Problemas lista 1.

1. Se transmiten cuatro señales consecutivas. Debido al ruido cada señal se recibe bien o con distorsión. El evento D_i indica que la i-ésima señal está distorsionada. Exprese los siguientes eventos en términos de operaciones de conjuntos de los eventos D_i :

   a) Sólo hay dos señales distorsionadas y son consecutivas.

   b) Por lo menos hay dos señales consecutivas distorsionadas.

Sol.

Considere el evento D_i = "la i-ésima señal está distorsionada".

a) Queremos que, ocurran los eventos D_i y D_{i+1}, donde $i = 1,2,3$ a la vez, pero que los otros dos no ocurran a la vez. Así el evento A:

$$\therefore \text{a)} \quad A = \underbrace{[(D_1 \cap D_2) \setminus (D_3 \cup D_4)]}_{\substack{\text{Ocurren } D_1 \text{ y } D_2 \text{ a la vez,} \\ \text{pero no } D_3 \text{ o } D_4.}} \cup [(D_2 \cap D_3) \setminus (D_1 \cup D_4)] \cup [(D_3 \cap D_4) \setminus (D_1 \cup D_2)]_{//}$$

b) Queremos algo similar a a), solo que ahora no importa lo que pase con las otras señales. Entonces:

$$\therefore \text{b)} \quad B = (D_1 \cap D_2) \cup (D_2 \cap D_3) \cup (D_3 \cap D_4)_{//}$$

2. Sea A_n el evento de que ocurre el evento A en la $n-$ésima repetición de un experimento. Sea $B_{n,m}$ el evento de que en las primeras n repeticiones del experimento ε, el evento A ocurre m veces. **a)** Expresa $B_{4,2}$ en términos de las A_i's. **b)** Interpreta el evento $C_6 = \bigcap_{n=1}^{6} \left(\bigcup_{k=1}^{n} B_{n,k} \right)$.

Sol.

a) $B_{4,2}$ sería que el evento A ocurre 2 veces en las primeras 4 repeticiones de $\mathcal{E}$.

b) Por partes:

- $\bigcup_{k=1}^{n} B_{n,k}$: Como $B_{n,k}$ es el evento A ocurre K veces en las primeras n repeticiones de $\mathcal{E}$, con K variando de 1 a n, podemos interpretar a $\bigcup_{k=1}^{n} B_{n,k}$ como el evento: A ocurre al menos una vez en las primeras n repeticiones de $\mathcal{E}$.

- $\bigcap_{n=1}^{6}\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_{n,k}\right)$: Sería que A ocurre al menos una vez en $1, 2, \ldots, 6$ repeticiones de $\mathcal{E}$, luego sería que A ocurre en la primera repetición de $\mathcal{E}$.

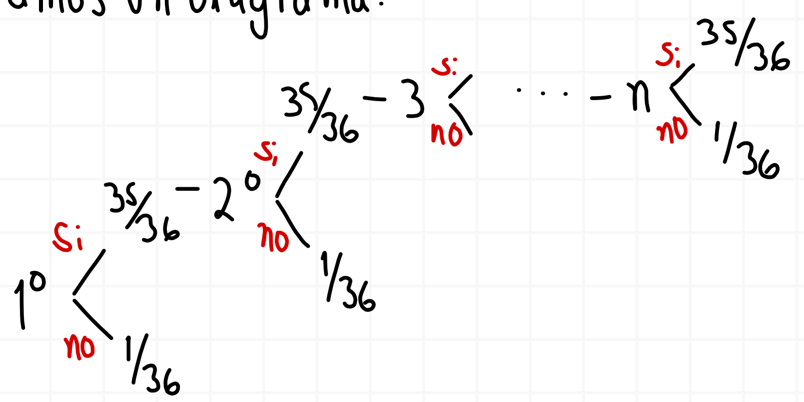
3. ¿Qué es más probable? ¿Obtener al menos un doble 6 en 25 lanzamientos de dos dados, o al menos un 6 en 4 lanzamientos de un dado?

Sol.

Calculemos la probabilidad de a) obtener al menos un doble 6, y de b) obtener al menos un 6 en 4 lanzamientos.

a) Sea A_n el evento "obtener al menos un doble 6 en n lanzamientos". Para calcular la probabilidad de este evento, calcularemos primero la del complemento: A_n^c = "no obtener ningún doble 6 en n lanzamientos".

Claramente $A_n, A_n^c \subset \Omega$, donde $\Omega = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n \mid x_i \in J_6 \ \forall i \in J_n\}$. Veamos un diagrama:



En este diagrama vemos la simulación de los lanzamientos de 2 dados n-veces. El Sí indica que obtuvimos un doble seis, y el no que no lo hicimos. De esta forma, $P(A_n^c)$ sería irnos siempre por el camino del no, luego:

$$P(A_n^c) = \left(\frac{35}{36}\right)^n$$

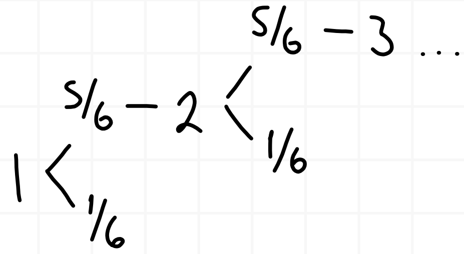
$$\Rightarrow P(A_n) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n$$

para $n = 25$:

$$P(A_{25}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{25} \approx 0.505$$

$$a)\ P(A_{25}) \approx 0.505$$

b) Siguiendo un modelo similar al anterior:



$P(B_n^c)=\left(\frac{5}{6}\right)^n \Rightarrow P(B_n)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$. Para $n=4$:

$$P(B_4)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.518$$

b) $P(B_4)\approx 0.518$

Como $P(B_4)>P(A_{25})$, entonces es más probable b).

5. En un segmento de longitud L está marcado un punto P. Se selecciona un punto al azar en el intervalo y se corta el segmento en el punto P y en el punto seleccionado. ¿Cuál es la probabilidad de que se forme un triángulo? ¿Qué relación hay entre esa probabilidad y la coordenada del punto dado?

Sol.

Para que se forme el triángulo, debe ocurrir que la suma de cualesquiera 2 segmentos en los que se parta el segmento, deba ser de mayor longitud que la del segmento restante. Bajo esta condición se resolverá el problema.

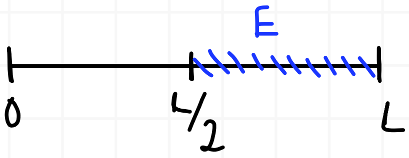
Sea $\Omega=[0,L]$, con $x\in\Omega$ y $0\leqslant P\leqslant L$, el evento $E=$"se forma un triángulo con los 3 segmentos" está dado por:

$$E=\underbrace{\left\{x\in\Omega \mid x\leqslant P \text{ y } x<\tfrac{L}{2},\ P-x<\tfrac{L}{2},\ \tfrac{L}{2}<P\right\}}\cup\underbrace{\left\{x\in\Omega \mid P<x,\ P<\tfrac{L}{2},\ x-P<\tfrac{L}{2} \text{ y } \tfrac{L}{2}<x\right\}}$$

Claramente, vemos que E depende de P. Si $P<\frac{L}{2}$ sólo puede ocurrir la parte azul, si $P=\frac{L}{2}$, entonces $E=\phi$ y si $P>\frac{L}{2}$, sólo puede ocurrir la parte roja. De esta forma calcularemos la probabilidad en base a la posición de P.

a) $P<\frac{L}{2}$

Para este caso, $E=\left\{x\in\Omega \mid P<x,\ P<\frac{L}{2},\ x-P<\frac{L}{2} \text{ y } \frac{L}{2}<x\right\}=\left\{x\in\Omega \mid P<x,\ x<L,\ \frac{L}{2}<x\right\}$. Luego:



$$P(E)=\frac{m(E)}{m(\Omega)}=\frac{L/2}{L}=1/2$$

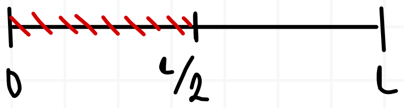
b) $P=L/2$

En este caso, $E=\phi$, luego $P(E)=0$.

c) $P>\frac{L}{2}$

En este caso, $E=\{x\in\Omega \mid x\leq P,\ x<\frac{L}{2},\ P-x<\frac{L}{2}\}=\{x\in\Omega \mid x\leq P,\ x<\frac{L}{2},\ 0<x\}$

Luego:



$$P(E)=\frac{m(E)}{m(\Omega)}=\frac{L/2}{L}=\frac{1}{2}$$

Por lo tanto:

$$P(E)=\begin{cases} 1/2 & \text{si } P\neq \frac{L}{2} \\ 0 & \text{si } P=L/2 \end{cases}$$

6. Considera el experimento de lanzar al azar una moneda de diámetro d sobre una tabla en la que se han dibujado lineas paralelas cada 5 cm. Las frecuencias relativas del evento A : la moneda toca una linea y de A^c son:

Num. de pruebas	Frec relat de A	Frec. relat de A^c
1000	0.589	0.411

a) Estima el diámetro de la moneda

b) Suponiendo que el díametro de la moneda es el encontrado en a), realiza una simulación de este experimento en R. Recopila los resultados de 100 de dichas simulaciones y grafica la tendencia de la frecuencia relativa del evento A al crecer el número de simulaciones.

Sol.

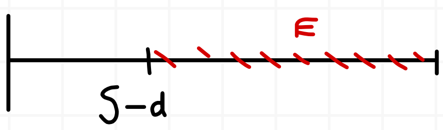
Afirmamos que $d\leq 5$cm, pues de otra forma, la frecuencia relativa de A sería 1.

a) Primero, determinaremos la probabilidad de que una moneda de diámetro d toque una línea.

Con $\Omega=[0,5]$, entonces el evento $E=$"la moneda toca una línea" sucederá cuando el borde de abajo de la moneda más d sea mayor que 5. Así

$E=\{x\in\Omega \mid 5<x+d\}=\{x\in\Omega \mid 5-d<x\}$.

Calculando la probabilidad Geométrica:



$P(E)=\frac{m(E)}{m(\Omega)}=\frac{d}{5}$. Con la frecuencia relativa de A, se tiene que $\frac{d}{5} = 0.589 \Rightarrow d = 2.945$

a) $d \approx 2.945$ //

b) Lo hice hace rato xd.

7. Demuestra o da un contraejemplo para las siguientes proposiciones:

   a) Si $P(A) = P(B^c)$, entonces $A^c = B$
   b) Si $P(A) = P(B) = p$, entonces $P(A \cap B) \leq p^2$
   c) Si $P(A) = 0$, entonces $P(A \cap B) = 0$
   d) Si $P(A) > 1/2$ y $P(B) > 1/2$ entonces $P(A \cap B) > 0$

a) Tome a $\Omega = \{1,2,3\}$ un espacio equiprobable. Con $A = \{1,2\}$ y $B = \{1\}$, es claro que $P(A) = \frac{2}{3} = P(B^c)$, pero $A^c = \{3\} \neq \{1\} = B$.

b) Claramente $P(A) = P(B) = p$ cuando $A = B$, pero $P(A \cap B) = P(A) = p \geqslant p^2$, la igualdad se da cuando $P(A) = p = 1$, pero si $P(A) = p < 1$, entonces $p^2 < p$.

c) Como $A \cap B \subset A$, entonces $P(A \cap B) \leqslant P(A) = 0 \Rightarrow P(A \cap B) = 0$. q.e.d.

d) Como

$$1 \geqslant P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$\Rightarrow P(A \cap B) + 1 \geqslant P(A) + P(B) > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$
$$\Rightarrow P(A \cap B) > 0$$

q.e.d.

9. Demuestra que, si P es medida de probabilidad, se cumple que

   a) $P(A \cap B) \leq \text{mín}\{P(A), P(B)\}$
   b) $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$ para A y B eventos arbitrarios.
   c) Si A, B y C son eventos tales que $A \cap B \cap C \subseteq D$, entonces $P(D) \geq P(A) + P(B) + P(C) - 2$.
   d) $P(A_1 \cap A_2) \geq 1 - P(A_1^c) - P(A_2^c)$
   e) $P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^n P(A_i^c)$
   f) Si $\bigcap_{i=1}^n A_i \subseteq A$ entonces $P(A) \geq \sum_{i=1}^n P(A_i) - (n-1)$

Dem:

De a):

Sean A, B eventos. Como $A \cap B \subset A, B$, entonces $P(A \cap B) \leqslant P(A), P(B)$. Luego

$$P(A\cap B)\leq \min\{P(A),P(B)\}.$$

q.e.d.

De b):

Sean A,B eventos. Entonces:

$$1\geq P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$\Rightarrow P(A\cap B)+1\geq P(A)+P(B)$$
$$\Rightarrow P(A\cap B)\geq P(A)+P(B)-1$$

q.e.d.

De c):

Sean A,B,C,D eventos tales que $A\cap B\cap C\subset D$, entonces:

$$P(D)\geq P(A\cap B\cap C)$$

Por b):

$$P(A\cap B\cap C)\geq P(A)+P(B\cap C)-1$$
$$\geq P(A)+P(B)+P(C)-2$$
$$\Rightarrow P(D)\geq P(A)+P(B)+P(C)-2.$$

q.e.d.

De d):

Sean A_1, A_2 eventos. Entonces por b):

$$P(A_1\cap A_2)\geq P(A_1)+P(A_2)-1$$

Como $P(A_1)=1-P(A_1^c)$ y $P(A_2)=1-P(A_2^c)$, entonces:

$$P(A_1\cap A_2)\geq 1-P(A_1^c)+1-P(A_2^c)-1$$
$$=1-P(A_1^c)-P(A_2^c)$$

q.e.d.

De e):

Procederemos por inducción sobre n.

- Si $n=2$, la parte anterior lo prueba.
- Suponga que se cumple para $n=K$.

· Probaremos que se cumple para $n=K+1$. En efecto:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{K+1} A_i\right)=P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{K} A_i\right)\cap A_{K+1}\right)$$

$$\geq 1-P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{K} A_i\right)^c\right)-P(A_{K+1}{}^c) \quad \text{por d)}$$

$$\geq 1-\left(1-P\left(\bigcap_{i=1}^{K} A_i\right)\right)-P(A_{K+1}{}^c)$$

$$=P\left(\bigcap_{i=1}^{K} A_i\right)-P(A_{K+1}{}^c)$$

$$\geq 1-\sum_{i=1}^{K} P(A_i{}^c)-P(A_{K+1}{}^c)$$

$$=1-\sum_{i=1}^{K+1} P(A_i{}^c)$$

Por tanto, se cumple para $K+1$.

Aplicando inducción se cumple $\forall\, n\in\mathbb{N}$.

q.e.d.

De f):

Procederemos por inducción sobre n.

· Para $n=2$ se cumple. En efecto, sean A_1 y A_2 dos eventos. Entonces con $A_1\cap A_2\subset A$:

$$P(A)\geq P(A_1\cap A_2)$$

por b):

$$P(A)\geq P(A_1)+P(A_2)-(2-1)$$

por tanto, se cumple para $n=2$.

· Supongamos que se cumple para $n=K$.

· Probaremos que se cumple para $n=K+1$. En efecto, sean $A_1, A_2, \dots, A_{K+1}$ eventos tales que $\bigcap_{i=1}^{K+1} A_i\subset A$, como $\left(\bigcap_{i=1}^{K} A_i\right)\cap A_{K+1}\subset A$, entonces:

$$P(A)\geq P\left(\bigcap_{i=1}^{K} A_i\right)+P(A_{K+1})-1$$

$$\geq \sum_{i=1}^{K+1} P(A_i)-(K-1)+P(A_{K+1})-1$$

$$=\sum_{i=1}^{K+1} P(A_i)-K$$

$$=\sum_{i=1}^{K+1} P(A_i)-((K+1)-1)$$

Aplicando inducción se cumple $\forall\, n\in\mathbb{N}$.

q.e.d.

10. Suponga que para cierto experimento aleatorio $\Omega = \{1, \ldots, n\}$. Determina si las siguientes son medidas de probabilidad: para cualquier $A \subseteq \Omega$ se define

a) $P(A) = \sum_{k \in A} \frac{2k}{n(n+1)}$

b) $P(A) = \sum_{k \in A} \frac{2^k}{2^{n+1}-2}$

c) $P(A) = \prod_{k \in A} \frac{k(n+1)}{k+1}$

Sol.

a) Es una medida de probabilidad. En efecto:

i) $P(\Omega) = \sum_{k \in \Omega} \frac{2k}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)} \cdot \sum_{k=1}^{n} k = \frac{2}{n(n+1)} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 1$

ii) Sea $A \subset \Omega$, entonces si $A \neq \phi$ $\exists\, l \in A$, luego

$P(A) = \sum_{k \in A} \frac{2k}{n(n+1)} \geq \frac{2l}{n(n+1)} \geq 0$

Si $A = \phi$, $P(A) = 0$.

Por tanto $P(A) = 0$.

iii) Sean $A_1, A_2, \ldots \subset \Omega$ una colección ajena a pares de eventos. Entonces:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{k \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} \frac{2k}{n(n+1)} = \sum_{k \in A_1} \frac{2k}{n(n+1)} + \sum_{k \in A_2} \frac{2k}{n(n+1)} + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k \in A_i} \frac{2k}{n(n+1)} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Por (i), (ii) y (iii), P es medida de probabilidad.

b) Es una medida de probabilidad. En efecto:

i) $P(\Omega) = \sum_{k \in \Omega} \frac{2^k}{2^{n+1}-2} = \frac{1}{2^{n+1}-2} \cdot \sum_{k=1}^{n} 2^k = \frac{1}{2^{n+1}-2} \cdot \left(\frac{2^{n+1}-2}{2-1} \right) = 1$

ii) Sea $A \subset \Omega$, si $A \neq \phi$, $\exists\, l \in A$. Luego:

$P(A) = \sum_{k \in A} \frac{2^k}{2^{n+1}-2} \geq \frac{2^l}{2^{n+1}-2} \geq 0$

Si $A = \phi$, entonces $P(A) = 0$. Por tanto, $P(A) \geq 0$.

iii) Sean $A_1, A_2, \ldots \subset \Omega$ una colección ajena a pares de eventos. Entonces:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{k \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} \frac{2^k}{2^{n+1}-2} = \sum_{k \in A_1} \frac{2^k}{2^{n+1}-2} + \sum_{k \in A_2} \frac{2^k}{2^{n+1}-2} + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k \in A_i} \frac{2^k}{2^{n+1}-2} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Por (i), (ii) y (iii), P es una medida de probabilidad.

c) No es medida de probabilidad, pues:

$$P(\Omega) = \prod_{k \in \Omega} \frac{k(n+1)}{k+1} = \frac{1(n+1)}{2} \cdot \frac{2(n+1)}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{n+1} = \frac{(n+1)^n}{n+1} = (n+1)^{n-1} \geq 1$$

la igualdad con 1 sólo se da cuando $n = 1$, de otra forma, $P(\Omega) > 1$.

11. Sea $\Omega = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ y $\mathcal{A} = \{A \subset \Omega : A \text{ es finito o } A^c \text{ es finito}\}$

a) Toma la función $\mu : \mathcal{A} \to [0,1]$ dada por $\mu(A) = 0$ si A es finito y $\mu(A) = 1$ si A^c es finito. Demuestra que μ es finito−aditiva, es decir, si $A_1, A_2, \dots, A_k$ son ajenos, entonces

$$\mu\left(_{n=1}^{k} A_n\right) = \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n).$$

b) Demuestra que μ no es σ−aditiva y, por tanto, no es medida de probabilidad.

Sol.

a) Lo probaremos por inducción sobre K.

- Para $K=2$. Sean $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, con $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Probaremos además que $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$. Tenemos 4 casos:

  i) A_1 y A_2 son finitos. En este caso, $A_1 \cup A_2$ es finito, luego $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$. Entonces:
  $$P(A_1 \cup A_2) = 0 = 0 + 0 = P(A_1) + P(A_2)$$

  ii) A_1 es finito y A_2^c es finito. Entonces A_2 es infinito, luego $A_1 \cup A_2$ es infinito, pero $(A_1 \cup A_2)^c = A_1^c \cap A_2^c \subset A_2^c$, luego $(A_1 \cup A_2)^c$ es finito. Así:
  $$P(A_1 \cup A_2) = 1 = 0 + 1 = P(A_1) + P(A_2)$$

  iii) A_1^c y A_2 son finitos. El caso es análogo al anterior y se llega a lo mismo.

  iv) A_1^c y A_2^c son finitos. Entonces $A_1^c \cap A_2^c = (A_1 \cup A_2)^c$ es finito. Por tanto, $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$. Como A_1 y A_2 son infinitos, entonces $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Por tanto, A_1 y A_2 no pueden ser ambos infinitos.

- Suponga que se cumple para $K = n$.

- Probaremos que se cumple para $K = n+1$. Sean $A_1, A_2, \dots, A_{n+1} \subset \Omega$ eventos ajenos a pares. Como son ajenos a pares, existe a lo sumo un $l = 1, 2, \dots, n+1$ tal que A_l es infinito y A_l^c es finito. Tenemos 2 casos:

  i) Existe tal l. Tenemos 2 subcasos:

    i.a) $l \neq K+1$. En este caso, $\bigcup_{i=1}^{K} A_i$ es infinito, luego $\left(\bigcup_{i=1}^{K} A_i\right)^c$ es finito. De esta forma:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{K+1} A_i\right) = P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{K} A_i\right) \cup A_{K+1}\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{K} A_i\right) + P(A_{K+1}) = \sum_{i=1}^{K+1} P(A_i)$$

i.b) $l = K+1$. En este caso, A_{K+1}^c es finito, luego $\left(\bigcup_{i=1}^{K+1} A_i\right)^c$ es finito, por tanto $\left(\bigcup_{i=1}^{K+1} A_i\right) \in \mathcal{A}$