Plan de Estudio: Álgebra Homológica Computacional

Referencia Personal

August 22, 2025

Introducción

Este plan de estudio de 6–12 meses está diseñado para combinar teoría, práctica y software en el área de álgebra homológica computacional. Se divide en cuatro etapas, con el objetivo de adquirir una base teórica sólida y aplicarla en cálculos efectivos y experimentos computacionales.

Etapa 1 (Meses 1–2): Bases en álgebra y topología

Objetivo: reforzar la teoría que sustenta los cálculos homológicos.

- Repaso de álgebra abstracta: grupos abelianos, módulos, anillos conmutativos, resoluciones libres, exactitud, complejos de cadenas.
- Repaso de topología algebraica básica: homología, cohomología, complejos simpliciales, cadenas y fronteras.

Recursos:

- Hungerford, *Algebra*.
- Atiyah & Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*.
- Hatcher, *Algebraic Topology* (cap. 2).

Práctica: uso de `SageMath` para calcular homología de complejos pequeños, y paquetes como `GUDHI` o `Ripser`.

Etapa 2 (Meses 3–4): Álgebra homológica clásica

Objetivo: entrar en la teoría de Ext, Tor y resoluciones.

- Complejos de cadenas, homología de un complejo.
- Resoluciones proyectivas e inyectivas.
- Functores derivados: Tor y Ext.

Recursos:

- Weibel, *An Introduction to Homological Algebra*.

Práctica: ejercicios computacionales manuales y uso de `Macaulay2` (resoluciones libres), `HAP` en GAP (homología de grupos).

Etapa 3 (Meses 5–7): Computación en homología

Objetivo: estudiar algoritmos y experimentar con software.

- Cálculo de homología simplicial: matrices de frontera, reducción de Smith, homología persistente.
- Álgebra conmutativa computacional: bases de Gröbner, resoluciones libres mínimas, invariantes homológicos de módulos.

Recursos:
- Edelsbrunner & Harer, *Computational Topology*.
- Miller & Sturmfels, *Combinatorial Commutative Algebra*.

Práctica: cálculos en `Macaulay2`, `Sage`, y experimentos con `GUDHI/Ripser`.

Etapa 4 (Meses 8–12): Especialización y proyectos

Objetivo: integrar teoría y aplicaciones.
- Opción teórica: profundizar en homotopía computacional (`Kenzo`), problemas de homología en espacios no triviales.
- Opción aplicada: homología multiparamétrica, proyectos con datasets reales (biología, redes sociales, imágenes).
- Opción puente: categorical homological algebra, aplicaciones en teoría de códigos o criptografía.

Proyecto final sugerido:
1. Tomar un dataset real (imágenes o redes).
2. Construir un complejo simplicial.
3. Calcular homología persistente y diagramas de persistencia.
4. Conectar resultados con invariantes algebraicos.

Resultados esperados

- Base teórica sólida en álgebra homológica.
- Experiencia práctica con `Macaulay2`, `Sage`, `GAP/HAP`, `GUDHI`, `Ripser`.
- Comprensión de aplicaciones puras y aplicadas de homología computacional.
- Posibilidad de iniciar investigación en álgebra conmutativa computacional, topología algebraica computacional o TDA.