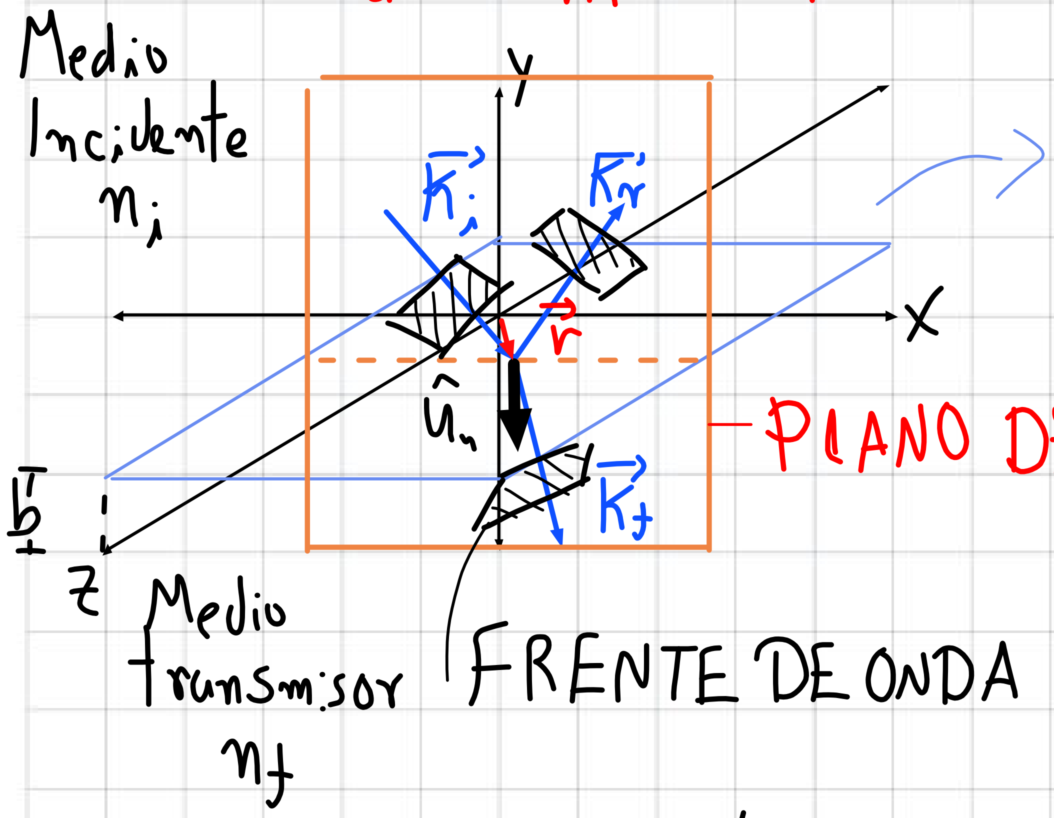
Acercamiento Electromagnético.

Parcial 02 Presencial
Jueves 26 de mayo, 16-18 h.
Óptica física incluyendo propagación de la luz en la materia.
Polarización ya no.



INTERFAZ: Plano paralelo al plano xz y a una altura b a lo largo del eje y

PLANO DE INCIDENCIA

$\vec{r}$: nos indica el punto de incidencia.

Onda E.M. incidente:

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{0i} \cos(\vec{K}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t) \quad \dots \quad (i)$$

Onda E.M. reflejada:

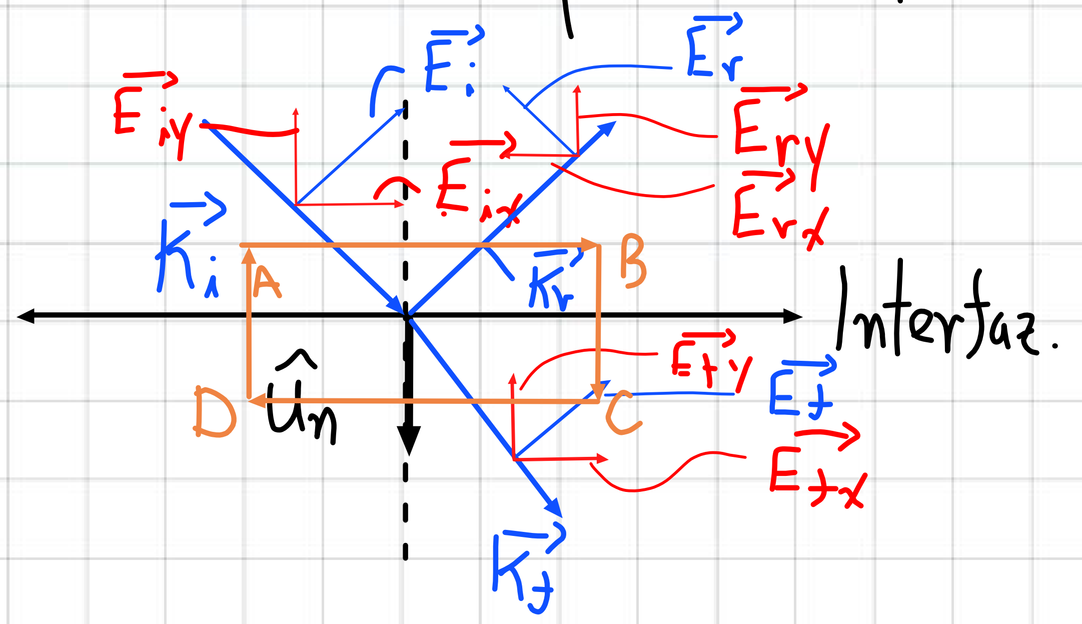
$$\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} \cos(\vec{K}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t + \varepsilon_r) \quad \dots \quad (ii)$$

No sabemos si la onda se desfasa o no.

Onda E.M. transmitida:

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} \cos(\vec{K}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t + \varepsilon_t) \quad \dots \quad (iii)$$

Observemos el plano de incidencia de frente:



Siempre tenemos ese campo eléctrico, de donde siempre tenemos una componente tangente a la interfaz $(\vec{E}_{ix}, \vec{E}_{rx}, \vec{E}_{tx})$ y otra perpendicular $(\vec{E}_{iy}, \vec{E}_{ry}, \vec{E}_{ty})$

Para ver el comportamiento del campo, se considera la siguiente condición de frontera: La componente de $\vec{E}$ tangente a la interfaz debe ser continua a través de la interfaz. i.e, las componentes tangenciales deben ser iguales de un lado y otro de la interfaz.

Pues, de la Ley de Faraday:

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ds = -\frac{\partial \phi_B}{\partial t}$$

Para lo cual, tomamos la trayectoria naranja del diagrama, i.e la A-B-C-D-A, haciendo sus lados infinitamente pequeños. Luego el área tiende a 0, y $\frac{\partial \phi_B}{\partial t} \to 0$.

Por tanto:

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int_A^B \vec{E}_{x_1} \cdot \vec{dl} + \underbrace{\int_B^C \vec{E}_{x_2} \cdot \vec{dl}}_{=0 \ (\vec{E}_{x_2} \perp \vec{dl})} + \int_C^D \vec{E}_{y_3} \cdot \vec{dl} + \underbrace{\int_D^A \vec{E}_{y_4} \cdot \vec{dl}}_{=0 \ (\vec{E}_{x_1} \perp \vec{dl})} = 0$$

$$\Rightarrow \int_A^B \vec{E}_{1x} \cdot \vec{dl} + \int_C^D \vec{E}_{x_2} \cdot \vec{dl} = 0$$

Lo anterior ocurre si y sólo si $\|\vec{E}_{x1}\| = \|\vec{E}_{x3}\|$, y con sentidos opuestos. Por lo tanto:

$$\hat{u}_n \times \vec{E}_i + \hat{u}_n \times \vec{E}_r = \hat{u}_n \times \vec{E}_t \quad \ldots \; (iv)$$

Nota: se saltó las componentes perpendiculares, pero en esencia es lo mismo.

Por tanto:

$$\hat{u}_n \times \left(\vec{E}_{i0} \cos(\vec{K}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t)\right) + \hat{u}_n \times \left(\vec{E}_{r0} \cos(\vec{K}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t + \varepsilon_r)\right)$$
$$= \hat{u}_n \times \left(\vec{E}_{t0} \cos(\vec{K}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t + \varepsilon_t)\right) \ldots \; (v)$$

esta ecuación se debe cumplir para todo punto sobre la interfaz, i.e para todo $y = b$ y en cualquier instante, i.e en cualquier valor de t. (el argumento del coseno debe ser el mismo).
Esto implica que $\vec{E}_i$, $\vec{E}_r$ y $\vec{E}_t$ deben tener la misma dependencia funcional en $\vec{r}$ (con $y=b$) y en t. Luego:

$$\left.(\underbrace{\vec{K}_i \cdot \vec{r}} - \omega_i t)\right|_{y=b} = \left.(\underbrace{\vec{K}_r \cdot \vec{r}} - \omega_r t + \underbrace{\varepsilon_r})\right|_{y=b} = \left.(\underbrace{\vec{K}_t \cdot \vec{r}} - \omega_t t + \underbrace{\varepsilon_t})\right|_{y=b} \quad *$$

Componentes espaciales deben ser iguales siempre en esa posición, invariante de t.

Para que $(*)$ se cumpla para cualquier valor de t, es necesario que $\omega_i = \omega_r = \omega_t$. es decir: $\nu_i = \nu_r = \nu_t$ (la frecuencia no cambia al reflejarse o transmitirse por un medio). A partir de $(*)$, la condición espacial que debe cumplirse:

$$\left.(\vec{K}_i \cdot \vec{r})\right|_{y=b} = \left.(\vec{K}_r \cdot \vec{r} + \varepsilon_r)\right|_{y=b} = \left.(\vec{K}_t \cdot \vec{r} + \varepsilon_t)\right|_{y=b}$$

Lo que implica:

$$\varepsilon_r = \left.(\vec{K}_i - \vec{K}_r) \cdot \vec{r}\right|_{y=b} \quad \varepsilon_t = \left.(\vec{K}_i - \vec{K}_t) \cdot \vec{r}\right|_{y=b} \ldots \; (vi)$$

(vi) define un plano de puntos (con $y=b$), perpendicular al vector $(\vec{K}_i - \vec{K}_r)$. (vi) implica que $\underbrace{(\vec{K}_i - \vec{K}_r) \cdot \vec{r} \text{ es paralelo a } \hat{u}_n}_{\text{Probar.}}$. Como rayo incidente y rayo reflejado viajan en el mismo medio, $\lambda_i = \lambda_r$

$$\Rightarrow \|\vec{K}_i\| = \|\vec{K}_r\|$$

Luego $\vec{K}_i - \vec{K}_r \perp$ a la interfaz:

$$(\vec{K_i} - \vec{K_r}) \times \hat{u}_n = 0$$

$$\Rightarrow \|\vec{K_i}\| \cdot \|\hat{u}_n\| \operatorname{sen}\theta_i - \|\vec{K_r}\| \|\hat{u}_n\| \operatorname{sen}\theta_r = 0$$

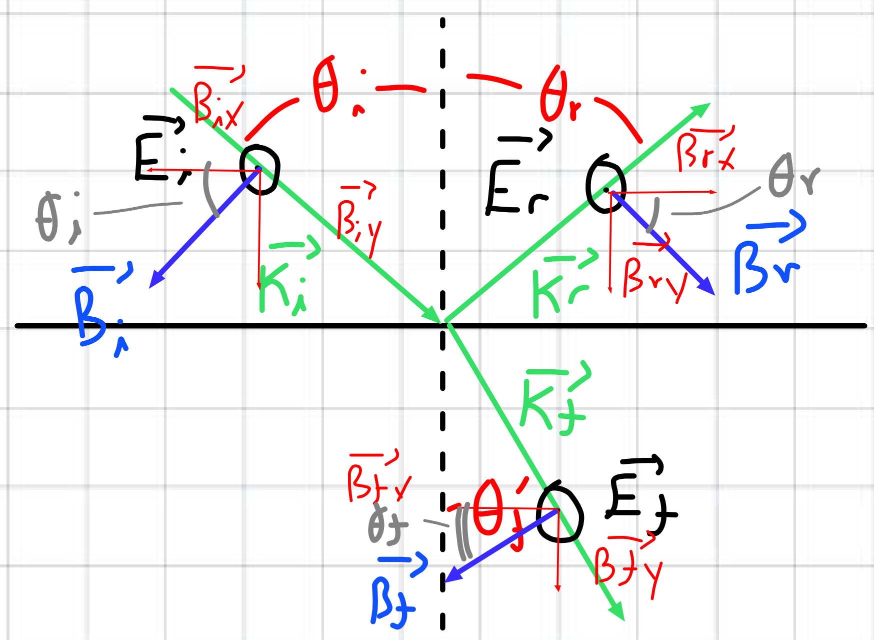
$$\Rightarrow K_i \operatorname{sen}\theta_i = K_r \operatorname{sen}\theta_r$$

$$\Rightarrow \theta_i = \theta_r$$ (Ley de la reflexión)

También, de (v):

Ecuaciones de Fresnel

1^{er}: $\vec{E}$ es perpendicular al plano de incidencia. Para ondas linealmente polarizadas:



$$\Rightarrow \vec{E}_{0i}\cos(\vec{K}_i\cdot\vec{r}-\omega_i t)+\vec{E}_{0r}\cos(\vec{K}_r\cdot\vec{r}-\omega_r t+\varepsilon_r)=\vec{E}_{0t}\cos(\vec{K}_t\cdot\vec{r}-\omega_t t+\varepsilon_t)$$

El hecho de que la dependencia funcional sea la misma para los tres términos, nos permite escribir:

$$\vec{E}_{0i}+\vec{E}_{0r}=\vec{E}_{0t}$$

Del mismo modo la componente de $\vec{B}$ tangente a la interfaz también es continua al pasar de un medio a otro.

$$-\frac{B_i}{\mu_i}\cos\theta_i+\frac{B_r}{\mu_i}\cos\theta_r=-\frac{B_t}{\mu_t}\cos\theta_t$$

$$\Rightarrow \frac{B_i}{\mu_i}\cos\theta_i-\frac{B_r}{\mu_i}\cos\theta_r=\frac{B_t}{\mu_t}\cos\theta_t \qquad \theta_i=\theta_r \qquad B_t=\frac{E_t}{v_t}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{v_i\mu_i}(E_i-E_r)\cos\theta_i=\frac{1}{v_t\mu_t}E_t\cos\theta_t \qquad B_i=\frac{E_i}{v_i}$$

$$\Rightarrow \frac{n_i}{\mu_i}(E_{0i}-E_{0r})\cos\theta_i=\frac{n_t}{\mu_t}E_{0t}\cos\theta_t \quad \ldots (vii)$$

Se considera también: $\vec{E}_{0i}+\vec{E}_{0r}=\vec{E}_{0t}$, de donde:

$$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\perp=\frac{\frac{n_i}{\mu_i}\cos\theta_i-\frac{n_t}{\mu_t}\cos\theta_t}{\frac{n_i}{\mu_i}\cos\theta_i+\frac{n_t}{\mu_t}\cos\theta_t} \quad \ldots (I)$$

$\vec{E}$'s perpendiculares al plano de incidencia.