

# Notas de Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

12 de abril de 2024

# Índice general

<b>2. Convolución</b>	<b>2</b>
2.1. Preliminares . . . . .	2
2.2. Convolución . . . . .	4
2.2.1. Convolución en $\mathcal{L}_p$ . . . . .	9
2.3. Convolución y diferenciación . . . . .	17
2.3.1. Sucesiones de Dirac . . . . .	19
2.3.2. Convolución de sucesiones de Dirac con funciones en $\mathcal{L}_p$ , $1 \leq p < \infty$ . . . . .	20
2.3.3. Convolución de sucesiones de Dirac con funciones en $\mathcal{L}_\infty$ . . . . .	26
2.4. Los espacios $\mathcal{L}_p^T$ de funciones periódicas . . . . .	29
2.5. Convolución de funciones periódicas . . . . .	34
2.6. Sucesiones de Dirac de funciones periódicas . . . . .	36
2.7. Sistemas Trigonométricos . . . . .	39

# Capítulo 2

## Convolución

Se sabe que el producto puntual de dos funciones integrables no necesariamente es una función integrable (por ejemplo,  $f(x) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\chi_{[0,1]}$ ). Sin embargo, es posible definir un auténtico producto en  $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  que sea compatible con la adición y el producto por escalares, con el cual  $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  sea un **álgebra de Banach conmutativa sin elemento identidad**. Tal operación se llama **convolución**.

### 2.1. Preliminares

---

**Lema 2.1.1**

Si  $M$  es un subconjunto despreciable de  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $M \times \mathbb{R}^m$  es despreciable en  $\mathbb{R}^{n+m}$ .

---

**Demostración:**

Escriba a  $\mathbb{R}^m$  como unión numerable de rectángulos acotados disjuntos. Basta probar que si  $Q$  es un rectángulo acotado en  $\mathbb{R}^m$ , entonces  $M \times Q$  es despreciable en  $\mathbb{R}^{n+m}$ .

Sea  $\varepsilon > 0$ . Si  $\text{Vol}(Q) = 0$ , el resultado es inmediato, pues se sigue que  $\text{Vol}(M \times Q) = 0$ . Suponga que  $\text{Vol}(Q) > 0$ , se tiene para  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  que por definición de medida exterior existe  $\{P_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  sucesión de rectángulos acotados disjuntos tales que  $M \subseteq \bigcup_{\nu=1}^\infty P_\nu$  y:

$$\sum_{\nu=1}^\infty \text{Vol}(P_\nu) < \frac{\varepsilon}{\text{Vol}(Q)}$$

Entonces,  $\{P_\nu \times Q\}_{\nu=1}^\infty$  es una sucesión de rectángulos acotados en  $\mathbb{R}^{n+m}$  tales que  $M \times Q \subseteq \bigcup_{\nu=1}^\infty P_\nu \times Q$ , y

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^\infty \text{Vol}(P_\nu \times Q) &= \text{Vol}(Q) \cdot \sum_{\nu=1}^\infty \text{Vol}(P_\nu) \\ &< \text{Vol}(Q) \cdot \frac{\varepsilon}{\text{Vol}(Q)} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

luego, el conjunto  $M \times Q$  es despreciable, con lo cual el conjunto  $M \times \mathbb{R}^m$  también lo es. ■

**Definición 2.1.1**

Si  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{K}$  y  $g : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{K}$  son funciones, se define el **producto tensorial de  $f$  y  $g$**  como la

función:  $f \otimes g : \mathbb{R}^{p+q} \rightarrow \mathbb{K}$ , dada por:

$$f \otimes g(x, y) = f(x)g(y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^{p+q}$$

---

**Proposición 2.1.1**

Si  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{K}$  y  $g : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{K}$  son funciones medibles, entonces  $f \otimes g : \mathbb{R}^{p+q} \rightarrow \mathbb{K}$  es medible.

---

**Demostración:**

Se probarán dos casos:

1. Afirmamos que el resultado es cierto para funciones escalonadas  $\varphi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{K}$  y  $\psi : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{K}$  escritas canónicamente como:

$$\varphi = \sum_{i=1}^r c_i \chi_{P_i} \quad \text{y} \quad \psi = \sum_{j=1}^s d_j \chi_{Q_j}$$

donde los  $P_i$  y  $Q_j$  son rectángulos acotados disjuntos. En efecto, en este caso:

$$\begin{aligned} \varphi \otimes \psi(x, y) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s c_i d_j \chi_{P_i}(x) \chi_{Q_j}(y) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s c_i d_j \chi_{P_i \times Q_j}(x, y) \end{aligned}$$

la cual es una función escalonada en  $\mathbb{R}^{p+q}$ , luego medible.

2. En el caso general, se sabe que existen  $\{\varphi_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  en  $\mathcal{E}(\mathbb{R}^p, \mathbb{K})$  y  $\{\psi_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  en  $\mathcal{E}(\mathbb{R}^q, \mathbb{K})$  y conjuntos despreciables  $M \subseteq \mathbb{R}^p$ ,  $N \subseteq \mathbb{R}^q$  tales que:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \varphi_\nu(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^p \setminus M$$

y,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \psi_\nu(x) = g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^q \setminus N$$

luego, se tiene que:

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow \infty} \varphi_\nu \otimes \psi_\nu(x, y) &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \varphi_\nu(x) \psi_\nu(y) \\ &= f(x)g(y) \end{aligned}$$

para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^{p+q} \setminus [M \times \mathbb{R}^q \cup \mathbb{R}^p \times N]$ . Por el lema anterior se tiene que  $M \times \mathbb{R}^q \cup \mathbb{R}^p \times N$  es despreciable en  $\mathbb{R}^{p+q}$ . Como  $\varphi_\nu \otimes \psi_\nu$  son medibles para todo  $\nu \in \mathbb{N}$ , entonces  $f \otimes g$  es medible. ■

---

**Corolario 2.1.1**

Si  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{K}$  es medible, entonces  $F : \mathbb{R}^{p+q} \rightarrow \mathbb{K}$  dada como:

$$F(x, y) = f(x), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^{p+q}$$

es medible.

---

**Demostración:**

Es inmediata de la proposición anterior tomando a  $f$  y  $g = \chi_{\mathbb{R}^q}$ . ■

---

**Corolario 2.1.2**

Si  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^p, \mathbb{K})$ ,  $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^q, \mathbb{K})$ , entonces  $f \otimes g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^{p+q}, \mathbb{K})$  y:

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f \otimes g = \int_{\mathbb{R}^p} f \cdot \int_{\mathbb{R}^q} g$$

---

**Demostración:**

Es inmediato del teorema de Tonelli. ■

## 2.2. Convolución

**Definición 2.2.1**

Sean  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$  funciones medibles. La **convolución de  $f$  por  $g$**  se define como la función de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{K}$  tal que:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy$$

para toda  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que la integral exista.

**Ejemplo 2.2.1**

Considere la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

entonces,

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dx = \int_0^{\infty} f(y)g(x-y)dx$$

se tienen dos casos, por como están dadas las funciones  $f$  y  $g$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(y)g(x-y)dx &= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \\ \int_0^x f(y)g(x-y)dy & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \\ \int_0^x f(y)g(x-y)dy & \text{si } 0 < x < 1 \\ \int_0^1 f(y)g(x-y)dy & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \\ \int_0^x g(x-y)dy & \text{si } 0 < x < 1 \\ \int_0^1 g(x-y)dy & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \\ \int_0^x g(x-y)dy & \text{si } 0 < x < 1 \\ \int_0^1 g(x-y)dy & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \\ \int_0^x g(x-y)dy & \text{si } 0 < x < 1 \\ \int_0^1 g(x-y)dy & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ \int_0^1 g(x-y)dy & \text{si } x > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_0^\infty f(y)g(x-y)dx &= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \\ \int_0^x (x-y)dy & \text{si } 0 < x < 1 \\ \int_{x-1}^1 g(x-y)dy & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \\ -\frac{(x-y)^2}{2} \Big|_0^x & \text{si } 0 < x < 1 \\ \int_{x-1}^1 (x-y)dy & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \\ \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 < x < 1 \\ -\frac{(x-y)^2}{2} \Big|_{x-1}^1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \\ \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 < x < 1 \\ -\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{1}{2} & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \\ \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 < x < 1 \\ -\frac{x^2}{2} + x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

### Observación 2.2.1

Note que la función  $f * g$  es continua. (esto servirá para ver que la convolución obtenida es correcta).

### Ejemplo 2.2.2

Recuerde la fórmula de Cauchy para la  $n$ -ésima integral reiterada:

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{n-1}} dt$$

la igualdad anterior es la misma que la de la función:

$$\int_0^x \frac{f(t)dt}{\Gamma(n)(x-t)^{n-1}} = f * g(x)$$

donde

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{\Gamma(n)x^{n-1}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Si  $0 < \alpha \leq 1$ , definimos:

$$\int_0^x \frac{f(t)dt}{\Gamma(\alpha)(x-t)^{1-\alpha}} = I_0^\alpha[f](x)$$

llamada la **integral fraccional de orden  $\alpha$  de  $f$  en  $x$** . Por ejemplo:

$$I_0^{1/2}[t](x) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}}x^{3/2}$$

$$I_0^{1/2} \left[ \frac{4}{3\sqrt{\pi}} t^{3/2} \right] (x) = \frac{x^2}{2}$$

que concuerda con la integral normal de  $t$ .

Ahora estudiaremos algunas propiedades de este operador.

---

**Proposición 2.2.1 (Asociatividad y conmutatividad de la convolución)**

Sean  $f, g, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$  funciones medibles.

1. Si para algún  $x \in \mathbb{R}^n$  existe la convolución  $f * g(x)$ , entonces también existe  $g * f(x)$ , y,

$$f * g(x) = g * f(x)$$

2. Si la función  $|f| * |g|$  está definida c.t.p. en  $\mathbb{R}^n$  y, para algún  $x \in \mathbb{R}^n$  existe  $(|f| * |g|) * |h|(x)$ , entonces existen  $(f * g) * h(x)$ ,  $f * (g * h)(x)$  y,

$$(f * g) * h(x) = f * (g * h)(x)$$


---

**Demostración:**

De (1): Se tiene que:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-u)g(u)du = \int_{\mathbb{R}^n} g(u)f(x-u)du = g * f(x)$$

por el cambio de variable  $u = x - y$ , de Jacobiano  $|(-1)^n| = 1$ . En particular, esto garantiza la existencia de  $g * f(x)$ .

De (2): Se demostrará primero que la función

$$(y, z) \mapsto f(z)g(y-z)h(x-y)$$

es medible como función de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{K}$ , para un  $x \in \mathbb{R}^n$  fijo. Ya se sabe que  $(y, z) \mapsto f(z)$  es medible (por una proposición sobre productos tensoriales).

Se afirma que la función  $(y, z) \mapsto h(x-y)$  es medible. En efecto,  $u \mapsto h(u)$  es medible. Por el cambio de variable  $u = x - y$ , la función  $y \mapsto h(x-y)$  también es medible (por el teorema de cambio de variable). Luego, como con  $f$ , se sigue que  $(y, z) \mapsto h(x-y)$  es medible.

También  $(y, z) \mapsto g(y-z)$  es medible. Por productos tensoriales:

$$G(u, v) = g(u)$$

es medible. La función  $\Phi(r, s) = (r - s, s)$  es un isomorfismo  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  sobre  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ . Por el teorema de cambio de variable se sigue que es medible la función:

$$G \circ \Phi(y, z) = g(y - z)$$

Por lo tanto, la función inicial es medible.

Puesto que para  $x \in \mathbb{R}^n$ :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h(x-y)|dy \int_{\mathbb{R}^n} |f(z)||g(y-z)|dz = \int_{\mathbb{R}^n} |h(x-y)|(|f| * |g|)(y)dy = (|f| * |g|) * |h|(x) < \infty$$

(para los  $x$  en que esté definida la función), entonces por Tonelli la función  $(y, z) \mapsto f(z)g(y-z)h(x-y)$  es integrable y, por Fubini:

$$(f * g) * h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x-y)dy \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(y-z)dz$$

además,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} h(x-y)f(z)g(y-z)dydz &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)dx \int_{\mathbb{R}^n} h(x-y)g(y-z)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)dz \int_{\mathbb{R}^n} h((x-z)-u)g(y-z)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)(g * h)(x-z)dz \\
&= f * (g * h)(x)
\end{aligned}$$

En particular, existen y son iguales  $f * (g * h)(x)$  y  $(f * g) * h(x)$ . ■

### Teorema 2.2.1

Si  $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ , se cumplen las afirmaciones siguientes.

1. Para casi toda  $x \in \mathbb{R}^n$ , existe  $f * g(x)$ .
2. La función  $f * g$ , definida c.t.p. en  $\mathbb{R}^n$ , es integrable en  $\mathbb{R}^n$ .
3.  $\int_{\mathbb{R}^n} f * g = \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)$ .
4.  $\mathcal{N}_1(f * g) \leq \mathcal{N}_1(|f| * |g|) = \mathcal{N}_1(f) \mathcal{N}_1(g)$ .

### Demostración:

De (1): Ya se sabe que la función  $(x, y) \mapsto f(y)g(x-y)$  es medible (ver la proposición anterior). Como

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|dy \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|dx = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|dy\right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(z)|dz\right) < \infty$$

haciendo el cambio de variable  $x = y + z$  y por ser  $f, g$  integrables, entonces la función  $(x, y) \mapsto f(y)g(x-y)$  es integrable en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ . Por el teorema de Fubini, la función  $y \mapsto f(y)g(x-y)$  es integrable para casi toda  $x \in \mathbb{R}^n$ , lo cual prueba el primer inciso.

De (2): Además, por Fubini nuevamente, la función  $x \mapsto f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy$  definida c.t.p. en  $\mathbb{R}^n$  también es integrable, lo cual prueba el segundo inciso.

De (3): Y, por Fubini:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dx dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)dy \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)dy \int_{\mathbb{R}^n} g(u)du \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)dy\right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(u)du\right)
\end{aligned}$$

lo cual prueba el tercer inciso.



De (4): Aplicando (3) a  $|f|, |g|$ , resulta que:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N}_1(f * g) &= \int_{\mathbb{R}^n} |f * g|(x) dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x - y) dy \right| dx \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y) g(x - y)| dx dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} (|f| * |g|)(x) dx \\
 &= \mathcal{N}_1(|f| * |g|) \\
 &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f| \right) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |g| \right) \\
 &= \mathcal{N}_1(f) \mathcal{N}_1(g)
 \end{aligned}$$

lo cual prueba el cuarto inciso. ■

### Observación 2.2.2

Se tiene lo siguiente:

1. La existencia y el valor de la convolución dependen solamente de las clases de equivalencia de  $f$  y  $g$ , se puede pues considerar la convolución como una aplicación de  $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \times L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  en  $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ , tal que:

$$\mathcal{N}_1(f * g) \leq \mathcal{N}_1(f) \mathcal{N}_1(g)$$

2. Es claro que:

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) * g = \alpha_1 (f_1 * g) + \alpha_2 (f_2 * g)$$

y

$$f * (\beta_1 g_1 + \beta_2 g_2) = \beta_1 (f * g_1) + \beta_2 (f * g_2)$$

o sea, que la convolución es un aplicación bilineal y asociativa.

### Definición 2.2.2

Un **Álgebra de Banach** es un espacio de Banach  $(E, \|\cdot\|)$  provisto de un producto  $(x, y) \mapsto x \cdot y$ . Este producto es bilineal y, además,

$$\|x \cdot y\| \leq \|x\| \|y\|$$

si el producto es conmutativo, se dice que el álgebra de Banach es **conmutativa**.

### Ejercicio 2.2.1

En un álgebra de Banach, la función  $(x, y) \mapsto x \cdot y$  es continua del espacio normado producto  $E \times E$  en  $E$ .

### Demostración:

Sean  $\varepsilon > 0$  y  $(x_0, y_0) \in E \times E$ . Tomemos  $\delta = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2(\|x_0\|+1)}, \frac{\varepsilon}{2(\|y_0\|+1)}, 1 \right\} > 0$ , entonces, si  $(x, y) \in E \times E$  es tal que:

$$\|(x_0, y_0) - (x, y)\| < \delta$$

entonces,

$$\|x_0 - x\| < \delta \quad \text{y} \quad \|y_0 - y\| < \delta \Rightarrow \|y\| < 1 + \|y_0\|$$

luego, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\|x_0 \cdot y_0 - x \cdot y\| &= \|x_0 \cdot y_0 - x_0 \cdot y + x_0 \cdot y - x \cdot y\| \\
&\leq \|x_0 \cdot (y_0 - y)\| + \|(x_0 - x) \cdot y\| \\
&\leq \|x_0\| \|y_0 - y\| + \|x_0 - x\| \|y\| \\
&< \|y_0 - y\| (\|x_0\| + 1) + \|x_0 - x\| (\|y_0\| + 1) \\
&< \frac{\varepsilon}{2(\|x_0\| + 1)} (\|x_0\| + 1) + \frac{\varepsilon}{2(\|y_0\| + 1)} (\|y_0\| + 1) \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

por tanto,  $(x, y) \mapsto x \cdot y$  es continua en  $(x_0, y_0) \in E \times E$ . Por ser este elemento de  $E \times E$  arbitrario, se sigue que es continua en todo  $E \times E$ . ■

### Ejemplo 2.2.3

Considere  $\mathbb{K}$  como espacio vectorial sobre sí mismo con la norma usual y, provisto de la multiplicación usual en  $\mathbb{K}$ , es un álgebra de Banach conmutativa con elemento uno.

### Ejemplo 2.2.4

Sea  $S$  un conjunto no vacío. El espacio vectorial  $\mathcal{B}(S, \mathbb{K})$  de las funciones acotadas de  $S$  en  $\mathbb{K}$ , provisto de la norma uniforme  $\|\cdot\|_\infty$  y con la multiplicación definida puntualmente, es un álgebra de Banach conmutativa con elemento uno (la función constante de valor uno).

### Ejemplo 2.2.5

Sea  $S$  un espacio métrico. El subespacio  $\mathcal{BC}(S, \mathbb{K})$  de las funciones continuas y acotadas de  $S$  en  $\mathbb{K}$  es una sub-álgebra de Banach del ejemplo anterior con elemento uno.

### Ejemplo 2.2.6

El subespacio  $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  de  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  de las funciones continuas nulas en infinito es una sub-álgebra de Banach de  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  sin elemento uno.

### Ejemplo 2.2.7

Sea  $E$  un espacio de Banach. El espacio normado  $\text{End}(E)$  de todos los endomorfismos continuos de  $E$  provisto del producto  $(A, B) \mapsto A \circ B$  es un álgebra de Banach no conmutativa con elemento uno.

### Ejemplo 2.2.8

$L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  provisto de la convolución también es un álgebra de Banach conmutativa (¿con elemento identidad?).

## 2.2.1. Convolución en $\mathcal{L}_p$

### Teorema 2.2.2 (Desigualdad de Hölder Generalizada)

Sean  $p_1, \dots, p_m$  números positivos tales que:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_m} = 1$$

entonces, si  $f_1 \in \mathcal{L}_{p_1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ ,  $f_2 \in \mathcal{L}_{p_2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ , ...,  $f_m \in \mathcal{L}_{p_m}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ , entonces  $f_1 \cdot f_2 \cdots f_m \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ , y

$$\mathcal{N}_1(f_1 \cdot f_2 \cdots f_m) \leq \mathcal{N}_{p_1}(f_1) \mathcal{N}_{p_2}(f_2) \cdots \mathcal{N}_{p_m}(f_m)$$

### **Demostración:**

Procederemos por inducción sobre  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 2$ . El caso  $n = 2$  es inmediato de la desigualdad de Hölder clásica.

Suponga que el resultado se cumple para algún  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 2$ . Veamos que se cumple para  $m + 1$ . En efecto, sean  $f_1 \in \mathcal{L}_{p_1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ ,  $f_2 \in \mathcal{L}_{p_2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ , ...,  $f_{m+1} \in \mathcal{L}_{p_{m+1}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  con  $p_1, \dots, p_{m+1}$  números positivos tales que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_{m+1}} &= 1 \\ \Rightarrow \frac{1}{p_{m+1}^*} &= 1 - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_m} \end{aligned}$$

afirmamos que  $f_1 \cdots f_m \in \mathcal{L}_{p_{m+1}^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ . En efecto, observemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} ||$$

■

### **Proposición 2.2.2**

Si  $f : \mathbb{R}^{p+q} \rightarrow \mathbb{K}$  es medible, se cumple lo siguiente:

1. Para casi toda  $x \in \mathbb{R}^p$ , la función  $f_x(y) = f(x, y)$  de  $\mathbb{R}^q$  en  $\mathbb{K}$  es medible.
2. Si para casi toda  $x \in \mathbb{R}^p$ , la función  $f_x$  es integrable en  $\mathbb{R}^q$ , entonces:

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f_x = \int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) dy$$

definida c.t.p. es medible.

### **Teorema 2.2.3 (Teorema de Young)**

Sean  $p, q \in [1, \infty[$  tales que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$  y defina  $r$  como sigue:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$$

Entonces, si  $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  y  $g \in \mathcal{L}_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ , se cumple lo siguiente:

1. Para casi toda  $x \in \mathbb{R}^n$ , existe la convolución  $f * g$ , es decir:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)dy$$

para casi toda  $x \in \mathbb{R}^n$ .

2.  $f * g \in \mathcal{L}_r(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ .
3.  $\mathcal{N}_r(f * g) \leq \mathcal{N}_p(f) \mathcal{N}_q(g)$ .

### Demostración:

Observemos primero que los números  $p, q, r$  satisfacen lo siguiente:

$$r > 1, \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{r} \geq 0, \quad \frac{1}{q} - \frac{1}{r} \geq 0$$

En efecto,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \leq 2 - 1 = 1 \Rightarrow r \geq 1$$

las otras dos son inmediatas, ya que:

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{r} > 1 - \frac{1}{q} \geq 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{q} - \frac{1}{r} > 1 - \frac{1}{p} \geq 0$$

Se verá que para casi toda  $x \in \mathbb{R}^n$ , la función  $y \mapsto f(y)g(x-y)$  es integrable en  $\mathbb{R}^n$ . Por un teorema anterior, ya se sabe que dicha función es medible. Escriba

$$|f(y)||g(x-y)| = (|f(y)|^p |g(x-y)|^q)^{\frac{1}{r}} (|f(y)|^p)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} (|g(x-y)|^q)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}$$

Para probar el resultado, se probarán dos casos:

1.  $p > 1$  y  $q > 1$  En este caso,  $\frac{1}{p} - \frac{1}{r} > 0$  y  $\frac{1}{q} - \frac{1}{r} > 0$ . Si

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{r}, \quad \frac{1}{\beta} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r}, \quad \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{r}$$

entonces,

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 1$$

La función  $y \mapsto (|f(y)|^p |g(x-y)|^q)^{\frac{1}{r}}$  está en  $\mathcal{L}_\alpha(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  (pues, existe la convolución  $|f|^p * |g|^q(x)$  para casi toda  $x \in \mathbb{R}^n$ ). También,  $y \mapsto (|f(y)|^p)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}$  está en  $\mathcal{L}_\beta(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  y  $y \mapsto (|g(x-y)|^q)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}$  está en  $\mathcal{L}_\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ .

Por Hölder generalizado, se tiene que  $y \mapsto |f(y)||g(x-y)|$  es integrable, en particular, existe la convolución  $f * g$ , lo que prueba (1). Además,

$$\begin{aligned} |f * g|(x) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)||g(x-y)| dy \\ &\leq \left[ \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p |g(x-y)|^q dy \right]^{\frac{1}{r}} \left[ \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p dy \right]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \left[ \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^q dy \right]^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} \\ &= [|f|^p * |g|^q(x)]^{\frac{1}{r}} \mathcal{N}_p(f)^{1-\frac{p}{r}} \mathcal{N}_q(g)^{1-\frac{q}{r}} \end{aligned}$$

luego,

$$|f * g|^r(x) \leq \mathcal{N}_p(f)^{r-p} \mathcal{N}_q(g)^{r-q} (|f|^p * |g|^q(x))$$

por el teorema anterior (el cual asegura que  $|f|^p * |g|^q$  es integrable), implica que  $|f| * |g| \in \mathcal{L}_3(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ , lo cual prueba (2).

Finalmente,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_r(f * g)^r &= \int_{\mathbb{R}^n} |f * g(x)|^r dx \\ &\leq \mathcal{N}_p(f)^{r-p} \mathcal{N}_q(g)^{r-q} \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p * |g|^q(x) dx \\ &= \mathcal{N}_p(f)^{r-p} \mathcal{N}_q(g)^{r-q} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \right) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |g|^q \right) \\ &= \mathcal{N}_p(f)^{r-p} \mathcal{N}_q(g)^{r-p} \mathcal{N}_p(f)^p \mathcal{N}_q(g)^q \\ &= (\mathcal{N}_p(f) \mathcal{N}_q(g))^r \\ &\Rightarrow \mathcal{N}_r(f * g) \leq \mathcal{N}_p(f) \mathcal{N}_q(g) \end{aligned}$$

2.  $p > 1$ ,  $q = 1$ . En este caso,  $r = p$ , luego se sigue que:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{r} = \frac{1}{p}, \quad \frac{1}{\beta} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r} = 0, \quad \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{r} = \frac{1}{p^*}$$

Luego, si  $x \in \mathbb{R}^n$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} |f(y)| |g(x-y)| &= (|f(y)|^p |g(x-y)|^q)^{\frac{1}{r}} (|f(y)|^p)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} (|g(x-y)|^q)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}} \\ &= (|f(y)|^p |g(x-y)|)^{\frac{1}{p}} (|f(y)|^p)^0 (|g(x-y)|^q)^{\frac{1}{p^*}} \\ &= (|f(y)|^p |g(x-y)|)^{\frac{1}{p}} (|g(x-y)|^q)^{\frac{1}{p^*}} \end{aligned}$$

Como  $y \mapsto (|f(y)|^p |g(x-y)|)^{\frac{1}{p}}$  está en  $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  (pues existe  $|f|^p * |g|(x)$  para casi toda  $x \in \mathbb{R}^n$ ) y  $y \mapsto (|g(x-y)|^q)^{\frac{1}{p^*}}$  está en  $\mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ , entonces por Hölder y la ecuación anterior, se sigue que  $y \mapsto |f(y)g(x-y)|$  es integrable en  $\mathbb{R}^n$ , luego existe  $|f| * |g|(x)$  para casi toda  $x \in \mathbb{R}^n$ , lo que prueba (1). Además,

$$\begin{aligned} |f * g|(x) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| |g(x-y)| dy \\ &\leq \left[ \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p |g(x-y)| dy \right]^{\frac{1}{p}} \left[ \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)| dy \right]^{\frac{1}{p^*}} \\ &= [|f|^p * |g|(x)]^{\frac{1}{p}} \mathcal{N}_1(g)^{\frac{1}{p^*} = 1 - \frac{1}{p}} \\ \Rightarrow |f * g|^p(x) &\leq [|f|^p * |g|(x)] \mathcal{N}_1(g)^{1-p} \end{aligned}$$

luego,  $f * g \in \mathcal{L}_r(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  (recuerde que  $r = p$ ) lo cual prueba (2), y

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f * g|^p(x) dx &\leq \mathcal{N}_1(g)^{p-1} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \right) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |g| \right) \\ &\leq \mathcal{N}_1(g)^{p-1} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \right) \mathcal{N}_1(g) \\ &\leq \mathcal{N}_p(f)^p \mathcal{N}_1(g)^p \end{aligned}$$

lo cual prueba (3).

El caso  $p = q = 1$  es el teorema anterior, y por la conmutatividad de la convolución, no es necesario probar el caso  $q = 1$ ,  $p > 1$ . ■

### Observación 2.2.3

El caso  $q = 1$  y  $r = p$  es importante, dice: Si  $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  y  $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  entonces, para casi toda  $x \in \mathbb{R}^n$  existe  $f * g(x) \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  y  $\mathcal{N}_p(f * g) \leq \mathcal{N}_p(f) \mathcal{N}_1(g)$ .

### Teorema 2.2.4

Fije  $p \in [1, \infty]$ . Si  $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  y  $g \in \mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  entonces, para toda  $x \in \mathbb{R}^n$  (no solamente para casi toda  $x$ ) existe  $f * g(x)$ ,  $f * g$  es medible acotada y:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f * g(x)| \leq \mathcal{N}_p(f) \mathcal{N}_{p^*}(g)$$

**Demostración:**

La función  $y \mapsto f(y)$  está en  $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  y, para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \mapsto g(x - y)$  está en  $\mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ . Entonces,  $y \mapsto f(y)g(x - y)$  es integrable, luego existe  $f * g(x)$  y, por Hölder:

$$\begin{aligned}
|f * g(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)dy \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)||g(x - y)|dy \\
&= \mathcal{N}_p(f) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |g(x - y)|^{p^*} dy \right)^{1/p^*} \\
&= \mathcal{N}_p(f) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |g(z)|^{p^*} dz \right)^{1/p^*} \text{ por T.C.V. con } z = x - y \\
&\leq \mathcal{N}_p(f) \mathcal{N}_{p^*}(g)
\end{aligned}$$

Esto prueba que  $f * g$  es acotada y, tomando supremos:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f * g(x)| \leq \mathcal{N}_p(f) \mathcal{N}_{p^*}(g)$$

además, por un resultado anterior,  $f * g$  es medible. ■

**Observación 2.2.4**

Recuerde que si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$  entonces, para cada  $h \in \mathbb{R}^n$  la función  $f_h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$  dada por  $f_h(x) = f(x + h)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  es medible.

**Lema 2.2.1**

Sea  $p \in [1, \infty[$ ,  $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ . Entonces, para cada  $h \in \mathbb{R}^n$ ,  $f_h \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  y  $\mathcal{N}_p(f_h) = \mathcal{N}_p(f)$ . Además, la aplicación  $h \mapsto f_h$  de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  es uniformemente continua en  $\mathbb{R}^n$ .

**Demostración:**

Se tienen que probar varias cosas:

1. Por el teorema de cambio de variable, para todo  $h \in \mathbb{R}^n$ ,  $f_h$  es medible y

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p dy = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x + h)|^p dy = \int_{\mathbb{R}^n} |f_h(y)|^p dy$$

por tanto,  $f_h \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  y, más aún,  $\mathcal{N}_p(f) = \mathcal{N}_p(f_h)$ .

2. Se prueba que si  $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ , entonces  $h \mapsto g_h$  de  $\mathbb{R}^n$  en el subespacio denso  $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  en  $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  es uniformemente continua.

Sea  $\varepsilon > 0$  y  $K = \text{Spt}(g)$ . Entonces,  $K$  es compacto en  $\mathbb{R}^n$ . Existe un rectángulo acotado con medida positiva  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  tal que  $K \subseteq \overset{\circ}{P}$ .

Sea  $\|\cdot\|$  una norma de  $\mathbb{R}^n$  y  $d$  la correspondiente distancia inducida. Entonces,  $d(K, \mathbb{R}^n \setminus \overset{\circ}{P}) > 0$ . Como  $g$  es uniformemente continua en  $\mathbb{R}^n$  (pues es continua en un conjunto compacto, a saber,  $\overline{P}$  y fuera de este conjunto es nula) existe  $0 < \delta < d(K, \mathbb{R}^n \setminus \overset{\circ}{P})$  tal que:

$$x_1, y_1 \in \mathbb{R}^n, \|x_1 - y_1\| < \delta \Rightarrow |g(x_1) - g(y_1)| < \frac{\varepsilon}{(\text{Vol}(P))^{1/p}}$$

Sean  $s, t \in \mathbb{R}^n$  tales que  $\|s - t\| < \delta$ . Entonces,

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_p(g_s - g_t) &= \left[ \int_{\mathbb{R}^n} |g(x + s) - g(x + t)|^p dx \right]^{1/p} \\ &= \left[ \int_{\mathbb{R}^n} |g(y + s - y) - g(y)|^p dy \right]^{1/p}\end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable  $x = y - t$  y, como para  $y \in \mathbb{R}^n \setminus \mathring{P}$  se tiene que  $y + s - k \notin K$  (pues,  $\|s - t\| < d(K, \mathbb{R}^n \setminus \mathring{P})$ ) luego, el integrando se anula fuera de  $P$ . Se sigue que:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_p(g_s - g_t) &= \left[ \int_P |g(y + s - y) - g(y)|^p dy \right]^{1/p} \\ &= \left[ \int_P \left| \frac{\varepsilon}{(\text{Vol}(P))^{1/p}} \right|^p dy \right]^{1/p} \\ &= \left[ \int_P \frac{\varepsilon^p}{(\text{Vol}(P))} dy \right]^{1/p} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

lo que prueba el resultado.

3. Sea  $\varepsilon > 0$ . Existe  $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  tal que:

$$\mathcal{N}_p(f - g) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Por (2), existe  $\delta > 0$  tal que:

$$s, t \in \mathbb{R}^n, \|s - t\| < \delta \Rightarrow \mathcal{N}_p(g_s - g_t) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Dados  $s, t \in \mathbb{R}^n$  tales que  $\|s - t\| < \delta$  se tiene que:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_p(f_s - f_t) &\leq \mathcal{N}_p(f_s - g_s) + \mathcal{N}_p(g_s - g_t) + \mathcal{N}_p(f_t - g_t) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

lo cual prueba la continuidad uniforme de  $h \mapsto f_h$ .

■

### Proposición 2.2.3

Fije  $p \in [1, \infty]$ . Si  $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  y  $g \in \mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ , entonces  $f * g$  es uniformemente continua en  $\mathbb{R}^n$ .

### Demostración:

Se puede suponer que, por ejemplo,  $p^* < \infty$ . Por Hölder, para todo  $s, t \in \mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned}|f * g(s) - f * g(t)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)[g(s - y) - g(t - y)] dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| |g(s - y) - g(t - y)| dy \\ &\leq \mathcal{N}_p(f) \left[ \int_{\mathbb{R}^n} |g(s - y) - g(t - y)|^{p^*} dy \right]^{1/p^*} \\ &\leq \mathcal{N}_p(f) \left[ \int_{\mathbb{R}^n} |g(s + x) - g(t + x)|^{p^*} dx \right]^{1/p^*} \\ &= \mathcal{N}_p(f) \mathcal{N}_{p^*}(g_s - g_t)\end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable  $y = -x$ . Por la continuidad uniforme de  $h \mapsto f_h$ , se tiene que  $f * g$  también debe ser uniformemente continua. En efecto, sea  $\varepsilon > 0$ , como  $h \mapsto g_h$  es uniformemente continua, (usando el teorema anterior y ya que  $p^* < \infty$ ), existe  $\delta > 0$  tal que si  $s, t \in \mathbb{R}^n$  son tales que:

$$\|s - t\| < \delta \Rightarrow \mathcal{N}_{p^*}(g_s - g_t) < \frac{\varepsilon}{\mathcal{N}_p(f) + 1}$$

Luego,

$$\|s - t\| < \delta \Rightarrow |f * g(s) - f * g(t)| < (\mathcal{N}_p(f) + 1) \cdot \frac{\varepsilon}{\mathcal{N}_p(f) + 1} = \varepsilon$$

lo que prueba la continuidad uniforme de  $f * g$ . ■

### Proposición 2.2.4

Fije  $p \in ]1, \infty[$ . Si  $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$  y  $g \in \mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ , entonces:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f * g(x) = 0$$

### Demostración:

Fije una norma en  $\mathbb{R}^n$ , digamos  $\|\cdot\|$ . Sea  $\varepsilon > 0$ . Para cada  $M > 0$  se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} |f * g(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| |g(x - y)| dy \\ &\leq \int_{\|y\| \leq M} |f(y)| |g(x - y)| dy + \int_{\|y\| > M} |f(y)| |g(x - y)| dy \\ &\leq \mathcal{N}_p(f) \left[ \int_{\|y\| \leq M} |g(x - y)|^{p^*} dy \right]^{1/p^*} + \mathcal{N}_{p^*}(g) \left[ \int_{\|y\| > M} |f(y)|^p dy \right]^{1/p} \end{aligned}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Por Lebesgue,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{\|y\| > M} |f(y)|^p dy = 0$$

Entonces, existe  $M > 0$  tal que

$$\left[ \int_{\|y\| > M} |f(y)|^p dy \right]^{1/p} < \frac{\varepsilon}{1 + \mathcal{N}_p(f) + \mathcal{N}_{p^*}(g)}$$

Por el cambio de variable  $y = x - z$ , resulta lo siguiente:

$$\int_{\|y\| \leq M} |g(x - y)|^{p^*} dy = \int_{\|x - z\| \leq M} |g(z)|^{p^*} dz$$

Se sigue también del teorema de Lebesgue que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\|z\| > R} |g(z)|^{p^*} dz = 0$$

Entonces, para  $\varepsilon > 0$  existe  $R > 0$  tal que si  $\|z\| > R$ , entonces:

$$\int_{\|z\| > R} |g(z)|^{p^*} dz < \frac{\varepsilon}{1 + \mathcal{N}_p(f) + \mathcal{N}_{p^*}(g)}$$

Ahora, como

$$\left\{ z \in \mathbb{R}^n \mid \|x - z\| \leq M \right\} \subseteq \left\{ z \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| - M \leq \|z\| \right\}$$



tomando  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\|x\| > R + M$ , se sigue que:

$$\int_{\|x-z\| \leq M} |g(z)|^{p^*} dz \leq \int_{\|z\| > R} |g(z)|^{p^*} dz < \frac{\varepsilon}{1 + \mathcal{N}_p(f) + \mathcal{N}_{p^*}(g)}$$

Por tanto, tomando  $\|x\| > R + M$  se sigue que:

$$\begin{aligned} |f * g(x)| &\leq [\mathcal{N}_p(f) + \mathcal{N}_{p^*}(g)] \cdot \frac{\varepsilon}{1 + \mathcal{N}_p(f) + \mathcal{N}_{p^*}(g)} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f * g(x) = 0$$

■

### Observación 2.2.5

El resultado anterior no se generaliza al caso  $p > 1$  y  $p^* = \infty$ . En efecto, si  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  con  $\int_{\mathbb{R}^n} f \neq 0$  y  $g = \chi_{\mathbb{R}^n}$ , entonces:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)dy \neq 0$$

la cual no es nula en el infinito.

---

### Proposición 2.2.5

Si  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  y  $g \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  es tal que

$$\lim_{y \rightarrow \infty} g(y) = 0$$

entonces,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f * g(x) = 0$$


---

### Demostración:

Por Hölder tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} |f * g(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| |g(y)| dy \\ &= \int_{\|y\| \leq M} |f(x-y)| |g(y)| dy + \int_{\|y\| > M} |f(x-y)| |g(y)| dy \\ &\leq \mathcal{N}_\infty(g) \int_{\|y\| \leq M} |f(x-y)| dy + \mathcal{N}_1(f) \sup_{\|y\| > M} |g(y)| \end{aligned}$$

Sea  $\varepsilon > 0$ . Existe  $M > 0$  tal que:

$$\sup_{\|y\| > M} |g(y)| < \frac{\varepsilon}{1 + \mathcal{N}_1(f) + \mathcal{N}_\infty(g)}$$

lo cual sucede, ya que  $\lim_{y \rightarrow \infty} g(y) = 0$ . Ahora, se tiene que:

$$\int_{\|y\| \leq M} |f(x-y)| dy = \int_{\|x-z\| \leq M} |f(z)| dz$$

Por Lebesgue, existe  $R > 0$  tal que:

$$\int_{\|z\|>R} |f(z)| dz < \frac{\varepsilon}{1 + \mathcal{N}_1(f) + \mathcal{N}_\infty(g)}$$

si  $\|x\| > R + M$ , entocnes:

$$\begin{aligned} \int_{\|y\|\leq M} |f(x-y)| dy &\leq \int_{\|z\|>R} |f(z)| dz \\ &< \frac{\varepsilon}{1 + \mathcal{N}_1(f) + \mathcal{N}_\infty(g)} \end{aligned}$$

Por tanto, si  $\|x\| > R + M$ :

$$\begin{aligned} |f * g(x)| &\leq [\mathcal{N}_1(f) + \mathcal{N}_\infty(g)] \cdot \frac{\varepsilon}{1 + \mathcal{N}_1(f) + \mathcal{N}_\infty(g)} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

lo cual prueba el resultado. ■

## 2.3. Convolución y diferenciación

### Proposición 2.3.1

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$  es integrable (está en  $\mathcal{L}_1$ ) y  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$  es de clase  $C^r$  de tal suerte que  $g$  y todas sus derivadas parciales hasta el orden  $r$  (incluye) son acotadas, entonces  $f * g$  es de clase  $C^r$ .

Además, si  $D = \partial_{\alpha_1} \cdots \partial_{\alpha_k}$  con  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \{1, \dots, n\}$  y  $k \in \{1, \dots, r\}$ , se tiene:

$$D(f * g) = f * Dg$$

### Demostración:

Como  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  y  $g \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ , entonces existen  $f * g$  y  $f * Dg$  (pues, tanto  $g$  como  $Dg$  son acotadas) en todo punto de  $\mathbb{R}^n$ .

Se afirma que  $D(f * g) = f * Dg$ . Procederemos por inducción sobre  $k$ , basta probar que

$$\partial_{\alpha_k}(f * g) = (f * \partial_{\alpha_k}g)$$

(si se puede para una derivada parcial, se puede continuar con las demás derivadas parciales para obtener el operador  $D$ ). Se tiene que:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy$$

y

$$(f * \partial_{\alpha_k}g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\partial_{\alpha_k}g(x-y)dy$$

Si  $M = \sup_{z \in \mathbb{R}^n} |\partial_{\alpha_k}g(z)|$ , entonces

$$|f(y)\partial_{\alpha_k}g(x-y)| \leq M|f(y)|, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

donde la función de la derecha es integrable e independiente de  $x$ . Por el teorema de derivación de funciones definidas por integrales, existe  $\partial_{\alpha_k}(f * g)$  y su valor es:

$$\partial_{\alpha_k}(f * g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\partial_{\alpha_k}g(x-y)dy = (f * \partial_{\alpha_k}g)(x)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . ■

**Definición 2.3.1**

Se dice que una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$  es **localmente integrable**, si  $f$  es integrable en todo compacto de  $\mathbb{R}^n$ . Se denota por  $\mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  al espacio vectorial de estas funciones.

**Observación 2.3.1**

Toda función integrable es localmente integrable, pero no viceversa. En particular,  $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \subseteq \mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  y, en particular, todos los polinomios están en  $\mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ .

Podemos entonces definir al espacio  $\mathcal{L}_p^{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  de todas las funciones tales que su módulo a la  $p$  están en  $\mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ . Pero, en particular se tendría que:

$$\mathcal{L}_p^{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \subseteq \mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$$

para todo  $p \in [1, \infty[$ .

**Proposición 2.3.2**

Si  $f \in \mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  y  $g \in \mathcal{C}_c^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ , entonces  $f * g$  existe en todo punto de  $\mathbb{R}^n$ , es de clase  $C^r$  ( $g$  es de clase  $C^r$ ) y para todo  $D = \partial_{\alpha_1} \cdots \partial_{\alpha_k}$ , con  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \{1, \dots, n\}$  y  $k \in \{1, \dots, r\}$ , se tiene:

$$D(f * g) = f * D(g)$$

**Demostración:**

Sea  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  el soporte de  $g$  (el cual es compacto). Para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ , existe la integral:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy$$

Esa integral es no cero si  $x - y \in K$ , es decir si  $y \in x - K$ . Por ende:

$$f * g(x) = \int_{x-K} f(y)g(x-y)dy$$

el conjunto  $x - K$  es compacto. Como  $f$  es localmente integrable, es integrable en  $x - K$  y  $g$  es medible acotada, luego está en  $\mathcal{L}_\infty^{loc}(x - K, \mathbb{K})$ .

Sea  $\|\cdot\|$  una norma en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{f(y)\chi_{x-K}(y)}_{\in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})} g(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f_1(y)g(x-y)dy$$

no se puede usar directamente el teorema de derivación, ya que  $f_1(y) = f(y)\chi_{x-K}(y)$  depende de  $x$ . Para ello, sea  $R > 0$  y

$$B'_R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq R\}$$

Para cada  $x \in B'_R$ ,  $x - K \subseteq B'_R + (-K)$  y:

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy \\ &= \int_{B'_R + (-K)} f(y)g(x-y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} [f(y)\chi_{B'_R + (-K)}(y)] g(x-y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f_1(y)g(x-y)dy \\ &= f_1 * g(x) \end{aligned}$$

para todo  $x \in B'_R$ . Por la proposición anterior,  $f_1 * g$  es de clase  $C^r$  en  $\mathbb{R}^n$ , luego  $f * g$  es de clase  $C^r$  en  $B'_R$ . Además, para cada  $x \in B'_R$ ,

$$D(f * g)(x) = D(f_1 * g)(x) = (f_1 * Dg)(x)$$

y

$$\begin{aligned} (f_1 * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f_1(y) Dg(x - y) dy \\ &= \int_{B'_R + (-K)} f(y) Dg(x - y) dy \\ &= \int_{x-K} f(y) Dg(x - y) dy \\ &= f * Dg(x) \\ \Rightarrow D(f * g)(x) &= f * Dg(x) \end{aligned}$$

pues,  $Dg$  es nula fuera de  $K$ . Como el  $R > 0$  fue arbitrario, se sigue que el resultado anterior es válido para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . ■

### Definición 2.3.2

Sea  $p \in [1, \infty[$  y  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ . Se dice que  $f \in \mathcal{L}_p^{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  si la restricción de  $f$  a cada compacto  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  pertenece a  $\mathcal{L}_p(C, \mathbb{K})$ .

### Observación 2.3.2

Es claro que si  $f \in \mathcal{L}_p^{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ , entonces  $f \in \mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  (pues, para todo compacto  $C \subseteq \mathbb{R}^n$ , se tiene que  $\mathcal{L}_p(C, \mathbb{K}) \subseteq \mathcal{L}_1(C, \mathbb{K})$ ). Y  $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \subseteq \mathcal{L}_p^{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ .

Así pues, el último resultado es válido con la hipótesis alternativa de que  $f \in \mathcal{L}_p^{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ , en particular, de que  $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ .

## 2.3.1. Sucesiones de Dirac

El álgebra de Banach  $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  no posee elemento uno, es decir, no existe  $\delta \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  tal que

$$f * \delta = f \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n \quad \forall f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$$

tampoco existe  $\delta \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  tal que:

$$f * \delta = f \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n \quad \forall f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$$

### Demostración:

En efecto, suponga que exista tal  $\delta > 0$ . Sea  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  un rectángulo acotado tal que  $\overset{\circ}{P} \neq \emptyset$ . Se sabe que

$$\delta * \chi_P = \chi_P \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n$$

por un resultado anterior,  $\delta * \chi_P$  es una función continua en  $\mathbb{R}^n$  ( $\delta \in \mathcal{L}_1$  y  $\chi_P \in \mathcal{L}_\infty$ ). Entonces:

$$\delta * \chi_P = \chi_P = 1 \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n$$

como ambas son continuas, entonces:

$$\delta * \chi_P(x) = \chi_P(x) = 1, \quad \forall x \in \overset{\circ}{P}$$

y

$$\delta * \chi_P(x) = \chi_P(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{P}$$

esto contradeciría la continuidad de  $\delta * \chi_P$  en  $\mathbb{R}^n$ . ■

Las sucesiones de Dirac hacen el papel del elemento uno.

**Definición 2.3.3**

Una sucesión  $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  se dice que es una **sucesión de Dirac** si satisface lo siguiente:

- I.  $\rho_\nu \geq 0$  para todo  $\nu \in \mathbb{N}$ .
- II.  $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\nu = 1$ , para todo  $\nu \in \mathbb{N}$ .
- III. Para todo  $\delta > 0$ ,  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{\|x\| < \delta} \rho_\nu(x) dx = 1$ .

usar (ii) y (iii), (iii) es equivalente a:

- IV. Para todo  $\delta > 0$ ,  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{\|x\| \geq \delta} \rho_\nu(x) dx = 0$ .

Esta definición es independiente de la norma elegida.

**Ejemplo 2.3.1**

Considere la sucesión de picos (especificar). Para todo  $\nu \in \mathbb{N}$ ,  $\rho_\nu$  es la función cuya gráfica es triangular de base  $[\frac{1}{\nu}, -\frac{1}{\nu}]$  sobre el eje  $x$  y cuyo vértice está en el punto  $(0, \nu)$  sobre el eje  $y$  y que es cero fuera del intervalo.

Entonces,  $\{\rho_\nu\}$  es una sucesión de dirac en  $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

**Ejemplo 2.3.2**

Sea  $\delta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función no negativa tal que  $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\nu = 1$ . Para cada  $\nu \in \mathbb{N}$  se define:

$$\rho_\nu(x) = \nu^n \rho_\nu(\nu x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Entonces,  $\{\rho_\nu\}$  es una sucesión de Dirac en  $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ .

Claramente cumple (i). Para (ii), veamos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\nu(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \nu^n \rho_\nu(\nu x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(y) dy = 1$$

haciendo el cambio de variable  $x = \frac{y}{\nu}$  de Jacobiano  $\frac{1}{\nu^n}$ .

De (iii). Por el mismo cambio de variable:

$$\int_{\|x\| > \delta} \rho_\nu(x) dx = \nu^n \int_{\|x\| > \delta} \rho_\nu(\nu x) dx = \int_{\|y\| > \nu\delta} \rho(y) dy \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0$$

por el Teorema de Lebesgue. Luego,  $\{\rho_\nu\}$  es una sucesión de Dirac.

**2.3.2. Convolución de sucesiones de Dirac con funciones en  $\mathcal{L}_p$ ,  $1 \leq p < \infty$** **Teorema 2.3.1 (Desigualdad de Jensen)**

Sean  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  y  $\rho : E \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\rho \geq 0$ , para todo  $x \in E$ ,  $\rho$  integrable en  $E$  y

$$\int_E \rho = 1$$

Sea  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervalo en  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función y  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa. Si  $f \cdot \rho$  y

$(\varphi \circ f)\rho$  son integrables en  $E$ , entonces

$$\int_E f \cdot \rho \in I$$

y

$$\varphi \left( \int_E f \cdot \rho \right) \leq \int_E (\varphi \circ f)\rho$$


---

### **Demostración:**

Se probarán dos cosas:

1. Veamos que  $\int_E f \cdot \rho \in I$ . En efecto, analicemos por casos:

i) Suponga que para algún  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) \geq \alpha$ , para todo  $x \in E$  (en este caso, se tiene que  $I$  es cerrado por la izquierda). Entonces,  $f(x)\rho(x) \geq \alpha\rho(x)$  para todo  $x \in E$ , luego

$$\int_E f \cdot \rho \geq \int_E \alpha\rho = \alpha$$

Suponga ahora que  $f(x) > \alpha$ , para todo  $x \in E$  (en este caso, se tiene que  $I$  es abierto por la izquierda). Entonces

$$\int_E f \cdot \rho \geq \alpha$$

si  $\int_E f \cdot \rho = \alpha$ , debe suceder entonces que  $\int_E (f \cdot \rho - \alpha\rho) = 0$ , por lo cual  $f \cdot \rho - \alpha\rho = 0$  c.t.p. en  $E$ , de donde  $f(x) - \alpha = 0$  para casi toda  $x \in S$ , donde

$$S = \left\{ y \in E \mid \rho(y) > 0 \right\}$$

Como  $m(S) > 0$  ya que  $\int_E \rho = \int_S \rho = 1$ , entonces existe  $x_0 \in E$  tal que  $f(x_0) = \alpha$ , lo cual contradice el hecho de que  $f(x) > \alpha$  para toda  $x \in E$ . Por tanto:

$$\int_E f \cdot \rho > \alpha$$

ii) De forma análoga al inciso anterior, se prueba que si  $f(x) \leq \beta$  para toda  $x \in E$ , entonces  $\int_E f \cdot \rho \leq \beta$  y, si  $f(x) < \beta$  para toda  $x \in E$ , entonces  $\int_E f \cdot \rho < \beta$

por los dos incisos anteriores, se concluye que  $\int_E f \cdot \rho \in I$ .

2. Defina  $c = \int_E f \cdot \rho \in I$ . Se tienen dos casos:

i) Suponga que  $c \in \overset{\circ}{I}$ . Como  $\varphi$  es convexa en  $I$ , si  $s, t \in I$  son tales que  $s < c < t$ , entonces:

$$\frac{\varphi(c) - \varphi(s)}{c - s} \leq \frac{\varphi(t) - \varphi(c)}{t - c}$$

sea  $\alpha = \sup \left\{ \frac{\varphi(c) - \varphi(s)}{c - s} \mid s < c \right\}$ . Entonces si  $s \in I$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(c) - \varphi(s)}{c - s} &\leq \alpha, \quad \forall s < c \\ \Rightarrow \varphi(c) + \alpha \cdot (s - c) &\leq \varphi(s), \quad \forall s \leq c \end{aligned}$$

Como  $t \in I$  es tal que  $c < t$ , entonces por ser  $\alpha$  el supremo, debe suceder que

$$\begin{aligned}\alpha &\leq \frac{\varphi(t) - \varphi(c)}{t - c}, \quad \forall t > c \\ \Rightarrow \varphi(c) + \alpha \cdot (t - c) &\leq \varphi(t), \quad \forall t \geq c\end{aligned}$$

Por tanto, de las dos desigualdades anteriores, se sigue que:

$$\varphi(c) + \alpha \cdot (u - c) \leq \varphi(u), \quad \forall u \in I$$

como  $f(x) \in I$  para todo  $x \in E$ , se sigue que:

$$\begin{aligned}\varphi(c) + \alpha \cdot (f(x) - c) &\leq \varphi(f(x)), \quad \forall x \in E \\ \Rightarrow \varphi(c)\rho(x) + \alpha \cdot (f(x) - c)\rho(x) &\leq \varphi(f(x))\rho(x), \quad \forall x \in E\end{aligned}$$

de esta forma, integrando ambos lados:

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int_E \varphi(c)\rho(x)dx + \int_E \alpha \cdot (f(x) - c)\rho(x)dx &\leq \int_E \varphi(f(x))\rho(x)dx \\ \Rightarrow \varphi(c) \int_E \rho(x)dx + \alpha \int_E (f(x) - c)\rho(x)dx &\leq \int_E \varphi(f(x))\rho(x)dx \\ \Rightarrow \varphi(c) \cdot 1 + \alpha \int_E f(x)\rho(x)dx - \alpha \cdot c \int_E \rho(x)dx &\leq \int_E \varphi(f(x))\rho(x)dx \\ \Rightarrow \varphi\left(\int_E f(x)\rho(x)dx\right) + \alpha \int_E f(x)\rho(x)dx - \alpha \cdot \int_E f(x)\rho(x)dx &\leq \int_E \varphi(f(x))\rho(x)dx \\ \Rightarrow \varphi\left(\int_E f(x)\rho(x)dx\right) &\leq \int_E \varphi(f(x))\rho(x)dx\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\varphi\left(\int_E f \cdot \rho\right) \leq \int_E (\varphi \circ f)\rho$$

que es lo que se quería probar.

- II) Suponga que  $a = \int_E f \cdot \rho$  (en este caso, la integral coincide con el valor del extremo izquierdo del intervalo  $I$ ), luego  $a \in I$ .

Se tiene entonces que  $f(x) \geq a$  para todo  $x \in E$ . Luego,  $\int_E (f - a)\rho = 0$ , por ende  $f(x) = a$  para casi todo  $x \in S$ , donde

$$S = \left\{x \in E \mid \rho(x) > 0\right\}$$

así pues

$$\begin{aligned}\int_E (\varphi \circ f)\rho &= \int_S (\varphi \circ f)\rho \\ &= \int_S \varphi(a) \cdot \rho \\ &= \varphi(a) \int_S \rho \\ &= \varphi(a) \int_E \rho \\ &= \varphi(a) \\ &= \varphi\left(\int_E f \cdot \rho\right) \\ \Rightarrow \int_E (\varphi \circ f)\rho &= \varphi\left(\int_E f \cdot \rho\right)\end{aligned}$$

lo que prueba el resultado.

III) El caso  $b = \int_E f \cdot \rho$  es análogo al anterior.

Por los incisos anteriores, se sigue el resultado de la prueba. ■

### Observación 2.3.3

Note que  $\int_E f \cdot \rho$  representa un promedio de los valores de  $f$ , por lo cual el hecho de que  $a = \int_E f \cdot \rho$  sea un extremo del intervalo  $I$  implica que  $f$  debe tomar el valor constante  $a$  c.t.p. en  $E$ .

### Ejemplo 2.3.3

Suponga que  $I = [0, \infty[$  en el teorema anterior, luego  $f$  debe ser no negativa en  $E$ .

1. Si  $\varphi(t) = t^p$ ,  $t \geq 0$  con  $p \geq 1$ , la desigualdad de Jensen dice que

$$\left( \int_E f \cdot \rho \right)^p \leq \int_E f^p \cdot \rho$$

siempre que las integrales existan. La conclusión persiste si  $f$  es medible no negativa y  $\int_E f \cdot \rho < \infty$  y  $\int_E f^p \cdot \rho \leq \infty$ .

2. Si  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

$$e^{\alpha \int_E f \cdot \rho} \leq \int_E e^{\alpha f} \rho$$

Igual que en caso anterior, si  $f$  es medible no negativa y  $\int_E f \cdot \rho$ , la conclusión persiste.

3. Si  $m(E) = 1$  y  $\rho$  es tal que  $\rho(x) = 1$  para todo  $x \in E$ , se tiene que:

$$\varphi \left( \int_E f(x) dx \right) \leq \int_E \varphi(f(x)) dx$$

### Teorema 2.3.2

Sean  $1 \leq p \leq \infty$  y  $f \in L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ . Si  $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  es una sucesión de Dirac en  $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  entoces,  $\{\rho_\nu * f\}_{\nu=1}^\infty$  converge a  $f$  en  $p$ -promedio.

### Demostración:

Como  $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  es una sucesión de Dirac, entonces

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \rho_\nu(y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

para todo  $\nu \in \mathbb{N}$ . Además,

$$f * \rho_\nu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \rho_\nu(x - y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) \rho_\nu(y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

para todo  $\nu \in \mathbb{N}$ . Por ende:

$$\begin{aligned} (f - f * \rho_\nu)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} (f(x) - f(x - y)) \rho_\nu(y) dy \\ \Rightarrow |(f - f * \rho_\nu)(x)|^p &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x) - f(x - y)) \rho_\nu(y) dy \right|^p \\ &\leq \left[ \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x - y)| \rho_\nu(y) dy \right]^p \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x - y)|^p \rho_\nu(y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ y } \forall \nu \in \mathbb{N} \end{aligned}$$



donde la primera desigualdad es por desigualdad del triángulo, la segunda por desigualdad de Jensen, tomando  $\varphi(t) = t^p$  para todo  $t \geq 0$ , tratando al segundo miembro como una función medible no negativa. Integrando respecto a  $x \in \mathbb{R}^n$  se tiene que:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_p(f - f * \rho_\nu)^p &\leq \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x - y)|^p \rho_\nu(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\nu(y) dy \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x - y)|^p dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\nu(y) \mathcal{N}_p(f - f_{-y})^p dy, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

Donde  $f_{-y}(x) = f(x - y)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Como la función  $y \mapsto f_{-y}$  de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  es continua (pues es uniformemente continua), dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $\|y\| < \delta$  entonces

$$\mathcal{N}_p(f - f_{-y}) < \frac{\varepsilon}{2^{1/p}}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_p(f - f * \rho_\nu)^p &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\nu(y) \mathcal{N}_p(f - f_{-y})^p dy \\ &= \int_{\|y\| < \delta} \rho_\nu(y) \mathcal{N}_p(f - f_{-y})^p dy + \int_{\delta \leq \|y\|} \rho_\nu(y) \mathcal{N}_p(f - f_{-y})^p dy \\ &\leq \int_{\|y\| < \delta} \rho_\nu(y) \frac{\varepsilon^p}{2} dy + \int_{\delta \leq \|y\|} \rho_\nu(y) \mathcal{N}_p(f - f_{-y})^p dy \\ &= \frac{\varepsilon^p}{2} \int_{\|y\| < \delta} \rho_\nu(y) dy + \int_{\delta \leq \|y\|} \rho_\nu(y) \mathcal{N}_p(f - f_{-y})^p dy \\ &\leq \frac{\varepsilon^p}{2} + \int_{\delta \leq \|y\|} \rho_\nu(y) \mathcal{N}_p(f - f_{-y})^p dy, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

además,

$$\begin{aligned}\int_{\delta \leq \|y\|} \rho_\nu(y) \mathcal{N}_p(f - f_{-y})^p dy &\leq \int_{\delta \leq \|y\|} \rho_\nu(y) [\mathcal{N}_p(f) + \mathcal{N}_p(f_{-y})]^p dy \\ &= [2\mathcal{N}_p(f)]^p \int_{\delta \leq \|y\|} \rho_\nu(y) dy \\ &= 2^p \mathcal{N}_p(f)^p \int_{\delta \leq \|y\|} \rho_\nu(y) dy, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

Como  $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  es sucesión de Dirac, por (iv) se tiene que existe  $\nu_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $\nu \geq \nu_0$ , entonces:

$$2^p \mathcal{N}_p(f)^p \int_{\delta \leq \|y\|} \rho_\nu(y) dy < \frac{\varepsilon^p}{2}$$

Por tanto, si  $\nu \geq \nu_0$ , se tiene que:

$$\begin{aligned}\Rightarrow \mathcal{N}_p(f - f * \rho_\nu)^p &\leq \frac{\varepsilon^p}{2} + 2^p \mathcal{N}_p(f)^p \int_{\delta \leq \|y\|} \rho_\nu(y) dy \\ &< \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} \\ &= \varepsilon^p \\ \Rightarrow \mathcal{N}_p(f - f * \rho_\nu) &< \varepsilon\end{aligned}$$

por ende,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{N}_p(f - f * \rho_\nu) = 0$$

lo que prueba el resultado. ■

---

**Lema 2.3.1**

Si  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$  son funciones medibles de soporte compacto y  $f * g$  está definida c.t.p. en  $\mathbb{R}^n$  entonces,  $f * g$  tiene soporte compacto, más precisamente, existe un compacto en  $\mathbb{R}^n$  fuera del cual  $f * g$  existe y se anula.

---

**Demostración:**

Notemos que  $f * g(x)$  existe para algún  $x \in \mathbb{R}^n$  si y sólo si existe y se cumple:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy = \int_{\text{Spt}(f)} f(y)g(x-y)dy$$

Se afirma que si  $x \notin \text{Spt}(f) + \text{Spt}(g)$  entonces existe la convolución  $f * g(x)$  y vale cero. En efecto, sea  $x \notin \text{Spt}(f) + \text{Spt}(g)$  entonces,  $x - y \notin \text{Spt}(g)$  para todo  $y \in \text{Spt}(f)$ . De donde:

$$\int_{\text{Spt}(f)} f(y)g(x-y)dy = 0, \quad \forall x \notin \text{Spt}(f) + \text{Spt}(g)$$

Por ende,  $\text{Spt}(f * g) \subseteq \text{Spt}(f) + \text{Spt}(g)$ . Note que  $\text{Spt}(f * g)$  es un cerrado en un compacto (ya que la suma de dos compactos es compacto), luego compacto para el cual  $f * g$  se anula. ■

---

**Teorema 2.3.3**

El  $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  es denso en  $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ , para  $1 \leq p < \infty$ .

---

**Demostración:**

Sea  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función tal que

$$t \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-t}} & \text{si } t < 1 \\ 0 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

$\varphi$  es continua de clase  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}$ . Sea  $\|\cdot\|$  la norma euclídeana. Se define  $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  como  $\rho(x) = 0$  si  $\|x\| \geq 1$  y:

$$\rho(x) = \frac{e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}}}{\int_{\|y\|<1} e^{-\frac{1}{1-\|y\|^2}} dy} \quad \text{si } \|x\| < 1$$

es decir, que  $\rho(x) = c\varphi(\|x\|^2)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  con  $c$  constante. Es claro que  $\rho$  es de clase  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}^n$ , no negativa y:

$$\text{Spt}(\rho) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1 \right\}$$

y, su integral sobre  $\mathbb{R}^n$  es igual a 1. Considere la sucesión de Dirac  $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  en  $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  daada por:

$$\rho_\nu(x) = \nu^n \rho(\nu x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Note que  $\rho_\nu \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ , de hecho:

$$\text{Spt}(\rho_\nu) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq \frac{1}{\nu} \right\}, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$$

Sea  $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  y tomemos  $\varepsilon > 0$ . Por la densidad de  $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ , en  $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ , existe  $\psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  tal que:

$$\mathcal{N}_p(f - \psi) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por el teorema anterior,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{N}_p(\psi - \psi * \rho_\nu) = 0$$

Fije  $\nu \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathcal{N}_p(\psi - \psi * \rho_\nu) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Entonces:

$$\mathcal{N}_p(f - \psi * \rho_\nu) \leq \mathcal{N}_p(f - \psi) + \mathcal{N}_p(\psi - \psi * \rho_\nu) < \varepsilon$$

Como  $\psi \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  y  $\rho_\nu$  es de clase  $C^\infty$  de soporte compacto, entonces  $\psi * \rho_\nu$  es de clase  $C^\infty$ . Además, por el teorema anterior,  $\psi * \rho_\nu$  tiene soporte compacto ya que ambas funciones,  $\psi$  y  $\rho_\nu$  lo tienen. Luego, se tiene el resultado. ■

### 2.3.3. Convolución de sucesiones de Dirac con funciones en $\mathcal{L}_\infty$

#### Teorema 2.3.4 (Teorema de Heine)

Sean  $X$  y  $Y$  espacios métricos y  $f : X \rightarrow Y$  continua en todo punto de un compacto  $K \subseteq X$  (no basta suponer que  $f|_K$  es función continua). Entonces, para todo  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que

$$x \in K \text{ y } y \in X, d(x, y) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

#### Demostración:

Ejercicio. ■

#### Teorema 2.3.5

Sea  $f \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  y  $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  una sucesión de Dirac en  $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ . Si  $f$  es continua en todo punto de un compacto  $K$ , entonces:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} f * \rho_\nu = f \text{ uniformemente en } K$$

#### Demostración:

Se sabe que existe la convolución  $f * \rho_\nu(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  y, para todo  $\nu \in \mathbb{N}$ .

Se tiene:

$$|f(x) - f * \rho_\nu(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x - y)| \rho_\nu(y) dy$$

sea  $\varepsilon > 0$ . Por el teorema de Heine, existe  $\delta > 0$  tal que

$$x \in K, y \in \mathbb{R}^n, \|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Para  $x \in K$ , con este  $\delta$  se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} |f(x) - f * \rho_\nu(x)| &\leq \int_{\|y\| < \delta} |f(x) - f(x - y)| \rho_\nu(y) dy + \int_{\delta \leq \|y\|} |f(x) - f(x - y)| \rho_\nu(y) dy \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \int_{\delta \leq \|y\|} |f(x) - f(x - y)| \rho_\nu(y) dy \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \int_{\delta \leq \|y\|} (|f(x)| + |f(x - y)|) \rho_\nu(y) dy \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \left( \sup_{x \in K} |f(x)| + \mathcal{N}_\infty(f) \right) \int_{\delta \leq \|y\|} \rho_\nu(y) dy \end{aligned}$$

Por la condición (iv) de sucesiones de Dirac, existe  $\nu_0 \in \mathbb{N}$  tal que:

$$\nu \geq \nu_0 \Rightarrow \left[ \left( \sup_{x \in K} |f(x)| + \mathcal{N}_\infty(f) \right) \int_{\delta \leq \|y\|} \rho_\nu(y) dy \right] < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por tanto, si  $\nu \geq \nu_0$ :

$$\sup_{x \in K} |f(x) - f * \rho_\nu(x)| \leq \varepsilon$$

Luego, se tiene la convergencia uniforme en  $K$ . ■

---

**Corolario 2.3.1**

Bajo las mismas condiciones del teorema, si  $f$  es continua en un punto  $x \in \mathbb{R}^n$ , entonces

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} f * \rho_\nu(x) = f(x)$$

---

**Demostración:**

Es inmediato del teorema anterior tomando  $K = \{x\}$ . ■

---

**Teorema 2.3.6**

Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$  es acotada y uniformemente continua en  $\mathbb{R}^n$  y  $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  es una sucesión de Dirac en  $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ , entonces

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} f * \rho_\nu = f \text{ uniformemente en } \mathbb{R}^n$$

También, si  $f \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  y es continua en un abierto  $\Omega$  y  $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  es una sucesión de Dirac en  $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ , entonces

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} f * \rho_\nu = f \text{ uniformemente en } C$$

donde  $C$  es un conjunto compacto arbitrario contenido en  $\Omega$ .

---

**Demostración:**

Analicemos la prueba del teorema anterior, ■

---

**Teorema 2.3.7 (Teorema de Weierstrass)**

Sea  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$  el espacio vectorial de funciones continuas de  $[a, b]$  en  $\mathbb{K}$ , provisto de la norma uniforme. Si  $\mathcal{P}([a, b], \mathbb{K})$  es el espacio vectorial de todas las funciones polinómicas de  $[a, b]$  en  $\mathbb{K}$  entonces,  $\mathcal{P}([a, b], \mathbb{K})$  es denso en  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ .

---

**Demostración:**

Hay que hacer varias cosas:

1. Basta probar el resultado para  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K})$ . En efecto, suponga cierto el teorema para este caso. Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  una función continua. Sea  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K}$  dada por:

$$g(t) = f((1-t)a + tb)$$

entonces,  $g \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K})$ . Por tanto, dado  $\varepsilon > 0$  existe una función polinómica  $p$  tal que:

$$\sup_{t \in [0, 1]} |g(t) - p(t)| < \varepsilon$$

o sea:

$$\sup_{x \in [a, b]} \left| f(x) - p\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \right| < \varepsilon$$

tomando como polinomio a  $q \in \mathcal{P}([a, b], \mathbb{K})$  tal que  $q(x) = p\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ . Luego, se tiene el resultado.

2. Basta probar el resultado para el subespacio vectorial  $\tilde{\mathcal{C}}([0, 1], \mathbb{K})$  de todas las funciones continuas de  $[0, 1]$  en  $\mathbb{K}$  nulas en 0 y 1. En efecto, suponga el resultado probado en este caso. Sea  $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K})$ . Note que la función siguiente:

$$x \mapsto f(x) - f(0) - x(f(1) - f(0))$$

pertenece a  $\tilde{\mathcal{C}}([0, 1], \mathbb{K})$ . Dado  $\varepsilon > 0$  existe una función polinómica  $p$  tal que

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - f(0) - x(f(1) - f(0) - p(x))| \leq \varepsilon$$

tomemos al polinomio  $q(x) = p(x) - x(f(1) - f(0)) - f(0)$  es tal que  $q \in \mathcal{P}([0, 1], \mathbb{K})$ .

3. Resta probar que si  $f \in \tilde{\mathcal{C}}([0, 1], \mathbb{K})$  y  $\varepsilon > 0$ , existe una función polinómica  $p$  tal que:

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon$$

Sea  $\rho_\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función siguiente:

$$\rho_\nu(t) = \frac{(1 - t^2)^\nu}{\int_{-1}^1 (1 - \theta^2)^\nu d\theta} \text{ si } t \in [-1, 1]$$

y  $\rho_\nu(t) = 0$  si  $t \in [-1, 1]$ , para todo  $\nu \in \mathbb{N}$ . Esta sucesión es llamada el **Núcleo de Landau**. Se afirma que  $\{\rho_\nu\}_{\nu=0}^\infty$  es una sucesión de Dirac en  $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

Claramente cumplen (i) y (ii). Se verá que se cumple (iv). Usando la paridad de  $\rho_\nu$ , basta probar que si  $0 < \delta < 1$ , entonces:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\int_\delta^1 (1 - t^2)^\nu dt}{\int_{-1}^1 (1 - \theta^2)^\nu d\theta} = 0$$

Se tiene

$$\int_{-1}^1 (1 - \theta^2)^\nu d\theta = 2 \int_0^1 (1 - \theta^2)^\nu d\theta = 2 \int_0^1 (1 - \theta)^\nu (1 + \theta)^\nu d\theta \geq 2 \int_0^1 (1 - \theta)^\nu d\theta = \frac{2}{\nu + 1}$$

y

$$\int_\delta^1 (1 - t^2)^\nu dt \leq (1 - \delta^2)^\nu \int_\delta^1 dy = (1 - \delta^2)^\nu (1 - \delta)$$

por tanto,

$$\frac{\int_\delta^1 (1 - t^2)^\nu dt}{\int_{-1}^1 (1 - \theta^2)^\nu d\theta} \leq \frac{\nu + 1}{2} (1 - \delta)(1 - \delta^2)^\nu$$

donde el lado de la derecha tiende a cero si  $\nu \rightarrow \infty$ . Con ello, se tiene el resultado.

Ahora, si  $\tilde{f}$  es la ampliación canónica de  $f \in \tilde{\mathcal{C}}([0, 1], \mathbb{K})$  entonces, es uniformemente continua en  $\mathbb{R}$  y acotada. Luego, por el teorema anterior, la convolución converge a  $\tilde{f}$  en el compacto  $[0, 1]$ .

Para  $x \in [0, 1]$ ,

$$\rho_\nu * f(x) = \int_0^1 f(t) \rho_\nu(x - t) dt$$

como  $x - t \in [-1, 1]$  para todo  $t \in [0, 1]$ , entonces:

$$\begin{aligned} \rho_\nu * f(x) &= \int_0^1 f(t) \frac{(1 - (x - t)^2)^\nu}{\int_{-1}^1 (1 - \theta^2)^\nu d\theta} dt \\ &= \int_0^1 f(t) c_\nu (1 - (x - t)^2)^\nu dt \end{aligned}$$

donde  $c_\nu = \frac{1}{\int_{-1}^1 (1 - \theta^2)^\nu d\theta}$ . Siendo claramente dicha integral anterior un polinomio en la variable  $x$  de grado  $2\nu$ , lo cual concluye la demostración. ■

## 2.4. Los espacios $\mathcal{L}_p^T$ de funciones periódicas

### Definición 2.4.1

Se dice que una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  es **periódica con período**  $T > 0$ , si

$$f(x + T) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En tal caso, tal función queda completamente determinada por su restricción a cualquier intervalo de longitud  $T$ , es decir de la forma:  $[\alpha, \alpha + T]$ , siendo  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

### Observación 2.4.1

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  una función periódica. Entonces

1.  $f$  es medible si y sólo si  $f\chi_{[\alpha, \alpha+T]}$  para algún  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
2. Si  $f$  es integrable en todo intervalo de la forma  $[\alpha, \alpha + T]$ , entonces lo es en todo intervalo de esa forma, y sus integrales son iguales en todo  $[\alpha, \alpha + T]$ .

### Demostración:

De (2): En efecto, ya se tiene que  $f$  es integrable en todo intervalo de la forma  $[\alpha, \alpha + T]$  (por traslación). Veamos que la integral es la misma. Para ello, se probará que:

$$\int_0^T f = \int_a^{a+T} f$$

en efecto, veamos que si  $a \in \mathbb{R}$ , entonces debe existir un entero  $k$  tal que:

$$\alpha \leq kT < \alpha + T$$

Luego:

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} f(x)dx &= \int_a^{kT} f(x)dx + \int_{kT}^{a+T} f(x)dx \\ &= \int_{a+T}^{kT+T} f(y-T)dy + \int_{kT}^{a+T} f(x)dx \\ &= \int_{a+T}^{(k+1)T} f(y)dy + \int_{kT}^{a+T} f(x)dx \\ &= \int_{kT}^{(k+1)T} f(x)dx \\ &= \int_0^T f(x)dx \end{aligned}$$

■

### Definición 2.4.2

Sea  $1 \leq p < \infty$ . Se denota por  $\mathcal{L}_p^T$  al espacio vectorial de todas las funciones periódicas  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  periódicas de período  $T > 0$  tal que  $|f|^p$  es integrable en  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ .

Si  $f \in \mathcal{L}_p^T$ , se define

$$\mathcal{N}_p(f) = \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f|^p \right]^{1/p}$$

Se denota por  $\mathcal{L}_\infty^T$  al espacio vectorial de todas las funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  periódicas de período

$T > 0$  tales que  $f$  es medible y esencialmente acotada en  $\mathbb{R}$ , equivalentemente en  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$ . Si  $f \in \mathcal{L}_\infty^T$ , se define

$$\mathcal{N}_\infty(f) = \sup_{\text{ess}}_{[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[} |f|$$

#### Observación 2.4.2

Sea  $1 \leq p < \infty$ . La aplicación que a cada  $f \in \mathcal{L}_p^T$  le asigna su restricción a  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$ , es un isomorfismo de  $\mathcal{L}_p^T$  sobre  $\mathcal{L}_p(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[, \mathbb{K})$ . A través de este isomorfismo se verifica de inmediato que  $\mathcal{N}_p(\cdot)$  es una seminorma sobre  $\mathcal{L}_p^T$ , convirtiendo a este isomorfismo en una isometría.

Sea  $L_p^T$  el espacio normado asociado a  $\mathcal{L}_p^T$ , donde  $\mathcal{N}_p(\cdot)$  denota la norma correspondiente. La isometría anterior induce una isometría entre  $L_p^T$  sobre  $L_p(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[, \mathbb{K})$ .

Se concluye de lo anterior lo siguiente:

1.  $L_p^T$  es un espacio de Banach.
2.  $L_2^T$  es un espacio Hilbertiano.

Ya que la clase de equivalencia de una función  $f \in \mathcal{L}_p^T$  depende solamente de la restricción de  $f$  a  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$  o  $]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$  o  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ ,  $L_p^T$  se puede identificar también con  $L_p(S, \mathbb{K})$ , donde  $S$  es uno de los conjuntos anteriores.

Como  $]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$  tiene medida finita, entonces si  $q > p$  de forma inmediata se tiene que  $L_q^T \subseteq L_p^T$ .

En particular,  $L_p^T \subseteq L_1^T$ , para todo  $p \in [1, \infty]$ .

#### Definición 2.4.3

Se denota por  $\mathcal{E}^T$  al espacio vectorial de todas las funciones periódicas con período  $T > 0$  tales que su restricción a  $]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$  es escalonada en  $]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$ .

También, se denota por  $\mathcal{C}^T$  al espacio vectorial de funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  periódicas de período  $T > 0$  que son continuas en  $\mathbb{R}$ , equivalentemente en  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ .

#### Observación 2.4.3

Recuerde que una función  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  donde  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  es un conjunto abierto, se dice que es escalonada en el abierto  $\Omega$ , si es de la forma:

$$\varphi = \sum_{k=1}^r \alpha_k \chi_{A_k}$$

donde  $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$  y  $A_1, \dots, A_r \subseteq \mathbb{R}^n$  son rectángulos acotados disjuntos tales que:

$$\overline{A_r} \subseteq \Omega, \forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket$$

#### Lema 2.4.1

Toda función en  $\mathcal{C}^T$  es uniformemente continua en  $\mathbb{R}$ .

#### Demostración:

Sea  $f \in \mathcal{C}^T$  es continua en  $[0, 3T]$ , dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$ , donde  $0 < \delta < T$  con la siguiente propiedad:

$$x, y \in [0, 3T] \text{ y } |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

sean ahora  $x, y \in \mathbb{R}$  tal que  $|x - y| < \delta$ , es decir que

$$x - \delta < y < x + \delta$$

de donde:

$$x - T < y < x + T$$

existe un  $k \in \mathbb{Z}$  tal que:

$$kT \leq x < (k+1)T$$

entonces,

$$(k-1)T < y < (k+2)T$$

Luego,

$$0 \leq y - (k-1)T \leq 3T$$

y

$$0 \leq x - (k-1)T \leq 2T < 3T$$

luego,  $x - (k-1)T, y - (k-1)T \in [0, 3T]$  y, además:

$$|x - (k-1)T - (y - (k-1)T)| = |x - y| < \delta$$

Entonces,

$$|f(x) - f(y)| = |f(x - (k-1)T) - f(y - (k-1)T)| < \varepsilon$$

Por tanto,  $f$  es uniformemente continua. ■

#### Teorema 2.4.1

Sean  $1 \leq p < \infty$  y  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto. Entonces, el espacio vectorial  $\mathcal{E}(\Omega, \mathbb{K})$  (funciones escalonadas en el abierto  $\Omega$ ) es denso en  $L_p(\Omega, \mathbb{K})$ .

#### Demostración:

Sea  $f \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathbb{K})$  y  $\varepsilon > 0$ . Como  $\tilde{f} \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  y  $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  es denso en  $L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ , existe  $\psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  tal que:

$$\mathcal{N}_p(\tilde{f} - \psi) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Escriba a  $\Omega$  como unión a lo sumo numerable de cubos disjuntos  $C_\nu$  tales que  $\overline{C_\nu} \subseteq \Omega$ , para toda  $\nu \in \mathbb{N}$ , y defina

$$Q_k = \bigcup_{\nu=1}^k C_\nu, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Observe que  $Q_k$  es un conjunto elemental tal que  $\overline{Q_k} \subseteq \Omega$ . Se tiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{f} \chi_{Q_k} = \tilde{f}$$

puntualmente en  $\mathbb{R}^n$ , y  $|\tilde{f} \chi_{Q_k}| \leq |\tilde{f}|$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ , siendo  $|\tilde{f}| \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  independiente de  $k$ . Por el teorema de Lebesgue en  $L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{N}_p(\tilde{f} - \tilde{f} \chi_{Q_k}) = 0$$

Fijemos  $k \in \mathbb{N}$  tal que:

$$\mathcal{N}_p(\tilde{f} - \tilde{f} \chi_{Q_k}) < \frac{\varepsilon}{2}$$



Como

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_p(\tilde{f}\chi_{Q_k} - \psi\chi_{Q_k}) &= \left[ \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{Q_k} |\tilde{f} - \psi|^p \right]^{1/p} \\
&\leq \left[ \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{f} - \psi|^p \right]^{1/p} \\
&= \mathcal{N}_p(\tilde{f} - \psi) \\
&< \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\mathcal{N}_p(f - \psi\chi_{Q_k}) < \varepsilon$$

La demostración concluye porque la reestrcción  $\varphi$  de  $\psi\chi_{Q_k}$  a  $\Omega$  es una función continua escalonada en el abierto  $\Omega$ . ■

### Teorema 2.4.2

Sean  $1 \leq p < \infty$  y  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un abierto. Entonces, el espacio vectorial  $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{K})$  de funciones de clase  $C^\infty$  de  $\Omega$  en  $\mathbb{K}$  de soporte compacto contenido en  $\Omega$ , es denso en  $L_p(\Omega, \mathbb{K})$ .

### Demostración:

Sea  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-t}} & \text{si } t < 1 \\ 0 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

entonces,  $\varphi$  es de clase  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}$ . Sea  $\|\cdot\|$  la norma euclídeana en  $\mathbb{R}^n$ . Defina  $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  como  $\rho(x) = 0$  si  $\|x\| \geq 1$  y

$$\rho(x) = \frac{e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}}}{\int_{\|y\| \leq 1} e^{-\frac{1}{1-\|y\|^2}} dy}, \quad \text{si } \|x\| < 1$$

Es decir,  $\rho(x) = c \cdot \varphi(\|x\|^2)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  (con constante). Entonces,  $\rho$  es de clase  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}^n$ , no negativa, y

$$\text{Spt}(\rho) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1 \right\}$$

y, la integral de  $\rho$  sobre  $\mathbb{R}^n$  es 1.

Considere la sucesión de Dirac  $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  dada por

$$\rho_\nu(x) = \nu^n \rho(\nu x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ y } \forall \nu \in \mathbb{N}$$

Note que  $\rho_\nu \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ . De hecho,

$$\text{Spt}(\rho_\nu) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq \frac{1}{\nu} \right\} = B_{\frac{1}{\nu}}, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$$

Sea  $\varepsilon > 0$  y  $f \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathbb{K})$ . Por el resultado anterior, existe  $\psi \in \mathcal{E}(\Omega, \mathbb{K})$  tal que

$$\mathcal{N}_p(f - \psi) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por un resultado anterior

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{N}_p(\tilde{\psi} - \tilde{\psi} * \rho_\nu) = 0$$

Existe  $\nu_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\mathcal{N}_p(\tilde{\psi} - \tilde{\psi} * \rho_\nu) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall \nu \geq \nu_0$$

Note que

$$\text{Spt}(\tilde{\psi} * \rho_\nu) \subseteq \text{Spt}(\tilde{\psi}) + \text{Spt}(\rho_\nu) \subseteq \text{Spt}(\psi) + B_{\frac{1}{\nu}} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, K) \leq \frac{1}{\nu} \right\}, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$$

donde  $K = \text{Spt}(\psi)$ . Como  $K$  es compacto contenido en el abierto  $\Omega$ , existe  $N \geq \nu_0$  tal que

$$\text{Spt}(\psi) + B_{\frac{1}{N}} \subseteq \Omega$$

Sea  $\varphi$  la restricción de  $\rho_n * \tilde{\psi}$  a  $\Omega$ . Entonces,  $\varphi$  es de clase  $C^\infty$  de soporte compacto contenido en  $\Omega$ . Además,

$$\mathcal{N}_p(f - \varphi) \leq \mathcal{N}_p(f - \psi) + \mathcal{N}_p(\psi - \varphi) < \frac{\varepsilon}{2} + \mathcal{N}_p(\tilde{\psi} + \tilde{\psi} * \rho_N) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

■

### Teorema 2.4.3

Si  $1 \leq p < \infty$ , entonces  $R\mathcal{E}^T$  y  $\mathcal{C}^T$  son subespacios densos de  $\mathcal{L}_p^T$ .

### Demostración:

1. Sean  $f \in \mathcal{L}_p^T$  y  $\varepsilon > 0$ . Sea  $f_1$  la restricción de  $f$  al intervalo  $]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$ . Existe entonces  $\varphi \in \mathcal{E}(]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[ , \mathbb{K})$  tal que

$$\mathcal{N}_p(f - \varphi) < \varepsilon$$

ampliando  $\varphi$  a  $\mathbb{R}$  de modo que sea periódica con período  $T > 0$ , es decir, definiendo  $\varphi(-\frac{T}{2}) = 0$  y,  $\varphi(x + kT) = \varphi(x)$ , para todo  $x \in ]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$  y para todo  $k \in \mathbb{Z}$ , entonces  $\varphi \in \mathcal{E}^T$  y

$$\mathcal{N}_p(f - \varphi) = \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f - \varphi|^p \right]^{1/p} = \mathcal{N}_p(f_1 - \varphi) < \varepsilon$$

2. Sean  $f$  y  $f_1$  como en 1). Se sabe que existe una función  $g \in \mathcal{C}_c^\infty$  de soporte compacto contenido en el abierto  $]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$  tal que

$$\mathcal{N}_p(f - g) < \varepsilon$$

Ampliando  $g$  a todo  $\mathbb{R}$  del tal modo que sea periódica de período  $T > 0$ , es decir

$$g\left(-\frac{T}{2}\right) = 0$$

y

$$g(x + kT) = g(x), \quad \forall x \in \left]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right[, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

entonces,  $g$  es una función continua periódica y

$$\mathcal{N}_p(f - g) = \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f - g|^p \right]^{1/p} = \mathcal{N}_p(f_1 - g) < \varepsilon$$

De ambos incisos se sigue el resultado. ■

---

**Proposición 2.4.1**

Si  $1 \leq p < \infty$  y  $f \in \mathcal{L}_p^T$  entonces, la función  $h \mapsto f_h$  de  $\mathbb{R}$  en  $\mathcal{L}_p^T$  es uniformemente continua en  $\mathbb{R}$  y, además

$$\mathcal{N}_p(f_h) = \mathcal{N}_p(f), \quad \forall h \in \mathbb{R}$$

---

**Demostración:**

Claramente esta función está bien definida, ya que  $f_h \in \mathcal{L}_p^T$ , para todo  $h \in \mathbb{R}$  y, por un cambio de variable tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_p(f_h)^p &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f_h(y)|^p dy \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(y+h)|^p dy \\ &= \int_{-\frac{T}{2}+h}^{\frac{T}{2}+h} |f(z)|^p dz \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(y)|^p dy \\ &= \mathcal{N}_p(f)^p \\ \Rightarrow \mathcal{N}_p(f_h) &= \mathcal{N}_p(f) \end{aligned}$$

Para la continuidad uniforme, sea  $\varepsilon > 0$ . Existe  $g \in \mathcal{C}^T$  tal que

$$\mathcal{N}_p(f - g) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Por un lema anterior,  $g$  es uniformemente continua en  $\mathbb{R}$ . Luego, existe  $\delta > 0$  tal que

$$x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ tales que } |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |g(x_1) - g(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3T^{1/p}}$$

Sean  $s, t \in \mathbb{R}$  tales que  $|s - t| < \delta$ . Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_p(g_s - g_t) &= \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |g(s+x) - g(t+x)|^p dx \right]^{1/p} \\ &= \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{\varepsilon^p}{3^p T} dx \right]^{1/p} \\ &= \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Así pues

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_p(f_s - g_t) &\leq \mathcal{N}_p(f_s - g_s) + \mathcal{N}_p(g_s - g_t) + \mathcal{N}_p(g_t - g_t) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

con lo que se tiene el resultado. ■

## 2.5. Convolución de funciones periódicas

**Definición 2.5.1**

Sean  $f, g$  dos funciones periódicas de periodo  $T > 0$ . Se define la convolución de  $f$  y  $g$  como

$$f * g(x) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y)g(x-y)dy$$

para toda  $x \in \mathbb{R}$  tal que la integral exista.

**Proposición 2.5.1**

Se cumple lo siguiente:

1. Si existe  $f * g(x)$  en  $x \in \mathbb{R}$ , entonces existe  $g * f(x)$  y  $f * g(x) = g * f(x)$ .
2. Si existe  $[|f| * |g|] * |h|(x)$  en  $x \in \mathbb{R}$ , entonces existen las convoluciones  $(f * g) * h(x)$ ,  $f(g * h)(x)$  y  $(f * g) * h(x) = f(g * h)(x)$ .

**Demostración:**

Ejercicio. ■

**Teorema 2.5.1**

Si  $f, g \in \mathcal{L}_1^T$ , entonces para casi toda  $x \in \mathbb{R}$  existe la convolución  $f * g(x)$ ,  $f * g \in \mathcal{L}_1^T$  y,

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f * g(x)dx = \left( \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx \right) \cdot \left( \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(x)dx \right)$$

además,

$$\mathcal{N}_1(f * g) \leq \mathcal{N}_1(|f| * |g|) \leq \mathcal{N}_1(f) \cdot \mathcal{N}_1(g)$$

Así pues,  $\mathcal{L}_1^T$  provisto de la convolución es un álgebra de Banach conmutativa.

**Demostración:**

Ejercicio. ■

**Teorema 2.5.2**

Sean  $p, q \in [1, \infty[$  tales que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$  y, defina

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$$

Si  $f \in \mathcal{L}_p^T$  y  $g \in \mathcal{L}_q^T$ , entonces para casi toda  $x \in \mathbb{R}$  existe  $f * g(x)$ . Además, la función  $f * g \in \mathcal{L}_r^T$  y

$$\mathcal{N}_r(f * g) \leq \mathcal{N}_p(f) \cdot \mathcal{N}_q(g)$$

En particular, si  $q = 1$ , entonces  $f * g \in \mathcal{L}_p^T$  y, además

$$\mathcal{N}_p(f * g) \leq \mathcal{N}_p(f) \cdot \mathcal{N}_1(g)$$

**Demostración:**

Ejercicio. ■

---

**Teorema 2.5.3**

Sea  $1 \leq p \leq \infty$ . Si  $f \in \mathcal{L}_p^T$  y  $g \in \mathcal{L}_{p^*}^T$  entonces,  $f * g(x)$  existe en todo punto  $x \in \mathbb{R}$  y, además  $f * g \in \mathcal{C}^T$ .

---

**Demostración:**

Ejercicio. ■

## 2.6. Sucesiones de Dirac de funciones periódicas

**Definición 2.6.1**

Una sucesión  $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  se dice que es de **Dirac de periodo**  $T > 0$  si:

1.  $\rho_\nu \geq 0$ , para todo  $\nu \in \mathbb{N}$ .
2.  $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \rho_\nu(x) dx = 1$ , para todo  $\nu \in \mathbb{N}$ .
3. Para todo  $0 < \delta < \frac{T}{2}$ ,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{|x| < \delta} \rho_\nu(x) dx = 1$$

o sea,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{\delta < |x| < \frac{T}{2}} \rho_\nu(x) dx = 0$$

la sucesión  $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  será llamada **sucesión de Dirac fuerte** si  $\rho_\nu \in \mathcal{L}_\infty^T$  para todo  $\nu \in \mathbb{N}$ , se cumplen (i), (ii) y

1. Se tiene que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sup_{\delta < |x| < \frac{T}{2}} \rho_\nu(x) = 0$$

**Observación 2.6.1**

Toda sucesión de Dirac fuerte es una sucesión de Dirac.

**Demostración:**

En efecto, veamos que

$$\int_{\delta < |x| < \frac{T}{2}} \rho_\nu(x) dx \leq \int_{\delta < |x| < \frac{T}{2}} \sup_{\delta < |x| < \frac{T}{2}} \rho_\nu(x) dx = \left[ \sup_{\delta < |x| < \frac{T}{2}} \rho_\nu(x) \right] \cdot (T - 2\delta)$$

lo cual tiende a cero a medida que  $\nu \rightarrow \infty$ . ■

---

**Teorema 2.6.1**

Sea  $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  una sucesión de Dirac de periodo  $T > 0$ .

1. Si  $1 \leq p < \infty$  y  $f \in \mathcal{L}_p^T$ , entonces

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{N}_p(f - f * \rho_\nu) = 0$$

2. Si  $f \in \mathcal{L}_\infty^T$  y  $f$  es continua en un punto  $x \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \rho_\nu * f(x) = f(x)$$

3. Si  $f \in \mathcal{L}_\infty^T$  y  $f$  es continua en un abierto  $J \subseteq \mathbb{R}$ , entonces  $\{\rho_\nu * f\}_{\nu=1}^\infty$  converge a  $f$  uniformemente en todo compacto contenido en  $J$ .

4. Si  $f \in \mathcal{C}^T$ , entonces  $\{\rho_\nu * f\}_{\nu=1}^\infty$  converge uniformemente en  $\mathbb{R}$ .

Los incisos (ii) y (iii) subsisten si  $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  es una sucesión de Dirac fuerte y  $f \in \mathcal{L}_1^T$ .

---

### **Demostración:**

Solo se probará (iii) al suponer que  $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  es una sucesión de Dirac fuerte y  $f \in \mathcal{L}_1^T$ .

La convolución  $\rho_\nu * f$  existe en todo punto de  $\mathbb{R}$  y es continua. Suponga que  $f$  es continua en un abierto  $J$ . Sea  $K \subseteq J$  compacto y, defina

$$\alpha = d(K, \mathbb{R} - J) > 0$$

y, definamos  $K' = \left\{x \in \mathbb{R} \mid d(x, K) < \frac{\alpha}{2}\right\}$  ( $K'$  es una vecindad cerrada de  $K$ ). Se sabe que  $K'$  es un compacto en  $\mathbb{R}$ , además

$$K \subseteq K' \subseteq J$$

Sea  $\varepsilon > 0$ . Como  $f$  es uniformemente continua en  $K'$ , existe  $0 < \delta < \min\left\{\frac{T}{2}, \frac{\alpha}{2}\right\}$  tal que

$$x - 1, x_2 \in K' \text{ y } |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Fije  $x \in K$  arbitrario. Se tiene

$$\begin{aligned} |f(x) - \rho_\nu * f(x)| &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x) - f(x-y)| \rho_\nu(y) dy \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} |f(x) - f(x-y)| \rho_\nu(y) dy + \int_{\delta < |y| < \frac{T}{2}} |f(x) - f(x-y)| \rho_\nu(y) dy \end{aligned}$$

Si  $|y| < \delta$ , entonces  $x - y \in K'$ , luego

$$\int_{-\delta}^{\delta} |f(x) - f(x-y)| \rho_\nu(y) dy \leq \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta} \rho_\nu(y) dy < \varepsilon$$

Sean  $A = \max_{x \in K} |f(x)|$  y  $M_\nu(\delta) = \sup_{\delta < |y| < \frac{T}{2}} \rho_\nu(y)$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{\delta < |y| < \frac{T}{2}} |f(x) - f(x-y)| \rho_\nu(y) dy &\leq A \int_{\delta < |y| < \frac{T}{2}} \rho_\nu(y) dy + M_\nu(\delta) \int_{\delta < |y| < \frac{T}{2}} |f(x-y)| dy \\ &\leq A \cdot M_\nu(\delta)(T - 2\delta) + M_\nu(\delta) \cdot \mathcal{N}_1(f) \\ &= M_\nu(\delta) (A \cdot (T - 2\delta) + \mathcal{N}_1(f)) \end{aligned}$$

lo cual tiende a cero conforme a  $\nu \rightarrow \infty$  uniformemente en  $x \in K$ . Por tanto,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \rho_\nu * f = f \text{ uniformemente en } K$$

■

---

**Proposición 2.6.1**

Sea  $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  una sucesión de Dirac de periodo  $T > 0$ . Se supone que las funciones  $\rho_\nu$  son pares, para todo  $\nu \in \mathbb{N}$ . Sea  $f \in \mathcal{L}_\infty^T$ . Si en un punto  $x \in \mathbb{R}$  existen los límites laterales  $f(x^+)$  y  $f(x^-)$  entonces,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \rho_\nu * f(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

la conclusión persiste si la sucesión es de Dirac fuerte y  $f \in \mathcal{L}_1^T$ .

---

**Demostración:**

Sólo se probará la última parte. Suponga que existen los límites laterales. Se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \rho_\nu * f(x) &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x-y) \rho_\nu(y) dy \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^0 f(x-y) \rho_\nu(y) dy + \int_0^{\frac{T}{2}} f(x-y) \rho_\nu(y) dy \\ &= \int_0^{\frac{T}{2}} f(x+y) \rho_\nu(-y) dy + \int_0^{\frac{T}{2}} f(x-y) \rho_\nu(y) dy \\ &= \int_0^{\frac{T}{2}} [f(x+y) + f(x-y)] \rho_\nu(y) dy, \quad \forall \nu \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

pues,  $\rho_\nu$  es una función par para todo  $\nu \in \mathbb{N}$ . Por otra parte,

$$\int_0^{\frac{T}{2}} \rho_\nu(y) dy = \frac{1}{2}$$

Pues,  $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \rho_\nu(y) dy = 1$ . Entonces,

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \int_0^{\frac{T}{2}} (f(x^+) + f(x^-)) \rho_\nu(y) dy$$

se sigue entonces que

$$\rho_\nu * f(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \int_0^{\frac{T}{2}} [f(x+y) - f(x^+)] \rho_\nu(y) dy + \int_0^{\frac{T}{2}} [f(x-y) - f(x^-)] \rho_\nu(y) dy$$

Para probar el resultado, basta con probar que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{T}{2}} [f(x+y) - f(x^+)] \rho_\nu(y) dy = 0 = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{T}{2}} [f(x-y) - f(x^-)] \rho_\nu(y) dy$$

En efecto. Probaremos solamente que el primer límite es cero, sea  $\varepsilon > 0$ . Por definición de  $f(x^+)$  existe  $0 < \delta < \frac{T}{2}$  tal que

$$0 < h < \delta \Rightarrow |f(x+h) - f(x^+)| < \varepsilon$$

Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{T}{2}} |f(x+y) - f(x^+)| \rho_\nu(y) dy &= \int_0^\delta |f(x+y) - f(x^+)| \rho_\nu(y) dy + \int_\delta^{\frac{T}{2}} |f(x+y) - f(x^+)| \rho_\nu(y) dy \\ &< \varepsilon \int_0^\delta \rho_\nu(y) dy + M_\nu(\delta) \int_\delta^{\frac{T}{2}} f(x+y) dy + |f(x^+)| \int_\delta^{\frac{T}{2}} \rho_\delta(y) dy \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + |f(x^+)| M_\nu(\delta) \left( \frac{T}{2} - \delta \right) + M_\nu(\delta) \mathcal{N}_1(f) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + M_\nu(\delta) \left( |f(x^+)| (\delta) \left[ \frac{T}{2} - \delta \right] + \mathcal{N}_1(f) \right) \end{aligned}$$

donde,  $M_\nu(\delta) = \sup_{\delta < y < \frac{T}{2}} \rho_\nu(y)$ . Por ser una sucesión de Dirac fuerte, existe  $\nu_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\nu \geq \nu_0 \Rightarrow M_\nu(\delta) \left( |f(x^+)| \left[ \frac{T}{2} - \delta \right] + \mathcal{N}_1(f) \right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

luego

$$\nu \geq \nu_0 \Rightarrow \int_0^{\frac{T}{2}} |f(x+y) - f(x^+)| \rho_\nu(y) dy < \varepsilon$$

Así,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{T}{2}} [f(x+y) - f(x^+)] \rho_\nu(y) dy = 0$$

El otro límite es análogo. ■

## 2.7. Sistemas Trigonométricos

### Definición 2.7.1

Sea  $E$  un espacio normado y  $S \subseteq E$ . Se denota por  $\mathcal{L}(S)$  al **subespacio vectorial de  $E$  generado por  $S$** . Se dice que el conjunto  $S$  es (está) **completo** en  $E$ , si  $\overline{\mathcal{L}(S)} = E$ .

En esta parte se consideran funciones periódicas de periodo  $2\pi$  (al final se trata el caso general).

### Definición 2.7.2

Se define lo siguiente

1. Se llama **sistema trigonométrico real** al sistema  $\tau_{\mathbb{R}}$  formado por

- I)  $x \mapsto \cos(kx)$ , con  $k = 0, 1, 2, \dots$

- II)  $x \mapsto \sin(kx)$ , con  $k = 1, 2, 3, \dots$

2. Se llama **sistema trigonométrico complejo** al sistema  $\tau_{\mathbb{C}}$  formado por

$$x \mapsto e^{ikx}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

3. Las combinaciones lineales finitas de  $\tau_{\mathbb{R}}$  de coeficientes reales se llaman **polinomios trigonométricos reales**.
4. Las combinaciones lineales finitas de funciones en  $\tau_{\mathbb{R}}$  con coeficientes complejos son las mismas que las combinaciones lineales de funciones en  $\tau_{\mathbb{C}}$  con coeficientes complejos, se llaman **polinomios trigonométricos complejos**.

---

### Teorema 2.7.1

Se tiene lo siguiente:

1. Sea  $1 \leq p < \infty$ . Entonces

- I)  $\tau_{\mathbb{R}}$  es (está) completo en  $\mathcal{L}_p^{2\pi}(\mathbb{R})$ .

- II)  $\tau_{\mathbb{R}}$  y  $\tau_{\mathbb{C}}$  son (están) completos en  $\mathcal{L}_p^{2\pi}(\mathbb{C})$ .

2. Se cumplen

- I)  $\tau_{\mathbb{R}}$  es (está) completo en  $\mathcal{C}^{2\pi}(\mathbb{R})$  provisto de la norma uniforme.



II)  $\tau_{\mathbb{R}}$  y  $\tau_{\mathbb{C}}$  son (están) completos en  $\mathcal{C}^{2\pi}(\mathbb{C})$  provisto de la norma uniforme.

---

### **Demostración:**

Sea  $f \in \mathcal{L}_p^{2\pi}(\mathbb{K})$ . Si  $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  es una sucesión de Dirac fuerte periódica de periodo  $2\pi$ , se sabe que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{N}_p(f - \rho_\nu * f) = 0$$

también se sabe que si  $f \in \mathcal{C}^{2\pi}(\mathbb{K})$ , entonces

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \rho_\nu * f = f \text{ uniformemente en } \mathbb{R}$$

El teorema quedará probado si se encuentra una sucesión de Dirac fuerte de periodo  $2\pi$  tal que  $\rho_\nu * f$  es un polinomio trigonométrico (real o complejo, según sea  $f$ ), para todo  $\nu \in \mathbb{N}$ .

Se define

$$\rho_\nu(x) = \frac{(1 + \cos(x))^\nu}{\int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos(t))^\nu dy} = \frac{\cos^{2\nu} \frac{x}{2}}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2\nu} \frac{t}{2} dt}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

para todo  $\nu \in \mathbb{N}$ . Claramente se cumplen de (i) y (ii) de sucesiones de Dirac. Se verificará que se cumple (iii').

Sea  $0 < \delta < \pi$ , Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2\nu} \frac{t}{2} dt &= 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2\nu} \frac{t}{2} dt \\ &= 4 \int_0^{\pi} \cos^{2\nu} u du \\ &\geq 4 \int_0^{\frac{\delta}{4}} \cos^{2\nu} u du \\ &\geq \delta \cos^{2\nu} \frac{\delta}{4} \end{aligned}$$

pues, la función  $u \mapsto \cos^{2\nu} u$  es decreciente en  $[0, \frac{\delta}{4}]$ . Por la misma última razón

$$\sup_{\delta < x < \pi} \rho_\nu(x) \leq \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\cos^{2\nu} \frac{\delta}{2}}{\cos^{2\nu} \frac{\delta}{4}} = \frac{1}{\delta} \cdot \left( \frac{\cos \frac{\delta}{2}}{\cos \frac{\delta}{4}} \right)^{2\nu}$$

lo cual tiende a cero cuando  $\nu \rightarrow \infty$ , pues  $\cos \frac{\delta}{4} > \cos \frac{\delta}{2}$  (ya que  $u \mapsto \cos u$  es estrictamente decreciente en  $[0, \pi]$ ). Por tanto,  $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  es una sucesión de Dirac fuerte.

Ahora, se tiene lo siguiente

$$\rho_\nu * f(x) = \frac{1}{c_\nu} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) (1 + \cos(x - y))^\nu dy$$

donde  $c_\nu = \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos(t))^\nu dy$ . Por la fórmula del binomio

$$(1 + \cos(x - y))^\nu = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} \cos^k(x - y)$$

Usando alguna identidad trigonométrica e inducción, se demuestra que  $\cos^k(x - y)$  es combinación lineal con coeficientes racionales de funciones

$$x \mapsto \cos m(x - y), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

A su vez,

$$\cos m(x - y) = \cos mx \cos my + \sin mx \sin my$$

así pues,  $(1 + \cos(x - y))^\nu$  aparece como combinación lineal de funciones  $x \mapsto \cos mx$  para  $m = 0, \dots, \nu$  y  $x \mapsto \sin nx$  con  $n = 1, \dots, \nu$  con coeficientes que son funciones de  $y$ . Al calcular la integral de la convolución,  $\rho_\nu * f(x)$  resulta ser un polinomio trigonométrico real o complejo (según sea  $f$ ). Así, queda probado el resultado. ■

### Definición 2.7.3

Sean  $1 \leq p < \infty$  y  $\mathcal{F}$  una familia de funciones en  $\mathcal{L}_p^T$ . Se dice que la familia  $\mathcal{F}$  es **total** en  $\mathcal{L}_p^T$  si

$$f \in \mathcal{L}_p^T \text{ y } \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f \cdot \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{F} \Rightarrow f = 0 \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}$$

### Teorema 2.7.2

Sea  $1 \leq p < \infty$ . Entonces

1.  $\tau_{\mathbb{R}}$  es total en  $\mathcal{L}_p^{2\pi}(\mathbb{R})$ .
2.  $\tau_{\mathbb{R}}$  y  $\tau_{\mathbb{C}}$  son totales en  $\mathcal{L}_p^{2\pi}(\mathbb{C})$ .

### Demostración:

Basta probar el resultado para  $\mathcal{L}_1^T(\mathbb{K})$ . Considere la misma sucesión de Dirac fuerte  $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  de la demostración anterior. Sea pues  $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}$  tal que

$$\begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \cos(ny) dy = 0 & n = 0, 1, \dots \\ \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sin(ny) dy = 0 & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

se sabe que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{N}_1(f - \rho_\nu * f) = 0$$

Basta con probar que  $\rho_\nu * f = 0$  c.t.p. en  $\mathbb{R}$ . Intercambiando los papeles de  $x$  y  $y$  en la demostración anterior, se concluye que  $(1 + \cos(x - y))^\nu$  es combinación lineal de funciones  $y \mapsto \cos ny$  y  $y \mapsto \sin ny$  con coeficientes que dependen de  $x$ . Se sigue pues que al integrar el producto de  $f$  con las funciones  $\cos$  y  $\sin$ , que

$$\rho_\nu * f = 0$$

para todo  $\nu \in \mathbb{N}$ . Luego

$$\mathcal{N}_1(f) = 0 \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |f| = 0$$

por tanto,  $f = 0$  c.t.p. en  $\mathbb{R}$ . Así, el sistema  $\tau_{\mathbb{K}}$  es total en  $\mathcal{L}_p^{2\pi}(\mathbb{K})$ . ■