Si $\psi_1(x,t)$ y $\psi_2(x,t)$ satisfacen la ecuación de onda, su suma también la satisface. Digamos:

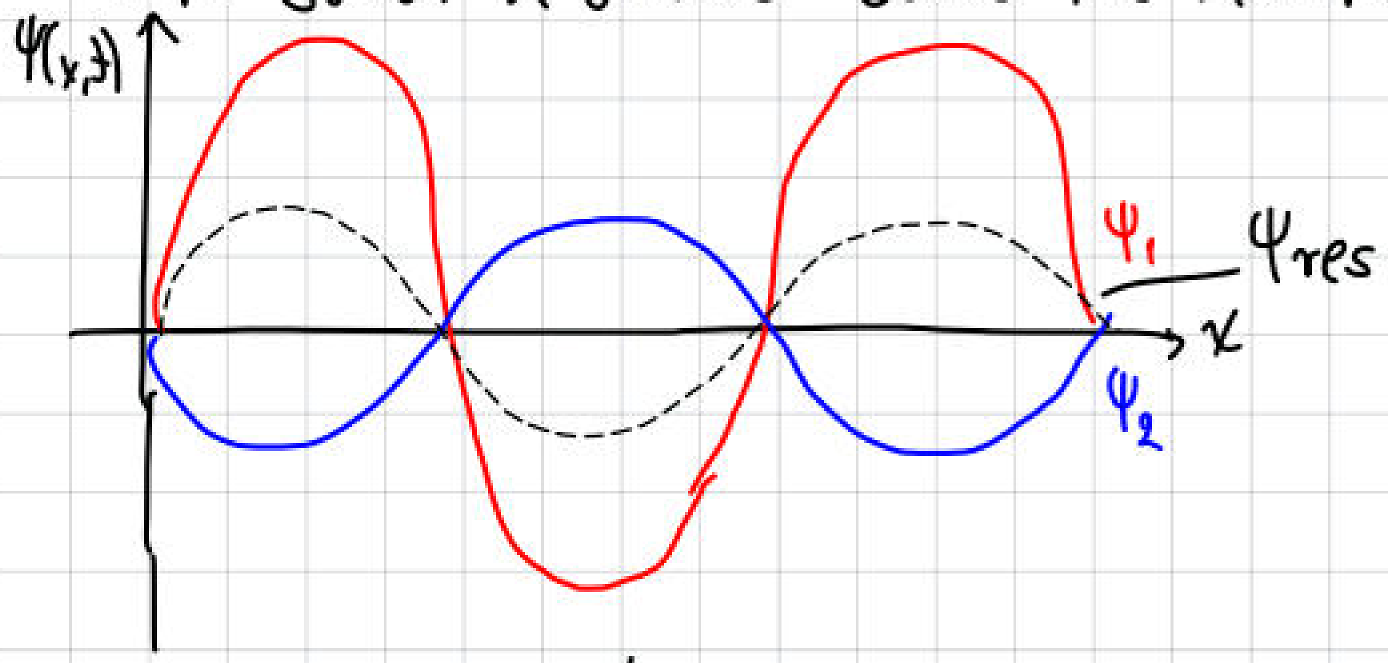
$$\underbrace{\psi_{res}(x,t) = C_1\psi_1(x,t) + C_2\psi_2(x,t)}$$

Principio de superposición. ψ_{res} también es onda.

Ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

Para sumar 2 ondas como las mostradas, sólo se suman algebraicamente.



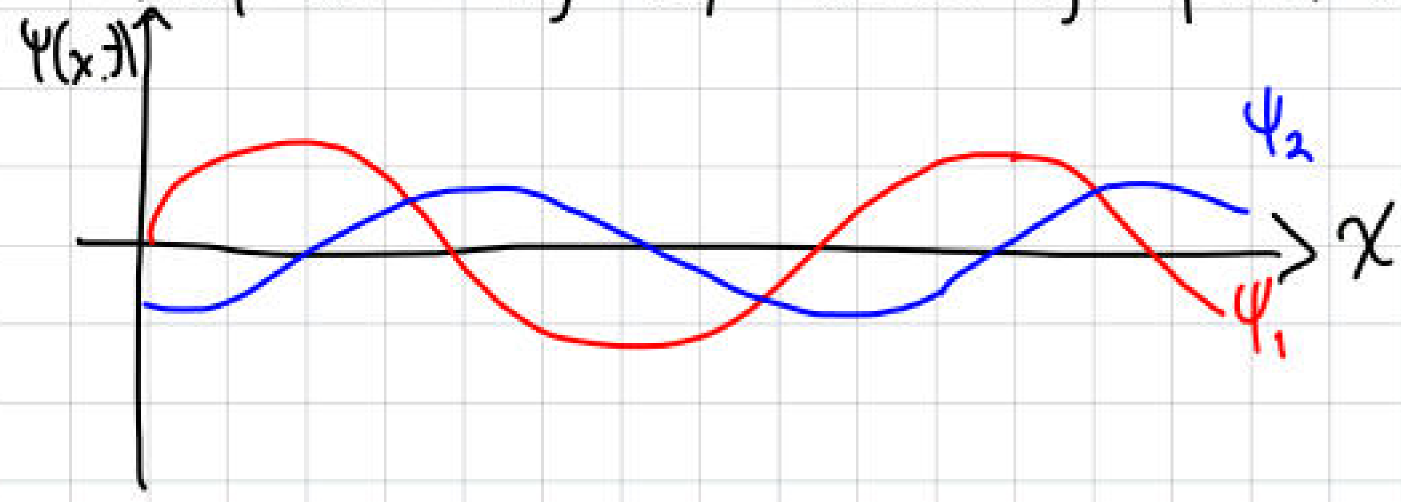
Tenemos que ψ_{res} tiene A_{res} tal que $A_{res} > A_2$, pero $A_{res} < A_1$. Por tanto: $A_{res} \neq A_1 + A_2$.
De la figura, vemos que ψ_1, ψ_2 tienen misma FASE INICIAL λ, y misma velocidad $\Rightarrow$ misma ν. De esta forma:

$$\psi_1(x,t) = kx - \omega t + \overbrace{\varepsilon_1}^{0} \qquad (1)$$
$$\psi_2(x,t) = kx - \omega t + \underbrace{\varepsilon_2}_{=\pi} \qquad (2)$$

Aquí están desfasadas, a diferencia del diagrama.

Cuando sucede lo anterior, se dice que $\psi_1(x,t)$ y $\psi_2(x,t)$ están desfasadas π rad o 180°. Cuando $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, se dice que ambas ondas están en fase. Si $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, no están en fase (desfasadas), por un valor igual a $\theta = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$.
Esto anterior es válido si $\psi_1(x,t)$ y $\psi_2(x,t)$ viajan a la misma velocidad y tienen mismas λ y ν.

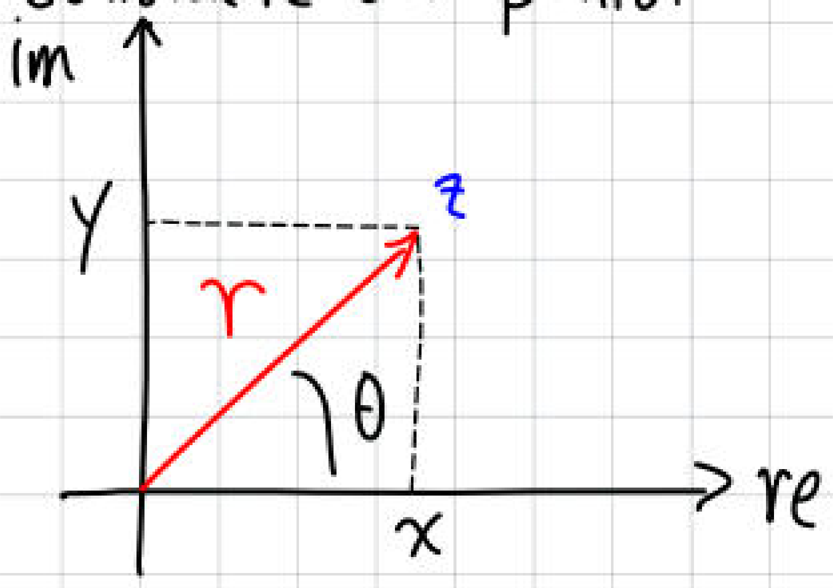
Ahora, si $\psi_1(x_0,t_0) = \psi_2(x_0,t_0)$ para x_0 y t_0 dados, ¿las ondas están en fase?
Respuesta: no, hay muchos ejemplos. Uno:



ψ_1 y ψ_2 tienen mismo λ y ν, pero no están en fase.

Representación Compleja

Considere un punto:



$x = r\cos\theta$

$y = r\,sen\theta$

y $z = x + iy$

Por lo tanto:

$$z = (r\cos\theta) + i(r\,sen\theta)$$
$$= r\underbrace{(\cos\theta + i\,sen\theta)}_{=e^{i\theta}}$$

De esta forma:

$$z = re^{i\theta}$$

Si $r = 1$: $z = Re(z) + iIm(z)$ con $Re(z) = \cos\theta$ e $Im(z) = sen\theta$. Luego:

$$Re(e^{i\theta}) = \cos\theta \quad e \quad Im(e^{i\theta}) = sen\theta$$

A partir de lo anterior, se puede escribir la expresión de una onda armónica simple senoidal unidimensional, como:

$$\psi(x,t) = Re\left(A\cdot e^{i(\underbrace{Kx\mp\omega t+\varepsilon}_{\text{fase de la onda}})}\right)$$
$$= A\cos(\underbrace{Kx\mp\omega t+\varepsilon}_{\text{fase de la onda}})$$

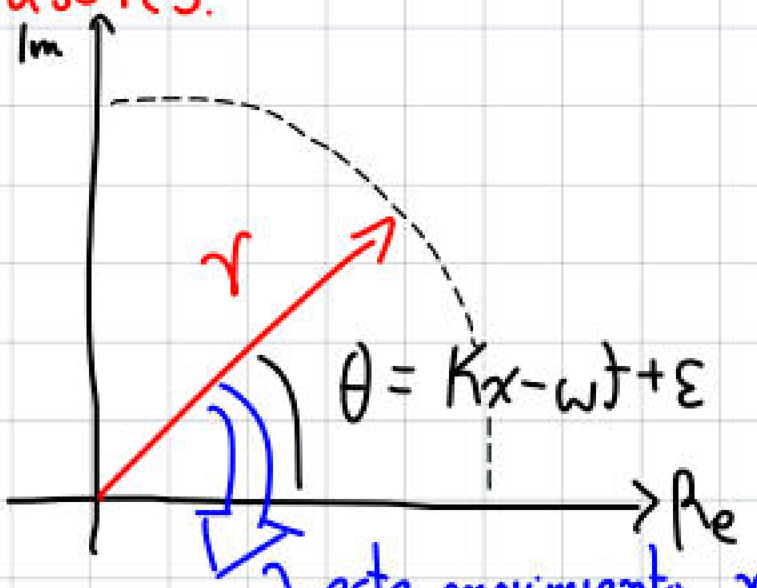
ó:

$$\psi(x,t) = Im\left(A\cdot e^{i(Kx\mp\omega t+\varepsilon)}\right)$$
$$= A\,sen(Kx\mp\omega t+\varepsilon)$$

Se define entonces, la función de onda: $\Psi(x,t) = e^{i\varphi(x,t)}$.

Para trabajar la superposición de ondas se puede usar la función de onda dada la facilidad de manejo de la exponencial compleja. Una vez se llega al resultado final, se toma la parte real o imaginaria.

Fasores.



este movimiento representa una onda senoidal.

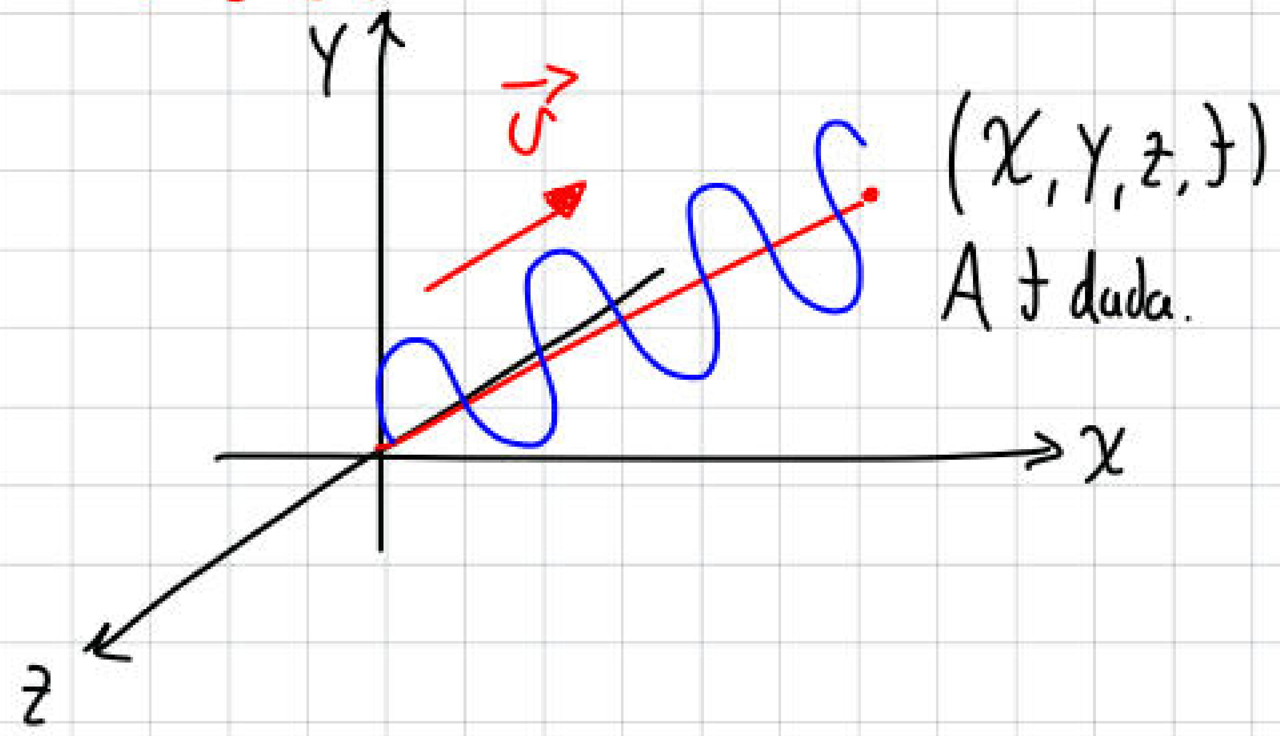
Tenemos de lo anterior que $\theta = \theta(x,t)$, y: $\theta(x,t)|_{x_0} = \theta(t)$

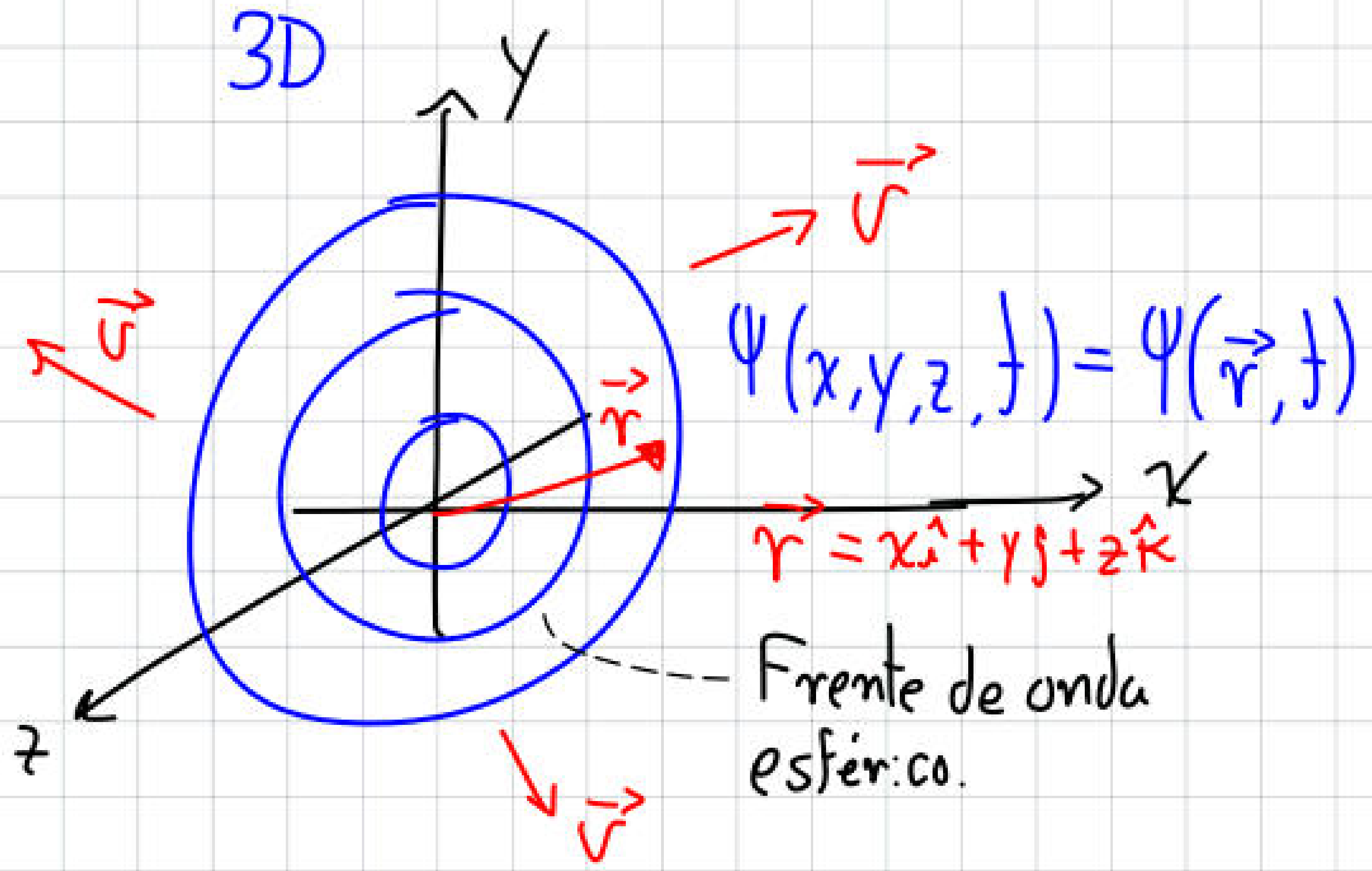
$\varphi(x,t) = Kx - \omega t + \varepsilon$. Luego $\theta = \varphi$. Veamos también que:

$$\Psi(x,t) = \underbrace{R}_{\text{amplitud de la onda}}\cdot e^{i\theta}$$

La función Ψ será como mover la flecha alrededor del origen. Cuando hacemos esto, decimos que trabajamos con fasores.

Ondas en 3D.





El diagrama de la derecha ya es la representación de una onda 3D. ψ será onda si satisface:

$$\underbrace{\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}}_{\text{Ec. onda, onda tridimensional}}$$

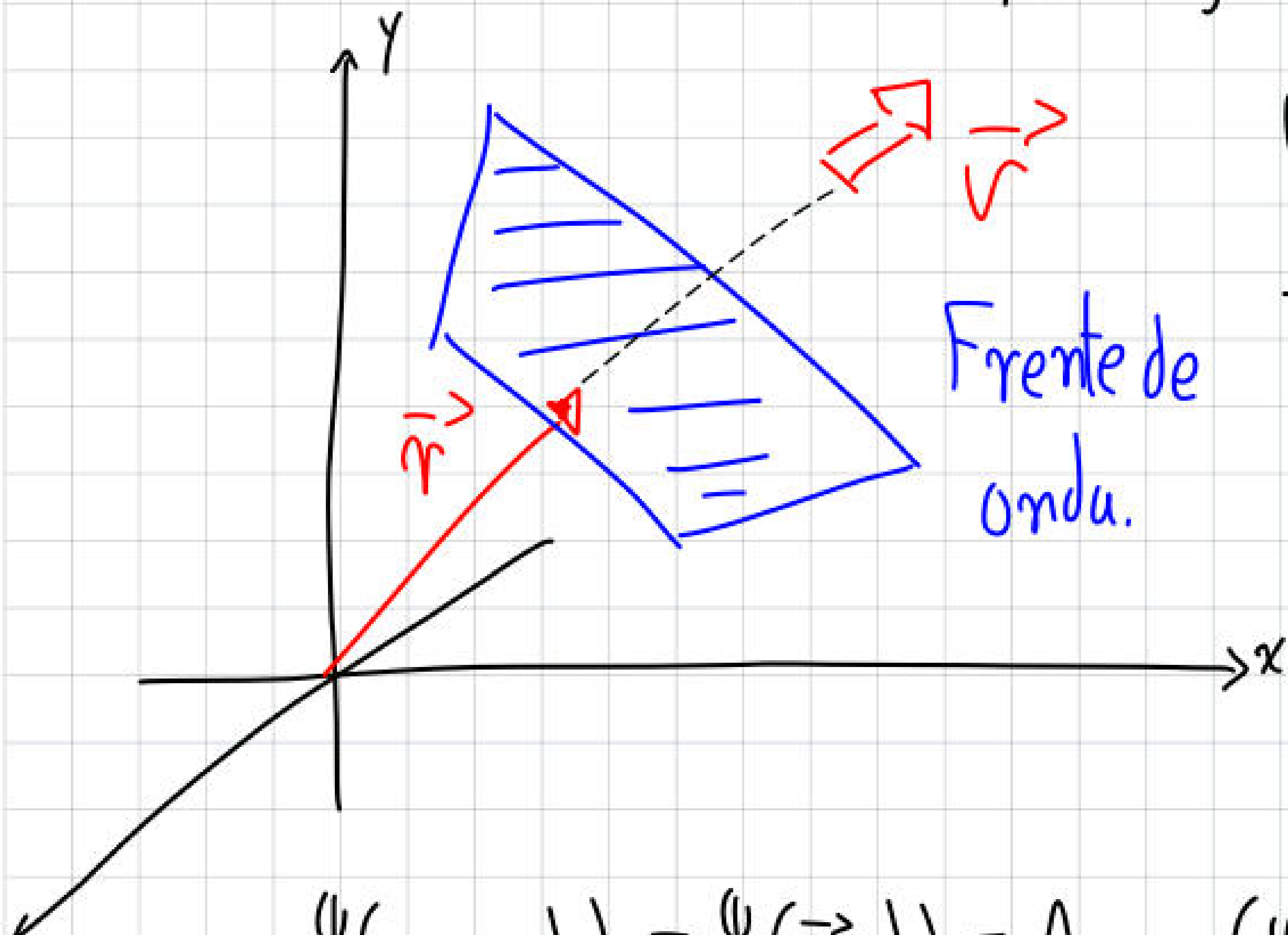
Nota: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

De otra forma:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Frente de onda esférico.

Tomamos un vector $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$, con x, y, z fijos:



Un frente de onda es un plano perpendicular a la dirección en que se propaga la onda.

ó el lugar geométrico de los puntos para los que la fase de la onda es constante.

ψ estará dada como:

$$\psi(x,y,z,t) = \psi(\vec{r},t) = A \operatorname{sen}(\varphi(\vec{r},t)),\ \varphi(\vec{r},t) \text{ es la fase}$$

Queremos que φ sea constante para todos los puntos del plano.