

# Notas Curso Topología I

## Axiomas de Numerabilidad

Cristo Daniel Alvarado

3 de junio de 2024

# Índice general

<b>5. Axiomas de Numerabilidad</b>	<b>2</b>
5.1. Conceptos Fundamentales . . . . .	2
5.2. Espacios Primero Numerables . . . . .	2
5.3. Espacios Segundo Numerables . . . . .	5
<b>6. Espacios Conexos</b>	<b>12</b>
6.1. Conceptos Fundamentales . . . . .	12

# Capítulo 5

## Axiomas de Numerabilidad

### 5.1. Conceptos Fundamentales

#### Observación 5.1.1

De ahora en adelante numerable será equivalente a lo sumo numerable.

#### Definición 5.1.1

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico.

1. Sean  $x \in X$  y  $\mathcal{U}$  una colección de vecindades de  $x$ . Diremos que  $\mathcal{U}$  es un **sistema fundamental de vecindades de  $x$**  si dada  $V \in \mathcal{V}(x)$  existe  $U \in \mathcal{U}$  tal que  $U \subseteq V$ . Si  $\mathcal{U}$  es numerable,  $\mathcal{U}$  se dice un **sistema fundamental numerable de vecindades de  $x$** .
2. Si dado  $x \in X$  existe un sistema fundamental numerable de vecindades de  $x$ , el espacio  $(X, \tau)$  se dice **primero numerable**.
3. El espacio  $(X, \tau)$  se dice un **espacio segundo numerable** si su topología tiene una base numerable.
4. El espacio  $(X, \tau)$  se dice un **espacio separable** si existe  $A \subseteq X$  tal que  $A$  es numerable y además  $\overline{A} = X$  (es decir que es denso en  $X$ ).
5. El espacio  $(X, \tau)$  se dice un **espacio de Lindelöf** si cada cubierta abierta del espacio tiene una subcubierta numerable.

### 5.2. Espacios Primero Numerables

---

#### Proposición 5.2.1

Sea  $(X, \tau)$  un espacio primero numerable. Si  $Y \subseteq X$  entonces  $(Y, \tau_Y)$  es primero numerable.

---

#### Demostración:

Sea  $Y \subseteq X$ . Sea  $y \in Y$ , en particular  $y \in X$ . Como  $(X, \tau)$  es primero numerable, existe un sistema fundamental de vecindades de  $y$  en  $(X, \tau)$ , digamos  $\mathcal{U}'$ , es decir que para este  $\mathcal{U}'$  se cumple:

$$\forall V \in \mathcal{V}(y) \exists U \in \mathcal{U}' \text{ tal que } U \subseteq V$$

Sea

$$\mathcal{U} = \{Y \cap U \mid U \in \mathcal{U}'\}$$

Tenemos que  $U \in \mathcal{U}'$ ,  $Y \cap U$  es una vecindad de  $y$  en  $(Y, \tau_Y)$  y, como  $\mathcal{U}'$  es numerable, también  $\mathcal{U}$  lo es.

Sea  $W \subseteq Y$  una vecindad de  $y$  en  $(Y, \tau_Y)$ , luego existe  $V \in \tau$  tal que

$$y \in Y \cap V \subseteq W$$

Como en particular  $V$  es una vecindad de  $y$  en  $(X, \tau)$ , entonces existe  $U \in \mathcal{U}'$  tal que

$$U \subseteq V$$

luego,

$$Y \cap U \subseteq Y \cap V \subseteq W$$

donde  $Y \cap U \in \mathcal{U}$ . Así,  $\mathcal{U}$  es un sistema fundamental de vecindades de  $y$  en  $(Y, \tau_Y)$ . Como  $y \in Y$  fue arbitrario, se sigue que  $(Y, \tau_Y)$  es primero numerable. ■

### Proposición 5.2.2

La propiedad de ser primero numerable es topológica.

#### Demostración:

Sean  $(X_1, \tau_1)$  y  $(X_2, \tau_2)$  espacios topológicos homeomorfos tales que  $(X_1, \tau_1)$  es primero numerable. Sea  $f : (X_1, \tau_1) \rightarrow (X_2, \tau_2)$  el homeomorfismo entre tales espacios. Veamos que  $(X_2, \tau_2)$  es primero numerable.

En efecto, sea  $x_2 \in X_2$ , entonces existe un único  $x_1 \in X_1$  tal que  $f(x_1) = x_2$ . Como  $(X_1, \tau_1)$  es primero numerable, entonces existe  $\mathcal{U}_1$  sistema fundamental numerable de vecindades de  $x_1$ . Sea

$$\mathcal{U}_2 = \left\{ f(U_1) \mid U_1 \in \mathcal{U}_1 \right\}$$

Como  $\mathcal{U}_1$  es numerable,  $\mathcal{U}_2$  también lo es. Y, como  $U_1 \in \mathcal{U}_1$  es una vecindad de  $x_1$ , entonces  $f(U_1)$  es una vecindad de  $x_2$  (por ser  $f$  homeomorfismo). Por tanto,  $\mathcal{U}_2$  es una colección de vecindades de  $x_2$ . Ahora, sea  $V \in \mathcal{V}(x_2)$  una vecindad de  $x_2$ . Como  $f$  es homeomorfismo entonces

$$f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x_1)$$

Luego, existe  $U \in \mathcal{U}_1$  tal que

$$U \subseteq f^{-1}(V) \Rightarrow f(U) \subseteq V$$

por ser  $f$  biyección, donde  $f(U) \in \mathcal{U}_2$ .

Así,  $\mathcal{U}_2$  es un sistema fundamental numerable de vecindades de  $x_2$ . Como el elemento  $x_2$  fue arbitrario, se sigue que  $(X_2, \tau_2)$  es primero numerable. Luego, la propiedad de ser primero numerable es topológica. ■

### Proposición 5.2.3

Sean  $\{(X_k, \tau_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$  una familia numerable de espacios topológicos y

$$X = \prod_{k \in \mathbb{N}} X_k$$

Entonces,  $(X, \tau_p)$  es primero numerable si y sólo si  $(X_k, \tau_k)$  es primero numerable, para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

**Demostración:**

$\Rightarrow$ ): Es inmediato del hecho de que la propiedad de ser primero numerable es hereditaria y topológica.

$\Leftarrow$ ): Suponga que  $(X_k, \tau_k)$  es primero numerable para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Sea  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$ . Para  $x_k \in X_k$  existe

$$\mathcal{U}_k = \{U_m^k\}_{m \in \mathbb{N}}$$

sistema fundamental numerable de vecindades de  $x_k$  en  $(X_k, \tau_k)$ . Definimos

$$\mathcal{U} = \left\{ \prod_{l \in \mathbb{N}} A_l \mid \text{existe } I = \{i_1, \dots, i_t\} \subseteq \mathbb{N} \text{ finito con } i_r < i_s \text{ si } r < s \text{ tal que} \right. \\ \left. l \in \mathbb{N} - I \Rightarrow A_l = X_l \text{ y } l \in I \Rightarrow A_l \in \mathcal{U}_l \right\}$$

veamos que  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}(x)$  y además  $\mathcal{U}$  es un sistema fundamental de vecindades de  $x$ . Sea  $U = \prod_{t \in \mathbb{N}} U_t$  un básico de la topología producto tal que  $x \in U$ . Tenemos que existe  $I \subseteq \mathbb{N}$  finito tal que

$$l \in \mathbb{N} - I \Rightarrow U_l = X_l \text{ y } l \in I \Rightarrow x_l \in U_l \in \tau_l$$

Para  $l \in I$  existe  $U_{m_l}^l \in \mathcal{U}_l$  tal que  $x_l \in U_{m_l}^l \subseteq U_l$ . Sea

$$A = \prod_{l \in \mathbb{N}} A_l$$

donde,

$$l \in \mathbb{N} - I \Rightarrow A_l = X_l \text{ y } l \in I \Rightarrow A_l = U_{m_l}^l$$

por tanto,  $A \in \mathcal{U}$  y es tal que  $x \in A \subseteq U$ .

Veamos ahora que  $\mathcal{U}$  es numerable. Sea  $A = \prod_{l \in \mathbb{N}} A_l \in \mathcal{U}$ , entonces existe  $I \subseteq \mathbb{N}$  finito, digamos  $I = \{i_1, \dots, i_t\}$  (ordenados de forma estrictamente creciente y siendo todos distintos) tales que  $l \in \mathbb{N} - I$  entonces  $A_l = X_l$ . Y, si  $l \in I$  entonces  $A_l = U_{m_l}^l \in \mathcal{U}_l$ . Sea  $(i_1, \dots, i_t, m_{i_1}, \dots, m_{i_t}) \in \mathbb{N}^{2t}$ .

Definimos la función

$$f : \mathcal{U} \rightarrow \bigcup_{t \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^{2t}$$

(donde  $\mathbb{N}^{2t}$  expresa el producto cartesiano de  $\mathbb{N}$  consigo mismo  $2t$ -veces) tal que  $A \mapsto (i_1, \dots, i_t, m_{i_1}, \dots, m_{i_t})$  (siendo el  $A$  de la forma en que se expresó anteriormente). Se tiene por la elección de los elementos de  $\mathcal{U}$ , que la función  $f$  está bien definida y es inyectiva. Por tanto,  $\mathcal{U}$  es numerable.

Luego,  $(X, \tau_p)$  es primero numerable. ■

**Proposición 5.2.4**

Sea  $(X, \tau)$  un espacio primero numerable.

1. Sea  $A \subseteq X$  y  $x \in X$ . Entonces  $x \in \overline{A}$  si y sólo si existe una sucesión de puntos  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  de  $A$  que converge a  $x$ .
2. Sean  $(X', \tau')$  espacio topológico y  $f : (X, \tau) \rightarrow (X', \tau')$  una función. Entonces, para  $x \in X$ ,  $f$  es continua en  $X$  si y sólo si para cada sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  de puntos en  $X$  que converge a  $x$ , se tiene que la sucesión  $\{f(x_n)\}_{n=1}^\infty$  converge a  $f(x)$ .

**Demostración:**

De (1): Se probará la doble implicación.

$\Rightarrow$ ): Sea  $x \in \overline{A}$  y  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un sistema fundamental numerable de vecindades de  $x$ . Entonces

$$B_1 \cap A \neq \emptyset$$

pues  $x \in \overline{A}$  y  $B_1$  es vecindad de  $x$ . Tomemos  $x_1 \in B_1 \cap A$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , como

$$B_1 \cap \cdots \cap B_n$$

es vecindad de  $x$ , entonces su intersección con  $A$  es no vacía. Tome así  $x_n \in B_1 \cap \cdots \cap B_n \cap A$  y constrúyase así la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Veamos que esta sucesión converge a  $x$ . En efecto, sea  $U \in \tau$  tal que  $x \in U$ . Como este es un sistema fundamental de vecindades, existe  $l \in \mathbb{N}$  tal que  $B_l \subseteq U$ , luego

$$x_{l+m} \in B_l \subseteq U$$

para todo  $m \geq 0$ . Por tanto, la sucesión converge a  $x$ .

$\Leftarrow$ ): Sea  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  una sucesión de puntos de  $A$  tal que  $x_n \rightarrow \infty$ . Tomemos  $M \in \tau$  tal que  $x \in M$ , luego existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $x_{k+m} \in M$ , para todo  $m \geq 0$ , así  $M \cap A \neq \emptyset$ . Por tanto,  $x \in \overline{A}$ .

De (2): Se probará la doble implicación.

$\Rightarrow$ ): Suponga que  $f$  es continua en  $x$ . Sea  $\{x_n\}$  una sucesión de puntos que converge a  $x$ . Sea  $V \in \tau'$  tal que  $f(x) \in V$ , entonces  $x \in f^{-1}(V)$ , donde  $f^{-1}(V) \in \tau$  por ser  $f$  continua en  $x$ . Luego, existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que

$$x_{k+m} \in f^{-1}(V), \quad \forall m \geq 0$$

es decir que

$$f(x_{k+m}) \in f(f^{-1}(V)) \subseteq V, \quad \forall m \geq 0$$

Por tanto,  $\{f(x_n)\}_{n=1}^\infty$  converge a  $f(x)$ .

$\Leftarrow$ ): Veamos que dado  $A \subseteq X$  se cumple que  $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ . En efecto, sea  $x \in \overline{A}$ . Por 1) al ser  $(X, \tau)$  primero numerable existe una sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  de puntos de  $A$  que converge a  $x$ . Entonces  $\{f(x_n)\}_{n=1}^\infty$  es una sucesión de puntos de  $f(A)$  que converge a  $f(x)$ . Por tanto,  $f(x) \in \overline{f(A)}$  (en la prueba de la suficiencia no es necesario que  $(X, \tau)$  sea primero numerable, así que en este caso no se ocupa que  $(X', \tau')$  sea primero numerable). Por tanto,  $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$  ■

## 5.3. Espacios Segundo Numerables

---

### Proposición 5.3.1

La propiedad de ser segundo numerable es hereditaria.

---

### Demostración:

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico segundo numerable y  $Y \subseteq X$  subconjunto. Veamos que  $(Y, \tau_Y)$  es segundo numerable. En efecto, como  $(X, \tau)$  es primero numerable, existe  $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una base para la topología  $\tau$  que es a lo sumo numerable. Se tiene que

$$\mathcal{B}' = \left\{ Y \cap B \mid B \in \mathcal{B} \right\}$$

es una base para  $\tau_Y$  (por una proposición anterior). Como  $\mathcal{B}$  es numerable, se sigue que  $\mathcal{B}'$  es numerable. Por tanto,  $(Y, \tau_Y)$  es segundo numerable. ■

---

### Proposición 5.3.2

La propiedad de ser segundo numerable es topológica.

---

**Demostración:**

Sean  $(X, \tau)$  y  $(Y, \sigma)$  espacios topológicos homeomorfos con  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  el homeomorfismo y, suponga que  $(X, \tau)$  es segundo numerable y sea  $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una base de  $\tau$ . Entonces, la por una proposición, la colección:

$$\mathcal{B}' = \left\{ f(B) \mid B \in \mathcal{B} \right\}$$

es una base para la topología  $\sigma$  (por ser  $f$  homeomorfismo) la cual es a lo sumo numerable. Por tanto,  $(Y, \sigma)$  es segundo numerable.

Así, la propiedad de ser segundo numerable es topológica. ■

**Ejercicio 5.3.1**

Sea  $\{(X_n, \tau_n)\}_{n=1}^{\infty}$  una familia de espacios topológicos segundo numerables y, tomemos

$$X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$$

Entonces,  $(X, \tau_p)$  es segundo numerable.

**Demostración:**

■

**Teorema 5.3.1**

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico.

1. Si  $(X, \tau)$  es segundo numerable, entonces es primero numerable.
2. Si  $(X, \tau)$  es segundo numerable, entonces el espacio es de Lindelöf.
3. Si  $(X, \tau)$  es segundo numerable, entonces es separable.

**Demostración:**

De (1): Sea  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una base para la topología  $\tau$ . Tomemos  $x \in X$  y defina

$$\mathcal{B}_x = \left\{ B \in \mathcal{B} \mid x \in B \right\}$$

Se tiene que  $\mathcal{B}_x$  es a lo sumo numerable. Sea  $U \in \tau$  tal que  $x \in U$ , luego como  $\mathcal{B}$  es base existe  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B \subseteq U$ , luego  $B \in \mathcal{B}_x$ . Por tanto,  $\mathcal{B}_x$  es un sistema fundamental de vecindades de  $x$  el cual es a lo sumo numerable. Al ser  $x \in X$  arbitrario, se sigue que  $(X, \tau)$  es primero numerable.

De (2): Sea  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una base para la topología  $\tau$  y sea  $\mathcal{A}$  una cubierta abierta de  $X$ . Dado  $x \in X$ , como  $A$  es una cubierta existe  $A_x \in \mathcal{A}$  tal que

$$x \in A_x \in \tau$$

luego, existe  $B_x \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B_x \subseteq A_x$ . Sea

$$\mathcal{K} = \left\{ m \in \mathbb{N} \mid \exists A \in \mathcal{A} \text{ tal que } B_m \subseteq A \right\}$$

por la observación anterior,  $\mathcal{K} \neq \emptyset$ . Dado  $k \in \mathcal{K}$  escogemos un único  $A_k \in \mathcal{A}$  tal que  $B_k \subseteq A_k$ . Sea

$$\mathcal{A}' = \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

$\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$  es una subcolección a lo sumo numerable.

Sea  $x \in X$ , tomemos  $A \in \mathcal{A}$  tal que  $x \in A$ . Por ser  $\mathcal{B}$  base existe  $B_i \in \mathcal{B}$  tal que

$$x \in B_i \subseteq A$$

Luego,  $i \in \mathcal{K}$  por ende  $x \in A_i$  siendo  $A_i \in \mathcal{A}'$ . Por tanto:

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

luego,  $(X, \tau)$  es Lindelöf.

De (3): Sea  $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  base para  $\tau$ . Dado  $n \in \mathbb{N}$  si  $B_n \neq \emptyset$ , escogemos  $x_n \in B_n$  y con estos puntos formamos al conjunto numerable  $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

Veamos que  $\overline{A} = X$ . En efecto, sea  $U \in \tau$  tal que  $U \neq \emptyset$ , veamos que  $U \cap A \neq \emptyset$ . En efecto, sea  $x \in U$ , luego existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $x \in B_m \subseteq U$ . Como  $B_m \cap A \neq \emptyset$  entonces  $U \cap A \neq \emptyset$ . Se sigue que  $\overline{A} = X$ . ■

---

### Proposición 5.3.3

Sean  $(X, \tau)$  un espacio segundo numerable y  $\mathcal{B}$  una base para su topología  $\tau$ . Entonces,  $\mathcal{B}$  contiene una base numerable para  $\tau$ .

---

### Demostración:

Sea  $\mathcal{B} = \{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$  una base para  $\tau$  y, como  $(X, \tau)$  es segundo numerable, existe  $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  base a lo sumo numerable de  $\tau$ .

a. Sea  $\mathcal{U} \in \tau$ . Definimos:

$$\mathcal{U}^* = \{A \in \mathcal{A} \mid \exists U \in \mathcal{U} \text{ tal que } A \subseteq U\}$$

dado  $A \in \mathcal{U}^*$  escogemos un único  $U_A \in \mathcal{U}$  tal que  $A \subseteq U_A$ . Defina

$$\mathcal{U}' = \{U_A \in \mathcal{U} \mid A \in \mathcal{U}^*\}$$

se tiene que  $\mathcal{U}'$  es numerable por ser  $\mathcal{A}$  numerable. Como  $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ , entonces

$$\bigcup \mathcal{U}' \subseteq \bigcup \mathcal{U}$$

Veamos que se cumple la otra contención. Sea  $x \in \bigcup \mathcal{U}$ , luego existe  $U \in \mathcal{U}$  tal que  $x \in U$ . Como  $\mathcal{A}$  es una base y  $U \in \tau$ , existe  $A \in \mathcal{A}$  tal que

$$x \in A \subseteq U$$

así,  $A \in \mathcal{U}^*$ , luego  $x \in A \subseteq U_A$  por lo cual  $x \in \bigcup \mathcal{U}'$ . Así,

$$\bigcup \mathcal{U}' = \bigcup \mathcal{U}$$

b. Sea  $A \in \mathcal{A}$ ,  $A \in \tau$  luego existe  $\mathcal{B}_A \subseteq \mathcal{B}$  tal que

$$A = \bigcup \mathcal{B}_A$$

Por (a) existe  $\mathcal{B}'_A \subseteq \mathcal{B}_A$  tal que  $\mathcal{B}'_A$  es numerable y

$$A = \bigcup \mathcal{B}'_A$$

Luego,  $\bigcup \{\mathcal{B}'_A \mid A \in \mathcal{A}\}$  es un conjunto a lo sumo numerable contenida en  $\mathcal{B}$  tal que es una base para  $\tau$ .

Por los dos incisos anteriores, se tiene el resultado. ■



**Ejemplo 5.3.1**

Sea  $X = \{0, 1\}$  y tomemos  $\tau_D = \{X, \emptyset, \{0\}, \{1\}\}$ . El espacio  $(X, \tau_D)$  es segundo numerable, en particular primero numerable, Lindelöf y separable (además, metrizable pues  $\tau_D$  es la topología discreta).

**Ejemplo 5.3.2**

Considere  $X = \{0, 1\}$  y tomemos  $\tau = \tau_D$ . Para  $r \in \mathbb{R}$  definimos  $X_r = X$  y  $\tau_r = \tau$ . Veamos que  $(X = \prod_{r \in \mathbb{R}} X_r, \tau_p)$  no es primero numerable.

**Demostración:**

En efecto, sea  $x = (x_r)_{r \in \mathbb{R}} \in X$  tal que

$$x_r = 0, \quad \forall r \in \mathbb{R}$$

Sea  $\mathcal{V} = \{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una familia numerable de vecindades de  $x$ . Dado  $m \in \mathbb{N}$  existe un básico  $B_m \in \tau_p$  tal que

$$x_m \in B_m \subseteq V_m$$

como  $B_m$  es un básico de  $\tau_p$ , luego existe  $J_m \subseteq \mathbb{R}$  finito tal que

$$B_m = \prod_{r \in \mathbb{R}} W_r$$

con  $W_r \in \tau_r$ , para cada  $r \in J_m$  y  $W_r = X_r$  para todo  $r \in \mathbb{R} - J_m$ . Por lo tanto, si

$$V_m = \prod_{r \in \mathbb{R}} K_r$$

entonces para todo  $r \in \mathbb{R} - J_m$  se tiene que  $K_r = X_r$ . Tomemos

$$J = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} J_m$$

este conjunto es a lo sumo numerable, siendo tal que  $J \subseteq \mathbb{R}$ , luego  $\mathbb{R} - J$  es no vacío. Sea  $t \in \mathbb{R} - J$ , se tiene que para todo  $m \in \mathbb{N}$ ,  $t \notin J_m$ . Sea

$$U = \prod_{r \in \mathbb{R}} U_r$$

donde

$$U_r = \begin{cases} \{0\} & \text{si } r = t \\ X_r & \text{si } r \neq t \end{cases}$$

$U \in \tau_p$  además,  $x \in U$ . Se cumple además que  $V_m \not\subseteq U$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Suponga que  $\exists m_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$V_{m_0} \subseteq U$$

Se tiene que

$$\{0, 1\} = X_t = K_t = p_t(V_{m_0}) \subseteq p_t(U) = \{0\}$$

lo cual es una contradicción. Por tanto,  $\mathcal{V}$  no puede ser un sistema fundamnetal de vecindades para  $x$ , así que no es primero numerable. ■

**Observación 5.3.1**

En el ejemplo anterior,  $(\prod_{r \in \mathbb{R}} U_r, \tau_p)$  no es segundo numerable, pues no es primero numerable. Pero,  $(X_r, \tau_r)$  es segundo numerable, para todo  $r \in \mathbb{R}$ .

Tampoco es metrizable, siendo  $(X_r, \tau_r)$  para todo  $r \in \mathbb{R}$ , pues metrizable implica primero numerable.

**Proposición 5.3.4**

Sea  $(X, \tau)$  un espacio metrizable. Entonces,  $(X, \tau)$  es primero numerable.

**Demostración:**

Sea  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  una métrica tal que  $X = X_d$ . Sea  $x \in X$ . Para  $m \in \mathbb{N}$  definimos

$$B_n = B_d \left( x, \frac{1}{n} \right)$$

Entonces,  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un sistema fundamental de vecindades para  $x$  el cual es a lo sumo numerable. En efecto, sea  $U \in \tau$  tal que  $x \in U$ . Entonces, como el sistema de bolas abiertas forma una base para la topología  $\tau$  se tiene que existe  $r > 0$  tal que

$$B(x, r) \subseteq U$$

Por la propiedad arquimediana existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{n} < r$ . Así,

$$B \left( x, \frac{1}{n} \right) \subseteq U$$

siendo  $B(x, \frac{1}{n})$  un elemento del sistema fundamental de vecindades. ■

**Ejemplo 5.3.3**

Sea  $\mathcal{B}_l = \left\{ [a, b] \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ . Ya se sabe que  $\mathcal{B}_l$  es una base para una topología sobre  $\mathbb{R}$ , la cual se denota por  $\tau_l$ . A la pareja  $(\mathbb{R}, \tau_l)$  se suele escribir simplemente como  $\mathbb{R}_l$ .

1.  $\mathbb{R}_l$  es de Hausdorff (esto se deduce de forma casi inmediata).
2.  $\mathbb{R}_l$  es primero numerable. En efecto, sea  $r \in \mathbb{R}$ , entonces el conjunto:

$$\mathcal{V} = \left\{ \left[ r, r + \frac{1}{n} \right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

es un sistema fundamental de vecindades de  $r$ . En efecto, sea  $U \in \tau_l$  tal que  $r \in U$ . Considere  $[l, k) \in \mathcal{B}_l$  que cumpla

$$r \in [l, k) \subseteq U$$

Entonces,  $l \leq r < k$ . Por la propiedad arquimediana existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$r + \frac{1}{n} < k$$

luego,

$$\left[ r, r + \frac{1}{n} \right) \subseteq [l, k) \subseteq U$$

Así,  $\mathcal{V}$  es un sistema fundamental de vecindades de  $r$ .

3.  $\mathbb{R}_l$  no es segundo numerable. Sea  $\mathcal{B}$  una base para  $\tau_l$ . Dado  $x \in \mathbb{R}$ , escogemos  $B_x \in \mathcal{B}$  tal que

$$x \in B_x \subseteq [x, x+1)$$

Tenemos  $x = \inf B_x$  luego dados  $x, y \in \mathbb{R}$  con  $x < y$  existen  $B_x, B_y \in \mathcal{B}$  tales que  $B_x \neq B_y$ . Por tanto,  $\mathcal{B}$  no puede ser numerable, así que  $\mathbb{R}_l$  no puede ser segundo numerable.

4.  $\mathbb{R}_l$  es separable. Considere  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ . Este conjunto es numerable y denso en  $\mathbb{R}_l$ .
5.  $\mathbb{R}_l$  es de Lindelöf. Sea  $\mathcal{A}$  una cubierta de  $\mathbb{R}_l$  formada por básicos. Suponga que

$$\mathcal{A} = \left\{ [a_\alpha, b_\alpha) \mid \alpha \in I \right\}$$

Sea

$$C = \bigcup_{\alpha \in I} (a_\alpha, b_\alpha)$$

Considere  $C$  como subespacio de  $(\mathbb{R}, \tau_u)$ . El espacio  $(\mathbb{R}, \tau_u)$  es segundo numerable, luego  $(C, \tau_{u|_C})$  es segundo numerable. Por lo tanto,  $(C, \tau_{u|_C})$  es de Lindelöf. Tenemos que existe  $J = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m, \dots\} \subseteq I$  numerable tal que

$$C = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_{\alpha_i}, b_{\alpha_i})$$

Sea

$$\mathcal{A}' = \left\{ [a_\alpha, b_\alpha) \mid \alpha \in J \right\}$$

Se tiene que

$$C \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} [a_\alpha, b_\alpha)$$

Tomemos

$$D = \mathbb{R} - C$$

Veamos que  $D$  es numerable. En efecto, sea  $x \in D$ , luego  $x \in \mathbb{R} - C$ . Así, para todo  $\alpha \in I$ ,

$$x \notin (a_\alpha, b_\alpha)$$

Luego, existe  $\alpha_0 \in I$  tal que  $x = a_{\alpha_0}$ . Sea  $q_x \in (a_{\alpha_0}, b_{\alpha_0}) \cap \mathbb{Q}$ , entonces

$$(x, q_x) \subseteq C$$

Sea  $f : D \rightarrow \mathbb{Q}$  la función definida por: dado  $x \in D$ ,  $x \mapsto q_x$ . Veamos que  $f$  es inyectiva. Sean  $x, y \in D$  con  $x < y$ .

- i) Suponga que  $q_y \leq q_x$ . Se tiene que  $x < y < q_x \leq q_y$  (por la elección de los  $q$ ). Por tanto,  $y \in (x, q_x) \subseteq C \Rightarrow y \notin D \#_c$ .
- ii) Por (i),  $q_x < q_y$ . Así,  $f$  es inyectiva. Luego,  $D$  es a lo sumo numerable.

Dado  $d \in D$  escogemos un único elemento  $A_d \in \mathcal{A}$  tal que  $d \in A$ . Sea

$$\mathcal{A}'' = \{A_d \mid d \in D\}$$

Se tiene que  $\mathcal{A}'$  y  $\mathcal{A}''$  son a lo sumo numerables, luego su unión también lo es y es tal que

$$\mathbb{R} \subseteq \bigcup \mathcal{A}' \cup \mathcal{A}''$$

por tanto,  $\mathbb{R}_l$  es Lindelöf.

6.  $\mathbb{R}_l^2 = \mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$  no es de Lindelöf. Sea

$$\mathcal{L} = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

Afirmamos que  $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}_l^2$  es cerrado. Sea

$$\mathcal{A} = \{\mathbb{R} - \mathcal{L}\} \bigcup \left\{ [a, b) \times [-a, d) \mid a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Se tiene que  $\mathcal{A}$  es una cubierta abierta de  $\mathbb{R}_l^2$ . Además, para  $U = [a, b) \times [-a, d)$  tenemos que  $U \cap \mathcal{L} = \{(a, -a)\}$ . Luego, para todo  $a \in \mathbb{R}$

$$\{(a, -a)\} \in \tau_l^2 \mathcal{L}$$

pero entonces  $\mathcal{A}$  no puede tener una subcolección numerable que cubra a  $\mathbb{R}_l^2$ .

7.  $\mathbb{R}_l^2$  es separable pues  $\mathbb{Q}^2 \subseteq \mathbb{R}_l^2$  es numerable y denso.

8.  $\mathcal{L}$  como subespacio de  $\mathbb{R}_l^2$  no es separable. Sea  $A \subseteq \mathcal{L}$  numerable. Se tiene que  $\tau_l^2 \mathcal{L}$  coincide con la topología discreta. Luego  $\mathcal{L} - A$  es abierto, así  $\mathcal{A}$  es cerrado (todo esto en la topología del subespacio), así  $A$  no es denso en  $(\mathcal{L}, \tau_l^2)$ . Por tanto, el espacio no puede ser separable.

# Capítulo 6

## Espacios Conexos

### 6.1. Conceptos Fundamentales

#### Definición 6.1.1

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico.

- Una **partición de  $X$**  es una pareja formada por dos conjuntos abiertos  $U, V$  no vacíos tales que  $U \cap V = \emptyset$  y  $X = U \cup V$ .
- Dos subconjuntos  $A, B$  de  $X$  se dicen **mutuamente separados** en  $(X, \tau)$  si  $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$ .
- $(X, \tau)$  se llama un **espacio conexo** si no existe una partición de  $X$  y, en caso contrario lo llamaremos **espacio desconexo**. Si  $A \subseteq X$  se dice que  $A$  es un **conjunto conexo** si  $(A, \tau_A)$  es conexo.

#### Ejemplo 6.1.1

Dado  $(X, \tau_I = \{X, \emptyset\})$  es un conjunto conexo.

#### Ejemplo 6.1.2

Sea  $X$  un conjunto con al menos dos puntos distintos. Entonces,  $(X, \tau_D)$  no es conexo.

#### Ejemplo 6.1.3

Sean  $\tau_1$  y  $\tau_2$  dos topologías definidas sobre el conjunto  $X$  tales que  $\tau_2 \subseteq \tau_1$ . Si  $(X, \tau_1)$  es conexo, entonces  $(X, \tau_2)$  también lo es.

**Demostración:**

■

#### Ejemplo 6.1.4

Sea  $X = \{a, b, c\}$  y considere la topología  $\tau = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b\}\}$ . Entonces,  $(X, \tau)$  es conexo.

Pero,  $A = \{a, c\}$  es un conjunto tal que  $(A, \tau_A = \{A, \emptyset, \{a\}, \{c\}\})$  no es conexo.

Por tanto, la propiedad de ser conexo no se hereda.

---

**Proposición 6.1.1**

Sea  $(\mathcal{L}, \prec)$  un conjunto ordenado tal que:

1. Dados  $x, y \in \mathcal{L}$  tales que  $x \prec y$ , existe  $z \in \mathcal{L}$  que cumple  $x \prec z \prec y$ .
2. Todo subconjunto no vacío de  $\mathcal{L}$  acotado superiormente tiene mínima cota superior.

Entonces, al considerar  $(\mathcal{L}, \tau_{\prec})$  tenemos que en  $\mathcal{L}$ , el mismo  $\mathcal{L}$ , cada intervalo abierto, cerrado, semi-abierto y cualquier rayo, son conjuntos conexos

---

**Demostración:**

Sea  $Y \subseteq \mathcal{L}$  tal que  $Y = \mathcal{L}$  o  $Y$  es un intervalo o  $Y$  es un rayo.

Tenemos que dados  $p, q \in Y$  con  $p \prec q$  se cumple que  $[p, q] \subseteq Y$ , es decir que  $Y$  es un conjunto convexo. Mostremos que  $Y$  es conexo.

Sean  $A, B \subseteq Y$  tales que  $A, B \in \tau_{\prec Y}$  son ambos no vacíos y  $A \cap B \neq \emptyset$ . Mostraremos que  $A \cup B$  es un subconjunto propio de  $Y$ , es decir que

$$A \cup B \subsetneq Y$$

Sean  $a \in A$  y  $b \in B$ . Podemos suponer que  $a \prec b$ . Como  $Y$  es convexo, entonces  $[a, b] \subseteq Y$ . Sea

$$A_0 = A \cap [a, b] \neq \emptyset$$

y

$$B_0 = B \cap [a, b] \neq \emptyset$$

Entonces  $A_0, B_0$  son dos conjuntos abiertos no vacíos en  $([a, b], \tau_{\prec[a, b]})$ . Para todo  $x \in A_0$  se tiene que  $x \prec b$ . Existe pues  $c \in \mathcal{L}$  tal que  $c$  es la mínima cota superior de  $A_0$ . Probemos que  $c \in [a, b]$  y que  $c \notin A \cup B$ .

1.  $c \notin A_0$ . Suponga que  $c \in A_0$ , entonces  $a \preceq c \prec b$ . Como  $A_0$  es abierto en  $[a, b]$  existe  $d \in \mathcal{L}$  tal que  $[c, d] \subseteq A_0$  y  $c \prec d$ . Como  $c \prec d$  entonces existe  $y \in \mathcal{L}$  tal que  $c \prec y \prec d$ . Luego  $y \in A_0 \#_c$ . Por tanto,  $c \notin A_0$ .
2.  $c \in [a, b]$ . Sea  $y_0 \in A_0 = A \cap [a, b]$ . Por la parte anterior se tiene que  $y \prec c \preceq b$ , luego  $c \in [y_0, b] \subseteq [a, b]$ .
3.  $c \notin A$ .
4.  $c \notin B_0$ . Suponga que  $c \in B_0 = B \cap [a, b]$ , entonces  $a \prec c$ .  $B_0$  es abierto en  $[a, b]$ , luego existe  $d \in [a, b]$  tal que  $d \prec c$  y  $(d, c] \subseteq B_0$ . Existe entonces  $x \in A_0$  tal que  $d \prec x \prec c$ , luego  $x \in A$  y  $x \in B$  pues  $(d, c] \subseteq B_0 \#_c$ . Luego,  $c \notin B_0$ .
5.  $c \notin B$ .

Entonces,  $c \notin A \cup B$ . Así,  $A \cup B$  no puede formar una partición de  $Y$ , es decir que  $Y$  es conexo. ■

---

**Corolario 6.1.1**

Consideremos  $(\mathbb{R}, \tau_u)$ , entonces cada intervalo, cada rayo y el mismo conjunto  $\mathbb{R}$  son subconjuntos conexos de  $(\mathbb{R}, \tau_u)$ .

---

**Demostración:**

Es inmediato del teorema anterior. ■

---

**Proposición 6.1.2**

Sea  $C$  un subconjunto de  $(\mathbb{R}, \tau_u)$ . Entonces,  $C$  es conexo si y sólo si  $C$  es un intervalo o  $C$  es un rayo o  $C = \mathbb{R}$  o  $C = \emptyset$  o  $C = \{r\}$  con  $r \in \mathbb{R}$ .

---

**Demostración:**

$\Rightarrow$ ) : Sea  $C \subseteq \mathbb{R}$  tal que  $C \neq \mathbb{R}$ ,  $C \neq \emptyset$ ,  $C$  no es un intervalo ni un rayo ni un conjunto unipuntual. Entonces, existen  $a, b \in C$  y un punto  $x \in \mathbb{R} - C$  tal que

$$a < x < b$$

Sea

$$A = \{c \in C \mid c < x\} \quad \text{y} \quad B = \{c \in C \mid x < c\}$$

tanto  $A$  como  $B$  son conjuntos no vacíos. Otra forma de expresarlos es como:

$$A = (-\infty, x) \cap C \quad \text{y} \quad B = (x, \infty) \cap C$$

$A$  y  $B$  son dos conjuntos no vacíos abiertos en  $(C, \tau_{u_C})$  tales que  $A \cap B = \emptyset$ . Además,  $A \cup B = C$ . Luego  $C$  no es conexo.

$\Leftarrow$ ) : Es inmediata del teorema anterior. ■

**Observación 6.1.1**

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico no conexo. Entonces, existen  $U, V \in \tau - \{\emptyset\}$  tales que

$$U \cap V = \emptyset \quad X = U \dot{\cup} V$$

por ende,  $U = X - V$  y  $V = X - U$  son cerrados disjuntos tales que

$$\overset{\circ}{U} = U = \overline{U}$$

Análogamente

$$\overset{\circ}{V} = V = \overline{V}$$

Además,  $U \cap \overline{V} = \overline{U} \cap V = \emptyset$ . También,  $\text{Fr}(U) = \text{Fr}(V) = \emptyset$ .

---

**Proposición 6.1.3**

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1.  $(X, \tau)$  es conexo.
  2. Los únicos subconjuntos de  $X$  que son a la vez abiertos y cerrados son  $X$  y  $\emptyset$ .
  3. Los únicos subconjuntos de  $X$  con frontera vacía son  $X$  y  $\emptyset$ .
- 

**Demostración:**

(1)  $\Rightarrow$  (2): Sea  $A \subseteq X$  tal que  $A$  es abierto y cerrado a la vez, es decir que  $A, X - A \in \tau$ . Suponga que  $A \neq X, \emptyset$ , se tiene pues que

$$X = A \cup (X - A) \quad \text{y} \quad A \cap (X - A) = \emptyset$$

siendo  $A, X - A \neq \emptyset$ . Luego esto implicaría que  $(X, \tau)$  no es conexo. Por tanto,  $A = \emptyset$  o  $A = X$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3) : Sea  $A \subseteq X$  tal que  $\text{Fr}(A) = \emptyset$ . Entonces,

$$\emptyset = \text{Fr}(A) = \overline{A} - \overset{\circ}{A} \Rightarrow \overset{\circ}{A} = \overline{A}$$

luego  $A$  es cerrado y abierto en  $(X, \tau)$ . Por tanto,  $A = X$  o  $A = \emptyset$ .

(3)  $\Rightarrow$  (1) : Suponga que  $U, V \in \tau$  son tales que

$$U \cap V = \emptyset \quad \text{y} \quad U \cup V = X$$

Se tiene que  $U = X - V$  y  $V = X - U$  donde se sigue que  $U, V$  son cerrados en  $(X, \tau)$ . Así,

$$\overline{U} = U = \overset{\circ}{U} \quad \text{y} \quad \overline{V} = V = \overset{\circ}{V}$$

por tanto,  $\text{Fr}(U) = \emptyset$ , es decir que  $U = \emptyset$  y  $V = X$ , o  $U = X$  y  $V = \emptyset$ . Luego,  $(X, \tau)$  es conexo. ■

### Definición 6.1.2

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. Dos conjuntos  $U, V \in \tau$  se dicen **mutuamente separados** si  $U \cap \overline{V} = \overline{U} \cap V = \emptyset$ .

### Definición 6.1.3

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico y sea  $Y \subseteq X$ . Una pareja  $A, B$  de subconjuntos de  $X$  mutuamente separados en  $(X, \tau)$  es una **separación de  $Y$  en  $(X, \tau)$**  si

$$Y = A \cup B, \quad Y \cap A \text{ y } Y \cap B \neq \emptyset$$

### Proposición 6.1.4

Sean  $(X, \tau)$  un espacio topológico y  $Y \subseteq X$ . Entonces  $(Y, \tau_Y)$  es conexo si y sólo si no existe una separación de  $Y$  en  $X$ .

### Demostración:

$\Rightarrow$  : Suponga que  $A, B \subseteq X$  son una separación de  $Y$  en  $(X, \tau)$ . Tenemos que

$$\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$$

también,

$$Y = A \cup B \quad Y \cap A \neq \emptyset \text{ y } Y \cap B \neq \emptyset$$

Se tiene pues que

$$\begin{aligned} \overline{A} \cap Y &= \overline{A} \cap (A \cup B) \\ &= (\overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap B) \\ &= A \end{aligned}$$

análogamente se prueba que  $\overline{B} \cap Y = B$ . Por tanto,  $A, B$  forman una partición de  $(Y, \tau_Y)_{\#c}$ . Por tanto,  $(Y, \tau_Y)$  es conexo.

$\Leftarrow$  : Suponga que  $(Y, \tau_Y)$  no es conexo. Entonces existen  $A, B \in \tau_Y$  con  $A, B \neq \emptyset$  tales que

$$A \cap B = \emptyset \quad \text{y} \quad A \cup B = Y$$

Luego  $A$  y  $B$  son conjuntos abiertos y cerrados en  $(Y, \tau_Y)$ .

$$A = \overline{A} \cap Y \quad \text{y} \quad B = \overline{B} \cap Y$$

Siendo tales que

$$\emptyset = A \cap B = (\overline{A} \cap Y) \cap B = \overline{A} \cap (Y \cap B) = \overline{A} \cap B$$

de forma análoga  $A \cap \overline{B} = \emptyset$ . Así,  $A$  y  $B$  forman una separación de  $Y$  en  $(X, \tau)$ . ■



---

**Corolario 6.1.2**

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. Entonces,  $(X, \tau)$  es conexo si y sólo si no existen  $A, B \subseteq X$  no vacíos tales que

$$X = A \cup B \quad A \cap \overline{B} = \emptyset = \overline{A} \cap B$$

---

**Demostración:**

Inmediata de la proposición anterior. ■

---

**Proposición 6.1.5**

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico y sean  $Y, Z \subseteq X$  tales que  $Y \subseteq Z$ . Si  $U, V$  es una separación de  $Z$  en  $(X, \tau)$  y  $Y$  es conexo, entonces  $Y \subseteq U$  ó  $Y \subseteq V$ .

---

**Demostración:**

Se tiene que  $Y \subseteq U \cup V$ . Sea

$$U_1 = Y \cap U \quad \text{y} \quad V_1 = Y \cap V$$

entonces,

$$Y = U_1 \cup V_1$$

Como  $U \cap \overline{V} = \emptyset = \overline{U} \cap V$ , entonces

$$\begin{aligned} \overline{U_1} \cap V_1 &= \overline{Y \cap U} \cap (Y \cap V) \\ &\subseteq \overline{U} \cap (Y \cap V) \\ &= (\overline{U} \cap V) \cap Y \\ &= \emptyset \\ \Rightarrow \overline{U_1} \cap V_1 &= \emptyset \end{aligned}$$

de forma análoga se obtiene que  $U_1 \cap \overline{V_1} = \emptyset$ . Como  $Y$  es conexo entonces  $U_1 = \emptyset$  o  $V_1 = \emptyset$ , es decir que  $Y \subseteq V$  o  $Y \subseteq U$ . ■

---

**Proposición 6.1.6**

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico y  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$  una familia de subconjuntos conexos de  $X$  tales que

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset$$

Entonces  $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$  es conexo.

---

**Demostración:**

Sea  $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ . Supongamos que  $A$  no es conexo, entonces existe una separación  $U, V \in \tau$  de  $A$  en  $X$ . Tomemos  $\beta \in I$ . Como  $A_\beta \subseteq A$  y  $A_\beta$  es conexo, entonces por la proposición anterior se tiene que:

$$A_\beta \subseteq U \quad \text{ó} \quad A_\beta \subseteq V$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $A_\beta \subseteq U$ . Como  $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \subseteq A_\beta$ , entonces para todo  $\gamma \in I$  se tiene que  $A_\gamma \cap U \neq \emptyset$ , luego por ser cada  $A_\gamma$  conexo debe suceder que:

$$A_\gamma \subseteq U$$

para todo  $\gamma \in I$ . Por tanto:

$$A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \subseteq U$$

así,  $A \cap V = \emptyset$  pues  $U$  y  $V$  forman una separación de  $A$ . Por tanto  $A$  debe ser conexo. ■

---

**Proposición 6.1.7**

Sean  $(X_1, \tau_1)$  y  $(X_2, \tau_2)$  espacios topológicos tales que existe una función continua y suprayectiva  $f : (X_1, \tau_1) \rightarrow (X_2, \tau_2)$ . Si  $(X_1, \tau_1)$  es conexo, entonces  $(X_2, \tau_2)$  también lo es.

---

**Demostración:**

Sea  $A \subseteq X_2$  tal que  $A, X_2 - A \in \tau_2$ . Suponga que  $A \neq \emptyset$ , para probar que  $(X_2, \tau_2)$  es conexo basta con ver que  $A = X_2$ . En efecto, veamos que como  $f$  es suprayectiva entonces  $f^{-1}(A) \neq \emptyset$  y, al ser  $f$  continua se tiene que

$$f^{-1}(A) \in \tau_1$$

Pero,

$$f^{-1}(X_2 - A) = X_1 - f^{-1}(A)$$

donde  $X_2 - A \in \tau_2$ , luego  $X_1 - f^{-1}(A) \in \tau_1$ . Por ser  $(X_1, \tau_1)$  conexo, al ser  $f^{-1}(A) \neq \emptyset$  debe tenerse pues que:

$$f^{-1}(A) = X_1$$

(pues  $f^{-1}(A)$  y  $X_1 - f^{-1}(A)$  están en  $\tau_1$ ). Por tanto

$$A = f(f^{-1}(A)) = f(X_1) = X_2$$

lo que prueba el resultado. ■

---

**Corolario 6.1.3**

La propiedad de ser conexo es topológica.

---

**Demostración:**

Es inmediata del teorema anterior. ■

---

**Proposición 6.1.8**

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico, y sea  $Y = \{a, b\}$  dotado de la topología discreta  $\tau_D = \{\emptyset, T, \{a\}, \{b\}\}$ . Entonces  $(X, \tau)$  conexo si y sólo si no es posible definir una función  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau_D)$  que sea suprayectiva y continua.

---

**Demostración:**

$\Rightarrow$ ) : Suponga que se puede definir tal función, entonces por la proposición anterior se seguiría que  $(Y, \tau_D)$  es conexo<sub>#c</sub>, pues  $Y = \{a\} \cup \{b\}$  siendo  $\{a\}, \{b\} \in \tau_D$  tales que  $\{a\} \cap \{b\} = \emptyset$ . Por tanto, no es posible definir una función con tales propiedades.

$\Leftarrow$ ) : Suponga que  $(X, \tau)$  no es conexo, entonces existen  $U, V \in \tau - \{\emptyset\}$  tales que

$$X = U \cup V \quad \text{y} \quad U \cap V = \emptyset$$

defina  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau_D)$  como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x \in U \\ b & \text{si } x \in V \end{cases}, \quad \forall x \in X.$$

se tiene que  $f^{-1}(\{a\}) = U$ ,  $f^{-1}(\{b\}) = V$ , luego  $f$  es continua. Además por definición  $f$  es suprayectiva. Lo anterior prueba la contrapositiva. ■

---

**Proposición 6.1.9**

Sean  $(X, \tau)$  un espacio topológico,  $A, B \subseteq X$  tales que  $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ . Si  $A$  es conexo, entonces  $B$  es conexo.

---

**Demostración:**

Suponga que  $B$  no es conexo. Podemos definir una función  $f : (B, \tau_B) \rightarrow (Y, \tau_D)$  continua y suprayectiva, donde  $Y = \{a, b\}$ . Como  $B \subseteq \overline{A}$  se tiene que:

$$\overline{A}^B = \overline{A} \cap B = B$$

Por lo cual  $f(\overline{A}^B) = f(B) = Y$ , por ser  $f$  continua,

$$Y = f(\overline{A}^B) \subseteq \overline{f(A)} = f(A) \Rightarrow f(A) = Y$$

Tenemos pues que  $f|_A : (A, \tau_A) \rightarrow (Y, \tau_D)$  es una función continua (por ser reestricción) y suprayectiva. Por ende,  $A$  no es conexo. Por tanto,  $B$  es conexo. ■

---

**Corolario 6.1.4**

Sea  $(X, \tau)$  es un espacio topológico. Si  $A \subseteq X$  es conexo, entonces  $\overline{A}$  es conexo.

---

**Demostración:**

Es inmediato del teorema anterior. ■

---

**Teorema 6.1.1 (Teorema del valor medio)**

Sea  $(X, \tau)$  un espacio conexo,  $(Y, \prec)$  un conjunto ordenado y  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \prec)$  una función continua. Si  $a, b \in X$  y  $\gamma \in Y$  es tal que:

$$f(a) \prec \gamma \prec f(b)$$

entonces existe  $c \in X$  tal que  $f(c) = \gamma$ .

---

**Demostración:**

Suponga que no existe  $c \in X$  tal que  $f(c) = \gamma$ . ■

---

**Proposición 6.1.10**

Sean  $(X_1, \tau_1)$  y  $(X_2, \tau_2)$  dos espacios conexos. Entonces  $(X_1 \times X_2, \tau_p)$  es un espacio conexo.

---

**Demostración:**

Entonces, para todo  $x \in X_1$ , tenemos que  $T_x = (X_1 \times \{b\}) \cup (\{x\} \times X_2)$  es un conexo.

Además, para todo  $x \in X_1$ ,  $(a, b) \in T_x$  (recordando que  $a \in X_1$  es arbitrario fijo), luego  $\bigcup_{x \in X_1} T_x$  es conexo. Veamos que

$$\bigcup_{x \in X_1} T_x = X_1 \times X_2$$

En efecto, sea  $(p, q) \in X_1 \times X_2$ , entonces  $(p, q) \in T_p \subseteq \bigcup_{x \in X_1} T_x$ .

Se sigue entonces que  $(X_1 \times X_2, \tau_p)$  es conexo. ■

**Ejercicio 6.1.1**

Si  $\{(X_1, \tau_1), \dots, (X_n, \tau_n)\}$  son espacios topológicos conexos, entonces

$$X = \prod_{i=1}^n X_i$$

dotado de la topología producto es un espacio conexo.

*Sugerencia.* Se puede demostrar que  $(X_1 \times \dots \times X_{n-1}) \times X_n$  es homeomorfo a  $X_1 \times \dots \times X_n$ .

**Demostración:**

■

**Proposición 6.1.11**

Sea  $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in I}$  una familia arbitraria de espacios topológicos y sea

$$X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$$

Entonces  $(X, \tau_p)$  es conexo si y sólo si para todo  $\alpha \in I$ ,  $(X_\alpha, \tau_\alpha)$  es un espacio conexo.

**Demostración:**

$\Rightarrow$  : Sea  $\alpha \in I$  y considere la función  $p_\alpha : (X, \tau_p) \rightarrow (X_\alpha, \tau_\alpha)$ . Esta función es continua y suprayectiva, se sigue entonces que  $(X_\alpha, \tau_\alpha)$  es conexo.

$\Leftarrow$  : Sea  $b = (b_\alpha)_{\alpha \in I} \in X$  elemento arbitrario fijo de  $X$  y, sea  $J = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subseteq I$ . Definimos

$$X_J = \left\{ (x_\alpha)_{\alpha \in I} \in X \mid x_\alpha = b_\alpha \text{ para } \alpha \notin J \right\}$$

Se tiene que  $X_J \neq \emptyset$  pues  $b \in X_J$ . Podemos escribir  $X_J$  como

$$X_J = \prod_{\alpha \in I} Y_\alpha$$

donde

$$Y_\alpha = \begin{cases} \{b_\alpha\} & \text{si } \alpha \notin J \\ X_\alpha & \text{si } \alpha \in J \end{cases}$$

Sea  $X' = \prod_{i=1}^\infty X_{\alpha_i}$ . Definamos  $\varphi : (X', \tau_p) \rightarrow (X_J, \tau_{p_{X_J}})$  tal que

$$(x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n}) \mapsto (y_\alpha)_{\alpha \in I}$$

donde

$$y_\alpha = \begin{cases} b_\alpha & \text{si } \alpha \notin J \\ x_\alpha & \text{si } \alpha \in J \end{cases}$$

1.  **$\varphi$  es suprayectiva.** Veamos que  $\varphi(X') = X_J$ . En efecto, sea  $\zeta = (\zeta_\alpha)_{\alpha \in I} \in X_J$ , es decir que si  $\alpha \notin J$  se tiene que  $\zeta_\alpha = b_\alpha$ , luego:

$$\varphi((\zeta_{\alpha_1}, \dots, \zeta_{\alpha_n})) = \zeta$$

se concluye que  $\varphi(X') = X_J$ .

2.  $\varphi$  es continua. Sea  $U = \prod_{\alpha \in I} U_\alpha$  un básico de  $(X, \tau_p)$ , es decir que  $U_\alpha \in \tau_\alpha$  para todo  $\alpha \in I$  (y coincide con  $X_\alpha$  para casi todo  $\alpha \in I$  salvo una cantidad finita). Tomemos

$$U' = U \cap X_J \in \tau_{p_{X_J}} - \{\emptyset\}$$

Se tiene que  $U' \in \tau_{p_{X_J}}$ , más aún:

$$\begin{aligned} U' &= \left( \prod_{\alpha \in I} U_\alpha \right) \cap \left( \prod_{\alpha \in I} Y_\alpha \right) \\ &= \prod_{\alpha \in I} (U_\alpha \cap Y_\alpha) \end{aligned}$$

donde

$$U_\alpha \cap Y_\alpha = \begin{cases} \{b_\alpha\} & \text{si } \alpha \notin J \\ U_\alpha & \text{si } \alpha \in J \end{cases}, \quad \forall \alpha \in I$$

Por tanto

$$\varphi^{-1}(U') = \prod_{\alpha \in J} U_\alpha \in \tau_{p_{X'}}$$

luego  $\varphi$  es una función continua.

Por el ejercicio anterior se tiene que  $(X', \tau_{p_{X'}})$  es conexo, entonces  $(X_J, \tau_p)$  es conexo (por ser  $\varphi$  continua y suprayectiva).

Sea

$$\mathcal{F} = \left\{ J \subseteq I \mid J \text{ es un conjunto finito} \right\}$$

Para todo  $J \in \mathcal{F}$ ,  $X_J$  es conexo por lo probado anteriormente para el cual  $b \in X_J$ . Por ende, el conjunto

$$\bigcup_{J \in \mathcal{F}} X_J = Y$$

es conexo en  $(X, \tau_p)$ . Veamos que

$$\overline{Y} = X$$

En efecto, sea  $W = \prod_{\alpha \in I} W_\alpha$  un básico de  $\tau_p$  con  $W \neq \emptyset$ . Se tiene que para todo  $\alpha \in I$ ,  $W_\alpha \in \tau_\alpha$  y además existe  $K \in \mathcal{F}$  tal que si  $\alpha \notin K$ ,  $W_\alpha = X_\alpha$ .

Para  $\alpha \in K$ ,  $x_\alpha \in X_\alpha$  y definimos

$$y_\alpha = \begin{cases} x_\alpha & \text{si } \alpha \in K \\ b_\alpha & \text{si } \alpha \notin K \end{cases}, \quad \forall \alpha \in I$$

Entonces  $y = (y_\alpha)_{\alpha \in I} \in X_K \cap W$  lo que implica que  $Y \cap W \neq \emptyset$ . Luego  $\overline{Y} = X$  y así,  $(X, \tau_p)$  es conexo. ■

#### Definición 6.1.4

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico y sea  $p \in X$ . Tomemos

$$\mathcal{C} = \left\{ C \subseteq X \mid C \text{ es conexo y } p \in C \right\}$$

tenemos que  $\{p\} \in \mathcal{C}$  y además para todo  $C \in \mathcal{C}$ ,  $p \in C$ . Por tanto  $C_p = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$  es un conjunto conexo, el cual llamaremos **la componente conexa de  $p$** .

**Observación 6.1.2**

Se tiene lo siguiente:

1.  $C_p$  es el máximo conexo de  $X$  que contiene a  $p \in X$ .
2.  $C_p$  es un conjunto cerrado.
3. Sean  $p, q \in X$ , entonces  $C_p = C_q$  ó  $C_p \cap C_q = \emptyset$ .

**Demostración:**

De 1): Es inmediata de la definición.

De 2): Como  $C_p$  es conexo, entonces  $\overline{C_p}$  es conexo, luego por maximalidad  $\overline{C_p} \subseteq C_p$  lo cual implica que  $C_p$  es cerrado.

De 3): Si  $C_p \cap C_q \neq \emptyset$  entonces  $C_p \cup C_q$  es conexo, pero es tal que contiene a  $p$  y  $q$ , luego

$$C_p \subseteq C_p \cup C_q \subseteq C_p \quad \text{y} \quad C_q \subseteq C_p \cup C_q \subseteq C_q$$

por tanto,  $C_p \cup C_q = C_p = C_q$ . ■

**Definición 6.1.5**

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico, definimos sobre  $X$  la relación  $\sim$  siguiente:

$$x \sim y \iff \text{no existen } A, B \in \tau \text{ tales que } A \cap B = \emptyset, A \cup B = X, x \in A \text{ y } y \in B$$

Esta es una relación de equivalencia sobre  $X$ . Esta relación de equivalencia dice básicamente que dos elementos están relacionados si y sólo si están en la misma componente conexa.

**Demostración:** ■