Lista 4 AnM III

Cristo Daniel Alvarado

24 de diciembre de 2023

Índice general

Capítulo 1

Lista 4

1.1. Ejercicios

Ejercicio 1.1.1 I. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la función

$$f(x) = \int_0^{x+e^{x^2}} \log\left(\frac{t+1}{t^2+1}\right) dt, \quad \forall x \geq 0.$$

Verifique que f está bien definida y que es derivable en $[0,\infty[$. **Calcule** $f'(x)$, $\forall x \geq 0$.

II. Sea $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ la función

$$f(x) = \left(\int_0^{\sqrt{x+1}\log\left(x^2+1\right)} e^{-t^2+1} dt\right)^2, \quad \forall x \geq 0.$$

Demuestre que f está bien definida y que es derivable en $[0,\infty[$. **Calcule** $f'(x)$, $\forall x \geq 0$.

Solución:
De (I): Veamos que la función está bien definida. Para ello, notemos que la función $t \mapsto \log\left(\frac{t+1}{t^2+1}\right)$ es integrable en todo subintervalo compacto de $[0,\infty[$ (por ser continua). Luego f está bien definida. Notemos que podemos reescribir a f como

$$f(x) = G \circ h(x) \tag{1.1}$$

donde $G(x) = \int_0^x \log\left(\frac{t+1}{t^2+1}\right) dt$ y $h(x) = x + e^{x^2}$. Siendo que $t \mapsto \log\left(\frac{t+1}{t^2+1}\right)$ es integrable en todo subintervalo compacto, la función G es diferenciable c.t.p. en $[0,\infty[$, y

$$G'(x) = \log\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)$$

c.t.p. en $[0,\infty[$. Para ver que la igualdad es en todo el dominio de la función, basta ver que la función G' es continua en $[0,\infty[$. En efecto, notemos que □

Ejercicio 1.1.2
Sea $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ una función integrable en $[-\pi,\pi]$. Sea $F : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ la integral indefinida de f, dada por

$$F(x) = \int_{-\pi}^x (f(t) - c)\, dt, \quad \forall x \in [-\pi,\pi]$$

donde c es constante. Defina

$$c_k' = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx \quad \text{y} \quad c_k = \int_{-\pi}^{\pi} F(x)e^{-ikx}dx$$

donde $k \in \mathbb{Z}$. **Determine** la relación entre c_k y c_k'.

Solución:

Determinemos la relación entre las variables c_k y c_k'. Para ello, notemos que podemos escribir

$$\begin{aligned} c_k &= \int_{-\pi}^{\pi} F(x)e^{-ikx}dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{x} (f(t) - c)\, dt \right] e^{-ikx}dx \end{aligned}$$

□

Ejercicio 1.1.3

Integrando por partes, **calcule** las integrales siguientes

$$\int_a^b e^{\alpha x} \sin(\beta x)dx \quad \text{y} \quad \int_a^b e^{\alpha x} \cos(\beta x)dx$$

donde α y β son constantes.

Solución:

□

Ejercicio 1.1.4

Sean $0 < a < 1$ y $-\pi < \lambda < \pi$ fijos. **Verifique** que existen las integrales siguientes y mediante una integración por partes **pruebe** la identidad:

$$\int_0^{\infty} \frac{-e^{i\lambda}x^a}{(e^{i\lambda}x + 1)^2}dx = \int_0^{\infty} \frac{ax^{a-1}}{e^{i\lambda}x + 1}dx$$

Solución:

□

Ejercicio 1.1.5

Determine cuáles de las siguientes funciones son de clase C^1, de variación acotada y/o absolutamente continuas en $[0, 1]$.

I.

$$f(x) = \begin{cases} x^{4/3} \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right), & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

II.
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right), & \text{si } x \in]0,1] \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Solución:

$\square$

Ejercicio 1.1.6
Proporcione un contraejemplo de una función que sea absolutamente continua en todo intervalo $[a,1]$, $0 < a \leq 1$, y continua en cero, pero que no sea absolutamente continua en $[0,1]$.

Solución:

$\square$

Ejercicio 1.1.7
Demuestre que si una función f es absolutamente continua en todo intervalo $[a,1]$, $0 < a \leq 1$, continua en cero y de variación acotada en $[0,1]$, entonces f es absolutamente continua en $[0,1]$.
Sugerencia. Verifique que f' es integrable en $[0,1]$ y utilice la función $G(x) = \int_1^x f'$, $\forall x \in]0,1]$.

Solución:

$\square$

Ejercicio 1.1.8
Determine si la función $f(x) = x^{1/2}$ es o no de clase C^1, de variación acotada y/o absolutamente continua en $[0,1]$.

Solución:

$\square$

Ejercicio 1.1.9
Determine si la función
$$f(x) = \begin{cases} x^{3/2} \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right), & \text{si } x \in]0,1] \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
es o no de clase C^1, absolutamente continua y/o de variación acotada en $[0,1]$.

Solución:

$\square$

Ejercicio 1.1.10
Se dice que una función $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ satisface la **condición de Lipschitz** en $[a,b]$ si existe una

constante $M \geq 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b].$$

I. **Pruebe** que si f satisface la condición de Lipschitz en $[a, b]$, entonces f es absolutamente continua en $[a, b]$.

II. **Demuestre** que si f es absolutamente continua, entonces f satisface la condición de Lipschitz en $[a, b]$ si y sólo si $|f'|$ es acotada en $[a, b]$.

III. Si f es continua en $[a, b]$ y una de sus derivadas (digamos D^+) es acotada en $[a, b]$, **muestre** que f satisface la condición de Lipschitz en $[a, b]$.

Solución:

De (I): Suponga que f satisface la condición de Lipschitz, es decir existe una constante $M \geq 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| < (M + 1)|x - y|$$

Lo haremos por la definición. Sea $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \frac{\varepsilon}{M+1} > 0$. Si $\{]x_k, x'_k[\}_{k=1}^{m}$ es una familia de intervalos abiertos disjuntos contenidos en $[a, b]$ tales que

$$\sum_{k=1}^{m} |x'_k - x_k| = \sum_{k=1}^{m} (x'_k - x_k) \leq \delta = \frac{\varepsilon}{M + 1}$$

entonces, por la condición de Lipschitz se tiene

$$\sum_{k=1}^{m} |f(x'_k) - f(x_k)| \leq \sum_{k=1}^{m} M|x'_k - x_k| < (M + 1) \cdot \frac{\varepsilon}{M + 1} = \varepsilon$$

Luego, f es absolutamente continua en $[a, b]$.

De (II): Suponga que f es absoultamente continua.

$\Rightarrow$): Suponga que f satisface la condición de Lipschitz, entonces existe $M \geq 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| < (M + 1)|x - y|$$

Como f es de variación acotada, es diferenciable c.t.p. en $[a, b]$. Sea A el conjunto de puntos en los que f es diferenciable. Si $x \in A$ y $y \in [a, b]/\{x\}$ se tiene que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq M|x - y| \\ \Rightarrow \left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| &\leq M \end{aligned}$$

siendo $y \in [a, b]/\{x\}$ arbitrario. Tomando límites con respecto a x se tiene que

$$|f'(x)| \leq M$$

para todo $x \in A$. Es decir, la función f' definida c.t.p. en A es acotada (en particular lo es en $[a, b]$).

$\Leftarrow$): Suponga que f' es acotada en $[a, b]$.

$\square$

Ejercicio 1.1.11
Determine si la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es o no de clase C^1, absoultamente continua y/o de variación acotada en $[0,1]$.

Solución:

$\square$

Ejercicio 1.1.12
Considere la función $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{si } x \in [-1,1]/\{0\} \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Calcule las cuatro derivadas de f en cero. ¿Es f de variación acotada en $[-1,1]$?

Solución:

$\square$

Ejercicio 1.1.13
Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$ y alcanza un máximo local en un punto $c \in]a,b[$, **pruebe** que

$$D_+ f(x) \leq D^+ f(x) \leq D_- f(c) \leq D^- f(c)$$

¿Qué relaciones se darían si f alcanzara un máximo local en a o b?

Solución:

$\square$

Ejercicio 1.1.14
Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua y alguna de sus derivadas (digamos D^+) es no negativa en todo punto de $[a,b]$, **demuestre** que $f(b) \geq f(a)$.

Solución:

$\square$

Ejercicio 1.1.15
Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones

I. **Muestre** que $D^+(f+g) \leq D^+ f + D^+ g$ en todo punto de $[a,b[$. **Establezca** desigualdades similares para las otras derivadas.

II. **Pruebe** que si f y g son no negativas y continuas en un punto $c \in [a,b[$, entonces

$$D^+(fg)(c) \leq f(c) D^+ g(c) + g(c) D^+ f(c)$$

Solución:

$\square$

Ejercicio 1.1.16
Proporcione un ejemplo de una función monótona en $[0,1]$ que sea discontinua en cada número racional.

Solución:

$\square$

Ejercicio 1.1.17
Demuestre las proposiciones 4.18, 4.21 y 4.36.

Solución:

$\square$

Ejercicio 1.1.18
Sea $\{f_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones en $\mathscr{V}([a,b],\mathbb{K})$ que converge puntualmente en $[a,b]$ a una función f. **Pruebe** que

$$V_f([a,b]) \leq \liminf_{\nu\to\infty} V_{f_\nu}([a,b])$$

Solución:

$\square$

Ejercicio 1.1.19
Pruebe que si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función de variación acotada en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b |f'| \leq V_f([a,b]);$$

y si f es, además, absolutamente continua en $[a,b]$, **muestre** que

$$\int_a^b |f'| = V_f([a,b]).$$

Solución:

$\square$

Ejercicio 1.1.20
Demuestre que si $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ es una función monótona, absolutamente continua en $[0,1]$ y A es un conjunto despreciable contenido en $[0,1]$, entonces $f(A)$ es un conjunto despreciable.

Solución:

Sea A un conjunto despreciable, es decir $m(a) = 0$. $\square$

Ejercicio 1.1.21
Haga lo siguiente

I. **Proporcione** un ejemplo de una función f estrictamente creciente y absolutamente continua en $[0,1]$ tal lque $f' = 0$ en algún conjunto con medida positiva.

   Sugerencia. Sea A el complemento de un conjunto de Cantor generalizado $\mathscr{C}_\alpha$ con medida $1-\alpha > 0$. Tome como f la integral indefinida de χ_A.

II. **Pruebe** que existe un conjunto despreciable E contenido en $[0,1]$ tal que $f^{-1}(E)$ no es medible.

Solución:

$\square$

Ejercicio 1.1.22 (Teorema de Cambio de Variable)
Sea $\phi : [a,b] \to [c,d]$ una función creciente absolutamente continua en $[a,b]$ tal que $\phi(a) = c$ y $\phi(b) = d$. Observe que ϕ **NO** necesariamente debe ser un isomorfismo C^1 de $[a,b]$ en $[c,d]$.

I. **Muestre** que para cualquier conjunto abierto W contenido en $[c,d]$ se cumple

$$m(W) = \int_{\phi^{-1}(W)} \phi'(x)dx.$$

II. Sea $N = \{x \in [a,b] | \phi'(x) \neq 0\}$. Si C es un subconjunto despreciable de $[c,d]$, **demuestre** que $\phi^{-1}(C) \cap N$ es un subconjunto despreciable de $[a,b]$.

III. Si D es un subconjunto medible de $[c,d]$, **pruebe** que $B = \phi^{-1}(D) \cap N$ es un subconjunto medible de $[a,b]$ y

$$m(D) = \int_B \phi' = \int_c^d \chi_D(\phi(x))\phi'(x)dx.$$

IV. Si $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ es una función medible no negativa, **muestre** que la función $(f \circ \phi) \cdot \phi' : [a,b] \to \mathbb{R}$ es medible no negativa y

$$\int_c^d f(y)dy = \int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)dx.$$

Solución:

Esta cosa es una prueba. $\square$