Notas de Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

6 de junio de 2024

Índice general

Capítulo 1

Transformación de Fourier

La transformada de Fourier de una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{C}$ generaliza en cierta forma la noción de coeficientes de Fourier de funciones periódicas

1.1. Conceptos Fundamentales

Definición 1.1.1
Se define el **producto escalar usual en** $\mathbb{R}^n$ como

$$\langle x|y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_x, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

en ocasiones también denotado como $(x|y) = \langle x|y\rangle$.

Definición 1.1.2
Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Se definen $\mathcal{F}f, \mathcal{F}^* f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ como

$$\mathcal{F}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y)\, dy \quad \text{y} \quad \mathcal{F}^* f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x|y\rangle} f(y)\, dy$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Las funciones $\mathcal{F}f$ y $\mathcal{F}^* f$ se llaman las **transformaciones de Fourier de** f. Las aplicaciones $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^*$ de $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ en el conjunto de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{C}$ se llaman las **transformaciones de Fourier**.

Observación 1.1.1
Se tiene lo siguiente:

I. Los operadores $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^*$ son lineales de $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ en el espacio de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{C}$.

II. Las funciones $\mathcal{F}f(x)$ y $\mathcal{F}^* f(x)$ están definidas para todo $x \in \mathbb{R}^n$ si y sólo si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

III. En caso de existir, se tiene que $\mathcal{F}f(x) = \mathcal{F}^* f(-x)$.

Demostración:

De (i): Es claro que si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ entonces $\mathcal{F}f(x)$ y $\mathcal{F}^* f(x)$ están definidas para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Para la recíproca, en particular están definidas para $x = \vec{0}$, es decir que

$$\mathcal{F}f\left(\vec{0}\right) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \vec{0}|y\rangle} f(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} e^{0} f(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, dy < \infty$$

luego $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

De (ii): Es inmediata. ■

Definición 1.1.3
Sea $f \in \mathcal{L}_1([0, \infty[, \mathbb{C})$. Se definen

$$\mathcal{F}_c f(x) = \int_0^\infty f(y) \cos xy \, dy \quad \text{y} \quad \mathcal{F}_s f(x) = \int_0^\infty f(y) \sin xy \, dy$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Las funciones $\mathcal{F}_c f$ y $\mathcal{F}_s f$ se llaman **las trasnformadas coseno y seno de Fourier de** f.

Definición 1.1.4
Sea $f : [0, \infty[\to \mathbb{C}$ una función. Se definen las funciones f^P y f^I de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ como

$$f^P(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ f(-x) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

y,

$$f^I(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -f(-x) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Proposición 1.1.1
Sea $f \in \mathcal{L}_1([0, \infty[, \mathbb{C})$. Se tiene

$$\mathcal{F} f^P(x) = 2\mathcal{F}_c f(x) \quad \text{y} \quad \mathcal{F} f^I(x) = -2i\mathcal{F}_2 f(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostración:

Sea $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} f^P(x) &= \int_{\mathbb{R}} f^P(y) e^{-i\langle x|y\rangle} \, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f^P(y) e^{-ixy} \, dy \\
&= \int_{-\infty}^{0} f^P(y) e^{-ixy} \, dy + \int_0^\infty f^P(y) e^{-ixy} \, dy \\
&= \int_{-\infty}^{0} f(-y) e^{-ixy} \, dy + \int_0^\infty f(y) e^{-ixy} \, dy \\
&= \int_0^\infty f(y) e^{ixy} \, dy + \int_0^\infty f(y) e^{-ixy} \, dy \\
&= \int_0^\infty f(y) \left[e^{ixy} + \overline{e^{ixy}} \right] \, dy \\
&= \int_0^\infty f(y) \left[2\Re(e^{ixy}) \right] \, dy \\
&= \int_0^\infty 2f(y) \cos xy \, dy \\
&= 2 \int_0^\infty f(y) \cos xy \, dy \\
&= 2\mathcal{F}_c f(x)
\end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f^I(x) &= \int_{\mathbb{R}} f^I(y)e^{-ixy}\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{0} f^I(y)e^{-ixy}\,dy + \int_{0}^{\infty} f^I(y)e^{-ixy}\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{0} (-f(-y))e^{-ixy}\,dy + \int_{0}^{\infty} f(y)e^{-ixy}\,dy \\
&= -\int_{0}^{\infty} f(y)e^{ixy}\,dy + \int_{0}^{\infty} f(y)e^{-ixy}\,dy \\
&= \int_{0}^{\infty} f(y)\left[-e^{ixy} + e^{-ixy}\right]\,dy \\
&= \int_{0}^{\infty} f(y)\left[-\cos xy - i\sin xy + \cos(-xy) + i\sin(-xy)\right]\,dy \\
&= \int_{0}^{\infty} f(y)\left[-2i\sin xy\right]\,dy \\
&= -2i\int_{0}^{\infty} f(y)\sin xy\,dy \\
&= -2i\mathcal{F}_s f(x)
\end{aligned}$$

lo que prueba el resultado. ■

Corolario 1.1.1
Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

I. Si f es par, entonces $\mathcal{F}f(x) = 2\int_0^\infty f(y)\cos xy\,dy$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

II. Si f es impar, entonces $\mathcal{F}f(x) = -2i\int_0^\infty f(y)\sin xy\,dy$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.1.1
Se tiene lo siguiente:

I. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $f = \chi_I$ donde I es un intervalo con extremos $a < b$ en $\mathbb{R}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_I(y)e^{-ixy}\,dy \\
&= \int_{a}^{b} e^{-ixy}\,dy \\
&= \begin{cases} \frac{e^{-ixb}-e^{-ixa}}{-ix} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ b-a & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

En particular, si $a > 0$ se tiene que

$$\mathcal{F}\chi_[-a,a](x) = \begin{cases} \frac{2\sin ax}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 2a & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Como $\mathcal{F}\chi_[-a,a]$ no es integrable en $\mathbb{R}$ se concluye que, en general, la transformada de Fourier de una función integrable no necesariamente es integrable.

II. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función

$$f(x) = e^{-k|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

donde $k > 0$. Como f es integrable, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k|y|} e^{-ixy}\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{ky} e^{-ixy}\, dy + \int_{0}^{\infty} e^{-ky} e^{-ixy}\, dy \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-ky} e^{ixy}\, dy + \int_{0}^{\infty} e^{-ky} e^{-ixy}\, dy \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-ky} e^{(-k+ix)y}\, dy + \int_{0}^{\infty} e^{-ky} e^{(-k-ix)y}\, dy \\
&= \frac{-1}{-k+ix} + \frac{-1}{-k-ix} \\
&= \frac{k+ix+k-ix}{k^2+x^2} \\
&= \frac{2k}{k^2+x^2}
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.1.2
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función

$$f(x) = e^{-kx^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

donde $k > 0$. Como f es par se tiene que

$$\mathcal{F}f(x) = 2\int_{0}^{\infty} e^{-ky^2} \cos xy\, dy$$

Sea $g(x) = \int_0^\infty e^{-ky^2} \cos xy\, dy$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se afirma que

$$g'(x) = -\int_{0}^{\infty} ye^{-ky^2} \sin xy\, dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En efecto, observemos que

$$\left| ye^{-ky^2} \sin xy \right| \leqslant ye^{-ky^2}, \quad \forall y \geqslant 0$$

donde la función de la derecha es integrable e independiente de x (se nota fácilmente que una de sus antiderivadas es $y \mapsto -\frac{1}{2k}e^{-ky^2}$, por el T.F.C. II evaluando en 0 e ∞ se obtiene que la función original es integrable en $[0, \infty[$). Por el Teorema de derivación se sigue que

$$g'(x) = -\int_{0}^{\infty} ye^{-ky^2} \sin xy\, dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Veamos ahora que

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \int_0^\infty y e^{-ky^2} \sin xy \, dy \\
&= -\left[-\frac{1}{2k} e^{-ky^2} \sin xy \Big|_0^\infty + \frac{1}{2k} \int_0^\infty x e^{-ky^2} \cos xy \, dy \right] \\
&= -\left[0 - 0 + \frac{x}{2k} \int_0^\infty e^{-ky^2} \cos xy \, dy \right] \\
&= -\frac{x}{2k} \int_0^\infty e^{-ky^2} \cos xy \, dy \\
&= -\frac{x}{2k} g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
g'(x) + \frac{x}{2k} g(x) = 0, &\quad \forall x \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow e^{\frac{x^2}{4k}} \left(g'(x) + \frac{x}{2k} g(x) \right) = 0, &\quad \forall x \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow \frac{d}{dx} \left(e^{\frac{x^2}{4k}} g(x) \right)(x_0) = 0, &\quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow e^{\frac{x^2}{4k}} g(x) = c, &\quad \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

En particular,

$$\begin{aligned}
c &= g(0) \\
&= \int_0^\infty e^{-ky^2} \, dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{k}} \int_0^\infty e^{-u^2} \, du \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{k}}
\end{aligned}$$

Por ende,

$$g(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{k}} e^{-\frac{x^2}{4k}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

De donde se sigue que

$$\mathcal{F} f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{k}} e^{-\frac{x^2}{4k}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En particular, si $k = \frac{1}{2}$ entonces $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y,

$$\mathcal{F} f(x) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{2\pi} f(x)$$

es decir que f es un vector propio del operador transformada de Fourier.

Proposición 1.1.2
Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

I. Si $g(x) = e^{i\langle a|y\rangle} f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\mathcal{F} g(x) = \mathcal{F} f(x - a), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

II. Si $g(x) = f(x-a)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\mathcal{F}g(x) = e^{-i\langle x|a\rangle}\mathcal{F}f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

III. Si $g(x) = \overline{f(-x)}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\mathcal{F}g(x) = \overline{\mathcal{F}f(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

IV. Sea $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Si $g(x) = f(\frac{x}{\lambda})$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\mathcal{F}g(x) = |\lambda|^n \, \mathcal{F}f(\lambda x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Demostración:
De (i): Veamos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} g(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} e^{i\langle a|y\rangle} f(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x-a|y\rangle} f(y)\, dy \\
&= \mathcal{F}f(x-a)
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
De (ii): Veamos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} g(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y-a)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|u+a\rangle} f(u)\, du \\
&= e^{-i\langle x|a\rangle}\mathcal{F}f(x)
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
De (iii): Veamos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} \overline{f(-y)}\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x|y\rangle} \overline{f(y)}\, dy \\
&= \overline{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y)\, dy} \\
&= \overline{\mathcal{F}f(x)}
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

De (iv): Veamos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} g(y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f\left(\frac{y}{\lambda}\right)\,dy, \text{ haciendo el cambio de variable } u = \frac{y}{\lambda} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|\lambda u\rangle} f(u)\ |\lambda|^n\,du \\
&= |\lambda|^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \lambda x|u\rangle} f(u)\,du \\
&= |\lambda|^n\,\mathcal{F}f(\lambda x)
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. ■

Teorema 1.1.1
Si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, entonces,

$$|\mathcal{F}f(x)| \leqslant \mathcal{N}_1\left(f\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Así pues, $\mathcal{F}f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ es una función acotada. Si $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ denota al espacio de funciones acotadas de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{C}$ provisto de la norma uniforme, entonces $\mathcal{F}\cdot$ es una aplicación lineal continua de $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ tal que $\|\mathcal{F}\cdot\| = 1$.

Demostración:
Para todo $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, se tiene que

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}f(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y)\,dy\right| \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\ dy \\
&= \mathcal{N}_1\left(f\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

Notemos también que $\|\mathcal{F}\cdot\| \leqslant 1$.

Para probar la otra desiguladad se busca una función $P \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ tal que $\mathcal{N}_\infty\left(\mathcal{F}P\right) = \mathcal{N}_1\left(P\right) > 0$. Por ejemplo, la función $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ dada por:

$$P(x) = e^{-\sum_{k=1}^n |x_k|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

satisface

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}P(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} P(y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} P(y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y_1|-ix_1y_1} \cdots e^{-|y_n|-ix_ny_n}\,dy_1\cdots dy_n \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y_1|-ix_1y_1}\,dy_1\right)\cdots\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y_n|-ix_ny_n}\,dy_n\right)
\end{aligned}$$

Se sabe por ejemplos anteriores que la transformada de $t \mapsto e^{-|t|}$ es $\frac{2}{1+t^2}$, para todo $t \in \mathbb{R}$, así pues,

$$\mathcal{F}P(x) = \frac{2^n}{(1+x_2^2)\cdots(1+x_n^2)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

de donde,

$$\mathcal{N}_\infty\left(\mathcal{F}P\right) = 2^n$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_1\left(P\right) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{k=1}^{n}|x_k|}\, dx_1 \cdots dx_n \\
&= \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}\, dt\right]^n \\
&= 2^n \left[\int_{0}^{\infty} e^{-|t|}\, dt\right] \\
&= 2^n
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_1\left(P\right) &= \mathcal{N}_\infty\left(\mathcal{F}P\right) \\
&\leqslant \|\mathcal{F}\cdot\|\mathcal{N}_1\left(P\right) \\
\Rightarrow 1 &\leqslant \|\mathcal{F}\cdot\|
\end{aligned}$$

por tanto, de lo anterior se deduce que $\|\mathcal{F}\cdot\| = 1$. ■

Proposición 1.1.3
Si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, entonces $\mathcal{F}f$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$.

Demostración:
Basta probar que si $\{x_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ y $\{y_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ son dos sucesiones en $\mathbb{R}^n$ tales que $\lim_{\nu\to\infty}\|x_\nu - y_\nu\| = 0$, entonces

$$\lim_{\nu\to\infty} |\mathcal{F}f(x_\nu) - \mathcal{F}f(y_\nu)| = 0$$

Considere entonces dos sucesiones que cumplan lo anterior. Se tiene

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}f(x_\nu) - \mathcal{F}f(y_\nu)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \left(e^{-i\langle x_\nu|z\rangle} - e^{-i\langle y_\nu|z\rangle}\right) f(z)\, dz\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x_\nu|z\rangle}\left(1 - e^{-i\langle y_\nu - x_\nu|z\rangle}\right) f(z)\, dz\right| \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left|\left(1 - e^{-i\langle y_\nu - x_\nu|z\rangle}\right)\right| |f(z)|\, dz
\end{aligned}$$

donde

$$\lim_{\nu\to\infty} \left|1 - e^{-i\langle y_\nu - x\nu|z\rangle}\right| |f(z)| = 0, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$$

y, además

$$\left|1 - e^{-i\langle y_\nu - x\nu|z\rangle}\right| |f(z)| \leqslant 2\,|f(z)|\,, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$$

donde la función de la derecha es integrable e independiente de ν. Por Lebesgue se sigue que

$$\lim_{\nu\to\infty} |\mathcal{F}f(x_\nu) - \mathcal{F}f(y_\nu)| = 0$$

así, $\mathcal{F}f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ es una función uniformemente continua. ■

Observación 1.1.2
$\mathcal{F}f$ es una función uniformemente continua y acotada en $\mathbb{R}^n$ si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

Teorema 1.1.2 (**Teorema de Riemman-Lebesgue**)
Si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, entonces
$$\lim_{|x|\to\infty} \mathcal{F}f(x) = 0$$

Demostración:
Se probará por casos:

I. Sea $P = I_1 \times \cdot \times I_n \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectángulo acotado en $\mathbb{R}^n$ donde I_k es un intervalo de extremos $a_k \leqslant b_k$ para todo $k \in [\![1, n]\!]$. Se considera el caso en que $f = \chi_P$. En particular, notemos que

$$f(x) = \chi_{I_1}(x_1)\cdots\chi_{I_n}(x_n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|z\rangle} f(z)\, dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix_1z_1}\chi_{I_1}(z_1)\cdots e^{-ix_nz_n}\chi_{I_n}(z_n)\, dz_1\cdots dz_n \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_1z_1}\chi_{I_1}(z_1)\, dz_1\right)\cdots\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_nz_n}\chi_{I_n}(z_n)\, dz_n\right)\end{aligned}$$

luego,
$$\mathcal{F}f(x) = \varphi_1(x_1)\cdots\varphi_n(x_n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

donde
$$\varphi_k(x_k) = \begin{cases} \frac{e^{-ix_kb_k} - e^{-ix_ka_k}}{-ik}, & \text{si} \quad x_k \neq 0 \\ b_k - a_k & \text{si} \quad x_k = 0 \end{cases}$$

para $k \in [\![1, n]\!]$. Es claro que $\lim_{x_k\to\infty}\varphi_k(x_k) = 0$ para todo $k \in [\![1, n]\!]$. Por otra parte,

$$\begin{aligned}|\varphi_k(x_k)| &\leqslant |\mathcal{F}\chi_{I_k}(x_k)| \\ &\leqslant \mathcal{N}_1(\chi_{I_k}) \\ &= b_k - a_k\end{aligned}$$

para $k \in [\![1, n]\!]$. Sea
$$c = \max_{1\leqslant k\leqslant n}\{b_k - a_k\}$$

Dado $\varepsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que para todo $k \in [\![1, n]\!]$ es tiene

$$|x_k| > R \Rightarrow |\varphi_k(x_k)| < \varepsilon$$

Si se toma la norma cúbica $\|\cdot\|$ de $\mathbb{R}^n$, al suponer que $\|x\| > R$ se tendrá que $|x_k| > R$ para algún $k \in [\![1, n]\!]$, luego

$$\|x\| > R \Rightarrow |\mathcal{F}\chi_P(x)| = |\varphi_1(x_1)\cdots\varphi_n(x_n)| \leqslant c^{n-1}\varepsilon$$

Así pues, el Teorema es cierto para $f = \chi_P$. Claramente por linealidad de la transformación de Fourier el Teorema sigue siendo cierto si f es una función escalonada en $\mathbb{R}^n$.

II. Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ y tomemos $\varepsilon > 0$. Por la densidad de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, existe $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ tal que
$$\mathcal{N}_1(f - \varphi) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}f(x)| &= |\mathcal{F}f(x) - \mathcal{F}\varphi(x)| + |\mathcal{F}\varphi(x)| \\ &= |\mathcal{F}(f-\varphi)(x)| + |\mathcal{F}\varphi(x)| \\ &\leqslant \mathcal{N}_1(f-\varphi) + |\mathcal{F}\varphi(x)|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + |\mathcal{F}\varphi(x)|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

Por tanto, de (i) existe $R > 0$ tal que

$$\|x\| > R \Rightarrow |\mathcal{F}\varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

de donde se sigue que

$$\|x\| > R \Rightarrow |\mathcal{F}f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + |\mathcal{F}\varphi(x)| < \varepsilon$$

lo que prueba el resultado.

■

Teorema 1.1.3
Si $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, entonces $\mathcal{F}(f * g) = (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g)$.

Demostración:
Sean $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f*g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f*g(y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle}\,dy \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(y-z)\,dz\end{aligned}$$

ya se sabe que $(y,z) \mapsto f(z)g(y-z)e^{-i\langle x|y\rangle}$ es integrable en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Por Fubini:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f*g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\,dz \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} g(y-z)\,dy, \text{ haciendo el cambio de variable } y = u+z \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\,dz \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|u+z\rangle} g(u)\,du \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|z\rangle} f(z)\,dz\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} g(y)\,dy\right) \\ &= (\mathcal{F}f(x))(\mathcal{F}g(x))\end{aligned}$$

lo que prueba el resultado. ■

Teorema 1.1.4
Sea $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ el álgebra de Banach de las funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{C}$ continuas y nulas en el infinito provisto de la norma uniforme. Entonces la aplicación $\mathcal{F}\cdot : L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ es un homomorfismo continuo entre ambas álgebras de Banach.

La norma de $\mathcal{F}\cdot$ considerada como aplicación lineal es $\|\mathcal{F}\cdot\| = 1$.

Demostración:
Es un resumen de las propiedades anteriores. ■

Observación 1.1.3
Más adelante se verá que $\mathcal{F}\cdot$ es inyectiva pero no es suprayectiva.

Proposición 1.1.4
Sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ y $r\in\mathbb{N}$. Se supone que $x\mapsto x_1^{m_1}\cdots x_m^{m_n}f(x)$ e sintegrable en R^n para toda colección $m_1,...,m_n\in\mathbb{N}$ tales que $m_1+\cdots+m_n\leqslant r$. Entonces, $\mathcal{F}f$ es de clase C^r en $\mathbb{R}^n$. Si $k\in[\![1,k]\!]$ y $\alpha_1,...,\alpha_k\in[\![1,n]\!]$ se tiene que

$$\partial_{\alpha_1}\cdots\partial_{\alpha_k}\mathcal{F}f=\mathcal{F}g$$

donde $g(x)=(-ix_{\alpha_1})(-ix_{\alpha_2})\cdots(-ix_{\alpha_k})f(x)$.

Demostración:
Se tiene

$$\mathcal{F}f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i(x_1y_1+\cdots+x_ny_n)}f(y)\,dy$$

Al aplicar el operador $\partial_{\alpha_1}\cdots\partial_{\alpha_k}$ a $x\mapsto e^{-i(x_1y_1+\cdots+x_ny_n)}f(y)$ obtenemos

$$(-iy_{\alpha_i})\cdots(-iy_{\alpha_k})f(y)$$

Esta función en valor absoulto es menor o igual a

$$|y_{\alpha_1}\cdots y_{\alpha_k}f(y)|$$

la cual por hipótesis es integrable en $\mathbb{R}^n$ e independiente de x. Por el Teorema de derivación parcial de funciones definidas por integrales, se tiene que

$$\partial_{\alpha_1}\cdots\partial_{\alpha_k}\mathcal{F}f=\mathcal{F}g$$

y, además $\mathcal{F}f$ es de clase C^r en $\mathbb{R}^n$. ■

Observación 1.1.4
Si $f\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ y existe $\lim_{x\to\infty}f(x)$, necesariamente

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$$

Proposición 1.1.5
Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ función de clase C^r en $\mathbb{R}^n$. Se supone que f y todas sus derivadas parciales hasta el orden r (inclusive) son integrables. Si $k\in[\![1,r]\!]$ y $\alpha_1,...,\alpha_k\in[\![1,n]\!]$, entonces

$$\mathcal{F}(\partial_{\alpha_1}\cdots\partial_{\alpha_k}f)(x)=(ix_{\alpha_1})\cdots(ix_{\alpha_k})\mathcal{F}f(x)$$

Demostración:
Basta probar que

$$\mathcal{F}(\partial_jf)(x)=(ix_j)\mathcal{F}f(x)$$

con $j\in[\![1,n]\!]$ pues el resto se sigue por inducción. Se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\partial_jf)(x)-(ix_j)\mathcal{F}f(x)&=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i\langle x|y\rangle}[\partial_jf(y)-ix_jf(y)]\,dy\\&=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial y_j}\left[e^{-i\langle x|y\rangle}f(y)\right]\,dy\end{aligned}$$

de donde, por el Teorema de Fubini

$$\mathcal{F}(\partial_j f)(x) - (ix_j)\mathcal{F}f(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy_1 \cdots dy_{j-1}dy_{j+1} \cdots dy_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y_j} \left[e^{-i\langle x|y\rangle} f(y)\right] \, dy_j$$

El Teorema de Fubini asegura que existe un conjunto despreciable $Z_1 \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ tal que para todo $y' = (y_1, ..., y_{j-1}, y_{j+1}, ..., y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash Z_1$ existe la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y_j} \left[e^{-i\langle x|y\rangle} f(y)\right] \, dy_j$$

o sea que $y_j \mapsto \frac{\partial}{\partial y_j} \left[e^{-i\langle x|y\rangle} f(y)\right]$ es integrable en $\mathbb{R}$. Por el 2° T.F.C. para intervalos abiertos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y_j} \left[e^{-i\langle x|y\rangle} f(y)\right] \, dy_j = \lim_{y_j \to \infty} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y) - \lim_{y_j \to -\infty} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y)$$

puesto que la función $y \mapsto e^{-i\langle x|y\rangle} f(y)$ es integrable en $\mathbb{R}^n$, por el Teorema de Fubini existe un conjunto $Z_2 \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ tal que para todo $y' = (y_1, ..., y_{j-1}, y_{j+1}, ..., y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash Z_2$, la función $y_j \mapsto e^{-i\langle x|y\rangle} f(y)$ es integable en $\mathbb{R}$. Sea $Z = Z_1 \cup Z_2 \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$. Por la última observación, los límites a la derecha de la ecuación anterior deben ser 0 para todo $y' = (y_1, ..., y_{j-1}, y_{j+1}, ..., y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash Z$. Por tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y_j} \left[e^{-i\langle x|y\rangle} f(y)\right] \, dy_j = 0$$

para todo $y' = (y_1, ..., y_{j-1}, y_{j+1}, ..., y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash Z$. Se sigue entonces que

$$\mathcal{F}(\partial_j f)(x) - (ix_j)\mathcal{F}f(x) = 0$$

lo que prueba el resultado. ■

1.2. Teoremas de Transferencia e Inversión

Teorema 1.2.1 (**Teorema de Transferencia**)
Sean $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \mathcal{F}g = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f \cdot g$$

y,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \mathcal{F}^* g = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^* f \cdot g$$

Demostración:
Como $\mathcal{F}f$ y $\mathcal{F}g$ son continuas acotadas en $\mathbb{R}^n$ y $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, ambas integrales existen (pues en particular $\mathcal{F}f, \mathcal{F}g \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$). Se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x) \cdot g(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \, dx \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y) \, dy$$

ya se sabe que $(x, y) \mapsto e^{-i\langle x|y\rangle} g(x) f(y)$ es integrable en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (pues en módulo es igual al módulo del producto tensorial de g y f, siendo éste integrable). Por Fubini podemos invertir el orden de integración, lo que resulta:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x)\cdot g(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,dy \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} g(x)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,dy \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle y|x\rangle} g(x)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\cdot \mathcal{F}g(y)\,dy \\ \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f\cdot \mathcal{F}g &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f\cdot g\end{aligned}$$

para la $\mathcal{F}^{*}\cdot$ el procedimiento es análogo. ∎

Lema 1.2.1 (**Efecto de la transformación de Fourier sobre sucesiones de Dirac**)
Sea $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ una sucesión de Dirac en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$. Defina

$$h_\nu = \mathcal{F}\rho_\nu, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$$

Entonces,

I. $|h_\nu(x)| \leqslant 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

II. $\lim_{\nu\to\infty} h_\nu(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demostración:
De (i): Se tiene

$$\begin{aligned}|h_\nu(x)| &= |\mathcal{F}\rho_\nu(x)| \\ &\leqslant \mathcal{N}_1(\rho_\nu) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\nu \\ &= 1\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

De (ii): Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$. Entonces $\{f * \rho_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ es una sucesión en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ que converge en promedio a f. Como la transformación de Fourier es un homomorfismo continuo del álgebra de Banach $L_1(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ en $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$, se debe tener que

$$\lim_{\nu\to\infty} \mathcal{F}(f * \rho_\nu) = \mathcal{F}f \text{ uniformemente en } \mathbb{R}^n$$

pero,

$$\mathcal{F}(f * \rho_\nu) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}\rho_\nu = h_\nu \mathcal{F}f$$

es decir,

$$\begin{aligned}\lim_{\nu\to\infty} h_\nu \mathcal{F}f &= \mathcal{F}f \text{ uniformemente en } \mathbb{R}^n \\ \Rightarrow \mathcal{F}f \lim_{\nu\to\infty} h_\nu &= \mathcal{F}f \text{ uniformemente en } \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

Fijando f de tal suerte que $\mathcal{F}f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se concluye que

$$\lim_{\nu\to\infty} h_\nu(x) = 1$$

(por ejemplo, tome $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$). ∎

Observación 1.2.1
Si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, entonces no necesariamente su transformada de Fourier es integrable. Por ejemplo

$$\mathcal{F}\chi_{[-1,1]} = \begin{cases} \frac{2\sin x}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 2 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

es continua, nula en el infinito pero no es integrable en $\mathbb{R}$.

Teorema 1.2.2 (**Teorema de Inversión de Fourier**)
Si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ es tal que $\mathcal{F}f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, entonces

$$\mathcal{F}^*(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^*f) = (2\pi)^n f \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n$$

Si además f es continua en $\mathbb{R}^n$, la fórmula es válida en todo punto de $\mathbb{R}^n$.

Demostración:
Se probará por casos:

1. Suponga por el momento hallada una sucesión de Dirac $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ que cumpla las condiciones:

   I) $\mathcal{F}\rho_\nu \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, luego también $\mathcal{F}^*\rho_\nu \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

   II) $\mathcal{F}^*\mathcal{F}\rho_\nu = \mathcal{F}(\mathcal{F}^*\rho_\nu) = (2\pi)^n\rho_\nu$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$.

   Sea $h_\nu = \mathcal{F}\rho_\nu$ para todo $\nu \in \mathbb{N}$. Por (ii), ρ_ν es una función acotada, luego $f * \rho_\nu$ existe en todo punto de $\mathbb{R}^n$. Se tiene

$$\begin{aligned} f * \rho_\nu(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\nu(y) f(x-y)\, dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^*h_\nu(y) f(x-y)\, dy \end{aligned}$$

   será necesario aplicar $\mathcal{F}^*\cdot$ a la función de y tal que $y \mapsto f(x-y)$. Sea $s(y) = f(-y)$, para todo $y \in \mathbb{R}^n$. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}s(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle u|y\rangle} s(u)\, du \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle u|y\rangle} f(u)\, du \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle u|-y\rangle} f(u)\, du \\ &= \mathcal{F}f(-y) \end{aligned}$$

   sea ahora $r(y) = f(x-y) = f(-(y-x)) = s(y-x)$. Por (ii) de las propiedades de la transformación de Fourier:

$$\mathcal{F}r(y) = e^{-i\langle x|y\rangle}\mathcal{F}s(y) = e^{-i\langle x|y\rangle}\mathcal{F}f(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

   Así pues,

$$\mathcal{F}^*r(y) = \mathcal{F}r(-y) = e^{-i\langle x|-y\rangle}\mathcal{F}f(y) = e^{i\langle x|y\rangle}\mathcal{F}f(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

Por el Teorema de transferencia (aplicado a $\mathcal{F}^*$) se sigue que:

$$\begin{aligned} f * \rho_\nu(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^* h_\nu(y) f(x-y)\,dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^* h_\nu(y) r(y)\,dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} h_\nu \mathcal{F}^* r(y)\,dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} h_\nu e^{i\langle x|y\rangle}\mathcal{F} f(y)\,dy \end{aligned}$$

Todo lo anterior es válido bajo la sola hipótesis de que $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Suponga también que $\mathcal{F} f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Entonces,

$$\lim_{\nu\to\infty} h_\nu(y) e^{i\langle x|y\rangle}\mathcal{F} f(y) = e^{i\langle x|y\rangle}\mathcal{F} f(y)$$

y

$$\left|h_\nu(y) e^{i\langle x|y\rangle}\mathcal{F} f(y)\right| \leqslant \mathcal{F} f(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

donde la función de la derecha es integrable e independiente de $\nu \in \mathbb{N}$. Por Lebesgue se sigue pues que

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} h_\nu(y) e^{i\langle x|y\rangle}\mathcal{F} f(y)\,dy = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x|y\rangle}\mathcal{F} f(y)\,dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Lo que realmente estamos diciendo es que

$$\lim_{\nu\to\infty} f * \rho_\nu(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x|y\rangle}\mathcal{F} f(y)\,dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

puntualmente en $\mathbb{R}^n$. Pero $\{f * \rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ converge en promedio a f, entonces debe tenerse que

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x|y\rangle}\mathcal{F} f(y)\,dy$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.

2. Queda por construir una sucesión de Dirac tal que cumpla (i) y (ii). La función $x \mapsto e^{-\sum_{k=1}^n x_k^2}$ es no negativa y

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{k=1}^n x_k^2}\,dx_1\cdots dx_n = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt\right)^n = \pi^{n/2}$$

defina

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi^{n/2}} e^{-\sum_{k=1}^n x_k^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Esta función satisface que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho = 1$$

Se sabe que la sucesión $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ dada por:

$$\rho_\nu(x) = \nu^n \rho(\nu x) = \frac{\nu^n}{\pi^{n/2}} e^{-\sum_{k=1}^n \nu^2 x_k^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

es una sucesión de Dirac en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Recuerde que si $a > 0$, la transformada de Fourier de $t \mapsto e^{-at^2}$ es

$$t \mapsto \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{t^2}{4a}}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\rho_\nu(x) &= \frac{\nu^n}{\pi^{n/2}} e^{-\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{4\nu^2}} \\ &= e^{-\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{4\nu^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

En particular, $\mathcal{F}\rho_\nu$ es integrable en $\mathbb{R}^n$. Además, por la parte (iv) de las propieaddes de la trasnformación de Fourier

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^*(\mathcal{F}\rho_\nu)(x) &= \mathcal{F}(\mathcal{F}^*\rho_\nu)(x) \\ &= \mathcal{F}(\mathcal{F}\rho_\nu)(-x) \\ &= \mathcal{F}(\mathcal{F}\rho_\nu)(x) \\ &= \mathcal{F}\left[e^{-\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{4\nu^2}}\right] \\ &= \left[\frac{\pi}{\frac{1}{4\nu^2}}\right]^{n/2} e^{-\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{4\left(\frac{1}{4\nu^2}\right)}} \\ &= (2\pi)^n \cdot \frac{\nu^n}{\pi^{n/2}} e^{-\sum_{k=1}^n \nu^2 x_k^2} \\ &= (2\pi)^n \rho_\nu(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

lo que demuestra la existencia de tal sucesión de Dirac.

■

Proposición 1.2.1
La transformación de Fourier $\mathcal{F}\cdot$ es un homomorfismo inyectivo del álgebra de Banach $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ en el álgebra de Banach $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

Demostración:
Basta probar que el kernel de $\mathcal{F}\cdot$ se reduce a 0. En efecto, sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ tal que $\mathcal{F}f = 0$ en $\mathbb{R}^n$, luego $\mathcal{F}f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Así se puede aplicar el Teorema anterior, que resulta en que

$$0 = \mathcal{F}^* 0 = \mathcal{F}^*(\mathcal{F}f) = (2\pi)^n f \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n$$

por tanto, $f = 0$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$. ■

Proposición 1.2.2
Sean $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Se supone que alguna de $\mathcal{F}f$ y/o $\mathcal{F}g$ es integrable en $\mathbb{R}^n$. Entonces se cumple la **Identidad de Parseval**.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f\overline{\mathcal{F}g} = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} f\overline{g}$$

Demostración:
Suponga que $\mathcal{F}f$ es integrable en $\mathbb{R}^n$. Siendo $\mathcal{F}g$ medible acotada, el primer lado tiene sentido. Se tiene que

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{F}g(x)} &= \overline{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} g(y)\, dy} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x|y\rangle} \overline{g(y)}\, dy \\ &= \mathcal{F}^*\overline{g}(x)\end{aligned}$$

Así pues

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f\overline{\mathcal{F}g} &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f\mathcal{F}^*\overline{g} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^*\mathcal{F}f\cdot\overline{g} \\ &= (2\pi)^n\int_{\mathbb{R}^n} f\overline{g}\end{aligned}$$

■

1.3. Fórmula de inversión en $\mathbb{R}$

Observación 1.3.1
Se afirma que

$$\int_0^{\to\infty}\frac{\sin ax}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

y de la paridad de $x\mapsto\frac{\sin ax}{x}$ se concluye que

$$\int_{\to-\infty}^{\to\infty}\frac{\sin ax}{x}\,dx = \pi,\qquad \forall a>0.$$

Demostración:
En efecto, veamos que para $a>0$:

$$\begin{aligned}\int_0^R\frac{\sin ax}{x}\,dx &= \int_0^{aR}\frac{\sin y}{\frac{y}{a}}\,\frac{dy}{a} \\ &= \int_0^{aR}\frac{\sin y}{y}\,dy\end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado. Si $a<0$, se tiene que

$$\int_0^R\frac{\sin ax}{x}\,dx = -\int_0^R\frac{\sin(-a)x}{x}\,dx \longrightarrow -\frac{\pi}{2}$$

Se concluye que

$$\int_0^{\to\infty}\frac{\sin ax}{x}\,dx = \begin{cases}\frac{\pi}{2} & \text{si}\quad a>0\\ 0 & \text{si}\quad a=0\\ -\frac{\pi}{2} & \text{si}\quad a<0\end{cases}$$

■

Teorema 1.3.1 (Teorema de inversión en $\mathbb{R}$)
Sean $f\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Se supone que f cumple la condición de Dini en cierto punto $x\in\mathbb{R}$, es decir, existe $\delta>0$ tal que

$$\int_{-\delta}^{\delta}\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right|\,dt<\infty$$

Entonces,

$$\begin{aligned}f(x) &= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}e^{ixy}\mathcal{F}f(y)\,dy \\ &= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}e^{ixy}\,dy\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iyz}f(z)\,dz\end{aligned}$$

y más aún:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\to -\infty}^{\to \infty} dy \int_{-\infty}^{-\infty} f(t) \cos(y(t-x))\, dt$$

Demostración:

Para $R > 0$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\int_{-R}^{R} e^{ixy}\, dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyt} f(t)\, dt &= \int_{-R}^{R} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} e^{-iyt} f(t)\, dt \\
&= \int_{-R}^{R} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy(t-x)} f(t)\, dt \\
&= \int_{-R}^{R} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(y(t-x))\, dt + i \int_{-R}^{R} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(y(t-x))\, dt
\end{aligned}$$

como $y \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(y(t-x))\, dt$ es impar, entonces:

$$\int_{-R}^{R} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(y(t-x))\, dt = 0$$

y, como $y \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(y(t-x))\, dt$ es par,

$$\int_{-R}^{R} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(y(t-x))\, dt = 2 \int_{0}^{R} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(y(t-x))\, dt$$

Si se prueba que

$$f(x) = \lim_{R \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{0}^{R} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(y(t-x))\, dt$$

se habrá probado también que

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\to -\infty}^{\to \infty} dy \int_{-\infty}^{-\infty} f(t) \cos(y(t-x))\, dt$$

(que es más de lo que se pide probar). Sea

$$J(R) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{R} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(y(t-x))\, dt, \quad \forall R > 0$$

Veamos que

$$\lim_{R \to \infty} J(R) = f(x)$$

En efecto, sea $R > 0$. Se tiene que la función $(y,t) \mapsto f(t) \cos(y(t-x))$ es medible para la cual se cumple que

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{R} dy \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) \cos(y(t-x))|\, dt &\leqslant \int_{0}^{R} dy \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt \\
&\leqslant R \mathcal{N}_1(f) \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Luego, por Fubini se tiene que

$$\begin{aligned}
J(R) &= \frac{1}{\pi}\int_0^R dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(y(t-x))\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^R f(t)\cos(y(t-x))\,dy \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt \int_0^R \cos(y(t-x))\,dy \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\frac{\sin(y(t-x))}{t-x}\Big|_{y=0}^{y=R}\right] dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\frac{\sin(R(t-x))}{t-x}\,dt, \quad \text{haciendo el cambio de variable } t=z+x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(z+x)\cdot\frac{\sin(Rz)}{z}\,dz
\end{aligned}$$

Por otro lado, recuerde de la observación anterior que

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\to-\infty}^{\to\infty} f(z)\cdot\frac{\sin(Rz)}{z}\,dz, \quad \forall R>0$$

Así pues,

$$J(R)-f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\to-\infty}^{\to\infty}\frac{f(x+z)-f(x)}{z}\cdot\sin(Rz)\,dz$$

Sea $N>0$, por lo anterior se tiene para cada $R>0$:

$$\begin{aligned}
J(R)-f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{\to-\infty}^{\to\infty}\frac{f(x+z)-f(x)}{z}\cdot\sin(Rz)\,dz \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N}\frac{f(x+z)-f(x)}{z}\cdot\sin(Rz)\,dz + \frac{1}{\pi}\int_{|z|>N} f(x+z)\cdot\frac{\sin(Rz)}{z}\,dz \\
&- \frac{f(x)}{\pi}\int_N^{\to\infty}\frac{\sin(Rz)}{z}\,dz - \frac{f(x)}{\pi}\int_{\to-\infty}^{-N}\frac{\sin(Rz)}{z}\,dz
\end{aligned}$$

Analicemos por partes, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{|z|>N} f(x+z)\cdot\frac{\sin(Rz)}{z}\,dz\right| &\leqslant \int_{|z|>N}\frac{|f(x+z)|}{|z|}\,dz \\
&\leqslant \frac{1}{N}\int_{|z|>N}|f(x+z)|\,dz \\
&= \frac{\mathcal{N}_1(f)}{N}
\end{aligned}$$

ahora, si $R>1$ y por el Segundo Teorema del Valor Medio:

$$\begin{aligned}
\left|\int_N^M\frac{\sin(Rz)}{z}\,dz\right| &\leqslant \left[\frac{1}{N}+\frac{2}{M}\right]\cdot\sup_{N\leqslant\zeta\leqslant M}\left|\int_N^{\zeta}\sin Rz\,dz\right| \\
&= \left(\frac{1}{N}+\frac{2}{M}\right)\cdot\sup_{N\leqslant\zeta\leqslant M}\left|-\frac{\cos(Rz)}{z}\Big|_{z=N}^{z=\zeta}\right| \\
&\leqslant \left(\frac{1}{N}+\frac{2}{M}\right)\cdot\left(\frac{2}{R}\right) \\
&\leqslant \frac{6}{NR} \\
&\leqslant \frac{6}{N}
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\left| \int_{N}^{\to\infty} \frac{\sin(Rz)}{z} \, dz \right| \leqslant \frac{6}{N}$$

y, haciendo el cambio de variable $u = -z$ se sigue que

$$\left| \int_{\to -\infty}^{-N} \frac{\sin(Rz)}{z} \, dz \right| \leqslant \frac{6}{N}$$

Sea ahora $\varepsilon > 0$. Se sigue de las tres desiguladades anteriores que si se fija N lo suficientemente grande, los módulos de las tres últimas integrales de la derecha son menor o iguales a $\frac{\varepsilon}{2}$. Por ende,

$$|J(R) - f(x)| \leqslant \frac{1}{\pi} \left| \int_{-N}^{N} \frac{f(x+z) - f(x)}{z} \cdot \sin(Rz) \, dz \right| + \frac{\varepsilon}{2}$$

Como la función $z \mapsto \frac{f(x+z)-f(x)}{z}$ es integrable en $]-\delta, \delta[$ para algún $0 < \delta < \pi$, necesariamente tiene que serlo en $[-N, N]$ (por la condición de Dini y separando la integral en los intervalos disjuntos $]-N, -\delta[$, $]-\delta, \delta[$ y $]\delta, N[$, tomando en este caso el $N > 0$ tal que $N > \delta$). Luego, por el Teorema de Riemman-Lebesgue existe $R_0 > 1$ tal que

$$\frac{1}{\pi} \left| \int_{-N}^{N} \frac{f(x+z) - f(x)}{z} \cdot \sin(Rz) \, dz \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall R \geqslant R_0$$

Se sigue entonces que para todo $R \geqslant R_0$:

$$|J(R) - f(x)| < \varepsilon$$

por ende,

$$\lim_{R \to \infty} J(R) = f(x)$$

lo que prueba el resultado. ■

Observación 1.3.2
Recuerde que la condición de Dini se cumple, por ejemplo, si f tiene derivada por la derecha y la izquierda en ese punto.