

0.1. Ejercicios Anillos e Ideales

Proposición 0.1.1

Todo ideal maximal \mathfrak{m} de A es ideal primo de A .

Demostración:

En efecto, se tiene que A/\mathfrak{m} es campo, en particular es dominio entero (por no tener divisores de cero), luego \mathfrak{m} es ideal primo. ■

Ejercicio 0.1.1

En el anillo $A[x]$, el radical de Jacobson es igual al nilradical.

Demostración:

Como todo ideal maximal es un ideal primo, se tiene la contención:

$$\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{R}$$

sea ahora $f(x) \in \mathfrak{R}$ se tiene que

$$1 - f(x)g(x) \text{ es unidad de } A[x] \text{ para todo } g(x) \in A[x]$$

en particular, $1 - xf(x)$ es unidad de $A[x]$, luego si $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$. Debe suceder entonces que los coeficientes de:

$$1 - xf(x) = -a_n x^{n+1} - a_{n-1} x^n - \dots - a_0 x + 1$$

sean tales que a_i es nilpotente para todo $i \in [0, n]$, luego $f(x)$ es elemento nilpotente de $A[x]$.

Se sigue entonces la igualdad. ■

Ejercicio 0.1.2

Sea A un anillo y sea $A[[x]]$ el anillo de series de potencias formales con coeficientes en A . Pruebe que:

$1 - f$ es unidad de ...

Demostración:

Ejercicio 0.1.3

Demostración:

Ejercicio 0.1.4

Sea A un anillo tal que para todo $x \in A$ existe $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ tal que $x^n = x$. Pruebe que todo ideal primo de A es maximal. ■

Demostración:

Sea \mathfrak{p} un ideal propio primo de A . Probaremos que A/\mathfrak{p} es campo. En efecto, no tiene divisores de cero, pues si

$$\mathfrak{p} + xy = (\mathfrak{p} + x)(\mathfrak{p} + y) = \mathfrak{p}$$

con $x, y \notin \mathfrak{p}$, entonces $xy \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{p}$. Por tanto, no tiene divisores de cero. Hay que ver que todo elemento no cero es invertible. Sea $x \in A \setminus \mathfrak{p}$. Se tiene que existe $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$ tal que

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} + x^n &= \mathfrak{p} + x \\ \Rightarrow (\mathfrak{p} + x)((\mathfrak{p} + x^{n-1}) - (\mathfrak{p} + 1)) &= \mathfrak{p} \end{aligned}$$

como no hay divisores de cero, debe suceder que

$$\mathfrak{p} + x^{n-1} = \mathfrak{p} + 1$$

por ende, al ser $n > 1$, se tiene que $n - 1 > 0$, así que:

$$(\mathfrak{p} + x)(\mathfrak{p} + x^{n-2}) = \mathfrak{p} + 1$$

con $n - 2 \geq 0$. Luego $\mathfrak{p} + x$ es invertible. Así que A/\mathfrak{p} es campo, es decir que \mathfrak{p} es ideal maximal. ■

Ejercicio 0.1.5

Sea x un elemento nilpotente de un anillo A . Muestre que $1 + x$ es una unidad de A . Deduzca que la suma de elementos nilpotentes con una unidad es una unidad.

Demostración:

Dado que x es nilpotente, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$x^n = 0$$

Entonces:

$$\begin{aligned} (1 + x)(1 - x + \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1}) \\ = [1 - x + \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1}] + [x - x^2 + \cdots + (-1)^{n-2}x^{n-1} + (-1)^{n-1}x^n] \\ = 1 \end{aligned}$$

Por ende, $1 + x$ es unidad. Si a y b son nilpotentes, entonces existen $n, m \in \mathbb{N}$ tal que:

$$a^n = b^m = 0$$

Rápidamente se verifica que $(a + b)^{nm} = 0$. Se sigue así que $a + b$ es nilpotente. En particular, usando inducción se generaliza que la suma de elementos nilpotentes es nilpotente. Por ende, de lo anterior se sigue que la suma de 1 mas un elemento nilpotente es una unidad. ■

Ejercicio 0.1.6

Sea A un anillo en el cual todo elemento satisface que $x^n = x$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que todo ideal primo en A es maximal.

Demostración:

Sea I un ideal primo en A . Entonces, A/I es dominio entero. Afirmamos que A/I es campo. En efecto, para ello basta con mostrar que todo elemento de este anillo posee inverso. Sea $I + x \in A/I$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n = x$, luego:

$$(I + x)(I + x^{n-1}) = I + x^n = I$$

Se sigue así que A/I es campo, luego I es ideal maximal. ■

Ejercicio 0.1.7

Sea A un anillo tal que cada ideal no contenido en el nilradical contiene un elemento idempotente no cero (esto es, un elemento e tal que $e^2 = e \neq 0$). Pruebe que el nilradical y el radical de Jacobson de A son iguales.

Demostración:

Recordemos que el nilradical es la intersección de todos los ideales primos de A y, el radical de Jacobson es el la intersección de todos los ideales maximales de A .

Denotamos a los primer y segundo ideales mencionados anteriormente por \mathfrak{N} y \mathfrak{R} . Dado que todo ideal maximal es en particular un ideal primo, se sigue que:

$$\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{R}$$

Supongamos que la contención es propia, se sigue por hipótesis que \mathfrak{R} contiene un elemento idempotente no cero, digamos $e = e^2 \neq 0$. Observemos que:

$$(1 - e)^2 = 1 - e - e + e^2 = 1 - 2e + e = 1 - e$$

por lo cual $1 - e$ también es idempotente. Por la caracterización del radical de Jacobson se tiene que $1 - e$ es una unidad en A .

Ahora, dado que $1 - e$ es unidad en A , existe $y \in A$ tal que $(1 - e)y = 1$, luego:

$$1 = (1 - e)^2 y^2 = (1 - e) y y = y$$

Por lo cual $1 - e = 1$, lo cual contradice la elección de e como elemento no cero. Se sigue así que $\mathfrak{N} = \mathfrak{R}$. ■

Observación 0.1.1

Créditos a la demostración del ejercicio anterior: The Jacobson Radical.

Ejercicio 0.1.8

Sea A un anillo no cero. Muestre que el conjunto de ideales primos de A tiene elemento mínimo con respecto a la relación inclusión.

Demostración:**Ejercicio 0.1.9**

Sea $\mathfrak{a} \neq (1)$ un ideal en un anillo A . Muestre que $\mathfrak{a} = r(\mathfrak{a})$ si y solo si \mathfrak{a} es la intersección de ideales primos.

Demostración:

\Rightarrow): Supongamos que $\mathfrak{a} = r(\mathfrak{a})$. Por la Proposición (??) se tiene que:

$$\mathfrak{a} = r(\mathfrak{a}) = \bigcap_{\substack{P \text{ primo} \\ \mathfrak{a} \subseteq P}} P$$

Lo cual prueba el resultado.

\Leftarrow): Supongamos que \mathfrak{a} es intersección de ideales primos, entonces:

$$\mathfrak{a} = \bigcap_{\substack{P \text{ primo} \\ \mathfrak{a} \subseteq P}} P$$

Nuevamente, por la Proposición (??) se sigue que $\mathfrak{a} = r(\mathfrak{a})$. ■

Para el siguiente ejercicio usamos la siguiente proposición:

Proposición 0.1.2

Sea A un anillo y M un ideal propio de A . Entonces, M es maximal si y sólo si $\forall a \in A \setminus M$ se tiene que $(M, a) = A$.

Demostración:

■

Ejercicio 0.1.10

Sea A un anillo y \mathfrak{N} el nilradical de A . Pruebe que los siguientes son equivalentes:

- (1) A tiene exactamente un ideal primo.
- (2) Todo elemento de A es una unidad o un elemento nilpotente.
- (3) A/\mathfrak{N} es un campo.

Demostración:

(1) \Rightarrow (2): Supongamos que A tiene un ideal primo, digamos P . Por un teorema, todo anillo unitario admite un ideal maximal, digamos M . Este ideal en particular es primo, por lo que $M = P$. Ahora, por la proposición anterior:

$$(M, a) = A$$

para todo $a \notin A \setminus M$. Por la maximalidad de M , se debe tener que todo elemento de $A \setminus M$ es invertible. Ahora, $M = \mathfrak{N}$, ya que $\mathfrak{N} = P$ (por ser P el único ideal primo de A). Así que todo elemento de A es unidad o nilpotente.

(2) \Rightarrow (3): Si todo elemento de A es unidad o nilpotente, se tiene que \mathfrak{N} debe ser un ideal maximal, así que A/\mathfrak{N} es campo.

(3) \Rightarrow (1): Si \mathfrak{N} es campo, entonces \mathfrak{N} es maximal, luego no existe ningún ideal primo P tal que $\mathfrak{N} \subsetneq P \subsetneq A$, así que \mathfrak{N} debe ser el único ideal primo de A . ■

Ejercicio 0.1.11

Un anillo A es booleano si $x^2 = x$ para todo $x \in A$. En un anillo booleano A , muestre que:

- (1) $2x = 0$, para todo $x \in A$.
- (2) Todo ideal primo \mathfrak{p} es maximal, así que A/\mathfrak{p} es un campo con dos elementos.
- (3) Todo ideal finitamente generado de A es principal.

Demostración:

De (1): Sea $x \in A$, entonces:

$$\begin{aligned}(x+1)^2 &= x^2 + 2x + 1 \\ \Rightarrow x+1 &= x + 2x + 1 \\ \Rightarrow 2x &= 0\end{aligned}$$

De (2): Sea \mathfrak{p} un ideal primo de A . Sea $x \in A$ tal que $x \notin \mathfrak{p}$. En A/\mathfrak{p} se tiene que:

$$\mathfrak{p} + x = \mathfrak{p} + x^2 = (\mathfrak{p} + x)(\mathfrak{p} + x) \Rightarrow \mathfrak{p} + x = \mathfrak{p} + 1,$$

pues $x \notin \mathfrak{p}$ y pues A/\mathfrak{p} es dominio entero. Se sigue así que A/\mathfrak{p} es campo y, en particular, tiene dos elementos.

De (3): Sea $I = (x_1, \dots, x_n)$ un ideal finitamente generado. Dado que $(x_1, \dots, x_n) = ((x_1, \dots, x_{n-1}), (x_n))$, usando la Observación (0.1.2) e inducción se obtiene el resultado. ■

Observación 0.1.2

En el ejercicio anterior, si $I = (x_1, x_2)$, entonces $I = (x_1 + x_2 + x_1x_2)$, pues:

$$(x_1 + x_2 + x_1x_2)x_1 = x_1 + x_1x_2 + x_1x_2 = x_1$$

0.2. El espectro primo de un anillo

Ejercicio 0.2.1 (Topología de Zariski)

Sean A un anillo y X el conjunto de todos los ideales primos de A . Para cada $E \subseteq A$, sea $V(E)$ el conjunto de todos los ideales primos de A que contienen a E . Pruebe que:

- (1) Si \mathfrak{a} es el ideal generado por E , entonces $V(E) = V(\mathfrak{a}) = V(r(\mathfrak{a}))$.
- (2) $V(0) = X$, $V(1) = \emptyset$.
- (3) Si $(E_i)_{i \in I}$ es una familia de subconjuntos de A , entonces:

$$V\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right) = \bigcap_{i \in I} V(E_i)$$

- (4) $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$, para todo par de ideales $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ de A .

Estos enunciados muestran que los conjuntos $V(E)$ satisfacen los axiomas para conjuntos cerrados en un espacio topológico. La topología resultante es llamada la **Topología de Zariski**. El espacio topológico X es llamado el **espectro primo de A** y se denota por $\text{spec}(A)$.

Demostración:

De (1): Sea $\mathfrak{a} = (E)$ el ideal generado por E . Dado que $E \subseteq \mathfrak{a}$, de la definición de V se sigue que $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(E)$.

Si \mathfrak{p} un ideal primo tal que $E \subseteq \mathfrak{p}$, entonces al ser \mathfrak{a} el ideal generado por E y \mathfrak{p} un ideal que contiene a E , debe suceder que $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$. Por tanto, $V(E) \subseteq V(\mathfrak{a})$. De ambas contenciones se sigue la igualdad.

De (2): Sea \mathfrak{p} un ideal primo, entonces $0 \in \mathfrak{p}$. No puede suceder que $1 \in \mathfrak{p}$ ya que en tal caso $\mathfrak{p} = A$. Por tanto:

$$V(0) = X \quad \text{y} \quad V(1) = \emptyset$$

De (3): Sea \mathfrak{p} un ideal primo tal que $\bigcup_{i \in I} E_i \subseteq \mathfrak{p}$, en particular $E_i \subseteq \mathfrak{p}$, para todo $i \in I$, luego $\mathfrak{p} \in V(E_i)$, para todo $i \in I$, esto es que $\mathfrak{p} \in \bigcap_{i \in I} V(E_i)$. Inversamente, si $\mathfrak{p} \in \bigcap_{i \in I} V(E_i)$, entonces $E_i \subseteq \mathfrak{p}$ para todo $i \in I$, por lo cual $\bigcup_{i \in I} E_i \subseteq \mathfrak{p}$.

De (4): Sea \mathfrak{p} un ideal primo.

■ Si $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$. Dado que $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, se sigue que $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$.

■ Si $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ tenemos dos casos:

- Existe $b \in \mathfrak{b}$ tal que $b \notin \mathfrak{p}$. Por la contención $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ se tiene que:

$$ab \in \mathfrak{p},$$

dado que \mathfrak{p} es primo debe suceder que $a \in \mathfrak{p}$, para todo $a \in \mathfrak{a}$.

- Si $b \in \mathfrak{p}$ para todo $b \in \mathfrak{b}$, entonces $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$.

En cualquier caso, $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.

De los dos incisos anteriores se sigue que $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.

Si $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$, entonces $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ o $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$, por lo cual, en cualquier caso, $\mathfrak{ab} \subseteq \mathfrak{p}$. Así que $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{ab})$.

Se sigue entonces la igualdad. ■

Ejercicio 0.2.2

Analice $\text{spec}(\mathbb{Z})$, $\text{spec}(\mathbb{R})$, $\text{spec}(\mathbb{C}[x])$, $\text{spec}(\mathbb{R}[x])$ y $\text{spec}(\mathbb{Z}[x])$.

Solución:

Para $\text{spec}(\mathbb{Z})$:

1. Sea $A \subseteq \mathbb{Z}$ con $0 \notin A$. Dado que $A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$, entonces:

$$V(A) = V\left(\bigcup_{a \in A} \{a\}\right) = \bigcap_{a \in A} V(\{a\})$$

Ahroa, si $a \in \mathbb{Z}$, entonces:

$$a = \prod_{i=1}^n p_i,$$

siendo p_i primo. En tal caso:

$$\bigcap_{a \in A} V(\{a\}) = \{p_i \mathbb{Z} \mid i = 1, \dots, n\}$$

Por ende, $\bigcap_{a \in A} V(\{a\}) = \{q_1 \mathbb{Z}, \dots, q_m \mathbb{Z}\}$, donde $q_i \mid a$, para todo $a \in A$. En caso de que no haya divisores, $V(A)$ será vacío.

2. Dado que existe una biyección entre los primos de \mathbb{Z} junto con el cero y los ideales primos de \mathbb{Z} ($p \mapsto p\mathbb{Z}$ y $0 \mapsto \{0\}$), podemos ver a $\text{spec}(\mathbb{Z})$ como el conjunto:

$$\text{spec}(\mathbb{Z}) = \{p\mathbb{Z} \mid p \text{ es primo en } \mathbb{Z}\} \cup \{(0) = 0\mathbb{Z}\}$$

Sea $A\mathbb{Z} = \{a\mathbb{Z} \mid a \in A\} \subseteq \text{spec}(\mathbb{Z})$.

- Si $A = \emptyset$, entonces A es claramente cerrado y abierto.
- Si A es finito y $0 \notin A$, digamos $A = \{p_1, \dots, p_n\}$, entonces $A\mathbb{Z}$ es cerrado, ya que $P = \{p_1 \cdots p_n\}$ es tal que $V(P) = A$ (por el inciso anterior), donde $V(P)$ es cerrado.
- Si A es infinito, entonces no puede ser cerrado, pues contradiría el primer inciso (un elemento tendría una cantidad infinita de divisores).

Por lo que, los únicos cerrados no triviales son los conjuntos finitos que no contienen al ideal cero.

En resumen, está bien raro este espacio.

Ahora, para $\text{spec}(\mathbb{R})$. Como \mathbb{R} es un campo, el único ideal primo es (0) , por lo que $\text{spec}(\mathbb{R}) = \{(0)\}$ está dotado de la topología trivial.

Ahora, para $\text{spec}(\mathbb{C}[x])$ □

Observación 0.2.1

Algo útil sería caracterizar primero los ideales primos de \mathbb{Z} , \mathbb{R} , $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{Z}[x]$, antes de cualquier cosa. El espectro de $\mathbb{Z}[x]$ se puede ver en un diagrama como el que se visualiza en la siguiente página: Atlas of $\text{spec}(\mathbb{Z}[x])$.

Ejercicio 0.2.3

Ejercicio 0.2.4

Es conveniente denotar a los ideales primos de A con letras x y y , pensando en puntos de $X = \operatorname{spec}(A)$. Pensando en x como un ideal primo de A , lo denotamos por \mathfrak{p}_x (que vienen a ser la misma cosa pero distintos por notación y costumbre). Muestre que:

- (1) $\overline{\{x\}} = V(\mathfrak{p}_x)$.
- (2) $y \in \overline{\{x\}}$ si y solo si $\mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_y$.
- (3) X es un espacio T_0 .

Demostración:

De (1):



Idea 0.2.1

Checar este link después: [Basic understanding of \$\operatorname{Spec}\(\mathbb{Z}\)\$](#) .