Lista Maximales e Ideales Primos

1. Pruebe que un anillo K es un campo si, y solo si $\langle 0 \rangle$ es ideal maximal de K.

2. Pruebe que un ideal propio M de un anillo A es maximal si, y solo si para cada $r \notin M$ existe $a \in A$ tal que $1 + ra \in M$.

3. Sean I un ideal de un anillo A, $I \neq A$, y $a \in A$. Pruebe lo siguiente:

a) $I \subseteq A - A^*$;

b) $a \in A^*$ si, y solo si a no pertenece a ningún ideal maximal de A.

4. Sea $f : A \longrightarrow B$ un epimorfismo. Pruebe lo siguiente:

   a) Si M es ideal maximal de A con $\ker(f) \subseteq M$, entonces $f(M)$ es ideal maximal de B;

   b) Si N es ideal maximal de B, entonces $f^{-1}(N)$ es ideal maximal de A;

   c) La aplicación $M \longrightarrow f(M)$ define una correspondencia uno a uno entre el conjunto de ideales maximales de A que contienen al kernel de f sobre el conjunto de todos los ideales maximales de B.

5. Sean M_1 y M_2 dos ideales maximales de un anillo A. Pruebe que

$$M_1 M_2 = M_1 \cap M_2.$$

6. Sea M un ideal propio de A. Pruebe que M es maximal si, y solo si para cada ideal I de A, o bien $I \subseteq M$ ó $I + M = A$.

Dem:

$\Rightarrow$) Suponga que M es maximal. Sea I un ideal de A. Si $I \subseteq M$ se sigue el resultado. Suponga que $I \not\subseteq M$, entonces $\exists$ $a \in I \setminus M$, como M es maximal, entonces $\langle M, a \rangle = A$, luego $\exists$ $m \in M$ y $r \in A$ $\ni$ $ra + m = 1$. Sea $b \in A$, entonces:

$$b = (rb)a + mb \in I + M$$

Por tanto, $I + M = A$.

$\Leftarrow$) Suponga lo dicho. Probaremos que M es maximal. Sea $a \in A \setminus M$, entonces $\langle a \rangle \not\subseteq M$, luego $M + \langle a \rangle = A$, i.e $\exists$ $r \in A$ y $m \in M$ $\ni$ $m + ra = 1 \in \langle M, a \rangle = A$. Por tanto M es maximal.

q.e.d.

7. Sea A un anillo el cual tiene un único ideal maximal M. Pruebe que los únicos elementos idempotentes de A son el 0 y el 1.

Dem:

Sea $a \in A$ $\ni$ $a^2 = a$. Tenemos 2 casos: $a \in M$ ó $a \in A \setminus M$.

1) Si $a \notin M$, entonces $\langle a \rangle = A$ (pues M es el único maximal de A), luego $1 \in \langle a \rangle$, i.e $\exists$ $r \in A$ $\ni$ $1 = ra \Rightarrow a = ra = 1 \Rightarrow a = 1$.

2) Si $a \in M \Rightarrow 1-a \notin M$, luego $\langle 1-a \rangle = A \Rightarrow$ como $1-a$ es idempotente, pues:

$$(1-a)^2 = 1 - 2a + a^2$$

$$= 1 - 2a + a = 1 - a$$

Por 1), $1 - a = 1 \Rightarrow a = 0$.

q.e.d.

8. Para un anillo A, pruebe que

$$A^* = A - \cup\{M \mid \text{maximal de } A\}.$$

Dem:

Probaremos la doble contención.

1) Sea $a \in A^*$, entonces $a \notin M$, $\forall M$ ideal maximal de $A \Rightarrow a \in A \setminus \bigcup_{M \in \mathcal{M}} M$, donde

$$\mathcal{M} = \{M \mid M \text{ es maximal de } A\}$$

2)

9. Un ideal I de un anillo A se dice que es **minimal** si $I \neq \langle 0 \rangle$ y no existe un ideal $J \neq \langle 0 \rangle$ contenido propiamente en I. Pruebe lo siguiente:

   a) Un ideal I de un anillo A es minimal si, y solo si I es ideal principal;

   b) El anillo de enteros $\mathbb{Z}$ no tiene ideal minimales.

Dem:

De a):

$\Rightarrow$) Suponga que I es minimal. Sea $a \in I \setminus \{0\}$, como $\langle a \rangle \subseteq I$ y $\langle a \rangle \neq \langle 0 \rangle$, entonces por ser I minimal $\Rightarrow \langle a \rangle = I \Rightarrow I$ es ideal principal.

$\Leftarrow$) Suponga que I es ideal principal, entonces $\exists\, a \in A \setminus \{0\}$ m $I = \langle a \rangle$. Sea J ideal de A m $\langle 0 \rangle \subsetneqq J \subseteq I$. Como $J \neq \langle 0 \rangle$, $\exists\, b \in J \setminus \{0\} \subseteq I \Rightarrow \exists\, r \in A$ m $b = ar$

10. Sea $A = \mathfrak{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pruebe que el conjunto $\{f \in A \mid f(1) = f(-1) = 0\}$ es un ideal de A que no es ideal primo.

Dem:

Sea $I = \{f \in A \mid f(1) = f(-1) = 0\}$. Claramente $f = \bar{0} \in I$. Sean $f, g \in I$ y $h \in A$, entonces:

$(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0 = (f+g)(-1) \Rightarrow f+g \in I$.

$(fh)(1) = f(1)h(1) = 0 \cdot h(1) = 0 = (fh)(-1) \Rightarrow fh \in I$. Por tanto I es ideal de A.

Pero no es primo, pues $f, g \in A$ dadas como:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$g(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, cumplen que $(fg)(1) = (fg)(-1) = 0 \Rightarrow fg \in I$, pero tanto f como g no están en I.

q.e.d.

11. Pruebe que en el anillo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $(n > 1)$, los ideales maximales son los ideales principales de la forma $\langle p \rangle = p(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = p\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, donde p es divisor primo de n.

12. Sea $f : A \longrightarrow B$ un epimorfismo. Pruebe lo siguiente:

a) B es un campo si, y solo si $\ker(f)$ es un ideal maximal de A;

b) B es un dominio entero si, solo si $\ker(f)$ es un ideal primo de A;

Dem:

De a):

$\Rightarrow$) Supongu que B es campo. Sea ahora I ideal de A $\ni$ $\operatorname{Ker} f \subsetneq I \subseteq A$, como $\operatorname{Ker} f \leq I$ entonces $f(I)$ es ideal de B, pero como $\operatorname{Ker} f \neq I \Rightarrow \langle 0 \rangle \subsetneq f(I) \subseteq B$. Como B es campo, entonces $f(I) = B$, luego $\exists\ r \in I \ni f(r) = 1_B = f(1_A) \Rightarrow r - 1_A \in \operatorname{Ker} f \leq I \Rightarrow 1_A \in I$, pues $r \in I$, luego $I = A$, así $\operatorname{Ker} f$ es maximal de A.

$\Leftarrow$) Supongu que $\operatorname{Ker} f$ es maximal de A. Probaremos que $\langle 0 \rangle$ es maximal de B. Sea J ideal de B $\ni$ $\langle 0 \rangle \subsetneq J \subseteq B \Rightarrow \operatorname{Ker} f \subsetneq f^{-1}(J) \subseteq A$, como $\operatorname{Ker} f$ es maximal $\Rightarrow f^{-1}(J) = A$, luego $1_A \in f^{-1}(J) \Rightarrow f(1_A) = 1_B \in J \Rightarrow J = B$. Por tanto, $\langle 0 \rangle$ es maximal de $B \Rightarrow B$ es campo.

De b):

13. Sean P_1, P_2 ideales de un anillo A, y sea $\{P_\alpha\}_\alpha$ una cadena de ideales primos de A. Pruebe lo siguiente:

  a) Si P_i no está contenido en P_j $(i, j \in \{1,2\},\ i \neq j)$, entonces $P_1 \cap P_2$ no es un ideal primo de A;

  b) $\bigcup_\alpha P_\alpha$ y $\bigcap_\alpha P_\alpha$ son ambos ideales primos de A.

Dem:

De a):

Como $P_1 \not\subseteq P_2$ y $P_2 \not\subseteq P_1$, $\exists\ p_1 \in P_1$ y $p_2 \in P_2$ $\ni$ $p_1 \notin P_2$ y $p_2 \notin P_1$. Como P_1 y P_2 son ideales de $A \Rightarrow p_1 p_2 \in P_1 \cap P_2$, pero $p_1, p_2 \notin P_1 \cap P_2$. Por tanto $P_1 \cap P_2$ no es ideal primo de A.

De b): Para $\bigcup_\alpha P_\alpha$. Como $\{P_\alpha\}_\alpha$ es una cadena, entonces $\bigcup_\alpha P_\alpha$ es un ideal de A. Sean $a, b \in A$ $\ni$ $ab \in P$, entonces $\exists\ \alpha \in \Lambda$ $\ni$ $ab \in P_\alpha \Rightarrow a \in P_\alpha$ o $b \in P_\alpha \Rightarrow a \in P$ o $b \in P$. Así, P es ideal primo de A.

Para $\bigcap_\alpha P_\alpha = P$. Sean $a, b \in A$ $\ni$ $ab \in P \Rightarrow ab \in P_\alpha,\ \forall \alpha \in \Lambda \Rightarrow a \in P_\alpha$ o $b \in P_\alpha$, $\forall \alpha \in \Lambda$. Como $\{P_\alpha\}_\alpha$ es una cadena, entonces $a \in P$ o $b \in P$ (pues a o b están en el primer elemento de la cadena). Así, P es ideal primo.

q.e.d.

14. Sea P un ideal primo de un anillo A tal que el anillo cociente A/P es finito. Pruebe que P es un ideal maximal de A.

15. Sean A_i anillos, $i = 1, \ldots n$, y sea $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$ con las operaciones usuales. Pruebe que un ideal propio I de A es un ideal maximal si, y solo si existe $i \in \{1, \ldots n\}$ tal que

$$I = A_1 \times A_{i-1} \times M_i \times A_{i+1} \times A_n,$$

donde M_i es un ideal maximal de A_i.

16. Pruebe que en un anillo Booleano, cada ideal no trivial es ideal primo si, y solo si es ideal maximal.

17. Sean A un anillo, I un ideal de A y P un ideal primo de A. Se dice que P es **ideal primo minimal** de I si $I \subseteq P$ y no existe ningún otro ideal primo P' de A tal que $I \subset P' \subset P$ con $I \neq P' \neq P$. Por abuso de lenguaje, se refiere al ideal primo minimal de $\langle 0 \rangle$ como el **ideal primo minimal** del anillo A. Bajo las notaciones anteriores, pruebe lo siguiente:

   a) Si $I \subseteq P$, entonces P contiene un ideal primo minimal de I;

   b) Cada ideal propio de A tiene al menos un ideal primo minimal de A;

   c) En el anillo $\mathbb{Z}$ de los números enteros, pruebe que los ideales minimales de un ideal no cero $n\mathbb{Z}$, son precisamente todos los ideales $p\mathbb{Z}$, donde p es número primo que divide a n.

18. Un ideal I de un anillo A es llamado **ideal primario** si para cada $a, b \in A$ las relaciones $ab \in I$ y $a \notin I$ implican que $b^n \in I$ para algún entero positivo n. Pruebe lo siguiente:

   a) Si I es un ideal primario de un anillo A, entonces $\operatorname{rad}(I)$ es un ideal primo de A.

   b) Un ideal I de un anillo A es ideal primario si, y solo si cada divisor de cero del anillo cociente A/I es nilpotente.

19. Sea $f : A \longrightarrow B$ un epimorfismo. Pruebe lo siguiente:

a) Si P es ideal primo (resp. primario) de A con $\ker(f) \subseteq P$, entonces $f(P)$ es ideal primo (resp. primario) de B;

b) Si N es ideal primo (resp. primario) de B, entonces $f^{-1}(N)$ es ideal primo (resp. primario) de A;

c) La aplicación $P \longrightarrow f(P)$ define una correspondencia uno a uno entre el conjunto de ideales primos (resp. primarios) de A que contienen al kernel de f sobre el conjunto de ideales primos (resp. primarios) de B.

20. Sea M un ideal maximal de un anillo A, y sea $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que el anillo cociente A/M^n tiene exactamente un ideal propio el cual es primo.

21. Sea I un ideal de un anillo A. Pruebe lo siguiente:

21. Sea I un ideal de un anillo A. Pruebe lo siguiente:

a) Si P es ideal primo de A, entonces $I \subseteq P$ si y solo si $\text{rad}(I) \subseteq P$;

b) Si I es ideal primo de A, entonces $I = \text{rad}(I)$.

22. Pruebe que cada divisor de cero en el anillo $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ (p número primo, $n \geq 1$) es nilpotente.

23. Sean $I_1, \ldots, I_n$ ideales de un anillo A, P ideal primo de A y M ideal maximal de A. Pruebe lo siguiente:

23. Sean $I_1, \ldots, I_n$ ideales de un anillo A, P ideal primo de A y M ideal maximal de A. Pruebe lo siguiente:

a) Si $I_1 \cdots I_n \subseteq P$, entonces $I_i \subseteq P$ para algún i;

b) El único ideal primo de A conteniendo a M^m $(m \geq 1)$ es M.

24. Sea I un ideal de un anillo A el cual está contenido en la unión de una cantidad finita de primos $P_1, \ldots, P_n$. Pruebe que I está contenido en algún P_i.

25. Sea n un entero > 1 cuya descomposición en primos distintos es $n = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ ($k_i > 0$ para todo i). Pruebe que existe un isomorfismo de anillos de

25. Sea n un entero > 1 cuya descomposición en primos distintos es $n = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ ($k_i > 0$ para todo i). Pruebe que existe un isomorfismo de anillos de

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p_1^{k_1}\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p_r^{k_r}\mathbb{Z}.$$