Lista 3. Extensiones normales.

1. Sea E/F una extensión de campos. Denotamos por $\mathrm{Aut}(E)$ (resp. $\mathrm{Aut}_F(E)$) al conjunto de los automorfismos (resp. F-automorfismos) de E. Demuestre que $\mathrm{Aut}(E)$ es un grupo con la composición de funciones, y que $\mathrm{Aut}_F(E)$ es un subgrupo de $\mathrm{Aut}(E)$.

2. Calcule $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$ y $\mathrm{Aut}_K(K(X))$ donde $K(X)$ es el campo de funciones racionales en la variable X sobre K.

3. Sea E el campo de descomposición de un polinomio $f(X) \in F[X]$ con $\deg(f) = n \geq 1$. Pruebe que $[E : F]$ divide a $n!$; más aún, el grupo $\mathrm{Aut}_F(E)$ está encajado en el grupo simétrico S_n de grado n.

de grado n.

4. Sean α, β algebraicos sobre F, y sean $f(X) = \operatorname{irr}(\alpha, F)$ y $g(X) = \operatorname{irr}(\beta, F)$ tales que $\deg(f)$ y $\deg(g)$ son primos relativos. Demuestre que g es irreducible sobre $F(\alpha)[X]$.

5. Sea α una raíz del polinomio $X^6 + X^3 + 1$ sobre $\mathbb{Q}$. Encuentre todos los homomorfismos de $\mathbb{Q}(\alpha)$ en $\mathbb{C}$. (Sugerencia: El polinomio es factor del polinomio $X^9 - 1$).

6. Encuentre el campo de descomposición de los siguientes polinomios sobre $\mathbb{Q}$, y el grado de tales campos de descomposición sobre $\mathbb{Q}$.

   a) $X^3 - 2$;

   b) $X^2 + X + 1$;

   c) $X^5 - 7$;

   d) $(X^3 - 2)(X^2 - 2)$;

   e) $X^6 + X^3 + 1$.

7. Sea α un número real tal que $X^4 = 5$. Demuestre lo siguiente:

   a) $\mathbb{Q}(i\alpha^2)$ es extensión normal sobre $\mathbb{Q}$;

   b) $\mathbb{Q}(\alpha + i\alpha)$ es extensión normal sobre $\mathbb{Q}(i\alpha^2)$, pero no sobre $\mathbb{Q}$.

8. Encuentre el campo de descomposición del polinomio $X^{p^8} - 1$ sobre el campo finito $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ de p elementos, con p número primo.

9. Sea E/F una extensión algebraica. Demuestre E/F es extensión normal si, y sólo si cada F-homomorfismo $\sigma : E \longrightarrow N$, donde N es cualquier extensión normal de F que contiene a E, se tiene que $\sigma(E) = E$.

10. Sea E/F una extensión algebraica. Demuestre que si $[E:F]=2$, entonces E/F es extensión normal.

11. Sean E/F una extensión normal, $f(X)$ un polinomio con coeficientes en F el cual es irreducible sobre $F[X]$. Sean $g(X)$ y $h(X)$ polinomios mónicos con coeficientes en E irreducibles sobre $E[X]$ los cuales son factores de $f(X)$. Pruebe que existe un F-automorfismo de E tal que $g^{\varphi}(X) = h(X)$.

12. Sea E/F extensión algebraica. Demuestre que la extensión E/F es normal si, y sólo si para cada polinomio irreducible $f(X) \in F[X]$, los factores irreducibles de $f(X)$ en $E[X]$ tienen el mismo grado.

Notes.

1)