

# Ejercicios Grupos Topológicos

Cristo Daniel Alvarado

13 de marzo de 2024

# Índice general

1. Ejercicios Capítulo 1	
--------------------------	--

2
---

# Capítulo 1

## Ejercicios Capítulo 1

### Ejercicio 1.0.1

Sea  $H$  un subgrupo denso abeliano de un grupo topológico  $G$ . Entonces,  $G$  es abeliano.

#### Demostración:

Por la proposición 1.3.2 (4), como  $ab = ba$  para todo  $a, b \in H$ , entonces se sigue que  $ab = ba$  para todo  $a, b \in \overline{H}$ . Como  $H$  es denso en  $G$  se tiene entonces que  $\overline{H} = G$ , es decir:

$$ab = ba, \quad \forall a, b \in G$$

por tanto,  $G$  es abeliano. ■

### Ejercicio 1.0.2

Suponga que  $H$  es un subgrupo denso de un grupo topológico  $G$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Pruebe que si  $x^n = e_G$  para todo  $x \in H$ , entonces los elementos del grupo  $G$  satisfacen la misma ecuación.

#### Demostración:

Sea  $f : G \rightarrow G$  tal que  $x \mapsto x^n$ . Esta es una función continua para la que se tiene que el conjunto

$$\begin{aligned} A &= f^{-1}(e_G) \\ &= \left\{ x \in G \mid f(x) = e_G \right\} \\ &= \left\{ x \in G \mid x^n = e_G \right\} \end{aligned}$$

es cerrado, pero  $H \subseteq A$ , luego  $G = \overline{H} \subseteq A$ , es decir que

$$x^n = e_G, \quad \forall x \in G$$
■

### Definición 1.0.1

Sea  $G$  un grupo. Decimos que  $G$  es **grupo de torsión** si para todo  $g \in G$  existe  $n_g \in \mathbb{N}$  tal que  $g^{n_g} = e_G$ .

**Ejercicio 1.0.3**

Sean  $G$  un grupo topológico y  $H$  un subgrupo denso de  $G$  tal que todo elemento  $h \in H$  es de orden finito. ¿Es  $G$  de torsión?

**Solución:**

Considere el grupo  $(\mathbb{S}^1, \cdot)$  donde:

$$\mathbb{S}^1 = \left\{ e^{ix} \in \mathbb{C} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

donde el producto  $\cdot$  es el producto usual de  $\mathbb{C}$ , dado por:

$$e^{ix} \cdot e^{iy} = e^{i(x+y)}$$

dotado de la topología  $\tau_{\mathbb{S}^1}$

$$\tau_{\mathbb{S}^1} = \left\{ U \cap \mathbb{S}^1 \mid U \text{ es abierto en } \mathbb{C} \right\}$$

es claro que las funciones  $f : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  tales que  $(e^{ix}, e^{iy}) \mapsto e^{i(x+y)}$  y,  $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  tales que  $e^{ix} \mapsto e^{-ix}$  son continuas ya que son reestricciones de funciones continuas de  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  a  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Es claro que el conjunto:

$$\mathbb{H}^1 = \left\{ e^{2\pi ir} \in \mathbb{S}^1 \mid r \in \mathbb{Q} \right\}$$

es subgrupo de  $(\mathbb{S}^1, \cdot)$ , el cual es denso en  $\mathbb{S}^1$ , para el que se cumple que todo elemento es de orden finito, pues si  $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ :

$$(e^{2\pi ir})^q = e^{2\pi ip} = 1$$

donde 1 es la identidad de  $(\mathbb{S}^1, \cdot)$ . Por ende, todo elemento del subgrupo denso  $\mathbb{H}^1$  es de orden finito, pero  $G$  no es de torsión, ya que el elemento

$$e^i$$

no es de orden finito. □

**Ejercicio 1.0.4**

Demuestre que si  $S$  es denso en un grupo topológico  $G$  y  $O$  es abierto no vacío en  $G$ , entonces  $O \cdot S = S \cdot O = G$ .

**Demostración:** ■**Ejercicio 1.0.5**

Sea  $G$  un grupo topológico. ¿Es  $G' = \left\{ xyx^{-1}y^{-1} \in G \mid x, y \in G \right\}$  un subgrupo de  $G$ ? ¿Es  $G'$  cerrado en  $G$ ?

**Solución:**

Afirmamos que  $G'$  no es subgrupo de  $G$ . En efecto, es claro que  $e \in G'$ , pero... (hay algo con el producto que falla)

Es cerrado, ya que si  $f : G \times G \rightarrow G$  es tal que  $(x, y) \mapsto xyx^{-1}y^{-1}$ , se tiene que  $f$  es una función continua para la cual

$$\begin{aligned} G' &= \left\{ xyx^{-1}y^{-1} \in G \mid x, y \in G \right\} \\ &= \left\{ f(x, y) \in G \mid (x, y) \in G \times G \right\} \\ &= f^{-1}(G) \end{aligned}$$

es decir, que  $G'$  es la imagen inversa de un cerrado (el conjunto  $G$ ) y, por ende es cerrado. □

**Ejercicio 1.0.6**

Pruebe que si  $G$  es un grupo topológico, entonces el conjunto

$$H = \left\{ g \in G \mid gx = xg, \forall x \in G \right\}$$

es un subgrupo cerrado normal de  $G$ .

**Demostración:**

Veamos que es subgrupo. En efecto, es claro que  $e_G \in H$ . Sean ahora  $g, h \in G$ , entonces se tiene que  $g^{-1} \in G$ , pues:

$$\begin{aligned} gx &= xg \\ \Rightarrow gxg^{-1} &= x \\ \Rightarrow xg^{-1} &= g^{-1}x \\ \Rightarrow g^{-1}x &= xg^{-1} \end{aligned}$$

$\forall x \in G$  y, además:

$$(gh)x = g(hx) = g(xh) = (gx)h = x(gh), \quad \forall x \in G$$

por tanto,  $gh \in H$ . Se sigue entonces que  $H$  es subgrupo de  $G$ .

Veamos que es normal. Sea  $g \in G$  y  $h \in G$ , hay que ver que  $ghg^{-1} \in H$ . En efecto, veamos que:

$$(ghg^{-1})x = (gg^{-1})hx = (e_G)xh = x(he_G) = x(hgg^{-1}) = x(ghg^{-1}), \quad \forall x \in G$$

por tanto,  $ghg^{-1} \in H$ . Luego,  $H$  es normal en  $G$ .

Ahora, como  $H$  es subgrupo, entonces  $\overline{H}$  también lo es... ■

**Ejercicio 1.0.7**

Sea  $G$  un grupo tal que todos sus elementos son de orden 2. Demuestre que  $G$  tiene que ser abeliano. Pruebe que si  $G$  es infinito, entonces admite una topología de Hausdorff no discreta.

**Demostración:**

Veamos que  $G$  es abeliano. En efecto, sean  $a, b \in G$ , se tiene entonces que:

$$(ab)^2 = (ab)(ab) = e_G$$

es decir, que  $ab = (ab^{-1}) = b^{-1}a^{-1}$ , pero  $a^{-1} = a$  y  $b^{-1} = b$ . Por ende,  $ab = ba$  luego,  $G$  es abeliano.

Suponga que  $G$  es infinito. (no sé). ■

**Ejercicio 1.0.8**

Dé un ejemplo de grupo que admite al menos dos topologías de Hausdorff de grupo distintas.

**Solución:**

□

**Ejercicio 1.0.9**

Sea  $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  el grupo multiplicativo de los números reales con la topología usual, y sean  $G' = \{-1, 1\}$  y  $G'' = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ .

1. Pruebe que  $G'$  y  $G''$  son subgrupos de  $G$ .

2. Pruebe que existe un isomorfismo topológico entre  $G/G'$  y  $G''$ .
3. Pruebe que  $G$  y  $G' \oplus G''$  son topológicamente isomorfos.
4. Pruebe que  $G' \cong \mathbb{Z}_2$ ,  $G'' \cong \mathbb{R}$  y, deduzca que  $G \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{R}$ .

**Demostración:**

De (1): Es claro que son subgrupos de  $G$ .

De (2): Notemos que:

$$\begin{aligned} G/G' &= \{G'a \mid a \in G\} \\ &= \{\{-1, 1\}a \mid a \in G\} \\ &= \{\{-a, a\} \mid a \in G\} \end{aligned}$$

Defina  $f : G'' \rightarrow G/G'$  tal que  $a \mapsto \{-a, a\}$ . Afirmamos que esta función es continua. En efecto, ■

**Ejercicio 1.0.10**

Sea  $GL(n, \mathbb{R})$  el grupo lineal general con la topología definida en un ejemplo anterior. Introduzcamos los siguientes subconjuntos de  $GL(n, \mathbb{R})$ ; el conjunto  $SL(n, \mathbb{R})$  de las matrices con determinante igual a 1; el conjunto  $TL(n, \mathbb{R})$  de las matrices triangulares superiores con los elementos de la diagonal principal iguales a 1; el conjunto  $O(n, \mathbb{R})$  de las matrices ortogonales. Pruebe lo siguiente:

1. Cada uno de los conjuntos  $SL(n, \mathbb{R})$ ,  $TL(n, \mathbb{R})$ ,  $O(n, \mathbb{R})$  es un subgrupo cerrado de  $GL(n, \mathbb{R})$ .
2.  $SL(n, \mathbb{R})$  es un subgrupo normal de  $GL(n, \mathbb{R})$ , pero  $TL(n, \mathbb{R})$  y  $O(n, \mathbb{R})$  no lo son si  $n \geq 2$ .

**Demostración:**

De (1): Primero, ya se sabe que  $GL(n, \mathbb{R})$  es grupo con el producto usual de matrices. Veamos que es grupo topológico con la topología dotada por la métrica:

$$d(A, B) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |A_{i,j} - B_{i,j}|^2}$$

ya que, la función  $(A, B) \mapsto AB^{-1}$  es continua (podemos verla como una función de  $\mathbb{R}^{n^2}$  a  $\mathbb{R}^n$  donde solo se involucran sumas, productos, cuadrados y diferencias de elementos de  $\mathbb{R}$ , por ende, es continua). Luego, es grupo topológico.

Ya se sabe que  $SL(n, \mathbb{R})$ ,  $TL(n, \mathbb{R})$ ,  $O(n, \mathbb{R})$  son subgrupos de  $GL(n, \mathbb{R})$ . Veamos que son cerrados.

1.  $SL(n, \mathbb{R})$  es cerrado. En efecto, la función determinante  $\det : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  es continua (vista como función de  $\mathbb{R}^{n^2}$  a  $\mathbb{R}$  lo es), además:

$$\begin{aligned} SL(n, \mathbb{R}) &= \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\} \\ &= \det^{-1}(1) \end{aligned}$$

donde  $\{1\} \subseteq \mathbb{R}$  es cerrado, luego  $SL(n, \mathbb{R})$  es cerrado.

2.  $TL(n, \mathbb{R})$  es cerrado. En efecto, la función s

■

**Ejercicio 1.0.11**

Sea  $G$  un grupo topológico abeliano. Pruebe que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $G_n = \{g \in G \mid g^n = e_G\}$  es un subgrupo cerrado de  $G$ . ¿Es válida la conclusión si el grupo  $G$  no es abeliano?

*Sugerencia.* Considere el grupo  $G = O(2, \mathbb{R})$ .

**Demostración:**

Veamos que es subgrupo. Sea  $n \in \mathbb{N}$ , es claro que  $e_G \in G_n$ . Además, si  $x, y \in G_n$ , entonces:

$$(xy^{-1})^n = x^n y^{-n} = e_G$$

pues, como  $y^n = e_G$ , entonces  $y^{-n} = e_G$ . Luego,  $xy^{-1} \in G_n$ . Por ende,  $G_n$  es subgrupo de  $G$ .

Veamos ahora que es cerrado. En efecto, notemos que la función  $f : G \rightarrow G$  tal que  $x \mapsto x^n$  es una función continua, y

$$\begin{aligned} G_n &= \{g \in G \mid g^n = e_G\} \\ &= \{g \in G \mid f(g) = e_G\} \\ &= \{g \in G \mid f(g) \in \{e_G\}\} \\ &= f^{-1}(e_G) \end{aligned}$$

donde el conjunto  $\{e_G\}$  es cerrado, luego  $G_n$  es cerrado.

Para la otra parte, considere  $G = O(2, \mathbb{R})$ , se tiene entonces que:

*asd*

■

**Ejercicio 1.0.12**

Sea  $S(X)$  el grupo de todas las permutaciones de un conjunto dado  $X$ , es decir,  $S(X)$  consta de todas las funciones biyectivas de  $X$  en  $X$ . Si  $n \in \mathbb{N}$  y  $x_1, \dots, x_n \in X$ , y  $y_1, \dots, y_n \in X$ , denotemos:

$$U(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \left\{ f \in S(X) \mid f(x_i) = y_i \text{ para todo } i \in [1, n] \right\}$$

Demuestre que la familia de todos los conjuntos  $U(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  forma base de una topología de grupo Hausdorff  $\mathcal{P}$  en  $S(X)$ . La topología  $\mathcal{P}$  se llama **topología de la convergencia puntual en  $S(X)$** .

**Demostración:**

Denotemos por  $\mathcal{U}$  a la familia de todos estos conjuntos. Si el conjunto es vacío, esta familia es vacía, por lo que no tiene sentido analizar este caso particular, suponga entonces que  $X \neq \emptyset$ .

Hay que verificar que se cumplen dos condiciones:

1. Sean  $m, n \in \mathbb{N}$ , y  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m, u_1, \dots, u_m \in X$ . Queremos ver que el conjunto:

$$U(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \cap U(z_1, \dots, z_m, u_1, \dots, u_m)$$

se expresa como unión de elementos de  $\mathcal{U}$ . En efecto, si  $f$  está en la intersección si y sólo si

$$f(x_i) = y_i \quad \text{y} \quad f(z_j) = u_j$$

$\forall i \in [1, n], j \in [1, m]$ , es decir que

$$f \in U(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m, y_1, \dots, y_n, u_1, \dots, u_m)$$

por tanto, se tiene que

$$U(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \cap U(z_1, \dots, z_m, u_1, \dots, u_m) = U(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m, y_1, \dots, y_n, u_1, \dots, u_m)$$

(podemos renombrar los  $x_i$  y  $z_j$  como algún  $\alpha_k$  y de manera análoga con los otros elementos de  $X$ , pero no es muy relevante a la demostración tal procedimiento).

2.  $X$  es unión de elementos de esta familia. En efecto, como  $X$  es no vacío, existe  $x_0 \in X$ , sea  $\mathcal{X}_{x_0} = \{U(x_0, y) \mid y \in X\}$ . Se tiene entonces que:

$$\bigcup_{U \in \mathcal{X}_{x_0}} U = X$$

en efecto, una contención es inmediata. Sea  $f \in S(X)$ , entonces  $f(x_0) \in X$ , luego  $f \in U(x_0, f(x_0)) \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{X}} U$ .

Luego,  $\mathcal{U}$  es base de una topología sobre  $S(X)$ .

Además, es Hausdorff. En efecto, sean  $f, g \in S(X)$  tales que  $f \neq g$ , entonces existe  $x \in X$  tal que  $f(x) \neq g(x)$ . Tenemos que:

$$f \in U(x, f(x)) \quad \text{y} \quad g \in U(x, g(x))$$

se tiene que  $U(x, f(x)) \cap U(x, g(x)) = \emptyset$  ya que los elementos de  $S(X)$  son funciones. Por ende, estos son dos abiertos disjuntos que contienen a  $f$  y  $g$ . Por tanto, el espacio es Hausdorff. ■

### Ejercicio 1.0.13

Sea  $S_f(X)$  el subgrupo de  $S(X)$  que consiste en todas las permutaciones de  $X$  que mueven a lo más un número finito de puntos. Pruebe que  $S_f(X)$  es denso en  $S(X)$ .

### Demostración:

Hay que probar que todo abierto no vacío en  $S(X)$  dotado de la topología  $\mathcal{P}$  del inciso anterior, contiene puntos de  $S_f(X)$ .

En efecto, sea  $U \subseteq S(X)$  abierto no vacío y  $f \in U$ . Por el ejercicio anterior, como  $\mathcal{U}$  es base de la topología  $\mathcal{P}$  sobre  $S(X)$ , existen  $n \in \mathbb{N}$  y  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in X$  tales que

$$f \in U(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \subseteq U$$

es decir, que  $f(x_i) = y_i$  para todo  $i \in [1, n]$ . Se tiene entonces que la función:

$$i_n(x) = \begin{cases} y_i & \text{si } x = x_i \text{ para algún } i \in [1, n] \\ x & \text{si } x \neq x_i \text{ para todo } i \in [1, n] \end{cases}$$

está en  $S_f(X)$  y, más aún, en  $U(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ , luego  $f \in U$ . Por tanto,  $U \cap S_f(X) \neq \emptyset$ .

Finalmente, se sigue que  $S_f(X)$  es denso en  $S(X)$ . ■

### Ejercicio 1.0.14 (Nombre)