Cap. 1. Espacios L_p.

Def. Sea $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I intervalo de $\mathbb{R}$. Decimos que f es **convexa**, si $\forall\, a,b \in I$ & $\forall\, t \in [0,1]$,

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$$

y f es **estrictamente convexa** si la desigualdad es estricta.

f es **cóncava** (ó **estrictamente cóncava**) si $-f$ es convexa (ó estrictamente convexa).

Proposición.

Si $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en todo punto de I, se tiene que:

i) f es convexa ssi f' es creciente en I.

ii) f es estrictamente convexa ssi f' es estrictamente creciente en I.

Si f tiene segunda derivada en todo punto de I,

iii) f es convexa en I ssi $f''(x) \geq 0$, $\forall\, x \in I$.

iv) Si $f''(x) > 0$, $\forall\, x \in I$, entonces f es estrictamente convexa

Ejemplos.

1) $x \mapsto e^x$ es estrictamente convexa en $\mathbb{R}$.

2) $x \mapsto \ln(x)$ es estrictamente cóncava en $]0,\infty[$.

3) $x \mapsto x^p$ es estrictamente convexa en $]0,\infty[$ si $p>1$ y convexa en $]0,\infty[$ si $p \geq 1$.

Lema.

Si $a,b \geq 0$ y $\alpha,\beta > 0$ m $\alpha+\beta = 1$, entonces:

$$ab \leq \alpha a^{\frac{1}{\alpha}} + \beta b^{\frac{1}{\beta}}$$

y la igualdad se cumple ssi $a^{\frac{1}{\alpha}} = b^{\frac{1}{\beta}}$.

Dem:

Como $\ln$ es cóncava, se cumple:

$$\ln\left(\alpha a^{\frac{1}{\alpha}} + \beta b^{\frac{1}{\beta}}\right) \geq \ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$$

Por ser $\ln$ creciente:

$$\Rightarrow \quad ab \leq \alpha a^{\frac{1}{\alpha}} + \beta b^{\frac{1}{\beta}}$$

Como $\ln$ es estrictamente cóncava, la igualdad se cumple[1] $\Leftrightarrow a^{\frac{1}{\alpha}} = b^{\frac{1}{\beta}}$.

q.e.d.

Obs) Si $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ es medible ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$), entonces $|f|^p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es medible.[2]

Def. Sea $1 \leq p < \infty$.

1) $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ denota al conjunto de funciones $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ m

   i) f es medible.

   ii) $|f|^p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es integrable en $\mathbb{R}^n$.

   o sea, $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ ssi f es medible y $\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p < \infty$.

2) Se define $N_p : \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \to \mathbb{R}$ como:

$$N_p(f) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p\right)^{1/p}, \ \forall f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$$

Ejemplo.

1) $x \mapsto \frac{1}{x}\chi_{[1,\infty[}(x) \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R},\mathbb{R})$ $\forall$ $p>1$.

2) $x \mapsto \frac{1}{x^{1/3}}\chi_{]0,1]}(x) \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R},\mathbb{R})$ $\forall$ $p\in[1,3[$.

3) $x \mapsto \frac{1}{x}\chi_{]0,\infty[}(x) \notin \mathcal{L}_p(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\forall$ $p\geq 1$.

4) Si $f\in\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ y $f=g$ c.t.p. entonces $g\in\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$, y $N_p(f)=N_p(g)$.

Obs) La nueva def. de $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ coincide con la anterior y $N_1=N$.

Proposición.

$\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$, y:

$$N_p(\alpha f)=|\alpha|N_p(f),\ \forall\ \alpha\in\mathbb{K}\ \text{y}\ \forall\ f\in\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}).$$

Dem:

Sean $f,g\in\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$. Entonces $f+g$ es medible y se cumple:

$$\left|\frac{f+g}{2}\right|^p \leq \left[\frac{|f|+|g|}{2}\right]^p \overset{\text{convex}}{\leq} \frac{1}{2}|f|^p+\frac{1}{2}|g|^p$$

$\Rightarrow |f+g|^p \leq 2^{p-1}\left[|f|^p+|g|^p\right]\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n}|f+g|^p<\infty \Rightarrow f+g\in\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}).$$

El resto es inmediato.

q.e.d.

Obs) El conjunto $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ se identifica de manera natural con un subconjunto de $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$.

Corolario.

Sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ y sean $g=\operatorname{Re}f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ y $h=\operatorname{Im}f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Entonces $f\in\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ $\Leftrightarrow g,h\in\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.

Dem.

Se sabe que f es medible con valores en $\mathbb{C}$ $\Leftrightarrow$ g y h son medibles con valores en $\mathbb{R}$.

Además:

$$|g|^p, |h|^p \leq |f|^p$$

así $\Rightarrow g, h \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Si $g, h \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ entonces $f = g + ih \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ por ser esp. vectorial sobre $\mathbb{C}$ y $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \overset{\text{"}\ \text{"}}{\subseteq} \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

q.e.d.

Proposición.

i) $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \Rightarrow |f| \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

ii) $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \Leftrightarrow \bar{f} \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$.

iii) Si $f, g \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, entonces $\mathrm{Max}(f,g), \mathrm{Min}(f,g) \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

En particular $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \Leftrightarrow f^+, f^- \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Dem:

De (i): Si $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p < \infty \Rightarrow |f| \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ pues $|f| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y por ser f medible, $|f|$ es medible.

De (ii): $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p < \infty \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |\bar{f}|^p < \infty \Leftrightarrow \bar{f} \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ (pues f medible $\Leftrightarrow$ $\bar{f}$ medible y además, $|f| = |\bar{f}|$).

De (iii): Es inmediato del hecho que $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ es esp. vect. y de la def. de las func. máximo y mínimo.

$\square$

Def. Si $p \geq 1$, se define $p^* \in \mathbb{R}^*$ como:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$$

Al par p, p^* se les llama *índices conjugados*. (Si $p > 1$, entonces $p^* > 1$).

Teorema (desigualdad de Hölder).

Sea $p > 1$. Si $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y $g \in \mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ (donde $p^* > 1$) entonces $fg \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$

y

$$N_1(fg) \leq N_p(f) N_{p^*}(g)$$

y la igualdad se cumple $\Leftrightarrow \exists\ \alpha, \beta \geq 0$ ambos no neg. $\ni$ $\alpha |f|^p = \beta |g|^{p^*}$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$.

Dem:

Si $N_p(f) = 0$ o $N_{p^*}(g) = 0$, la desig. es trivial y $f = 0$ c.t.p o $g = 0$ c.t.p. y la condición se cumple con $\beta = 0$ o $\alpha = 0$.

Suponga que $N_p(f) > 0$ y $N_{p^*}(g) > 0$. Defina $F = \frac{f}{N_p(f)}$ y $G = \frac{g}{N_{p^*}(g)}$ y aplique el lema 4 con $a = |F(x)|$, $b = |G(x)|$, $\alpha = \frac{1}{p}$, $\beta = \frac{1}{p^*}$ para obtener:

$$ab = |F(x) G(x)| = ab \leq \alpha a^{\frac{1}{\alpha}} + \beta b^{\frac{1}{\beta}}$$

$$= \frac{1}{p}|F(x)|^p + \frac{1}{p^*}|G(x)|^{p^*}, \text{ integrando y como } \int_{\mathbb{R}^n} |F(x)|^p = 1 = \int_{\mathbb{R}^n} |G(x)|^{p^*}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{N_p(f) N_{p^*}(g)} \int_{\mathbb{R}^n} |fg| \leq 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^*}$$

$$\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |fg| \leq N_p(f) N_{p^*}(g)$$

Si hay igualdad, por el lema, se cumple $\Leftrightarrow |F(x)|^p = |G(x)|^{p^*} \Leftrightarrow N_{p^*}(g)|f|^p = N_p(f)|g|^{p^*}$.

$\square$

Teorema (desigualdad de Minkowsky).

Sea $p > 1$. $\forall\ f, g \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$:

$$N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g)$$

y la igualdad se cumple $\Leftrightarrow f = 0$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$ o $\exists\ \alpha > 0 \ni g = \alpha f$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$.

Dem:

La desig. se cumple trivialmente si $N_p(f+g)=0$. Suponga $N_p(f+g)>0$. Entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f+g|^p \leq \int_{\mathbb{R}^n}|f+g|^{p-1}|f| + \int_{\mathbb{R}^n}|f+g|^{p-1}|g|$$

Notemos que $|f+g|^{p-1} \in \mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, pues:

$$\left(|f+g|^{p-1}\right)^{p^*} = |f+g|^{(1-\frac{1}{p})pp^*}$$
$$= |f+g|^p \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

$\therefore |f+g|^{p-1} \in \mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Luego por Hölder:

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f+g|^p \leq \int_{\mathbb{R}^n}|f+g|^{p-1}|f| + \int_{\mathbb{R}^n}|f+g|^{p-1}|g| \quad \ldots (1)$$
$$\leq N_{p^*}(|f+g|^{p-1})N_p(f) + N_{p^*}(|f+g|^{p-1})N_p(g)$$
$$= \left(\int_{\mathbb{R}^n}(|f+g|^{p-1})^{p^*}\right)^{1/p^*}\left(N_p(f)+N_p(g)\right)$$
$$\Rightarrow \left(\int_{\mathbb{R}^n}|f+g|^p\right)^{1-\frac{1}{p^*}} \leq N_p(f)+N_p(g)$$
$$\Rightarrow N_p(f+g) \leq N_p(f)+N_p(g)$$

Si $f=0$ c.t.p. o $\exists\, \alpha \geq 0$ m $g=\alpha f$ c.t.p. la desigualdad se cumple trivialmente. Suponga que:

$$N_p(f+g) = N_p(f)+N_p(g)$$

Supongamos $N_p(f)>0$. Si $g=0$ c.t.p. basta tomar $\alpha=0$. Suponga $N_p(g)>0$.
En part. se cumple la igualdad:

$$|f+g| = |f|+|g| \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n$$

Como $N_p(f+g)>0$ y se cumple Hölder (en igualdad), $\exists\, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \geq 0$ m

$$\alpha_1|f|^p = \beta_1|f+g|^p \quad \text{y} \quad \alpha_2|g|^p = \beta_2|f+g|^p$$

Luego $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0$. Por ende $\exists\, \alpha>0$ m $|g| = \alpha|f|$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$. Sea

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| \neq 0\}$$
$$\Rightarrow \left|\frac{g}{f}\right| = \alpha, \text{ c.t.p. en } S.$$

Pero:

$$|f|^2 + 2\mathrm{Re}(f\bar{g}) + |g|^2 = |f|^2 + 2|f\bar{g}| + |g|^2 \quad (\text{pues } |g| = |\bar{g}|)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}(f\bar{g}) = |f\bar{g}| \geq 0 \quad \text{c.t.p. en } \mathbb{R}^n$$

$\Rightarrow f\bar{g} = \bar{f}g \geq 0$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$. Luego:

$$\frac{g}{f} = \frac{g\bar{f}}{f\bar{f}} = \frac{g\bar{f}}{|f|^2} \geq 0 \quad \text{c.t.p. en } \mathbb{R}^n$$

$$\therefore \left|\frac{g}{f}\right| = \frac{g}{f} \quad \text{c.t.p. en } \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \frac{g}{f} = \alpha \quad \text{c.t.p. en } S$$

Pero $|g| = \alpha|f|$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$. Fuera de S $g = 0$ c.t.p. Luego $g = \alpha f$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$.

$\square$

Obs) En el caso $p=1$:

$$N_1(f+g) \leq N_1(|f|+|g|) \leq N_1(f) + N_1(g)$$

Si hay igualdad, entonces:

$$|f+g| = |f| + |g| \quad \text{c.t.p. en } \mathbb{R}^n.$$

$\Leftrightarrow f\bar{g} \geq 0$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$. Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \neq 0\}$. S es medible y

$$\lambda = \frac{f}{g} = \frac{f\bar{g}}{|g|^2} \geq 0 \quad \text{c.t.p. en } S$$

$\lambda \geq 0$ en S (pues podemos extenderla a toda S). Luego:

$$f = \lambda g \quad \text{c.t.p. en } S$$

Esta condición es suf. para la igualdad.

Corolario.

Los espacios $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ son seminormados $\forall\, p \geq 1$.

Sea $K = \{f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \mid f = 0 \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n\}$. K es subespacio de $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$.

Def. $L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ se define como el espacio normado asociado al esp. seminormado $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$

es decir:

$$L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) = \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) / K$$

$f \sim g \iff f - g = 0$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n \iff f = g$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$. Se confundirán voluntariamente $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y $L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$.

Def. Sea $\{f_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ una suc. en $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Decimos que ésta **converge en p-promedio** a $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, si:

$$\lim_{\nu \to \infty} N_p(f_\nu - f) = 0$$

Lema.

Sea $p \geq 1$ y $\varepsilon > 0$. Si $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \ni N_p(f) \leq \varepsilon^{2/p}$ y si

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| > \varepsilon^{1/p}\}$$

entonces $m(A) \leq \varepsilon$.

Dem:

$$\varepsilon^2 \geq \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \geq \int_A |f|^p \geq \varepsilon \; m(A)$$

$$\therefore m(A) \leq \varepsilon.$$

$\square$

Lema.

Sea $p \geq 1$. Si $\{f_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, entonces $\exists \{f_{\alpha(\nu)}\}_{\nu=1}^{\infty}$ y una función $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{K} \ni \{f_{\alpha(\nu)}\}_{\nu=1}^{\infty}$ converge a f casi uniformemente (luego c.t.p.) en $\mathbb{R}^n$.

Dem:

Por la condición de Cauchy $\exists \{f_{\alpha(\nu)}\}_{\nu=1}^{\infty} \ni$

$$N_p(f_{\alpha(\nu+1)} - f_{\alpha(\nu)}) \leq \left(\tfrac{1}{2^\nu}\right)^{2/p}, \; \forall \nu \geq 1.$$

Sea

$$A_\nu = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |f_{\alpha(\nu+1)}(x) - f_{\alpha(\nu)}(x)| \geq \left(\tfrac{1}{2^\nu}\right)^{1/p}\}$$

Por el lema ant. $m(A_v) \leq \frac{1}{2^v}$, $\forall v \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$|f_{\alpha(v+1)}(x) - f_{\alpha(v)}(x)| \leq \left(\frac{1}{2^v}\right)^{1/p}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus A_v, \ \forall v \in \mathbb{N}.$$

Sea $M_v = \bigcup_{k=v}^{\infty} A_k$. Entonces $m(M_v) \leq \frac{1}{2^{v-1}}$, $\forall v \in \mathbb{N}$. Luego:

$$|f_{\alpha(v+1)}(x) - f_{\alpha(v)}(x)| \leq \left(\frac{1}{2^v}\right)^{1/p}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus M_k \ \& \ \forall v \geq k.$$

Como

$$\sum_{v=k}^{\infty} \left(\frac{1}{2^v}\right)^{\frac{1}{p}} = \sum_{v=k}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{1/p}}\right)^v < \infty$$

Por el criterio M de Weierestrass:

$$\sum_{v=1}^{\infty} |f_{\alpha(v+1)} - f_{\alpha(v)}|$$

Conv. unif. en $\mathbb{R}^n \setminus M_k$, en part. converge puntualmente en $\mathbb{R}^n \setminus M_k$. Como $\mathbb{K}$ es de Banach:

$$\sum_{v=1}^{\infty} (f_{\alpha(v+1)} - f_{v(v)})$$

conv. punt. en $\mathbb{R}^n \setminus M_k$. Por ser la primer serie de Cauchy, la segunda también lo es. Así pues $\sum_{v=1}^{\infty} (f_{\alpha(v+1)} - f_{\alpha(v)})$ conv. unif. en $\mathbb{R}^n \setminus M_k$. Notemos que:

$$f_{\alpha(v)} = f_{\alpha(1)} + \sum_{k=1}^{v-1} (f_{\alpha(k+1)} - f_{\alpha(k)})$$

Luego $\{f_{\alpha(v)}\}_{v=1}^{\infty}$ debe converger unif. a una func.

Teorema.

$L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ es de Banach, para $1 \leq p < \infty$.

Dem:

Sea $\{f_v\}_{v=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Por el lema anterior, $\exists \{f_{\alpha(v)}\}_{v=1}^{\infty}$ subsucesión y $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ $\ni$ esta subsucesión converge a f casi uniformemente (en part. c.t.p.) en $\mathbb{R}^n$.

Afirmamos que $\{f_{\alpha(v)}\}_{v=1}^{\infty}$ converge a f en p-promedio. En efecto: sea $\varepsilon > 0$, por ser $\{f_v\}_{v=1}^{\infty}$ de Cauchy, $\exists$ $N \in \mathbb{N}$ $\ni$

$$r, s \geq N \Rightarrow N_p(f_r - f_s) \leq \varepsilon$$

es decir:

$$r, s \geq N \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |f_r - f_s|^p \leq \varepsilon^p$$

Como $\alpha(s) \geq s$, $\forall s \in \mathbb{N}$, entonces:

$$r, s \geq N \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |f_r - f_{\alpha(s)}|^p \leq \varepsilon^p$$

Para $r \geq N$ fijo, se tiene que:

$$\lim_{s \to \infty} |f_r - f_{\alpha(s)}|^p = |f_r - f|^p \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n, \text{ pues } \lim_{v \to \infty} f_{\alpha(v)} = f \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n.$$

Por el Lema de Fatou y por propiedades del liminf:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_r - f|^p \leq \liminf_{s \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f_r - f_{\alpha(s)}|^p \leq \varepsilon^p$$

$\forall r \geq N$. En part. $f_N - f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \Rightarrow f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ (por ser $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ esp. vectorial). Luego:

$$r \geq N \Rightarrow N_p(f_r - f) \leq \varepsilon$$

Así, $\{f_v\}_{v=1}^{\infty}$ converge en p-promedio a $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Por tanto, $L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ es de Banach. $\square$

Corolario.

Sea $1 \leq p < \infty$. Si $\{f_v\}_{v=1}^{\infty}$ converge en p-promedio a alguna $g \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y también converge c.t.p. a alguna func. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$, entonces $f = g$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$.

Dem:

En el teorema anterior, se probó que si una subsucesión de Cauchy de $\{f_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ converge c.t.p. a alguna función (en este caso, la subsucesión es $\{f_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ y la función es f) entonces $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y la sucesión converge en p-promedio a f.

En este caso, como $\{f_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ converge en p-promedio a $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$, entonces por ser $L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ de Banach, $\{f_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Por el párrafo anterior y por unicidad del límite: $\hat{f} = \hat{g}$, i.e $f = g$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$.

$\square$

Corolario.

Si $\{f_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ converge en p-promedio a alguna $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, existe $\{f_{\alpha(\nu)}\}_{\nu=1}^{\infty}$ que conv. a f casi uniformemente (luego c.t.p.) en $\mathbb{R}^n$.

Dem:

Como $L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ es completo y $\{f_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ converge en p-promedio a f, entonces $\{f_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Por el lema anterior, $\exists\ \{f_{\alpha(\nu)}\}_{\nu=1}^{\infty}$ que converge a una función $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ casi uniformemente (luego c.t.p) en $\mathbb{R}^n$.

Por el corolario anterior $f = g$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$ (pues $\{f_{\alpha(\nu)}\}_{\nu=1}^{\infty}$ converge a f en p-promedio en $\mathbb{R}^n$).

Así, $\{f_{\alpha(\nu)}\}_{\nu=1}^{\infty}$ converge a f casi uniformemente en $\mathbb{R}^n$.

$\square$

Teorema (Convergencia dominada de Lebesgue para L_p).

Sea $p \geq 1$ y $\{f_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ que satisface lo siguiente:

a) Existe $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ tal que $\lim_{\nu \to \infty} f_\nu = f$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$.

b) Existe $g \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tal que $|f_\nu| \leq g$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$, $\forall\ \nu \in \mathbb{N}$.

Entonces:

i) $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$.

ii) $\lim_{\nu \to \infty} N_p(f_\nu - f) = 0$ (Conv. en p-promedio).

Dem:

Como $|f_\nu| \leq g$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$, entonces al tener que $\lim_{\nu\to\infty} f_\nu = f$ c.t.p. se tiene que: $|f| \leq g$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$, por lo cual $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ (además, f es medible por ser el límite c.t.p. de una sucesión de func. medibles).

Veamos también que:

$$|f_\nu - f|^p \leq |f_\nu|^p + |f|^p \leq 2^p g^p, \text{ donde } g^p \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

y:

$$\lim_{\nu\to\infty} |f_\nu - f|^p = 0 \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n.$$

Por Lebesgue en $\mathcal{L}_1$, tenemos que:

$$\lim_{\nu\to\infty} N(|f_\nu - f|^p) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\nu\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f_\nu - f|^p = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\nu\to\infty} N_p(f_\nu - f) = 0$$

$\square$

El espacio $\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$.

Def. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$. Un número real $\alpha \geq 0$ es un **mayorante esencial** de f si:

$$|f| \leq \alpha, \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n.$$

i.e. el conjunto:

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha < |f(x)|\}$$

es despreciable. Si existe algún mayorante esencial de f, se dice que f es **esencialmente acotada** y se define el **supremo esencial** de f como:

$$N_\infty(f) = \inf S(f) = \sup_{\mathbb{R}^n} \text{esc} |f|.$$

donde $S(f)$ es el conjunto de mayorantes esenciales de f.

$\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ denota al conjunto de funciones $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ que son esencialmente acotadas. Se afirma que si $f \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, entonces $S(f)$ es cerrado en $\mathbb{R}$. En efecto:

Sea $\{\alpha_v\}_{v=1}^{\infty}$ una sucesión de mayorantes esenciales de f que converge a $\alpha \in \mathbb{R}$. Probaremos que $\alpha \in S(f)$.

$\forall v \in \mathbb{N}$, $\exists Z_v$ despreciable en $\mathbb{R}^n$ m

$$|f(x)| \leq \alpha_v, \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus Z_v.$$

Sea $Z = \bigcup_{v \in \mathbb{N}} Z_v$. Entonces Z es despreciable en $\mathbb{R}^n$ y, $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus Z$:

$$|f(x)| \leq \alpha_v, \ \forall v \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow |f(x)| \leq \alpha, \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus Z.$$

Luego, $\alpha \in S(f)$. Por tanto, $N_\infty(f)$ es un mayorante esencial, i.e

$$|f| \leq N_\infty(f) \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n.$$

o sea, $N_\infty(f)$ es el mínimo mayorante esencial de f.

Proposición.

$\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ es esp. vect. sobre $\mathbb{K}$ y N_∞ es una seminorma sobre $\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y:

$$N_\infty(f) = 0 \iff f = 0 \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n.$$

Dem:

Sean $f, g \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Entonces: $|f| \leq N_\infty(f)$ y $|g| \leq N_\infty(g)$. Por tanto:

$$|f+g| \leq |f| + |g| \leq N_\infty(f) + N_\infty(g) \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n \Rightarrow f+g \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}).$$

$$\Rightarrow N_\infty(f+g) \leq N_\infty(f) + N_\infty(g)$$

Por ser f y g med., $f+g$ es medible. Si $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces:

$$S(\lambda f) = |\lambda| S(f)$$

Tomando ínfimos $N_\infty(\lambda f) = |\lambda| N_\infty(f)$ (pues λf es med. y los ínfimos existen).

La última parte es inmediata.

La completez de $L_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ será consecuencia de la completez de la completez del esp. de funciones acotadas con la norma uniforme.

Dada $f \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, denote por $Z_f = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| > N_\infty(f)\}$. Z_f es despreciable. Se afirma que:

$$N_\infty(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus Z_f} |f(x)| \quad \Rightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus Z_f} |f(x)| \leq N_\infty(f)$$

Por def. de Z_f, $|f(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus Z_f} |f(x)|$, $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus Z_f$. Observe que $\sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus Z_f} |f(x)|$ es un mayorante esencial de f. Por tanto $N_\infty(f) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus Z_f} |f(x)|$.

Luego se tiene la igualdad. Si Z es tal que $Z_f \subseteq Z$ con Z despreciable entonces:

$$N_\infty(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus Z} |f(x)|$$

Si Z es desp. arbitrario en $\mathbb{R}^n$:

$$N_\infty(f) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus Z} |f(x)|$$

Si $\{f_v\}_{v=1}^\infty$ y f son funciones en $\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, $\exists\, Z \subseteq \mathbb{R}^n$ despreciable $\ni \forall v \in \mathbb{N}$:

$$|f_v(x)| \leq N_\infty(f_v), \quad |f| \leq N_\infty(f), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus Z$$

$$y \quad N_\infty(f_v - f) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus Z} |f_v(x) - f(x)|$$

Donde $Z = \bigcup_{v=1}^{\infty} (Z_{f_v} \cup Z_{f_v - f}) \cup Z_f$. Así f_v y f son acotadas en $\mathbb{R}^n \setminus Z$ y la dist. entre f_v y f en $\mathbb{R}^n$ coincide con la dist. uniforme sobre $\mathbb{R}^n \setminus Z$, luego:

$$\lim_{v \to \infty} N_\infty(f_v - f) = 0$$

ssi $\lim_{v \to \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus Z} |f_v(x) - f(x)| = 0$. En este sentido $(\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}), N_\infty)$ se identifica con $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n \setminus Z, \mathbb{K}), N_\infty)$.

Sea

$$K = \{f \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \mid N_\infty(f) = 0\}$$

K es subespacio de $\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Se define:

$$L_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) = \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) / K$$

y se hace la misma confusión de siempre. ($L_\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ "=" $\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$).

Teorema.

$L_\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ es de Banach.

Dem:

Sea $\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$. $\forall \nu\in\mathbb{N}$ y $\forall r,s\in\mathbb{N}$, se define

$$A_\nu=\{x\in\mathbb{R}^n \mid |f_\nu(x)|>\mathcal{N}_\infty(f)\}$$

$$B_{r,s}=\{x\in\mathbb{R}^n \mid |f_\nu(x)-f(x)|>\mathcal{N}_\infty(f_\nu-f)\}$$

Sea $Z=\left(\bigcup_{\nu\in\mathbb{N}} A_\nu\right)\cup\left(\bigcup_{r,s\in\mathbb{N}} B_{r,s}\right)$. Z es despreciable. En $\mathbb{R}^n\setminus Z$, todas las f_ν son acotadas (junto con las f_r-f_s), y:

$$\mathcal{N}_\infty(f_r-f_s)=\sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus Z}|f_r(x)-f_s(x)|,\ \forall\, r,s\in\mathbb{N}.$$

i.e, pertenecen todas a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n\setminus Z,\mathbb{K})$ provisto de la norma unif. y $\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ es de Cauchy en este espacio, el cual es completo, entonces $\exists\ f:\mathbb{R}^n\setminus Z\to\mathbb{K}$ acotada a la que conv. unif. las $\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$, i.e:

$$\Rightarrow \lim_{\nu\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus Z}|f_\nu(x)-f(x)|=0$$

$$\Rightarrow \lim_{\nu\to\infty}\mathcal{N}_\infty(f_\nu-f)=0$$

$\square$

Corolario.

Si una sucesión de funciones $\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ en $\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ converge a una función $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{K}$ con respecto a la seminorma $\mathcal{N}_\infty$, entonces existe un conjunto despreciable $Z\subseteq\mathbb{R}^n$ tal que $\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ converge a f uniformemente en $\mathbb{R}^n\setminus Z$.

Dem:

Tome el Z del teorema anterior.

$\square$

Justificación de la notación $\mathcal{N}_\infty$.

Proposición.

i) Si $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \cap \mathcal{L}_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, $1 \leq p < q < \infty$, entonces $f \in \mathcal{L}_s(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, $\forall\ p \leq s \leq q$.

ii) Si $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \cap \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, $1 \leq p < \infty$, entonces $f \in \mathcal{L}_s(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, $\forall\ p \leq s \leq \infty$.

Dem:

De (i): Sean

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| > 1\} \quad y \quad B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| \leq 1\}$$

A y B son med. disjuntos y $A \cup B = \mathbb{R}^n$. Además:

$$|f|^r = |f|^r \chi_A + |f|^r \chi_B \leq |f|^q \chi_A + |f|^p \chi_B$$

donde la func. de la derecha es integrable por hip. Luego $f \in \mathcal{L}_r(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ con $p \leq r \leq q$.

De (ii): Se tiene:

$$|f|^r = |f|^{r-p} |f|^p \leq N_\infty(f)^{r-p} |f|^p \quad \text{c.t.p. en } \mathbb{R}^n$$

Por tanto, $f \in \mathcal{L}_r(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$.

$\square$

Consecuencia: si f es medible, entonces el conjunto:

$$\{p \in [1, \infty] \mid f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})\}$$

es un intervalo que puede ser vacío ó reducido a un punto.

Ejemplo.

1) $f(x) = \frac{1}{x^{1/3}} \chi_{[1,\infty[}(x)$, $g(x) = \frac{1}{x^{1/4}} \chi_{]0,1]}(x)$, $h(x) = 1$, $j(x) = e^x$.

$f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $\forall\ p \in\ ]3, \infty]$. $g \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $\forall\ p \in\ ]4, \infty]$, $h \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y $j \notin \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $\forall\ p \in [1, \infty]$.

Proposición.

Si una función $f \in \mathcal{L}_{p_0}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \cap \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ para algún $p_0 \in [1, \infty[$, entonces:

$$\lim_{r \to \infty} N_r(f) = N_\infty(f)$$

Dem:

El resultado es trivial si $f=0$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$. Suponga que $N_\infty(f)=M>0$. Sea $\varepsilon'>0$ y tome $\varepsilon=\min\{\varepsilon', M\}$. Defina:

$$S=\{x\in\mathbb{R}^n \mid |f(x)|>M-\varepsilon\}$$

S es medible y como $M-\varepsilon$ no es mayorante esencial (por minimalidad de M), entonces: $m(S)>0$. Para cada $p_0<p<\infty$:

$$N_p(f)^p=\int_{\mathbb{R}^n}|f|^p=\int_{\mathbb{R}^n}|f|^{p-p_0}\cdot|f|^{p_0}\leq M^{p-p_0}\int_{\mathbb{R}^n}|f|^{p_0}$$

Por otra parte:

$$N_p(f)^p=\int_{\mathbb{R}^n}|f|^p\geq\int_S|f|^p=\int_S|f|^{p-p_0}\cdot|f|^{p_0}\geq(M-\varepsilon)^{p-p_0}\int_S|f|^{p_0}$$

Luego:

$$A(p)=(M-\varepsilon)^{1-\frac{p_0}{p}}\left(\int_S|f|^{p_0}\right)^{1/p}\leq N_p(f)\leq M^{1-\frac{p_0}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f|^{p_0}\right)^{1/p}=B(p)$$

Como $\lim_{p\to\infty}B(p)=M$ y $\lim_{p\to\infty}A(p)=M-\varepsilon$, $\exists\, p_1>p_0$ m $B(p)\leq M+2\varepsilon$ y $A(p)\geq M-2\varepsilon$, $\forall\, p\geq p_1$. Así:

$$M-2\varepsilon\leq N_p(f)\leq M+2\varepsilon$$

$$\therefore \lim_{p\to\infty}N_p(f)=N_\infty(f)$$

$\square$

Subespacios Densos.

Proposición.

Sea $f\in\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, $1\leq p<\infty$ no negativa. Entonces $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\, g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ medible no negativa, acotada y nula fuera de un conjunto con medida finita tal que:

$$N_p(f-g)<\varepsilon.$$

Dem:

Sea $\varepsilon>0$ y $1\leq p<\infty$. Es claro que dada función g como en el enunciado, pertenece a $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.

Sea $\{P_v\}_{v=1}^{\infty}$ una sucesión de rectángulos acotados crecientes $\ni$ $\mathbb{R}^n = \bigcup_{v=1}^{\infty} P_v$. Defina:

$$f_v = \min\{f, v\} \chi_{P_v}, \quad v \in \mathbb{N}.$$

$\{f_v\}_{v=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente de funciones medibles, no neg., acotados y nulas fuera de un conjunto con medida finita, y además:

$$\lim_{v\to\infty} f_v = \lim_{v\to\infty} \min\{f, v\} \chi_{P_v} = f \quad \text{c.d.p. en } \mathbb{R}^n$$

y $0 \leq f_v(x) \leq f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Como $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y es independiente de v, por Lebesgue para $\mathcal{L}_p$: $\{f_v\}_{v=1}^{\infty}$ converge en p-promedio a f.

Así, dado $\varepsilon > 0$ $\exists$ $N \in \mathbb{N}$ $\ni$ $N_p(f_v - f) \leq \varepsilon$, $\forall v \geq N$. Tome $g = f_N$.

$\square$

Corolario.

El conjunto de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{K}$ que son medibles, acotadas y nulas fuera de un conjunto con medida finita es denso en $L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, $1 \leq p < \infty$.

Dem:

3)

Teorema:

$\mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y $S(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ son subespacios densos de $L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, $1 \leq p < \infty$.

Dem:

Como $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \subseteq S(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, basta probar que $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ son densos en $L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Sea $f \in L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y $\varepsilon > 0$.

Se supone que $\operatorname{Re} f = f$ y f es no negativa. Por la prop. ant. $\exists\, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ medible, acotada y nula fuera de un rectángulo acotado que aproxima a la f en p-promedio, i.e

$$N_p(f-g) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $M = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} g(x)$ y sea P un rect. acotado $\ni$ $g(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus P$. Por un resultado del semestre anterior $\exists\, \{\varphi_v\}_{v=1}^{\infty}$ en $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ que converge c.t.p. a g en $\mathbb{R}^n$.

Se puede suponer que la sucesión $\{\varphi_v\}_{v=1}^{\infty}$ es no neg. Defina

$$\psi_v = \min\{\varphi_v, M\chi_P\},\ \forall\, v \in \mathbb{N}.$$

Entonces $\{\psi_v\}_{v=1}^{\infty}$ es una sucesión de escalonadas que convergen puntualmente, i.e:

$$\lim_{v \to \infty} \psi_v(x) = \lim_{v \to \infty} \min\{\varphi_v, M\chi_P\}(x) = \min\{g(x), M\chi_P(x)\} = g(x)$$

$\forall\, x \in \mathbb{R}^n$. Y $0 \leq \psi_v \leq M\chi_P$, donde $M\chi_P \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y no depende de v. Por Lebesgue para L_p:

$$\lim_{v \to \infty} N_p(g - \psi_v) = 0$$

Dado $\varepsilon > 0$ $\exists\, N \in \mathbb{N}$ $\ni$ $v \geq N$ implica: $N_p(g - \psi_v) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces:

$$N_p(f - \psi_N) \leq \varepsilon$$

Si $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Por lo ant, $\exists\, g^+, g^- \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ $\ni$

$$N_p(f^+ - g^+) \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } N_p(f^- - g^-) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Tome $g = g^+ - g^- \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, entonces:

$$N_p(f - g) \leq \varepsilon.$$

El caso en que $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ es inmediato (tomando parte real e imaginaria), pues por lo ant.

$\exists\, Reh, Imh \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ m

$$N_p(Ref - Reh) \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } N_p(Imf - Im(h)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\Rightarrow N_p(f - h) \leq \varepsilon.$$

Con $h \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

$\square$

Def. $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ se dice que es escalonada racional, si:

$$\varphi = \sum_{k=1}^{r} \delta_k \chi_{Q_k}$$

Donde los Q_k son rectángulos acotados con extremos numerables y los $\delta_k = \alpha_k + \beta_k i$ son tales que $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{Q}$, $\forall\, k \in [\![1, r]\!]$.

Es claro que la familia de funciones escalonadas es numerable.

Teorema.

Si $1 \leq p < \infty$, entonces $L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ es separable.

Dem:

Ya que $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ es denso en $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, basta probar que si $\varphi = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \chi_{P_k} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, $\exists\, \psi = \sum_{k=1}^{r} \delta_k \chi_{Q_k}$ escalonado racional tal que $N_p(\varphi - \psi) \leq \varepsilon$.

Se tiene que $P_k = \prod_{i=1}^{n} I_{i,k}$ donde $I_{i,k}$ tiene extremos $a_{i,k} \leq b_{i,k}$, $\exists\, c_{i,k} \leq d_{i,k}$ m $c_{i,k}, d_{i,k} \in \mathbb{Q}$ y $c_{i,k} \leq a_{i,k} \leq b_{i,k} \leq d_{i,k}$. Tome:

$$Q_k = \prod_{i=1}^{n} [c_{i,k}, d_{i,k}]$$

tal que $m(Q_k \setminus P_k) \leq \varepsilon^p$. También existen δ_k con partes real e imaginarias m

$$|\delta_k - \alpha_k| \leq \varepsilon,\ k \in [\![1, r]\!].$$

Se define $\psi = \sum_{k=1}^{r} \delta_k \chi_{P_k}$. Se tiene:

$$N_p(\varphi - \psi) = N_p\Big(\sum_{k=1}^{r} (\alpha_k \chi_{P_k} - \delta_k \chi_{Q_k})\Big) \leq \sum_{k=1}^{r} N_p(\alpha_k \chi_{P_k} - \delta_k \chi_{Q_k})$$
$$= \sum_{k=1}^{r} N_p(\alpha_k \chi_{P_k} - \delta_k (\chi_{P_k} + \chi_{Q_k \setminus P_k}))$$

$$\leq \sum_{k=1}^{r} |\alpha_k - \delta_k| N_p(\chi_{P_k}) + |\delta| N_p(\chi_{Q_k \setminus P_k})$$
$$\leq \varepsilon \cdot r \left(\sum_{k=1}^{r} m(P_k)^{\frac{1}{p}} \right) + \sum_{k=1}^{r} (1+|\alpha_k|)\, \varepsilon$$
$$= \underbrace{\left[\sum_{k=1}^{r} m(P_k)^{\frac{1}{p}} + \sum_{k=1}^{r} (1+|\alpha_k|) \right]}_{\text{cte.}} \varepsilon$$

$\square$

Lema.

Sea $1 \leq p < \infty$. Si P es un rectángulo acotado en $\mathbb{R}^n$, ent. $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ m

$$N_p(\chi_P - g) \leq \varepsilon.$$

Dem:

Por un corolario del cap. 2 del semestre pasado, $\exists\, P'$ rectángulo compacto m $P \subseteq P'$ y una función $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ m $0 \leq g(x) \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $g(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus P'$, $g(x) = 1$, $\forall\, x \in P$ y $m(P' \setminus P) \leq \varepsilon^p$.

Entonces:

$$N_p(g - \chi_P)^p = \int_{\mathbb{R}^n} |g(x) - \chi_P(x)|^p dx$$
$$= \int_{P' \setminus P} |g(x)|^p dx$$
$$\leq m(P' \setminus P)$$
$$\leq \varepsilon^p.$$

$\square$

Teorema.

$\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ es un subespacio denso en $L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, $1 \leq p < \infty$.

Dem:

Sea $\varepsilon > 0$, y $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Existe $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ m

$$N_p(f - \varphi) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Escriba $\varphi = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \chi_{P_k}$. Por el lema $\exists\, g_k \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ m $N_p(g_k - \chi_{P_k}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall\, k \in [\![1, r]\!]$

Entonces $g = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k g_k \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y

$$N_p(\varphi - g) \leq \sum_{k=1}^{r} |\alpha_k| N_p(g_k - \chi_{P_k})$$
$$\leq \left(\sum_{k=1}^{r} |\alpha_k|\right) \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\therefore N_p(f-g) \leq \underbrace{\left(1 + \sum_{k=1}^{r} |\alpha_k|\right)}_{\text{cte.}} \frac{\varepsilon}{2}$$

$\square$

Sea $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ el conjunto de funciones simples de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{K}$. Claramente, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ es subespacio de $L_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$.

Teorema.

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ es un subespacio denso de $L_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$.

Dem:

Sea $f \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y $\varepsilon > 0$. Se aplica el primer teorema de aproximación a las partes real e imaginaria de f.

Como $f \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, existe un conjunto $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ despreciable fuera del cual f es acotada, luego por el P.T.A. existe una sucesión en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ que converge a f uniformemente (pues f es acotada en $\mathbb{R}^n \setminus Z$).

(terminar prueba).

Los Espacios $L_p(S,\mathbb{K})$.

Def. Sea $1\leq p\leq\infty$. Se define $\mathcal{L}_p(S,\mathbb{K})$ ($S\subseteq\mathbb{R}^n$ medible) como el conjunto de funciones $f:S\to\mathbb{K}$ tq $\tilde{f}\in\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$.

Observe que $f\in\mathcal{L}_p(S,\mathbb{K})$ si y sólo si f es medible y $\int_S|f|^p<\infty$ (con $1\leq p<\infty$).

Si $p=\infty$, $f\in\mathcal{L}_\infty(S,\mathbb{K})$ si y sólo si f es medible y $\exists M\geq 0$ tq

$$|f|\leq M \text{ c.t.p. en } S.$$

$\mathcal{L}_p(S,\mathbb{K})$ se "identifica" con un subespacio de $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$,

$$\mathcal{L}_p'(S,\mathbb{K})=\{f\in\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})\mid f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}^n\setminus S\}$$

$\mathcal{L}_p'(S,\mathbb{K})$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$. Dado que hay una biyección entre $\mathcal{L}_p(S,\mathbb{K})$ y $\mathcal{L}_p'(S,\mathbb{K})$, a través de esta identificación $\mathcal{L}_p(S,\mathbb{K})$ es un espacio seminormado, la cuál es una isometría, en particular,

$$N_p(f)=N_p(f')=\left[\int_S|f|^p\right]^{1/p}$$

$$N_\infty(f)=N_\infty(f')=\sup\text{esc}_S(f),\ \text{con } |f|\leq N_\infty(f) \text{ c.t.p. en } S.$$

Sea $1\leq p<\infty$. Considere el subespacio vectorial

$$K=\{f:S\to\mathbb{K}\mid f=0 \text{ c.t.p. en } S\}$$

Se define

$$L_p(S,\mathbb{K})=\mathcal{L}_p(S,\mathbb{K})/K$$

$\hat{f}=\hat{g}$ en $L_p(S,\mathbb{K})\iff f=g$ c.t.p. en S. Los espacios $L_p(S,\mathbb{K})$ y $L_p'(S,\mathbb{K})$ 4) son linealmente isométricos ($\hat{f}\to\hat{\tilde{f}}$ es una isometría lineal suprayectiva).

Teorema.

Sea S conjunto medible en $\mathbb{R}^n$. Entonces $L_p(S,\mathbb{K})$ es un esp. de Banach.

Dem:

Como $L_p(S,\mathbb{K})$ y $L_p'(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ son linealmente isométricos, basta probar que $L_p'(S,\mathbb{K})$ es de Banach.

Sea $\{f_r\}_{r=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{L}_p'(S,\mathbb{K})$ que converja a $f\in\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$. Basta probar que $f\in\mathcal{L}_p'(S,\mathbb{K})$ (por ser $L_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ de Banach). Se tiene que:

Proposición.

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ medible m $0 < m(S) < \infty$, y $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$. Si $f \in \mathcal{L}_q(S, \mathbb{K})$, entonces $f \in \mathcal{L}_p(S, \mathbb{K})$ y:

$$\frac{N_p(f)}{m(S)^{1/p}} \leqslant \frac{N_q(f)}{m(S)^{1/q}}$$

si $q < \infty$. Si $q = \infty$:

$$\frac{N_p(f)}{m(S)^{1/p}} \leqslant N_\infty(f)$$

Dem:

Caso $1 \leqslant p < q < \infty$. Sea $f \in \mathcal{L}_q(S, \mathbb{K})$. Como $|f|^q$ es integrable en S y:

$$|f|^q = (|f|^p)^{q/p}$$

$$\Rightarrow |f|^p \in \mathcal{L}_{\frac{q}{p}}(S, \mathbb{K})$$

Como $m(S) < \infty$, en particular $\bar{1}\chi_S \in \mathcal{L}_{(\frac{q}{p})^*}(S, \mathbb{K}) = \mathcal{L}_{\frac{q}{q-p}}(S, \mathbb{K})$. Por Hölder:

$$|f|^p \cdot \bar{1} \in \mathcal{L}_1(S, \mathbb{K}), \text{ y:}$$

$$\int_S |f|^p \leqslant N_{\frac{q}{p}}(|f|^p) \cdot N_{\frac{q}{q-p}}(\bar{1})$$

$$= \left(\int_S |f|^q\right)^{\frac{p}{q}} \cdot m(S)^{\frac{q-p}{q}}$$

$$\Rightarrow N_p(f)^p \leqslant N_q(f)^p \, m(S)^{1-\frac{p}{q}}$$

$$\Rightarrow \frac{N_p(f)}{m(S)^{1/p}} \leqslant \frac{N_q(f)}{m(S)^{1/q}}.$$

$q = \infty$. Sea $f \in \mathcal{L}_\infty(S, \mathbb{K})$, entonces:

$$|f| \leqslant N_\infty(f) \text{ c.t.p. en } S$$

$$\Rightarrow |f|^p \leqslant N_\infty(f)^p \text{ c.t.p. en } S$$

Como $N_\infty(f)^p$ es integrable, entonces $f \in \mathcal{L}_p(S, \mathbb{K})$. Por tanto:

$$\int_S |f|^p \leqslant \int_S N_\infty(f)^p = m(S) \, N_\infty(f)^p$$

$$\Rightarrow \frac{N_p(f)}{m(S)^{1/p}} \leqslant N_\infty(f).$$

$\square$

Notas.

2) Veamos que $|f|^p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es medible. Claramente $g(x) = |x|^p$ es continua, $\forall\ 1 \leq p < \infty$.
Luego $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es medible. $\square$

3) Aplicar la prop. a la parte $+$ y $-$ de la parte Re e Im de una función.

4) Se define $L_p'(S, \mathbb{K})$ como el conjunto:

$$L_p'(S, \mathbb{K}) = \{ f \in L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \mid f \in \mathcal{L}_p'(S, \mathbb{K}) \}$$