Notas de Álgebra Moderna IV.
Una introducción a la teoría de categorías.

Cristo Daniel Alvarado

17 de abril de 2024

Índice general

Capítulo 3

Funtores

3.1. Conceptos Fundamentales

Definición 3.1.1
Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías. Un **funtor covariante** (respectivamente, **funtor contravariante**), denotado por $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, consta de

1. Un mapeo $F : \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C}) \to \mathcal{D}$ tal que $A \mapsto F(A)$.
2. Para cualesquier dos pares de objetos $A, B \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$, un mapeo $F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,(F(A), F(B))$ (resp. $F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,(F(B), F(A))$) tal que $f \mapsto F(f)$, que cumple las condiciones siguientes:
   - I) Para cada $A \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$, $F(1_A) = 1_{F(A)}$.
   - II) Para cada $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A, B)$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(B, C)$, se tiene que

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

(resp. $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$).

Definición 3.1.2
la **imagen de un funtor F entre las categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$**, consta de una clase $\left\{F(C) \middle| C \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})\right\}$ junto con todos los conjuntos $\left\{F(f) \middle| f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A, B) \text{ con } A, B \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})\right\}$.

Observación 3.1.1
La imagen de un funtor no necesariamente es una categoría.

Demostración:
En efecto, sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías. Para cualesquiera $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ y $D_1, D_2, D_3 \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{D})$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(C_1, C_2)$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(C_3, C_4)$, $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,(D_1, D_2)$ y $k \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,(D_2, D_3)$. Se tiene lo siguiente:

$$C_1 \longrightarrow C_2 \text{ y } C_3 \longrightarrow C_4$$
$$D_1 \longrightarrow D_2 \longrightarrow D_3$$

la imagen de $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ noes una categoría, pues si hacemos que

$$F(C_1) = D_1, F(C_2) = F(C_3) = D_2 \text{ y } F(C_4) = D_4$$

haciendo

$$F(f) = h, F(g) = k$$

además,

$$F(1_{C_1}) = 1_{D_1} \quad F(1_{C_2}) = F(1_{C_3}) = 1_{D_2} \quad F(1_{C_4}) = 1_{D_3}$$

pues, h y k paretenecen a la imagen de F, pero su composición no lo está. ■

Observación 3.1.2
Si F es inyectiva, entonces la imagen de F será una categoría.

Proposición 3.1.1
Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor covariante (resp. contravariante), entonces $F' : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor contravariante (resp. covariante).

Demostración:

■