

Notas de Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

7 de junio de 2024

Índice general

4. Transformación de Fourier	2
4.1. Conceptos Fundamentales	2
4.2. Teoremas de Transferencia e Inversión	13
4.3. Fórmula de inversión en \mathbb{R}	18
4.4. Homomorfismos Complejos del álgebra de Banach $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$	21
4.5. La transformación de Fourier-Plancherel	27

Capítulo 4

Transformación de Fourier

La transformada de Fourier de una función de \mathbb{R}^n en \mathbb{C} generaliza en cierta forma la noción de coeficientes de Fourier de funciones periódicas

4.1. Conceptos Fundamentales

Definición 4.1.1

Se define el **producto escalar usual en \mathbb{R}^n** como

$$\langle x|y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad (4.1)$$

en ocasiones también denotado como $(x|y) = \langle x|y \rangle$.

Definición 4.1.2

Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Se definen $\mathcal{F}f, \mathcal{F}^*f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$\mathcal{F}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y \rangle} f(y) dy \quad \text{y} \quad \mathcal{F}^*f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x|y \rangle} f(y) dy \quad (4.2)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Las funciones $\mathcal{F}f$ y \mathcal{F}^*f se llaman las **transformaciones de Fourier de f** . Las aplicaciones \mathcal{F} y \mathcal{F}^* de $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ en el conjunto de funciones de \mathbb{R}^n en \mathbb{C} se llaman las **transformaciones de Fourier**.

Observación 4.1.1

Se tiene lo siguiente:

- I. Los operadores \mathcal{F} y \mathcal{F}^* son lineales de $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ en el espacio de funciones de \mathbb{R}^n en \mathbb{C} .
- II. Las funciones $\mathcal{F}f(x)$ y $\mathcal{F}^*f(x)$ están definidas para todo $x \in \mathbb{R}^n$ si y sólo si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.
- III. En caso de existir, se tiene que $\mathcal{F}f(x) = \mathcal{F}^*f(-x)$.

Demostración:

De (i): Es claro que si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ entonces $\mathcal{F}f(x)$ y $\mathcal{F}^*f(x)$ están definidas para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Para la recíproca, en particular están definidas para $x = \vec{0}$, es decir que

$$\mathcal{F}f(\vec{0}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \vec{0}|y \rangle} f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} e^0 f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy < \infty$$

luego $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

De (ii): Es inmediata. ■

Definición 4.1.3

Sea $f \in \mathcal{L}_1([0, \infty[, \mathbb{C})$. Se definen

$$\mathcal{F}_c f(x) = \int_0^\infty f(y) \cos xy \, dy \quad \text{y} \quad \mathcal{F}_s f(x) = \int_0^\infty f(y) \sin xy \, dy$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Las funciones $\mathcal{F}_c f$ y $\mathcal{F}_s f$ se llaman **las transformadas coseno y seno de Fourier de f** .

Definición 4.1.4

Sea $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ una función. Se definen las funciones f^P y f^I de \mathbb{R} en \mathbb{C} como

$$f^P(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y,

$$f^I(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geq 0 \\ -f(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Proposición 4.1.1

Sea $f \in \mathcal{L}_1([0, \infty[, \mathbb{C})$. Se tiene

$$\mathcal{F} f^P(x) = 2\mathcal{F}_c f(x) \quad \text{y} \quad \mathcal{F} f^I(x) = -2i\mathcal{F}_s f(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostración:

Sea $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{F} f^P(x) &= \int_{\mathbb{R}} f^P(y) e^{-i\langle x|y\rangle} \, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f^P(y) e^{-ixy} \, dy \\ &= \int_{-\infty}^0 f^P(y) e^{-ixy} \, dy + \int_0^{\infty} f^P(y) e^{-ixy} \, dy \\ &= \int_{-\infty}^0 f(-y) e^{-ixy} \, dy + \int_0^{\infty} f(y) e^{-ixy} \, dy \\ &= \int_0^{\infty} f(y) e^{ixy} \, dy + \int_0^{\infty} f(y) e^{-ixy} \, dy \\ &= \int_0^{\infty} f(y) [e^{ixy} + \overline{e^{ixy}}] \, dy \\ &= \int_0^{\infty} f(y) [2\Re(e^{ixy})] \, dy \\ &= \int_0^{\infty} 2f(y) \cos xy \, dy \\ &= 2 \int_0^{\infty} f(y) \cos xy \, dy \\ &= 2\mathcal{F}_c f(x) \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f^I(x) &= \int_{\mathbb{R}} f^I(y) e^{-ixy} dy \\
&= \int_{-\infty}^0 f^I(y) e^{-ixy} dy + \int_0^{\infty} f^I(y) e^{-ixy} dy \\
&= \int_{-\infty}^0 (-f(-y)) e^{-ixy} dy + \int_0^{\infty} f(y) e^{-ixy} dy \\
&= - \int_0^{\infty} f(y) e^{ixy} dy + \int_0^{\infty} f(y) e^{-ixy} dy \\
&= \int_0^{\infty} f(y) [-e^{ixy} + e^{-ixy}] dy \\
&= \int_0^{\infty} f(y) [-\cos xy - i \sin xy + \cos(-xy) + i \sin(-xy)] dy \\
&= \int_0^{\infty} f(y) [-2i \sin xy] dy \\
&= -2i \int_0^{\infty} f(y) \sin xy dy \\
&= -2i \mathcal{F}_s f(x)
\end{aligned}$$

lo que prueba el resultado. ■

Corolario 4.1.1

Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

- I. Si f es par, entonces $\mathcal{F}f(x) = 2 \int_0^{\infty} f(y) \cos xy dy$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- II. Si f es impar, entonces $\mathcal{F}f(x) = -2i \int_0^{\infty} f(y) \sin xy dy$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 4.1.1

Se tiene lo siguiente:

- I. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función $f = \chi_I$ donde I es un intervalo con extremos $a < b$ en \mathbb{R} . Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_I(y) e^{-ixy} dy \\
&= \int_a^b e^{-ixy} dy \\
&= \begin{cases} \frac{e^{-ixb} - e^{-ixa}}{-ix} & \text{si } x \neq 0 \\ b - a & \text{si } x = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

En particular, si $a > 0$ se tiene que

$$\mathcal{F}\chi_{[-a,a]}(x) = \begin{cases} \frac{2 \sin ax}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Como $\mathcal{F}\chi_{[-a,a]}$ no es integrable en \mathbb{R} se concluye que, en general, la transformada de Fourier de una función integrable no necesariamente es integrable.

- II. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función

$$f(x) = e^{-k|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

donde $k > 0$. Como f es integrable, entonces

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k|y|} e^{-ixy} dy \\
 &= \int_{-\infty}^0 e^{ky} e^{-ixy} dy + \int_0^{\infty} e^{-ky} e^{-ixy} dy \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-ky} e^{ixy} dy + \int_0^{\infty} e^{-ky} e^{-ixy} dy \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-ky} e^{(-k+ix)y} dy + \int_0^{\infty} e^{-ky} e^{(-k-ix)y} dy \\
 &= \frac{-1}{-k+ix} + \frac{-1}{-k-ix} \\
 &= \frac{k+ix+k-ix}{k^2+x^2} \\
 &= \frac{2k}{k^2+x^2}
 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.1.2

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función

$$f(x) = e^{-kx^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

donde $k > 0$. Como f es par se tiene que

$$\mathcal{F}f(x) = 2 \int_0^{\infty} e^{-ky^2} \cos xy dy$$

Sea $g(x) = \int_0^{\infty} e^{-ky^2} \cos xy dy$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se afirma que

$$g'(x) = - \int_0^{\infty} ye^{-ky^2} \sin xy dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En efecto, observemos que

$$\left| ye^{-ky^2} \sin xy \right| \leq ye^{-ky^2}, \quad \forall y \geq 0$$

donde la función de la derecha es integrable e independiente de x (se nota fácilmente que una de sus antiderivadas es $y \mapsto -\frac{1}{2k}e^{-ky^2}$, por el T.F.C. II evaluando en 0 e ∞ se obtiene que la función original es integrable en $[0, \infty[$). Por el Teorema de derivación se sigue que

$$g'(x) = - \int_0^{\infty} ye^{-ky^2} \sin xy dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Veamos ahora que

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \int_0^\infty y e^{-ky^2} \sin xy \, dy \\
&= - \left[-\frac{1}{2k} e^{-ky^2} \sin xy \Big|_0^\infty + \frac{1}{2k} \int_0^\infty x e^{-ky^2} \cos xy \, dy \right] \\
&= - \left[0 - 0 + \frac{x}{2k} \int_0^\infty e^{-ky^2} \cos xy \, dy \right] \\
&= -\frac{x}{2k} \int_0^\infty e^{-ky^2} \cos xy \, dy \\
&= -\frac{x}{2k} g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
g'(x) + \frac{x}{2k} g(x) &= 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow e^{\frac{x^2}{4k}} \left(g'(x) + \frac{x}{2k} g(x) \right) &= 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow \frac{d}{dx} \left(e^{\frac{x^2}{4k}} g(x) \right) &= 0, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow e^{\frac{x^2}{4k}} g(x) &= c, \quad \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

En particular,

$$\begin{aligned}
c &= g(0) \\
&= \int_0^\infty e^{-ky^2} \, dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{k}} \int_0^\infty e^{-u^2} \, du \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{k}}
\end{aligned}$$

Por ende,

$$g(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{k}} e^{-\frac{x^2}{4k}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

De donde se sigue que

$$\mathcal{F}f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{k}} e^{-\frac{x^2}{4k}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En particular, si $k = \frac{1}{2}$ entonces $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y,

$$\mathcal{F}f(x) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{2\pi} f(x)$$

es decir que f es un vector propio del operador transformada de Fourier.

Proposición 4.1.2

Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

- I. Si $g(x) = e^{i\langle a|x \rangle} f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\mathcal{F}g(x) = \mathcal{F}f(x - a), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (4.3)$$

II. Si $g(x) = f(x - a)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\mathcal{F}g(x) = e^{-i\langle x|a\rangle} \mathcal{F}f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (4.4)$$

III. Si $g(x) = \overline{f(-x)}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\mathcal{F}g(x) = \overline{\mathcal{F}f(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (4.5)$$

IV. Sea $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si $g(x) = f(\frac{x}{\lambda})$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\mathcal{F}g(x) = |\lambda|^n \mathcal{F}f(\lambda x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (4.6)$$

Demostración:

De (i): Veamos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} g(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} e^{i\langle a|y\rangle} f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x-a|y\rangle} f(y) dy \\ &= \mathcal{F}f(x - a) \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

De (ii): Veamos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} g(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y - a) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|u+a\rangle} f(u) du \\ &= e^{-i\langle x|a\rangle} \mathcal{F}f(x) \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

De (iii): Veamos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} \overline{f(-y)} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x|y\rangle} \overline{f(y)} dy \\ &= \overline{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y) dy} \\ &= \overline{\mathcal{F}f(x)} \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

De (iv): Veamos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} g(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f\left(\frac{y}{\lambda}\right) dy, \text{ haciendo el cambio de variable } u = \frac{y}{\lambda} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|\lambda u\rangle} f(u) |\lambda|^n du \\
&= |\lambda|^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \lambda x|u\rangle} f(u) du \\
&= |\lambda|^n \mathcal{F}f(\lambda x)
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. ■

Teorema 4.1.1

Si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, entonces,

$$|\mathcal{F}f(x)| \leq \mathcal{N}_1(f), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Así pues, $\mathcal{F}f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ es una función acotada. Si $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ denota al espacio de funciones acotadas de \mathbb{R}^n en \mathbb{C} provisto de la norma uniforme, entonces $\mathcal{F}\cdot$ es una aplicación lineal continua de $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ tal que $\|\mathcal{F}\cdot\| = 1$.

Demostración:

Para todo $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, se tiene que

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y) dy \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy \\
&= \mathcal{N}_1(f), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

Notemos también que $\|\mathcal{F}\cdot\| \leq 1$.

Para probar la otra desigualdad se busca una función $P \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ tal que $\mathcal{N}_\infty(\mathcal{F}P) = \mathcal{N}_1(P) > 0$. Por ejemplo, la función $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ dada por:

$$P(x) = e^{-\sum_{k=1}^n |x_k|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

satisface

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}P(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} P(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} P(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y_1| - ix_1 y_1} \dots e^{-|y_n| - ix_n y_n} dy_1 \dots dy_n \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y_1| - ix_1 y_1} dy_1 \right) \dots \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y_n| - ix_n y_n} dy_n \right)
\end{aligned}$$

Se sabe por ejemplos anteriores que la transformada de $t \mapsto e^{-|t|}$ es $\frac{2}{1+t^2}$, para todo $t \in \mathbb{R}$, así pues,

$$\mathcal{F}P(x) = \frac{2^n}{(1+x_1^2) \dots (1+x_n^2)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

de donde,

$$\mathcal{N}_\infty(\mathcal{F}P) = 2^n$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_1(P) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{k=1}^n |x_k|} dx_1 \cdots dx_n \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} dt \right]^n \\ &= 2^n \left[\int_0^{\infty} e^{-|t|} dt \right] \\ &= 2^n\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_1(P) &= \mathcal{N}_\infty(\mathcal{F}P) \\ &\leq \|\mathcal{F} \cdot\| \mathcal{N}_1(P) \\ &\Rightarrow 1 \leq \|\mathcal{F} \cdot\|\end{aligned}$$

por tanto, de lo anterior se deduce que $\|\mathcal{F} \cdot\| = 1$. ■

Proposición 4.1.3

Si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, entonces $\mathcal{F}f$ es uniformemente continua en \mathbb{R}^n .

Demostración:

Basta probar que si $\{x_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ y $\{y_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ son dos sucesiones en \mathbb{R}^n tales que $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|x_\nu - y_\nu\| = 0$, entonces

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} |\mathcal{F}f(x_\nu) - \mathcal{F}f(y_\nu)| = 0$$

Considere entonces dos sucesiones que cumplan lo anterior. Se tiene

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}f(x_\nu) - \mathcal{F}f(y_\nu)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (e^{-i\langle x_\nu | z \rangle} - e^{-i\langle y_\nu | z \rangle}) f(z) dz \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x_\nu | z \rangle} (1 - e^{-i\langle y_\nu - x_\nu | z \rangle}) f(z) dz \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |1 - e^{-i\langle y_\nu - x_\nu | z \rangle}| |f(z)| dz\end{aligned}$$

donde

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} |1 - e^{-i\langle y_\nu - x_\nu | z \rangle}| |f(z)| = 0, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$$

y, además

$$|1 - e^{-i\langle y_\nu - x_\nu | z \rangle}| |f(z)| \leq 2 |f(z)|, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$$

donde la función de la derecha es integrable e independiente de ν . Por Lebesgue se sigue que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} |\mathcal{F}f(x_\nu) - \mathcal{F}f(y_\nu)| = 0$$

así, $\mathcal{F}f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ es una función uniformemente continua. ■

Observación 4.1.2

$\mathcal{F}f$ es una función uniformemente continua y acotada en \mathbb{R}^n si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

Teorema 4.1.2 (Teorema de Riemman-Lebesgue)

Si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, entonces

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \mathcal{F}f(x) = 0$$

Demostración:

Se probará por casos:

- I. Sea $P = I_1 \times \cdots \times I_n \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectángulo acotado en \mathbb{R}^n donde I_k es un intervalo de extremos $a_k \leq b_k$ para todo $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Se considera el caso en que $f = \chi_P$. En particular, notemos que

$$f(x) = \chi_{I_1}(x_1) \cdots \chi_{I_n}(x_n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|z \rangle} f(z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix_1 z_1} \chi_{I_1}(z_1) \cdots e^{-ix_n z_n} \chi_{I_n}(z_n) dz_1 \cdots dz_n \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_1 z_1} \chi_{I_1}(z_1) dz_1 \right) \cdots \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_n z_n} \chi_{I_n}(z_n) dz_n \right) \end{aligned}$$

luego,

$$\mathcal{F}f(x) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

donde

$$\varphi_k(x_k) = \begin{cases} \frac{e^{-ix_k b_k} - e^{-ix_k a_k}}{-ik}, & \text{si } x_k \neq 0 \\ b_k - a_k, & \text{si } x_k = 0 \end{cases}$$

para $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Es claro que $\lim_{x_k \rightarrow \infty} \varphi_k(x_k) = 0$ para todo $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} |\varphi_k(x_k)| &\leq |\mathcal{F}\chi_{I_k}(x_k)| \\ &\leq \mathcal{N}_1(\chi_{I_k}) \\ &= b_k - a_k \end{aligned}$$

para $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Sea

$$c = \max_{1 \leq k \leq n} \{b_k - a_k\}$$

Dado $\varepsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que para todo $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ se tiene

$$|x_k| > R \Rightarrow |\varphi_k(x_k)| < \varepsilon$$

Si se toma la norma cúbica $\|\cdot\|$ de \mathbb{R}^n , al suponer que $\|x\| > R$ se tendrá que $|x_k| > R$ para algún $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, luego

$$\|x\| > R \Rightarrow |\mathcal{F}\chi_P(x)| = |\varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n)| \leq c^{n-1} \varepsilon$$

Así pues, el Teorema es cierto para $f = \chi_P$. Claramente por linealidad de la transformación de Fourier el Teorema sigue siendo cierto si f es una función escalonada en \mathbb{R}^n .

- II. Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ y tomemos $\varepsilon > 0$. Por la densidad de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, existe $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ tal que

$$\mathcal{N}_1(f - \varphi) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}f(x)| &= |\mathcal{F}f(x) - \mathcal{F}\varphi(x)| + |\mathcal{F}\varphi(x)| \\
&= |\mathcal{F}(f - \varphi)(x)| + |\mathcal{F}\varphi(x)| \\
&\leq \mathcal{N}_1(f - \varphi) + |\mathcal{F}\varphi(x)|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + |\mathcal{F}\varphi(x)|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

Por tanto, de (i) existe $R > 0$ tal que

$$\|x\| > R \Rightarrow |\mathcal{F}\varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

de donde se sigue que

$$\|x\| > R \Rightarrow |\mathcal{F}f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + |\mathcal{F}\varphi(x)| < \varepsilon$$

lo que prueba el resultado. ■

Teorema 4.1.3

Si $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, entonces $\mathcal{F}(f * g) = (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g)$.

Demostración:

Sean $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f * g(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} dy \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(y - z) dz
\end{aligned}$$

ya se sabe que $(y, z) \mapsto f(z)g(y - z)e^{-i\langle x|y\rangle}$ es integrable en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Por Fubini:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z) dz \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} g(y - z) dy, \text{ haciendo el cambio de variable } y = u + z \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(z) dz \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|u+z\rangle} g(u) du \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|z\rangle} f(z) dz \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} g(y) dy \right) \\
&= (\mathcal{F}f(x))(\mathcal{F}g(x))
\end{aligned}$$

lo que prueba el resultado. ■

Teorema 4.1.4

Sea $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ el álgebra de Banach de las funciones de \mathbb{R}^n en \mathbb{C} continuas y nulas en el infinito provisto de la norma uniforme. Entonces la aplicación $\mathcal{F} \cdot : \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ es un homomorfismo continuo entre ambas álgebras de Banach.

La norma de $\mathcal{F} \cdot$ considerada como aplicación lineal es $\|\mathcal{F} \cdot\| = 1$.

Demostración:

Es un resumen de las propiedades anteriores. ■

Observación 4.1.3

Más adelante se verá que $\mathcal{F}\cdot$ es inyectiva pero no es suprayectiva.

Proposición 4.1.4

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{N}$. Se supone que $x \mapsto x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n} f(x)$ es integrable en \mathbb{R}^n para toda colección $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ tales que $m_1 + \cdots + m_n \leq r$. Entonces, $\mathcal{F}f$ es de clase C^r en \mathbb{R}^n . Si $k \in \llbracket 1, k \rrbracket$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ se tiene que

$$\partial_{\alpha_1} \cdots \partial_{\alpha_k} \mathcal{F}f = \mathcal{F}g$$

donde $g(x) = (-ix_{\alpha_1})(-ix_{\alpha_2}) \cdots (-ix_{\alpha_k})f(x)$.

Demostración:

Se tiene

$$\mathcal{F}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)} f(y) dy$$

Al aplicar el operador $\partial_{\alpha_1} \cdots \partial_{\alpha_k}$ a $x \mapsto e^{-i(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)} f(y)$ obtenemos

$$(-iy_{\alpha_1}) \cdots (-iy_{\alpha_k}) f(y)$$

Esta función en valor absoluto es menor o igual a

$$|y_{\alpha_1} \cdots y_{\alpha_k} f(y)|$$

la cual por hipótesis es integrable en \mathbb{R}^n e independiente de x . Por el Teorema de derivación parcial de funciones definidas por integrales, se tiene que

$$\partial_{\alpha_1} \cdots \partial_{\alpha_k} \mathcal{F}f = \mathcal{F}g$$

y, además $\mathcal{F}f$ es de clase C^r en \mathbb{R}^n . ■

Observación 4.1.4

Si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y existe $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, necesariamente

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

Proposición 4.1.5

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ función de clase C^r en \mathbb{R}^n . Se supone que f y todas sus derivadas parciales hasta el orden r (inclusive) son integrables. Si $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, entonces

$$\mathcal{F}(\partial_{\alpha_1} \cdots \partial_{\alpha_k} f)(x) = (ix_{\alpha_1}) \cdots (ix_{\alpha_k}) \mathcal{F}f(x)$$

Demostración:

Basta probar que

$$\mathcal{F}(\partial_j f)(x) = (ix_j) \mathcal{F}f(x)$$

con $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ pues el resto se sigue por inducción. Se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\partial_j f)(x) - (ix_j) \mathcal{F}f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y \rangle} [\partial_j f(y) - ix_j f(y)] dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial y_j} [e^{-i\langle x|y \rangle} f(y)] dy \end{aligned}$$

de donde, por el Teorema de Fubini

$$\mathcal{F}(\partial_j f)(x) - (ix_j)\mathcal{F}f(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy_1 \cdots dy_{j-1} dy_{j+1} \cdots dy_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y_j} [e^{-i\langle x|y \rangle} f(y)] dy_j$$

El Teorema de Fubini asegura que existe un conjunto despreciable $Z_1 \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ tal que para todo $y' = (y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus Z_1$ existe la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y_j} [e^{-i\langle x|y \rangle} f(y)] dy_j$$

o sea que $y_j \mapsto \frac{\partial}{\partial y_j} [e^{-i\langle x|y \rangle} f(y)]$ es integrable en \mathbb{R} . Por el 2° T.F.C. para intervalos abiertos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y_j} [e^{-i\langle x|y \rangle} f(y)] dy_j = \lim_{y_j \rightarrow \infty} e^{-i\langle x|y \rangle} f(y) - \lim_{y_j \rightarrow -\infty} e^{-i\langle x|y \rangle} f(y)$$

puesto que la función $y \mapsto e^{-i\langle x|y \rangle} f(y)$ es integrable en \mathbb{R}^n , por el Teorema de Fubini existe un conjunto $Z_2 \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ tal que para todo $y' = (y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus Z_2$, la función $y_j \mapsto e^{-i\langle x|y \rangle} f(y)$ es integrable en \mathbb{R} . Sea $Z = Z_1 \cup Z_2 \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$. Por la última observación, los límites a la derecha de la ecuación anterior deben ser 0 para todo $y' = (y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus Z$. Por tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y_j} [e^{-i\langle x|y \rangle} f(y)] dy_j = 0$$

para todo $y' = (y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus Z$. Se sigue entonces que

$$\mathcal{F}(\partial_j f)(x) - (ix_j)\mathcal{F}f(x) = 0$$

lo que prueba el resultado. ■

4.2. Teoremas de Transferencia e Inversión

Teorema 4.2.1 (Teorema de Transferencia)

Sean $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \mathcal{F}g = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f \cdot g$$

y,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \mathcal{F}^*g = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^*f \cdot g$$

Demostración:

Como $\mathcal{F}f$ y $\mathcal{F}g$ son continuas acotadas en \mathbb{R}^n y $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, ambas integrales existen (pues en particular $\mathcal{F}f, \mathcal{F}g \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$). Se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x) \cdot g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y \rangle} f(y) dy$$

ya se sabe que $(x, y) \mapsto e^{-i\langle x|y \rangle} g(x)f(y)$ es integrable en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (pues en módulo es igual al módulo del producto tensorial de g y f , siendo éste integrable). Por Fubini podemos invertir el orden de

integración, lo que resulta:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x) \cdot g(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} g(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle y|x\rangle} g(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot \mathcal{F}g(y) dy \\
\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \mathcal{F}g &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f \cdot g
\end{aligned}$$

para la \mathcal{F}^* el procedimiento es análogo. ■

Lema 4.2.1 (Efecto de la transformación de Fourier sobre sucesiones de Dirac)

Sea $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ una sucesión de Dirac en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Defina

$$h_\nu = \mathcal{F}\rho_\nu, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$$

Entonces,

- I. $|h_\nu(x)| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
- II. $\lim_{\nu \rightarrow \infty} h_\nu(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demostración:

De (i): Se tiene

$$\begin{aligned}
|h_\nu(x)| &= |\mathcal{F}\rho_\nu(x)| \\
&\leq \mathcal{N}_1(\rho_\nu) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\nu \\
&= 1
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

De (ii): Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Entonces $\{f * \rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ es una sucesión en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ que converge en promedio a f . Como la transformación de Fourier es un homomorfismo continuo del álgebra de Banach $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ en $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, se debe tener que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{F}(f * \rho_\nu) = \mathcal{F}f \text{ uniformemente en } \mathbb{R}^n$$

pero,

$$\mathcal{F}(f * \rho_\nu) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}\rho_\nu = h_\nu \mathcal{F}f$$

es decir,

$$\begin{aligned}
\lim_{\nu \rightarrow \infty} h_\nu \mathcal{F}f &= \mathcal{F}f \text{ uniformemente en } \mathbb{R}^n \\
\Rightarrow \mathcal{F}f \lim_{\nu \rightarrow \infty} h_\nu &= \mathcal{F}f \text{ uniformemente en } \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

Fijando f de tal suerte que $\mathcal{F}f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se concluye que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} h_\nu(x) = 1$$

(por ejemplo, tome $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$). ■

Observación 4.2.1

Si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, entonces no necesariamente su transformada de Fourier es integrable. Por ejemplo

$$\mathcal{F}\chi_{[-1,1]} = \begin{cases} \frac{2\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es continua, nula en el infinito pero no es integrable en \mathbb{R} .

Teorema 4.2.2 (Teorema de Inversión de Fourier)

Si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ es tal que $\mathcal{F}f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, entonces

$$\mathcal{F}^*(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^*f) = (2\pi)^n f \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n$$

Si además f es continua en \mathbb{R}^n , la fórmula es válida en todo punto de \mathbb{R}^n .

Demostración:

Se probará por casos:

1. Suponga por el momento hallada una sucesión de Dirac $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ que cumpla las condiciones:

I) $\mathcal{F}\rho_\nu \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, luego también $\mathcal{F}^*\rho_\nu \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

II) $\mathcal{F}^*\mathcal{F}\rho_\nu = \mathcal{F}(\mathcal{F}^*\rho_\nu) = (2\pi)^n \rho_\nu$ c.t.p. en \mathbb{R}^n .

Sea $h_\nu = \mathcal{F}\rho_\nu$ para todo $\nu \in \mathbb{N}$. Por (ii), ρ_ν es una función acotada, luego $f * \rho_\nu$ existe en todo punto de \mathbb{R}^n . Se tiene

$$\begin{aligned} f * \rho_\nu(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\nu(y) f(x-y) dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^*h_\nu(y) f(x-y) dy \end{aligned}$$

será necesario aplicar \mathcal{F}^* a la función de y tal que $y \mapsto f(x-y)$. Sea $s(y) = f(-y)$, para todo $y \in \mathbb{R}^n$. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}s(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle u|y\rangle} s(u) du \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle u|y\rangle} f(u) du \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle u|-y\rangle} f(u) du \\ &= \mathcal{F}f(-y) \end{aligned}$$

sea ahora $r(y) = f(x-y) = f(-(y-x)) = s(y-x)$. Por (ii) de las propiedades de la transformación de Fourier:

$$\mathcal{F}r(y) = e^{-i\langle x|y\rangle} \mathcal{F}s(y) = e^{-i\langle x|y\rangle} \mathcal{F}f(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

Así pues,

$$\mathcal{F}^*r(y) = \mathcal{F}r(-y) = e^{-i\langle x|-y\rangle} \mathcal{F}f(y) = e^{i\langle x|y\rangle} \mathcal{F}f(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

Por el Teorema de transferencia (aplicado a \mathcal{F}^*) se sigue que:

$$\begin{aligned} f * \rho_\nu(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^* h_\nu(y) f(x-y) dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^* h_\nu(y) r(y) dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} h_\nu \mathcal{F}^* r(y) dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} h_\nu e^{i\langle x|y \rangle} \mathcal{F} f(y) dy \end{aligned}$$

Todo lo anterior es válido bajo la sola hipótesis de que $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Suponga también que $\mathcal{F}f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Entonces,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} h_\nu(y) e^{i\langle x|y \rangle} \mathcal{F} f(y) = e^{i\langle x|y \rangle} \mathcal{F} f(y)$$

y

$$|h_\nu(y) e^{i\langle x|y \rangle} \mathcal{F} f(y)| \leq \mathcal{F} f(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

donde la función de la derecha es integrable e independiente de $\nu \in \mathbb{N}$. Por Lebesgue se sigue pues que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} h_\nu(y) e^{i\langle x|y \rangle} \mathcal{F} f(y) dy = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x|y \rangle} \mathcal{F} f(y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Lo que realmente estamos diciendo es que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} f * \rho_\nu(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x|y \rangle} \mathcal{F} f(y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

puntualmente en \mathbb{R}^n . Pero $\{f * \rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ converge en promedio a f , entonces debe tenerse que

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x|y \rangle} \mathcal{F} f(y) dy$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.

2. Queda por construir una sucesión de Dirac tal que cumpla (i) y (ii). La función $x \mapsto e^{-\sum_{k=1}^n x_k^2}$ es no negativa y

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{k=1}^n x_k^2} dx_1 \cdots dx_n = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \right)^n = \pi^{n/2}$$

defina

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi^{n/2}} e^{-\sum_{k=1}^n x_k^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Esta función satisface que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho = 1$$

Se sabe que la sucesión $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ dada por:

$$\rho_\nu(x) = \nu^n \rho(\nu x) = \frac{\nu^n}{\pi^{n/2}} e^{-\sum_{k=1}^n \nu^2 x_k^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

es una sucesión de Dirac en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Recuerde que si $a > 0$, la transformada de Fourier de $t \mapsto e^{-at^2}$ es

$$t \mapsto \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{t^2}{4a}}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\rho_\nu(x) &= \frac{\nu^n}{\pi^{n/2}} e^{-\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{4\nu^2}} \\ &= e^{-\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{4\nu^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

En particular, $\mathcal{F}\rho_\nu$ es integrable en \mathbb{R}^n . Además, por la parte (iv) de las propiedades de la transformación de Fourier

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^*(\mathcal{F}\rho_\nu)(x) &= \mathcal{F}(\mathcal{F}^*\rho_\nu)(x) \\ &= \mathcal{F}(\mathcal{F}\rho_\nu)(-x) \\ &= \mathcal{F}(\mathcal{F}\rho_\nu)(x) \\ &= \mathcal{F}\left[e^{-\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{4\nu^2}}\right] \\ &= \left[\frac{\pi}{\frac{1}{4\nu^2}}\right]^{n/2} e^{-\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{4\left(\frac{1}{4\nu^2}\right)}} \\ &= (2\pi)^n \cdot \frac{\nu^n}{\pi^{n/2}} e^{-\sum_{k=1}^n \nu^2 x_k^2} \\ &= (2\pi)^n \rho_\nu(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

lo que demuestra la existencia de tal sucesión de Dirac. ■

Proposición 4.2.1

La transformación de Fourier $\mathcal{F}\cdot$ es un homomorfismo inyectivo del álgebra de Banach $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ en el álgebra de Banach $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

Demostración:

Basta probar que el kernel de $\mathcal{F}\cdot$ se reduce a 0. En efecto, sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ tal que $\mathcal{F}f = 0$ en \mathbb{R}^n , luego $\mathcal{F}f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Así se puede aplicar el Teorema anterior, que resulta en que

$$0 = \mathcal{F}^*0 = \mathcal{F}^*(\mathcal{F}f) = (2\pi)^n f \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n$$

por tanto, $f = 0$ c.t.p. en \mathbb{R}^n . ■

Proposición 4.2.2

Sean $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Se supone que alguna de $\mathcal{F}f$ y/o $\mathcal{F}g$ es integrable en \mathbb{R}^n . Entonces se cumple la **Identidad de Parseval**.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f \overline{\mathcal{F}g} = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} f \overline{g}$$

Demostración:

Suponga que $\mathcal{F}f$ es integrable en \mathbb{R}^n . Siendo $\mathcal{F}g$ medible acotada, el primer lado tiene sentido. Se tiene que

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{F}g(x)} &= \overline{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} g(y) dy} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x|y\rangle} \overline{g(y)} dy \\ &= \mathcal{F}^*\overline{g}(x)\end{aligned}$$

Así pues

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f \overline{\mathcal{F}g} &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f \mathcal{F}^* \bar{g} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^* \mathcal{F}f \cdot \bar{g} \\ &= (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} f \bar{g}\end{aligned}$$

■

4.3. Fórmula de inversión en \mathbb{R}

Observación 4.3.1

Se afirma que

$$\int_0^{\rightarrow\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

y de la paridad de $x \mapsto \frac{\sin ax}{x}$ se concluye que

$$\int_{\rightarrow-\infty}^{\rightarrow\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \pi, \quad \forall a > 0.$$

Demostración:

En efecto, veamos que para $a > 0$:

$$\begin{aligned}\int_0^R \frac{\sin ax}{x} dx &= \int_0^{aR} \frac{\sin y}{\frac{y}{a}} \frac{dy}{a} \\ &= \int_0^{aR} \frac{\sin y}{y} dy\end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado. Si $a < 0$, se tiene que

$$\int_0^R \frac{\sin ax}{x} dx = - \int_0^R \frac{\sin(-a)x}{x} dx \longrightarrow -\frac{\pi}{2}$$

Se concluye que

$$\int_0^{\rightarrow\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } a > 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

■

Teorema 4.3.1 (Teorema de inversión en \mathbb{R})

Sean $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Se supone que f cumple la condición de Dini en cierto punto $x \in \mathbb{R}$, es decir, existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dt < \infty$$

Entonces,

$$\begin{aligned}f(x) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R e^{ixy} \mathcal{F}f(y) dy \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R e^{ixy} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyz} f(z) dz\end{aligned}$$

y más aún:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(y(t-x)) dt$$

Demostración:

Para $R > 0$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R e^{ixy} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyt} f(t) dt &= \int_{-R}^R dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} e^{-iyt} f(t) dt \\ &= \int_{-R}^R dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy(t-x)} f(t) dt \\ &= \int_{-R}^R dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(y(t-x)) dt + i \int_{-R}^R dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(y(t-x)) dt \end{aligned}$$

como $y \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(y(t-x)) dt$ es impar, entonces:

$$\int_{-R}^R dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(y(t-x)) dt = 0$$

y, como $y \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(y(t-x)) dt$ es par,

$$\int_{-R}^R dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(y(t-x)) dt = 2 \int_0^R dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(y(t-x)) dt$$

Si se prueba que

$$f(x) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^R dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(y(t-x)) dt$$

se habrá probado también que

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(y(t-x)) dt$$

(que es más de lo que se pide probar). Sea

$$J(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^R dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(y(t-x)) dt, \quad \forall R > 0$$

Veamos que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} J(R) = f(x)$$

En efecto, sea $R > 0$. Se tiene que la función $(y, t) \mapsto f(t) \cos(y(t-x))$ es medible para la cual se cumple que

$$\begin{aligned} \int_0^R dy \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) \cos(y(t-x))| dt &\leq \int_0^R dy \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt \\ &\leq R \mathcal{N}_1(f) \\ &< \infty \end{aligned}$$

Luego, por Fubini se tiene que

$$\begin{aligned}
J(R) &= \frac{1}{\pi} \int_0^R dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(y(t-x)) dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^R f(t) \cos(y(t-x)) dy \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \int_0^R \cos(y(t-x)) dy \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{\sin(y(t-x))}{t-x} \right]_{y=0}^{y=R} dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \frac{\sin(R(t-x))}{t-x} dt, \quad \text{haciendo el cambio de variable } t = z + x \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z+x) \cdot \frac{\sin(Rz)}{z} dz
\end{aligned}$$

Por otro lado, recuerde de la observación anterior que

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\rightarrow -\infty}^{\rightarrow \infty} f(z) \cdot \frac{\sin(Rz)}{z} dz, \quad \forall R > 0$$

Así pues,

$$J(R) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\rightarrow -\infty}^{\rightarrow \infty} \frac{f(x+z) - f(x)}{z} \cdot \sin(Rz) dz$$

Sea $N > 0$, por lo anterior se tiene para cada $R > 0$:

$$\begin{aligned}
J(R) - f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{\rightarrow -\infty}^{\rightarrow \infty} \frac{f(x+z) - f(x)}{z} \cdot \sin(Rz) dz \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-N}^N \frac{f(x+z) - f(x)}{z} \cdot \sin(Rz) dz + \frac{1}{\pi} \int_{|z|>N} f(x+z) \cdot \frac{\sin(Rz)}{z} dz \\
&\quad - \frac{f(x)}{\pi} \int_N^{\rightarrow \infty} \frac{\sin(Rz)}{z} dz - \frac{f(x)}{\pi} \int_{\rightarrow -\infty}^{-N} \frac{\sin(Rz)}{z} dz
\end{aligned}$$

Analicemos por partes, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{|z|>N} f(x+z) \cdot \frac{\sin(Rz)}{z} dz \right| &\leq \int_{|z|>N} \frac{|f(x+z)|}{|z|} dz \\
&\leq \frac{1}{N} \int_{|z|>N} |f(x+z)| dz \\
&= \frac{\mathcal{N}_1(f)}{N}
\end{aligned}$$

ahora, si $R > 1$ y por el Segundo Teorema del Valor Medio:

$$\begin{aligned}
\left| \int_N^M \frac{\sin(Rz)}{z} dz \right| &\leq \left[\frac{1}{N} + \frac{2}{M} \right] \cdot \sup_{N \leq \zeta \leq M} \left| \int_N^{\zeta} \sin Rz dz \right| \\
&= \left(\frac{1}{N} + \frac{2}{M} \right) \cdot \sup_{N \leq \zeta \leq M} \left| -\frac{\cos(Rz)}{z} \right|_{z=N}^{z=\zeta} \\
&\leq \left(\frac{1}{N} + \frac{2}{M} \right) \cdot \left(\frac{2}{R} \right) \\
&\leq \frac{6}{NR} \\
&\leq \frac{6}{N}
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\left| \int_N^{\rightarrow \infty} \frac{\sin(Rz)}{z} dz \right| \leq \frac{6}{N}$$

y, haciendo el cambio de variable $u = -z$ se sigue que

$$\left| \int_{\rightarrow -\infty}^{-N} \frac{\sin(Rz)}{z} dz \right| \leq \frac{6}{N}$$

Sea ahora $\varepsilon > 0$. Se sigue de las tres desigualdades anteriores que si se fija N lo suficientemente grande, los módulos de las tres últimas integrales de la derecha son menor o iguales a $\frac{\varepsilon}{2}$. Por ende,

$$|J(R) - f(x)| \leq \frac{1}{\pi} \left| \int_{-N}^N \frac{f(x+z) - f(x)}{z} \cdot \sin(Rz) dz \right| + \frac{\varepsilon}{2}$$

Como la función $z \mapsto \frac{f(x+z) - f(x)}{z}$ es integrable en $] -\delta, \delta[$ para algún $0 < \delta < \pi$, necesariamente tiene que serlo en $[-N, N]$ (por la condición de Dini y separando la integral en los intervalos disjuntos $] -N, -\delta[$, $] -\delta, \delta[$ y $] \delta, N[$, tomando en este caso el $N > 0$ tal que $N > \delta$). Luego, por el Teorema de Riemman-Lebesgue existe $R_0 > 1$ tal que

$$\frac{1}{\pi} \left| \int_{-N}^N \frac{f(x+z) - f(x)}{z} \cdot \sin(Rz) dz \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall R \geq R_0$$

Se sigue entonces que para todo $R \geq R_0$:

$$|J(R) - f(x)| < \varepsilon$$

por ende,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} J(R) = f(x)$$

lo que prueba el resultado. ■

Observación 4.3.2

Recuerde que la condición de Dini se cumple, por ejemplo, si f tiene derivada por la derecha y la izquierda en ese punto.

4.4. Homomorfismos Complejos del álgebra de Banach $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$

Observación 4.4.1

\mathbb{R}_+^n denota al grupo abeliano $(\mathbb{R}^n, +)$ y \mathbb{C}^* denota al grupo abeliano $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Proposición 4.4.1

Todo homomorfismo continuo de \mathbb{R}_+^n en \mathbb{C}^* es de la forma

$$t \mapsto e^{at}$$

con $a \in \mathbb{C}$.

Demostración:

Primero, es claro que para todo $a \in \mathbb{C}$, la función $t \mapsto e^{at}$ es homomorfismo continuo de \mathbb{R}_+ en \mathbb{C}^* . Fije un homomorfismo continuo $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}^*$.

1. Se afirma que φ es diferenciable en todo punto de \mathbb{R} . En efecto, considere su integral indefinida

$$x \mapsto \int_0^x \varphi(t) dt$$

esta función es diferenciable con derivada $\varphi(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (pues φ es continua). Ya que $\varphi(x) \neq 0$, la función anterior no puede ser la constante cero. Existe pues $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$c = \int_0^\alpha \varphi(t) dx \neq 0$$

Se tiene para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} c\varphi(x) &= \int_0^\alpha \varphi(x)\varphi(t) dt \\ &= \int_0^\alpha \varphi(x+t) dt \\ &= \int_x^{x+\alpha} \varphi(u) du \end{aligned}$$

pues φ es homomorfismo y haciendo el cambio de variable $t = u - x$. Como la función $x \mapsto \int_x^{x+\alpha} \varphi(t) dx$ es derivable en todo punto de \mathbb{R} (con derivada $\varphi(x+\alpha) - \varphi(x)$) y $c \neq 0$, entonces se sigue que φ es derivable en todo punto de \mathbb{R} .

2. Se afirma ahora que

$$\varphi(t) = \varphi'(0)\varphi(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Esto se sigue de que

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t+0)}{h} &= \frac{\varphi(t)\varphi(h) - \varphi(t)}{h} \\ &= \varphi(t) \cdot \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} \end{aligned}$$

tomando límites cuando $h \rightarrow 0$ se tiene el resultado.

3. Sea $a = \varphi'(0)$. Se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\varphi(t)e^{-at}) &= \varphi'(t)e^{-at} - a\varphi(t)e^{-at} \\ &= a\varphi(t)e^{-at} - a\varphi(t)e^{-at} \\ &= 0, \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

así pues, $t \mapsto \varphi(t)e^{-at}$ es constante en \mathbb{R} de valor $\varphi(0)e^{-a \cdot 0} = \varphi(0) = 1$. Por tanto:

$$\varphi(t) = e^{at}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

■

Teorema 4.4.1

Todos los homomorfismos continuos de \mathbb{R}_+^n en \mathbb{C}^* son las funciones

$$x \mapsto e^{\langle a|x \rangle} \cdot e^{i\langle b|x \rangle}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}^n$.

Demostración:

Primero, es claro que todas las funciones descritas anteriormente son homomorfismos continuos del grupo \mathbb{R}_+^n en \mathbb{C}^* .

Sea $\varphi : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{C}^*$ un homomorfismo continuo. Sea (e_1, \dots, e_n) la base natural de \mathbb{R}^n . Para cada $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ se define

$$\varphi_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

dada como

$$\varphi_k(t) = \varphi(te_k), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Se tiene para todo $s, t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \varphi_k(s+t) &= \varphi(se_k + te_k) \\ &= \varphi(se_k) \cdot \varphi(te_k) \\ &= \varphi_k(s) \cdot \varphi_k(t) \end{aligned}$$

Luego φ_k es homomorfismo. Además, φ_k es continua por ser composición de funciones continuas. Por el resultado anterior existen $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ tales que

$$\varphi_k(t) = e^{a_k t} \cdot e^{ib_k t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Sea $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Se tiene

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi\left(\sum_{k=1}^n x_k e_k\right) \\ &= \prod_{k=1}^n \varphi(x_k e_k) \\ &= \prod_{k=1}^n e^{a_k x_k} \cdot e^{ib_k x_k} \\ &= e^{\sum_{k=1}^n a_k x_k} \cdot e^{i \sum_{k=1}^n b_k x_k} \\ &= e^{\langle a|x \rangle} \cdot e^{i \langle b|x \rangle}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

siendo $a = (a_1, \dots, a_n)$ y $b = (b_1, \dots, b_n)$. ■

Observación 4.4.2

Sea \mathbb{T} el subgrupo de \mathbb{C}^* de todos los números complejos con módulo 1. \mathbb{T} es llamado **el grupo del círculo**.

Todos los homomorfismos continuos de \mathbb{R}_+^n en \mathbb{T} se llaman **caracteres de \mathbb{R}^n** , los cuales son funciones de la forma

$$x \mapsto e^{i \langle b|x \rangle}$$

(pues si $a \neq 0$ entonces $e^{\langle a|x \rangle} > 1$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$). En particular, la transformada de Fourier

$$\mathcal{F}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i \langle x|y \rangle} f(y) dy$$

es el resultado de integrar un caracter por f .

Lema 4.4.1

Si Φ es un homomorfismo de un álgebra de Banach \mathcal{A} en \mathbb{K} , entonces Φ es un funcional lineal continuo sobre \mathcal{A} de norma $\|\Phi\| \leq 1$.

Demostración:

Claramente Φ es funcional lineal sobre \mathcal{A} . Se debe probar que

$$\|\Phi(x)\| \leq \|x\|, \quad \forall x \in \mathcal{A}$$

Suponga por el contrario que existe $x_0 \in \mathcal{A}$ tal que

$$\|x_0\| < \|\Phi(x_0)\|$$

necesariamente debe tenerse que $\Phi(x_0) \neq 0$. Al tomar

$$x = \frac{x_0}{\Phi(x_0)}$$

resulta que

$$\|x\| < 1 \quad \text{y} \quad \Phi(x) = 1$$

Recuerde que en toda álgebra de Banach se cumple que $\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$. Entonces

$$\|x^k\| \leq \|x\|^k$$

Entonces, la serie de términos positivos $\sum_{k=1}^{\infty} \|x\|^k$ es convergente, luego la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \|x^k\|$ también es convergente, es decir que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k$$

es absolutamente convergente en el álgebra de Banach \mathcal{A} . Siendo \mathcal{A} completo, dicha serie es convergente, digamos

$$y = - \sum_{k=1}^{\infty} x^k$$

para algún $y \in \mathcal{A}$. Entonces

$$\begin{aligned} x \cdot y &= x \cdot \left(- \sum_{k=1}^{\infty} x^k \right) \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} x^{k+1} \\ &= y + x \\ &= x + y \end{aligned}$$

Como Φ es homomorfismo:

$$\begin{aligned} \Phi(x) + \Phi(y) &= \Phi(x + y) \\ &= \Phi(xy) \\ &= \Phi(x) \cdot \Phi(y) \end{aligned}$$

lo cual es incompatible con $\Phi(x) = 1$. Por tanto, Φ es continua de norma menor o igual a 1. ■

Teorema 4.4.2 (Homomorfismos no nulos del álgebra de Banach $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ en \mathbb{C})

Para todo $a \in \mathbb{R}^n$, sea $\Phi_a : L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ la función

$$\Phi_a(f) = \mathcal{F}f(a), \quad \forall f \in L_1(\mathbb{R}^n,)$$

Entonces, Φ_a es un homomorfismo no nulo del álgebra de Banach $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ en \mathbb{C} . Además, la aplicación $\Phi : a \mapsto \Phi_a$ es una biyección de \mathbb{R}^n sobre el conjunto de todos los homomorfismos no nulos de $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ en \mathbb{C} .

Demostración:

Se harán varias cosas:

1. Para cada $a \in \mathbb{R}^n$ fijo, se tiene

$$\begin{aligned}\Phi_a(\lambda f) &= \mathcal{F}(\lambda f)(a) \\ &= \lambda \mathcal{F}f(a) \\ &= \lambda \Phi_a(f)\end{aligned}$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. También,

$$\begin{aligned}\Phi_a(f + g) &= \mathcal{F}(f + g)(a) \\ &= \mathcal{F}f(a) + \mathcal{F}g(a) \\ &= \Phi_a(f) + \Phi_a(g)\end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}\Phi_a(f * g) &= \mathcal{F}f * g(a) \\ &= \mathcal{F}f(a) \cdot \mathcal{F}g(a) \\ &= \Phi_a(f) \cdot \Phi_a(g)\end{aligned}$$

para todo $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Por tanto, Φ_a es homomorfismo de $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ en \mathbb{C} .

Es claro que ϕ_a no es el homomorfismo nulo, pues existen funciones $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ tales que

$$\mathcal{F}f(a) \neq 0, \quad \forall a \in \mathbb{R}^n$$

por ejemplo $f(x) = e^{-\sum_{k=1}^n |x_k|}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ es tal que f es integrable y

$$\mathcal{F}f(a) = \frac{2^n}{(1 + a_1^2) \cdot \dots \cdot (1 + a_n^2)} \neq 0, \quad \forall a \in \mathbb{R}^n$$

2. Se afirma que $\Phi : a \mapsto \Phi_a$ es inyectiva de \mathbb{R}^n en el conjunto de todos los homomorfismos no nulos de $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ en \mathbb{C} . Sean pues $a = (a_1, \dots, a_n)$ y $b = (b_1, \dots, b_n)$ en \mathbb{R}^n tales que

$$\Phi_a = \Phi_b$$

es decir que

$$\mathcal{F}f(a) = \mathcal{F}f(b), \quad \forall f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$$

o sea que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle a|x \rangle} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle b|x \rangle} f(x) dx, \quad \forall f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$$

se debe probar que $a = b$. Por el lema anterior, $\Phi_a = \Phi_b$ es un funcional lineal continuo de $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ en \mathbb{C} . Por el Teorema de Dualidad entre L_1 y L_∞ , existe $\beta \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ único salvo equivalencias tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle a|x \rangle} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle b|x \rangle} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \beta(x) f(x) dx$$

para todo $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Por tanto, de la unicidad de β debe suceder que

$$e^{-i\langle a|x\rangle} = e^{-i\langle b|x\rangle} = \beta(x) \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n$$

siendo las dos primeras continuas, debe tenerse que

$$r(x) = e^{-i\langle a|x\rangle} = e^{-i\langle b|x\rangle} = s(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

entonces,

$$\frac{\partial}{\partial x_k} r(0) = -ia_k = -ib_k = \frac{\partial}{\partial x_k} s(0)$$

para todo $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Así, $a = b$.

3. Se afirma que $\Phi : z \mapsto \Phi_a$ es suprayectiva. En efecto, sea ψ un homomorfismo no nulo de $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Se debe probar que existe $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $\psi = \Phi_a$.

Por el lema anterior, ψ es un funcional lineal continuo sobre $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ de norma menor o igual a 1. Por el teorema de dualidad entre L_1 y L_∞ existe una única $\alpha \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ (salvo equivalencias) tal que

$$\mathcal{N}_\infty(\alpha) = \|\psi\| \leq 1$$

tal que

$$\psi(f) = \int_{\mathbb{R}^n} \alpha(x) f(x) dx, \quad \forall f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$$

Se tiene para todo $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$:

$$\psi(f * g) = \psi(f) \cdot \psi(g)$$

por ser homomorfismo. También,

$$\begin{aligned} \psi(f * g) &= \int_{\mathbb{R}^n} \alpha(x) f * g(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \alpha(x) dx \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy \end{aligned}$$

se sabe que la función $(x, y) \mapsto \alpha(x) f(x-y) g(y)$ es medible y como $|\alpha| \leq 1$ c.t.p. en \mathbb{R}^n , entonces

$$|\alpha(x) f(x-y) g(y)| \leq |f(x-y) g(y)|$$

para casi todo $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, donde la función de la derecha también se sabe que es integrable en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Por Fubini se puede invertir el orden de integración, lo que resulta en

$$\begin{aligned} \psi(f * g) &= \int_{\mathbb{R}^n} \alpha(x) dx \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) dy \int_{\mathbb{R}^n} \alpha(x) f(x-y) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \psi(f_{-y}) dy \end{aligned}$$

por la definición de ψ , donde la función $f_{-y}(x) = f(x-y)$. Por otra parte

$$\begin{aligned} \psi(f * g) &= \psi(f) \cdot \psi(g) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(f) \alpha(y) g(y) dy \end{aligned}$$

Note que la función $y \mapsto \psi(f_{-y})$ es continua y acotada en \mathbb{R}^n . Es continua por ser la composición de $y \mapsto f_{-y}$ función continua de \mathbb{R}^n en $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ con ψ que es continua de $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ en \mathbb{C} . Además,

$$\begin{aligned} |\psi(f_{-y})| &\leq \|\psi\| \mathcal{N}_1(f_{-y}) \\ &\leq \mathcal{N}_1(f), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

de donde se deduce que es acotada. También, la función $y \mapsto \psi(f)\alpha(y)$ es medible acotada. De las ecuaciones anteriores se puede definir el operador

$$\Theta(g) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \psi(f_{-y}) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(f) \alpha(y) g(y) dy$$

para todo $g \in \mathbb{R}^n$, es un funcional lineal continuo sobre $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Por la unicidad del teorema de dualidad entre L_1 y L_∞ ,

$$\psi(f_{-y}) = \psi(f) \alpha(y)$$

para casi todo $y \in \mathbb{R}^n$. Fije $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ tal que $\psi(f) \neq 0$ (recuerde que ψ es un homomorfismo no nulo). Modificando α sobre un conjunto despreciable, se tiene

$$\alpha(y) = \frac{\psi(f_{-y})}{\psi(f)}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

Entonces, α es continua y acotada en \mathbb{R}^n . Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ tenemos que

$$\begin{aligned} \psi(f) \alpha(x+y) &= \psi(f_{-x-y}) \\ &= \psi((f_{-x})_{-y}) \\ &= \psi(f_{-x}) \alpha(y) \\ &= \psi(f) \alpha(x) \alpha(y) \\ \Rightarrow \alpha(x+y) &= \alpha(x) \alpha(y) \end{aligned}$$

Si α se anula en algún punto, entonces α es la constante cero, lo cual implicaría que ψ es el funcional cero, lo cual no puede suceder. Luego, α es no nulo. Además por la igualdad anterior debe tenerse que α es un homomorfismo del grupo \mathbb{R}_+^n en el grupo \mathbb{C}^* . Por un resultado anterior existen $a, b \in \mathbb{R}^n$ tales que

$$\alpha(y) = e^{b|y\rangle} \cdot e^{-i\langle a|y\rangle}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

como α es acotado, entonces $b = 0$. Luego

$$\alpha(y) = e^{-i\langle a|y\rangle}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \psi(g) &= \int_{\mathbb{R}^n} \alpha(y) g(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle a|y\rangle} g(y) dy \\ &= \mathcal{F}g(a) \\ &= \Phi_a(g), \quad \forall g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \end{aligned}$$

lo que prueba la suprayectividad. ■

4.5. La transformación de Fourier-Plancherel

Se intenta definir $\mathcal{F}\cdot$ en $L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

Teorema 4.5.1

Sean (E, d) y (E', d') espacios emétricos y S un conjunto denso en E . Si $f : S \rightarrow E'$ es uniformemente continua, entonces existe una única ampliación canónica de f a E que es uniformemente continua.

Demostración:

■

Proposición 4.5.1

Sean $(E, \|\cdot\|)$ y $(F, \|\cdot\|')$ dos espacios normados con F de Banach y sea S un subespacio denso de E . Sea $L : S \rightarrow F$ una aplicación lineal continua (en particular, es uniformemente continua) y sea \tilde{L} la ampliación de L a E . Entonces, \tilde{L} es lineal tal que

$$\|\tilde{L}\| = \|L\|$$

Demostración:

Sean $x, y \in E$ arbitrarios y $\lambda \in \mathbb{K}$. Como S es denso, existen dos sucesiones $\{x_\nu\}$ y $\{y_\nu\}$ en S tales que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} x_\nu = x \quad \text{y} \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} y_\nu = y$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \tilde{L}(\lambda x + y) &= \tilde{L}\left(\lim_{\nu \rightarrow \infty} \lambda x_\nu + y_\nu\right) \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \tilde{L}(\lambda x_\nu + y_\nu) \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} L(\lambda x_\nu + y_\nu) \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} [\lambda L(x_\nu) + L(y_\nu)] \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} [\lambda \tilde{L}(x_\nu) + \tilde{L}(y_\nu)] \\ &= \lambda \tilde{L}(x) + \tilde{L}(y) \end{aligned}$$

Ahora, veamos que

$$\|L(x_\nu)\| \leq \|L\| \|x_\nu\|, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$$

Entonces,

$$\|\tilde{L}(x)\| \leq \|L\| \|x\|, \quad \forall x \in E$$

Por tanto,

$$\|\tilde{L}\| \leq \|L\|$$

Y, por otro lado,

$$\|\tilde{L}\| = \sup_{x \in E, \|x\|=1} \|\tilde{L}(x)\| \geq \sup_{x \in E, \|x\|=1} \|L(x)\| = \|L\|$$

por ende,

$$\|\tilde{L}\| = \|L\|$$

■

Proposición 4.5.2

Si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \cap \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, entonces $\mathcal{F}f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ y

$$\mathcal{N}_2(\mathcal{F}f) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathcal{N}_2(f)$$

o sea

$$\mathcal{N}_2 \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \mathcal{F}f \right) = \mathcal{N}_2(f)$$

Demostración:

Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \cap \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Si $f^*(x) = \overline{f(-x)}$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces $f^* \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \cap \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Defina

$$g = f * f^*$$

ya que $f, f^* \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ y que 2 es un índice autoconjugado, g está definida en todo punto de \mathbb{R}^n , es continua y nula en el infinito, es decir que $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, luego acotada. Adicionalmente, $f, f^* \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ implica que $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Recordando que $\mathcal{F}f^* = \overline{\mathcal{F}f}$, resulta

$$\mathcal{F}g = \mathcal{F}(f * f^*) = \mathcal{F}f \cdot \overline{\mathcal{F}f} = |\mathcal{F}f|^2$$

Se calculará $g(0)$ de dos modos distintos. Se tiene

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) * f^*(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) f(x - y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \overline{f(y - x)} dy \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. En particular,

$$g(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \overline{f(y)} dy = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^2 dy = \mathcal{N}_2(f)^2$$

Por otra parte, considere una sucesión de Dirac $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ tal que para cada $\nu \in \mathbb{N}$ se cumplen las dos condiciones siguientes:

1. $h_\nu = \mathcal{F}\rho_\nu$ es integrable para todo $\nu \in \mathbb{N}$, luego por el teorema de inversión de Fourier,

$$\mathcal{F}^* h_\nu = \mathcal{F}^*(\mathcal{F}h_\nu) = (2\pi)^n \rho_\nu$$

para todo $\nu \in \mathbb{N}$.

2. $h_\nu \geq 0$ para todo $\nu \in \mathbb{N}$.

(se puede tomar la misma sucesión de Dirac del Teorema de Inversión). Observe que $g * \rho_\nu$ existe en todo punto (pues $g \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ y $\rho_\nu \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$). En la demostración del teorema de inversión se probó bajo la sola hipótesis de ser f integrable que

$$f * \rho_\nu(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} h_\nu(y) e^{i\langle x|y \rangle} \mathcal{F}f(y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

en particular, aplicando esto a g resulta

$$g * \rho_\nu(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} h_\nu(y) e^{-i\langle x|y \rangle} \mathcal{F}g(y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

En particular,

$$g * \rho_\nu(0) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} h_\nu(y) \mathcal{F}g(y) dy$$

Ya que $g \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ y es continua en 0, entonces

$$g(0) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} g * \rho_\nu(0) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} h_\nu(y) \mathcal{F}g(y) dy$$

Por el lema antes del teorema de inversión,

$$|h_\nu(y)| \leq 1 \quad \text{y} \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} h_\nu(y) = 1$$

para todo $y \in \mathbb{R}^n$. Así pues,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} h_\nu(y) \mathcal{F}g(y) = \mathcal{F}g(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

Como $\mathcal{F}g$ es no negativa y $h_\nu \geq 0$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} h_\nu(y) \mathcal{F}g(y) dy = \mathcal{N}_1(h_\nu \mathcal{F}g), \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$$

Pero, por una ecuación anterior

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{N}_1(h_\nu \mathcal{F}g) = g(0) < \infty$$

Así pues, por el Lema de Fatou en L_1 , $\mathcal{F}g$ es integrable en \mathbb{R}^n . Además,

$$|h_\nu(y) \mathcal{F}g(y)| \leq \mathcal{F}g(0)$$

donde el lado derecho es una función integrable independiente de ν . Por Lebesgue se sigue que

$$g(0) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} h_\nu(y) \mathcal{F}g(y) dy = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}g(y) dy = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}f|^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{N}_2(\mathcal{F}f)^2$$

de las dos igualdades se sigue el resultado. ■