

# Notas Extensiones Separables AM III

Cristo Daniel Alvarado

Diciembre de 2023

# Índice general

<b>4. Extensiones Separables</b>	<b>2</b>
4.1. Resultados preeliminares . . . . .	2
4.2. Extensiones separables . . . . .	4
4.3. Extensiones puramente inseparables . . . . .	11
<b>5. Teoría de Galois Finita</b>	<b>19</b>
5.1. Conceptos Fundamentales . . . . .	19
5.2. Grupo Simétrico . . . . .	33

# Capítulo 4

## Extensiones Separables

### 4.1. Resultados preeliminares

Para enunciar lo que es una extensión separable, se necesitarán demostrar algunos resultados preeliminares para enunciarlo de forma adecuada.

---

**Proposición 4.1.1**

Sea  $F$  un campo y  $f(X) \in F[X]$  un polinomio no constante. Si

1.  $\text{car}(F) = 0$ , entonces  $f'(X) \neq 0$ .
  2.  $\text{car}(F) = p > 0$ , entonces  $f'(X) = 0$  si y sólo si  $\exists g(X) \in F[X]$  tal que  $f(X) = g(X^p)$ .
- 

**Demostración:**

En ambos casos, para la demostración se requiere de usar el polinomio  $f'(X)$ . Expresamos

$$f(X) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, \quad n \geq 1, \quad a_n \neq 0 \quad (4.1)$$

De (1): Se tiene que

$$f'(X) = \cdots + na_nx^{n-1}$$

donde  $na_n \neq 0$  ya que  $\text{car}(F) = 0$ . Por tanto,  $f'(X) \neq 0$ .

De (2): Se probará el si, sólo si.

$\Leftarrow$ ): Supongamos que  $\exists g(X) \in F[X]$  tal que  $f(X) = g(X^p)$ . Expresamos a  $g(X) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ , donde  $b_m \neq 0$ . Entonces

$$\begin{aligned} f(X) &= g(X^p) \\ &= b_0 + b_1X^p + \cdots + b_mX^{pm} \\ \Rightarrow f'(X) &= pb_1X^{p-1} + \cdots + pmb_mX^{pm-1} \\ &= 0 \cdot X^{p-1} + \cdots + 0 \cdot X^{pm-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ ): Supongamos que  $f'(X) = 0$ , donde  $f'(X) = \sum_{i=1}^m ia_i x^{i-1}$ , entonces  $ia_i = 0$ , para todo  $i = 1, \dots, m$ . Si  $a_i \neq 0$  para algún  $i$ , entonces debe suceder que  $i \cdot 1 = i = 0$ , por lo cual  $\text{car}(F) = p \mid i$ . Luego si  $a_i \neq 0$ , existe  $m_i \in \mathbb{N}$  tal que  $i = pm_i$ . Escribiendo a  $f(X)$  con todos sus términos no cero, se tiene que

$$\begin{aligned} f(X) &= a_0 + a_{pm_1}X^{pm_1} + \cdots + a_{pm_n}X^{pm_n} \\ &= a_0 + a_{pm_1}(X^p)^{m_1} + \cdots + a_{pm_n}(X^p)^{m_n} \\ &= g(X^p) \end{aligned}$$

donde  $g(X) = a_0 + a_{pm_1}X + \cdots + a_{pm_n}X^{m_n}$ , siendo  $a_{pm_n} \neq 0$ , pues  $f(X) \neq 0$  ■

De este teorema anterior y de un teorema del capítulo pasado, se deduce de forma inmediata el siguiente corolario:

---

**Corolario 4.1.1**

Sea  $F$  un campo y  $f(X) \in F[X]$  un polinomio irreducible. Si

1.  $\text{car}(F) = 0$ , entonces todas las raíces de  $f(X)$  son simples.
  2.  $\text{car}(F) = p > 0$ , entonces  $f(X)$  tiene una raíz simple si y sólo si,  $\exists g(X) \in F[X]$  tal que  $f(X) = g(X^p)$ .
- 

**Demostración:**

Es inmediata de la proposición anterior. ■

El siguiente teorema tiene como objetivo caracterizar las extensiones separables, enunciando un resultado importante para su definición.

---

**Teorema 4.1.1**

Sea  $F$  un campo con  $\text{car}(F) = p > 0$ . Sea  $f(X) \in F[X]$  un polinomio irreducible, y  $e \in \mathbb{N}^*$  tal que  $f(X) \in F[x^{p^e}]$ , pero  $f(X) \notin F[x^{p^{e+1}}]$ . Sea  $\Psi(X) \in F[X]$  el polinomio tal que  $f(X) = \Psi(X^{p^e})$ . Entonces

1.  $\Psi(X)$  es un polinomio irreducible en  $F[X]$ .
  2. Todas las raíces de  $\Psi(X)$  son simples.
  3. Todas las raíces de  $f(X)$  tienen la misma multiplicidad, a saber,  $p^e$ .
  4. Si  $m = \deg(\Psi)$ , entonces  $\deg(f) = p^e m$ .
- 

**Demostración:**

De (1): Supongamos que  $\Psi(X)$  es descomponible, entonces existen  $g(X), h(X) \in F[X]$  con grados  $\geq 1$  tales que

$$\begin{aligned}\Psi(X) &= g(X)h(X) \\ \Rightarrow f(X) &= g(X^p)h(X^p) \\ &= g_1(X)h_1(X)\end{aligned}$$

donde  $g_1(X) = g(X^p)$  y  $h_1(X) = h(X^p)$  con grados  $\geq 1$ , lo cual implicaría que  $f(X)$  es reducible. Luego  $\Psi(X)$  tiene que ser irreducible.

De (2): Supongamos que  $\Psi(X)$  admite una raíz múltiple, entonces  $\exists g(X) \in F[X]$  tal que  $\Psi(X) = g(X^p)$ . Así

$$\begin{aligned}f(X) &= \Psi(X^{p^e}) \\ &= g(X^{p^{e+1}}) \\ &\in F[x^{p^{e+1}}]\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $\Psi(X)$  debe tener todas sus raíces simples.

De (3): Sea  $m = \deg(\Psi)$ . Sean  $\beta_1, \dots, \beta_m \in \bar{F}$  todas las raíces de  $\Psi(X)$  en alguna cerradura algebraica de  $F$ . Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}\Psi(X) &= a(x - \beta_1) \cdots (x - \beta_m) \\ \Rightarrow f(X) &= \Psi(X^{p^e}) \\ &= a(x^{p^e} - \beta_1) \cdots (x^{p^e} - \beta_m)\end{aligned}$$

Donde  $a \in F$  es alguna constante. Ahora, para cada  $i = 1, \dots, m$  sea  $\alpha_i \in \bar{F}$  una raíz del polinomio  $X^{p^e} - \beta_i = 0$ , esto es  $\beta_i = \alpha_i^{p^e}$ . Notemos que si  $i \neq j$ , debe suceder que  $\alpha_i \neq \alpha_j$ . Por tanto

*asd*

De (4): Es inmediata. ■

Se deduce de forma inmediata el siguiente corolario.

---

### Corolario 4.1.2

Sea  $F$  campo y  $f(X) \in F[X]$  un polinomio irreducible. Entonces todas las raíces de  $f(X)$  tienen la misma multiplicidad. Si  $\text{car}(F) = 0$ , la multiplicidad de estas raíces es 1, y si  $\text{car}(F) = p > 0$ , tienen multiplicidad  $p^e$ , para algún  $e \in \mathbb{N}^*$  (este  $e$  se obtiene del teorema anterior).

---

## 4.2. Extensiones separables

Ahora estamos en las condiciones de enunciar la definición de separabilidad.

### Definición 4.2.1

De acuerdo con las notaciones del teorema anterior y de su demostración, tenemos que el número  $\deg(\Psi)$  es llamado **el grado de separabilidad de  $f$** , y al entero no negativo  $e$  es llamado **el grado de inseparabilidad de  $f$** .

En otras palabras, podemos ver que el grado de separabilidad de  $f$  es el número de raíces distintas de  $f$ .

### Definición 4.2.2

Sea  $F$  un campo y  $\bar{F}$  una cerradura algebraica de  $F$ . Si  $\alpha \in \bar{F}$  y  $f(X) = \text{irr}(\alpha, F, X)$ , entonces se define **el grado de separabilidad de  $\alpha$** , como el grado de separabilidad de  $f$ , y al exponente  $e$  de inseparabilidad de  $f$ , será el **exponente de inseparabilidad de  $\alpha$** .

En el caso en que  $\text{car}(F) = 0$ , el exponente y grado de inseparabilidad de  $f$  y  $\alpha$  no tienen sentido en estar definidos, pues en ambos casos su valor siempre será de 1.

En cualquier caso, si  $\alpha \in \bar{F}$  se denota al grado de separabilidad de  $\alpha$  como

$$[F(\alpha) : F]_s \tag{4.2}$$

En el caso de que  $\text{car}(F) = 0$ , se tiene que

$$[F(\alpha) : F]_s = [F(\alpha) : F] = \deg(\text{irr}(\alpha, F, X)) \tag{4.3}$$

y, si  $\text{car}(F) = p > 0$ , entonces

$$[F(\alpha) : F]_s = \frac{[F(\alpha) : F]}{p^e} \tag{4.4}$$

---

**Proposición 4.2.1**

Sea  $F$  un campo,  $\bar{F}$  una cerradura algebraica de  $F$  y  $\alpha \in \bar{F}$ . Entonces,  $[F(\alpha) : F]_s = N$ , donde  $N \in \mathbb{N}$  es el número de  $F$ -homomorfismos de  $F(\alpha)$  en  $\bar{F}$ .

---

**Demostración:**

Sea  $f(X) = \text{irr}(\alpha, F, X)$ . Tomemos  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \bar{F}$  las raíces distintas de  $f(X)$ . Se tiene por definición que

$$m = [F(\alpha) : F]_s$$

Sea  $\phi : F(\alpha) \rightarrow \bar{F}$  un  $F$ -homomorfismo. Sabemos que  $\phi$  está completamente determinada por su acción sobre  $\alpha$ , teniendo que  $\phi(\alpha)$  es raíces de  $f(X)$ , esto es debe ser que  $\phi(\alpha) = \alpha_i$ , con  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ . luego, a lo más tenemos  $m$   $F$ -homomorfismos de  $F(\alpha)$  en  $\bar{F}$ , con lo cual se tiene el resultado. ■

**Definición 4.2.3**

Sea  $E/F$  una extensión algebraica. Se define el **grado de separabilidad de  $E$  sobre  $F$**  como la cardinalidad del conjunto de  $F$ -homomorfismos que van de  $E$  en  $\bar{F}$ , donde  $\bar{F}$  es una cerradura algebraica de  $F$  que contiene a  $E$ . Tal cardinal es denotado por  $[E : F]_s$ .

De resultados de capítulo anterior, se deduce de forma inmediata el siguiente teorema.

---

**Teorema 4.2.1**

Sea  $E/F$  una extensión finita y  $K$  un campo intermedio de la extensión  $E/F$ . Entonces

$$[E : F]_s = [E : K]_s [K : F]_s \quad (4.5)$$

---

**Demostración:**

Es inmediata de un teorema anterior. ■

**Definición 4.2.4**

Sea  $F$  un campo y  $\alpha \in \bar{F}$ . Decimos que  $\alpha$  **es separable sobre  $F$**  si  $[F(\alpha) : F]_s = [F(\alpha) : F]$ . Si  $E/F$  es una extensión algebraica, entonces se dice que  $E/F$  **es separable** o  $E$  **es separable sobre  $F$** , si todo elemento de  $E$  es separable sobre  $F$ .

Veremos ahora algunas caracterizaciones de las extensiones separables.

**Observación 4.2.1**

Sea  $F$  campo y  $\bar{F}$  cerradura algebraica de  $F$ .

1. Si  $\alpha \in \bar{F}$ , entonces  $\alpha$  es separable sobre  $F$  si y sólo si  $f(X) = \text{irr}(\alpha, F, X)$  es tal que todas sus raíces son simples. Cuando esto ocurra decimos que  $f(X)$  **es separable sobre  $F$** .
2. Si  $g(X) \in F[X]$ , decimos que  $g(X)$  **es separable sobre  $F$**  si todos sus factores irreducibles son separables sobre  $F$ .

---

**Proposición 4.2.2**

Sea  $E/F$  una extensión finita con  $\text{car}(F) = p > 0$ . Entonces existe un elemento  $t \in \mathbb{N}^*$  tal que

$$[E : F] = p^t [E : F]_s \quad (4.6)$$

En particular, si  $p \nmid [E : F]$ , entonces  $[E : F] = [E : F]_s$ .

---

**Demostración:**

Sean  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in E$  tales que  $E = F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . Consideraremos la torre de campos  $F \subseteq F(\alpha_1) \subseteq \dots \subseteq F(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \subseteq F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . Sea  $e^i$  es exponente de inseparabilidad de  $\alpha_i$  sobre  $F(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})$ , con  $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$  y  $e_1$  el grado de inseparabilidad de  $\alpha_1$  sobre  $F$ . Entonces

$$\begin{aligned} [E : F]_s &= [F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : F(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})]_s \cdot \dots \cdot [F(\alpha_1) : F]_s \\ &= \frac{1}{p^{e_n}} [F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : F(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})] \cdot \dots \cdot \frac{1}{p^{e_1}} [F(\alpha_1) : F] \\ \Rightarrow [E : F] &= p^{e_1 + e_2 + \dots + e_n} [E : F]_s \end{aligned}$$

tomando  $t = e_1 + \dots + e_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  se sigue el resultado. ■

**Observación 4.2.2**

Si  $E/F$  es una extensión finita y  $\text{car}(F) = 0$ , entonces  $[E : F] = [E : F]_s$ .

---

**Proposición 4.2.3**

Sea  $E/F$  una extensión de campos con  $\text{car}(F) = p > 0$  y  $\alpha \in E$  algebraico sobre  $F$ . Sea  $e$  el exponente de inseparabilidad de  $\alpha$  sobre  $F$ . Entonces

1.  $\alpha^{p^e}$  es separable sobre  $F$ .
2. Las siguientes condiciones son equivalentes:
  - I)  $\alpha$  es separable sobre  $F$ .
  - II)  $[F(\alpha) : F]_s = [F(\alpha) : F]$ .
  - III)  $e = 0$ .
  - IV)  $F(\alpha) = F(\alpha^p)$ .

---

**Demostración:**

De (1): Sea  $f(X) = \text{irr}(\alpha, F, X)$  y  $\psi(x) \in F[X]$  tal que  $\psi(X^{p^e}) = f(X)$ , pero  $f(X) \notin F[X^{p^{e+1}}]$ . Sabemos que  $\psi(X)$  es irreducible sobre  $F$  y que todas sus raíces son simples, donde

$$0 = f(\alpha) = \psi(\alpha^{p^e})$$

esto es,  $\alpha^{p^e}$  es raíz de  $\psi(X)$ , por lo cual  $\psi(X) = \text{irr}(\alpha^{p^e}, F, X)$ . Por tanto,  $\alpha^{p^e}$  es separable sobre  $F$ .

De (2): Es claro que I)  $\iff$  II)  $\iff$  III). Probaremos que I)  $\iff$  IV). Antes, notemos que

$$F \subseteq F(\alpha^p) \subseteq F(\alpha)$$

I)  $\Rightarrow$  IV): Sea  $f(X) = \text{irr}(\alpha, F, X)$ . Tenemos que  $g(X) = X^p - \alpha^p \in F(\alpha^p)[X]$  y  $\alpha$  es raíz de  $g(X)$ . Por lo cual  $\text{irr}(\alpha, F(\alpha^p), X) \mid g(X)$  y  $\text{irr}(\alpha, F(\alpha^p), X) \mid f(X)$  en  $F(\alpha^p)[X]$ .

Entonces, como todas las raíces de  $f(X)$  son simples, las raíces de  $h(X) = \text{irr}(\alpha, F(\alpha^p), X)$  también lo son; además  $h(X) \mid X^p - \alpha^p = (X - \alpha)^p \Rightarrow h(X) = (X - \alpha) \Rightarrow \alpha \in F(\alpha^p)$ . Por tanto,  $F(\alpha) = F(\alpha^p)$ .

IV)  $\Rightarrow$  I): Recíprocamente, supongamos que  $F(\alpha) = F(\alpha^p)$  pero  $\alpha$  no es separable sobre  $F$ . Siendo  $f(X) = \text{irr}(\alpha, F, X)$ , tenemos que  $f(X) \in F[X^p]$ , esto es, existe  $g(X) \in F[X]$  tal que  $f(X) = g(X^p)$  donde  $\deg(f) = p \cdot \deg(g) > \deg(g)$ .

Notemos que  $g(X)$  tiene por raíz a  $\alpha^p$ , pues  $g(\alpha^p) = f(\alpha) = 0$ , de esta forma  $\text{irr}(\alpha^p, F, X) \mid g(X) \Rightarrow [F(\alpha^p) : F] = \deg(\text{irr}(\alpha^p, F, X)) = \deg(g) < \deg(f) = [F(\alpha) : F]$ , luego  $F(\alpha^p) \subsetneq F(\alpha)$ , lo cual es una contradicción. Por tanto,  $\alpha$  es separable sobre  $F$ . ■

---

**Proposición 4.2.4**

Sea  $E/F$  una extensión finita. Entonces  $E/F$  es separable si y sólo si  $[E : F]_s = [E : F]$ .

---

**Demostración:**

$\Rightarrow$ ) : Suponga que  $E/F$  es separable. Sean  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in E$  tales que  $F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = E$ . Consideremos la torre de campos:

$$F \subsetneq F(\alpha_1) \subsetneq \dots \subsetneq F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = E$$

para cada  $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ , tenemos que  $\alpha_i$  es separable y, por ende, lo es sobre  $F(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})$ . Luego,

$$\begin{aligned} [E : F]_s &= [F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : F(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})]_s \cdots [F(\alpha_1) : F]_s \\ &= [F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : F(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})] \cdots [F(\alpha_1) : F] \\ &= [E : F] \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ ) : Sea  $\alpha \in E$  arbitrario. Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} [E : F(\alpha)]_s \cdot [F(\alpha) : F]_s &= [E : F]_s \\ &= [E : F] \\ &= [E : F(\alpha)] \cdot [F(\alpha) : F] \end{aligned}$$

donde  $[E : F(\alpha)]_s \leq [E : F(\alpha)]$  y  $[F(\alpha) : F]_s \leq [F(\alpha) : F]$ . Por la igualdad anterior debe suceder que

$$[F(\alpha) : F]_s = [F(\alpha) : F]$$

esto es, que  $\alpha$  es separable sobre  $F$ . Como el  $\alpha$  fue arbitrario, entonces se sigue que la extensión  $E/F$  es una extensión separable. ■

**Observación 4.2.3**

Sea  $F \subseteq K \subseteq E$  una torre de campos y  $\alpha \in E$  separable sobre  $F$ . Entonces  $\alpha$  es separable sobre  $K$ . Más generalmente, sean  $E/F$  y  $K/F$  extensiones de campos y  $\alpha \in E$  separable sobre  $F$ . Si  $\alpha$  es elemento de un campo  $L$  extensión de  $K$ , entonces  $\alpha$  es separable sobre  $K$ .

---

**Proposición 4.2.5**

Sea  $E/F$  una extensión de campos y  $S \subseteq E$  tal que  $E = F(S)$ . Sea.

$$K = \{\alpha \in E \mid \alpha \text{ es separable sobre } F\} \tag{4.7}$$

Entonces

1.  $K$  es un subcampo intermedio de la extensión  $E/F$ .
  2.  $E/F$  es separable si y sólo si  $\alpha$  es separable sobre  $F$ , para todo  $\alpha \in S$ .
- 

**Demostración:**

De (1): Probaremos que  $K$  es campo y que  $F \subseteq K \subseteq E$ . En efecto, sea  $\alpha \in F$ , se tiene que  $\alpha$  es algebraico sobre  $F$ , con polinomio irreducible  $f(X) = X - \alpha$ , el cual tiene todas sus raíces distintas, por lo cual  $\alpha$  es separable sobre  $F$ . Entonces  $F \subseteq K \subseteq E$ . Sean ahora  $\alpha, \beta \in K \neq \emptyset$ , pues  $F \subseteq K$ . Consideremos el campo intermedio de la extensión  $E/F$ ,  $F(\alpha, \beta)$ . Se tiene entonces la torre de campos

$$F \subseteq F(\alpha) \subseteq F(\alpha, \beta) \subseteq E$$



Como  $\beta$  es separable sobre  $F$ , lo es sobre  $F(\alpha)$ , luego como el grado de separabilidad es multiplicativo, se tiene que

$$\begin{aligned} [F(\alpha, \beta) : F]_s &= [F(\alpha, \beta) : F(\alpha)]_s [F(\alpha) : F]_s \\ &= [F(\alpha, \beta) : F(\alpha)] [F(\alpha) : F] \\ &= [F(\alpha, \beta) : F] \end{aligned}$$

por lo cual, la extensión  $F(\alpha, \beta)/F$  es separable, luego los elementos  $\alpha - \beta, \alpha\beta, \alpha^{-1} \in F(\alpha, \beta)$  son separables sobre  $F$ . Por tanto,  $K$  es campo y por lo anterior, es subcampo intermedio de la extensión  $E/F$ .

De (2): Veamos que

$\Rightarrow$ ): Es inmediata, pues si  $E/F$  es separable todo elemento de  $E$  es separable sobre  $F$ . En particular todo elemento de  $S$  es separable sobre  $F$ .

$\Leftarrow$ ): Supongamos que  $\alpha$  es separable sobre  $F$ , para todo  $\alpha \in S$ . Por (1) se tiene que  $S \subseteq K$  y  $F \subseteq K$ , pero como  $K$  es subcampo de  $E$ , se tiene que  $F(S) \subseteq K$ , por lo cual  $F(S) = E = K$ . Así, todos los elementos de  $E$  son separables sobre  $F$ , es decir  $E/F$  es una extensión separable. ■

#### Definición 4.2.5

El campo  $K$  de la definición (4.7) es llamado **la cerradura separable** o de la extensión  $E/F$  o simplemente de  $E/F$ , o de  $F$  en  $E$ .

Si consideramos la extensión  $\bar{F}/F$ , entonces la cerradura separable de  $F$  en  $\bar{F}$  simplemente se dice es la **cerradura separable de  $F$** .

#### Observación 4.2.4

Si  $E/F$  es una extensión algebraica de tal manera que  $E \subseteq \bar{F}$ , entonces la cerradura separable de  $F$  en  $E$ ,  $K$ , es la intersección de la cerradura separable de  $F$  con  $E$ .

#### Observación 4.2.5

En la literatura no existe notación establecida para referirse a la cerradura normal. En este momento nosotros acordaremos la siguiente. Sobre la extensión  $E/F$ , se denotará a la cerradura separable de  $F$  en  $E$  por:

$$F_{S, E/F} \quad \text{o} \quad F_{S, F}^E$$

Cuando la extensión es  $\bar{F}/F$  será

$$F_S$$

y a veces a la cerradura algebraica se le denota por  $\bar{F} = F^a$ .

---

#### Proposición 4.2.6

Sea  $E/F$  una extensión normal &  $F_S$  la cerradura separable de  $E/F$ . Entonces, la extensión  $F_S/F$  es normal.

---

#### Demostración:

Sea  $\alpha \in F_S$  con  $f(X) = \text{irr}(\alpha, F, X)$ , y  $\beta \in \bar{F}$  tal que  $\alpha$  y  $\beta$  son  $F$ -conjugados, es decir que ambos son raíces del polinomio  $f(X)$ . Como la extensión  $E/F$  es normal, entonces  $\beta \in E$ , donde  $\text{irr}(\beta, F, X) = f(X)$  es separable sobre  $F$ , pues  $\alpha$  es separable sobre  $F$ , es decir,  $\beta$  es separable sobre  $F$ . Luego  $\beta \in F_S$ . Por tanto, la extensión  $F_S/F$  es normal. ■

**Observación 4.2.6**

Si  $F$  es campo, la extensión  $\bar{F}/F$  es normal, por lo cual las extensiones  $\bar{F}/F_S$  y  $F_S/F$  son ambas normales (siendo  $F_S$  la cerradura separable de  $F$ ).

**Proposición 4.2.7**

Sea  $E/F$  una extensión finita. y  $F_S$  la cerradura separable de  $F$  en  $E$ . Entonces,

$$[F_S : F] = [E : F]_s \quad (4.8)$$

**Demostración:**

Tenemos dos casos:

- Si  $\text{car}(F) = 0$ , entonces la extensión  $E/F$  es separable y por tanto  $F_S = E$ . Por tanto

$$\begin{aligned} [F_S : F] &= [E : F] \\ &= [E : F]_s \end{aligned}$$

- Si  $\text{car}(F) = p > 0$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} [E : F]_S &= [E : F_S]_S [F_S : F]_S \\ &= [E : F_S]_S [F_S : F] \end{aligned}$$

Para probar el resultado, basta con probar que  $[E : F_S]_S = 1$ . Recordemos que  $[E : F_S]_S$  es el cardinal de  $F_S$ -homomorfismos de  $E$  en  $\bar{F} = \bar{F}_S$ . Sea entonces  $f : E \rightarrow \bar{F}$  un  $F_S$ -homomorfismo. Sea  $\alpha \in E$ . Si  $\alpha \in F_S$  entonces  $f(\alpha) = \alpha$ . Si  $\alpha \notin F_S$ , se tiene por definición de  $F_S$  que  $\alpha$  no es separable sobre  $F$ .

Sea  $f(X) = \text{irr}(\alpha, F, X)$ , y tomemos  $e \in \mathbb{N}^*$  su exponente de inseparabilidad. Por un resultado anterior sucede que  $\alpha^{p^e}$  es separable sobre  $F$ , es decir  $\alpha^{p^e} \in F_S$ . Luego,

$$\begin{aligned} f(\alpha^{p^e}) &= \alpha^{p^e} \\ \Rightarrow (\alpha - f(\alpha))^{p^e} &= \alpha^{p^e} - f(\alpha)^{p^e} \\ &= 0 \\ \Rightarrow f(\alpha) - \alpha &= 0 \\ \Rightarrow f(\alpha) &= \alpha \end{aligned}$$

Es decir,  $f = \text{id}_E$ . Por tanto  $[E : F_S] = 1$ . Así por la ecuación anterior

$$[E : F]_S [F_S : F]$$

■

**Teorema 4.2.2**

La clase de extensiones separables es una clase distinguida.

**Demostración:**

De (a): Sea  $F \subseteq K \subseteq E$  una torre de campos. Probaremos que  $E/F$  es separable si, y sólo si  $E/K$  y  $K/F$  son separables.

$\Rightarrow$ ): Supongamos que  $E/F$  es separable. Sabemos ya que  $E/K$  es separable. Pero, por otro lado, es claro que la extensión  $K/F$  es separable.

$\Leftarrow$ ): Supongamos que las extensiones  $E/K$  y  $K/F$  son separables. Sea  $\alpha \in E$  arbitrario y tomemos  $f(X) = \text{irr}(\alpha, K, X)$ , digamos

$$f(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_{m-1}X^{m-1} + X^m \in K[X]$$

Tenemos que  $f(X)$  es separable sobre  $K$ , es decir todas las raíces de  $f(X)$  son simples. Consideremos la torre de campos:

$$F \subseteq F(a_0, a_1, \dots, a_{m-1}) \subseteq F(a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, \alpha)$$

donde  $F(a_0, a_1, \dots, a_{m-1})/F$  es finita y separable, al igual que  $F(a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, \alpha)/F(a_0, a_1, \dots, a_{m-1})$ . Notemos que  $f(X) = \text{irr}(\alpha, F(a_0, a_1, \dots, a_{m-1}), X)$ . Entonces

$$\begin{aligned} [F(a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, \alpha) : F] &= [F(a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, \alpha) : F(a_0, a_1, \dots, a_{m-1})] [F(a_0, a_1, \dots, a_{m-1}) : F] \\ &= [F(a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, \alpha) : F(a_0, a_1, \dots, a_{m-1})]_s [F(a_0, a_1, \dots, a_{m-1}) : F]_s \\ &= [F(a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, \alpha) : F]_s \end{aligned}$$

es decir,  $F(a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, \alpha)/F$  es una extensión separable, en particular se tiene que  $\alpha$  es separable sobre  $F$ . Por ser el  $\alpha$  arbitrario en  $E$ , se sigue que  $E/F$  es una extensión separable.

De (b): Sean  $E/F$  y  $K/F$  extensiones separables, dónde  $E/F$  es separable y  $E$  y  $K$  subcampos de un campo común  $L$ . Como  $K(E) = KE$ , entonces basta ver que los elementos de  $E$  son separables sobre  $K$ , lo cual ya se tiene.

Entonces,  $KE/F$  es una extensión separable. ■

#### Corolario 4.2.1

Sean  $E/F$  y  $K/F$  extensiones separables, con  $E$  y  $K$  subcampos de un campo común  $L$ . Entonces,  $KE/F$  es separable.

#### Demostración:

Es inmediato de la proposición teorema. ■

#### Definición 4.2.6

Sea  $F$  un campo. Se dice que  $F$  es **perfecto** si toda extensión algebraica de  $F$  es separable.

#### Observación 4.2.7

Todo campo de característica 0 es perfecto (ya que toda extensión algebraica de un campo con característica 0 sigue teniendo característica 0, es decir que la extensión siempre va a ser separable).

#### Definición 4.2.7

Sea  $F$  campo de característica  $p > 0$ . Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Se define la función  $\phi_n : F \rightarrow F$ ,  $\alpha \mapsto \alpha^{p^n}$ .

Se tiene que  $\phi_n$  es un homomorfismo, llamado **el homomorfismo de Fröbenius de grado  $n$** . Para  $n = 1$  se dice simplemente que  $\phi_1$  es el homomorfismo de Fröbenius, y se denota por  $\phi$ .

#### Teorema 4.2.3

Sea  $F$  un campo de característica  $p > 0$ . Las siguientes condiciones son equivalentes:

1.  $F$  es perfecto.
2. Toda extensión finita de  $F$  es separable.
3. Todo polinomio irreducible sobre  $F$  es separable.
4. Todo polinomio sobre  $F$  es separable.

**Demostración:**

(1)  $\Rightarrow$  (2): Es inmediato.

(2)  $\Rightarrow$  (3): Sea  $f(X) \in F[X] \setminus F$  irreducible y sea  $\alpha \in \bar{F}$  una raíz de  $f(X)$ . Por hipótesis,  $F(\alpha)$  es una extensión separable de  $F$ , luego  $\alpha$  es separable sobre  $F$ . Como  $f(X)$  es asociado con  $\text{irr}(\alpha, F, X)$ , entonces  $f$  es separable sobre  $F$ .

(3)  $\iff$  (4): Es inmediato.

(4)  $\Rightarrow$  (5): Es claro que  $\phi : F \rightarrow F$  es un monorfismo. Sea  $\alpha \in F$  y considérese  $f(X) = X^p - \alpha \in F[X]$ . Sea  $\beta \in \bar{F}$  una raíz de  $f(X)$  y sea  $g(X) = \text{irr}(\beta, F, X)$ , el cual es separable y divide a  $f(X)$ . Pero  $f(X) = X^p - \alpha^p = (X - \alpha)^p$ , así  $\beta$  es la única raíz de  $f(X)$ , por lo que también lo es de  $g(X)$ . Por tanto,  $g(X) = X - \beta \in F[X]$ .

Luego,  $\beta \in F$ . Así pues,  $\phi$  es suprayectiva, luego es un automorfismo de  $F$ .

(5)  $\Rightarrow$  (1): Sea  $E/F$  una extensión algebraica. Sean  $\alpha \in E$  y  $f(X) = \text{irr}(\alpha, F, X)$ , cuyas raíces tienen multiplicidad  $p^e$ , con  $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , siendo  $e$  el exponente de inseparabilidad de  $\alpha$ . Suponiendo que  $e \geq 1$ , entonces  $\alpha$  es raíz múltiple de  $f(X)$ , por lo que existe  $g(x) \in F[X]$  tal que  $f(X) = g(X^p)$ . Sea

$$g(X) = b_0 + b_1X + \cdots + b_mX^m$$

Por hipótesis, para todo  $i \in \{0, \dots, m\}$  existe  $c_i \in F$  tal que  $b_i = c_i^p$ . Pero, esto implica que

$$f(X) = c_0^p + c_0^pX^p + \cdots + c_m^pX^{mp} = (c_0 + c_1X + \cdots + c_mX^m)^p$$

lo cual contradice el hecho de que  $f(X)$  sea irreducible. Por tanto,  $e = 0$ , luego  $\alpha$  es separable sobre  $F$  y, en consecuencia,  $E/F$  es una extensión separable. ■

**Teorema 4.2.4**

Todo campo finito es perfecto.

**Demostración:**

Considerando el homomorfismo de Fröbenius  $\phi : F \rightarrow F$ , se tiene que  $\phi$  es inyectivo, por lo cual  $|\phi(F)| = |F|$ . Pero, como  $F$  es finito, entonces  $\phi(F) = F$ , luego  $\phi$  es automorfismo de  $F$ . Así pues,  $F$  es perfecto. ■

**Definición 4.2.8**

Sea  $E/F$  una extensión de campos y  $\alpha$  inseparable sobre  $F$ . Entonces  $f(X) = \text{irr}(\alpha, F, X)$  es de la forma  $f(X) = (X - \alpha_1)^{p^e} \cdots (X - \alpha_m)^{p^e}$  con  $e \geq 1$ . Se dice que  $\alpha$  es **puramente inseparable sobre  $F$**  si y sólo si existe  $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tal que  $\alpha^{p^t} \in F$ .

## 4.3. Extesiones puramente inseparables

**Definición 4.3.1**

Sea  $E/F$  una extensión de campos con  $\text{car}(F) = p > 0$  y  $\alpha \in E$ . Decimos que  $\alpha$  es **puramente inseparable** si existe  $t \in \mathbb{Z}$ ,  $t \geq 0$  tal que  $\alpha^{p^t} \in F$ . La extensión  $E/F$  es **p.i.** si todo elemento de  $E$  es p.i. sobre  $F$ .

**Observación 4.3.1**

Si  $E/F$  es una extensión de campos, entonces todos los elementos de  $F$  son p.i. (separables) sobre  $F$ .

**Proposición 4.3.1**

Sea  $E/F$  una extensión de campos con  $\text{car}(F) = p > 0$ . Sea

$$K := \{\alpha \in E \mid \alpha \text{ es puramente inseparable sobre } F\}$$

(por la observación anterior,  $K \neq \emptyset$ ). Entonces,  $K$  es subcampo de  $E$  que contiene a  $F$ .

**Demostración:**

Es claro que  $K \neq \emptyset$  y  $F \subseteq K \subseteq E$ . Sean  $\alpha, \beta \in K$ , y  $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tales que

$$\alpha^{p^{t_1}}, \beta^{p^{t_2}} \in F$$

Sea  $t = \max\{t_1, t_2\}$ . Por lo cual  $\alpha^{p^t}, \beta^{p^t} \in F$ , así

$$(\alpha - \beta)^{p^t} = \alpha^{p^t} - \beta^{p^t} \in F$$

$$(\alpha\beta)^{p^t} = \alpha^{p^t}\beta^{p^t} \in F$$

$$(\alpha^{-1})^{p^t} = (\alpha^{p^t})^{-1} \in F \text{ donde } \alpha \neq 0$$

por lo cual  $K$  es campo intermedio de la extensión  $E/F$ . ■

**Proposición 4.3.2**

Sea  $E/F$  una extensión algebraica, con  $\text{car}(F) = p > 0$ . Sea  $S \subseteq E$  tal que  $E = F(S)$ . Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

1.  $E/F$  es puramente inseparable.
2. Todo elemento de  $S$  es puramente inseparable sobre  $F$ .
3. Los elementos de  $E$  que son puramente inseparables y separables sobre  $F$  son exactamente los de  $F$ .
4. Si  $\phi : E \rightarrow \bar{F}$  es un  $F$ -homomorfismo, entonces  $\phi(\alpha) = \alpha$ , para todo  $\alpha \in E$ .

**Demostración:**

(1)  $\Rightarrow$  (2): Es inmediato.

(2)  $\Rightarrow$  (3): Sea  $\alpha \in E$  tal que es puramente inseparable sobre  $F$  y separable sobre  $F$ , y  $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  el exponente de inseparabilidad de  $\alpha$  sobre  $F$ .

Tenemos que  $\alpha^{p^e}$  es separable sobre  $F$  (por una proposición anterior). Por otro lado, sea  $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tal que  $\alpha^{p^t} \in F$ . Podemos suponer que  $t \geq e$ . Luego,  $\alpha$  es raíz del polinomio  $g(X) = X^{p^t} - \alpha^{p^t} = (X - \alpha)^{p^t}$ , por lo cual  $f(X) \mid g(X)$ , donde  $f(X) = \text{irr}(\alpha, F, X)$ .

Así  $f(x) = (X - \alpha)^{p^t}$ . Como  $\alpha$  es separable sobre  $F$ , se tiene que  $e = 0$ , es decir que  $f(X) = X - \alpha \in F[X]$ , en particular,  $\alpha \in F$ .

(3)  $\Rightarrow$  (4): Sea  $\phi : E \rightarrow \bar{F}$  un  $F$ -homomorfismo arbitrario, y  $\alpha \in E$ , con  $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  su exponente de inseparabilidad. Sabemos que  $\alpha^{p^e}$  es separable sobre  $F$ . Por hipótesis,  $\alpha^{p^e} \in F$ . Por lo cual

$$\begin{aligned} \phi(\alpha^{p^e}) &= \alpha^{p^e} \\ \Rightarrow (\phi(\alpha) - \alpha)^{p^e} &= (\phi(\alpha^{p^e}) - \alpha^{p^e}) = 0 \\ \Rightarrow \phi(\alpha) &= \alpha \end{aligned}$$

(4)  $\Rightarrow$  (1): sea  $\alpha \in E$  arbitrario. Probaremos que existe  $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tal que  $\alpha^{p^t} \in F$ . Sea  $\beta \in \bar{F}$  un  $F$ -conjugado de  $\alpha$ . Sabemos que existe un  $F$ -isomorfismo  $\psi : F(\alpha) \rightarrow F(\beta)$  tal que  $\psi(\alpha) = \beta$ . Extendemos  $\psi$  a un  $F$ -homomorfismo  $\phi : E \rightarrow \bar{F}$ . Por hipótesis, se tiene que  $\phi(\gamma) = \gamma$ , para todo  $\gamma \in E$ , en particular  $\beta = \psi(\alpha) = \phi(\alpha) = \alpha$ . Luego, si  $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  es el exponente de inseparabilidad de  $\alpha$ , entonces

$$\begin{aligned} f(X) &= \text{irr}(\alpha, F, X) \\ &= (X - \alpha)^{p^e} \\ &= X^{p^e} - \alpha^{p^e} \in F[X] \end{aligned}$$

por tanto  $\alpha^{p^e} \in F$ . Luego  $\alpha$  es p.i. sobre  $F$ . ■

#### Definición 4.3.2

Si  $E/F$  es una extensión algebraica con  $\text{car}(F) = p > 0$ , entonces la **cerradura puramente inseparable** de la extensión  $E/F$  o de  $E$  en  $F$ , es el campo intermedio de todos los elementos  $\alpha \in E$  tal que son puramente inseparables sobre  $F$ .

#### Observación 4.3.2

Si  $E/F$  es finita, entonces  $E/F$  es p.i.  $\iff [E : F]_S = 1$ .

#### Observación 4.3.3

Sea  $E/F$  una extensión algebraica la cual es p.i. y separable. Entonces, tenemos que  $E = F$ .

---

#### Teorema 4.3.1

La clase de extensiones p.i. forman una clase distinguida.

---

#### Demostración:

(a): Sea  $F \subseteq K \subseteq E$  una torre de campos con  $\text{car}(F) = p > 0$ . Supóngase que  $E/F$  es puramente inseparable. Sea  $\alpha \in E$ , entonces existe  $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tal que  $\alpha^{p^t} \in F \subseteq K$ , por tanto  $E/K$  es puramente inseparable.

Por otro lado, es claro que todos los elementos de  $K$  son p.i. sobre  $F$ , por lo cual  $K/F$  es puramente inseparable.

Recíprocamente, suponga que  $E/K$  y  $K/F$  son p.i. Sea  $\alpha \in E$ , entonces existe  $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tal que  $\alpha^{p^r} \in K$ . Pero para este elemento existe  $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tal que  $(\alpha^{p^r})^{p^s} \in F$ , es decir  $\alpha^{p^{r+s}} \in F$ . Por tanto,  $E/F$  es puramente inseparable.

(b): Sean  $E/F$  y  $K/F$  extensiones de campos con  $\text{car}(F) = p > 0$ , donde  $E$  y  $K$  son subcampos de un campo común  $L$ . Supóngase que la extensión  $E/F$  es p.i. Probaremos que la extensión  $EK/F$  es p.i.

Tenemos que  $EK = K(E)$ . Si  $\alpha \in E$ , entonces existe  $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tal que  $\alpha^{p^t} \in F \subseteq K$ . Por tanto,  $EK/K$  es p.i.

Por (a) y (b), se sigue que la clase de extensiones p.i. es una clase distinguida. ■

---

#### Corolario 4.3.1

Sean  $E/F$  y  $K/F$  extensiones de campos tales que  $\text{car}(F) = p > 0$ , donde  $K$  y  $E$  son subcampos de un campo común  $L$ . Si  $E/F$  y  $K/F$  son p.i., entonces  $EK/F$  es p.i.

---

**Demostración:**

Es inmediato del teorema anterior. ■

Sea  $E/F$  una extensión algebraica con  $\text{car}(F) = p > 0$ , y sean  $F_i$  y  $F_s$  las cerraduras p.i. y separables, respectivamente. Entonces tenemos el siguiente diagrama:

donde  $F_i \cap F_s = F$ .

**Proposición 4.3.3**

En las condiciones de las notaciones anteriores, tenemos lo siguiente

1.  $E/F_s$  es p.i.
2.  $E/F_i$  es separable si y sólo si  $E = F_i F_s$ .

**Demostración:**

De (1): Sea  $\alpha \in E$ , y  $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  su exponente de inseparabilidad sobre  $F$ . Sabemos que  $\alpha^{p^e}$  es separable sobre  $F$ , por lo cual  $\alpha \in F_s$ . De esta forma,  $E/F_s$  es puramente inseparable.

De (2):

$\Rightarrow$ ): Supóngase que  $E/F_i$  es separable, entonces  $E/F_i F_s$  es separable y p.i., por lo cual  $E = F_i F_s$ .

$\Leftarrow$ ): Es inmediata. ■

**Proposición 4.3.4**

Sea  $F$  un campo cualquiera tal que  $\text{car}(F) = p > 0$ . Sea  $\bar{F}$  su cerradura algebraica y  $F_i$  la cerradura p.i. de  $F$  en  $\bar{F}$ . Tenemos lo siguiente

1. El campo  $F_i$  es perfecto.
2.  $F_i \cap F_s = F$  y  $F_i F_s = \bar{F}$ , donde  $F_s$  es la cerradura separable de  $F$  en  $\bar{F}$ .
3. Si  $K$  es un campo perfecto tal que  $F \subseteq K$ , con  $K \subseteq \bar{F}$ , entonces  $F_i \subseteq K$ .

**Demostración:**

De (1): Probemos que  $F_i^p = F_i$ , donde

$$F_i^p = \{\alpha^p \mid \alpha \in F_i\}$$

ya se tiene que  $F_i^p \subseteq F_i$ . Sea  $\alpha \in F_i$ , y  $\beta \in \bar{F}$  tal que  $\alpha = \beta^p$ . Luego, existe  $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tal que  $\beta^{p^{t+1}} = \alpha^{p^t} \in F$ , por lo cual  $\beta \in F_i$ . Así  $\alpha = \beta^p \in F_i$ .

Por tanto,  $F_i = F_i^p$ . Luego,  $F_i$  es un campo perfecto.

De (2): Ya sabemos que  $F_i \cap F_s = F$ . Para la otra igualdad, como  $F_i$  es un campo perfecto, entonces la extensión  $\bar{F}/F_i$  es separable, lo cual implica que  $F_i F_s = \bar{F}$ .

De (3): Sea  $K$  un campo intermedio de la extensión  $\bar{F}/F$  el cual es perfecto. Probemos que  $F_i \subseteq K$ . Sea  $\alpha \in F_i$ . Consideremos la extensión  $K(\alpha)/K$ , esta extensión es separable; por otro lado, existe un elemento  $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tal que  $\alpha^{p^t} \in F \subseteq K$ , luego la extensión  $K(\alpha)/K$  es p.i., así  $K(\alpha) = K$  lo cual implica que  $\alpha \in K$ .

Por ende,  $F_i \subseteq K$ . ■

**Corolario 4.3.2**

Sea  $F$  un campo con  $\text{car}(F) = p > 0$ . Entonces, la intersección de cualquier familia de subcampos

de  $\bar{F}$  que contienen a  $F$  es un campo perfecto.

### Demostración:

Es inmediata. ■

### Definición 4.3.3

Sea  $E/F$  una extensión finita arbitraria. Se define el **grado de inseparabilidad de la extensión**  $E/F$  como:

$$[E : F]_i := \frac{[E : F]}{[E : F]_s}$$

Notemos que si  $\text{car}(F) = 0$ , entonces  $[E : F]_i = 1$ . Si  $\text{car}(F) = p > 0$ , entonces  $[E : F]_i = p^t$ , para algún  $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ .

### Observación 4.3.4

Sea  $E/F$  una extensión finita. Si  $K$  es un campo intermedio de la extensión  $E/F$ , entonces

$$[E : F]_i = [E : K]_i \cdot [K : F]_i$$

Si  $E/F$  es una extensión finita con  $\text{car}(F) = p > 0$ , entonces  $E/F$  es p.i. si y sólo si  $[E : F] = [E : F]_i$ .

### Observación 4.3.5

Sea  $E/F$  una extensión finita con  $\text{car}(F) = p > 0$ . Si  $p \nmid [E : F]$  entonces  $[E : F]_i = 1$ , es decir la extensión  $E/F$  es separable.

### Proposición 4.3.5

Sea  $F$  un campo,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta \in \bar{F}$  tales que  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  son separables sobre  $F$ . Si  $F$  es infinito entonces, existe  $\theta \in F(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta)$  tal que:

$$F(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta) = F(\theta)$$

### Demostración:

Procederemos por inducción sobre  $n$ . Para  $n = 1$ , suponemos que tenemos la extensión  $F(\alpha_1, \beta)/F$  donde  $\alpha_1$  es separable sobre  $F$  y  $\beta$  simplemente es algebraico sobre  $F$ . Denotemos por  $f(X) = \text{irr}(\alpha_1, F, X)$  y  $g(X) = \text{irr}(\beta, F, X)$ , con  $m = \deg f$  y  $k = \deg g$ .

Sean  $\delta_1, \dots, \delta_m$  y  $\beta_1, \dots, \beta_r$  las raíces distintas de  $f(X)$  y  $g(X)$ , respectivamente, donde  $r \leq k$ . Consideremos las ecuaciones lineales siguientes:

$$\delta_1 X + \beta_1 = \delta_i X + \beta_j$$

con  $i \in \llbracket 2, m \rrbracket$  y  $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ . Si  $\delta_1$  fuera la única raíz de  $f(X)$ , esto es  $m = 1$ , entonces  $f(X) = X - \delta_1 \in F[X]$ , luego  $\alpha_1 = \delta_1 \in F$ . Por ende,  $F(\alpha_1, \beta) = F(\beta)$ . Así, basta tomar  $\theta = \beta$ .

Supongamos que  $\delta_1$  no es la única raíz de  $f(X)$ , es decir que  $m \geq 2$ . Hacemos  $\delta_1 = \alpha_1$  y  $\beta_1 = \beta$ . Se tiene que las ecuaciones anteriores están bien determinadas.

Elegimos un elemento  $a \in F$  tal que

$$\begin{aligned} a\delta_1 + \beta_1 &\neq a\delta_i + \beta_j \\ \Rightarrow a\alpha_1 + \beta &\neq a\delta_i + \beta_j \end{aligned}$$



para todo  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$  y para todo  $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ . Tal elemento existe ya que  $F$  es infinito. Definimos

$$\theta = a\delta_1 + \beta \in F(\alpha_1, \beta)$$

probemos que  $F(\alpha_1, \beta) = F(\theta)$ . Por lo de arriba se sigue que  $F(\theta) \subseteq F(\alpha_1, \beta)$ . Basta probar que  $\alpha_1, \beta \in F(\theta)$ . Para ello, consideremos el polinomio  $h(X) = g(\theta - aX) \in F(\theta)[X]$ .

Notemos que  $h(\alpha_1) = g(a\alpha_1 + \beta_1 - a\alpha_1) = g(\beta) = 0$  y,

$$\begin{aligned} h(\delta_i) &= g(\theta - a\delta_i) \\ &= g((a\delta_1 + \beta_1) - a\delta_i) \\ &\neq 0, \quad \forall i \in \llbracket 2, m \rrbracket \end{aligned}$$

pues,  $(a\delta_1 + \beta_1) - a\delta_j \neq \beta_j$  para todo  $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , es decir que nunca puede ser alguna raíz de  $g$ . Así pues,  $h$  y  $f$  tienen solamente una raíz en común, a saber,  $\alpha_1$ , donde  $h(X), f(X) \in F(\theta)[X]$ .

Sea  $d(X) \in F(\theta)[X]$  el máximo común divisor de  $h(X)$  y  $f(X)$  (el cual existe pues este anillo es dominio euclideo), donde

$$d(X) = l(X)h(X) + t(X)f(X)$$

siendo  $l(X), t(X) \in F(\theta)[X]$ . Notemos de la ecuación anterior que

$$d(\alpha_1) = 0$$

y, toda raíz de  $d(X)$  es raíz de  $f(X)$  y  $h(X)$  (pues es el M.C.D.) pero, como  $f(X)$  y  $h(X)$  tienen a  $\alpha_1$  como única raíz, entonces  $d(X)$  solo tiene como raíz a  $\alpha_1$ . Por ende,

$$d(X) = X - \alpha_1$$

(el coeficiente líder es 1 ya que  $f(X)$  es separable y  $d(X) \mid f(X)$ ). Por tanto,

$$X - \alpha_1 = l(X)h(X) + t(X)f(X) \in F(\theta)[X]$$

por tanto,  $\alpha_1 \in F(\theta)$ . En particular, como  $a \in F$  entonces  $a\alpha \in F(\theta)$ , luego

$$\beta = (a\alpha + \beta) - a\alpha = \theta - a\alpha \in F(\theta)$$

por tanto,  $\alpha_1, \beta \in F(\theta)$ . Finalmente se tiene que

$$F(\theta) = F(\alpha_1, \beta)$$

De aquí que la proposición se cumple para  $n = 1$ . Suponga que se cumple para algún  $n \in \mathbb{N}$ , probaremos que se cumple para  $n + 1$ . En efecto, sean  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in \bar{F}$  separables sobre  $F$  y  $\beta \in \bar{F}$  algebraico.

Por hipótesis de inducción, existe  $\theta_1 \in F(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta)$  tal que

$$F(\theta_1) = F(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta)$$

y, por el caso  $n = 1$  existe  $\theta \in F(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}, \beta)$  tal que

$$F(\theta) = F(\alpha_{n+1}, \theta_1)$$

luego,

$$\begin{aligned} F(\theta) &= F(\alpha_{n+1}, \theta_1) \\ &= F(\theta_1)(\alpha_{n+1}) \\ &= F(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta)(\alpha_{n+1}) \\ &= F(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}, \beta) \\ &\Rightarrow F(\theta) = F(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}, \beta) \end{aligned}$$

lo que prueba el caso  $n + 1$ . ■

---

**Corolario 4.3.3**

Sea  $F$  un campo perfecto. Entonces, toda extensión  $E/F$  finita es simple.

---

**Demostración:**

Es inmediata. ■

---

**Corolario 4.3.4**

Si  $F$  es un campo de característica cero, entonces toda extensión  $E/F$  finita es simple.

---

**Demostración:**

Todo campo de característica cero es perfecto. ■

**Ejemplo 4.3.1**

Toda extensión  $E/\mathbb{Q}$  finita es simple. En particular,  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ . En este caso,  $\alpha_1 = \sqrt{2}$  y  $\beta = \sqrt{3}$  (en realidad da igual cual elijamos ya que cualquiera de estos dos elementos son separables sobre  $\mathbb{Q}$  por ser este de característica cero). Así,

$$\alpha_1 = \delta_1 = \sqrt{2} \quad \text{y} \quad \delta_2 = -\sqrt{2}$$

además,

$$\beta = \beta_1 = \sqrt{3} \quad \text{y} \quad \beta_2 = -\sqrt{3}$$

uno de los posibles  $a \in \mathbb{Q}$  que nos sirven es  $a = 1$ , ya que las ecuaciones que tenemos son:

$$\begin{cases} \sqrt{2}X + \sqrt{3} = -\sqrt{2}X + \sqrt{3} \\ \sqrt{2}X + \sqrt{3} = -\sqrt{2}X - \sqrt{3} \end{cases}$$

siendo  $X = a = 1$  el que hace que no se cumpla la ecuación. Luego es por ello que tomamos  $\theta = 1 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ .

---

**Lema 4.3.1**

Para  $n \in \mathbb{N}$ :

$$n = \sum_{d|n \text{ y } d \geq 1} \varphi(d)$$

donde  $\varphi$  es la función de Euler.

---

**Demostración:**

Ejercicio. ■

---

**Lema 4.3.2**

Sea  $G$  un grupo abeliano finito y multiplicativo tal que la ecuación  $X^m = e$  tiene a lo más  $m$  soluciones en  $G$ . Entonces,  $G$  es grupo cíclico.

---

**Demostración:**

Ejercicio. ■

---

**Proposición 4.3.6**

Si  $F$  es un campo, entonces  $F^*$  es un grupo multiplicativo y cada subgrupo finito de  $F^*$  es cíclico.

---

**Demostración:**

Se sigue del lema anterior. ■

---

**Teorema 4.3.2 (Teorema del elemento primitivo)**

Toda extensión finita y separable de campos es simple.

---

**Demostración:**

Sea  $E/F$  una extensión finita y separable. Si  $F$  es un campo infinito, tenemos que  $E/F$  es f.g. con elementos separables y  $F$  finito. Por tanto,  $E/F$  es simple.

Si  $F$  es finito,  $E$  también es finito. Más aún,

$$|E| = n|F|$$

entonces,  $E^*$  es grupo multiplicativo abeliano y finito. Luego por una proposición anterior, es cíclico (visto como grup multiplicativo). Sea  $\theta \in E^*$  tal que

$$\begin{aligned} E^* &= \langle \theta \rangle \\ &= \left\{ \theta^t \mid t \in \mathbb{N} \right\} \end{aligned}$$

luego,  $E = F(\theta)$ . Así, la extensión  $E/F$  es simple. ■

**Observación 4.3.6**

El  $\theta$  de la proposición anterior es llamado **elemento primitivo**.

# Capítulo 5

## Teoría de Galois Finita

### 5.1. Conceptos Fundamentales

#### Observación 5.1.1

Sea  $E/F$  una extensión de campos,  $\alpha \in E$ ,  $f(X) \in E[X]$  tal que  $f(\alpha) = 0$  y  $\varphi : \overline{F} \rightarrow \overline{F}$  es un  $F$ -homomorfismo. Entonces,  $f(\varphi(\alpha)) = 0$

#### Demostración:

En efecto, notemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(0) \\ &= \varphi(f(\alpha)) \\ &= f^\varphi(\varphi(\alpha)) \\ &= f(\alpha) \end{aligned}$$

por ser  $\varphi$  un  $F$ -homomorfismo. ■

De esta observación anterior se deduce que todo  $F$ -homomorfismo manda raíces en raíces.

#### Observación 5.1.2

Sea  $F$  un campo,  $f(X) \in F[X] \setminus F$ . Supóngase que  $\deg(f(X)) = n \geq 1$ . Entonces, se tiene que en  $\overline{F}$ :

$$f(X) = \lambda(X - \alpha_n) \cdot \dots \cdot (X - \alpha_1)$$

donde  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \overline{F}$  con  $\lambda \in F$  el coeficiente líder de  $f(X)$ . Luego, los coeficientes de  $f(X)$  son los siguientes:

$$\begin{aligned} a_n &= \lambda \\ a_{n-1} &= -\lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i \\ a_{n-2} &= \lambda \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \\ &\vdots \\ a_{n-k} &= (-1)^k \lambda \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_k} \end{aligned}$$

con  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , donde  $f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$ . Luego, si  $\varphi : \overline{F} \rightarrow \overline{F}$  es un  $F$ -automorfismo (basta con que sea  $F$ -homomorfismo, pues la extensión  $\overline{F}/F$  es normal y en

extensiones normales todo  $F$ -homomorfismo es un  $F$ -automorfismo), entonces

$$\begin{aligned} f(X) &= f^\varphi(X) \\ &= \lambda(X - \varphi(\alpha_1)) \cdot \dots \cdot (X - \varphi(\alpha_n)) \\ &= \lambda(X - \alpha_1) \cdot \dots \cdot (X - \alpha_n) \\ &= f(X) \end{aligned}$$

así que  $\varphi$  lo que hace es permutar las raíces de  $f(X)$ . En particular:

$$\{\varphi(\alpha_1), \dots, \varphi(\alpha_n)\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

### Observación 5.1.3

Sea  $f(X) \in F[X] \setminus F$ .  $f(X)$  es separable si sus factores irreducibles son separables. Si  $f(X)$  es irreducible,  $f(X)$  es separable si y sólo si todas sus raíces son simples.

### Observación 5.1.4

Si  $F$  es un campo tal que  $\text{car}(F) = 0$ , entonces todo polinomio en  $f[X]$  es separable.

### Observación 5.1.5

Si  $F$  es campo tal que  $\text{car}(F) = p > 0$  y si  $f(X) \in F[X]$  es irreducible, entonces  $f(X) = \lambda(X - \alpha_1)^{p^e} \cdot \dots \cdot (X - \alpha_t)^{p^e}$ , donde  $e \geq 0$  es el exponente de inseparabilidad de  $f(X)$ .

### Observación 5.1.6

Una extensión  $E/F$  es separable si y sólo si todo elemento de  $\alpha \in E$  es separable sobre  $F$  si y sólo si para todo  $\alpha \in E$ ,  $f(X) = \text{irr}(\alpha, F, X)$  es separable.

### Observación 5.1.7

La extensión  $E/F$  es normal si y sólo si  $E$  es el campo de descomposición de una familia de polinomios  $\{f_i(X)\}_{i \in I}$  con coeficientes en  $F$  (es decir, que  $E = F(S)$  donde  $S$  es la unión de los  $S_i$  con  $i \in I$ , siendo  $S_i$  el conjunto de raíces de  $f_i(X)$  para todo  $i \in I$ ).

### Definición 5.1.1

Sea  $F$  un campo. Se tiene que  $\text{Aut}(E)$  es grupo con la composición. Si  $G < \text{Aut}(F)$ , se define el **campo fijo de  $F$  por  $G$**  como:

$$F^G = \left\{ \alpha \in F \mid \sigma(\alpha) = \alpha, \quad \forall \sigma \in G \right\}$$

### Observación 5.1.8

En las condiciones de la definición anterior, notemos que  $\emptyset \neq F^G \subseteq F$ . Más aún  $F^G$  es subcampo de  $F$ .

### Demostración:

Sean  $\alpha, \beta \in F^G$  y  $\sigma \in G$ , entonces:

$$\sigma(\alpha - \beta) = \sigma(\alpha) - \sigma(\beta) = \alpha - \beta$$

Además,

$$\sigma(\alpha \cdot \beta) = \sigma(\alpha) \cdot \sigma(\beta) = \alpha \cdot \beta$$

y,

$$1 = \sigma(1) = \sigma(\alpha \cdot \alpha^{-1}) = \sigma(\alpha) \cdot \sigma(\alpha^{-1}) = \alpha \cdot \sigma(\alpha^{-1})$$

por ende,  $\sigma(\alpha^{-1}) = \alpha^{-1}$ . Por ser  $\sigma \in G$  arbitrario se sigue  $\alpha - \beta, \alpha \cdot \beta, \alpha^{-1} \in F^G$  y, por ende, que  $F^G$  es subcampo de  $F$ . ■

**Definición 5.1.2**

Si  $E/F$  es una extensión de campos, entonces denotamos por

$$\text{Aut}_F(E) = \left\{ \sigma \in \text{Aut}(E) \mid \sigma \text{ deja fijo a } F \right\}$$

Se tiene que  $\text{Aut}_F(E) < \text{Aut}(E)$ . Decimos que  $E/F$  es de **Galois** si  $E/F$  es normal y separable. Cuando esto ocurre, expresmos:

$$\text{Gal}(E/F) = \text{Aut}_F(E)$$

y es llamado el **grupo de Galois de  $E/F$** .

**Proposición 5.1.1**

Sea  $E/F$  una extensión de campos y  $G = \text{Aut}_F(E)$ . Entonces,  $F \subseteq E^G \subsetneq E$  es una torre de campos y, las siguientes condiciones son equivalentes:

1.  $E/F$  es de Galois.
2.  $E$  es el campo de descomposición sobre  $F$  de una familia de polinomios separables (también sobre  $F$ ).
3.  $E^G = F$ .

**Demostración:**

Por definición de  $E^G$  ya se tiene que  $F \subseteq E^G \subsetneq E$  es torre de campos.

Es claro que (1)  $\iff$  (2).

(1)  $\Rightarrow$  (3) : Suponga que  $E/F$  es de Galois. Notemos que se tiene la torre de campos

$$F \subseteq E^G \subseteq E$$

Sea  $\alpha \in E^G$  con  $f(X) = \text{irr}(\alpha, F, X)$ . Sea  $\beta \in E$  un  $F$ -conjugado de  $\alpha$  (es decir que son raíces del mismo polinomio  $f(X)$ ). Entonces,  $\beta \in E$ . Sea  $\varphi : F(\alpha) \rightarrow F(\beta)$  un  $F$ -isomorfismo tal que  $\varphi(\alpha) = \beta$ . Extendemos a  $\varphi$  a un  $F$ -homomorfismo  $\sigma : E \rightarrow \overline{F}$  de  $E$  en  $\overline{F}$ . Por normalidad, esta extensión es un  $F$ -automorfismo de  $E$ , luego

$$\sigma \in G$$

así,

$$\beta = \varphi(\alpha) = \sigma(\alpha) = \alpha$$

pues,  $\alpha \in E^G$ . Puesto que  $E/F$  es separable, entonces  $f(X) = X - \alpha \in F[X]$ , luego  $\alpha \in F$ . Por tanto,  $E^G = F$ .

(3)  $\Rightarrow$  (1): Suponga que  $E^G = F$ . Sea  $\alpha \in E$  y  $f(X) = \text{irr}(\alpha, F, X)$ . Definamos:

$$A = \left\{ \sigma(\alpha) \mid \sigma \in G \right\}$$

$A$  es un subconjunto de  $E$  no vacío. Notemos que  $A$  es un conjunto de raíces de  $f(X)$  de  $E$ . Luego,  $A$  es finito. así:

$$|A| \leq \deg(f(X))$$

tomemos  $m = |A|$  y

$$A = \{\sigma_1(\alpha), \dots, \sigma_m(\alpha)\}$$

Sea  $\theta \in G$ . Tenemos que

$$|\{(\theta \circ \sigma_1)(\alpha), \dots, (\theta \circ \sigma_m)(\alpha)\}| = m$$

(por ser biyección) con el conjunto de adentro tal que  $\{(\theta \circ \sigma_1)(\alpha), \dots, (\theta \circ \sigma_m)(\alpha)\} \subseteq A$ , así

$$A = \{(\theta \circ \sigma_1)(\alpha), \dots, (\theta \circ \sigma_m)(\alpha)\}$$

es decir que  $\theta$  permuta a los elementos de  $A$  para todo  $\theta \in G$ . Definimos

$$g(X) = (X - \sigma_1(\alpha)) \cdot \dots \cdot (X - \sigma_m(\alpha)) \in E[X]$$

Por lo anterior para cada  $\theta \in G$ ,

$$g^\theta(X) = g(X)$$

por tanto,  $g(X) \in E^G[X] = F[X]$  donde  $g(\alpha) = 0$ . Por tanto,  $f(X) \mid g(X) \Rightarrow f(X)$  es separable sobre  $F$  y todas las raíces de  $f(X)$  están en  $E$  (más aún,  $g(X) = f(X)$ ). De esta forma se sigue  $E/F$  es normal y separable, es decir, de Galois. ■

### Proposición 5.1.2

Sea  $E/F$  una extensión de campos y  $G = \text{Aut}_F(E)$ . Si  $E/F$  es normal, entonces

1.  $E^G/F$  es puramente inseparable.
2. Si  $F_S$  es la cerradura separable de  $F$  en  $E$ , entonces  $E^G F_S = E$  y  $E^G \cap F_S = F$ .
3. Si  $\alpha \in E^G \setminus F$ , entonces  $\text{car}(F) = p > 0$  y existe  $t > 1$  tal que  $\alpha^{p^t} \in F$ .

**Demostración:** ■

### Observación 5.1.9

En el caso de que  $E^G/F$  sea puramente inseparable y  $\text{car}(F) = 0$ , entonces la extensión también sería separable. Por ende, la única forma en que suceda esto es que  $E^G = F$ .

### Proposición 5.1.3

Sea  $E/F$  una extensión finita. Entonces,

1.  $|\text{Aut}_F(E)| \leq [E : F]$ .
2.  $|\text{Aut}_F(E)| = [E : F]$  si y sólo si  $E/F$  es de Galois.

**Demostración:**

De (1): Ya se tiene que

$$|\text{Aut}_F(E)| \leq [E : F]_S \leq [E : F]$$

pues  $[E : F]_S$  es el número de  $F$ -homomorfismos de  $E$  en  $\overline{F}$  que dejan fijo a  $F$ .

De (2): Veamos que

$$\begin{aligned} |\text{Aut}_F(E)| = [E : F] &\iff |\text{Aut}_F(E)| = [E : F]_S = [E : F] \\ &\iff |\text{Aut}_F(E)| = [E : F]_S = [E : F] \\ &\iff E/F \text{ es normal y separable} \\ &\iff E/F \text{ es de Galois} \end{aligned}$$

pues, si  $|\text{Aut}_F(E)| = [E : F]_S$ , entonces todo  $F$ -homomorfismo de  $E$  en  $\overline{F}$  es un  $F$ -automorfismo de  $E$ . Y, si los dos índices coinciden se tiene que  $E/F$  es separable. ■

---

**Proposición 5.1.4**

Sea  $E/F$  una extensión separable tal que existe  $n \in \mathbb{N}$  que cumple

$$\forall \alpha \in E, [F(\alpha), F] \leq n$$

Entonces,  $E/F$  es finita y  $[E : F] \leq n$ .

---

**Demostración:**

Sea  $\beta \in E$  tal que

$$[F(\alpha) : F] \leq [F(\beta) : F], \quad \forall \alpha \in E$$

En particular,  $[F(\beta) : F] \leq n$ . Afirmamos que  $E = F(\beta)$ . En efecto, supóngase que  $E \neq F(\beta)$ . Sea  $\alpha \in E$  tal que  $\alpha \notin F(\beta)$ , luego

$$F \subseteq F(\beta) \subsetneq F(\alpha, \beta) \subseteq E$$

es una torre de campos de tal manera que  $E(\alpha, \beta)/F$  es separable y finita (por ser finitamente generada y ser algebraica). Por el teorema del elemento primitivo existe  $\theta \in F(\alpha, \beta)$  tal que

$$F(\alpha, \beta) = F(\theta)$$

luego,

$$[F(\beta) : F] < [F(\theta) : F] \#_c$$

por la elección de  $\beta \in E$ . Por tanto,  $F(\beta) = E$ . Luego

$$[E : F] \leq n$$

donde  $E/F$  es finita. ■

---

**Teorema 5.1.1 (Teorema de Artín)**

Sea  $E$  un campo arbitrario y  $G$  un grupo finito de automorfismos de  $F$ . Entonces,  $E/E^G$  es una extensión de Galois finita tal que

$$\text{Aut}_{E^G}(E) = G$$

y,  $[E : E^G] = |G|$ .

---

**Demostración:**

Sea  $\alpha \in E$  y

$$A_\alpha = \left\{ \sigma(\alpha) \mid \sigma \in G \right\} \subseteq E$$

Tenemos que  $|A_\alpha| \leq |G| < \infty$ . Si  $m = |A_\alpha|$ , expresamos

$$A_\alpha = \{\sigma_1(\alpha), \dots, \sigma_m(\alpha)\}$$

Notemos que para todo  $\theta \in G$ :

$$\{\theta(\sigma_1(\alpha)), \dots, \theta(\sigma_m(\alpha))\} = A_\alpha$$

es decir, los elementos de  $G$  permutan a los elementos de  $A_\alpha$ . Definimos

$$g(X) = (X - \sigma_1(\alpha)) \cdot \dots \cdot (X - \sigma_m(\alpha)) \in E[X]$$

si  $\theta \in G$ , se tiene que

$$g^\theta(X) = g(X)$$



(por la observación anterior). Luego,  $g(X) \in E^G[X]$ . Si  $f_\alpha(X) = \text{irr}(\alpha, E^G, X)$ , entonces  $f_\alpha(X) \mid g(X)$  en  $E^G[X]$ . Luego,  $f_\alpha(X)$  es separable (pues todas las raíces de  $g(X)$  son simples) y todos los  $E^G$  conjugados de  $\alpha$  pertenecen a  $E$ . Por lo tanto,  $E/E^G$  es normal y separable con

$$[E^G(\alpha) : E^G] = \deg(f_\alpha(X)) \leq m = |A_\alpha| \leq |G|$$

Por tanto, de la proposición anterior se sigue que

$$[E : E^G] \leq |G|$$

pues la extensión  $E/E^G$  es de Galois finita. Además,

$$|\text{Aut}_{E^G}(E)| = [E : E^G] \leq |G| \leq |\text{Aut}_{E^G}(E)|$$

pues,  $G \subseteq \text{Aut}_{E^G}(E)$ . Por tanto,

$$\text{Aut}_{E^G}(E) = G$$

y,  $[E : E^G] = |G|$ . ■

### Teorema 5.1.2 (Teorema Fundamental de la Teoría de Galois finita)

Sea  $E/F$  una extensión finita de Galois, con  $G = \text{Gal}(E/F)$ . Entonces,

- I. Si  $K$  es un campo intermedio de la extensión  $E/F$ , entonces  $E/K$  es de Galois, y si  $H = \text{Gal}(E/K)$  se tiene que  $K = E^H$  y  $[E : K] = |H|$ .
- II. Si  $H < G$  entonces  $E/E^H$  es de Galois con  $\text{Gal}(E/E^H) = H$  y  $[E : E^H] = |H|$ .
- III. Existe una biyección entre el conjunto de campo intermedios de la extensión  $E/F$  y el conjunto de subgrupos de  $G$ , a saber:

$$K \mapsto \text{Gal}(E/K)$$

cuya inversa está dada por la correspondencia:

$$H \mapsto E^H$$

- IV. Si  $K$  es un campo intermedio de la extensión  $E/F$  y  $\sigma \in G$ , entonces  $\sigma(K)$  es un campo intermedio de la extensión  $E/F$  y  $\text{Gal}(E/\sigma(K)) = \sigma^{-1}\text{Gal}(E/K)\sigma$  ( $\sigma(K)$  es llamado el **conjugado de  $K$** ).
- V. Sea  $K$  un campo intermedio de la extensión  $E/F$ . Entonces,  $K/F$  es de Galois si y sólo si  $\text{Gal}(E/K) \triangleleft G$ . Si  $K/F$  es normal entonces la función

$$\begin{aligned} \psi : G &\rightarrow \text{Gal}(K/F) \\ \sigma &\mapsto \sigma|_K \end{aligned}$$

es un epimorfismo tal que  $\ker(\psi) = \text{Gal}(E/K)$ , es decir

$$\text{Gal}(E/F) / \text{Gal}(E/K) = G / \text{Gal}(E/K) \cong \text{Gal}(K/F)$$

### Demostración:

De (i) y (ii): Es inmediato del teorema de Artín y de un resultado anterior.

De (iii): Sea  $\mathcal{C}$  el conjunto de campos intermedios de la extensión  $E/F$ , y  $\mathcal{G}$  el conjunto de subgrupos de  $G$ . Denotemos por

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{G} \\ K &\mapsto \text{Gal}(E/K) \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}\Psi : \mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{C} \\ H &\mapsto E^H\end{aligned}$$

Tenemos que para cada  $K \in \mathcal{C}$ :

$$\begin{aligned}\Psi \circ \Phi(K) &= \Psi(\Phi(K)) \\ &= \Psi(\text{Gal}(E/K)) \\ &= E^{\text{Gal}(E/K)} \\ &= K \\ &= 1_{\mathcal{C}}(K) \\ \therefore \Psi \circ \Phi &= 1_{\mathcal{C}}\end{aligned}$$

Por otro lado, sea  $H \in \mathcal{G}$ , entonces

$$\begin{aligned}\Phi \circ \Psi(H) &= \Phi(\Psi(H)) \\ &= \Phi(E^H) \\ &= \text{Gal}(E/E^H) \\ &= H \\ &= 1_{\mathcal{G}}(H) \\ \therefore \Phi \circ \Psi &= 1_{\mathcal{G}}\end{aligned}$$

luego  $\Phi$  y  $\Psi$  son biyecciones siendo una la inversa de la otra.

De (iv): Sea  $K$  un campo intermedio de la extensión  $E/F$  y  $\sigma \in G$ . Entonces, es inmediato que  $\sigma(K)$  es campo intermedio de la extensión  $E/F$ , pues

$$F = \sigma(F) \subseteq \sigma(K) \subseteq \sigma(E) = E$$

Luego,  $E/\sigma(K)$  es de Galois. Probemos que:

$$\text{Gal}(E/\sigma(K)) = \sigma \text{Gal}(E/K) \sigma^{-1}$$

es decir, por (iii):

$$\begin{aligned}E^{\text{Gal}(E/\sigma(K))} &= E^{\sigma \text{Gal}(E/K) \sigma^{-1}} \\ \iff \sigma(K) &= E^{\sigma \text{Gal}(E/K) \sigma^{-1}}\end{aligned}$$

Sea  $\beta \in E$  y elegimos  $\alpha \in E$  tal que  $\beta = \sigma(\alpha)$  (por ser  $\sigma$  un  $F$ -automorfismo de  $E$ ). Supóngase que  $\beta \in \sigma(K)$ , entonces  $\alpha \in K$ , y para cada  $\theta \in \text{Gal}(E/K)$  se tiene:

$$\begin{aligned}(\sigma \circ \theta \circ \sigma^{-1})(\beta) &= \sigma(\theta(\sigma^{-1}(\beta))) \\ &= \sigma(\theta(\alpha)) \\ &= \sigma(\alpha) \\ &= \beta\end{aligned}$$

pues  $\alpha \in K$  y  $\theta$  deja fijo a  $K$ . Por tanto,  $\beta \in E^{\sigma \text{Gal}(E/K) \sigma^{-1}}$ . Así.

$$\sigma(K) \subseteq E^{\sigma \text{Gal}(E/K) \sigma^{-1}}$$

Por otro lado, si  $\beta \in E^{\sigma \text{Gal}(E/K) \sigma^{-1}}$  entonces

$$\begin{aligned}\sigma \circ \theta \circ \sigma^{-1}(\beta) &= \beta, \quad \forall \theta \in \text{Gal}(E/K) \\ \Rightarrow \sigma(\theta(\alpha)) &= \sigma(\alpha), \quad \forall \theta \in \text{Gal}(E/K) \\ \Rightarrow \theta(\alpha) &= \alpha, \quad \forall \theta \in \text{Gal}(E/K) \\ \Rightarrow \alpha &\in E^{\text{Gal}(E/K)} = K \\ \Rightarrow \beta &= \sigma(\alpha) \in \sigma(K)\end{aligned}$$

por tanto,  $E^{\sigma \text{Gal}(E/K) \sigma^{-1}} \subseteq \sigma(K)$ .

De ambas contenciones se sigue que

$$\sigma(K) = E^{\sigma \text{Gal}(E/K) \sigma^{-1}}$$

es decir que

$$\text{Gal}(E/\sigma(K)) = \sigma \text{Gal}(E/K) \sigma^{-1}$$

De (v): Probaremos la doble implicación.

$\Rightarrow$ ) : Suponga que  $K/F$  es normal (es decir, que es de Galois pues es lo único que falta). Probaremos que para todo  $\sigma \in G$ :

$$\sigma \text{Gal}(E/K) \sigma^{-1} = \text{Gal}(E/K)$$

ya se sabe que

$$\sigma \text{Gal}(E/K) \sigma^{-1} = \text{Gal}(E/\sigma(K)), \quad \forall \sigma \in G$$

pero, como  $\sigma|_K : K \rightarrow \overline{F}$  es un  $F$ -homomorfismo que deja fijo a  $F$ , se tiene que  $\sigma|_K$  es un  $F$ -automorfismo de  $K$  en  $K$  (por ser  $K/F$  normal), luego se tiene que

$$\sigma \text{Gal}(E/K) \sigma^{-1} = \text{Gal}(E/K), \quad \forall \sigma \in G$$

así,  $\text{Gal}(E/K) \triangleleft G$ .

$\Leftarrow$ ) : Suponga que  $\text{Gal}(E/K) \triangleleft G$ . Sea  $\theta$  un  $F$ -homomorfismo de  $K$  en  $F$ . Probemos que  $\theta(K) = K$ , es decir que  $\theta$  es un  $F$ -automorfismo de  $K$ . Para esto, extendemos  $\theta$  a un  $F$ -automorfismo de  $E$  (pues  $E/F$  es de Galois, en particular normal) y la denotamos por  $\sigma$ . Se tiene que  $\sigma \in G$  y,

$$\begin{aligned} \text{Gal}(E/K) &= \sigma \text{Gal}(E/K) \sigma^{-1} \\ &= \text{Gal}(E/\sigma(K)) \\ \Rightarrow \Phi(K) &= \Phi(\sigma(K)) \\ \Rightarrow K &= \sigma(K) \\ \Rightarrow K &= \theta(K) \end{aligned}$$

Por tanto,  $K/F$  es normal.

Por otro lado, supongamos que  $K/F$  es normal, y tomamos la función  $\psi : G \rightarrow \text{Gal}(K/F)$  tal que  $\sigma \mapsto \sigma|_K$ . Esta función está bien definida. Hay que verificar tres cosas:

- **$\sigma$  es homomorfismo:** Sean  $\sigma, \sigma_1 \in G$ , entonces

$$\begin{aligned} \psi(\sigma \circ \sigma_1) &= (\sigma \circ \sigma_1)|_K \\ &= (\sigma|_K) \circ (\sigma_1|_K), \text{ pues la extensión } K/F \text{ es normal} \\ &= \psi(\sigma) \circ \psi(\sigma_1) \end{aligned}$$

- **$\ker(\psi) = \text{Gal}(E/K)$ :** Sea  $\sigma \in G$ . Veamos que

$$\begin{aligned} \sigma \in \ker(\psi) &\iff \psi(\sigma) = 1_K \\ &\iff \sigma|_K = 1_K \\ &\iff \sigma(\alpha) = \alpha, \quad \forall \alpha \in K \\ &\iff \sigma \in \text{Gal}(E/K) \\ \therefore \ker(\psi) &= \text{Gal}(E/K) \end{aligned}$$

- $\psi$  es epimorfismo: Por supuesto,

$$\psi(G) < \text{Gal}(K/F)$$

y debemos probar que son iguales. Sea  $\theta \in \text{Gal}(K/F)$ , extendemos  $\theta$  a un  $F$ -automorfismo de  $E$  digamos  $\sigma$ , se tiene que

$$\psi(\sigma) = \sigma|_K = \theta$$

luego,  $\psi(\sigma) \in \psi(G)$ . De forma inmediata se sigue la igualdad.

Por el P.T.I,  $\psi$  induce un isomorfismo  $\bar{\psi} : G/\text{Gal}(E/K) \rightarrow \text{Gal}(K/F)$  tal que  $\sigma\text{Gal}(E/K) \mapsto \psi(\sigma) = \sigma|_K$ . ■

### Proposición 5.1.5

Sea  $E/F$  una extensión de Galois finita, y  $K, L$  campos intermedios de la extensión  $E/F$ . Denotemos por  $H = \text{Gal}(E/K)$  e  $I = \text{Gal}(E/L)$ . Entonces,

- I.  $K \subseteq L$  si y sólo si  $I \subseteq H$ .
- II.  $\text{Gal}(E/KL) = H \cap I$ .
- III.  $E^{\langle H \cup I \rangle} = E^H \cap E^I$ .

### Demostración:

De (i): Supóngase que  $K \subseteq L$ . Si  $\sigma \in I = \text{Gal}(E/L)$  entonces  $\sigma(\alpha) = \alpha$  para todo  $\alpha \in L$  donde  $K \subseteq L$ , luego  $\sigma(\alpha) = \alpha$  para todo  $\alpha \in K$ , es decir que  $\sigma \in H = \text{Gal}(E/K)$ . Así,  $I \subseteq H$ .

Recíprocamente se tiene que  $I \subseteq H$ . Por demostrar que  $E^H = K \subseteq L = E^I$ . En efecto, sea  $\alpha \in E^H$  entonces,  $\sigma(\alpha) = \alpha$  para todo  $\sigma \in H$ , donde  $I \subseteq H$ , luego  $\sigma(\alpha) = \alpha$  para todo  $\sigma \in I$ . Así,  $\alpha \in E^I = L$ . Por tanto,  $K \subseteq L$ .

De (ii): Debemos probar que  $\text{Gal}(E/KL) = \text{Gal}(E/K) \cap \text{Gal}(E/L)$ . Si  $\sigma \in \text{Gal}(E/K) \cap \text{Gal}(E/L)$  entonces  $\sigma(\alpha) = \alpha$  para todo  $\alpha \in K$  y que  $\sigma(\beta) = \beta$  para todo  $\beta \in L$ . Luego  $\sigma(\gamma) = \gamma$  para todo  $\gamma \in KL$ . Por tanto,  $\sigma \in \text{Gal}(E/KL)$ . Así,  $H \cap I \subseteq \text{Gal}(E/KL)$ .

La recíproca es inmediata pues  $K, L \subseteq KL$ . Se sigue entonces que

$$\text{Gal}(E/KL) = H \cap I$$

De (iii): Si  $\alpha \in E^{\langle H \cup I \rangle}$ , luego  $\sigma(\alpha) = \alpha$  para todo  $\sigma \in \langle H \cup I \rangle$ . En particular,  $\sigma(\alpha) = \alpha$  para todo  $\sigma \in I$  y  $\theta(\alpha) = \alpha$  para todo  $\theta \in H$ . Por tanto,  $\alpha \in E^H \cap E^I$ . Se sigue entonces que  $E^{\langle H \cup I \rangle} \subseteq E^H \cap E^I$ .

Para la otra contención, si  $\alpha \in E^H \cap E^I$  entonces  $\sigma(\alpha) = \alpha$  para todo  $\sigma \in H$  y  $\theta(\alpha) = \alpha$  para todo  $\theta \in I$ . Recordemos ahora que

$$\langle H \cup I \rangle = \left\{ \gamma \in \text{Gal}(E/F) \mid \gamma = \gamma_1^{\epsilon_1} \circ \cdots \circ \gamma_t^{\epsilon_t} \text{ donde } \gamma_i \in H \cup I, \epsilon_i \in \{-1, 1\} \text{ con } t \in \mathbb{N} \right\}$$

Por tanto,

$$\gamma(\alpha) = \alpha, \quad \forall \gamma \in \langle H \cup I \rangle$$

Se sigue que

$$E^H \cap E^I \subseteq E^{\langle H \cup I \rangle}$$

Por la otra contención se sigue la igualdad. ■

**Observación 5.1.10**

Si  $E/F$  es una extensión de Galois finita con  $G = \text{Gal}(E/F)$ , entonces  $E^G = F$  y  $E^{\langle e \rangle} = E$  (siendo  $e$  la identidad de  $G$ ).

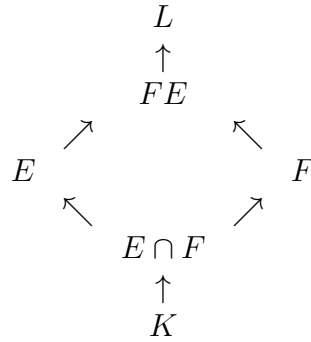
$$\begin{array}{ccccc}
 E & = & E^{\langle e \rangle} & \longleftarrow & \langle e \rangle \\
 | & & & & \cap \\
 L & = & E^I & \longleftarrow & I \\
 | & & & & \cap \\
 K & = & E^H & \longleftarrow & H \\
 | & & & & \cap \\
 F & = & E^G & \longleftarrow & G
 \end{array}$$

**Proposición 5.1.6**

Sean  $E/K$  y  $F/K$  extensiones de campos con  $E$  y  $F$  contenidos en un campo común  $L$ . Supóngase que la extensión  $E/K$  es de Galois finita. Entonces, las extensiones  $FE/F$  y  $E/E \cap F$  son extensiones de Galois finitas cuyos grupos de Galois son isomorfos. En particular, se tiene que  $[FE : F] \mid [E : K]$ .

**Demostración:**

Observemos antes el diagrama:



Es claro que las extensiones  $FE/F$  y  $F/E \cap F$  son de Galois finitas. Probemos que

$$\text{Gal}(FE/F) \cong \text{Gal}(E/E \cap F)$$

Sea  $\varphi : \text{Gal}(FE/F) \rightarrow \text{Gal}(E/E \cap F)$  tal que  $\sigma \mapsto \sigma|_E$ . Es claro que  $\sigma$  está bien definida por ser la extensión  $E/E \cap F$  normal y dado que deja fijo a los elementos de  $F$ , deja fijos a los de  $E \cap F$ . Es claro que  $\varphi$  es homomorfismo. Dado  $\sigma \in \text{Gal}(FE/F)$ , tenemos que

$$\begin{aligned}
 \sigma \in \ker(\varphi) &\iff \varphi(\sigma) = e \\
 &\iff \sigma|_E = 1_E \\
 &\iff \sigma(\alpha) = \alpha, \quad \forall \alpha \in E \\
 &\iff \sigma(\alpha) = \alpha, \quad \forall \alpha \in E \text{ pues } \sigma \text{ deja fijo a todo } F \\
 &\iff \sigma = 1_{FE}
 \end{aligned}$$

por tanto,  $\ker(\varphi) = \langle e \rangle$ . Sea  $H = \varphi(\text{Gal}(FE/F)) < \text{Gal}(E/E \cap F)$ . Probaremos que  $H = \text{Gal}(E/E \cap F)$ , es decir

$$E^H = E \cap F$$

Es claro que  $E \cap F \subseteq E^H$ . Sea  $\alpha \in E^H \subseteq E$ , entonces

$$\begin{aligned} \theta(\alpha) &= \alpha, \quad \forall \theta \in H \\ \Rightarrow \exists \sigma \in \text{Gal}(FE/F) \text{ tal que } \sigma|_E &= \theta \text{ y } \sigma(\alpha) = \alpha, \quad \forall \theta \in H \\ &\Rightarrow \sigma(\alpha) = \alpha, \quad \forall \sigma \in H \\ &\Rightarrow \alpha \in FE^{\text{Gal}(FE/F)} = F \\ &\Rightarrow \alpha \in E \cap F \end{aligned}$$

pues  $\varphi$  es una función inyectiva. Por tanto,

$$E^H \subseteq E \cap F$$

Se sigue que  $E^H = E \cap F$ . Así pues,

$$\text{Gal}(FE/F) \xrightarrow{\varphi} \text{Gal}(E/E \cap F)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} [E : K] &= [E : E \cap F][E \cap F : K] \\ &= |\text{Gal}(E/E \cap F)| [E \cap F : K] \\ &= |\text{Gal}(FE/F)| [E \cap F : K] \\ &= [FE : F][E \cap F : K] \\ &\Rightarrow [FE : F] \mid [E : K] \end{aligned}$$

■

### Proposición 5.1.7

Sean  $E/K$  y  $F/K$  extensiones de Galois finitas contenidas en un campo común. Entonces,  $EF/K$  es una extensión de Galois finita, donde

$$\text{Gal}(EF/K) \hookrightarrow \text{Gal}(E/K) \times \text{Gal}(F/K)$$

si  $E \cap F = K$ , entonces

$$\text{Gal}(EF/K) \cong \text{Gal}(E/K) \times \text{Gal}(F/K)$$

### Demostración:

Es claro que  $EF/K$  es de Galois finita. Definimos  $\varphi : \text{Gal}(EF/K) \rightarrow \text{Gal}(E/K) \times \text{Gal}(F/K)$  dada por:

$$\sigma \mapsto (\sigma|_E, \sigma|_F)$$

es claro que  $\varphi$  está bien definida (por ser las extensiones  $E/K$  y  $F/K$  son de Galois, en particular normales) y es homomorfismo. Sea  $\sigma \in \text{Gal}(EF/K)$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \sigma \in \ker(\varphi) &\iff \varphi(\sigma) = e \\ &\iff (\sigma|_E, \sigma|_F) = (1_E, 1_F) \\ &\iff \sigma(\alpha) = \alpha, \quad \forall \alpha \in EF \\ &\iff \sigma = 1_{EF} \end{aligned}$$

por tanto,  $\ker(\varphi) = \langle e \rangle$ . Por lo tanto,  $\varphi$  es monomorfismo.

Por otro lado, suponemos que  $E \cap F = K$  y probemos que  $\varphi$  es isomorfismo. Sea  $\sigma_1 \in \text{Gal}(E/K) \cong \text{Gal}(EF/F)$ , con lo cual existe  $\sigma \in \text{Gal}(EF/F)$  tal que

$$\sigma|_E = \sigma_1 \quad \text{y} \quad \sigma|_F = 1_F$$

de manera similar, si  $\sigma_2 \in \text{Gal}(F/K) \cong \text{Gal}(EF/E)$ , existe  $\theta \in \text{Gal}(EF/E)$  tal que

$$\theta|_E = \sigma_2 \quad \text{y} \quad \sigma|_E = 1_E$$

Así que, si  $(\sigma_1, \sigma_2) \in \text{Gal}(E/K) \times \text{Gal}(F/K)$  se tiene que  $\sigma, \theta \in \text{Gal}(EF/K)$  y,

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma \circ \theta) &= \varphi(\sigma) \circ \varphi(\theta) \\ &= (\sigma|_E, \sigma|_F) \circ (\theta|_E, \theta|_F) \\ &= (\sigma_1, 1_F) \circ (1_E, \sigma_2) \\ &= (\sigma_1, \sigma_2) \end{aligned}$$

así,  $\varphi$  es epimorfismo. Se sigue que  $\text{Gal}(EF/K) \stackrel{\varphi}{\cong} \text{Gal}(E/K) \times \text{Gal}(F/K)$ . ■

### Corolario 5.1.1

Sean  $E_i/K$  extensiones de Galois finitas con  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  donde  $G_i$  es el grupo de Galois de la extensión  $E_i/K$  para todo  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Si para todo  $j \in \llbracket 2, n \rrbracket$  se tiene que

$$(E_1 \cdots E_{j-1}) \cap E_j = K$$

entonces,  $E_1 \cdots E_j/K$  es una extensión de Galois finita tal que

$$\text{Gal}(E_1 \cdots E_n/K) \cong G_1 \times \cdots \times G_n$$

### Demostración:

La demostración es por inducción sobre  $n$  aplicando la proposición anterior. ■

### Proposición 5.1.8

Sea  $E/K$  una extensión de Galois tal que el grupo de Galois de  $E/K$  se puede expresar como un producto directo de grupos de la forma  $G_1 \times \cdots \times G_n$ . Entonces, existen  $n$  extensiones de Galois finitas  $E_1/K, \dots, E_n/K$  tales que

$$\text{Gal}(E_i/K) = G_i$$

y, para todo  $j \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$ :

$$(E_1 \cdots E_j) \cap E_j = K$$

y

$$E = E_1 \cdots E_n$$

### Demostración:

Para cada  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tomemos:

$$H_i = G_1 \times \cdots \times G_{i-1} \times \langle e_i \rangle \times \cdots \times G_n$$

Se tiene que  $H_i \triangleleft G_1 \times \cdots \times G_n$ , y  $E_i = E^{H_i}$ . Tenemos que las extensiones  $E/E_i$ , y  $E_i/K$  son de Galois finitas tales que:

$$\text{Gal}(E_i/K) \cong G/H_i \cong G_i$$

Además,

$$E_1 \cap E_2 = E^{H_1} \cap E^{H_2} = E^{\langle H_1 \cup H_2 \rangle} = E^G = K$$

con lo cual  $\text{Gal}(E_1 E_2/K) \cong G_1 \times G_2$ . También,

$$E_1 E_2 \cap E_3 = E^{H_1} E^{H_2} \cap E^{H_3} = E^{H_1 \cap H_2} \cap E^{H_3} = E^{\langle H_1 \cap H_2, H_3 \rangle} = E^G = K$$

luego,  $\text{Gal}(E_1 E_2 E_3 / K) \cong G_1 \times G_2 \times G_3$ . Por inducción, tenemos que para todo  $j \in \llbracket 2, n \rrbracket$ :

$$(E_1 \cdots E_{j-1}) \cap E_j = K$$

y,  $E_1 \cdots E_j / K$  es de Galois tal que

$$\text{Gal}(E_1 \cdots E_j / K) \cong G_1 \times \cdots \times G_j$$

En particular,

$$\text{Gal}(E \cdots E_n / K) \cong G_1 \times \cdots \times G_n = \text{Gal}(E / K)$$

es decir que  $E = E \cdots E_n$ . ■

Si tenemos una extensión  $E/F$  normal y finita, sabemos que al ser normal,  $E$  debe ser el campo de descomposición de una familia de polinomios con coeficientes en  $F$ . Al ser finita, debe ser una cantidad finita de polinomios, por lo que podemos tomar el producto de todos y al final se tiene que  $E$  es campo de descomposición de un polinomio.

Si más aún la extensión  $E/F$  es separable, entonces al ser normal y finita, debe tenerse  $f$  es separable, es decir que su descomposición en polinomios irreducibles sea tal que cada uno de éstos sea separable, esto es que tenga raíces simples.

Esto anterior motiva a la siguiente definición.

### Definición 5.1.3

Sea  $F$  un campo y  $f(X) \in F[X] \setminus F$ . Denotamos por  $\overline{F}$  la cerradura algebraica de  $F$ . Sean  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \overline{F}$  todas las raíces distintas de  $f(X)$  y sea  $E$  el campo de descomposición de  $f(X)$  sobre  $F$ , es decir

$$E = F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

Así que,  $E/F$  es una extensión normal. Denotemos por

$$G = \text{Aut}_F(E) = \text{Aut}(E/F)$$

$G$  es llamado el **grupo de automorfismos de  $f(X)$  sobre  $F$**  y en ocasiones se denota por  $G(f)$  ó  $G_f$ . Si  $f(X)$  es separable, entonces decimos que  $G_f$  es el **grupo de Galois del polinomio  $f(X)$** .

### Definición 5.1.4

Sea  $n \in \mathbb{N}$  y  $G < S_n$  (siendo  $S_n$  el grupo simétrico de grado  $n$ ). Decimos que  $G$  es **transitivo** si para todo  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  existe  $\sigma \in G$  tal que  $\sigma(i) = j$ .

---

### Teorema 5.1.3

Sea  $F$  un campo,  $f(X) \in F[X] \setminus F$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \overline{F}$  las raíces distintas de  $f(X)$ ,  $E = F(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ ,  $n = \deg(f)$  y  $G = G_f = \text{Aut}_F(E)$ . Entonces:

- I.  $G$  es isomorfo a un subgrupo de  $S_m$  para algún  $m \in \mathbb{N}$ .
  - II. Si  $f(X)$  es irreducible y separable, entonces  $n \mid |G|$  y  $G$  es isomorfo a un subgrupo transitivo del grupo simétrico  $S_n$ .
- 

### Demostración:

De (i): Consideremos  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \overline{F}$  las raíces distintas de  $f(X)$ . Si  $\sigma \in G$  entonces  $\sigma$  permuta al conjunto  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ , luego  $\sigma$  puede ser considerado como un elemento de  $S_m$ .



Definimos:

$$\begin{aligned}\Phi : G &\rightarrow S_m \\ \sigma &\mapsto \sigma|_{\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}}\end{aligned}$$

es claro que  $\Phi$  es un homomorfismo. Sea  $\sigma \in G$ , entonces

$$\begin{aligned}\sigma \in \ker(\Phi) &\iff \Phi(\sigma) = e \\ &\iff \sigma|_{\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}} = id_{\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}} \\ &\iff \sigma(\alpha_i) = \alpha_i, \quad \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket \\ &\iff \sigma(\beta) = \beta, \quad \forall \beta \in E \\ &\iff \sigma = id_E\end{aligned}$$

por tanto,  $\ker(\Phi) = \langle e \rangle$ . Así,  $\Phi : G \rightarrow S_m$  es monomorfismo.

De (ii): Bajo estas condiciones la extensión  $E/F$  es de Galois (por ser normal y ser  $f(X)$  separable) y finita (por ser algebraica y finitamente generada), donde

$$\text{Gal}(E/F) = G = G_f$$

Además,  $m = n$ . Por (i) tenemos que  $G$  es isomorfo a un subgrupo de  $S_n$ , es decir  $G \hookrightarrow S_n$ . tal que  $\sigma \mapsto \sigma|_{\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}}$ .

Sea  $\alpha$  una raíz de  $f(X)$ , entonces se tiene que  $F(\alpha)$  es un campo intermedio de la extensión  $E/F$  con  $[F(\alpha) : F] = \deg(\text{irr}(\alpha, F, X)) = \deg(f(X)) = n$ . Luego,

$$|G| = |\text{Gal}(E/F)| = [E : F] = [E : F(\alpha)] \cdot [F(\alpha) : F] = n \cdot [E : F(\alpha)]$$

por tanto,  $n \mid |G|$ . Finalmente, sean  $\alpha_i$  y  $\alpha_j$  raíces de  $f(X)$  ( $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ). Notemos que por hipótesis,  $\alpha_i$  y  $\alpha_j$  son  $F$ -conjugados. Luego, existe un  $F$ -isomorfismo  $\varphi : F(\alpha_i) \rightarrow F(\alpha_j)$  tal que  $\varphi(\alpha_i) = \alpha_j$ .

Extendemos  $\varphi$  a un  $F$ -homomorfismo  $\sigma$  de  $E$  en  $\overline{F}$ . Como  $E/F$  es normal, entonces  $\sigma$  es un  $F$ -automorfismo de  $E$  tal que  $\sigma|_{\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}}(\alpha_i) = \sigma(\alpha_i) = \varphi(\alpha_i) = \alpha_j$ .

Por tanto,  $G$  es transitivo. ■

#### Observación 5.1.11

Notemos que la función  $\Phi$  no necesariamente es isomorfismo, ya que todo elemento  $\sigma \in G$  sólo permuta a  $F$ -conjugados, y puede que  $f(X)$  sea producto de polinomios irreducibles, luego no todas las raíces de  $f(X)$  serán  $F$ -conjugadas.

#### Proposición 5.1.9

En las condiciones del teorema anterior, suponemos que  $\deg(f(X)) = 2$  con  $f(X)$  irreducible y separable de  $F[X]$ . Entonces  $G \cong S_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

#### Demostración:

Inmediata del teorema anterior. ■

#### Ejemplo 5.1.1

Considere un campo  $F$  y sea  $f(X)$  el polinomio tal que  $\deg(f(X)) = 2$ . Se tienen dos casos:

I.  $f(X) = \lambda(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)$ . Se tienen dos casos.

i)  $\alpha_1 \in F$  implica que  $\alpha_2 \in F$  (vea el desarrollo del producto en  $f(X)$ ).

II.  $f(X) = \lambda(X - \alpha)^2$ . Notemos que

$$f(X) = \lambda X^2 - 2\lambda\alpha X + \lambda\alpha^2$$

si  $\text{car}(F) \neq 2$ , forzosamente debe suceder que  $\alpha \in F$ . En cambio, si  $\text{car}(F) = 2$ , puede suceder que  $\alpha \notin F$ , pero debe suceder que  $\alpha^2 \in F$ , esto es que  $\alpha$  sea puramente inseparable sobre  $F$ .

### Observación 5.1.12

Recordemos que  $S_3$  está generado por los elementos

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

es decir,

$$S_3 = \langle \sigma, \pi \mid |\sigma| = 2, |\pi| = 3, \pi\sigma = \sigma\pi^2 \rangle = \{e, \sigma, \pi, \pi^2, \sigma\pi, \sigma\pi^2\}$$

donde  $|\sigma| = |\sigma\pi| = |\sigma\pi^2| = 2$  y  $|\pi| = |\pi^2| = 3$ , luego los subgrupos de  $S_3$  son:

$$\langle e \rangle, \langle \sigma \rangle, \langle \sigma\pi \rangle, \langle \sigma\pi^2 \rangle \text{ y } \langle \pi \rangle$$

Los primeros tres no pueden ser transitivos, el tercero ya que

$$\sigma\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

tampoco el cuarto, pues

$$\sigma\pi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

y para el quinto

$$\pi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

si es grupo transitivo, pues  $\langle \pi \rangle = \{e, \pi, \pi^2\}$  (se verifica rápidamente).

Luego, los únicos subgrupos transitivos de  $S_3$  son  $\langle \pi \rangle$  y  $S_3$ .

### Corolario 5.1.2

En las condiciones del teorema anterior, si  $f(X)$  es un polinomio irreducible y separable de grado 3, entonces su grupo de automorfismos debe ser isomorfo a  $\langle \pi \rangle$  o a  $S_3$ .

### Demostración:

Inmediato de la observación anterior. ■

## 5.2. Grupo Simétrico

Debido a la naturaleza del grupo de Galois de un polinomio, resulta factible analizar al grupo simétrico  $S_n$  y sus subgrupos (en particular, a sus subgrupos transitivos), para determinar el grupo de Galois de una extensión de Galois.

### Observación 5.2.1

$\llbracket 1, n \rrbracket = \{1, n\}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Definición 5.2.1**

Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Se define al grupo  $S_n$ , como el grupo formado por todas las permutaciones de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  en sí mismo con operación binaria la composición usual de funciones.

Los elementos de  $S_n$  están denotados por:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Si  $\sigma \in S_n$  es tal que  $\sigma(i) = i$ , se dice que  $i$  **se dejado fijo por**  $\sigma$ , en caso contrario se dice que  $\sigma$  **mueve a**  $i$ . Definimos

$$M_\sigma = \{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \sigma(j) \neq j\}$$

Decimos que  $\sigma$  y  $\theta$  **son disjuntos** si

$$M_\sigma \cap M_\theta = \emptyset$$

**Proposición 5.2.1**

Si  $\sigma$  y  $\theta$  son permutaciones disjuntas, entonces  $\sigma \circ \theta = \theta \circ \sigma$ .

**Demostración:**

*Bosquejo.* Hay que partir a  $\llbracket 1, n \rrbracket$  en tres conjuntos,  $M_\sigma \cup M_\theta \cup (\llbracket 1, n \rrbracket \setminus (M_\sigma \cup M_\theta))$ . Se analiza a partir de eso puntualmente el valor de cada una de las dos composiciones. ■

**Definición 5.2.2**

Sea  $\sigma \in S_n$ . Decimos que  $\sigma$  es un  **$r$ -ciclo** si existen  $\{1_1, \dots, 1_r\} \subseteq \llbracket 1, n \rrbracket$  tales que

$$\sigma(i) = \begin{cases} i & \text{si } i \notin \{1_1, \dots, 1_r\} \\ i_{k+1} & \text{si } i = i_k, k \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket \\ i_1 & \text{si } i = i_r \end{cases}, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$$

En tal caso, se expresa

$$\sigma = (i_1 \ i_2 \ \dots \ i_r)$$

A los 2-ciclos también se les llama **transposiciones**.

**Observación 5.2.2**

En particular,  $e = (1) = (2) = \dots = (n)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Ejemplo 5.2.1**

Notemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1 \ 5)(2 \ 4)(3)$$

en  $S_5$ .

**Proposición 5.2.2**

Toda permutación se expresa de forma única como producto de ciclos disjuntos (salvo 1-ciclos).

**Demostración:**

Se puede encontrar en el Rotman, *Introducción a la Teoría de Grupos*. ■

**Definición 5.2.3**

Sea  $G$  un grupo y  $X$  un conjunto. Una **acción de  $G$  sobre  $X$**  es un homomorfismo  $\varphi : G \rightarrow S_X$  tal que  $g \mapsto \varphi_g$ .

**Observación 5.2.3**

Una acción  $\varphi$  de  $G$  sobre  $X$  cumple las siguientes condiciones:

- $g \cdot (g_1 \cdot x) = (gg_1) \cdot x$ , para todo  $x \in X$ .
- $e \cdot x = x$ , para todo  $x \in X$ .
- $g \cdot x = g \cdot y$  implica  $x = y$ .
- $\forall g \in G$  y para todo  $y \in X$  existe  $x \in X$  tal que  $g \cdot x = y$ .

**Definición 5.2.4**

Sea  $\varphi$  una acción de  $G$  sobre  $X$ . Se define una relación sobre  $X$ , denominada por  $\sim$  como

$$x \sim y \iff \exists g \in G \text{ tal que } y = g \cdot x$$

El conjunto  $G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$  es llamado **órbita de  $x$** . También, se define

$$G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$$

$G_x$  es un subgrupo de  $G$ , para el cual se cumple:

$$|G \cdot x| = [G : G_x]$$

para todo  $x \in X$ .

**Observación 5.2.4**

Considere  $\sigma \in S_n$  elemento diferente de la identidad, se sabe que  $\langle \sigma \rangle \hookrightarrow S_n$ , luego la función

$$\varphi : \langle \sigma \rangle \rightarrow S_n = S_{[1, n]} = S_X$$

siendo  $X = [1, n]$  es una acción de  $\langle \sigma \rangle$  sobre  $[1, n]$  y es tal que

$$\theta \cdot i = \theta(i)$$

para todo  $i \in [1, n]$ , con  $\theta \in \langle \sigma \rangle$ . Así:

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle \cdot i &= \{\theta \cdot i \mid \theta \in \langle \sigma \rangle\} \\ &= \{\theta(i) \mid \theta \in \langle \sigma \rangle\} \\ &= \{i, \sigma(i), \dots, \sigma^{k-1}(i)\} \end{aligned}$$

Sea  $l = |\langle \sigma \rangle \cdot i|$ , se tiene que  $|\langle \sigma \rangle \cdot i| \leq n, k$ . Entonces,

$$\langle \sigma \rangle \cdot i = \{i, \sigma(i), \dots, \sigma^{l-1}(i)\}$$

---

**Proposición 5.2.3**

Sea  $N < |S_n|$  con  $N \neq S_n$  y  $N$  conteniendo un 3-ciclo. Entonces,  $N = A_n$ .

---

**Demostración:**

Sea  $(a \ b \ c)$  el 3-ciclo contenido en  $N$ . Probemos que para todo  $i \in \mathbb{N}$ ,  $i \neq a, b, c$ ,  $(a \ b \ i) \in N$ .

Como  $N < |S_n|$ , entonces para todo  $\beta \in S_n$ ,  $\beta(a \ b \ c)\beta^{-1} \in N$ , es decir que  $(\beta(a) \ \beta(b) \ \beta(c)) \in N$ , para todo  $\beta \in S_n$ .

Elegimos  $\beta = (c \ i)$ , se tiene que

$$(a \ b \ i) = (\beta(a) \ \beta(b) \ \beta(c)) \in N$$

Así,  $A_n < N < S_n$ .

Más aún

$$\begin{aligned} 2 &= [S_n : A_n] \\ &= [S_n : N][N : A_n] \end{aligned}$$

luego,  $[N : A_n] = 1$ , es decir que  $A_n = N$ . ■

**Observación 5.2.5**

$\langle \sigma^2 \mid \sigma \in S_n \rangle = A_n$ . En efecto, basta notar que si  $(i \ j \ k)$  es un 3-ciclo, entonces este tres ciclo es el cuadrado de una permutación, que es el cuadrado de un 3-ciclo, ya que

$$(i \ j \ k) = (i \ k \ j)^2$$

---

**Proposición 5.2.4**

Sea  $N \triangleleft S_n$  tal que  $[S_n : N] = 2$ , entonces  $N = A_n$ .

---

**Demostración:**

Sea  $\sigma \notin N$ , entonces

$$S_n/N = \{N, \sigma N\}$$

donde  $\sigma(\sigma N) = N$ , esto es que  $\sigma^2 \in N$ . Por tanto

$$\sigma^2 \in N \quad \forall \sigma \in S_n$$

es decir que

$$A_n < N < S_n$$

pero

$$[S_n : A_n] = [S_n : N][N : A_n]$$

donde  $[S_n : A_n] = 2$  y  $[S_n : N] = 2$ , entonces  $A_n = N$ . ■

---

**Teorema 5.2.1**

Si  $n \geq 5$ , entonces  $A_n$  es simple.

---