Lista 8.

2.1. Sea $a > 0$. Usando coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^3$, **calcule** el volumen del conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x^2 + y^2 + z^2)^3 \leqslant a^3 xyz\}.$$

Sol.

Consideremos el difeomorfismo $\phi :]0,\infty[\times]-\pi,\pi[\times]0,\pi[\to \mathbb{R}^3$, dado como:

$$\phi(r,\theta,\varphi) = (r\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, r\cos\varphi)$$

Se tiene que $J\phi(r,\theta,\varphi) = r^2\operatorname{sen}\varphi$. El conjunto

$$\begin{aligned} B &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | (x^2+y^2+z^2)^3 \leq a^3xyz\} \\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | (x^2+y^2+z^2)^3 \leq a^3xyz\} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{8} C_i\right) \end{aligned}$$

Donde los C_i son los octantes de $\mathbb{R}^3$. Llamemos:

$$C_1 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x,y,z > 0\}$$

$$C_2 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x,y < 0, z > 0\}$$

$$C_3 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | y,z < 0 \text{ y } x > 0\}$$

$$C_4 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | z,x \leqslant 0 \text{ y } y \geqslant 0\}$$

Se cumple que $B\cap C_i \neq \emptyset$, $\forall i \in [\![1,4]\!]$ y $B\cap C_{i+4} = \emptyset$, $\forall i\in[\![1,4]\!]$. Por tanto:

$$m(B) = \int_{C_1\cup\ldots\cup C_4} \chi_B = \int_{C_1}\chi_B + \ldots + \int_{C_4}\chi_B$$

pues $C_1,\ldots,C_4$ son cuadrables, i.e $m(Fr(C_i)) = 0$, $\forall i\in[\![1,4]\!]$. Pero por simetría de las variables $x,y,z\in\mathbb{R}$, se tiene que:

$$\int_{C_1}\chi_B = \int_{C_i}\chi_B, \ \forall i\in[\![1,4]\!]$$

Luego:

$$\Rightarrow m(B) = 4\int_{C_1}\chi_B = 4\int\chi_{B\cap C_1}$$

(B es medible, pues $B = f^{-1}([0,\infty[)$ donde $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z) = a^3xyz - (x^2+y^2+z^2)^3$, con f continua y luego, B medible). Así:

$$B\cap C_1 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x^2+y^2+z^2)^3 \leq a^3 xyz \ \text{ y } \ x,y,z>0\}$$

$B\cap C_1$ es medible. Así $\chi_{B\cap C_1}$ es medible. Por el t. de. c.v. tomando el isomorfismo C_1 $\phi:\Omega \to \Omega'$, $\Omega =]0,\infty[\times]0,\frac{\pi}{2}[^2$ y $\Omega' = C_1$, se tiene que

$$\phi^{-1}(B\cap C_1) = \{(r,\theta,\varphi)\in\Omega \mid r^6 \leq a^3 r^3 \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \cos\varphi\}$$

$$= \{(r,\theta,\varphi)\in\Omega \mid r^3 \leq \frac{a^3}{2}\operatorname{sen}^2\varphi\cos\varphi \operatorname{sen}2\theta\}$$

$$= \{(r,\theta,\varphi)\in\Omega \mid r \leq a\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2\varphi\cos\varphi\operatorname{sen}2\theta}\}$$

$$\therefore \int_{\mathbb{R}^3}\chi_{B\cap C_1} = \int_{B\cap C_1} dx\,dy\,dz$$

$$= \int_{\phi^{-1}(B\cap C_1)} r^2\operatorname{sen}\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

Por Fubini para med. no neg. se tiene que:

$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{a\sqrt[3]{\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\varphi\cos\varphi\operatorname{sen}2\theta}} r^2 \operatorname{sen}\varphi\, dr$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \operatorname{sen}\varphi \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{a\sqrt[3]{\cdots}}$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} a^3 \operatorname{sen}^3\varphi\cos\varphi\operatorname{sen}2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^{\pi/2} a^3 \operatorname{sen}^3\varphi\cos\varphi\, d\varphi \int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}2\theta\, d\theta \qquad -\frac{1}{2}\cos 2\theta$$

$$= \frac{a^3}{6}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^3\varphi\cos\varphi\, d\varphi \cdot \left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{a^3}{6}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^3\varphi\cos\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{a^3}{24}\left[\operatorname{sen}^4\varphi\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{a^3}{24}$$

$$\therefore m(B) = \frac{a^3}{6} \ //$$

$\square$

2.2. Sea $a > 0$. Usando coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^3$ y distinguiendo los casos $c \geqslant a$ y $0 \leqslant c < a$, calcule la integral

$$\int_{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2} \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-c)^2}}.$$

(Potencial creado por una bola homogénea de radio a, de densidad 1, en el punto $(0,0,c)$.)

Sol.

Considere el caso $0 \leqslant c < a$. El conjunto:

$$B = \{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq a^2\}$$

$$\Rightarrow \phi^{-1}(B) = \{(r,\theta,\varphi)\in \Omega \mid r^2 \leq a^2\}$$

$$= \{(r,\theta,\varphi)\in \Omega \mid r \leqslant a\}$$

Por ende, usando el cambio de coordenadas a esféricas, tenemos:

$$\int_B f(x,y,z)\,dxdydz = \int_{\phi^{-1}(B)} f(r\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, r\cos\varphi) r^2 \operatorname{sen}\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_{\phi^{-1}(B)} \frac{r^2\operatorname{sen}\varphi\, dr}{\sqrt{r^2-2cr\cos\varphi+c^2}}$$

donde $r^2-2cr\cos\varphi+c^2 = (r^2-2cr+c^2)+2cr(1-\cos\varphi) = (r-c)^2+2cr(1-\cos\varphi)$

$$= \int_0^a dr \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\pi} \frac{r^2\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi}{\sqrt{(r-c)^2+2cr(1-\cos\varphi)}}$$

Sea $u = (r-c)^2+2cr(1-\cos\varphi)$. Por el T.D.C.V para Riemann con $\frac{du}{d\varphi} = 2cr\operatorname{sen}\varphi$

$$= \int_0^a dr \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{(r-c)^2}^{(r-c)^2+4cr} \frac{1}{2cr\operatorname{sen}\varphi}\cdot\frac{r^2\operatorname{sen}\varphi\, du}{\sqrt{u}}$$

$$= \int_0^a dr \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{(r-c)^2}^{(r-c)^2+4cr} \frac{1}{2c} r\cdot\frac{du}{\sqrt{u}}$$

$$= \int_0^a dr \int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, \frac{r}{2c}\left[\frac{\sqrt{u}}{1/2}\right]_{(r-c)^2}^{(r-c)^2+4cr}$$

$$= \int_0^a dr \int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, \frac{r}{c}\left[\sqrt{(r-c)^2+4cr} - |r-c|\right]$$

$$= \frac{2\pi}{c}\int_0^a r\left[\sqrt{(r-c)^2+4cr} - |r-c|\right]dr$$

Pero $(r-c)^2+4cr = r^2-2cr+c^2+4cr = (r+c)^2$

$$= \frac{2\pi}{c}\int_0^a r\left[r+c-|r-c|\right]dr$$

1) $0 \leqslant c < a$. En este caso:

$$= \frac{2\pi}{c}\int_0^c r\left[r+c-|r-c|\right]dr + \frac{2\pi}{c}\int_c^a r\left[r+c-|r-c|\right]dr$$

$$= \frac{2\pi}{c}\left[\int_0^c r\,[r+c-c+r]\,dr + \int_c^a r\,[r+c-r+c]\,dr \right]$$

$$= \frac{2\pi}{c}\left[\int_0^c 2r^2\,dr + \int_c^a 2cr\,dr \right]$$

$$= \frac{2\pi}{c}\left[\frac{2}{3}r^3 \Big|_0^c + c\,r^2 \Big|_c^a \right]$$

$$= \frac{2\pi}{c}\left[\frac{2}{3}c^3 + ca^2 - c^3 \right]$$

$$= \frac{2\pi}{c}\left[ca^2 - \frac{1}{3}c^3 \right]$$

$$= 2\pi\left[a^2 - \frac{1}{3}c^2 \right]$$

2) $c \geq a$. En este caso:

$$= \frac{2\pi}{c} \int_0^a r\,[r+c-c+r]\,dr$$

$$= \frac{2\pi}{c} \int_0^a 2r^2\,dr$$

$$= \frac{4}{3}\frac{\pi}{c}\, r^3 \Big|_0^a$$

$$= \frac{4}{3}\pi\,\frac{a^3}{c}$$

$\square$

2.3. Sean $a_1, \dots, a_n > 0$. Sea E el "hiperelipsoide" en $\mathbb{R}^n$ dado por

$$\left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \frac{x_1^2}{a_1^2} + \cdots + \frac{x_n^2}{a_n^2} \leqslant 1 \right\}.$$

Demuestre que

$$m(E) = |a_1| \cdots |a_n| \omega_n,$$

donde ω_n es la medida de la bola euclidiana unitaria en $\mathbb{R}^n$.

Sol.

Considere el automorfismo lineal $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (a_1 x_1, \dots, a_n x_n)$. Si

$$B = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n^2} \leqslant 1 \right\}$$

Entonces $B = T(U)$, donde $U = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leqslant 1\}$. Como U es med. entonces B lo es (ya que T es aut. lineal) y

$$m(B) = |\operatorname{Det} T| \, m(U)$$

$$= |\operatorname{Det} T| \, \omega_n$$

Donde:

$$|\operatorname{Det} T| = \left\| \begin{matrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{matrix} \right\| = |a_1 \cdot \ldots \cdot a_n|$$

$$\therefore m(B) = |a_1| \cdot \ldots \cdot |a_n| \, \omega_n$$

$\square$

2.4. Sean Ω y Ω' los conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^3$ definidos como

$$\Omega = \left\{(r,\varphi,\theta) \in \mathbb{R}^3 \middle| r > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right\}$$
$$\Omega' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x > 0, y > 0, z > 0\}.$$

Dado $\sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma \neq 0$, se define $\Phi : \Omega \to \Omega'$ como

$$\Phi(r,\varphi,\theta) = (ar\cos^\sigma\theta \operatorname{sen}^\sigma\varphi, br\operatorname{sen}^\sigma\theta\operatorname{sen}^\sigma\varphi, cr\cos^\sigma\varphi),$$

donde $a > 0$, $b > 0$ y $c > 0$ son constantes. **Pruebe** que Φ es un isomorfismo C^∞ de Ω sobre Ω' y que

$$J\Phi(r,\varphi,\theta) = abc\sigma^2 r^2 \operatorname{sen}^{2\sigma-1}\varphi(\cos\varphi\operatorname{sen}\theta\cos\theta)^{\sigma-1}.$$

Sugerencia. Considere las tres aplicaciones Φ_1, Φ_2 y Φ_3 definidas por

$$\Phi_1(r,\varphi,\theta) = (r^{1/\sigma},\theta,\varphi),$$
$$\Phi_2(r',\varphi',\theta') = (r'\operatorname{sen}\varphi'\cos\theta', r'\operatorname{sen}\varphi'\operatorname{sen}\theta', r'\cos\varphi'),$$
$$\Phi_3(\xi,\eta,\phi) = (a\xi^\sigma, b\eta^\sigma, c\phi^\sigma).$$

Empleando la transformación Φ, con σ convenientemente elegido, **resuelva** los problemas siguientes.

i. **Calcule** el volumen del conjunto

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \left[\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right]^2 \leqslant \frac{z}{l}, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0\right\},$$

donde $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ y $l > 0$ son constantes.

ii. **Calcule** el volumen del conjunto

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \left[\frac{x}{a}\right]^{2/3} + \left[\frac{y}{b}\right]^{2/3} + \left[\frac{z}{c}\right]^{2/3} \leqslant 1\right\},$$

donde $a > 0$, $b > 0$ y $c > 0$ son constantes.

iii. **Calcule** el volumen del conjunto

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0\right\},$$

donde $a > 0$, $b > 0$ y $c > 0$ son constantes.

Sol.

Notemos que

$$\begin{aligned}\phi(r,\theta,\varphi) &= \phi_3(r^{1/\sigma}\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, r^{1/\sigma}\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, r^{1/\sigma}\cos\varphi) \\ &= \phi_3\circ\phi_2(r^{1/\sigma},\theta,\varphi) \\ &= \phi_3\circ\phi_2\circ\phi_1(r,\theta,\varphi)\end{aligned}$$

i.e $\phi = \phi_3\circ\phi_2\circ\phi_1$. Si probamos que ϕ_i es isomorfismo C^∞ (eligiendo adecuadamente los dominios) $\forall\, i=1,2,3$, entonces ϕ será isomorfismo C^∞. Para ello, veamos que

$$\phi_1 : \Omega \to \Omega,\ \phi_2 : \Omega \to \Omega' \text{ y } \phi_3 : \Omega' \to \Omega'$$

En estos dominios, ϕ_i es isomorfismo C^∞, con Jacobianos:

$$|J\phi_1(r,\theta,\varphi)| = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{\sigma} r^{\frac{1}{\sigma}-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{\sigma} r^{\frac{1}{\sigma}-1}, \quad |J\phi_2(r',\theta',\varphi')| = r'^2 \operatorname{sen}\varphi'$$

$$|J\phi_3(\xi,\eta,\phi)| = \left\| \begin{matrix} a\sigma\xi^{\sigma-1} & 0 & 0 \\ 0 & b\sigma\eta^{\sigma-1} & 0 \\ 0 & 0 & c\sigma\phi^{\sigma-1} \end{matrix} \right\| = abc\sigma^3(\xi\eta\phi)^{\sigma-1}$$

Por tanto ϕ es isomorfismo C^∞, y su Jacobiano es:

$$\begin{aligned} |J\phi(r,\theta,\varphi)| &= |J\phi_3(\phi_2\circ\phi_1(r,\theta,\varphi))| \cdot |J\phi_2(\phi_1(r,\theta,\varphi))| \cdot |J\phi_1(r,\theta,\varphi)| \\ &= |J\phi_3(\phi_2(r^{\frac{1}{\sigma}},\theta,\varphi))| \cdot |J\phi_2(r^{1/\sigma},\theta,\varphi)| \cdot \frac{1}{\sigma} r^{\frac{1}{\sigma}-1} \\ &= |J\phi_3(r^{\frac{1}{\sigma}}\sin\varphi\cos\theta, r^{\frac{1}{\sigma}}\sin\varphi\sin\theta, r^{\frac{1}{\sigma}}\cos\varphi)| \cdot r^{\frac{2}{\sigma}}\operatorname{sen}\varphi \cdot \frac{1}{\sigma} r^{\frac{1}{\sigma}-1} \\ &= abc\sigma^3\left(r^{\frac{3}{\sigma}}\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta\cos\varphi\right)^{\sigma-1} \cdot r^{\frac{3}{\sigma}-1} \cdot \frac{1}{\sigma}\sin\varphi \\ &= abc\sigma^2 r^{3-\frac{3}{\sigma}+\frac{3}{\sigma}-1} \sin^{2\sigma-2}\varphi \cdot \sin\varphi(\cos\varphi \operatorname{sen}\theta\cos\theta)^{\sigma-1} \\ &= abc\sigma^2 r^2 \sin^{2\sigma-1}(\cos\varphi\operatorname{sen}\theta\cos\theta)^{\sigma-1} \quad // \end{aligned}$$

De (i): Tomemos $\sigma = 2$, ent.

$$|J\phi(r,\theta,\varphi)| = 4abcr^2\operatorname{sen}^3\varphi\cos\varphi\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

Sea

$$A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid [\tfrac{x}{a}+\tfrac{y}{b}+\tfrac{z}{c}]^2 \leq \tfrac{z}{\ell},\ x,y,z \geq 0\}$$

A es medible pues $A = f^{-1}([0,\infty[)\cap C_1$, tomando $f(x,y,z) = \frac{z}{\ell} - [\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}]^2$ (la cuál es continua). Se tiene que:

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(A) &= \{(r,\varphi,\theta)\in\Omega \mid [\tfrac{ar\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi}{a}+\tfrac{br\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi}{b}+\tfrac{cr\cos^2\varphi}{c}]^2 \leq \tfrac{cr\cos^2\varphi}{\ell}\} \\ &= \{(r,\varphi,\theta)\in\Omega \mid r^2 \leq \tfrac{cr\cos^2\varphi}{\ell}\} \\ &= \{(r,\varphi,\theta)\in\Omega \mid r \leq \tfrac{c}{\ell}\cos^2\varphi\} \end{aligned}$$

Como χ_A es medible, se tiene por el T.C.V:

$$m(A) = \int_{\mathbb{R}^3} \chi_A = \int_{\Omega} |J\phi| \, \chi_{\phi(A)}, \text{ Por Fubini para med. no neg.}$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\frac{c}{\lambda}\cos^2\varphi} 4abcr^2 \operatorname{sen}^3\varphi \cos\varphi \operatorname{sen}\theta\cos\theta \, dr$$

$$= 4abc \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3\varphi\cos\varphi \operatorname{sen}\theta\cos\theta \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{\frac{c}{\lambda}\cos^2\varphi} d\varphi$$

$$= 4abc \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3\varphi\cos\varphi \operatorname{sen}\theta\cos\theta \cdot \frac{c^3}{3\lambda^3}\cos^6\varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{4abc^4}{3\lambda^3} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\cos\theta \, d\theta \cdot \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3\varphi\cos^7\varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{4abc^4}{3\lambda^3} \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} \, d\theta \cdot \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3\varphi\cos^7\varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{4abc^4}{3\lambda^3} \cdot \frac{1}{40} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{abc^4}{60\lambda^3}$$

De (ii): Notemos que por simetría de los valores $x, y, z \in \mathbb{R}$, basta calcular el volumen en el primer octante y multiplicarlo por 8. Sea:

$$A = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left[\frac{x}{a}\right]^{2/3} + \left[\frac{y}{b}\right]^{2/3} + \left[\frac{z}{c}\right]^{2/3} \leq 1 \right\}$$

Si A es medible, ent.

$$m(A) = \int_{\mathbb{R}^3} \chi_A = \int_A dx = 8\int_{C_1 \cap A} dx$$

donde $C_1 \cap A = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} \leq 1 \text{ y } x,y,z > 0 \right\}$. A es med. por ser la imagen inversa de una fun. cont. Si $\sigma = 3$, ent.

$$\phi^{-1}(A \cap C) = \left\{ (r,\theta,\varphi) \in \Omega \;\middle|\; \left[\frac{ra\cos^3\theta \operatorname{sen}^3\varphi}{a}\right]^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{rb\operatorname{sen}^3\theta\operatorname{sen}^3\varphi}{b}\right]^{\frac{2}{3}} + \left[\frac{rc\cos^3\varphi}{c}\right]^{\frac{2}{3}} \leq 1 \right\}$$

$$= \left\{ (r,\theta,\varphi) \in \Omega \mid r^{\frac{2}{3}} \leq 1 \right\}$$

Por tanto, por el T.C.V.

$$\int_{A\cap C} dx = \int_{\phi^{-1}(A\cap C)} |J\phi(r,\theta,\varphi)| \, dr\, d\theta\, d\varphi. \text{ Por Fubini para med. no neg.}$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 abc \cdot 9 \cdot r^2 \sin^5\varphi \left(\cos\varphi \operatorname{sen}\theta\cos\theta\right)^2 dr$$

$$= 9abc \int_0^{\pi/2} \sin^5\varphi\cos^2\varphi \, d\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta \, d\theta \cdot \frac{1}{3}$$

$$= 3abc \int_0^{\pi/2} \sin^5\varphi\cos^2\varphi \, d\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta$$

$$= 3abc \cdot \frac{8}{105} \cdot \frac{\pi}{16}$$

$$= \frac{1}{2} abc\pi \cdot \frac{1}{35}$$

$$\therefore m(A) = \frac{4}{35} abc\pi \quad //$$

Do (iii):

2.5. i. **Calcule** la medida del conjunto

$$\Delta_n = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant 1, x_k \geqslant 0, k = 1, \dots, n \right\}.$$

Sugerencia. Exprese Δ_n en función de Δ_{n-1}.

ii. **Calcule** la integral

$$\int_{\Delta_n} x_n \, dx_1 \cdots dx_n.$$

iii. **Calcule** la medida del conjunto

$$\left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n} |x_k| \leqslant a \right\},$$

donde $a > 0$ es constante.

Sol. 1)

De (i): Claramente Δ_n es medible, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Observamos que $\Delta_n \subseteq \mathbb{R}^{(n-1)+1}$ med, y

$$\Delta_{n x_n} = \{ (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x_1, \dots, x_n) \in \Delta_n \}$$

$$= \{ (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \sum_{j=1}^{n-1} x_j \leq 1 - x_n \text{ y } x_i \geq 0, \forall\, i \in [[0, n]] \}$$

$$\pi^{\prime}(\Delta_n) = \{ x_n \in \mathbb{R} \mid (x_1, \dots, x_n) \in \Delta_n \}$$

$$= [0, 1].$$

Por tanto, por Fubini:

$$\Rightarrow m(\Delta_n) = \int_0^1 m_{n-1}(\Delta_n x_n)\, dx_n$$

Determinemos $m_{n-1}(\Delta_n x_n)$ (para $x_n \in [0,1[$ fijo). Considere el cambio de variable:

$$\phi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}, \quad (x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto ((1-x_n)x_1, \dots, (1-x_n)x_{n-1})$$

Claramente ϕ es isomorfismo C^∞ y:

$$|J\phi(x_1, \dots, x_{n-1})| = (1 - x_n)^{n-1}$$

Luego:

$$m_{n-1}(\Delta_{n x_n}) = \int_{\Delta_{n x_n}} dx_1 \cdots dx_{n-1}$$

$$= \int_{\phi^{-1}(\Delta_{n x_n})} (1 - x_n)^{n-1}\, dx_1 \cdots dx_{n-1}$$

donde $\psi^{-1}(\Delta_{nx_n}) = \{(x_1,\dots,x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \sum_{i=1}^{n-1} x_i(1-x_n) \leq 1-x_n,\ x_i \geq 0,\ \forall i \in [\![1,n]\!]\} = \Delta_{n-1}$

$$= (1-x_n)^{n-1}\int_{\Delta_{n-1}} dx_1 \cdots dx_{n-1}$$

$$= (1-x_n)^{n-1} m_{n-1}(\Delta_{n-1})$$

Así: $x_n \longmapsto m_{n-1}(\Delta_{nx_n})$ está definida c.t.p. en $(0,1)$ y:

$$m(\Delta_n) = \int_0^1 (1-x_n)^{n-1} m_{n-1}(\Delta_{n-1})\, dx_n$$

$$= m_{n-1}(\Delta_{n-1}) \cdot -\frac{(1-x_n)^n}{n}\Big|_0^1$$

$$= m_{n-1}(\Delta_{n-1}) \cdot \frac{1}{n}$$

$$\therefore m(\Delta_n) = \frac{1}{n} m_{n-1}(\Delta_{n-1})$$

Se tiene $m(\Delta_1) = 1$, $m(\Delta_2) = \frac{1}{2}$. En general:

$$m(\Delta_n) = \frac{1}{n!},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

(se prueba por inducción).

De (ii): Por Fubini para medibles no neg. se tiene que:

$$\int_{D_n} x_n\, dx_1 \cdots dx_n = \int_{\pi^1(\Delta_n)} dx_n \int_{\Delta_{nx_n}} x_n\, dx_1 \cdots dx_{n-1}$$

$$= \int_0^1 x_n\, dx_n \cdot m_{n-1}(\Delta_{nx_n})$$

$$= \int_0^1 x_n(1-x_n)^{n-1} m_{n-1}(\Delta_{n-1})\, dx_n$$

$$= m_{n-1}(D_{n-1}) \int_0^1 x_n(1-x_n)^{n-1} dx_n$$

Integrando por partes: $u = x_n \quad dv = (1-x_n)^{n-1} dx_n \Rightarrow du = dx_n \Rightarrow V = -\frac{1}{n}(1-x_n)^n$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\left(-\frac{1}{n} x_n(1-x_n)^n \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{n}(1-x_n)^n dx_n\right)$$

$$= \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n+1}\left[-(1-x_n)^{n+1}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}$$

De (iii):

2.6. Se designa por $(x,y) \mapsto (x|y)$ el producto escalar canónico en $\mathbb{R}^n$: si $(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces $(x|y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$. **Muestre** que si T es un automorfismo lineal de $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(Tx|Tx)}\,dx = \frac{\pi^{n/2}}{|\det T|}.$$

Dem:

Por el T. D. C. para medibles no neg. se tiene que tomando a $f(x) = e^{-(x|x)}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\mathrm{Det}\, T|\, f \circ T(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|\mathrm{Det}\, T|} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x|x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(Tx|Tx)}\,dx$$

donde:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x|x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2+\ldots+x_n^2)}\,dx_1\cdots dx_n$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx\right)^n$$

$$= \pi^{\frac{n}{2}}$$

$$\therefore \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(Tx|Tx)}\,dx = \frac{\pi^{n/2}}{|\mathrm{Det}\, T|}$$

$\square$

2.7. Identifique a $\mathbb{R}^{2n}$ con $(\mathbb{R}^2)^n$, es decir, todo punto de $\mathbb{R}^{2n}$ se representa en la forma $(w_1,\ldots,w_n)$, donde $w_k = (x_k,y_k)$, $x_k,y_k \in \mathbb{R}$, $k = 1,\ldots,n$. **Calcule** la medida del conjunto

$$A_n = \left\{(w_1,\ldots,w_n) \in \mathbb{R}^{2n} \,\middle|\, \sum_{k=1}^n \|w_k\| \leqslant a\right\}, \quad a>0.$$

donde $\|w_k\| = \sqrt{x_k^2+y_k^2}$, $k = 1,\ldots,n$.

Sol.

Claramente el conjunto es med. Calcularemos A_{n+1} en func. de A_n. Veamos que por Fubini para conjuntos:

$$m(A_{n+1}) = \int_{\pi(A_{n+1})} dw_{n+1} \int_{(A_{n+1})_{w_{n+1}}} dw_1 \cdots dw_n$$

donde:

$$\pi(A_{n+1}) = \{ w_{n+1} \in \mathbb{R}^2 \mid (w_1,\ldots,w_{n+1}) \in A_{n+1}\}$$

$$= \{ w_{n+1} \in \mathbb{R}^2 \mid \sum_{k=1}^{n+1} \|w_k\| \leq a\}$$

$$= \{ w_{n+1} \in \mathbb{R}^2 \mid \|w_{n+1}\| \leq a\}$$

$$= B(0,a)$$

y si $w_{n+1} \in B(0,a)$:

$$\begin{aligned}(A_{n+1})_{w_{n+1}} &= \{(w_1,\dots,w_n) \in \mathbb{R}^{2n} \mid (w_1,\dots,w_{n+1}) \in A_{n+1}\} \\ &= \{(w_1,\dots,w_n) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \sum_{k=1}^{n+1} \|w_k\| \leq a\} \\ &= \{(w_1,\dots,w_n) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \sum_{k=1}^{n} \|w_k\| \leq a - \|w_{n+1}\|\}\end{aligned}$$

Sea $r = a - \|w_{n+1}\|$. Ent. llamemos $C_n(r) = \{(w_1,\dots,w_n) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \sum_{k=1}^{n} \|w_k\| \leq r\}$. Así:

$$m(A_{n+1}) = \int_{B(0,a)} dw_{n+1} \int_{C_n(a-\|w_{n+1}\|)} dw_1 \cdot \ldots \cdot dw_n$$

Considere $\phi: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$, $(v_1,\dots,v_n) \mapsto \left(\frac{a-\|w_{n+1}\|}{a} v_1, \dots, \frac{a-\|w_{n+1}\|}{a} v_n\right)$, en part. ϕ es isomorfismo C^1 con $|J\phi| = \left(\frac{a-\|w_{n+1}\|}{a}\right)^{2n}$. Por tanto:

$$= \int_{B(0,a)} dw_{n+1} \int_{A_n} \left(\frac{a-\|w_{n+1}\|}{a}\right)^{2n} dw_1 \cdot \ldots \cdot dw_n$$

$$= m(A_n) \int_{B(0,a)} \left(\frac{a-\|w_{n+1}\|}{a}\right)^{2n} dw_{n+1}$$

Pero $\displaystyle\int_{B(0,a)} \left(\frac{a-\|w_{n+1}\|}{a}\right)^{2n} dw_{n+1} = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^a r \left(\frac{a-r}{a}\right)^{2n} dr = \frac{2\pi}{a^{2n}} \int_0^a r(a-r)^{2n} dr$, y:

$$\begin{aligned}\int_0^a r(a-r)^{2n} dr &= (R) \int_0^a r(a-r)^{2n} dr \\ &= -\left.\frac{r(a-r)^{2n+1}}{2n+1}\right|_0^a + \int_0^a \frac{(a-r)^{2n+1}}{2n+1} dr \\ &= -\frac{a(a-a)^{2n+1}}{2n+1} + \frac{0\cdot(a-0)^{2n+1}}{2n+1} - \left.\frac{(a-r)^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}\right|_0^a \\ &= \frac{a^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}\end{aligned}$$

$$\therefore \int_{B(0,a)} \left(\frac{a-\|w_{n+1}\|}{a}\right)^{2n} dw_{n+1} = \frac{2\pi}{a^{2n}} \cdot \frac{a^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{2\pi a^2}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$\Rightarrow m(A_{n+1}) = \frac{2\pi a^2}{(2n+1)(2n+2)} m(A_n) = \frac{\pi a^2}{(n+1)(2n+1)}$$

En part. $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq a\} \Rightarrow m(A_1) = \pi a^2$, así:

$$\begin{aligned}m(A_2) &= \frac{2\pi^2 a^4}{5\cdot 6} \\ &= \frac{1}{15}\pi^2 a^4\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(2+1)(2\cdot 2+1)} \pi^2 a^4$$

Por inducción se prueba que:

$$m(A_n) = \frac{6\,\pi^n a^{2n}}{(n+1)!\,(2n+1)!!}$$

$\square$

2.8. Considere el cubo abierto

$$C =]0,1[^n = \{(y_1,\dots,y_n) | 0 < y_k < 1, k = 1,\dots,n\}$$

y el abierto

$$\Delta = \left\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \middle| \sum_{k=1}^{n} x_k < 1, x_k > 0, k = 1,\dots,n\right\}.$$

Demuestre que la aplicación $y \mapsto x$ definida como

$$(2.1)\qquad \begin{cases} x_1 + \cdots\cdots + x_n &= y_1, \\ \quad x_2 + \cdots + x_n &= y_1 y_2, \\ \quad\cdots\cdots & \\ \qquad\qquad x_n &= y_1 y_2 \cdots y_n, \end{cases}$$

es un isomorfismo C^∞ de C sobre Δ. **Calcule** el jacobiano de este isomorfismo. **Calcule** la medida de Δ utilizando el cambio de variables (2.1).

Sugerencia. Sea $D = \{u \in \mathbb{R}^n | 1 > u_1 > \cdots > u_n > 0\}$. Considere las aplicaciones $\Phi_1 : C \to D$, $y \mapsto u$, donde $u_1 = y_1$, $u_2 = y_1 y_2$, $\dots$, $u_n = y_1 y_2 \cdots y_n$, y $\Phi_2 : D \to \Delta$, $u \mapsto x$, donde $x_k = u_k - u_{k+1}$, $k = 1,\dots,n-1$, y $x_n = u_n$.

Sol.

Consideremos las aplicaciones $\phi_1 : C \to D$, $(y_1,\dots,y_n) \mapsto (u_1 = y_1, u_2 = y_1 y_2, \dots, u_n = y_1 y_2 \cdot\ldots\cdot y_n)$ y $\phi_2 : D \to \Delta$, $(u_1,\dots,u_n) \mapsto (u_1 - u_2, u_2 - u_3, \dots, u_{n-1} - u_n, u_n)$, dónde

$$D = \{u \in \mathbb{R}^n \mid 1 > u_1 > \ldots > u_n > 0\}$$

Veamos que:

1) ϕ_1 es isomorfismo C^∞. En efecto, si $(y_1,\dots,y_n) \in C \Rightarrow 0 < y_i < 1, \forall i \in [\![1,n]\!]$, luego:

$$1 > y_1 > y_1 y_2 > y_1 y_2 y_3 > \ldots > y_1 \cdot\ldots\cdot y_n > 0$$

así, $\phi_1(y_1,\dots,y_n) \in C$. Y $\phi_1^{-1} : D \to C$ está dada por:

$$(u_1,\dots,u_n) \mapsto \left(u_1, \frac{u_2}{u_1}, \frac{u_3}{u_2}, \dots, \frac{u_n}{u_{n-1}}\right)$$

Veamos que es isomorfismo C^∞, para ello, notemos que:

$$|J\phi_1(y_1,\dots,y_n)| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ y_2 & y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_2\cdot\ldots\cdot y_n & y_1 \cdot y_3 \cdot\ldots\cdot y_n & y_1 \cdot y_2 \cdot\ldots\cdot y_n \cdots & & y_1 \cdot\ldots\cdot y_{n-1} \end{matrix} \right\| = 1 \cdot y_1 \cdot y_1 \cdot y_2 \cdot\ldots\cdot y_1 \cdot y_2 \cdot\ldots\cdot y_{n-1}$$

$$= y_1^{n-1} \cdot y_2^{n-2} \cdot \ldots \cdot y_{n-1}^{n-(n-1)} \cdot y_n^{n-n} \neq 0, \forall (y_1, \ldots, y_n) \in C$$

y ϕ_1 es de clase C^∞ ya que tiene der. parciales cont. Así ϕ_1 es isomorfismo C^∞.

2) ϕ_2 es isomorfismo C^1. En efecto, si $(u_1, \ldots, u_n) \in D$, ent.

$$1 > u_1 > u_2 > \ldots > u_n > 0$$

$$\Rightarrow u_1 - u_2,\ u_2 - u_3, \ldots, u_{n-1} - u_n, u_n > 0, \text{ y:}$$

$$(u_1 - u_2) + (u_2 - u_3) + \ldots + (u_{n-1} - u_n) + u_n = u_1 < 1$$

es decir, $\phi_2(u_1, \ldots, u_n) = (u_1 - u_2, \ldots, u_{n-1} - u_n, u_n) \in \Delta$. Y ϕ_2 tiene como inversa $\phi_2^{-1} : \Delta \to D$,

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \left(\sum_{k=1}^{n} x_k, \sum_{k=2}^{n} x_k, \ldots, x_{n-1} + x_n, x_n \right)$$

además ϕ_2 es de clase C^∞ ya que tiene parciales cont. y:

$$|J\phi_2(u_1, \ldots, u_n)| = \left\| \begin{matrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{matrix} \right\| = 1 \neq 0, \forall (u_1, \ldots, u_n) \in D$$

así, ϕ_2 es isomorfismo C^∞.

Por 1) y 2), $\phi = \phi_2 \circ \phi_1$ es isomorfismo C^∞ de C sobre Δ. En efecto, veamos que $\phi = \phi_2 \circ \phi_1$:

$$\begin{aligned} \phi(y_1, \ldots, y_n) &= (y_1 - y_1 y_2,\ y_1 y_2 - y_1 y_2 y_3, \ldots, y_1 \cdot \ldots \cdot y_{n-1} - y_1 \cdot \ldots \cdot y_n,\ y_1 \cdot \ldots \cdot y_n) \\ &= \phi_2(y_1, y_1 y_2, \ldots, y_1 \cdot \ldots \cdot y_n) \\ &= \phi_2 \circ \phi_1 (y_1, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

así:

$$\begin{aligned} |J\phi(y_1, \ldots, y_n)| &= |J\phi_2(\phi_1(y_1, \ldots, y_n))| \cdot |J\phi_1(y_1 \cdot \ldots \cdot y_n)| \\ &= 1 \cdot y_1^{n-1} \cdot y_2^{n-2} \cdot \ldots \cdot y_n^{n-n} \\ &= y_1^{n-1} \cdot y_2^{n-2} \cdot \ldots \cdot y_n^{n-n} \end{aligned}$$

Por el T.C.V. para $\chi_{\phi(C)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se tiene que:

$$m(\Delta) = \int_\Delta dx = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\phi(C)} = \int_{\phi(C)} dx = \int_C |J\phi(y)|$$

$$= \int_{]0,1[^n} y_1^{n-1} \cdot \ldots \cdot y_{n-1}^{1} \, dy_1 \, dy_2 \cdot \ldots \cdot dy_n$$

Usando Fubini para med. no neg. se tiene que:

$$= \int_0^1 y_1^{n-1} dy_1 \cdot \int_0^1 y_2^{n-2} dy_2 \cdot \ldots \cdot \int_0^1 y_{n-1}^{1} dy_{n-1} \cdot \int_0^1 dy_n$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} \cdot 1$$

$$= \frac{1}{n!}$$

$$\therefore m(\Delta) = \frac{1}{n!}$$

$\square$

2.9. Sea $\|\cdot\|$ una norma arbitraria en $\mathbb{R}^n$.

i. **Pruebe** que la función $(x,y)\mapsto 1/\|x-y\|$ está definida c.t.p. en $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$.

ii. **Muestre** que

$$\int_{\substack{\|x\|\leqslant 1\\ \|y\|\leqslant 1}} \frac{dx\,dy}{\|x-y\|^{\alpha}}<\infty \qquad \text{si y sólo si} \qquad \alpha<n.$$

Sugerencia. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $\|\cdot\|$ es la norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$. Use el Teorema de Tonelli y observe que, para y fijo tal que $\|y\|\leqslant 1$, se tiene $\int_{\|x\|\leqslant 1} dx/\|x-y\|^{\alpha}\leqslant \int_{\|x-y\|\leqslant 1+\|y\|} dx/\|x-y\|^{\alpha}$.

Dem:

De (i): Defina el conjunto $Z\subseteq\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$:

$$Z=\{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \mid x=y\}$$

Z es la gráfica de f, $x\mapsto x$, por tanto $m(Z)=0$ en $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$. Por ser $\|\cdot\|$ norma, se sigue que:

$$\|x-y\|=0 \iff x=y \iff (x,y)\in Z$$

Por tanto, la función $(x,y)\mapsto \frac{1}{\|x-y\|}$ está definida c.t.p. en $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$.

De (ii): Como en $\mathbb{R}^n$ todas las normas son equivalentes, $\exists\ \alpha,\beta>0$ m

$$\alpha N(x)\leqslant\|x\|\leqslant\beta N(x)$$

donde $N:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ es la norma euclideana (la usual). Es decir, si $x\neq\vec{0}$:

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{\|x\|}\leqslant\frac{1}{N(x)} \quad y \quad \frac{1}{N(x)}\leqslant\frac{\beta}{\|x\|}$$

de esta forma, $(x,y)\mapsto\frac{1}{\|x-y\|}$ es integrable en $C \iff (x,y)\mapsto\frac{1}{N(x-y)}$ es integrable en C, donde:

$$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \mid \|x\|\leqslant 1\ ,\ \|y\|\leqslant 1\}$$

claro que $C\subseteq\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ es medible. Ahora con la prueba:

Sea $\alpha\in\mathbb{R}$. Se tienen dos casos:

1) $\alpha<n$. Por Fubin: para med. no neg.

$$\int_{B\times B}\frac{dx\,dy}{\|x-y\|^{\alpha}}=\int_B dx\int_B\frac{dy}{\|x-y\|^{\alpha}}=\int_{\|x\|\leqslant 1}dx\int_{\|y\|\leqslant 1}\frac{dy}{\|x-y\|^{\alpha}}.$$ Sea $x\in B$ fijo,

Considere el isomorfismo C^1 $\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $u\mapsto u+x$. Por el T.C.V. para med. no neg. se tiene que:

$$\int_B \frac{dy}{\|x-y\|^\alpha} = \int_{\phi^{-1}(B)} \frac{du}{\|u\|^\alpha}, \text{ dónde } \phi^{-1}(B) = \{u\in\mathbb{R}^n \mid \phi(u)\in B\}$$
$$= \{u\in\mathbb{R}^n \mid \|u+x\|\leq 1\}$$

notemos que $u\in\phi^{-1}(B) \Rightarrow \|u\|\leq 1+\|x\| \Rightarrow u\in B(0,1+\|x\|)$. Por tanto al ser $u\mapsto \frac{1}{\|u\|^\alpha}$ med. no neg. en $\mathbb{R}^n$:

$$\Rightarrow \int_{\phi^{-1}(B)} \frac{du}{\|u\|^\alpha} \leq \int_{B(0,1+\|x\|)} \frac{du}{\|u\|^\alpha}$$

Considere $g:]0,\infty[\to]0,\infty[$, $r\mapsto \frac{1}{r^\alpha}$. Ent.

$$\int_{B(0,1+\|x\|)} \frac{du}{\|u\|^\alpha} = \int_{B(0,1+\|x\|)} (g\cdot \chi_{]0,1+\|x\|[})\circ r(u)\,du$$

Por el t. de func. rad.

$$\int_{B(0,1+\|x\|)} (g\cdot\chi_{]0,1+\|x\|[})\circ r(u)\,du = n\omega_n \int_0^\infty \rho^{n-1} g(\rho)\chi_{]0,1+\|x\|[}(\rho)\,d\rho$$
$$= n\omega_n \int_0^{1+\|x\|} \rho^{n-1}\cdot \frac{1}{\rho^\alpha}\,d\rho$$
$$= n\omega_n \int_0^{1+\|x\|} \rho^{n-(1+\alpha)}\,d\rho$$

Como $\alpha<n \Rightarrow 0<n-\alpha \Rightarrow -1<n-(\alpha+1)$ y $\int_0^\alpha \rho^p\,d\rho<\infty \Leftrightarrow p>-1$. En part.

$$= n\omega_n \left[\frac{\rho^{n-\alpha}}{n-\alpha}\right]_0^{1+\|x\|}$$
$$= \frac{n}{n-\alpha}\omega_n (1+\|x\|)^{n-\alpha}$$

$$\Rightarrow \int_{B\times B} \frac{dx\,dy}{\|x-y\|^\alpha} \leq \int_B \frac{n}{n-\alpha}\omega_n (1+\|x\|)^{n-\alpha}\,dx$$
$$= \frac{n}{n-\alpha}\omega_n \int_B (1+\|x\|)^{n-\alpha}\,dx$$

pero $x\mapsto (1+\|x\|)^{n-\alpha}$ es cont. en el compacto B, luego acot. y así

$$\int_{B\times B} \frac{dx\,dy}{\|x-y\|^\alpha} < \infty.$$

2) $\alpha\geq n$. Como en 1):

$$\int_{B\times B} \frac{dx\,dy}{\|x-y\|^\alpha} = \int_B dx \int_{\phi^{-1}(B)} \frac{du}{\|u\|^\alpha}, \quad \phi^{-1}(B) = \{u\in\mathbb{R}^n \mid \|u+x\|\leq 1\}$$

Claramente $\vec{0}\in\phi^{-1}(B)^\circ$. Luego $\exists\, r>0$ m $B(0,r)\subseteq\phi^{-1}(B)$. Así:

$$\int_{\phi^{-1}(B)} \frac{du}{\|u\|^\alpha} \geq \int_{B(0,r)} \frac{du}{\|u\|^\alpha} = \infty$$

pues $\|\cdot\|$ es la norma euclideana y $\alpha \geq n$. Por tanto $x \mapsto \int_B \frac{dy}{\|x-y\|^\alpha}$ toma valor ∞ en un conjunto no despreciable $\Rightarrow \int_{B\times B} \frac{dx\,dy}{\|x-y\|^\alpha} = \infty$.

Por 1) y 2), $\int_{B\times B} \frac{dx\,dy}{\|x-y\|^\alpha} < \infty \iff \alpha < n$.

$\square$

$\int_{\|x-y\|\leqslant 1+\|y\|} dx/\|x-y\|$.

2.10. Sea

$$B=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 | x_1^2+x_2^2+x_3^2\leqslant a^2\}$$

la bola euclidiana de centro cero y radio $a>0$ de $\mathbb{R}^3$. **Calcule** la integral

$$\int_{B\times B}\frac{dxdy}{\|x-y\|}$$

(**Autopotencial de la bola B homogénea de densidad 1**), donde $\|\cdot\|$ es la norma euclidiana en $\mathbb{R}^3$.

Dem.

Como $(x,y)\mapsto \frac{1}{\|x-y\|}$ está definida c.t.p. en $\mathbb{R}^6$, y es med. no neg. Siendo cont. ent. por Fubini para med. no neg. Se sigue que:

$$\int_{B\times B}\frac{dxdy}{\|x-y\|}=\int_B dx\int_B\frac{dy}{\|x-y\|}$$

$$=\int_B dx\int_B\frac{dy_1dy_2dy_3}{\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2}}$$

dónde $x=(x_1,x_2,x_3)$. Considere el automorfismo $\phi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ rotación en $\mathbb{R}^3$ π

$$\phi(x_1,x_2,x_3)=(0,0,c)$$

con $c=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$. Ent. como B es la bola euclideana, $\phi(B)=B$ y $|J\phi|=1$, así:

$$\int_B\frac{dy_1dy_2dy_3}{\sqrt{(y_1-x_1)^2+\dots+(y_3-x_3)^2}}=\int_B\frac{du_1du_2du_3}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+(u_3-c)^2}}$$

En un ejercicio se calculó la int. ant. Como $x\in B\Rightarrow \|x\|\leqslant a$, así $c\leqslant a$. Por tanto:

$$=2\pi\left[a^2-\tfrac{1}{3}c^2\right]$$

Con $c^2=\|x\|^2$. Ent.

$$\int_{B\times B}\frac{dxdy}{\|x-y\|}=\int_B 2\pi\left[a^2-\tfrac{1}{3}\|x\|^2\right]dx$$

$$=2\pi\int_B a^2dx-\frac{2\pi}{3}\int_B\|x^2\|dx$$

$$=2\pi a^2\cdot\frac{4}{3}\pi a^3-\frac{2\pi}{3}\int_B(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\,dx_1dx_2dx_3$$

donde la última integral se hace con cambio a coordenadas esféricas (y usando Fub. para med. no neg).

$$\int_B(x_1^2+x_2^2+x_3^2)dx_1dx_2dx_3=\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^a r^2(r^2\operatorname{sen}\varphi)dr$$

$$=2\pi\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\int_0^a r^4dr$$

$$=2\pi\left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^a$$

$$= 2\pi\,(1-(-1))\left[\frac{a^5}{5}\right]$$

$$= \frac{4}{5}\pi a^5$$

$$\Rightarrow \int_{B\times B} \frac{dx\,dy}{\|x-y\|} = \frac{8\pi^2 a^5}{3} - \frac{2\pi}{3}\cdot\frac{4\pi}{5}a^5$$

$$= \frac{8}{3}\pi^2 a^5 - \frac{8}{15}\pi^2 a^5$$

$$= \left(\frac{40-8}{15}\right)\pi^2 a^5$$

$$= \frac{32}{15}\pi^2 a^5$$

$$\therefore \int_{B\times B} \frac{dx\,dy}{\|x-y\|} = \frac{32}{15}\pi^2 a^5 \,//$$

$\square$

2.11. **Determine** los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales la función

$$(x, y) \mapsto (1 - xy)^\alpha$$

es integrable en $]0, 1[\times]0, 1[$.

Sol.

Observemos que:

$$(1-xy)^\alpha = e^{\alpha \ln(1-xy)}, \ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Sea $B =]0,1[\times]0,1[$. Ent.

$$\int_B (1-xy)^\alpha\, dx dy = \int_B e^{\alpha \ln(1-xy)}\, dx dy$$

Por Fubini para med. no neg.

$$= \int_0^1 dy \int_0^1 e^{\alpha \ln(1-xy)}\, dx$$

Sea $0 < y < 1$ fijo. Determinemos

$$\int_0^1 e^{\alpha \ln(1-xy)}\, dx$$

Considere $\varphi^{-1} :]0,1[\to \mathbb{R}$, $\varphi^{-1}(x) = 1 - xy$. $\varphi^{-1}(]0,1[) =]1-y, 1[$. φ^{-1} es isomorfismo C^1 y $\varphi :]1-y, 1[\to]0,1[$, $u \mapsto \frac{1-u}{y}$, ent. $\varphi'(u) = -\frac{1}{y}$

$$\int_0^1 e^{\alpha \ln(1-xy)}\, dx = \int_{1-y}^1 \left| -\frac{1}{y} \right| e^{\alpha \ln(u)}\, du$$

$$= \int_{1-y}^1 \frac{1}{y} e^{\alpha \ln(u)}\, du$$

$$= \frac{1}{y} \int_{1-y}^1 u^\alpha\, du$$

Tenemos dos casos:

$\alpha = 1$: En este caso:

$$= \frac{1}{y} \int_{1-y}^1 \frac{du}{u}$$

$$= \frac{1}{y} \ln u \Big|_{1-y}^1$$

$$= \frac{1}{y} \left(\ln 1 - \ln(1-y) \right)$$

$$= -\frac{1}{y} \ln(1-y)$$

$$\Rightarrow \int_B (1-xy)^{-1}\, dx dy = \int_0^1 -\frac{1}{y} \ln(1-y)\, dy \leq \dots < \infty.$$

$\alpha \neq 1$. En este caso:

$$= \frac{1}{y}\int_{1-y}^{1} u^{\alpha}\, du$$

$$= \frac{1}{y}\cdot\frac{1}{\alpha+1}\, u^{\alpha+1}\Big|_{1-y}^{1}$$

$$= \frac{1}{\alpha+1}\cdot\frac{1}{y}\left(1-(1-y)^{\alpha+1}\right)$$

$$= \frac{1}{\alpha+1}\cdot\frac{1-(1-y)^{\alpha+1}}{y}$$

$$\therefore \int_B (1-xy)^{\alpha} = \frac{1}{\alpha+1}\int_0^1 \frac{1-(1-y)^{\alpha+1}}{y}\,dy$$

$$= (\alpha+1)^{-1}\int_0^1 \frac{1-(1-y)^{\alpha+1}}{y}\,dy$$

De este caso se siguen 2:

i) $\alpha > -1$, ent. $\alpha+1 > 0 \Rightarrow 0 < (1-y)^{\alpha+1} <$

2.12. Se definen inductivamente

$$\ell_1(x) = |\log x| \qquad \text{y} \qquad \ell_k(x) = \log|\ell_{k-1}(x)|, \quad \forall k \geqslant 2.$$

Se definen también

$$e_0 = 1 \qquad \text{y} \qquad e_k = \exp(e_{k-1}), \quad \forall k \geqslant 1.$$

i. **Demuestre** por inducción que, para $k \geqslant 1$, la función ℓ_k está definida y es estrictamente positiva en $]e_{k-1}, \infty[$ y

$$\ell_{k+1}(x) = \log \ell_k(x) = \ell_k(\log x), \quad \forall x \in]e_k, \infty[.$$

Así pues, $\ell_1, \ldots, \ell_m$ están todas definidas y son estrictamente positivas en $]e_{m-1}, \infty[$.

ii. **Pruebe** que si $k \geqslant 1$, entonces ℓ_k está definida y es estrictamente positiva en $]0, 1/e_{k-1}[$. Luego $\ell_1, \ldots, \ell_m$ están todas definidas y son estrictamente positivas en $]0, 1/e_{m-1}[$.

Se define $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como la distancia euclidiana al origen, es decir, $r(x_1, \ldots, x_n) = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$, $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

iii. **Muestre** que si B es una bola de centro 0 y de radio mayor que e_{m-1}, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B} \frac{1}{r^n \ell_1(r) \cdots \ell_{m-1}(r) \ell_m(r)^\alpha} < \infty \qquad \text{si y sólo si} \qquad \alpha > 1.$$

iv. **Demuestre** que si B es una bola de centro 0 y de radio menor que $1/e_{m-1}$, entonces

$$\int_{B} \frac{1}{r^n \ell_1(r) \cdots \ell_{m-1}(r) \ell_m(r)^\alpha} < \infty \qquad \text{si y sólo si} \qquad \alpha > 1.$$

Sugerencia. Calcule la derivada de la función $t \mapsto \ell_m(t)^{1-\alpha}$.

Dem:

De (i): Para $k=1$ el resultado es inmediato, pues $\ell_1(x) = |\log x|$ es positiva en $]1, \infty[$ i.e $]e_0, \infty[$.

Suponga el resultado se cumple para algún $n \in \mathbb{N}$, i.e

$$\ell_n(x) = \log|\ell_{n-1}(x)|$$

está bien def. y es est. positiva en $]e_{n-1}, \infty[$.

2.13. i. **Pruebe** que la función

$$t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$$

es integrable en $]0,1[$ si y sólo si $x > 0$ y $y > 0$. Se define

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt, \quad \forall x > 0, y > 0.$$

B se llama la **función beta de Euler. Muestre** que

$$B(x,y) = B(y,x), \quad \forall x, y \in]0,\infty[.$$

ii. **Demuestre** que

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_{]0,\infty[\times]0,\infty[} e^{-(s+t)} s^{x-1} t^{y-1}\,ds dt, \quad \forall x > 0, y > 0.$$

Utilizando el cambio de variables $s = u(1-v)$, $t = uv$, **establezca** la identidad

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad \forall x > 0, y > 0.$$

Dem:

De (i): Observemos que:

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1} \;{}^{1)} \quad y \quad t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t\to 1^-}{\sim} (1-t)^{y-1} \;{}^{2)}$$

donde 1) es integrable en $]0,\frac{1}{2}] \Leftrightarrow x-1 > -1$ y 2) lo es en $[\frac{1}{2},1[\Leftrightarrow y-1 > -1$, i.e

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1} \text{ es int. en }]0,1[\Leftrightarrow x,y > 0$$

Para probar la igualdad, sea $\phi :]0,1[\to]0,1[$, $t \mapsto 1-t$. ϕ es isomorfismo C^1 con inverso $\phi^{-1} = \phi$, y $|J\phi| = 1$. Por el T.C.V al ser $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ integrable en $]0,1[$:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow B(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \\
&= \int_0^1 (1-t)^{x-1} t^{y-1} \cdot 1\,dt \\
&= \int_0^1 t^{y-1}(1-t)^{x-1}\,dt \\
&= B(y,x)
\end{aligned}$$

De (ii): Sean $x,y > 0$. Defina $g :]0,\infty[^2 \to \mathbb{R}$ dada como:

$$(s,t) \mapsto e^{-s-t} s^{x-1} t^{y-1}$$

g está bien def. y es med. no neg. Por Fubini:

$$\int_{]0,\infty[^2} g(s,t)\,ds\,dt = \int_{]0,\infty[} ds \int_{]0,\infty[} e^{-(s+t)} s^{x-1} t^{y-1}\,dt$$

$$\Rightarrow \int_{]0,\infty[^2} e^{-(s+t)} s^{x-1} t^{y-1} = \int_{]0,\infty[} e^{-s} s^{x-1} ds \int_{]0,\infty[} e^{-t} t^{y-1} dt$$

$$= \left(\int_{]0,\infty[} e^{-s} s^{x-1} ds \right) \cdot \left(\int_{]0,\infty[} e^{-t} t^{y-1} dt \right)$$

$$= \Gamma(x)\Gamma(y)$$

Para la identidad, considere $\phi : U \to]0,\infty[^2$, $(u,v) \mapsto (u(1-v), uv)$. Donde:

$$(u,v) \in U \iff u(1-v) > 0 \text{ y } uv > 0$$

$$\iff [(u>0 \text{ y } 1-v>0) \text{ o } (u<0 \text{ y } 1-v<0)] \text{ y } [u,v>0 \text{ o } u,v<0]$$

$$\iff [(u>0 \text{ y } 1>v) \text{ y } (u,v>0 \text{ o } u,v<0)] \text{ o } [(u<0 \text{ y } 1<v) \text{ y } (u,v>0 \text{ o } u,v<0)]$$

$$\iff [(u>0 \text{ y } 1>v \text{ y } u,v>0) \text{ o } (\cancel{u>0 \text{ y } 1>v \text{ y } u,v<0}) \to \emptyset] \text{ o}$$

$$[(\cancel{u<0 \text{ y } 1<v \text{ y } u,v>0}) \to \emptyset \text{ o } (\cancel{u<0 \text{ y } 1<v \text{ y } u,v<0})] \to \emptyset$$

$$\iff (0<u \text{ y } 0<v<1).$$

Luego,

$$U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0<u \text{ y } 0<v<1\}$$

Afirmamos que ϕ es isomorfismo C^1, y:

$$|J\phi(u,v)| = \left\| \begin{matrix} 1-v & -u \\ v & u \end{matrix} \right\|$$

$$= |(1-v)u + uv|$$

$$= |u|$$

Por tanto:

$$\int_{]0,\infty[^2} e^{-(s+t)} s^{x-1} t^{y-1} ds\,dt = \int_U |J\phi(u,v)| e^{-(u(1-v)+uv)} (u(1-v))^{x-1} (uv)^{y-1} du\,dv$$

$$= \int_U |u| e^{-(u-uv+uv)} u^{x-1} (1-v)^{x-1} u^{y-1} v^{y-1} du\,dv$$

$$= \int_U e^{-u} u^{x+y-1} (1-v)^{x-1} v^{y-1} du\,dv$$

Y, por Fubini para med. no neg.

$$= \int_0^\infty e^{-u} u^{(x+y)-1} du \int_0^1 v^{y-1} (1-v)^{x-1} dv$$

$$= \Gamma(x+y) \cdot B(y,x)$$

$$\Rightarrow \Gamma(x+y) B(y,x) = \Gamma(x)\Gamma(y)$$

$$\therefore B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

$\square$

2.14. Sean $\alpha_1 > 0, \ldots, \alpha_n > 0$.

i. Defina

$$v_n = \int\limits_{\substack{x_1+\cdots+x_n<1 \\ x_1>0,\ldots,x_n>0}} x_1^{\alpha_1-1}\cdots x_n^{\alpha_n-1}\,dx_1\cdots dx_n.$$

Exprese v_n en función de v_{n-1}. **Pruebe** que

$$v_n = \frac{\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(1+\alpha_1+\cdots+\alpha_n)}.$$

Sugerencia. Use el Ejercicio 2.13.

ii. Sea $a > 0$. **Calcule** ahora

$$u_n(a) = \int\limits_{\substack{x_1+\cdots+x_n<a \\ x_1>0,\ldots,x_n>0}} x_1^{\alpha_1-1}\cdots x_n^{\alpha_n-1}\,dx_1\cdots dx_n.$$

Dem.

De (i): Sea

$$A = \{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_i>0,\ \forall i\in[\![1,n]\!] \text{ y } x_1+\ldots+x_n<1\}$$

Como $(x_1,\ldots,x_n)\mapsto x_1^{\alpha_1-1}\cdots x_n^{\alpha_n-1}\chi_A(x_1,\ldots,x_n)$ es med. no neg. por Fubini para med. no neg. se tiene que:

$$\int_A x_1^{\alpha_1-1}\cdots x_n^{\alpha_n-1}dx_1dx_2\cdots dx_n = \int_{\pi_n(A)} x_n^{\alpha_n-1}dx_n \int_{A_{x_n}} x_1^{\alpha_1-1}\cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}-1}dx_1\cdots dx_{n-1}$$

donde:

$$\begin{aligned}\pi_n(A) &= \{x_n\in\mathbb{R} \mid (x_1,\ldots,x_n)\in A\}\\ &= \{x_n\in\mathbb{R} \mid 0<x_n<1\}\\ &=]0,1[.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_{x_n} &= \{(x_1,\ldots,x_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1} \mid (x_1,\ldots,x_n)\in A\}\\ &= \{(x_1,\ldots,x_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1} \mid x_i>0,\ \forall i\in[\![1,n-1]\!] \text{ y } x_1+\ldots+x_{n-1}<1-x_n\}\\ &= \begin{cases}\phi(B) & \text{si } x_n\in]0,1[\\ \emptyset & \text{e.o.c.}\end{cases}\end{aligned}$$

Considere $\phi: B\to\phi(B)$ dada como sigue:

$$\phi(x_1,\ldots,x_{n-1}) = ((1-x_n)x_1,\ldots,(1-x_n)x_{n-1})$$

donde:

$$B = \{(y_1,\ldots,y_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1} \mid y_i>0,\ \forall i\in[\![1,n-1]\!] \text{ y } y_1+\ldots+y_{n-1}<1\}$$

Claramente ϕ es isomorfismo C^1 (por ser T. lineal de $\mathbb{R}^{n-1}$ en $\mathbb{R}^{n-1}$) y por tanto, del t. de cambio de Var. si $f:\phi(B)\to\mathbb{R}$, $(x_1,\dots,x_{n-1})\mapsto x_1^{\alpha_1-1}\cdot\ldots\cdot x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$, ent. si $0<x_n<1$:

$$\int_{A_{x_n}} x_1^{\alpha_1-1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n-1}dx_1\cdot\ldots\cdot dx_n = \int_B |\operatorname{Det}\phi|\, f\circ\phi$$

$$= \int_B |1-x_n|^{n-1}(1-x_n)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}-n+1}x_1^{\alpha_1-1}\cdot\ldots\cdot x_{n-1}^{\alpha_{n-1}-1}dx_1\cdot\ldots\cdot dx_{n-1}$$

$$= (1-x_n)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}}\int_B x_1^{\alpha_1-1}\cdot\ldots\cdot x_{n-1}^{\alpha_{n-1}-1}dx_1\cdot\ldots\cdot dx_{n-1}$$

$$= (1-x_n)^{\alpha}V_{n-1}$$

$$\Rightarrow V_n = \int_A x_1^{\alpha_1-1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n-1}dx_1\cdot\ldots\cdot dx_n$$

$$= \int_0^1 x_n^{\alpha_n-1}\cdot(1-x_n)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-1}}V_{n-1}dx_n$$

$$= V_{n-1}\int_0^1 x_n^{\alpha_n-1}(1-x_n)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-1}}dx_n$$

$$= V_{n-1}\int_0^1 x_n^{\alpha_n-1}(1-x_n)^{(\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-1}+1)-1}dx_n$$

$$= V_{n-1}B(\alpha_n,\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-1}+1)$$

$$= V_{n-1}\frac{\Gamma(\alpha_n)\Gamma(\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-1}+1)}{\Gamma(1+\alpha_1+\ldots+\alpha_n)}$$

Pero, $V_1=\int_0^1 x_1^{\alpha_1-1}dx_1=\int_0^1 x_1^{\alpha_1-1}(1-x_1)^{1-1}dx_1 = B(\alpha_1,1)=\dfrac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha_1+1)}=\dfrac{\Gamma(\alpha_1)}{\Gamma(\alpha_1+1)}$

$$\Rightarrow V_2 = V_1\frac{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_1+1)}{\Gamma(1+\alpha_1+\alpha_2)} = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(1+\alpha_1+\alpha_2)}$$

Aplicando inducción (sencillo) se prueba que:

$$V_n = \frac{\Gamma(\alpha_1)\cdot\ldots\cdot\Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(1+\alpha_1+\ldots+\alpha_n)}.$$

De (ii): Sean

$$\phi(B)=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_i>0 \text{ y } \sum_{i=1}^n x_i<a\} \text{ y}$$

$$B=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_i>0 \text{ y } \sum_{i=1}^n x_i<1\}$$

$\phi: B\to\phi(B)$, $(x_1,\dots,x_n)\mapsto(ax_1,\dots,ax_n)$ es un aut. (luego isomorfismo C^1). Por el T.C.V.

$$\int_{\phi(B)} f = \int_B |\operatorname{Det}\phi|\, f\circ\phi = \int_B a^n f\circ\phi$$

$$= \int_B a^n a^{\alpha_1 - 1} \cdot x_1^{\alpha_1 - 1} \cdot \ldots \cdot a^{\alpha_n - 1} x_n^{\alpha_n - 1} \, dx_1 \cdot \ldots \cdot dx_n$$

$$= a^{\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_n} \int_B x_1^{\alpha_1 - 1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n - 1} \, dx_1 \cdot \ldots \cdot dx_n$$

$$= a^{\alpha} v_n$$

$$\therefore u_n(a) = a^{\alpha} v_n = a^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} v_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

$\square$

2.15. Sea $z \in \mathbb{C}$. **Pruebe** que existe en $\mathbb{C}$ la integral

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

si y sólo si $\Re z > 0$. Sea $A = \{z \in \mathbb{C} | \Re z > 0\}$. Defina $\Gamma : A \to \mathbb{C}$ como la función

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \forall z \in A.$$

Demuestre que esta función es una ampliación de la función gama, definida anteriormente, que satisface

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \forall z \in A.$$

(Aún se puede ir más lejos y ampliar la definición de la función gamma a $\mathbb{C} \backslash \{0, -1, -2, \ldots\}$ de tal suerte que dicha extensión sea analítica, no nula en ningún punto y con polos en los enteros no positivos, es decir, tal que $z \mapsto 1/\Gamma(z)$ sea entera en todo $\mathbb{C}$ y con ceros en los enteros no positivos. El lector interesado puede consultar algún libro de análisis complejo.)

Dem.

Probaremos la primera parte. Sea $z \in \mathbb{C}$ m $z = x+iy$, $x,y \in \mathbb{R}$. Observemos que:

$$t^z = t^{x+iy} = t^x \cdot t^{iy} = t^x \cdot e^{iy \ln t}$$

$\forall\, t > 0$. Por lo tanto:

$$e^{-t} t^{z-1} = e^{-t} t^{x-1} \cdot e^{iy \ln t}, \text{ donde } |e^{iy\ln t}| = 1$$

$$\Rightarrow |e^{-t} t^{z-1}| = |e^{-t} t^{x-1}| \cdot 1 = |e^{-t} t^{x-1}|$$

dónde $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ es integrable en $]0,\infty[\iff x > 0$. Por tanto, $t \mapsto e^{-t} t^{z-1}$ es integrable en $]0,\infty[\iff x > 0$ i.e $\Re z > 0$.

Claramente esta función es ampliación de la fun. gama. Veamos que se cumple la identidad. Como:

$$\begin{aligned}
z\int_r^R e^{-t} t^{z-1} dt &= \int_r^R e^{-t} (z t^{z-1}) dt \\
&= \int_r^R e^{-t} D(t^z) dt \\
&= e^{-t} t^z \Big|_r^R - \int_r^R D(e^{-t}) t^z dt \\
&= e^{-R} R^z - e^{-r} r^z + \int_r^R e^{-t} t^z dt \\
&= e^{-R} e^{z\ln R} - e^{-r} e^{z \ln r} + I(z+1)
\end{aligned}$$

2.16. Sea $f : [0,\infty[\to \mathbb{K}$ una función integrable en $[0,\infty[$. **Muestre** que si $\varphi : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ es una función medible, acotada y periódica de periodo $T > 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \varphi(nx) f(x)\, dx = \frac{1}{T}\left[\int_0^T \varphi(t)\, dt\right]\left[\int_0^\infty f(x)\, dx\right].$$

Sugerencia. Considere primero el caso en el que f es una función escalonada.

Como aplicaciones de este resultado se tienen las siguientes.

i. **Calcule**

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f(x)|\operatorname{sen}(nx)|\, dx.$$

ii. **Demuestre** que para todo subconjunto medible E de $[0,\infty[$ de medida finita, se cumple

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \operatorname{sen}(nx)\, dx = 0$$

(aunque el integrando no tienda a cero).

Dem.

a) Suponga que $f = \chi_{[0,a]}$, $a\in\mathbb{R}$. Probaremos el resultado para esta f. En efecto, se probará que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^a \varphi(nx)\,dx = \frac{a}{T}\int_0^T \varphi(t)\,dt$$

Sea $n\in\mathbb{N}$, $\exists!\ K_n\in\mathbb{N}^*$ m $\frac{K_nT}{n}\leq a < \frac{(K_n+1)T}{n}$. Así, $\exists\ \theta_n\in[0,1[$ m

$$a = \frac{(K_n+\theta_n)T}{n}$$

Veamos que:

$$\int_0^a \varphi(nx)\,dx = \int_0^{\frac{(K_n+\theta_n)}{n}T} \varphi(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^{(K_n+\theta_n)T} \varphi(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{n}\left[\int_0^{K_nT}\varphi(t)\,dt + \int_{K_nT}^{(K_n+\theta_n)T}\varphi(t)\,dt\right]$$

Pero, como φ es periódica de periodo T, ent.

$$= \frac{K_n}{n}\int_0^T\varphi(t)\,dt + \frac{1}{n}\int_0^{\theta_nT}\varphi(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\left(\frac{T(K_n+\theta_n)}{n}\right)\int_0^T\varphi(t)\,dt + \frac{1}{n}\int_0^{\theta_nT}\varphi(t)\,dt + \frac{\theta_n}{Tn}\int_0^T\varphi(t)\,dt$$

Como $\left\{\int_0^{\theta_nT}\varphi(t)\,dt\right\}_{n=1}^\infty$ es acotada y $\{\theta_n\}_{n=1}^\infty$ también, ent.

$$= \frac{1}{T}\cdot a\int_0^T\varphi(t)\,dt + \frac{1}{n}\left(\int_0^{\theta_nT}\varphi(t)\,dt + \theta_n\int_0^T\varphi(t)\,dt\right)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\int_0^a\varphi(nx)\,dx = \frac{a}{T}\int_0^T\varphi(t)\,dt + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\left[\int_0^{\theta_nT}\varphi(t)\,dt + \int_0^T\varphi(t)\,dt\right]\right)$$

$$= \frac{a}{T}$$

Este resultado es válido aún cuando $f = \chi_{[0,a[}$, $a\in\mathbb{R}$.

b) Suponga que $f = \chi_{[a,b]}$, $a,b \in \mathbb{R}$, $0 \leq a \leq b$. Como:

$$\chi_{[a,b]} = \chi_{[0,b]} - \chi_{[0,a[}.$$

Ent.

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \varphi(nx)\chi_{[a,b]} = \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^b \varphi(nx)dx - \int_0^a \varphi(nx)\,dx \right)$$
$$= \frac{b}{T}\int_0^T \varphi(t)dt - \frac{a}{T}\int_0^T \varphi(t)dt$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(t)\,dt \cdot \int_0^\infty \chi_{[a,b]}(x)dx$$

c) Por linealidad, el resultado se cumple para func. escalonadas y esc. complejas.

d) Suponga que $f \in \mathcal{L}_1([0,\infty[, \mathbb{K})$. Ent. $\exists \{\psi_v\}_{v=1}^\infty$ suc. en $\mathcal{E}([0,\infty[, \mathbb{K})$ $\ni$ $\{\psi_v\}_{v=1}^\infty$ conv. a f en promedio y c.d.p.

Tenemos que $\forall v \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \varphi(nx)\psi_v(x)\,dx = \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(t)dt \int_0^\infty \psi_v(x)\,dx$$

Se tiene que:

$$\lim_{v\to\infty} \psi_v = f \text{ c.d.p. y } \lim_{v\to\infty} N(\psi_v - f) = 0$$

Por tanto, por una prop. de Análisis II:

$$\lim_{v\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(t)dt \int_0^\infty \psi_v(x)\,dx = \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(t)dt \int_0^\infty f(x)dx < \infty$$

Para probar el resultado, basta con ver que

$$\lim_{v\to\infty}\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \varphi(nx)\psi_v(x)dx = \lim_{n\to\infty}\lim_{v\to\infty} \int_0^\infty \varphi(nx)\psi_v(x)dx$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \varphi(nx)f(x)dx$$

Para la primera parte, hay que cambiar el orden de límites. Para ello, veamos que $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ es completo y si $g: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $(v,n) \mapsto \int_0^\infty \varphi(nx)\psi_v(x)dx$, $\forall (v,n) \in \mathbb{R}$, se cumplen:

i) Sea $v \in \mathbb{N}$, existe el límite en $\mathbb{R}$ $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \varphi(nx)\psi_v(x)dx$. en efecto esto es cierto por (3).

ii) Sea $n \in \mathbb{N}$, ent. existe $\lim_{v\to\infty} \int_0^\infty \varphi(nx)\psi_v(x)dx$ con resp. a $n \in \mathbb{N}$. En efecto, hay que probar que $\forall \varepsilon > 0 \; \exists M \in \mathbb{N} \ni v \geq M$ implica:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \int_0^\infty \varphi(nx) f(x)dx - \int_0^\infty \varphi(nx)\Psi_v(x)dx \right| < \varepsilon$$

Para ello, observemos que:

$$\left|\int_0^\infty \varphi(nx) f(x)dx - \int_0^\infty \varphi(nx)\Psi_v(x)dx\right| = \left|\int_0^\infty \varphi(nx)\cdot[f(x)-\Psi_v(x)]dx\right|$$
$$\leq \int_0^\infty |\varphi(nx)|\cdot|f(x)-\Psi_v(x)|dx$$

Si K es cota de φ, ent.

$$\leq K\int_0^\infty |f(x)-\Psi_v(x)|dx$$

Sea $\varepsilon>0$. Como $\lim_{v\to\infty} N(f-\Psi_v)=0$, ent. $\exists\ M\in\mathbb{N}$ m $v\geq M$ implica

$$\Rightarrow \int_0^\infty |f(x)-\Psi_v(x)|dx \leq \frac{\varepsilon}{K}$$

Luego, $\forall\ n\in\mathbb{N}$ se tiene que:

$$\left|\int_0^\infty \varphi(nx)f(x)dx - \int_0^\infty \varphi(nx)\Psi_v(x)dx\right| \leq \varepsilon,\ \forall\ v\geq M$$

así, se tiene el límite unif.

Por (i) y (ii):

$$\lim_{v\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \varphi(nx)\Psi_v(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{v\to\infty}\int_0^\infty \varphi(nx)\Psi_v(x)$$

Veamos que

$$\lim_{v\to\infty}\varphi(nx)\Psi_v(x)=\varphi(nx)f(x) \text{ c.l.p. en } [0,\infty[\text{ y } \ldots (5)$$
$$\lim_{v\to\infty} N(\eta_n\Psi_v-\eta_n f)=0 \ldots (6)$$

$\forall\ n\in\mathbb{N}$, dónde $\eta_n(x)=\varphi(nx), \forall\ x\geq 0$. (5) es inmediata y, como $\{\Psi_v\}_{v=1}^\infty$ conv. a f en promedio, se tiene que:

$$N(\eta_n\Psi_v-\eta_n f) = N(\eta_n[\Psi_v-f])$$
$$= \int_0^\infty |\eta_n(x)|\cdot|\Psi_v(x)-f(x)|dx$$
$$\leq K\int_0^\infty |\Psi_v(x)-f(x)|dx$$
$$\leq K\,N(\Psi_v-f)$$
$$\therefore \lim_{v\to\infty} N(\eta_n\Psi_v-\eta_n f)=0$$

Por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{v\to\infty} \int_0^\infty \varphi(nx)\, \psi_v(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \varphi(nx) f(x)\, dx$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \varphi(nx) f(x)\, dx = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t)\, dt \cdot \int_0^\infty f(x)\, dx$$

$\square$

Los ejercicios son inmediatos.

Notas:

1) Para verificar, usamos la fórmula de Liouville:

$$\underset{\substack{x_1, x_2, \dots x_n \geq 0 \\ x_1+x_2+\dots+x_n \leq 1}}{\iint \dots \int} f(x_1+\dots+x_n)\, x_1^{p_1-1} \cdot \dots \cdot x_n^{p_n-1}\, dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n = \frac{\Gamma(p_1)\cdot \dots \cdot \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\dots+p_n)} \int_0^1 f(u)\, u^{p_1+p_2+\dots+p_n-1}\, du$$

$(p_1, p_2, \dots, p_n > 0)$.

Si $f \equiv 1$ y $p_i = 1$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$ ent.

$$\int_{D_n} dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 u^{n-1}\, du$$

$$= \frac{1}{n!} \, u^n \Big|_0^1 = \frac{1}{n!}$$