Lista 2 de Ejercicios
Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

13 de octubre de 2024

Cristo Daniel Alvarado ESFM

Índice general

Cristo Daniel Alvarado ESFM

Capítulo 1

Ejercicios Convolución

Ejercicio 1.1.1
Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ funciones nulas en $]-\infty, 0[$. Si existe $f * g(x)$, demuestre que:

$$f * g(x) = \begin{cases} \int_0^\infty f(y)g(x-y)dy & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

En los casos siguientes f y g son nulas en $]-\infty,0[$ y sus valores en $[0,\infty[$ se indican abajo. Calcule $f * g$.

I. $f(x) = e^{-x}$ y $g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

II. $f(x) = g(x) = e^{-x}$.

III. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

IV. $f(x) = g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

Solución:
Para la demostración, el caso $x \geq 0$ es inmediato de la definición de convolución y del hecho de que f es nula en $]-\infty, 0[$. Suponga que existe $f * g(x)$ con $x < 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy \\ &= \int_0^\infty f(y)g(x-y)dy \end{aligned}$$

sea $y \in [0, \infty[$, es decir que $0 \leq y < \infty$, por lo cual $-\infty < -y \leq 0$. Sumando x a ambos lados se sigue que:

$$-\infty < x - y \leq x < 0 \Rightarrow x - y \in]-\infty, 0[$$

por tanto, $g(x-y) = 0$, para todo $y \in [0, \infty[$. Por tanto, $f * g(x) = 0$.

De (i): Veamos que:

$$f * g(x) = \begin{cases} \int_0^\infty e^{-y} g(x-y)dy & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Sea $x \geq 0$. Analicemos varios casos:

Cristo Daniel Alvarado ESFM

- $0\leq x\leq 1$, en este caso $0\leq x-y\leq 1$ si y sólo si $y\leq x$ y $x-1\leq y$ (pero, $x-1\leq 0$, por lo cual $0\leq y$), por ende:

$$\begin{aligned}
f*g(x)&=\int_0^x e^{-y}g(x-y)dy\\
&=\int_0^x e^{-y}(x-y)dy\\
&=x\int_0^x e^{-y}dy-\int_0^x ye^{-y}dy\\
&=x\left[-e^{-y}\right]_0^x-\left[-e^{-y}(y+1)\right]_0^x\\
&=x-xe^{-x}+\left[e^{-y}(y+1)\right]_0^x\\
&=x-xe^{-x}+(x+1)e^{-x}-1\\
&=(x-1)+e^{-x}
\end{aligned}$$

- $1<x$, en este caso $0\leq x-y\leq 1$ si y sólo si $y\leq x$ y $x-1\leq y$ (donde $0<x-1$ por como se eligió el x). Por ende:

$$\begin{aligned}
f*g(x)&=\int_{x-1}^x e^{-y}g(x-y)dy\\
&=\int_{x-1}^x e^{-y}(x-y)dy\\
&=x\int_{x-1}^x e^{-y}dy-\int_{x-1}^x ye^{-y}dy\\
&=x\left[-e^{-y}\right]_{x-1}^x+\left[(y+1)e^{-y}\right]_{x-1}^x\\
&=xe^{1-x}-xe^{-x}+(x+1)e^{-x}-(x-1+1)e^{1-x}\\
&=xe^{1-x}-xe^{-x}+xe^{-x}+e^{-x}-xe^{1-x}\\
&=e^{-x}
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$f*g(x)=\begin{cases} e^{-x} & \text{si} \quad 1<x\\ (x-1)+e^{-x} & \text{si} \quad 0\leq x\leq 1\\ 0 & \text{si} \quad x<0\end{cases}$$

De (ii): Veamos que:

$$f*g(x)=\begin{cases} \int_0^\infty e^{-y}g(x-y) & \text{si} \quad 0\leq x\\ 0 & \text{si} \quad x<0\end{cases}$$

analicemos a $g(x-y)$. Si $x\geq 0$ entonces, $x-y\geq 0$ si y sólo si $x\geq y$. Por tanto, para $x\geq 0$:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-y}g(x-y)&=\int_0^x e^{-y}e^{y-x}dy\\
&=\int_0^x e^{-x}dy\\
&=xe^{-x}
\end{aligned}$$

de esta forma:

$$f*g(x)=\begin{cases} xe^{-x} & \text{si} \quad 0\leq x\\ 0 & \text{si} \quad x<0\end{cases}$$

De (iii): Veamos que:

$$f*g(x)=\begin{cases} \int_0^1 g(x-y)dy & \text{si} \quad 0\leq x\\ 0 & \text{si} \quad x<0\end{cases}$$

$\square$

Cristo Daniel Alvarado ESFM

Ejercicio 1.1.2
Haga lo siguiente:

I. Para toda $m \in \mathbb{N}$ se define $e_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como:

$$e_m(x) = \begin{cases} \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Pruebe que

$$e_p * e_q = e_{p+q}$$

II. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ integrable en todo intervalo acotado tal que $f(x) = 0$ para todo $x \leq a$. **Muestre** que

$$e_m * f(x) = \begin{cases} \int_a^x \frac{(x-y)^{m-1}}{(m-1)!} f(y)dy & \text{si} \quad x \geq a \\ 0 & \text{si} \quad x < a \end{cases}$$

III. **Deduzca** que para $x \geq a$ se cumple la siguiente **fórmula de Cauchy para la n-ésima integral indefinida**

$$\int_a^x dx_{m-1} \int_a^{x_{m-1}} dx_{m-2} \cdots \int_a^{x_2} dx_1 \int_a^{x_1} f(x_0)dx_0 = \int_a^x \frac{(x-y)^{m-1}}{(m-1)!} f(y)dy$$

Demostración:
De (i): Sean $p, q \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$e_p(x) = \begin{cases} \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad e_q(x) = \begin{cases} \frac{x^{q-1}}{(q-1)!} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} e_p * e_q(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e_p(x) \cdot e_q(y-x)dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} \cdot e_q(y-x)dx \end{aligned}$$

analicemos dos casos:

- $y < 0$: Entonces, para todo $x \geq 0$, se sigue que $-x \leq 0$, luego $y - x < 0$. Por ende, $e(y-x) = 0$. Luego:
$$e_p * e_q(y) = 0 = e_{p+q}(y)$$

- $y \geq 0$: Entonces, $y - x \geq 0$ si y sólo si $x \in [0, y]$. Por tanto, la integral se vuelve en:

$$\begin{aligned} e_p * e_q(y) &= \int_0^y \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} \cdot e_q(y-x)dx \\ &= \int_0^y \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} \cdot \frac{(y-x)^{q-1}}{(q-1)!} dx \\ &= \frac{1}{(p-1)!(q-1)!} \cdot \int_0^y x^{p-1}(y-x)^{q-1} dx \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\int_0^y x^{p-1}(y-x)^{q-1}dx &= \int_0^y x^{p-1}\sum_{k=0}^{q-1}\binom{q-1}{k}(-1)^{q-1}x^k(-y)^{q-1-k}dx \\
&= (-1)^{q-1}\int_0^y \sum_{k=0}^{q-1}\binom{q-1}{k}x^{p+k-1}(-y)^{q-1-k}dx \\
&= (-1)^{q-1}\sum_{k=0}^{q-1}\binom{q-1}{k}(-y)^{q-1-k}\int_0^y x^{p+k-1}dx \\
&= (-1)^{q-1}\sum_{k=0}^{q-1}\binom{q-1}{k}(-y)^{q-1-k}\left[\frac{x^{p+k}}{p+k}\right]_0^y \\
&= (-1)^{q-1}\sum_{k=0}^{q-1}\binom{q-1}{k}(-y)^{q-1-k}\frac{y^{p+k}}{p+k} \\
&= (-1)^{2q-2}\sum_{k=0}^{q-1}\binom{q-1}{k}\frac{(-1)^k y^{p+q-1}}{p+k} \\
&= y^{p+q-1}\sum_{k=0}^{q-1}\binom{q-1}{k}\frac{(-1)^k}{p+k}
\end{aligned}$$

veamos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(p-1)!(q-1)!}\sum_{k=0}^{q-1}\binom{q-1}{k}\frac{(-1)^k}{p+k} &= \frac{1}{(p-1)!(q-1)!}\sum_{k=0}^{q-1}\frac{(q-1)!}{k!(q-1-k)!}\cdot\frac{(-1)^k}{p+k} \\
&= \frac{1}{(p-1)!(q-1)!}\sum_{k=0}^{q-1}\frac{(-1)^k(q-1)!}{k!(q-1-k)!(p+k)} \\
&= \frac{1}{(p-1)!}\sum_{k=0}^{q-1}\frac{(-1)^k}{k!(q-1-k)!(p+k)} \\
&= \ldots \\
&= \frac{1}{(p-1)!}\cdot\frac{(p-1)!}{(p+q-1)!} \\
&= \frac{1}{(p+q-1)!}
\end{aligned}$$

por tanto,

$$e_p * e_q(y) = \frac{y^{p+q-1}}{(p+q-1)!} = e_{p+q}(y)$$

por ambos incisos, se sigue que $e_p * e_q = e_{p+q}$.

De (ii): Veamos que:

$$f * e_m(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e_m(x-y)dy$$

Como $f(y) = 0$ para todo $y \leq a$, se sigue que:

$$f * e_m(x) = \int_a^{\infty} f(y)e_m(x-y)dy$$

Se tienen dos casos:

- Si $x < a$, entonces para todo $a \leq y$ se tiene que $x - y < 0$, luego $e_m(x-y) = 0$. Por tanto:

$$f * e_m(x) = 0$$

- Si $a \leq x$, entonces $x - y \geq 0$ si y sólo si $a \leq y \leq x$. Por tanto,

$$\begin{aligned} f * e_m(x) &= \int_a^x f(y) e_m(x-y) dy \\ &= \int_a^x f(y) \frac{(y-x)^{m-1}}{(m-1)!} dy \\ &= \int_a^x \frac{(y-x)^{m-1}}{(m-1)!} f(y) dy \end{aligned}$$

  donde, esta integral existe, pues la función $y \mapsto (x-y)^{m-1}$ es acotada en $[a, x]$ y, $y \mapsto f(y)$ es integrable en este intervalo acotado.

Por ambos incisos, se sigue que la convolución existe para todo $x \in \mathbb{R}$ y, su valor es:

$$f * e_m(x) = e_m * f(x) = \begin{cases} \int_a^x \frac{(x-y)^{m-1}}{(m-1)!} f(y) dy & \text{si} \quad x \geq a \\ 0 & \text{si} \quad x < a \end{cases}$$

De (iii): Procederemos por inducción sobre m.

- Para $m = 1$ el resultado es inmediato, pues

$$\begin{aligned} \int_a^x f(x_0) dx_0 &= \int_a^x \frac{1}{1} f(y) dy \\ &= \int_a^x \frac{(x-y)^{1-1}}{(1-1!)} f(y) dy \end{aligned}$$

- Suponga el resultado válido para algún $m \in \mathbb{N}$. Probaremos que se cumple para $m+1$. En efecto, primero notemos que la función $e_m * f$ es una función integrable en todo intervalo acotado (ya que la integral de la convolución es el producto de las integrales de las funciones en la convolución), nula para todo $x \leq a$. Por ende:

$$(e_m * f) * e_1(x) = \begin{cases} \int_a^x \frac{(x-y)^{1-1}}{(1-1)!} (e_m * f)(y) dy & \text{si} \quad x \geq a \\ 0 & \text{si} \quad x < a \end{cases}$$

  en el caso que $x \geq a$:

$$(e_m * f) * e_1(x) = \int_a^x \frac{(x-y)^{1-1}}{(1-1)!} (e_m * f)(y) dy$$

Por tanto, se sigue que

$$\begin{aligned}\int_a^x dx_m \int_a^{x_m} dx_{m-1} \cdots \int_a^{x_2} dx_1 \int_a^{x_1} f(x_0)dx_0 &= \int_a^x dx_m \int_a^{x_m} \frac{(x_m-y)^{m-1}}{(m-1)!} f(y)dy \\ &= \int_a^x (e_m * f)(x_m)dx_m \\ &= \int_a^x \frac{(x-y)^{1-1}}{(1-1)!}(e_m * f)(y)dy \\ &= (e_m * f) * e_1(x) \\ &= (f * e_m) * e_1(x) \\ &= f * (e_m * e_1)(x) \\ &= f * e_{m+1}(x) \\ &= \int_a^x f(y)\frac{(x-y^m)}{m!}dy \\ &= \int_a^x \frac{(x-y)^m}{m!} f(y)dy \\ &= \int_a^x \frac{(x-y)^{m+1-1}}{(m+1-1)!} f(y)dy\end{aligned}$$

por lo cual, el resultado se cumple para $m+1$.

Aplicando inducción, se obtiene lo deseado. ■

Ejercicio 1.1.3
La integral fraccional de orden $1 \geq \alpha > 0$ sobre un intervalo $[a, x]$ de una función medible f se define como:

$$I_a^\alpha[f](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt$$

para toda $x \geq a$ tal que la integral exista.

I. Fije $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Para cada $1 \geq \alpha > 0$ se define

$$g_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{x^{1-\alpha}} \chi_{]0,b-a[}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Pruebe que si $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$, entonces existe la convolución $\widetilde{f} * g_\alpha$. **Calcule** $\widetilde{f} * g_\alpha$.

II. **Calcule** $I_0^{1/2}[t](x)$ y $I_0^{1/2}[I_0^{1/2}[t]](x)$. ¿**Conclusión**? Justifique.

Demostración:
De (i): Sea $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$. Veamos que existe la convolución. En efecto, se tiene que $\widetilde{f} \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, para todo $p \in [1, \infty]$. Ahora, notemos que:

$$1 - \alpha \geq 0$$

■

Ejercicio 1.1.4
Para todo $p > 0$ se define:

$$f_p(t) = \begin{cases} t^{p-1}e^{-t} & \text{si} \quad t > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \end{cases}$$

Calculando de dos modos distintos la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f_p * f_q$ con $p, q > 0$, **pruebe** la fórmula

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

donde $B(p,q)$ es la función beta y $\Gamma(q)$ es la función gama.

Demostración:

Sean $p, q > 0$. Como las funciones $f_p, f_q \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ (ver la definición de la función Gamma) entonces, por el teorema de Young, $f_p * f_q \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{K})$. Ahora, se tiene además que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_p * f_q(y)dy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_p(y)dy\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_p(y)dy\right) = \Gamma(p)\Gamma(q)$$

(ya que $\int -\infty^{\infty} f_p = \int_0^{\infty} t^{p-1}e^{-t}dt = \Gamma(p)$). Ahora, si $y \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$\begin{aligned} f_p * f_q(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_p(t) f_q(y-t)dt \\ &= \int_0^{\infty} t^{p-1}e^{-t} f_q(y-t)dt \end{aligned}$$

Por un ejercicio anterior, si $y \leq 0$, la convolución es cero (suponemos entonces que $y > 0$). Entonces, $y - t > 0$ si y sólo si $y > t$. Por ende:

$$\begin{aligned} f_p * f_q(y) &= \int_0^{y} t^{p-1}e^{-t} f_q(y-t)dt \\ &= \int_0^{y} t^{p-1}e^{-t} (y-t)^{q-1} e^{-y+t}dt \\ &= e^{-y}\int_0^{y} t^{p-1}(y-t)^{q-1}dt \end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $x = \frac{t}{y}$, obtenemos que

$$\begin{aligned} e^{-y}\int_0^{y} t^{p-1}(y-t)^{q-1}dt &= e^{-y}\int_0^{1} (xy)^{p-1}(y-xy)^{q-1}ydx \\ &= e^{-y}y^{p+q-1}\int_0^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \\ &= e^{-y}y^{p+q-1}B(p,q) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_p * f_q(y)dy &= \int_0^{\infty} e^{-y}y^{p+q-1}B(p,q)dy \\ &= B(p,q)\int_0^{\infty} e^{-y}y^{p+q-1}dy \\ &= B(p,q)\Gamma(p+q) \end{aligned}$$

de ambas igualdades, se sigue que

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= B(p,q)\Gamma(p+q) \\ \Rightarrow B(p,q) &= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \end{aligned}$$

■

Ejercicio 1.1.5
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ una función localmente integrable en $\mathbb{R}$. Defina para todo $h > 0$, la función

$$J_h f = f * \left(\frac{1}{h}\chi_{]-h,0[}\right)$$

I. **Muestre** que, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$J_h f(x) = \frac{1}{h}\int_0^h f(x+y)dy$$

y que $J_h f$ es continua en $\mathbb{R}$.

II. Si f es integrable en $\mathbb{R}$, **pruebe** que también lo es $J_h f$ y que

$$\int_{\mathbb{R}} J_h f = \int_{\mathbb{R}} f$$

III. Si f es de clase C^r en $\mathbb{R}$, **muestre** que también lo es $J_h f$ y que $(J_h f)^{(k)} = J_h f^{(k)}$ para $k = 1, ..., r$.

Solución:
De (i): Sea $x \in \mathbb{R}$. Calculemos $J_h f$, para ello, calcularemos $\left(\frac{1}{h}\chi_{]-h,0[}\right) * f(x)$. Veamos que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{h}\chi_{]-h,0[}\right) * f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h}\chi_{]-h,0[}(y)f(x-y)dy \\
&= \frac{1}{h}\int_{-h}^{0} f(x-y)dy \\
&= \frac{1}{h}\int_{0}^{h} f(x+u)du
\end{aligned}$$

pues, como f es localmente integrable, se sigue que la función $y \mapsto f(x-y)$ también lo es y, haciendo el cambio de variable $u = -y$.

Veamos la continuidad, en efecto, sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Queremos que

$$\begin{aligned}
|J_h f(x_0) - J_h f(x)| &= \frac{1}{h} \cdot \left|\int_0^h f(x_0+y) - f(x+y)dy\right| \\
&\leq \frac{1}{h} \cdot \int_0^h |f(x_0+y) - f(x+y)|\, dy
\end{aligned}$$

...

De (ii): Suponga que f es integrable en $\mathbb{R}$, es decir que $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, como la función $x \mapsto \frac{1}{h}\chi_{]-h,0[}(x)$ es una función acotada nula fuera de un conjunto con medida finita así, está en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, luego por el teorema de Young se sigue que $J_h f = f * \left(\frac{1}{h}\chi_{]-h,0[}\right)$ es una función definida c.t.p. en $\mathbb{R}$ la cual es integrable, para la que se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} J_h f(y)dy = \left(\int_{\mathbb{R}} f(y)dy\right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{h}\chi_{]-h,0[}(y)dy\right) = \int_{\mathbb{R}} f(y)dy$$

De (iii): Como f es de clase C^r, en particular hasta la r-ésima derivada es una función continua. Luego, las funciones $f^{(k)}$ con $k = 0, 1, ..., r$ son continuas en $\mathbb{R}$, en particular, localmente integrables en $\mathbb{R}$. Luego, por (i) las convoluciones $J_h f^{(k)}$ existen en todo $\mathbb{R}$ y son funciones continuas. Para probar el resultado, basta con ver que

$$(J_h f)^{(1)} = J_h f^{(1)}$$

(aplicando inducción sobre r, se obtendría que $J_h f$ es una función clase C^r tal que $(J_h f)^{(k)} = J_h f^{(k)}$, para todo $k = 1, ..., r$). En efecto, sea $x \in \mathbb{R}$ y considere la vecindad $]x-h, x+h[$ de x. Se tiene que:

$$J_h f^{(1)}(x) = \frac{1}{h} \int_0^h f^{(1)}(x+y)dy$$

donde, $y \mapsto f^{(1)}(x+y)$ es una función continua, en particular alcanza su máximo en todo intervalo compacto. Observemos que si $M = \sup \left\{ \left| f^{(1)}(z) \right| \middle| z \in]x-h, x+y[\right\}$, se tiene que:

$$\left| \chi_{[0,h]}(y) f(x+y) \right| \leq M \chi_{[0,h]}(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

donde $y \mapsto M\chi_{[0,h]}(y)$ es una función integrable independiente de x. Luego, por el teorema de derivación, se sigue del teorema de derivación de funciones definidas por integrales, que existe $(J_h f)^{(1)}$ en $]x-h, x+h[$ y, su valor es:

$$(J_h f)^{(1)}(z) = J_h f^{(1)}(z) \quad \forall x \in]x-h, x+h[$$

Como el $x \in \mathbb{R}$ fue arbitrario y esto se cumple para la vecindad $]x-h, x+h[$ de x, entonces el resultado se cumple para todo $\mathbb{R}$, es decir que:

$$(J_h f)^{(1)} = J_h f^{(1)}$$

$\square$

Ejercicio 1.1.6
Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n$. Sea $B = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| \|x\| \leq R \right\}$. Defina:

$$\mathcal{M}_R f = f * \frac{\chi_B}{\mathrm{Vol}\,(B)}$$

I. **Muestre** que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{M}_R f(x) = \frac{1}{\mathrm{Vol}\,(B)} \int_{\|x-y\| \leq R} f(y)dy$$

y que $\mathcal{M}_R f$ es continua en $\mathbb{R}^n$.

II. Si f es integrable en $\mathbb{R}^n$, **pruebe** que también lo es $\mathcal{M}_R f$ y que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}_R f = \int_{\mathbb{R}^n} f$$

III. Si f es de clase C^r en $\mathbb{R}^n$, **muestre** que también lo es $\mathcal{M}_R f$ y que $D(\mathcal{M}_R f) = \mathcal{M}_R(Df)$ para todo opeardor $D = \partial_{\alpha_1} \cdots \partial_{\alpha_k}$, con $k \in \{1, ..., r\}$.

Solución:
El problema es probar la continuidad. Notemos que

$$\mathcal{M}_R f(x) = f * \frac{\chi_B}{\mathrm{Vol}\,(B)}(x) = \frac{1}{\mathrm{Vol}\,(B)} \int_B f(x-y)dt = \frac{1}{\mathrm{Vol}\,(B)} \int_{\|x-y\|<R} f(z)dz = \frac{1}{\mathrm{Vol}\,(B)} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\chi_C(x)dx$$

donde

$$C = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \middle| \|z-y\| \leq R \right\}$$

Notemos que (para probar continuidad)

$$|\mathcal{M}_R f(x) - \mathcal{M}_R f(y)| \leq \frac{1}{\mathrm{Vol}\,(B)} \int_B |f(x-t) - f(y-t)|\, dt$$

Sea $C = B'(0,1) + B$ (el cual es compacto). Defina $h = f\chi_C \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Existe $\alpha \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ tal que $\mathcal{N}_1(h - \alpha) < \varepsilon$ donde α es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. Usar este α para encontrar un $0 < \delta < 1$ tal que la integral de arriba se haga menor que ϵ. $\square$

Definición 1.1.1
Sea $F : X \to X$ con (X, d) espacio métrico. Se dice que F es una **función contractante** si existe $\alpha \in]0,1[$ tal que

$$d(F(x), F(y)) \leq \alpha \cdot d(x, y), \quad \forall x, y \in X$$

claramente, F es lipschitziana y, por lo tanto, uniformemente continua.

Teorema 1.1.1 (Teorema del punto fijo)
Si F es una función contractante de un espacio métrico completo (X, d) en sí mismo, entonces F posee un único punto fijo, es decir $\exists! x_0 \in X$ tal que

$$F(x_0) = x_0$$

Además, si $x \in X$ es arbitrario, entonces

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} F^n(x)$$

Ejercicio 1.1.7
Haga lo siguiente:

I. Sean f y g dos funciones en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Sea $\lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$ tal que $\mathcal{N}_1(f) < 1/|\lambda|$. **Demuestre** que la ecuación

$$x = \lambda x * f + g$$

admite una solución $x \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ salvo equivalencias. **Muestre** que la solución puede ser representada en forma de una serie

$$x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^\nu g * \underbrace{f * \cdots * f}_{\nu\text{-veces}}$$

que es convergente en el espacio de Banach $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$.

II. Al suponer $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y $g \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, estudie la misma ecuación con la incógnita x en $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$.

Demostración:
De (i): Sea $F : \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \to \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ la función tal que

$$x \mapsto F(x) = \lambda x * f + g$$

Podemos considerar a esta función del espacio de Banach $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ en sí mismo. Para probar el resultado, usaremos el teorema del punto fijo, con lo cual se probará la existencia de $x \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ tal que

$$x = \lambda x * f + g$$

el cual es único salvo equivalencias (esto, pues la solución es única en el espacio de Banach $L_1(\mathbb{R},\mathbb{K})$). En efecto, para esto basta con probar que F es contractante. Veamos que si $x_1, x_2 \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R},\mathbb{K})$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_1\left(F(x_1)-F(x_2)\right) &= \mathcal{N}_1\left(\lambda x_1 * f + g - \lambda x_2 * f - g\right)\\
&= |\lambda|\mathcal{N}_1\left(x_1 * f - x_2 * f\right)\\
&= |\lambda|\mathcal{N}_1\left((x_1 - x_2) * f\right)\\
&\leq |\lambda|\mathcal{N}_1\left(f\right)\mathcal{N}_1\left(x_1 - x_2\right)
\end{aligned}$$

donde, $0 \leq \lambda\mathcal{N}_1\left(f\right) < 1$. Por tanto, F es contractante. Luego existe tal $x \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R},\mathbb{K})$.

Veamos que la solución puede ser representada en forma de la serie:

$$x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^\nu g * \underbrace{f * \cdots * f}_{\nu-\text{veces}}$$

Por el teorema del punto fijo, sabemos que la solución está dada por:

$$x = \lim_{\nu\to\infty} F^\nu(y)$$

donde $y \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R},\mathbb{K})$ es un elemento arbitrario de este espacio. Tomando $y = g$, obtenemos que

$$x = \lim_{k\to\infty} F^k(g)$$

donde F^k es la composición de F k-veces. Afirmamos que

$$F^k(g) = \sum_{\nu=0}^{k} \lambda^\nu g * \underbrace{f * \cdots * f}_{\nu-\text{veces}}$$

En efectom procederemos por inducción sobre k. Para $k = 1$ el resultado es inmediato de la definición de F. Suponga que el resultado se cumple para algún $k \in \mathbb{N}$. Veamos que se cumple para $k+1$. En efecto, notemos que

$$\begin{aligned}
F^{k+1}(g) &= F(F^k(g))\\
&= F\left(\sum_{\nu=0}^{k} \lambda^\nu g * \underbrace{f * \cdots * f}_{\nu-\text{veces}}\right)\\
&= \lambda\left(\sum_{\nu=0}^{k} \lambda^\nu g * \underbrace{f * \cdots * f}_{\nu-\text{veces}}\right) * f + g\\
&= \sum_{\nu=0}^{k} \lambda^{\nu+1} g * \underbrace{f * \cdots * f}_{\nu+1-\text{veces}} + g\\
&= \sum_{\nu=1}^{k+1} \lambda^{\nu} g * \underbrace{f * \cdots * f}_{\nu-\text{veces}} + g\\
&= \sum_{\nu=0}^{k+1} \lambda^{\nu} g * \underbrace{f * \cdots * f}_{\nu-\text{veces}}
\end{aligned}$$

lo cual prueba el resultado. Por tanto:

$$\begin{aligned}
x &= \lim_{k\to\infty} F^k(g) \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{\nu=0}^{k} \lambda^\nu g * \underbrace{f * \cdots * f}_{\nu-\text{veces}} \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^\nu g * \underbrace{f * \cdots * f}_{\nu-\text{veces}}
\end{aligned}$$

De (ii): ■

Ejercicio 1.1.8
Haga lo siguiente:

I. Sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ una función medible. **Muestre** que existe una función medible acotada $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ tal que $|g| = \alpha g$ en todo punto de $\mathbb{R}^n$.

   Sugerencia. Intente con la función $\frac{|g+\chi_S|}{g+\chi_S}$ donde $S = \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| g(x) = 0\right\}$.

II. Sean $1 < p < \infty$ y $g \in \mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Defina $\phi_g : \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ como:

$$\phi_g(f) = \int_{\mathbb{R}^n} fg, \quad \forall f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$$

   Pruebe que ϕ_g es una aplicación lineal continua sobre $L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y que $\|\phi_g\| = \mathcal{N}_{p^*}(g)$.

   Así pues, la aplicación $g \mapsto \phi_g$ es una isometría de $\mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ en $\mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ (dicha isometría también es suprayectiva, pero este hecho más profundo no se pide probar aquí).

   Sugerencia. Para probar la desigualdad $\mathcal{N}_{p^*}(g) \leq \|\phi_g\|$ considere la función $f = \alpha\, |g|^{p^*-1}$, donde α es la función del inciso (i).

III. Sea $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ una sucesión de Dirac en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Se quiere demostrar, sin usar la desigualdad de Jensen, que si $1 \leq p < \infty$ y $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, entonces

$$\lim_{\nu\to\infty} \mathcal{N}_p(f - \rho_\nu * f) = 0$$

   Defina $g_\nu = f - \rho_\nu * f$ y considere la aplicación lineal $\phi_{g_\nu} \in L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})^*$, donde

$$\phi_{g_\nu}(h) = \int_{\mathbb{R}^n} hg_\nu, \quad \forall h \in \mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$$

   Establezca la desigualdad

$$|\phi_{g_\nu}(h)| \leq \mathcal{N}_{p^*}(h) \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\nu(y) \mathcal{N}_p(f_{-y} - f)\, dy$$

   Sea $\varepsilon > 0$. **Demuestre** que para ν suficientemente grande,

$$|\phi_{g_\nu}(h)| \leq \mathcal{N}_{p^*}(h)\, \varepsilon$$

   Utilizando el inciso (ii) termine la demostración.

Demostración:

De (i): Tomemos la función $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ dada como sigue

$$\alpha = \frac{|g+\chi_S|}{g+\chi_S}$$

donde $S = \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| g(x) = 0\right\}$. Esta función está bien definida y cumple que $|g| = \alpha g$, pues si $x \in \mathbb{R}^n$, se tienen dos casos:

- $x \in \mathbb{R}^n \backslash S$, en este caso $\chi_S(x) = 0$ y $g(x) \neq 0$. Por tanto,

$$\alpha(x) = \frac{|g(x)|}{g(x)} \Rightarrow |g(x)| = \alpha g(x)$$

- $x \in S$, en cuyo caso se tiene que $\chi_S(x) = 1$ y, $g(x) = 0$. Por lo cual

$$\alpha(x) = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow |g(x)| = 0 = \alpha g(x) = 0$$

así, α está bien definida y cumple lo deseado. Además, es medible por ser el cociente de dos funciones medibles. También es acotada, ya que por los dos incisos anteriores se tiene que

$$|\alpha| = 1$$

De (ii): Es claro por la linealidad de la integral y por Hölder que φ_g es un operador lineal, para todo $g \in \mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Veamos que es continuo, en efecto, por Hölder se tiene que:

$$\begin{aligned}
|\phi_g(f)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} fg\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |fg| \\
&= \mathcal{N}_1(fg) \\
&\leq \mathcal{N}_p(f)\mathcal{N}_{p^*}(g) \\
&= \mathcal{N}_{p^*}(g)\mathcal{N}_p(f)
\end{aligned}$$

por tanto, ϕ_g es acotado, luego continuo. Se tiene entonces que

$$\|\phi_g\| \leq \mathcal{N}_{p^*}(g)$$

Probaremos la otra desigualdad. Se tiene que $\alpha\,|g|^{p^*-1} \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. En efecto, veamos que

$$\begin{aligned}
\left|\alpha\,|g|^{p^*-1}\right|^p &= |g|^{pp^*-p} \\
&= |g|^{p^*} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})
\end{aligned}$$

pues, $g \in \mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y, por definición de $p, p^* \in]0, \infty[$. Luego $\alpha\,|g|^{p^*-1} \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Se sigue entonces que

$$\begin{aligned}
\left|\phi_g(\alpha\,|g|^{p^*-1})\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}} \alpha\,|g|^{p^*-1} g\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}} |g|\,|g|^{p^*-1}\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}} |g|^{p^*}\right| \\
&= \int_{\mathbb{R}} |g|^{p^*} \\
&= \mathcal{N}_{p^*}(g)^{p^*}
\end{aligned}$$

y, además

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_p\left(\alpha\,|g|^{p^*-1}\right) &= \left(\int_{\mathbb{R}} |\alpha|^p\,|g|^{pp^*-p}\right)^{1/p}\\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} |g|^{p^*}\right)^{1/p}\\ &= \mathcal{N}_{p^*}\left(g\right)^{p^*/p}\end{aligned}$$

por tanto, al tenerse que

$$\begin{aligned}\left|\phi_g(\alpha\,|g|^{p^*-1})\right| &\leq \|\phi_g\|\mathcal{N}_p\left(\alpha\,|g|^{p^*-1}\right)\\ \Rightarrow \mathcal{N}_{p^*}\left(g\right)^{p^*} &\leq \|\phi_g\|\mathcal{N}_{p^*}\left(g\right)^{p^*/p}\end{aligned}$$

si $\mathcal{N}_{p^*}\left(g\right)=0$, es claro que $|\phi_g|=\mathcal{N}_{p^*}\left(g\right)$. En caso contrario, se sigue de la ecuación anterior que

$$\begin{aligned}\Rightarrow \mathcal{N}_{p^*}\left(g\right)^{p^*-\frac{p^*}{p}} &\leq \|\phi_g\|\\ \Rightarrow \mathcal{N}_{p^*}\left(g\right) &\leq \|\phi_g\|\end{aligned}$$

Por ambas desigualdades, se sigue que $|\phi_g|=\mathcal{N}_{p^*}\left(g\right)$.

De (iii): Sea $h\in\mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$, se tiene que

$$\begin{aligned}|\phi_{g_\nu}(h)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} hg_\nu\right|\\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |h|\,|g_\nu|\\ &= \phi_{|g_\nu|}(|h|)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |h|\,(x)\,|f-\rho_\nu * f|\,(x)dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|\cdot\left|f(x)-\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\rho_\nu(y)dy\right|dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|\,dx\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)-f(x-y)|\,\rho_\nu(y)dy\end{aligned}$$

donde la función $(x,y)\mapsto |h(x)|\,|f(x)-f(x-y)|\,\rho_\nu(y)$ es integrable en $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, pues $|h|\in\mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ y $|g_\nu|\in\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$, luego $\phi_{|g_\nu|}(|h|)<\infty$, esto por Tonelli. Por Fubini se puede cambiar el orden de integración, así:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|\,dx\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)-f(x-y)|\,\rho_\nu(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\nu(y)dy\int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|\,|f(x)-f(x-y)|\,dx$$

sea $y\in\mathbb{R}^n$. Observemos que por Hölder se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|\,|f(x)-f(x-y)|\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|\,|f(x)-f_{-y}(x)|\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |h|\,|f-f_{-y}|\\ &= \mathcal{N}_1\left(h\cdot[f-f_{-y}]\right)\\ &\leq \mathcal{N}_{p^*}\left(h\right)\cdot\mathcal{N}_p\left(f-f_{-y}\right)\end{aligned}$$

por ende,

$$\begin{aligned}|\phi_{g_\nu}(h)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{N}_{p^*}\left(h\right)\cdot\mathcal{N}_p\left(f-f_{-y}\right)\rho_\nu(y)dy\\ \Rightarrow |\phi_{g_\nu}(h)| &\leq \mathcal{N}_{p^*}\left(h\right)\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\nu(y)\mathcal{N}_p\left(f-f_{-y}\right)dy\end{aligned}$$

como se quería demostrar.

Para la otra parte, sea $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$. Observemos que

$$
\begin{aligned}
|\phi_{g_\nu}(h)| &\leq \mathcal{N}_{p^*}(h) \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\nu(y)\mathcal{N}_p(f - f_{-y})\, dy \\
&= \mathcal{N}_{p^*}(h) \left[\int_{\|y\|<\delta} \rho_\nu(y)\mathcal{N}_p(f - f_{-y})\, dy + \int_{\delta \leq \|y\|} \rho_\nu(y)\mathcal{N}_p(f - f_{-y})\, dy \right] \\
&\leq \mathcal{N}_{p^*}(h) \left[\int_{\|y\|<\delta} \rho_\nu(y)\mathcal{N}_p(f - f_{-y})\, dy + \int_{\delta \leq \|y\|} \rho_\nu(y) \left[\mathcal{N}_p(f) + \mathcal{N}_p(f_{-y}) \right] dy \right] \\
&= \mathcal{N}_{p^*}(h) \left[\int_{\|y\|<\delta} \rho_\nu(y)\mathcal{N}_p(f_0 - f_{-y})\, dy + 2\mathcal{N}_p(f) \int_{\delta \leq \|y\|} \rho_\nu(y) dy \right]
\end{aligned}
$$

Se tienen dos cosas, como $y \mapsto f_y$ es una función uniformemente continua de $\mathbb{R}^n$ en $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, en particular es continua en 0, luego existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$
\|y\| < \delta_1 \Rightarrow \mathcal{N}_p(f_0 - f_{-y}) < \frac{\varepsilon}{2}
$$

además, como $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ es una sucesión de Dirac, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$
\nu \geq N \Rightarrow \int_{\delta_1 \leq \|y\|} \rho_\nu(y) dy < \frac{\varepsilon}{2(2\mathcal{N}_p(f) + 1)}
$$

por tanto, si $\delta = \delta_1$ y $\nu \geq N$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
|\phi_{g_\nu}(h)| &\leq \mathcal{N}_{p^*}(h) \left[\int_{\|y\|<\delta_1} \rho_\nu(y)\mathcal{N}_p(f_0 - f_{-y})\, dy + 2\mathcal{N}_p(f) \int_{\delta_1 \leq \|y\|} \rho_\nu(y) dy \right] \\
&\leq \mathcal{N}_{p^*}(h) \left[\frac{\varepsilon}{2} \int_{\|y\|<\delta_1} \rho_\nu(y) dy + 2\mathcal{N}_p(f) \frac{\varepsilon}{2(2\mathcal{N}_p(f) + 1)} \right] \\
&\leq \mathcal{N}_{p^*}(f) \left[\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \right] \\
&= \mathcal{N}_{p^*}(f)\, \varepsilon
\end{aligned}
$$

por tanto,

$$
\nu \geq N \Rightarrow |\phi_{g_\nu}(h)| \leq \mathcal{N}_{p^*}(f)\, \varepsilon
$$

Observemos ahora que

$$
\|\phi_{g_\nu}\| = \text{ínf} \left\{ M \geq 0 \middle| \mathcal{N}_p(\phi_{g_\nu}(h)) \leq M \cdot \mathcal{N}_{p^*}(h), \forall h \in \mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \right\}
$$

de lo anterior se deduce que ε es un elemento del conjunto anterior para todo $\nu \geq N$, se sigue entonces que

$$
\nu \geq N \Rightarrow \|\phi_{g_\nu}\| \leq \varepsilon
$$

por el inciso (ii) sabemos que $\mathcal{N}_p(g_\nu) = \|\phi_{g_\nu}\|$, luego

$$
\nu \geq N \Rightarrow \mathcal{N}_p(g_\nu) = \mathcal{N}_p(f - \rho_\nu * f) \leq \varepsilon
$$

por tanto,

$$
\lim_{\nu \to \infty} \mathcal{N}_p(f - \rho_\nu * f) = 0
$$

como se quería demostrar. ■

Ejercicio 1.1.9
Demuestre que el sistema de potencias enteras $\left\{x\mapsto x^{\nu}\Big|\nu\in\mathbb{N}^*\right\}$ es total en $L_p([a,b],\mathbb{C})$ para $p\in[1,\infty[$.

Sugerencia. Basta demostrarlo para $L_1([-\pi,\pi],\mathbb{C})$. El sistema trigonométrico es total en este espacio. Desarrolle $e^{ik\pi}$ en serie de potencias de Maclaurin.

Demostración:
Podemos ver una función $f\in\mathcal{L}_p([a,b],\mathbb{C})$ como una función en $\mathcal{L}_p([-\pi,\pi],\mathbb{C})$, haciendo

$$g=f\circ\alpha$$

donde $\alpha:[-\pi,\pi]\to[a,b]$ es una función lineal. Más aún, como $\mathcal{L}_p([a,b],\mathbb{C})\subseteq\mathcal{L}_1([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ (pues la medida del intervalo $[-\pi,\pi]$ es finita), basta con probar el resultado para $\mathcal{L}_1([-\pi,\pi],\mathbb{C})$.

Para probar que el sistema

$$\mathcal{P}=\left\{x\mapsto x^{\nu}\Big|\nu\in\mathbb{N}^*\right\}\subseteq\mathcal{L}_\infty([-\pi,\pi],\mathbb{C})$$

es total en $L_1([a,b],\mathbb{C})$ (realmente sería usar funciones periódicas, pero como podemos ver una función periódica como aquella que es límitada a cierto intervalo de definición, no es necesario tomar tales funciones más que las definidas en ese intervalo), basta con probar que

$$f\in\mathcal{L}_1([-\pi,\pi],\mathbb{C})\text{ tal que }\int_{-\pi}^{\pi}f\varphi=0,\forall\varphi\in\mathcal{P}\Rightarrow f=0\text{ c.t.p. en }[-\pi,\pi]$$

es decir, que

$$f\in\mathcal{L}_1([-\pi,\pi],\mathbb{C})\text{ tal que }\int_{-\pi}^{\pi}f(x)x^{\nu}dx=0,\forall x\in\mathbb{N}^*\Rightarrow f=0\text{ c.t.p. en }[-\pi,\pi]$$

En efecto, sea $f\in\mathcal{L}_1([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ y suponga que para todo $\nu\in\mathbb{N}^*$ se tiene que

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)x^{\nu}dx=0$$

recordemos que el sistema trigonométrico complejo

$$\tau_{\mathbb{C}}=\left\{x\mapsto e^{ikx}\Big|k\in\mathbb{Z}\right\}$$

es total en $\mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$, luego es total en $\mathcal{L}_1([-\pi,\pi],\mathbb{C})$. Sabemos que para todo $x\in[-\pi,\pi]$ y $k\in\mathbb{Z}$ se tiene que

$$e^{ikx}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ikx)^n}{n!}$$

Probaremos que

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{ikx}dx=0,\quad\forall k\in\mathbb{Z}$$

En efecto, sea $k\in\mathbb{Z}$. Observemos que

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{ikx}dx&=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ikx)^n}{n!}dx\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(x)(ikx)^n}{n!}dx\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}\frac{f(x)(ikx)^n}{n!}dx\end{aligned}$$

queremos sacar el límite de la integral, para ello, considere las funciones

$$g_m(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{f(x)(ikx)^n}{n!}, \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$$

para todo $x \in [-\pi, \pi]$ tal que $f(x)$ esté bien definida. Estas funciones están definidas c.t.p. en $[-\pi, \pi]$. Además, es claro que

$$\lim_{m\to\infty} g_m(x) = f(x)e^{ikx}$$

para casi todo $x \in [-\pi, \pi]$. También,

$$\begin{aligned}
|g_m|(x) &= \left|\sum_{n=0}^{m} \frac{f(x)(ikx)^n}{n!}\right| \\
&\leq \sum_{n=0}^{m} \left|\frac{f(x)(ikx)^n}{n!}\right| \\
&= \sum_{n=0}^{m} |f(x)| \frac{|ikx|^n}{n!} \\
&= |f(x)| \sum_{n=0}^{m} \frac{|kx|^n}{n!} \\
&\leq |f(x)| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|kx|^n}{n!} \\
&= |f(x)| e^{|kx|} \\
&\leq |f(x)| e^{|k|\pi}
\end{aligned}$$

para casi todo $x \in [-\pi, \pi]$, pues $|x| \mapsto e^{|kx|}$ tiene un máximo en $x = \pi$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Además, la función $x \mapsto |f(x)| e^{|k|\pi}$ está en $\mathcal{L}_1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, pues f lo está, luego $|f|$ lo está. Así, por Lebesgue se tiene que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \lim_{m\to\infty} g_m(x)dx = \lim_{m\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} g_m(x)dx$$

esto es

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} \frac{f(x)(ikx)^n}{n!} dx &= \lim_{m\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{m} \frac{f(x)(ikx)^n}{n!} dx \\
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x)(ikx)^n}{n!} dx \\
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} \frac{(ik)^n}{n!} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)x^n dx \\
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} \frac{(ik)^n}{n!} \cdot 0 \\
&= 0 \\
\therefore \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx} dx = 0
\end{aligned}$$

por la suposición hecha inicalmente. Luego, $f = 0$ c.t.p. en $[-\pi, \pi]$ por ser $\tau_{\mathbb{C}}$ total en $[-\pi, \pi]$. Finalmente, se sigue que $\mathcal{P}$ es total en $L_1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. ■

Ejercicio 1.1.10
Demuestre que el sistema de potencias enteras $\left\{x^{\nu}\middle|\nu \in \mathbb{N}^{*}\right\}$ es completo en $L_p([a,b],\mathbb{C})$ para $p \in [1,\infty[$.

Demostración:
Podemos ver una función $f \in \mathcal{L}_p([a,b],\mathbb{C})$ como una función en $\mathcal{L}_p([-\pi,\pi],\mathbb{C})$, haciendo

$$g = f \circ \alpha$$

donde $\alpha : [-\pi,\pi] \to [a,b]$ es una función lineal. Más aún, como $\mathcal{L}_p([a,b],\mathbb{C}) \subseteq \mathcal{L}_1([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ (pues la medida del intervalo $[-\pi,\pi]$ es finita), basta con probar el resultado para $\mathcal{L}_1([-\pi,\pi],\mathbb{C})$. Debemos probar que

$$\overline{\mathcal{L}(\mathcal{P})} = L_1([a,b],\mathbb{C})$$

es decir, que $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ es denso en $L_1([-\pi,\pi],\mathbb{C})$. En efecto, sea $f \in \mathcal{L}_1([-\pi,\pi],\mathbb{C})$. Considere la restricción $g = f\big|_{]-\pi,\pi[}$, es inmediato que $g \in \mathcal{L}_1(]-\pi,\pi[,\mathbb{C})$. Por un teorema existe una función $h \in \mathcal{C}_c^{\infty}(]-\pi,\pi,[,\mathbb{C})$ tal que

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_1\left(g-h\right) &< \frac{\varepsilon}{2} \\
\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)-h(x)|\,dx &< \frac{\varepsilon}{2} \\
\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-h(x)|\,dx &< \frac{\varepsilon}{2} \\
\Rightarrow \mathcal{N}_1\left(f-h\right) &< \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

podemos extender a h a $[-\pi,\pi]$ de tal forma que sea continua. Como h es continua y el intervalo $[-\pi,\pi]$ es compacto, por Wierestrass existe un polinomio $p \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ tal que

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |h(x)-p(x)| < \frac{\varepsilon}{4\pi}$$

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_1\left(h-p\right) &= \int_{-\pi}^{\pi} |h(x)-p(x)|\,dx \\
&\leq \int_{-\pi}^{\pi} \sup_{y\in[-\pi,\pi]} |h(y)-p(y)|\,dx \\
&\leq \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \\
&= \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_1\left(f-p\right) &\leq \mathcal{N}_1\left(f-h\right) + \mathcal{N}_1\left(g-h\right) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

donde $p \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$. Por tanto, $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ es denso en $\mathcal{L}_1([-\pi,\pi],\mathbb{C})$. Así, el sistema $\mathcal{P}$ es completo en $L_1([-\pi,\pi],\mathbb{C})$.

$\blacksquare$

Ejercicio 1.1.11
Sean $E\subseteq\mathbb{R}^n$ un conjunto medible con medida finita y $1<p<\infty$. **Muestre** que si una familia de funciones $\left\{\varphi_i\middle|i\in I\right\}$ es completa en $L_p(E,\mathbb{K})$, entonces dicha familia es total en $L_{p^*}(E,\mathbb{K})$.

Sugerencia. Sea $f\in\mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$. Se supone que $\int_E f\varphi_i=0$ para toda $i\in I$. Sea α una función medible acotada tal que $|f|=\alpha f$. Por hipótesis existe una sucesión de funciones $\{\psi_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ en $\mathcal{L}(\left\{\varphi_i\middle|i\in I\right\})$ tal que $\lim_{\nu\to\infty}\mathcal{N}_p\left(\alpha-\psi_\nu\right)=0$.

Demostración:
Sea
$$\mathcal{F}=\left\{\varphi_i\middle|i\in I\right\}$$
es completa en $L_p(E,\mathbb{K})$, es decir que $\overline{\mathcal{L}(\mathcal{F})}=L_p(E,\mathbb{K})$. Hay que probar que para cada $f\in\mathcal{L}_{p^*}(E,\mathbb{K})$ se cumple que
$$\int_E f\varphi=0,\forall\varphi\in\mathcal{F}\Rightarrow f=0\text{ c.t.p. en }E$$
En efecto, sea $f\in\mathcal{L}_{p^*}(E,\mathbb{K})$ tal que se cumple que
$$\int_E f\varphi=0,\forall\varphi\in\mathcal{F}$$
Tomemos
$$\alpha=\frac{|f+\chi_S|}{f+\chi_S}$$
donde $S=\left\{x\in E\middle|f(x)=0\right\}$. α es la función tal que $|f|=\alpha f$ (se probó en un inciso anterior). Además, es elemento de $\mathcal{L}_1(E,\mathbb{K})$ (en particular, de $\mathcal{L}_p(E,\mathbb{K})$ pues E tiene medida finita) pues es una función medible, acotada nula fuera de un conjunto con medida finita (nula fuera de $S\subseteq E$). Como la familia anterior es completa, se tiene que existe una sucesión $\{\psi_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ tal que
$$\lim_{\nu\to\infty}\mathcal{N}_p\left(\alpha-\psi_\nu\right)=0$$
Sea $\varepsilon>0$, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que
$$\nu\geq N\Rightarrow\mathcal{N}_p\left(\alpha-\psi_\nu\right)<\frac{\varepsilon}{1+\mathcal{N}_{p^*}\left(f\right)}$$
Veamos que para todo $\nu\in\mathbb{N}$ se tiene que
$$\begin{aligned}\int_E|f|&=\int_E\left[\alpha f+f\psi_\nu\right]\\&\leq\int_E|f|\left|\alpha+\psi_\nu\right|\\&=\mathcal{N}_1\left(|f|\cdot|\alpha+\psi_\nu|\right)\\&\leq\mathcal{N}_{p^*}\left(f\right)\mathcal{N}_p\left(\alpha+\psi_\nu\right)\\&<\varepsilon\end{aligned}$$
pues cada ψ_ν es combinación lineal finita de elementos de $\mathcal{F}$, por hipótesis como $\int_E f\varphi=0$ para todo $\varphi\in\mathcal{F}$, se sigue entonces que $\int_E f\psi_\nu=0$, para todo $\nu\in\mathbb{N}$. Como el $\varepsilon>0$ fue arbitrario, se sigue que
$$f=0\text{ c.t.p. en }E$$
luego, la familia es total en $L_{p^*}(E,\mathbb{K})$. ■