Espacios Vectoriales.

Def. Un espacio vectorial[1] es una cuádrupla $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ donde $V \neq \emptyset$, $\mathbb{K}$ es un campo, $+$ es una operación binaria de V & $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$, $(a, \vec{v}) \mapsto \cdot(a, \vec{v}) = a\vec{v}$, con las sig. propiedades:

i) $(V, +)$ es grupo abeliano.

ii) $\cdot$ satisface:

1. $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$.
2. $(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$.
3. $(ab)\vec{u} = a(b\vec{u}) = b(a\vec{u})$.
4. $1\vec{u} = \vec{u}$.

$\forall\, a, b \in \mathbb{K}$ & $\vec{u}, \vec{v} \in V$. $\cdot$ es llamado producto escalar.

La identidad aditiva de V es el vector $\vec{0}$ y $\forall\, \vec{u} \in V$, $-\vec{u}$ es su inverso aditivo. De aquí que la diferencia de $\vec{u}, \vec{v} \in V$ es: $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

Propiedades.

a) $a(\vec{u} - \vec{v}) = a\vec{u} - a\vec{v}$.

b) $a\vec{v} = 0 \iff a = 0$ o $\vec{v} = \vec{0}$.

c) $-a\vec{v} = (-a)\vec{v} = a(-\vec{v})$.

d) $(a-b)\vec{u} = a\vec{u} - b\vec{u}$

$\forall\, a, b \in \mathbb{K}$ y $\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V$.

Dem:

Probemos b). Para ello, notemos que se tienen las sig. prop.

i) $0\vec{v} = \vec{0}$ y ii) $a\vec{0} = \vec{0}$, $\forall\, a \in \mathbb{K}$ y $\vec{v} \in V$. En efecto:

$$0\vec{v} + \vec{0} = 0\vec{v} = (0+0)\vec{v} = 0\vec{v} + 0\vec{v} \Rightarrow \vec{0} = 0\vec{v}$$

y de manera similar:

$$a\vec{0}+\vec{0} = a\vec{0} = a(\vec{0}+\vec{0}) = a\vec{0}+a\vec{0} \Rightarrow a\vec{0} = \vec{0}$$

Lo cual prueba $\Leftarrow$).

$\Rightarrow$) Suponga $a\vec{v}=0$. Suponemos que $a\neq 0$, entonces:

$$\vec{v} = 1\cdot\vec{v} = (a^{-1}a)\vec{v} = a^{-1}(a\vec{v}) = a^{-1}\vec{0} = \vec{0}$$

EJEMPLOS:

1) Si K es un campo y $n\in\mathbb{N}$, entonces:

$$K^n = K\times\ldots\times K = \{(a_1,\ldots,a_n) \mid a_i\in K, \forall\, i\in[\![1,n]\!]\}$$

es un esp. vectorial con operación suma y producto por escalar canónicos.

2) Sea E un campo y F un subcampo de E. Entonces con sus operaciones de E y F, E es un esp. vectorial sobre el campo F.

3) Sea $K=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ donde $p\in\mathbb{N}$ es primo. Sea $V=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x]$, ent. V es esp. vect. sobre $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

4) Si G es grupo abeliano y K es campo, entonces cualquier función $K\times G\to G$ satisfaciendo las propiedades 1) - 4) de la definición de producto por escalar, hacen de G un esp. vectorial sobre K.

Def. Sea V esp. vect. sobre $\mathbb{K}$. Decimos que $W\subseteq V$ **es subespacio vectorial** de V, si

i) $W\neq\emptyset$.

ii) La operación suma de V y el producto por escalar de V inducido sobre W, hacen de W un esp. vectorial sobre K.

Proposición.

Sea V un esp. vect. sobre K, y $W\subseteq V$ no vacío, ent W es subespacio vect. de $V \iff W$ es subgrupo de V y $\forall\, a\in K$ & $\forall\, \vec{v}\in W$: $a\vec{v}\in W$.

Dem:

Es inmediata.

$\square$

Corolario.

W es subespacio de $V \iff \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in W$ & $\forall\, a \in K$, $a\vec{u} + \vec{v} \in W$.

Dem:

Es inmediata.

$\square$

EJEMPLOS.

1) Si V es esp. vect. sobre K, entonces $\{\vec{0}\}$ y V son subespacios vect. de V, llamados subespacios triviales.

2) Si K es campo y $n \in \mathbb{N}$, entonces $W = \{(v_1, \dots, v_n) \in V^n \mid v_1 + \dots + v_n = 0\}$ es un subespacio vectorial de K^n.

3) $V = \{(v_1, \dots, v_n) \in V^n \mid v_1 + \dots + v_n = 1\}$ no es subesp. vect. de V^n. Tampoco lo es $W_1 = \{(v_1, \dots, v_n) \in V^n \mid v_1^2 + v_2 + \dots + v_n = 0\}$.

Sea V esp. vect. sobre K y sea $S \subseteq V$, se define el subespacio de V generado por S, como:

$$L(S) = \mathcal{L}\{S\} = L_K(S) = \mathcal{L}_K\{S\}$$

$$:= \bigcap_{\substack{W \text{ es sub. vect. de } V \text{ y} \\ S \subseteq W}} W$$

Proposición.

i) $S \subseteq L_K(S)$.

ii) Si $S = \emptyset$, $L_K(\emptyset) = \{\vec{0}\} = L_K(\vec{0})$.

iii) Si T es subespacio de V m $S \subseteq T \Rightarrow L_K(S) \subseteq T$.

iv) Si T es subespacio vect. de V, ent. $L_K(T) = T$.

Def. Si V es esp. vect. sobre K, $S \subseteq V$ y W subespacio de V, decimos que W es generado por S, si $W = L_K(S)$.

Proposición.

Sea V esp. vect. sobre K y $S \subseteq V$ $(S \neq \emptyset)$, entonces:

$$L_K(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{s_i} \mid \vec{s_i} \in S,\ a_i \in K,\ \forall k \in [\![1, n]\!];\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

Dem:

Ejercicio. $\square$

Ejemplo.

1) Si K es un campo entonces K^n $(n \geq 1)$ es generado por los vectores canónicos $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}$ donde:

$$\vec{e_i} = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-ésima entrada.}}, 0, \ldots, 0)$$

Def. Sea V esp. vect. sobre K y $S \subseteq V$ con $S \neq \emptyset$. Decimos que S es un conjunto linealmente independiente, si para cada familia de escalares $\{a_{\vec{s}}\}_{\vec{s} \in S}$ tal que $a_{\vec{u}} = 0$ $\forall\!\!\!\!/\ \vec{u} \in S$, la relación:

$$\sum_{\vec{s} \in S} a_{\vec{s}}\, \vec{s} = 0$$

implica que $a_{\vec{s}} = 0$, $\forall\, \vec{s} \in S$. Si S no es linealmente independiente, se dice que S es linealmente dependiente.

Def. Sea V esp. vect. sobre K y $B \subseteq V$ no vacío. Decimos que B es base de V si B es linealmente independiente y $L_K(B) = V$.

Obs) Si V es esp. vect. sobre K, los conjuntos l.i. existen. Por ejemplo, $\{\vec{v}\} = B$ es l.i (con $\vec{v} \neq \vec{0}$).

Nota: Por vacuidad, $\emptyset \subseteq V$ se puede considerar conjunto l.i.

Teorema (existencia de Bases).

Sea V esp. vect. sobre K y sea $L \subseteq V$ linealmente independiente. Entonces, V admite una base B tal que $L \subseteq B$.

Dem:

Si $V = \{\vec{0}\} = L_K(\vec{0})$, ent. $L = \emptyset \Rightarrow B = L = \emptyset$.

Así que, suponemos que V no es trivial, i.e $V \neq \{0\}$. Definimos la familia $\mathcal{F} = \{T \mid T \subseteq V$ l.i con $L \subseteq T\}$. Tenemos que $\mathcal{F} \neq \emptyset$ pues $L \in \mathcal{F}$ y es parcialmente ordenado por la relación de contención.

Sea $\mathcal{C}$ una cadena de $\mathcal{F}$. Sea $T_0 := \bigcup_{T \in \mathcal{C}} T \subseteq V$.

$L \subseteq T_0$. Sea $\{a_{\vec{u}}\}_{\vec{u} \in T_0}$ una familia de escalares $\ni$ $a_{\vec{u}} = 0$ $\forall\!\!\!\forall$ $\vec{u} \in T_0$, y

$$\sum_{\vec{u} \in T_0} a_{\vec{u}} \vec{u} = 0$$

Sean $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \in T_0$ aquellos vect. para los cuales los escalares $a_{\vec{u}_1}, \ldots, a_{\vec{u}_n}$ sean posiblemente no cero. Esto significa que $\exists\, T \in \mathcal{C}$ $\ni$ $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \in T \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{\vec{u}_i} \vec{u}_i = 0$, donde T es l.i. $\Rightarrow a_{\vec{u}_i} = 0, \forall\, i \in [\![1..n]\!]$. Por tanto $a_{\vec{u}} = 0, \forall\, \vec{u} \in T_0 \Rightarrow T_0 \in \mathcal{F}$ y T_0 es cota sup. de la caden. a $\mathcal{C}$.

Por el Lema de Zorn, la familia $\mathcal{F}$ tiene elementos maximales. Sea $B \in \mathcal{F}$ $\ni$ B es maximal, i.e $L \subseteq B$ y B es l.i. Probemos que $L_K(B) = V$. Claramente $L_K(B) \subseteq V$. Sea $\vec{v} \in V$ $\ni$ $\vec{v} \neq 0$. Suponga que $\vec{v} \notin L_K(B) \Rightarrow B \cup \{\vec{v}\}$ es l.i y $L \subseteq B \cup \{\vec{v}\}$ y $B \subsetneq B \cup \{\vec{v}\}$ $\times\!\!\!\times$c pues B es maximal, luego $V \subseteq L_K(B)$.

$$\therefore L_K(B) = V.$$

$\therefore B$ es base de V.

$\square$

Obs) Sea V esp. vect. sobre un campo K. Si $S \subseteq V$ l.i. sobre K, entonces $\vec{0} \notin S$.

i) Una **Combinación lineal** de vectores de V es una expresión de la forma: $\sum_{i \in I} a_i \vec{v}_i$ tal- es que $a_i \in K, \forall\, i \in I$, $\vec{v}_i \in V$, $\forall\, i \in I$ pero $a_j = 0$ $\forall\!\!\!\forall$ $j \in I$.

Por ejemplo, si $S \subseteq V$ no vacío, una combinación lineal de vectores de S es de la forma

$$\sum_{\vec{v} \in S} a_{\vec{v}} \vec{v}$$

donde $a_{\vec{v}} \in K$, $\vec{v} \in S$ & $a_{\vec{v}} = 0$ $\forall \vec{v} \in S$.

ii) Si $\mathcal{B}$ es una base de V si cada vector $\vec{v} \in V$ se expresa de manera única como una combinación lineal de vectores de la base $\mathcal{B}$.

Teorema.

Sea V un esp. vect. sobre un campo K y $\mathcal{B}$ una base de V con $|\mathcal{B}| = n \in \mathbb{N}$. Si $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_{n+1}} \in V$ son distintos entre sí de V, entonces el conjunto $\{\vec{u_1}, \dots, \vec{u_{n+1}}\}$ es l.d. sobre K.

Dem:

La demostración es por inducción sobre n. Para $n=1$, $\mathcal{B} = \{\vec{v}\}$ y tenemos $\vec{u_1}, \vec{u_2} \in V$. $(\vec{u_1} \neq \vec{u_2})$.

Si $\vec{u_1} = \vec{0}$ o $\vec{u_2} = \vec{0}$, el resultado es inmediato. Suponga ambos cero, $\exists\, a, b \in K$ $\ni$

$$\vec{u_1} = a\vec{v} \quad y \quad \vec{u_2} = b\vec{v}$$

con $a \neq 0 \neq b$. Luego $\vec{u_1} = ab^{-1}\vec{u_2}$. Por tanto

$$\vec{u_1} - ab^{-1}\vec{u_2} = 0$$

$\Rightarrow \{\vec{u_1}, \vec{u_2}\}$ es l.d. Supóngase cierto el resultado para cualquier esp. vect. sobre K teniendo una base con n vectores.

Entonces, suponemos $|\mathcal{B}| = n+1$ con $\mathcal{B} = \{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_{n+1}}\}$ y $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_{n+2}} \in V$ distintos entre sí (y podemos suponer que todos ellos son no cero). Expresamos a cada $\vec{u_i}$ como combinación lineal de elementos de $\mathcal{B}$:

$$\vec{u_i} = a_{i1}\vec{v_1} + \dots + a_{in}\vec{v_n} + a_{i(n+1)}\vec{v_{n+1}}$$

$\forall\, i \in [\![1, n+2]\!]$. Si $a_{i,n+1} = 0$, $\forall\, i \in [\![1, n+2]\!]$, ent $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_{n+1}} \in L_K(\{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}\})$. Luego por hip. de inducción, $\{\vec{u_1}, \dots, \vec{u_{n+1}}\}$ es l.d sobre $K \Rightarrow \{\vec{u_1}, \dots, \vec{u_{n+2}}\}$ es l.d sobre K.

Suponemos que no todos los escalares $a_{i,n+1}$ son cero. Sin pérdida de generalidad, podemos su-

Poner que $a_{n+2,n+1} \neq 0$. Para cada $i \in [\![1, n+1]\!]$, define:

$$b_i = a_{i,n+1}\, a_{n+2,n+1}^{-1}$$

& $\vec{w_i} := \vec{u_i} - b_i \vec{u}_{n+2}$. Tenemos que: $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{n+1} \in L_K(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\})$. Supóngase que $\exists\, i, j \in [\![1, n+1]\!]$, $i \neq j$ m $\vec{w}_i = \vec{w}_j \Rightarrow \vec{u}_i - b_i \vec{u}_{n+2} = \vec{u}_j - b_j \vec{u}_{n+2}$

$$\Rightarrow \vec{u}_i = \vec{u}_j + (b_i - b_j)\vec{u}_{n+2}$$

donde $b_i \neq b_j \Rightarrow \vec{u}_i - \vec{u}_j - (b_i - b_j)\vec{u}_{n+2} = 0 \Rightarrow \{\vec{u}_i, \vec{u}_j, \vec{u}_{n+2}\}$ es l.d sobre $K \Rightarrow$ $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n+2}\}$ es l.d. sobre K, y habremos terminado.

Suponemos $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{n+1}$ son vect. dist. entre sí. Por hip. de inducción, $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{n+1}\}$ es l.d. sobre K. Es decir, $\exists\, c_1, \dots, c_{n+1} \in K$ no todos cero m

$$c_1 \vec{w}_1 + \dots + c_{n+1} \vec{w}_{n+1} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow c_1 \vec{u}_1 + \dots + c_{n+1} \vec{u}_{n+1} - (c_1 b_1 + \dots + c_{n+1} b_{n+1})\vec{u}_{n+2} = 0$$

$\therefore \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n+2}\}$ son l.d sobre K

Aplicando inducción se tiene lo deseado.

$\square$

Corolario (Invarianza de la cardinalidad de bases en el caso finito).

Sea V esp. vect. sobre K y $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ bases de V. Si $|\mathcal{B}| < \infty$, ent. $|\mathcal{B}| = |\mathcal{C}|$.

Dem:

Es inmediata del teorema anterior.

$\square$

Teorema.

Sea V esp. vect. sobre un campo K no trivial. Y sea $\mathcal{B}$ una base de V. Entonces, si $\mathcal{C}$ es cualquier otra base de V (sobre K), se tiene que $|\mathcal{C}| = |\mathcal{B}|$

Dem:

Si $\mathcal{B}$ es finito, por el corolario ant. $|\mathcal{B}| = |\mathcal{C}|$. Por lo tanto, suponemos que $\mathcal{B}$ es infinita, luego por el t. ant. $\mathcal{C}$ debe ser infinita también.

Notamos que todo elemento de $\mathcal{B}$ se expresa de manera única como una combinación lineal de vectores de $\mathcal{C}$, i.e $\forall\ \vec{v} \in \mathcal{B}$, $\vec{v}$ se expresa de manera única:

$$\vec{v} = \sum_{\vec{\omega} \in \mathcal{C}} a_{\vec{\omega}}(\vec{v})\,\vec{\omega} \quad \dots (1)$$

donde no todos los escalares $a_{\vec{\omega}}(\vec{v})$ $(\vec{\omega} \in C)$ son cero. Si el escalar $a_{\vec{\omega}}(\vec{v}) \neq 0$, se dice que $\vec{\omega}$ aparece en la descomposición de $\vec{v}$ en (1).

Definimos $\forall\ w \in \mathcal{C}$:

$$A_w = \{\vec{v} \in \mathcal{B} \mid \vec{\omega} \text{ aparece en la descomposición de } \vec{v}\}$$
$$= \{\vec{v} \in \mathcal{B} \mid a_{\vec{\omega}}(\vec{v}) \neq 0\}$$

Afirmamos que $A_{\vec{\omega}} \neq \phi$, $\forall\ w \in \mathcal{C}$. En efecto, si $\exists\ \vec{\omega}_0 \in \mathcal{C} \ \pi\ a_{\vec{\omega}_0}(\vec{v}) = 0$, $\forall\ \vec{v} \in \mathcal{B}$, al expresar a $\vec{\omega}_0$ como combinación lineal de elementos de $\mathcal{B}$, entonces:

$$\vec{\omega}_0 = \sum_{\vec{v} \in \mathcal{B}} b_{\vec{v}}(\omega_0)\,\vec{v}$$
$$= \sum_{\vec{v} \in \mathcal{B}} b_{\vec{v}}(\vec{\omega}_0) \cdot \sum_{\vec{\omega} \in C \setminus \{\vec{\omega}_0\}} a_{\vec{\omega}}(\vec{v})\,\vec{\omega}$$
$$= \sum_{\vec{v} \in \mathcal{B}} \Big(\sum_{\vec{\omega} \in C \setminus \{\vec{\omega}_0\}} b_{\vec{v}}(\vec{\omega}_0)\, a_{\vec{\omega}}(\vec{v}) \Big) \vec{\omega}$$

Como $\vec{\omega}_0 \neq \vec{0}$ (pues en caso contrario, $\mathcal{C}$ no sería l.i) entonces $\mathcal{C}$ es l.d ~~xc~~. Por tanto $A_{\vec{\omega}} \neq \phi$, $\forall\ \vec{\omega} \in \mathcal{C}$. Así, $\{A_{\vec{\omega}}\}_{\vec{\omega} \in \mathcal{C}}$ es una familia no vacía de conjuntos no vacíos. Por el axioma de elección, elegimos $\forall\ \vec{\omega} \in \mathcal{C}$ un vector $\vec{v}_{\vec{\omega}}$ de cada conjunto $A_{\vec{\omega}}$.

Sea $\varphi: \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ dada por: $\vec{\omega} \mapsto \vec{v}_{\vec{\omega}}$. Se tiene que $\varphi(\mathcal{C})$ es un subconjunto de $\mathcal{B}$ finito, pues dado cualquier conjunto finito $\{\vec{v}_{\vec{\omega}_1}, \dots, \vec{v}_{\vec{\omega}_n}\} \subseteq \varphi(\mathcal{C})$ elegimos $\vec{\omega} \in \mathcal{C}$ que no aparezca en las combinaciones lineales de los vectores básicos $\vec{v}_{\vec{\omega}_1}, \dots, \vec{v}_{\vec{\omega}_n} \Rightarrow \varphi(\vec{\omega}) = \vec{v}_{\vec{\omega}} \notin \{\vec{v}_{\vec{\omega}_1}, \dots, \vec{v}_{\vec{\omega}_n}\}$.

Por otro lado, $\forall\ \vec{v} \in \varphi(C)$, se cumple que $\varphi^{-1}(\vec{v})$ es finito.

Finalmente, como

$$C = \bigcup_{\vec{v} \in \varphi(C)} \varphi^{-1}(\vec{v})$$
$$\Rightarrow |C| = \Big| \bigcup_{\vec{v} \in \varphi(C)} \varphi^{-1}(\vec{v}) \Big|$$

$$\leq \sum_{\vec{v} \in \varphi(C)} |\varphi^{-1}(\vec{v})|$$

$$\leq \aleph_0 \, |\varphi(C)|$$

$$= |\varphi(C)|$$

$$\leq |\mathcal{B}|$$

De forma análoga $|\mathcal{B}| \leq |\mathcal{C}|$. Por Cantor-Bernstein, $|\mathcal{B}| = |\mathcal{C}|$.

$\square$

Def. Sea V esp. vect. sobre K. Se define la **dimensión de V sobre K**, como:

$$\dim_K(V) := |\mathcal{B}|$$

donde $\mathcal{B}$ es alguna base de V.

Def. Sean V y W esp. vect. sobre un campo K & $T: V \to W$ una función. Decimos que T es una **transformación lineal**, si $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$ y $\forall a \in K$:

$$T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$$

$$T(a\vec{u}) = aT(\vec{u})$$

Proposición.

$T: V \to W$ es t. lineal $\iff \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$ y $\forall a \in K$:

$$T(a\vec{u}+\vec{v}) = aT(\vec{u}) + T(\vec{v}).$$

Dem:

EJERCICIO.

$\square$

Proposición.

Sea $T: V \to W$ una t. lineal. Ent,

i) $T(\vec{0}_A) = \vec{0}_B$.

ii) $T(-\vec{u}) = -T(\vec{u}), \forall \vec{u} \in V$.

iii) Si M es subespacio de V, ent. $T(M)$ es subespacio de W.

iv) Se define el $\text{Ker}(T) := \{\vec{u} \in V \mid T(\vec{u}) = 0\}$. Ent. $\text{Ker}(T)$ es subespacio de V.

v) Si M' es subespacio de W, $T^{-1}(M')$ es subespacio de V y $\text{Ker}(T) \subseteq T^{-1}(M')$.

DEM:

EJERCICIO.

$\square$

Def. Sea $T : V \to W$ una t. lineal.

i) T es **no singular** si T es inyectiva.

ii) T es **isomorfismo** si T es no singular y suprayectiva.

Def. Dos esp. vect. V y W sobre K son **isomorfos** si $\exists\, T : V \to W$ isomorfismo, a lo que se escribe $V \cong W$.

Proposición.

Sean $T : V \to W$ y $U : W \to Z$ dos t. lineales. Entonces, si T y U son no singulares (resp. suprayectivas o isomorfismos), entonces $U \circ T$ también lo es.

Dem:

EJERCICIO.

$\square$

Proposición.

Sea $T : V \to W$ una t. lineal no singular, ent. $T^{-1} : T(V) \to V$ es una t. lineal la cual es isomorfismo.

Dem:

EJERCICIO.

$\square$

Def. Sea $T: V \to W$ t. lineal no singular, entonces se dice que V está **encajado** o **inmerso en W bajo T**.

Proposición.

Sea $T: V \to W$ t. lineal. T es isomorfismo $\Leftrightarrow \exists\, U: W \to V$ t. lineal tal que:

$$T \circ U = I_W \quad \text{y} \quad U \circ T = I_V$$

Dem:

EJERCICIO.

$\square$

Sea V un esp. vect. sobre K y W un sub. vect. de V. Se define la sig. rel. de equiv. sobre V:

$$\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V,\ \vec{u} \equiv \vec{v} \bmod W \Leftrightarrow \vec{u} - \vec{v} \in W$$

Para cada $\vec{u} \in V$, el trasladado $W + \vec{u}$ es la clase de equivalencia con representante $\vec{u}$ bajo la congruencia módulo W.

Al conjunto cociente se le denota por V/W, el cual es grupo abeliano con la operación:

$$(W+\vec{u}) + (W+\vec{v}) := W + (\vec{u}+\vec{v}),\ \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V.$$

Definimos el producto por escalar: $K \times V/W \to V/W$, $(a, W+\vec{u}) \mapsto W + a\vec{u}$, el cual hace de V/W un esp. vect. sobre K.

V/W es llamado el **espacio vectorial cociente de V por W**. La función $\varphi: V \to V/W$, $\vec{u} \mapsto W + \vec{u}$ es llamada la **t. lineal canónica**, la cual es suprayectiva.

Teorema (PTI).

Sea $T: V \to W$ una t. lineal. Entonces, T induce una única t. lineal $\bar{T}: V/\mathrm{Ker}(T) \to W$ m es no singular, y $\bar{T} \circ \varphi = T$ donde $\varphi: V \to V/\mathrm{Ker}(T)$. Además, $\mathrm{im}(T) = \mathrm{im}(\bar{T})$.

Corolario.

Sea $T: V \to W$ t. lineal suprayectiva, entonces T induce un único isomorfismo $\bar{T}: V/_{Ker(T)} \to W$ $\ni$ $\bar{T} \circ \varphi = T$, donde $\varphi: V \to V/_{KerT}$, $\vec{u} \mapsto Ker(T)+\vec{u}$.

Def. Si V es un esp. vect. sobre K y, W & U son subespacios vect. de V, se define

$$W+U=\{\vec{w}+\vec{u} \mid \vec{w}\in W \text{ y } \vec{u}\in U\}$$

el cual es un subespacio de V, llamado **suma de W y U**.

Teorema (STI).

Sean V un esp. vect. sobre K y W, U dos subespacios de V. Entonces,

$$W+U/_U \cong W/_{W\cap U}$$

Teorema (TTI)

Sea V un esp. vect. y U, W subespacios vect. de V $\ni$ $U \leq W$, ent.

$$V/_W \cong \frac{V/_U}{W/_U}$$

Teorema (de correspondencia).

Sea $T: V \to W$ una t.lineal suprayectiva, y sean $\bar{\mathcal{E}}=\{\bar{L} \mid \bar{L} \text{ es subespacio de } W\}$ & $\mathcal{E}=\{L \mid L \text{ es subespacio de } V \text{ y } Ker\,T \leq L\}$. Entonces $\exists\ \phi: \mathcal{E} \to \bar{\mathcal{E}}$ biyectiva $\ni$

$$L \mapsto T(L)$$

Cuya inversa es $\phi^{-1}: \bar{\mathcal{E}} \to \mathcal{E}$, $\bar{L} \mapsto T^{-1}(\bar{L})$.

Teorema.

Sea $T: V \to W$ una t.lineal, ent.

$$\dim(V) = \dim(Ker(T)) + \dim(im(T))$$

Corolario.

Si W es un subespacio de V entonces

$$\dim(V) = \dim(W) + \dim\left(V/W\right)$$

Notas:

¡¡ Para más info, ver módulos.