Notas del curso Topología I

Cristo Daniel Alvarado

14 de febrero de 2024

Índice general

Capítulo 0

Introduccion

0.1. Temario

0.2. Bibliografía

1. J. R. Munkres 'Topología' - Prentices Hall.

2. M. Gemignsni 'Elementary Topology' - Dover.

3. J. Dugundji 'Topology' - Allyn Bacon.

Capítulo 1

Conceptos Fundamentales

1.1. Fundamentos

Definición 1.1.1
Sea X un conjunto y $\mathcal{A}$ una familia no vacía de subconjuntos de X. Definamos los **complementos de $\mathcal{A}$**

$$\mathcal{A}' := \left\{X - A \middle| A \in \mathcal{A}\right\}$$

(básicamente es el conjunto de todos los complementos de los conjuntos en $\mathcal{A}$). Para no perder ambiguedad, no denotaremos al complemento de un conjunto por B^c, sino por $X - B$ (para denotar quien es el conjunto sobre el que se toma el complemento del conjunto).

La **unión de los elementos** de $\mathcal{A}$ se define com oel conjunto:

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \left\{x \in X \middle| x \in A \text{ para algún elemento } A \in \mathcal{A}\right\}$$

denotada por el símbolo de la izquierda.

La **intersección de los elementos** de $\mathcal{A}$ se define como el conjunto:

$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \left\{x \in X \middle| x \in A \text{ para todo elemento } A \in \mathcal{A}\right\}$$

Observación 1.1.1
En caso de que la colección $\mathcal{A}$ sea vacía, no se puede hacer lo que marca la definición anterior. Como $\mathcal{A}$ es vacía, entonces $\mathcal{A}'$ también es vacía.

1. Suponga que $\cup\mathcal{A} \neq \emptyset$, entonces existe $x \in X$ tal que $x \in \cup\mathcal{A}$, luego existe algún elemento $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A$, pero esto no puede suceder, pues la familia $\mathcal{A}$ es vacía. $\#_c$. Por tanto, $\cup\mathcal{A} = \emptyset$.

2. Ahora, si aplicamos las leyes de Morgan, y tomamos

$$X - \cap\mathcal{A} = X - \cap\emptyset = \cup\emptyset' = \cup\emptyset = \emptyset$$

luego, $\cap\mathcal{A} = X$.

En definitiva, si $\mathcal{A}$ es una colección vacía, entonces definimos $\cup\mathcal{A} = \emptyset$ y $\cap\mathcal{A} = X$.

La observación junto con la definición anterior se usarán a lo largo de todo el curos y serán de utilidad.

Definición 1.1.2
Sea X un conjunto y sea τ una familia de subconjuntos de X. Se dice que τ es una **una topología definida sobre** X si se cumple lo siguiente:

1. $\emptyset, X \in \tau$.
2. Si $\mathcal{A}$ es una subcolección de τ, entonces $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$.
3. Si $A, B \in \tau$, entonces $A \cap B \in \tau$.

Observación 1.1.2
En algunos libros viejos viene la siguiente condición adicional a la definición:

4. Si $p, q \in X$ con $p \neq q$, entonces existen $U, V \in \tau$ tales que $p \in U$, $q \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

en este caso se dirá que el espacio es **Hausdorff**.

Observación 1.1.3
Se tienen las siguientes observaciones:

1. Sea X un conjunto y $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de X. Si
$$\mathcal{A} = \left\{A_\alpha \middle| \alpha \in I\right\}$$
entonces podemos escribir
$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{A_\alpha \in \mathcal{A}} A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$
e igual con la intersección:
$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{A_\alpha \in \mathcal{A}} A = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$$
Si $\mathcal{A}$ es una familia vacía, y se toma como definición lo dicho en la observación 1.0.1, entonces podemos omitir el primer inciso de la definición anterior.
2. Si τ es una topología sobre X y para $n \in \mathbb{N}$, $A_1, ..., A_n \in \tau$, entonces $A_1 \cap ... \cap A_n \in \tau$.

Ejemplo 1.1.1
Sea X un conjunto no vacío.

1. El conjunto potencia (denotado por $\mathcal{P}$) de X es una topología sobre X, la cual se llama la **topología discreta**, y se denota por τ_D.
2. La colección formada únicamente por X y $\emptyset$ es una topolgía sobre X, es decir $\tau = \{\emptyset, X\}$ es llamada la **topología indiscreta**, y se escribe como τ_I.
3. En el caso de que $X = \{1\}$, se tendría que $\tau_D = \{\emptyset, \{1\}\}$ y $\tau_I = \{\emptyset, \{1\}\}$.
Si $X = \{1, \zeta\}$, entonces $\tau_D = \{\emptyset, \{1\}, \{\zeta\}, \{1, \zeta\}\}$ y $\tau_I = \{\emptyset, \{1, \zeta\}\}$.
4. Si τ es una topología sobre X, entonces
$$\tau_I \subseteq \tau \subseteq \tau_D$$
5. Sea $a \in X$. Entonces $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \}$ es una topología sobre X.

6. Sea $A \subseteq X$ y sea $\tau(A) = \left\{B \subseteq X \middle| A \subseteq B\right\} \bigcup \{\emptyset\}$. Esta familia $\tau(A)$ es una topología sobre X.

Observación 1.1.4
Sea X un conjunto no vacío. Si $A = \{a\} \subseteq X$, entonces escribimos τ_a en vez de $\tau(A)$.

Ejemplo 1.1.1
Se continuan con los ejemplos anteriores:

7. Sea $\tau_{cf} = \left\{A \subseteq X \middle| X - A \text{ es un conjunto finito}\right\} \bigcup \{\emptyset\}$. Esta es una topología sobre X y se llama la **topología de los complementos finitos**.

8. Si X es un conjunto finito, entonces $\tau_{cf} = \tau_D = \mathcal{P}$.

9. Considere τ_{cf} y sean $a, b \in X$ con $a \neq b$. Si $U_a = X - \{b\}$, $U_b = X - \{a\}$, entonces $U_a, U_b \in \tau_{cf}$ y además, $a \in U_a$ pero $b \notin U_a$ y $a \notin U_b$ pero $b \in U_b$. Esta propiedad es muy importante tenerla en mente pues más adelante se usará.

Proposición 1.1.1
Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $a \in X$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, al conjunto $B_d(x, \varepsilon) = \left\{y \in X \middle| d(x, y) < \varepsilon\right\}$ se llama **ε-bola con centro en x y radio ε**.

Sea

$$\tau_d = \left\{A \subseteq X \middle| \forall a \in A \exists r > 0 \text{ tal que } B_d(a, r) \subseteq A\right\}$$

Esta colección es una topología sobre X.

Demostración:
Entorno de Prueba ■

Solución:
Entorno de Solución □

Teorema 1.1.1 (Nombre)
Teorema

Proposición 1.1.2 (Nombre)
Proposición

Corolario 1.1.1 (Nombre)
Corolario

Lema 1.1.1 (Nombre)
Lema

Definición 1.1.3 (Nombre)
Definición

Observación 1.1.5 (Nombre)
Observación

Ejemplo 1.1.2 (Nombre)
Ejemplo

Ejercicio 1.1.1 (Nombre)
Ejercicio