Ejercicios

§0.1 Ejercicios

Ejercicios de cada una de las secciones.

§0.1.1 Series de Potencias

Ejercicio 0.1.1
Pruebe que si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, entonces:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_1}$$

Demostración:
En efecto, veamos que:

$$\begin{aligned}
e^{x+iz_2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} z_1^k z_2^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k}{k!} \cdot \frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!}
\end{aligned}$$

donde, recordemos que:

$$e_1^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \quad \text{y} \quad e^{z_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!}$$

por tanto, de la Proposición **??** se sigue que:

$$e^{z_1+z_2} = e_1^z e^{z_2}$$

■

Ejercicio 0.1.2
Pruebe que

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

donde $z = x + iy$.

Demostración:

Sea $z \in \mathbb{C}$. Se tiene que:

$$e^z = e^x e^{iy}$$

Veamos que:

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

■

Ejercicio 0.1.3

Pruebe que si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ son dos sucesiones de números no negativos tales que $0 \leq b = \lim_{n\to\infty} b_n$ y $a = \limsup_{n\to\infty} a_n$, entonces:

$$\limsup_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$$

Demostración:

Antes, notemos que al tenerse:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = a$$

se tiene que el siguiente límite existe:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{k\geq n} a_k \right)$$

por tanto, la sucesión $\left\{ \sup_{k\geq n} a_k \right\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada. Así que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que el supremo:

$$\sup_{k\geq n} a_k$$

existe. Veamos ahora que:

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} (a_n b_n) &= \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{k\geq n} a_k b_k \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\left(\sup_{k\geq n} a_k \right) \left(\sup_{k\geq n} b_k \right) \right) \end{aligned}$$

donde el supremo se puede separar ya que ambos supremos existen y ser las dos sucesiones acotadas y de números no negativos. Por ende:

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} (a_n b_n) &= \lim_{n\to\infty} \left(\left(\sup_{k\geq n} a_k \right) \left(\sup_{k\geq n} b_k \right) \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{k\geq n} a_k \right) \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{k\geq n} b_k \right) \\ &= \left(\limsup_{n\to\infty} a_n \right) \cdot \left(\limsup_{n\to\infty} b_n \right) \\ &= \left(\limsup_{n\to\infty} a_n \right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} b_n \right) \\ &= ab \end{aligned}$$

■

Ejercicio 0.1.4
Sea $f : G \to \mathbb{C}$ analítica en G y $h : [0,1] \to G$ función real diferenciable. Entonces la función $f \circ h : [0,1] \to \mathbb{C}$ cumple que:

$$\lim_{t \to s} \frac{f \circ h(s) - f \circ h(t)}{s - t} = f'(h(s)) \cdot h'(s)$$

para todo $s \in [0,1]$.

Demostración:

$\blacksquare$

Ejercicio 0.1.5
Pruebe que la función $u(x,y) = \log(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ es armónica en $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Demostración:

$\blacksquare$

§0.1.2 Funciones Analíticas

Ejercicio 0.1.6
Pruebe que la función $f(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ dada por $f(z) = |z|^2$ tiene derivada solamente en cero.

Demostración:
Sea $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$. Observemos que:

$$f(z_0) = x_0^2 + y_0^2 = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)$$

Donde $u(x,y) = x^2 + y^2$ y $v(x,y) = 0$. Ahora, notemos también que:

$$\begin{aligned} u_x &= 2x \quad \text{y} \quad u_y = 2y \\ v_x &= 0 \quad \text{y} \quad v_y = 0 \end{aligned}$$

Estas derivadas parciales cumplen (**??**) si y solo si $x, y = 0$, esto es que f es diferenciable en z_0 si y solo si $z_0 = 0$. $\blacksquare$

Ejercicio 0.1.7

Bibliografía

- A. Markusevich, *Teoría de las funciones analíticas*, Ed. Mir Moscu.
- J. Conway, *Complex Analysis*, Ed. Mir Moscu.