Alvarado Cristo Daniel

1) Queremos determinar $P(|\bar{X}-1|>2)$, para ello, veamos que:

$$|\bar{X}-1|>2 \iff \bar{X}-1>2 \text{ ó } 1-\bar{X}>2$$
$$\iff \bar{X}>3 \text{ ó } -1>\bar{X}$$

por tanto, $P(|\bar{X}-1|>2)=P(\bar{X}>3 \text{ ó } -1>\bar{X})=P(3<\bar{X})+P(\bar{X}<-1)$. Como $\bar{X}$ es una variable aleatoria continua, $P(\bar{X}<-1)=P(\bar{X}\leq -1)=F(-1)$, así

$$P(|\bar{X}-1|>2)=1-P(\bar{X}\leq 3)+F(-1)$$
$$=1-F(3)+F(-1)$$

$$\therefore P(|\bar{X}-1|>2)=1-F(3)+F(-1)_{//}$$

2) Como f es función de densidad de una variable aleatoria discreta, se cumple que:

$$\sum_{n=1}^{4} f_D(n)=1$$
$$\Rightarrow C\cdot\frac{2^1}{1!}+C\cdot\frac{2^2}{2!}+C\cdot\frac{2^3}{3!}+C\cdot\frac{2^4}{4!}=1$$
$$\Rightarrow C\cdot\left(2+2+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\right)=1$$
$$\Rightarrow C\cdot(6)=1 \Rightarrow C=\frac{1}{6}$$

$$\therefore C=\frac{1}{6}{}_{//}$$

3) Para encontrar la utilidad U_K, debemos ver las ganancias netas que deja la venta en todo el día. De la demanda D que hay, por cada artículo producido gana \$5. Pero, de los que no se venden, pierde \$3, el número de éstos es $K-D$ (total producidos menos total vendidos). Así:

$$U_K=g(D)=5D-3(K-D)$$
$$=8D-3K$$

$$\therefore U_K=8D-3K_{//}$$

4) Queremos que $U_K>16-3K$, i.e $8D-3K>16-3K \Rightarrow D>2$, así $D\geq 3$. Por tanto, $P(U_K>16-3K)=P(D\geq 3)=P(D=3)+P(D=4)=\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$

$$\therefore P(U_K>16-3K)=\frac{1}{3}{}_{//}$$

Alvarado Cristo Daniel

5) Veamos la función de distribución:

a) Si $s \leqslant 0$, entonces

$$F(s) = \int_{-\infty}^{s} f_{X}(u)\,du$$

$$= \int_{-\infty}^{s} \frac{1}{2} e^{-|u|} du = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{s} e^{u} du$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{u}\Big|_{-\infty}^{s} \right) = \frac{1}{2} e^{s} \leqslant \frac{1}{2},\ \forall s \in \left]-\infty, 0\right].$$

b) Si $s > 0$:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{s} \frac{1}{2} e^{-|u|} du = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2} e^{u} du + \int_{0}^{s} \frac{1}{2} e^{-u} du$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{u}\Big|_{-\infty}^{0} \right) + \frac{1}{2}\left(-e^{-u}\Big|_{0}^{s} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{0} - 0 \right) + \frac{1}{2}\left(-e^{-s} + e^{0} \right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-s} = 1 - \frac{1}{2} e^{-s} < 1$$

Por a) y b),

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{x} & \text{si } x \leqslant 0. \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Como queremos que $F(s) = 0.4$, entonces $s \leqslant 0$, luego $0.4 = \frac{1}{2} e^{s} \Rightarrow 0.8 = e^{s}$ $\Rightarrow s = \ln(0.8) \approx -0.22$.

$$\therefore s \approx -0.22_{//}$$

5) Veamos cuáles son funciones de densidad:

a) Sea $f_1(x) = f(a-x)$. Veamos que f es función de densidad:

i) Claramente $f_1(x) \geqslant 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, pues $f(x-a) \geqslant 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

ii) Veamos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)\,dx \text{ ; si } u = x-a,\ du = dx \text{ y:}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,du = 1.$$

Por (i) y (ii), $f(x-a)$ es función de densidad.

b) Sea $f_2(x) = f\left(\frac{x}{a}\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Veamos que

i) $f_2(x) = f\left(\frac{x}{a}\right) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

ii) Veamos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x}{a}\right)dx \text{; Si } u = \frac{x}{a} \Rightarrow du = \frac{dx}{a}, \text{ luego}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} a f(u)du = a \cdot 1 = a$$

Por tanto $\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)dx$ no siempre es 1, luego, no es función de densidad.

c) Sea $f_3(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}$. Entonces

i) $f_3(x) = f(-x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

ii) Veamos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_3(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(-x)dx \text{. Sea } u = -x \text{, entonces } du = -dx \text{, así:}$$
$$= -\int_{\infty}^{-\infty} f(u)du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)du = 1$$

Por (i) y (ii), $f(-x)$ es función de densidad.

d) Sea $f_4(x) = f(x/a)/a, \forall x \in \mathbb{R}$. Veamos que:

i) $f_4(x) = \frac{f(x/a)}{a} \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, pues $f(x/a) \geq 0$ y $a > 0$.

ii) La integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_4(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right)dx \text{. Sea } u = \frac{x}{a} \Rightarrow du = \frac{dx}{a}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{a} f(u)du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)du = 1.$$

Por (i) y (ii), $f(x/a)/a$ es función de densidad.

e) Sea $f_5(x) = f(ax), \forall x \in \mathbb{R}$. Entonces:

i) $f_5(x) = f(ax) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

ii) Veamos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_5(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(ax)dx \text{, con } u = ax \Rightarrow du = adx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a} \cdot f(u)du = \frac{1}{a} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(u)du = \frac{1}{a}$$

Como $\frac{1}{a}$ no siempre es 1, entonces $f(ax)$ no es función de densidad.

f) Sea $f_6(x) = f(ax)/a, \forall x \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_6(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a} f(ax)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2} f(u)\,du = \frac{1}{a^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(u)du = \frac{1}{a^2}$$

portanto, $f(ax)/a$ no siempre es función de densidad.