Resolución C I. Lista 3

Alvarado Cristo Daniel

Abril de 2023

Los presentes ejercicios fueron diseñados para ser resueltos conforme el lector vaya comprendiendo los conceptos y resultados dados en la teoría, si se tiene alguna duda sobre alguno(s) de ellos se recomienda sea disipada de inmediato. Se sugiere al lector redactar, según su criterio, una guía que contenga aquellos conceptos y resultados del capítulo que considere más importantes y/o útiles como referencia rápida de consulta para la solución de los problemas.

3.1. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -3 \leq x < -1 \\ |x| & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1/2 \\ x^2 & \text{si} \quad 1 \leq x < 3 \end{cases}$$

I. ¿**Cuál** es el dominio de f? **Calcule**: $f(2), f(3/2), f(\sqrt{2}), f(-1/2), f(-\sqrt{2}/2), f(-2)$. **Bosqueje** la gráfica de f.

II. Defina $h(x) = f(x+1)$. **Determine** el dominio de h. **Calcule**: $h(1), h(1/2), h(\sqrt{2}-1), h(-3/2), h(-1-\sqrt{2}/2)$ y $h(-3)$. **Bosqueje** la gráfica de h. ¿Existe alguna relación entre la gráfica de f y la gráfica de h? **Explique**.

III. Defina $k(x) = f(x)+1$. **Determine** el dominio de k. **Calcule** $k(2), k(3/2), k(\sqrt{2}), k(-1/2)$,$k(-\sqrt{2}/2)$ y $k(-2)$. **Bosqueje** la gráfica de k. ¿Existe alguna relación entre la gráfica de f y la gráfica de k? **Explique**.

Solución:

De (i): Los posibles valores que f toma son cuando $-3 \leq x < -1$, $-1 \leq x < 0$, $x = \frac{1}{2}$ o $1 \leq x < 3$, esto es, el dominio de f es el conjunto:

$$D_f = [-3, 0[\cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup [1, 3[$$

y, se tiene que:

- $f(2) = 2^2 = 4$.
- $f(3/2) = (3/2)^2 = 9/4$.
- $f(\sqrt{2}) = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$.
- $f(-1/2) = |-1/2| = 1/2$.
- $f(-\sqrt{2}/2) = 1$.
- $f(-2) = 1$.

La gráfica de f está dada como se muestra en la figura 1:

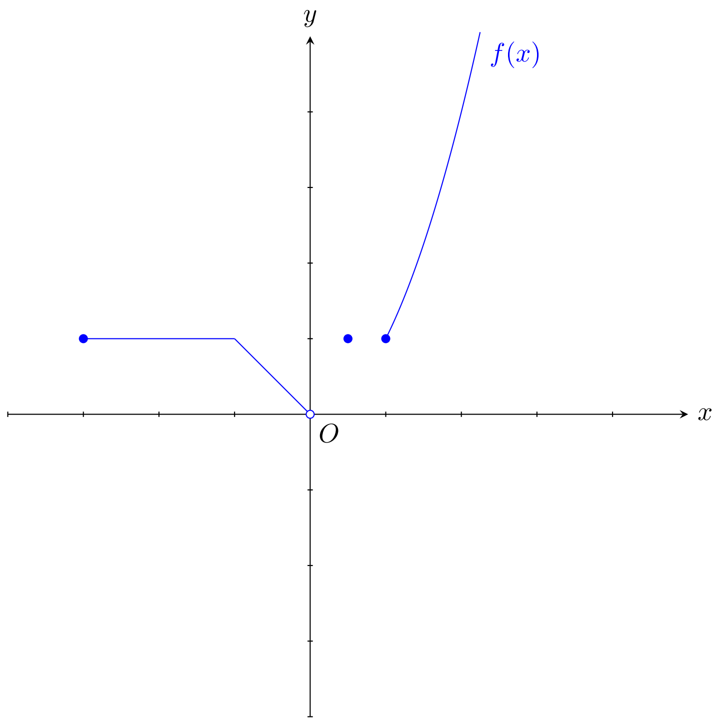

Figura 1: Plot de la función f.

De (ii): El dominio de h son los puntos $x \in \mathbb{R}$ para los cuales $f(x+1)$ está definido, es decir que $x+1 \in D_f$, por tanto el dominio de h es el conjunto

$$D_h = [-4, -1[\cup \left\{ -\frac{1}{2} \right\} \cup [0, 2[$$

y, se tiene que

- $h(1) = f(1+1) = 2^2 = 4$.
- $h(1/2) = f(1/2+1) = f(3/2) = (3/2)^2 = 9/4$.
- $h(\sqrt{2}-1) = f(\sqrt{2}) = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$.
- $h(-3/2) = f(-1/2) = |-1/2| = 1/2$.
- $h(-1-\sqrt{2}/2) = f(-\sqrt{2}/2) = 1$.
- $h(-3) = f(-2) = 1$.

La gráfica de h está dada como se muestra en la figura 2.

donde, podemos observar que lo que se hace con respecto a la gráfica de f, es recorrer la gráfica en el sentido horizontal una unidad hacia la izquierda.

De (iii): El dominio de k son los posibles valores para los que $f(x)+1$ está definido, es decir para cuando f está definido, por lo cual

$$D_k = D_f = [-3, 0[\cup \left\{ \frac{1}{2} \right\} \cup [1, 3[$$

y, se tiene que

- $k(2) = f(2) + 1 = 2^2 + 1 = 5$.
- $k(3/2) = f(3/2) + 1 = (3/2)^2 + 1 = 13/4$.

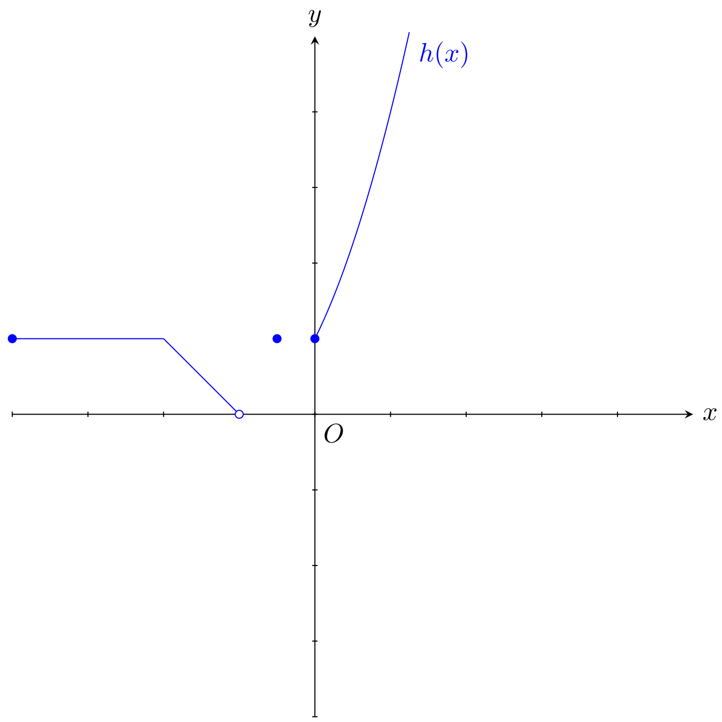

Figura 2: Plot de la función h.

- $k(\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) + 1 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 1 = 3.$
- $k(-1/2) = f(-1/2) + 1 = |-1/2| + 1 = 3/2.$
- $k(-\sqrt{2}/2) + 1 = f(-\sqrt{2}/2) + 1 = 2.$
- $k(-2) = f(-2) + 1 = 2.$

La gráfica de k está dada como se muestra en la figura 3:

donde, podemos observar que lo que se hace con respecto a la gráfica de f, es recorer la gráfica verticalmente una unidad hacia arriba. $\square$

3.2. **Analice** la variación de las siguientes funciones (dominio natural, raíces, intervalos de monotonía, comportamiento en los extremos de dichos intervalos, cuadro de variación y gráfica):

I. $f(x) = x^2 + 3x.$

II. $g(x) = \frac{x-1}{2x+2}.$

III. $h(x) = |x|.$

Solución:
De (i): La gráfica de la función f es la de la mostrada en la figura 4:

De (ii): La gráfica de la función g es la de la mostrada en la figura 5:

De (iii): La gráfica de la función h es la de la mostrada en la figura 6:

$\square$

3.3. **Determine** el dominio natrual de las siguientes funciones:

I. $x \mapsto \sqrt{3 - x^2}.$

II. $y \mapsto \sqrt{1 - \sqrt{1 - y^2}}.$

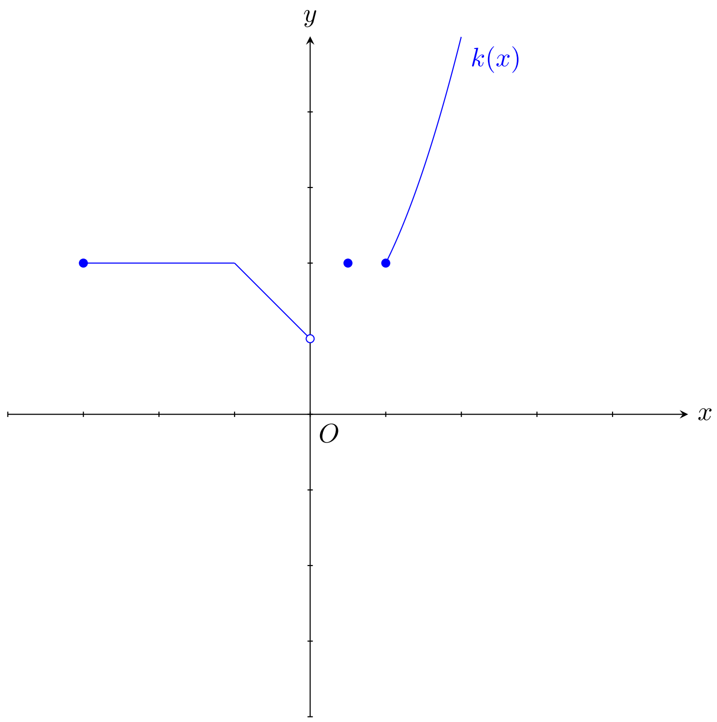

Figura 3: Plot de la función k.

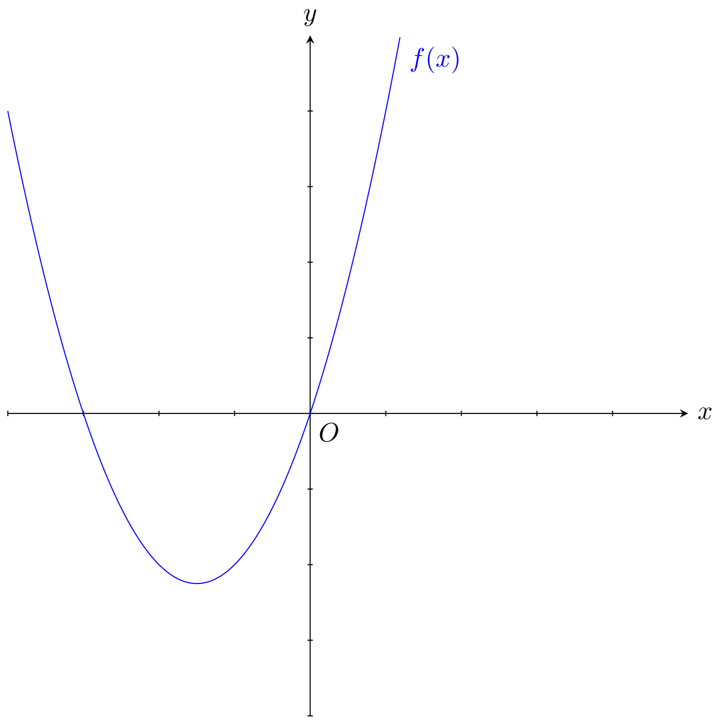

Figura 4: Plot de la función f.

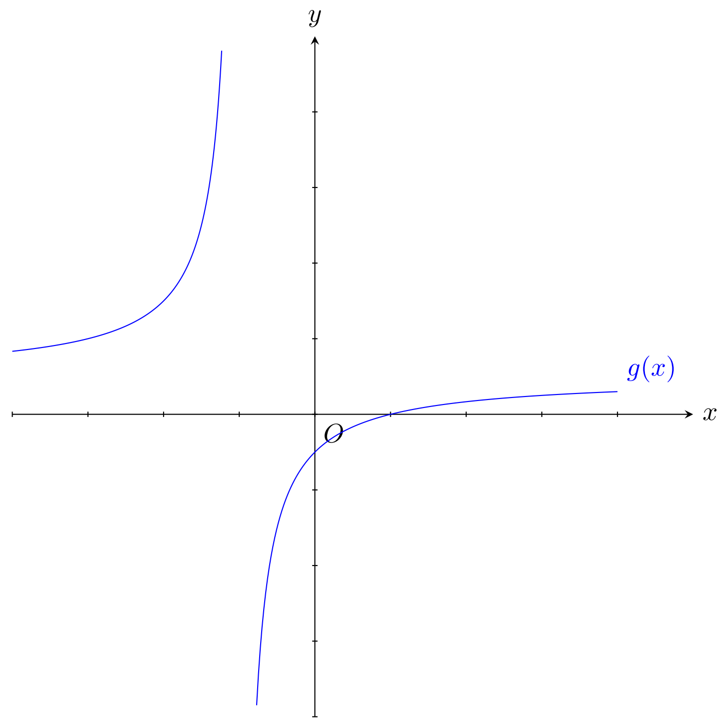

Figura 5: Plot de la función g.

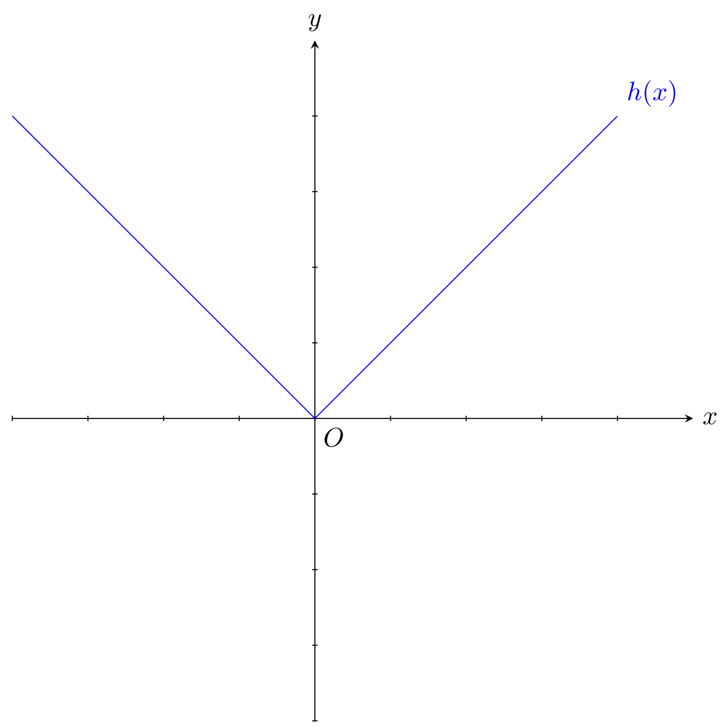

Figura 6: Plot de la función h.

III. $\omega \mapsto \frac{1}{\omega-1} + \frac{1}{\omega-2}$.

IV. $u \mapsto \sqrt{1-u^2} + \sqrt{u^2-1}$.

V. $t \mapsto \sqrt{1-t} + \sqrt{t-2}$.

Solución:

De (i): La función $x \mapsto \sqrt{3-x^2}$ está definida si y sólo si $3-x^2 \geq 0$, esto es $x^2 \leq 3$ lo cual ocurre si y sólo si $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$.

Así, el dominio natural de esta función es $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

De (ii): La función $y \mapsto \sqrt{1-\sqrt{1-y^2}}$ está definida si y sólo si $1-\sqrt{1-y^2} \geq 0$, es decir si y sólo si $\sqrt{1-y^2} \leq 1$, esto es cuando $0 \leq 1-y^2 \leq 1$ y,

$$\begin{aligned} 0 \leq 1-y^2 \leq 1 &\iff 0 \leq y^2 \leq 1 \\ &\iff -1 \leq y \leq 1 \end{aligned}$$

por tanto, el dominio natural de esta función es $[-1, 1]$.

De (iii): La función $\omega \mapsto \frac{1}{\omega-1} + \frac{1}{\omega-2}$ está definida cuando $\omega - 1 \neq 0$ y $\omega - 2 \neq 0$, esto es:

$$\omega \neq 1, 2$$

luego, el dominio natural de esta función es $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$.

De (iv): La función $u \mapsto \sqrt{1-u^2} + \sqrt{u^2-1}$ está definida si y sólo si $1-u^2, u^2-1 \geq 0$, esto es:

$$1 \leq u^2 \quad \text{y} \quad u^2 \geq 1$$

y, esto sólo ocurre cuando $u = \pm 1$. Por tanto, el dominio natrual de f es $\{-1, 1\}$.

De (v): $\square$

3.4. **I. Muestre** que si $|x-1| \leq 1$, entonces $|x^2+3x-4| \leq 6|x-1|$.

II. Sea $\varepsilon > 0$. Use el inciso anterior para **probar** que si $|x-1| < \text{mín}\left\{1, \frac{\varepsilon}{6}\right\}$, entonces $|x^2+3x-4| \leq \varepsilon$. Aplique la definición de límite para **concluir** que

$$\lim_{x \to 1} x^2 + 3x = 4$$

Demostración:

De (i): Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x-1| \leq 1$, entonces $|x| - 1 \leq 1 \Rightarrow |x| \leq 2$. Con esto, se sigue que:

$$\begin{aligned} \left|x^2+3x-4\right| &= |(x+4)(x-1)| \\ &= |x-1|\,|x+4| \\ &\leq |x-1|\,(|x|+4) \\ &\leq |x-1|\,(2+4) \\ &\leq 6\,|x-1| \\ \Rightarrow \left|x^2+3x-4\right| &\leq 6\,|x-1| \end{aligned}$$

De (ii): Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x-1| < \text{mín}\left\{1, \frac{\varepsilon}{6}\right\}$, es decir que

$$|x-1| < 1 \quad \text{y} \quad |x-1| < \frac{\varepsilon}{6}$$

por la parte (i), se sigue que $|x^2 - 3x - 4| \leq 6\,|x - 1|$ y, por la segunda desigualdad, se sigue que

$$\left|x^2 - 3x - 4\right| \leq 6\,|x - 1| < 6 \cdot \frac{\varepsilon}{6} = \varepsilon$$

por tanto, $|x^2 - 3x - 4| < \varepsilon$. Ahora, como para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \text{mín}\left\{1, \frac{\varepsilon}{6}\right\} > 0$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 1 \text{ tal que } |x - 1| < \delta \Rightarrow \left|x^2 - 3x - 4\right| < \varepsilon$$

se sigue que

$$\lim_{x \to 1} x^2 - 3x = 4$$

■

3.5. Usando la definición de límite, **demuestre** las afirmaciones siguientes.

I. $\lim_{x\to -1} |x^3| = 1$.

II. $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$, donde $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ x^2 & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$

III. ¿Existe $\lim_{x\to 0} f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x^2 + x & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$? **Justifique**.

Demostración:

De (i): Sea $\varepsilon > 0$. Observemos que si $|x + 1| \leq 1$:

$$\begin{aligned} \left||x^3| - 1\right| &\leq \left|-x^3 - 1\right| \\ &\leq \left|(x + 1)(x^2 - x + 1)\right| \\ &\leq |x + 1| \left|x^2 - x + 1\right| \end{aligned}$$

entonces, como $|x| - |-1| \leq |x - (-1)|$, se sigue que $|x| \leq 2$. Luego

$$\begin{aligned} \left|x^2 + x + 1\right| &\leq \left|x^2\right| + |x| + 1 \\ &\leq 2^2 + 2 + 1 \\ &= 7 \\ \Rightarrow \left||x^3| - 1\right| &\leq 7\,|x + 1| \end{aligned}$$

tomemos entonces $\delta = \text{mín}\left\{1, \frac{\varepsilon}{7}\right\} > 0$. Se tiene entonces que si $|x + 1| < \delta$, por lo anterior, que

$$\left||x^3| - 1\right| \leq 7\,|x + 1|$$

además, $|x + 1| < \frac{\varepsilon}{7}$, por lo cual

$$\begin{aligned} \left||x^3| - 1\right| &< 7 \cdot \frac{\varepsilon}{7} \\ &= \varepsilon \\ \Rightarrow \left||x^3| - 1\right| &< \varepsilon \end{aligned}$$

es decir:

$$\therefore \forall x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x \neq -1 \text{ con } |x - (-1)| < \delta \Rightarrow \left||x^3| - 1\right| < \varepsilon$$

Luego, de la definición de límite por $\varepsilon - \delta$ se sigue que

$$\lim_{x \to -1} \left|x^3\right| = 1$$

De (ii): ■

3.6. Usando primero la definición de límite, luego algunos teoremas sobre límites y finalmente la caracterización de límites con sucesiones, **determine** los límites siguientes.

I. $\lim_{t\to -4} \frac{t^2-t-20}{t+4}$.

II. $\lim_{y\to 3} \frac{y^2-9}{y^2-2y-3}$.

III. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{x^3-x^2-2}{x^2-1}\right)$.

IV. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{3x} \left(\frac{1}{8+x} - \frac{1}{8}\right)$.

V. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{2}{x-5} - \frac{2}{x^2+x-5}\right)$.

Demostración:

De (i): De (ii): De (iii): De (vi): De (v): ■

3.7. Suponga que no existen los límites $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$. ¿Pueden existir $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x))$ o $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$? **Justifique** formalmente sus respuestas o dando contraejemplos.

Solución:

I. Analicemos primero el límite de la suma. Considere las funciones $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = -\frac{1}{x}$, para todo $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Se tiene que los límites

$$\lim_{x\to 0} f(x) \text{ y } \lim_{x\to 0} g(x)$$

no existen, sin embargo

$$f(x) + g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

por tanto,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(f(x) + g(x)) &= \lim_{x\to 0} 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

es decir, el límite de la suma si existe.

II. Analicemos ahora el límite del producto. Considere las funciones

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

se tiene que no existen los límites de f y g cuando $x \to 0$, sin embargo:

$$f(x)g(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

por lo cual, $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = 1$. Es decir, el límite del producto si existe.

□

3.8. **I.** **Demuestre** que si exiten los límites $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$ y $\lim_{x\to a} f(x)$, entonces también existe $\lim_{x\to a} g(x)$.

II. **Pruebe** que si existen los límites $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$ y, además, $\lim_{x\to a} f(x) \neq 0$, entonces también existe $\lim_{x\to a} g(x)$.

Demostración:

De (i): Supongamos que $f, g : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y, sea $\varepsilon > 0$. Como existen los límites

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = l_1 \text{ y } \lim_{x\to a} f(x) = l_2$$

entonces para $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que

$$\begin{aligned}
&\forall x \in S\setminus\{a\} \text{ tal que } |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)+g(x)-l_1| < \frac{\varepsilon}{2}\\
&\forall x \in S\setminus\{a\} \text{ tal que } |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-l_2| < \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

sea $l = l_1 - l_2 \in \mathbb{R}$. Tomemos $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Si $x \in S\setminus\{a\}$ es tal que

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |x-a| < \delta_1 \text{ y } |x-a| < \delta_2$$

por lo anterior se sigue que

$$|f(x)+g(x)-l_1| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } |f(x)-l_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

luego

$$\begin{aligned}
|g(x)-l| &= |g(x)+f(x)-f(x)-l_1+l_2|\\
&= |f(x)+g(x)-l_1-(f(x)-l_2)|\\
&\leq |f(x)+g(x)-l_1| + |f(x)-l_2|\\
&< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

por tanto

$$\forall x \in S\setminus\{a\} \text{ tal que } |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x)-l| < \varepsilon$$

de la definición de límite se sigue que $\lim_{x\to a} g(x) = l = l_1 - l_2$.

De (ii): Como existen los límites

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = l_1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} f(x) = l_2 \neq 0$$

(donde $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$), en particular, existe el límite siguiente y su valor es:

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to a} f(x)} = \frac{1}{l_2}$$

(por el teorema de álgebra de límites) luego, se tiene que:

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}g(x)f(x) = \left(\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}\right)\cdot\left(\lim_{x\to a} g(x)f(x)\right) = \frac{1}{l_2}\cdot l_1 = \frac{l_1}{l_2}$$

(nuevamente por el teorema de álgebra de límites y pues existe cada uno de los dos límites en el producto). Así, el límite anterior existe y su valor es el de la derecha. ■

3.9. Suponga que exista el límite $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$ y, además, $\lim_{x\to a} f(x) = 0$. ¿Puede existir $\lim_{x\to a} g(x)$? **Justifique** formalmente sus respuestas o dando contraejemplos.

Demostración:

No necesariamente, tomemos por ejemplo $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

se tiene que $f(x)g(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Luego, los límites

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$$

existen y son iguales para toda $a \in \mathbb{R}$. Pero, ya se sabe que no existe $\lim_{x\to a} g(x)$ para toda $a \in \mathbb{R}$. ■

3.10. **I. Pruebe** que si $|x-2| \leq 1$, entonces $|x^2+3x-1| \geq 1$.

II. Sea $\delta > 0$. Use el inciso anterior para **probar** que si $x = \min\{5/2, 2+\delta/2\}$, entonces $|x^2+3x-1| \geq 1$. Aplique la definición de límite para **concluir** que $\lim_{x\to 2} x^2+3x \neq 1$.

Demostración:

De (i): Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x-2| \leq 1$, se sigue entonces que $2 - |x| \leq 1 \Rightarrow 1 \leq |x|$ y que $-1 \leq -|x-2|$. Veamos ahora que

$$\begin{aligned} \left|x^2+3x-1\right| &= \left|x^2-2x+5x-1\right| \\ &= \left|5x-1+x^2-2x\right| \\ &\geq |5x-1| - \left|x^2-2x\right| \\ &\geq 5|x| - 1 - |x-2||x| \\ &\geq 5 - 1 + (-1)(1) \\ &\geq 3 \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

De (ii): Sea $\delta > 0$. Tomemos $x = \min\{5/2, 2+\delta/2\}$, se tiene que

$$\begin{aligned} x - 2 &\leq \frac{5}{2} - 2 \\ &= \frac{1}{2} \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned} x - 2 &\geq 2 - 2 \\ &= 0 \\ &\geq -1 \end{aligned}$$

pues, $\min\{5/2, 2+\delta/2\} > 2$. Por tanto, $-1 \leq x-2 \leq 1$, así $|x-2| \leq 1$, de (i) se sigue que $|x^2+3x-1| \geq 1$.

Ahora, notemos que para $\varepsilon = 1 > 0$ y para todo $\delta > 0$ existe $x_\delta = \min\{5/2, 2+\delta/2\} > 2$ tal que

$$0 < |x_\delta - 2| = x_\delta - 2 \leq 2 + \frac{\delta}{2} - 2 = \frac{\delta}{2} < \delta$$

tal que

$$\left|x^2 - 3x - 1\right| \geq \varepsilon = 1$$

luego, por la definición de límite debe suceder que

$$\lim_{x\to 2} x^2 + 3x \neq 1$$

■

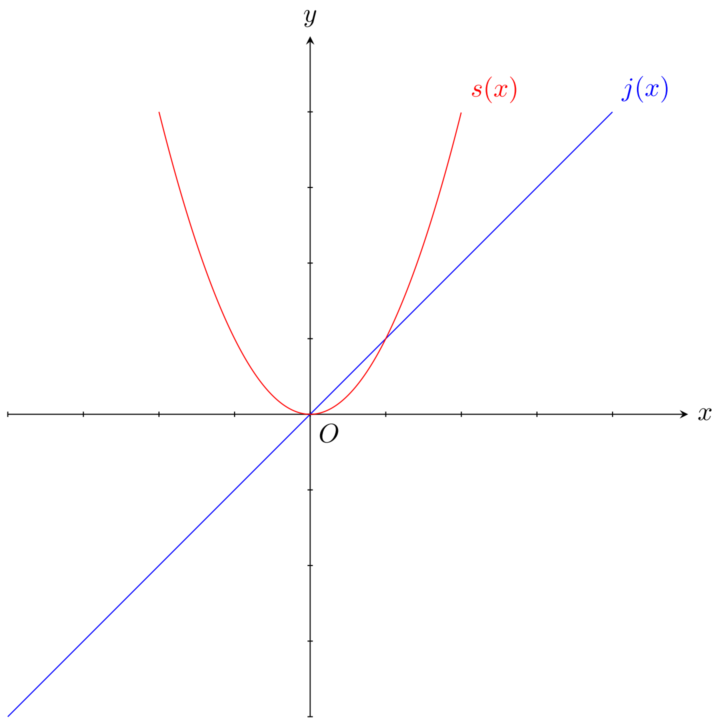

Figura 7: Gráfica de s y j.

3.11. Considere las funciones $j(x) = x$, $s(x) = x^2$ y $h(x) = \sqrt{|x|}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

I. Determine el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}$ para los que se cumpla que $s(x) \leq j(x)$ y **haga** un dibujo en donde aparezcan simultáneamente las gráficas de s y j.

II. Determine el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}$ para los que se cumpla que $h(x) \leq s(x)$ y **haga** un dibujo en donde aparezcan simultáneamente las gráficas de h y s.

III. Determine el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}$ para los que se cumpla que $j(x) \leq h(x)$ y **haga** un dibujo en donde aparezcan simultáneamente las gráficas de j y h.

Solución:

De (i): Sea

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| s(x) \leq j(x) \right\}$$

se tiene que para $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
s(x) \leq j(x) &\iff x^2 \leq x \\
&\iff 0 \leq x - x^2 \\
&\iff 0 \leq x(1-x) \\
&\iff (x \geq 0 \text{ y } 1 - x \geq 0) \text{ o } (x \leq 0 \text{ y } 1 - x \leq 0) \\
&\iff (x \geq 0 \text{ y } 1 \geq x) \text{ o } (x \leq 0 \text{ y } 1 \leq x) \\
&\iff 0 \leq x \leq 1
\end{aligned}$$

por tanto, $A = [0, 1]$. Se tiene el dibujo de las gráficas de s y j en la figura 7:

De (ii): Sea

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| h(x) \leq s(x) \right\}$$

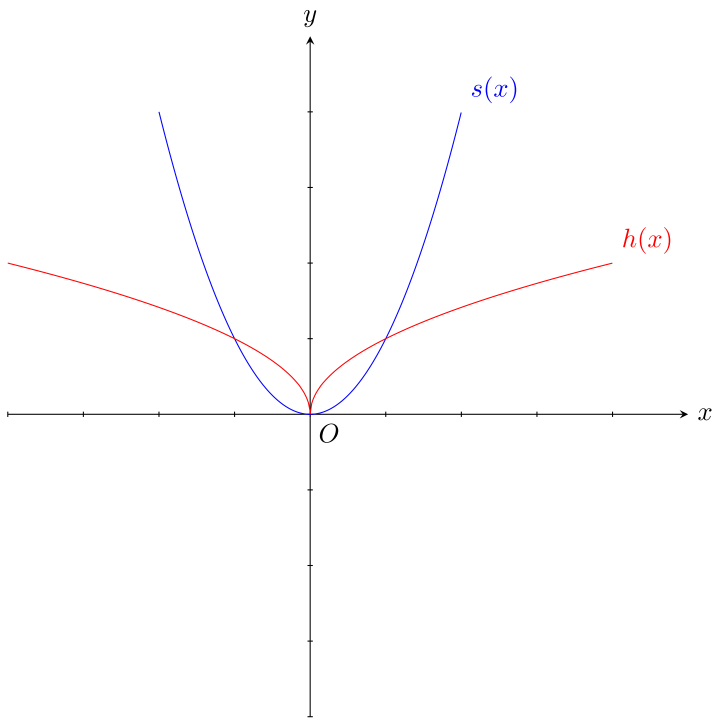

Figura 8: Gráfica de h y s.

se tiene que para $x \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
h(x) \leq s(x) &\iff \sqrt{|x|} \leq x^2 \\
&\iff |x| \leq x^4 \\
&\iff 0 \leq |x|^4 - |x| \\
&\iff 0 \leq |x| \left(|x|^3 - 1\right) \\
&\iff 0 \leq |x|^3 - 1 \\
&\iff 1 \leq |x|^3 \\
&\iff 1 \leq |x| \\
&\iff x \leq -1 \text{ o } 1 \leq x
\end{aligned}
$$

por tanto, $B =]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$. Se tiene el dibujo de las gráficas de h y s en la figura 8.

De (iii): Sea

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| h(x) \leq s(x) \right\}$$

se tiene que para $x \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
j(x) \leq h(x) &\iff x \leq \sqrt{|x|} \\
&\iff x < 0 \text{ ó } 0 \leq x \leq \sqrt{|x|} \\
&\iff x < 0 \text{ ó } 0 \leq x \leq \sqrt{x} \\
&\iff x < 0 \text{ ó } 0 \leq x^2 \leq x \\
&\iff x < 0 \text{ ó } 0 \leq x - x^2 \\
&\iff x < 0 \text{ ó } 0 \leq x(1-x) \\
&\iff x < 0 \text{ o } [(0 \leq x \text{ y } 0 \leq 1 - x) \text{ o } (x \leq 0 \text{ y } 1 - x \leq 0)] \\
&\iff x < 0 \text{ o } [(0 \leq x \text{ y } x \leq 1) \text{ o } (x \leq 0 \text{ y } 1 \leq x)] \\
&\iff x < 0 \text{ o } 0 \leq x \leq 1)
\end{aligned}
$$

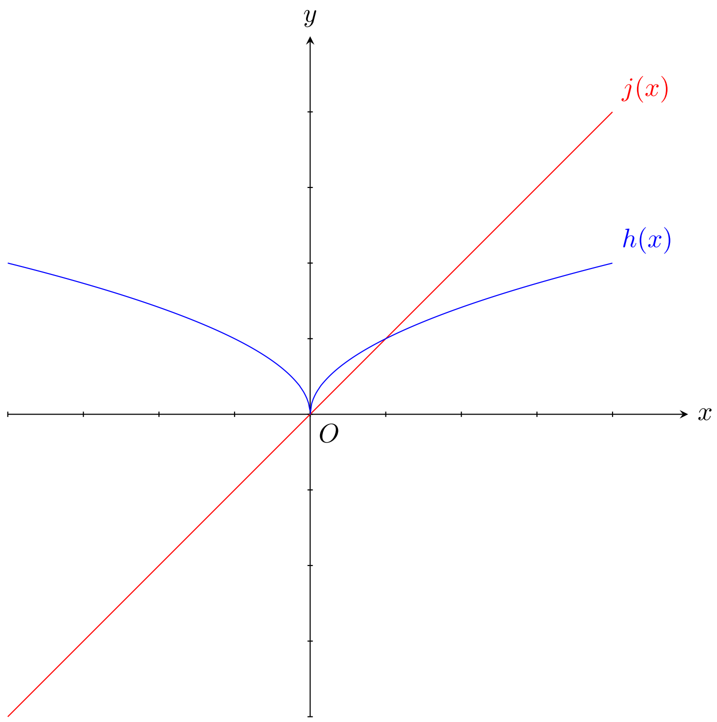

Figura 9: Gráfica de j y h.

por tanto, $C =]-\infty, 1]$. Se tiene el dibujo de las gráficas de j y h en la figura 9. $\square$

3.12. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$. Dadas dos funciones $f, g : S \to \mathbb{R}$ se define la **envoltura superior** de f y g, como la función $\text{máx}\,(f,g) : S \to \mathbb{R}$ dada por

$$\text{máx}\,(f,g)\,(x) = \text{máx}\,(f(x), g(x))\,, \quad \forall x \in S$$

y, la **envoltura inferior** de fy g como la función $\text{mín}\,(f,g) : S \to \mathbb{R}$ dada por

$$\text{mín}\,(f,g)\,(x) = \text{mín}\,(f(x), g(x))\,, \quad \forall x \in S$$

I. Reconsidere las funciones $j, s, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ del problema anterior. **Bosqueje** la gráfica de las funciones $\text{máx}(j,s), \text{mín}(j,s), \text{máx}(s,h), \text{mín}(s,h), \text{máx}(j,h), \text{mín}(j,h)$.

II. **Escriba** las funciones $\text{máx}(f,g)$ y $\text{mín}(f,g)$ en términos de f y g y del valor absoluto.

Demostración:

De (i): Se tienen las siguientes gráficas de las funciones mencionadas en las figuras 10 a 15.

De (ii): Recordemos que si $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\text{máx}\,(a,b) = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2} \ \text{ y } \ \text{mín}\,(a,b) = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2}$$

usando esto, tendremos que

$$\text{máx}\,(f,g)\,(x) = \frac{f(x)+g(x)}{2} + \frac{|f(x)-g(x)|}{2} \ \text{ y } \ \text{mín}\,(f,g)\,(x) = \frac{f(x)+g(x)}{2} - \frac{|f(x)-g(x)|}{2}$$

luego,

$$\text{máx}\,(f,g)\,(x) = \frac{(f+g)(x)}{2} + \frac{|f-g|\,(x)}{2} \ \text{ y } \ \text{mín}\,(f,g)\,(x) = \frac{(f+g)(x)}{2} - \frac{|f-g|\,(x)}{2}$$

$\blacksquare$

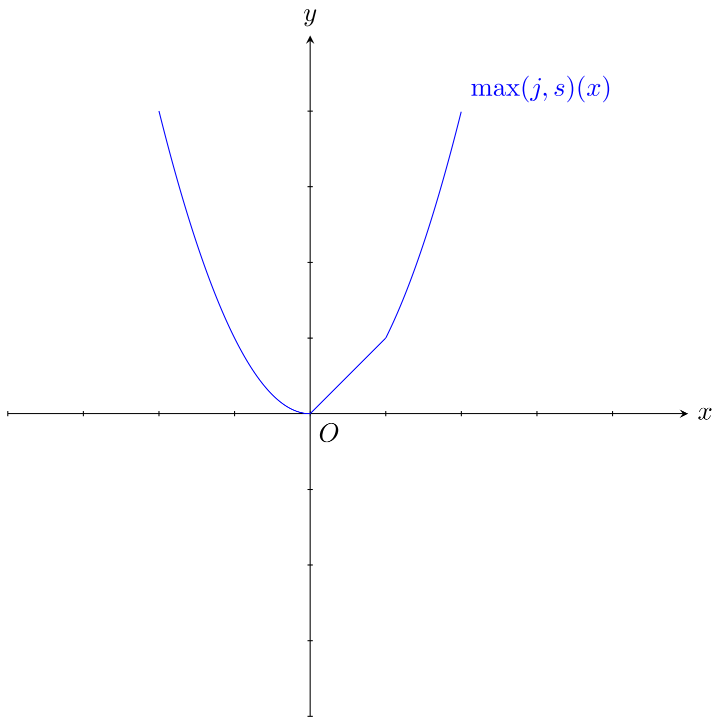

Figura 10: Gráfica de $\max(j, s)$.

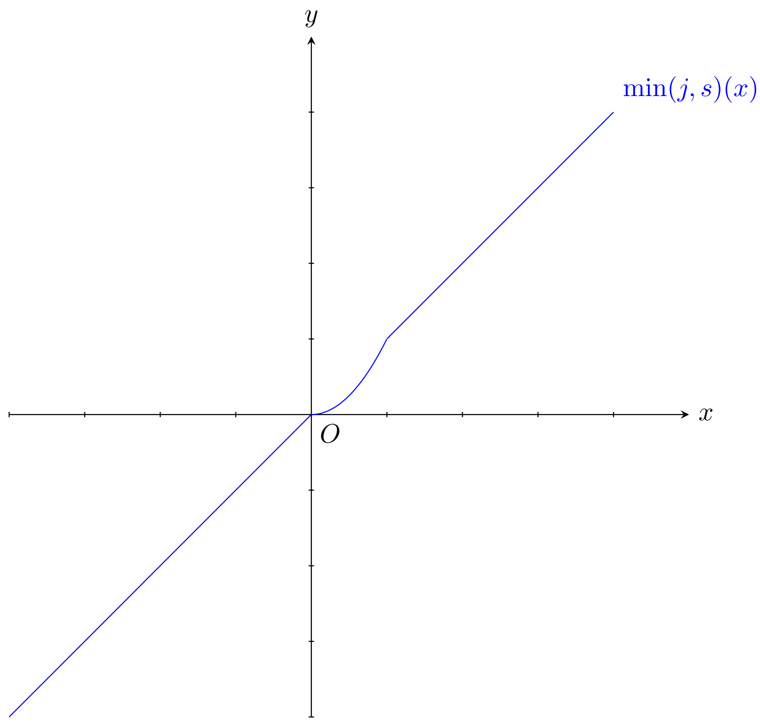

Figura 11: Gráfica de $\min(j, s)$.

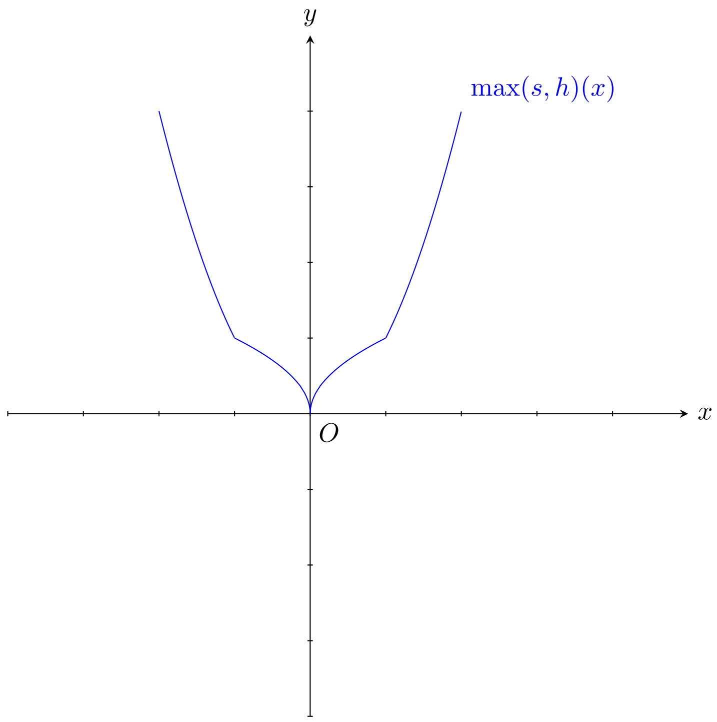

Figura 12: Gráfica de $\text{máx}(s, h)$.

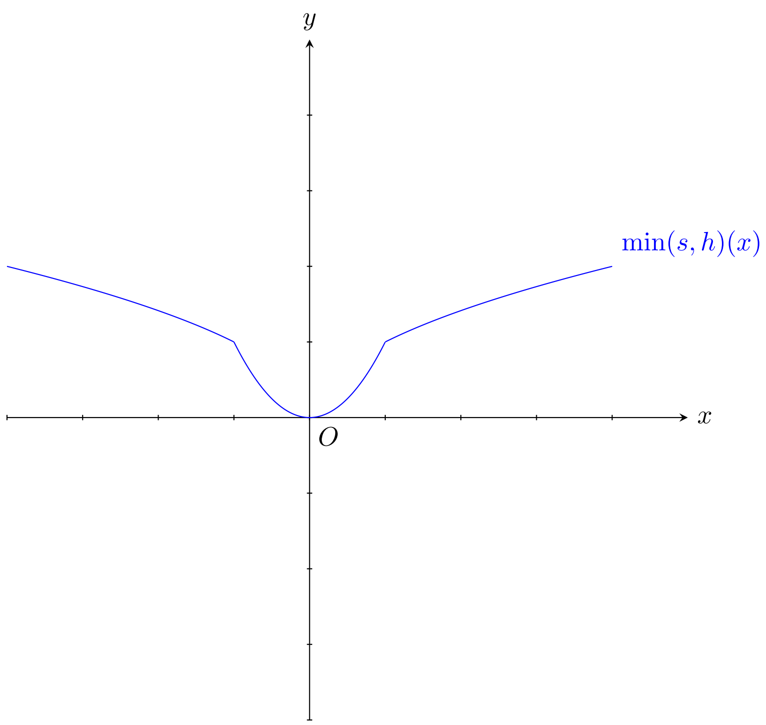

Figura 13: Gráfica de $\text{mín}(s, h)$.

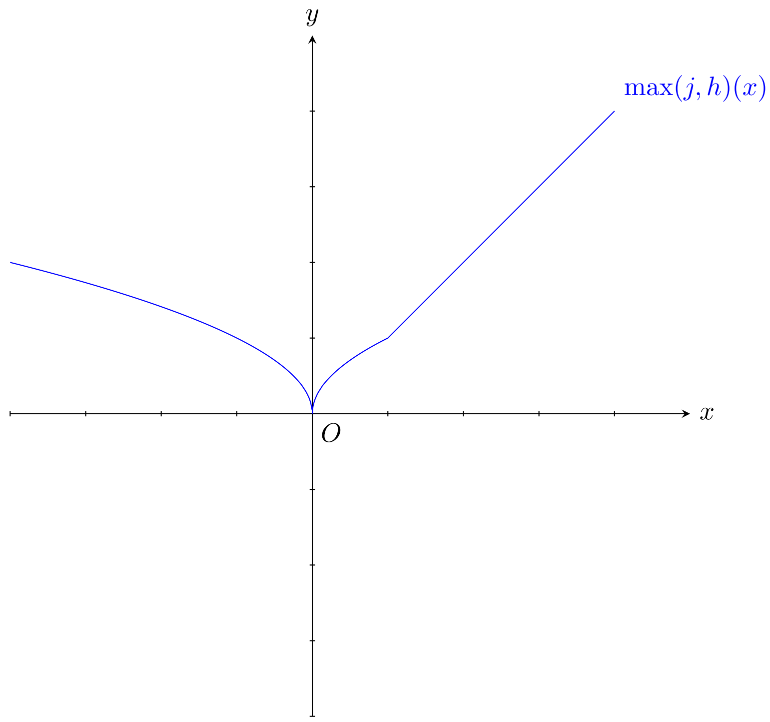

Figura 14: Gráfica de máx(j, h).

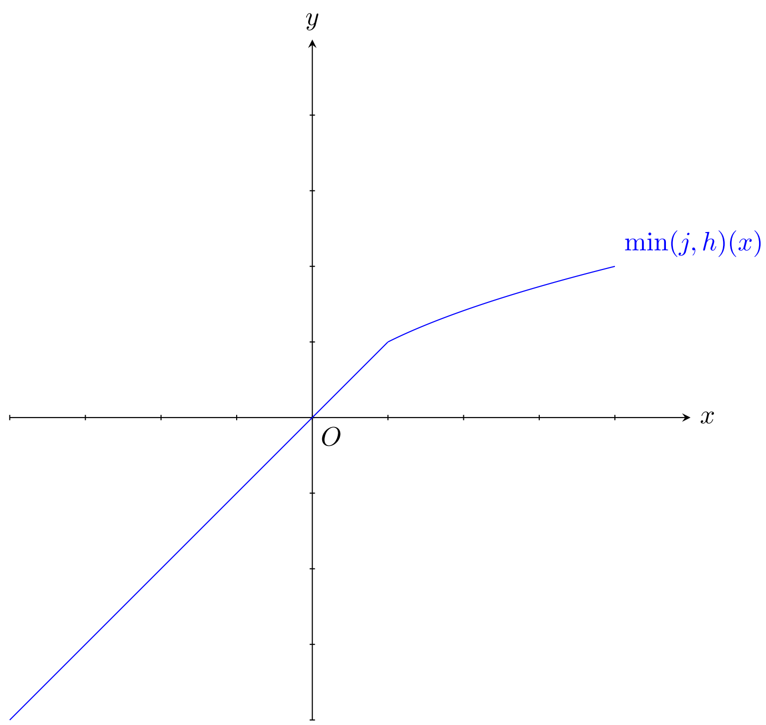

Figura 15: Gráfica de mín(j, h).

3.13. Aplique el teorema de comparación y/o el tereoma de álgebra de límites para **calcular** los límites siguientes.

I. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 x}{x}$.

II. $\lim_{x\to a} \left[\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x-a}\right]$, donde $a \in \mathbb{R}$.

III. $\lim_{x\to 0} \sqrt{|x|} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$.

IV. Sean $f, g : S \to \mathbb{R}$ dos funciones y $a \in \mathbb{R}$. Suponga que g es acotada en S y que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$. **Demuestre** que

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$$

Solución:

De (i): Veamos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)$$

donde, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ y, como $\lim_{x\to 0} \cos^2 x = 1$ y $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$, se sigue que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 x}{x} &= \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right) \cdot \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\right) \\ &= 1 \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

De (ii): Sea $a \in \mathbb{R}$

De (iii):

De (iv): Como g es acotada en S, existe $M \geq 0$ tal que

$$|g(x)| \leq M \quad \forall x \in S$$

Sea $\varepsilon > 0$, dado que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in S \text{ tal que } 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - 0| < \frac{\varepsilon}{M+1}$$

Como $|g(x)| \leq M$ para todo $x \in S$, se tiene que

$$x \in S \text{ tal que } 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)g(x) - 0| < \frac{M}{M+1} \cdot \varepsilon \leq \varepsilon$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$$

$\square$

3.14. Use el teorema sobre la caracterización de límites de funciones por medio de sucesiones en los problemas siguientes.

I. Calcule $\lim_{x\to -2} \sqrt[3]{\frac{x-1}{2x+2}}$.

II. Calcule $\lim_{x\to -3} \sqrt[3]{|x|^3}$.

III. Muestre que no existe $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$.

IV. **Muestre** que no existe $\lim_{x\to 2} E(x)$, donde E es la función parte entera.

V. **Muestre** que no existe $\lim_{x\to 2} f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si} \quad 0 \leq x < 2 \\ x^3 & \text{si} \quad 2 < x \leq 3 \end{cases}$.

VI. **Muestre** que no existe $\lim_{x\to a} f(x)$, donde f es la función de Dirichlet y $a \in \mathbb{R}$ es arbitrario.

3.15. Usando primero la definición de límite y después el teorema sobre caracterizació nde límites de funciones por medio de sucesiones, **pruebe** que:

I. $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{2x+2} \neq 3$.

II. $\lim_{x\to 2} |x| \neq -1$.

3.16. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad -3 \leq x \leq -1 \\ x^3 & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{si} \quad 1 < x \leq 3 \\ \frac{1}{3-x} + \sqrt{3} & \text{si} \quad 3 < x \end{cases}$$

I. **Bosqueje** la gráfica de f.

II. **Calcule** $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ y $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ ¿Existe $\lim_{x\to -1} f(x)$?

III.

IV. **Calcule** $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ ¿Existe $\lim_{x\to 1} f(x)$?

V. ¿Existen $\lim_{x\to 3^-} f(x)$, $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ y $\lim_{x\to 3} f(x)$?

VI. **Calcule** $\lim_{x\to -3} f(x)$ y $\lim_{x\to \infty} f(x)$.

VII. Si $a \in [-3, \infty[\setminus \{-3, -1, 1, 3\}$. **Calcule** $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim_{x\to a^-} f(x)$.

Justifique usando la definición del límite correspondiente y también usando la respectiva caracterización de sucesiones.

3.17. **Calcule**, justificando por medio de la definición del límite correspondiente y de la respectiva caracterización de sucesiones, los siguientes límites.

I. $\lim_{x\to\infty} x^2 + 3$, $\lim_{x\to\infty} -x^2 - 3$ y $\lim_{x\to\infty}[(x^2+3) - (-x^2-5)]$.

II.

III. $\lim_{x\to\infty} 3x^2 - x + 5$, $\lim_{x\to\infty} x - 3$ y $\lim_{x\to\infty}[(3x^2 - x + 5) + (x-3)]$.

IV. $\lim_{x\to 3^-} \frac{5x-2}{x-3}$, $\lim_{x\to 3^+} \frac{5x-2}{x-3}$ y $\lim_{x\to 3} \left|\frac{5x-2}{x-3}\right|$.

3.18. **Calcule**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{bm_x^m + \cdots + b_1 x + b_0}$$

donde $a_n, b_m \neq 0$, distinguiendo los casos $m = n$, $m > n$ y $m < n$. En particular, **calcule**.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 3}{x - 1} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{2 - x}{x^4 - 1} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{5x + 2}{x - 3}$$

3.19. Sea $E(x) = \max\left\{n \in \mathbb{Z} \middle| n \leq x\right\}$, para todo $x \in \mathbb{R}$, la función **parte entera** de x. Considere las funciones siguientes:

I. $f(x) = E(x)$.

II. $f(x) = -[x - E(x)]$.

III. $f(x) = \sqrt{x - E(x)}$.

IV. $f(x) = E(1/x)$.

V. $f(x) = \frac{1}{E(1/x)}$.

VI. $f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$.

VII. $f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$.

Determine el dominio natrual de cada una de estas funciones y **bosqueje** su gráfica. Si existen, cálcule los siguientes límites (justificando formalmente) para cada una de las funciones anteriores:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \quad \lim_{x\to a^+} f(x) \quad \lim_{x\to a} f(x)$$

donde $a \in \mathbb{R}$, y

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) \quad \lim_{x\to \infty} f(x)$$

3.20. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$. Sea $f : S \to \mathbb{R}$ una función y, $t, l \in \mathbb{R}$. **Pruebe** que:

I. $\lim_{x\to t} f(x) = l$ si y sólo si $\lim_{x\to t} f(x) - l = 0$ si y sólo si $\lim_{x\to t} |f(x) - l| = 0$.

II. $\lim_{x\to t} f(x) = \lim_{h\to 0} f(t + h)$.

3.21. **Demuestre** que si dos funciones f y g toman los mismos valores en todos los puntos de algún intervalo abierto que contenga a a, exceptuando posiblemente a a, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$$

cuando alguno de los dos límites exista. Esto significa que la existencia del límite de alguna función en un punto dado es una **propiedad local**.

3.22. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$. Sean $f, g : S \to \mathbb{R}$ dos funciones y $a \in \mathbb{R}$. Si $f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in S$, y si existen $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$, pruebe que

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$$

3.23. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$. Sean $f, g, h : S \to \mathbb{R}$ tres funciones. Dije $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, para todo $x \in S$ y $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x)$, **demuestre** que existe $\lim_{x\to a} g(x)$ y

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x)$$

3.24. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$. Si $f : S \to \mathbb{R}$ es una función, defina la función $|f| : S \to \mathbb{R}$ como $|f|(x) = |f(x)|$, para todo $x \in S$. **Pruebe** que si $\lim_{x\to a} f(x) = l$, entonces $\lim_{x\to a} |f|(x) = |l|$.

3.25. **Pruebe** que si $\lim_{x\to a} f(x) = l$ y $\lim_{x\to a} g(x) = m$, entonces

$$\lim_{x\to a} \max(f, g)(x) = \max(l, m) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} \min(f, g)(x) = \min(l, m)$$

Sugerencia. Utilice un resultado de un problema anterior.

3.26. **Determine (justificando)** el dominio nautral y el conjunto de puntos de continuidad de las siguientes funciones:

I. $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, donde $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$, para todo $i = 0, 1, ..., n$.

II. $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$,donde P y Q son dos polinomios.

III. $f(x) = x^a$, donde $a \in \mathbb{Q}$.

IV. $\mathcal{N}(x) = |x|$.

3.27. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$. Si $f, g : S \to \mathbb{R}$ son dos funciones continuas en todo punto de S, **pruebe** que las funciones $\text{máx}(f, g)$ y $\text{mín}(f, g)$ son también continuas en todo punto de S.

3.28. **Determine** (justificando) el conjunto de puntos de continuidad de las siguientes funciones e **indique** el tipo de discontinuidad que ocurre en los puntos donde son discontinuas. **Bosqueje** sus gráficas.

I. $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \neq 2 \\ 2 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$

II. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad -2 < x < -1 \\ x^3 & \text{si} \quad -1 \leq x < 1 \\ x+1 & \text{si} \quad 1 \leq x < 3 \end{cases}$

III. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

IV. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

3.29. **Determine** (justificando) el conjunto de puntos de discontinuidad de las funcoines dadas en el problema 3.18 e **indique** el tipo de discontuidad que ocurre en los puntos donde son discontinuas.

3.30. **DEtermine** (justificando) el conjunto de puntos de continuidad de la siguiente función y **bosqueje** su gráfica

$$f(x) = \text{mín}(x - E(x), E(x+1) - x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

3.31. **I.** **Construya** un ejemplo de una función que sea discontinua en los puntos $1, 1/2, 1/3, ...$ pero que sea continua en los demás puntos de $\mathbb{R}$. **Justifique**.

II.

III. **Construya** un ejemplo de una función que sea discontinua en los puntos $1, 1/2, 1/3, ...$ y 0 pero que sea continua en los demás puntos de $\mathbb{R}$. **Justifique**.

3.32. Sea

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Defina $g = -f$. **Pruebe** que f y g son discontinuas en 1. **Escriba** explícitamente las funcoines $|f|$, f^2, $f \cdot g$ y g^2. **Pruebe** que todas estas funciones son continuas en 1.

3.33. Considere dos funciones $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $h : [b, c] \to \mathbb{R}$. Defina $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si} \quad x \in [a, b] \\ h(x) & \text{si} \quad x \in]b, c] \end{cases}$$

si g es continua en $[a, b]$, h es continua en $[b, c]$ y $g(b) = H(b)$, **demuestre** que f es continua en $[a, c]$.

3.34. **I.** Si $f(x) = x^3$ y $g(x) = e^x$, **calcule** $f \circ g(x)$ y $g \circ f(x)$.

II. Si $f(x) = \frac{1}{1-x}$, **calcule** $(f \circ f \circ f)(x)$.

III. Si $f(x) = x^3$ y g es la función del problema 3.16, **calcule** $g \circ f$. ¿En qué puntos son discontinuas las funciones anteriores? **Justifique**.

3.35. **Calcule** $g \circ f$ y **determine** el dominio natural de $g \circ f$ en los siguientes casos. ¿Es $g \circ f$ continua en su domino natural? **Justifique**.

I. $f(x) = \sqrt{x-2}$ y $g(x) = \frac{1}{x}$.

II. $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 + 1$.

3.36. **Represente** las siguientes funciones usando operaciones algebraicas y la composición de funciones. **Determine** el conjuto de puntos de continuidad en cada caso. **Justifique**.

I. $f(x) = \frac{3\operatorname{sen}^2(x+\pi)-2}{\operatorname{sen}(x+\pi)+1}$.

II. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{x-1}\right) & \text{si} \quad x \neq 1, \\ 0 & \text{si} \quad x = 1. \end{cases}$.

III. $f(x-1) = x^2$. ¿Quiénes son $f(x)$ y $f(x+1)$?

3.37. **Determine (justificando)** el dominio natural de las siguientes funciones e indique su conjunto de puntos de continuidad.

I. $f(x) = \frac{\operatorname{sen}}{\frac{1}{x-1}}$.

II. $f(x) = \cos^{1/2} x$.

III. $f(x) = \frac{1}{x} - \tan^2 x$.

3.38. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua que satisface la condición $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, **pruebe** que existe un número $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Sugerencia. Primero pruebe que $f(0) = 0$. Observe que si $f(x)$ va a ser igual a ax, para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces $f(1) = a$. A continuación, demuestre que la fórmula $f(x) = ax$, para todo $x \in \mathbb{N}$, luego para todo $\mathbb{Q}^+$ y, usando la continuidad de f pruebe el resultado para toda $x \in \mathbb{I}^+$. Concluya que se cumple para $\mathbb{R}$.

Demostración:

Notemos que

$$f(0+0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

ahora, sea $a = f(1)$. Se tiene que

$$f(2) = f(1+1) = 2f(1) = a \cdot 2$$

Suponga que $f(k) = a \cdot k$ para algún $k \in \mathbb{N}$, se tiene entonces que

$$f(k+1) = f(k) + f(1) = a \cdot k + a = a \cdot (k+1)$$

por inducción se sigue que $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{N}$. ■

3.39. Considere la función $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in]0,1[\setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{si} \quad x = \frac{p}{q}, \text{ donde } p, q \in \mathbb{N} \text{ son primos relativos.} \end{cases}$$

Pruebe que f es continua en todo punto de $]0,1[\setminus\mathbb{Q}$ y discontinua en todo punto de $]0,1[\cap\mathbb{Q}$.

Demostración:

Se tienen que hacer dos cosas:

I. f es continua en $]0,1[\setminus\mathbb{Q}$. En efecto, sean $x_0 \in]0,1[\setminus\mathbb{Q}$ y $\varepsilon > 0$.

■

3.40. Calcule (justificando) los siguientes límites:

I. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x}$.

II. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

III. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 x+2x}{x+x^2}$.

IV. $\lim_{x\to 1}(x^2-1)\sin\frac{1}{x-1}$.

V. $\lim_{x\to\infty} x\sin^2 x$.

VI. $\lim_{x\to 1}(x^2-1)\sin\frac{1}{(x-1)^2}$.

Solución:

De (i): Veamos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\sin x\right)$$

como $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ y $\lim_{x\to 0}\sin x = 0$, se puede separar el límite como el producto de límite, así

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\sin x\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x\\ &= 1\cdot 0\\ &= 0\end{aligned}$$

De (ii): Veamos que para $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ con $k\in\mathbb{Z}$ se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}\end{aligned}$$

definiendo $x\mapsto\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}$ en $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, el límite siguiente se reduce por álgebra de límites al producto de los mismos, debido a que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2} = 1\cdot 1 = 1$$

y

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{\lim_{x\to 0}1+\cos x} = \frac{1}{1+\cos 0} = \frac{1}{2}$$

por tanto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x} = 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

De (iii):

De (iv): Como $\lim_{x\to 1} x^2 - 1 = 0$ y la función $x \mapsto \sin\frac{1}{x-1}$ es acotada, por un ejercicio anterior se sigue que

$$\lim_{x\to 1}(x^2-1)\sin\frac{1}{x-1} = 0$$

De (v): Considere las sucesiones $\{n\pi\}_{n=1}^{\infty}$ y $\left\{2n\pi + \frac{\pi}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Se tiene que ambas sucesiones divergen a infinito. Además,

$$\lim_{n\to\infty}(n\pi)^2\sin^2(n\pi) = \lim_{n\to\infty}(n\pi)^2\cdot 0 = 0$$

y,

$$\lim_{n\to\infty}\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^2\sin^2(2n\pi+\frac{\pi}{2}) = \lim_{n\to\infty}\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot\sin^2(\frac{\pi}{2}) = \lim_{n\to\infty}\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot 1 = \infty$$

por tanto, debido a la unicidad del límite, no puede existir $\lim_{x\to\infty} x^2\sin x$.

De (vi): Análogamente a (iv), dado que $\lim_{x\to 1} x^2 - 1 = 0$ y $x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2}$ es una función acotada, se sigue que

$$\lim_{x\to 1}(x^2-1)\sin\frac{1}{(x-1)^2} = 0$$

$\square$

3.41. Determine (justificando) el conjunto de puntos de continuidad de las siguientes funciones:

I. $f(x) = x\sin x$.

II. $f(x) = \frac{x}{\tan x}$.

III. $f(x) = \sin x\cos\theta + \sin\theta\cos x$ (donde $\theta\in\mathbb{R}$ es una constante).

IV. $f(x) = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$.

Solución:

De (i): Afirmmamos que f es continua en $\mathbb{R}$. En efecto, como las funciones $x\mapsto x$ y $x\mapsto\sin x$ son continuas en $\mathbb{R}$, entonces su producto también lo es en $\mathbb{R}$, luego f es continua en $\mathbb{R}$.

De (ii): Recordemos que

$$\tan k\pi = 0, \quad \forall k\in\mathbb{Z}$$

Por tanto, la función f debe tener como dominio a $\mathbb{R}\backslash K$, donde

$$K = \left\{x\in\mathbb{R}\middle|\ \text{existe } k\in\mathbb{Z} \text{ tal que } x = k\pi\right\}$$

Afirmamos que f es continua en $\mathbb{R}\backslash K$. En efecto, si $x_0\in\mathbb{R}$, como $x\mapsto x$ es continua y $x\mapsto\tan x$ son funciones continuas en $\mathbb{R}$, se sigue que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{x}{\tan x} &= \frac{\lim_{x\to x_0} x}{\lim_{x\to x_0}\tan x}\\ &= \frac{x_0}{\tan x_0}\end{aligned}$$

pues, $\tan x_0 \neq 0$. Luego, f es continua en x_0. Se sigue entonces que f es continua en $\mathbb{R}\backslash K$.

De (iii): Sea $\theta\in\mathbb{R}$. Afirmamos que f es continua en $\mathbb{R}$. En efecto, como $x\mapsto\sin x$ y $x\mapsto\cos x$ son contiuas en $\mathbb{R}$ se sigue que $x\mapsto\sin x\cos\theta$ y $x\mapsto\sin\theta\cos x$ también lo son en $\mathbb{R}$. Luego, su suma

$$x\mapsto f(x) = \sin x\cos\theta + \sin\theta\cos x$$

es continua en $\mathbb{R}$.

De (iv): Sea $x \in \mathbb{R}$. Como $g(x) = \sqrt{x}$ para todo $x \in [0, \infty[$ es continua en $[0, \infty[$ y la función $h(x) = \frac{1+\cos x}{2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ es continua en $\mathbb{R}$ (por ser producto y suma de funciones continuas en $\mathbb{R}$), entonces su composición

$$g \circ h(x) = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} = f(x)$$

lo es también, ya que

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos x &\Rightarrow 0 \leq 1 + \cos x \\ &\Rightarrow 0 \leq \frac{1 + \cos x}{2} \end{aligned}$$

por tanto, $h(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Así, $g \circ h$ está bien definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Se sigue entonces que f es continua en $\mathbb{R}$. $\square$