

Ejercicios Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

3 de marzo de 2024

Índice general

1. Espacios Hilbertianos	2
1.1. Ejercicios	2

Capítulo 1

Espacios Hilbertianos

1.1. Ejercicios

Ejercicio 1.1.1

Pruebe lo siguiente:

- I. Sean H, H' espacios hilbertianos y sea T una aplicación lineal continua de H en H' .

Demuestre que existe una única aplicación lineal $\tilde{T} : H' \rightarrow H$ tal que

$$(\vec{x}|\tilde{T}\vec{x}') = (T\vec{x}|\vec{x'}), \quad \forall \vec{x} \in H \text{ y } \forall \vec{x}' \in H'$$

- II. **Demuestre** las reglas:

$$\widetilde{T_1 + T_2} = \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 \quad \text{y} \quad \widetilde{\alpha T} = \bar{\alpha} \tilde{T}$$

- III. Sea H'' un tercer espacio hilbertiano. Sean T una aplicación lineal continua de H en H' y U una aplicación lineal continua de H' en H'' . **Pruebe** que:

$$\widetilde{U \circ T} = \tilde{T} \circ \tilde{U}$$

Demostración:

De (i): Se probarán dos cosas:

- **Unicidad.** Suponga que existen $S, W : H' \rightarrow H$ tales que:

$$(\vec{x}|S\vec{x}') = (T\vec{x}|\vec{x}') \quad \text{y} \quad (\vec{x}|W\vec{x}') = (T\vec{x}|\vec{x}'), \quad \forall \vec{x} \text{ y } \vec{x}' \in H'$$

entonces, se tiene que para $\vec{x}' \in H'$ fijo:

$$\begin{aligned} (\vec{x}|S\vec{x}') &= (\vec{x}|W\vec{x}') \\ \Rightarrow (\vec{x}|S\vec{x}') - (\vec{x}|W\vec{x}') &= 0 \\ \Rightarrow (\vec{x}|S\vec{x}' - W\vec{x}') &= 0 \forall \vec{x} \in H \end{aligned} \tag{1.1}$$

Por tanto, $S\vec{x}' = W\vec{x}'$. Como el $\vec{x}' \in H'$ fue arbitrario, se sigue que $S = W$.

- **Existencia.** Para cada $\vec{x}' \in H'$, sea $L_{\vec{x}'} : H \rightarrow \mathbb{K}$ definida como sigue:

$$L_{\vec{x}'}(\vec{x}) = (T\vec{x}|\vec{x}')$$

Afirmamos que $L_{\vec{x}'}$ es lineal continuo. En efecto, si $\vec{x}, \vec{y} \in H$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} L_{\vec{x}'}(\vec{x} + \alpha\vec{y}) &= \left(T(\vec{x} + \alpha\vec{y}) | \vec{x}' \right) \\ &= \left(T\vec{x} | \vec{x}' \right) + \alpha \left(T\vec{y} | \vec{x}' \right) \\ &= L_{\vec{x}'}(\vec{x}) + \alpha L_{\vec{x}'}(\vec{y}) \end{aligned}$$

luego es lineal, y es continuo ya que

$$\begin{aligned} |L_{\vec{x}'}(\vec{x})| &= \left| \left(T\vec{x} | \vec{x}' \right) \right| \\ &\leq \|T\vec{x}\| \|\vec{x}'\| \\ &\leq (\|T\| \|\vec{x}\|) \|\vec{x}'\| \end{aligned}$$

donde la primera desigualdad es por Cauchy-Schwartz, y la segunda es por el hecho de que T es un funcional lineal continuo. Por tanto: $\|L_{\vec{x}'}\| \leq \|T\| \|\vec{x}'\|$. Luego, $L_{\vec{x}'}$ es lineal continuo, i.e. $L_{\vec{x}'} \in H^*$.

Por el teorema de Riesz, como la aplicación $G : H \rightarrow H^*$ es suprayectiva, para $\vec{x}' \in H'$ existe $\tilde{T}\vec{x}' \in H$ tal que $L_{\vec{x}'} = G_{\tilde{T}\vec{x}'}$, es decir que:

$$L_{\vec{x}'}\vec{x} = \left(T\vec{x} | \vec{x}' \right) = \left(\vec{x} | \tilde{T}\vec{x}' \right) = G_{\tilde{T}\vec{x}'}\vec{x}, \quad \forall \vec{x} \in H$$

Afirmamos que la aplicación $\tilde{T} : H' \rightarrow H$ está bien definida y es lineal. En efecto, si $\tilde{T}\vec{x}'_1, \tilde{T}\vec{x}'_2 \in H$ son tales que $L_{\vec{x}'} = G_{\tilde{T}\vec{x}'_1}$ y $L_{\vec{x}} = G_{\tilde{T}\vec{x}'_2}$, entonces:

$$\left(T\vec{x} | \vec{x}' \right) = \left(\vec{x} | \tilde{T}\vec{x}'_1 \right) \quad \text{y} \quad \left(T\vec{x} | \vec{x}' \right) = \left(\vec{x} | \tilde{T}\vec{x}'_2 \right), \quad \forall \vec{x} \in H$$

entonces:

$$\begin{aligned} \left(\vec{x} | \tilde{T}\vec{x}'_1 \right) &= \left(\vec{x} | \tilde{T}\vec{x}'_2 \right), \quad \forall \vec{x} \in H \\ \Rightarrow \left(\vec{x} | \tilde{T}\vec{x}'_1 - \tilde{T}\vec{x}'_2 \right) &= 0 \quad \forall \vec{x} \in H \\ \Rightarrow \tilde{T}\vec{x}'_1 - \tilde{T}\vec{x}'_2 &= \vec{0} \\ \Rightarrow \tilde{T}\vec{x}'_1 &= \tilde{T}\vec{x}'_2 \end{aligned}$$

por tanto, $\tilde{T} : H' \rightarrow H$ está bien definida. Comprobemos ahora la linealidad, sean $\vec{x}', \vec{y}' \in H'$, entonces:

$$\begin{aligned} \left(T\vec{x} | \vec{x}' \right) &= \left(\vec{x} | \tilde{T}\vec{x}' \right), \left(T\vec{x} | \vec{y}' \right) = \left(\vec{x} | \tilde{T}\vec{y}' \right) \quad \text{y} \quad \left(T\vec{x} | \vec{x}' + \vec{y}' \right) = \left(\vec{x} | \tilde{T}(\vec{x}' + \vec{y}') \right) \quad \forall \vec{x} \in H \\ \Rightarrow \left(T\vec{x} | \vec{x}' \right) + \left(T\vec{x} | \vec{y}' \right) &= \left(\vec{x} | \tilde{T}\vec{x}' \right) + \left(\vec{x} | \tilde{T}\vec{y}' \right) \quad \text{y} \quad \left(T\vec{x} | \vec{x}' + \vec{y}' \right) = \left(\vec{x} | \tilde{T}(\vec{x}' + \vec{y}') \right) \quad \forall \vec{x} \in H \\ \Rightarrow \left(T\vec{x} | \vec{x}' + \vec{y}' \right) &= \left(\vec{x} | \tilde{T}\vec{x}' + \tilde{T}\vec{y}' \right) \quad \text{y} \quad \left(T\vec{x} | \vec{x}' + \vec{y}' \right) = \left(\vec{x} | \tilde{T}(\vec{x}' + \vec{y}') \right) \quad \forall \vec{x} \in H \\ \Rightarrow \left(\vec{x} | \tilde{T}\vec{x}' + \tilde{T}\vec{y}' \right) &= \left(\vec{x} | \tilde{T}(\vec{x}' + \vec{y}') \right) \quad \forall \vec{x} \in H \\ \Rightarrow \left(\vec{x} | (\tilde{T}\vec{x}' + \tilde{T}\vec{y}') - \tilde{T}(\vec{x}' + \vec{y}') \right) &= 0 \quad \forall \vec{x} \in H \\ \Rightarrow (\tilde{T}\vec{x}' + \tilde{T}\vec{y}') - \tilde{T}(\vec{x}' + \vec{y}') &= \vec{0} \\ \Rightarrow \tilde{T}\vec{x}' + \tilde{T}\vec{y}' &= \tilde{T}(\vec{x}' + \vec{y}') \end{aligned}$$

y, si $\alpha \in \mathbb{K}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
& (T\vec{x}|\alpha\vec{x}') = (\vec{x}|\tilde{T}(\alpha\vec{x}')) \quad \text{y} \quad (T\vec{x}|\vec{x}') = (\vec{x}|\tilde{T}\vec{x}') \quad \forall \vec{x} \in H \\
& \Rightarrow \bar{\alpha} (T\vec{x}|\vec{x}') = (\vec{x}|\tilde{T}(\alpha\vec{x}')) \quad \text{y} \quad \bar{\alpha} (T\vec{x}|\vec{x}') = \bar{\alpha} (\vec{x}|\tilde{T}\vec{x}') \quad \forall \vec{x} \in H \\
& \Rightarrow \bar{\alpha} (T\vec{x}|\vec{x}') = (\vec{x}|\tilde{T}(\alpha\vec{x}')) \quad \text{y} \quad \bar{\alpha} (T\vec{x}|\vec{x}') = (\vec{x}|\alpha\tilde{T}\vec{x}') \quad \forall \vec{x} \in H \\
& \Rightarrow (\vec{x}|\tilde{T}(\alpha\vec{x}')) = (\vec{x}|\alpha\tilde{T}\vec{x}') \quad \forall \vec{x} \in H \\
& \Rightarrow (\vec{x}|\tilde{T}(\alpha\vec{x}')) - (\vec{x}|\alpha\tilde{T}\vec{x}') = 0 \quad \forall \vec{x} \in H \\
& \Rightarrow (\vec{x}|\tilde{T}(\alpha\vec{x}') - \alpha\tilde{T}\vec{x}') = 0 \quad \forall \vec{x} \in H \\
& \Rightarrow \tilde{T}(\alpha\vec{x}') - \alpha\tilde{T}\vec{x}' = \vec{0} \\
& \Rightarrow \tilde{T}(\alpha\vec{x}') = \alpha\tilde{T}\vec{x}'
\end{aligned}$$

por tanto \tilde{T} es lineal. Además, se cumple para todos $\vec{x} \in H$ y $\vec{x}' \in H'$ que:

$$(T\vec{x}|\vec{x}') = (\vec{x}|\tilde{T}\vec{x}')$$

De (ii): Probaremos las dos igualdades.

I. $\widetilde{T_1 + T_2} = \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2$. Tenemos que:

$$(\vec{x}|\tilde{T}_1\vec{x}') = (T_1\vec{x}|\vec{x}') \quad \text{y} \quad (\vec{x}|\tilde{T}_2\vec{x}') = (T_2\vec{x}|\vec{x}'), \quad \forall \vec{x} \in H, \vec{x}' \in H'$$

por tanto

$$\begin{aligned}
& (\vec{x}|\tilde{T}_1\vec{x}') + (\vec{x}|\tilde{T}_2\vec{x}') = (T_1\vec{x}|\vec{x}') + (T_2\vec{x}|\vec{x}') \quad \forall \vec{x} \in H, \vec{x}' \in H' \\
& \Rightarrow (\vec{x}|\tilde{T}_1\vec{x}' + \tilde{T}_2\vec{x}') = (T_1\vec{x} + T_2\vec{x}|\vec{x}') \quad \forall \vec{x} \in H, \vec{x}' \in H' \\
& \Rightarrow (\vec{x}|\tilde{T}_1 + \tilde{T}_2)\vec{x}' = ((T_1 + T_2)\vec{x}|\vec{x}') \quad \forall \vec{x} \in H, \vec{x}' \in H'
\end{aligned}$$

de la unicidad de la adjunta, se sigue que $\widetilde{T_1 + T_2} = \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2$.

II. $\widetilde{\alpha T} = \bar{\alpha}\tilde{T}$. Es similar al caso anterior.

De los dos incisos anteriores se sigue el resultado.

De (iii): Se tiene que:

$$(\vec{x}|\tilde{T}\vec{x}') = (T\vec{x}|\vec{x}') \quad \text{y} \quad (\vec{x}'|\tilde{U}\vec{x}'') = (U\vec{x}'|\vec{x}''), \quad \forall \vec{x} \in H, \vec{x}' \in H', \vec{x}'' \in H''$$

debemos probar que:

$$(\vec{x}|\tilde{T}(\tilde{T} \circ \tilde{U})\vec{x}'') = ((U \circ T)\vec{x}|\vec{x}'') \quad \forall \vec{x} \in H, \vec{x}'' \in H''$$

para usar la unicidad y de forma inmediata deducir el resultado. Sean $\vec{x} \in H$ y $\vec{x}'' \in H''$. Como $\tilde{U}\vec{x}''T\vec{x} \in H'$, tenemos que:

$$(\vec{x}|\tilde{T}(\tilde{U}\vec{x}'')) = (T\vec{x}|\tilde{U}\vec{x}'') \quad \text{y} \quad (T\vec{x}|\tilde{U}\vec{x}'') = (U(T\vec{x})|\vec{x}'')$$

por tanto:

$$\begin{aligned}
& (\vec{x}|\tilde{T}(\tilde{U}\vec{x}'')) = (U(T\vec{x})|\vec{x}'') \\
& \Rightarrow (\vec{x}|\tilde{T}(\tilde{T} \circ \tilde{U})\vec{x}'') = ((U \circ T)\vec{x}|\vec{x}'')
\end{aligned}$$

lo cual prueba el resultado al ser los vectores arbitrarios. ■

Ejercicio 1.1.2

Sea H un espacio hilbertiano complejo. A toda aplicación lineal continua T de H en H se le asocia la aplicación $Q_T : H \rightarrow \mathbb{C}$ (llamada **forma hermitiana**) definida por:

$$Q_T(\vec{x}) = (T\vec{x}|\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in H$$

Haga lo siguiente:

I. **Establezca** la fórmula:

$$(T\vec{x}|\vec{y}) = \frac{1}{4} [Q_T(\vec{x} + \vec{y}) - Q_T(\vec{x} - \vec{y}) + iQ_T(\vec{x} + i\vec{y}) - iQ_T(\vec{x} - i\vec{y})]$$

II. **Muestre** que

$$Q_{\tilde{T}}(\vec{x}) = \overline{Q_T(\vec{x})}, \quad \forall \vec{x} \in H$$

y que $Q_T(\vec{x})$ es real, $\forall \vec{x} \in H$, si y sólo si T es autoadjunto (es decir, que $T = \tilde{T}$).

Solución:

Establezcamos ambos incisos:

De (i): Sean $\vec{x}, \vec{y} \in H$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} Q_T(\vec{x} + \vec{y}) &= (T(\vec{x} + \vec{y})|\vec{x} + \vec{y}) \\ &= (T(\vec{x}) + T(\vec{y})|\vec{x} + \vec{y}) \\ &= (T(\vec{x}) + T(\vec{y})|\vec{x}) + (T(\vec{x}) + T(\vec{y})|\vec{y}) \\ &= (T(\vec{x})|\vec{x}) + (T(\vec{y})|\vec{x}) + (T(\vec{x})|\vec{y}) + (T(\vec{y})|\vec{y}) \\ &= Q_T(\vec{x}) + (T(\vec{y})|\vec{x}) + (T(\vec{x})|\vec{y}) + Q_T(\vec{y}) \end{aligned}$$

por lo cual,

$$\begin{aligned} Q_T(\vec{x} - \vec{y}) &= Q_T(\vec{x}) + (T(-\vec{y})|\vec{x}) + (T(\vec{x})|-\vec{y}) + Q_T(-\vec{y}) \\ &= Q_T(\vec{x}) - (T(\vec{y})|\vec{x}) - (T(\vec{x})|\vec{y}) + Q_T(\vec{y}) \end{aligned}$$

Luego:

$$Q_T(\vec{x} + \vec{y}) - Q_T(\vec{x} - \vec{y}) = 2((T(\vec{y})|\vec{x}) + (T(\vec{x})|\vec{y}))$$

y, por ende:

$$\begin{aligned} iQ_T(\vec{x} + i\vec{y}) - iQ_T(\vec{x} - i\vec{y}) &= 2i((T(i\vec{y})|\vec{x}) + (T(\vec{x})|i\vec{y})) \\ &= 2i(i(T(\vec{y})|\vec{x}) - i(T(\vec{x})|\vec{y})) \\ &= 2(-(T(\vec{y})|\vec{x}) + (T(\vec{x})|\vec{y})) \end{aligned}$$

Finalmente, se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} [Q_T(\vec{x} + \vec{y}) - Q_T(\vec{x} - \vec{y}) + iQ_T(\vec{x} + i\vec{y}) - iQ_T(\vec{x} - i\vec{y})] &= \frac{1}{4} [4(T(\vec{x})|\vec{y})] \\ &= (T(\vec{x})|\vec{y}) \end{aligned}$$

lo cual establece la fórmula.

De (ii): Sea $\vec{x} \in H$, entonces:

$$\begin{aligned} Q_{\tilde{T}}(\vec{x}) &= (\tilde{T}\vec{x}|\vec{x}) \\ &= (\tilde{T}\vec{x}|\vec{x}) \\ &= \overline{(\vec{x}|\tilde{T}\vec{x})} \\ &= \overline{(T\vec{x}|\vec{x})} \\ &= \overline{Q_T(\vec{x})} \end{aligned}$$

Para la otra parte, veamos que:

$$\begin{aligned} Q_T(\vec{x}) \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in H &\iff Q_T(\vec{x}) = \overline{Q_T(\vec{x})}, \forall \vec{x} \in H \\ &\iff Q_T(\vec{x}) = Q_{\tilde{T}}(\vec{x}), \forall \vec{x} \in H \\ &\iff (T\vec{x}|\vec{x}) = (\tilde{T}\vec{x}|\vec{x}), \forall \vec{x} \in H \\ &\iff (T\vec{x}|\vec{x}) - (\tilde{T}\vec{x}|\vec{x}) = 0, \forall \vec{x} \in H \\ &\iff (T\vec{x} - \tilde{T}\vec{x}|\vec{x}) = 0, \forall \vec{x} \in H \\ &\iff ([T - \tilde{T}]\vec{x}|\vec{x}) = 0, \forall \vec{x} \in H \end{aligned}$$

Veamos que $([T - \tilde{T}]\vec{x}|\vec{x}) = 0, \forall \vec{x} \in H$ si y sólo si $T = \tilde{T}$.

\Rightarrow) Suponga que $([T - \tilde{T}]\vec{x}|\vec{x}) = 0, \forall \vec{x} \in H$. Esto es inmediato, pues se tiene que: $Q_{T-\tilde{T}}(\vec{x}) = 0$, para todo $\vec{x} \in H$, luego

$$([T - \tilde{T}]\vec{x}|\vec{y}) = 0, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in H$$

en particular para \vec{x} fijo, $([T - \tilde{T}]\vec{x}|\vec{y}) = 0$ para todo $\vec{y} \in H$, luego $[T - \tilde{T}]\vec{x} = \vec{0}$. Como fue arbitrario se sigue entonces que $T = \tilde{T}$.

\Leftarrow) Suponga que $T = \tilde{T}$. De forma inmediata se sigue que $([T - \tilde{T}]\vec{x}|\vec{x}) = 0, \forall \vec{x} \in H$.

□

Ejercicio 1.1.3

Sea A un endomorfismo lineal continuo de un espacio prehilbertiano H . Defina $Q_A : H \rightarrow \mathbb{K}$ como:

$$Q_A(\vec{x}) = (A\vec{x}|\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in H$$

Sea

$$\alpha = \sup \left\{ \frac{|Q_A(\vec{x})|}{\|\vec{x}\|^2} \mid \vec{x} \in H, \vec{x} \neq \vec{0} \right\}$$

I. **Pruebe** que $\alpha \leq \|A\|$.

II. Al suponer A autoadjunto, **demuestre** la igualdad opuesta. Luego, si A es autoadjunto se tiene que

$$\|A\| = \sup \left\{ \frac{|Q_A(\vec{x})|}{\|\vec{x}\|^2} \mid \vec{x} \in H, \vec{x} \neq \vec{0} \right\}$$

Indicación. Compruebe que $\forall \vec{x} \in H$ y $\forall \lambda > 0$,

$$(A\vec{x}|A\vec{x}) = \frac{1}{4} (Q_A(\lambda\vec{x} + \lambda^{-1}A\vec{x}) - Q_A(\lambda\vec{x} - \lambda^{-1}A\vec{x}))$$

de ahí obtenga que $\|A\vec{x}\|^2 \leq \frac{\alpha}{2} (\lambda^2 \|\vec{x}\|^2 + \frac{1}{\lambda^2} \|A\vec{x}\|^2)$ y elija λ convenientemente.

Demostración:

Demostremos cada inciso.

De (i): Basta con ver que $\|A\|$ es cota superior del conjunto al que se le quiere sacar el supremo. Para ello, notemos que al ser A lineal continuo, se tiene que:

$$|(A\vec{x}|\vec{x})| \leq \|A\vec{x}\| \|\vec{x}\| \leq \|A\| \|\vec{x}\|^2$$

para todo $\vec{x} \in H$. En particular, para $\vec{x} \neq \vec{0}$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{|(A\vec{x}|\vec{x})|}{\|\vec{x}\|^2} &\leq \|A\| \\ \Rightarrow \frac{|Q_A(\vec{x})|}{\|\vec{x}\|^2} &\leq \|A\| \end{aligned}$$

luego, $\|A\|$ es cota superior del conjunto. Por tanto $\alpha \leq \|A\|$.

De (ii): Suponga que A es autoadjunto. Sean $\vec{x} \in H$ y $\lambda > 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} Q_A(\lambda\vec{x} + \lambda^{-1}A\vec{x}) &= (A(\lambda\vec{x} + \lambda^{-1}A\vec{x})|\lambda\vec{x} + \lambda^{-1}A\vec{x}) \\ &= (\lambda A\vec{x} + \lambda^{-1}(A \circ A)\vec{x}|\lambda\vec{x} + \lambda^{-1}A\vec{x}) \\ &= (\lambda A\vec{x} + \lambda^{-1}(A \circ A)\vec{x}|\lambda\vec{x}) + (\lambda A\vec{x} + \lambda^{-1}(A \circ A)\vec{x}|\lambda^{-1}A\vec{x}) \\ &= (\lambda A\vec{x}|\lambda\vec{x}) + (\lambda^{-1}(A \circ A)\vec{x}|\lambda\vec{x}) + (\lambda A\vec{x}|\lambda^{-1}A\vec{x}) + (\lambda^{-1}(A \circ A)\vec{x}|\lambda^{-1}A\vec{x}) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} Q_A(\lambda\vec{x} - \lambda^{-1}A\vec{x}) &= (A(\lambda\vec{x} - \lambda^{-1}A\vec{x})|\lambda\vec{x} - \lambda^{-1}A\vec{x}) \\ &= (\lambda A\vec{x} - \lambda^{-1}(A \circ A)\vec{x}|\lambda\vec{x} - \lambda^{-1}A\vec{x}) \\ &= (\lambda A\vec{x} - \lambda^{-1}(A \circ A)\vec{x}|\lambda\vec{x}) - (\lambda A\vec{x} - \lambda^{-1}(A \circ A)\vec{x}|\lambda^{-1}A\vec{x}) \\ &= (\lambda A\vec{x}|\lambda\vec{x}) - (\lambda^{-1}(A \circ A)\vec{x}|\lambda\vec{x}) - (\lambda A\vec{x}|\lambda^{-1}A\vec{x}) + (\lambda^{-1}(A \circ A)\vec{x}|\lambda^{-1}A\vec{x}) \end{aligned}$$

por tanto:

$$\begin{aligned} Q_A(\lambda\vec{x} + \lambda^{-1}A\vec{x}) - Q_A(\lambda\vec{x} - \lambda^{-1}A\vec{x}) &= 2((\lambda^{-1}(A \circ A)\vec{x}|\lambda\vec{x}) + (\lambda A\vec{x}|\lambda^{-1}A\vec{x})) \\ &= 2((A \circ A)\vec{x}|\vec{x}) + (A\vec{x}|A\vec{x}) \\ &= 2((A\vec{x}|A\vec{x}) + (A\vec{x}|A\vec{x})) \\ &= 4(A\vec{x}|A\vec{x}) \end{aligned}$$

pues, A es autoadjunto. Luego:

$$(A\vec{x}|A\vec{x}) = \frac{1}{4}(Q_A(\lambda\vec{x} + \lambda^{-1}A\vec{x}) - Q_A(\lambda\vec{x} - \lambda^{-1}A\vec{x}))$$

por tanto:

$$\begin{aligned} \|A\vec{x}\|^2 &= \frac{1}{4} |Q_A(\lambda\vec{x} + \lambda^{-1}A\vec{x}) - Q_A(\lambda\vec{x} - \lambda^{-1}A\vec{x})| \\ &\leq \frac{1}{4} (|Q_A(\lambda\vec{x} + \lambda^{-1}A\vec{x})| + |Q_A(\lambda\vec{x} - \lambda^{-1}A\vec{x})|) \\ &= \frac{1}{4} (|(A(\lambda\vec{x} + \lambda^{-1}A\vec{x})|\lambda\vec{x} + \lambda^{-1}A\vec{x})| + |(A(\lambda\vec{x} - \lambda^{-1}A\vec{x})|\lambda\vec{x} - \lambda^{-1}A\vec{x})|) \\ &\leq \frac{1}{4} (\|A(\lambda\vec{x} + \lambda^{-1}A\vec{x})\| \|\lambda\vec{x} + \lambda^{-1}A\vec{x}\| + \|A(\lambda\vec{x} - \lambda^{-1}A\vec{x})\| \|\lambda\vec{x} - \lambda^{-1}A\vec{x}\|) \\ &\leq \frac{1}{4} (\|A\| \|\lambda\vec{x} + \lambda^{-1}A\vec{x}\|^2 + \|A\| \|\lambda\vec{x} - \lambda^{-1}A\vec{x}\|^2) \end{aligned}$$

por Cauchy-Schwartz y usando la identidad del paralelogramo y, tomando ■

Ejercicio 1.1.4

Muestre que todo endomorfismo continuo T de un espacio hilbertiano H se expresa únicamente en la forma:

$$T = A + iB$$

donde A y B son endomorfismos autoadjuntos de H .

Demostración:

Tomemos $A = \frac{1}{2}(T + \tilde{T})$ y $B = \frac{1}{2i}(T - \tilde{T})$, siendo $\tilde{T} : H \rightarrow H$ la adjunta de T . Es claro que $T = A + iB$ y, que tanto A como B son adjuntos, pues:

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \frac{1}{2} \widetilde{(T + \tilde{T})} \\ &= \frac{1}{2} \widetilde{(T + \tilde{T})} \\ &= \frac{1}{2} (\tilde{T} + \tilde{\tilde{T}}) \\ &= \frac{1}{2} (T + \tilde{T}) \\ &= A\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\tilde{B} &= \frac{1}{2i} \widetilde{(T - \tilde{T})} \\ &= \frac{-i}{2} \widetilde{(T - \tilde{T})} \\ &= -\frac{i}{2} \widetilde{(T - \tilde{T})} \\ &= \frac{i}{2} (\tilde{T} - \tilde{\tilde{T}}) \\ &= -\frac{1}{2i} (\tilde{T} - T) \\ &= \frac{1}{2i} (T - \tilde{T}) \\ &= B\end{aligned}$$

además, son endomorfismos. Para ello, basta ver que $T + \tilde{T}$ y $T - \tilde{T}$ lo son. En efecto, si $\vec{y} \in H$, entonces \blacksquare

Ejercicio 1.1.5

Sea H un espacio prehilbertiano. **Construya** un espacio hilbertiano \hat{H} y una inyección lineal $j : H \rightarrow \hat{H}$ tal que

$$(j\vec{x}|j\vec{y}) = (\vec{x}|\vec{y}), \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in H.$$

y que $j(H)$ sea denso en \hat{H} . El espacio hilbertiano \hat{H} se llama la **completación** del espacio prehilbertiano H . **Formule y demuestre** un teorema de unicidad de esta completación.

Demostración:

Sea

$$\hat{H} = \left\{ \{ \vec{x}_n \}_{n=1}^{\infty} \mid \{ \vec{x}_n \}_{n=1}^{\infty} \text{ es sucesión de Cauchy en } H \right\}$$

se definen sobre \hat{H}' dos operaciones, para todo $\hat{x}' = \{\vec{x}_n\}_{n=1}^\infty, \hat{y}' = \{\vec{y}_n\}_{n=1}^\infty \in \hat{H}'$ y $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$\hat{x}' + \hat{y}' = \{\vec{x}_n + \vec{y}_n\}_{n=1}^\infty \quad \text{y} \quad \alpha \hat{x}' = \{\alpha \vec{x}_n\}_{n=1}^\infty$$

Con estas operaciones \hat{H}' es un espacio vectorial sobre \mathbb{K} . Definimos una relación \sim en \hat{H}' dada como sigue:

$$\hat{x}' \sim \hat{y}' \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|\vec{x}_n - \vec{y}_n\| = 0$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma inducida por el producto interno sobre H . Tomemos $\hat{0}' = \{\vec{0}\}_{n=1}^\infty \in \hat{H}'$, y sea:

$$\hat{K}' = \left\{ \hat{x}' \in \hat{H}' \mid \hat{x}' \sim \hat{0}' \right\}$$

Afirmamos que \hat{K}' es subespacio vectorial de \hat{H} . En efecto, sean $\hat{x}' = \{\vec{x}_n\}_{n=1}^\infty, \hat{y}' = \{\vec{y}_n\}_{n=1}^\infty \in \hat{K}'$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|\vec{x}_n + \alpha \vec{y}_n - \vec{0}\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|\vec{x}_n + \alpha \vec{y}_n\| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|\vec{x}_n\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|\alpha \vec{y}_n\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|\vec{x}_n\| + \lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha| \cdot \|\vec{y}_n\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|\vec{x}_n - \vec{0}\| + |\alpha| \lim_{n \rightarrow \infty} \|\vec{y}_n - \vec{0}\| \\ &= 0 + |\alpha| \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

por tanto, $\hat{x}' + \alpha \hat{y}' \in \hat{K}'$. Así \hat{K}' es espacio vectorial. Tomemos

$$\hat{H} = \hat{H}' / \hat{K}'$$

el espacio vectorial cociente, cuyos elementos los denotaremos por $\hat{x} = [\hat{x}'] = \hat{x}' + \hat{K}'$. Definimos un producto escalar en \hat{H} como sigue; para cada $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{H}$:

$$(\hat{x} | \hat{y}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\vec{x}_n | \vec{y}_n)$$

■

Ejercicio 1.1.6

Si E es un espacio vectorial complejo, la adición de elementos de E y la multiplicación de elementos de E por números reales, hacen de E un espacio vectorial real que se designa por $E_{\mathbb{R}}$.

- I. Sea H un espacio prehilbertiano complejo. Se designa por $(\vec{x} | \vec{y})$ un producto escalar en H . **Muestre** que la aplicación:

$$(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto (\vec{x} | \vec{y})_{\mathbb{R}} = \Re (\vec{x} | \vec{y})$$

hace de $H_{\mathbb{R}}$ un espacio prehilbertiano real para el que se cumple:

$$(i\vec{x} | i\vec{y})_{\mathbb{R}} = (\vec{x} | \vec{y})_{\mathbb{R}}$$

Pruebe la relación:

$$(\vec{x} | \vec{y}) = (\vec{x} | \vec{y})_{\mathbb{R}} + i (i\vec{x} | i\vec{y})_{\mathbb{R}} \quad (1.2)$$

- II. Sea H un espacio vectorial complejo. Se supone que $H_{\mathbb{R}}$ está provisto de un producto escalar $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto (\vec{x} | \vec{y})_{\mathbb{R}}$ que hace de $H_{\mathbb{R}}$ un espacio prehilbertiano real. Se supone también

que $(i\vec{x}|i\vec{y})_{\mathbb{R}} = (\vec{x}|\vec{y})_{\mathbb{R}}$, para todo $\vec{x}, \vec{y} \in H$. Se define en H un producto $(\vec{x}|\vec{y})$ por la fórmula (1.1). **Demuestre** que $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto (\vec{x}|\vec{y})$ es un producto escalar complejo que hace de H un espacio prehilbertiano complejo.

Demostración:

Ejercicio 1.1.7

Haga lo siguiente:

- I. **Muestre** que en todo espacio prehilbertiano real se cumple

$$(\vec{x}|\vec{y}) = \frac{1}{4} (\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2)$$

y en todo espacio prehilbertiano complejo se cumple

$$(\vec{x}|\vec{y}) = \frac{1}{4} (\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 + i\|\vec{x} + i\vec{y}\|^2 - i\|\vec{x} - i\vec{y}\|^2)$$

- II. Sea E un espacio vectorial normado real en el que se verifica la identidad del paralelogramo:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2)$$

Pruebe que se puede definir de manera única un producto escalar $(|)$ sobre E que hace de E un espacio prehilbertiano real para el cual $\|\vec{x}\|^2 = (\vec{x}|\vec{x})$, $\forall \vec{x} \in E$.

Indicación. Defina $(\vec{x}|\vec{y})$ por la primera fórmula del inciso (i). Usando la fórmula del paralelogramo compruebe que $(\vec{x}|2\vec{y}) = 2(\vec{x}|\vec{y})$. Transforme $(\vec{x}_1|\vec{y}_1) + (\vec{x}_2|\vec{y}_2)$ por la identidad del paralelogramo y deduzca la fórmula $(\vec{x}_1|\vec{y}) + (\vec{x}_2|\vec{y}) = (\vec{x}_1 + \vec{x}_2|\vec{y})$.

- III. Misma pregunta que en (ii) en el caso de ser E espacio vectorial complejo.

Indicación. Use (ii) y el problema 1.6.

Solución:

Ejercicio 1.1.8

Para todo $s \in \mathbb{R}$ sea $u_s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ la función definida por:

$$u_s(x) = e^{isx}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sea X el espacio vectorial complejo compuesto de todas las combinaciones lineales finitas de estas funciones u_s , $\forall f, g \in X$ se define:

$$(f|g) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R f \bar{g}.$$

Pruebe que esta definición tiene sentido y que la aplicación $(f, g) \mapsto (f|g)$ es un producto escalar que hace de X un espacio prehilbertiano.

Sea H el espacio prehilbertiano, completación del espacio prehilbertiano X (ver problema 1.5). **Muestre** que H es un espacio hilbertiano no separable y que la familia $(u_s)_{s \in \mathbb{R}}$ es un sistema ortonormal maximal en H .

Demostración:

Ejercicio 1.1.9

Sea H un espacio hilbertiano de dimensión infinita. **Demuestre** que existe una aplicación continua inyectiva γ de $[0, 1]$ en H (un **camino simple** en H) tal que si $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 1$, los vectores $\gamma(b) - \gamma(a)$ y $\gamma(d) - \gamma(c)$ son ortogonales.

Indicación. Tome $H = L_2([0, 1], \mathbb{K})$ y considere funciones características de ciertos subconjuntos de $[0, 1]$.

Demostración:

Ejercicio 1.1.10

Sea $\{\vec{x}_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ una sucesión de elementos de un espacio hilbertiano H . La sucesión $\{\vec{x}_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ se llama **martingala** (en el sentido amplio) si, $\forall \nu \in \mathbb{N}$, \vec{x}_ν es el vector de $\mathcal{L}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_\nu)$ menos alejado de $\vec{x}_{\nu+1}$.

- I. Sea $\{\vec{x}_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ una martingala. Se definen:

$$\vec{y}_1 = \vec{x}_1 \quad \text{e} \quad \vec{y}_\nu = \vec{x}_\nu - \vec{x}_{\nu-1}, \quad \forall \nu \geq 2.$$

Muestre que los vectores \vec{y}_ν son ortogonales a pares y que $\{\|\vec{x}_\nu\|\}_{\nu=1}^\infty$ es una sucesión creciente de números no negativos.

- II. Sea $\{\vec{y}_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ una sucesión de vectores en H ortogonales a pares. Se define

$$\vec{x}_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \vec{y}_k = 1^\nu \vec{y}_k, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

Pruebe que $\{\vec{y}_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ es una martingala.

Demostración:

Ejercicio 1.1.11

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ una función medible, integrable en todo subconjunto de \mathbb{R}^n de medida finita. Si

$$\int_P f = 0, \quad \forall \text{ rectángulo acotado } P,$$

demuestre que $f = 0$ c.t.p. en \mathbb{R}^n .

Indicación. Redúzcase a un corolario del lema de los promedios.

Demostración:

Ejercicio 1.1.12 (Funciones de Hermite)

Por inducción se ve inmediatamente que

$$D^n e^{-x^2} = (-1)^n H_n(x) e^{-x^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

donde $(-1)^n H_n$ es un polinomio de grado n . Estos polinomios $(-1)^n H_n$ se llaman **polinomios de**

Hermite. Se definen las **funciones de Hermite** φ_n por:

$$\varphi_n(x) = H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

equivalentemente,

$$\varphi_n(x) = (-1)^n e^{-\frac{x^2}{2}} D^n e^{-x^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

I. **Demuestre** que las funciones de Hermite satisfacen la relación:

$$\varphi_n''(x) = (x^2 - 2n - 1)\varphi_n(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Indicación. Expresar a $\varphi_n''(x)$ mediante $D^n e^{-x^2}$, $D^{n+1} e^{-x^2}$ y $D^{n+2} e^{-x^2}$ y calcule $D^{n+2} e^{-x^2} = D^{n+1}(-2xe^{-x^2})$ por la fórmula de Leibniz para la derivada $n+1$ -enésima de un producto de factores.

II. **Muestre** que las funciones de Hermite constituyen un sistema ortogonal en el espacio hilbertiano $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{K})$

Indicación. Del inciso (i) se sigue que $\varphi_n''\varphi_m - \varphi_m''\varphi_n = 2(m-n)\varphi_n\varphi_m$.

III. **Pruebe** la relación

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x).$$

Indicación. Expresar $H_n'(x)$ mediante $D^n e^{-x^2}$ y $D^{n+1} e^{-x^2}$. Calcule $D^{n+1} e^{-x^2} = D^n(-2xe^{-x^2})$ por la fórmula de Leibniz.

IV. **Demuestre** que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^2(x) dx = 2n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{n-1}^2(x) dx$$

y deduzca que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^2(x) dx = \pi^{1/2} 2^n n!.$$

Luego el sistema de funciones:

$$\Psi_n = \frac{1}{\pi^{1/2} 2^n n!} \varphi_n$$

es un sistema ortonormal en $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ (En un ejercicio posterior se probará que dicho sistema ortonormal es, de hecho, maximal).

Indicación. Integre por partes

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^2(x) dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) D^n e^{-x^2} dx$$

y use (iii).