Ley de composición

Una Ley de composición u operación binaria sobre G (G en gral. es un conjunto no vacío), es cualquier función $f: G\times G \to G$.
En ocasiones, por simplicidad, a la correspondencia $(a,b)\mapsto f(a,b)$ se menciona como Ley de Correspondencia; más aún, si existe la fórmula sobre lo que tiene que ser el elemento $f(a,b)$, entonces a esta fórmula se le considera como la ley de correspondencia.

Simplificando más la notación, al elemento $f(a,b)$ (con $a,b\in G$) lo denotamos

$$a\cdot b = f(a,b)$$

el cual se lee "a por b". Si se desea, expresamos $a\cdot b$ por yuxtaposición ab.

Ejemplos

a) Si $G\neq\emptyset$ y $x_0\in G$, un elemento fijo arbitrario, entonces la correspondencia

$$(a,b)\mapsto x_0$$

$\forall\, a, b\in G$ es una ley de composición sobre G.

b) $pr_2: \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ es una Ley de composición sobre $\mathbb{R}$, la cual es asociativa:

$$\begin{aligned} pr_2 : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto y \end{aligned}$$

c) Sea $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ el conjunto de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Definimos la operación binaria $\vee$ sobre $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ como sigue: $\forall\, f, g\in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$,

$f \vee g = \max\{f, g\} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por:

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$
$$= \frac{1}{2}\left(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|\right)$$

d) Sea $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la suma estándar de números enteros, cuya correspondencia es:

$$(a, b) \mapsto a + b$$

ó $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, $f(a,b) = \text{mcd}\{a, b\}$.

e) Si X es un conjunto, entonces las siguientes funciones son operaciones binarias:

- $f : P(X) \times P(X) \to P(X)$, $(A, B) \mapsto A \cup B$
- $f : P(X) \times P(X) \to P(X)$, $(A, B) \mapsto A \cap B$

f) Si G es un conjunto finito, $G = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, con $|G| = n$ y G tiene una Ley de Composición, entonces esta la podemos representar a través de una tabla de multiplicación:

$\cdot$	a_1	a_2	$\cdots$	a_n
a_1	$a_1 \cdot a_1$	$a_1 \cdot a_2$	$\cdots$	$a_1 \cdot a_n$
a_2	$a_2 \cdot a_1$	$a_2 \cdot a_2$	$\cdots$	$a_2 \cdot a_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_n	$a_n \cdot a_1$	$a_n \cdot a_2$	$\cdots$	$a_n \cdot a_n$

En general: $(a_i, a_j) \mapsto a_i \cdot a_j$