

# Lista 3 de Ejercicios Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

17 de mayo de 2024

# Índice general

3. Ejercicios	2
---------------	---

# Capítulo 3

## Ejercicios

### Ejercicio 3.1.1

Pruebe que, para todo  $x \in ]0, 2\pi[$ ,

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

Usando la identidad de Parseval, **demuestre** que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

### Demostración:

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}, \quad \forall x \in [0, 2\pi[$$

y extiéndase por periodicidad a todo  $\mathbb{R}$ . Es claro que  $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{R})$ , sea ahora  $x \in ]0, 2\pi[$ . Por el teorema fundamental para la convergencia puntual de una serie de Fourier hay que encontrar un  $0 < \delta < \pi$  tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) dt$$

tomemos  $\delta = \min\{x, 2\pi - x\} > 0$ . Se tienen dos casos:

1.  $\delta = x$ , entonces

$$\begin{aligned} & \int_0^{\delta} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) dt \\ &= \int_0^{\delta} \frac{1}{t} \left[ \frac{\pi - x - t}{2} + \frac{\pi - x + t}{2} - \frac{2(\pi - x)}{2} \right] \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) dt \\ &= \int_0^{\delta} \frac{1}{t} [\pi - x - \pi + x] \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) dt \\ &= \int_0^{\delta} 0 dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

por tanto, el límite cuando  $m \rightarrow \infty$  resulta que da cero.

2.  $\delta = 2\pi - x$ . El caso es análogo al anterior.

por ambos incisos se concluye que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^\delta \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \sin \left( m + \frac{1}{2} \right) dt = 0$$

por tanto, la serie de Fourier de  $f$  converge a  $f$  puntualmente en  $x$ . Computemos ahora los coeficientes de la serie de Fourier de  $f$ . Si  $n \geq 0$ :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \cos nx dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos nx dx - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x \cos nx dx \text{ haciendo } u = nx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2n\pi} \cos u \frac{du}{n} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2n\pi} \frac{u}{n} \cos u \frac{du}{n} \\ &= \frac{1}{2n} \sin u \Big|_0^{2n\pi} - \frac{1}{2\pi n^2} \int_0^{2n\pi} u \cos u du \\ &= \frac{1}{2n} [\sin 2\pi n - \sin 0] - \frac{1}{2\pi n^2} \left( u \sin u \Big|_0^{2n\pi} + \int_0^{2n\pi} \sin u du \right) \\ &= -\frac{1}{2\pi n^2} \left( u \sin u \Big|_0^{2n\pi} + \int_0^{2n\pi} \sin u du \right) \\ &= -\frac{1}{2\pi n^2} \left( [2n\pi \sin 2n\pi - 0] - \cos u \Big|_0^{2n\pi} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2\pi n^2} (0 - 0 - 1 + 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

para todo  $n \geq 0$ . Si  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin nx dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin nx dx - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x \sin nx dx \text{ haciendo } u = nx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2n\pi} \sin u \frac{du}{n} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2n\pi} \frac{u}{n} \sin u \frac{du}{n} \\
&= \frac{1}{2n} (-\cos u) \Big|_0^{2n\pi} - \frac{1}{2\pi n^2} \int_0^{2n\pi} u \sin u du \\
&= \frac{1}{2n} (-\cos 2n\pi + 1) - \frac{1}{2\pi n^2} \left( -u \cos u \Big|_0^{2n\pi} + \int_0^{2n\pi} \cos u du \right) \\
&= \frac{1}{2n} (-1 + 1) - \frac{1}{2\pi n^2} \left( -2n\pi \cos 2n\pi + 0 + \sin u \Big|_0^{2n\pi} \right) \\
&= -\frac{1}{2\pi n^2} (-2n\pi \cos 2n\pi + \sin 2n\pi - \sin 0) \\
&= -\frac{1}{2\pi n^2} (-2n\pi + \sin 2n\pi - \sin 0) \\
&= -\frac{1}{2\pi n^2} (-2n\pi) \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Por tanto, la serie de Fourier de  $f$  en  $x \in ]0, 2\pi[$  está dada por:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kx + b_k \sin kx] = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

Por el criterio de Dini se sigue que

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad \forall x \in ]0, 2\pi[$$

Ahora, como  $x \mapsto \frac{\pi-x}{2}$  es una función en  $\mathcal{L}_2^{2\pi}$ , por Parseval se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [|a_n|^2 + |b_n|^2] &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\pi-x}{2} \right|^2 dx \\
\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} |\pi-x|^2 dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} |\pi-x|^2 dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (\pi-x)^2 dx \text{ haciendo el cambio de variable } u = \pi-x \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^0 -u^2 du \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \left. \frac{-u^3}{3} \right|_{\pi}^0 \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[ -\frac{0}{3} + \frac{\pi^3}{3} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi^3}{3} \\
&= \frac{\pi^2}{6} \\
\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}$$

Como se quería demostrar. ■

### Ejercicio 3.1.2

Sea  $f \in \mathcal{L}_2^{2\pi}(\mathbb{R})$  y sean  $a_n, b_n$  los coeficientes de Fourier de  $f$ . **Pruebe** que

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x f(x) dx = \pi a_0 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}.$$

### Demostración:

Veamos que

$$\int_0^{2\pi} x f(x) dx = x f(x)$$

Recordemos que

$$b_1 = \int_0^{2\pi} \sin x f(x) dx$$
■

### Ejercicio 3.1.3

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periódica de periodo  $2\pi$  definida como

$$f(x) = \begin{cases} \pi^2 & \text{si } -\pi \leq x < 0, \\ (x-\pi)^2 & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

calcule los coeficientes de Fourier  $a_n$ , con  $n = 0, 1, 2, \dots$  de  $f$  y **pruebe** las fórmulas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

**Solución:**

Primero determinemos los coeficientes de Fourier de  $f$ .

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 f(x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 \pi^2 dx + \int_0^{\pi} (x - \pi)^2 dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \pi^3 + \int_{-\pi}^0 u^2 du \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \pi^3 + \int_{-\pi}^0 u^2 du \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \pi^3 + \frac{u^3}{3} \Big|_{-\pi}^0 \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \pi^3 + \frac{\pi^3}{3} \right] \\ &= \frac{4\pi^2}{3} \end{aligned}$$

ahora, para  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 f(x) \cos nx dx + \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 \pi^2 \cos nx dx + \int_0^{\pi} (x - \pi)^2 \cos nx dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 \pi^2 \cos nx dx + \int_0^{\pi} (x^2 - 2x\pi + \pi^2) \cos nx dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \pi^2 \cos nx dx + \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx - \int_0^{\pi} 2x\pi \cos nx dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \pi^2 \cos nx dx + \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx - \int_0^{\pi} 2x\pi \cos nx dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\pi^2}{n} \int_{-n\pi}^{n\pi} \cos u du + \frac{1}{n} \int_0^{n\pi} \left( \frac{u}{n} \right)^2 \cos u du - \frac{1}{n} \int_0^{n\pi} 2 \left( \frac{u}{n} \right) \pi \cos u du \right] \\ &= \frac{1}{n\pi} \left[ \pi^2 \int_{-n\pi}^{n\pi} \cos u du + \frac{1}{n^2} \int_0^{n\pi} u^2 \cos u du - \frac{2\pi}{n} \int_0^{n\pi} u \cos u du \right] \end{aligned}$$

donde

$$\pi^2 \int_{-n\pi}^{n\pi} \cos u du = 2 \sin(n\pi)$$

con

$$\int_0^{n\pi} u^2 \cos u du = (\pi^2 n^2 - 2) \sin(n\pi) + 2n\pi \cos(n\pi)$$

y

$$\int_0^{n\pi} u \cos u \, du = n\pi \sin(n\pi) + \cos(n\pi) - 1$$

por tanto,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n\pi} \left[ \pi^2 \int_{-\pi}^{n\pi} \cos u \, du + \frac{1}{n^2} \int_0^{n\pi} u^2 \cos u \, du - \frac{2\pi}{n} \int_0^{n\pi} u \cos u \, du \right] \\ &= \frac{1}{n\pi} \left[ \pi^2 \cdot 2 \sin(n\pi) + \frac{1}{n^2} \cdot [(\pi^2 n^2 - 2) \sin(n\pi) + 2n\pi \cos(n\pi)] - \frac{2\pi}{n} \cdot [n\pi \sin(n\pi) + \cos(n\pi) - 1] \right] \\ &= \frac{1}{n\pi} \left[ 2\pi^2 \sin(n\pi) + \pi^2 \sin(n\pi) - \frac{2}{n^2} \sin(n\pi) + \frac{2\pi}{n} \cos(n\pi) - 2\pi^2 \sin(n\pi) - \frac{2\pi}{n} \cos(n\pi) + \frac{2\pi}{n} \right] \\ &= \frac{1}{n\pi} \left[ \pi^2 \sin(n\pi) - \frac{2}{n^2} \sin(n\pi) + \frac{2\pi}{n} \right] \\ &= \frac{1}{n\pi} \left[ \frac{n^3 \pi^2 \sin(n\pi) + 2n^2 \pi - 2n \sin(n\pi)}{n^3} \right] \\ &= \frac{1}{n\pi} \left[ \frac{0 + 2n^2 \pi - 0}{n^3} \right] \\ &= \frac{1}{n\pi} \left[ \frac{2n^2 \pi}{n^3} \right] \\ &= \frac{2}{n^2} \end{aligned}$$

pues,  $\sin(n\pi) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Notemos que la función  $f$  es monotóna decreciente, en particular es de variación acotada. Luego, por el teorema de Jordan al ser  $f$  continua en  $] -\pi, \pi]$  se sigue que la serie de Fourier de  $f$  en  $x$  converge a  $f(x)$  para todo  $x \in ] -\pi, \pi]$ . Esto es:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kx + b_k \sin kx]$$

en particular, en  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \\ &= \frac{2\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{1}{2} \left[ \pi^2 - \frac{2\pi^2}{3} \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{3} \\ &= \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$



Para la segunda parte, notemos que

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n)^2} \right] \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} &= \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
 &= \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} \\
 &= \frac{\pi^2}{8}
 \end{aligned}$$

Por ende,

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1-1}}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{(2n)^2} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-2}}{(2n-1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n^2} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
 &= \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} \\
 &= \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} \\
 &= \frac{\pi^2 [3-1]}{24} \\
 &= \frac{\pi^2}{12}
 \end{aligned}$$

□

#### Ejercicio 3.1.4

Pruebe que

$$\frac{1}{3}x(\pi-x)(\pi-2x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{n^3}, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Deduzca el valor de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}.$$

**Demostración:**

■

#### Ejercicio 3.1.5

Haga lo siguiente:

- i. **Pruebe** que

$$\int_0^\pi \log \sin \frac{x}{2} dx = -\pi \log 2.$$

*Sugerencia.* Haga el cambio de variables  $x = 2t$  y escriba  $\sin t = 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}$ .

ii. **Muestre** que

$$-\log \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}, \quad \text{si } x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

*Sugerencia.* Use el inciso (i) para probar que  $a_0 = 0$ . A fin de calcular  $a_n$  para  $n \in \mathbb{N}$ , escriba  $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \log \cos \frac{x}{2} dx$ , efectúe una integración por partes y transforme el nuevo integrando de suerte que aparezca el núcleo de Dirichlet.

iii. **Deduzca** de (ii) la fórmula

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

iv. **Desarrolle** en serie de Fourier la función

$$x \mapsto \log \left| 2 \cos \frac{x}{2} \right|$$

### Solución:

De (i): (justificar porqué esa función es integrable). Veamos que

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \log \sin \frac{x}{2} dx &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin t dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \left( 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} \right) dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \log 2 + \log \sin \frac{t}{2} + \log \cos \frac{t}{2} \right] dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \log 2 + \log \sin \frac{t}{2} + \log \cos \frac{t}{2} \right] dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log 2 dt + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin \frac{t}{2} dt + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos \frac{t}{2} dt \\ &= \pi \log 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin \frac{t}{2} dt + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos \frac{t}{2} dt \end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos \frac{t}{2} dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} \right) dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\log \sin \left( \frac{u}{2} \right) dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log \sin \left( \frac{u}{2} \right) dt \end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable  $u = \pi - t$ . Por ende,

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \log \sin \frac{x}{2} dx &= \pi \log 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin \frac{t}{2} dt + 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \log \sin \frac{u}{2} du \\ &= \pi \log 2 + 2 \int_0^\pi \log \sin \frac{x}{2} dx \\ \Rightarrow \int_0^\pi \log \sin \frac{x}{2} dx &= -\pi \log 2\end{aligned}$$

De (ii): Por lo anterior,  $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}$  donde  $f(x) = -\log |2 \sin \frac{x}{2}|$  para todo  $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ . Ahora, como  $f$  es par, se tiene que

$$b_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ahora, veamos que

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi -\log \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right| dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left[ \log 2 + \log \sin \frac{x}{2} \right] dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^\pi \log 2 + \int_0^\pi \log \sin \frac{x}{2} \right] dx \\ &= \frac{2}{\pi} [\pi \log 2 - \pi \log 2] \\ &= 0\end{aligned}$$

Ahora, si  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned}a_n &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \log \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right| \cos nx dx \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \log \left( 2 \sin \frac{x}{2} \right) \cos nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ -\log \left( 2 \sin \frac{x}{2} \right) \frac{1}{n} \sin nx \Big|_0^\pi + \frac{1}{2n} \int_0^\pi \frac{\cos \frac{x}{2} \sin nx}{\sin \frac{x}{2}} dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi n} \int_0^\pi \frac{\cos \frac{x}{2} \sin nx}{\sin \frac{x}{2}} dx\end{aligned}$$

pero,

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A + B) + \sin(A - B)]$$

Por ende,

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{2\pi n} \int_0^\pi \frac{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) x + \sin \left( n - \frac{1}{2} \right) x}{\sin \frac{x}{2}} dx \\ &= \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [D_n(x) + D_{n-1}(x)] dx \\ &= \frac{1}{n}\end{aligned}$$

De (iii): Veamos la convergencia (usar el teorema de Carleson y más cosas), de donde se deduce el hecho sorprendente que

$$\int_0^\pi \left( \log \left| 2 \cos \frac{x}{2} \right| \right)^2 dx = \frac{\pi^2}{6}$$

□

**Ejercicio 3.1.6**

Sea  $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{R})$  y sea  $x \in \mathbb{R}$ . Se supone que para algún  $\alpha > 0$  se cumple

$$f(x+t) - f(x) = O(|t|^\alpha), \quad \text{cuando } t \rightarrow 0$$

**Demuestre** que la serie de Fourier de  $f$  en  $x$  converge a  $f(x)$ .

**Demostración:**

Como

$$f(x+t) - f(x) = O(|t|^\alpha), \quad \text{cuando } t \rightarrow 0$$

entonces existe  $A > 0$  y  $\delta > 0$  tales que

$$\begin{aligned} |t| < \delta &\Rightarrow |f(x+t) - f(x)| \leq A|t|^\alpha \\ &\Rightarrow -A|t|^\alpha \leq f(x+t) - f(x) \leq A|t|^\alpha \end{aligned}$$

Para ver que la serie de Fourier de  $f$  en  $x$  converge a  $f(x)$ , usaremos el Teorema Fundamental para la convergencia puntual de una serie de Fourier. Además, si  $m \in \mathbb{N}$

$$-A \frac{|t|^\alpha}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t dt \leq \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t dt \leq A \frac{|t|^\alpha}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t dt$$

Para todo  $0 < |t| < \min\{\delta, \pi\}$ . Considere ahora la función  $t \mapsto \frac{|t|^\alpha}{t}$  (llamémosla  $g$ ) definida c.t.p. en  $\mathbb{R}$ . Esta función es la diferencia de dos funciones monótonas en  $[-\pi, \pi]$ , luego de variación acotada. Además es integrable. En efecto,

$$|g(t)| = |t|^{\alpha-1}$$

donde  $t \mapsto |t|^{\alpha-1}$  es integrable en  $[-\pi, \pi]$  pues  $\alpha - 1 > -1$ . Luego, por el Teorema de Jordan la serie de Fourier de  $g$  en  $x$  converge a  $g(x)$ . Así, por el Teorema Fundamental para la convergencia puntual de una serie de Fourier, se tiene que existe  $0 < \gamma < \pi$  tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\gamma}^{\gamma'} \frac{|t|^\alpha}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t dt = 0$$

Tomemos  $\delta' = \min\{\delta, \gamma\}$ . Se tiene que

$$-A \frac{|t|^\alpha}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t dt \leq \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t dt \leq A \frac{|t|^\alpha}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t dt$$

■

**Ejercicio 3.1.7**

Por el problema 3.1.1 se sabe que

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad \forall x \in ]0, 2\pi[$$

i. Póngase

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k}.$$

**Muestre** que

$$\frac{x}{2} + s_n(x) = \pi \int_0^x D_n(t) dt,$$

donde  $D_n$  es el núcleo de Dirichlet.

ii. Si  $x \in ]0, 2\pi[$ , **pruebe** que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \pi \int_0^x D_n(t) dt - \int_0^x \frac{\sin nt}{t} dt \right] = 0.$$

iii. **Deduzca** una nueva demostración de la fórmula

$$\int_0^{\rightarrow \infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

### Demostración:

De (i): Recordemos que el núcleo de Dirichlet está dado por:

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-m}^m e^{ikx}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por ende,

$$\begin{aligned} \int_0^x D_n(t) dt &= \int_0^x \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-m}^m e^{ikt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^x \left[ 1 + \sum_{k=-m, k \neq 0}^m e^{ikt} \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ t \Big|_0^x + \sum_{k=-m, k \neq 0}^m \frac{e^{ikt}}{ik} \Big|_0^x \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ x + \sum_{k=-m, k \neq 0}^m \frac{e^{ikx} - 1}{ik} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ x + \sum_{k=-m, k \neq 0}^m \frac{e^{ikx}}{ik} - \underbrace{\sum_{k=-m, k \neq 0}^m \frac{1}{ik}}_{=0} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ x + \sum_{k=-m, k \neq 0}^m \frac{\cos ikx + \sin ikx}{ik} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ x + \sum_{k=-m}^{-1} \frac{\cos ikx + \sin ikx}{ik} + \sum_{k=1}^m \frac{\cos ikx + i \sin ikx}{ik} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ x + \sum_{k=1}^m \frac{\cos(-ikx) + i \sin(-ikx)}{-ik} + \sum_{k=1}^m \frac{\cos ikx + i \sin ikx}{ik} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ x + \sum_{k=1}^m \frac{-\cos ikx + i \sin ikx}{ik} + \sum_{k=1}^m \frac{\cos ikx + i \sin ikx}{ik} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ x + 2 \sum_{k=1}^m \frac{\sin ikx}{k} \right] \\ &= \frac{x}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^m \frac{\sin ikx}{k} \end{aligned}$$

luego,

$$\pi \int_0^x D(t) dt = \frac{x}{2} + s_n(x)$$

De (ii): Recordemos que podemos escribir al Núcleo de Dirichlet como:

$$D_m(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{t}{2}}, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Por tanto, si  $m \in \mathbb{N}$  y  $x \in ]0, 2\pi[$ :

$$\begin{aligned} \left| \pi \int_0^x D_m(t) dt - \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt \right| &= \left| \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{t}{2}} dt - \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\sin mt \cos \frac{t}{2} + \sin \frac{t}{2} \cos mt}{\sin \frac{t}{2}} dt - \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt \right| \\ &= \left| \int_0^x \left[ \frac{\sin mt}{2 \tan \frac{t}{2}} + \frac{1}{2} \cos mt \right] dt - \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} \int_0^x \cos mt dt + \int_0^x \left[ \frac{\sin mt}{2 \tan \frac{t}{2}} - \frac{\sin mt}{t} \right] dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{2m} \int_0^{mx} \cos u du + \int_0^x \left[ \frac{1}{2 \tan \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right] \sin mt dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2m} |\sin u|_0^{mx} + \left| \int_0^x \left[ \frac{1}{2 \tan \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right] \sin mt dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2m} |\sin mx| + \left| \int_0^x \left[ \frac{1}{2 \tan \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right] \sin mt dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2m} + \left| \int_0^x \left[ \frac{1}{2 \tan \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right] \sin mt dt \right| \end{aligned}$$

Pero, la función

$$t \mapsto \frac{1}{2 \tan \frac{t}{2}} - \frac{1}{t}$$

es integrable en  $]0, x[$ . En efecto, como es continua en  $[0, x]$  haciendo que valga 0 en  $t = 0$ , ya que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{2 \tan \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right] = 0$$

hace que la función sea continua, luego al ser continua en un compacto es integrable. Así, por el teorema de Riemman-Lebesgue se sigue que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^x \left[ \frac{1}{2 \tan \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right] \sin mt dt = 0$$

Por tanto, para  $\varepsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $m \geq N$ :

$$\frac{1}{2m} \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \left| \int_0^x \left[ \frac{1}{2 \tan \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right] \sin mt dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

luego,

$$\begin{aligned} m \geq N \Rightarrow \left| \pi \int_0^x D_m(t) dt - \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt \right| &\leq \frac{1}{2m} + \left| \int_0^x \left[ \frac{1}{2 \tan \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right] \sin mt dt \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

así,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \pi \int_0^x D_m(t) dt - \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt \right| = 0$$

De (iii): Como dado  $x \in ]0, 2\pi[$  se tiene que

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

y,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \pi \int_0^x D_m(t) dt - \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt \right| = 0$$

entonces para  $x \in ]0, 2\pi[$  y  $\varepsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $m \geq N$  implica que

$$\left| \frac{\pi - x}{2} - \sum_{n=1}^m \frac{\sin nx}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \left| \pi \int_0^x D_m(t) dt - \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

luego, si  $m \geq N$  se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \pi \int_0^x D_m(t) dt - \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt \right| &= \left| \frac{x}{2} + s_n(x) - \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt \right| \\ &= \left| \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^m \frac{\sin kx}{k} - \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt \right| \\ &= \left| \frac{-\pi}{2} + \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^m \frac{\sin kx}{k} + \frac{\pi}{2} - \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt \right| \\ &= \left| -\left( \frac{\pi - x}{2} - \sum_{k=1}^m \frac{\sin kx}{k} \right) + \left( \frac{\pi}{2} - \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt \right) \right| \\ &\geq \left| \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt - \frac{\pi}{2} \right| - \left| \frac{\pi - x}{2} - \sum_{k=1}^m \frac{\sin kx}{k} \right| \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt - \frac{\pi}{2} \right| &\leq \left| \pi \int_0^x D_m(t) dt - \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt \right| + \left| \frac{\pi - x}{2} - \sum_{k=1}^m \frac{\sin kx}{k} \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

por ende,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

Pero, por el T.C.V. se tiene que para todo  $m \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt &\stackrel{u=mt}{=} \int_0^{mx} \frac{\sin u}{\frac{u}{m}} \frac{du}{m} \\ \Rightarrow \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt &\stackrel{u=mt}{=} \int_0^{mx} \frac{\sin u}{u} du \end{aligned}$$

por ende,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{mx} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}$$

Para todo  $x \in ]0, 2\pi[$ . Veamos ahora que

$$\int_0^{\rightarrow\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

En efecto, sea  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión que diverge a infinito. Para probar el resultado basta con ver que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{x_n} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

■

### Ejercicio 3.1.8

Sea  $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$  y sean  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  los coeficientes de Fourier de  $f$ . **Demuestre** que

$$\int_0^x f = c + c_0 x + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{c_k e^{ikx}}{ik}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

donde  $c$  es una constante, la convergencia siendo uniforme en  $\mathbb{R}$ .

*Sugerencia.* Considere la función  $F(x) = \int_0^x (f - c_0)$ .

**Deduzca** que los coeficientes de Fourier  $b_n$  de cualquier función  $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$  satisfacen la condición de que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$$

es convergente. **Concluya** que la aplicación  $f \mapsto \{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  no es una aplicación suprayectiva de  $\mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$  en  $c_0(\mathbb{Z})$ .

### Demostración:

Como  $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}$ , entonces la función

$$F(x) = \int_0^x (f(t) - c_0) dt$$

es una función absolutamente continua y de periodicidad  $2\pi$ , pues

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - c_0) dt = 0$$

En efecto, veamos que

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - c_0) dt &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + 2\pi c_0 \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

En particular, es de variación acotada y continua (por ser absolutamente continua), luego por el Teorema de Jordan la serie de Fourier de  $F$  en  $x$  converge puntualmente a  $F$  en  $x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , esto es

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c'_k e^{ikx}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \int_0^x (f(t) - c_0) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c'_k e^{ikx}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \int_0^x f(t) dt &= c_0 x + \sum_{k \in \mathbb{Z}} c'_k e^{ikx}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$



siendo  $\{c'_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  los coeficientes de Fourier de  $F$ . Calculemos estos coeficientes, para ello, calculemos los de  $f - c_0$  y recordemos que

$$c_k = \frac{\tilde{c}_k}{ik}$$

Siendo  $\{\tilde{c}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  los coeficientes de Fourier de  $f - c_0$ , donde estos son

$$\tilde{c}_k = \begin{cases} c_k & \text{si } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ c & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Por tanto,

$$\int_0^x f(t) dt = c + xc_0 + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{c_k e^{ikx}}{ik}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Veamos ahora que en particular para  $x = 0$  se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= c + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{c_k}{ik} \\ \Rightarrow -c &= \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{c_k}{ik} \\ &= \sum_{k \in 1}^{\infty} \frac{c_k}{ik} + \sum_{k \in 1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{-ik} \\ &= \sum_{k \in 1}^{\infty} \frac{c_k}{ik} + \sum_{k \in 1}^{\infty} \frac{-c_{-k}}{ik} \\ &= \frac{1}{i} \cdot \sum_{k \in 1}^{\infty} \frac{c_k - c_{-k}}{k} \\ &= \frac{1}{i} \cdot \sum_{k \in 1}^{\infty} \frac{b_k}{k} \end{aligned}$$

pues, la serie  $\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{c_k}{ik}$  es convergente. Por tanto, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$$

es convergente y converge a  $-ic$ . ■

### Ejercicio 3.1.9

Haga lo siguiente:

- i. Sea  $\alpha$  un número real no entero. **Pruebe** que

$$\pi \cos \alpha x = 2\alpha \sin \pi \alpha \left( \frac{1}{2\alpha^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{\alpha^2 - n^2} \right), \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

De ahí obtenga las fórmulas clásicas

$$\frac{\pi \alpha}{\sin \pi \alpha} = 1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} \quad \text{y} \quad \pi \alpha \cot \pi \alpha = 1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}.$$

- ii. Sea  $x \in ]0, 1[$ . **Pruebe** que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{n^2 - \alpha^2}$$

se puede integrar término por término en el intervalo  $[0, x]$ . De la última fórmula del inciso (i) **deduzca** la fórmula

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right), \quad \forall x \in ]-1, 1[.$$

**Demostración:**

■

**Ejercicio 3.1.10**

Se supone que la serie de Fourier de una función  $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{K})$  converge en el sentido de Cesàro uniformemente en  $\mathbb{R}$ . **Pruebe** que  $f$  es equivalente a una función continua de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{K}$ .

**Demostración:**

■

**Ejercicio 3.1.11**

Sea  $f \in \mathcal{C}^{2\pi}(\mathbb{R})$  la función

$$f(x) = \pi - |2x|, \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

Aplice el teorema 3.9 para mostrar que la serie de Fourier de  $f$  converge a  $f$  uniformemente en  $\mathbb{R}$ . **Calcule**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}.$$

**Solución:**

□

**Ejercicio 3.1.12**

Sea  $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{R})$  la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi \leq x < 0, \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

**Calcule** la serie de Fourier de  $f$ . Usando el teorema fundamental para la convergencia de una serie de Fourier, **muestre** que la serie de Fourier de  $f$  converge a alguna suma  $s(x)$  para todo  $x \in [-\pi, \pi]$ . **Calcule**  $s(x)$  para todo  $x \in [-\pi, \pi]$ .

**Solución:**

□

**Ejercicio 3.1.13**

Haga lo mismo que en el problema 3.12 con  $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{R})$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi \leq x < 0, \\ x & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

**Solución:**

□