Grupos Topológicos

Cristo Daniel Alvarado

13 de febrero de 2024

Índice general

Capítulo B

Topología

B.1. Espacios Topológicos

En esta parte se hará un breve recordatorio de los resultados más relevantes de la parte de espacios topológicos.

Definición B.1.1
Un **espacio topológico** es una pareja (X, τ) que consiste en un conjunto X y una familia τ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:

1). $\emptyset, X \in \tau$.

2). Si $U_1, U_2 \in \tau$, entonces $U_1 \cap U_2 \in \tau$.

3). Si $\mathcal{F} \subseteq \tau$, entonces
$$\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \in \tau$$

A los miembros de τ se les conoce como **conjuntos abiertos** en X. La familia τ es una **topología** en X.

Definición B.1.2
Sea X un espacio topológico y $x \in X$. Si U es un subconjunto abierto de X tal que $x \in U$, diremos que U **es una vecindad de** x.

Como resultado de lo anterior, se tiene que un subconjunto $V \subseteq X$ es abierto si para todo $x \in V$ existe una vecindad U_x contenida en V.

Definición B.1.3
Sea X un espacio topológico. Una **base** del espacio topológico X es una familia $\mathcal{B} \subseteq \tau$ tal que todo subconjunto abierto no vacío de X es unión de elementos de $\mathcal{B}$.

Proposición B.1.1
Sea X un espacio topológico. Una familia $\mathcal{B} \subseteq \tau$ es una base del espacio si y sólo si para todo punto $x \in X$ y para cualquier vecindad V de x existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U \subseteq V$.

El objetivo de la base de un espacio topológico es la de disminuir el número de elementos de la familia τ, y de que esta familia más pequeña cumple propiedaes más generales que, resultan útiles para resultados posteriores.

Proposición B.1.2
Sea X un espacio topológico. Una base $\mathcal{B}$ de X tiene las propiedades siguientes:

B1). Para cualesquier $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ y todo punto $x \in U_1 \cap U_2$ existe un $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$.

B2). Para todo $x \in X$ existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U$, es decir $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$.

Además, si una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X cumple B1) y B2), entonces existe una única topología τ en X para la cual $\mathcal{B}$ es una base.

Definición B.1.4
Si (X, τ) es un espacio topológico que posee una base numerable $\mathcal{B}$, se dice que X es **segundo numerable**.

Una familia $\mathcal{P} \subseteq \tau$ es una **sub-base** de un espacio topológico (X, τ) si la familia de todas las intersecciones finitas $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_k$, donde $U_i \in \mathcal{P}$ para $i = 1, \ldots, k$, es una base de (X, τ).

Definición B.1.5
Una familia $\mathcal{B}(x)$ de vecindades de x es una **base local** en $x \in X$ en el espacio topológico (X, τ), si para toda vecindad V de x existe $U \in \mathcal{B}(x)$ tal que $x \in U \subseteq V$.

Observe que si $\mathcal{B}$ es una base de (X, τ), la familia $\mathcal{B}(x)$ consistente en todos los elementos de $\mathcal{B}$ que contienen a x es una base local para x en (X, τ). Por otro lado, si para todo $x \in X$ contamos con una base local $\mathcal{B}(x)$ para x, enotnces $\mathcal{B} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}(x)$ es un base de (X, τ).

Definición B.1.6
Sea (X, τ) un espacio topológico y supongamos que para todo $x \in X$ tenemos una base local $\mathcal{B}(x)$ en x; la familia

$$\left\{\mathcal{B}(x) \middle| x \in X\right\}$$

es un **sistema de vecindades** para el espacio topológico (X, τ).

Proposición B.1.3
Sea X un espacio topológico. Entonces, cualquier sistema de vecindades para el espacio X tiene las siguientes propiedades:

BP1). Para toda $x \in X$, $\mathcal{B}(x) \neq \emptyset$ y para toda $U \in \mathcal{B}(x)$, $x \in U$.

BP2). Si $U_1 \in \mathcal{B}(x)$, $U_2 \in \mathcal{B}(y)$ y $z \in U_1 \cap U_2$, existe un $U \in \mathcal{B}(z)$ tal que $U \subseteq U_1 \cap U_2$.

Definición B.1.7
Si (X, τ) es un espacio topológico tal que todo punto $x \in X$ posee una base local en x numerable, decimos que X es un espacio **primero numerable**.

Definición B.1.8
Sea (X, τ) un espacio topológico. Decimos que un subconjunto $F \subseteq X$ es **cerrado**, si $X \backslash F \in \tau$, es decir, si su complemento relativo a X es abierto. De forma inmediata se deducen las propiedades siguientes:

C1). El conjunto X es cerrado, lo mismo con $\emptyset$.

C2). La unión de dos conjuntos cerrados es cerrada.

C3). La intersección de cualquier familia de conjuntos cerrados es cerrada.

De ahora en adelante, cada que se mencione al conjunto X, se entenderá que es el espacio topológico (X, τ). Si no hay ambiguedad, no se mencionará la topología τ.

Ahora se procederá a definir dos conjuntos importantes para todo subconjunto $A \subseteq X$, con el objetivo de relacionar a éste con algún elemento de la topología τ.

Definición B.1.9
Sea $A \subseteq X$. Considere la familia $\mathcal{C}_A$ de todos los conjuntos cerrados que contienen a A. La intersección

$$\overline{A} = \bigcap_{E \in \mathcal{C}_A} E$$

es la **cerradora** o **clausura de** A. Es claro que $\overline{A}$ es un conjunto cerrado.

Proposición B.1.4
Sea X un espacio topológico; enotnces

1). $A \subseteq \overline{A}$.

2). Si $A \subseteq B$, entonces $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

3). Si $x \in \overline{A}$, entonces para toda vecindad U de x se cumple que

4). $U \cap A \neq \emptyset$.

5). $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

6). $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

7). $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Definición B.1.10
El **interior** de un subconjunto $A \subseteq X$ de un espacio topológico X es la unión de todos los subconjuntos abiertos contenidos en A, o en forma equivalente, el abierto más grande contenido en A. El interior de A se denota como $\text{Int}A$ y es claramente un conjunto abierto.

Algunas propiedades del interior de un conjunto son las siguientes:

Proposición B.1.5
Sea X un espacio topológico, enotnces

1). Para todo $A \subseteq X$ se cumple que $\text{Int}A = X \backslash \overline{X \backslash A}$.

2). $\text{Int}X = X$.

3). $\text{Int}A \subseteq A$.

4). $\text{Int}A \cap B = \text{Int}A \cap \text{Int}B$.

5). $\text{Int}\text{Int}A = \text{Int}A$.

Bajo esta perspectiva, podemos considerar a la cerradura e interior de un conjunto como operadores que actúan sobre los subconjuntos de un espacio topológico. Ahora definiremos un operador más en un espacio topológico:

Definición B.1.11
Un punto $x \in X$ de un espacio topológico X es un **punto de acumulación** de un conjunto $A \subseteq X$, si $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$; el conjunto de todos los puntos de acumulación de A es el **conjunto derivado** de A y se denota por A^d.

A los puntos de A^d se les conoce como **puntos no aislados** del conjunto A. Un punto x es **aislado** en X si y sólo si el conjunto $\{x\}$ es abierto.

Algunas de las propiedades del conjunto derivado son las siguientes:

Proposición B.1.6
Sean X un espacio topológico, $x \in X$ y $A \subseteq X$. Entonces,

D1). El punto x pertenece a A^d si y sólo si toda vecindad de x contiene al menos un punto de A distinto de x.

D2). $\overline{A} = A \cup A^d$.

D3). Si $A \subseteq B$, entonces $A^d \subseteq B^d$.

D4). $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$.

D5). $\bigcup_{i \in I} A_i^d \subseteq \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^d$.

Ahora se definirán varios conceptos importantes en la topología general.

Definición B.1.12
Sea X un espacio topológico.

1). Un conjunto $A \subseteq X$ es **denso** en X si $\overline{A} = X$.

2). Un conjunto $A \subseteq X$ es **denso en ninguna parte** en X, si $X \setminus \overline{A}$ es denso en X.

3). Un conjunto $A \subseteq X$ es **denso en sí mismo** si $A = A^d$.

Entre las propiedades de subconjuntos de espacios relativas a la definición anterior se cuentan las siguientes:

Capítulo C

Funciones Cardinales

C.1. nose