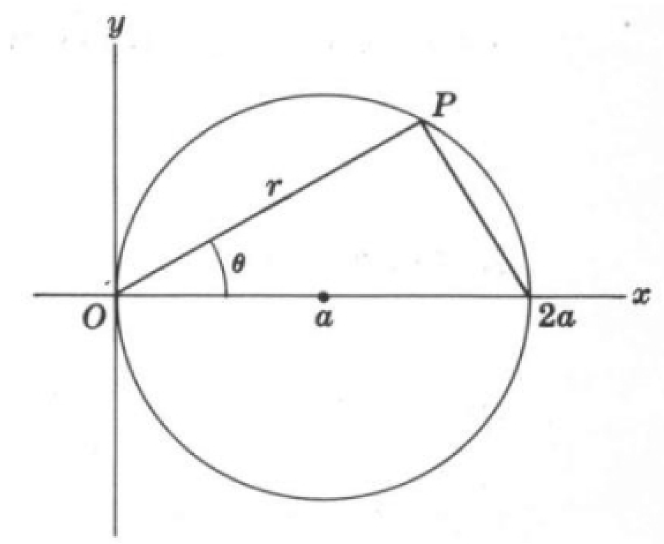
# LISTA 2 CUERPOS.

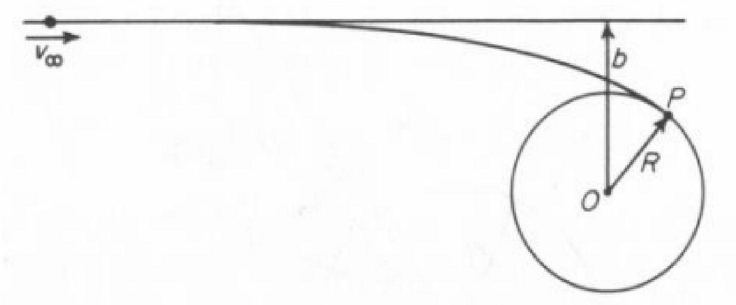
1. Considere que la órbita de la Tierra es circular y que la masa del Sol repentinamente disminuye a la mitad. ¿Cuál será la nueva órbita de la Tierra?

2. Una partícula describe una órbita circular bajo la influencia de una fuerza central atractiva

2. Una partícula describe una órbita circular bajo la influencia de una fuerza central atractiva dirigida hacia un punto sobre el círculo, demuestre que la fuerza varía como el inverso de la potencia quinta de la distancia.



3. Un meteorito se aproxima a la Tierra desde una distancia muy grande con una velocidad $v_\infty$ y con un parámetro de impacto b. ¿Cuál debería ser el valor de b tal que la órbita del meteorito sea tangente a la superficie terrestre? Exprese el resultado en función del radio terrestre R, la gravedad en la superficie de la Tierra g y $v_\infty$. ¿Se puede saber cuál es el tipo de órbita sin calcular la excentricidad?



4. La velocidad máxima y mínima de un satélite son $v_{max}$ y $v_{min}$ respectivamente. Demuestre que la excentricidad e de la órbita en la que se mueve el satélite es

$$e = \frac{v_{max} - v_{min}}{v_{max} + v_{min}}$$

Pruebe que si el satélite tiene un periodo igual a T, entonces éste se mueve en una trayectoria elíptica con semieje mayor

$$a = \frac{T}{2\pi}\sqrt{v_{max}v_{min}}$$

5. Un satélite terrestre se mueve en una órbita elíptica con un periodo T, excentricidad e y semieje mayor a. Demuestre que la velocidad radial máxima es $2\pi ae/T\sqrt{1-e^2}$.

6. Un cuerpo pequeño comienza su caída al Sol de una distancia igual al radio de la órbita de la Tierra. La velocidad inicial del cuerpo en el sistema de referencia heliocéntrico es igual a cero. Calcule valiéndose de las leyes de Kepler el tiempo de la caída.

7. Investigue el movimiento de una partícula repelida por un centro de fuerzas $F(r) = kr$. Demuestre que la órbita sólo puede ser hiperbólica.

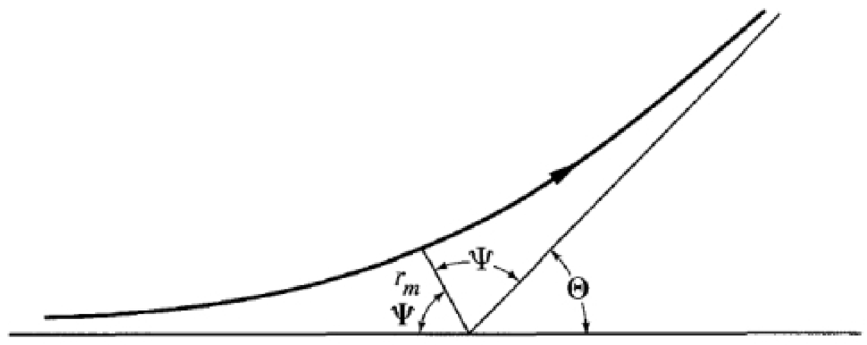
8. Demuestre que la masa de un planeta se puede determinar si se miden el periodo de

8. Demuestre que la masa de un planeta se puede determinar si se miden el periodo de revolución y el semieje mayor de uno de sus satélites. Ganymedes, uno de los satélites del planeta Júpiter, tiene un periodo de 7.155 días y se mueve en una órbita casi circular de radio $1.071 \times 10^9$ m. Calcule una estimación para la masa Júpiter.

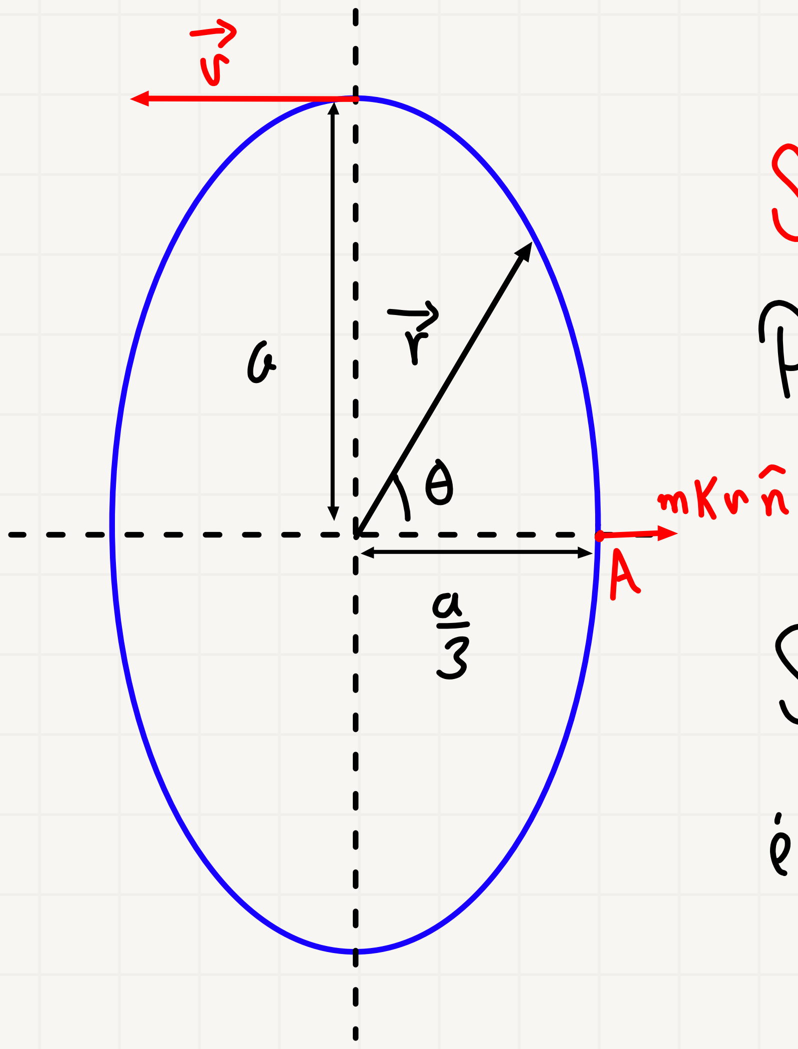
9. Considere una partícula en un campo de fuerzas repulsivo $F = k/r^2$.
   a) Calcule la ecuación de la órbita y la distancia de acercamiento mínima $r_m$
   b) Demuestre que la relación entre $r_m$ y el ángulo de dispersión $\Theta$ es

$$\frac{1}{r_m} = \frac{mk}{l^2}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\,\Theta/2} - 1\right)$$

(Sugerencia: para calcular las constantes de integración considere que $\theta$ se mide con respecto a $r_m$ y que cuando $r \to \infty, \theta \to \Psi$.



10. Una partícula de masa m describe una curva $r = a/(1 + 2\cos^2\theta)$ bajo la acción de una fuerza hacia el origen. Si la velocidad de la partícula en el ápside más lejano es v, hallar la ley de la fuerza. Al pasar por A, uno de los ápsides cercanos, la partícula recibe un impulso mkv a lo largo de la normal externa. Demuestre que si $k < 2\sqrt{3}$, la partícula continúa describiendo una curva cerrada alrededor del origen, pero que si $k > 2\sqrt{3}$, la nueva órbita tiene una asíntota que hace un ángulo θ con OA, dado por $\cos(\alpha + 2\theta) + 2\cos\alpha = 0$, donde $\tan\alpha = k/2$. Resuelva el problema usando el teorema de Newton de las órbitas giratorias.




Sol.

Para la primera parte, recordemos la ec. dif. de la órbita:

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + x = -\frac{m}{l^2x^2}F(1/x)$$

Sabemos que $x = \frac{1}{r} = \frac{1+2\cos^2\theta}{a}$ es sol. de la E.D.O. Después de varios pasos, obtenemos que:

$$F(r) = \underbrace{-8mav^2\cdot\frac{1}{r^2}}_{\text{atractiva}} + \underbrace{3ma^2v^2\cdot\frac{1}{r^3}}_{\text{repulsiva}}$$

Para la 2da parte, la energía será:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) \quad \text{donde}$$

$$V(r) = -\int F(r)dr = \int\left(-\frac{S}{r^2} + \frac{\lambda}{r^3}\right)dr$$

$$= \ldots = -\frac{8mav^2}{r} + \frac{3ma^2v^2}{2r^2}$$

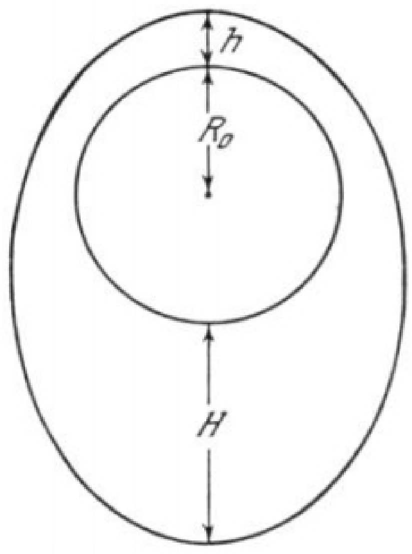
En A, $\dot{r} = Kv$, $r = \frac{a}{3}$ y $l = mav$. Así:

$$E = (K^2 - 12)\cdot\frac{1}{2}mv^2$$

Si $E > 0 \Rightarrow K > 2\sqrt{3}$ (abierta), en otro caso, es cerrada.

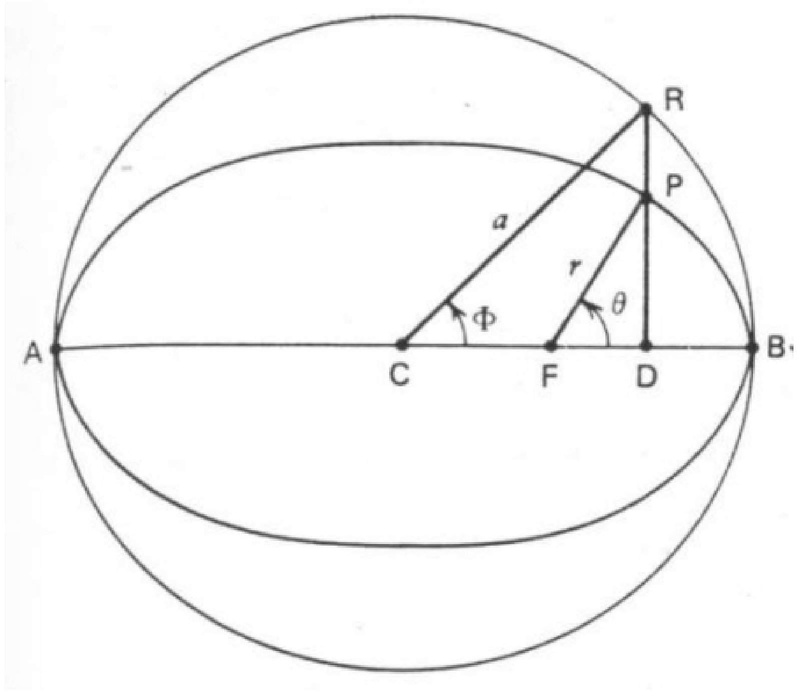
11. Al final del proceso de lanzamiento de un satélite se encuentra sobre el ecuador terrestre a una altura h y viajando a una velocidad v paralela a la superficie de la Tierra. Demuestre que la excentricidad de la órbita está dada por

$$1 + e = \frac{(h + R_0)v^2}{Gm}$$




donde m y $R_0$ son la masa y radio de la Tierra. Encontrar una expresión para la altura máxima H del satélite.

12. Obtenga la tercera ley de Kepler a partir de la ecuación de Kepler, $\omega t = \Phi - e \operatorname{sen} \Phi$. (Sugerencia: considere que $\omega = 2\pi / T$ y exprese la energía E en términos de $\Phi$).




MPQ