# Taller de Topología Algebraica: 1° Lista de Ejercicios

Cristo Alvarado

17 de septiembre de 2024

**Ejercicio 1.1**
Pruebe que un espacio conexo y localmente arco-conexo es arco conexo.

**Demostración:**

■

**Ejercicio 1.2**
¿Bajo qué condiciones dos clases de caminos que unen a $x$ y $y$ se tendrá el mismo isomorfismo entre de $\pi(X,x)$ y $\pi(X,y)$?

**Solución:**

□

**Ejercicio 1.3**
Sea $X$ un espacio arco conexo. ¿Bajo qué condiciones es la siguiente proposición válida? Para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$ todas las clases de caminos de $x$ a $y$ dan el mismo isomorfismo entre $\pi(X,x)$ y $\pi(X,y)$.

**Solución:**

□

**Ejercicio 1.4**
Sean $f, g : I \to X$ dos caminos con punto inicial $x_0$ y final $x_1$. Pruebe que $f \sim g$ si y sólo si $f \cdot \overline{g}$ es equivalente al camino constante en $x_0$ (recordando que $\overline{g}$ es el camino que invierte la forma de recorrer a $g$).

**Demostración:**

■

**Ejercicio 1.5**
Sean $\varphi : X \to Y$ una función continua y $[f]$ una clase de camino en $X$ que va de $x_0$ a $x_1$. Pruebe que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & \pi(X,x_0) & \xrightarrow{\varphi_*} & \pi(Y,\varphi(x_0)) & \\ u & \downarrow & & \downarrow & v \\ & \pi(X,x_1) & \xrightarrow{\varphi_*} & \pi(Y,\varphi(x_1)) & \end{array}$$

donde $u$ es el homomorfismo definido como: $u([g]) = [f]^{-1} \cdot [g] \cdot [f]$ y $v$ se define de forma similar usando $\varphi_*([f])$ en lugar de $[f]$. ¿Qué sucede si $\varphi(x_0) = \varphi(x_1)$?

**Demostración:**

■

**Ejercicio 1.6**
Construya una deformación de retracción de $\mathbb{R}^n$ en $S^{n-1}$.

**Solución:**

□

**Ejercicio 1.7**
Pruebe que un repliegue de un espacio Hausdorff debe ser un conjunto cerrado.

**Demostración:**

■

**Ejercicio 1.8**
Pruebe que si $A$ es un repliegue de $X$ y $r : X \to A$ es una retracción, $i : A \to X$ es el mapeo inclusión, $a \in A$ es arbitrario fijo y $i_*(\pi(A, a))$ es un subgrupo normal de $\pi(X, a)$, entonces $\pi(X, a)$ es el producto directo de los subgrupos

$$i_*(\pi(A, a)) \quad \text{y} \quad \ker(r_*)$$

**Demostración:**

■

**Ejercicio 1.9**
Sea $A$ un subespacio de $X$, y sea $Y$ un espacio topológico no vacío. Pruebe que $A \times Y$ es un repliegue de $X \times Y$ si y sólo si $A$e s una repliegue de $X$.

**Demostración:**

■

**Ejercicio 1.10**
Pruebe que la relación **ser repliegue de** es transitiva, esto es, si $A$ es un repliegue de $B$ y $B$ es un repliegue de $C$, entonces $A$ es un repliegue de $C$.

**Demostración:**

■

**Ejercicio 1.11**
Sea $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Encuentre un círculo $C \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que es un repliegue de deformación de $\mathbb{R}^2 - \{x_0\}$.

Generalice este resultado a $n$-dimensiones.

**Demostración:**

$\blacksquare$

**Ejercicio 1.12**
Sea $\mathbb{T}$ un toro y considere $X = \mathbb{T} - \{x\}$, con $x \in \mathbb{T}$. Encuentre un subconjunto de $X$ que sea homeomorfo a la figura *8* (esto es, la unión de dos círculos con un punto en común) y que es una retracción de deformación de $X$.

**Demostración:**

$\blacksquare$

**Ejercicio 1.13**
Sean $x, y \in X$ dos puntos distintos en un espacio simplemente conexo $X$. Pruebe que existe una *única* clase de caminos en $X$ que une al punto inicial $x$ con el punto final $y$.

**Demostración:**

$\blacksquare$

**Ejercicio 1.14**
Sea $X$ un espacio topológico y, para número natural $n \in \mathbb{N}$ sea $X_n$ un subespacio arco-conexo que contiene como punto base $x_0 \in X$. Asuma que los subespacios están enacajados, esto es

$$X_n \subseteq X_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y que

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

además, para cada subconjunto compacto $A \subseteq X$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $A \subseteq X_m$. Sean

$$i_n : \pi(X_n, x_0) \to \pi(X, x_0) \quad \text{y} \quad j_{mn} : \pi(X_m, x_0) \to \pi(X_n, x_0)$$

los homomorfismos inducidos por las funciones inclusión, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N}$ tal que $m < n$. Pruebe lo siguiente:

1. Para cada $[f] \in \pi(X, x_0)$ existe un natural $n \in \mathbb{N}$ y un elemento $[g] \in \pi(X_n, x_0)$ tal que $i_n([g]) = [f]$.
2. Si $[f] \in \pi(X_m, x_0)$ e $i_m([f]) = 1$, entonces existe un entero $n \geq m$ tal que $j_{mn}([f]) = 1$.
3. Si los homomorfismos $j_{n,n+1}$ son monomorfismos para todo $n \in \mathbb{N}$, pruebe que cada $i_n$ es un monomorfismo y que $\pi(X, x_0)$ es la unión de los subgrupos $i_n(\pi(X_n, x_0))$.

**Demostración:**

$\blacksquare$

Algunos de los siguientes ejercicios harán uso del hecho de que el grupo fundamental del círculo es isomorfo a $\mathbb{Z}$, por lo que tenga en mente este resultado a la hora de probar los ejercicios.

**Ejercicio 1.15**
Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta del espacio $X$ con las siguientes propiedades:

a. Existe un punto $x_0 \in X$ tal que $x_0 \in U_i$ para todo $i \in I$.

b. Cada $U_i$ es simplemente conexo.

c. Si $i \neq j$ con $i, j \in I$, entonces $U_i \cap U_j$ es arco-conexo.

pruebe que $X$ es simplemente conexo.

*Sugerencia*: Para probar que cualquier bucle $f : I \to X$ con punto base $x_0$ es trivial, considere la cubierta abierta $\left\{f^{-1}(U_i)\right\}_{i\in I}$ del espacio métrico compacto $I$ y haga uso del número de Lebesgue de esta cubierta.

**Demostración:**

■

**Observación 1.1**
En el ejercicio anterior existen dos casos importantes:

1. $X$ es cubierto por dos conjuntos abiertos.

2. Los conjuntos $U_i$ están linealmente ordenados por la inclusión.

**Ejercicio 1.16**
Reescriba el ejercicio anterior con las hipótesis de la observación anterior y explique qué está sucediendo.

**Demostración:**

■

**Ejercicio 1.17**
Use el resultado del ejercicio anterior (la parte 1)) para probar que $\mathbb{S}^2$ es simplemente conexo. Generalice este resultado para probar que $\mathbb{S}^n$ es simplemente conexo.

**Demostración:**

■

**Ejercicio 1.18**
Pruebe que $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^n$ no son homeomorfos.

*Sugerencia*. Considere el complemento de un punto en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^n$.

**Demostración:**

■

Más adelante se incluirán más ejercicios.