Taller: Espacios de configuraciones de gráficas. Tres enfoques distintos.

Cristo Daniel Alvarado

8 de julio de 2024

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Taller impartido por María Teresa Idskgen.

1.1. Conceptos Fundamentales

En un **espacio de configuraciones**, se tiene una gráfica y objetos/particulas que se mueven sobre la gráfica sin choques.

Definición 1.1.1
Dada una gráfica $\mathcal{G}$, se definimos su **gráfica de k-fichas** $F_k(\mathcal{G})$, como:

- Los vértices son conjuntos de vértices de $\mathcal{G}$.
- Las aristas son (A, B) si
$$A \triangle B = \{x, y\}$$
con $(x, y) \in A(\mathcal{G})$.

Observación 1.1.1
Podemos hacer una distinción de casos en que las fichas son iguales o son distinguibles, pero para el caso haremos que son distinguibles.

Observación 1.1.2
En la gráfica de fichas, no todas se mueven al mismo tiempo. Se mueve una por una. Es por ello que se da una observación posterior. Cuando movemos una ficha es como mover un hueco.

Observación 1.1.3
Una forma de construir la gráfica de k-fichas de una gráfica $\mathcal{G}$, es haciendo el producto de $\mathcal{G}$ consigo mismo k-veces y, eliminando los casos en que hay fichas en el mismo lugar. Sería pues
$$\underbrace{\mathcal{G}\square\mathcal{G}\square\cdots\square\mathcal{G}}_{k\text{-veces}}$$
notemos que en el caso más simple de una trayectoria simple (como el que se muestra en el diagrama), en el caso en que las fichas sean distinguibles, se tiene un grafo disconexo.

¿Qué pasa en el caso en que tenemos la siguiente gráfica?

(hacer gráfica de las imágenes que se hicieron anteriormente).

Definición 1.1.2
Sean $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ gráficas. Decimos que una función $f : V(\mathcal{G}) \to V(\mathcal{H})$ es una **función de gráficas**, si es tal que $(x, y) \in A(\mathcal{G})$ implica que $(f(x), f(y)) \in A(\mathcal{H})$. Decimos este es un **isomorfismo de gráficas** si f es biyección.

Observación 1.1.4
Si $\mathcal{G}$ tiene n-vértices, entonces

$$F_k(\mathcal{G}) \cong F_{n-k}(\mathcal{G})$$

En el caso que $k = n - 1$, $F_{n-1}(\mathcal{G}) \cong F_1(\mathcal{G})$.

Si $\{x_1, .., x_k\}$ es un conjunto independiente, entonces $d(V) = \sum_{i=1}^{k} d(x_i)$ (un vértice en la gráfica de fichas). En general, se le resta 2 por cada arista en $\langle x_1, ..., x_k \rangle$.

Definición 1.1.3
Un **núcleo** de una gráfica $\mathcal{G}$ es un conjunto $N \subseteq V(\mathcal{G})$ independiente y absorbente, esto es, para todo $v \in V(\mathcal{G}) \backslash N$ existe $w \in N$ tal que $(v, w) \in F(\mathcal{G})$.

Teorema 1.1.1
Si $\mathcal{G}$ no tiene ciclos dirigidos de longitud impar, entonces $\mathcal{G}$ tiene núcleo.

Teorema 1.1.2
Si $\mathcal{G}$ es bipartita, entonces $F_k(\mathcal{G})$ es bipartita.

Ejemplo 1.1.1
Hacer ejemplo de las fotos de las dos gráficas, una con núcleo y otra sin núcleo tal que sus gráficas de fichas no tienen núcleo y si tienen, respectivamente.

Teorema 1.1.3
Sea C_a un ciclo dirigido. Enotnces, $F_k(C_a)$ tiene núcleo.

Sea DP_u la gráfica que se obtiene de un cíclo dirigido pegándole una flecha que entra. Entonces, $F_k(DP_u)$ tiene núcleo si $k = 2, 3, 4$.

Definición 1.1.4
Un **automorfismo** es un morfismo de gráficas $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$

Definición 1.1.5
$Aut(\mathcal{G})$ denota al grupo de automorfismos de una gráfica con la composiicón usual de funciones y el neutro es la función identidad.

Sea $f \in Aut(\mathcal{G})$, entonces existe $\varphi \in Aut(F_k(\mathcal{G}))$ dado por: si $V = \{x_1, ..., x_k\}$, entonces $\varphi(v) = \{f(x_1), ..., f(x_k)\}$.

Teorema 1.1.4
Si $\mathcal{G}$ no contiene como subgráfica indicuda a C_4 y diamante, entonces $Aut(\mathcal{G}) \cong Aut(F_k(\mathcal{G}))$.

Capítulo 2

Ejercicios