

# Notas Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

8 de mayo de 2024

# Índice general

<b>3. Series de Fourier</b>	<b>2</b>
3.1. Series de Fourier de funciones en $\mathcal{L}_1^{2\pi}$	2
3.2. Series de Fourier de funciones en $\mathcal{L}_2^{2\pi}$	5
3.3. Series de Fourier de funciones de periodo $T > 0$	7
3.4. Convergencia de series de Fourier de integrales indefinidas	8
3.5. Teorema fundamental para la convergencia puntual de series de Fourier en $\mathcal{L}_1^{2\pi}$	12
3.6. Núcleo de Dirichlet y teorema fundamental	15
3.7. Convergencia uniforme de una serie de Fourier	18
3.8. Convergencia en sentido de Cesáro de series de Fourier en $\mathcal{L}_1^{2\pi}$	21
3.8.1. Núcleo de Fejér y el Teorema de Fejér	23
3.9. Convergencia c.t.p. en el sentido de Cesáro de series de Fourier en $\mathcal{L}_1^{2\pi}$	25
3.10. Teorema de Jordan	29

# Capítulo 3

## Series de Fourier

### 3.1. Series de Fourier de funciones en $\mathcal{L}_1^{2\pi}$

#### Definición 3.1.1

Se llama **serie de Fourier trigonométrica** a una serie de funciones de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{C}$  de la forma

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} \quad (3.1)$$

donde  $c_k \in \mathbb{C}$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$  son coeficientes constantes. Por definición, las **sumas parciales** de la serie son:

$$s_m(x) = \sum_{k=-m}^m c_k e^{ikx}, \forall m \in \mathbb{N}^*$$

Se dice que la serie **converge en un punto  $x$  a una suma  $f(x)$** , si

$$f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} s_m(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=-m}^m c_k e^{ikx}$$

En este caso,

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

Usando la identidad  $e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx$ , podemos reescribir  $s_m$  como

$$s_m(x) = c_0 + \sum_{k=1}^m (c_k + c_{-k}) \cos kx + i \sum_{k=1}^m (c_k - c_{-k}) \sin kx, \quad \forall m \in \mathbb{N}^* \quad (3.2)$$

definamos

$$a_k = c_k + c_{-k} \quad \text{y} \quad b_k = c_k - c_{-k}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (3.3)$$

de la definición es claro que

$$a_{-k} = a_k \quad \text{y} \quad b_{-k} = -b_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

conociendo los coeficientes  $a_k$  y  $b_k$  se recuperan los  $c_k$  mediante las fórmulas

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad (3.4)$$

y,  $c_0 = \frac{a_0}{2}$ . En términos de los  $a_k$  y  $b_k$ , las sumas 3.2 y 3.1 pueden ser reescritas como sigue:

$$s_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m a_k \cos kx + \sum_{k=1}^m b_k \sin kx, \quad \forall m \in \mathbb{N}^* \quad (3.5)$$

y,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \quad (3.6)$$

respectivamente.

### Definición 3.1.2

Se dice que la serie trigonométrica es **real** si  $s_m(x) \in \mathbb{R}$  para todo  $m \in \mathbb{N}^*$  y para toda  $x \in \mathbb{R}$ . Se sigue de 3.2 que la serie es real si y sólo si  $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ , para todo  $k \in \mathbb{N}^*$ .

Esta condición es equivalente a que

$$c_{-k} = \overline{c_k}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Es válido preguntarnos ahora: ¿Qué relación hay entre  $f$  y los coeficientes  $c_k$ ?

### Proposición 3.1.1

Considere una serie trigonométrica  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ . Suponga que esta serie converge uniformemente en  $\mathbb{R}$  a alguna función  $f$ . Entonces,  $f \in \mathcal{C}^{2\pi}$  y

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

### Demostración:

Se supone que  $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$  uniformemente en  $\mathbb{R}$ . Como el límite uniforme de una sucesión de funciones continuas es continua, se tiene entonces que  $f \in \mathcal{C}^{2\pi}$ . Para un  $n \in \mathbb{Z}$ :

$$f(x) e^{-inx} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{i(k-n)x} \text{ uniformemente en } \mathbb{R} \quad (3.7)$$

pues,

$$|f(x) e^{-inx} - s_m(x) e^{-inx}| = |f(x) - s_m(x)|, \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$$

Se puede pues integrar término por término 3.7 en el compacto  $[-\pi, \pi]$ . Antes veamos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)x} dx = \begin{cases} 2\pi & \text{si } n = k \\ 0 & \text{si } n \neq k \end{cases}$$

por tanto,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} c_k e^{i(k-n)x} dx \\ &= 2\pi c_n \\ \Rightarrow c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \end{aligned}$$

■

Este resultado sugiere la definición siguiente:

**Definición 3.1.3**

Para todo  $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$  se define

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (3.8)$$

en particular,  $c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$ . Los coeficientes  $c_k$  se llaman **los coeficientes de Fourier trigonométricos de  $f$**  y, la serie

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

se llama **serie de Fourier trigonométrica de  $f$** .

**Observación 3.1.1**

Los correspondientes coeficientes  $a_k$  y  $b_k$  son los siguientes:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

también,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad \text{y} \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx$$

para todo  $k \in \mathbb{Z}$  (esto se obtiene usando la igualdad entre los  $c_k$  y  $a_k, b_k$ ).

**Observación 3.1.2**

Para fines prácticos, conviene tener en cuenta lo siguiente. Si  $f$  es una función impar en  $] -\pi, \pi[$ , entonces

$$a_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

y,

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Si  $f$  es una función par en  $] -\pi, \pi[$  se invierte el resultado, es decir

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

y,

$$b_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

**Teorema 3.1.1**

Las aplicaciones  $f \mapsto \{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  y,  $f \mapsto \{a_0, a_1, b_1, \dots\}$  son aplicaciones lineales inyectivas de  $L_1^{2\pi}$  en el espacio de sucesiones complejas y reales, respectivamente. En particular, si  $f, g \in \mathcal{L}_1^{2\pi}$  tienen los mismos coeficientes de Fourier trigonométricos, entonces  $f = g$  c.t.p. en  $\mathbb{R}$ .

**Demostración:**

Por la forma en que se definen los coeficientes de Fourier de una función integrable, es claro que dichas aplicaciones son lineales.

Resta probar que su kernel es  $\{0\}$ . Sea  $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$  tal que

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

dado que el sistema trigonométrico  $\tau_{\mathbb{C}}$  es total en  $\mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ , necesariamente  $f = 0$  c.t.p. en  $\mathbb{R}$ .

Similarmente se prueba la otra afirmación. ■

### Proposición 3.1.2

Sean  $f, g \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$  y  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  y  $\{d_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  los coeficientes de Fourier trigonométricos de  $f$  y  $g$ , respectivamente. Entonces, los coeficientes de Fourier  $\{\gamma_k\}$  de  $f * g$  son  $\{2\pi c_k d_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ .

### Demostración:

Para todo  $k \in \mathbb{Z}$  fijo se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\gamma_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f * g(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} dx \int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(x-y) dy\end{aligned}$$

como la función  $(x, y) \mapsto e^{-ikx} f(y) g(x-y)$  es integrable en  $] -\pi, \pi[ \times ] -\pi, \pi[$  (pues la función es medible y su módulo es el mismo que el de  $(x, y) \mapsto f(y) g(x-y)$ , la cual es integrable por un teorema de convolución), se puede invertir del orden de integración:

$$\begin{aligned}\gamma_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) dy \int_{-\pi}^{\pi} g(x-y) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) dy \int_{-\pi-y}^{\pi-y} g(z) e^{-ik(z+y)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} dy \int_{-\pi-y}^{\pi-y} g(z) e^{-ikz} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} dy \int_{-\pi}^{\pi} g(z) e^{-ikz} dz \\ &= c_k \cdot (2\pi d_k) \\ &= 2\pi c_k d_k\end{aligned}$$

pues, las funciones son periódicas. Se tiene entonces con lo anterior el resultado para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . ■

## 3.2. Series de Fourier de funciones en $\mathcal{L}_2^{2\pi}$

Recuerde que las funciones

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

constituyen un sistema ortonormal maximal en el espacio Hilbertiano  $L_2^{2\pi}(\mathbb{C})$ . En el sentido Hilbertiano; los coeficientes de Fourier de algún vector  $f \in \mathcal{L}_2^{2\pi}(\mathbb{C})$  con respecto a dicho sistema ortonormal son los siguientes:

$$\begin{aligned}\hat{f}(x) &= (f | \varphi_k) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \\ &= \sqrt{2\pi} c_k\end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}\hat{f}(x) \varphi_k(x) &= \sqrt{2\pi} c_k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \\ &= c_k e^{ikx}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

La serie de Fourier hilbertiana de  $f$  sería:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(x) \varphi_k(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

que corresponde a la serie de Fourier trigonométrica de  $f$ . También, las funciones

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \eta_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx, \quad \theta_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

forman otro sistema O.N. maximal en  $L_2^{2\pi}(\mathbb{K})$ . Los correspondientes coeficientes de Fourier de  $f$  con respecto a este sistema O.N. maximal serían:

$$\begin{cases} \left(f \middle| \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ \left(f \middle| \eta_k\right) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \\ \left(f \middle| \theta_k\right) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \end{cases}$$

La serie de Fourier hilbertiana de  $f$  será:

$$\left(f \middle| \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} (f \middle| \eta_k) \eta_k + \sum_{k=1}^{\infty} (f \middle| \theta_k) \theta_k = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kx + b_k \sin kx]$$

Recuerde también que por el teorema de Riesz-Fischer que si  $\{\vec{u}_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$  es un sistema O.N. maximal en un espacio hilbertiano  $H$ , entonces la aplicación  $\vec{x} \mapsto \{\hat{x}(\alpha)\}$  es una isometría lineal de  $H$  en  $l_2(\Omega)$ . La isometría inversa es:

$$\varphi \mapsto \sum_{\alpha \in \Omega} \varphi(\alpha) \vec{u}_\alpha$$

Aplicando este resultado al primer caso se tiene que

### Teorema 3.2.1

Las aplicaciones

$$f \mapsto \left\{ \sqrt{2\pi} c_k \right\}_{k \in \mathbb{Z}} \quad \text{y} \quad f \mapsto \left\{ \sqrt{2\pi} \frac{a_0}{2}, \sqrt{\pi} a_1, \sqrt{\pi} b_1 \right\}$$

son isometrías lineales de  $L_2^{2\pi}$  sobre  $l_2(\mathbb{Z})$  o  $l_2(\mathbb{N})$ , respectivamente. Se tienen las identidades siguientes de Parseval:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \\ \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} [|a_k|^2 + |b_k|^2] &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \end{aligned}$$

Más generalmente, si  $f, g \in \mathcal{L}_2^{2\pi}(\mathbb{K})$  con coeficientes de Fourier trigonométricos  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  y  $\{d_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , entonces

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \overline{d_k} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

para los correspondientes coeficientes  $\{a_k, b_k\}$  y  $\{\alpha_k, \beta_k\}$  se tiene

$$\frac{a_0 \overline{\alpha_0}}{2} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} [a_k \overline{\alpha_k} + b_k \overline{\beta_k}] = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

Además,  $f$  es igual al promedio cuadrático de su serie de Fourier:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{N}_2(f - s_m) = 0$$

### **Demostración:**

Es inmediata de las observaciones hechas anteriormente y del teorema de Riesz-Fischer, junto con las identidades de Parseval. ■

#### **Observación 3.2.1**

Se tiene lo siguiente:

1. La suprayectividad de  $f \mapsto \{\sqrt{2\pi}c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  de  $L_2^{2\pi}(\mathbb{C})$  sobre  $l_2(\mathbb{Z})$  es consecuencia del teorema de Riesz-Fischer, es decir, de la completez de  $L_2^{2\pi}$ . Dice que dada una sucesión arbitraria  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  en  $l_2(\mathbb{Z})$  existe una función  $f \in \mathcal{L}_2^{2\pi}$  única salvo equivalencias cuyos coeficientes de Fourier son la sucesión dada.

Este resultado fue históricamente un éxito para la integral de Lebesgue.

2. Carleson demostró en 1966 que para cada  $f \in \mathcal{L}_2^{2\pi}$  la serie de Fourier de  $f$  converge a  $f$  c.t.p. en  $\mathbb{R}$ . Sin embargo, para funciones en  $\mathcal{L}_1^{2\pi}$  ésta no será la misma historia.

## **3.3. Series de Fourier de funciones de periodo $T > 0$**

Sea  $f \in \mathcal{L}_1^T$ . Defina

$$g(y) = f\left(\frac{T}{2\pi}y\right), \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

entonces,  $g \in \mathcal{L}_1^{2\pi}$ . Por definición, los coeficientes de Fourier de  $f$  van a ser los de  $g$ , estos son

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) e^{iky} dy$$

Por el cambio de variable  $y = \frac{2\pi}{T}x$ , podemos reescribirlos de la siguiente forma:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{i\frac{2\pi k}{T}x} dx$$

en particular,  $c_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx$ . Los correspondientes  $a_k$  y  $b_k$  son

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx \\ a_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) dx \\ b_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) dx \end{aligned}$$

Las series de Fourier trigonométricas correspondientes son

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{i\frac{2\pi k}{T}x} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) \right]$$



Sea ahora  $f \in \mathcal{L}_2^T$ . Los coeficientes de Fourier de  $f$  con respecto al sistema O.N. maximal formado por

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{i \frac{2\pi k}{T} x}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

son

$$(f|\varphi_k) = \sqrt{T} c_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

si se usa el sistema O.N. maximal formado por

$$\frac{1}{\sqrt{T}}, \quad \eta_k(x) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{2\pi k}{T} x\right), \quad \theta_k(x) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{2\pi k}{T} x\right), \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

se obtienen

$$\begin{aligned} \left(f|\frac{1}{\sqrt{T}}\right) &= \sqrt{T} \frac{a_0}{2} \\ (f|\eta_k) &= \sqrt{\frac{T}{2}} a_k \\ (f|\theta_k) &= \sqrt{\frac{T}{2}} b_k \end{aligned}$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Las series de Fourier correspondientes serían

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (f|\varphi_k) \varphi_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{i \frac{2\pi k}{T} x} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) \right]$$

Se tienen las identidades de Parserval

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|^2 dx \\ \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [|a_k|^2 + |b_k|^2] &= \frac{T}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|^2 dx \\ \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \overline{d_k} &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \overline{g(x)} dx \\ \frac{a_0 \overline{\alpha_0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \overline{\alpha_k} + b_k \overline{\beta_k}] &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \overline{g(x)} dx \end{aligned}$$

por lo cual, en lo sucesivo se trabajará únicamente con funciones de periodo  $2\pi$  (la traducción al periodo  $T > 0$  es un ejercicio).

### 3.4. Convergencia de series de Fourier de integrales indefinidas

#### Observación 3.4.1

Sea  $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{R})$ . Considere la integral indefinida  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada como sigue

$$F(x) = c + \int_0^x f(t) dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(en otras palabras  $F$  es absolutamente continua y  $f$  es su derivada c.t.p. en  $\mathbb{R}$ ). Se sabe que  $F$  es continua en  $\mathbb{R}$ . Una condición necesaria y suficiente para que también  $F$  sea periódica es la

siguiente:

$$\begin{aligned} F(x - 2\pi) - F(x) &= \int_x^{x+2\pi} f(t)dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

por tanto,  $F \in \mathcal{C}^{2\pi}$  si y sólo si  $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0$ .

### Teorema 3.4.1

Sea  $f \in \mathcal{L}_2^{2\pi}(\mathbb{K})$  tal que  $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0$  y sea  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  la integral indefinida de  $f$  dada por:

$$F(x) = c + \int_0^x f(t)dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

donde  $c \in \mathbb{K}$ . Entonces,  $F \in \mathcal{C}^{2\pi}(\mathbb{K})$  y la serie de Fourier de  $F$  converge a  $F$  uniformemente en  $\mathbb{R}$ .

### Demostración:

Ya se sabe que  $F \in \mathcal{C}^{2\pi}(\mathbb{K})$ . Sean  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  y  $\{c'_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  los coeficientes de Fourier de  $F$  y  $f$ , respectivamente. Note que

$$c'_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0$$

Integrando por partes se tiene que

$$\begin{aligned} c'_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ F(x)e^{-ikx} \Big|_{-\pi}^{\pi} + ik \int_{-\pi}^{\pi} F(x)e^{-ikx}dx \right] \\ &= \frac{ik}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x)e^{-ikx}dx \\ &= ikc_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Por tanto, en particular se tiene que

$$|c_k| = \frac{|c'_k|}{|k|}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Se tiene

$$\begin{aligned} |c_k| &= \frac{|c'_k|}{|k|} \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \left[ |c'_k|^2 + \frac{1}{k^2} \right], \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

como  $f \in \mathcal{L}_2^{2\pi}(\mathbb{K})$ , entonces  $\{|c'_k|\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l_2(\mathbb{Z})$  de donde  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c'_k|^2 < \infty$ . Se sigue de la ecuación anterior que la serie  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k$  es absolutamente convergente en  $\mathbb{K}$ . Ya que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k e^{ikx}| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c'_k|$$

se sigue del criterio  $M$  de Weierstrass que la serie de Fourier de  $F$  converge absoluta y uniformemente en  $\mathbb{R}$ . Resta probar que la suma de esta serie es  $F$ . Sea

$$G(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{uniformemente en } \mathbb{R}$$

Entonces,  $G \in \mathcal{C}^{2\pi}(\mathbb{K})$ . Además,

$$G(x)e^{-inx} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{i(k-n)x} \text{ uniformemente en } \mathbb{R}$$

Se puede pues integrar término por término en  $[-\pi, \pi]$ . Resulta:

$$\int_{-\pi}^{\pi} G(x)e^{-inx} dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)x} dx = 2\pi c_n$$

por tanto,  $F$  y  $G$  tienen los mismos coeficientes de Fourier. Se sabe entonces que  $F = G$  c.t.p. en  $\mathbb{R}$  siendo ambas continuas, necesariamente  $F = G$  en  $\mathbb{R}$ . ■

### Corolario 3.4.1

Si  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  es una función de clase  $C^1$  periódica de periodo  $2\pi$ , entonces la serie de Fourier de  $F$  converge a  $F$  uniformemente en  $\mathbb{R}$ .

### Demostración:

Por el teorema fundamental del cálculo, podemos escribir

$$F(x) = F(0) + \int_0^x f(t)dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

donde  $f(x) = F'(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  es una función continua. Por el teorema anterior, el resultado estará probado si se muestra que  $f$  es periódica de periodo  $2\pi$ .

Ya que  $F(x) = F(x + 2\pi)$ , entonces del teorema fundamental

$$\int_x^{x+2\pi} f(t)dt = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

en particular,  $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0$ . Para todo  $a < b$  se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x + 2\pi)dx &= \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(t)dt \\ &= \int_{a+2\pi}^a f(t)dt + \int_a^b f(t)dt + \int_b^{b+2\pi} f(t)dt \\ &= \int_a^b f(t)dt \\ \Rightarrow \int_a^b [f(x + 2\pi) - f(x)] dx &= 0, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b \end{aligned}$$

Por el lema de los promedios, se sigue que  $f(x + 2\pi) - f(x) = 0$  para casi toda  $x \in \mathbb{R}$ . Siendo ambas funciones continuas, se sigue que

$$f(x + 2\pi) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

por tanto  $f$  es periódica de periodo  $2\pi$ . ■

### Observación 3.4.2

Como  $c_k = \frac{c'_k}{ik}$  para todo  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , el término  $c_k e^{ikx}$  de la serie de Fourier de  $F$  es una primitiva del término  $c'_k e^{ikx}$  de la serie de Fourier de  $f$ . En este caso  $c_0$  juega el papel de constante de integración.

Al considerar los coeficientes  $a_k$ ,  $b_k$  y  $a'_k$ ,  $b'_k$  resulta lo siguiente:

$$a_k - ib_k = \frac{a'_k - ib'_k}{ik}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

cambiando a  $k$  por  $-k$ :

$$a_k + ib_k = \frac{a'_k + ib'_k}{ik}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

resulta de estos sistemas de ecuaciones que

$$a_k = -\frac{b'_k}{k} \quad \text{y} \quad b_k = \frac{a'_k}{k}$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Así pues,  $a_k \cos kx$  es una primitiva de  $b'_k \sin kx$  y que  $b_k \sin kx$  es una primitiva de  $a_k \cos kx$ .

Se verá más adelante que la conclusión del teorema anterior es válida si  $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{K})$ .

### Ejemplo 3.4.1

Sea  $n \in \mathbb{N}^*$ . Considere las funciones  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  las funciones siguiente:

$$f(x) = \cos nx \quad \text{y} \quad g(x) = \sin nx, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Claramente  $f$  y  $g$  son funciones de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R}$  periódicas de periodo  $2\pi$ . Por el último corolario las series de Fourier de  $f$  y  $g$  convergen a  $f$  y  $g$  respectivamente, uniformemente en  $\mathbb{R}$ . Los correspondientes coeficientes de Fourier de  $f$  y  $g$  serían:

$$\frac{a_0}{2} \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kx + b_k \sin kx]$$

como  $f$  es par, entonces  $b_k = 0$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Además,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx \\ &= \frac{1}{\pi} (\cos nx | \cos kx) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ 1 & \text{si } k = n \end{cases} \end{aligned}$$

por tanto,  $f(x) = \cos nx = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \cos kx = \cos nx$ . Similarmente se prueba que  $g(x) = \sin nx$  es su desarrollo en serie de Fourier.

### Ejemplo 3.4.2

Considere la función  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada como sigue

$$F(x) = \sin^3 x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$F$  es de clase  $C^1$  y periódica de periodo  $2\pi$ . Por el corolario, la serie de Fourier de  $F$  converge a  $F$  uniformemente en  $\mathbb{R}$ . Como  $F$  es impar,  $a_k = 0$  para todo  $k \in \mathbb{N}^*$ .

Se tiene que

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x \sin x dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 - \cos 2x + \cos^2 2x dx \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left[ 2\pi - (2 \mid \cos 2x) + \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 2x dx \right] \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 4x}{2} dx \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8\pi} [2\pi + (1 \mid \cos 4x)] \\
 &= \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

en general

$$\begin{aligned}
 b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x \sin kx dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \sin x \sin kx dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} \sin x \sin kx dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} (\sin x \mid \sin kx) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x \sin x \sin kx dx \\
 &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(k-1)x + \cos(k+1)x] \cos 2x dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} (\cos(k+1)x \mid \cos 2x) - \frac{1}{4} \left( \frac{\cos(k-1)x}{\sqrt{\pi}} \mid \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}} \right) \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{si } k = 2, 4, 5, \dots \\ -\frac{1}{4} & \text{si } k = 3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

luego,  $F(x) = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

### Ejemplo 3.4.3

¿Qué pasa con la función  $x \mapsto |\sin x|$  y su serie de Fourier?

## 3.5. Teorema fundamental para la convergencia puntual de series de Fourier en $\mathcal{L}_1^{2\pi}$

---

**Teorema 3.5.1 (Teorema de Riemman-Lebesgue)**

Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$ . Si  $f \in \mathcal{L}_1(]a, b[, \mathbb{K})$ , entonces

$$\lim_{\lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx = 0$$

---

**Demostración:**

Se harán varias cosas:

1. Suponga que  $f = \chi_I$  con  $I \subseteq ]a, b[$  es un intervalo de extremos  $\alpha \leq \beta$ . Luego,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx &= \int_\alpha^\beta e^{i\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{i\lambda} (e^{i\lambda\beta} - e^{i\lambda\alpha}) \\ \Rightarrow \left| \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx \right| &\leq \frac{2}{|\lambda|} \end{aligned}$$

donde el lado de la derecha tiende a cero conforme  $|\lambda| \rightarrow \infty$ . Por tanto,

$$\lim_{\lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx = 0$$

por linealidad el resultado es válido si  $f$  es una función escalonada en el abierto  $]a, b[$ .

2. Suponga que  $f \in \mathcal{L}_1(]a, b[, \mathbb{K})$  y sea  $\varepsilon > 0$ . Se sabe que existe  $\varphi \in \mathcal{E}(]a, b[, \mathbb{K})$  tal que

$$\mathcal{N}_1(f - \varphi) < \frac{\varepsilon}{2}$$

También existe  $R > 0$  tal que

$$\lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| > R \Rightarrow \left| \int_a^b \varphi(x) e^{i\lambda x} dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

entonces, si  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $|\lambda| > R$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx \right| &\leq \left| \int_a^b [f(x) - \varphi(x)] e^{i\lambda x} dx \right| + \left| \int_a^b \varphi(x) e^{i\lambda x} dx \right| \\ &< \int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

lo que termina la prueba. ■

**Observación 3.5.1**

Se tiene lo siguiente:

1. Si  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{C}$  es integrable en un conjunto medible  $B \subseteq ]a, b[$ , entonces

$$\lim_{\lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| \rightarrow \infty} \int_B f(x) e^{i\lambda x} dx = 0$$

pues,  $f\chi_B$  es integrable en  $]a, b[$ .

2. Si  $f \in \mathcal{L}_1([a, b], \mathbb{C})$  al escribir  $e^{i\lambda x} = \cos \lambda x + i \sin \lambda x$  el Teorema de Riemman-Lebesgue implica que

$$\lim_{\lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| \rightarrow \infty} \int_B f(x) \cos \lambda x dx = 0$$

y

$$\lim_{\lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| \rightarrow \infty} \int_B f(x) \sin \lambda x dx = 0$$

3. Recuerde que si  $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ , se definió:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Por el Teorema de Riemman-Lebesgue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$$

además,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$$

Se denota por  $c_0(\mathbb{Z})$  al espacio vectorial de todas las sucesiones  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  tal que

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} c_n = 0$$

$c_0(\mathbb{Z})$  es un subespacio del espacio de Banach  $(l_\infty(\mathbb{Z}), \mathcal{N}_\infty(\cdot))$ . Se demuestra que  $c_0(\mathbb{Z})$  es un subespacio cerrado de  $(l_\infty(\mathbb{Z}), \mathcal{N}_\infty(\cdot))$ , luego  $(c_0(\mathbb{Z}), \mathcal{N}_\infty(\cdot))$  también es de Banach.

Por cierto,  $(l_\infty(\mathbb{Z}), \mathcal{N}_\infty(\cdot)) \equiv (\mathcal{B}(\mathbb{Z}, \mathbb{C}), \mathcal{N}_\infty(\cdot))$ . De hecho,  $(c_0(\mathbb{Z}), \mathcal{N}_\infty(\cdot))$  es un álgebra de Banach con el producto:

$$\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \cdot \{d_n\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{c_n \cdot d_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

---

### Proposición 3.5.1

La aplicación  $f \mapsto \{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  es una aplicación lineal continua inyectiva de  $L_1^{2\pi}(\mathbb{C})$  en  $c_0(\mathbb{Z})$ .

---

### Demostración:

Ya se sabe que dicha aplicación es lineal e inyectiva. Veamos que

$$\begin{aligned} |c_k| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ikx} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{N}_1(f), \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow \mathcal{N}_\infty(\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}) &\leq \frac{1}{2\pi} \mathcal{N}_1(f) \end{aligned}$$

Por tanto, esta aplicación lineal es continua y de norma menor o igual a  $\frac{1}{2\pi}$ . ■

### Observación 3.5.2

En los ejercicios se verá que dicha aplicación lineal no es suprayectiva (a diferencia del caso en  $L_2^{2\pi}$ ).

### 3.6. Núcleo de Dirichlet y teorema fundamental

Para determinar la posible convergencia puntual de una serie de Fourier se debe analizar la sucesión de sumas parciales en un punto  $x \in \mathbb{R}$ . Recuerde que

$$s_m(x) = \sum_{k=-m}^m c_k e^{ikx}, \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$$

Sustituyendo  $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$ , se obtiene que

$$\begin{aligned} s_m(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-m}^m \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ik(x-t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \sum_{k=-m}^m e^{ik(x-t)} \right] dt, \quad \forall m \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Entonces,

$$s_m(x) = f * D_m(x) \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$$

donde

$$D_m(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-m}^m e^{ikx}$$

es el llamado **Núcleo de Dirichlet**.

Una expresión alternativa para este núcleo es

$$D_m(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-m}^m e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \left[ 1 + \sum_{k=1}^m (e^{ikx} + e^{-ikx}) \right] = \frac{1}{2\pi} \left[ 2\Re \left( \sum_{k=1}^m e^{ikx} \right) - 1 \right]$$

para todo  $m \in \mathbb{N}^*$ . Tenemos además que,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m e^{ikx} &= \frac{1 - e^{i(m+1)x}}{1 - e^{ix}} \\ &= \frac{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i(m+\frac{1}{2})x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} \\ &= \frac{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i(m+\frac{1}{2})x}}{-2i \operatorname{sen} \frac{x}{2}} \\ &= \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \left(m + \frac{1}{2}\right) x}{-2i \operatorname{sen} \frac{x}{2}} + i \frac{-\operatorname{sen} \frac{x}{2} - \operatorname{sen} \left(m + \frac{1}{2}\right) x}{-2i \operatorname{sen} \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

así pues,

$$\begin{aligned} \Re \left( \sum_{k=1}^m e^{ikx} \right) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2} + \operatorname{sen} \left(m + \frac{1}{2}\right) x}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\operatorname{sen} \left(m + \frac{1}{2}\right) x}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}} \right] \end{aligned}$$

sustituyendo en el núcleo de Dirichlet se sigue que

$$D_m(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\operatorname{sen} \left(m + \frac{1}{2}\right) x}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}$$



si  $x$  no es múltiplo entero de  $2\pi$ . En caso contrario obtenemos que

$$D_m(x) = \frac{2m+1}{2\pi}$$

Note además que por definición de  $D_m(x)$ :

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} D_m(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\left(m + \frac{1}{2}\right)x}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}} dx$$

---

**Teorema 3.6.1 (Teorema fundamental para la convergencia puntual de una serie de Fourier)**

Sea  $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$  y fijemos  $x \in \mathbb{R}$ . Para que la serie de Fourier de  $f$  converja en  $x$  a una suma  $s(x)$  (*finita*), es necesario y suficiente que para algún  $0 < \delta < \pi$  se cumpla alguna de las dos condiciones siguientes:

1.  $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+t)-s(x)}{t} \operatorname{sen}\left(m + \frac{1}{2}\right) t dt = 0.$
  2.  $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \frac{f(x+t)+f(x-t)-2s(x)}{t} \operatorname{sen}\left(m + \frac{1}{2}\right) t dt = 0.$
- 

**Demostración:**

Probaremos que las integrales (1) y (2) son equivalentes (es decir que son la misma integral). En efecto,

$$\begin{aligned} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+t)-s(x)}{t} \operatorname{sen}\left(m + \frac{1}{2}\right) t dt &= \int_{-\delta}^0 \frac{f(x+t)-s(x)}{t} \operatorname{sen}\left(m + \frac{1}{2}\right) t dt \\ &\quad + \int_0^{\delta} \frac{f(x+t)-s(x)}{t} \operatorname{sen}\left(m + \frac{1}{2}\right) t dt \\ &= \int_0^{\delta} \frac{f(x-u)-s(x)}{-u} \operatorname{sen}\left(m + \frac{1}{2}\right) (-u) du \\ &\quad + \int_0^{\delta} \frac{f(x+t)-s(x)}{t} \operatorname{sen}\left(m + \frac{1}{2}\right) t dt \\ &= \int_0^{\delta} \frac{f(x+t)+f(x-t)-2s(x)}{t} \operatorname{sen}\left(m + \frac{1}{2}\right) t dt \end{aligned}$$

Para la demostración, recordemos que

$$s_m(x) = f * D_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) \frac{\operatorname{sen}\left(m + \frac{1}{2}\right)u}{\operatorname{sen} \frac{u}{2}} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \frac{\operatorname{sen}\left(m + \frac{1}{2}\right)u}{\operatorname{sen} \frac{u}{2}} du$$

además,

$$s(x) = s(x) \int_{-\pi}^{\pi} D_m(u) du = \int_{-\pi}^{\pi} s(x) \frac{\operatorname{sen}\left(m + \frac{1}{2}\right)u}{\operatorname{sen} \frac{u}{2}} du$$

por ende,

$$s_m(x) - s(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)-s(x)}{\operatorname{sen} \frac{t}{2}} \operatorname{sen}\left(m + \frac{1}{2}\right) t du$$

Sea  $0 < \delta < \pi$ , sentonces

$$s_m(x) - s(x) = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+t)-s(x)}{\operatorname{sen} \frac{t}{2}} \operatorname{sen}\left(m + \frac{1}{2}\right) t dt + \int_{\delta \leq |t| < \pi} \frac{f(x+t)-s(x)}{\operatorname{sen} \frac{t}{2}} \operatorname{sen}\left(m + \frac{1}{2}\right) t dt \right]$$

Como  $t \mapsto \frac{f(x+t)-s(x)}{\sin \frac{t}{2}}$  es integrable en  $\delta \leq |t| < \pi$ , por el teorema de Riemman-Lebesgue la segunda integral tiende a cero conforme  $m \rightarrow \infty$ . Por lo tanto,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [s_m(x) - s(x)] = 0 \iff \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+t) - s(x)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(m + \frac{1}{2}\right) t dt = 0$$

Veamos que

$$\begin{aligned} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+t) - s(x)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(m + \frac{1}{2}\right) t dt &= \int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+t) - s(x)}{t} \sin \left(m + \frac{1}{2}\right) t dt \\ &+ \int_{-\delta}^{-\delta} (f(x+t) - s(x)) \left[ \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right] \sin \left(m + \frac{1}{2}\right) t dt \end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} &= \frac{t - 2 \sin \frac{t}{2}}{2t \sin \frac{t}{2}} \\ &\stackrel{t \rightarrow 0}{=} \frac{t - 2 \left( \frac{t}{2} - \frac{t^3}{48} + O(t^3) \right)}{2t \left( \frac{t}{2} - O(t) \right)} \\ &\stackrel{t \rightarrow 0}{=} \frac{\frac{t^3}{48} + O(t^3)}{t^2 + 2tO(t)} \\ &\stackrel{t \rightarrow 0}{=} \frac{\frac{t^3}{48} + O(t^3)}{t^2 + O(t^2)} \\ &\stackrel{t \rightarrow 0}{=} \frac{t^3 \left( \frac{1}{48} + \frac{O(t^3)}{t^2} \right)}{t^2 \left( 1 + \frac{O(t^2)}{t^2} \right)} \\ &\stackrel{t \rightarrow 0}{=} \frac{t \left( \frac{1}{48} + \frac{O(t^3)}{t^2} \right)}{1 + \frac{O(t^2)}{t^2}} \\ &\stackrel{t \rightarrow 0}{=} 0 \end{aligned}$$

Si a la función  $t \mapsto \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{t}$  se le asigna el valor 0 en 0, se hace continua en  $[-\delta, \delta]$ . Así pues,

$$t \mapsto (f(x+t) - s(x)) \left[ \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right]$$

es integrable en  $[-\delta, \delta]$ . Por Riemman-Lebesgue la segunda integral tiende a 0 cuando  $m \rightarrow \infty$ . Por tanto se concluye que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+t) - s(x)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(m + \frac{1}{2}\right) t dt = 0 \iff \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+t) - s(x)}{t} \sin \left(m + \frac{1}{2}\right) t dt = 0$$

por la observación hecha anteriormente, esto es equivalente a

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_m(x) = s(x) \iff \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+t) - s(x)}{t} \sin \left(m + \frac{1}{2}\right) t dt = 0, \text{ para algún } 0 < \delta < \pi$$

■

### Observación 3.6.1

Por el teorema anterior, la convergencia de la serie de Fourier de  $f$  en un punto  $x$  y la eventual suma de esta serie de Fourier dependen solamente del comportamiento de  $f$  en alguna vecindad arbitrariamente pequeña de  $x$ . A esto se le llama **el principio de localización de Riemman**.

Esto es sorprendente, pues los coeficientes de Fourier de la función  $f$  dependen de los valores de  $f$  en todo el intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

### Teorema 3.6.2 (Criterio de Dini para la convergencia puntual de una serie de Fourier)

Sea  $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ . Para que la serie de Fourier de  $f$  converga en un punto  $x \in \mathbb{R}$  a una suma  $s(x)$  es necesario y suficiente que para algún  $0 < \delta < \pi$  la función siguiente sea integrable:

$$t \mapsto \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2s(x)}{t}$$

sea integrable en  $]0, \delta[$ .

#### Demostración:

$\Rightarrow$ ) : La condición  $\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - s(x)}{t} \right| dt < \infty$  implica la convergencia puntual de la serie de Fourier. En efecto,

$$\begin{aligned} & \int_{-\delta}^0 \left| \frac{f(x+t) - s(x)}{t} \right| dt + \int_0^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - s(x)}{t} \right| dt = \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - s(x)}{t} \right| dt < \infty \\ \Rightarrow & \int_0^{\delta} \left| \frac{f(x-u) - s(x)}{u} \right| du + \int_0^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - s(x)}{t} \right| dt = \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - s(x)}{t} \right| dt < \infty \\ & \Rightarrow \int_0^{\delta} \left| \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2s(x)}{t} \right| dt \leq \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - s(x)}{t} \right| dt < \infty \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ ) : Es inmediato del teorema de Riemman-Lebesgue y del teorema anterior. ■

### Corolario 3.6.1

Sea  $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ . Si en un punto  $x \in \mathbb{R}$  existen la derivada por la derecha  $f'_d(x)$  y por la izquierda  $f'_i(x)$ , entonces la serie de Fourier de  $f$  converge en  $x$  a  $f(x)$ .

#### Demostración:

Como existen las derivadas por la derecha e izquierda, para  $\varepsilon = 1 > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < t < \delta \Rightarrow \begin{cases} |f(x+t) - s(x)| \leq t |f'_d(x) + 1| \\ |f(x-t) - s(x)| \leq t |f'_i(x) + 1| \end{cases}$$

así pues,  $0 < t < \delta$  implica que

$$\left| \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \right| \leq |f'_d(x)| + |f'_i(x)| + 2$$

por tanto,  $t \mapsto \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t}$  es integrable en  $]0, \delta[$ . ■

## 3.7. Convergencia uniforme de una serie de Fourier

### Observación 3.7.1

Recordemos que un conjunto relativamente compacto en un espacio métrico  $(X, d)$  es aquel tal que su cerradura es compacta. Equivalentemente, es totalmente acotado.

---

**Lema 3.7.1 (Versión Uniforme del Teorema de Riemman-Lebesgue)**

Si  $\mathcal{F}$  es un conjunto relativamente compacto en  $L_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ , entonces para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $N > 0$  tal que

$$\lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| \geq N \Rightarrow \sup_{f \in \mathcal{F}} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{i\lambda x} dx \right| < \varepsilon$$

---

**Demostración:**

Como  $\mathcal{F}$  es relativamente compacto, entonces  $\mathcal{F}$  es totalmente acotado (ya que su cerradura por definición es compacta). Luego, dado  $\varepsilon > 0$  existe una familia finita de elementos de  $\mathcal{F}$ , digamos  $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{F}$  tales que las bolas abiertas  $B(f_1, \frac{\varepsilon}{2}), \dots, B(f_r, \frac{\varepsilon}{2})$  recubren a  $\mathcal{F}$ . Por Riemman-Lebesgue, existe  $N > 0$  tal que

$$\lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| \geq N \Rightarrow \left| \int_{-\pi}^{\pi} f_k(x) e^{i\lambda x} dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket$$

Sea  $f \in \mathcal{F}$  arbitrario. Existe  $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$  tal que  $f \in B(f_k, \frac{\varepsilon}{2})$ , esto es

$$\mathcal{N}_1(f - f_k) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Si  $\lambda \in \mathbb{R}$  es tal que  $|\lambda| > N$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{i\lambda x} dx \right| &\leq \left| \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f_k(x)] e^{i\lambda x} dx \right| + \left| \int_{-\pi}^{\pi} f_k(x) e^{i\lambda x} dx \right| \\ &< \mathcal{N}_1(f - f_k) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

lo que termina la prueba. ■

---

**Lema 3.7.2**

Sean  $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$  y  $E \subseteq [-\pi, \pi]$ . Se supone:

1.  $f$  es acotada en  $E$ .
2. Para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $0 < \delta < \pi$  tal que

$$\sup_{x \in E} \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dt < \varepsilon$$

Defina para cada  $x \in E$ ,

$$\varphi_x(t) = \frac{f(x+t) - f(x)}{t}, \quad \forall t \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$$

y extiéndase por periodicidad a todo  $\mathbb{R}$ . Si  $h \in \mathcal{L}_{\infty}^{2\pi}(\mathbb{C})$ , entonces la familia de funciones  $\{h\varphi_x\}_{x \in E}$  es relativamente compacta en  $L_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ .

---

**Demostración:**

Probaremos que la cerradura de este conjunto es secuencialmente compacto (luego compacto). Sea  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión en  $E$ . Hay que probar que  $\{h\varphi_{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$  contiene una subsucesión convergente en promedio.

Como  $E \subseteq [-\pi, \pi]$ , entonces  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  contiene una subsucesión que converge a algún punto de  $[-\pi, \pi]$ , digamos  $\{x_{\alpha(n)}\}_{n=1}^\infty$ . Ahora,  $\{f(x_{\alpha(n)})\}_{n=1}^\infty$  es una sucesión acotada en  $\mathbb{C}$ , luego posee una subsucesión  $\{f(x_{\beta \circ \alpha(n)})\}_{n=1}^\infty$  convergente. Para simplificar la notación, se puede suponer que la sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  original y la sucesión de valores  $\{f(x_n)\}_{n=1}^\infty$  son convergentes (en particular, de Cauchy).

Sea  $M > 0$  tal que  $|h| \leq M$  c.t.p. en  $\mathbb{R}$ . Sea  $\varepsilon < 0$  y  $0 < \delta < \pi$  como en el enunciado. Se afirma que  $\{h\varphi_{x_n}\}$  es de Cauchy en  $L_1^{2\pi}$ . En efecto, veamos que si  $n, m \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1(h\varphi_{x_n} - h\varphi_{x_m}) &= \int_{-\pi}^{\pi} |h(t)| \left| \frac{f(x_n + t) - f(x_n) - f(x_m + t) + f(x_m)}{t} \right| dt \\ &\leq M \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x_n + t) - f(x_n) - f(x_m + t) + f(x_m)}{t} \right| dt \\ &\quad + M |f(x_n) - f(x_m)| \int_{\delta \leq |t| < \pi} \frac{dt}{|t|} + M \int_{\delta \leq |t| < \pi} \left| \frac{f(x_n + t) - f(x_m + t)}{t} \right| dt \end{aligned}$$

Por la hipótesis, la primera integral a la derecha es  $< 2M\varepsilon$ . Como  $\{f(x_n)\}$  es de Cauchy, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n, m \geq n_0 \Rightarrow M |f(x_n) - f(x_m)| \int_{\delta \leq |t| < \pi} \frac{dt}{|t|} < M\varepsilon$$

Y, la tercera integral a la derecha es menor o igual a

$$\frac{M}{\delta} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x_n + t) - f(x_m + t)| dt$$

(mayorando a  $t \mapsto \frac{1}{|t|}$ ). Ahora, ya que la función  $y \mapsto f_y$  es uniformemente continua de  $\mathbb{R}$  en  $L_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ , existe  $\eta > 0$  tal que

$$|x_n - x_m| < \eta \Rightarrow \frac{M}{\delta} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x_n + t) - f(x_m + t)| dt < \delta \cdot \varepsilon$$

Por ser la sucesión  $\{x_n\}$  de Cauchy, existe  $N \geq n_0$  tal que

$$n, m \geq N \Rightarrow |x_n - x_m| < \eta \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |f(x_n + t) - f(x_m + t)| dt < M\varepsilon$$

Por tanto,  $n, m \geq N$  implica que

$$\mathcal{N}_1(h\varphi_{x_n} - h\varphi_{x_m}) \leq 4M\varepsilon$$

así,  $\{h\varphi_{x_n}\}$  es de Cauchy en  $L_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ , luego convergente. ■

**Teorema 3.7.1 (Criterio de Dini para la convergencia uniforme de una serie de Fourier)**

Sean  $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$  y  $E \subseteq [-\pi, \pi]$ . Se supone que  $f$  es acotada en  $E$  y que para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $0 < \delta < \pi$  tal que

$$\sup_{x \in E} \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dt < \varepsilon$$

Entonces, la serie de Fourier de  $f$  converge a  $f$  uniformemente en  $E$ .

**Demostración:**

Sea  $x \in E$ . Se tiene que

$$|s_m(x) - f(x)| = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x)}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} \operatorname{sen} \left( m + \frac{1}{2} \right) t dt$$

Hay que probar que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x)}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} \operatorname{sen} \left( m + \frac{1}{2} \right) t dt = 0 \text{ uniformemente con respecto a } x \in E$$

Se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x)}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} \operatorname{sen} \left( m + \frac{1}{2} \right) t dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \operatorname{sen} \left( m + \frac{1}{2} \right) t dt \\ &\quad + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \left[ \frac{t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} - 1 \right] \operatorname{sen} \left( m + \frac{1}{2} \right) t dt \end{aligned}$$

para  $t \in [-\pi, \pi[$  se define

$$h(t) = \begin{cases} \frac{t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} - 1 & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

se verifica rápidamente que  $h$  es continua en  $[-\pi, \pi[$ , luego acotada. Además, para cada  $x \in E$  se define

$$\varphi_x(t) = \frac{f(x+t) - f(x)}{t}, \quad \forall t \in [-\pi, \pi[$$

Por el último lema,  $\{\varphi_x\}_{x \in E}$  y  $\{h\varphi_x\}_{x \in E}$  son relativamente compactas en  $L_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ . Por la versión uniforme del teorema de Riemman-Lebesgue, entonces las dos integrales de arriba tienden a cero cuando  $m \rightarrow \infty$  uniformemente con respecto a  $x \in E$ . ■

### Observación 3.7.2

Veamos como se aplica el primer lema de la sección en la demostración de este teorema. La primera familia es relativamente compacta tomando  $h = 1$  y la segunda tomando a la  $h$  dada, siendo ambas acotadas (por ser continuas en un compacto y ser extendidas por periodicidad a todo  $\mathbb{R}$ ).

### Observación 3.7.3

Usando la convergencia de series no se puede reconstruir en general una función  $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}$  conociendo su serie de Fourier, de hecho, Kolmogorov demostró que existen funciones en  $\mathcal{L}_1^{2\pi}$  cuyas series de Fourier divergen en todo punto. También existen funciones en  $\mathcal{C}^{2\pi}$  cuyas series de Fourier divergen en algunos puntos.

La situación se arregla considerando un modo de convergencia distinto: la convergencia en el sentido de Cesáro.

## 3.8. Convergencia en sentido de Cesáro de series de Fourier en $\mathcal{L}_1^{2\pi}$

### Lema 3.8.1

Si  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión en un espacio normado  $(E, \|\cdot\|)$  converge a un límite  $l \in E$  y

$$b_n = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l$$

**Demostración:**

Veamos que si  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned}\|b_n - l\| &= \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=1}^n a_k - l \right\| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|a_k - l\|\end{aligned}$$

dado  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \|a_n - l\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}n > n_0 \Rightarrow \|b_n - l\| &\leq \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^{n_0} \|a_k - l\| \right) + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0+1}^n \|a_k - l\| \\ &\leq \underbrace{\frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^{n_0} \|a_k - l\| \right)}_{cte.} + \frac{n - n_0}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^{n_0} \|a_k - l\| \right) + \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

Además, existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  con  $n_1 > n_0$  tal que

$$n \geq n_1 \Rightarrow \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^{n_0} \|a_k - l\| \right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

luego,  $n \geq n_1$  implica que  $\|b_n - l\| < \varepsilon$ . ■

**Definición 3.8.1**

Sea  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  una serie en un espacio normado. Defina

$$s_n = \sum_{k=1}^n u_k \quad \text{y} \quad \sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$$

Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = s$ , se dice que la sucesión **converge en el sentido de Cesáro**.

Por el lema, si la serie converge en el sentido usual a  $s$ , entonces la serie converge en el sentido de Cesáro. La recíproca no es cierta en general (basta con observar lo que sucede con  $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ ).

En casos favorables la recíproca es cierta (más adelante se verá uno de esos casos).

Sea  $\{s_m\}_{m=1}^{\infty}$  la sucesión de sumas parciales de una serie de Fourier, se define

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n} [s_0(x) + \dots + s_{n-1}(x)], \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

con lo que decir que la serie de Fourier de una función  $f$  converge en un punto  $x \in \mathbb{R}$  en el sentido de Cesáro a una suma  $s(x)$  es decir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = s(x)$$

### 3.8.1. Núcleo de Fejér y el Teorema de Fejér

Es posible calcular explícitamente usando la fórmula

$$s_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m [a_k \cos kx + b_k \sen kx]$$

Resulta

$$\begin{aligned} \sigma_m(x) &= \frac{1}{n} \left[ n \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{k=1}^m [a_k \cos kx + b_k \sen kx] \right] \\ &= \frac{1}{n} \left[ n \frac{a_0}{2} + (n-1) + (n-1)(a_1 \cos x + b_1 \sen x) \right. \\ &\quad + \cdots + (n-k)(a_k \cos kx + b_k \sen kx) \\ &\quad \left. + \cdots + (a_{n-1} \cos(n-1)x + b_{n-1} \sen(n-1)x) \right] \end{aligned}$$

o sea,

$$\sigma_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left( 1 - \frac{k}{n} \right) [a_k \cos kx + b_k \sen kx]$$

Alternativamente,  $\sigma_n(x)$  se puede calcular como sigue:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n} \left[ \sum_{k=0}^{n-1} s_k(x) \right] = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} f * D_m(x)$$

donde  $D_m$  es el núcleo de Dirichlet. Entonces,

$$\sigma_n(x) = f * k_n(x)$$

donde

$$k_n = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} D_m$$

el cual es llamado el **núcleo de Fejér**.

Se tiene

$$\begin{aligned} k_n(x) &= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} D_m(x) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\sen \left( m + \frac{1}{2} \right) x}{\sen \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{n \sen \frac{x}{2}} \sum_{m=0}^{n-1} \sen \left( m + \frac{1}{2} \right) x \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{n-1} e^{imx} &= \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} \\ &= \frac{1 - e^{inx}}{e^{i\frac{x}{2}} (e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}})} \\ \Rightarrow \sum_{m=0}^{n-1} e^{imx} &= i \frac{1 - e^{inx}}{2 \sen \frac{x}{2}} \end{aligned}$$



igualando los coeficientes de  $i$ :

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{n-1} \operatorname{sen} \left( m + \frac{1}{2} \right) x &= \frac{1 - \cos nx}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}} \\ &= \frac{2 \operatorname{sen}^2 n \frac{x}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}} \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2 n \frac{x}{2}}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}} \\ \therefore k_n(x) &= \frac{1}{2\pi n} \cdot \frac{\operatorname{sen}^2 n \frac{x}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}\end{aligned}$$

si  $x$  no es múltiplo entero de  $2\pi$ . Para tales  $x$ , se tiene que  $k_n(x) = \frac{n}{2\pi}$ .

### Proposición 3.8.1

$\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión de Dirac fuerte en  $\mathcal{L}_1^{2\pi}$ .

### Demostración:

Claramente  $k_n \geq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ . Además,

$$k_n = \frac{1}{n} (D_0 + \cdots + D_{n-1})$$

y

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_m = 1 \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} k_n = 1$$

Si  $0 < \delta < \pi$ , entonces

$$\sup_{\delta \leq x < \pi} k_n(x) \leq \frac{1}{2\pi n} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{\delta}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

■

### Teorema 3.8.1 (Teorema de Féjer)

Sea  $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ .

1. Si  $1 \leq p < \infty$  y  $f \in \mathcal{L}_p^{2\pi}(\mathbb{C})$  entonces, la serie de Fourier de  $f$  converge en el sentido de Cesáro a  $f$  en  $p$ -promedio.
2. Si en un punto  $x \in \mathbb{R}$  existen  $f(x^+)$  y  $f(x^-)$  (siendo ambos finitos) entonces la serie de Fourier de  $f$  converge en el sentido de Cesáro en el punto  $x$  a

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

en particular, si  $f$  es continua en ese punto la serie de Fourier de  $f$  converge en el punto  $x$  a  $f(x)$  en el sentido de Cesáro.

3. Si  $f$  es continua en  $J \subseteq \mathbb{R}$  abierto, entonces la serie de Fourier de  $f$  converge en el sentido de Cesáro a  $f$  uniformemente en todo compacto  $C \subseteq J$ .
4. Si  $f$  es continua periódica, entonces la serie de Fourier de  $f$  converge en el sentido de Cesáro a  $f$  uniformemente en  $\mathbb{R}$ .

**Demostración:**

Es inmediata de la definición del núcleo de Fejér  $k_n$  y del hecho que  $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión de Dirac fuerte. ■

### 3.9. Convergencia c.t.p. en el sentido de Cesáro de series de Fourier en $\mathcal{L}_1^{2\pi}$

**Definición 3.9.1**

Sea  $f \in \mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  localmente integrable en  $\mathbb{R}$ . Se dice que un punto  $x \in \mathbb{R}$  es un **punto de Lebesgue** de  $f$  si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(x+t) - f(x)| dt = 0$$

el conjunto de puntos de Lebesgue de una función  $f$  se llama **conjunto de Lebesgue de  $f$** .

**Ejemplo 3.9.1**

Si  $f$  es continua en  $x \in \mathbb{R}$ , entonces  $x$  es un punto de Lebesgue.

Más adelante se demostrará que si  $f$  es localmente integrable en  $\mathbb{R}$ , entonces el complemento del conjunto de Lebesgue de  $f$  es despreciable. Osea que casi todo punto de  $\mathbb{R}$  es de Lebesgue. Por el momento no se probará este resultado.

**Observación 3.9.1**

Se tiene siempre lo siguiente:

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x, \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

por la concavidad de  $x \mapsto \sin x$ .

**Teorema 3.9.1 (Teorema de Féjer-Lebesgue)**

Si  $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$  entonces en todo punto de Lebesgue  $x$  de  $f$  (es decir, c.t.p. en  $\mathbb{R}$ ) la serie de Fourier de  $f$  converge en el sentido de Cesáro a  $f(x)$ .

**Demostración:**

Sea  $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$  y  $x \in \mathbb{R}$  un punto de Lebesgue de  $f$ . Por el cambio de variable  $t = -u$  se tiene que

$$\frac{1}{h} \int_0^h |f(x-t) - f(x)| dt = \frac{1}{-h} \int_0^{-h} |f(x+u) - f(x)| du$$

Por tanto, también se cumple

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{-h} \int_0^{-h} |f(x+u) - f(x)| du = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(x-t) - f(x)| dt = 0$$

(recuerde que la integral es orientada). Usando la paridad de  $k_n$  y el cambio de variable  $t = -u$  obtenemos

$$\begin{aligned}\sigma_n(x) &= f * k_n(x) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) k_n(t) dt \\ &= \int_{-\pi}^0 f(x-t) k_n(t) dt + \int_0^{\pi} f(x-t) k_n(t) dt \\ &= \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)] k_n(t) dt\end{aligned}$$

también, por la paridad de  $k_n$ :  $\int_0^{\pi} k_n(t) dt = \frac{1}{2}$ , luego

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_0^{\pi} 2f(x) k_n(t) dt \\ \Rightarrow \sigma_n(x) - f(x) &= \int_0^{\pi} g_x(t) k_n(t) dt \\ \Rightarrow |\sigma_n(x) - f(x)| &\leq \int_0^h |g_x(t)| k_n(t) dt\end{aligned}$$

donde

$$g_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Observemos ahora que

$$\left| \int_0^h |g_x(t)| dt \right| \leq \left| \int_0^h |f(x+t) - f(x)| dt \right| + \left| \int_0^h |f(x-t) - f(x)| dt \right|$$

para todo  $h \in \mathbb{R}$ . Por ser  $x$  un punto de Lebesgue de  $f$  dado  $\varepsilon > 0$  existe  $0 < \delta < \pi$  tal que

$$0 < h < \delta \Rightarrow \int_0^h |g_x(t)| dt < h\varepsilon$$

Escriba  $G_x(h) = \int_0^h |g_x(t)| dt$ , para todo  $h \in \mathbb{R}$ . Se tiene que

$$0 < h < \delta \Rightarrow G_x(h) < h\varepsilon$$

Sea  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{n} < \delta$ . Entonces

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leq \int_0^{\frac{1}{n}} |g_x(t)| k_n(t) dt + \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} |g_x(t)| k_n(t) dt + \int_{\delta}^{\pi} |g_x(t)| k_n(t) dt$$

Recordemos que

$$0 \leq k_n(t) = \frac{1}{2\pi n} \frac{\sin^2 n \frac{t}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}} \leq \frac{1}{2\pi n} \frac{n^2 \left(\frac{t}{2}\right)^2}{\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \left(\frac{t}{2}\right)^2} = \frac{n\pi}{8}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Luego

$$\int_0^{\frac{1}{n}} |g_x(t)| k_n(t) dt \leq \frac{n\pi}{8} \int_0^{\frac{1}{n}} |g_x(t)| dt \leq \frac{n\pi}{8} \left( \frac{1}{n} \cdot \varepsilon \right)$$

Ahora, si  $\frac{1}{n} < t < \delta$ :

$$\begin{aligned}k_n(t) &= \frac{1}{2\pi n} \frac{\sin^2 \left(n \frac{t}{2}\right)}{\sin^2 \frac{t}{2}} \\ &\leq \frac{1}{2\pi n} \frac{1}{\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \left(\frac{t}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\pi}{2n} \frac{1}{t^2}\end{aligned}$$

Integrando por partes,

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{n}}^{\delta} |g_x(t)| k_n(t) dt &\leq \frac{\pi}{2n} \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} |g_x(t)| \frac{dt}{t^2} \\
&= \frac{\pi}{2n} \left[ \frac{G_x(t)}{t^2} \Big|_{\frac{1}{n}}^{\delta} + 2 \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \frac{G_x(t)}{t^3} dt \right] \\
&= \frac{\pi}{2n} \left[ \frac{G_x(\delta)}{\delta^2} - n^2 G_x\left(\frac{1}{n}\right) + 2 \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \frac{G_x(t)}{t^3} dt \right] \\
&\leq \frac{\pi}{2n} \left[ \frac{G_x(\delta)}{\delta^2} + 2 \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \frac{G_x(t)}{t^3} dt \right] \\
&\leq \frac{\pi}{2n} \left[ \frac{\delta \varepsilon}{\delta^2} + 2 \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \frac{t \varepsilon}{t^3} dt \right] \\
&= \frac{\pi}{2n} \left[ \frac{\varepsilon}{\delta} + 2\varepsilon \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \frac{dt}{t^2} \right] \\
&= \frac{\pi}{2n} \left[ \frac{\varepsilon}{\delta} + 2\varepsilon \left( n - \frac{1}{\delta} \right) \right] \\
&\leq \frac{\pi}{2n} [n\varepsilon + 2n\varepsilon] \\
&= \frac{2\pi}{2} \varepsilon
\end{aligned}$$

Ahora, para  $\delta \leq t < \pi$  se tiene

$$k_n(t) = \frac{1}{2\pi n} \frac{\sin^2\left(n\frac{t}{2}\right)}{\sin^2\frac{t}{2}} \leq \frac{1}{2\pi n} \frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}}$$

Entonces,

$$\int_{\delta}^{\pi} |g_x(t)| k_n(t) dt \leq \frac{1}{2\pi n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} \int_{\delta}^{\pi} |g_x(t)| dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

pues las dos cantidades de la derecha no dependen de  $n$  y más aún, son constantes (al menos la segunda está acotada pues la función  $f$  es integrable en  $[0, \pi]$ ). Existe pues  $N > \frac{1}{\delta}$  tal que

$$n \geq N \Rightarrow \frac{1}{2\pi n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} \int_{\delta}^{\pi} |g_x(t)| dt < \varepsilon$$

Por tanto,

$$n \geq N \Rightarrow |\sigma_n(x) - f(x)| < \frac{\pi}{8}\varepsilon + \frac{3\pi}{2}\varepsilon + \varepsilon = \left(\frac{13}{8}\pi + 1\right)\varepsilon$$

lo que prueba el resultado. ■

### Corolario 3.9.1

Sea  $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ . Si la serie de Fourier de  $f$  converge en el sentido usual c.t.p. en  $\mathbb{R}$  a una función  $g$ , entonces  $f = g$  c.t.p. en  $\mathbb{R}$ .

### Demostración:

Por el teorema anterior, la serie de Fourier de  $f$  converge en el sentido de Cesáro a  $f$  c.t.p. en  $\mathbb{R}$ . Como dicha serie converge en el sentido usual a  $g$  c.t.p. en  $\mathbb{R}$ , entonces también lo hace en el sentido de Cesáro. Por tanto,  $f = g$  c.t.p. en  $\mathbb{R}$ . ■

---

**Teorema 3.9.2 (Teorema de Hardy-Landau)**

Sea  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  una serie en un espacio normado  $(E, \|\cdot\|)$  que converge en el sentido de Cesáro. Si existe  $A > 0$  tal que

$$\|u_n\| \leq \frac{A}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

entonces, la serie converge en el sentido usual.

---

**Demostración:**

Sea  $s_m = \sum_{k=1}^m u_k$  y  $\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n s_m$  (es decir que  $\sum_{m=1}^n s_m = n\sigma_n$ ), para todo  $n, m \in \mathbb{N}$ . Por hipótesis existe  $\sigma$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma$$

Sea  $\varepsilon > 0$  tal que  $0 < \varepsilon < 1$ . Entonces, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \geq N \Rightarrow \|\sigma - \sigma_n\| < \varepsilon$$

Sean  $m, n \in \mathbb{N}$  tales que  $m > n \geq N$ . Por definición se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} s_m & = & u_1 + \cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots + u_m \\ s_{m-1} & = & u_1 + \cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{m-1} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{n+2} & = & u_1 + \cdots + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} \\ s_{n+1} & = & u_1 + \cdots + u_n + u_{n+1} \end{array} \right.$$

Sumando todas las ecuaciones y agregando términos adicionales (de tal forma que la diagonal incompleta del sistema se complete) obtenemos que

$$\Rightarrow (m-n)s_m = s_m + s_{m-1} + \cdots + s_{n+1} + (m-n-1)u_m + (m-n-2)u_{m-1} + \cdots + 2u_{n+3} + u_{n+2}$$

por tanto,

$$(m-n)(s_m - \sigma) = m(\sigma_m - \sigma) - n(\sigma_n - \sigma) + (m-n-1)u_m + (m-n-2)u_{m-1} + \cdots + 2u_{n+3} + u_{n+2}$$

Por la hipótesis, tomando norma y mayorando por desigualdad triangular, se sigue que

$$\begin{aligned} (m-n)\|s_m - \sigma\| &\leq (m+n)\varepsilon + (m-n-1)\frac{A}{m} + (m-n-2)\frac{A}{m-1} + \cdots + 2\frac{A}{n+3} + \frac{A}{n+2} \\ &\leq (m+n)\varepsilon + \frac{A}{n} [1 + 2 + \cdots + (m-n-1)] \\ &= (m-n)\varepsilon + 2n\varepsilon + \frac{A(m-n-1)(m-n)}{n \cdot 2} \\ &\leq (m-n)\varepsilon + 2n\varepsilon + \frac{A(m-n)^2}{n \cdot 2} \\ \Rightarrow \|s_m - \sigma\| &\leq \varepsilon + \frac{2n\varepsilon}{m-n} + \frac{A}{2n}(m-n) \\ &= \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{\left(\frac{m}{n} - 1\right)} + \frac{A}{2} \left(\frac{m}{n} - 1\right) \end{aligned}$$

Suponga por el momento que para toda  $m \in \mathbb{N}$  suficientemente grande se puede encontrar  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$m > n \geq N$$

y

$$\sqrt{\varepsilon} \leq \frac{m}{n} - 1 \leq 2\sqrt{\varepsilon}$$

Se seguiría de la ecuación anterior que

$$\begin{aligned} \|s_m - \sigma\| &< \varepsilon + 2\sqrt{\varepsilon} + A\sqrt{\varepsilon} \\ \Rightarrow \|s_m - \sigma\| &< (3 + a)\sqrt{\varepsilon} \end{aligned}$$

con lo que el teorema estaría probado. La condición enunciada anteriormente es equivalente a decir que

$$\frac{m}{1 + 2\sqrt{\varepsilon}} \leq n < \frac{m}{1 + \sqrt{\varepsilon}}$$

para que exista  $n \in \mathbb{N}$  que cumpla lo anterior es suficiente que

$$\begin{aligned} \frac{m}{1 + \sqrt{\varepsilon}} - \frac{m}{1 + 2\sqrt{\varepsilon}} &\geq 1 \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\varepsilon}m}{(1 + \sqrt{\varepsilon})(1 + 2\sqrt{\varepsilon})} &\geq 1 \\ &\Leftarrow \frac{\sqrt{\varepsilon}m}{6} \geq 1 \end{aligned}$$

Así pues, si se toma  $m > \frac{6}{\sqrt{\varepsilon}}$  y se cumple que podemos tomar  $n \in \mathbb{N}$  con  $m > n$  tal que

$$\sqrt{\varepsilon} \leq \frac{m}{n} - 1 \leq 2\sqrt{\varepsilon}$$

Entonces la condición estará probada. ¿Qué más hay que pedir a  $m$  para que se cumpla que  $m > n \geq N$ ? Para que también se cumpla la otra condición basta con pedir que

$$\begin{aligned} \frac{m}{1 + 2\sqrt{\varepsilon}} &\geq N \\ \Rightarrow m &\geq (1 + 2\sqrt{\varepsilon})N \end{aligned}$$

así pues, si  $m \geq \max \left\{ \frac{6}{\sqrt{\varepsilon}}, (1 + 2\sqrt{\varepsilon})N \right\}$  con lo cual podemos elegir  $n \geq N$  con  $m > n \geq N$  que cumple lo deseado. ■

### Corolario 3.9.2

Sea  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión en el espacio normado  $\mathcal{B}(S, E)$  de funciones acotadas de  $S$  en un espacio normado  $E$ , provisto de la norma uniforme. Si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  converge en el sentido de Cesáro uniformemente en  $S$  y existe  $A > 0$  tal que

$$\|u_n(x)\| \leq \frac{A}{n}, \quad \forall x \in S \text{ y } \forall n \in \mathbb{N}$$

entonces, la serie converge en el sentido usual uniformemente en  $S$ .

### Demostración:

Es inmediato del teorema anterior. ■

## 3.10. Teorema de Jordan

Recuerde que una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  es de variación acotada si el conjunto de sumas

$$S_{\Delta}(f) = \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

donde  $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$  es una subdivisión finita de  $[a, b]$ , es acotado en  $\mathbb{R}$ . En tal caso la variación de  $f$  en  $[a, b]$  se define como

$$V_f([a, b]) = \sup_{\Delta} S_{\Delta}(f)$$

Se sabe que toda función de variación acotada es acotada en  $[a, b]$ . En general, una función de variación acotada no necesariamente es continua en  $[a, b]$  ni viceversa. Sin embargo, toda función monótona o de clase  $C^1$  en  $[a, b]$  es de variación acotada en  $[a, b]$ . También las monótonas por trozos.

También se sabe que para una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es de variación acotada si y sólo si  $\Re f$  e  $\Im f$  lo son en  $[a, b]$ . Además, el conjunto de funciones de variación acotada es un álgebra con identidad sobre el campo  $\mathbb{K}$ . Finalmente,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es de variación acotada en  $[a, b]$  si y sólo si  $f$  se puede escribir como diferencia de dos funciones monótonas.

### Observación 3.10.1

Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  es una función periódica de periodo  $2\pi$  y si la restricción de  $f$  a algún intervalo compacto de longitud  $2\pi$  es de variación acotada, entonces  $f \in \mathcal{L}_{\infty}^{2\pi}$ .

### Lema 3.10.1

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  periódica de periodo  $2\pi$  y de variación acotada en  $[-\pi, \pi]$ . Entonces, existe una constante  $A > 0$  tal que los coeficientes de Fourier  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  de  $f$  satisfacen lo siguiente:

$$|c_k| \leq \frac{A}{|k|}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

### Demostración:

Considerando por separado las partes real e imaginaria de la función se puede suponer que  $f$  es real y más aún, que es monótona (pues al ser  $f$  de variación acotada es la diferencia de funciones monótonas).

Se tiene

$$\begin{aligned} |c_k| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} [2|f(\pi)| + |f(-\pi)|] \max_{-\pi \leq x \leq \pi} \left| \int_{-\pi}^x e^{-ikt} dt \right| \end{aligned}$$

donde la primera desigualdad es por el segundo teorema del valor medio. Además,

$$\left| \int_{-\pi}^x e^{-ikt} dt \right| = \left| \frac{e^{ik\pi} - e^{-ikx}}{ik} \right| \leq \frac{2}{|k|}$$

para todo  $-\pi \leq x \leq \pi$ . Por tanto

$$|c_k| \leq \frac{1}{\pi} [2|f(\pi)| + |f(-\pi)|] \frac{1}{|k|}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Tomando  $A = \frac{1}{\pi} [2|f(\pi)| + |f(-\pi)|] > 0$  se sigue el resultado (esto si la función no es cero c.t.p. en  $\mathbb{R}$ , en tal caso basta con tomar  $A = 1$ ). ■

---

**Teorema 3.10.1 (Teorema de Jordan)**

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  periódica de periodo  $2\pi$  y de variación acotada en  $[-\pi, \pi]$ . Entonces,

1. Para todo  $1 \leq p < \infty$ , la serie de Fourier de  $f$  converge en el sentido usual a  $f$  en  $p$ -promedio, o sea

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{N}_p(f - s_m) = 0$$

2. Si en un punto  $x \in \mathbb{R}$  existen los límites laterales  $f(x^+)$  y  $f(x^-)$ , entonces la serie de Fourier de  $f$  converge en el sentido usual en  $x$  a  $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ . En particular, si  $f$  es continua en  $x$  se sigue que la serie de Fourier de  $f$  converge en  $x$  a  $f(x)$  en el sentido usual (hablando de convergencia puntual).
  3. Si  $f$  es continua en un abierto  $J \subseteq \mathbb{R}$ , entonces la serie de Fourier de  $f$  converge en el sentido usual a  $f$  uniformemente en todo compacto contenido en  $J$ .
  4. Si  $f$  es continua en  $\mathbb{R}$ , entonces la serie de Fourier de  $f$  converge en el sentido usual a  $f$  uniformemente en  $\mathbb{R}$ .
- 

**Demostración:**

Sean  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  los coeficientes de Fourier de  $f$ . Por el lema anterior se tiene que existe  $A > 0$  tal que

$$|c_k| \leq \frac{A}{|k|}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Sea  $m \geq 2$ . Se tiene

$$s_{m-1} - s_{m-2} = c_{m-1}e^{i(m-1)x} + c_{-(m-1)}e^{-i(m-1)x}$$

de donde,

$$\begin{aligned} |s_{m-1} - s_{m-2}| &\leq |c_{m-1}| + |c_{-(m-1)}| \\ &\leq \frac{2A}{m-1} \\ &= \frac{m}{m-1} \cdot \frac{2A}{m} \\ &\leq \frac{4A}{m}, \quad \forall m \geq 2 \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_p(s_{m-1} - s_{m-2}) &\leq \frac{4A}{m} \mathcal{N}_p(1) \\ &\leq \frac{4(2\pi)^{1/p}A}{m}, \quad \forall m \geq 2 \end{aligned}$$

El teorema de Jordan se sigue ahora del teorema de Fejér y de Hardy-Landau. Para obtener 1) se considera la serie de Fourier de  $f$  como una serie en el espacio de Banach  $L_p^{2\pi}(\mathbb{C})$ .

Para obtener 2), se considera la serie de Fourier de  $f$  en el punto  $x$  como una serie en el espacio de Banach  $\mathbb{C}$ . Para 3) se fija un compacto  $C \subseteq J$  y se considera la serie de Fourier de  $f$  como una serie en el espacio de Banach  $\mathcal{BC}(K, \mathbb{C})$  provisto de la norma uniforme.

De forma similar a 3), en 4) se considera a la serie de Fourier de  $f$  como una serie en  $\mathcal{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , provisto de la norma uniforme. ■



---

**Corolario 3.10.1**

Sea  $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}$  tal que  $\int_{-\pi}^{\pi} f = 0$  y sea  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  la integral indefinida

$$F(x) = c + \int_0^x f(t)dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

donde  $c \in \mathbb{R}$ . Entonces,  $F \in \mathcal{C}^{2\pi}(\mathbb{K})$  y la serie de Fourier de  $F$  converge a  $F$  uniformemente en  $\mathbb{R}$ .

---

**Demostración:**

Ya se sabe en esas condiciones que  $F \in \mathcal{C}^{2\pi}(\mathbb{K})$ . El teorema se seguirá del teorema de Jordan si se prueba que  $F$  es de variación acotada en  $[-\pi, \pi]$ .

Sea  $x_0 = -\pi < x_1 < \dots < x_k = \pi$ . Se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |F(x_k) - F(x_{k-1})| &= \sum_{k=1}^n \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f| \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} |f| < \infty \end{aligned}$$

por tanto,  $f$  es de variación acotada en  $[-\pi, \pi]$ . ■

**Ejemplo 3.10.1**

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periódica de periodo  $2\pi$  tal que

$$f(x) = \pi - |x|, \quad \forall x \in [-\pi, \pi[$$

Por el teorema de Jordan se sigue que la serie de Fourier de  $f$  converge a  $f$  uniformemente en  $\mathbb{R}$  (pues la función  $f$  es continua en  $\mathbb{R}$ ). Calculemos los coeficientes de Fourier de  $f$ :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi - |x|) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 (\pi - |x|) \cos nx dx + \int_0^{\pi} (\pi - |x|) \cos nx dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 (\pi + x) \cos nx dx + \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos nx dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos nx dx \\ &= 2 \int_0^{\pi} \cos nx dx - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx \end{aligned}$$

si  $n = 0$ :

$$a_0 = 2 \int_0^{\pi}$$

y para  $n \geq 1$ :

$$a_n = 2 \int_0^\pi \cos nx dx - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx dx$$

donde, haciendo el cambio de variable  $u = nx$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos nx dx &= \int_0^{n\pi} \frac{\cos u du}{n} \\ &= \frac{1}{n} \sin u \Big|_0^{n\pi} \\ &= \frac{1}{n} [\sin n\pi - 0] \\ &= 0 \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x \cos nx dx &= \int_0^{n\pi} \frac{u}{n} \cos u \frac{du}{n} \\ &= \frac{1}{n^2} \int_0^{n\pi} u \cos u du \\ &= \frac{1}{n^2} \left[ u \sin u \Big|_0^{n\pi} - \int_0^{n\pi} \sin u du \right] \\ &= \frac{1}{n^2} \left[ n\pi \sin n\pi - 0 + \cos u \Big|_0^{n\pi} \right] \\ &= \frac{1}{n^2} \left[ n\pi \sin n\pi - 0 + \cos u \Big|_0^{n\pi} \right] \\ &= \frac{1}{n^2} \cos u \Big|_0^{n\pi} \\ &= \frac{1}{n^2} [(-1)^n - 1] \end{aligned}$$

por tanto,

$$a_n = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2} [(-1)^n - 1] = \frac{2}{\pi n^2} [(-1)^{n+1} + 1]$$

y, como  $f$  es par, entonces  $b_n = 0$ . Por tanto, la serie de Fourier de  $f$  es:

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)^2} \cos(2k-1)x$$

Por el criterio de Dini:

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)^2} \cos(2k-1)x = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathbb{R} \\ \pi - |x| & \text{si } -\pi \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Si  $x = 0$ :

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)^2} = \frac{\pi}{2}$$

luego,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Si  $x = \pi$  se puede hacer lo mismo. Además,

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} + \frac{1}{4}\alpha \\
 \Rightarrow \frac{3}{4}\alpha &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \\
 \Rightarrow \alpha &= \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi^2}{8} \\
 &= \frac{\pi^2}{6}
 \end{aligned}$$

Además, por Jordan la serie de Fourier de  $f$  converge a  $f$  uniformemente en  $\mathbb{R}$ . Más aún,  $f \in \mathcal{L}_2^{2\pi}$ , luego por Parseval:

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [|a_k|^2 + |b_k|^2] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|$$

por tanto,

$$\frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\pi - |x|| dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

con lo que se llega a que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

y,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$$