

# Grupos Topológicos

Cristo Daniel Alvarado

14 de febrero de 2024

# Índice general

<b>B. Topología</b>	<b>2</b>
B.1. Espacios Topológicos . . . . .	2
B.2. Funciones y homeomorfismos . . . . .	6
B.3. Axiomas de separación . . . . .	7
B.4. Convergencia . . . . .	9
<b>C. Funciones Cardinales</b>	<b>10</b>
C.1. nose . . . . .	10

# Capítulo B

## Topología

### B.1. Espacios Topológicos

En esta parte se hará un breve recordatorio de los resultados más relevantes de la parte de espacios topológicos.

#### Definición B.1.1

Un **espacio topológico** es una pareja  $(X, \tau)$  que consiste en un conjunto  $X$  y una familia  $\tau$  de subconjuntos de  $X$  con las siguientes propiedades:

- 1).  $\emptyset, X \in \tau$ .
- 2). Si  $U_1, U_2 \in \tau$ , entonces  $U_1 \cap U_2 \in \tau$ .
- 3). Si  $\mathcal{F} \subseteq \tau$ , entonces

$$\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \in \tau$$

A los miembros de  $\tau$  se les conoce como **conjuntos abiertos** en  $X$ . La familia  $\tau$  es una **topología** en  $X$ .

#### Definición B.1.2

Sea  $X$  un espacio topológico y  $x \in X$ . Si  $U$  es un subconjunto abierto de  $X$  tal que  $x \in U$ , diremos que  $U$  es una **vecindad de  $x$** .

Como resultado de lo anterior, se tiene que un subconjunto  $V \subseteq X$  es abierto si para todo  $x \in V$  existe una vecindad  $U_x$  contenida en  $V$ .

#### Definición B.1.3

Sea  $X$  un espacio topológico. Una **base** del espacio topológico  $X$  es una familia  $\mathcal{B} \subseteq \tau$  tal que todo subconjunto abierto no vacío de  $X$  es unión de elementos de  $\mathcal{B}$ .

---

#### Proposición B.1.1

Sea  $X$  un espacio topológico. Una familia  $\mathcal{B} \subseteq \tau$  es una base del espacio si y sólo si para todo punto  $x \in X$  y para cualquier vecindad  $V$  de  $x$  existe  $U \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in U \subseteq V$ .

---

El objetivo de la base de un espacio topológico es la de disminuir el número de elementos de la familia  $\tau$ , y de que esta familia más pequeña cumple propiedades más generales que, resultan útiles para resultados posteriores.

---

**Proposición B.1.2**

Sea  $X$  un espacio topológico. Una base  $\mathcal{B}$  de  $X$  tiene las propiedades siguientes:

B1). Para cualesquier  $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$  y todo punto  $x \in U_1 \cap U_2$  existe un  $U \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$ .

B2). Para todo  $x \in X$  existe  $U \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in U$ , es decir  $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ .

Además, si una familia  $\mathcal{B}$  de subconjuntos de  $X$  cumple B1) y B2), entonces existe una única topología  $\tau$  en  $X$  para la cual  $\mathcal{B}$  es una base.

---

**Definición B.1.4**

Si  $(X, \tau)$  es un espacio topológico que posee una base numerable  $\mathcal{B}$ , se dice que  $X$  es **segundo numerable**.

Una familia  $\mathcal{P} \subseteq \tau$  es una **sub-base** de un espacio topológico  $(X, \tau)$  si la familia de todas las intersecciones finitas  $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_k$ , donde  $U_i \in \mathcal{P}$  para  $i = 1, \dots, k$ , es una base de  $(X, \tau)$ .

**Definición B.1.5**

Una familia  $\mathcal{B}(x)$  de vecindades de  $x$  es una **base local** en  $x \in X$  en el espacio topológico  $(X, \tau)$ , si para toda vecindad  $V$  de  $x$  existe  $U \in \mathcal{B}(x)$  tal que  $x \in U \subseteq V$ .

Observe que si  $\mathcal{B}$  es una base de  $(X, \tau)$ , la familia  $\mathcal{B}(x)$  consistente en todos los elementos de  $\mathcal{B}$  que contienen a  $x$  es una base local para  $x$  en  $(X, \tau)$ . Por otro lado, si para todo  $x \in X$  contamos con una base local  $\mathcal{B}(x)$  para  $x$ , entonces  $\mathcal{B} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}(x)$  es una base de  $(X, \tau)$ .

**Definición B.1.6**

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico y supongamos que para todo  $x \in X$  tenemos una base local  $\mathcal{B}(x)$  en  $x$ ; la familia

$$\{\mathcal{B}(x) | x \in X\}$$

es un **sistema de vecindades** para el espacio topológico  $(X, \tau)$ .

---

**Proposición B.1.3**

Sea  $X$  un espacio topológico. Entonces, cualquier sistema de vecindades para el espacio  $X$  tiene las siguientes propiedades:

BP1). Para toda  $x \in X$ ,  $\mathcal{B}(x) \neq \emptyset$  y para toda  $U \in \mathcal{B}(x)$ ,  $x \in U$ .

BP2). Si  $U_1 \in \mathcal{B}(x)$ ,  $U_2 \in \mathcal{B}(y)$  y  $z \in U_1 \cap U_2$ , existe un  $U \in \mathcal{B}(z)$  tal que  $U \subseteq U_1 \cap U_2$ .

---

**Definición B.1.7**

Si  $(X, \tau)$  es un espacio topológico tal que todo punto  $x \in X$  posee una base local en  $x$  numerable, decimos que  $X$  es un espacio **primero numerable**.

**Definición B.1.8**

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. Decimos que un subconjunto  $F \subseteq X$  es **cerrado**, si  $X \setminus F \in \tau$ , es decir, si su complemento relativo a  $X$  es abierto. De forma inmediata se deducen las propiedades siguientes:

C1). El conjunto  $X$  es cerrado, lo mismo con  $\emptyset$ .

C2). La unión de dos conjuntos cerrados es cerrada.

C3). La intersección de cualquier familia de conjuntos cerrados es cerrada.

De ahora en adelante, cada que se mencione al conjunto  $X$ , se entenderá que es el espacio topológico  $(X, \tau)$ . Si no hay ambigüedad, no se mencionará la topología  $\tau$ .

Ahora se procederá a definir dos conjuntos importantes para todo subconjunto  $A \subseteq X$ , con el objetivo de relacionar a éste con algún elemento de la topología  $\tau$ .

### Definición B.1.9

Sea  $A \subseteq X$ . Considere la familia  $\mathcal{C}_A$  de todos los conjuntos cerrados que contienen a  $A$ . La intersección

$$\overline{A} = \bigcap_{E \in \mathcal{C}_A} E$$

es la **cerradura** o **clausura** de  $A$ . Es claro que  $\overline{A}$  es un conjunto cerrado.

---

### Proposición B.1.4

Sea  $X$  un espacio topológico; entonces

- 1).  $A \subseteq \overline{A}$ .
- 2). Si  $A \subseteq B$ , entonces  $\overline{A} \subseteq \overline{B}$ .
- 3). Si  $x \in \overline{A}$ , entonces para toda vecindad  $U$  de  $x$  se cumple que
- 4).  $U \cap A \neq \emptyset$ .
- 5).  $\overline{\emptyset} = \emptyset$ .
- 6).  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ .
- 7).  $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ .

---

### Definición B.1.10

El **interior** de un subconjunto  $A \subseteq X$  de un espacio topológico  $X$  es la unión de todos los subconjuntos abiertos contenidos en  $A$ , o en forma equivalente, el abierto más grande contenido en  $A$ . El interior de  $A$  se denota como  $\text{Int}A$  y es claramente un conjunto abierto.

Algunas propiedades del interior de un conjunto son las siguientes:

---

### Proposición B.1.5

Sea  $X$  un espacio topológico, entonces

- 1). Para todo  $A \subseteq X$  se cumple que  $\text{Int}A = X \setminus \overline{X \setminus A}$ .
  - 2).  $\text{Int}X = X$ .
  - 3).  $\text{Int}A \subseteq A$ .
  - 4).  $\text{Int}A \cap B = \text{Int}A \cap \text{Int}B$ .
  - 5).  $\text{Int}(\text{Int}A) = \text{Int}A$ .
-

Bajo esta perspectiva, podemos considerar a la cerradura e interior de un conjunto como operadores que actúan sobre los subconjuntos de un espacio topológico. Ahora definiremos un operador más en un espacio topológico:

### Definición B.1.11

Un punto  $x \in X$  de un espacio topológico  $X$  es un **punto de acumulación** de un conjunto  $A \subseteq X$ , si  $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$ ; el conjunto de todos los puntos de acumulación de  $A$  es el **conjunto derivado** de  $A$  y se denota por  $A^d$ .

A los puntos de  $A^d$  se les conoce como **puntos no aislados** del conjunto  $A$ . Un punto  $x$  es **aislado** en  $X$  si y sólo si el conjunto  $\{x\}$  es abierto.

Algunas de las propiedades del conjunto derivado son las siguientes:

### Proposición B.1.6

Sean  $X$  un espacio topológico,  $x \in X$  y  $A \subseteq X$ . Entonces,

- D1). El punto  $x$  pertenece a  $A^d$  si y sólo si toda vecindad de  $x$  contiene al menos un punto de  $A$  distinto de  $x$ .
- D2).  $\overline{A} = A \cup A^d$ .
- D3). Si  $A \subseteq B$ , entonces  $A^d \subseteq B^d$ .
- D4).  $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$ .
- D5).  $\bigcup_{i \in I} A_i^d \subseteq (\bigcup_{i \in I} A_i)^d$ .

Ahora se definirán varios conceptos importantes en la topología general.

### Definición B.1.12

Sea  $X$  un espacio topológico.

- 1). Un conjunto  $A \subseteq X$  es **denso** en  $X$  si  $\overline{A} = X$ .
- 2). Un conjunto  $A \subseteq X$  es **denso en ninguna parte** en  $X$ , si  $X \setminus \overline{A}$  es denso en  $X$ .
- 3). Un conjunto  $A \subseteq X$  es **denso en sí mismo** si  $A = A^d$ .

Entre las propiedades de subconjuntos de espacios relativas a la definición anterior se cuentan las siguientes:

### Proposición B.1.7

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. Entonces, se cumplen los 3 incisos siguientes:

- 1). Un conjunto  $A$  es denso en  $X$  si y sólo si todo subconjunto abierto no vacío de  $X$  interseca a  $A$ .
- 2). El conjunto  $A$  es denso en ninguna parte en  $X$  si y sólo si todo abierto no vacío de  $X$  contiene un abierto no vacío ajeno a  $A$ .
- 3). Si  $A$  es denso en  $X$ , entonces para todo abierto  $U \subseteq X$  tenemos que  $\overline{U} = \overline{U \cap A}$ .

### Definición B.1.13

Decimos que un espacio  $X$  es **separable** si contiene un conjunto denso numerable.

## B.2. Funciones y homeomorfismos

Ahora, definiremos dos conceptos de gran transcendencia en la topología general: la continuidad de funciones y el homeomorfismo.

### Definición B.2.1

Sean  $(x, \tau)$  y  $(Y, \sigma)$  espacios topológicos; una función de  $X$  en  $Y$  es **continua** si  $f^{-1}(U) \in \tau$ , para todo  $U \in \sigma$ , es decir que la imagen inversa de todo abierto en  $Y$  es abierta en  $X$ .

A continuación se presentan varios criterios de continuidad:

### Proposición B.2.1

Para una función  $f : X \rightarrow Y$  de un espacio  $X$  en  $Y$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- 1). La función  $f$  es continua.
- 2). Las imágenes inversas de miembros de una sub-base  $\mathcal{P}$  en  $Y$  son abiertas en  $X$ .
- 3). Las imágenes inversas de miembros de una base  $\mathcal{B}$  en  $Y$  son abiertas en  $X$ .
- 4). Imágenes inversas de conjuntos cerrados en  $Y$  son cerrados en  $X$ .
- 5). Para todo  $A \subseteq X$  tenemos que  $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ .
- 6). Para todo  $B \subseteq Y$  tenemos que  $f^{-1}(\text{Int} B) \subseteq \text{Int} f^{-1}(B)$ .
- 7). Para todo  $B \subseteq Y$  tenemos que  $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$ .

Una función  $f$  del espacio  $X$  al espacio  $Y$  es **continua en el punto**  $x \in X$  si para toda vecindad  $V$  de  $f(x)$  existe una vecindad  $U$  de  $x$  tal que  $f(U) \subseteq V$ . Claramente, una función  $f$  de  $X$  a  $Y$  es continua si y sólo si es continua en cada punto  $x \in X$ .

### Definición B.2.2

Un subconjunto  $G$  de un espacio  $X$  es un **conjunto**  $G_\delta$  si  $G$  es la intersección de una familia numerable de conjuntos abiertos en  $X$ .

Un subconjunto  $F$  de un espacio  $X$  es un **conjunto**  $F_\sigma$  si  $F$  es la unión de una familia numerable de cerrados en  $X$ .

### Observación B.2.1

Observe que si  $f$  es una función continua de  $X$  a  $Y$ , entonces para cualquier conjunto  $B \subseteq Y$  que sea  $G_\delta$  (respectivamente,  $F_\sigma$ ), la imagen inversa  $f^{-1}(B)$  es un  $G_\delta$  (respectivamente,  $F_\sigma$ ) en  $X$ .

### Definición B.2.3

Una función continua  $f : X \rightarrow Y$  es **cerrada** (respectivamente, **abierto**) si para todo subconjunto cerrado (respectivamente, abierto)  $A \subseteq X$ , su imagen directa  $f(A)$  es cerrada (respectivamente,

cerrada) en  $Y$ .

Ahora analizaremos la clase de funciones continuas que son homeomorfismos.

#### Definición B.2.4

Una función continua  $f : X \rightarrow Y$  es un **homeomorfismo** si  $f$  es una biyección y su inversa  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  es continua.

Si existe un homeomorfismo entre los espacios  $X$  y  $Y$ , diremos que  $X$  es **homeomorfo** a  $Y$ . La presencia de tal homeomorfismo hace topológicamente indistinguibles a los espacios  $X$  y  $Y$ . Note que la relación de ser homeomorfos es una relación de equivalencia en la clase de todos los espacios topológicos.

Otra clase importante de funciones la conforman las llamadas funciones cociente, que se definen a continuación.

#### Definición B.2.5

Una función  $f$  de un espacio topológico  $(X, \tau)$  sobre otro espacio topológico  $(Y, \sigma)$  es una **función cociente** si un conjunto  $V$  es abierto en  $Y$  si y sólo si su imagen inversa  $f^{-1}(V)$  es abierta en  $X$ .

#### Observación B.2.2

Es inmediato que toda función cociente biyectiva es un homeomorfismo.

---

#### Proposición B.2.2

Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos. Entonces

- 1). Toda función continua y abierta de  $X$  sobre  $Y$  es cociente.
  - 2). Toda función cerrada de  $X$  sobre  $Y$  es cociente.
- 

## B.3. Axiomas de separación

Por si sola, la definición de espacio topológico es muy general y pocos son los resultados interesantes que se pueden probar en todo espacio topológico. Para solventar este problema, se requiere de imponer ciertas restricciones para que se puedan desarrollar resultados más interesantes. Básicamente lo que sigue es para establecer formas de separar puntos y conjuntos cerrados en espacios.

#### Definición B.3.1

Espacios  $T_i$ :

- 1). Un espacio topológico  $X$  es un **Espacio**  $T_0$  si para toda pareja de puntos distintos  $x_1, x_2 \in X$  existe un abierto que contiene uno de los puntos pero no el otro.
- 2). Un espacio  $X$  es un **Espacio**  $T_1$  si para toda pareja de puntos distintos  $x_1, x_2 \in X$  existe un abierto  $U$  tal que  $x_1 \in U$  y  $x_2 \notin U$ . Observe que también existe un abierto  $V$  que contiene a  $x_2$  pero no a  $x_1$ .

La diferencia entre un espacio  $T_0$  y  $T_1$  radica en que, en los  $T_0$  no puedes elegir cual punto cumple la condición de estar en el abierto, y en el  $T_1$  esto es posible.



3). Un espacio  $X$  es un **espacio**  $T_2$  o **Hausdorff** si para toda pareja de puntos distintos  $x_1, x_2 \in X$  existen conjuntos abiertos ajenos  $U_1$  y  $U_2$  en  $X$  tales que  $x_1 \in U_1$  y  $x_2 \in U_2$ .

---

### Lema B.3.1

Para cualquier pareja de funciones continuas  $f, g$  de un espacio  $X$  en un espacio Hausdorff  $Y$ , el conjunto

$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

es cerrado en  $X$ .

---

### Definición B.3.2

Un espacio  $X$  es  $T_3$  o **regular** si es  $T_1$  y para toda  $x \in X$  y todo cerrado  $F \subseteq X$  tal que  $x \notin F$  existen abiertos  $U_1, U_2$  en  $X$  tales que  $x \in U_1$ ,  $F \subseteq U_2$  y  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ .

Claramente todo espacio regular es Hausdorff. No obstante, los espacios regulares tienen una propiedad aún más importante.

---

### Proposición B.3.1

Si  $X$  es un espacio  $T_1$ , entonces  $X$  es regular si y sólo si para todo punto  $x \in X$  y toda vecindad  $V$  de  $x$  existe una vecindad  $U$  de  $x$  tal que  $\overline{U} \subseteq V$ .

---

Una clase aún más particular de espacios topológicos son los espacios Tikhonov.

### Definición B.3.3

Un espacio  $X$  es un espacio  $T_{3\frac{1}{2}}$  o **completamente regular** si para todo  $x \in X$  y para todo cerrado  $F \subseteq X$  tal que  $x \notin F$  existe una función continua  $f : X \rightarrow [0, 1]$  con la propiedad de que  $f(x) = 0$  y  $f(y) = 1$  para todo  $y \in F$ . Si además el espacio  $X$  es  $T_1$ , entonces  $X$  es **completamente regular** o **Tikhonov**.

---

### Teorema B.3.1

Todo espacio Tikhonov es regular.

---

### Definición B.3.4

Un espacio topológico  $X$  es un espacio  $T_4$  o **normal** si  $X$  es  $T_1$  y para toda pareja de cerrados ajenos  $A, B \subseteq X$  existen abiertos ajenos  $U_A$  y  $U_B$  tales que  $A \subseteq U_A$  y  $B \subseteq U_B$ .

### Observación B.3.1

Si un espacio  $X$  es  $T_1$ , entonces es normal si y sólo si para todo conjunto cerrado  $F \subseteq X$  y todo abierto  $V \subseteq X$  que contiene a  $F$  existe un abierto  $U \subseteq X$  tal que  $F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V$ . Claramente todo espacio normal es regular. El hecho de que todo espacio normal es Tikhonov se deduce del siguiente teorema.

---

### Teorema B.3.2 (Lema de Urysohn)

Para cada pareja de subconjuntos cerrados ajenos  $A, B$  de un espacio normal  $X$  existe una función continua  $f : X \rightarrow [0, 1]$  tal que  $f(x) = 0$  para todo  $x \in A$  y  $f(x) = 1$  para todo  $x \in B$ .

---

### Observación B.3.2

Todo espacio segundo numerable y regular es normal. Lo mismo ocurre con todo espacio regular y numerable.

---

### Corolario B.3.1

Un subconjunto  $A$  de un espacio normal  $X$  es un cerrado  $G_\delta$  si y sólo si existe una función continua  $f : X \rightarrow [0, 1]$  tal que  $A = f^{-1}(0)$ .

---

**Definición B.3.5** ■ Dos subconjuntos  $A, B$  de un espacio topológico  $X$  están **completamente separados** si existe una función continua  $f : X \rightarrow [0, 1]$  tal que  $f(x) = 0$  para  $x \in A$  y  $f(x) = 1$  para  $x \in B$ .

- Un subconjunto  $A$  de un espacio  $X$  es **funcionalmente cerrado** (también llamado **conjunto nulo**) si  $A = f^{-1}(0)$  para alguna función continua  $f : X \rightarrow [0, 1]$ . El complemento de un conjunto funcionalmente cerrado es un conjunto **funcionalmente abierto** (también llamado **conjunto cocero**).
- Un espacio topológico  $X$  es **perfectamente normal** si  $X$  es normal y todo subconjunto cerrado de  $X$  es un  $G_\delta$ . Claramente un espacio normal  $X$  es perfectamente normal si y sólo si todo subconjunto abierto de  $X$  es un  $F_\sigma$ .

## B.4. Convergencia

El concepto de sucesión convergente...

# Capítulo C

## Funciones Cardinales

### C.1. nose