

# Ejercicios Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

2 de marzo de 2024

# Índice general

<b>1. Espacios Hilbertianos</b>	<b>2</b>
1.1. Ejercicios . . . . .	2

# Capítulo 1

## Espacios Hilbertianos

### 1.1. Ejercicios

#### Ejercicio 1.1.1

Pruebe lo siguiente:

- I. Sean  $H, H'$  espacios hilbertianos y sea  $T$  una aplicación lineal continua de  $H$  en  $H'$ .

**Demuestre** que existe una única aplicación lineal  $\tilde{T} : H' \rightarrow H$  tal que

$$(\vec{x}|\tilde{T}\vec{x}') = (T\vec{x}|\vec{x}'), \quad \forall \vec{x} \in H \text{ y } \forall \vec{x}' \in H'$$

- II. **Demuestre** las reglas:

$$\widetilde{T_1 + T_2} = \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 \quad \text{y} \quad \widetilde{\alpha T} = \bar{\alpha} \tilde{T}$$

- III. Sea  $H''$  un tercer espacio hilbertiano. Sean  $T$  una aplicación lineal continua de  $H$  en  $H'$  y  $U$  una aplicación lineal continua de  $H'$  en  $H''$ . **Pruebe** que:

$$\widetilde{U \circ T} = \tilde{T} \circ \tilde{U}$$

#### Demostración:

De (i): Se probarán dos cosas:

- **Unicidad.** Suponga que existen  $S, W : H' \rightarrow H$  tales que:

$$(\vec{x}|S\vec{x}') = (T\vec{x}|\vec{x}') \quad \text{y} \quad (\vec{x}|W\vec{x}') = (T\vec{x}|\vec{x}'), \quad \forall \vec{x} \text{ y } \vec{x}' \in H'$$

entonces, se tiene que para  $\vec{x}' \in H'$  fijo:

$$\begin{aligned} (\vec{x}|S\vec{x}') &= (\vec{x}|W\vec{x}') \\ \Rightarrow (\vec{x}|S\vec{x}') - (\vec{x}|W\vec{x}') &= 0 \\ \Rightarrow (\vec{x}|S\vec{x}' - W\vec{x}') &= 0 \forall \vec{x} \in H \end{aligned} \tag{1.1}$$

Por tanto,  $S\vec{x}' = W\vec{x}'$ . Como el  $\vec{x}' \in H'$  fue arbitrario, se sigue que  $S = W$ .

- **Existencia.** Para cada  $\vec{x}' \in H'$ , sea  $L_{\vec{x}'} : H \rightarrow \mathbb{K}$  definida como sigue:

$$L_{\vec{x}'}(\vec{x}) = (T\vec{x}|\vec{x}')$$

Afirmamos que  $L_{\vec{x}}$  es lineal continuo. En efecto, si  $\vec{x}, \vec{y} \in H$  y  $\alpha \in \mathbb{K}$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} L_{\vec{x}}(\vec{x} + \alpha\vec{y}) &= \left( T(\vec{x} + \alpha\vec{y}) | \vec{x}' \right) \\ &= \left( T\vec{x} | \vec{x}' \right) + \alpha \left( T\vec{y} | \vec{x}' \right) \\ &= L_{\vec{x}}(\vec{x}) + \alpha L_{\vec{x}}(\vec{y}) \end{aligned}$$

luego es lineal, y es continuo ya que

$$\begin{aligned} |L_{\vec{x}}(\vec{x}')| &= \left| \left( T\vec{x} | \vec{x}' \right) \right| \\ &\leq \|T\vec{x}\| \|\vec{x}'\| \\ &\leq (\|T\| \|\vec{x}\|) \|\vec{x}'\| \end{aligned}$$

donde la primera desigualdad es por Cauchy-Schwartz, y la segunda es por el hecho de que  $T$  es un funcional lineal continuo. Por tanto:  $\|L_{\vec{x}}\| \leq \|T\| \|\vec{x}\|$ . Luego,  $L_{\vec{x}}$  es lineal continuo, i.e.  $L_{\vec{x}} \in H^*$ .

Por el teorema de Riesz, como la aplicación  $G : H \rightarrow H^*$  es suprayectiva, para  $\vec{x}' \in H'$  existe  $\tilde{T}\vec{x}' \in H$  tal que  $L_{\vec{x}'} = G_{\tilde{T}\vec{x}'}$ , es decir que:

$$L_{\vec{x}'}\vec{x} = \left( T\vec{x} | \vec{x}' \right) = \left( \vec{x} | \tilde{T}\vec{x}' \right) = G_{\tilde{T}\vec{x}'}\vec{x}, \quad \forall \vec{x} \in H$$

Afirmamos que la aplicación  $\tilde{T} : H' \rightarrow H$  está bien definida y es lineal. En efecto, si  $\tilde{T}\vec{x}'_1, \tilde{T}\vec{x}'_2 \in H$  son tales que  $L_{\vec{x}'} = G_{\tilde{T}\vec{x}'_1}$  y  $L_{\vec{x}} = G_{\tilde{T}\vec{x}'_2}$ , entonces:

$$\left( T\vec{x} | \vec{x}' \right) = \left( \vec{x} | \tilde{T}\vec{x}'_1 \right) \quad \text{y} \quad \left( T\vec{x} | \vec{x}' \right) = \left( \vec{x} | \tilde{T}\vec{x}'_2 \right), \quad \forall \vec{x} \in H$$

entonces:

$$\begin{aligned} \left( \vec{x} | \tilde{T}\vec{x}'_1 \right) &= \left( \vec{x} | \tilde{T}\vec{x}'_2 \right), \quad \forall \vec{x} \in H \\ \Rightarrow \left( \vec{x} | \tilde{T}\vec{x}'_1 - \tilde{T}\vec{x}'_2 \right) &= 0 \quad \forall \vec{x} \in H \\ \Rightarrow \tilde{T}\vec{x}'_1 - \tilde{T}\vec{x}'_2 &= \vec{0} \\ \Rightarrow \tilde{T}\vec{x}'_1 &= \tilde{T}\vec{x}'_2 \end{aligned}$$

por tanto,  $\tilde{T} : H' \rightarrow H$  está bien definida. Comprobemos ahora la linealidad, sean  $\vec{x}', \vec{y}' \in H'$ , entonces:

$$\begin{aligned} \left( T\vec{x} | \vec{x}' \right) &= \left( \vec{x} | \tilde{T}\vec{x}' \right), \left( T\vec{x} | \vec{y}' \right) = \left( \vec{x} | \tilde{T}\vec{y}' \right) \quad \text{y} \quad \left( T\vec{x} | \vec{x}' + \vec{y}' \right) = \left( \vec{x} | \tilde{T}(\vec{x}' + \vec{y}') \right) \quad \forall \vec{x} \in H \\ \Rightarrow \left( T\vec{x} | \vec{x}' \right) + \left( T\vec{x} | \vec{y}' \right) &= \left( \vec{x} | \tilde{T}\vec{x}' \right) + \left( \vec{x} | \tilde{T}\vec{y}' \right) \quad \text{y} \quad \left( T\vec{x} | \vec{x}' + \vec{y}' \right) = \left( \vec{x} | \tilde{T}(\vec{x}' + \vec{y}') \right) \quad \forall \vec{x} \in H \\ \Rightarrow \left( T\vec{x} | \vec{x}' + \vec{y}' \right) &= \left( \vec{x} | \tilde{T}\vec{x}' + \tilde{T}\vec{y}' \right) \quad \text{y} \quad \left( T\vec{x} | \vec{x}' + \vec{y}' \right) = \left( \vec{x} | \tilde{T}(\vec{x}' + \vec{y}') \right) \quad \forall \vec{x} \in H \\ \Rightarrow \left( \vec{x} | \tilde{T}\vec{x}' + \tilde{T}\vec{y}' \right) &= \left( \vec{x} | \tilde{T}(\vec{x}' + \vec{y}') \right) \quad \forall \vec{x} \in H \\ \Rightarrow \left( \vec{x} | (\tilde{T}\vec{x}' + \tilde{T}\vec{y}') - \tilde{T}(\vec{x}' + \vec{y}') \right) &= 0 \quad \forall \vec{x} \in H \\ \Rightarrow (\tilde{T}\vec{x}' + \tilde{T}\vec{y}') - \tilde{T}(\vec{x}' + \vec{y}') &= \vec{0} \\ \Rightarrow \tilde{T}\vec{x}' + \tilde{T}\vec{y}' &= \tilde{T}(\vec{x}' + \vec{y}') \end{aligned}$$

y, si  $\alpha \in \mathbb{K}$ , tenemos que:

$$\begin{aligned}
& (T\vec{x}|\alpha\vec{x}') = (\vec{x}|\tilde{T}(\alpha\vec{x}')) \quad \text{y} \quad (T\vec{x}|\vec{x}') = (\vec{x}|\tilde{T}\vec{x}') \quad \forall \vec{x} \in H \\
& \Rightarrow \bar{\alpha} (T\vec{x}|\vec{x}') = (\vec{x}|\tilde{T}(\alpha\vec{x}')) \quad \text{y} \quad \bar{\alpha} (T\vec{x}|\vec{x}') = \bar{\alpha} (\vec{x}|\tilde{T}\vec{x}') \quad \forall \vec{x} \in H \\
& \Rightarrow \bar{\alpha} (T\vec{x}|\vec{x}') = (\vec{x}|\tilde{T}(\alpha\vec{x}')) \quad \text{y} \quad \bar{\alpha} (T\vec{x}|\vec{x}') = (\vec{x}|\alpha\tilde{T}\vec{x}') \quad \forall \vec{x} \in H \\
& \Rightarrow (\vec{x}|\tilde{T}(\alpha\vec{x}')) = (\vec{x}|\alpha\tilde{T}\vec{x}') \quad \forall \vec{x} \in H \\
& \Rightarrow (\vec{x}|\tilde{T}(\alpha\vec{x}')) - (\vec{x}|\alpha\tilde{T}\vec{x}') = 0 \quad \forall \vec{x} \in H \\
& \Rightarrow (\vec{x}|\tilde{T}(\alpha\vec{x}') - \alpha\tilde{T}\vec{x}') = 0 \quad \forall \vec{x} \in H \\
& \Rightarrow \tilde{T}(\alpha\vec{x}') - \alpha\tilde{T}\vec{x}' = \vec{0} \\
& \Rightarrow \tilde{T}(\alpha\vec{x}') = \alpha\tilde{T}\vec{x}'
\end{aligned}$$

por tanto  $\tilde{T}$  es lineal. Además, se cumple para todos  $\vec{x} \in H$  y  $\vec{x}' \in H'$  que:

$$(T\vec{x}|\vec{x}') = (\vec{x}|\tilde{T}\vec{x}')$$

De (ii): Probaremos las dos igualdades.

I.  $\widetilde{T_1 + T_2} = \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2$ . Tenemos que:

$$(\vec{x}|\tilde{T}_1\vec{x}') = (T_1\vec{x}|\vec{x}') \quad \text{y} \quad (\vec{x}|\tilde{T}_2\vec{x}') = (T_2\vec{x}|\vec{x}'), \quad \forall \vec{x} \in H, \vec{x}' \in H'$$

por tanto

$$\begin{aligned}
& (\vec{x}|\tilde{T}_1\vec{x}') + (\vec{x}|\tilde{T}_2\vec{x}') = (T_1\vec{x}|\vec{x}') + (T_2\vec{x}|\vec{x}') \quad \forall \vec{x} \in H, \vec{x}' \in H' \\
& \Rightarrow (\vec{x}|\tilde{T}_1\vec{x}' + \tilde{T}_2\vec{x}') = (T_1\vec{x} + T_2\vec{x}|\vec{x}') \quad \forall \vec{x} \in H, \vec{x}' \in H' \\
& \Rightarrow (\vec{x}|\tilde{T}_1 + \tilde{T}_2)\vec{x}' = ((T_1 + T_2)\vec{x}|\vec{x}') \quad \forall \vec{x} \in H, \vec{x}' \in H'
\end{aligned}$$

de la unicidad de la adjunta, se sigue que  $\widetilde{T_1 + T_2} = \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2$ .

II.  $\widetilde{\alpha T} = \bar{\alpha}\tilde{T}$ . Es similar al caso anterior.

De los dos incisos anteriores se sigue el resultado.

De (iii): Se tiene que:

$$(\vec{x}|\tilde{T}\vec{x}') = (T\vec{x}|\vec{x}') \quad \text{y} \quad (\vec{x}'|\tilde{U}\vec{x}'') = (U\vec{x}'|\vec{x}''), \quad \forall \vec{x} \in H, \vec{x}' \in H', \vec{x}'' \in H''$$

debemos probar que:

$$(\vec{x}|\tilde{T}(\tilde{T} \circ \tilde{U})\vec{x}'') = ((U \circ T)\vec{x}|\vec{x}'') \quad \forall \vec{x} \in H, \vec{x}'' \in H''$$

para usar la unicidad y de forma inmediata deducir el resultado. Sean  $\vec{x} \in H$  y  $\vec{x}'' \in H''$ . Como  $\tilde{U}\vec{x}''T\vec{x} \in H'$ , tenemos que:

$$(\vec{x}|\tilde{T}(\tilde{U}\vec{x}'')) = (T\vec{x}|\tilde{U}\vec{x}'') \quad \text{y} \quad (T\vec{x}|\tilde{U}\vec{x}'') = (U(T\vec{x})|\vec{x}'')$$

por tanto:

$$\begin{aligned}
& (\vec{x}|\tilde{T}(\tilde{U}\vec{x}'')) = (U(T\vec{x})|\vec{x}'') \\
& \Rightarrow (\vec{x}|\tilde{T}(\tilde{T} \circ \tilde{U})\vec{x}'') = ((U \circ T)\vec{x}|\vec{x}'')
\end{aligned}$$

lo cual prueba el resultado al ser los vectores arbitrarios. ■

**Ejercicio 1.1.2**

Sea  $H$  un espacio hilbertiano complejo. A toda aplicación lineal continua  $T$  de  $H$  en  $H$  se le asocia la aplicación  $Q_T : H \rightarrow \mathbb{C}$  (llamada **forma hermitiana**) definida por:

$$Q_T(\vec{x}) = (T\vec{x}|\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in H$$

Haga lo siguiente:

I. **Establezca** la fórmula:

$$(T\vec{x}|\vec{y}) = \frac{1}{4} [Q_T(\vec{x} + \vec{y}) - Q_T(\vec{x} - \vec{y}) + iQ_T(\vec{x} + i\vec{y}) - iQ_T(\vec{x} - i\vec{y})]$$

II. **Muestre** que

$$Q_{\tilde{T}}(\vec{x}) = \overline{Q_T(\vec{x})}, \quad \forall \vec{x} \in H$$

y que  $Q_T(\vec{x})$  es real,  $\forall \vec{x} \in H$ , si y sólo si  $T$  es autoadjunto (es decir, que  $T = \tilde{T}$ ).

**Solución:**

Establezcamos ambos incisos:

De (i): Sean  $\vec{x}, \vec{y} \in H$ . Tenemos que:

$$\begin{aligned} Q_T(\vec{x} + \vec{y}) &= (T(\vec{x} + \vec{y})|\vec{x} + \vec{y}) \\ &= (T(\vec{x}) + T(\vec{y})|\vec{x} + \vec{y}) \\ &= (T(\vec{x}) + T(\vec{y})|\vec{x}) + (T(\vec{x}) + T(\vec{y})|\vec{y}) \\ &= (T(\vec{x})|\vec{x}) + (T(\vec{y})|\vec{x}) + (T(\vec{x})|\vec{y}) + (T(\vec{y})|\vec{y}) \\ &= Q_T(\vec{x}) + (T(\vec{y})|\vec{x}) + (T(\vec{x})|\vec{y}) + Q_T(\vec{y}) \end{aligned}$$

por lo cual,

$$\begin{aligned} Q_T(\vec{x} - \vec{y}) &= Q_T(\vec{x}) + (T(-\vec{y})|\vec{x}) + (T(\vec{x})|-\vec{y}) + Q_T(-\vec{y}) \\ &= Q_T(\vec{x}) - (T(\vec{y})|\vec{x}) - (T(\vec{x})|\vec{y}) + Q_T(\vec{y}) \end{aligned}$$

Luego:

$$Q_T(\vec{x} + \vec{y}) - Q_T(\vec{x} - \vec{y}) = 2((T(\vec{y})|\vec{x}) + (T(\vec{x})|\vec{y}))$$

y, por ende:

$$\begin{aligned} iQ_T(\vec{x} + i\vec{y}) - iQ_T(\vec{x} - i\vec{y}) &= 2i((T(i\vec{y})|\vec{x}) + (T(\vec{x})|i\vec{y})) \\ &= 2i(i(T(\vec{y})|\vec{x}) - i(T(\vec{x})|\vec{y})) \\ &= 2(-(T(\vec{y})|\vec{x}) + (T(\vec{x})|\vec{y})) \end{aligned}$$

Finalmente, se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} [Q_T(\vec{x} + \vec{y}) - Q_T(\vec{x} - \vec{y}) + iQ_T(\vec{x} + i\vec{y}) - iQ_T(\vec{x} - i\vec{y})] &= \frac{1}{4} [4(T(\vec{x})|\vec{y})] \\ &= (T(\vec{x})|\vec{y}) \end{aligned}$$

lo cual establece la fórmula.

De (ii): Sea  $\vec{x} \in H$ , entonces:

$$\begin{aligned} Q_{\tilde{T}}(\vec{x}) &= (\tilde{T}\vec{x}|\vec{x}) \\ &= (\tilde{T}\vec{x}|\vec{x}) \\ &= \overline{(\vec{x}|\tilde{T}\vec{x})} \\ &= \overline{(T\vec{x}|\vec{x})} \\ &= \overline{Q_T(\vec{x})} \end{aligned}$$

Para la otra parte, veamos que:

$$\begin{aligned} Q_T(\vec{x}) \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in H &\iff Q_T(\vec{x}) = \overline{Q_T(\vec{x})}, \forall \vec{x} \in H \\ &\iff Q_T(\vec{x}) = Q_{\tilde{T}}(\vec{x}), \forall \vec{x} \in H \\ &\iff (T\vec{x}|\vec{x}) = (\tilde{T}\vec{x}|\vec{x}), \forall \vec{x} \in H \\ &\iff (T\vec{x}|\vec{x}) - (\tilde{T}\vec{x}|\vec{x}) = 0, \forall \vec{x} \in H \\ &\iff (T\vec{x} - \tilde{T}\vec{x}|\vec{x}) = 0, \forall \vec{x} \in H \\ &\iff ([T - \tilde{T}]\vec{x}|\vec{x}) = 0, \forall \vec{x} \in H \end{aligned}$$

Veamos que  $([T - \tilde{T}]\vec{x}|\vec{x}) = 0, \forall \vec{x} \in H$  si y sólo si  $T = \tilde{T}$ .

$\Rightarrow$ ) Suponga que  $([T - \tilde{T}]\vec{x}|\vec{x}) = 0, \forall \vec{x} \in H$ . Esto es inmediato, pues se tiene que:  $Q_{T-\tilde{T}}(\vec{x}) = 0$ , para todo  $\vec{x} \in H$ , luego

$$([T - \tilde{T}]\vec{x}|\vec{y}) = 0, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in H$$

en particular para  $\vec{x}$  fijo,  $([T - \tilde{T}]\vec{x}|\vec{y}) = 0$  para todo  $\vec{y} \in H$ , luego  $[T - \tilde{T}]\vec{x} = \vec{0}$ . Como fue arbitrario se sigue entonces que  $T = \tilde{T}$ .

$\Leftarrow$ ) Suponga que  $T = \tilde{T}$ . De forma inmediata se sigue que  $([T - \tilde{T}]\vec{x}|\vec{x}) = 0, \forall \vec{x} \in H$ .

□

### Ejercicio 1.1.3

Sea  $A$  un endomorfismo lineal continuo de un espacio prehilbertiano  $H$ . Defina  $Q_A : H \rightarrow \mathbb{K}$  como:

$$Q_A(\vec{x}) = (A\vec{x}|\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in H$$

Sea

$$\alpha = \sup \left\{ \frac{|Q_A(\vec{x})|}{\|\vec{x}\|^2} \mid \vec{x} \in H, \vec{x} \neq \vec{0} \right\}$$

I. **Pruebe** que  $\alpha \leq \|A\|$ .

II. Al suponer  $A$  autoadjunto, **demuestre** la igualdad opuesta. Luego, si  $A$  es autoadjunto se tiene que

$$\|A\| = \sup \left\{ \frac{|Q_A(\vec{x})|}{\|\vec{x}\|^2} \mid \vec{x} \in H, \vec{x} \neq \vec{0} \right\}$$

*Indicación.* Compruebe que  $\forall \vec{x} \in H$  y  $\forall \lambda > 0$ ,

$$(A\vec{x}|A\vec{x}) = \frac{1}{4} (Q_A(\lambda\vec{x} + \lambda^{-1}A\vec{x}) - Q_A(\lambda\vec{x} - \lambda^{-1}A\vec{x}))$$

de ahí obtenga que  $\|A\vec{x}\|^2 \leq \frac{\alpha}{2} (\lambda^2 \|\vec{x}\|^2 + \frac{1}{\lambda^2} \|A\vec{x}\|^2)$  y elija  $\lambda$  convenientemente.

### **Demostración:**

Demostremos cada inciso.

De (i): Basta con ver que  $\|A\|$  es cota superior del conjunto al que se le quiere sacar el supremo. Para ello, notemos que al ser  $A$  lineal continuo, se tiene que:

$$|(A\vec{x}|\vec{x})| \leq \|A\vec{x}\| \|\vec{x}\| \leq \|A\| \|\vec{x}\|^2$$

para todo  $\vec{x} \in H$ . En particular, para  $\vec{x} \neq \vec{0}$  se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{|(A\vec{x}|\vec{x})|}{\|\vec{x}\|^2} &\leq \|A\| \\ \Rightarrow \frac{|Q_A(\vec{x})|}{\|\vec{x}\|^2} &\leq \|A\| \end{aligned}$$

luego,  $\|A\|$  es cota superior del conjunto. Por tanto  $\alpha \leq \|A\|$ .

De (ii): Suponga que  $A$  es autoadjunto. Sean  $\vec{x} \in H$  y  $\lambda > 0$ . Entonces:

$$\begin{aligned} Q_A(\lambda\vec{x} + \lambda^{-1}A\vec{x}) &= (A(\lambda\vec{x} + \lambda^{-1}A\vec{x})|\lambda\vec{x} + \lambda^{-1}A\vec{x}) \\ &= (\lambda A\vec{x} + \lambda^{-1}(A \circ A)\vec{x}|\lambda\vec{x} + \lambda^{-1}A\vec{x}) \\ &= (\lambda A\vec{x} + \lambda^{-1}(A \circ A)\vec{x}|\lambda\vec{x}) + (\lambda A\vec{x} + \lambda^{-1}(A \circ A)\vec{x}|\lambda^{-1}A\vec{x}) \\ &= (\lambda A\vec{x}|\lambda\vec{x}) + (\lambda^{-1}(A \circ A)\vec{x}|\lambda\vec{x}) + (\lambda A\vec{x}|\lambda^{-1}A\vec{x}) + (\lambda^{-1}(A \circ A)\vec{x}|\lambda^{-1}A\vec{x}) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} Q_A(\lambda\vec{x} - \lambda^{-1}A\vec{x}) &= (A(\lambda\vec{x} - \lambda^{-1}A\vec{x})|\lambda\vec{x} - \lambda^{-1}A\vec{x}) \\ &= (\lambda A\vec{x} - \lambda^{-1}(A \circ A)\vec{x}|\lambda\vec{x} - \lambda^{-1}A\vec{x}) \\ &= (\lambda A\vec{x} - \lambda^{-1}(A \circ A)\vec{x}|\lambda\vec{x}) - (\lambda A\vec{x} - \lambda^{-1}(A \circ A)\vec{x}|\lambda^{-1}A\vec{x}) \\ &= (\lambda A\vec{x}|\lambda\vec{x}) - (\lambda^{-1}(A \circ A)\vec{x}|\lambda\vec{x}) - (\lambda A\vec{x}|\lambda^{-1}A\vec{x}) + (\lambda^{-1}(A \circ A)\vec{x}|\lambda^{-1}A\vec{x}) \end{aligned}$$

por tanto:

$$\begin{aligned} Q_A(\lambda\vec{x} + \lambda^{-1}A\vec{x}) - Q_A(\lambda\vec{x} - \lambda^{-1}A\vec{x}) &= 2((\lambda^{-1}(A \circ A)\vec{x}|\lambda\vec{x}) + (\lambda A\vec{x}|\lambda^{-1}A\vec{x})) \\ &= 2(((A \circ A)\vec{x}|\vec{x}) + (A\vec{x}|A\vec{x})) \\ &= 2((A\vec{x}|A\vec{x}) + (A\vec{x}|A\vec{x})) \\ &= 4(A\vec{x}|A\vec{x}) \end{aligned}$$

pues,  $A$  es autoadjunto. Luego:

$$(A\vec{x}|A\vec{x}) = \frac{1}{4}(Q_A(\lambda\vec{x} + \lambda^{-1}A\vec{x}) - Q_A(\lambda\vec{x} - \lambda^{-1}A\vec{x}))$$



por tanto:

$$\begin{aligned}
\|A\vec{x}\|^2 &= \frac{1}{4} |Q_A(\lambda\vec{x} + \lambda^{-1}A\vec{x}) - Q_A(\lambda\vec{x} - \lambda^{-1}A\vec{x})| \\
&\leq \frac{1}{4} |Q_A(\lambda\vec{x} + \lambda^{-1}A\vec{x})| + \frac{1}{4} |Q_A(\lambda\vec{x} - \lambda^{-1}A\vec{x})| \\
&\leq \frac{1}{4} \|\lambda\vec{x} + \lambda^{-1}A\vec{x}\|^2 + \frac{1}{4} \|\lambda\vec{x} - \lambda^{-1}A\vec{x}\|^2 \\
&= \frac{1}{2} (\|\lambda\vec{x}\|^2 + \|\lambda^{-1}A\vec{x}\|^2) \\
&= \frac{1}{2} (\lambda^2 \|\vec{x}\|^2 + \frac{1}{\lambda^2} \|A\vec{x}\|^2) \\
\Rightarrow \|A\vec{x}\|^2 &\leq \frac{1}{2} (\lambda^2 \|\vec{x}\|^2 + \frac{1}{\lambda^2} \|A\vec{x}\|^2) \\
\Rightarrow 2\|A\vec{x}\|^2 - \frac{1}{\lambda^2} \|A\vec{x}\|^2 &\leq \lambda^2 \|\vec{x}\|^2 \\
\Rightarrow \left(2 - \frac{1}{\lambda^2}\right) \|A\vec{x}\|^2 &\leq \lambda^2 \|\vec{x}\|^2 \\
\Rightarrow \left(\frac{2\lambda^2 - 1}{\lambda^2}\right) \|A\vec{x}\|^2 &\leq \lambda^2 \|\vec{x}\|^2 \\
\Rightarrow \|A\vec{x}\|^2 &\leq \left(\frac{\lambda^4}{2\lambda^2 - 1}\right) \|\vec{x}\|^2 \\
\Rightarrow \|A\vec{x}\| &\leq \left(\frac{\lambda^2}{\sqrt{2\lambda^2 - 1}}\right) \|\vec{x}\|
\end{aligned}$$

por Cauchy-Schwartz y usando la identidad del paralelogramo y, tomando ■

#### Ejercicio 1.1.4

**Muestre** que todo endomorfismo continuo  $T$  de un espacio hilbertiano  $H$  se expresa únicamente en la forma:

$$T = A + iB$$

donde  $A$  y  $B$  son endomorfismos autoadjuntos de  $H$ .

#### Demostración:

Tomemos  $A = \frac{1}{2}(T + \tilde{T})$  y  $B = \frac{1}{2i}(T - \tilde{T})$ , siendo  $\tilde{T} : H \rightarrow H$  la adjunta de  $T$ . Es claro que  $T = A + iB$  y, que tanto  $A$  como  $B$  son adjuntos, pues:

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{A}} &= \widetilde{\frac{1}{2}(T + \tilde{T})} \\
&= \frac{1}{2} \widetilde{(T + \tilde{T})} \\
&= \frac{1}{2} (\tilde{\tilde{T}} + \tilde{\tilde{T}}) \\
&= \frac{1}{2} (T + \tilde{T}) \\
&= A
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\widetilde{B} &= \frac{1}{2i} \widetilde{(T - \widetilde{T})} \\
&= \frac{-i}{2} \widetilde{(T - \widetilde{T})} \\
&= -\frac{i}{2} \widetilde{(T - \widetilde{T})} \\
&= \frac{i}{2} (\widetilde{T} - \widetilde{\widetilde{T}}) \\
&= -\frac{1}{2i} (\widetilde{T} - T) \\
&= \frac{1}{2i} (T - \widetilde{T}) \\
&= B
\end{aligned}$$

además, son endomorfismos. Para ello, basta ver que  $T + \widetilde{T}$  y  $T - \widetilde{T}$  lo son. En efecto, si ■

### Ejercicio 1.1.5

Sea  $H$  un espacio prehilbertiano. **Construya** un espacio hilbertiano  $\hat{H}$  y una inyección lineal  $j : H \rightarrow \hat{H}$  tal que

$$(j\vec{x}|j\vec{y}) = (\vec{x}|\vec{y}), \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in H.$$

y que  $j(H)$  sea denso en  $\hat{H}$ . El espacio hilbertiano  $\hat{H}$  se llama la **completación** del espacio prehilbertiano  $H$ . **Formule y demuestre** un teorema de unicidad de esta completación.

**Demostración:** ■

### Ejercicio 1.1.6

Si  $E$  es un espacio vectorial complejo, la adición de elementos de  $E$  y la multiplicación de elementos de  $E$  por números reales, hacen de  $E$  un espacio vectorial real que se designa por  $E_{\mathbb{R}}$ .

- I. Sea  $H$  un espacio prehilbertiano complejo. Se designa por  $(\vec{x}|\vec{y})$  un producto escalar en  $H$ . **Muestre** que la aplicación:

$$(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto (\vec{x}|\vec{y})_{\mathbb{R}} = \Re(\vec{x}|\vec{y})$$

hace de  $H_{\mathbb{R}}$  un espacio prehilbertiano real para el que se cumple:

$$(i\vec{x}|i\vec{y})_{\mathbb{R}} = (\vec{x}|\vec{y})_{\mathbb{R}}$$

**Pruebe** la relación:

$$(\vec{x}|\vec{y}) = (\vec{x}|\vec{y})_{\mathbb{R}} + i(i\vec{x}|i\vec{y})_{\mathbb{R}} \quad (1.2)$$

- II. Sea  $H$  un espacio vectorial complejo. Se supone que  $H_{\mathbb{R}}$  está provisto de un producto escalar  $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto (\vec{x}|\vec{y})_{\mathbb{R}}$  que hace de  $H_{\mathbb{R}}$  un espacio prehilbertiano real. Se supone también que  $(i\vec{x}|i\vec{y})_{\mathbb{R}} = (\vec{x}|\vec{y})_{\mathbb{R}}$ , para todo  $\vec{x}, \vec{y} \in H$ . Se define en  $H$  un producto  $(\vec{x}|\vec{y})$  por la fórmula (1.1). **Demuestre** que  $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto (\vec{x}|\vec{y})$  es un producto escalar complejo que hace de  $H$  un espacio prehilbertiano complejo.

**Demostración:** ■

**Ejercicio 1.1.7**

Haga lo siguiente:

- I. **Muestre** que en todo espacio prehilbertiano real se cumple

$$(\vec{x}|\vec{y}) = \frac{1}{4} (\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2)$$

y en todo espacio prehilbertiano complejo se cumple

$$(\vec{x}|\vec{y}) = \frac{1}{4} (\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 + i\|\vec{x} + i\vec{y}\|^2 - i\|\vec{x} - i\vec{y}\|^2)$$

- II. Sea  $E$  un espacio vectorial normado real en el que se verifica la identidad del paralelogramo:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2)$$

**Pruebe** que se puede definir de manera única un producto escalar  $(|)$  sobre  $E$  que hace de  $E$  un espacio prehilbertiano real para el cual  $\|\vec{x}\|^2 = (\vec{x}|\vec{x})$ ,  $\forall \vec{x} \in E$ .

*Indicación.* Defina  $(\vec{x}|\vec{y})$  por la primera fórmula del inciso (i). Usando la fórmula del paralelogramo compruebe que  $(\vec{x}|2\vec{y}) = 2(\vec{x}|\vec{y})$ . Transforme  $(\vec{x}_1|\vec{y}_1) + (\vec{x}_2|\vec{y}_2)$  por la identidad del paralelogramo y deduzca la fórmula  $(\vec{x}_1|\vec{y}) + (\vec{x}_2|\vec{y}) = (\vec{x}_1 + \vec{x}_2|\vec{y})$ .

- III. Misma pregunta que en (ii) en el caso de ser  $E$  espacio vectorial complejo.

*Indicación.* Use (ii) y el problema 1.6.

**Solución:**

□

**Ejercicio 1.1.8**

Para todo  $s \in \mathbb{R}$  sea  $u_s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  la función definida por:

$$u_s(x) = e^{isx}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sea  $X$  el espacio vectorial complejo compuesto de todas las combinaciones lineales finitas de estas funciones  $u_s$ ,  $\forall f, g \in X$  se define:

$$(f|g) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R f \bar{g}.$$

**Pruebe** que esta definición tiene sentido y que la aplicación  $(f, g) \mapsto (f|g)$  es un producto escalar que hace de  $X$  un espacio prehilbertiano.

Sea  $H$  el espacio prehilbertiano, completación del espacio prehilbertiano  $X$  (ver problema 1.5). **Muestre** que  $H$  es un espacio hilbertiano no separable y que la familia  $(u_s)_{s \in \mathbb{R}}$  es un sistema ortonormal maximal en  $H$ .

**Demostración:**

■

**Ejercicio 1.1.9**

Sea  $H$  un espacio hilbertiano de dimensión infinita. **Demuestre** que existe una aplicación continua inyectiva  $\gamma$  de  $[0, 1]$  en  $H$  (un **camino simple** en  $H$ ) tal que si  $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 1$ ,

los vectores  $\gamma(b) - \gamma(a)$  y  $\gamma(d) - \gamma(c)$  son ortogonales.

*Indicación.* Tome  $H = L_2([0, 1], \mathbb{K})$  y considere funciones características de ciertos subconjuntos de  $[0, 1]$ .

**Demostración:**

### Ejercicio 1.1.10

Sea  $\{\vec{x}_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  una sucesión de elementos de un espacio hilbertiano  $H$ . La sucesión  $\{\vec{x}_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  se llama **martingala** (en el sentido amplio) si,  $\forall \nu \in \mathbb{N}$ ,  $\vec{x}_\nu$  es el vector de  $\mathcal{L}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_\nu)$  menos alejado de  $\vec{x}_{\nu+1}$ .

- I. Sea  $\{\vec{x}_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  una martingala. Se definen:

$$\vec{y}_1 = \vec{x}_1 \quad \text{e} \quad \vec{y}_\nu = \vec{x}_\nu - \vec{x}_{\nu-1}, \quad \forall \nu \geq 2.$$

**Muestre** que los vectores  $\vec{y}_\nu$  son ortogonales a pares y que  $\{\|\vec{x}_\nu\|\}_{\nu=1}^\infty$  es una sucesión creciente de números no negativos.

- II. Sea  $\{\vec{y}_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  una sucesión de vectores en  $H$  ortogonales a pares. Se define

$$\vec{x}_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \vec{y}_k = \vec{y}_\nu, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

**Pruebe** que  $\{\vec{y}_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  es una martingala.

**Demostración:**

### Ejercicio 1.1.11

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$  una función medible, integrable en todo subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  de medida finita. Si

$$\int_P f = 0, \quad \forall \text{ rectángulo acotado } P,$$

**demuestre** que  $f = 0$  c.t.p. en  $\mathbb{R}^n$ .

*Indicación.* Redúzcase a un corolario del lema de los promedios.

**Demostración:**

### Ejercicio 1.1.12 (Funciones de Hermite)

Por inducción se ve inmediatamente que

$$D^n e^{-x^2} = (-1)^n H_n(x) e^{-x^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

donde  $(-1)^n H_n$  es un polinomio de grado  $n$ . Estos polinomios  $(-1)^n H_n$  se llaman **polinomios de Hermite**. Se definen las **funciones de Hermite**  $\varphi_n$  por:

$$\varphi_n(x) = H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

equivalentemente,

$$\varphi_n(x) = (-1)^n e^{-\frac{x^2}{2}} D^n e^{-x^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

I. **Demuestre** que las funciones de Hermite satisfacen la relación:

$$\varphi_n''(x) = (x^2 - 2n - 1)\varphi_n(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

*Indicación.* Expresar a  $\varphi_n''(x)$  mediante  $D^n e^{-x^2}$ ,  $D^{n+1} e^{-x^2}$  y  $D^{n+2} e^{-x^2}$  y calcule  $D^{n+2} e^{-x^2} = D^{n+1}(-2xe^{-x^2})$  por la fórmula de Leibniz para la derivada  $n+1$ -enésima de un producto de factores.

II. **Muestre** que las funciones de Hermite constituyen un sistema ortogonal en el espacio hilbertiano  $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{K})$

*Indicación.* Del inciso (i) se sigue que  $\varphi_n''\varphi_m - \varphi_m''\varphi_n = 2(m-n)\varphi_n\varphi_m$ .

III. **Pruebe** la relación

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x).$$

*Indicación.* Expresar  $H_n'(x)$  mediante  $D^n e^{-x^2}$  y  $D^{n+1} e^{-x^2}$ . Calcule  $D^{n+1} e^{-x^2} = D^n(-2xe^{-x^2})$  por la fórmula de Leibniz.

IV. **Demuestre** que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^2(x) dx = 2n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{n-1}^2(x) dx$$

y deduzca que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^2(x) dx = \pi^{1/2} 2^n n!.$$

Luego el sistema de funciones:

$$\Psi_n = \frac{1}{\pi^{1/2} 2^n n!} \varphi_n$$

es un sistema ortonormal en  $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{K})$  (En un ejercicio posterior se probará que dicho sistema ortonormal es, de hecho, maximal).

*Indicación.* Integre por partes

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^2(x) dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) D^n e^{-x^2} dx$$

y use (iii).