

Notas Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

23 de abril de 2024

Índice general

3. Series de Fourier	2
3.1. Series de Fourier de funciones en $\mathcal{L}_1^{2\pi}$	2
3.2. Series de Fourier de funciones en $\mathcal{L}_2^{2\pi}$	5
3.3. Series de Fourier de funciones de periodo $T > 0$	7
3.4. Convergencia de series de Fourier de integrales indefinidas	8
3.5. Teorema fundamental para la convergencia puntual de series de Fourier en $\mathcal{L}_1^{2\pi}$	12
3.6. Núcleo de Dirichlet y teorema fundamental	15

Capítulo 3

Series de Fourier

3.1. Series de Fourier de funciones en $\mathcal{L}_1^{2\pi}$

Definición 3.1.1

Se llama **serie de Fourier trigonométrica** a una serie de funciones de \mathbb{R} en \mathbb{C} de la forma

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} \quad (3.1)$$

donde $c_k \in \mathbb{C}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ son coeficientes constantes. Por definición, las **sumas parciales** de la serie son:

$$s_m(x) = \sum_{k=-m}^m c_k e^{ikx}, \forall m \in \mathbb{N}^*$$

Se dice que la serie **converge en un punto x a una suma $f(x)$** , si

$$f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} s_m(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=-m}^m c_k e^{ikx}$$

En este caso,

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

Usando la identidad $e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx$, podemos reescribir s_m como

$$s_m(x) = c_0 + \sum_{k=1}^m (c_k + c_{-k}) \cos kx + i \sum_{k=1}^m (c_k - c_{-k}) \sin kx, \quad \forall m \in \mathbb{N}^* \quad (3.2)$$

definamos

$$a_k = c_k + c_{-k} \quad \text{y} \quad b_k = c_k - c_{-k}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (3.3)$$

de la definición es claro que

$$a_{-k} = a_k \quad \text{y} \quad b_{-k} = -b_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

conociendo los coeficientes a_k y b_k se recuperan los c_k mediante las fórmulas

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad (3.4)$$

y, $c_0 = \frac{a_0}{2}$. En términos de los a_k y b_k , las sumas 3.2 y 3.1 pueden ser reescritas como sigue:

$$s_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m a_k \cos kx + \sum_{k=1}^m b_k \sin kx, \quad \forall m \in \mathbb{N}^* \quad (3.5)$$

y,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \quad (3.6)$$

respectivamente.

Definición 3.1.2

Se dice que la serie trigonométrica es **real** si $s_m(x) \in \mathbb{R}$ para todo $m \in \mathbb{N}^*$ y para toda $x \in \mathbb{R}$. Se sigue de 3.2 que la serie es real si y sólo si $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, para todo $k \in \mathbb{N}^*$.

Esta condición es equivalente a que

$$c_{-k} = \overline{c_k}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Es válido preguntarnos ahora: ¿Qué relación hay entre f y los coeficientes c_k ?

Proposición 3.1.1

Considere una serie trigonométrica $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$. Suponga que esta serie converge uniformemente en \mathbb{R} a alguna función f . Entonces, $f \in \mathcal{C}^{2\pi}$ y

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Demostración:

Se supone que $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ uniformemente en \mathbb{R} . Como el límite uniforme de una sucesión de funciones continuas es continua, se tiene entonces que $f \in \mathcal{C}^{2\pi}$. Para un $n \in \mathbb{Z}$:

$$f(x) e^{-inx} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{i(k-n)x} \text{ uniformemente en } \mathbb{R} \quad (3.7)$$

pues,

$$|f(x) e^{-inx} - s_m(x) e^{-inx}| = |f(x) - s_m(x)|, \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$$

Se puede pues integrar término por término 3.7 en el compacto $[-\pi, \pi]$. Antes veamos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)x} dx = \begin{cases} 2\pi & \text{si } n = k \\ 0 & \text{si } n \neq k \end{cases}$$

por tanto,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} c_k e^{i(k-n)x} dx \\ &= 2\pi c_n \\ \Rightarrow c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \end{aligned}$$

■

Este resultado sugiere la definición siguiente:

Definición 3.1.3

Para todo $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ se define

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (3.8)$$

en particular, $c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$. Los coeficientes c_k se llaman **los coeficientes de Fourier trigonométricos de f** y, la serie

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

se llama **serie de Fourier trigonométrica de f** .

Observación 3.1.1

Los correspondientes coeficientes a_k y b_k son los siguientes:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

también,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad \text{y} \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$ (esto se obtiene usando la igualdad entre los c_k y a_k, b_k).

Observación 3.1.2

Para fines prácticos, conviene tener en cuenta lo siguiente. Si f es una función impar en $] -\pi, \pi[$, entonces

$$a_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

y,

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Si f es una función par en $] -\pi, \pi[$ se invierte el resultado, es decir

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

y,

$$b_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Teorema 3.1.1

Las aplicaciones $f \mapsto \{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ y, $f \mapsto \{a_0, a_1, b_1, \dots\}$ son aplicaciones lineales inyectivas de $L_1^{2\pi}$ en el espacio de sucesiones complejas y reales, respectivamente. En particular, si $f, g \in \mathcal{L}_1^{2\pi}$ tienen los mismos coeficientes de Fourier trigonométricos, entonces $f = g$ c.t.p. en \mathbb{R} .

Demostración:

Por la forma en que se definen los coeficientes de Fourier de una función integrable, es claro que dichas aplicaciones son lineales.

Resta probar que su kernel es $\{0\}$. Sea $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ tal que

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

dado que el sistema trigonométrico $\tau_{\mathbb{C}}$ es total en $\mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$, necesariamente $f = 0$ c.t.p. en \mathbb{R} .

Similarmente se prueba la otra afirmación. ■

Proposición 3.1.2

Sean $f, g \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ y $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ y $\{d_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ los coeficientes de Fourier trigonométricos de f y g , respectivamente. Entonces, los coeficientes de Fourier $\{\gamma_k\}$ de $f * g$ son $\{2\pi c_k d_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

Demostración:

Para todo $k \in \mathbb{Z}$ fijo se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\gamma_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f * g(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} dx \int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(x-y) dy\end{aligned}$$

como la función $(x, y) \mapsto e^{-ikx} f(y) g(x-y)$ es integrable en $] -\pi, \pi[\times] -\pi, \pi[$ (pues la función es medible y su módulo es el mismo que el de $(x, y) \mapsto f(y) g(x-y)$, la cual es integrable por un teorema de convolución), se puede invertir del orden de integración:

$$\begin{aligned}\gamma_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) dy \int_{-\pi}^{\pi} g(x-y) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) dy \int_{-\pi-y}^{\pi-y} g(z) e^{-ik(z+y)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} dy \int_{-\pi-y}^{\pi-y} g(z) e^{-ikz} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} dy \int_{-\pi}^{\pi} g(z) e^{-ikz} dz \\ &= c_k \cdot (2\pi d_k) \\ &= 2\pi c_k d_k\end{aligned}$$

pues, las funciones son periódicas. Se tiene entonces con lo anterior el resultado para todo $k \in \mathbb{Z}$. ■

3.2. Series de Fourier de funciones en $\mathcal{L}_2^{2\pi}$

Recuerde que las funciones

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

constituyen un sistema ortonormal maximal en el espacio Hilbertiano $L_2^{2\pi}(\mathbb{C})$. En el sentido Hilbertiano; los coeficientes de Fourier de algún vector $f \in \mathcal{L}_2^{2\pi}(\mathbb{C})$ con respecto a dicho sistema ortonormal son los siguientes:

$$\begin{aligned}\hat{f}(x) &= (f | \varphi_k) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \\ &= \sqrt{2\pi} c_k\end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}\hat{f}(x) \varphi_k(x) &= \sqrt{2\pi} c_k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \\ &= c_k e^{ikx}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

La serie de Fourier hilbertiana de f sería:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(x) \varphi_k(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

que corresponde a la serie de Fourier trigonométrica de f . También, las funciones

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \eta_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx, \quad \theta_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

forman otro sistema O.N. maximal en $L_2^{2\pi}(\mathbb{K})$. Los correspondientes coeficientes de Fourier de f con respecto a este sistema O.N. maximal serían:

$$\begin{cases} \left(f \middle| \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ \left(f \middle| \eta_k\right) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \\ \left(f \middle| \theta_k\right) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \end{cases}$$

La serie de Fourier hilbertiana de f será:

$$\left(f \middle| \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} (f \middle| \eta_k) \eta_k + \sum_{k=1}^{\infty} (f \middle| \theta_k) \theta_k = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kx + b_k \sin kx]$$

Recuerde también que por el teorema de Riesz-Fischer que si $\{\vec{u}_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ es un sistema O.N. maximal en un espacio hilbertiano H , entonces la aplicación $\vec{x} \mapsto \{\hat{x}(\alpha)\}$ es una isometría lineal de H en $l_2(\Omega)$. La isometría inversa es:

$$\varphi \mapsto \sum_{\alpha \in \Omega} \varphi(\alpha) \vec{u}_\alpha$$

Aplicando este resultado al primer caso se tiene que

Teorema 3.2.1

Las aplicaciones

$$f \mapsto \left\{ \sqrt{2\pi} c_k \right\}_{k \in \mathbb{Z}} \quad \text{y} \quad f \mapsto \left\{ \sqrt{2\pi} \frac{a_0}{2}, \sqrt{\pi} a_1, \sqrt{\pi} b_1 \right\}$$

son isometrías lineales de $L_2^{2\pi}$ sobre $l_2(\mathbb{Z})$ o $l_2(\mathbb{N})$, respectivamente. Se tienen las identidades siguientes de Parseval:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \\ \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} [|a_k|^2 + |b_k|^2] &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \end{aligned}$$

Más generalmente, si $f, g \in \mathcal{L}_2^{2\pi}(\mathbb{K})$ con coeficientes de Fourier trigonométricos $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ y $\{d_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, entonces

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \overline{d_k} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

para los correspondientes coeficientes $\{a_k, b_k\}$ y $\{\alpha_k, \beta_k\}$ se tiene

$$\frac{a_0 \overline{\alpha_k}}{2} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} [a_k \overline{\alpha_k} + b_k \overline{\beta_k}] = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

Además, f es igual al promedio cuadrático de su serie de Fourier:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{N}_2(f - s_m) = 0$$

Demostración:

Es inmediata de las observaciones hechas anteriormente y del teorema de Riesz-Fischer, junto con las identidades de Parseval. ■

Observación 3.2.1

Se tiene lo siguiente:

1. La suprayectividad de $f \mapsto \{\sqrt{2\pi}c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de $L_2^{2\pi}(\mathbb{C})$ sobre $l_2(\mathbb{Z})$ es consecuencia del teorema de Riesz-Fischer, es decir, de la completez de $L_2^{2\pi}$. Dice que dada una sucesión arbitraria $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ en $l_2(\mathbb{Z})$ existe una función $f \in \mathcal{L}_2^{2\pi}$ única salvo equivalencias cuyos coeficientes de Fourier son la sucesión dada.

Este resultado fue históricamente un éxito para la integral de Lebesgue.

2. Carleson demostró en 1966 que para cada $f \in \mathcal{L}_2^{2\pi}$ la serie de Fourier de f converge a f c.t.p. en \mathbb{R} . Sin embargo, para funciones en $\mathcal{L}_1^{2\pi}$ ésta no será la misma historia.

3.3. Series de Fourier de funciones de periodo $T > 0$

Sea $f \in \mathcal{L}_1^T$. Defina

$$g(y) = f\left(\frac{T}{2\pi}y\right), \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

entonces, $g \in \mathcal{L}_1^{2\pi}$. Por definición, los coeficientes de Fourier de f van a ser los de g , estos son

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) e^{iky} dy$$

Por el cambio de variable $y = \frac{2\pi}{T}x$, podemos reescribirlos de la siguiente forma:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{i\frac{2\pi k}{T}x} dx$$

en particular, $c_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx$. Los correspondientes a_k y b_k son

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx \\ a_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) dx \\ b_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) dx \end{aligned}$$

Las series de Fourier trigonométricas correspondientes son

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{i\frac{2\pi k}{T}x} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) \right]$$

Sea ahora $f \in \mathcal{L}_2^T$. Los coeficientes de Fourier de f con respecto al sistema O.N. maximal formado por

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{i \frac{2\pi k}{T} x}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

son

$$(f|\varphi_k) = \sqrt{T} c_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

si se usa el sistema O.N. maximal formado por

$$\frac{1}{\sqrt{T}}, \quad \eta_k(x) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{2\pi k}{T} x\right), \quad \theta_k(x) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{2\pi k}{T} x\right), \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

se obtienen

$$\begin{aligned} \left(f \middle| \frac{1}{\sqrt{T}}\right) &= \sqrt{T} \frac{a_0}{2} \\ (f|\eta_k) &= \sqrt{\frac{T}{2}} a_k \\ (f|\theta_k) &= \sqrt{\frac{T}{2}} b_k \end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Las series de Fourier correspondientes serían

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (f|\varphi_k) \varphi_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{i \frac{2\pi k}{T} x} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) \right]$$

Se tienen las identidades de Parserval

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|^2 dx \\ \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k^2 + b_k^2] &= \frac{T}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|^2 dx \\ \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \overline{d_k} &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \overline{g(x)} dx \\ \frac{a_0 \overline{\alpha_0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \overline{\alpha_k} + b_k \overline{\beta_k}] &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \overline{g(x)} dx \end{aligned}$$

por lo cual, en lo sucesivo se trabajará únicamente con funciones de periodo 2π (la traducción al periodo $T > 0$ es un ejercicio).

3.4. Convergencia de series de Fourier de integrales indefinidas

Observación 3.4.1

Sea $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{K})$. Considere la integral indefinida $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ dada como sigue

$$F(x) = c + \int_0^x f(t) dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(en otras palabras F es absolutamente continua y f es su derivada c.t.p. en \mathbb{R}). Se sabe que F es continua en \mathbb{R} . Una condición necesaria y suficiente para que también F sea periódica es la

siguiente:

$$\begin{aligned} F(x - 2\pi) - F(x) &= \int_x^{x+2\pi} f(t)dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

por tanto, $F \in \mathcal{C}^{2\pi}$ si y sólo si $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0$.

Teorema 3.4.1

Sea $f \in \mathcal{L}_2^{2\pi}(\mathbb{K})$ tal que $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0$ y sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ la integral indefinida de f dada por:

$$F(x) = c + \int_0^x f(t)dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

donde $c \in \mathbb{K}$. Entonces, $F \in \mathcal{C}^{2\pi}(\mathbb{K})$ y la serie de Fourier de F converge a F uniformemente en \mathbb{R} .

Demostración:

Ya se sabe que $F \in \mathcal{C}^{2\pi}(\mathbb{K})$. Sean $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ y $\{c'_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ los coeficientes de Fourier de F y f , respectivamente. Note que

$$c'_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0$$

Integrando por partes se tiene que

$$\begin{aligned} c'_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[F(x)e^{-ikx} \Big|_{-\pi}^{\pi} + ik \int_{-\pi}^{\pi} F(x)e^{-ikx}dx \right] \\ &= \frac{ik}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x)e^{-ikx}dx \\ &= ikc_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Por tanto, en particular se tiene que

$$|c_k| = \frac{|c'_k|}{|k|}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Se tiene

$$\begin{aligned} |c_k| &= \frac{|c'_k|}{|k|} \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \left[|c'_k|^2 + \frac{1}{k^2} \right], \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

como $f \in \mathcal{L}_2^{2\pi}(\mathbb{K})$, entonces $\{|c'_k|\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l_2(\mathbb{Z})$ de donde $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c'_k|^2 < \infty$. Se sigue de la ecuación anterior que la serie $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k$ es absolutamente convergente en \mathbb{K} . Ya que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k e^{ikx}| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c'_k|$$

se sigue del criterio M de Weierstrass que la serie de Fourier de F converge absoluta y uniformemente en \mathbb{R} . Resta probar que la suma de esta serie es F . Sea

$$G(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{uniformemente en } \mathbb{R}$$

Entonces, $G \in \mathcal{C}^{2\pi}(\mathbb{K})$. Además,

$$G(x)e^{-inx} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{i(k-n)x} \text{ uniformemente en } \mathbb{R}$$

Se puede pues integrar término por término en $[-\pi, \pi]$. Resulta:

$$\int_{-\pi}^{\pi} G(x)e^{-inx} dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)x} dx = 2\pi c_n$$

por tanto, F y G tienen los mismos coeficientes de Fourier. Se sabe entonces que $F = G$ c.t.p. en \mathbb{R} siendo ambas continuas, necesariamente $F = G$ en \mathbb{R} . ■

Corolario 3.4.1

Si $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ es una función de clase C^1 periódica de periodo 2π , entonces la serie de Fourier de F converge a F uniformemente en \mathbb{R} .

Demostración:

Por el teorema fundamental del cálculo, podemos escribir

$$F(x) = F(0) + \int_0^x f(t)dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

donde $f(x) = F'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ es una función continua. Por el teorema anterior, el resultado estará probado si se muestra que f es periódica de periodo 2π .

Ya que $F(x) = F(x + 2\pi)$, entonces del teorema fundamental

$$\int_x^{x+2\pi} f(t)dt = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

en particular, $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0$. Para todo $a < b$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x + 2\pi)dx &= \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(t)dt \\ &= \int_{a+2\pi}^a f(t)dt + \int_a^b f(t)dt + \int_b^{b+2\pi} f(t)dt \\ &= \int_a^b f(t)dt \\ \Rightarrow \int_a^b [f(x + 2\pi) - f(x)] dx &= 0, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b \end{aligned}$$

Por el lema de los promedios, se sigue que $f(x + 2\pi) - f(x) = 0$ para casi toda $x \in \mathbb{R}$. Siendo ambas funciones continuas, se sigue que

$$f(x + 2\pi) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

por tanto f es periódica de periodo 2π . ■

Observación 3.4.2

Como $c_k = \frac{c'_k}{ik}$ para todo $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, el término $c_k e^{ikx}$ de la serie de Fourier de F es una primitiva del término $c'_k e^{ikx}$ de la serie de Fourier de f . En este caso c_0 juega el papel de constante de integración.

Al considerar los coeficientes a_k , b_k y a'_k , b'_k resulta lo siguiente:

$$a_k - ib_k = \frac{a'_k - ib'_k}{ik}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

cambiando a k por $-k$:

$$a_k + ib_k = \frac{a'_k + ib'_k}{ik}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

resulta de estos sistemas de ecuaciones que

$$a_k = -\frac{b'_k}{k} \quad \text{y} \quad b_k = \frac{a'_k}{k}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Así pues, $a_k \cos kx$ es una primitiva de $b'_k \sin kx$ y que $b_k \sin kx$ es una primitiva de $a_k \cos kx$.

Se verá más adelante que la conclusión del teorema anterior es válida si $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{K})$.

Ejemplo 3.4.1

Sea $n \in \mathbb{N}^*$. Considere las funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones siguiente:

$$f(x) = \cos nx \quad \text{y} \quad g(x) = \sin nx, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Claramente f y g son funciones de clase C^1 en \mathbb{R} periódicas de periodo 2π . Por el último corolario las series de Fourier de f y g convergen a f y g respectivamente, uniformemente en \mathbb{R} . Los correspondientes coeficientes de Fourier de f y g serían:

$$\frac{a_0}{2} \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kx + b_k \sin kx]$$

como f es par, entonces $b_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Además,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx \\ &= \frac{1}{\pi} (\cos nx | \cos kx) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ 1 & \text{si } k = n \end{cases} \end{aligned}$$

por tanto, $f(x) = \cos nx = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \cos kx = \cos nx$. Similarmente se prueba que $g(x) = \sin nx$ es su desarrollo en serie de Fourier.

Ejemplo 3.4.2

Considere la función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada como sigue

$$F(x) = \sin^3 x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

F es de clase C^1 y periódica de periodo 2π . Por el corolario, la serie de Fourier de F converge a F uniformemente en \mathbb{R} . Como F es impar, $a_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$.

Se tiene que

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^3 x \operatorname{sen} x dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^4 x dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 - \cos 2x + \cos^2 2x dx \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left[2\pi - (2|\cos 2x|) + \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 2x dx \right] \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 4x}{2} dx \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8\pi} [2\pi + (1|\cos 4x|)] \\
 &= \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

en general

$$\begin{aligned}
 b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^3 x \operatorname{sen} kx dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x \operatorname{sen} kx dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} kx dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} (\operatorname{sen} x | \operatorname{sen} kx) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x \operatorname{sen} x \operatorname{sen} kx dx \\
 &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(k-1)x + \cos(k+1)x] \cos 2x dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} (\cos(k+1)x | \cos 2x) - \frac{1}{4} \left(\frac{\cos(k-1)x}{\sqrt{\pi}} | \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}} \right) \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{si } k = 2, 4, 5, \dots \\ -\frac{1}{4} & \text{si } k = 3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

luego, $F(x) = \frac{3}{4} \operatorname{sen} x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 3x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.4.3

¿Qué pasa con la función $x \mapsto |\operatorname{sen} x|$ y su serie de Fourier?

3.5. Teorema fundamental para la convergencia puntual de series de Fourier en $\mathcal{L}_1^{2\pi}$

Teorema 3.5.1 (Teorema de Riemman-Lebesgue)

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Si $f \in \mathcal{L}_1(]a, b[, \mathbb{K})$, entonces

$$\lim_{\lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx = 0$$

Demostración:

Se harán varias cosas:

1. Suponga que $f = \chi_I$ con $I \subseteq]a, b[$ es un intervalo de extremos $\alpha \leq \beta$. Luego,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx &= \int_\alpha^\beta e^{i\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{i\lambda} (e^{i\lambda\beta} - e^{i\lambda\alpha}) \\ \Rightarrow \left| \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx \right| &\leq \frac{2}{|\lambda|} \end{aligned}$$

donde el lado de la derecha tiende a cero conforme $|\lambda| \rightarrow \infty$. Por tanto,

$$\lim_{\lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx = 0$$

por linealidad el resultado es válido si f es una función escalonada en el abierto $]a, b[$.

2. Suponga que $f \in \mathcal{L}_1^c(]a, b[, \mathbb{K})$ y sea $\varepsilon > 0$. Se sabe que existe $\varphi \in \mathcal{E}(]a, b[, \mathbb{K})$ tal que

$$\mathcal{N}_1(f - \varphi) < \frac{\varepsilon}{2}$$

También existe $R > 0$ tal que

$$\lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| > R \Rightarrow \left| \int_a^b \varphi(x) e^{i\lambda x} dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

entonces, si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $|\lambda| > R$, se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx \right| &\leq \left| \int_a^b [f(x) - \varphi(x)] e^{i\lambda x} dx \right| + \left| \int_a^b \varphi(x) e^{i\lambda x} dx \right| \\ &< \int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

lo que termina la prueba. ■

Observación 3.5.1

Se tiene lo siguiente:

1. Si $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ es integrable en un conjunto medible $B \subseteq]a, b[$, entonces

$$\lim_{\lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| \rightarrow \infty} \int_B f(x) e^{i\lambda x} dx = 0$$

pues, $f\chi_B$ es integrable en $]a, b[$.

2. Si $f \in \mathcal{L}_1([a, b], \mathbb{C})$ al escribir $e^{i\lambda x} = \cos \lambda x + i \sin \lambda x$ el Teorema de Riemman-Lebesgue implica que

$$\lim_{\lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| \rightarrow \infty} \int_B f(x) \cos \lambda x dx = 0$$

y

$$\lim_{\lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| \rightarrow \infty} \int_B f(x) \sin \lambda x dx = 0$$

3. Recuerde que si $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$, se definió:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Por el Teorema de Riemman-Lebesgue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$$

además,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$$

Se denota por $c_0(\mathbb{Z})$ al espacio vectorial de todas las sucesiones $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tal que

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} c_n = 0$$

$c_0(\mathbb{Z})$ es un subespacio del espacio de Banach $(l_\infty(\mathbb{Z}), \mathcal{N}_\infty(\cdot))$. Se demuestra que $c_0(\mathbb{Z})$ es un subespacio cerrado de $(l_\infty(\mathbb{Z}), \mathcal{N}_\infty(\cdot))$, luego $(c_0(\mathbb{Z}), \mathcal{N}_\infty(\cdot))$ también es de Banach.

Por cierto, $(l_\infty(\mathbb{Z}), \mathcal{N}_\infty(\cdot)) \equiv (\mathcal{B}(\mathbb{Z}, \mathbb{C}), \mathcal{N}_\infty(\cdot))$. De hecho, $(c_0(\mathbb{Z}), \mathcal{N}_\infty(\cdot))$ es un álgebra de Banach con el producto:

$$\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \cdot \{d_n\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{c_n \cdot d_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

Proposición 3.5.1

La aplicación $f \mapsto \{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una aplicación lineal continua inyectiva de $L_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ en $c_0(\mathbb{Z})$.

Demostración:

Ya se sabe que dicha aplicación es lineal e inyectiva. Veamos que

$$\begin{aligned} |c_k| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ikx} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{N}_1(f), \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow \mathcal{N}_\infty(\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}) &\leq \frac{1}{2\pi} \mathcal{N}_1(f) \end{aligned}$$

Por tanto, esta aplicación lineal es continua y de norma menor o igual a $\frac{1}{2\pi}$. ■

Observación 3.5.2

En los ejercicios se verá que dicha aplicación lineal no es suprayectiva (a diferencia del caso en

3.6. Núcleo de Dirichlet y teorema fundamental

Para determinar la posible convergencia puntual de una serie de Fourier se debe analizar la sucesión de sumas parciales en un punto $x \in \mathbb{R}$. Recuerde que

$$s_m(x) = \sum_{k=-m}^m c_k e^{ikx}, \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$$

Sustituyendo $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$, se obtiene que

$$\begin{aligned} s_m(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-m}^m \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ik(x-t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\sum_{k=-m}^m e^{ik(x-t)} \right] dt, \quad \forall m \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Entonces,

$$s_m(x) = f * D_m(x) \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$$

donde

$$D_m(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-m}^m e^{ikx}$$

es el llamado **Núcleo de Dirichlet**.

Una expresión alternativa para este núcleo es

$$D_m(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-m}^m e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \left[1 + \sum_{k=1}^m (e^{ikx} + e^{-ikx}) \right] = \frac{1}{2\pi} \left[2\Re \left(\sum_{k=1}^m e^{ikx} \right) + 1 \right]$$

para todo $m \in \mathbb{N}^*$. Se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m e^{ikx} &= \frac{1 - e^{i(m+1)x}}{1 - e^{ix}} \\ &= \frac{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i(m+\frac{1}{2})x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} \\ &= \frac{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i(m+\frac{1}{2})x}}{-2i \sin \frac{x}{2}} \\ &= \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \left(m + \frac{1}{2} \right) x}{-2i \sin \frac{x}{2}} + i \frac{-\sin \frac{x}{2} - \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) x}{-2i \sin \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

así pues,

$$\begin{aligned} \Re \left(\sum_{k=1}^m e^{ikx} \right) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \frac{x}{2} + \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) x}{\sin \frac{x}{2}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\sin \left(m + \frac{1}{2} \right) x}{\sin \frac{x}{2}} \right] \end{aligned}$$

sustituyendo en el núcleo de Dirichlet:

$$D_m(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)x}{\sin \frac{x}{2}}$$

si x no es múltiplo entero de 2π . En caso contrario obtenemos que

$$D_m(x) = \frac{2m+1}{2\pi}$$

Note además que por definición de $D_m(x)$:

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} D_m(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)x}{\sin \frac{x}{2}} dx$$

Teorema 3.6.1 (Teorema fundamental para la convergencia puntual de una serie de Fourier)

Sea $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ y fijemos $x \in \mathbb{R}$. Para que la serie de Fourier de f converja en x a una suma $s(x)$ (finita), es necesario y suficiente que para algún $0 < \delta < \pi$ se cumpla alguna de las dos condiciones siguientes:

1. $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+t)-s(x)}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t dt = 0.$
2. $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \frac{f(x+t)+f(x-t)-2s(x)}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t dt = 0.$

Demostración:

Probaremos que las integrales (1) y (2) son equivalentes (es decir que son una misma integral). En efecto,

$$\begin{aligned} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+t)-s(x)}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t dt &= \int_{-\delta}^0 \frac{f(x+t)-s(x)}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t dt \\ &\quad + \int_0^{\delta} \frac{f(x+t)-s(x)}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t dt \\ &= \int_0^{\delta} \frac{f(x-u)-s(x)}{-u} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)(-u) du \\ &\quad + \int_0^{\delta} \frac{f(x+t)-s(x)}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t dt \\ &= \int_0^{\delta} \frac{f(x+t)+f(x-t)-2s(x)}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t dt \end{aligned}$$

■

Observación 3.6.1

Por el teorema anterior, la convergencia de la serie de Fourier de f en un punto x y la eventual suma de esta serie de Fourier dependen solamente del comportamiento de f en alguna vecindad arbitrariamente pequeña de x . A esto se le llama el **principio de localización de Riemman**. Esto es sorprendente, pues los coeficientes de Fourier de la función f dependen de los valores de f en todo el intervalo $[-\pi, \pi]$.