10° Escuela Oaxaqueña de Matemáticas
Notas

Cristo Daniel Alvarado

29 de diciembre de 2024

Capítulo 1

Ejercicios y Problemas Teoría de Grupos

§1.1 Preliminares Teoría de Grupos

Ejercicio 1.1.1
Supongamos que G es un grupo que tiene un subgrupo de índice finito H. Demuestra que G tiene un subgrupo normal de índice finito.

Demostración:
Se tienen dos casos:

- G es finito, en cuyo caso G es un subgrupo normal de G de índice finito.
- G es infinito.

■

Ejercicio 1.1.2
¿Cuál es el grupo de automorfismos del grupo aditivo $\mathbb{Z}$?

Solución:
Considere al grupo de automorfismos del grupo aditivo $\mathbb{Z}$, digamos:

$$A = \mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z}) = \left\{ f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \middle| f \text{ es isomorfismo} \right\}$$

Afirmamos que $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ donde $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ es el grupo aditivo de los enteros módulo 2. En efecto, afirmamos que:

$$\mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z}) = \{\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}, -\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}\}$$

donde $\mathbb{1}_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ es la identidad de $\mathbb{Z}$ y $-\mathbb{1}_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ es tal que $-\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}(m) = -m$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. En efecto, es claro que $\{\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}, -\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}\} \subseteq \mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z})$.

Sea ahora $f \in \mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z})$, se tiene que:

$$f(m) = f(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{m\text{-veces}}) = \underbrace{f(1) + \cdots + f(1)}_{m\text{-veces}} = mf(1)$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. De forma análoga se demuestra que:

$$f(-m) = -mf(1), \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Así que:

$$f(m) = mf(1), \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

por lo que f está únicamente determinada por su valor en 1. Como $\mathbb{Z}$ tiene únicamente dos generadores (por ser un grupo cíclico infinito), al ser f automorfismo debe suceder que $\mathbb{Z} = \langle f(1) \rangle$, así que $f(1) = 1$ ó $f(1) = -1$, es decir que:

$$\begin{aligned} f(m) &= mf(1) \\ &= \begin{cases} m & \text{si } f(1) = 1 \\ -m & \text{si } f(1) = -1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}}(m) & \text{si } f(1) = 1 \\ -\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}(m) & \text{si } f(1) = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

es decir, que $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}}$ o $f = -\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}$. Por tanto, $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z}) = \{\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}, -\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}\}$. Para la otra parte, es inmediato que el grupo $\{\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}, -\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}\}$ con la composición de funciones es isomorfo al grupo aditivo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. □

Ejercicio 1.1.3
Supongamos que tenemos una sucesión exacta corta de grupos:

$$1 \to N \to G \to K \to 1$$

demuestra que si N y K son grupos finitamente generados, entonces G es finitamente generado.

Demostración:

Al tenerse la sucesión exacta corta de grupos, estamos diciendo que existen homomorfismos $f_0 : \langle 1 \rangle \to N$, $f_1 : N \to G$, $f_2 : G \to K$ y $f_3 : K \to \langle 1 \rangle$ tales que:

$$\mathrm{Im}\,(f_{i-1}) = \ker(f_i), \quad \forall i = 1, 2, 3$$

En particular, notemos que f_1 es monomorfismo y que f_2 es epimorfismo, ya que:

$$\ker(f_1) = \mathrm{Im}\,(f_0) = \langle e_N \rangle$$

siendo e_N la identidad del grupo N y, además:

$$\mathrm{Im}\,(f_2) = \ker(f_3) = K$$

por lo que se tiene lo afirmado.

Supongamos ahora que N y K son finitamnete generados, entonces existen elementos $n_1, ..., n_m \in N$ y $k_1, ..., k_l \in K$ tales que:

$$N = \langle n_1, ..., n_m \rangle \quad \text{y} \quad K = \langle k_1, ..., k_l \rangle$$

Como f_3 es epimorfismo, entonces del Primer Teorema de Isomorfismo se sigue que:

$$K \cong G/\ker(f_3) = G/\mathrm{Im}\,(f_2) = G/N'$$

donde $N' = f_2(N)$.

■

Ejercicio 1.1.4
Demuestra que en el producto semidirecto $N \rtimes_{\varphi} H$, H es un subgrupo normal si y sólo si φ es el homomorfismo trivial.

Demostración:

Recordemos que el producto semidirecto $N \rtimes_{\varphi} H$ es el grupo $N \times H$ dotado de la operación:

$$(n,h)(n',h') = (n\varphi_h(n'), hh')$$

donde $\varphi : H \to \mathrm{Aut}\,(N)$ es un homomorfismo tal que $h \mapsto \varphi_h$. El elemento neutro de este grupo es (e_N, e_H), donde cada elemento tiene como inverso:

$$(n,h)^{-1} = \left((\varphi_{h^{-1}}(n))^{-1}, h^{-1}\right)$$

$\Rightarrow$): Suponga que H es un subgrupo normal de $N \rtimes_{\varphi} H$, esto es que el grupo H visto como subgrupo de $N \rtimes_{\varphi} H$:

$$H = \left\{(e_N, h)\Big| h \in H\right\}$$

es subgrupo normal de $N \rtimes_{\varphi} H$. Como es normal, se sigue que:

$$(n_1,h_1)(e_N,h)(n_1,h_1)^{-1} \in H$$

para todo $(n_1, h_1) \in H$ y para todo $h \in H$. ■

Ejercicio 1.1.5
Demuestra que el producto libre en n generadores F_n es isomorfo al producto libre de n copias de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}$.

Demostración:

■

Ejercicio 1.1.6
Demuestra que el producto libre $G * H$ de grupos no triviales H y G tiene centro trivial.

Demostración:

Sean G y H grupos no triviales. Considere $G * H$ su producto libre. El centro de $G * H$ se define por:

$$Z(G*H) = \left\{x \in G*H \Big| xy = yx, \forall y \in G*H\right\}$$

■

Ejercicio 1.1.7
Demuestra que $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ es isomorfo a $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$.

Demostración:

■

Ejercicio 1.1.8
Denotemos por F_n al grupo libre en n generadores. Demuestre que F_n es isomorfo a F_m si y sólo si $n = m$.

Demostración:

Como F_n es grupo libre en n generadores y F_m lo es en m, tomamos $x_1, ..., x_n$ y $y_1, ..., y_m$ tales que:

$$F_n =$$

$\Rightarrow)$: Supongamos que F_n es isomorfo a F_m. $\blacksquare$