Proposición.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $0<x$ y $\forall n \in \mathbb{N}$, existe uno y solo un número real positivo y, tal que $y^n = x$.

Dem:

Sean $x \in \mathbb{R}$, $0<x$, $n \in \mathbb{N}$ y $E \subset \mathbb{R}$ dado por:

$$E = \{ t \in \mathbb{R} \mid 0<t \text{ y } t^n < x \}$$

Probaremos que $E \neq \phi$ y E está acotado superiormente.

a) $E \neq \phi$.

En efecto. Sea $t = \frac{x}{1+x}$, entonces, como $0<x$, $0<\frac{x}{1+x} = t$ y, como $x < x+1$, entonces $t = \frac{x}{x+1} < 1$, por tanto $0<t<1$. Afirmamos que $t^m < x$ $\forall m \in \mathbb{N}$. En efecto. Procederemos por inducción sobre m.

Si $m=1$, como $\frac{x}{x+1} < \frac{x}{1} = x$, se tiene que $t^1 = t < x$.

Supongu que el resultado es válido para $m=k$, es decir: $t^k < x$.

Probaremos que el resultado es válido para $m=k+1$, en efecto, como $0<t$ y $t<1$, entonces $0<t^k$ y $t<1$, por tanto $t \cdot t^k < 1 \cdot t^k$, esto es $t^{k+1} < t^k$, entonces $t^{k+1} < x$.

Por lo anterior, $t^m < x$ $\forall m \in \mathbb{N}$, en particular, es válido para $m=n$, por tanto $t^n < x$. De esta forma y, como $0<t$ se tiene que $t \in E$, por tanto $E \neq \phi$.

b) E está acotado superiormente.

Sea $t \in \mathbb{R}$, $t = x+1$. Probaremos que $x < t^m$ $\forall m \in \mathbb{N}$. Procederemos por inducción sobre m.

Si $m=1$, como $x < x+1$ y $t = t^1$, entonces $x < t^1$.

Supongamos que es válido para $m=k$, esto es: $x < t^k$. Como

$$x < x + x^2$$

$$= (x+1)x$$
$$= tx$$

y $tx < t \cdot t^K$, entonces:

$$x < t^{K+1}$$

por tanto, el resultado es válido para $m=K+1$. Por lo tanto, es válido $\forall m \in \mathbb{N}$, en particular, para $m=n$:

$$x < t^n$$

Como $0<x$, entonces $0<x+1$, así $0<t$. Por tanto $t \notin E$. Luego, t es una cota superior de E. En efecto. Supongamos que t no es cota superior de E, entonces, $\exists\, e \in E$ tal que $t<e$, luego, como $0<t$, entonces $t^n<e^n$. Como $e\in E$, entonces $0<e$ y $e^n<x$, por tanto $t^n<x$ #c, pues $x<t^n$. Por tanto, t es cota superior de E.

Por a) y b), $E \neq \emptyset$ y E está acotado. Como $(\mathbb{R},<)$ es continuamente ordenado, entonces existe $\sup E$. Sea $y = \sup E$. y es único, pues el supremo es único.

Probaremos que $y^n = x$. Supongamos que $y^n \neq x$.

i) Si $y^n<x$. Sea $h=\min\left\{\frac{1}{2}, \frac{x-y^n}{2n(y+1)^{n-1}}\right\}$. $0<h$, pues $0<\frac{1}{2}$ y $0<x-y^n$.
Sean $a=y$ y $b=y+h$, $0<y$ y, como $0<h$, entonces $0<y<y+h$, por tanto $0<a<b$. Por la proposición auxiliar:

$$b^n - a^n \leqslant (b-a)nb^{n-1}$$

esto es:

$$\begin{aligned}(y+h)^n - y^n &\leqslant (y+h-y)n(y+h)^{n-1}\\ &= hn(y+h)^{n-1}\\ &\leqslant hn(y+\tfrac{1}{2})^{n-1}\\ &< hn(y+1)^{n-1}\\ &\leqslant \frac{x-y^n}{2n(y+1)^{n-1}} \cdot n \cdot (y+1)^{n-1}\end{aligned}$$

$$= \frac{x-y^n}{2}$$
$$< x-y^n$$

Por tanto, $(y+h)^n < x^n$. Como $0 < y+h$, se tiene que $y+h \in E$. Como $y < y+h$, se tiene una contradicción, pues $e \leqslant y$ $\forall$ $e \in E$. Por tanto, no puede suceder que $y^n < x$.
Si $x < y^n$, sea
$$K = \frac{y^n - x}{2ny^{n-1}}$$
Como $x < y^n$, entonces $0 < y^n - x$, por tanto $0 < K$. Además:
$$K = \frac{y^n - x}{2ny^{n-1}}$$
$$< \frac{y^n}{2ny^{n-1}}$$
$$= \frac{1}{2n} y$$
$$< y$$
por tanto $0 < K < y$. Sea $t = y - K$, es claro que $0 < t$, pues $K < y$ implica que $0 < y - K$, y $t < y$. Sean $a' = t$ y $b' = y$, $0 < a < b$. Por la proposición auxiliar:
$$b'^n - a'^n \leqslant (b' - a') n b'^{n-1}$$
esto es:
$$y^n - t^n \leqslant (y-t) n y^{n-1}$$
$$= (y - y + K) n y^{n-1}$$
$$= K n y^{n-1}$$
$$= \frac{y^n - x}{2ny^{n-1}} \cdot n y^{n-1}$$
$$= \frac{y^n - x}{2}$$
$$< y^n - x$$

Entonces $y^n - t^n < y^n - x$, luego $x < t^n$, entonces $x \leq t^n$. Como $0 < t$, se tiene que $t \notin E$. Por tanto, $t = y - K$ es una cota superior de E, pero $y - K < y$ #c pues $y = \sup E$.

Por tanto, $y^n = x$.

q.e.d.

Proposición auxiliar.

Sean $a,b\in\mathbb{R}$, $0<a<b$. Entonces, $\forall\, n\in\mathbb{N}$:

$$b^n-a^n\leqslant (b-a)nb^{n-1}$$

Dem:

Procederemos por inducción sobre n.

El resultado es válido para $n=1$, en efecto. Como

$$\begin{aligned} b^1-a^1 &= b-a \\ &= (b-a)\cdot 1 \\ &= (b-a)\cdot 1\cdot b^0 \\ &= (b-a)\cdot 1\cdot b^{1-1} \end{aligned}$$

entonces $b^1-a^1=(b-a)\cdot 1\cdot b^{1-1}$, lo que implica que $b^1-a^1\leqslant (b-a)\cdot 1\cdot b^{1-1}$.

Suponga que el resultado es válido para $n=K$, esto es $b^K-a^K\leqslant (b-a)\cdot K\cdot b^{K-1}$.

Veamos que el resultado es válido para $n=K+1$. En efecto. Como

$$\begin{aligned} b^{K+1}-a^{K+1} &= (b-a)\cdot(b^K+b^{K-1}\cdot a+\dots+a^K) \\ &= (b-a)\left(b\cdot(b^{K-1}+b^{K-2}\cdot a+\dots+a^{K-1})+a^K\right) \end{aligned}$$

y, como $b^K-a^K=(b-a)\cdot(b^{K-1}+b^{K-2}\cdot a+\dots+a^{K-1})$, con $b-a\neq 0$ (pues $0<b-a$), entonces:

$$b^{K+1}-a^{K+1}=(b-a)\left(b\cdot\frac{b^K-a^K}{b-a}+a^K\right)$$

pero $b^K-a^K\leqslant (b-a)\cdot K\cdot b^{K-1}$, entonces

$$\begin{aligned} b^{K+1}-a^{K+1} &\leqslant (b-a)\left(b\,\frac{(b-a)Kb^{K-1}}{b-a}+a^K\right) \\ &= (b-a)\cdot(Kb^K+a^K) \end{aligned}$$

pero $a^K<b^K$, pues $a<b$, entonces:

$$\begin{aligned} b^{K+1}-a^{K+1} &< (b-a)(Kb^K+b^K) \\ &= (b-a)\cdot(K+1)b^{(K+1)-1} \Rightarrow b^{K+1}-a^{K+1}\leqslant (b-a)(K+1)b^{(K+1)-1} \end{aligned}$$

Por tanto, el resultado se cumple para $n=K+1$. Por inducción, se cumpe $\forall\, n\in\mathbb{N}$.