Funciones Def. por Integrales & Integrales Impropias

Teorema 1)

Sea Λ un esp. métrico, y $f: \mathbb{R}^n \times \Lambda \to \mathbb{K}$ una función. Se supone lo sig.

i) $\forall\ \lambda \in \Lambda$, $f^\lambda: \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$, $f^\lambda(x) = f(x,\lambda)$, es integrable en $\mathbb{R}^n$. Se define

$$\phi(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} f^\lambda(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x,\lambda)\,dx$$

ii) Para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$, $f_x: \Lambda \to \mathbb{K}$, $\lambda \mapsto f_x(\lambda) = f(x,\lambda)$ es continua en un punto $\mu \in \Lambda$.

iii) Existe $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ $\ni$ $\forall\ \lambda \in \Lambda$ y para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|f(x,\lambda)| \leq g(x).$$

Ent. ϕ es continua en el punto μ.

Dem:

Sea $\{\lambda_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ una sucesión arbitraria en Λ que converge a μ. Probaremos que:

$$\lim_{\nu\to\infty} \phi(\lambda_\nu) = \phi(\mu)$$

Por (ii), $f^\mu(x) = f(x,\mu) = \lim_{\nu\to\infty} f(x,\lambda_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} f^{\lambda_\nu}(x)$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$. Y por (iii):

$$|f^{\lambda_\nu}(x)| = |f(x,\lambda_\nu)| \leq g(x) \text{ para casi toda } x \in \mathbb{R}^n \text{ y } \forall\ \nu \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, por el t. de Lebesgue:

$$\phi(\mu) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x,\mu)\,dx = \lim_{\nu\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(x,\lambda_\nu)\,dx = \lim_{\nu\to\infty} \phi(\lambda_\nu)$$

$\square$

Obs) Note en el teorema anterior que para probar la continuidad de ϕ en el punto μ, bastaría tomar sucesiones $\{\lambda_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ en alguna vecindad V_μ de μ convergentes a μ y que la hip. (iii) se cumpliera (al menos) $\forall\ \lambda \in V_\mu$.

Corolario.

Sea Λ esp. métrico compacto y $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto, $f: K \times \Lambda \to \mathbb{K}$ función continua en $K \times \Lambda$.
Si $\phi(\lambda) = \int_K f(x,\lambda)\,dx$, $\forall\ \lambda \in \Lambda$, ent. ϕ es continua en Λ.

Dem:

Considere la ampliación canónica $\tilde{f}: \mathbb{R}^n \times \Lambda \to \mathbb{K}$ de f, i.e

$$\tilde{f}(x,\lambda) = \begin{cases} f(x,\lambda) & \text{si } x \in K. \\ 0 & \text{si } x \notin K. \end{cases}$$

Ent. $\phi(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x,\lambda)\,dx, \forall \lambda \in \Lambda$. Observe que $\tilde{f}$ satisface los hip. del teorema, pues en este caso $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sería la función $M\chi_K$ donde $M \geq 0$ es m

$$M = \sup_{(x,\lambda) \in K \times \Lambda} |f(x,\lambda)|$$

(por ser f cont. en un compacto $\Rightarrow$ f unif. cont.).

$\square$

EJEMPLO.

1) Sea $K \subseteq \mathbb{R}^3$ compacto y $\mu: K \to \mathbb{K}$ medible acotada. Se sabe que $\forall a \in \mathbb{R}^3$, la función siguiente está bien def.

$$u(a) = \int_K \frac{\mu(x)}{\|x-a\|}\,dx$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma euclideana. Se afirma que u es continua en $\mathbb{R}^3 \setminus K$. En efecto, sea $\delta > 0$ y defina:

$$S_\delta = \{ a \in \mathbb{R}^3 \mid d(a,K) > \delta \}$$

Veremos que u es continua en S_δ. Sea $\tilde{f}: \mathbb{R}^3 \times S_\delta \to \mathbb{K}$ dada por:

$$\tilde{f}(x,a) = \begin{cases} \dfrac{\mu(x)}{\|x-a\|} & \text{si } x \in K. \\ 0 & \text{si } x \notin K \end{cases}$$

Ent.

$$u(a) = \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{f}(x,a)\,dx, \forall a \in \mathbb{R}^3 \setminus K.$$

La función $a \mapsto \tilde{f}(x,a)$ es continua en S_δ. Sea $M = \sup_{x \in K} |\mu(x)|$. Se tiene:

$$|\tilde{f}(x,a)| \leq \frac{M\chi_K(x)}{\delta}, \forall a \in S_\delta \text{ y } \forall x \in \mathbb{R}^3$$

donde la función de la derecha es integrable e independiente de $a \in S_\delta$. Por el teorema ant, u es continua $\forall a \in S_\delta$.

Sea ahora $a_0 \notin K$, tomemos $\delta < d(a_0, K)$. Como la reestricción de u al abierto S_δ es continua en a_0 ent u es continua en a_0. $\therefore$ u es continua en $\mathbb{R}^n \setminus K$.

$\square$

De hecho u es cont. en $\mathbb{R}^3$, pero falta algo más.

2) Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Se define $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(t)\,dt$, $\forall x \in \mathbb{R}$. ($\hat{f}$ es llamada la transformada de Fourier de f). $\hat{f}$ está bien definida porque $t \mapsto e^{-ixt} f(t)$ es medible, $\forall x \in \mathbb{R}$ y, de hecho es integrable ya que:

$$|e^{-ixt} f(t)| = |f(t)|, \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R} \quad \ldots (*)$$

donde f es integrable en $\mathbb{R}$. Se afirma que $\hat{f}$ es continua en $\mathbb{R}$. En efecto, $x \mapsto e^{-itx} f(t)$ es continua en $\mathbb{R}$, y por $(*)$

$$|e^{-itx} f(t)| \leq |f(t)|, \forall x, t \in \mathbb{R}$$

donde $|f| \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ no depende de x. Por el teorema, $\hat{f}$ es continua en $\mathbb{R}$.

3) Continuidad de la función Γ. Sea $\Gamma:]0,\infty[\to \mathbb{R}$ definida como:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt, \forall x > 0.$$

Se afirma que Γ es continua en $]0,\infty[$. Claramente $x \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ es continua en todo punto de $]0,\infty[$ y está bien definida.

Fije $x_0 \in]0,\infty[$. Considere una vecindad de x_0 de la forma siguiente: $0 < a < x_0 < b$. Se tiene:

$$|t^{x-1} e^{-t}| \leq |t^{a-1} e^{-t}| \chi_{]0,1[}(t) + |t^{b-1} e^{-t}| \chi_{[1,\infty[}(t) = g(t), \forall t > 0$$

donde g es integrable en $]0,\infty[$ (por las prop. de Γ) e independiente de $x \in]a,b[$. Por el corolario, Γ es continua en x_0. Como x_0 es arbitrario $\Rightarrow$ Γ es continua en $]0,\infty[$.

Derivación de Fun. Def. por Integrales.

Teorema.

Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo de $\mathbb{R}$. Sea $f: \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{K}$, $(x,\lambda) \mapsto f(x,\lambda)$. Suponga

i) $\forall \lambda \in I$, la función $f^\lambda: \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$, $x \mapsto f(x,\lambda)$ es integrable en $\mathbb{R}^n$. Define

$$\phi(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x,\lambda)\,dx, \forall \lambda \in I.$$

ii) Para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$, existe la derivada de la función $f_x: I \to \mathbb{K}$, $\lambda \mapsto f(x,\lambda)$, en todo punto de I, dada por:

$$f_x'(\lambda) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,\lambda+h) - f(x,\lambda)}{h}, \forall \lambda \in I.$$

iii) Existe una función $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ m para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$ y $\forall \lambda \in I$:

$$|f_x'(\lambda)| \leq g(x)$$

Ent. ϕ es derivable en todo punto de I, y su valor es:

$$\phi'(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} f_x'(\lambda)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda)\,dx$$

Dem:

Sea $\mu \in I$ y sea $\{h_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ una sucesión en $\mathbb{R}$ m $\lim_{\nu \to \infty} h_\nu = 0$, $h_\nu \neq 0$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$ y $\mu + h_\nu \in I$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$.

Se define

$$g_\nu(x) = \frac{f(x,\mu+h_\nu) - f(x,\mu)}{h_\nu}, \forall \nu \in \mathbb{N}$$

Ent.

$$\frac{\phi(\mu+h_\nu) - \phi(\mu)}{h_\nu} = \int_{\mathbb{R}^n} g_\nu(x)\,dx$$

Por (ii):

$$\lim_{\nu \to \infty} g_\nu(x) = f_x'(\mu) \text{ para casi toda } x \in \mathbb{R}^n$$

y, por el teorema de incrementos finitos:

$$|g_v(x)| = \frac{|f(x,\mu+h_v) - f(x,\mu)|}{h_v} \leq \sup_{t\in[0,1]} |f_x'(\mu+th_v)| \leq g(x)$$

para casi todo $x\in\mathbb{R}^n$. Por Lebesgue: $x \mapsto f_x'(\mu)$ es int. en $\mathbb{R}^n$ y:

$$\phi'(\mu) = \lim_{v\to\infty} \frac{\phi(\mu+h_v) - \phi(h_v)}{h_v} = \int_{\mathbb{R}^n} f_x'(\mu)\,dx$$

$\square$

Para probar la diferenciabilidad de ϕ en μ bastará tomar sucesiones $\{\mu+h_v\}_{v=1}^{\infty}$ convergentes a μ solo en alguna vecindad $V_\mu \subseteq I$, y que (ii) y (iii) se cumplieran sólo para $\lambda\in V_\mu$.

Obs) Si además de (i), (ii) y (iii) se cumple:

iv) $\lambda \mapsto f_x'(\lambda)$ es continua en I para casi toda $x\in\mathbb{R}^n$ se sigue del teorema de continuidad que ϕ es clase C^1 en I.

Corolario.

Sea $K\subseteq\mathbb{R}^n$ compacto e $I\subseteq\mathbb{R}$ también compacto. Sea $f: K\times I \to \mathbb{K}$, $(x,\lambda)\mapsto f(x,\lambda)$. Se supone lo sig.

i) $\forall \lambda\in I$, $f^\lambda : x\mapsto f(x,\lambda)$ es integrable en K. Sea $\phi(\lambda) = \int_K f^\lambda(x)\,dx$, $\forall \lambda\in I$.

ii) $(x,\lambda)\mapsto f_x'(\lambda)$ existe en todo punto de $K\times I$ y es continua en $K\times I$.

Ent. ϕ es de clase C^1 en I y:

$$\phi'(\lambda) = \int_K f_x'(\lambda)\,dx,\ \forall\ x\in I.$$

Dem:

Sea $\tilde{f}: \mathbb{R}^n\times I \to \mathbb{K}$ la función:

$$\tilde{f}(x,\lambda) := \begin{cases} f(x,\lambda) & \text{si } x\in K. \\ 0 & \text{si } x\notin K. \end{cases}$$

Ent.

$$\phi(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x,\lambda)\,dx,\ \forall\ \lambda\in I.$$

Claramente ϕ cumple todas las cond. del teorema con $g(x) = M\chi_K(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$, donde

$M = \max_{(x,\lambda)\in K\times I} |f_x'(\lambda)|$. La cond. se sigue del teorema. $\square$

EJEMPLO.

1) (Derivadas sucesivas de Γ). Sea $\Gamma :]0,\infty[\to \mathbb{R}$,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \ \forall x \in]0,\infty[$$

Se afirma que Γ es clase C^1 en $]0,\infty[$ y además:

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \log(t)\, dt, \forall \ x > 0 \ \ldots (*)$$

En efecto, fije $x_0 \in]0,\infty[$ arbitrario y considere una vecindad de x_0 de la forma $0 < a < x_0 < b$. Se define

$$g(t) = t^{a-1} e^{-t} \log t \, \chi_{]0,1]}(t) + t^{b-1} e^{-t} \log t \, \chi_{]1,\infty[}(t)$$

Recuerde que $\log(x) \underset{x\to 0^+}{=} \mathcal{O}(x^\alpha), \forall \alpha < 0$. Ent.

$$|t^{a-1} e^{-t} \log t| \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{a-1} |\log t| \underset{t\to 0^+}{=} o\left(\frac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}\right)$$

(con $\alpha = -\frac{a}{2}$). Luego g es int. en $]0,1]$, pues $1 - \frac{a}{2} < 1$.

Similarmente, se recuerda que $\log(x) \underset{x\to\infty}{=} o(x^\alpha), \forall \alpha > 0$. Y $x^\beta \underset{x\to\infty}{=} o(e^x), \forall \beta > 0$.

Luego:

$$t^{b-1} e^{-t} |\log(t)| \underset{t\to\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Con $\alpha = 1$ y $\beta = b+2$. Luego g es int. en $]1,\infty[$. Por el t. de derivación, $(*)$ es correcta $\forall x > 0$.

Por inducción se prueba que Γ es clase C^∞ y $\forall K \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma^{(K)}(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} (\log(t))^K dt, \ \forall x > 0.$$

Variación de Γ.

$\Gamma''(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \log(t)^2 dt, \forall \ x > 0 \Rightarrow \Gamma''(x) > 0, \forall x > 0$. Por tanto Γ es est. convexa en el intervalo ent. Γ' es est. creciente en $]0,\infty[$.

Pero $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, por el t. de Rolle $\exists\ 1 < \alpha < 2 \ni \Gamma'(\alpha) = 0 \Rightarrow \Gamma'(x) < 0, \forall x < \alpha$ y $\Gamma'(x) > 0, \forall x > \alpha$. $\therefore \Gamma$ es est. decreciente en $]0, \alpha[$ y est. creciente en $]\alpha, \infty[$.

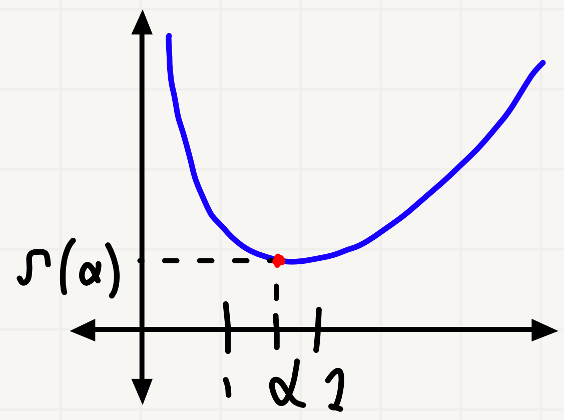
Además, por cont. de Γ

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} \Gamma(1) = 1$$

$$\therefore \Gamma(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$$

También, $\Gamma(n+1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \Gamma(x) \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} \infty$ por ser Γ est. creciente.

x	$0 \nearrow \alpha \nearrow \infty$
$\Gamma(x)$	$\infty \searrow \Gamma(\alpha) \nearrow \infty$



Funciones de clase C^p en $\mathbb{R}^n$ definidas por integrales.

Teorema.

Sea $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^m$ abierto, $f : \mathbb{R}^n \times \Lambda \to \mathbb{K}$ $(x, \lambda) \mapsto f(x, \lambda)$. Se supone:

i) Para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$, $f_x : \Lambda \to \mathbb{K}$, $\lambda \mapsto f_x(\lambda) = f(x, \lambda)$ es de clase C^p en Λ.

ii) $\forall \lambda \in \Lambda$ todas las funciones $x \mapsto \partial_{\alpha_1} \cdots \partial_{\alpha_k} f_x(\lambda)$ donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in [\![1, m]\!]$, $k = 0, \ldots, p$, son integrables en $\mathbb{R}^n$. El caso $k=0$ significa que f_x es integrable. Se define

$$\phi(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, \lambda)\, dx, \ \forall \lambda \in \Lambda.$$

iii) Para cada cubo cerrado $K \subseteq \Lambda$ y $\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_p \in [\![1, m]\!]$, $\exists\ g^K_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p}$ integrables e independientes de $\lambda \ni$

$$|\partial_{\alpha_1} \cdots \partial_{\alpha_p} f_x(\lambda)| \leq g^K_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p}(x)$$

para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$ y $\forall \lambda \in K$.

Ent. ϕ es de clase C^p en Λ y:

$$\partial_{\alpha_1} \cdots \partial_{\alpha_p} \phi(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{\alpha_1} \cdots \partial_{\alpha_p} f_x(\lambda)\, dx, \ \forall \lambda \in \Lambda.$$

Dem:

Basta probar que mayoraciones análogas a (iii) son válidas para las derivadas parciales de todo orden $K \leq p$.

Basta admitir el resultado para K y probarlo para $K-1$. Sea $D = \partial_{\alpha_2} \cdots \partial_{\alpha_K}$. Sea K un cubo cerrado en Λ de centro λ_0 y media arista a. $\forall \lambda \in K$ se tiene

$$Df_x(\lambda) - Df_x(\lambda_0) = \sum_{v=1}^{m} \left[Df_x(\lambda_1, \dots, \lambda_v, \lambda_{v+1}^0, \dots, \lambda_m^0) - Df_x(\lambda_1, \dots, \lambda_{v-1}, \lambda_v^0, \dots, \lambda_m^0) \right]$$

$$|Df_x(\lambda) - Df_x(\lambda_0)| \leq \sum_{v=1}^{m} |Df_x(\lambda_1, \dots, \lambda_v, \lambda_{v+1}^0, \dots, \lambda_m^0) - Df_x(\lambda_1, \dots, \lambda_{v-1}, \lambda_v^0, \dots, \lambda_m^0)|$$

Por el t. de inc. finitos:

$$\leq a \sum_{v=1}^{m} \sup_{t \in [0,1]} |\partial_v D f_x(\lambda_1, \dots, \lambda_{v-1}, (1-t)\lambda_v + \lambda_v^0, \lambda_{v+1}^0, \dots, \lambda_m^0|$$

$$\leq a \sum_{v=1}^{m} g^K_{v,\alpha_1,\dots,\alpha_K}(x)$$

$$\Rightarrow |Df_x(\lambda)| \leq a \sum_{v=1}^{m} g^K_{v,\alpha_1,\dots,\alpha_K}(x) + |Df_x(\lambda_0)|\, \chi_K(x) \quad \dots (*)$$

donde la func. de la der. es int. $\forall \lambda \in K$. El resto se sigue del t. de derivación. $\square$

Corolario.

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto, $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^m$ abierto y $f: A \times \Lambda \to \mathbb{K}$. Se supone que $\forall (x,\lambda) \in A \times \Lambda$ existen $\partial_{\alpha_1} \cdots \partial_{\alpha_K} f_x(\lambda)$, $K \in [\![0, p]\!]$, $a_i \in [\![1, m]\!]$. Y que $x \mapsto \partial_{\alpha_1} \cdots \partial_{\alpha_K} f_x(\lambda)$ son continuas en $A \times \Lambda$ (en part. $(x,\lambda) \mapsto f(x,\lambda)$ es continua en $A \times \Lambda$). Se define:

$$\phi(\lambda) = \int_A f(x,\lambda)\, dx$$

Ent. ϕ es de clase C^p en Λ y:

$$\partial_{\alpha_1} \cdots \partial_{\alpha_n} \phi(\lambda) = \int_A \partial_{\alpha_1} \cdots \partial_{\alpha_K} f_x(\lambda)\, dx$$

con $\alpha_1, \dots, \alpha_K \in [\![1, m]\!]$ y $K = 0, 1, \dots, p$.

EJEMPLO.

1) Sea $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$. Defina

$$\phi(\lambda_1,\dots,\lambda_m)=\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x+\lambda_1)\cdots(x+\lambda_m)}}$$

donde $\lambda_i>0$, $\forall i\in [\![1,m]\!]$. La ϕ está bien det. (en 0 no hay problema) y en ∞:

$$\frac{1}{\sqrt{(x+\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(x+\lambda_m)}} \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{x^{m/2}}$$

con la func. de la der. integrable, pues $\frac{m}{2}>1$. Sea

$$f_x(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{(x+\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(x+\lambda_m)}}$$

Se tiene:

$$\partial_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\partial_m^{\alpha_m} f_x(\lambda)=\frac{c(\alpha_1,\dots,\alpha_m)}{(x+\lambda_1)^{\alpha_1+\frac{1}{2}}\cdot\ldots\cdot(x+\lambda_m)^{\alpha_m+\frac{1}{2}}}$$

Donde:

$$c(\alpha_1,\dots,\alpha_m)=(-1)^u\frac{(2\alpha_1-1)!!\cdot\ldots\cdot(2\alpha_m-1)!!}{2^u}$$

con $u=\sum_{k=1}^m \alpha_k$. Conviniendo en que $(2\alpha_i-1)!!=1$ si $\alpha_i=0$.

Las func. $x\mapsto \partial_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\partial_m^{\alpha_m} f_x(\lambda)$ son continuas.

Para aplicar el resultado, fije $\lambda\in\,]0,\infty[^m$ y sea $a>0$ m $\lambda_i>a$, $\forall i\in[\![1,m]\!]$. Ent.

$$\partial_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\partial_m^{\alpha_m} f_x(\lambda)\leq\frac{c(\alpha_1,\dots,\alpha_m)}{(x+a)^{\frac{m}{2}+u}}$$

donde la func. de la derecha está bien det. en 0 y

$$\frac{c(\alpha_1,\dots,\alpha_m)}{(x+a)^{\frac{m}{2}+u}}\underset{x\to\infty}{\sim}\frac{1}{x^{\frac{m}{2}+u}}$$

donde la func. de la der. es integrable ya que $\frac{m}{2}+u>1$ (sin importar los α_i), ent. por el teorema ant. se puede aplicar y:

$$\partial_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\partial_m^{\alpha_m}\phi(\lambda)=\int_0^\infty\frac{c(\alpha_1,\dots,\alpha_m)}{(x+\lambda_1)^{\alpha_1+\frac{1}{2}}\cdot\ldots\cdot(x+\lambda_m)^{\alpha_m+\frac{1}{2}}}\,dx$$

$\therefore$ ϕ es de clase C^∞ en el punto λ, como el λ fue arbitrario. ϕ es de clase C^∞ en $]0,\infty[^m$.

Por ejemplo:

$$(\partial_1+\ldots+\partial_m)\phi(\lambda)=-\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{(x+\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(x+\lambda_m)}}\left(\frac{1}{x+\lambda_1}+\ldots+\frac{1}{x+\lambda_m}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{(x+\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(x+\lambda_m)}}\Bigg|_{x=0}^{x=\infty}=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_m}}$$

Notas.

1) Lang - Análisis Real.

Apostol - Análisis Real.