

# Ejercicios

---

## §0.1 EJERCICIOS

---

Ejercicios de cada una de las secciones.

---

### §0.1.1 SERIES DE POTENCIAS

---

#### Ejercicio 0.1.1

Pruebe que si  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , entonces:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$$

#### Demostración:

En efecto, veamos que:

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} z_1^k z_2^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z_1^k}{k!} \cdot \frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!} \end{aligned}$$

donde, recordemos que:

$$e^{z_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \quad \text{y} \quad e^{z_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!}$$

por tanto, de la Proposición ?? se sigue que:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$$

■

#### Ejercicio 0.1.2

Pruebe que

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

donde  $z = x + iy$ .

**Demostración:**

Sea  $z \in \mathbb{C}$ . Se tiene que:

$$e^z = e^x e^{iy}$$

Veamos que:

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

■

**Ejercicio 0.1.3**

Pruebe que si  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  y  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  son dos sucesiones de números no negativos tales que  $0 \leq b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  y  $a = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ , entonces:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$$

**Demostración:**

Antes, notemos que al tenerse:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

se tiene que el siguiente límite existe:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{k \geq n} a_k \right)$$

por tanto, la sucesión  $\{\sup_{k \geq n} a_k\}_{n=1}^{\infty}$  es acotada. Así que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene que el supremo:

$$\sup_{k \geq n} a_k$$

existe. Veamos ahora que:

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{k \geq n} a_k b_k \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( \sup_{k \geq n} a_k \right) \left( \sup_{k \geq n} b_k \right) \right) \end{aligned}$$

donde el supremo se puede separar ya que ambos supremos existen y ser las dos sucesiones acotadas y de números no negativos. Por ende:

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( \sup_{k \geq n} a_k \right) \left( \sup_{k \geq n} b_k \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{k \geq n} a_k \right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{k \geq n} b_k \right) \\ &= \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \cdot \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \right) \\ &= \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \cdot \left( \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) \\ &= ab \end{aligned}$$

■

**Ejercicio 0.1.4**

Sea  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  analítica en  $G$  y  $h : [0, 1] \rightarrow G$  función real diferenciable. Entonces la función  $f \circ h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  cumple que:

$$\lim_{t \rightarrow s} \frac{f \circ h(s) - f \circ h(t)}{s - t} = f'(h(s)) \cdot h'(s)$$

para todo  $s \in [0, 1]$ .

**Demostración:**

■

**Ejercicio 0.1.5**

Pruebe que la función  $u(x, y) = \log(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$  es armónica en  $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

**Demostración:**

■

---

**§0.1.2 FUNCIONES ANALÍTICAS**

---

# Bibliografía

- A. Markusevich, *Teoría de las funciones analíticas*, Ed. Mir Moscu.
- J. Conway, *Complex Analysis*, Ed. Mir Moscu.