Taller de Topología Algebraica, Lectura 7: El Grupo Fundamental de $\mathbb{S}^1$

Cristo Alvarado

24 de septiembre de 2024

$\pi(\mathbb{S}^1)$

Lo hecho en la parte anterior sobre espacios recubridores será utilizado para caracterizar en su totalidad el grupo fundamental del círculo $\mathbb{S}^1$.

Definición 7.1
Sea $\omega : I \to \mathbb{S}^1$ el bucle con base $(1, 0)$ que va alrededor del circulo exactamente una vez, es decir:

$$\omega(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s), \quad \forall s \in I$$

Para cada $n \in \mathbb{Z}$ se define:

$$\omega_n(s) = (\cos 2\pi ns, \sin 2\pi ns), \quad \forall s \in I$$

es decir, este bucle da n-vueltas alrededor del círculo cuando t varía de 0 a 1.

Ejercicio 7.1
Pruebe que:

$$[\omega]^n = [\omega_n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

donde $[\omega]^n$ es el producto de la clase con representante ω n-veces.

Demostración:
Ejercicio. ■

Para la demostración del teorema, lo se se hará es que dado un camino $f : I \to \mathbb{S}^1$, se comparará al mismo con los caminos que genera la función recubridora $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$

$$p(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s), \quad \forall s \in I$$

este mapeo puede ser visualizado como una helicoide en $\mathbb{R}^3$.

Observación 7.1
Veamos que

$$\omega_n = p \circ \widetilde{\omega}_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

donde $\widetilde{\omega}_n : I \to \mathbb{R}$ es la función tal que $s \mapsto ns$. Básicamente esta función controla el número de giros adicionales que va a dar la helicoide en un solo intervalo de longitud 1. El signo de n determina el sentido de giro de la helicoide.

Note que $\widetilde{\omega}_n$ es un levantamiento de ω_n, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Para determinar el grupo fundamental del círculo, se estudiará como es que los caminos en $\mathbb{S}^1$ se levantan a $\mathbb{R}$.

Teorema 7.1
El grupo fundamental $\pi(\mathbb{S}^1,(1,0))$ es cíclico infinito generado por $[\omega]$.

Demostración:
Sea $f : I \to \mathbb{S}^1$ un bucle con punto base $x_0 = (1,0)$. Por el lema **??** existe un levantamiento $\widetilde{f}$ empezando en 0. Este camino termina en algún entero $n \in \mathbb{Z}$ pues al ser levantamiento se cumple que

$$f = p \circ \widetilde{f}$$

luego, para $s = 1$:

$$p(\widetilde{f}(1)) = p \circ \widetilde{f}(1) = f(1) = x_0$$

y,

$$p^{-1}(x_0) = \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$$

Por tanto, debe existir $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\widetilde{f}(1) = n$. Así $\widetilde{f}$ es un camino que va de 0 a n. Otro camino que también hace lo mismo es $\widetilde{\omega}_n$. Además

$$\widetilde{f} \sim \widetilde{\omega}_n$$

tomando la función continua $\widetilde{F} : I \times I \to \mathbb{R}$, $\widetilde{F}(t,s) = (1-t)\widetilde{f}(s) + t\widetilde{\omega}_n(s)$, para todo $s,t \in I$. Tomando $F(s,t) = p \circ \widetilde{F}(s,t)$ resulta en que $f \sim \omega_n$ (si le quedan dudas, es fácil de verificar que se cumple lo anterior), luego $[f] = [\omega_n] = [\omega]^n$. Se sigue entonces que $\pi(\mathbb{S}^1,(1,0))$ es generado por $[\omega]$.

Para ver que es cíclico infinito, veamos que para el bucle anterior el entero n es único. Suponga que $[f]$ está determinado por $[\omega_n]$ y $[\omega_m]$, es decir que

$$f \sim \omega_n \quad \text{y} \quad f \sim \omega_m$$

con $m \in \mathbb{Z}$. Se sigue que $\omega_n \sim \omega_m$. Por el lema **??** se tiene que $\widetilde{\omega}_n \sim \widetilde{\omega}_m$. En particular, tienen el mismo punto terminal, por lo que

$$m = \widetilde{\omega}_m(1) = \widetilde{\omega}_n(1) = n$$

así, $n = m$. Se sigue entonces que el orden de $[\omega]$ no puede ser finito ya que en caso contrario f tendría al menos dos representaciones con este mismo generador de $\pi(\mathbb{S}^1,(1,0))$.

Por lo tanto $\pi(\mathbb{S}^1,(1,0))$ es un grupo cíclico infinito generado por $[\omega]$, luego es isomorfo a $\mathbb{Z}$. Así:

$$\pi(\mathbb{S}^1,(1,0)) \cong \mathbb{Z}$$

■

Aplicaciones

Observación 7.2
Podemos ver el círculo como subconjunto de $\mathbb{C}$ dado por:

$$\mathbb{S}^1 = \left\{ x + iy \in \mathbb{C} \middle| x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

en particular, $1 \in \mathbb{S}^1$ y el espacio $\mathbb{S}^1$ es arco-conexo, por lo que la elección del punto para calcular el grupo fundamental es independiente del elemento de $\mathbb{S}^1$.

Como aplicación de los resultados anteriores, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 7.2 (**Teorema fundamental del álgebra**)
Todo polinomio no constante con coeficientes en $\mathbb{C}$ tiene una raíz en $\mathbb{C}$.

Demostración:
Sea $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un polinomio. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que

$$p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n$$

donde $a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$, con $n \geq 0$. Si $n = 0$ entonces $p(z) = 1, \forall z \in \mathbb{C}$ (estamos diciendo que el polinomio p es mónico).

Supongamos que p no tiene raíces en $\mathbb{C}$. Para cada $r \geq 0$ se define la función $f_r : I \to \mathbb{C}$ por:

$$f_r(s) = \frac{p(re^{2\pi is})/p(r)}{|p(re^{2\pi is})/p(r)|}, \quad \forall s \in I$$

la cual es un bucle en el círculo unitario $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$ con base en 1. Se tiene que f_0 es el bucle constante con base en 1, por lo que $[f_0]$ es la identidad de $\pi(\mathbb{S}^1, 1)$. Afirmamos que

$$f_r \sim f_0$$

para todo $r > 0$. En efecto, sea $r > 0$ y $F : I \times I \to \mathbb{S}^1$ dada por:

$$F(t, s) = f_{rt}(s), \quad \forall s, t \in I$$

Es claro de la definición de f_r que $F(t, s)$ es continua. Veamos que:

$$F(0, s) = f_0(s) \quad \text{y} \quad F(1, s) = f_r(s), \quad \forall s \in I$$

Y además:

$$F(t, 0) = f_{rt}(0) = 1 \quad \text{y} \quad F(t, 1) = f_{rt}(1) = 1, \quad \forall t \in I$$

(pues todos los bucles tienen como punto base a 1). Por tanto, $f_0 \sim f_r$ para todo $r \geq 0$. Se sigue pues que

$$[f_0] = [f_r], \quad \forall r \geq 0$$

es decir que $[f_r]$ es la identidad de $\pi(\mathbb{S}^1, 1)$ para todo $r \geq 0$.

Fijemos ahora $r > 0$ tal que

$$r > \text{máx}\{|a_1| + ... + |a_n|, 1\}$$

Entonces si $z \in \mathbb{C}$ es tal que $\|z\| = r$, tenemos que

$$\begin{aligned}
t\left|a_1 z^{n-1} + ... + a_n\right| &\leq \left|a_1 z^{n-1} + ... + a_n\right| \\
\left|a_1 z^{n-1} + ... + a_n\right| &\leq \left|a_1 z^{n-1}\right| + ... + |a_n| \\
&< (|a_1| + ... + |a_n|)\,|z|^{n-1} \\
&< |z|^n \\
\Rightarrow \left|a_1 z^{n-1} + ... + a_n\right| &< |z|^n \\
&\Rightarrow 0 < |z|^n - \left|a_1 z^{n-1} + ... + a_n\right|
\end{aligned}$$

para todo $t \in I$, lo cual implica que

$$t\left|a_1 z^{n-1} + ... + a_n\right| < |z|^n, \quad \forall t \in I$$

Por tanto, el polinomio

$$p_t(z) = z^n + t\left(a_1 z^{n-1} + ... + a_n\right), \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

no tiene raíces cuando $\|z\| = r$ (círculo centrado en 0 de radio r) y cuando $t \in I$, pues si z y t cumplen estas condiciones se sigue que:

$$\begin{aligned}
|p_t(z)| &= \left|z^n + t\left(a_1 z^{n-1} + ... + a_n\right)\right| \\
&\geq |z|^n - t\left|a_1 z^{n-1} + ... + a_n\right| \\
&> 0
\end{aligned}$$

Definimos la función $G : I \times I \to \mathbb{C}$ dada por:

$$G(t,s) = \frac{p_t(re^{2\pi is})/p_t(r)}{|p_t(re^{2\pi is})/p_t(r)|}, \quad \forall s,t \in I$$

Esta función es tal que $f_r \sim \omega_n$. En efecto, esta función es continua y cumple que:

$$\begin{aligned} F(0,s) &= \frac{p_0(re^{2\pi is})/p_0(r)}{|p_0(re^{2\pi is})/p_0(r)|} \\ &= \frac{r^n e^{2\pi ins}/r^n}{|r^n e^{2\pi ins}/r^n|} \\ &= e^{2\pi ins} \\ &= \cos(2\pi ns) + i\sin(2\pi ns) \\ &= \omega_n(s), \quad \forall s \in I \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned} F(1,s) &= \frac{p_1(re^{2\pi is})/p_1(r)}{|p_1(re^{2\pi is})/p_1(r)|} \\ &= \frac{p(re^{2\pi is})/p(r)}{|p(re^{2\pi is})/p(r)|} \\ &= f_r(s), \quad \forall s \in I \end{aligned}$$

(el hecho ed que los extremos que se quedan fijos se verifica rápidamente). Anteriormente se probó que ω_n es tal que

$$[\omega_n] = [\omega]^n$$

por ende,

$$[f_r] = [\omega]^n$$

pero $[f_r] = [f_0]$ es la identidad del grupo, así que $n = 0$. Luego

$$p(z) = 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

esto es, el único polinomio que no tiene raíces en $\mathbb{C}$ es el polinomio constante no cero. ■

Ahora un resultado familiar enunciado al inicio del taller:

Teorema 7.3 (Teorema del punto fijo de Brower para dimensión 2)
Toda función continua $f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ tiene un punto fijo, es decir existe $z \in \mathbb{D}^2$ tal que $f(z) = z$, donde:

$$\mathbb{D}^2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

Demostración:
Suponga que para todo $z \in \mathbb{D}^2$ se tiene que $f(z) \neq z$. Definimos la función $r : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$ dada como sigue:

- Sea $z = (x,y) \in \mathbb{D}^2$. Considere la función $l_x :]0,\infty[\to \mathbb{R}^2$ dada por:

  $$l_z(t) = (1-t)f(z) + tz = ((1-t)f_1(x,y) + tx, (1-t)f_2(x,y) + ty)$$

  (es la recta que comienza en $f(z)$ y va en dirección de z) donde $f(z) = (f_1(z), f_2(z))$. Por el teorema del valor medio se tiene que existe un único $t_x \in]0,\infty[$ tal que

  $$\|l_z(t_z)\| = 1$$

En efecto, como $l_z\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{f(z)+z}{2}$, este punto es tal que no puede tener norma igual a 1, ya que en caso contrario:

$$\begin{aligned}\|\frac{f(z)+z}{2}\| = 1 &\Rightarrow \|f(z)+z\| = 2\\ &\Rightarrow 2 \leq \|f(z)\| + \|z\| \leq 2\\ &\Rightarrow \|f(z)\| = \|z\| = 1\end{aligned}$$

por ende, $\|f(z)\| + \|z\| = \|f(z)+z\|$ así que deben ser coolineales. Como tienen la misma norma, entonces deben ser el mismo, lo cual no puede suceder ya que $f(z) \neq z$. Por tanto

$$l_z\left(\frac{1}{2}\right) < 1$$

y,

$$\lim_{t\to\infty} \|l_z(t)\| = \infty$$

del teorema del valor medio se sigue la existencia de tal $t_x \in]0,\infty[$. Este elemento está determinado por una de las raíces con $t \in]0,\infty[$ de la ecuación:

$$\begin{aligned}\|l_z(t)\| = 1 &\iff \|l_x(t)\|^2 = 1\\ &\iff \|((1-t)f_1(x,y)+tx, (1-t)f_2(x,y)+ty)\|^2 = 1\\ &\iff ((1-t)f_1(x,y)+tx)^2 + (1-t)f_2(x,y)+ty)^2 = 1\end{aligned}$$

el cual es un polinomio de grado 2. Por tanto, la aplicación $z \mapsto t_z$ es una función continua. Así, la aplicación $z \mapsto l_z(t_z)$ es una función continua (por ser composición de funciones continuas). Hacemos entonces $r(z) = l_z(t_z)$ la cual es continua y es tal que $t_z > 0$.

- Si $z \in \mathbb{D}^2$ es tal que $\|z\| = 1$, entonces $r(z) = z$ (pues la función l_z solo pasa por un $t \in]0,\infty[$ tal que $\|l_z(t)\| = 1$, en particular debe pasar por z).

Por los dos incisos anteriores, $r : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$ es una función continua siendo $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{D}^2$. Se tiene que r es una retracción de $\mathbb{D}^2$. En particular, se sabe que la función

$$r_* : \pi(\mathbb{D}^2, (1,0)) \to \pi(\mathbb{S}^1, (1,0))$$

es un epimorfismo. Pero como $\mathbb{D}^2$ tiene forma de estrella respecto a $(0,0)$ se tiene que $\mathbb{D}^2$ es contraíble a un punto, luego es simplemente conexo. Así que

$$\pi(\mathbb{D}^2, (1,0)) = \langle e \rangle$$

y,

$$\pi(\mathbb{S}^1, (1,0)) \cong \mathbb{Z}$$

por ende, r_* no puede ser epimorfismo, lo cual es una contradicción. De esta forma se sigue que debe existir $z \in \mathbb{D}^2$ tal que $f(z) = z$. ■

El hecho de que $\pi(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$ puede ser usado para probar el siguiente resultado:

Teorema 7.4 (Teorema de Borsuk-Ulam en dimensión 2)
Para cada función continua $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ existen un par de puntos antipodales $x, -x \in \mathbb{S}^2$ tales que

$$f(x) = f(-x)$$

donde

$$\mathbb{S}^2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2+y^2+z^2 = 1\right\}$$

Demostración:

Sea $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función continua tal que

$$f(x) \neq f(-x), \quad \forall x \in \mathbb{S}^2$$

Podemos definir entonces una función $g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$ tal que

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}, \quad \forall x \in \mathbb{S}^2$$

considerando a $\mathbb{S}^1$ como subconjunto de $\mathbb{R}^2$ es decir:

$$\mathbb{S}^1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2 + y^2 = 1\right\}$$

Definimos ahora el bucle $\eta : I \to \mathbb{S}^2$ como:

$$\eta(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, 0)$$

y hacemos

$$h = g \circ \eta$$

éste es un bucle en $\mathbb{S}^1$. Como $-g(x) = g(-x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^2$, se tiene que

$$\begin{aligned}
h(s + 1/2) &= g \circ \eta(s + 1/2) \\
&= g(\cos(2\pi s + \pi), \sin(2\pi s + \pi), 0) \\
&= g(-\cos 2\pi s, -\sin 2\pi s, 0) \\
&= g(-(\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, 0)) \\
&= -g \circ \eta(s) \\
&= -h(s), \quad \forall s \in [0, 1/2]
\end{aligned}$$

El camino h puede ser levantado a un camino $\widetilde{h} : I \to \mathbb{R}$ empezando en cero, para el que se cumple que:

$$p \circ \widetilde{h} = h$$

siendo p la función tal que $s \mapsto (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$. En particular,

$$p(\widetilde{h}(s + 1/2)) + p(\widetilde{h}(s)) = h(s + 1/2) + h(s) = 0$$

para todo $s \in [0, 1/2]$. Esto es:

$$\begin{aligned}
0 &= (\cos 2\pi\widetilde{h}(s + 1/2), \sin 2\pi\widetilde{h}(s + 1/2)) + (\cos 2\pi\widetilde{h}(s), \sin 2\pi\widetilde{h}(s)) \\
&= (\cos 2\pi\widetilde{h}(s + 1/2) + \cos 2\pi\widetilde{h}(s), \sin 2\pi\widetilde{h}(s + 1/2) + \sin 2\pi\widetilde{h}(s)) \\
&= \Bigg(2\cos\frac{2\pi(\widetilde{h}(s + 1/2) + \widetilde{h}(s))}{2}\cos\frac{2\pi(\widetilde{h}(s + 1/2) - \widetilde{h}(s))}{2} \\
&\qquad , 2\sin\frac{2\pi(\widetilde{h}(s + 1/2) + \widetilde{h}(s))}{2}\cos\frac{2\pi(\widetilde{h}(s + 1/2) - \widetilde{h}(s))}{2}\Bigg) \\
&= \Big(2\cos\pi(\widetilde{h}(s + 1/2) + \widetilde{h}(s))\cos\pi(\widetilde{h}(s + 1/2) - \widetilde{h}(s)) \\
&\qquad , 2\sin\pi(\widetilde{h}(s + 1/2) + \widetilde{h}(s))\cos\pi(\widetilde{h}(s + 1/2) - \widetilde{h}(s))\Big)
\end{aligned}$$

la única forma de que esto sea cero, es que

$$\cos\pi(\widetilde{h}(s + 1/2) - \widetilde{h}(s)) = 0 \iff \widetilde{h}(s + 1/2) - \widetilde{h}(s) = \frac{q(s)}{2}$$

donde $q(s) \in \mathbb{Z}$ es un impar, para todo $s \in I$. Pero la función $q : [0, 1/2] \to \mathbb{Z}$ es continua, por lo que debe ser constante. Así que:

$$\widetilde{h}(s + 1/2) - \widetilde{h}(s) = \frac{q}{2}$$

para algún $q \in \mathbb{Z}$. En particular:

$$\begin{aligned}\widetilde{h}(1) &= \widetilde{h}(1/2) + \frac{q}{2} \\ &= \left(\widetilde{h}(0) + \frac{q}{2}\right) + \frac{q}{2} \\ &= \widetilde{h}(0) + q \\ &= q\end{aligned}$$

por ende, $h \sim \omega_q$. En particular esto implica que h no es homotópica a una función contante ya que q es impar (la única forma en que fuera homotópica a una función constante es si $q = 0$).

Pero η es homotópica a la función g, $s \mapsto (0, 0, 1)$ que es constante. Para ello, tome la función $F : I \times I \to \mathbb{S}^2$ dada por:

$$F(s, t) = \left(\cos 2\pi s \cos \frac{\pi t}{2}, \sin 2\pi s \cos \frac{\pi t}{2}, \sin \frac{\pi t}{2}\right)$$

(claramente esta función está bien definida y es continua), para la cual se cumple que:

$$\begin{aligned}F(s, 0) &= (\cos 2\pi s \cos 0, \sin 2\pi s \cos 0, 0) \\ &= (\cos 2\pi s \cos, \sin 2\pi s, 0) \\ &= \eta(s), \quad \forall s \in I\end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}F(s, 1) &= \left(\cos 2\pi s \cos \frac{\pi}{2}, \sin 2\pi s \cos \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2}\right) \\ &= (0, 0, 1)\end{aligned}$$

con lo que se tiene la homotopía deseada. Así, también debe suceder que $g \circ \eta$ sea homotópica a una función constante, es decir que h es homotópica a una función constante, lo cual contradice lo probado anteriormente.

Así que, existe $x \in \mathbb{S}^2$ tal que

$$f(x) = f(-x)$$

■

Corolario 7.1
Si $\mathbb{S}^2$ es escrito como la unión de tres conjuntos cerrados $A_1, A_2, A_3 \subseteq \mathbb{S}^2$, entonces uno de estos debe tener un par de puntos antipodales $\{x, -x\}$.

Demostración:
Sean $A_1, A_2, A_3 \subseteq \mathbb{S}^2$ conjuntos tales que

$$\mathbb{S}^2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

para cada $i = 1, 2$ definimos la función $d_i : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$d_i(x) = \text{ínf} \left\{ \|x - y\| \middle| y \in A_i \right\}$$

se sabe que esta es una función continua por cursos de análisis matemático. Por el teorema de Borsuk-Ulam, para la función $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ continua dada por:

$$f(x) = (d_1(x), d_2(x))$$

existen un par de puntos antipodales $x, -x \in \mathbb{S}^2$ tales que:

$$f(x) = f(-x) \Rightarrow d_1(x) = d_1(-x) \text{ y } d_2(x) = d_2(-x)$$

Se tienen dos casos:

- $d_1(x) = d_1(-x) = 0$ o $d_2(x) = d_2(-x) = 0$, en el primer caso se sigue que al ser A_1 cerrado, entonces $x, -x \in A_1$. De forma análoga en el segundo caso se sigue que $x, -x \in A_2$.
- $d_1(x) = d_1(-x) > 0$ y $d_2(x) = d_2(-x) > 0$. Como los conjuntos A_1 y A_2 son cerrados, forzosamente debe suceder que $x, -x \notin A_1, A_2$. Por tanto, $x, -x \in A_3$ ya que $\mathbb{S}^2$ es la unión de los A_i.

por los dos incisos anteriores se tiene el resultado. ■