Taller Topología Algebraica, Lectura 10: Productos de Grupos

Cristo Alvarado

30 de octubre de 2024

En los capítulos siguientes será indispensable el tratar con grupos libres, dada la naturaleza del grupo fundamental de los espacios topológicos. Para ello, primero daremos una introducción de conceptos previos para poder llegar a la definición formal de grupos libres.

Producto Débil de Grupos

Observación 1.1
De ahora en adelante, el símbolo $\forall$ significa *para casi todo salvo una cantidad finita de elementos.*

Observación 1.2
En esta parte, I no denotará al intervalo $[0,1]$, sino a una indexación de una familia.

Definición 1.1
Sea $\mathcal{G}=\{G_i\}_{i\in I}$ una familia arbitraria no vacía de grupos. Se define el **producto directo de la familia** $\mathcal{G}$ por:

$$\prod\mathcal{G}=\left\{x:I\to\prod_{i\in I}G_i\middle|x\text{ es función}\right\}$$

y en ocasiones se denotará simplemente por $\prod_{i\in I}G_i$. Se dota a este conjunto de la siguiente operación: si $x,y\in\prod\mathcal{G}$, entonces $x\cdot y:I\to\prod_{i\in I}G_i$ es la función tal que

$$(x\cdot y)(i)=x(i)\cdot y(i)$$

para todo $i\in I$, siendo la multiplicación respectiva en cada grupo.

En caso de que no lo haya hecho, queda como ejercicio al lector probar que el producto directo de una familia de grupos $\mathcal{G}$ es un grupo dotado de la operación de la definición anterior.

Definición 1.2
Sea $\mathcal{G}=\{G_i\}_{i\in I}$ una familia arbitraria no vacía de grupos. Se define el **producto débil de la familia** $\mathcal{G}$ como el subgrupo de $\prod\mathcal{G}$ dado por:

$$\prod\mathcal{G}^*=\left\{x\in\prod\mathcal{G}\middle|x(i)=e_i,\ \forall\, i\in I\right\}$$

donde e_i denota la identidad de G_i para cada $i\in I$.

Proposición 1.1
Si $\mathcal{G}$ es una familia arbitraria no vacía de grupos, entonces

$$\prod\mathcal{G}^*<\prod\mathcal{G}$$

es decir, que $\prod \mathcal{G}^*$ es un subgrupo de $\prod \mathcal{G}$.

Demostración:
Ejercicio. ■

Definición 1.3
Sea $\mathcal{G} = \{G_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía de grupos. Si G_i es abeliano para cada $i \in I$, entonces llamaremos a $\prod \mathcal{G}^*$ la **suma directa de los grupos G_i**. En este caso, se denotará la operación del grupo de forma aditiva y se le denotará por:

$$\prod \mathcal{G}^* = \bigoplus_{i\in I} G_i = \bigoplus \mathcal{G}$$

Observación 1.3
Note que ambas definiciones coinciden si I es un conjunto finito.

Definición 1.4
En las condiciones de la definición anterior, para cada índice $i \in I$ definimos un **monomorfismo natural** $\varphi_i : G_i \to \prod \mathcal{G}^*$ definido como sigue: $\forall g \in G_i$ y para todo $j \in I$:

$$\varphi_i(g)_j(\varphi_i(g))(j) = \begin{cases} g & \text{si} \quad i = j \\ e_j & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

En el caso en que cada G_i sea un grupo abeliano, el siguiente teorema da una caracterización importante de su producto débil y de los monomorfismos φ_i.

Teorema 1.1
Si $\{G_i\}_{i\in I}$ es una familia no vacía de grupos abelianos y,

$$G = \bigoplus_{i\in I} G_i$$

entonces para cualquier grupo abeliano A y cualquier familia de homomorfismos $\{\psi_i\}_{i\in I}$ tales que

$$\psi_i : G_i \to A, \quad \forall i \in I$$

Existe un único homomorfismo $f : G \to A$ tal que para todo $i \in I$ el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[r, hook, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & G \arrow[d, "f"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Figura 1. Diagrama conmutativo de G y A.
esto es, $f \circ \varphi_i = \psi_i$ para todo $i \in I$.

Demostración:
Sean A un grupo abeliano y $\{\psi_i\}_{i\in I}$ una familia de homomorfismos tales que

$$\psi_i : G_i \to A, \quad \forall i \in I$$

sea ahora $x \in G$, como $x_i = e_i$, $\not\forall\, i \in I$ se tiene pues al ser ψ_i homomorfismos debe suceder que $\psi_i(x_i) = e_A$, $\not\forall\, i \in I$ (siendo e_A la identidad de A). Por lo cual la suma

$$\sum_{i\in I} \psi_i(x_i)$$

está bien definido (pues solo una cantidad finita de estos elementos es diferente de la identidad). Hacemos

$$f(x) = \sum_{i\in I} \psi_i(x_i), \quad \forall x \in G$$

Veamos que esta función está bien definida, ya se tiene por lo anterior que $f : G \to A$. Sea $x \in G$, si x se expresa como

$$x = \sum_{j=1}^{n} y_j \quad \text{y} \quad x = \sum_{k=1}^{m} z_k$$

con $y_j, z_k \in G$ para todo $j \in [\![1, n]\!]$ y para todo $k \in [\![1, m]\!]$, sea

$$I_0 = \{i_1, ..., i_r\}$$

el subconjunto de I tal que si $i \in I_0$, entonces

$$y_{j_i} \neq e_i \quad \text{o} \quad z_{k_i} \neq e_i$$

para algún $j \in [\![1, n]\!]$ o algún $k \in [\![1, m]\!]$. Veamos que

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right) &= \sum_{i\in I} \psi_i\left(\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)_i\right) \\
&= \sum_{i\in I_0} \psi_i\left(\sum_{j=1}^{n} y_{j_i}\right) \\
&= \sum_{i\in I_0} \sum_{j=1}^{n} \psi_i\left(y_{j_i}\right)
\end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{k=1}^{m} z_k\right) &= \sum_{i\in I} \psi_i\left(\left(\sum_{k=1}^{m} z_k\right)_i\right) \\
&= \sum_{i\in I_0} \psi_i\left(\sum_{k=1}^{m} z_{k_i}\right) \\
&= \sum_{i\in I_0} \sum_{k=1}^{m} \psi_i\left(z_{k_i}\right)
\end{aligned}$$

por ende,

$$
\begin{aligned}
f\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right) - f\left(\sum_{k=1}^{m} z_k\right) &= \sum_{i\in I_0}\sum_{j=1}^{n}\psi_i\left(y_j i\right) - \sum i\in I_0 \sum_{k=1}^{m}\psi_i\left(z_{ki}\right)\\
&= \sum_{i\in I_0}\left(\sum_{j=1}^{n}\psi_i\left(y_j i\right) - \sum k=1^m \psi_i\left(z_{ki}\right)\right)\\
&= \sum_{i\in I_0}\left(\psi_i\left(\sum_{j=1}^{n} y_j i\right) - \psi i\left(\sum_{k=1}^{m} z_{ki}\right)\right)\\
&= \sum_{i\in I_0}\left(\psi_i\left(\sum_{j=1}^{n} y_j i\right) - \psi i\left(\sum_{k=1}^{m} z_{ki}\right)\right)\\
&= \sum_{i\in I_0}\left(\psi_i\left(\sum_{j=1}^{n} y_j i - \sum k=1^m z_{ki}\right)\right)
\end{aligned}
$$

pero $x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j i$ y $x_i = \sum k = 1^m z_{ki}$, por lo cual

$$
\begin{aligned}
f\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right) - f\left(\sum_{k=1}^{m} z_k\right) &= 0\\
\Rightarrow f\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right) &= f\left(\sum_{k=1}^{m} z_k\right)
\end{aligned}
$$

Se sigue que f está bien definida. Veamos que es homomorfismo. Sean $x, y \in G$, entonces

$$
\begin{aligned}
f(x+y) &= \sum_{i\in I}\psi_i(x_i+y_i)\\
&= \sum_{i\in I}\psi_i(x_i)+\psi_i(y_i)
\end{aligned}
$$

como A es abeliano, esta suma se puede reordenar de cualquier forma, en particular:

$$
\begin{aligned}
f(x+y) &= \sum_{i\in I}\psi_i(x_i)+\psi_i(y_i)\\
&= \sum_{i\in I}\psi_i(x_i)+\sum_{i\in I}\psi_i(y_i)\\
&= f(x)+f(y)
\end{aligned}
$$

por lo que f es homomorfismo. Sea ahora $i\in I$, entonces

$$
\begin{aligned}
f\circ\varphi_i(x_i) &= f(\varphi_i(x_i))\\
&= \sum_{j\in I}\psi_j(\varphi_i(x_i)_j)\\
&= \psi_i(\varphi_i(x_i)_i)\\
&= \psi_i(x_i), \quad \forall x_i\in G_i
\end{aligned}
$$

Luego, $f\circ\varphi_i = \psi_i$ para todo $i\in I$. Veamos la unicidad. Para ello, recordemos antes que si $x\in G$, entonces

$$
x = \sum_{i\in I}\varphi_i(x_i)
$$

(básicamente x se expresa como la suma de sus componentes una por una vistas como elementos de G) siendo esta suma finita y por ende, está bien definida. Si $g:G\to A$ es otro homomorfismo tal que

$$g\circ\varphi_i=\psi_i,\quad \forall i\in I$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
g(x)&=g\left(\sum_{i\in I}\varphi_i(x_i)\right)\\
&=\sum_{i\in I}g\circ\varphi_i(x_i)\\
&=\sum_{i\in I}\psi_i(x_i)\\
&=f(x),\quad \forall x\in G
\end{aligned}$$

por ende, f es único. ■

Este teorema caracteriza la suma directa de grupos abelianos, como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 1.2
Sea $\{G_i\} i\in I$ una familia de grupos abelianos y $G=\bigoplus i\in IG_i$; sea G' un subgrupo abeliano y consideremos para cada $i\in I$ las funciones $\varphi_i':G_i\to G'$ tales que la conclusión del Teorema 1.1 cambiando a G' y φ_i' por G y φ_i, respectivamente. Entonces, existe un único isomorfismo $h:G\to G'$ tal que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
G_i \arrow[r, hook, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\varphi_i'"'] & G \arrow[d, "h"] \\
 & G'
\end{tikzcd}$$

Figura 2. Diagrama conmutativo de G y G'.

es conmutativo, para todo $i\in I$.

Demostración:
La existencia de un único homomrfismo $h:G\to G'$ que haga que el diagrama anterior sea conmutativo es inmediata del Teorema 1.1. Por este mismo teorema, existe un único homomorfismo $k:G'\to G$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo, para todo $i\in I$ (cambiando los papeles de G' por G y de φ' por φ_i):

$$\begin{tikzcd}
G_i \arrow[r, hook, "\varphi_i'"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & G' \arrow[d, "k"] \\
 & G
\end{tikzcd}$$

Figura 3. Diagrama conmutativo de G' y G.

Se sigue de estos dos diagramas que:

$$(k\circ h)\circ\varphi_i=\varphi_i\quad \text{y}\quad (h\circ k)\circ\varphi_i'=\varphi_i'$$

para todo $i\in I$, estamos diciendo que los diagramas:

$$
\begin{tikzcd}
G_i \arrow[r, hook, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & G \arrow[d, "k\circ h"] \\
& G
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G_i \arrow[r, hook, "\varphi_i'"] \arrow[dr, "\varphi_i'"'] & G' \arrow[d, "h\circ k"] \\
& G'
\end{tikzcd}
$$

Figura 4. Diagramas conmutativos de G y G'.

son conmutativos. Notemos que estos también son conmutativos cambiando a $k\circ h$ por $\mathbb{1}G$ y lo mismo cambiando a $h\circ k$ por $\mathbb{1}G'$. Como estos homomorfismos son únicos (tanto h como k), debe suceder que:

$$k\circ h=\mathbb{1}G \quad \text{y} \quad h\circ k=\mathbb{1}G'$$

por ende, h es isomorfismo. ■

La importancia de este teorema, es que si consideremos un grupo abeliano A como un *producto* de grupos abelianos G_i, entonces el teorema anterior asegura que G (el producto débil de los G_i) es el *más libre* de entre todos los candidatos en el sentido de que existe un homomorfismo de G en A que conmuta con φ_i y ψ_i, para todo $i\in I$.

En este sentido, usamos la palabra *más libre* como *la menor cantidad de relaciones impuestas* (realmente podemos hablar en un sentido más particular, aterrizando la noción de objetos libres en una categoría, pero resulta complicado establecerla sin amplio conocimiento previo de Teoría de Categorías), y la filosofía general es es que si ciertas relaciones se cumplen para el grupo G, entonces éstas también deberan cumplirse en cualquier imagen homomorfa de G.

Este mismo tipo de filosofía se matiene para otras estructuras algebraicas, como lo son los anillos, módulos, etc…

Como el producto débil G de subgrupos esta totalmente caracterizado por los monomomorfismos φ_i de G_i en G, podemos dejar de pensar que el producto débil es un subgrupo del grupo

$$\prod_{i\in I}G_i$$

y más aún, podemos pensar a los grupos G_i como conjuntos en G bajo la imagen de φ_i.