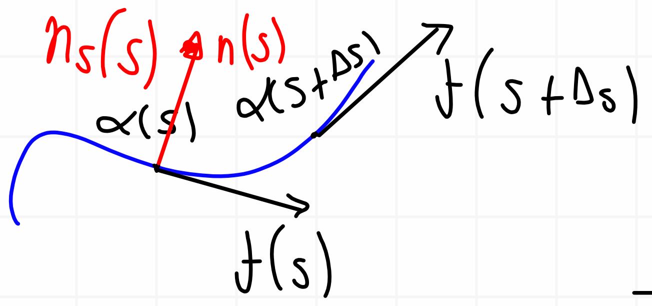
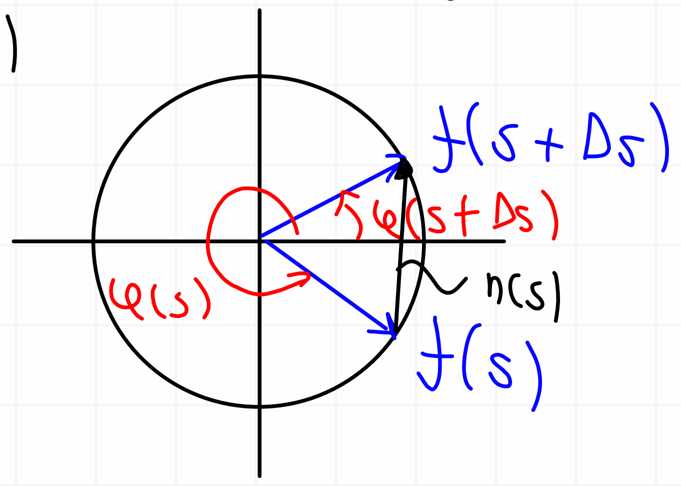
CURVAS PLANAS.

Sea $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular tal que $\alpha(s) = (x(s), y(s), 0)$.
con $x, y \in C^\infty(\mathbb{R})$, la cual está parametrizada por su longitud de arco s.

Veamos la curvatura de α: con α teniendo la siguiente traza:



Podemos usar el mapeo de Gauss y, hacer lo siguiente:



Vemos además que

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{t(s+\Delta s)-t(s)}{\Delta s} = t' = Kn$$

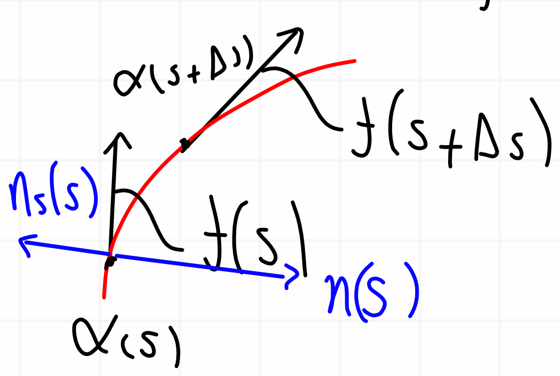
es decir, n va en la dirección de t', pero podemos aproximar a n como el vector $t(s+\Delta s)-t(s)$, el cual sería $n(s)$ (tomando a $\Delta s>0$). Lo que ocurrirá aquí es que $\Delta s>0$ y φ será una fución creciente en ese pequeño intervalo.

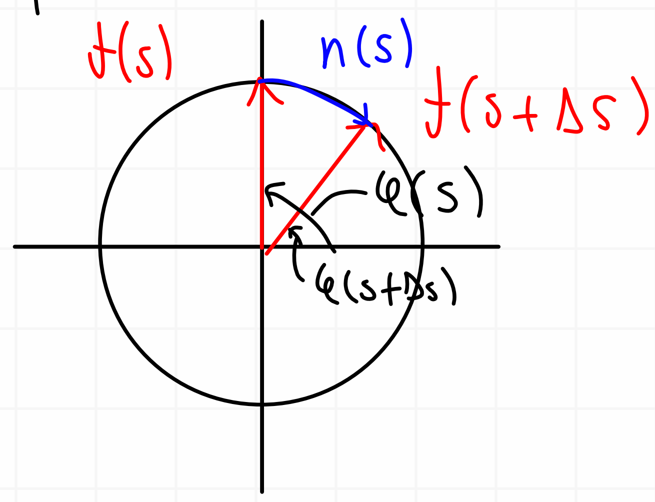
Lo anterior puede generalizarse, y no depende (el vector n) de la dirección en que se recorre la curva.

Ahora, probaremos que existe la función φ (llamada ángulo de giro), la cual es única, y cumple lo anterior.

Habría que probar que, si φ es creciente en un intervalo $J \subseteq I$, entonces la curvatura con signo será positiva. Y, si es decreciente, entonces será negativa. Así, en el ejemplo anterior $K_s>0$ (pues $n=n_s$, luego como $t'=K_s n_s = Kn \Rightarrow K_s = K > 0$).

Veamos otro ejemplo rápidamente:





Aquí ocurre lo contrario del ejemplo anterior, y $n=-n_s$ (van en direcciones opuestas). Lo anterior refuerza más la idea de que φ determina el signo de la curvatura con signo, pues aquí φ es decreciente y, $K_s<0$ (pues como $t'=Kn=K_s n_s \Rightarrow Kn=-K_s n \Rightarrow K=-K_s>0 \Rightarrow K_s<0$)

Interpretación de K_s

Antes de analizar a φ, veremos que pasa con una curva arbitraria, y su curvatura con signo.

Sea $\gamma: L \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular sin puntos singulares de orden 1 (γ no necesariamente es parametrizada por su longitud de arco).

Si $\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ es una reparametrización por su longitud de arco, entonces: t está definida como:

$$\vec{t} = \frac{d}{ds}\alpha$$

Como $\alpha(s(t)) = \gamma(t)$, $\forall\, t \in I$, con s la longitud de arco de α, entonces

$$\alpha(s) = \gamma(t(s))$$

luego:

$$\begin{aligned}\vec{t} &= \frac{d}{ds}(\gamma(t(s))) \\ &= \frac{d\gamma(t(s))}{ds} \\ &= \frac{d\gamma/dt}{ds/dt} = \gamma' \cdot \frac{1}{\|\gamma'\|}\end{aligned}$$

la cual está bien definida, pues γ es curva regular. Veamos también que

$$\frac{d\vec{t}}{dt} = \frac{d\vec{t}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \vec{t}\,' \cdot \|\gamma'\| = K_s n_s \cdot \|\gamma'\|$$

pues $\vec{t}\,' = K_s n_s$ ($\vec{t}$ está dependiendo de α, así, depende del parámetro s). Así

$$\frac{d\vec{t}(s)}{ds} = n_s(s)\cdot K_s(s)$$

Proposición 2.2.1 (Pressley).

Sea $\alpha: (a,b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada por longitud de arco s, $s_0 \in (a,b)$ y φ_0 tal que $\frac{d\alpha}{ds}(s_0) = (\cos\varphi_0, \operatorname{sen}\varphi_0)$. Entonces existe una única función suave $\varphi: (a,b) \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(s_0) = \varphi_0$ y $\alpha'(s) = (\cos(\varphi(s)), \operatorname{sen}(\varphi(s)))$, $\forall\, s \in (a,b)$.

Dem:

Como α es regular, podemos expresar $\alpha'(s) = (f(s), g(s))$,

$\forall s \in (a,b)$, siendo f y g tales que:

$$f^2(s)+g^2(s)=1, \ \forall s\in(a,b).$$

lo cual implica que

$$\frac{d}{ds}\left(f^2(s)+g^2(s)\right)=2f\cdot f'(s)+2g\cdot g'(s)=0$$

$$\Rightarrow f\cdot f'(s)+g\cdot g'(s)=0, \ \forall s\in(a,b) \ldots (1)$$

(Lo anterior es cierto, pues f es parametrizada por su longitud de arco s). La motivación de la demostración es un dato que queremos conocer, pues si

Nota: $f=\cos\varphi$ y $g=\operatorname{sen}\varphi \Rightarrow f'=-\operatorname{sen}\varphi\cdot\varphi'$ y $g'=\cos\varphi\cdot\varphi'$

entonces $-f'\operatorname{sen}\varphi=f'g$ y $g'\cos\varphi=g'f$, luego:

$$g'f-fg'=g'\cos\varphi-f'\operatorname{sen}\varphi=\cos^2\varphi\cdot\varphi'+\operatorname{sen}^2\varphi\cdot\varphi'$$

$$=(\cos^2\varphi+\operatorname{sen}^2\varphi)\cdot\varphi'=\varphi'$$

por lo tanto, φ será:

$$\varphi=C+\int\varphi'=C+\int_{s_0}^{s}g'f-f'g$$

así, el problema se reduce a resolver esta ecuación diferencial.

Continuando:

Donde f y g son suaves. Se define $\varphi:(a,b)\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por:

$$\forall s\in(a,b), \ \varphi(s)=\varphi_0+\int_{s_0}^{s}g'f-fg'$$

Claramente $\varphi(s_0)=\varphi_0$, y φ es suave, pues $\varphi'(s)=(g'f-f'g)(s)$, luego φ es de clase $C^\infty(\mathbb{R})$. Defina: $F:(a,b)\to\mathbb{R}$ y $G:(a,b)\to\mathbb{R}$ dadas como:

$$\forall s\in(a,b), \ F(s)=f(s)\cos(\varphi(s))+g(s)\operatorname{sen}(\varphi(s)).$$

$$G(s)=f(s)\operatorname{sen}(\varphi(s))-g(s)\cos(\varphi(s))$$

tanto F como G están bien definidas, y son suaves (por ser producto y composición de suaves). Veamos sus derivadas:

$\forall s\in(a,b)$, $F'(s) = f'(s)\cos\varphi(s) - f(s)\operatorname{sen}\varphi(s)\cdot\varphi'(s) +$
$$g'(s)\operatorname{sen}\varphi(s) + g(s)\cos\varphi(s)\cdot\varphi'(s).$$
$$G'(s) = f'(s)\operatorname{sen}\varphi(s) + f(s)\cos\varphi(s)\cdot\varphi'(s) +$$
$$g'(s)\cos\varphi(s) - g(s)\cos\varphi(s)\cdot\varphi'(s).$$

Como $\varphi' = g'f - f'g$, entonces:

$$F'(s) = f'(s)\cos\varphi(s) - f(s)\cdot(g'(s)\cdot f(s) - f'(s)g(s))\cdot\operatorname{sen}\varphi(s)$$
$$+ g'(s)\operatorname{sen}\varphi(s) + g(s)\cdot(g'(s)f(s) - f'(s)g(s))\cdot\cos\varphi(s)$$
$$= f'(s)\cos\varphi(s) - f^2(s)g'(s)\operatorname{sen}\varphi(s) - f(s)\cdot f'(s)\cdot g(s)\operatorname{sen}\varphi(s)$$
$$+ g'(s)\operatorname{sen}\varphi(s) + g(s)g'(s)f(s)\cos\varphi(s) - f'(s)g^2(s)\cos\varphi(s).$$
$$= f'(s)\cdot(1 - g^2(s))\cos\varphi(s) + g'(s)\cdot(1 - f^2(s))\operatorname{sen}\varphi(s)$$
$$+ f(s)\cdot f'(s)\cdot g(s)\operatorname{sen}\varphi(s) + g(s)\cdot g'(s)\cdot f(s)\cos\varphi(s)$$
$$= f'(s)\cdot f^2(s)\cos\varphi(s) + g'(s)\cdot g^2(s)\operatorname{sen}\varphi(s)$$
$$- g'(s)\cdot g^2(s)\operatorname{sen}\varphi(s) - f'(s)\cdot f^2(s)\cos\varphi(s)$$
$$= 0,\ \forall s\in(a,b).$$

por tanto: $F(s) = F_{s_0}$, $\forall s\in(a,b)$ (pues F es constante), donde
$$F_{s_0} = F(s_0) = f(s_0)\cos\varphi(s_0) + g(s_0)\operatorname{sen}\varphi(s_0)$$
$$= \cos^2\varphi_0 + \operatorname{sen}^2\varphi_0 = 1$$

De manera análoga a F, G es constante, y $G(s) = 0$, $\forall s\in(a,b)$.

Con lo anterior hemos obtenido que:
$$f(s)\cdot\cos\varphi(s) + g(s)\operatorname{sen}\varphi(s) = 1$$
$$f(s)\operatorname{sen}\varphi(s) - g(s)\cos\varphi(s) = 0$$
es un sistema 2×2 con incógnitas f y g. Veamos que:

$$\det\begin{pmatrix}\cos\varphi(s) & \operatorname{sen}\varphi(s)\\ \operatorname{sen}\varphi(s) & -\cos\varphi(s)\end{pmatrix} = -\cos^2\varphi(s)-\operatorname{sen}^2\varphi(s) = -1$$

por tanto, el sistema tiene solución única. Por tanto:

$$\begin{pmatrix} f(s)\\ g(s)\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}-\cos\varphi(s) & -\operatorname{sen}\varphi(s)\\ -\operatorname{sen}\varphi(s) & \cos\varphi(s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\cos\varphi(s)\\ \operatorname{sen}\varphi(s)\end{pmatrix}$$

así, $f(s)=\cos\varphi(s)$ y $g(s)=\operatorname{sen}\varphi(s)$, $\forall s\in(a,b)$ y, es la única solución.

Probaremos la unicidad de φ. Suponga que existe otra función $\psi(s)$ tal que $\psi_0=\psi(s_0)$, $\alpha'(s_0)=(\cos\psi_0, \operatorname{sen}\psi_0)$ y ψ es suave. Luego $\psi_0 = \varphi_0$ y $\psi(s_0)=\varphi(s_0)$. Pero para ψ también:

$$\alpha'(s)=(\cos\psi(s), \operatorname{sen}\psi(s))$$

de esta forma, por lo que se encontró para φ:

$$\alpha'(s)=(\cos\varphi(s), \operatorname{sen}\varphi(s))$$

$$\Rightarrow \cos\psi(s)=\cos\varphi(s), \text{ y}$$

$$\operatorname{sen}\psi(s)=\operatorname{sen}\varphi(s)$$

De esta forma, $\varphi(s)=\psi(s)+2\pi n(s)$, donde $n:(a,b)\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$. Como φ y ψ son suaves, entonces la función

$$(\varphi(s)-\psi(s)) = 2\pi n(s) \text{ es suave. (en } (a,b))$$

$$\Rightarrow n(s)=\frac{(\varphi-\psi)(s)}{2\pi}, \ \forall s\in(a,b), \text{ es continua.}$$

Para que $n:(a,b)\to\mathbb{Z}$ sea continua, entonces n debe ser constante. En s_0, $\varphi(s_0)=\varphi_{s_0}=\alpha(s_0)=\psi_{s_0}=\psi(s_0) \Rightarrow 2\pi n(s_0)=0 \Leftrightarrow n(s_0) = 0$, por lo tanto, n es la función constante de valor 0.

Así, $\varphi = \psi$. Por tanto, la solución es única.

q.e.d.

Nota: por el teorema del valor intermedio, si n no es constante, $\exists\ s_1, s_2 \in (a,b)$ $\ni n(s_1) < n(s_2)$. Como n es continua, y $\exists\ r \in \mathbb{I} \ni n(s_1) < r < n(s_2)$ por el teorema del valor intermedio, como n es continua, $\exists\ s \in (a,b)$ $\ni n(s) = r \notin \mathbb{Z}_{\not{c}}$, pues $n : (a,b) \to \mathbb{Z}$. Por tanto, n es constante.

Def. A $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ se le conoce como ángulo de giro.

Proposición (2.2.3 Pressley)

Sea $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ curva parametrizada por la longitud de arco s y $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ la función ángulo de giro de α, entonces

$$K_s = \frac{d\varphi}{ds}$$

Dem:

Como $\alpha'(s) = (\cos\varphi(s), \operatorname{sen}\varphi(s)) = t(s)$, $\forall\ s \in (a,b)$, entonces como $n_s(s) = (\cos \varphi(s) + \frac{\pi}{2}, \operatorname{sen}\varphi(s) + \frac{\pi}{2}) = (-\operatorname{sen}\varphi(s), \cos\varphi(s))$. También:

$$\begin{aligned} t'(s) &= \frac{d\varphi(s)}{ds} \cdot (-\operatorname{sen}\varphi(s), \cos\varphi(s)) \\ &= \frac{d\varphi}{ds} \cdot n_s(s) \\ &= K_s(s) \cdot n(s) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d\varphi(s)}{ds} = K_s(s),\ \forall\ s \in (a,b)\ (\text{pues } n_s(s) \neq 0, \forall\ s \in (a,b))$$

$$\therefore K_s = \frac{d\varphi}{ds}$$

q.e.d.

Def. La curvatura con signo total es $\int_0^l K_s(s)\,ds$, donde α es una curva cerrada parametrizada por longitud de arco, i.e $\alpha(l+s) = \alpha(s)$, $\forall\ s \in I$ (con $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$).

Corolario (2.2.5 Pressley).

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{\ell} K_s(s)\,ds \in \mathbb{Z}.$$

Dem:

Veamos que

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{\ell} K_s(s)\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\ell}\frac{d\varphi}{ds}(s)\,ds$$
$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\varphi(\ell)-\varphi(0)\right).$$

Por otro lado: $\alpha(\ell+s)=\alpha(s),\ \forall s\in I \Rightarrow \alpha'(\ell+s)=\alpha'(s)$. Por tanto

$$(\cos\varphi(\ell+s),\ \operatorname{sen}\varphi(\ell+s)) = (\cos\varphi(s),\ \operatorname{sen}\varphi(s)),\ \forall s\in I.$$
$$\Leftrightarrow \varphi(\ell+s)=\varphi(s)+2\pi n,\ \text{con } n\in\mathbb{Z}.$$

en $s=0$: $\varphi(\ell)=\varphi(0)+2\pi n \Rightarrow \varphi(\ell)-\varphi(0)=2\pi n$, así

$$\int_0^{\ell} K_s(s)\,ds = n\in\mathbb{Z}.$$

q.e.d.

EJEMPLO.

1) Sea $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ dada como: $\alpha(s)=(\cos(s),\operatorname{sen}(s)) \Rightarrow \alpha'(s)=1\cdot(-\operatorname{sen}(s),\cos(s))=1\cdot n_s(s) \Rightarrow \frac{d\varphi}{ds}(s)=1$. Por tanto:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_s(s)\,ds = 1\in\mathbb{Z}.$$

2) Hacer curva que dé 2 vuetas con periodo 4π.

Nuestro objetivo ahora será probar el resultado anterior para curvas que no son planas para ello, retomemos las ecuaciones anteriores.

Fórmulas de Frenet.

$$t' = \kappa n$$
$$b' = \tau n$$
$$n' = -\kappa t - \tau b$$

En el caso que la curva sea plana, (esto es, con $\tau = 0$).

$$t' = \kappa n$$
$$n' = -\kappa t$$

Vladimir Arnold, sistemas dinámicos (lectura recomendada).

Teorema 2.2.6 (Pressley).

Sea $\kappa : (a,b) \to \mathbb{R}$ alguna función suave. Entonces, existe una curva parametrizada por longitud de arco s,

$$\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^2$$

Cuya curvatura con signo es κ. Más aún, si $\tilde{\alpha} : (a,b) \to \mathbb{R}^2$ es otra curva parametrizada por longitud de arco cuya curvatura con signo es κ, entonces

$$\tilde{\alpha}(s) = M(\alpha(s)), \ \forall \ s \in (a,b)$$

y $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una isometría

$$M = T_a \circ \rho_\theta$$

tal que $T_a(v) = v + a$, $a \in \mathbb{R}$, y $\rho_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Dem.

Para la primera parte, sea $s_0 \in (a,b)$, y definamos $\forall \ s \in (a,b)$

$$\varphi(s) = \int_{s_0}^{s} K(u)\,du \quad \dots \quad (1)$$

(K es integrable por ser suave). Y a $\alpha:(a,b)\to\mathbb{R}^2$ como

$$\alpha(s) = \left(\int_{s_0}^{s}\cos\varphi(u)\,du,\ \int_{s_0}^{s}\operatorname{sen}\varphi(u)\,du\right) + \vec{a},\ \vec{a}\in\mathbb{R}^2$$

α es suave y está bien definida. Claramente es unitaria, pues:

$$\alpha'(s) = (\cos\varphi(s), \operatorname{sen}\varphi(s))$$

$$\Rightarrow \|\alpha'(s)\| = 1,\ \forall s\in(a,b)$$

Por la proposición 2.2.3:

$$\frac{d\varphi}{ds} = K_s. \quad K_s \text{ la curvatura con signo de } \alpha.$$

pero, por (1):

$$\frac{d\varphi}{ds} = K$$

$$\Rightarrow K = K_s$$

Probaremos ahora la segunda parte. Suponga que $\tilde{\alpha}:(a,b)\to\mathbb{R}^2$ es una curva regular parametrizada por longitud de arco, con ángulo de giro $\tilde{\varphi}:(a,b)\to\mathbb{R}^2$ m

$$\frac{d\tilde{\varphi}}{ds} = K$$

Entonces:

$$\frac{d\varphi}{ds} = K = \frac{d\tilde{\varphi}}{ds}, \text{ y}$$

$$\tilde{\alpha}'(s) = (\cos\tilde{\varphi}(s), \operatorname{sen}\tilde{\varphi}(s)),\ \forall s\in(a,b).$$

Con

$$\alpha(s) = \left(\int_{s_0}^{s}\cos\tilde{\varphi}(w)\,dw,\ \int_{s_0}^{s}\operatorname{sen}\tilde{\varphi}(w)\,dw\right) + \tilde{a},\ \tilde{a}\in\mathbb{R}^2$$

Nota: $\vec{a}$ y $\tilde{a}$ son: $\vec{a} = \alpha(s_0)$ y $\tilde{a} = \tilde{\alpha}(s_0)$. Si $T_{\tilde{a}}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $x\mapsto x+\tilde{a}$, entonces:

$$\tilde{\alpha}(s) = T_{\tilde{\alpha}}\left(\int_{s_0}^{s}\cos\tilde{\varphi}(w)\,dw,\ \int_{s_0}^{s}\operatorname{sen}\tilde{\varphi}(w)\,dw\right),\ \forall s\in(a,b).$$

Como $\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\tilde{\varphi}}{ds} \Rightarrow \varphi(s)-\tilde{\varphi}(s) = \theta,\ \forall s\in(a,b)$ con $\theta\in\mathbb{R}$. Por lo tanto:

$$T_{\tilde{\alpha}}\left(\int_{s_0}^{s}\cos\tilde{\varphi}(w)dw, \int_{s_0}^{s}\operatorname{sen}\tilde{\varphi}(w)dw\right) = T_{\tilde{\alpha}}\left(\int_{s_0}^{s}\cos\varphi(w)+\theta\, dw, \int_{s_0}^{s}\operatorname{sen}\varphi(w)+\theta\, dw\right)$$

$$= T_{\tilde{\alpha}}\Big(\cos\theta\int_{s_0}^{s}\cos\varphi(w)dw - \operatorname{sen}\theta\int_{s_0}^{s}\operatorname{sen}\varphi(w)dw, \operatorname{sen}\theta\int_{s_0}^{s}\cos\varphi(w)dw + \cos\theta\int_{s_0}^{s}\operatorname{sen}\varphi(w)dw\Big)$$

$$= T_{\tilde{\alpha}}\left(\begin{pmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\cdot(\alpha(s)-\alpha(s_0))\right)$$

Si $\rho_\theta:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ es tal que:

$$\rho_\theta(x,y) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

entonces $\tilde{\alpha}(s) = T_{\tilde{\alpha}}(\rho_\theta(\alpha(s)-\alpha(s_0)))$, $\forall s\in(a,b)$. Como ρ_θ es lineal (y $T_{\tilde{a}}$), entonces
NO

$$\rho_\theta(\alpha(s)-\alpha(s_0)) = \rho_\theta(\alpha(s)) - \rho_\theta(\alpha(s_0))$$

Luego:

$$\tilde{\alpha}(s) = T_{\tilde{a}}(\rho_\theta(\alpha(s)-\alpha(s_0))),\ \forall s\in(a,b)$$
$$= \rho_\theta(\alpha(s)) - \alpha(s_0) + \tilde{a},\ \forall s\in(a,b).$$

Con $\vec{b} = \vec{a} - \alpha(s_0)$, entonces: $T_b:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dada como $x\mapsto x+b$, entonces:

$$\tilde{\alpha}(s) = T_b\circ\rho_\theta(\alpha(s)),\ \forall s\in(a,b).$$

Donde $T_b\circ\rho_\theta$ es una isometría en $\mathbb{R}^2$ (probar).

q.e.d.