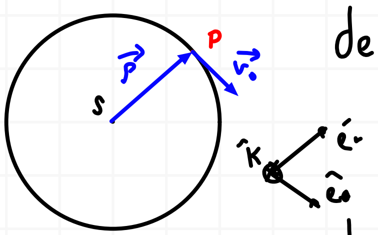
# Lista 6.

1. Un insecto de masa m camina con velocidad constante $v_o$ en una trayectoria circular de radio b sobre un tornamesa que gira con velocidad angular constante ω. Calcule la aceleración $\ddot{\mathbf{r}}$ del insecto con respecto al exterior. En particular calcule $\ddot{\mathbf{r}}$ para los casos: $v_o = b\omega$ y $v_o = -b\omega$.
R. $\ddot{\mathbf{r}} = -\left(\frac{v_o^2}{b} + 2\omega v_o + \omega^2 b\right)\hat{\mathbf{r}}$

## Sol.

Para el sistema S, como la tornamesa no se mueve, colocamos al sistema S en el centro. La aceleración del insecto será entonces:




$$\ddot{\vec r} = \ddot{\vec R} + \vec a + \dot{\vec\omega}\times\vec\rho + 2\vec\omega\times\vec v + \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec\rho)$$

donde $\vec\omega = \omega\hat k$ es la velocidad angular de la tornamesa, $\ddot{\vec R} = 0$. Como $\dot{\vec\omega} = 0$ (pues ω es cte), entonces:

$$\ddot{\vec r} = 2\vec\omega\times\vec v + \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec\rho) + \vec a$$

Como $\vec\omega = \omega\hat k$, $\vec\rho = b\hat e_r$ y $\vec v = v_o\hat e_\theta$, entonces:

$$\vec\omega\times\vec v = \omega v_o(\hat k\times\hat e_\theta) = -\omega v_o\hat e_r$$

$$\vec\omega\times\vec\rho = \omega b(\hat k\times\hat e_r) = \omega b\hat e_\theta \Rightarrow \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec\rho) = -\omega^2 b\hat e_r$$

Por tanto:

$$\ddot{\vec r} = \vec a - 2\omega v_o\hat e_r - \omega^2 b e_r$$

y, donde

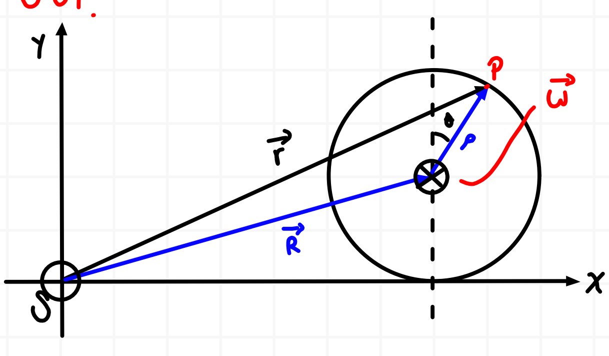
$$\vec a = -b\omega_p^2\hat e_r, \text{ como } \omega_o = \frac{v_o}{b} \Rightarrow \vec a = -\frac{v_o^2}{b}e_r$$

$$\therefore \ddot{\vec r} = -\left(\frac{v_o^2}{b} + 2\omega v_o + \omega^2 b\right)\hat e_r$$

□

2. Una rueda de bicicleta de radio b gira sin deslizar en línea recta con aceleración constante $a_o$. Calcule la magnitud de la aceleración con respecto al piso de un punto P sobre la rueda. Donde $v_o$ es la velocidad instantánea de la rueda y θ es el ángulo del rayo del centro de la rueda al punto P con respecto a la vertical.
R. $|\ddot{\mathbf{r}}| = a_o\sqrt{2 + 2\cos\theta + \frac{v_o^4}{a_o^2 b^2} - \frac{2v_o^2}{a_o b}\operatorname{sen}\theta}$

## Sol.




La aceleración $\ddot{\vec r}$ del punto P sobre la rueda estará dada por:

$$\ddot{\vec r} = \ddot{\vec R} + \vec a + 2\vec\omega\times\vec v + \dot{\vec\omega}\times\vec\rho + \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec\rho)$$

Donde $\ddot{\vec R} = a_o\hat\imath$, $\vec a = \vec v = 0$. Sea θ el ángulo que gira la rueda. Como la rueda no se desliza, por la condición de rodadura se tiene que:

$$x = \varphi b$$

en particular, para P $\varphi = \theta$, luego:

$$\ddot{x} = \ddot{\theta} b \quad y \quad \dot{x} = \dot{\theta} b \Rightarrow a_0 = \dot{\omega} b \quad y \quad v_0 = \omega b$$

Por tanto:

$$\vec{\omega} = -\frac{v_0}{b}\hat{k} \quad y \quad \dot{\vec{\omega}} = -\frac{a_0}{b}\hat{k}$$

Con $\vec{\rho} = b\,\text{sen}\,\theta\,\hat{\imath} + b\cos\theta\,\hat{\jmath}$, tenemos:

$$\dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho} = -\frac{a_0}{b} b\left(\text{sen}\,\theta\,\hat{k}\times\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{k}\times\hat{\jmath}\right)$$

$$= -a_0\left(\text{sen}\,\theta\,\hat{\jmath} - \cos\theta\,\hat{\imath}\right)$$

y

$$\vec{\omega} \times \vec{\rho} = -v_0\left(\text{sen}\,\theta\,\hat{\jmath} - \cos\theta\,\hat{\imath}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho}) = \frac{v_0^2}{b}\left(\text{sen}\,\theta\,\hat{k}\times\hat{\jmath} - \cos\theta\,\hat{k}\times\hat{\imath}\right)$$

$$= \frac{v_0^2}{b}\left(-\text{sen}\,\theta\,\hat{\imath} - \cos\theta\,\hat{\jmath}\right)$$

$$= -\frac{v_0^2}{b}\left(\text{sen}\,\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}\right)$$

Entonces:

$$\ddot{\vec{r}} = a_0\hat{\imath} - a_0\,\text{sen}\,\theta\,\hat{\jmath} + a_0\cos\theta\,\hat{\imath} - \frac{v_0^2}{b}\text{sen}\,\theta\,\hat{\imath} - \frac{v_0^2}{b}\cos\theta\,\hat{\jmath}$$

$$= \left(a_0 + a_0\cos\theta - \frac{v_0^2}{b}\text{sen}\,\theta\right)\hat{\imath} + \left(-a_0\,\text{sen}\,\theta - \frac{v_0^2}{b}\cos\theta\right)\hat{\jmath}$$

$$\therefore \|\ddot{\vec{r}}\|^2 = \cancel{a_0^2} + a_0^2\cancel{\cos^2\theta} + \frac{v_0^4}{\cancel{b^2}}\cancel{\text{sen}}^2\theta + 2a_0^2\cos\theta - 2a_0\frac{v_0^2}{b}\text{sen}\,\theta - \cancel{a_0\frac{v_0^2}{b}\text{sen}\,\theta\cos\theta} + \cancel{a_0^2\,\text{sen}^2\theta} + \cancel{\frac{v_0^4}{b^2}\cos^2\theta} + \cancel{2a_0\frac{v_0^2}{b}\text{sen}\,\theta\cos\theta}$$

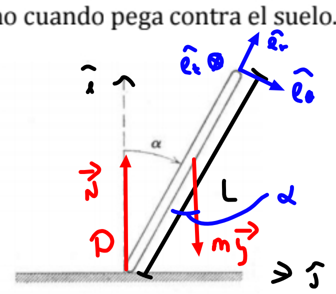
$$= 2a_0^2 + \frac{v_0^4}{b^2} + 2a_0^2\cos\theta - 2a_0\frac{v_0^2}{b}\text{sen}\,\theta$$

$$= a_0^2\left(2 + 2\cos\theta + \frac{v_0^4}{a_0^2 b^2} - \frac{2v_0^2}{a_0 b}\text{sen}\,\theta\right)$$

$$\therefore \|\ddot{\vec{r}}\| = a_0\sqrt{2 + 2\cos\theta + \frac{v_0^4}{a_0^2 b^2} - \frac{2v_0^2}{a_0 b}\text{sen}\,\theta} \;//$$

$\square$

3. Una varilla de longitud L se mantiene vertical y pivoteada sobre el piso y luego se deja caer. Calcule la velocidad del otro extremo cuando pega contra el suelo.



# Sol.

Como el centro de masa de la varilla es un eje principal de inercia (por ser un eje de simetría) tenemos que:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

Por el teorema de ejes paralelos, el momento de inercia tomando como eje de rotación al punto P de la varilla será:

$$I_P = m\left(\frac{L}{2}\right)^2 + I$$

Con $I = \frac{1}{12}mL^2$, tenemos entonces:

$$I_P = m\frac{L^2}{4} + m\frac{L^2}{12} = \frac{1}{3}mL^2$$

Por 2$^{da}$ Ley, desde el punto P:

$$\vec{N_o} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I_p\frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Donde $\vec{N_o} = \vec{r} \times m\vec{g} = \left(\frac{L}{2}\hat{e_r}\right) \times \left(mg\left[-\cos\alpha\,\hat{e_r} + \text{sen}\,\alpha\,\hat{e_\theta}\right]\right) = \frac{L}{2}mg\,\text{sen}\,\alpha\,\hat{e_z}$, y $\omega = \dot{\alpha} \Rightarrow$

$$\frac{\cancel{L}}{2}\cancel{m}g\,\text{sen}\,\alpha\,\cancel{\hat{e_z}} = \frac{1}{3}\cancel{m}L^{\cancel{2}}\,\ddot{\alpha}\,\cancel{\hat{e_z}}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}g\,\text{sen}\,\alpha = L\ddot{\alpha}$$

Como $\alpha(0) = 0 = \dot{\alpha}(0)$, entonces:

$$\Rightarrow \int_0^{\alpha}\frac{3}{2}g\,\text{sen}\,\alpha\,d\alpha = L\int_0^{\dot{\alpha}}\dot{\alpha}\,d\dot{\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}\frac{g}{L}(1-\cos\alpha) = L\frac{\dot{\alpha}^2}{2}$$

Cuando $\alpha = \frac{\pi}{2}$, se tiene:

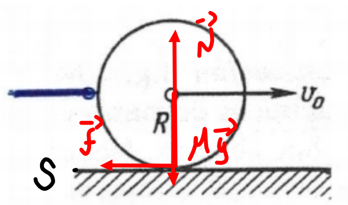
$$\Rightarrow \frac{3g}{L} = \dot{\alpha}^2 \Rightarrow \dot{\alpha} = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

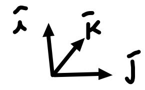
Por tanto, la velocidad del extremo de la varilla cuando toque el suelo será:

$$\dot{x} = L\dot{\alpha} = \sqrt{3gL}$$

$$\therefore \dot{x} = \sqrt{3gL}$$

4. Una bola de billar de radio R y masa M se golpea con un taco de tal manera que la línea de acción del impulso aplicado es horizontal y pasa por el centro de la bola. La velocidad inicial de la bola es $v_o$ y el coeficiente de fricción entre la bola y la mesa es $\mu_k$. Considere que la velocidad angular $\omega_o$ en el momento del impulso es cero. Calcule la aceleración del centro de masa de la bola mientras estuvo patinando; la velocidad del centro de masa de la bola cuando deja de patinar y finalmente la distancia que recorre la bola antes de dejar de patinar.




R. $\ddot{x} = -\mu_k g$ $\quad v_f = \frac{5v_o}{7}$ $\quad \Delta x = \frac{12v_o^2}{49\mu_k g}$

Sol.

Por Newton, tenemos que:

$$M\ddot{\vec r}_{cm} = \vec N + M\vec g + \vec f$$

mientras la bola desliza. En componentes:

$$M\ddot x = -f$$

$$M\ddot y = N - Mg$$

Como la bola no acelera en el eje y, entonces $\ddot y = 0$. Por tanto con $f = \mu_K N$:

$$\Rightarrow M\ddot x = -\mu_K Mg$$

$$\Rightarrow \ddot x = -\mu_K g \qquad \therefore \ddot x = -\mu_K g_{//}$$

Ahora, mientras patina tenemos:

$$\vec N_o = \frac{d\vec L}{dt}$$

La bola gira alrededor de un eje de simetría. Por lo cual:

$$\vec L = I\vec\omega$$

Con $I = \frac{2}{5}MR^2$ y $\vec\omega = \omega\hat K$ donde $\omega(0)=0$, tenemos:

$$\Rightarrow \vec N_o = \frac{2}{5}MR^2\dot\omega\hat K$$

Pero $\vec N_o = \vec r \times \vec f = (-R\hat\imath)\times(-f\hat\jmath) = Rf(\hat\imath\times\hat\jmath) = Rf\hat K$, luego:

$$\cancel{R} f \cancel{\hat K} = \frac{2}{5}MR^{\cancel{2}}\dot\omega\cancel{\hat K}$$

y $f = \mu_K N = \mu_K Mg$, tenemos:

$$\mu_K \cancel{M} g = \frac{2}{5}\cancel{M}R\dot\omega$$

$$\Rightarrow \dot\omega = \mu_K \frac{5}{2}\frac{g}{R}$$

$$\Rightarrow \omega_f - \omega_0 = \mu_K \cdot \frac{5}{2}\frac{g}{R} t \quad \ldots (1)$$

Pero $\omega_0 = 0$. Cuando comience a rodar y deje de patinar, se cumplirá la cond. de rodadura, i.e

$$\dot{x} = R\omega_f, \quad \text{con} \quad \ddot{x} = -\mu_K g \Rightarrow \dot{x} - v_0 = -\mu_K g t$$

$$\Rightarrow \omega_f = \frac{1}{R}\dot{x}$$

$$= \frac{1}{R}(v_0 - \mu_K g t)$$

Sustituyendo en (1):

$$\frac{1}{R}(v_0 - \mu_K g t) = \frac{5}{R}\mu_K \cdot \frac{5}{2} t$$

$$\Rightarrow v_0 = \frac{7}{2}\mu_K g t$$

$$\therefore t = \frac{2}{7}\frac{v_0}{\mu_K g}$$

Luego:

$$\dot{x} = v_0 - \mu_K g\left(\frac{2}{7}\frac{v_0}{\mu_K g}\right) = \frac{5}{7}v_0$$

$$\therefore v_f = \frac{5}{7} v_0 \;//$$

$\square$

Con $x(0) = 0$, tenemos:

$$x = v_0 t - \frac{1}{2}\mu_K g t^2, \quad \text{con} \quad t = \frac{2}{7}\frac{v_0}{\mu_K g}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{7}\frac{v_0^2}{\mu_K g} - \frac{1}{2}\mu_K g \frac{4}{49}\frac{v_0^2}{\mu_K^2 g^2}$$

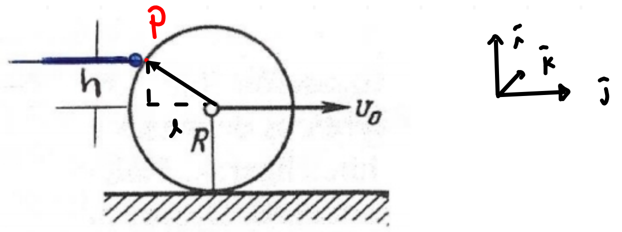
$$= \frac{14}{49}\frac{v_0^2}{\mu_K g} - \frac{2v_0^2}{49\mu_K g}$$

$$= \frac{12}{49}\frac{v_0^2}{\mu_K g}$$

$$\therefore x = \frac{12}{49}\frac{v_0^2}{\mu_K g} \;//$$

$\square$

5. Una bola de billar de radio R inicialmente en reposo se golpea repentinamente con un taco que es sostenido horizontalmente a una distancia h sobre la línea central. La bola deja el taco a una velocidad $v_o$ y adquiere una velocidad de $9v_o/7$ cuando deja de patinar. Demuestre que $h = 4R/5$.




**Dem:**

Consideremos 3 instantes de tiempo: $t_1$ (justo antes de que el taco golpee la bola), $t_2$ (justo acabando la colisión) y $t_3$ (cuando la bola deja de patinar).

De $t_1$ a $t_2$ se indujo en P una fuerza neta $\vec{F}$ dada por:

$$\vec{F}(t_2-t_1) = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$$

Con $\vec{P}_1 = 0$ y $\vec{P}_2 = mv_0\hat{j}$. Entonces:

$$\vec{F} = \frac{mv_0}{t_2-t_1}\hat{j}$$

y, por Newton tenemos que:

$$\vec{r}_p \times \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Con $\vec{r}_p = h\hat{i} - l\hat{j}$, luego $\vec{r}_p \times \vec{F} = \frac{mv_0}{t_2-t_1}h\hat{k}$. Luego:

$$\int_{t_1}^{t_1} \frac{mv_0}{t_2-t_1}h\hat{k} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$$

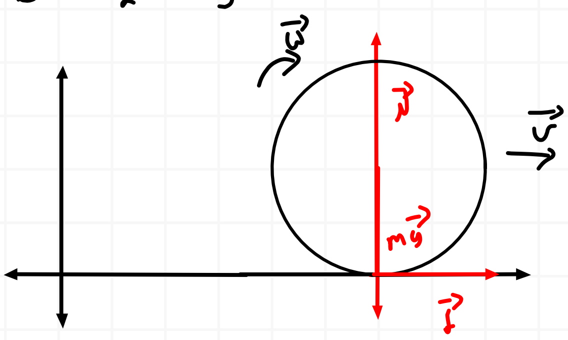
$$\Rightarrow mv_0h\hat{k} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$$

Como la bola no se movía al inicio, $\vec{L}_1 = 0$. Al girar la bola alrededor de un eje de simetría, $\vec{L}_2 = I\vec{\omega}_2$ con $I = \frac{2}{5}mR^2$ y $\vec{\omega}_2 = \omega_2\hat{k} = \omega(t_2)\hat{k}$. Por tanto:

$$\cancel{m}v_0h\cancel{\hat{k}} = \frac{2}{5}\cancel{m}R^2\omega_2\cancel{\hat{k}}$$

$$\therefore \omega_2 = \frac{5}{2}\frac{v_0h}{R^2} \quad \ldots (1)$$

De $t_2$ a $t_3$ actúan 3 fuerzas sobre la bola: $\vec{N}$, $\vec{f}$ y $m\vec{g}$. Por Newton:




$$m\ddot{\vec{r}}_{cm} = \vec{N} + \vec{f} + m\vec{g}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = f$$

. Ahora, de $t_2$ a $t_3$:

$$\int_{t_2}^{t_3} \vec{r} \times \vec{f}\, dt = \vec{L}_3 - \vec{L}_2$$

Como en $t_3$ deja de patinar, la bola comienza a rodar y, por tanto:

$$\omega_3 = \frac{9}{7}\frac{v_0}{R}$$

$$\Rightarrow \vec{L_3} = \frac{2}{5} m R^2 \cdot \frac{9}{7}\frac{v_0}{R}\hat{k}$$

$$= \frac{2}{5}\cdot\frac{9}{7} m R v_0 \hat{k}$$

y $\vec{r}\times\vec{f} = (-R\hat{\imath})\times(f\hat{\jmath}) = -Rf\hat{k}$. Entonces:

$$-Rf\hat{k}(t_3 - t_2) = \frac{2}{5}\cdot\frac{9}{7} mRv_0\hat{k} - \frac{2}{\cancel{5}} m \cancel{R^2}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{2}}\frac{v_0 h}{\cancel{R^2}}\hat{k}$$

Como $f = m\ddot{x}$ y $\ddot{x} = \dfrac{\frac{9}{7}v_0 - v_0}{t_3 - t_2} \Rightarrow f = \frac{2}{7} m v_0 \cdot \frac{1}{t_3 - t_2}$, luego:

$$-R\cdot\frac{2}{7} m v_0 \hat{k} = \frac{2}{5}\cdot\frac{9}{7} mRv_0\hat{k} - m v_0 h\hat{k}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{7} mRv_0 + \frac{2}{7}\cdot\frac{9}{5} mRv_0 = m v_0 h$$

$$\Rightarrow \frac{2}{7}\left(\frac{14}{5}\right) mRv_0 = m h v_0$$

$$\therefore h = \frac{4}{5}R$$

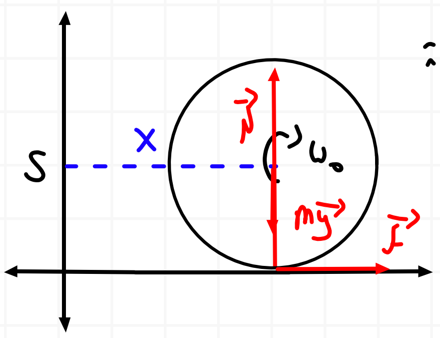
□

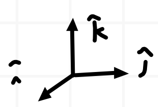
6. Un cilindro de radio R gira con velocidad angular $\omega_0$ alrededor de su eje que se encuentra paralelo a la horizontal. El cilindro se deja caer suavemente sobre una superficie horizontal rugosa con coeficiente de fricción $\mu$. Calcule la velocidad de traslación del centro de masa una vez que el cilindro deja de resbalar. Calcule la pérdida de energía del cilindro y el tiempo que tarda en dejar de resbalar.


R. $v_f = \frac{\omega_0 R}{3}$ $\quad \Delta T = \frac{m\omega_0^2 R^2}{6}$ $\quad \Delta t = \frac{\omega_0 R}{3\mu g}$

Sol.

Justo al dejar caer el cilindro al suelo, surgen 3 fuerzas. A saber: $\vec{f}$, $\vec{N}$ y $m\vec{g}$. Por Newton:




$$\vec{N_0} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Donde $\vec{N_0} = \vec{r}\times\vec{f} = (-R\hat{k})\times(f\hat{\jmath}) = -Rf(\hat{k}\times\hat{\jmath}) = +Rf\hat{\imath}$, y

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

Con $I = \frac{1}{2}mR^2$ y $\vec{\omega} = -\omega\hat{\imath}$. Por tanto:

$$\cancel{R}f\hat{\imath} = -\frac{1}{2}mR^{\cancel{2}}\dot{\omega}\hat{\imath}$$

$$\Rightarrow f t = -\frac{1}{2}mR\,\omega\Big|_{\omega_0}^{\omega(t)}$$

$$\Rightarrow f t = \frac{1}{2}mR(\omega_0 - \omega(t)) \quad \ldots (1)$$

donde $f = \mu m g$. Mientras resbala, la aceleración del centro de masa será (en un tiempo $\tau$):

$$\vec{a_{cm}} = \frac{\omega(\tau)R\,\hat{\jmath}}{\tau}$$

Luego, por Newton:

$$\vec{f} = m\vec{a_{cm}} = m\frac{\omega(\tau)R}{\tau}\,\hat{\jmath} \quad \ldots(2)$$

Sustituyendo (2) en (1), al tiempo $\tau$:

$$\Rightarrow \cancel{m}\,\omega(\tau)\cancel{R} = \frac{1}{2}\cancel{m}\cancel{R}(\omega_0 - \omega(\tau))$$

$$\Rightarrow \omega(\tau) = \frac{\omega_0}{3}$$

$$\therefore v_f = \frac{\omega_0 R}{3}$$

$\square$

y, el tiempo que le toma es de (1):

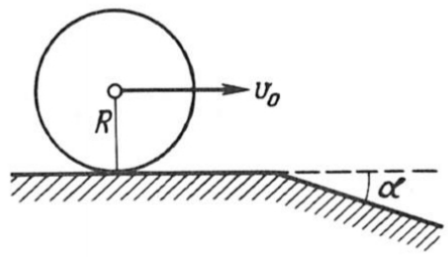
$$\mu \cancel{m} g t = \frac{1}{2}\cancel{m}R\left(\omega_0 - \frac{\omega_0}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \mu g t = R\frac{\omega_0}{3}$$

$$\therefore t = \frac{\omega_0 R}{3\mu g}$$

$\square$

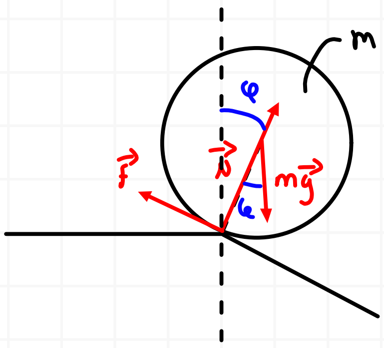
8. Un cilindro homogéneo macizo de radio $R$ que rueda por un plano horizontal con velocidad $v_o$, traspasa a uno inclinado que forma un ángulo $\alpha$ con la horizontal. Calcule el valor máximo de $v_o$ para que el cilindro pase al plano inclinado sin desprenderse de la superficie.




R. $v_0 = \sqrt{gR(7\ cos\alpha - 4)/3}$

# Sol.

Analicemos al cilindro justo antes de caer (mientras rueda por el borde), por Newton:




$$\vec{F}^{(e)} = m\vec{a_{cm}}$$

Donde $\vec{a_{cm}} = -R\dot{\varphi}^2\hat{e_r} + R\ddot{\varphi}e_\theta$, y:

$$\vec{F}^{(e)} = \vec{N} + m\vec{g} + \vec{f}$$

$$= N\hat{e_r} + mg(-\cos\varphi\,\hat{e_r} + sen\varphi\,\hat{e_\theta}) - f\hat{e_\theta}$$

Por tanto:

$$1)\begin{cases} -mR\dot{\varphi}^2 = N - mg\cos\varphi \\ mR\ddot{\varphi} = mg\,sen\varphi - f \end{cases}$$

Por otro lado, analizando al cilindro desde el centro de masa, tenemos:

$$\vec{N_o} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Por ser un eje de simetría, $\vec{L} = I\vec{\omega}$, con $I = \frac{1}{2}mR^2$ y $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\hat{e_z}$. Con $\vec{N_o} = (-R\hat{e_r}) \times (-f\hat{e_\theta}) = Rf\hat{e_z}$. Por tanto:

$$Rf\hat{e_z} = \frac{1}{2}mR^2\ddot{\varphi}\,\hat{e_z}$$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{2}mR\ddot{\varphi} \ \ldots \ (2)$$

Sustituyendo (2) en (1):

$$\Rightarrow \frac{3}{2}mR\ddot{\varphi} = mg\,sen\varphi$$

Como el cilindro venía rodando, inicialmente $v_o = R\dot{\varphi}(0) \Rightarrow \dot{\varphi}(0) = \frac{v_o}{R}$, y $\varphi(0) = 0$. Por tanto:

$$\frac{3}{4}mR\left(\dot{\varphi}^2 - \frac{v_o^2}{R^2}\right) = mg(1-\cos\varphi)$$

$$\Rightarrow mR\dot{\varphi}^2 = \frac{mv_o^2}{R} + \frac{4}{3}mg(1-\cos\varphi) \ \ldots \ (3)$$

Sustituyendo (3) en (1):

$$\Rightarrow -\frac{mv_0^2}{R} - \frac{4}{3}mg(1-\cos\varphi) = N - mg\cos\varphi$$

Justo en $\varphi = \alpha$, $N = 0$. Por tanto:

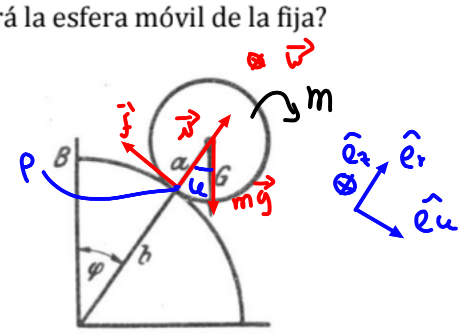
$$-\frac{4}{3}mg + \frac{4}{3}mg\cos\alpha + mg\cos\alpha = \frac{mv_0^2}{R}$$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{gR(7\cos\alpha - 4)/3}$$

$$\therefore v_0 = \sqrt{\frac{gR(7\cos\alpha - 4)}{3}}$$

$\square$

7. Sobre una esfera fija completamente rugosa de radio b rueda otra de radio a partiendo de un punto muy próximo al B.
   a) Determine la normal N y el rozamiento f entre ambas esferas en función de φ.
   b) ¿Bajo qué ángulo φ se separará la esfera móvil de la fija?




R. $N = \frac{mg}{7}(17\cos\varphi - 10)$;  $f = \frac{2}{7}\,mg\,\mathrm{sen}\varphi$

Sol.

Analicemos por Newton a la esfera de radio a. Tenemos que:

$$\vec{F}^{(e)} = m\ddot{\vec{r}}_{cm}$$

Con $\ddot{\vec{r}}_{cm} = -(a+b)\dot{\varphi}^2\hat{e}_r + (a+b)\ddot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi$, y $\vec{F}^{(e)} = \vec{N} + m\vec{g} + \vec{f}$. Entonces:

$$-m(a+b)\dot{\varphi}^2\hat{e}_r + m(a+b)\ddot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi = N\hat{e}_r + mg(-\cos\varphi\,\hat{e}_r + \mathrm{sen}\varphi\,\hat{e}_\varphi) - f\hat{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow 1)\begin{cases} -m(a+b)\dot{\varphi}^2 = N - mg\cos\varphi \\ m(a+b)\ddot{\varphi} = mg\,\mathrm{sen}\varphi - f \end{cases}$$

Ahora, analicemos a la esfera desde el punto P (pues, podemos observar que la esfera gira alrededor de un eje en P paralelo a $\hat{e}_z$). Por Newton desde P:

$$\vec{N}_o = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Con $\vec{L} = I\vec{\omega}$, con $I$ dado por el T. de ejes paralelos como: $I = \frac{2}{5}ma^2 + ma^2 = \frac{7}{5}ma^2$. Y $\vec{N}_o = (a\hat{e}_r)\times mg(-\cos\varphi\,\hat{e}_r + \mathrm{sen}\varphi\,\hat{e}_\varphi) = amg\,\mathrm{sen}\varphi\,\hat{e}_z$, $\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\hat{e}_z$ ($\theta$ el ángulo que gira la esfera de radio a). Por tanto:

$$a m g \operatorname{sen}\varphi\, \hat{e}_z = \frac{7}{5} m a^2 \ddot{\theta}\, \hat{e}_z$$

Como la esfera de radio $a$ rueda alrededor de la de radio $b$, se cumple:

$$(a+b)\varphi = a\theta$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{a}\ddot{\varphi} = \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \cancel{a}mg\operatorname{sen}\varphi = \frac{7}{5}\cancel{m}\cancel{a}(a+b)\ddot{\varphi}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{7}\frac{g}{a+b}\operatorname{sen}\varphi = \ddot{\varphi} \quad \ldots (2)$$

Sustituyendo (2) en (1):

$$\Rightarrow m(a+b)\cdot\frac{5}{7}\frac{g}{a+b}\operatorname{sen}\varphi = mg\operatorname{sen}\varphi - f$$

$$\Rightarrow f = mg\operatorname{sen}\varphi - \frac{5}{7}mg\operatorname{sen}\varphi$$

$$\therefore f = \frac{2}{7}mg\operatorname{sen}\varphi \,//$$

De (2):

$$\frac{5}{7}g(1-\cos\varphi) = (a+b)\frac{\dot{\varphi}^2}{2}$$

Pues $\varphi(0)=0$ y $\dot{\varphi}(0)=0$. Por tanto:

$$(a+b)\dot{\varphi}^2 = \frac{10}{7}g(1-\cos\varphi) \quad \ldots (3)$$

Sustituyendo (3) en (1):

$$-\frac{10}{7}mg(1-\cos\varphi) = N - mg\cos\varphi$$

$$\Rightarrow -\frac{10}{7}mg + \frac{10}{7}\cos\varphi + mg\cos\varphi = N$$

$$\Rightarrow N = \frac{mg}{7}(17\cos\varphi - 10)$$

$$\therefore N = \frac{mg}{7}(17\cos\varphi - 10) \,//$$

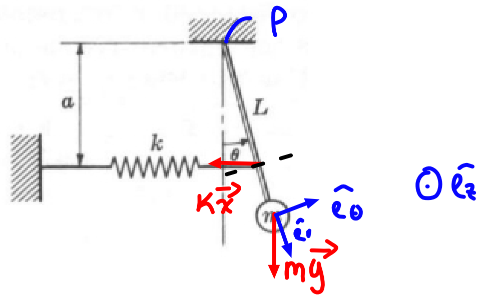
Cuando el móvil se separe, $N=0$, i.e:

$$\frac{mg}{7}(17\cos\varphi - 10) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\varphi = \frac{10}{17}$$

$$\therefore \cos\varphi = \frac{10}{17} \,//$$

8. Calcule la frecuencia natural de la masa m en el extremo de una varilla de longitud L y masa despreciable atada a un resorte de constante k como se muestra en la figura.




R: $\omega = \sqrt{\frac{ka^2+mgL}{mL^2}}$

Sol.

Digamos que la esfera tiene radio $r << L$. Por Newton:

$$\vec{N_0} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

alrededor de p y paralelo a $\hat{e}_z$, tenemos que $\vec{L} = I\vec{\omega}$, con $I = \frac{2}{5}mr^2 + mL^2$, como $r << L \Rightarrow I = mL^2$, y $\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{e}_z$. Además:

$$\vec{N_0} = \left(\frac{a}{\cos\theta}\hat{e}_r\right) \times \left(Kx\left[-\operatorname{sen}\theta\,\hat{e}_r - \cos\theta\,\hat{e}_\theta\right]\right) + \left(L\hat{e}_r\right) \times \left(mg\left[\cos\theta\,\hat{e}_r - \operatorname{sen}\theta\,\hat{e}_\theta\right]\right)$$

$$= -aKx\,\hat{e}_z - Lmg\operatorname{sen}\theta\,\hat{e}_z$$

Por tanto:

$$-aKx\,\hat{e}_z - Lmg\operatorname{sen}\theta\,\hat{e}_z = mL^2\ddot{\theta}\,e_z$$

Con $\tan\theta = \frac{x}{a} \Rightarrow a\tan\theta = x$. Aproximando $\operatorname{sen}\theta$ y $\tan\theta$ a $\theta$:

$$\Rightarrow -a^2K\theta - Lmg\theta = mL^2\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{a^2K + Lmg}{mL^2}\theta = 0$$

Luego, la frecuencia natural del sistema será:

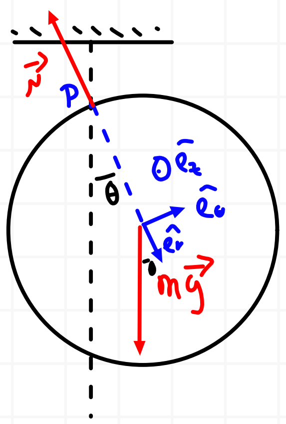
$$w_n = \sqrt{\frac{a^2K + Lmg}{mL^2}} \quad //$$

11. Calcule el periodo $T_1$ de las oscilaciones pequeñas de un anillo de masa $M$ y radio $R$ que cuelga de un clavo de manera que puede oscilar en su propio plano. Considere un anillo idéntico que se encuentra articulado a un eje contenido en el plano del anillo y tangente a la circunferencia. Este anillo puede realizar oscilaciones hacia adentro y hacia afuera del plano. Calcule el periodo $T_2$ de estas oscilaciones y compárelo con el periodo $T_1$.

R. $\frac{T_1}{T_2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Sol.

Analicemos al anillo 1: Por Newton desde P:




$$\vec{N_0} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Con $\vec{L} = I\vec{\omega}$, $I = mR^2 + mR^2 = 2MR^2$ (analizando desde P y usando el T. de ejes paralelos), $\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{e_z}$, y:

$$\vec{N_0} = (R\hat{e_r}) \times (mg[\cos\theta\,\hat{e_r} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{e_\theta}])$$

$$= -mgR\operatorname{sen}\theta\,\hat{e_z}$$

Por tanto:

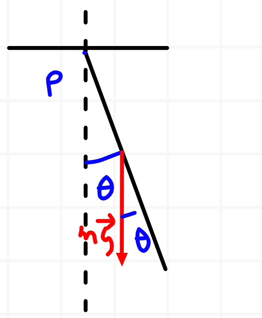
$$-mgR\operatorname{sen}\theta\,\hat{e_z} = 2mR^2\ddot{\theta}\,\hat{e_z}$$

Para osilaciones pequeñas: $\operatorname{sen}\theta \simeq \theta$, luego:

$$0 = 2\cancel{m}R^{\cancel{2}}\ddot{\theta} + \cancel{m}g\cancel{R}\theta$$

$$\Rightarrow 0 = \ddot{\theta} + \frac{g}{2R}\theta$$

Por tanto $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{2R}} = \frac{2\pi}{T_1} \Rightarrow T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$ ... (1). Ahora al anillo 2: Por el T. de ejes perpendiculares, para una figura plana girando alrededor de un eje paralelo al eje z:




$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$$

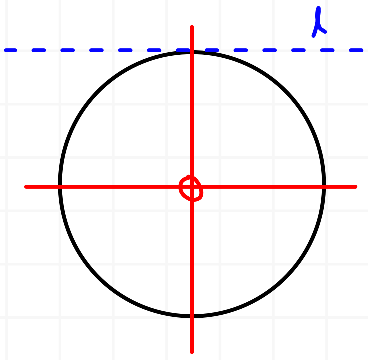



Figura 1.

Para la figura 1, $I_{xx} = I_{yy}$ y además: $I_{zz} = mR^2$. Por tanto:

$$I_{xx} = \frac{1}{2}mR^2$$

Por el teorema de ejes paralelos, si gira alrededor de $l$:

$$I = \frac{3}{2}mR^2$$

Por tanto, por Newton para el anillo 2 se tiene:

$$\vec{N_0} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Con $\vec{N_o} = (R\hat{e_r}) \times (mg[\cos\theta\, \hat{e_r} - \operatorname{sen}\theta\, \hat{e_\theta}]) = -mgR\operatorname{sen}\theta\, \hat{e_z}$. Por tanto:

$$-mgR\operatorname{sen}\theta\, \hat{e_z} = \frac{3}{2}mR^2\ddot{\theta}\, \hat{e_z}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}\cancel{m}R^{\cancel{2}}\ddot{\theta} + \cancel{m}g\cancel{R}\theta = 0$$

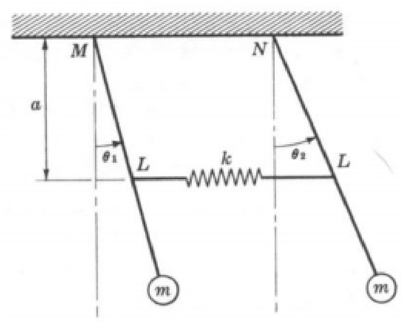
$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{2g}{3R}\theta = 0$$

así $\omega_2 = \sqrt{\frac{2g}{3R}} = \frac{2\pi}{T_2} \Rightarrow T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}}$ ... (2). Por (1) y (2):

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{2R}{g}} \cdot \sqrt{\frac{2g}{3R}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

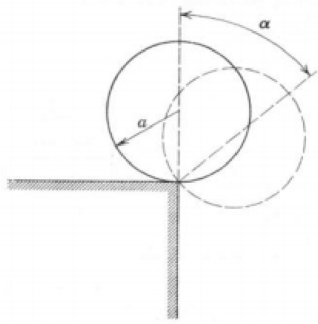
$$\therefore \frac{T_1}{T_2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \,_{//}$$

9. Dos péndulos simples están conectados mediante un resorte como se muestra en la figura. Calcule las frecuencias normales de oscilación del sistema.




R. $\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2ka^2}{ml^2}}$ oscilan en sentidos opuestos $\omega_- = \sqrt{g/l}$ en el mismo sentido

10. Una esfera de masa M y radio a descansa sobre el borde de un saliente horizontal como se muestra en la figura. Si comienza a rodar y el rozamiento entre el saliente y la esfera es suficiente para evitar el deslizamiento. Determine el ángulo α y la velocidad angular cuando la esfera abandone el borde.

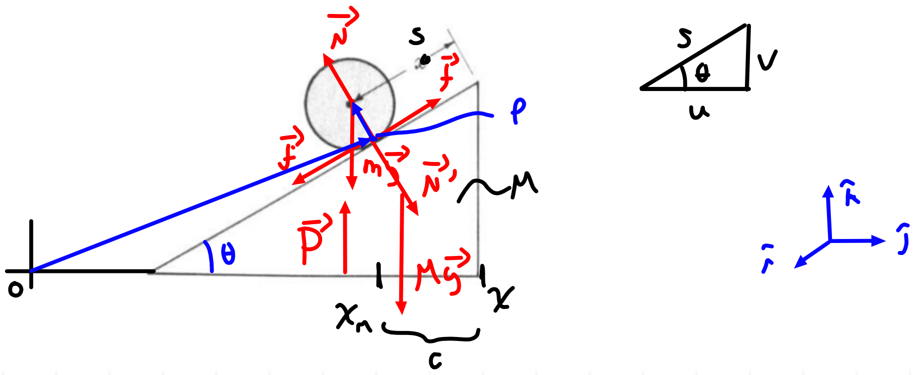



R. $\cos^{-1}\left(\frac{10}{17}\right)$ $\omega = \sqrt{\frac{10g}{17a}}$

**Sol.** Se hace exactamente igual que el de la pag. 9 de este documento.

$\square$

14. Un disco de radio $R$ rueda hacia abajo por una cuña móvil de masa $M$ y ángulo $\theta$ que se encuentra en una superficie lisa. El contacto entre el disco y la cuña es perfectamente rugoso. Calcule la aceleración de la cuña.




R. $a = \frac{mg\,sen\theta\,cos\theta}{\frac{1}{2}(3M+m)+m\,sen^2\theta}$

**Sol.**

Por Newton, para el sistema de m y M:

$$(M+m)\ddot{\vec{r}}_{cm} = \vec{F}^{(e)}$$

y $\vec{F}^{(e)} = \vec{P} + m\vec{g} + M\vec{g}$. Por tanto, en $x$:

$$(M+m)\ddot{x}_{cm} = 0 \Rightarrow M\ddot{x}_M + m\ddot{x}_m = 0 \quad \dots (1)$$

Ahora, como $x = x_M + c \Rightarrow \ddot{x} = \ddot{x}_M$, y $x_m = x - u$, con $u = s\cos\theta$, $\Rightarrow \ddot{x}_m = \ddot{x} - \ddot{s}\cos\theta$. Como el disco rueda sin deslizar sobre el plano: $s = R\varphi \Rightarrow \ddot{s} = R\ddot{\varphi}$, luego $\ddot{x}_m = \ddot{x} - R\ddot{\varphi}\cos\theta$.

$$\Rightarrow M\ddot{x} + m(\ddot{x} - R\ddot{\varphi}\cos\theta) = 0$$

$$\Rightarrow (M+m)\ddot{x} = mR\ddot{\varphi}\cos\theta \quad \dots (2)$$

Ahora, aplicando Newton al cilindro de masa m girando alrededor de P en un eje paralelo a $\hat{\imath}$:

$$\vec{N}_0 = \frac{d\vec{L}}{dt} + m\vec{\rho}_{cm} \times \ddot{\vec{R}}$$

Con $\vec{\rho}_{cm} = R(-\sin\theta\,\hat{\jmath} + \cos\theta\,\hat{k})$, $\vec{R} = (x-u)\hat{\jmath} + (d-v)\hat{k} \Rightarrow \ddot{\vec{R}} = (\ddot{x}-\ddot{u})\hat{\jmath} + (-\ddot{v})\hat{k}$. Por tanto:

$$\vec{\rho}_{cm}\times\ddot{\vec{R}} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & -R\,\text{sen}\theta & R\cos\theta \\ 0 & \ddot{x}-\ddot{u} & -\ddot{v} \end{vmatrix} = \hat{i}\left(R\ddot{v}\,\text{sen}\theta-(\ddot{x}-\ddot{u})R\cos\theta\right)$$

Como $u=s\cos\theta$ y $v=s\,\text{sen}\,\theta \Rightarrow \ddot{u}=R\ddot{\varphi}\cos\theta$ y $\ddot{v}=R\ddot{\varphi}\,\text{sen}\,\theta$. Luego:

$$m\vec{\rho}_{cm}\times\ddot{\vec{R}} = m\left(R^2\ddot{\varphi}\,\text{sen}^2\theta-(\ddot{x}-R\ddot{\varphi}\cos\theta)R\cos\theta\right) \ldots (2)$$

Con $\vec{N}_p=\vec{\rho}_{cm}\times m\vec{g}=R(-\text{sen}\theta\,\hat{j}+\cos\theta\,\hat{k})\times(-mg\hat{k})=Rmg\,\text{sen}\theta\,\hat{i}$, y $\vec{L}=I\vec{\omega}=\frac{3}{2}mR^2\dot{\varphi}\,\hat{i}$

$$\Rightarrow \cancel{R}\cancel{m}g\,\text{sen}\theta\,\hat{i} = \frac{3}{2}mR^2\ddot{\varphi}\,\hat{i}+m\left(R^2\ddot{\varphi}\,\text{sen}^2\theta-\ddot{x}R\cos\theta+R^2\ddot{\varphi}\cos^2\theta\right)\hat{i}$$

$$= \frac{3}{2}\cancel{m}R^{\cancel{2}}\ddot{\varphi}\,\hat{i}+\cancel{m}R^{\cancel{2}}\ddot{\varphi}\,\hat{i}-\cancel{m}\ddot{x}\cancel{R}\cos\theta\,\hat{i}$$

$$\Rightarrow g\,\text{sen}\theta = \frac{1}{2}R\ddot{\varphi}-\ddot{x}\cos\theta \Rightarrow g\,\text{sen}\theta+\ddot{x}\cos\theta=\frac{5}{2}R\ddot{\varphi}$$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{R}(g\,\text{sen}\theta+\ddot{x}\cos\theta)$$

$$(M+m)\ddot{x}=mR\cos\theta\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{R}(g\,\text{sen}\theta+\ddot{x}\cos\theta)$$

$$=\frac{2}{3}mg\,\text{sen}\theta\cos\theta+\frac{2}{3}m\ddot{x}(1-\text{sen}^2\theta)$$

$$\Rightarrow 3(M+m)\ddot{x}=2mg\,\text{sen}\theta\cos\theta+2m\ddot{x}-2m\ddot{x}\,\text{sen}^2\theta$$

$$\Rightarrow (3M+m)\ddot{x}+2m\ddot{x}\,\text{sen}^2\theta=2mg\,\text{sen}\theta\cos\theta$$

$$\Rightarrow \ddot{x}=\frac{mg\,\text{sen}\theta\cos\theta}{\frac{1}{2}(3M+m)+m\,\text{sen}^2\theta}$$