Notas del curso Topología I

Cristo Daniel Alvarado

1 de marzo de 2024

Índice general

Capítulo 0

Introduccion

0.1. Temario

Checar el Munkres

0.2. Bibliografía

1. J. R. Munkres 'Topología' - Prentices Hall.
2. M. Gemignsni 'Elementary Topology' - Dover.
3. J. Dugundji 'Topology' - Allyn Bacon.

Capítulo 1

Conceptos Fundamentales

1.1. Fundamentos

Definición 1.1.1
Sea X un conjunto y $\mathcal{A}$ una familia no vacía de subconjuntos de X. Definamos los **complementos de $\mathcal{A}$**

$$\mathcal{A}' := \left\{X - A \middle| A \in \mathcal{A}\right\}$$

(básicamente es el conjunto de todos los complementos de los conjuntos en $\mathcal{A}$). Para no perder ambiguedad, no denotaremos al complemento de un conjunto por B^c, sino por $X - B$ (para denotar quien es el conjunto sobre el que se toma el complemento del conjunto).

La **unión de los elementos** de $\mathcal{A}$ se define como el conjunto:

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \left\{x \in X \middle| x \in A \text{ para algún elemento } A \in \mathcal{A}\right\}$$

denotada por el símbolo de la izquierda.

La **intersección de los elementos** de $\mathcal{A}$ se define como el conjunto:

$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \left\{x \in X \middle| x \in A \text{ para todo elemento } A \in \mathcal{A}\right\}$$

Observación 1.1.1
En caso de que la colección $\mathcal{A}$ sea vacía, no se puede hacer lo que marca la definición anterior. Como $\mathcal{A}$ es vacía, entonces $\mathcal{A}'$ también es vacía.

1. Suponga que $\cup\mathcal{A} \neq \emptyset$, entonces existe $x \in X$ tal que $x \in \cup\mathcal{A}$, luego existe algún elemento $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A$, pero esto no puede suceder, pues la familia $\mathcal{A}$ es vacía. $\#_c$. Por tanto, $\cup\mathcal{A} = \emptyset$.

2. Ahora, si aplicamos las leyes de Morgan, y tomamos

   $$X - \cap\mathcal{A} = X - \cap\emptyset = \cup\emptyset' = \cup\emptyset = \emptyset$$

   luego, $\cap\mathcal{A} = X$.

En definitiva, si $\mathcal{A}$ es una colección vacía, entonces definimos $\cup\mathcal{A} = \emptyset$ y $\cap\mathcal{A} = X$.

La observación junto con la definición anterior se usarán a lo largo de todo el curos y serán de utilidad.

Definición 1.1.2
Sea X un conjunto y sea τ una familia de subconjuntos de X. Se dice que τ es una **una topología definida sobre** X si se cumple lo siguiente:

1. $\emptyset, X \in \tau$.
2. Si $\mathcal{A}$ es una subcolección de τ, entonces $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$.
3. Si $A, B \in \tau$, entonces $A \cap B \in \tau$.

Observación 1.1.2
En algunos libros viejos viene la siguiente condición adicional a la definición:

4. Si $p, q \in X$ con $p \neq q$, entonces existen $U, V \in \tau$ tales que $p \in U$, $q \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

en este caso se dirá que el espacio es **Hausdorff**.

Observación 1.1.3
Se tienen las siguientes observaciones:

1. Sea X un conjunto y $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de X. Si
$$\mathcal{A} = \left\{A_\alpha \middle| \alpha \in I\right\}$$
entonces podemos escribir
$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$
e igual con la intersección:
$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$$
Si $\mathcal{A}$ es una familia vacía, y se toma como definición lo dicho en la observación 1.0.1, entonces podemos omitir el primer inciso de la definición anterior.
2. Si τ es una topología sobre X y para $n \in \mathbb{N}$, $A_1, ..., A_n \in \tau$, entonces $A_1 \cap ... \cap A_n \in \tau$.

Ejemplo 1.1.1
Sea X un conjunto no vacío.

1. El conjunto potencia (denotado por $\mathcal{P}$) de X es una topología sobre X, la cual se llama la **topología discreta**, y se denota por τ_D.
2. La colección formada únicamente por X y $\emptyset$ es una topolgía sobre X, es decir $\tau = \{\emptyset, X\}$ es llamada la **topología indiscreta**, y se escribe como τ_I.
3. En el caso de que $X = \{1\}$, se tendría que $\tau_D = \{\emptyset, \{1\}\}$ y $\tau_I = \{\emptyset, \{1\}\}$.
Si $X = \{1, \zeta\}$, entonces $\tau_D = \{\emptyset, \{1\}, \{\zeta\}, \{1, \zeta\}\}$ y $\tau_I = \{\emptyset, \{1, \zeta\}\}$.
4. Si τ es una topología sobre X, entonces
$$\tau_I \subseteq \tau \subseteq \tau_D$$
5. Sea $a \in X$. Entonces $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \}$ es una topología sobre X.

6. Sea $A \subseteq X$ y sea $\tau(A) = \{B \subseteq X \big| A \subseteq B\} \bigcup \{\emptyset\}$. Esta familia $\tau(A)$ es una topología sobre X.

Solución:
Para el inciso 6., veamos que $\tau(A)$ es una topología sobre X. En efecto, verificaremos que se cumplen las 3 condiciones:

1. Claro que $\emptyset \in \tau(A)$ por definición de $\tau(A)$. Además $X \in \tau(A)$ ya que $X \subseteq X$ y $A \subseteq X$.
2. Sea $\mathcal{B}$ una familia no vacía de subconjuntos de $\tau(A)$, entonces existe $B_0 \in \mathcal{B}$ tal que $A \subseteq B_0$, por lo cual
$$A \subseteq B_0 \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subseteq X$$
por tanto $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \in \tau(A)$.
3. Sean $C, D \in \tau(A)$, entonces $A \subseteq C$ y $A \subseteq B$, por ende $A \subseteq B \cap C \subseteq X$. Así, $B \cap C \in \tau(A)$.

Por los incisos anteriores, la familia descrita en el inciso 6. es una topología sobre X. $\square$

Observación 1.1.4
Sea X un conjunto no vacío. Si $A = \{a\} \subseteq X$, entonces escribimos τ_a en vez de $\tau(A)$.

Ejemplo 1.1.1
Se continuan con los ejemplos anteriores:

7. Sea $\tau_{cf} = \{A \subseteq X \big| X - A \text{ es un conjunto finito}\} \bigcup \{\emptyset\}$. Esta es una topología sobre X y se llama la **topología de los complementos finitos**.
8. Si X es un conjunto finito, entonces $\tau_{cf} = \tau_D = \mathcal{P}$.
9. Considere (en un conjunto finito X) a τ_{cf} y sean $a, b \in X$ con $a \neq b$. Si $U_a = X - \{b\}$, $U_b = X - \{a\}$, entonces $U_a, U_b \in \tau_{cf}$ y además, $a \in U_a$ pero $b \notin U_a$ y $a \notin U_b$ pero $b \in U_b$. Esta propiedad es muy importante tenerla en mente pues más adelante se usará.

Solución:
Veamos que la famila del ejemplo 7. es una topología sobre X. En efecto, veamos que se cumplen las 3 condiciones:

1. Claro que $\emptyset \in \tau_{cf}$ (por definición de τ_{cf}). Y además $X \in \tau_{cf}$ ya que $\emptyset = X - X$ es un conjunto finito y $X \subseteq X$.
2. Sea $\mathcal{A}$ una familia no vacía de subconjuntos de τ_{cf}. Se cumple entonces que existe $A_0 \in \mathcal{A}$ tal que $X - A_0$ es finito. Por lo cual como
$$X - \bigcup \mathcal{A} \subseteq X - A$$
ya que $A \subseteq \bigcup \mathcal{A}$, se tiene que $X - \bigcup \mathcal{A}$ es finito y $\bigcup \mathcal{A} \subseteq X$. Por tanto, $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{A}$.
3. Sean $A, B \in \tau_{cf}$. Probaremos que $A \cap B \in \tau_{cf}$. Afirmamos que $X - A \cap B$ es finito, en efecto, por leyes de Morgan se tiene que
$$X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B) \subseteq X$$
donde $X - A$ y $X - B$ son finitos, por lo cual su unión también lo es. Por tanto $A \cap B \in \tau_{cf}$.

Por los tres incisos anteriores, se sigue que τ_{cf} es una topología sobre X. $\square$

A continuación se verá una proposición la cual tiene como objetivo el inducir una topología sobre un espacio métrico (X, d) arbitrario.

Proposición 1.1.1
Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $a \in X$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, al conjunto $B_d(x, \varepsilon) = \{y \in X \big| d(x, y) < \varepsilon\}$ se llama **ε-bola con centro en x y radio ε**.

Sea

$$\tau_d = \{A \subseteq X \big| \forall a \in A \exists r > 0 \text{ tal que } B_d(a, r) \subseteq A\}$$

Esta colección es una topología sobre X.

Demostración:
Se verificará que se cumplen las tres condiciones.

1. Por vacuidad, $\emptyset \in \tau_d$. Además, $X \in \tau_d$, pues para todo $x \in X$, $B_d(x, 1) \subseteq X$.
2. Sean $\mathcal{A}$ una familia no vacía de subconjuntos de τ_d. Sea $p \in \cup\mathcal{A}$, es decir que existe $A_\beta \in \mathcal{A}$ tal que $p \in A_\beta$, así existe $r > 0$ tal que $B_d(a, r) \subseteq A_\beta \subseteq \cup\mathcal{A}$, luego $\cup\mathcal{A} \in \tau_d$.
3. Sean $M, N \in \tau_d$, y sea $p \in M \cap N$, es decir que $p \in M$ y $p \in N$, por lo cual existen $r_1, r_2 > 0$ tales que $B_d(p, r_1) \subseteq M$ y $B_d(p, r_2) \subseteq N$. Sea $r = \min\{r_1, r_2\}$, es inmediato que $B_d(p, r) \subseteq B_d(p, r_i)$, para $i = 1, 2$. Por tanto, $B_d(p, r) \subseteq M \cap N$. Luego, como el p fue arbitrario,se sigue que $M \cap N \in \tau_d$.

$\blacksquare$

Definición 1.1.3
La topología de la proposición anterior es llamada la **topología generada por la métrica** d.

Ejercicio 1.1.1
Sea (X, d) espacio métrico. Veamos que, dados $x \in X$ y $r > 0$, se cumple que $B_d(x, r) \in \tau_d$.

Solución:
Sea $y \in B_d(x, r)$, entonces $d(x, y) < r$. Sea $\varepsilon = d(x, y)$ y, supongamos que $x \neq y$ (pues en caso contrario, el caso es inmediato ya que $B_d(x, r) \subseteq B_d(x, r)$) luego $\varepsilon > 0$ y además $\varepsilon < r$. Sea $s = r - \varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

Afirmamos que $B_d(y, s) \subseteq B_d(x, r)$. En efecto, sea $z \in B_d(y, s)$, entonces

$$\begin{aligned}
d(z, y) &< s \\
\Rightarrow d(z, y) &< r - \varepsilon \\
\Rightarrow d(z, y) + \varepsilon &< r \\
\Rightarrow d(z, y) + d(y, x) &< r \\
\Rightarrow d(z, x) &< r
\end{aligned}$$

por tanto, $x \in B_d(x, r)$. Luego, $B_d(x, r) \in \tau_d$. $\square$

Lema 1.1.1
Todo espacio métrico (X, d) es Hausdorff.

Demostración:

Veamos que dados $x, y \in X$, $x \neq y$ existen $r, s \in \mathbb{R}^+$ tales que $B_d(x,r) \cap B_d(y,s) = \emptyset$. Como $x \neq y$ entonces $d(x,y) = m \in \mathbb{R}^+$. Tomemos $r = \frac{m}{\pi}$ y $s = \frac{\pi-1}{\pi}m$ y veamos que la intersección es vacía.

En efecto, en caso de que no lo fuese se tendría que si existiera $p \in B_d(x,r) \cap B_d(y,s)$, entonces $d(p,x) < \frac{m}{\pi}$ y $d(p,y) < \frac{\pi-1}{\pi}m$, por lo cual de la desigualdad triangular se sigue que:

$$d(x,y) \leq d(p,x) + d(p,y) < \frac{1+\pi-1}{\pi}m = m = d(x,y)$$

lo cual es una contradicción$\#_c$. Por tanto, la intersección es vacía. ■

Retomando al espacio métrico (X,d), tenemos que para $A \subseteq X$, $A \in \tau_d$ si y sólo si existen $\{a_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq A$ y $\{\varepsilon_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathbb{R}^+$ tales que

$$\bigcup_{\alpha \in I} B_d(a_\alpha, \varepsilon_\alpha) = A$$

donde $\forall \alpha \in I$ se tiene que $A_\alpha \in \mathcal{A}$.

Corolario 1.1.1
Sea (X,d) un espacio métrico y

$$\mathcal{B}_d = \left\{B_d(x,\varepsilon) | x \in X, \varepsilon \in \mathbb{R}^+\right\}$$

entonces, para $A \subseteq X$ se tiene que $A \in \tau_d$ si y sólo si existe una colección $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathcal{B}_d$ tal que $A = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$. La colección $\mathcal{B}_d \subseteq \tau_d$.

Ejemplo 1.1.2
Sea $m \in \mathbb{N}$ y considere el espacio métrico $\mathbb{R}^m$ con la métrica d_u, siendo:

$$d_u(x,y) = \left[(x_1-y_1)^2 + \ldots + (x_m-y_m)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

para $x = (x_1, \ldots, x_m), y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$. Esta métrica será denominada **métrica usual**. Vamos a escribir a la topología generada por esta métrica como τ_u, y se dice la **topología usual definida sobre** $\mathbb{R}^m$. En particular, cuando $m = 1$ tenemos que τ_u la topología usual definida sobre $\mathbb{R}$. En este caso, se tiene que $A \in \tau_u$ si y sólo si existen $\{a_\alpha\}_{\alpha \in I}$ y $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$ subfamilias de $\mathbb{R}$ tal que $A = \bigcup_{\alpha \in I} (a_\alpha, b_\alpha)$.

Observación 1.1.5
Tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, los conjuntos $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \in \tau_u$, y $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\} \notin \tau_u$. Es decir, que la topología solo es cerrada (en general) bajo intersecciones finitas.

Definición 1.1.4
Sea X un conjunto, y sean τ_1 y τ_2 topologías sobre X. Decimos que τ_2 es **más fina** que la topología τ_1 si se tiene que $\tau_1 \subseteq \tau_2$ (a veces también se dice que τ_1 es **menos fina** que τ_2).

Ejemplo 1.1.3
Sea $X = \{1,2,3\}$, $\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}\}$, $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2\}\}$. Tomemos

$$\tau_1 \cup \tau_2 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{2\}\}$$

la familia $\tau_1 \cup \tau_2$ no es una topología sobre X, pues no es cerrada bajo uniones arbitrarias. Con esto se tiene que la unión de dos topologías no necesariamente es una topología.

Teorema 1.1.1
Sea X un conjunto, y sea $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de topologías sobre X, entonces $\tau = \bigcap_{\alpha\in I} \tau_\alpha$ es una topología sobre X.

Demostración:
Veamos que se cumplen las tres condiciones.

1. Claro que $X, \emptyset \in \tau$, pues $X, \emptyset \in \tau_\alpha$, para todo $\alpha \in I$.
2. Sea $\mathcal{A} = \{A_\beta\}_{\beta\in J} \subseteq \tau = \bigcap_{\alpha\in I} \tau_\alpha$ una subcolección arbitraria de elementos de τ. Por ser τ_α una topología, se sigue que $\bigcup \mathcal{A} \in \tau_\alpha$, para todo $\alpha \in I$. Por tanto, $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$.
3. Sean $K, L \in \tau$, entonces $K, L \in \tau_\alpha$, para todo $\alpha \in I$, luego como τ_α es una topología sobre X, se tiene que $L \cap K \in \tau_\alpha$, para todo $\alpha \in I$, por tanto $L \cap K \in \tau$.

Por los tres incisos anteriores, se sigue que τ es una topología sobre X. ■

Corolario 1.1.2
Sea X un conjunto y sean $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de X. Definimos

$$\mathcal{K} = \{\tau | \tau \text{ es una topología sobre } X \text{ y } \mathcal{A} \subseteq \tau\}$$

Entonces:

1. $\tau_D \in \mathcal{K}$.
2. Definiendo $\tau(\mathcal{A}) = \bigcap_{\tau\in\mathcal{K}} \tau$, se tiene que $\tau(\mathcal{A})$ es una topología sobre X.
3. Para toda topología $\tau \in \mathcal{K}$, $\tau(\mathcal{A}) \subseteq \tau$.
4. $\tau(\mathcal{A}) \in \mathcal{K}$.

Demostración:
De 1. Es inmediato, pues como $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P} = \tau_D$ y τ_D es una topología sobre X, se sigue que $\tau_D \in \mathcal{K}$.

De 2. Es inmediato del teorema anterior.

De 3. Como $\tau(\mathcal{A}) = \bigcap_{\tau\in\mathcal{K}} \tau$, entonces $\tau(\mathcal{A}) \subseteq \tau$, para toda $\tau \in \mathcal{K}$.

De 4. Por 2. $\tau(\mathcal{A})$ es una topología sobre X, y además $\mathcal{A} \subseteq \tau(\mathcal{A})$, pues $\mathcal{A} \subseteq \tau$, para todo $\tau \in \mathcal{K}$, luego $\mathcal{A} \subseteq \bigcap_{\tau\in\mathcal{K}} \tau = \tau(\mathcal{A})$. Por ende, $\tau(\mathcal{A}) \in \mathcal{K}$. ■

Definición 1.1.5
Un **espacio topológico** es una pareja (X, τ) en donde X es un conjunto y τ es una topología sobre X. A los elementos de τ los llamaremos los **conjuntos abiertos** del espacio (X, τ) a veces también se les nombra como los **τ-abiertos de** X.

Ejemplo 1.1.4
Ejemplos de espacios topológicos son $(\mathbb{R}, \tau_D)$, $(\mathbb{R}, \tau_I)$, $(\mathbb{R}, \tau_{cf})$, $(\mathbb{R}, \tau_u)$, etc... Las diferencias notables son que $\left\{1, \sqrt{2}\right\}$ es abierto en $(\mathbb{R}, \tau_D)$, pero no en $(\mathbb{R}, \tau_u)$.

Sea X un conjunto y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$. Por el corolario anterior, podemos trabajar con la topología $\tau(\mathcal{A})$, y tenemos así al espacio topológico $(X, \tau(\mathcal{A}))$, el cual en particular tiene como abiertos a los elementos de la familia $\mathcal{A}$.

Definición 1.1.6
Sea (X, τ) un espacio topológico.

1. Un subconjunto $C \subseteq X$ es un **conjunto cerrado** del espacio topológico (X, τ) si $X - C \in \tau$.

Ejemplo 1.1.5
En $(\mathbb{R}, \tau_u)$ se tiene que $\mathbb{R}$ y $\emptyset$ son abiertos y cerrados a la vez, pero el conjunto $[1, 2[$ no es abierto ni cerrado, $]1, 2[$ es abierto pero no cerrado y $[1, 2]$ no es abierto pero sí es cerrado.

Proposición 1.1.2
Sea (X, τ) un espacio topológico.

1. Si $A_1, ..., A_n$ son subconjuntos cerrados de (X, τ), entonces su unión $A_1 \cup ... \cup A_n$ es un cerrado de (X, τ).
2. Si $\mathcal{A}$ es una familia arbitraria de conjuntos cerrados en (X, τ), entonces $\bigcap \mathcal{A}$ es un conjunto cerrado.

Demostración:
De (1): Consideremos el complemento de la unión. Se tiene que:

$$X - \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} (X - A_i)$$

el cuál es abierto por ser intersección finita de abiertos. Luego $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ es cerrado.

De (2): Basta con aplicar leyes de Morgan. ■

Ejemplo 1.1.6
Considere $(\mathbb{R}, \tau_u)$ y, para $n \in \mathbb{N}$ definimos $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, es claro que cada uno de estos conjuntos es abierto. Sea $B_n = \mathbb{R} - A_n = (-\infty, -\frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{n}, \infty)$.

Se tiene que:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R} - A_n = \mathbb{R} - \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{R} - \{0\}$$

el cual es abierto. Por tanto, la unión arbitraria de cerrados no es cerrada (en general).

Definición 1.1.7
Sea (X, τ) un espacio topológico y, sean $x \in X$ y $V \subseteq X$ tal que $x \in V$. Se dice que V es una **vecindad de** x si existe $U \in \tau$ abierto tal que $x \in U$ y $U \subseteq V$.

1. Si V es una vecindad de x y $V \in \tau$, decimos que V es una **vecindad abierta de** x.
2. Si V es una vecindad de x y $X - V \in \tau$, decimos que V es una **vecindad cerrada de** x.

Al conjunto de todas las vecindades del punto x lo denotamos por $\mathcal{V}(x)$. Tenemos que $X \in \mathcal{V}(x)$ para todo $x \in X$.

Definición 1.1.8
Se define el conjunto $[|1,n|]$ llamado **intervalo natural de** 1 **a** n como el conjunto $\{1,2,...,n\}$.

Ejercicio 1.1.2
Sea (X,τ) un espacio topológico.

1. Si $V_1,...,V_n\in\mathcal{V}(x)$ para $x\in X$, entonces $V_1\cap...\cap V_n\in\mathcal{V}(x)$.
2. Si $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}\subseteq\mathcal{V}(x)$ para $x\in X$, entonces $\bigcup_{\alpha\in I}V_\alpha\in\mathcal{V}(x)$.

Solución:
Probaremos ambos incisos:

De (1): Como $x\in V_i$ para $i\in[|1,n|]$, entonces existen $U_1,...,U_n$ abiertos en X tales que $x\in U_i\subseteq V_i$ para todo $i\in[|1,n|]$, luego $x\in\bigcap_{i=1}^n U_i\subseteq V_1\cap...\cap V_n$ donde el primer conjunto es abierto, luego $V_1\cap...\cap V_n\in\mathcal{V}(x)$.

De (2): Es inmediato. $\square$

Definición 1.1.9
Sea (X,τ) un espacio topológico y $A\subseteq X$.

1. Sea $x\in X$. x es un **punto de acumulación de** A si para todo U abierto que contiene a x se tiene que $(U-\{x\})\cap A\neq\emptyset$ (U contiene un punto de A diferente de x). Al conjunto de todos los puntos de acumulación lo llamaremos el **conjunto derivado de** A, y se denota por A'.
2. Un elemento $a\in A$ es un **punto interior** de A, si A es una vecindad de x (es decir, $A\in\mathcal{V}(x)$). **El interior de** A es el conjunto de todos los puntos interiores de A y se escribe $\mathring{A}$. Es claro que $\mathring{A}\subseteq A$.
3. Sea
$$\mathcal{C}=\left\{C\subseteq X\middle|X-C\in\tau,A\subseteq C\right\}$$
es claro que $\mathcal{C}$ es no vacía, pues $X\in\mathcal{C}$. La **cerradura de** A es el conjunto $\bigcap_{C\in\mathcal{C}}C$ y se denota por $\overline{A}$. Si $x\in\overline{A}$, diremos que x **es un punto adherente de** A. Es claro que $A\subseteq\overline{A}$.
4. La **frontera de** A es el conjunto $\overline{A}\cap\overline{X-A}$ y se denota por $\mathrm{Fr}(A)$.

Proposición 1.1.3
Sea (X,τ) un espacio topológico, $x\in X$ y sean $A,B\subseteq X$. Entonces:

1. $\mathring{A}\subseteq A\subseteq\overline{A}$.
2. $\mathring{A}=\bigcup\left\{U\in\tau\middle|U\subseteq A\right\}=\bigcup\mathcal{A}$.
3. $\mathring{A}\in\tau$.
4. Si $V\in\tau$ tal que $V\subseteq A$, entonces $V\subseteq\mathring{A}$.
5. A es abierto si y sólo si $\mathring{A}=A$.
6. $\mathring{\mathring{A}}=\mathring{A}$.

7. $\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}} = \mathring{A}\cap\mathring{B}$.

8. $\mathring{A}\cup\mathring{B} \subseteq \overset{\circ}{\widehat{A\cup B}}$.

9. $\overline{A}$ es un conjunto cerrado.

10. Si $K\subseteq X$ es cerrado de (X,τ) y $A\subseteq K$, entonces $\overline{A}\subseteq K$.

11. A es cerrado si y sólo si $\overline{A}=A$.

12. $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$.

13. $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

14. $\overline{A\cap B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$.

15. $\emptyset=\mathring{\emptyset}=\overline{\emptyset}$ y $X=\mathring{X}=\overline{X}$.

16. Si $A\subseteq B$, entonces $\mathring{A}\subseteq\mathring{B}$ y $\overline{A}\subseteq\overline{B}$.

17. $x\in\overline{A}$ si y sólo si para todo abierto $U\subseteq X$ tal que $x\in U$ se tiene que $U\cap A\neq\emptyset$.

18. $x\in\operatorname{Fr}(A)$ si y sólo si para todo abierto U tal que $x\in U$ se cumple que $U\cap A\neq\emptyset$ y $U\cap(A-X)\neq\emptyset$.

19. $\overline{A}=A\cup A'$.

20. A es un conjunto cerrado si y sólo si $A'\subseteq A$.

21. $\overline{A}=\mathring{A}\cup\operatorname{Fr}(A)$.

22. $\operatorname{Fr}(A)=\operatorname{Fr}(X-A)$.

23. $\overline{A}-\operatorname{Fr}(A)=\mathring{A}$.

Demostración:

Se probarán todos los incisos.

De (1): Si $x\in\mathring{A}$, entonces $A\in\mathcal{V}(x)$, luego $x\in A$. Por tanto, $\mathring{A}\subseteq A$. Ahora, es claro que $A\subseteq\overline{A}$, pues de la defininción de cerradura de A, todos los elementos de la intersección en esta definición contienen a A, luego A está contenida en la intersección.

De (2): Veamos que se tienen las dos contenciones:

- $\mathring{A}\subseteq\bigcup\mathcal{A}$. Sea $x\in\mathring{A}$, entonces $A\in\mathcal{V}(x)$, por lo cual existe un abierto $U\in\tau$ tal que $x\in U\subseteq A$, luego $U\in\mathcal{A}$, es decir que $x\in\bigcup\mathcal{A}$.
- $\bigcup\mathcal{A}\subseteq\mathring{A}$. Sea $x\in\bigcup\mathcal{A}$, entonces existe $U\in\tau$ con $U\subseteq A$ tal que $x\in U$, por lo cual $A\in\mathcal{V}(x)$, luego $x\in\mathring{A}$.

por los dos incisos anteriores, se sigue que $\mathring{A}=\bigcup\mathcal{A}$, es decir que el interior de A es el conjunto abierto más grande contenido en A.

De (3): Es inmediato de (2).

De (4): Es inmediato de (2).

De (5): Supongamos que A es abierto, entonces $A\in\tau$. Además, $A\subseteq A$, por lo cual de (4) se sigue que $A\subseteq\mathring{A}$. Ya se tiene que $\mathring{A}\subseteq A$, por tanto $A=\mathring{A}$.

La recíproca es inmediata.

De (6): Por (3), se tiene que $\mathring{A}$ es abierto, luego por (5) se sigue que $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$.

De (7): Probaremos las dos contenciones:

- $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subseteq \mathring{A} \cap \mathring{B}$. Si $x \in \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subseteq A \cap B$, entonces existe $U \in \tau$ tal que $x \in U \subseteq A \cap B$, en particular $x \in U \subseteq A$ y $x \in U \subseteq B$, luego $x \in \mathring{A}$ y $x \in \mathring{B} \Rightarrow x \in \mathring{A} \cap \mathring{B}$. Por tanto, $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subseteq \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

- $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subseteq \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$. El conjunto $\mathring{A} \cap \mathring{B} \in \tau$ y $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subseteq A \cap B$. Por (4), se sigue que $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subseteq \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$.

de los dos incisos anteriores, se sigue que $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

De (8): Se tiene que $\mathring{A} \cup \mathring{B} \in \tau$ es tal que $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subseteq A \cup B$, luego por (4) se sigue que $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subseteq \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$.

De (9): Es inmediato de la definición de $\overline{A}$, pues este conjunto es intersección arbitraria de cerrados.

De (10): Es inmediato de la definición de $\overline{A}$. Esto significa que la cerradura de un conjunto es el cerrado más pequeño que contiene a A.

De (11): Suponga que A es cerrado, entonces como $A \subseteq A$, se tiene por (10) que $\overline{A} \subseteq A$. Luego, como $A \subseteq \overline{A}$ por (1), se sigue que $A = \overline{A}$.

La recíproca es inmediata de (9).

De (12): Por (9), $\overline{A}$ es cerrado, luego por (11) se tiene que $\overline{A} = \overline{\overline{A}}$.

De (13): Proaremos las dos contenciones:

- $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. El conjunto $\overline{A} \cup \overline{B}$ es un cerrado que contiene a $A \cup B$, por tanto del inciso (10) se tiene que $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$.

- Como $A, B \subseteq A \cup B$, entonces $A, B \subseteq \overline{A \cup B}$, luego por (10) se tiene que $\overline{A}, \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Por tanto, $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

de los dos incisos anteriores, se sigue que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

De (14): Como $A \subseteq \overline{A}$ y $B \subseteq \overline{B}$, entonces $A \cap B \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. Por (10), se sigue que $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

De (15): Se dividirá en dos partes:

- $\emptyset = \mathring{\emptyset} = \overline{\emptyset}$. Como $\emptyset \subseteq \mathring{\emptyset} \subseteq \emptyset$, entonces $\emptyset = \mathring{\emptyset}$. Ahora, como $\emptyset$ es un cerrado que contiene a $\emptyset$, se sigue por (10) que $\overline{\emptyset} \subseteq \emptyset$. Por ende, $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

- Para X el caso es casi análogo a $\emptyset$ (al final todo esto resulta más en un juego de palabras que en otra cosa).

De (16). Como $A \subseteq B$, entonces $\mathring{A} \subseteq B$, y $A \subseteq \overline{B}$, por (4) y (10), se debe tener que $\mathring{A} \subseteq \mathring{B}$ y $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

De (17): Sea $x \in X$:

$\Rightarrow$): Suponga que $x \in \overline{A}$, entonces para todo $C \subseteq X$ cerrado tal que $A \subseteq C$, $x \in C$. Suponga que existe $U_0 \in \tau$ abierto tal que $x \in U_0$ y $U_0 \cap A = \emptyset$. Entonces $A \subseteq X - U_0$ es un cerrado que contiene a A, luego $x \in X - U_0$, es decir $x \notin U_0 \#_c$. Por tanto, $U \cap A \neq \emptyset$ para todo $U \in \tau$ tal que $x \in U$.

$\Leftarrow$): Sea $L \subseteq X$ un cerrado tal que $A \subseteq L$. Probaremos que $x \in L$, suponiendo la tesis para este $x \in X$. Suponga que $x \notin L$, entonces $x \in X - L$ el cual es abierto, por tanto $(X - L) \cap A \neq \emptyset$, es decir $A \nsubseteq L \#_c$. Por tanto, $x \in L$.

De (18): Es inmediato de la definición de $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{X - A}$ y del inciso (17).

De (19): Se probarán las dos contenciones:

- $\overline{A} \subseteq A \cup A'$. Sea $x \in \overline{A}$. Si $x \in A$, se tiene el resultado. Suponga que $x \notin A$. Como $x \in \overline{A}$, por (17) para todo abierto $U \subseteq X$ se tiene que $U \cap A \neq \emptyset$, pero $x \notin A$, por lo cual $(U - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Por tanto, $x \in A'$.

- $A \cup A' \subseteq \overline{A}$. Es inmediata de la definición de $\overline{A}$ y A'.

por los dos incisos anteriores se sigue que $\overline{A} = A \cup A'$.

De (20): Suponga que A es cerrado, entonces por (11), $\overline{A} = A$, luego por (19) se tiene que $A \cup A' = \overline{A} = A$, es decir que $A' \subseteq A$.

Si $A' \subseteq A$, entonces $A = A \cup A' = \overline{A}$ por (11), luego $A = \overline{A}$, es decir que A es cerrado.

De (21): Es claro que $\mathring{A} \cap \mathrm{Fr}(A) \subseteq \overline{A}$, pues $\mathring{A}, \mathrm{Fr}(A) \subseteq \overline{A}$. Ahora, si $x \in \overline{A}$ sea $U \subseteq X$ tal que $x \in U$. Se tienen dos casos:

- $U \subseteq A$, en este caso se sigue de la definición que $x \in \mathring{A}$.

- $U \nsubseteq A$, entonces existe $y \in U$ tal que $y \notin A$, es decir que $U \cap (X - A) \neq \emptyset$. Como $x \in \overline{A}$, entonces $U \cap A \neq \emptyset$. Por ser el U arbitrario, se sigue por (18) que $x \in \mathrm{Fr}(A)$.

es decir que $x \in \mathring{A} \cup \mathrm{Fr}(A)$. Por tanto, $\overline{A} \subseteq \mathring{A} \cup \mathrm{Fr}(A)$. Así, $\overline{A} = \mathring{A} \cup \mathrm{Fr}(A)$.

De (22): Veamos que $A = X - (X - A)$, por lo cual:

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{X - A} = \overline{X - A} \cap \overline{A} = \overline{X - A} \cap \overline{X - (X - A)} = \mathrm{Fr}(X - A)$$

De (23): Observemos que: $x \in \overline{A} - \mathrm{Fr}(A)$ si y sólo si se cumple que

- Para todo U abierto tal que $x \in U$ se cumple que $U \cap A \neq \emptyset$.

- Existe U_0 abierto tal que $x \in U_0$ y, $U_0 \cap A = \emptyset$ o $U_0 \cap (X - A) = \emptyset$.

Por ambas condiciones, debe suceder que $U_0 \cap A \neq \emptyset$ y $U_0 \cap (X - A) = \emptyset$, es decir que $U_0 \subseteq A$, esto es que $x \in \mathring{A}$. Por tanto, $x \in \overline{A} - \mathrm{Fr}(A)$ si y sólo si $x \in \mathring{A}$. Luego se tiene la igualdad. ■

Proposición 1.1.4
Sea (X, τ) un espacio topológico y $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

1. $\bigcup_{\alpha \in I} \overline{A_\alpha} \subseteq \overline{\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha}$.
2. $\overline{\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha} \subseteq \bigcap_{\alpha \in I} \overline{A_\alpha}$.

Demostración:
Probemos ambos incisos:

De (1): Si $x \in \bigcup_{\alpha \in I} \overline{A_\alpha}$, sea $U \in \tau$ tal que $x \in U$, luego $\exists \alpha \in I$ tal que $x \in \overline{A_\alpha}$, por ende $U \cap A_\alpha \neq \emptyset$, por tanto $U \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \cap \neq \emptyset$. Como el $U \in \tau$ fue arbitrario, se sigue que $x \in \overline{\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha}$.

De (2): Si $x \in \overline{\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha}$, entonces para $U \in \tau$ tal que $x \in U$ se cumple que $\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \cap U \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in I} (A_\alpha \cap U) \neq \emptyset$, es decir que $U \cap A_\alpha \neq \emptyset$, para todo $\alpha \in I$, luego como $U \in \tau$ fue arbitrario, se sigue que $x \in \overline{A_\alpha}$ para todo $\alpha \in I$. Así $x \in \bigcap_{\alpha \in I} \overline{A_\alpha}$. ■

Ejemplo 1.1.7
Considere al espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau_u)$. Tomemos

1. $A =]0, 1] \cup \{9\}$. Tenemos que $\overline{A} = [0, 1] \cup \{9\}$, $A' = [0, 1]$, por lo cual no podemos relacionar (al menos de forma directa) a A junto con su A' (esto es, uno no está contenido dentro del

otro).

2. Sea $n \in \mathbb{N}$, defina $A_n = [\frac{1}{n}, 1]$. Se tiene que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} =]0,1]$$

y,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n =]0,1] \Rightarrow \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = [0,1]$$

es decir que $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} \not\subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$.

3. Considere $X = \{a,b\}$, tomemos al espacio topológico $(X, \tau = \{X, \emptyset, \{a\}\})$. Si $A = \{a\}$ y $b = \{b\}$, entonces $\mathring{A} = \{a\}$, $\mathring{B} = \emptyset$, $\overline{A} = X$, $\overline{B} = B$. Luego $X = \widehat{A \cup B}^{\circ} \not\subseteq \mathring{A} \cup \mathring{B} = A$. Además $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \overline{A \cap B} = \emptyset$. Por ende, $B = \overline{A} \cap \overline{B} \not\subseteq \overline{A \cap B}$.

Definición 1.1.10
Para $x \in \mathbb{R}$, se define el **suelo de** x (denotado por $\lfloor x \rfloor$) como el máximo entero tal que $\lfloor x \rfloor \leq x$.

Ejercicio 1.1.3
Considere $(\mathbb{R}, \tau_u)$. Encuentre $\mathring{\mathbb{N}}$, $\overline{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}'$, $\mathrm{Fr}(\mathbb{N})$.

Solución:
Hagamos cada uno de los incisos:

1. $\mathring{\mathbb{N}}$) Afirmamos que $\mathring{\mathbb{N}} = \emptyset$. En efecto, si fuese el caso contrario, existiría U abierto no vacío en $(\mathbb{R}, \tau_u)$ tal que $U \subseteq \mathbb{N}$, luego si $x \in U \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$ (por ser U no vacío), entonces existe $r > 0$ tal que $]x - r, x + r[\subseteq U$.

   Sea $\delta = \min\{1, r\} > 0$, entonces $]x-\delta, x+\delta[\subseteq U$, pero como $x \in \mathbb{N}$, no puede ser que $x + \frac{1}{2} \in \mathbb{N}$, lo cual contradice el hecho de que $U \subseteq \mathbb{N}$. Por tanto, $\mathring{\mathbb{N}} = \emptyset$.

2. $\overline{\mathbb{N}}$) Probaremos que $\mathbb{N}$ es cerrado. Si $x \in \mathbb{R}-\mathbb{N}$, entonces existe $r = \min\{x - \lfloor x \rfloor, 1 - x + \lfloor x \rfloor\} > 0$ (pues $x \notin \mathbb{N}$, luego $\lfloor x \rfloor < x$) tal que $]x - r, x + r[\subseteq \mathbb{R} - \mathbb{N}$.

   En efecto, supongamos que $x - \lfloor x \rfloor \leq 1 - x + \lfloor x \rfloor$, entonces

   $$\begin{aligned}]x - r, x + r[&\subseteq]\lfloor x \rfloor, x + 1 - x + \lfloor x \rfloor[\\ &\subseteq]\lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1[\end{aligned}$$

   es decir, $]x - r, x + r[\subseteq \mathbb{R} - \mathbb{N}$. Si $x - \lfloor x \rfloor \leq 1 - x + \lfloor x \rfloor$ el caso es análogo. Por tanto, $\mathbb{R} - \mathbb{N}$ es abierto, luego $\mathbb{N}$ es cerrado y, por ende $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$.

3. $\mathbb{N}'$) Afirmamos que el conjunto es vacío. Sea $x \in \mathbb{R}$. Se tienen dos casos:

   - $x \in \mathbb{N}$) En este caso, existe $r = \frac{1}{2} > 0$ tal que $(]x - r, x + r[- \{x\}) \cap \mathbb{N} = \emptyset$.
   - $x \notin \mathbb{N}$) En este caso, existe $r = \min\{x - \lfloor x \rfloor, 1 - x + \lfloor x \rfloor\} > 0$ tal que (como se vió en (2)) $]x - r, x + r[\cap\mathbb{N} = \emptyset$, en particular $(]x - r, x + r[- \{x\}) \cap \mathbb{N} = \emptyset$.

   Por ambos incisos, se sigue que $\mathbb{N}' = \emptyset$.

4. $\mathrm{Fr}(\mathbb{N})$) Afirmamos que $\mathrm{Fr}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$. En efecto, ya se sabe que $\mathbb{N} = \overline{\mathbb{N}}$. Probaremos que $\mathbb{N} \subseteq \overline{\mathbb{R} - \mathbb{N}}$ y con ello se tendría el resultado.

   Sea $x \in \mathbb{N}$, entonces si U es un abierto tal que $x \in U$, entonces existe $r > 0$ tal que $]x-r, x+r[\subseteq U$, luego si $\delta = \min\{1, r\} > 0$, se tiene que el elemento $x+\frac{\delta}{2} \in \mathbb{R}-\mathbb{N}$, es decir que $U\cap(\mathbb{R}-\mathbb{N}) \neq \emptyset$. Por tanto, $x \in \overline{\mathbb{R} - \mathbb{N}}$, así $\mathbb{N} \subseteq \overline{\mathbb{R} - \mathbb{N}}$.

□

Ejercicio 1.1.4
Considere $(\mathbb{R}, \tau_I)$, $(\mathbb{R}, \tau_D)$ y $(\mathbb{R}, \tau_{cf})$. Encuentre en cada uno de los espacios anteriores $\mathring{\mathbb{Z}}$, $\overline{\mathbb{Z}}$, $\mathbb{Z}'$, $\mathrm{Fr}(\mathbb{Z})$.

Solución:
Consideremos cada una de las topologías por separado.

1. En $(\mathbb{R}, \tau_I)$:

   - $\mathring{\mathbb{Z}}$) Afirmamos que $\mathring{\mathbb{Z}} = \emptyset$. En efecto, como $\tau_I = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$, el único abierto contenido en $\mathbb{Z}$ es $\emptyset$, luego $\mathring{\mathbb{Z}} = \emptyset$.
   - $\overline{\mathbb{Z}}$) Como el único cerrado que contiene a $\mathbb{Z}$ es $\mathbb{R}$, se sigue que $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{R}$.
   - $\mathbb{Z}'$) Sea $x \in \mathbb{R}$, si U es un abierto tal que $x \in U$, entonces debe suceder que $U = \mathbb{R}$, luego $(U - \{x\}) \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$. Por tanto $x \in \mathbb{Z}'$. Así, $\mathbb{R} = \mathbb{Z}'$.
   - $\mathrm{Fr}(\mathbb{Z})$) Como $\overline{\mathbb{R} - \mathbb{Z}} = \mathbb{R}$, entonces se tiene que $\mathrm{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{R}$.

2. En $(\mathbb{R}, \tau_D)$:

   - $\mathring{\mathbb{Z}}$) Es claro que $\mathring{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$, pues en la topología discreta todo subconjunto de $\mathbb{R}$ es abierto.
   - $\overline{\mathbb{Z}}$) Es claro que $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$, pues en la topología discreta todo subconjunto de $\mathbb{R}$ es cerrado.
   - $\mathbb{Z}'$) Afirmamos que $\mathbb{Z}' = \emptyset$. En efecto, si $x \in \mathbb{Z}$, entonces $\{x\}$ es un abierto en $\mathbb{R}$ tal que $x \in \{x\}$, y se cumple que $(\{x\} - \{x\}) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$. Luego $\mathbb{Z}' = \emptyset$.
   - $\mathrm{Fr}(\mathbb{Z})$) Como $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ es cerrado, por un inciso anterior se sigue que $\mathrm{Fr}(\mathbb{Z}) = \emptyset$.

3. En $(\mathbb{R}, \tau_{cf})$:

   - $\mathring{\mathbb{Z}}$) Sea $U \subseteq \mathbb{Z}$ abierto, es decir que $\mathbb{R} - U$ es finito o $U = \emptyset$. Se tiene entonces que:
   $$\mathbb{R} - \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R} - U$$
   como $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ es infinito, entonces por Cantor-Bernstein debe suceder que $\mathbb{R} - U$ también sea infinito. Por tanto, $U = \emptyset$. Luego entonces $\mathring{\mathbb{Z}} = \emptyset$.
   - $\overline{\mathbb{Z}}$) Sea $C \subseteq \mathbb{R}$ un cerrado tal que $\mathbb{Z} \subseteq C$. Como en τ_{cf} los cerrados son todos los subconjuntos finitos o $\mathbb{R}$, entonces al ser $\mathbb{Z}$ infinito no puede ser que C sea finito, luego $C = \mathbb{R}$. Por ende, $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{R}$.
   - $\mathbb{Z}'$) Sea $x \in \mathbb{R}$, afirmamos que $x \in \mathbb{Z}'$. En efecto, si $U \subseteq \mathbb{R}$ es abierto tal que $x \in U$, entonces $\mathbb{R} - U$ es finito, luego como $\mathbb{Z}$ es infinito, existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $z < y$, para todo $y \in \mathbb{R} - U$ y $x < y$. Es decir que $y \in (U - \{x\}) \cap \mathbb{Z}$. Por tanto, $(U - \{x\}) \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$, es decir que $x \in \mathbb{Z}'$.
   - $\mathrm{Fr}(\mathbb{Z})$) Computemos $\overline{\mathbb{R} - \mathbb{Z}}$. Sea $C \subseteq \mathbb{R}$ cerrado tal que $\mathbb{R} - \mathbb{Z} \subseteq C$, entonces como C es cerrado, C es finito o $C = \mathbb{R}$, pero C no puede ser finito ya que $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ es infinito, luego $C = \mathbb{R}$. Así, $\overline{\mathbb{R} - \mathbb{Z}} = \mathbb{R}$. Por tanto, $\mathrm{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

□

Definición 1.1.11
Sea (X, τ) un espacio topológico. Se dice que el espacio (X, τ) es de **Hausdorff** si para todo $x_1, x_2 \in X$ distintos existen $U_1, U_2 \in \tau$ tales que $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Ejemplo 1.1.8
Considere (X, τ) donde $X = \{1, 2\}$ y $\tau = \{X, \emptyset, \{1\}\}$, entonces (X, τ) no es de Hausdorff.

Ejemplo 1.1.9
$(\mathbb{R}, \tau_I)$ no es de Hausdorff (cuando el espacio tiene más de un elemento esto se sigue cumpliendo).

Ejemplo 1.1.10
Sea (X, d) un espacio métrico y consideremos al espacio topológico (X, τ_d). Este espacio es de Hausdorff.

Ejemplo 1.1.11
Sea (X, d) es espacio métrico tal que la métrica de él está definida como:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq y \\ 1 & \text{si } x = y \end{cases}$$

dado $p \in X$ considere $B_d(p, 1) = \{p\}$. Entonces para todo $p \in X$, $\{p\} \in \tau_D \Rightarrow \forall A \subseteq X$, $A \in \tau_d$, es decir que $\tau_d = \tau_D$.

Definición 1.1.12
Un espacio topológico (X, τ) se dice **metrizable** si existe una métrica $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que $\tau_d = \tau$.

Proposición 1.1.5
Si (X, τ) es un espacio metrizable, entonces (X, τ) es un espacio de Hausdorff.

Demostración:
Es inmediata de la definición de espacio metrizable y del ejemplo 1.1.10. ■

Ejemplo 1.1.12
Considere $X = \{1, 2\}$, si tomamos al espacio topológico $(X, \tau = \{X, \emptyset, \{2\}\})$ obtenemos que este espacio no es metrizable por no ser de Hausdorff.

Ejemplo 1.1.13
Considere (X, τ_D). Este espacio es metrizable tomando la métrica discreta.

1.2. Bases de una topología

Definición 1.2.1
Sea (X, τ) un espacio topológico. Una subcolección $\mathcal{B}$ de τ es una **base para la toplogía** τ si todo $U \in \tau$ puede escribirse como unión arbitraria de elementos de $\mathcal{B}$.

Si $\mathcal{B}$ es una base para τ, a sus elementos los llamaremos **básicos**.

Observación 1.2.1
Cualquier topología es una base para sí misma.

Considere al espacio topolóigco (X,τ). Una base $\mathcal{B}$ de τ cumple que:

1. $\mathcal{B} \subseteq \tau$.
2. Si $U \in \tau$ entonces existe $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $U = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$.

¿Qué pretendemos con esta definición?

Básicamente lo que se pretende es descibir a todos los elementos de la topología mediante un conjunto más pequeño de elementos (esto permite que sea más fácil de manejar y que las propiedades deseadas para los elementos de la topología se sigan cumpliendo).

Ejemplo 1.2.1
Sea X un conjunto y sea $\mathcal{M} = \left\{\{p\} \middle| p \in X\right\}$. Esta es una base para τ_D definida sobre X.

Ejemplo 1.2.2
Sea (X,d) un espacio métrico y sea τ_d la topología generada por la métrica d. Entonces, las colecciones:

$$\mathcal{B}_1 = \left\{B_d(x,r) \middle| x \in X, r \in \mathbb{R}^+\right\}$$

es una base para la topología generada por τ_d. Además,

$$\mathcal{B}_2 = \left\{B_d(x,q) \middle| x \in X, q \in \mathbb{Q}^+\right\}$$

es otra base. Más aún:

$$\mathcal{B}_3 = \left\{B_d\left(x, \frac{1}{n}\right) \middle| x \in X, n \in \mathbb{N}\right\}$$

es otra base.

Ejemplo 1.2.3
Sea $X = \{a,b,c,d\}$ y $\kappa = \{\{a,b,c\}, \{c,d\}\}$. Afirmamos que no existe una topología definida sobre X tal que κ sea base de ella.

En efecto, suponga que τ es una topología sobre X y κ es una base para τ, entonces $\{a,b,c\}$ y $\{c,d\}$ están en τ, luego su intersección $\{c\} \in \tau$. Pero, $\{c\}$ no puede ser escrito como unión de elementos de κ.

Proposición 1.2.1
Sea (X,τ) un espacio topológico y sea $\mathcal{B} \subseteq \tau$. Entonces, $\mathcal{B}$ es una base para la topología τ si y sólo si dados $U \in \tau$ y $u \in U$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $u \in B \subseteq U$.

Demostración:

Probaremos la doble implicación.

$\Rightarrow$): Suponga que $\mathcal{B}$ es una base para la topología τ. Sea $U \in \tau$ y $u \in U$. Como $\mathcal{B}$ es una base entonces exise una subcolección $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $U = \bigcup \mathcal{C}$, luego existe $C_\alpha \in \mathcal{C}$ tal que $u \in C_\alpha$. Por ende $u \in C_\alpha \subseteq U$. Tomando $B = C_\alpha \in \mathcal{B}$ se tiene el resultado.

$\Leftarrow$): Suponga que se cumple la tesis. Ya se tiene que $\mathcal{B} \subseteq \tau$. Sea entonces $U \in \tau$. Para cada $x \in U$ existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq U$, luego la colección:

$$\left\{U_x \in \mathcal{B} \middle| x \in U\right\}$$

es una subcolección de $\mathcal{B}$ tal que $\bigcup_{x\in U} U_x = U$. Por tanto, $\mathcal{B}$ es una base de τ. ■

Corolario 1.2.1
Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $\mathcal{B}$ una base de la topología τ. Sea $U \subseteq X$, entonces U es abierto en τ si y sólo si dados $x \in U$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$.

Demostración:
Es inmediato de la proposición anterior. ■

Corolario 1.2.2
Sea X un conjunto y sean τ_1, τ_2 dos topologías definidas sobre X. Tomemos $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ bases para τ_1, τ_2, respectivamente, entonces los siguientes resultados son equivalentes:

1. $\tau_1 \subseteq \tau_2$.
2. Dados $x \in X$ y $B_1 \in \mathcal{B}_1$ tal que $x \in B_1$ existe $B_2 \in \mathcal{B}_2$ tal que $x \in B_2$ y $B_2 \subseteq B_1$.

Demostración:
Probaremos la doble implicación.

1) $\Rightarrow$ 2): Sean $x \in X$ y $B_1 \in \mathcal{B}_\in$ tal que $x \in B_1$. Como $\tau_1 \subseteq \tau_2$, entonces en particular B_1 es abierto de τ_2, luego existe $B_2 \in \mathcal{B}_2$ tal que $x \in B_2 \subseteq B_1$.

2) $\Rightarrow$ 1): Sea $U \in \tau_1$, como $\mathcal{B}_1$ es base de τ_1 entonces existe $\{B_\alpha\}_{\alpha\in I}$ subcolección de $\mathcal{B}_1$ tal que:

$$\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha = U$$

Sea $u \in U$, entonces existe $\beta \in I$ tal que $u \in B_\beta$. Por (2) existe C_β tal que $u \in C_\beta \subseteq B_\beta$. Formamos la subcolección $\{C_\alpha\}_{\alpha\in I}$, por lo anterior se sigue que:

$$\begin{aligned} U =& \bigcup_{\alpha\in I} C_\alpha \\ \subseteq& \bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha \\ =& U \\ \Rightarrow U =& \bigcup_{\alpha\in I} C_\alpha \end{aligned}$$

donde $\bigcup_{\alpha\in I} C_\alpha \in \tau_2$ por ser $\mathcal{B}_2$ una base de τ_2. Por tanto, $U \in \tau_2$. Finalmente, se sigue que $\tau_1 \subseteq \tau_2$. ■

Corolario 1.2.3
Sean d_1 y d_2 métricas definidas sobre el conjunto X. Consideremos τ_{d_1} y τ_{d_2}. Entonces $\tau_{d_1} \subseteq \tau_{d_2}$ si y sólo si dado $x \in X$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que $B_{d_2}(x, \varepsilon) \subseteq B_{d_1}(x, \delta)$

Demostración:
Es inmediato del corolario anterior. ■

Corolario 1.2.4
Sea X un conjunto y sea $\mathcal{B}$ una colección de subconjuntos de X tal que $\mathcal{B}$ es base para dos topologías τ_1 y τ_2 definidas sobre X. Entonces, $\tau_1 = \tau_2$.

Demostración:
Es inmediato del corolario 1.2.2. ■

Corolario 1.2.5
Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $\mathcal{B}$ una base para τ. Entonces, se cumple lo siguiente:

1. La intersección de dos elementos de $\mathcal{B}$ se puede escribir como una unión de elementos de $\mathcal{B}$.
2. Existe $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathcal{B}$ tal que
$$\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = X$$

Demostración:
Es inmediato de la definición de base. ■

¿Es posible prescindir de un espacio topológico para definir lo que es una base?

Definición 1.2.2
Sea X un conjunto arbitrario y sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de X, $\mathcal{A}$ se dice que es **una base para una topología sobre** X si cumple lo siguiente:

1. La intersección de dos elementos de $\mathcal{A}$ se puede escribir como una unión de elementos de $\mathcal{A}$.
2. X se puede escribir como una unión de elementos de $\mathcal{A}$.

Proposición 1.2.2
Sea $\mathcal{A}$ una base para una topología sobre el conjunto X. Entonces, la colección $\tau_{\mathcal{A}}$ dada por:
$$\tau_{\mathcal{A}} = \left\{U \subseteq X \middle| U \text{ se puede escribir como una unión de elementos de } \mathcal{A}\right\}$$
es una topología sobre X y $\mathcal{A}$ es una base para ella. La topología $\tau_{\mathcal{A}}$ es llamada **topología generada por** $\mathcal{A}$.

Demostración:
Veamos que $\tau_{\mathcal{A}}$ es una topología sobre X.

1. Es claro que $X \in \tau_{\mathcal{A}}$ y además $\emptyset \in \tau_{\mathcal{A}}$ ya que se puede ver como la unión de los elementos de la familia vacía.
2. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \tau_{\mathcal{A}}$, entonces dado $\alpha \in I$ existe $\left\{A_\beta^\alpha\right\}_{\beta \in J_\alpha} \subseteq \mathcal{A}$ tal que
$$U_\alpha = \bigcup_{\beta \in J_\alpha} A_\beta^\alpha$$

luego

$$\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I}\left(\bigcup_{\beta\in J_\alpha} A_\beta^\alpha\right) \in \tau_{\mathcal{A}}$$

donde la unión está en $\tau_{\mathcal{A}}$ por definición de la misma.

3. Sean $U, V \in \tau_{\mathcal{A}}$, entonces existen $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ y $\{B_\beta\}_{\beta\in J}$ subcolecciones de $\mathcal{A}$ tales que:

$$U = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \quad \text{y} \quad V = \bigcup_{\beta\in J} B_\beta$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} U\cap V &= \left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)\cap\left(\bigcup_{\beta\in J} B_\beta\right) \\ &= \left(\bigcup_{\alpha\in I \text{ y } \beta\in J} A_\alpha\cap B_\beta\right) \\ &= \left(\bigcup_{(\alpha,\beta)\in I\times J} A_\alpha\cap B_\beta\right) \end{aligned}$$

sabemos que para $\alpha\in I$ y $\beta\in J$, el conjunto $A_\alpha\cap B_\beta$ se puede escribir como una unión de elementos de $\mathcal{A}$, por tanto $U\cap V$ es una unión de elementos de $\mathcal{A}$.

por los tres incisos anteriores, se sigue que $\tau_{\mathcal{A}}$ es una topología sobre X. El hecho de que $\mathcal{A}$ sea una base para esta topología es inmediato de la definición de $\tau_{\mathcal{A}}$. ∎

1.3. Sub-bases

Definición 1.3.1
Sea X un conjunto y $\mathcal{S}$ una colección no vacía de subconjuntos de X. Entonces, se dice que $\mathcal{S}$ es una **sub-base para** $\tau(\mathcal{S})$.

Ejemplo 1.3.1
Sea $X = \{a, e, i, o, u\}$, $\mathcal{S} = \{\{a, e\}, \{e, i\}\}$. $\mathcal{S}$ es una sub-base para $\tau(\mathcal{S})$ pero no es una base para $\tau(\mathcal{S})$.

Sea $\mathcal{S}' = \{\{a, e\}, \{e, i\}, \{e\}\}$. Entonces $\tau(\mathcal{S}) = \tau(\mathcal{S}')$, pues

1. $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{S}'$ implica que $\tau(\mathcal{S})\subseteq\tau(\mathcal{S}')$.
2. Como $\{a, e\}, \{e, i\}\in\tau(\mathcal{S})$ entonces $\mathcal{S}'\subseteq\tau(\mathcal{S})$ lo cual implica que $\tau(\mathcal{S}')\subseteq\tau(\mathcal{S})$.

Proposición 1.3.1
Sea X un conjunto arbitrario y sea $\mathcal{S}$ una colección no vacía de subconjuntos de X. Sea

$$\mathcal{B} = \left\{B\subseteq X \middle| B \text{ se puede escribir como una intersección finita de elementos de } \mathcal{S}\right\}\cup\{X\}$$

Entonces,

1. $\mathcal{B}$ es una base para una topología sobre X.

2. $\tau_{\mathcal{B}}$ es la topología más gruesa definida sobre X para la cual $\mathcal{S}$ es una colección de conjuntos abiertos, es decir que $\tau_{\mathcal{B}} = \tau(\mathcal{S})$.

Demostración:

Notemos antes que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$.

De (1): Sean $M, N \in \mathcal{B}$, entonces existen $S_{M,1}, ..., S_{M,k}, S_{N,1}, ..., S_{N,l} \in \mathcal{S}$ tales que:

$$M = \bigcap_{i=1}^{k} S_{M,i} \quad \text{y} \quad N = \bigcap_{j=1}^{n} N_{N,j}$$

por tanto:

$$\begin{aligned} M \cap N &= \left(\bigcap_{i=1}^{k} S_{M,i}\right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{n} N_{N,j}\right) \\ &= \left(\bigcap_{i=1,j=1}^{k,n} S_{M,i} \cap S_{N,j}\right) \end{aligned}$$

luego, por definición de $\mathcal{B}$ se sigue que $M \cap N \in \mathcal{B}$.

Además, de la definición es claro que $X \in \mathcal{B}$. Por tanto, $\mathcal{B}$ es una base de una topología sobre X.

De (2): De la observacíon que se hizo al inicio, se tiene que $\mathcal{S} \subseteq \tau_{\mathcal{B}}$, es decir que $\tau_{\mathcal{B}}$ es una topología que contiene a $\mathcal{S}$, luego $\tau(\mathcal{S}) \subseteq \tau_{\mathcal{B}}$.

Suponga que τ es una topología sobre X tal que $\mathcal{S} \subseteq \tau$. Es claro que $\mathcal{B} \subseteq \tau$ ya que τ es cerrado bajo intersecciones finitas. Por tanto, $\tau_{\mathcal{B}} \subseteq \tau$. Luego:

$$\tau_{\mathcal{B}} \subseteq \tau(\mathcal{S})$$

Por ambas contenciones se sigue la igualdad. ■

Observación 1.3.1

Sea X un conjunto y $\mathcal{S}$ una colección no vacía de subconjuntos de X. Sea $M \in \tau(\mathcal{S})$, es decir que existe $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que:

$$M = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

y además, dado $\beta \in I$ existen $S_{\beta,1}, ..., S_{\beta,n_\beta} \in \mathcal{S}$ tales que:

$$A_\beta = \bigcap_{i=1}^{n_\beta} S_{\beta,i}$$

por tanto,

$$M = \bigcup_{\alpha \in I} \left(\bigcap_{i=1}^{n_\alpha} S_{\alpha,i}\right)$$

lo cual caracteriza a los elementos de $\tau(\mathcal{S})$.

Ejercicio 1.3.1

Demuestre que las siguientes colecciones de subconjuntos de $\mathbb{R}$ son base para una topología sobre $\mathbb{R}$:

1. $\mathcal{B}_1 = \left\{]a, b[\middle| a, b \in \mathbb{R}, a < b \right\}$.

2. $\mathcal{B}_2 = \left\{ [a, b[\middle| a, b \in \mathbb{R}, a < b \right\}$.

3. $\mathcal{B}_3 = \left\{]a, b] \middle| a, b \in \mathbb{R}, a < b \right\}$.

4. $\mathcal{B}_4 = \left\{ B - K \middle| B \in \mathcal{B}_1 \right\} \cup \mathcal{B}_1$, con $K = \left\{ \frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$.

5. $\mathcal{B}_5 = \left\{]a, \infty[\middle| a \in \mathbb{R} \right\}$.

6. $\mathcal{B}_6 = \left\{]-\infty, b[\middle| b \in \mathbb{R} \right\}$.

7. $\mathcal{B}_7 = \left\{ A \subseteq \mathbb{R} \middle| \mathbb{R} - A \text{ es finito} \right\}$.

Solución:

La demostrción de (1)-(3) es muy similar, por lo que solo se probará para (3).

De (3): Tenemos que verificar que la intersección de dos elementos de $\mathcal{B}_3$ se puede escribir como unión de elementos de $\mathcal{B}_3$ y que $\mathbb{R}$ puede ser escrito como unión de elementos de esta colección. En efecto:

1. Sean $]a_1, b_1],]a_2, b_2] \in \mathcal{B}_3$. Se tienen dos casos:
   - $]a_1, b_1] \cap]a_2, b_2] = \emptyset$. En este caso la intersección se escribe como la unión de los elementos de la familia vacía.
   - $]a_1, b_1] \cap]a_2, b_2] \neq \emptyset$. Analicemos este caso.
2. Notemos que:
$$\mathbb{R} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}}]m, m+1]$$
   donde $]m, m+1] \in \mathcal{B}_3$ para todo $m \in \mathbb{Z}$.

por 1) y 2) se sigue que $\mathcal{B}_3$ es una base para una topología sobre $\mathbb{R}$.

De (4):

La prueba de (5) y (6) es muy similar, por lo cual solo se hará la de (5).

De (5): Se tienen que verificar dos condiciones:

1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Sea $c = \max\{a, b\} \in \mathbb{R}$, tenemos que:
$$]a, \infty[\cap]b, \infty[=]c, \infty[$$
   en efecto, si $x \in]a, \infty[\cap]b, \infty[$, entonces $x > a$ y $x > b$, luego $x > \max\{a, b\} = c$, así pues $x \in]c, \infty[$. Si $x \in]c, \infty[$ es claro que $x \in]a, \infty[\cap]b, \infty[$. Luego la intersección de estos dos elementos de $\mathcal{B}_5$ se escribe como unión de elementos de $\mathcal{B}_5$, pues $]c, \infty[\in \mathcal{B}_5$.
2. Notemos que:
$$\mathbb{R} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}}]-m, \infty[\tag{1.1}$$
   donde $]-m, \infty[\in \mathcal{B}_5$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Por los dos incisos anteriores, se sigue que $\mathcal{B}_5$ es una base para una topología sobre $\mathbb{R}$.

De (7): $\square$

Observación 1.3.2
Usamos la notación:

$$\mathcal{B}_l = \left\{ [a, b[\middle| a, b \in \mathbb{R}, a < b \right\}$$

a la topología $\tau_{\mathcal{B}_l}$ la llamaremos la **topología del límite inferior**, y se denota por τ_l.

1.4. Subespacios topológicos

Ejercicio 1.4.1
Sea (X, τ) un espacio topológico y $Y \subseteq X$. Demostrar que

$$\tau_Y = \left\{ Y \cap U \middle| U \in \tau \right\}$$

es una topología sobre Y.

Demostración:
Verifiquemos que se cumplen las tres condiciones:

1. Es claro que $\emptyset \in \tau_Y$, pues $\emptyset = Y \cap \emptyset$ donde $\emptyset \in \tau$. Además, $Y \in \tau_Y$ pues $Y = Y \cap X$ con $X \in \tau$.
2. Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \tau_Y$ una colección no vacía. Entonces, para cada $\alpha \in I$ existe $U_\alpha \in \tau$ tal que

   $$A_\alpha = Y \cap U_\alpha$$

   Por lo cual:

   $$\begin{aligned} \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha =& \bigcup_{\alpha \in I} (Y \cap U_\alpha) \\ =& Y \cap \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \end{aligned}$$

   donde $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau$. Por tanto, $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \tau_Y$.
3. Sean $A, B \in \tau_Y$, entonces existen $U, V \in \tau$ tales que:

   $$A = Y \cap U \quad \text{y} \quad B = Y \cap V$$

   por tanto:

   $$\begin{aligned} A \cap B =& (Y \cap U) \cap (Y \cap V) \\ =& Y \cap (U \cap (Y \cap V)) \\ =& Y \cap (Y \cap (U \cap V)) \\ =& Y \cap (U \cap V) \end{aligned}$$

   donde $U \cap V \in \tau$. Por tanto, $A \cap B \in \tau_Y$.

■

Definición 1.4.1
Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $Y \subseteq X$. A la topología sobre Y,

$$\tau_Y = \left\{ Y \cap U \middle| U \in \tau \right\}$$

la llamaremos **la topología inducida por** τ **en** Y. A la pareja (Y, τ_Y) la llamaremos **un subespacio topológico de** (X, τ).

Si $A \in \tau_Y$, se dice que A es un **abierto en** Y. Si $A \subseteq Y$ y cumple que $Y - A \in \tau_Y$, se dice que A es un **cerrado en** Y.

Ejemplo 1.4.1
Considere $(\mathbb{R}, \tau_u)$, $Y = [0, 1[$, $A = [0, \frac{1}{2}[$. Podemos escribir:

$$A =]-1, \frac{1}{2}[\cap Y$$

donde $]-1, \frac{1}{2}[\in \tau_u$, por ende $A \in \tau_Y$, pero A no es abierto en $(\mathbb{R}, \tau_u)$.

Se tiene además que $\mathring{A} =]0, \frac{1}{2}[$ y, como $A \in \tau_Y$, entonces $\mathring{A}^Y = [0, \frac{1}{2}[$.

Ejemplo 1.4.2
Considere $(\mathbb{R}, \tau_u)$. Tomemos al subconjunto $\mathbb{N}$. Como:

$$\{m\} = \mathbb{N} \cap]m - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}[, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

así, $\{m\} \in \tau_{u_{\mathbb{N}}}$, es decir que coincide con la topología discreta de $\mathbb{N}$, pero $\{m\} \notin \tau_u$.

Ejemplo 1.4.3
Considere $(\mathbb{R}, \tau_u)$, $Y = [0, 1[$, $A = [0, \frac{1}{2}[\in \tau_{u_Y}$. Sea $B = [\frac{1}{2}, 1[\subseteq Y$. Se tiene que $B = Y - A$, es decir que B es un cerrado de (Y, τ_{u_Y}), pero no es cerrado en $(\mathbb{R}, \tau_u)$.

Además, $\overline{B} = [\frac{1}{2}, 1]$, y $\overline{B}^Y = B = [\frac{1}{2}, 1[$ (por ser cerrado en la topología del subespacio).

Sea $M \subseteq Y$, denotamos por $\mathrm{Fr}(M)_Y$ a la frontera de M en (Y, τ_{u_Y}).

Proposición 1.4.1
Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $Y \subseteq X$.

1. Si Y es abierto (respectivamente, cerrado) en (X, τ) y $U \subseteq Y$ es un conjunto abierto (respectivamente, cerrado) en (Y, τ_Y), entonces U es abierto (respectivamente, cerrado) en (X, τ).

2. Si $\mathcal{B}$ es una base para τ, entonces la colección:

$$\mathcal{B}_Y = \left\{ Y \cap B \middle| B \in \mathcal{B} \right\}$$

es una base para la topología τ_Y.

3. Sea $A \subseteq Y$. Entonces A es cerrado en Y si y sólo si existe $C \subseteq X$ cerrado en X tal que $A = Y \cap C$.

4. Sea $B \subseteq Y$. Si $\overline{B}$ es la cerradura de B en X, entonces la cerradura de B en Y, denotada por $\overline{B}^Y$, es $Y \cap \overline{B}$.

5. Sea $A \subseteq Y$, si $\widehat{\mathring{A}}^Y$ denota al interior de A en Y, entonces $Y \cap \mathring{A} \subseteq \widehat{\mathring{A}}^Y$.

6. Sea $A \subseteq Y$, si $\mathrm{Fr}(A)_Y$ es la frontera de A en Y, entonces $\mathrm{Fr}(A)_Y \subseteq Y \cap \mathrm{Fr}(A)$.

Demostración:

De (1): En ambos casos la prueba es inmediata de la defnción de subespacio de un espacio topológico.

De (2): Se deben verificar dos condiciones:

1. $\mathcal{B}_Y \subseteq \tau_Y$, esto es inmediato pues si $Y \cap B \in \mathcal{B}_Y$, entonces $B \in \mathcal{B}$, luego $B \in \tau$ y, por ende $Y \cap B \in \tau_Y$.

2. Sea $U \in \tau_Y$ abierto no vacío. Entonces existe $V \in \tau$ tal que $U = Y \cap V$. Sea $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $V = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$, entonces:

$$\begin{aligned} U =& Y \cap V \\ =& Y \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \right) \\ =& \left(\bigcup_{\alpha \in I} Y \cap B_\alpha \right) \end{aligned}$$

   por tanto, U es unión de elementos de $\mathcal{B}_Y$.

por los dos incisos anteriores se sigue que $\mathcal{B}_Y$ es base de τ_Y.

De (3): Probaremos la doble implicación:

$\Rightarrow$): Suponga que A es cerrado en Y, entonces $Y - A \in \tau_Y$, luego existe $U \in \tau$ tal que $Y - A = Y \cap U$. Tomemos $C = X - U$, se tiene que:

$$\begin{aligned} Y \cap C =& (X - U) \cap Y \\ =& (X \cap Y) - (U \cap Y) \\ =& Y - (U \cap Y) \\ =& Y - (Y \cap U) \\ =& Y - (Y - A) \\ =& A \\ \Rightarrow A =& Y \cap C \end{aligned}$$

Prueba alternativa de la igualdad de conjuntos. Sea $a \in A$, en particular $a \in Y$. Si $a \in U$, entonces $a \notin A$, luego esto contradice el hecho de que $Y - A = Y \cap U$, por tanto $a \in C$. Así, $a \in C \cap Y$.

Si $p \in Y \cap C$, entonces $p \in Y$ y $p \notin U$, luego $p \notin Y - A$, es decir $p \in A$.

Por lo anterior se sigue que $A = Y \cap C$.

$\Leftarrow$): Suponga que existe $C \subseteq X$ cerrado en X tal que $A = Y \cap C$. Hay que ver que A es cerrado en Y, para ello, notemos que:

$$\begin{aligned} Y - A =& Y - (Y \cap C) \\ =& Y - (Y - Y \cap U) \\ =& Y \cap U \end{aligned}$$

donde $U = X - C$ es abierto en X y, por ende $Y \cap U$ es abierto en Y, luego $Y - A$ es abierto en Y lo que implica que A es cerrado.

De (4): Se probarán las dos contenciones:

- $Y \cap \overline{B} \subseteq \overline{B}^Y$) Por el inciso anterior, $Y \cap \overline{B}$ es un cerrado en Y el cual contiene a B (pues $B \subseteq \overline{B}, Y$), luego $\overline{B}^Y \subseteq Y \cap \overline{B}$.

- $\overline{B}^Y \subseteq Y\cap\overline{B}$) Sea $M\subseteq Y$ cerrado en Y tal que $B\subseteq M$, luego por (3) existe $K\subseteq X$ cerrado tal que $M=Y\cap K$, siendo K un cerrado que contiene a B, luego $\overline{B}\subseteq K$. Por tanto, $Y\cap\overline{B}\subseteq M$. Por ende, al ser M un cerrado en Y arbitrario que contiene a B se sigue que $Y\cap\overline{M}\subseteq\overline{B}^Y$.

Por las dos contenciones se sigue que $\overline{B}^Y=Y\cap\overline{B}$.

De (5): Es inmediato.

De (6): Observemos que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Fr}(A)_Y =&\overline{A}^Y\cap\overline{Y-A}^Y\\
=&(Y\cap\overline{A})\cap(Y\cap\overline{Y-A})\\
=&Y\cap(\overline{A}\cap\overline{Y-A})\\
\subseteq&Y\cap(\overline{A}\cap\overline{X-A})\\
=&Y\cap\mathrm{Fr}(A)\\
\Rightarrow \mathrm{Fr}(A)_Y\subseteq&Y\cap\mathrm{Fr}(A)
\end{aligned}$$

pues, $Y-A\subseteq X-A$.

■

Observación 1.4.1
En el inciso (3) de la demostración anterior, notemos que:

$$(Y\cap U)\cup(Y\cap C)=Y$$

pues, $U\cap C=X$ donde U y C son disjuntos, luego $Y\cap U$ y $Y\cap C$ lo son , así $Y-Y\cap U=Y\cap C$. Esto justifica un paso en la demostración de la vuelta de (3).

Ejemplo 1.4.4

Considere $(\mathbb{R},\tau_u)$ y, considere el subespacio $(\mathbb{Z},\tau_{u\mathbb{Z}})$. Entonces, $\mathring{\mathbb{N}}=\emptyset$ y, $\hat{\mathring{\mathbb{N}}}^Y=\mathbb{N}$. Por ende, $\hat{\mathring{\mathbb{N}}}^Y\not\subseteq\mathring{\mathbb{N}}$.

Ejemplo 1.4.5
Considere $(\mathbb{R}^2,\tau_u)$ y el subespacio (Y,τ_{uY}) con:

$$Y=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\middle|y=0\right\}$$

entonces, $\mathrm{Fr}(Y)=Y$ y $\mathrm{Fr}(Y)_Y=\emptyset$.

Observación 1.4.2
Sea (X,τ) un espacio topológico y sean $Y,Z\subseteq X$ tales que $Z\subseteq Y$. Tenemos que podemos considerar a (Z,τ_Z) como subespacio de X.

También, podemos considerar a (Z,τ_{Y_Z}) como subespacio de (Y,τ_Y).

¿Es cierto que $\tau_{Y_Z}=\tau_Y$? La respuesta es que sí:

- Sea $M\in\tau_Z$, entonces, $M=Z\cap U$ donde $U\in\tau$, luego como $M\subseteq Y$ se sigue que: $M=Z\cap(Y\cap U)$ siendo $Y\cap U\in\tau_Y$, así $M\in\tau_{Y_Z}$.
- Sea $K\in\tau_{Y_Z}$, entonces existe $L\in\tau_Y$ tal que $K=Z\cap L$, pero como $L\in\tau_Y$ entonces existe $U\in\tau$ tal que $L=Y\cap U$, por tanto: $K=Z\cap(Y\cap U)=Z\cap U$ pues $Z\subseteq Y$, luego $K\in\tau_Z$.

por ambos incisos, se sigue la igualdad.

Definición 1.4.2
Sea (X, τ) un espacio topológico. Una propiedad P que se cumple para (X, τ) se dice que es una **propiedad que se hereda**, si se verifica en cualquier subespacio topológico de (X, τ). A veces simplemente se dice que P es una **propiedad hereditaria**.

Ejemplo 1.4.6
La propiedad de ser un espacio de Hausdorff es hereditaria.

Demostración:
Sea (X, τ) un espacio de Hausdorff y sea $Y \subseteq X$ arbitrario. Sean $p, q \in Y$ con $p \neq q$, en particular como X es de Hausdorff, existen $M, N \in \tau$ tales que $p \in M$, $q \in N$ y $M \cap N = \emptyset$.

En particular, $p \in Y \cap M$ y $q \in Y \cap N$, donde ambos conjuntos son abiertos en Y y, además $(Y \cap M) \cap (Y \cap N) = \emptyset$. Por tanto, (Y, τ_Y) es de Hausdorff. ■

Ejemplo 1.4.7
Sea (X, τ) un espacio topológico tal que τ tiene una base numerable, sea $\mathcal{B}$ tal base. Si $Y \subseteq X$ es arbitrario, sabemos que

$$\mathcal{B}_Y = \left\{ Y \cap B \middle| B \in \mathcal{B} \right\}$$

es una base para τ_Y, la cual es numerable por ser $\mathcal{B}$ numerable. Luego esta propiedad es hereditaria.

Ejercicio 1.4.2
La propiedad de ser metrizable se hereda.

Demostración:

■

1.5. Relaciones de orden y la topología del orden

Definición 1.5.1
Una relación $\mathcal{R}$ definida sobre un conjunto A es una **relación de orden lineal** si se cumple lo siguiente:

1. Dados $a, b \in A$ distintos se tiene que $a\mathcal{R}b$ ó $b\mathcal{R}a$.
2. Para todo elemento de $a \in A$, $a\not\mathcal{R}a$.
3. Si $a, b, c \in A$ son tales que $a\mathcal{R}b$ y $b\mathcal{R}c$, entonces $a\mathcal{R}c$.

Definición 1.5.2
Si $\mathcal{R}$ es una relación de orden lineal definida sobre el conjunto A, diremos que $(A, \mathcal{R})$ es un **conjunto ordenado**.