# Lista grupo simétrico.

1. Sean $X$ y $Y$ conjuntos no vacíos, no necesariamente finitos, tales que $|X| = |Y|$. Pruebe que $S_X \cong S_Y$.

2. Pruebe que $S_n$ no es un producto directo de ninguna familia no vacía de subgrupos propios

**Dem:**

Como $|X| = |Y|$, $\exists\ f : X \to Y$ una función biyectiva. Considere $g : S_X \to S_Y$ dada como:

$$\forall\ \sigma \in S_X,\ g(\sigma) = f \circ \sigma \circ f^{-1}$$

Como $f$ y $\sigma$ son biyecciones, entonces $f \circ \sigma \circ f^{-1}$ lo es, luego $f \circ \sigma \circ f^{-1} \in S_Y$. Por tanto $g$ está bien definida. Veamos que es isomorfismo:

a) $g$ es inyectiva.

Sean $\sigma, \theta \in S_X \ni g(\sigma) = g(\tilde{\pi})$, entonces:

$$f \circ \sigma \circ f^{-1} = f \circ \theta \circ f^{-1}$$

$$\Rightarrow f \circ \sigma \circ f^{-1}(y) = f \circ \theta \circ f^{-1}(y),\ \forall\ y \in Y.$$

Por ser $f$ inyectiva:

$$\Rightarrow \sigma \circ f^{-1}(y) = \theta \circ f^{-1}(y),\ \forall\ y \in Y$$

Sea $x \in X$, por ser $f^{-1}$ supráyectiva, $\exists\ y_0 \in Y \ni f^{-1}(y_0) = x$, luego:

$$\sigma(x) = \theta(x)$$

como el $x$ fue arbitrario, lo anterior se cumple $\forall\ x \in X$. Así: $\sigma = \theta$.

b) $g$ es suprayectiva.

Sea $\sigma \in S_Y$, $\exists\ f^{-1} \circ \sigma \circ f : X \to X \in S_X \ni$

$$g(f^{-1} \circ \sigma \circ f) = f \circ f^{-1} \circ \sigma \circ f \circ f^{-1}$$
$$= \sigma$$

c) $g$ es homomorfismo.

Sean $\sigma, \theta \in S_X$, entonces:

$$g(\sigma \circ \theta) = f \circ \sigma \circ \theta \circ f^{-1}$$
$$= f \circ \sigma \circ id \circ \theta \circ f^{-1}$$
$$= f \circ \sigma \circ f^{-1} \circ f \circ \theta \circ f^{-1}$$
$$= g(\sigma) \circ g(\theta)$$

por a)-c), $g$ es isomorfismo. Así $S_X \cong S_Y$.

q.e.d.

2. Pruebe que $S_3$ no es un producto directo de ninguna familia no vacía de subgrupos propios de $S_3$.

3. Encuentre cuatro subgrupos diferentes de $S_4$ que sean isomorfos a $S_3$, y nueve isomorfos a $S_2$.

Sol.

Para $S_3$, sea $i \in [\![1,4]\!]$. Considere el conjunto:

$$L_3(i) = \{\sigma \in S_4 \mid \sigma(i) = i\} \subseteq S_4$$

y, para $k \in [\![1,4]\!]$ y $l \in [\![1,4]\!] \setminus \{k\}$, considere:

$$L_2(k,l) = \{\sigma \in S_4 \mid \sigma(k) = k \text{ y } \sigma(l) = l\}$$

Veamos que $L_3(i) \cong S_3$ y $L_2(k,l) \cong S_2$. En efecto:

1) Sea $f: S_3 \to L_3(i)$ dada como:

$$\forall \sigma \in S_3, \ f\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) \end{pmatrix} = ($$

4. Pruebe que el conjunto $N = \{e,\ (1\ \ 2)(3\ \ 4),\ (1\ \ 3)(2\ \ 4),\ (1\ \ 4)(2\ \ 3)\}$ es un subgrupo normal de $S_4$ contenido en $A_4$ tal que $S_4/N \cong S_3$ y $A_4/N \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

de $S_4$ contenido en $A_4$ tal que $S_4/N \cong S_3$ y $A_4/N \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

5. Pruebe que el grupo alternante $A_4$ no tiene subgrupos de orden 6.

6. Sea $n \geq 2$. Pruebe que los elementos de $S_n$ $\sigma = (1\ \ 2)$ y $\tau = (1\ \ 2\ \ \dots\ \ n)$ generan

6. Sea $n \geq 2$. Pruebe que los elementos de $S_n$, $\sigma = (1 \quad 2)$ y $\pi = (1 \quad 2 \quad \cdots \quad n)$, generan a $S_n$. (Sugerencia: Realice la prueba por inducción sobre los $m$'s tales que $2 \leq m \leq n$ para establecer que $(1 \quad m)$ se obtiene a partir de $\sigma$ y de $\pi$. Considere el elemento $\beta = (1 \;\; m)(1 \;\; m-1)\cdots(1 \;\; 2)\sigma^{m-1}$ y calcule $\beta(1 \;\; 2)\beta^{-1}$.)

7. Pruebe que $A_n^{(1)} < S_n^{(1)} < A_n$, donde $A_n^{(1)}$ y $S_n^{(1)}$ son los subgrupos derivados concitados.

8. Sea $n \geq 2$ y $H = \langle (1\ \ 2) \rangle$. Pruebe que $S_n = HA_n$.

7. Pruebe que $A_n < S_n < A_n$, donde $A_n$ y $S_n$ son los subgrupos derivados considerados.

8. Sea $n \geq 2$ y $H = \langle (1 \;\; 2) \rangle$. Pruebe que $S_n = HA_n$.

9. Sean $n \geq 2$ y $N$ un subconjunto de $S_n$. Pruebe lo siguiente:

9. Sean $n \geq 2$ y $N$ un subconjunto de $S_n$. Pruebe lo siguiente:

a) Si $N$ es subgrupo normal de $S_n$, $N \neq S_n$, tal que $N$ contiene un 3-ciclo, entonces pruebe que $N = A_n$.

b) Si $N$ es subgrupo normal de $A_n$ y $N$ contiene un 3-ciclo, entonces pruebe que $N = A_n$.

10. Sea $n \geq 3$. Pruebe que el centro de $S_n$ es trivial, y concluya que $\mathrm{Int}(S_n) \cong S_n$.

11. Sean $n \geq 2$ y $\sigma \in A_n$. Pruebe que la clase de conjugación de $\sigma$ en $S_n$ es una clase de conjugación de $A_n$ o bien es la unión de dos clase de conjugación de $A_n$ con el mismo número de elementos. Esto último ocurre exactamente cuando $N_{S_n}(\sigma) \subseteq A_n$.

12. Sea $n \geq 5$. Pruebe que la clase de conjugación de un 3-ciclo en $S_n$ es una clase de conjugación de $A_n$.

de $A_n$.

13. Si $n \geq 5$, entonces pruebe que $A_n$ es el único subgrupo normal propio no trivial de $S_n$.

14. Hallar un monomorfismo $\varphi : S_n \longrightarrow A_{n+2}$. (En particular, la paridad no se conserva bajo

14. Hallar un monomorfismo $\varphi : S_n \longrightarrow A_{n+2}$. (En particular, la paridad no se conserva bajo homomorfismo.)

homomorfismo.)

15. Sea $H$ un subgrupo de $A_5$ tal que $H \neq A_5$. Pruebe que $|H| \leq 12$.

15. Sea $H$ un subgrupo de $A_5$ tal que $H \neq A_5$. Pruebe que $|H| \leq 12$.

16. Probar que $S_6$ no tiene subgrupos de orden 15.

17. Sea $G$ un grupo simple de orden 60. Pruebe que $G$ es isomorfo a un subgrupo de $A_6$

16. Probar que $S_6$ no tiene subgrupos de orden 15.

17. Sea $G$ un grupo simple de orden 60. Pruebe que $G$ es isomorfo a un subgrupo de $A_5$.

18. Sean $n \geq 2$ y $N = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(n) = n\}$. Pruebe lo siguiente:

*a*) $N$ es subgrupo de $S_n$;

*b*) $N \cong S_{n-1}$;

*c*) Encuentre los $n$'s tales que $N \lhd S_n$.