Curso de Lógica Matemática

Cristo Daniel Alvarado

14 de febrero de 2024

Índice general

0. Introducción **2**
0.1. Temario 2
0.2. Conectivas Lógicas 2

1. Lógica Proposicional **4**
1.1. Alfabeto 4
1.2. Modeos o Estructuras 5

Capítulo 0

Introducción

0.1. Temario

Los siguientes temas se verán a lo largo del curso:

1. Lógica (Teoría de Modelos).
   1.1) Lógica proposicional.
   1.2) Lógica de primer orden.
2. Teoría de la Computabilidad.
3. Teoría de Conjuntos.

Y la bibliografía para el curso es la siguiente:

- Enderton, 'Introducción matemática a la lógica'.
- Enderton, 'Teoría de la computabilidad'.
- Copi, 'Lógica Simbólica' o 'Computability Theory'.
- Rebeca Weber 'Computability Theory'.

0.2. Conectivas Lógicas

La disyunción ($\wedge$), conjunción ($\vee$), negación ($\neg$), implicación ($\Rightarrow$) y si y sólo si ($\iff$) son las conectivas lógicas usadas usualmente.

(Se habló un poco de una cosa llamada forma normal disyuntiva).

A $\{\wedge, \vee, \neg\}$ se le conoce como un conjunto completo de conectivas lógicas. Nos podemos quedar simplemente con conjuntos completos de disyuntivas con solo dos elementos, a saber: $\{\wedge, \neg\}$ y $\{\vee, \neg\}$, ya que $P \vee Q$ es $\neg(\neg P \wedge \neg Q)$. (de forma similar a lo otro $P \wedge Q$ es $\neg(\neg P \vee \neg Q)$).

También $\{\Rightarrow, \neg\}$ es otro conjunto completo de conectivas lógicas, ya que $P \wedge Q$ es $\neg(P \Rightarrow\neq Q)$.

Y, $\{|\}$ es un conjunto completo, donde $|$ es llamado la **barra de Scheffel**, que tiene la siguiente tabla de verdad.

P	Q	$P\|Q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

con este, se tiene un conjunto completo de conectivas lógicas.

Como muchas veces se usan conectivas de este tipo:

$$(P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow ((P \Rightarrow R) \wedge \neg(Q \Rightarrow S) \wedge T)$$

al ser muy largas, a veces es más conveniente escribirlas en forma Polaca. De esta forma, lo anterior quedaría de la siguiente manera:

$$\Rightarrow\Rightarrow P \neg Q \wedge \wedge P R \neg \Rightarrow Q S T$$

Ahora empezamos con el estudio formal de la lógica.

Capítulo 1

Lógica Proposicional

1.1. Alfabeto

El alfabeto de la lógica proposicional es un conjunto que consta de dos tipos de símbolos:

1. **Variables**, denotadas por $p_1, p_2, ..., p_n, ...$ (a lo más una cantidad numerable). Estas representan proposiciones o enunciados (tengo un paraguas, me caí de las escaleras, no tengo café en la cafetera, etc. . .).

2. **Conectivas**, como $\Rightarrow$ y $\neg$.

Aceptamos la existencia de estas cosas (pues, al menos debemos aceptar la existencia de algo).

Se van a trabajar con sucesiones finitas de símbolos del alfabeto descrito anteriormente. Ahora necesitaremos especificar que tipos de sucesiones van a servirnos para tener un significado formal.

Definición 1.1.1
En el conjunto de sucesiones finitas de símbolos del alfabeto, definimos una **fórmula bien formada** (abreviada como **FBF**) como sigue:

1. Cada variable es una **FBF**.

2. Si φ, ψ son **FBF**, entonces $\neg\varphi$ y $\Rightarrow \varphi\psi$ también lo son.

Observación 1.1.1
Recordar que usamos la notación Polaca en la definición anterior.

A continuación unos ejemplos:

Ejemplo 1.1.1
p_{17}, p_{54} y $\Rightarrow p_2p_{25}$ son FBF. Las primeras dos son llamadas **variables aisladas**. También lo es $\neg \Rightarrow p_2p_{25}$ (en este ejemplo, los p_i son variables).

Pero, por ejemplo $\Rightarrow \neg p_1p_2p_3$ y $\Rightarrow p_4$ no son FBF.

Viendo el ejemplo anterior, notamos que el operador $\Rightarrow$ es binario (solo usa dos entradas) y $\neg$ es unario (solo una entrada). Por lo cual, añadir o no demás variables a los opeadores dentro de la fórmula, hace que la fórmula ya no sea una FBF.

Observación 1.1.2
Eventualmente se va a sustituir la notación Polaca por la normal, para que se pueda leer la FBF y el proceso no sea robotizado.

Definiremos ahora más conectivas lógicas para poder trabajar más cómodamente.

Definición 1.1.2
Se definirán tres conectivas lógicos adicionales.

1. Se define la **disyunción** $\varphi \vee \psi$ como $\Rightarrow \neg\psi\varphi$ (en notación Polaca).
2. Se define la **conjunción** $\varphi \wedge \psi$ como $\neg(\neg\psi \vee \neg\varphi)$.
3. Se define el **si sólo si** $\psi \iff \varphi$ como $(\psi \Rightarrow \varphi) \wedge (\varphi \Rightarrow \psi)$.

1.2. Modeos o Estructuras

En el fondo, queremos que las FBF sean cosas verdaderas o falsas. Un Modelo o Estructura es algo que le va a dar significado a las FBF. De alguna manera va a ser una forma de asignarle el valor de verdadero o falso a cada una de las variables.

Definición 1.2.1
Un **Modelo o Estructura** de la lógica proposicional es una función $m : \mathrm{Var} \to \{V, F\}$, donde Var denota al conjunto de símbolos que son variables. Básicamente estamos diciendo que hay variables que son verdaderas y otras que son falsas.

Teorema 1.2.1
Para todo modelo m, existe una única extensión $\overline{m} : \mathrm{FBF} \to \{V, F\}$, donde FBF denota al conjunto de las fórmulas bien formadas, tal que $\overline{m}(\neg\varphi) = V \iff \overline{m}(\varphi) = F$ y $\overline{m}(\neg\varphi\psi) = F \iff \overline{m}(\varphi) = V$ y $\overline{m}(\psi) = F$.

Definición 1.2.2
Sea m un modelo, φ una fórmula y Σ un cojunto de fórmulas. Definimos que

1. $m \vDash \varphi$ (m satisface φ) si $\overline{m}(\varphi) = V$.
2. $m \vDash \Sigma$ si $m \vDash \varphi$ para cada φ elemento de Σ.

Ejemplo 1.2.1
Sea m un modelo tal que $m(p_1) = V$ y $m(p_i) = F$, para todo $i \geq 2$. En este caso $m \nvDash \Rightarrow p_1 p_3$, pero $m \vDash \neg p_5$.

Definición 1.2.3
Decimos que una fórmula φ es:

1. **Satisfacible** si existe un modelo m tal que $m \vDash \varphi$.
2. **Contradictoria** si todo modelo cumple que $m \nvDash \varphi$.
3. **Una tautología** si todo modelo m cumple que $m \vDash \varphi$.

Ejemplo 1.2.2
Tomemos de ejemplo a $\Rightarrow p_1p_2$. cualquier modelo que haga a p_1 y p_3 verdaderas, o ambas falsas satisfacen la FBF, p_1, $\neg \Rightarrow p_1p_3$ o $\neg(p_1 \Rightarrow \neg p_1)$. Por lo cual, esta fórmula es satisfacible.

En cambio, $\neg(p_1 \Rightarrow p_1)$ es contradictoria y, por ende $p_1 \Rightarrow p_1$ y $\neg p_1 \Rightarrow \neg p_1$ son tautologías.

Definición 1.2.4
Sea Σ un conjunto de fórmulas. Decimos que Σ es

1. **Satisfacible** si existe un modelo m tal que $m \models \Sigma$.
2. **Contradictoria** si todo modelo cumple que $m \not\models \Sigma$.
3. **Una tautología** si todo modelo m cumple que $m \models \Sigma$.

Ejemplo 1.2.3
El conjunto de fórmulas $\Sigma = \{\Rightarrow p_1p_2, p_1, \neg p_2\}$ no es satisfacible (en este caso, es contradictorio).

Observación 1.2.1
Se tiene lo siguiente:

1. Una tautología $\Rightarrow$ satisfacible.
2. φ es satisfacible $\iff$ $\neg\varphi$ es una contradicción.
3. Satisfacible es lo mismo que no contradictoria.

Definición 1.2.5
Si Σ es un conjunto de FBF y φ es alguna otra fórmula, entonces decimos que φ es **consecuencia lógica** de Σ, o que Σ **implica lógicamente** a φ, escrito como $\Sigma \models \varphi$, si para todo modelo m tal que $m \models \Sigma$ se tiene que $m \models \varphi$.

Ejemplo 1.2.4
El conjunto de FBF $\{\Rightarrow p_1p_2, p_1\} \models p_2$.

Observación 1.2.2
Se tiene lo siguiente:

1. Un conjunto de FBF $\Sigma \not\models \varphi$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es satisfacible.
2. Además, un conjunto de FBF $\Sigma \models \varphi$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ no es satisfacible.

Demostración:
Entorno de Prueba ■

Solución:
Entorno de Solución □

Teorema 1.2.2 (Nombre)
Teorema

Proposición 1.2.1 (Nombre)
Proposición

Corolario 1.2.1 (Nombre)
Corolario

Lema 1.2.1 (Nombre)
Lema

Definición 1.2.6 (Nombre)
Definición

Observación 1.2.3 (Nombre)
Observación

Ejemplo 1.2.5 (Nombre)
Ejemplo

Ejercicio 1.2.1 (Nombre)
Ejercicio