Notas de Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

21 de mayo de 2024

Índice general

1. Transformación de Fourier **2**

1.1. Conceptos Fundamentales 2

Capítulo 1

Transformación de Fourier

La transformada de Fourier de una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{C}$ generaliza en cierta forma la noción de coeficietes de Fourier de funciones periódicas

1.1. Conceptos Fundamentales

Definición 1.1.1
Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Se definen $\mathcal{F}f, \mathcal{F}^*f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ como

$$\mathcal{F}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\left(x\middle|y\right)} f(y)\,dy \quad \text{y} \quad \mathcal{F}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\left(x\middle|y\right)} f(y)\,dy$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Las funciones $\mathcal{F}f$ y $\mathcal{F}^f*$ se llaman las **transformaciones de Fourier de** f. Las aplicaciones $\mathcal{F}, \mathcal{F}^*$ de $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ en el conjunto de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{C}$ se llaman las **transformaciones de Fourier**.

Observación 1.1.1
Se tiene lo siguiente:

1. Las funciones $\mathcal{F}f(x)$ y $\mathcal{F}^*f(x)$ están definidas para todo $x \in \mathbb{R}^n$ si y sólo si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.
2. En caso de existir, se tiene que $\mathcal{F}f(x) = \mathcal{F}^*f(-x)$.

Definición 1.1.2
Sea $f \in \mathcal{L}_1^{(}[0,\infty[, \mathbb{C})$. Se definen

$$\mathcal{F}_c f(x) = \int_0^\infty f(y)\cos xy\,dy \quad \text{y} \quad \mathcal{F}_s f(x) = \int_0^\infty f(y)\sin xy\,dy$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Las funciones $\mathcal{F}_c f$ y $\mathcal{F}_s f$ se llaman **las trasnformadas coseno y seno de Fourier de** f.

Definición 1.1.3
Sea $f : [0,\infty[\to \mathbb{C}$ una función. Se definen las funciones ${}^P f$ y ${}^I f$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ como

$${}^P f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ f(-x) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

y,

$$^{I}f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -f(-x) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Proposición 1.1.1
Sea $f \in \mathcal{L}_1([0,\infty[,\mathbb{C})$. Se tiene

$$\mathcal{F}^P f(x) = 2\mathcal{F}_c f(x) \quad \text{y} \quad \mathcal{F}^I f(x) = 2i\mathcal{F}_2 f(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostración:
Sea $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}P^f(x) &= \int_{\mathbb{R}} f^p(y)e^{-i\left(x\middle|y\right)}\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f^p(y)e^{-ixy}\,dy \\
&= \int_{\infty}^{0} f^p(y)e^{-ixy}\,dy + \int_{0}^{\infty} f^p(y)e^{-ixy}\,dy \\
&= \int_{\infty}^{0} f(y)e^{-ixy}\,dy + \int_{0}^{\infty} f(-y)e^{-ixy}\,dy
\end{aligned}$$

(terminar demostración). ■

Corolario 1.1.1
Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

1. Si f es par, entonces $\mathcal{F}f(x) = 2\int_0^\infty f(y)\cos xy\,dy$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
2. Si f es impar, entonces $\mathcal{F}f(x) = -2i\int_0^\infty f(y)\sin xy\,dy$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.1.1
Se tiene lo siguiente:

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $f = \chi_I$ donde I es un intervalo con extremos $a < b$ en $\mathbb{R}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \xi_I(y)e^{-ixy}\,dy \\
&= \int_a^b e^{-ixy}\,dy \\
&= \begin{cases} \frac{e^{-ixb}-e^{-ixa}}{-ix} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ b-a & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

En particular, si $a > 0$ entonces

$$\mathcal{F}\chi_{-a,a}(x) = \begin{cases} \frac{2\sin ax}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 2a & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Coom $\mathcal{F}\chi_[-a,a]$ no es integrable en $\mathbb{R}$ se concluye que, en general, la transformada de Fourier de una función integrable no necesariamente es integrable.

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función

$$f(x) = e^{-k|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

donde $k > 0$. Como f es integrable, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k|y|}e^{-ixy}\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{ky}e^{-ixy}\,dy + \int_{0}^{\infty} e^{-ky}e^{-ixy}\,dy \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-ky}e^{ixy}\,dy + \int_{0}^{\infty} e^{-ky}e^{-ixy}\,dy \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-ky}e^{(-k+ix)y}\,dy + \int_{0}^{\infty} e^{-ky}e^{(-k-ix)y}\,dy \\
&= \frac{-1}{-k+ix} + \frac{-1}{-k-ix} \\
&= \frac{k+ix+k-ix}{k^2+x^2} \\
&= \frac{2k}{k^2+x^2}
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.1.2
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función

$$f(x) = e^{-kx^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

donde $k > 0$. Como f es par se tiene que

$$\mathcal{F}f(x) = 2\int_{0}^{\infty} e^{-ky^2}\cos xy\,dy$$

Sea $g(x) = \int_0^\infty e^{-ky^2}\cos xy\,dy$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se afirma que

$$g'(x) = -\int_{0}^{\infty} ye^{-ky^2}\sin xy\,dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En efecto, se tiene que

$$\left|ye^{-ky^2}\sin xy\right| \leqslant ye^{-ky^2}, \quad \forall y \geqslant 0$$

donde la función de la derecha es integrable e independiente de x (justificar). Por el teorema de derivación se sigue que

$$g'(x) = -\int_{0}^{\infty} ye^{-ky^2}\sin xy\,dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Veamos ahora que

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \int_0^\infty y e^{-ky^2} \sin xy \, dy \\
&= -\left[-\frac{1}{2k} e^{-ky^2} \sin xy \Big|_0^\infty + \frac{1}{2k} \int_0^\infty x e^{-ky^2} \cos xy \, dy \right] \\
&= -\left[0 - 0 + \frac{x}{2k} \int_0^\infty e^{-ky^2} \cos xy \, dy \right] \\
&= -\frac{x}{2k} \int_0^\infty e^{-ky^2} \cos xy \, dy \\
&= -\frac{x}{2k} g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
g'(x) + \frac{x}{2k} g(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow e^{\frac{x^2}{4k}} \left(g'(x) + \frac{x}{2k} g(x) \right) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow \frac{d}{dx} \left(e^{\frac{x^2}{4k}} g(x) \right) (x_0) = 0, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow e^{\frac{x^2}{4k}} g(x) = c \quad \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

En particular,

$$\begin{aligned}
c &= g(0) \\
&= \int_0^\infty e^{-ky^2} \, dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{k}} \int_0^\infty e^{-u^2} \, du \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{k}}
\end{aligned}$$

Por ende,

$$g(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{k}} e^{-\frac{x^2}{4k}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

De donde se sigue que

$$\mathcal{F} f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{k}} e^{-\frac{x^2}{4k}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En particular, si $k = \frac{1}{2}$ entonces $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y se tiene que:

$$\mathcal{F} f(x) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{2\pi} f(x)$$

es decir que f es un vector propio del operador transformada de Fourier.

Proposición 1.1.2
Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

1. Si $g(x) = e^{i\left(a\middle|y\right)} f(x)$, entonces

$$\mathcal{F}g(x) = \mathcal{F}f(x-a), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

2. Si $g(x) = f(x-a)$, entonces

$$\mathcal{F}g(x) = e^{-i\left(x\middle|a\right)} \mathcal{F}f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

3. Si $g(x) = \overline{f(-x)}$, entonces

$$\mathcal{F}g(x) = \overline{\mathcal{F}f(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

4. Sea $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Si $g(x) = f(\frac{x}{\lambda})$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\mathcal{F}g(x) = |\lambda|^n \mathcal{F}f(\lambda x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Demostración:

De (i): Veamos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\left(x\middle|y\right)} g(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\left(x\middle|y\right)} e^{i\left(a\middle|y\right)} f(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\left(x-a\middle|y\right)} f(y)\, dy \\
&= \mathcal{F}f(x-a)
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

De (ii): Veamos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\left(x\middle|y\right)} g(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\left(x\middle|y\right)} f(y-a)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\left(x\middle|u+a\right)} f(u)\, du \\
&= e^{-i\left(x\middle|a\right)} \mathcal{F}f(x)
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

De (iii): Veamos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\left(x\middle|y\right)} \overline{f(-y)}\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\left(x\middle|y\right)} \overline{f(y)}\, dy \\
&= \overline{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\left(x\middle|y\right)} f(y)\, dy} \\
&= \overline{\mathcal{F}f(x)}
\end{aligned}$$

De (iv):

$\blacksquare$