Lista 9.

3.1. Sea S un subconjunto medible de $\mathbb{R}^n$ y sean $f : S \longrightarrow \mathbb{K}$, $g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones medibles en S. Se supone que $g(x) > 0$, $\forall x \in S$, y que existe $\lambda_0 > 0$ tal que la funcion $x \mapsto e^{-\lambda_0 g(x)} f(x)$ es integrable en S. Se pone, $\forall \lambda > \lambda_0$,

$$\Phi(\lambda) = \int_S e^{-\lambda g(x)} f(x) dx.$$

Muestre que Φ está bien definida, que es de clase C^∞ en $]\lambda_0, \infty[$ y que, $\forall k \in \mathbb{N}$ y $\forall \lambda > \lambda_0$,

$$\Phi^{(k)}(\lambda) = (-1)^k \int_S e^{-\lambda g(x)} (g(x))^k f(x) dx.$$

Como aplicación, **calcule**, para $\lambda > 0$ y $k \in \mathbb{N}$, la integral $\int_0^{\to\infty} e^{-\lambda x} x^k dx$.

Sugerencia. Tome $\lambda_1 > \lambda_0$ y pruebe que Φ es de clase C^∞ en $]\lambda_1, \infty[$. Para mayorar la función $x \mapsto e^{-\lambda g(x)}(g(x))^k f(x)$, con $\lambda \in]\lambda_1, \infty[$, por una función integrable independiente de λ, use el hecho (que tiene que justificar) de que la función $u \mapsto e^{-\alpha u} u^k$ es acotada en $]0, \infty[$, para $\alpha > 0$.

Dem.

Sea $h : S \times]\lambda_0, \infty[$, $(x, \lambda) \mapsto e^{-\lambda g(x)} f(x)$. Veamos que:

$$\phi(\lambda) = \int_S h(x,\lambda) dx, \ \forall \lambda > \lambda_0$$

cumple varias cosas.

i) ϕ está bien def. En efecto, sea $\lambda > \lambda_0$, ent.

$$-\lambda < -\lambda_0$$

$$\Rightarrow -\lambda g(x) < -\lambda_0 g(x), \ \forall x \in S$$

$$\Rightarrow e^{-\lambda g(x)} < e^{-\lambda_0 g(x)}, \ \forall x \in S.$$

$$\Rightarrow |f(x)| e^{-\lambda g(x)} < |f(x)| e^{-\lambda_0 g(x)}$$

dónde $x \mapsto |f(x)| e^{-\lambda_0 g(x)}$ es int. en S. Así $x \mapsto f(x) e^{-\lambda g(x)}$ es int. en S y por ende, ϕ está bien def.

ii) Sea $x \in S$. Probaremos que $f_x :]\lambda, \infty[\to \mathbb{R}$ es de clase C^∞. En efecto, veamos que:

$$\frac{df_x}{d\lambda}(\lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(f(x) e^{-\lambda g(x)}\right) = (-1)^1 g(x)^1 f(x) e^{-\lambda g(x)}, \ \forall \lambda > \lambda_0$$

Por inducción (sencillo) se prueba que:

$$f_x^{(k)}(\lambda) = (-1)^k g(x)^k f(x) e^{-\lambda g(x)}, \ \forall \lambda > \lambda_0$$

$\forall k \in \mathbb{N}$. Luego f_x es de clase C^k en $]\lambda_0, \infty[$.

iii) Sea $k \in \mathbb{N}$ y $\lambda_1 > \lambda_0$, probaremos que $\exists \ l_k \in \mathcal{L}_1(S, \mathbb{R})$ m

$$\left|(-1)^K g(x)^K f(x) e^{-\lambda g(x)}\right| = |f_x^{(K)}(\lambda)| \leq l(x), \ \forall x \in S \ \text{y} \ \forall \lambda > \lambda_1$$

Sea $\alpha > 0$. Probaremos que $u \overset{\zeta}{\mapsto} e^{-\alpha u} u^K$ es acotada en $[0,\infty[$. En efecto, claramente es dif. en $]0,\infty[$ y continua en $[0,\infty[$, con

$$\begin{aligned} \zeta'(u) &= -\alpha e^{-\alpha u} u^K + K e^{-\alpha u} u^{K-1} \\ &= u^{K-1} e^{-\alpha u}(K - \alpha u) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow u = 0 \ \text{o} \ u = \frac{K}{\alpha}, \text{ dónde:}$$

$$\zeta\left(\frac{K}{\alpha}\right) = e^{-K}\left(\frac{K}{\alpha}\right)^K = \left(\frac{K}{\alpha e}\right)^K \ \text{y} \ \zeta(0) = 0.$$

así, $\frac{K}{\alpha}$ es un máximo de ζ. Luego ζ es acotada en $[0,\infty[$. Por tanto $\forall K \in \mathbb{N}$ y $\forall x \in S$:

$$g(x)^K e^{-\lambda g(x)} \leq \left(\frac{K}{\lambda e}\right)^K < \left(\frac{K}{\lambda_1 e}\right)^K, \text{ si } \lambda_1 < \lambda$$

tomemos $l_K : S \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \left(\frac{K}{\lambda_1 e}\right)^K |f(x)|$. Claro que $l_K \in \mathcal{L}_1(S,\mathbb{R})$ y:

$$\left|(-1)^K g(x)^K f(x) e^{-\lambda g(x)}\right| \leq \left(\frac{K}{\lambda_1 e}\right)^K |f(x)| = l_K(x), \forall x \in S, \forall K \in \mathbb{N} \ \text{y} \ \forall \lambda > \lambda_1.$$

Por (i)-(iii), ϕ es de clase C^∞ en $]\lambda_1,\infty[$ y:

$$\phi^{(K)}(\lambda) = (-1)^K \int_S g^K(x) f(x) e^{-\lambda g(x)} dx, \ \forall \lambda > \lambda_1$$

pero, como $\lambda_1 > \lambda_0$ fue arb. lo ant. se cumple $\forall \lambda > \lambda_0$, así: se tiene el resultado.

Para la aplicación, se toma $g(x) = x$ y $f(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Si $\int$ es int. en $(0,B)$, ent.

$$\begin{aligned} \phi(\lambda) &= \int_0^B e^{-\lambda x} dx \\ &= \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^B \\ &= \frac{1}{\lambda}\left[1 - e^{-\lambda B}\right] \end{aligned}$$

$$\therefore \phi'(\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2}\left[1 - e^{-\lambda B}\right] + \frac{1}{\lambda}\left[B e^{-\lambda B}\right]$$

Está bien horrendo...

$\square$

3.2. i. Sea $\alpha \geqslant 0$. **Muestre** que la función $x \mapsto \frac{1-e^{-\alpha x^2}}{x^2}$ es integrable en $[0, \infty[$. Se pone

$$F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-\alpha x^2}}{x^2} dx.$$

Muestre que F es continua en $[0, \infty[$.

ii. **Pruebe** que, para $\alpha > 0$, se puede derivar F bajo el signo integral. Efectuando esta derivación, **calcule** explícitamente $F(\alpha)$.

Dem.

Sea $\alpha \geq 0$. Probaremos que $x \mapsto \frac{1-e^{-\alpha x^2}}{x^2}$ es integrable en $]0, \infty[$. En efecto, notemos antes que:

$$1 - e^{-\alpha x^2} = \int_0^{\alpha x^2} e^{-y}$$

$$= -e^{-y}\Big|_0^{\alpha x^2}$$

$$= -e^{-\alpha x^2} + 1$$

Por tanto:

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-\alpha x^2}}{x^2} dx = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2} \int_0^{\alpha x^2} e^{-y} dy$$

$$= \int_0^\infty dx \int_0^{\alpha x^2} \frac{e^{-y}}{x^2} dy$$

Por Fubini, como $(x,y) \mapsto \frac{e^{-y}}{x^2}$ es med. no neg. en $A \subseteq \mathbb{R}^2$.

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < \infty \text{ y } 0 < y < \alpha x^2\}$$

Ent.

$$\int_A \frac{e^{-y}}{x^2} dx dy = \int_{\pi(A)} dx \int_{A_x} \frac{e^{-y}}{x^2} dy$$

$$= \int_{\pi'(A)} dy \int_{A_y} \frac{e^{-y}}{x^2} dx$$

donde

$$\pi(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid (x,y) \in A\}$$

$$=]0, \infty[.$$

$$A_x = \{y \in \mathbb{R} \mid (x,y) \in A\}$$

$$=]0, \alpha x^2[$$

$$\pi'(A) =]0, \infty[.$$

$$A_y = \{x \in \mathbb{R} \mid (x,y) \in A\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid y < \alpha x^2\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{\tfrac{y}{\alpha}} < x\}$$
$$= \begin{cases} \left]\sqrt{\tfrac{y}{\alpha}}, \infty\right[& \text{si } y > 0. \\ \emptyset & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Por tanto:
$$I = \int_0^\infty \frac{1-e^{-\alpha x^2}}{x^2}\,dx = \int_0^\infty dy \int_{\sqrt{\frac{y}{\alpha}}}^\infty \frac{e^{-y}}{x^2}\,dx$$

Si $y > 0$, ent.
$$\int_{\sqrt{\frac{y}{\alpha}}}^\infty \frac{e^{-y}}{x^2}\,dx = e^{-y}\int_{\sqrt{\frac{y}{\alpha}}}^\infty \frac{dx}{x^2}$$
$$= e^{-y}\left[-\frac{1}{x}\right]_{\sqrt{\frac{y}{\alpha}}}^\infty$$
$$= e^{-y}\cdot\sqrt{\frac{\alpha}{y}}$$
$$\Rightarrow I = \int_0^\infty \sqrt{\alpha}\,\frac{e^{-y}}{\sqrt{y}}\,dy = \sqrt{\alpha}\int_0^\infty \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}}\,dy = \sqrt{\alpha}\int_0^\infty e^{-t}\,y^{\frac{1}{2}-1}\,dy = \sqrt{\alpha}\,\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) < \infty.$$

Por tanto:
$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-\alpha x^2}}{x^2}\,dx = \sqrt{\alpha\pi},\ \forall\, \alpha \geq 0.$$

Así, $F : [0,\infty[\to \mathbb{R}$, $\alpha \mapsto \int_0^\infty \frac{1-e^{-\alpha x^2}}{x^2}\,dx = \sqrt{\alpha\pi}$ está bien def. Probaremos que es continua. Sea $f :]0,\infty[\times [0,\infty[\to \mathbb{R}$, $(\alpha, x) \mapsto \frac{1-e^{-\alpha x^2}}{x^2}$.

i) Por lo ant. $\forall\, \alpha \geq 0$, $f^\alpha(x) = f(x,\alpha)$ es int. en $]0,\infty[$.

ii) Sea $x \in]0,\infty[$, veamos que $f_x : [0,\infty[\to \mathbb{R}$, $\alpha \mapsto f(x,\alpha)$ es continua, en efecto, es inmediato de la continuidad de la func. exponencial.

iii) Sea $\alpha \in [0,\infty[$. Tenemos dos casos:

1. $\alpha = 0$, consideremos la vecindad de 0, $[0, \frac{1}{2}[$, se tiene que
$$\forall\, \beta \in [0, \tfrac{1}{2}[,\quad \beta < \tfrac{1}{2}$$
$$\Rightarrow -\tfrac{1}{2} < -\beta$$
$$\Rightarrow -\tfrac{1}{2}x^2 < -\beta x^2,\ \forall\, x \in]0,\infty[$$
$$\Rightarrow e^{-\frac{1}{2}x^2} < e^{-\beta x^2}$$
$$\Rightarrow 1 - e^{-\beta x^2} < 1 - e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1-e^{-\beta x^2}}{x^2} < \frac{1-e^{-\frac{1}{2}x^2}}{x^2}$$

tome $g:]0,\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1-e^{-\frac{1}{2}x^2}}{x^2}$, se sigue que:

$$|f(x,\beta)| \leq g(x), \forall x \in]0,\infty[\text{ y } \forall \beta \in [0,\tfrac{1}{2}[$$

2. $\alpha > 0$. Considere la vecindad de α $]0,a[$ donde $\alpha < a$. Se tiene $\forall x \in]0,\infty[$, si $\beta \in]0,a[$:

$$\beta x^2 < a x^2$$

$$\Rightarrow -ax^2 < -\beta x^2$$

$$\Rightarrow 1-e^{-\beta x^2} < 1-e^{-ax^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1-e^{-\beta x^2}}{x^2} < \frac{1-e^{-ax^2}}{x^2}$$

tome $g:]0,\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1-e^{-ax^2}}{x^2}$. $g \in \mathcal{L}_1(]0,\infty[,\mathbb{R})$ y:

$$|f(x,\beta)| \leq g(x), \forall x \in]0,\infty[\text{ y } \forall \beta \in]0,a[$$

Por (i)-(iii), F es continua en $[0,\infty[$.

De (ii): Veamos que se cumple:

*) $\forall \alpha > 0$, $f^{\alpha}:]0,\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x,\alpha)$ es int. en $]0,\infty[$.

**) Sea $x \in]0,\infty[$, veamos que $f_x: [0,\infty[\to \mathbb{R}$, $\alpha \mapsto f(x,\alpha)$ es diferenciable. En efecto, $\forall \alpha_0 \in]0,\infty[$:

$$\frac{df}{d\alpha}(\alpha_0) = \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha_0) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1-e^{-\alpha x^2}}{x^2}\right)\Big|_{\alpha_0}$$

$$= e^{-\alpha x^2}\Big|_{\alpha_0} = e^{-\alpha_0 x^2}$$

***) Sea $\alpha > 0$. Considere una vecindad de α de la forma $]a,\infty[$ donde $0 < a < \alpha$. Ent.

$$\forall \beta \in]a,\infty[, \ a < \beta \Rightarrow -\beta < -a$$

$$\Rightarrow -\beta x^2 < -ax^2$$

$$\Rightarrow e^{-\beta x^2} < e^{-ax^2}, \forall x \in]0,\infty[$$

tome $g:]0,\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-ax^2}$. Claramente $g \in \mathcal{L}_1(]0,\infty[)$ y:

$$|f(x,\beta)| < g(x), \forall x \in]0,\infty[\text{ y } \forall \beta \in]a,\infty[$$

Por *)-***), F es derivable en $]0,\infty[$ y:

$$F'(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx \ , \forall \alpha \in]0,\infty[.$$

Sea $\alpha > 0$. Considere el cambio de var. $\phi :]0,\infty[\to]0,\infty[\ , \ u \mapsto \frac{1}{\sqrt{\alpha}} u$. Claro ϕ es isomorfismo C^1 y:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^\infty e^{-u^2} du$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\therefore F'(\alpha) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}$$

$$= \frac{1}{2}\alpha^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}$$

esta es una E.D.O. con sol.

$$F(\alpha) = \frac{\frac{1}{2}\alpha^{1/2}}{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi} + C$$

$$= \sqrt{\alpha\pi} + C \ , \forall \alpha \in]0,\infty[.$$

donde $C \in \mathbb{R}$. Como F es continua en $[0,\infty[$:

$$0 = F(0) \text{ (se prueba rápido).}$$

$$= \lim_{\alpha \to 0^+} \left(\sqrt{\alpha\pi} + C\right)$$

$$= 0 + C$$

$$= C$$

$$\therefore F(\alpha) = \sqrt{\pi\alpha} \ , \forall \alpha \geq 0.$$

$\square$

3.3. i. Partiendo de la relación elemental

$$\int_0^\infty e^{-x}\cos(ux)dx = \frac{1}{1+u^2}$$

calcule, para $\alpha, \lambda > 0$, la integral reiterada

$$\int_0^\alpha d\lambda \int_0^\lambda \frac{du}{1+u^2}$$

primero "directamente", luego integrando dos veces bajo el signo de integral (lo que se debe justificar). **Deduzca** que, para $\alpha > 0$, se tiene

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x}{\alpha}}\frac{1-\cos x}{x^2}dx = \arctan\alpha - \frac{1}{2\alpha}\log(1+\alpha^2).$$

ii. **Justifique** el paso al límite para $\alpha \to \infty$ bajo el signo integral en la última integral de (i). **Deduzca** la fórmula

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

De ahí **obtenga** mediante una integración por partes,

$$\int_0^{\to\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}.$$

Dem.

De (i): Observemos que:

$$\int_0^\alpha d\lambda \int_0^\lambda \frac{du}{1+u^2} = \int_0^\alpha \operatorname{atan}(u)\Big|_0^\lambda d\lambda$$
$$= \int_0^\alpha (\operatorname{atan}(\lambda)-\operatorname{atan}(0))d\lambda$$
$$= \int_0^\alpha \operatorname{atan}(\lambda)d\lambda$$
$$=(R)\int_0^\alpha \operatorname{atan}(\lambda)d\lambda$$

por Riemann y haciendo integración por partes:

$$u=\operatorname{atan}(\lambda);\quad dv=d\lambda$$
$$du=\frac{d\lambda}{1+\lambda^2};\quad V=\lambda$$
$$\therefore \int_0^\alpha \operatorname{atan}(\lambda)d\lambda = \lambda\operatorname{atan}(\lambda)\Big|_0^\alpha - \int_0^\alpha \frac{\lambda}{1+\lambda^2}d\lambda \quad \dots (1)$$

Con $\int_0^\alpha \frac{\lambda}{1+\lambda^2}d\lambda = \int_1^{1+\alpha^2}\frac{du}{2u} = \frac{1}{2}\ln(1+\alpha^2)$. Por tanto sust. en (1):

$$= \alpha\operatorname{atan}(\alpha) - \frac{1}{2}\ln(1+\alpha^2)$$

Para la otra parte, como:

$$\int_0^\alpha d\lambda \int_0^\lambda \frac{1}{1+u^2}du = \int_0^\alpha d\lambda \int_0^\lambda du \int_0^\infty e^{-x}\cos(ux)dx$$

al ser la función $(\lambda,u,x)\mapsto e^{-x}\cos(ux)$ integrable en A, dónde

$$A=\{(\lambda,u,x)\in\mathbb{R}^3 \mid \lambda\in[0,\alpha],\ u\in[0,\lambda],\ x\in[0,\infty[\}$$

ent.

$$|e^{-x}\cos(ux)\chi_A(\lambda,u,x)| \leq |e^{-x}\chi_A(\lambda,u,x)|$$
$$\leq e^{-x}\chi_B(\lambda,u,x)$$

con $B=\{(\lambda,u,x)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\leq\lambda,u\leq\alpha,\ x\in[0,\infty[\}$, siendo $(\lambda,u,x)\mapsto e^{-x}\chi_B(\lambda,u,x)$ int. Ent. por Fubini:

$$\int_0^\alpha d\lambda\int_0^\lambda du\int_0^\infty e^{-x}\cos(ux)dx = \int_A e^{-x}\cos(ux)d\lambda du dx$$
$$= \int_0^\alpha du\int_0^\infty dx\int_u^\alpha e^{-x}\cos(ux)d\lambda$$
$$= \int_0^\alpha du\int_0^\infty (\alpha-u)e^{-x}\cos(ux)dx$$
$$= \int_0^\alpha \frac{\alpha-u}{1+u^2}du$$

$$= \alpha \operatorname{atan}(\alpha) - \int_0^\alpha \frac{u}{1+u^2}\,du$$
$$= \alpha \operatorname{atan}(\alpha) - \frac{1}{2}\ln(1+\alpha^2)$$

que es lo mismo que se obtuvo arriba. De esta forma:

$$\int_A e^{-x}\cos(ux)\,d\lambda\,du\,dx = \alpha \operatorname{atan}(\alpha) - \frac{1}{2}\ln(1+\alpha^2)$$

y:

$$\int_A e^{-x}\cos(ux)\,d\lambda\,du\,dx = \int_0^\infty dx \int_0^\alpha d\lambda \int_0^\lambda e^{-x}\cos(ux)\,du$$
$$= \int_0^\infty dx \int_0^\alpha \frac{e^{-x}}{x}\operatorname{sen}(ux)\Big|_0^\lambda d\lambda$$
$$= \int_0^\infty dx \int_0^\alpha \frac{e^{-x}}{x}\operatorname{sen}(\lambda x)\,d\lambda$$
$$= \int_0^\infty dx\, \frac{e^{-x}}{x^2}\left(-\cos(\lambda x)\right)\Big|_0^\alpha$$
$$= \int_0^\infty \frac{e^{-x}(1-\cos(\alpha x))}{x^2}\,dx$$

Sea $u = \alpha x$, ent.

$$= \frac{\alpha^2}{\alpha}\int_0^\infty \frac{e^{-u/\alpha}(1-\cos(u))}{u^2}\,du$$
$$= \alpha \int_0^\infty \frac{e^{-u/\alpha}}{u^2}\cdot(1-\cos u)\,du$$
$$\therefore \int_0^\infty \frac{e^{-x/\alpha}}{x^2}(1-\cos x)\,dx = \operatorname{atan}(\alpha) - \frac{1}{2\alpha}\ln(1+\alpha^2)$$

De (ii): Sea $\{\alpha_v\}_{v=1}^\infty$ una sucesión en $]0,\infty[$ que diverge a ∞. Veamos que:

$$0 < \alpha_v$$
$$\Rightarrow\ 0 < \frac{1}{\alpha_v}$$
$$\Rightarrow\ e^{-\frac{x}{\alpha_v}} < 1$$
$$\Rightarrow\ e^{-\frac{x}{\alpha_v}}\frac{1-\cos x}{x^2} \leq \frac{1-\cos x}{x^2},\ \forall v \in \mathbb{N} \text{ y } \forall x \in]0,\infty[.$$

dónde $x \mapsto \frac{1-\cos x}{x^2}$ es int. en $]0,\infty[$. Defina

$$f_v(x) = e^{-\frac{x}{\alpha_v}}\frac{1-\cos x}{x^2},\ \forall x \in]0,\infty[,\ \forall v \in \mathbb{N}$$

Como $\lim_{v\to\infty} f_v(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$ puntualmente en $]0,\infty[$, ent. por Lebesgue:

$$\lim_{v\to\infty}\int_0^\infty e^{-\frac{x}{\alpha_v}}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$$

En part. al ser $\{\alpha_v\}_{v=1}^\infty$ arbitraria:

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \lim_{\alpha\to\infty}\int_0^\infty e^{-\frac{x}{\alpha}}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$$

$$= \lim_{\alpha \to \infty} \left(\alpha \operatorname{atan}(\alpha) - \frac{\ln(1+\alpha^2)}{2\alpha} \right)$$

Con $\lim_{\alpha \to \infty} \frac{\ln(1+\alpha^2)}{2\alpha} = \lim_{\alpha \to \infty} \frac{1}{2(1+\alpha^2)} = 0$. Luego:

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

Integrando por partes y usando T.C.M, como $x \mapsto \frac{1-\cos x}{x^2}$ es no neg. en $]0,\infty[$:

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2} dx = \lim_{n \to \infty} \int_{1/n}^n \frac{1-\cos x}{x^2} dx$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[\frac{\cos x - 1}{x} \Big|_{1/n}^n + \int_{1/n}^n \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx \right]$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[\frac{\cos(n)-1}{n} - n\left(\cos\left(\tfrac{1}{n}\right) - 1\right) \right] + \lim_{n \to \infty} \int_{1/n}^n \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$$

$$= 0 - 0 + \lim_{n \to \infty} \left(\int_{1/n}^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx + \int_1^n \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx \right)$$

$$= \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx + \lim_{n \to \infty} \int_1^n \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$$

$$= \int_0^{\to\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$$

$$\therefore \int_0^{\to\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

y:

$$\int_0^\infty \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)^2 dx = \lim_{n \to \infty} \int_{1/n}^n \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)^2 dx$$

$u = \operatorname{sen}^2 x$ $\quad dv = \frac{dx}{x^2}$

$du = 2 \operatorname{sen} x \cos x \, dx$ $\quad v = -\frac{1}{x}$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[-\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} \Big|_{1/n}^n + \int_{1/n}^n \frac{2\operatorname{sen}(2x)}{x} dx \right]$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[n \operatorname{sen}^2\left(\tfrac{1}{n}\right) - \frac{\operatorname{sen}^2(n)}{n} \right] + \lim_{n \to \infty} \int_{1/n}^n \frac{2\operatorname{sen}(2x)}{x} dx$$

$$= 0 + 0 + \int_0^{\to\infty} \frac{2\operatorname{sen}(2x)}{x} dx$$

$$= \int_0^{\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(u)}{u} du$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

$\square$

3.4. Se definen, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2 \quad \text{y} \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} dt.$$

i. **Demuestre** que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + g'(x) = 0$ y **deduzca** que $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$.

ii. Utilice (i) para probar que $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Dem.

De (i): Claramente f y g están bien def. Para calcular f' y g' usaremos el teorema de derivación.

Notemos que:

$$\int_0^x e^{-t^2}dt = \int_0^1 \frac{1}{|x|} e^{-u^2x^2} du = \frac{1}{|x|}\int_0^1 e^{-u^2x^2} du, \text{ si } x \neq 0.$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x=0. \\ \frac{1}{x^2}\left(\int_0^1 e^{-t^2x^2} dt\right)^2 = \frac{1}{x^2}\left(\int_{[0,1]^2} e^{-x^2(u^2+v^2)} du dv\right), \text{ si } x\neq 0. \end{cases}$$

1) f y g están bien def.

2) Sea $t\in[0,1]$, veamos que $x \mapsto \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}$ es dif. $\forall\, x\in\mathbb{R}$. En efecto, se tiene que para $x\in\mathbb{R}$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\right) = -2xe^{-x^2(t^2+1)}$$

y, $\forall\,(u,v)\in[0,1]^2$ y $\forall\, x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ tenemos que la función $x\mapsto e^{-x^2(u^2+v^2)}$ es dif. $\forall\,u, v\in[0,1]$, en efecto:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-x^2(u^2+v^2)}\right) = -2x(u^2+v^2)e^{-x^2(u^2+v^2)}$$

3) Sea $x_0\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ Considere una vecindad de x_0 de la forma $]a,b[$ donde $a<x<b$. Ent. $\exists\, g_1(t)=-2a, \forall\, t\in[0,1]$ y $g_2(u,v)=-2a, \forall\,(u,v)\in[0,1]^2$. Claramente $g_1\in\mathcal{L}_1([0,1],\mathbb{R})$, $g_2\in\mathcal{L}_1([0,1]^2,\mathbb{R})$ y son m

$$-2xe^{-x^2(t^2+1)} \leq g_1(t), \forall\, t\in[0,1]$$
$$-2x(u^2+v^2)e^{-x^2(u^2+v^2)} \leq g_2(u,v), \forall\,(u,v)\in[0,1]^2$$

(dónde $a<b<0$ ó $0<a<b$).

Por tanto, f y g son dif. en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (g también lo es en 0) y:

$$f'(x) = \int_{[0,1]^2} -2x(u^2+v^2)e^{-x^2(u^2+v^2)} du dv$$
$$= -2x\left(\int_0^1 t^2 e^{-x^2t^2} dt\right)^2$$
$$g'(x) = \int_0^1 -2xe^{-x^2(t^2+1)} dt$$
$$= -2x\int_0^1 e^{-x^2(t^2+1)} dt$$

$\forall\, x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Ent.

$$\Rightarrow f'(x)+g'(x) = -2x\left[\left(\int_0^1 t^2 e^{-x^2t^2} dt\right.\right.$$

3.5. i. Para $x > 0,\ y > 0,\ x \neq y$, **demuestre** por un cálculo elemental que

$$f(x,y) = \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2x^2)(1+t^2y^2)} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{x+y}.$$

Pruebe que f es continua en el conjunto $\{(x,y) \mid x > 0,\ y > 0\}$ y deduzca que el resultado precedente sigue válido si $x = y$.

ii. Evaluando de dos modos distintos la integral reiterada $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx$, **demuestre** que

$$\int_0^\infty \left(\frac{\arctan x}{x}\right)^2 dx = \pi \log 2$$

Dem.

1)

De (i): Observemos que:

$$\therefore \frac{1}{(1+(tx)^2)(1+(ty)^2)} = \frac{x^2}{x^2-y^2}\cdot\frac{1}{1+(tx)^2} + \frac{y^2}{y^2-x^2}\cdot\frac{1}{1+(ty)^2},\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

por tanto:

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2x^2)(1+t^2y^2)} = \frac{x^2}{x^2-y^2}\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2x^2} + \frac{y^2}{y^2-x^2}\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2y^2}$$

$$= \frac{x^2}{x^2-y^2}\cdot\frac{1}{x}\int_0^\infty \frac{du}{1+u^2} + \frac{y^2}{y^2-x^2}\cdot\frac{1}{y}\int_0^\infty \frac{du}{1+u^2}$$

$$= \frac{1}{x+y}\operatorname{atan} u \Big|_0^\infty$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x+y},\ \forall x,y > 0,\ x \neq y.$$

Suponga ahora que $x = y$, ent.

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2x^2)(1+t^2y^2)} = \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2x^2)^2},\ \text{sea } u = xt \Rightarrow du = x\,dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{du}{x(1+u^2)^2}$$

$$= \frac{1}{x}\int_0^\infty \frac{du}{(1+u^2)^2} \qquad u = \tan\theta$$

$$= \ldots$$

$$= \frac{1}{2x}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x+y}$$

luego, f es continua en $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x,y > 0\}$.

De (ii): Veamos que:

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx\,dy = \frac{\pi}{2}\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{1}{x+y}dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^1 \left(\ln(x+y)\Big|_{x=0}^{x=1} \right)dy$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^1 \ln(1+y) - \ln(y)\,dy$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^1 \ln\left(\frac{1+y}{y}\right)dy$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \ln\left(1+\frac{1}{y}\right) dy$$

Sea $u = \frac{1}{y} \Rightarrow du = -\frac{1}{y^2}\, dy$, así:

$$= \frac{\pi}{2} \int_1^\infty y^2 \ln(1+u)\, du$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_1^\infty \frac{\ln(1+u)}{u^2}\, du \quad \ldots (1)$$

Ahora, veamos que por Fubini para med. no neg.

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)\, dx = \int_0^\infty dt \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2x^2)(1+t^2y^2)}\, dx$$

$$= \int_0^\infty dt \left(\int_0^1 \frac{du}{(1+t^2u^2)} \right)^2$$

tome $x = tu \Rightarrow dx = t\, du$, así:

$$= \int_0^\infty \left(\frac{1}{t} \int_0^t \frac{du}{1+u^2} \right)^2$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{\operatorname{atan}(t)}{t} \right)^2 dt$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{\operatorname{atan} x}{x} \right)^2 dx$$

Retomando, por (1):

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{y+1}{y}\right) dy = \int_0^1 \ln\left(1+\frac{1}{y}\right) dy$$

Por Conv. monotona (por ser $y \mapsto \ln\left(1+\frac{1}{y}\right)$ med no neg. en $]0,1]$):

$$= \lim_{\alpha \to 0^+} \int_\alpha^1 \ln\left(1+\frac{1}{y}\right) dy$$

$$= \lim_{\alpha \to 0^+} \left[y \ln\left(1+\frac{1}{y}\right) \Big|_\alpha^1 + \int_\alpha^1 \frac{y}{y^2+y}\, dy \right]$$

$$= \lim_{\alpha \to 0^+} \left[\ln(2) - \alpha \ln\left(1+\frac{1}{\alpha}\right) + \int_\alpha^1 \frac{dy}{1+y} \right]$$

$$= \ln(2) + \lim_{\alpha \to 0^+} \int_\alpha^1 \frac{dy}{1+y}$$

$$= \ln(2) + \lim_{\alpha \to 0^+} \ln(y+1) \Big|_\alpha^1$$

$$= 2\ln(2) + \lim_{\alpha \to 0^+} \ln(1+\alpha)$$

$$= 2\ln(2)$$

$$\therefore \int_0^\infty \left(\frac{\operatorname{atan} x}{x} \right)^2 dx = 2\ln(2) \cdot \frac{\pi}{2} = \pi \ln(2)$$

$\square$

3.6. Fijando $a > 0$, se pone, $\forall b \geqslant 0$,

$$f(b) = \int_0^{\infty} e^{-ax^2}\cos(bx)dx.$$

Establezca la identidad $f'(b) = -\frac{b}{2a}f(b)$. **Deduzca** que

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^x}\cos(bx)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

Sol.

Defina $F : [0,\infty[\times [0,\infty[\to \mathbb{R}$, $(x,b) \mapsto e^{-ax^2}\cos(bx)$. Tenemos que:

i) $F^b : [0,\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-ax^2}\cos(bx)$ es int. $\forall b \geqslant 0$, pues si $b \geqslant 0$:

$$\Rightarrow |e^{-ax^2}\cos(bx)| \leq e^{-ax^2}, \ \forall x \in [0,\infty[$$

donde $x \mapsto e^{-ax^2}$ es int. en $[0,\infty[$. Luego f está bien def.

ii) $\forall x \in [0,\infty[$, $F_x : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ es dif. en $[0,\infty[$, pues:

$$\frac{\partial}{\partial b}\left(e^{-ax^2}\cos(bx)\right) = -e^{-ax^2}x\sin(bx)dx$$

$\forall b \in [0,\infty[$.

iii) Sea $b_0 \in [0,\infty[$. Considere una vecindad de b_0 de la forma $[0,B[$ donde $0 \leqslant b_0 < B$. Ent. tomando $g(x) = xe^{-ax^2}$. $\forall x \in [0,\infty[$, tenemos que:

$$\forall b \in [0,B[, \ |-xe^{-ax^2}\sin(bx)| \leqslant xe^{-ax^2}$$

con $g \in \mathcal{L}_1([0,\infty[, \mathbb{R})$.

Por (i)-(iii), f es dif. en $[0,\infty[$ y:

$$f'(b) = \int_0^{\infty} -xe^{-ax^2}\sin(bx)dx$$
$$= -\int_0^{\infty} xe^{-ax^2}\sin(bx)dx.$$

Como $x \mapsto xe^{-ax^2}\sin(bx)$ es int. ent.

$$-\int_0^{\infty} xe^{-ax^2}\sin(bx)dx = -\int_0^{\to\infty} xe^{-ax^2}\sin(bx)dx$$
$$= -\lim_{M\to\infty}\left(\int_0^M xe^{-ax^2}\sin(bx)dx\right)$$
$$= -\lim_{M\to\infty}\left(\frac{1}{2a}e^{-ax^2}\sin(bx)\Big|_0^M - \int_0^M \frac{b}{2a}e^{-ax^2}\cos(bx)dx\right)$$
$$= -\lim_{M\to\infty}\left(\frac{1}{2a}e^{-aM^2}\sin(bM) - 0 - \frac{b}{2a}\int_0^M e^{-ax^2}\cos(bx)dx\right)$$
$$= \frac{b}{2a}\lim_{M\to\infty}\int_0^M e^{-ax^2}\cos(bx)dx$$
$$= \frac{b}{2a}\int_0^{\to\infty} e^{-ax^2}\cos(bx)dx$$

$$= \frac{b}{2a}\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\cos(bx)\,dx$$

$$= \frac{b}{2a} f(b)$$

$$\forall b \geqslant 0, \quad \therefore f'(b) = -\frac{b}{2a} f(b) \quad \ldots (1)$$

Pues $\int_0^{\to\infty} e^{-ax^2}\cos(bx)\,dx$ es abs. conv. (1) es una E.D.O. con solución:

$$f(b) = C e^{-\frac{b^2}{4a}}, \quad \forall b \geqslant 0.$$

Cuando $b = 0$:

$$f(b) = \int_0^{\infty} e^{-ax^2}\cos(0x)\,dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-ax^2}\,dx, \quad u = \sqrt{a}\,x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{\infty} e^{-u^2}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$= C e^{-\frac{0^2}{4a}}$$

$$= C$$

$$\therefore f(b) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{b^2}{4a}}$$

$\square$

3.7. i. Fijando $a > 0$, se pone, $\forall b \geqslant 0$,

$$f(b) = \int_0^{\infty} e^{-\left(ax^2 + \frac{b}{x^2}\right)}\,dx.$$

Muestre que si $b > 0$, se tiene $f'(b) = -\sqrt{\frac{a}{b}}\, f(b)$.

Sugerencia. Derive bajo el signo de integral y use el cambio de variables $x = \sqrt{\frac{b}{a}\frac{1}{y}}$.

ii. **Demuestre** que, $\forall a > 0$ y $\forall b \geqslant 0$,

$$\int_0^{\infty} e^{-\left(ax^2 + \frac{b}{x^2}\right)}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-2\sqrt{ab}}.$$

3.8. i. Derivando bajo el signo de integral la función $\lambda \mapsto \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\lambda}$, para $\lambda > 0$, **establezca** la fórmula

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\lambda)^{k+1}} = \frac{\pi}{2}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{1}{\lambda^{k+\frac{1}{2}}}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

ii. **Muestre** que

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_0^\infty \frac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^\nu} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

iii. Utilizando (i) y (ii) **obtenga** la **fórmula de Wallis**

$$\sqrt{\pi} = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{\sqrt{m}}\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}.$$

Sugerencia. Para demostrar (ii) use sus conocimientos de cálculo. En (iii) ponga $\lambda = m = k$.

Dem.

De (i): Sea $f:]0,\infty[\times]0,\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x,\lambda) \mapsto \frac{1}{x^2+\lambda}$. $\forall \lambda \in]0,\infty[$, define:

$$\phi(\lambda) = \int_0^\infty f(x,\lambda)\,dx$$

Afirmamos varias cosas:

1) $\phi:]0,\infty[\to \mathbb{R}$ está bien def. En efecto, sea $\lambda \in]0,\infty[$, ent.

$$\frac{1}{x^2+\lambda}\chi_{]0,\infty[}(x) \leq \frac{1}{\lambda}\chi_{]0,1[}(x) + \frac{1}{x^2+\lambda}\chi_{[1,\infty[}(x)$$

donde las dos func. de la der. son int. Pues $\frac{1}{x^2+\lambda} \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$.

2) La función $f_x:]0,\infty[\to \mathbb{R}$ es $C^\infty(]0,\infty[)$, en efecto, claramente

$$f_x'(\lambda) = -\frac{1}{(x^2+\lambda)^2}, \ \forall x \in]0,\infty[.$$

Afirmamos que:

$$f_x^{(k)}(\lambda) = (-1)^k k! \frac{1}{(x^2+\lambda)^{k+1}}, \ \forall x \in]0,\infty[$$

$\forall k \in \mathbb{N}$. En efecto, para $k=1$ se cumple. Suponga que se cumple para algún $k \in \mathbb{N}$, ent.

$$\begin{aligned} f_x^{(k+1)}(\lambda) &= (-1)^k k! \cdot \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{(x^2+\lambda)^{k+1}}\right) \\ &= (-1)^{k+1}(k+1)! \frac{1}{(x^2+\lambda)^{(k+1)+1}}, \ \forall x \in]0,\infty[\end{aligned}$$

Aplicando inducción se tiene lo deseado. Por tanto f_x es clase C^∞ en $]0,\infty[$.

3) Sea $\lambda_0 > 0$. Ent. se tiene que: $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\left|(-1)\frac{k!}{(x^2+\lambda)^{k+1}}\right| \leq \frac{k!}{(x^2+\lambda_0)^{k+1}}, \ \forall \lambda > \lambda_0, \ \forall x \in]0,\infty[$$

Por 1)-3), se tiene que ϕ es clase C^k en $]\lambda_0,\infty[$, y: (usando el t. de derivación):

$$\phi^{(k)}(\lambda) = \int_0^\infty \frac{(-1)^k k!}{(x^2+\lambda)^{k+1}}\,dx, \ \forall \lambda > \lambda_0$$

Pero, como el λ_0 fue arbitrario:

$$\Rightarrow \phi^{(K)}(\lambda) = \int_0^\infty \frac{(-1)^K K!}{(x^2+\lambda)^{K+1}}\,dx$$

Observemos ahora que para $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned}\phi(\lambda) &= \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\lambda}\\ &= \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{\lambda^{1/2}}\right)^2}\\ &= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\lambda^{1/2}}\end{aligned}$$

Como ϕ es clase C^∞ en $]0,\infty[$ se sigue que:

$$\begin{aligned}\phi'(\lambda) &= \left(\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\cdot(-1)\frac{1}{\lambda^{1+\frac{1}{2}}}\\ &= (-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\lambda^{1+\frac{1}{2}}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\lambda)^2} &= \frac{1}{1!}\cdot\frac{(-1)}{(-1)}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\lambda^{2+\frac{1}{2}}}\\ &= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2(1)-1)!!}{(2(1))!!}\cdot\frac{1}{\lambda^{1+\frac{1}{2}}},\ \forall \lambda>0.\end{aligned}$$

Probaremos el resultado por inducción. Por lo ant. se cumple para $K=1$. Suponga se cumple para algún $K \in \mathbb{N}$. Ent.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\lambda)^{(K+1)+1}} &= \frac{1}{(-1)^{K+1}(K+1)!}\int_0^\infty \frac{(-1)(K+1)!\,dx}{(x^2+\lambda)^{(K+1)+1}}\\ &= \frac{1}{(-1)^{K+1}(K+1)!}\,\phi^{(K+1)}(\lambda)\\ &= \frac{1}{(-1)^{K+1}(K+1)!}\,\frac{d}{d\lambda}\left(\phi^{(K)}(\lambda)\right)\\ &= \frac{1}{(-1)^{K+1}(K+1)!}\cdot\frac{d}{d\lambda}\left(\int_0^\infty\frac{(-1)^K K!}{(x^2+\lambda)^{K+1}}\,dx\right)\\ &= \frac{-1}{K+1}\,\frac{d}{d\lambda}\left(\int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+\lambda)^{K+1}}\right)\\ &= -\frac{1}{K+1}\cdot\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2K-1)!!}{(2K)!!}\cdot\frac{1}{\lambda^{K+\frac{1}{2}}}\right)\\ &= \frac{1}{K+1}\cdot\left(\frac{2K+1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2K-1)!!}{(2K)!!}\cdot\frac{1}{\lambda^{(K+1)+\frac{1}{2}}}\\ &= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2K+1)!!}{(2(K+1))!!}\cdot\frac{1}{\lambda^{(K+1)+\frac{1}{2}}}\end{aligned}$$

Aplicando inducción se tiene lo deseado.

De (ii): $\forall\, v \in \mathbb{N}$ defina: $f_v :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ como:

$$f_v(x) = \left[\left(1+\frac{x^2}{v}\right)^v\right]^{-1},\ \forall x \in]0,\infty[$$

$\{f_v\}$ es una sucesión decreciente de func. que conv. c.t.p. a:

$$\lim_{v\to\infty} f_v(x) = e^{-x^2}, \forall x \in]0,\infty[$$

y, se cumple que:

$$|f_v(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}, \forall x \in]0,\infty[, \forall v \in \mathbb{N}.$$

dónde $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ es int. en $]0,\infty[$. Por tanto, usando el T. de Lebesgue:

$$\lim_{v\to\infty} \int_0^\infty \frac{1}{(1+\frac{x^2}{v})^v} dx = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

De (iii): Hagamos $v = \lambda = m = K$. Ent. $\forall m \in \mathbb{N}$, por (i):

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+m)^{m+1}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{1}{m^{m+\frac{1}{2}}}$$
$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{dx}{(\frac{x^2}{m}+1)^{m+1}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \sqrt{m}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \frac{(2m)!!}{(2m-1)!!} = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\int_0^\infty \frac{dx}{(\frac{x^2}{m}+1)^{m+1}} \right)^{-1}$$

Por Lebesgue, como en (ii):

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^\infty \frac{dx}{(\frac{x^2}{m}+1)^{m+1}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
$$\Rightarrow \lim_{m\to\infty} \left(\int_0^\infty \frac{dx}{(\frac{x^2}{m}+1)^{m+1}} \right)^{-1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$
$$\therefore \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \frac{(2m)!!}{(2m-1)!!} = \sqrt{\pi}$$

$\square$

3.9. i. Sea $0 < z < 1$. **Demuestre** que

$$\int_0^\infty \frac{y^{z-1}}{1+y} dy = B(z, 1-z) = \Gamma(z)\Gamma(1-z).$$

Sugerencia. Haga el cambio de variables $t = \frac{y}{1+y}$ en la integral que define la función beta.

ii. Fijez tal que $0 < z < 1$. Se define $f :]-\pi, \pi[\longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$f(\lambda) = \int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{e^{i\lambda}x + 1} dx, \qquad \forall \lambda \in]-\pi, \pi[.$$

Demuestre que se puede calcular $f'(\lambda)$ por una derivación bajo el signo de integral. Mediante una integración por partes, **pruebe** que $f'(\lambda) = -izf(\lambda)$. Deduzca que se verifica una relación $f(\lambda) = \gamma(z)e^{-i\lambda z}$ donde $\gamma(z)$ depende solamente de z y no de λ.

iii. **Muestre** que

$$\gamma(z)\sin(\lambda z) = -\frac{1}{2i}f(\lambda) + \frac{1}{2i}f(-\lambda) = \sin\lambda \int_0^\infty \frac{x^z dx}{x^2 + 2x\cos\lambda + 1}.$$

Suponiendo ahora $0 < \lambda < \pi$, **obtenga** por un cambio de variable

$$\gamma(z)\sin(\lambda z) = \int_{\cot\lambda}^\infty \frac{(u\sin\lambda - \cos\lambda)^z}{1+u^2} du.$$

Por un paso al límite para $\lambda \to \pi$, que debe justificar, **pruebe** finalmente que $\gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$. De ahí resulta la siguiente **fórmula de los complementos**

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \qquad \forall z \in]0, 1[.$$

Dem.

De (i): Recordamos que se define la func. Beta de Euler como sigue: $\forall x,y>0$:

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

Considere el isomorfismo C^1 $\phi:]0,\infty[\to]0,1[$, $y\mapsto \frac{y}{1+y}$. Por el T.C.V.

$$B(z,1-z)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{-z}\,dt$$

$$=\int_{\phi(]0,\infty[)} t^{z-1}(1-t)^{-z}\,dt$$

$$=\int_0^\infty |J\phi(y)|\left(\frac{y}{1+y}\right)^{z-1}\cdot\left(1-\frac{y}{1+y}\right)^{-z}dy$$

donde $|J\phi(y)|=\frac{1}{1+y}-\frac{y}{(1+y)^2}=\frac{1+y-y}{(1+y)^2}=\frac{1}{(1+y)^2}$. Por tanto:

$$=\int_0^\infty \frac{1}{(1+y)^2}\,\frac{y^{z-1}}{(1+y)^{z-1}}\cdot\frac{1^{-z}}{(1+y)^{-z}}\,dy$$

$$=\int_0^\infty \frac{y^{z-1}}{1+y}\,dy$$

y, por la fórmula de Γ y B, se tiene:

$$\int_0^\infty \frac{y^{z-1}}{1+y}\,dy=B(z,1-z)=\Gamma(z)\Gamma(1-z).$$

De (ii): Veamos que se cumplen varias cosas:

Sea $F:]0,\infty[\times]-\pi,\pi[\to\mathbb{C}$, $(x,\lambda)\mapsto\frac{x^{z-1}}{e^{i\lambda}x+1}$. Se tiene:

1) $\forall\lambda\in]-\pi,\pi[$, $F^\lambda:]0,\infty[$, $x\mapsto F(x,\lambda)$ es int. en $]0,\infty[$. En efecto, sea $\lambda\in]-\pi,\pi[$.

Ent.

$$\left|\frac{x^{z-1}}{e^{i\lambda}x+1}\right|\leq x^{z-1}\cdot\left|\frac{1}{x\cos\lambda+ix\operatorname{sen}\lambda+1}\right|$$

$$=x^{z-1}\cdot\left|\frac{1}{(1+x\cos\lambda)+i(x\operatorname{sen}\lambda)}\right|$$

$$=x^{z-1}\cdot\frac{1}{[(1+x\cos\lambda)^2+(x\operatorname{sen}\lambda)^2]^{1/2}}$$

$$=\frac{x^{z-1}}{(1+2x\cos\lambda+x^2)^{1/2}}$$

dónde $x\mapsto\frac{x^{z-1}}{(1+2x\cos\lambda+x^2)^{1/2}}$ es int. en $]0,1[$ por ser cont. en $[0,1]$ y en $[1,\infty[$ pues:

$$\frac{x^{z-1}}{(1+2x\cos\lambda+x^2)^{1/2}}\underset{x\to\infty}{\sim}x^{z-2}$$

con $0<z<1\Rightarrow -2<z-1<-1$. Luego int. en $]0,\infty[$. Así,

$$f(\lambda)=\int_0^\infty\frac{x^{z-1}}{e^{i\lambda}x+1}\,dx$$

está bien def. $\forall\lambda\in]-\pi,\pi[$.

2) Sea $x \in]0,\infty[$. Veamos que $F_x :]-\pi,\pi[\to \mathbb{C}$ es dif. en $]-\pi,\pi[$. En efecto:

$$\begin{aligned}\frac{dF_x}{d\lambda}(\lambda) &= \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{x^{z-1}}{e^{i\lambda}x+1}\right)\\ &= x^{z-1}\cdot\frac{-1}{(e^{i\lambda}x+1)^2}\cdot ix e^{i\lambda}\\ &= -\frac{ie^{i\lambda}x^z}{(e^{i\lambda}x+1)^2}\end{aligned}$$

3) Sea $0<\lambda_0<\pi$. Para todo $\lambda \in]-\lambda_0,\lambda_0[$ se cumple ($y\ \forall x \in]0,\infty[$):

$$\begin{aligned}\left|-\frac{ie^{i\lambda}x^z}{(e^{i\lambda}x+1)^2}\right| &= \frac{|e^{i\lambda}x^z|}{|(e^{i\lambda}x+1)^2|}\\ &= \frac{x^z}{1+2x\cos\lambda+x^2}\end{aligned}$$

Como $\cos\lambda \geq \cos\lambda_0 \neq 0$, ent.

$$1+2x\cos\lambda+x^2 \geq 1+2x\cos\lambda_0+x^2$$

$$\Rightarrow \frac{x^z}{1+2x\cos\lambda+x^2} \leq \frac{x^z}{1+2x\cos\lambda_0+x^2}$$

donde $x \mapsto \dfrac{x^z}{1+2x\cos\lambda_0+x^2}$ es int. en $]0,\infty[$.

Por 1) - 3), usando el teorema de der. se sigue que f es dif. en $]-\lambda_0,\lambda_0[$, y:

$$f'(\lambda) = \int_0^\infty \frac{-ie^{i\lambda}x^z}{(e^{i\lambda}x+1)^2}\,dx,\ \forall \lambda \in]-\lambda_0,\lambda_0[$$

Pero, como $0<\lambda_0<\pi$ fue arb. ent. la fórmula ant. es válida $\forall \lambda \in]-\pi,\pi[$. Integrando por partes obtenemos que: (tomando $u = ie^{i\lambda}x^z$ y $V = \dfrac{1}{e^{i\lambda}(e^{i\lambda}x+1)}$):

$$\begin{aligned}f'(\lambda) &= \left.\frac{ix^z}{e^{i\lambda}x+1}\right|_{x=0}^{x=\infty} - \int_0^\infty \frac{iz\,x^{z-1}}{e^{i\lambda}x+1}\,dx\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{in^z}{e^{i\lambda}n+1} - 0 - \lim_{n\to\infty} iz\int_0^n \frac{x^{z-1}}{e^{i\lambda}x+1}\,dx\\ &= 0 - iz\,f(\lambda)\end{aligned}$$

$$\therefore f'(\lambda) = -iz\,f(\lambda)$$

la cual es una E.D.O. con sol.

$$f(\lambda) = \gamma(z)e^{-i\lambda z}$$

donde la cte $\gamma(z)$ no depende de λ.

De (iii):

3.10. Para $0 < p < q$, sea

$$I(p,q) = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x^q}dx.$$

Por el cambio de variables $y = \dfrac{1}{1+x^q}$, **demuestre** que

$$I(p,q) = \frac{1}{q}\Gamma\left(\frac{p}{q}\right)\Gamma\left(1-\frac{p}{q}\right),$$

luego en virtud de la fórmula de los complementos (vea el problema 4.9)

$$I(p,q) = \frac{1}{q}\frac{\pi}{\sin\left(\frac{p}{q}\pi\right)}.$$

Calcule en particular

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} \qquad \text{y} \qquad \int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4}dx.$$

$$x^q = \frac{1}{y} - 1$$

$$x = \frac{(1-y)^{1/q}}{y^{1/q}}$$

Dem.

Considere el isomorfismo C^1 $\phi :]0,1[\to]0,\infty[$, $y \mapsto \dfrac{(1-y)^{1/q}}{y^{1/q}}$. Por el T.C.V.

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x^q}dx = \int_0^1 |J\phi(y)|\,(1-y)^{\frac{p-1}{q}} \cdot y^{\frac{1-p}{q}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1-y}{y}}dy$$

$$= \int_0^1 |J\phi(y)|(1-y)^{\frac{p-1}{q}}\, y^{\frac{1-p}{q}} \cdot y\,dy$$

dónde $|J\phi(y)| = \dfrac{1}{q}\dfrac{(1-y)^{1/q-1}}{y^{1/q}} + \dfrac{1}{q}\cdot\dfrac{(1-y)^{1/q}}{y^{1/q+1}} = \dfrac{1}{q}\left((1-y)^{1/q-1}y^{-1/q} + (1-y)^{1/q}y^{-1/q-1}\right)$. Así:

$$= \frac{1}{q}\int_0^1\left[(1-y)^{1/q-1}y^{-1/q}(1-y)^{\frac{p-1}{q}}y^{\frac{1-p}{q}+1} + (1-y)^{1/q}y^{-1/q-1}(1-y)^{\frac{p-1}{q}}y^{\frac{1-p}{q}+1}\right]dy$$

$$= \frac{1}{q}\int_0^1\left[(1-y)^{\frac{p}{q}-1}y^{-\frac{p}{q}+1} + (1-y)^{\frac{p}{q}}y^{-\frac{p}{q}}\right]dy$$

$$= \frac{1}{q}\int_0^1 (1-y)^{\frac{p}{q}}y^{-\frac{p}{q}}\left(\frac{y}{1-y}+1\right)dy$$

$$= \frac{1}{q}\int_0^1 (1-y)^{\frac{p}{q}-1}y^{-\frac{p}{q}}dy$$

$$= \frac{1}{q}\int_0^1 y^{(1-\frac{p}{q})-1}(1-y)^{\frac{p}{q}-1}dy$$

$$= \frac{1}{q}B\left(1-\frac{p}{q}, \frac{p}{q}\right)$$

$$= \frac{1}{q}\frac{\Gamma(\frac{p}{q})\Gamma(1-\frac{p}{q})}{\Gamma(1)}$$

$$= \frac{1}{q}\Gamma\left(\frac{p}{q}\right)\Gamma\left(1-\frac{p}{q}\right)$$

Como $0<p<q$, por el problema ant. se tiene que:

$$\Gamma\left(\frac{p}{q}\right)\Gamma\left(1-\frac{p}{q}\right) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\frac{p}{q}\pi)}$$

$$\therefore\ I(p,q) = \frac{1}{q}\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\frac{p}{q}\pi)}.$$

Los cálculos son inmediatos.

$\square$

3.11. Sea $f(x) = x^\alpha \sin(x^\beta)$, $\forall x > 0$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

i. ¿Para cuáles valores de α, β es f integrable en $[1, \infty[$?

¿Para cuáles existe la integral impropia $\int_1^{\to\infty} f(x)dx$?

ii. Mismas preguntas, al reemplazar el intervalo $[1, \infty[$ por el intervalo $]0, 1]$.

Dem.

De (i): Sólo voy a hacer este inciso. El otro debería ser parecido. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tenemos 2 casos:

1) $\alpha < -1$ y $\beta \in \mathbb{R}$. En este caso:

$$\int_1^\infty |x^\alpha \operatorname{sen}(x^\beta)| dx \leq \int_1^\infty x^\alpha dx$$

$$< \infty, \text{ pues } \alpha < -1$$

luego $\alpha < -1$ y $\beta \in \mathbb{R}$ implica que f es int. en $[1, \infty[$.

2) $\alpha = -1$, $\beta \in \mathbb{R}$. Tenemos que si $\beta > 0$:

3.12. **Analice** la convergencia de la integral impropia

$$\int_{\to 0}^{\to\infty} \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^m}dx.$$

Sugerencia. Estudie por separado las integrales impropias

$$\int_{\to 0}^{1} \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^m}dx \qquad \text{y} \qquad \int_{1}^{\to\infty} \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^m}dx.$$

El cambio de variables $x=\frac{1}{u}$ reduce el estudio de la segunda integral al de la primera.

3.13. Puesto que $\frac{1}{x} = \int_0^{\to\infty} e^{-xt}dt$, se tiene

$$\int_0^{\to\infty} \frac{\sin x}{x} = \int_0^{\to\infty} \sin x dx \int_0^{\infty} e^{-xt}dt.$$

Pruebe que se puede invertir el orden de las integraciones y así **calcule**

$$\int_0^{\to\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Dem.

Sea $f :]0,\infty[\times]0,\infty[\to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto e^{-xt}\sin x$. Para demostrar el resultado, se probarán 3 cosas:

i) Sea $M \in]0,\infty[$. Veamos que f es integrable en $]0,M] \times]0,\infty[$. En efecto, para ello veamos que $|f|$ lo es. Por Fubini para med. no neg. se tiene que:

$$\begin{aligned}\int_{]0,M]\times]0,\infty[} |e^{-xt}\sin x| dx dt &= \int_0^M |\sin x| \int_0^\infty e^{-xt} \\ &= \int_0^M \frac{|\sin x|}{x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{|\sin x|}{x} dx + \int_1^M \frac{|\sin x|}{x} dx \\ &< \infty\end{aligned}$$

pues $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ es int. en $]0,1]$ y continua en el compacto $[1,M]$. Así, f es int. en $]0,M] \times]0,\infty[$.

ii) Sea $t \in]0,\infty[$. Como $\lim_{x\to\infty} e^{-tx} = 0$ y $G(x) = \int_0^x \sin(t)dt$ es acotada en $[0,\infty[$, por el primer criterio de Abel, la integral

$$\int_0^{\to\infty} e^{-tx}\sin x \, dx$$

es convergente, i.e lo es

$$\int_0^{\to\infty} f(x,t) dx$$

iii) $\exists$ $1 \in]0,\infty[$ y $h :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ int. en $]0,\infty[$ $\ni$

$$\begin{aligned}\left|\int_0^M f(x,t)dx\right| &= \left|\int_0^M e^{-xt}\sin x dx\right| \\ &= \ldots \\ &= \left|\frac{e^{Mt} - t\sin(M) - \cos(M)}{(t^2+1)e^{Mt}}\right| \\ &\leq \frac{1}{t^2+1} + \frac{(t+1)e^{-Mt}}{t^2+1}\end{aligned}$$

Tome $M_0 = 1$. Si $1 < M$, ent.

$$\leq \frac{1}{t^2+1}\left(1+(t+1)e^{-t}\right)$$

Con $h(t) = \frac{1}{t^2+1}\left(1+(t+1)e^{-t}\right)$ (int. en $[0,\infty[$). Se tiene que $\forall\ M > 1$:

$$\left|\int_0^M f(x,t)\,dx\right| \leq h(t),\ \forall\ t>0$$

Por (i) - (iii), se puede cambiar el orden de integración:

$$\int_0^{\to\infty} dx \int_0^{\infty} e^{-xt}\sin x\,dt = \int_0^{\infty} dt \int_0^{\to\infty} e^{-xt}\sin x\,dx$$

Veamos que

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-xt}\sin x\,dx &= \lim_{M\to\infty}\int_0^M e^{-xt}\sin x\,dx \\ &= \lim_{M\to\infty}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{t\sin(M)+\cos(M)}{(t^2+1)\,e^{Mt}}\right) \\ &= \frac{1}{1+t^2}\end{aligned}$$

$$\therefore \int_0^{\to\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$$

$\square$

3.14. Se pone, $\forall y \in \mathbb{R}$,

$$f(y) = \int_0^{\infty}\frac{\sin(xy)}{x(x^2+1)}dx.$$

Demuestre que, $\forall y > 0$, se tiene

$$f''(y) - f(y) = -\frac{\pi}{2}$$

y **calcule** $f(y)$, $\forall y \in \mathbb{R}$.

Sugerencia. Se deberá justificar la derivación bajo el signo de integral de una función definida por una integral impropia.

Dem.

Se verificarán varias cosas:

1) Defina $F:]0,\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \frac{\sin(xy)}{x(x^2+1)}$. Tenemos que:

i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \int_0^{\infty} F(x,y)\,dx$ está bien def. En efecto, veamos que $\forall\ y\in\mathbb{R}$: $x \mapsto \frac{\sin xy}{x(x^2+1)}$ es int. en $]0,\infty[$. Pues:

$$\frac{\sin(xy)}{x(x^2+1)} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\sin(xy)}{x},\ y$$

$$\frac{\sin(xy)}{x(x^2+1)} \underset{x\to\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$$

dónde $x \mapsto \frac{\sin(xy)}{x}$ y $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ son int. en $]0,1[$ y $[1,\infty[$, resp. Luego f está bien def.

3.15. i. **Muestre** que, $\forall\alpha > 0$ y $\forall x > 0$,

$$\Gamma(\alpha) = x^\alpha \int_0^\infty e^{-xt} t^{\alpha-1} dt.$$

ii. Sea $\lambda > 0$. Se sigue de (i) que si $0 < \alpha \leqslant 1$,

$$\int_0^{\to\infty} \frac{\sin(\lambda x)}{x^\alpha} dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\to\infty} \sin(\lambda x) dx \int_0^\infty e^{-xt} t^{\alpha-1} dt.$$

Demuestre que si $0 < \alpha < 1$, se puede invertir el orden de las integraciones. Usando los ejercicios 3.9 y 3.10, **deduzca** la fórmula

$$\int_0^{\to\infty} \frac{\sin(\lambda x)}{x^\alpha} dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{2\lambda^{1-\alpha}} \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)} = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\lambda^{1-\alpha}} \cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right), \qquad \forall\alpha \in]0,1[.$$

Recobre el valor de la integral de Fresnel $\displaystyle\int_0^{\to\infty} \sin(x^2) dx$.

iii. **Muestre** que la función

$$\alpha \mapsto \int_0^{\to\infty} \frac{\sin(\lambda x)}{x^\alpha} dx$$

es continua en $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ y **recobre** el valor de $\displaystyle\int_0^{\to\infty} \frac{\sin(\lambda x)}{x} dx$.

iv. Para $0 < \alpha < 1$, **pruebe** que

$$\int_0^{\to\infty} \frac{\sin(\lambda x)}{x^\alpha} dx \cdot \int_0^{\to\infty} \frac{\sin(\lambda x)}{x^{1-\alpha}} dx = \frac{\pi}{2\lambda}.$$

Dem.

De (i): Sean $\alpha, x > 0$. Veamos que:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha-1} du < \infty$$

Considere el isomorfismo C^∞ $\phi : t \mapsto tx$ de $]0,\infty[$ en $]0,\infty[$. Por el T.C.V.

$$\int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha-1} du = \int_0^\infty |x| e^{-tx} (tx)^{\alpha-1} dt$$

$$= x^\alpha \int_0^\infty e^{-tx} t^{\alpha-1} dt < \infty$$

De (ii): Sea $\lambda > 0$. Considere $f :]0,\infty[^2 \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto f(x,t) = e^{-tx} t^{\alpha-1} \sin(\lambda x)$, donde $0 < \alpha < 1$. Veamos que:

1) Tome $B \in]0,\infty[$, ent. f es int. en $]0,B] \times]0,\infty[$, pues tenemos que:

$$|e^{-tx} t^{\alpha-1} \sin(\lambda x)| \leq e^{-tx} t^{\alpha-1}$$

$$\leq e^{-tx} t^{\alpha-1}$$

dónde $(x,t) \mapsto t^{\alpha-1}$ es int. en $]0,B] \times]0,\infty[$ (por (i)).

2) Sea $t \in]0,\infty[$. Veamos que la integral:

$$\int_0^{\to\infty} e^{-tx} t^{\alpha-1} \sin(\lambda x) dx$$

es convergente. En efecto: tomemos $f, g :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ dadas por:

$$f(x) = e^{-tx} t^{\alpha-1} \quad y \quad g(x) = \sin(\lambda x)$$

Si $G(x) = \int_0^x g(u)du$, ent. tenemos que

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \quad y \quad G \text{ es acotada en } [0, \infty[$$

luego, por el primer criterio de Abel $\int_0^{\to\infty} e^{-tx} t^{\alpha-1} \sin(\lambda x)dx$ es convergente.

3) Veamos que $\exists\ M \in]0,\infty[$ y $h:]0,\infty[\to \mathbb{R}$ int. $t \mapsto h(t)$ m

$$\left|\int^m f(x,t)dx\right| \leq h(t), \forall \ m \geq M$$

$\forall\ t \in]0,\infty[$. En efecto, veamos que para $m \in \mathbb{R}^+$ y $\forall\ t \in]0,\infty[$

$$\left|\int_0^m e^{-tx} t^{\alpha-1} \sin(\lambda x)dx\right| = \left|t^{\alpha-1}\int_0^m e^{-tx} \sin(\lambda x)dx\right|$$

$$= t^{\alpha-1} \cdot \frac{e^{-mt}|-t\,sen(\lambda m) + \lambda e^{mt} - \lambda\cos(\lambda m)|}{\lambda^2+t^2}$$

$$\leq t^{\alpha-1} \frac{e^{-mt}(\lambda e^{mt} + |t\,sen(\lambda m) + \lambda\cos(\lambda m)|)}{\lambda^2+t^2}$$

$$\leq \frac{1}{\lambda^2+t^2} t^{\alpha-1}(1+(1+t)e^{-mt})$$

$$= \frac{1}{\lambda^2+t^2} t^{\alpha-1} + \frac{t^{\alpha-1}(1+t)}{\lambda^2+t^2} e^{-mt}$$

$$\leq \frac{1}{\lambda^2+t^2} t^{\alpha-1} + \frac{t^{\alpha-1}(1+t)}{\lambda^2+t^2} e^{-t}$$

dónde $t \mapsto \frac{t^{\alpha-1}(1+t)}{\lambda^2+t^2} + \frac{1}{\lambda^2+t^2} t^{\alpha-1}$ es int. en $]0,\infty[$ si $m > 1$.

Por (1)-(3), se sigue que:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\to\infty} dx \int_0^{\infty} sen(\lambda x) e^{-tx} t^{\alpha-1} dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} dt \int_0^{\to\infty} sen(\lambda x) e^{-tx} t^{\alpha-1} dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} dt\ t^{\alpha-1} \int_0^{\to\infty} e^{-tx} sen(\lambda x)dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} dt \cdot t^{\alpha-1} \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-nt}(-t\,sen(\lambda n) + \lambda e^{nt} - \lambda\cos(\lambda n))}{\lambda^2+t^2}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} \cdot \frac{\lambda}{\lambda^2+t^2} dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{\lambda t^{\alpha-1}}{\lambda^2+t^2} dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda \int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\lambda^2(1+\frac{t^2}{\lambda^2})} dt$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\lambda} \int_0^{\infty} \frac{(t/\lambda)^{\alpha-1}}{1+(\frac{t}{\lambda})^2} dt$$

Sea $u = t/\lambda \Rightarrow du = \frac{dt}{\lambda}$. Así:

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\lambda^{1-\alpha}} \int_0^{\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{1+u^2} du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\lambda^{1-\alpha}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{sen(\frac{\alpha}{2}\pi)}$$

que es la primera identidad, y como $0<\alpha<1$, por la fórmula de los comp.

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\alpha\pi)}$$
$$= \frac{\pi}{2\operatorname{sen}(\frac{\alpha}{2}\pi)\cos(\frac{\alpha}{2}\pi)}$$
$$\Rightarrow 2\Gamma(1-\alpha)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\pi\right) = \frac{\pi}{\Gamma(\alpha)\operatorname{sen}(\frac{\alpha}{2}\pi)}$$
$$\Rightarrow \int_0^{\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(\lambda x)}{x^\alpha}dx = \Gamma(1-\alpha)\cdot\frac{\cos(\frac{\alpha}{2}\pi)}{\lambda^{1-\alpha}}$$

que es la tercera identidad.

Para la int. de Fresnel, recordemos que

$$\int_0^{m} \operatorname{sen}(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^{m^2}\frac{\operatorname{sen}(u)}{u^{1/2}}du$$
$$\therefore \int_0^{\to\infty} \operatorname{sen}(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\to\infty}\frac{\operatorname{sen}(u)}{u^{1/2}}du$$
$$= \frac{1}{2}\Gamma(1/2)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

De (iii): Claramente $\alpha \mapsto \int_0^{\to\infty}\frac{\sin(\lambda x)}{x^\alpha}dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{1}{2\lambda^{1-\alpha}}\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{2}\alpha)}$ es cont. en $[\frac{1}{2},1[$. Para la cont. en 1,

Veamos que:

$$\int_0^{\to\infty}\frac{\sin(\lambda x)}{x}dx = \lim_{m\to\infty}\int_0^m \frac{\sin(\lambda x)}{x}dx \qquad u=\lambda x$$
$$= \lim_{m\to\infty}\int_0^{\lambda m}\frac{\sin(u)}{u}du$$
$$= \int_0^{\to\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx$$
$$= \frac{\pi}{2}$$

y:

$$\lim_{\alpha\to1^-}\left(\int_0^{\to\infty}\frac{\sin(\lambda x)}{x^\alpha}dx\right) = \lim_{\alpha\to1^-}\frac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot 2\lambda^{1-\alpha}}\cdot\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{2}\alpha)}$$
$$= \frac{1}{\Gamma(1)\cdot 2\lambda^{1-1}}\cdot\frac{\pi}{1}$$
$$= \frac{\pi}{2}$$
$$= \int_0^{\infty}\frac{\sin(\lambda x)}{x}dx$$

$\therefore \alpha \mapsto \int_0^{\to\infty}\frac{\sin(\lambda x)}{x^\alpha}dx$ es cont. en $[\frac{1}{2},1]$.

De (iv): Sea $0<\alpha<1 \Rightarrow 0<1-\alpha<1$. Luego:

$$\int_0^{\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(\lambda x)}{x^\alpha}\,dx \cdot \int_0^{\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(\lambda x)}{x^{1-\alpha}}\,dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \cdot \frac{1}{2\lambda^{1-\alpha}} \cdot \frac{1}{2\lambda^{1-1+\alpha}} \cdot \frac{\pi^2}{\sin(\frac{\pi}{2}\alpha)\sin(\frac{\pi}{2}(1-\alpha))}$$

$$= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{\lambda} \cdot \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2}\alpha)\sin(\frac{\pi}{2}(1-\alpha))}$$

dónde $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) - \cancelto{0}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)$

$$= \frac{\pi}{2\lambda} \cdot \frac{\sin(\pi\alpha)}{2\sin(\frac{\pi}{2}\alpha)\cos(\frac{\pi}{2}\alpha)}$$

$$= \frac{\pi}{2\lambda}$$

$\square$

Notas:

1) Se tiene que:

$$\frac{1}{(1+t^2x^2)(1+t^2y^2)} = \frac{At+B}{1+t^2x^2} + \frac{Ct+D}{1+t^2y^2}, \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 1 = (At+B)(1+t^2y^2) + (Ct+D)(1+t^2x^2), \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 1 = At + At^3y^2 + B + Bt^2y^2 + Ct + Ct^3x^2 + D + Dt^2x^2, \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 1 = (B+D) + (A+C)t + (By^2+Dx^2)t^2 + (Ay^2+Cx^2)t^3, \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B+D=1 \\ By^2+Dx^2=0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} A+C=0 \\ Ay^2+Cx^2=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B=1-D \\ B=-\left(\frac{x}{y}\right)^2 D \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} A=-C \\ A=-\left(\frac{x}{y}\right)^2 C \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1-D = -\left(\frac{x}{y}\right)^2 D \quad y \quad -C = -\left(\frac{x}{y}\right)^2 C, \text{ pero } x \neq y$$

$$\Rightarrow 1 = D\left(1-\left(\frac{x}{y}\right)^2\right) \quad y \quad C\left(1-\left(\frac{x}{y}\right)^2\right) = 0 \Rightarrow C=0 \ y \ A=0$$

$$\Rightarrow D = \frac{y^2}{y^2-x^2} \Rightarrow B = \frac{x^2}{x^2-y^2}$$

$$\therefore \frac{1}{(1+(tx)^2)(1+(ty)^2)} = \frac{x^2}{x^2-y^2}\cdot\frac{1}{1+(tx)^2} + \frac{y^2}{y^2-x^2}\cdot\frac{1}{1+(ty)^2}, \forall t \in \mathbb{R}.$$