Introducción a las singularidades

Cristo Daniel Alvarado

12 de noviembre de 2024

Índice general

Capítulo 1

Nociones Básicas

1.1. Preeliminares Algebraicos

Definición 1.1.1
Un anillo R es **graduado (por $\mathbb{N}$)** si R puede ser escrito como la suma directa (como grupo abeliano):

$$R=\bigoplus_{n=0}^{\infty}R_n$$

tal que para todos $m,n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ tenemos que $A_nA_m\subseteq A_{n+m}$. Se sigue en particular que A_0 es un subanillo y que cada componente A_n es un A_0-módulo.

1.2. Variedades Algebraicas

En síntesis, las singularidades abarcan muchas ramas de las matemáticas, como son la geometría algebraica, el álgebra conmutativa, el análisis compleo, la topología algebraica y cosas sobre teoría de nudos.

Considremos a K un campo (o cuerpo), en ocasiones este puede ser considerado simplemente como un anillo, el cuál siempre será de característica 0.

En el anillo de polinomios $K[x_1,...,x_n]$ tenemos los monomios

$$x^d=x_1^{d_1}\cdots x_n^{d_n}$$

donde $d_1+...+d_n=d$. Así que todo polinomio f se puede ver como:

$$f=\sum_{\text{finita}}c_dx^d$$

donde $c_d\in K\setminus\{0\}$. Se define el **grado de f** por:

$$\deg f=\max\left\{d_1+...+d_n\middle|c_d\neq 0\right\}$$

Ejemplo 1.2.1
El anillo de polinomios $K[x_1,...,x_n]$ es graduado, a saber los subgrupos abelianos que lo graduano son aquellas polinomios con todas sus componentes de mismo grado. En este caso,

Consideramos el **espacio afín** K^n de todas las tuplas $(a_1,...,a_k)$. Podemos también ver el **espacio proyectivo** $\mathbb{P}_k^n$, con coordenadas homogéneas $[x_0:x_1:...:x_n]$.

Observación 1.2.1
En las coordenadas homogéneas, $[x_0 : x_1 : ... : x_n]$ es tal que x_i no es cero para todo i. En particular también se tiene que:

$$[x] = [\lambda x] = [\lambda x_0 : \lambda x_1 : ... : \lambda x_n]$$

con $\lambda \in K \setminus \{0\}$

Observación 1.2.2
Podemos descomponer a la variedad proyectiva $\mathbb{P}_k^n$ como:

$$\mathbb{P}_k^n = K^n \cup \mathbb{P}_k^{n-1}$$

donde la primera parte es una variedad afín y la segunda es un hiperplano en el infinito (no sé a qué se refiera esto). Repitiendo este proceso podemos verlo como:

$$\mathbb{P}_k^n = K^n \cup K^{n-1} \cup \cdots \cup K \cup p^t$$

Observación 1.2.3
Podemos también descomponer al espacio proyectivo como:

$$\mathbb{P}_k^n = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$$

donde

$$U_i = \left\{ [x] \middle| x_i \neq 0 \right\}$$

cada uno de estos U_i es isomorfo a K^n, con isomorfismo dado por:

$$[x] = [x_0 : x_1 : ... : x_{i-1} : x_i : x_{i+1} : ... : x_n] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \frac{x_1}{x_i}, \cdots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, ..., \frac{x_n}{x_i} \right)$$

Consideraremos variedades algebraicas:

$$V(f) = \left\{ x \in K^n \middle| f(x) = 0 \right\}$$

Definición 1.2.1
Decimos que un polinomio $F \in K[x_0, x_1, ..., x_n]$ es **homogéneo**, si todos sus monomios tienen el mismo grado.

Observación 1.2.4
La definición anterior es equivalente a que para todo $\lambda \in K$:

$$F(\lambda x) = \lambda^{\deg F} F(x)$$

para todo $x = (x_0, x_1, ..., x_n) \in K^{n+1}$.

Definición 1.2.2
Si F es homogéneo, entonces $V(F)$ es una **hipersuperficie**.

Podemos hacer un proceso para deshomogeneizar un polinomio homogéneo, de la siguiente manera:

$$F\left(1, \frac{x_1}{x_0}, ..., \frac{x_n}{x_0}\right) = f(x_1, ..., x_n)$$

y, podemos homogeneizar un polinomio haciendo:

$$F(x_0, x_1, ..., x_n) = x^{\deg f} f\left(\frac{x_1}{x_0}, ..., \frac{x_n}{x_0}\right)$$

Ejemplo 1.2.2
Considere el polinomio $f = 3 + x_1 + x_2$, entonces F homogéneo sería:

$$\begin{aligned} F(x_0, x_1, x_2) &= x_0^1 f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) \\ &= 3x_0 + x_1 + x_2 \end{aligned}$$

Observación 1.2.5
En ocasiones interesa que K sea algebraicamente cerrado. En este caso, se nos permite escribir un polinomio como:

$$f = c \cdot (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_d), \quad a_i \in K$$

donde d es el grado del polinomio, esto para polinomios en una variable.

Observación 1.2.6
En el caso en que F sea un polinomio homogéneo en varias variables, podemos escribirlo como:

$$F = c \cdot (b_1 x - a_1 y) \cdots (bd_x - a_d y), \quad a_i, b_i \in K$$

por lo que resulta importante tener la noción de polinomio homogéneo.

Definición 1.2.3
Dados $f = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m$ y $g = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1} x + b_n$. Se define el **resultante de** f **y** g, como:

$$Res(f, g) = \det A_{m+n}(a_i, b_j)$$

Esta matriz se vería de esta manera:

$$\begin{pmatrix}
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_m & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{m-1} & a_m & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & a_0 & \cdots & a_{m-2} & a_{m-1} & a_m & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \underbrace{\cdots}_{(n-1)\text{-veces recorrido}} & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_m \\
b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & b_n & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & b_0 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \underbrace{\cdots}_{(m-1)\text{-veces recorrido}} & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n
\end{pmatrix}$$

Proposición 1.2.1
$Res(f,g) = 0$ si y sólo si f y g tienen una raíz común.

Demostración:
$\Rightarrow$) :
$\Leftarrow$) : Suponga que existe $r \in K$ tal que $f(r) = g(r)$, entonces:

$$f(x) = (x-r)p(x) \quad \text{y} \quad g(x) = (x-r)q(x)$$

donde $\deg p = m-1$ y $\deg q = n-1$. Se cumple además la igualdad:

$$fq - gp = 0$$

la ecuación anterior, la podemos ver como la matriz cuadrada $B_{m+n}(a_i, b_j)$ de tamaño $m+n$. Si hacemos

$$p(x) = \alpha_0 x^{m-1} + \cdots + \alpha_{m-1}$$

y,

$$q(x) = \beta_0 x^{n-1} + \cdots + \beta_{n-1}$$

Se reduciría todo a un sistema:

$$B_{n+m}(a_i, b_j) \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

(completar la demostración). ■

Ejercicio 1.2.1
Hacer lo de la proposición anterior cuando $f_1 = f_2 = x^2 - 3x + 2$ y $g_1 = x - 1$ (calcular los sistemas necesarios).

Solución:

□

Ejemplo 1.2.3
Considere los polinomios $f = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ y $g = x^2 - x + 2$. Entonces $m = 3$ y $n = 2$, por lo que:

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

sería la matriz asociada al resultante de los polinomios f y g.

Para la siguiente proposición, K es un campo algebraicamente cerrado.

Proposición 1.2.2
Sean $f, g \in K[\underline{x}]$ (anillo de polinomios en varias variables). Entonces:

1. $V(f) = V(g)$ si y sólo si f y g tienen las mismas componentes irreducibles.
2. $V(f) \neq \emptyset$ si y sólo si $f \in K \setminus \{0\}$.

Demostración:

■

Definición 1.2.4
Sea $p \in V(f) \subseteq K^n$. Decimos que p es un **punto singular de** $V(f)$, si

$$f(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0$$

para todo $i = 1, ..., n$. El conjunto de puntos singulares de f se denota por $Sing(V(f))$. Si $p \notin Sing(V(f))$, se dice que p es **no singular** o **liso**.

Si $V(f)$ es tal que $Sing(V(f)) = \emptyset$, se dice que $V(f)$ es **no singular**.

Ejemplo 1.2.4
Considere el polinomio $f = ax + by$, $a, b \in K$ no ambas nulas. Entonces, $V(f)$ es no singular.

Ejemplo 1.2.5
Considere $f = xy$. Entonces:

$$Sing(V(f)) = \{(0, 0, *, *, ..., *) \in K^n\}$$

En el caso de $K^n = \mathbb{C}^2$, se tiene que:

$$Sing(V(f)) = \{(0, 0)\} \subseteq \mathbb{C}^2$$

se dice **singularidad aislada**.

Si estamos en $\mathbb{C}^3$, entonces

$$Sing(V(f)) = \{(0, 0, *)\} \subseteq \mathbb{C}^3$$

es **no aislada**.

Ejemplo 1.2.6
En el caso en que $f = f_1 \cdot f_2$, se tiene que $V(f_1) \cap V(f_2) \subseteq Sing(V(f))$.

Ejemplo 1.2.7
Los siguientes tienen puntos singulares de diferentes tipos:

- $g = y^2 - x^3$.
- $h = y^2 - x^2(x + 1)$.
- $k = z^2 - xy^3$.

1.3. Geometría y Topología de Curvas Algebraicas en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ (o en $\mathbb{C}^2$).

En esta parte, tendremos como objetivos dos cosas:

(1) Entender la topología abstracta de $C = V(F) \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

(2) Entender la geometría de $C = V(F) \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

Teorema 1.3.1 (**Teorema de Bezout**)
Sean $C = V(P)$ y $D = V(Q)$ curvas contenidas en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ con $\deg P = n$ y $\deg Q = m$. Entonces, $C \cap D$ es un conjunto de $n \cdot m$ puntos (contando multiplicidades).

Teorema 1.3.2 (**Fórmula de género-grado**)
Sea $C = V(P) \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ no singular y de grado n irreducible. Entonces, C es topológicamente una superficie (dimensión 2 sobre $\mathbb{R}$) conexa, compacta, orientable y sin borde con $\chi = 2-(n-1)(n-2)$ (siendo χ la característica de Euler de la superficie).

Luego hubo una explicación sobre la característica de Euler para superficices (en particular, algunas triangulaciones de la 2-esfera).

Teorema 1.3.3 (**Teorema de Clasificación de Superficies**)
La característica de Euler de toda superficie compacta, orientable, conexa y sin borde es:

$$\chi = 2 - 2g$$

donde g es el género de la superficie.

Notemos que:

n	$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$
1	0
2	0
3	1
4	3
5	6
6	10

por lo que no todos los géneros se pueden obtener a partir de curvas $C \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

Uno puede construir todas las superifices orientables, conexas, compactas y sin borde a partir de la identificación usual que se hacía con la esfera, el toro, el 2-toro, etc...

Hablaremos del teorema de Bezout pero desde el punto de vista de resultantes con polinomios en varias variables. Recordemos que si $f, g \in \mathbb{C}[x]$, entonces

$$Res(f,g) = \det A_{m+n}(a_i, b_j)$$

siendo

$$\begin{pmatrix}
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_m & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{m-1} & a_m & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & a_0 & \cdots & a_{m-2} & a_{m-1} & a_m & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \underbrace{\cdots}_{(n-1)\text{-veces recorrido}} & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_m \\
b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & b_n & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & b_0 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \underbrace{\cdots}_{(m-1)\text{-veces recorrido}} & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n
\end{pmatrix}$$

con $\deg f = m$ y $\deg g = n$ (siendo a_i los coeficientes de f y b_j los de g). Si consideramos ahora polinomios en 3 variables:

$$f(x,y,z) = a_0(x,y)z^m + a_1(x,y)z^{m-1} + \cdots + a_m(x,y)$$

y,

$$g(x,y,z) = b_0(x,y)z^n + b_1(x,y)z^{n-1} + \cdots + b_n(x,y)$$

tomamos a los polinomios $f, g \in \mathbb{C}[x,y][z] = \mathbb{C}[x,y,z]$ homogéneos. En este caso, los grados de f y g son m y n, respectivamente, por lo que $a_i(x,y)$ y $b_j(x,y)$ son polinomios homogéneos de grado i y j, respectivamente.

Definición 1.3.1
Sean $F, G \in \mathbb{C}[x,y][z]$ polinomios homogéneos de grados m y n, respectivamente. Entonces:

$$Res_z(F,G) = \det A_{m+n}(a_i(x,y), b_j(x,y))$$

con el A dado como se hizo anteriormente.

Observación 1.3.1
Se tiene que $Res_z(F,G) \in \mathbb{C}[x,z]$ es un polinomio homogéneo de grado $n \cdot m$ (a lo más ya que puede ser cero). Por tanto,

$$Res_z(F,G) = \prod_{i=n}^{n \cdot m}(b_i x + a_i y)$$

(por ser $\mathbb{C}$ algebraicamente cerrado).

Observación 1.3.2
Dados $a, b \in \mathbb{C}$, hacemos:

$$F(a,b,z) = f(z) \quad \text{y} \quad G(a,b,z) = g(z)$$

entonces,

$$Res_z(F,G)(a,b) = Res(f,g)$$

Recordemos que $Res(f,g) = 0$ si existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $f(c) = g(c)$.

Por tanto, de las observaciones anteriores, se tiene que para cada $i = 1, ..., n \cdot m$ existen c_i tales que

$$f(c_i) = g(c_i) = 0$$

esto es que

$$F(a,b,c_i) = G(a,b,c_i)$$

Observación 1.3.3
Se tiene que $C \cap D \neq \emptyset$ ¿?.

Proposición 1.3.1
$Res_z(F,G) = 0 \in \mathbb{C}[x,y]$ si y sólo si F y G tienen una componente común.

Demostración:

Procederemos por reducción al absurdo. Supongamos que

- $Res_z(F,G) \in \mathbb{C}[x,y]$ y es no constante.
- F y G tienen al menos $n \cdot m + 1$ puntos comunes.

Podemos tomar coordeadas de modo que cada punto común a F y G induce un factor lineal $b_i x + a_i y$ de $Res_z(F,G)$ y son no proporcionales dos a dos. Por lo cual al menos hay $n \cdot m+1$ factores lineales$\#_c$. $\blacksquare$

Definición 1.3.2
Sean C, D dos curvas en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tales que:

- $[0:0:1] \notin C \cup D$.
- $[0:0:1]$ no pertenece a una recta por dos puntos de $C \cap D$.
- $[0:0:1]$ no pertenece a la tangente de C ni a la tangente a D por un punto común $Q \in C \cap D$.

y, sea $O = [a:b:c] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Definimos la **multiplicidad de intersección de** O

$$I_O(C,D) = \begin{cases} 0 & \text{si} & 0 \notin C \cap D \\ \max\{k\} & \text{t.q.} & (bx-ay)^k \mid Res_z(F,G) \\ \infty & \text{si} & O \text{ pertenece a una componente común a } C \text{ y } D \end{cases}$$

Con la definición anterior se sigue que:

$$Res_z(F,G) = \prod_{O=[a,b,c] \in C \cap D} (bx-ay)^k$$

por lo cual:

$$\sum_{I \in C \cap D} I_O(F,G) = n \cdot m$$

Un puede definir la multiplicidad de un punto en una curva C, a partir de ver la mínima derivada parcial donde el punto no se anula, denotada por $mult_O(C)$. Se tiene que:

$$I_O(C,D) \geq mult_O(C) + mult_O(D)$$

Ahora hablaremos de la fórumla de grado-género.

Teorema 1.3.4 (**Teorema de la función implícita**)
Sea $\underline{0} = (0,0,z) \in C = V(f) \subseteq \mathbb{C}^2$ tal que $f_y(\underline{0}) \neq 0$, entonces existen entornos abiertos $O_1 \in V \subseteq \mathbb{C}$ y $\underline{O} \in U \subseteq C$ y una función analítica $g: V \to U$ tal que

$$f(x, g(x)) = 0, \quad \forall x \in V$$

Por tanto, una curva lisa C y $p \in C$ implica que $\frac{\partial f}{\partial x}(p) \neq 0$ o bien $\frac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0$, por lo que del teorema de la función implícita se sigue que un entorno de p en C es homeomorfo a un entnro de $\mathbb{C}$ (de $\mathbb{R}^2$).

Por lo que, C es efectivamente una superficie.

Se sabe de cursos de topología de conexión por arcos implica conexión.

Considere puntos en la curva $p, q \in C$. Se tiene que existe $\gamma : [0,1] \to C$ continua tal que $\gamma(0) = q$ y $\gamma(1) = p$.

Tenemos la curva $C = V(f)$. Podemos suponer que

$$f = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x)y + a_n(x)$$

se tiene que $f(x_0, y) \in \mathbb{C}[y]$ es tal que $\deg f(x_0, y) = n$. Si consideramos la proyección $\pi_1 : C \to \mathbb{C}$, entonces $\pi^{-1}(x_0)$ nos dará las raíces distinas de $f(x_0, y)$.

Se define:

$$Disc(f(x_0, y)) = Res(f(x_0, y), f_y(x_0, y))$$

entonces

$$\left|\pi^{-1}(x_0)\right| = n \iff Disc(f(x_0, y)) \neq 0$$

En conclusión, $C \setminus \bigcup_{q \in \mathbb{C}} \pi_1^{-1}(q)$ donde q es raíz del discriminante, es un recubrimiento de n-hojas.

Lo demás se deduce de forma más sencilla.

Por último, la fórmula del género se deduce de otro hecho que no se menciona adecuadamente aquí.

1.4. Algoritmo de Newton-Puiseux

Básicmaente esto es una generalización del teorema de la función implícita para entornos de puntos singulares de $C \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

Podemos analizar por ejemplo la cúspide de $f(x, y) = y^2 - x^3$. Se tiene que $f_x(x, y) = -3x^2$ y $f_y(x, y) = 2y$, por lo que $(0, 0)$ es un punto singular de la curva afín $C = V(f)$.

Teorema 1.4.1
Sea $C = V(f) \subseteq \mathbb{C}^2$ una curva afín tal que $f(0, 0) = 0$ tal que $\deg_y(f) = n$. Entonces, existe una serie de potencias $\xi(x) \in \mathbb{C}[[x^{1/n}]]$ tal que $f(x, \xi(x)) = 0$.

Además, ξ es convergente en un entorno de $0 \in \mathbb{C}$.

Demostración:

■

Observación 1.4.1
Una consencuencia del teorema es que $\bigcup_{n \geq 1} \mathbb{C}((x^{1/n}))$ es algebraicamente cerrado y es llamado el **campo de series de Puiseux**.

Dado un $\xi \in \mathbb{C}[[x^{1/n}]]$, tomemos ϵ la raíz primitiva de la unidad de orden n.

Por ejemplo, dada $\xi = \sum a_i x^{i/n}$, entonces $\sigma_\epsilon(\xi) = \sum a_i \epsilon^i x^{i/n}$.

Ejercicio 1.4.1
Calcular las conjugadas de $x^{6/4} + x^{7/4}$.

Si tomamos a

$$f(x, y) = \prod_{\text{conjugadas de } \xi} (y - \xi_k(x)) \in \mathbb{C}[x][y]$$

esta es una función local irreducible.

Ejemplo 1.4.1
Considere $f(x,y) = y^4 + 2x^3y^2 + x^6 + x^5y + x^12$. Entonces:

$$f(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j$$

- Dibujar los puntos $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ tales que $a_{i,j} \neq 0$. En este caso, se verían los puntos $(0,4), (3,2), (6,0), (5,1)$ y $(12,0)$.
- Tomamos $\Delta = envconv\left[\bigcup_{i,j}((i,j) + (\mathbb{R}_{\geq 0})^2)\right]$ donde *envconv* es la envolvente convexa de este conjunto y consideramos los segmentos que unen a cada uno de los puntos que forman a éste conjunto parametrizados por las coordenadas i y j, en este caso solo tenemos al segmento $2i + 3j = 12$.
- Para cada segmento Γ finito de la frontera de Δ teenmos un par de números naturales primos rel. tales que Γ está contenido en l arecta $ni + mj = M$ y vamos a considerar:

  $$f_\Gamma = \sum_{ni+mj=M} a_{ij} x^i y^j$$

  en este caso, para el segmento Γ dado por $2i + 3j = 12$, se tiene que $f_\gamma = y^4 + 2x^3y^2 + x^6$.
- Con f_Γ consideramos una raíz a de $f_\Gamma(1,y) \in \mathbb{C}[y^n]$, en este caso para Γ tendríamos a $-\frac{2}{3}$.
- Hacemos $x = x_1^n$ y $y = x_1^m(a + y_1)$. Entonces ahora con la raíz a de $(y^2+1)^2$, tomamos $a = i$ y hacemos:

  $$\begin{cases} x &= x_1^2 \\ y &= x_1^3(i + y_1) \end{cases}$$

  hacemos:

  $$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_1^n, x_1^m(y + y_1)) \\ &= x_1^M f(x_1, y_1) \end{aligned}$$

  en este caso, notemos que como:

  $$x^i y^j = x_1^{ni} x_1^{mj} (a + y_1)^j = x_1^M (a + y_1)^j$$

  en nuestro caso, obtendríamos que:

  $$\begin{aligned} f(x,y) &= y^4 + 2x^3y^2 + x^6 + x^5y + x12 \\ &= x_1^{12}(i + y_1)^4 + 2x_1^6 x_1^6 (i + y_1)^2 + x_1^{12} + x_1^{10} x_1^3 (i + y_1) + x_1^{24} \\ &= x_1^{12}\left[(i + y_1^4) + 2(i + y_1)^2 + 1 + x_1(i + y_1) + x_1^{12}\right] \\ &= x_1^{12}\left[\left((i + y_1)^2 + 1\right)^2 + \ldots\right] \\ &= x_1^{12}\left[(2iy_1 + y_1^2)^2 + x_1(i + y_1) + x_1^{12}\right] \\ &= x_1^{12} f_1(x_1, y_1) \end{aligned}$$

- Reiteramos el proceso con la nueva f_1, la nueva raíz de $f_\Gamma(1,y)$ con este nuevo polinomio es a_a.
- Cuando paremos, hacemos las sustituciones para que SOLO QUEDE x.

- Podemos tomar otro segmento y obtendremos otra raíz conjugada inicial de nuestra variedad inicial. Independientemente de esto, llegaríamos a una aproximación de una raíz.

En el ejemplo anterior, tomamos $h(f) = \text{mín}\left\{j \middle| a_{0j} \neq 0\right\}$. En este caso, se tiene que:

$$h(f_1)$$

es la multiplicidad de a_1 como raíz de $f_\Gamma(1, y)$. Pueden pasar dos cosas:

1. Que para alguna iteración i, $h(f_i) = 0$, luego $y_i = 0$ y esto haría que la serie de potencias sea finita.
2. $h(f) \geq h(f_1) \geq h(f_2) \geq \cdots \geq h(f_i) = 1$.

Considerando una curva C irreducible, por lo anterior podemos encontrar una serie de potencisa ξ tal que con $C = V(f)$ se tiene que $f(t^n, \xi(t^n)) = 0$. Si $D = V(g)$, entonces

$$I_0(C, D) = ord_t g(t^n, \sum a_i t^i)$$

y,

$$I_0(C_1 \cup C_2, D) = I_0(C_1, D) + I_0(C_2, D)$$

1.5. Explosión de $\mathbb{C}^2$ en el origen

Considere la superficie

$$Bl_0\mathbb{C}^2 = \{xv - yu = 0\} \subseteq \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$$

queremos ver esto como superficie en le origen. Hacemos dos cartas dadas por:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & u_1v_1 \\ y & = & v_1 \end{array}\right. \quad \text{y} \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & u_2 \\ y & = & u_2v_2 \end{array}\right.$$

donde habrá un conjunto $E = \mathbb{P}^1$ tal que $E \subseteq Bl_0\mathbb{C}^2$. Lo que nos permite esto es quitar singularidades dobles exóticas como la que muestra la imagen.

Considere la superficie $y^2 = x^2 + x^3$. Entonces:

$$x^3 = (y + x)(y - x)$$

- En la carta 1, se tiene que la superficie se convierte en

$$y^2 - x^2 - x^3 = 0 \Rightarrow v_1^2(1 - u_1^2 - u_1^3v_1) = 0$$

  haciendo $f_1 = 1 - u_1^2 - u_1^3v_1$, cuando E sea la recta $v_1 = 0$ sea cero se seguirá que u_1 tiene dos multiplicidades en dos puntos distintos.

Ejercicio 1.5.1
En la carta 1, hacer la traslación $u_1 \mapsto u_1 + 1$ y comprobar que $E(v_1 = 0)$ y que f_1 es lisa y corta transversalmente a E.

Ejemplo 1.5.1
Considere la curva $y^2 + x^7$.

- En la carta 1, va suceder que:

$$v_1^2 - u_1^7v_1^7 = v_1^2(1 - u_1^7v_1^5) = 0$$

entonces, $E(v_1 = 0)$ y f_1 no se cortan.

- En la carta 2, va a pasar que

$$(u_2 v_2)^2 - u_2^7 = u_2^2(v_2^2 - u_2^5) = 0$$

tomando $f_2 = y^2 - x^5$ se tiene que efectivamente, aquí sí corta f_2 a $E(u_2 = 0)$.

Observación 1.5.1
En general, va a suceder que si la multiplicidad de f es m, entonces

- En carta 1, tenemos algo de la forma $v_1^m f_1(u_1, v_1)$.
- En carta 2, tenemos algo de la forma $u_2^m f_2(u_2, v_2)$.

¿Qué pasa cuando explotamos singularidades? Ahora tenemos la función f y a ξ que cumple lo anterior.

1.6. Referencias

- F. Kirwan *Complex Algebraic Curves*, LMS 1992.
- K. Kendig *A guide to plane algebraic curves*, MAA, 2011.
- E. Casas-Alveror, *Algebraic Curves, the Bill-Noether Way*, Springer 2019.
- E. Brickeson H. Krorrer, *Plane Algebraic Curves*, Birkhaser, 80's.

1.7. Sesión de Ejercicios

Ejemplo 1.7.1
Calcular las conjugadas de $x^{3/2} + x^{7/4}$.

Solución:
Calculamos las raíces cuartas de 1, las cuáles son 1, -1,i y $-i$. Tomamos

$$\xi_1 = \xi(x^{1/4}) = (x^{1/4})^6 + (x^{1/4})^7 = x^{6/4} + x^{7/4}$$

las conjugadas serían:

$$\begin{aligned}\xi_2 = \xi(ix^{1/4}) &= i^6(x^{1/4})^6 + i^7(x^{1/4})^7 \\ &= -x^{6/4} - ix^{7/4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi_3 = \xi(-ix^{1/4}) &= (-i)^6(x^{1/4})^6 + (-i)^7(x^{1/4})^7 \\ &= -x^{6/4} + ix^{7/4}\end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}\xi_4 = \xi(-x^{1/4}) &= (-x^{1/4})^6 + (-x^{1/4})^7 \\ &= x^{6/4} - x^{7/4}\end{aligned}$$

□

Notemos que en el ejemplo anterior hay 4 conjugadas distintos del polinomio dado. Queremos ahora nuestro polinomio construído a partir de estos polinomios.

$$f = (y - \xi_1) \cdot (y - \xi_2) \cdot (y - \xi_3) \cdot (y - \xi_4)$$

el cuál es:

$$\begin{aligned}f &= (y - \xi_1) \cdot (y - \xi_2) \cdot (y - \xi_3) \cdot (y - \xi_4) \\ &= (y - x^{6/4} - x^{7/4}) \cdot (y + x^{6/4} + ix^{7/4}) \cdot (y - x^{6/4} + x^{7/4}) \cdot (y + x^{6/4} - ix^{7/4}) \\ &= \left((y - x^{6/4})^2 - x^{7/2}\right) \cdot \left((y + x^{6/4})^2 + x^{7/2}\right) \\ &= \left(y^2 + x^3 + 2x^{6/4}y + x^{7/2}\right) \cdot \left(y^2 + x^3 - 2x^{6/4}y - x^{7/2}\right) \\ &= (y^2 + x^3)^2 - (2x^{6/4}y + x^{7/2})^2 \\ &= (y^2 + x^3)^2 - 4x^3y^2 - 4x^5y - x^7\end{aligned}$$

Ejemplo 1.7.2
Considere los polinomios $f = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ y $g = x^2 - x + 2$. Entonces $m = 3$ y $n = 2$, por lo que:

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

sería la matriz asociada al resultante de los polinomios f y g. ¿Cuál es el resultante de ambos polinomios?

Solución:

Supongamos que ambos polinomios tienen una raíz en común, digamos r. Escribimos los polinomios de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x^3-3x^2+2x+1 &= (x-r)\underbrace{(a_0x^2+a_1x+a_2)}_{p} \\ x^2-x+2 &= (x-r)\underbrace{(b_0x+b_1)}_{q} \end{cases}$$

calculamos ahora $qf-pg$, donde:

$$qf = b_0x^4+(-3b_0+b_1)x^3+(2b_0+2b_1)x^2+(b_0+2b_1)x+b_1$$

y,

$$a_0x^4+(a_1-a_0)x^3+(a_2-a_1+2a_0)x^2+(-a_2+2a_1)x+2a_2$$

por lo que los términos del polinomio $qf-pg$ clasificados por grados son:

Grado	Término
4	b_0-a_0
3	$b_1+a_0-3b_0-a_1$
2	$2b_0-3b_1-a_2+a_1-2a_0$
1	$2b_1+b_0+a_2-2a_1$
0	b_1-2a_2

Y, para determinar el determinante bastará con resolver el sistema 5×5 y ver si hay solución no trivial para el sistema dado por:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

reduzcamos el sistema:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}
&\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

por lo que el sistema es trivial (rápidamente se obtiene con operaciones de suma y resta de filas de la matriz). Por lo que ambos polinomios no comparten raíces en común. $\square$

Ejercicio 1.7.1
En la carta 1, con la curva $y^2 - x^2 - x^3 = 0$ hacer la traslación $u_1 \mapsto u_1 + 1$ y comprobar que $E(v_1 = 0)$ y que f_1 es lisa y corta transversalmente a E.

Solución:
Obtuvimos la nueva curva a partir de la explosión:

$$v_1^2(1 - u_1^2 - u_1^3 v_1) = 0$$

haciendo $f_1(u_1, v_1) = 1 - u_1^2 - u_1^3 v_1$, hacemos $v_1 = 0$, con lo que obtenemos:

$$f(u_1, 0) = 1 - u_1^2 = (1 - u_1)(1 + u_1)$$

queremos ir al punto $(1, 0)$. Cambiamos $u_1 \mapsto u_2 + 1$ y a v_1 por v_2. Obtenemos en la curva original:

$$
\begin{aligned}
v_2^2(1 - (u_2 + 1)^2 - (u_2 + 1)^3 v_2) = 0 &\iff v_2^2(1 - u_2^2 - 2u_2 - 1 - v_2(u_2^3 + 3u_2^2 + 3u_2 + 1)) \\
&\iff v_2^2(-u_2^2 - 2u_2 - v_2(u_2^3 + 3u_2^2 + 3u_2 + 1))
\end{aligned}
$$

considerando el nuevo polinomio $f_2(u_2, v_2) = -u_2^2 - 2u_2 - v_2(u_2^3 + 3u_2^2 + 3u_2 + 1)$, con $v_2 = 0$ obtenemos que:

$$f(u_2, 0) = -u_2^2 - 2u_2 = -u_2(2 + u_2)$$

por lo que en efecto, E corta a la curva en dos puntos transversalmente (en 0 y -1). Además, es inmediato que esta nueva f_2 es lisa.

Se puede hacer lo análogo usando la transformación $u_1 \mapsto \bar{u_2} - 1$ y $v_1 \mapsto \bar{v_2}$ (resultando en lo análogo). $\square$