe suceder que $a \in P$, para todo $a \in \mathfrak{a}$.
  - Si $b \in \mathfrak{p}$ para todo $b \in \mathfrak{b}$, entonces $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$.

  En cualquier caso, $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.

De los dos incisos anteriores se sigue que $V(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})\subseteq V(\mathfrak{ab})\subseteq V(\mathfrak{a})\cup V(\mathfrak{b})$.

Si $\mathfrak{p}\in V(\mathfrak{a})\cup V(\mathfrak{b})$, entonces $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{p}$ o $\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{p}$, por lo cual, en cualquier caso, $\mathfrak{ab}\subseteq\mathfrak{p}$. Así que $V(\mathfrak{a})\cup V(\mathfrak{b})\subseteq V(\mathfrak{ab})$.

Se sigue entonces la igualdad. ■

Ejercicio 1.4.2
Analice $\operatorname{spec}(\mathbb{Z})$, $\operatorname{spec}(\mathbb{R})$, $\operatorname{spec}(\mathbb{C}[x])$, $\operatorname{spec}(\mathbb{R}[x])$ y $\operatorname{spec}(\mathbb{Z}[x])$.

Solución:
Para $\operatorname{spec}(\mathbb{Z})$:

1. Sea $A\subseteq\mathbb{Z}$ con $0\notin A$. Dado que $A=\bigcup_{a\in A}\{a\}$, entonces:

$$V(A)=V\left(\bigcup_{a\in A}\{a\}\right)=\bigcap_{a\in A}V(\{a\})$$

   Ahroa, si $a\in\mathbb{Z}$, entonces:

$$a=\prod_{i=1}^{n}p_i,$$

   siendo p_i primo. En tal caso:

$$\bigcap_{a\in A}V(\{a\})=\{p_i\mathbb{Z}|i=1,\dots,n\}$$

   Por ende, $\bigcap_{a\in A}V(\{a\})=\{q_1\mathbb{Z},\dots,q_m\mathbb{Z}\}$, donde $q_i\mid a$, para todo $a\in A$. En caso de que no haya divisores, $V(A)$ será vacío.

2. Dado que existe una biyección entre los primos de $\mathbb{Z}$ junto con el cero y los ideales primos de $\mathbb{Z}$ ($p\mapsto p\mathbb{Z}$ y $0\mapsto\{0\}$), podemos ver a $\operatorname{spec}(\mathbb{Z})$ como el conjunto:

$$\operatorname{spec}(\mathbb{Z})=\{p\mathbb{Z}|p\text{ es primo en }\mathbb{Z}\}\cup\{(0)=0\mathbb{Z}\}$$

   Sea $A\mathbb{Z}=\{a\mathbb{Z}|a\in A\}\subseteq\operatorname{spec}(\mathbb{Z})$.

   - Si $A=\emptyset$, entonces A es claramente cerrado y abierto.
   - Si A es finito y $0\notin A$, digamos $A=\{p_1,\dots,p_n\}$, entonces $A\mathbb{Z}$ es cerrado, ya que $P=\{p_1\cdots p_n\}$ es tal que $V(P)=A$ (por el inciso anterior), donde $V(P)$ es cerrado.
   - Si A es infinito, entonces no puede ser cerrado, pues contradiría el primer inciso (un elemento tendría una cantidad infinita de divisores).

   Por lo que, los únicos cerrados no triviales son los conjuntos finitos que no contienen al ideal cero.

En resumen, está bien raro este espacio.

Ahora, para $\operatorname{spec}(\mathbb{R})$. Como $\mathbb{R}$ es un campo, el único ideal primo es (0), por lo que $\operatorname{spec}(\mathbb{R})=\{(0)\}$ está dotado de la topología trivial.

Ahora, para $\operatorname{spec}(\mathbb{C}[x])$ □

Observación 1.4.1
Algo útil sería caracterizar primero los ideales primos de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{Z}[x]$, antes de cualquier cosa. El espectro de $\mathbb{Z}[x]$ se puede ver en un diagrama como el que se visualiza en la siguiente página: Atlas of $\operatorname{spec}(\mathbb{Z}[x])$.

Ejercicio 1.4.3

Ejercicio 1.4.4
Es conveniente denotar a los ideales primos de A con letras x y y, pensando en puntos de $X = \text{spec}\,(A)$. Pensando en x como un ideal primo de A, lo denotamos por $\mathfrak{p}_x$ (que vienen a ser la misma cosa pero distintos por notación y costumbre). Muestre que:

(1) $\overline{\{x\}} = V(\mathfrak{p}_x)$.

(2) $y \in \overline{\{x\}}$ si y solo si $\mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_y$.

(3) X es un espacio T_0.

Demostración:
De *(1)*: ■

Idea 1.4.1
Checar este link después: Basic understanding of Spec($\mathbb{Z}$).

1.5. Referencias

- *Introduction to Commutative Algebra*, M. F. Atiyah y I. G. MacDonald, University of Oxford.