Examen Geometría Dif. III.

Problema 1.- (30 puntos)

Exercise 2.1.iii. Let U be an open subset of $\mathbf{R}^n$ and $\boldsymbol{v}_1$ and $\boldsymbol{v}_2$ vector fields on U. Show that there is a unique vector field $\boldsymbol{w}$, on U with the property

$$L_{\boldsymbol{w}}\phi = L_{\boldsymbol{v}_1}(L_{\boldsymbol{v}_2}\phi) - L_{\boldsymbol{v}_2}(L_{\boldsymbol{v}_1}\phi)$$

for all $\phi \in C^\infty(U)$.

Exercise 2.1.iv. The vector field $\boldsymbol{w}$ in Exercise 2.1.iii is called the ***Lie bracket*** of the vector fields $\boldsymbol{v}_1$ and $\boldsymbol{v}_2$ and is denoted by $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$. Verify that the Lie bracket is *skew-symmetric*, i.e.,

$$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2] = -[\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1],$$

and satisfies the *Jacobi identity*

$$[\boldsymbol{v}_1, [\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]] + [\boldsymbol{v}_2, [\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_1]] + [\boldsymbol{v}_3, [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]] = 0.$$

(And thus defines the structure of a *Lie algebra*.)

Hint: Prove analogous identities for $L_{\boldsymbol{v}_1}$, $L_{\boldsymbol{v}_2}$ and $L_{\boldsymbol{v}_3}$.

Sol.

De (iii): Se probará primero la existencia de tal campo vectorial (denotado de ahora en adelante por w). Para ello, sea $\phi \in C^\infty(U)$. Recordemos de la definición de diferencial de Lie, $L_{v_1}\phi : U \to \mathbb{R}$, $p \mapsto D\phi_p(v_1)$ (dónde $v_1(p) = (p, v_1)$, $\forall p \in U$, de ahora en adelante, todos los campos vectoriales se denotarán en gris).

Viendo a los campos vectoriales como derivaciones, para ver que existe el campo vectorial w, basta ver que $w(f \cdot g)$ satisface la regla de Leibniz, $\forall f, g \in C^\infty(U)$:

$$w(f \cdot g) = (w f) g + f (w g)$$

es decir:

$$w(f \cdot g)(p) = (w f)(p) g(p) + f(p) (w g)(p), \forall p \in U$$

ya que (por el libro "An introduction to manifolds") se tiene el isomorfismo $\mathfrak{X}(U)$ con $Der(C^\infty(U))$, dónde

$$(w f)(p) = w(p)[f] = L_w f(p), \text{ y}$$
$$(w g)(p) = w(p)[g] = L_w g(p)$$

Es decir, hay que probar que:

$$L_{v}(f\cdot g) = (L_{v} f)g + f(L_{v} g), \ \forall f,g \in C^{\infty}(U).$$

En efecto, sean $f,g \in C^{\infty}(U)$, ent. para los campos vect. v_1 y v_2 se tiene que:

$$\begin{aligned}
L_{v}(f\cdot g) &= L_{v_1}(L_{v_2}(f\cdot g)) - L_{v_2}(L_{v_1}(f\cdot g)) \\
&= L_{v_1}([L_{v_2} f]\cdot g + f\cdot L_{v_2} g) - L_{v_2}([L_{v_1} f]\cdot g + f\cdot L_{v_1} g) \\
&= L_{v_1}(L_{v_2} f)\cdot g + (L_{v_2} f)\cdot(L_{v_1} g) + (L_{v_1} f)\cdot(L_{v_2} g) + f\cdot L_{v_1}(L_{v_2} g) \\
&\quad - L_{v_2}(L_{v_1} f)\cdot g - (L_{v_1} f)\cdot(L_{v_2} g) - (L_{v_2} f)\cdot(L_{v_1} g) - f\cdot L_{v_2}(L_{v_1} g) \\
&= [L_{v_1}(L_{v_2} f) - L_{v_2}(L_{v_1} f)]\cdot g + f\cdot[L_{v_1}(L_{v_2} g) - L_{v_2}(L_{v_1} g)] \\
&= (L_{v} f)\cdot g + f\cdot(L_{v} g)
\end{aligned}$$

i.e. L_{v} es una derivación y por ende, el campo vectorial v existe y está bien definido. Además, debido al isomorfismo de esp. vect. ($\mathfrak{X}(U)$ y $\mathrm{Der}(C^{\infty}(U))$), este campo vectorial es único.

De (iv): Veamos que para los campos vectoriales v_1 y v_2 se tiene que:

$$\begin{aligned}
L_{[v_1,v_2]}\phi &= L_{v_1}(L_{v_2}\phi) - L_{v_2}(L_{v_1}\phi) \\
&= -[L_{v_2}(L_{v_1}\phi) - L_{v_1}(L_{v_2}\phi)] \\
&= -L_{[v_2,v_1]}\phi
\end{aligned}$$

$\forall \phi \in C^{\infty}(U)$, y además, $\forall p \in U$:

$$\begin{aligned}
-(L_{[v_2,v_1]}\phi)(p) &= -[v_2,v_1](p)(\phi) \\
&= (-[v_2,v_1])(p)(\phi) \\
&= (L_{-[v_2,v_1]}\phi)(p)
\end{aligned}$$

Por ende:

$$L_{[v_1,v_2]}\phi = L_{-[v_2,v_1]}\phi$$

y, por la unicidad de este campo vectorial, se sigue que:

$$[v_1,v_2] = -[v_2,v_1]$$

Ahora, veamos que $\forall \phi \in C^{\infty}(U)$:

$$\begin{aligned}
L_{[v_1,[v_2,v_3]]}\phi &= L_{v_1}\left(L_{[v_2,v_3]}\phi\right) - L_{[v_2,v_3]}\left(L_{v_1}\phi\right) \\
&= L_{v_1}\left[L_{v_2}(L_{v_3}\phi) - L_{v_3}(L_{v_2}\phi)\right] - \left[L_{v_2}(L_{v_3}(L_{v_1}\phi)) - L_{v_3}(L_{v_2}(L_{v_1}\phi))\right] \\
&= L_{v_1}(L_{v_2}(L_{v_3}\phi)) - L_{v_1}(L_{v_3}(L_{v_2}\phi)) - L_{v_2}(L_{v_3}(L_{v_1}\phi)) + L_{v_3}(L_{v_2}(L_{v_1}\phi))
\end{aligned}$$

y, por ende:

$$\begin{aligned}
L_{[v_2,[v_3,v_1]]}\phi &= L_{v_2}(L_{v_3}(L_{v_1}\phi)) - L_{v_2}(L_{v_1}(L_{v_3}\phi)) - L_{v_3}(L_{v_1}(L_{v_2}\phi)) + L_{v_1}(L_{v_3}(L_{v_2}\phi)) \\
L_{[v_3,[v_1,v_2]]}\phi &= L_{v_3}(L_{v_1}(L_{v_2}\phi)) - L_{v_3}(L_{v_2}(L_{v_1}\phi)) - L_{v_1}(L_{v_2}(L_{v_3}\phi)) + L_{v_2}(L_{v_1}(L_{v_3}\phi))
\end{aligned}$$

Se sigue entonces que, como

$$\begin{aligned}
L_{[v_2,[v_3,v_1]]+[v_3,[v_1,v_2]]}\phi &= L_{[v_2,[v_3,v_1]]}\phi + L_{[v_3,[v_1,v_2]]}\phi \\
&= L_{v_2}(L_{v_3}(L_{v_1}\phi)) \cancel{- L_{v_2}(L_{v_1}(L_{v_3}\phi))} \cancel{- L_{v_3}(L_{v_1}(L_{v_2}\phi))} \\
&\quad + L_{v_1}(L_{v_3}(L_{v_2}\phi)) \\
&\quad \cancel{+ L_{v_3}(L_{v_1}(L_{v_2}\phi))} - L_{v_3}(L_{v_2}(L_{v_1}\phi)) - L_{v_1}(L_{v_2}(L_{v_3}\phi)) \\
&\quad \cancel{+ L_{v_2}(L_{v_1}(L_{v_3}\phi))} \\
&= -\left[L_{v_1}(L_{v_2}(L_{v_3}\phi)) - L_{v_1}(L_{v_3}(L_{v_2}\phi)) - L_{v_2}(L_{v_3}(L_{v_1}\phi)) + L_{v_3}(L_{v_2}(L_{v_1}\phi))\right] \\
&= -L_{[v_1,[v_2,v_3]]}\phi \\
&= L_{-[v_1,[v_2,v_3]]}\phi
\end{aligned}$$

y nuevamente, por unicidad:

$$[v_2,[v_3,v_1]] + [v_3,[v_1,v_2]] = -[v_1,[v_2,v_3]]$$

$$\Rightarrow [v_1,[v_2,v_3]]+[v_2,[v_3,v_1]]+[v_3,[v_1,v_2]] = 0$$

$\square$

Problema 2.- (40 puntos)

Exercise 2.2.x. Let U be an open subset of $\mathbf{R}^n$ and $\boldsymbol{v}$ and $\boldsymbol{w}$ vector fields on U. Suppose $\boldsymbol{v}$ is the infinitesimal generator of a one-parameter group of diffeomorphisms

$$f_t : U \xrightarrow{\simeq} U, \quad -\infty < t < \infty.$$

Let $\boldsymbol{w}_t = f_t^\star \boldsymbol{w}$. Show that for $\phi \in C^\infty(U)$ we have

$$L_{[\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}]}\phi = L_{\dot{\boldsymbol{w}}}\phi,$$

where

$$\dot{\boldsymbol{w}} = \frac{d}{dt} f_t^\star \boldsymbol{w} \Big|_{t=0}.$$

Hint: Differentiate the identity

$$f_t^\star L_{\boldsymbol{w}}\phi = L_{\boldsymbol{w}_t} f_t^\star \phi$$

with respect to t and show that at $t = 0$ the derivative of the left-hand side is $L_{\boldsymbol{v}} L_{\boldsymbol{w}}\phi$ by Exercise 2.2.iii, and the derivative of the right-hand side is

$$L_{\dot{\boldsymbol{w}}} + L_{\boldsymbol{w}}(L_{\boldsymbol{v}}\phi).$$

Exercise 2.2.xi. Conclude from Exercise 2.2.x that

$$[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] = \frac{d}{dt} f_t^\star \boldsymbol{w} \Big|_{t=0}. \tag{2.2.25}$$

Sol.

De (x): En el ejercicio (ix) se definió (tomando a $w = \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial}{\partial x_i}$):

$$f^* w = f_*^{-1} v$$
$$= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} w_j \right) \circ f^{-1} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \forall f : U \xrightarrow{\simeq} U \text{ dif.}$$

Ahora con la prueba. Como w está f_t-relacionado con v_t, pues:

$$w_t(f_t(p)) = f_t^* w(f_t(p))$$
$$= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial (f_t)_i}{\partial x_j} w_j \right) \circ f_t^{-1}(f_t(p)) \right) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$$
$$= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n w_j \frac{\partial (f_t)_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \right)(p)$$
$$= d f_{tp} \left(\left(\sum_{j=1}^n w_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)(p) \right)$$
$$= d(f_t)_p (w(p)), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Se cumple entonces la identidad:

$$f_t^* L_v \phi = L_{w_t} f_t^* \phi \quad \ldots (1)$$

para $\phi \in C^\infty(U)$. Para continuar, veamos que si $\theta \in C^1(U)$, ent.

$$L_v \theta = \frac{d}{dt} f_t^* \theta \,\Big|_{t=0} \quad \ldots (2)$$

En efecto, si $p \in U$, ent.

$$\begin{aligned} L_v \theta(p) &= v(p)[\theta] \\ &= \frac{d}{dt}\left(\theta \circ \gamma_p(t)\right)\Big|_{t=0} \end{aligned}$$

dónde $\gamma_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una curva integral m $\gamma_p(0) = p$ y $\frac{d}{dt}\gamma_p(t)\big|_{t=0} = v(p)$. Como v es el generador infinitesimal del grupo uniparamétrico de difeomorfismos $f_t : U \xrightarrow{\sim} U$, ent.

$$\gamma_p(t) = f_t(p), \ \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Luego:

$$\begin{aligned} L_v \theta(p) &= \frac{d}{dt}\left(\theta \circ f_t(p)\right)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\theta \circ f_t\right)\Big|_{t=0}(p) \\ &= \frac{d}{dt}\left(f_t^* \theta\right)\Big|_{t=0}(p), \ \forall\, p \in U. \end{aligned}$$

$$\therefore L_v \theta = \frac{d}{dt}\left(f_t^* \theta\right)\Big|_{t=0}$$

Así, tomando $\theta = L_v \phi$ en (2), obtenemos que:

$$\begin{aligned} L_v(L_v \phi) &= \frac{d}{dt}\left(f_t^* L_v \phi\right)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\left(L_{w_t} f_t^* \phi\right)\Big|_{t=0}, \ \forall\, \phi \in C^\infty(U) \quad \ldots (3) \end{aligned}$$

y:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(L_{w_t}(f_t^* \phi)\right)\Big|_{t=0}(p) &= \frac{d}{dt}\left(L_{w_t}(\phi \circ f_t)\right)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^n (w_t)_i(p)\, \frac{\partial(\phi \circ f_t)}{\partial x_i}(p)\right)\Big|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}(w_t)_i(p)\Big|_{t=0} \cdot \frac{\partial(\phi \circ f_0)}{\partial x_i}(p) + \sum_{i=1}^n (w_0)_i(p)\, \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(\phi \circ f_t)}{\partial x_i}(p)\right)\Big|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}(w_t)_i(p) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(p)\Big|_{t=0} + \sum_{i=1}^n (w_t)_i(p) \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(\phi \circ f_t)}{\partial x_i}(p)\right)\Big|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}(w_t)_i(p)\Big|_{t=0} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(p) + \sum_{i=1}^n (w_0)_i(p) \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(\phi \circ f_t)}{\partial x_i}(p)\right)\Big|_{t=0} \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \dot{\omega}_i(p) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(p) + \sum_{i=1}^{n} w_i(p) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{d}{dt} \phi \circ f_t(p)\right)\Big|_{t=0}$$

$$= L_{\dot{w}} \phi(p) + L_{w}\left(\frac{d}{dt} \phi \circ f_t(p)\Big|_{t=0}\right)$$

$$= \left(L_{\dot{w}} \phi + L_{w}(L_{v} \phi)\right)(p)$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(L_{w_t}(f_t^* \phi)\right)\Big|_{t=0} = L_{\dot{w}} \phi + L_{w}(L_{v} \phi) \ldots (4)$$

pues, $\phi \circ f_t(p)$ se puede cambiar el orden de las integrales, $w_0 = w$, pues $f_0 = id_U$, $L_v \phi(p) = \frac{d}{dt} \phi \circ r_p(t)\big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\phi \circ f_t(p))\big|_{t=0}$, y:

$$\dot{w} = \sum_{i=1}^{n} \dot{\omega}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

dónde $\dot{\omega}_i = \frac{d}{dt}(w_t)_i\big|_{t=0}$, siendo $w_t = \sum_{i=1}^{n} (w_t)_i \frac{\partial}{\partial x_i} = f_t^* w$. Así, de (3) y (4) se sigue que:

$$L_v(L_w \phi) = L_{\dot{w}} \phi + L_w(L_v \phi)$$

$$\Rightarrow L_v(L_w \phi) - L_w(L_v \phi) = L_{\dot{w}} \phi$$

$$\Rightarrow L_{[v,w]} \phi = L_{\dot{w}} \phi, \ \forall \phi \in C^\infty(U)$$

De (x_i): Finalmente, por la unicidad de los corchetes de Lie, se sigue que:

$$[v,w] = \dot{w}$$

$$= \frac{d}{dt} f_t^* w \Big|_{t=0}$$

$\square$

Problema 3.- (30 puntos) Demuestre:

Theorem 2.6.15. *Let U be an open subset of $\mathbf{R}^n$, V an open subset of $\mathbf{R}^m$, and $f_0, f_1 : U \to V$ two C^∞ maps. If f_0 and f_1 are homotopic then for every closed form $\omega \in \Omega^k(V)$ the form $f_1^\star \omega - f_0^\star \omega$ is exact.*

Dem.

Como $f_0 \simeq f_1$, ent. $\exists\, F : U \times A \to V$, $A \subseteq \mathbb{R}$ abierto $\ni 0,1 \in A$, F mapeo $C^\infty(U\times A)$ $\ni$ A es conexo y:

$$F(x,0) = f_0(x) \quad \text{y} \quad F(x,1) = f_1(x),\ \forall\, x \in U.$$

Sea $\omega \in \Omega^k(V)$ una k-forma cerrada. Defina $\bar{\omega} := F^*\omega \in \Omega^k(U\times A)$. Se probará que $\bar{\omega}$ es cerrada, en efecto, veamos que si $\omega = \sum_I \omega_I\, dx_I$, ent.

$$\bar{\omega} = F^*\Big(\sum_I \omega_I \wedge dx_I\Big)$$
$$= \sum_I F^*\omega_I \wedge dF_I$$

dónde $dF_I = dF_{i_1} \wedge \dots \wedge dF_{i_k}$, $\forall\, I$, siendo

$$dF_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial F}{\partial t} dt, \quad \forall\, i \in [\![1,n]\!]$$

así, podemos escribir a $\bar{\omega}$ como la suma de dos componentes, a saber $\bar{\omega}_1 \in \Omega^k(U\times A)$ y $\bar{\omega}_2 \in \Omega^{k-1}(U\times A)$, dónde

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + dt \wedge \bar{\omega}_2 \quad \dots (*)$$

(una componente contiene a la 1-forma dt, y la otra parte no), dónde

$$\bar{\omega}_1 = \sum_I (\bar{\omega}_1)_I\, dx_I \quad \text{y} \quad \bar{\omega}_2 = \sum_J (\bar{\omega}_2)_J\, dx_J$$

con I multi-índices de longitud k y J multi-índices de longitud $k-1$. Afirmamos que estas dos componentes son únicas, en efecto, si $\bar{\omega}_1'$ y $\bar{\omega}_2'$ cumplen que:

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1' + dt \wedge \bar{\omega}_2'$$

entonces:

$$\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_1' = dt \wedge (\bar{\omega}_2' - \bar{\omega}_2)$$

pero, como los términos de $\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_1'$ no contienen a dt, la igualdad sólo se puede dar si ambas partes son 0, i.e

$$\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_1' \quad y \quad dt \wedge (\bar{\omega}_2' - \bar{\omega}_2) = 0 \Rightarrow \bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_2'$$

lo cual prueba la unicidad. De esta forma, definimos el mapeo $I : \Omega^K(U \times A) \to \Omega^{K-1}(U)$

$$I(\bar{\omega})_p(v_1, \dots, v_{K-1}) = \int_0^1 \{ \bar{\omega}_{2(p,t)}((di_t)_p(v_1), \dots, (di_t)_p(v_{K-1})) \} dt$$

$\forall\, p \in U$ y $\forall\, v_1, \dots, v_{K-1} \in T_pU$, dónde los mapeos $di_t : T_pU \to T_{(p,t)}U \times A$ son las diferenciales del mapeo $i_t : U \to U \times A$, $p \mapsto i_t(p) = (p,t)$, $\forall\, t \in A$.

Por la unicidad de la descomposición de $\bar{\omega}$, el mapeo I está bien definido. Veamos que

$$I(\bar{\theta} + \bar{\mu}) = I(\bar{\theta}) + I(\bar{\mu}), \quad \forall\, \bar{\theta}, \bar{\mu} \in \Omega^K(U \times A) \dots (1)$$

En efecto, sean $\bar{\theta}, \bar{\mu} \in \Omega^K(U \times A)$, estas 2 K-formas se descomponen de forma única como:

$$\bar{\theta} = \bar{\theta}_1 + dt \wedge \bar{\theta}_2, \quad y$$

$$\bar{\mu} = \bar{\mu}_1 + dt \wedge \bar{\mu}_2$$

Ent.

$$\bar{\theta} + \bar{\mu} = (\bar{\theta}_1 + \bar{\mu}_1) + dt \wedge (\bar{\theta}_2 + \bar{\mu}_2)$$

Luego, por unicidad de la descomposición se sigue que:

$$\begin{aligned} I(\bar{\theta} + \bar{\mu})_p(v_1, \dots, v_{K-1}) &= \int_0^1 \{ (\bar{\theta}_2 + \bar{\mu}_2)_{(p,t)}((di_t)(v_1), \dots, (di_t)(v_{K-1})) \} dt \\ &= \int_0^1 \{ \bar{\theta}_{2(p,t)}(di_t(v_1), \dots, di_t(v_{K-1})) \} dt + \int_0^1 \{ \bar{\mu}_{2(p,t)}(di_t(v_1), \dots, di_t(v_{K-1})) \} dt \\ &= I(\bar{\theta})_p(v_1, \dots, v_{K-1}) + I(\bar{\mu})_p(v_1, \dots, v_{K-1}) \end{aligned}$$

$\forall\, p \in U$ y $\forall\, v_1, \dots, v_{K-1} \in T_pU$. Por lo cual la identidad (1) queda probada.

Ahora, probaremos que:

$$i_1^* \bar{\omega} - i_0^* \bar{\omega} = d(I\bar{\omega}) + I(d\bar{\omega}) \dots (2)$$

(recordando que $\bar{\omega}$ está dada por (*)). En efecto, por la linealidad del pullback de K-formas y de I, lo anterior basta con probarse en el caso que $\bar{\omega} = \bar{\theta}$, donde $\bar{\theta}$ tiene las dos representaciones siguientes:

a) $\bar{\theta}_{(p,t)} = f(p,t)(dx_I|_{(p,t)})$, en este caso $I(\bar{\theta}) = 0 \Rightarrow d(I\bar{\theta}) = 0$, y

$$d\bar{\theta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I + \frac{\partial f}{\partial t} dt \wedge dx_I$$

por lo cual:

$$I(d\bar{\theta})_p = \left[\int_0^1 \left\{\frac{\partial f}{\partial t}(p,t)\right\} dt\right] dx_I$$

$$= [f(p,1) - f(p,0)] dx_I \ldots (3)$$

y, por otro lado:

$$(i_t^* \bar{\theta})_p = i_t^* (f \, dx_I)_p$$

$$= i_t^* (f \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k})_p$$

$$= (i_t^* f)_p \wedge (i_t^* dx_{i_1})_p \wedge \ldots \wedge (i_t^* \wedge dx_{i_k})_p$$

$$= f(p,t) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

$$\therefore (i_1^* \bar{\theta})_p - (i_0^* \bar{\theta})_p = [f(p,1) - f(p,0)](dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k})_p$$

$$= I(d\bar{\theta})_p + 0$$

$$= I(d\bar{\theta})_p + d(I\bar{\theta})_p$$

usando (3). Por tanto, queda probada (2).

b) $\bar{\theta}_{(p,t)} = f(p,t)(dt \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{k-1}})_{(p,t)}$. Afirmamos que:

$$i_t^* \bar{\theta} = 0, \ \forall \, t \in A$$

En efecto, considere el mapeo proyección $\pi: U \times A \to U$, $(p,t) \mapsto p$, ent.

$$d\pi = \sum_{i=1}^{n} dx_i$$

y, si $v_i = v_i \frac{\partial}{\partial t}$, ent.

$$dx_i(v_i) = v_i[x_i] = v_i \frac{\partial x_i}{\partial t} = 0 \ \forall \, i \in [1,n]$$

Por tanto, si $v_1, \ldots, v_k \in T_p U$, $p \in U$, ent.

$$(i_t^* \bar{\theta})_p(v_1, \ldots, v_k) = \bar{\theta}_{i_t(p)}(di_{t_p}(v_1), \ldots, di_{t_p}(v_k))$$

$$= f(p,t) \, dt_{(p,t)}(di_{t_p}(v_1)) \cdot dx_{1(p,t)}(di_{t_p}(v_2)) \cdot \ldots \cdot dx_{i_{k-1}(p,t)}(di_{t_p}(v_k))$$

pero $di_{t_p}(v_1) = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + v_{1k} \frac{\partial}{\partial x_n} + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial t}$, por lo cual $dt_{(p,t)}(di_{t_p}(v_1)) = 0$. Así:

$$= 0$$

$$\therefore \; i_t^* \bar{\theta} = 0$$

En part. para $t=0$ y 1:

$$i_1^* \bar{\theta} - i_0^* \bar{\theta} = 0 \; \dots (4)$$

Ahora, veamos que:

$$d\bar{\theta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dt \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{K-1}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dt \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{K-1}} \wedge dx_i$$

por lo cual:

$$I(d\bar{\theta})_p = \sum_{i=1}^{n} \left[\int_0^1 \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i}(p,t)\, dt \right\} \right] (-1)^K dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{K-1}} \wedge dx_i \; \dots (5)$$

y

$$I(\bar{\theta})_p = \left[\int_0^1 \{ f(p,t) \} dt \right] dx_I$$

$$\Rightarrow d(I\bar{\theta})_p = \sum_{i=1}^{n} \left[\int_0^1 \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i}(p,t)\, dt \right\} dx_i \wedge dx_I \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\int_0^1 \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i}(p,t) dt \right\} (-1)^{K-1} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{K-1}} \wedge dx_i \right]$$

$$= - I(d\bar{\theta})_p \; \dots (6)$$

$\forall\, p \in U$, sustituyendo (5). Por tanto de (6) y (4) se sigue que:

$$i_1^* \bar{\theta} - i_0^* \bar{\theta} = I(d\bar{\theta}) + d(I\bar{\theta})$$

con lo que queda probado (2).

Por a) y b) se sigue que:

$$i_1^* \bar{\omega} - i_0^* \bar{\omega} = I(d\bar{\omega}) + d(I\bar{\omega}) \; \dots (7)$$

pero, como ω es cerrada, ent. $d\omega = 0$ y por tanto:

$$d\bar{\omega} = d(F^* \omega)$$

$$= F^*(d\omega)$$

$$= F^*(0)$$

$$= 0$$

por lo que (7) se reduce a:

$$i_1^* \bar{\omega} - i_0^* \bar{\omega} = d(I\bar{\omega}) \ldots (8)$$

donde:

$$\begin{aligned} i_t^* \bar{\omega} &= i_t^*(F^* \omega) \\ &= (F \circ i_t)^* \omega, \ \forall t \in A \end{aligned}$$

en part. para $t=0$ y $t=1$, con

$$(F \circ i_t)(p) = F(p,t)$$

$$\Rightarrow (F \circ i_1)(p) = F(p,1) = f_1(p), \text{ y}$$

$$(F \circ i_0)(p) = F(p,0) = f_0(p), \ \forall p \in U$$

$$\therefore F \circ i_1 = f_1 \quad \text{y} \quad F \circ i_0 = f_0$$

Así, (8) se convierte en:

$$\begin{aligned} f_1^* \omega - f_0^* \omega &= d(I\bar{\omega}) \\ &= d(I(F^* \omega)) \end{aligned}$$

esto es, la K-forma en U $f_1^* \omega - f_0^* \omega$ es exacta en U.

$\square$