# El Espacio Normado $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Sea
$$K = \{f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \mid N(f) = 0\}$$
$$= \{f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \mid f = 0 \text{ c.t.p.}\}$$

Claramente $K$ es subespacio vectorial de $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Se puede definir entonces el espacio vectorial cociente
$$L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) / K$$

Cuyos elementos son clases de equivalencia de la forma
$$\hat{f} = K + f$$

donde $\hat{f} = \hat{g} \iff f = g$ c.t.p. Se define:
$$\hat{N} : L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$\hat{N}(\hat{f}) = N(f)$$

$\hat{N}$ es una norma sobre $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})/K$. A la pareja $(L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \hat{N})$ se le llama el espacio normado asociado al espacio seminormado $(\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), N)$.

Se confundirán voluntariamente ambos espacios no distinguiendo entre funciones equivalentes y la $\hat{N}$ será denotada por $N$.

# Subespacios Densos.

$\mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ denota al subespacio de $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ de funciones escalonadas de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. $S(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ denota al subespacio de funciones simples, nulas fuera de algún conjunto con medida finita.

## Teorema.

$\mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y $S(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ son subespacios densos de $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

**Dem:**

Como $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \leq S(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, basta con probar que $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ es denso en $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Sea pues $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y sea $\varepsilon > 0$.

a) Suponga adicionalmente que $f$ es integrable no negativa. Como $\int_{\mathbb{R}^n} f < \infty$, $\exists\, h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ medible, acotada y nula fuera de un conjunto $D$ con medida finita $D \in \mathcal{M}$ $\ni$ $0 \leq h \leq f$, y:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f - \frac{\varepsilon}{4} < \int_{\mathbb{R}^n} h$$

Entonces:

$$N(f-h) = \int_{\mathbb{R}^n} |f-h| = \int_{\mathbb{R}^n} f-h < \frac{\varepsilon}{4} \quad \ldots (1)$$

Sea ahora $M > 0$ $\ni$ $h(x) \leq M, \forall x \in \mathbb{R}^n$. Como $h$ es medible, por def. de integral, existe una función $\eta: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nula fuera de $D$ que aproxima a $h$ unif. en $\mathbb{R}^n$ tanto como se quiera $\ni$ $\eta \leq h$ (por el P.T.I), p.ej.:

$$0 \leq h(x) - \eta(x) \leq \frac{\varepsilon}{4m(D)}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

nuevamente por el P.T.I la $\eta$ puede ser escogida $\ni$ $0 \leq \eta(x) \leq M, \forall x \in \mathbb{R}^n$. Entonces:

$$N(h-\eta) = \int_{\mathbb{R}^n} |h-\eta| = \int_D h-\eta \leq \int_D \frac{\varepsilon}{4m(D)} = \frac{\varepsilon}{4} \quad \ldots (2)$$

Por un resultado anterior, existen una función escalonada $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y un conjunto $A \in \mathcal{M}$ $\ni$

$$m(A) < \frac{\varepsilon}{8M} \quad \text{y} \quad \varphi(x) = \eta(x), \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus A$$

Además $\varphi$ puede ser elegida $\ni$ $0 \leq \varphi(x) \leq M, \forall x \in \mathbb{R}^n$. Entonces:

$$\begin{aligned}
N(\eta-\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^n} |\eta-\varphi| = \int_{\mathbb{R}^n} \eta-\varphi = \int_{D^c} \eta-\varphi + \int_D \eta-\varphi \\
&= \int_{D^c \cap A} \eta-\varphi + \int_{D^c \setminus A} \cancelto{0}{\eta-\varphi} + \int_{D \cap A} \eta-\varphi + \int_{D \setminus A} \cancelto{0}{\eta-\varphi} \\
&\leq \int_{D^c \cap A} \varphi + \int_{D \cap A} 2M \\
&\leq \int_{D^c \cap A} M + 2\int_{D \cap A} M \\
&\leq 2M\left(m(D^c \cap A) + m(D \cap A)\right) \\
&= 2M\, m(A) \leq 2M \frac{\varepsilon}{8M} = \frac{\varepsilon}{4} \quad \ldots (3)
\end{aligned}$$

De (1), (2) y (3), se sigue $N(f-\varphi) \leq 3 \cdot \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$.

b) Removemos la hipótesis de que $f$ sea no negativa. Apliquemos a) a $f^+$ y $f^-$, entonces $\exists\, \varphi, \psi: \mathbb{R}^n \to$

$\mathbb{R}$ escalonadas $\ni$

$$N(f^+ - \varphi) < \frac{\varepsilon}{2} \quad y \quad N(f^- - \psi) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Entonces $\varphi - \psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ satisface que:

$$N(f - \varphi + \psi) \leq N(f^+ - \varphi) + N(f^- - \psi)$$
$$< \varepsilon$$

q.e.d.

# Completez.

**Def.** Se dice que una sucesión de funciones $\{f_v\}_{v=1}^{\infty}$ en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ converge en promedio a $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

Si

$$\lim_{v \to \infty} N(f_v - f) = 0$$

Como $|\int_{\mathbb{R}^n} f| \leq N(f)$, $\forall f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y $f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f$ es lineal, dicho operador de $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es lineal continuo de norma $\leq 1$. En particular:

$$\lim_{v \to \infty} N(f - f_v) = 0 \Rightarrow \lim_{v \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_v = \int_{\mathbb{R}^n} f$$

Convergencia promedio implica la conv. de las integrales.

**Def.** Sea $\{f_v\}_{v=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ Converge casi uniformemente a una función $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sobre un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, si $\forall \delta > 0 \ \exists \ C \subseteq A \ni m(C) < \delta$ y $f$ converge unif. en $A \setminus C$, i.e $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N \in \mathbb{N} \ni v \geq N$ implica:

$$\sup_{x \in A \setminus C} |f_v(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

**Lema:**

Si $\{f_v\}_{v=1}^{\infty}$ Converge casi uniformemente a $f$ en un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ medible. Entonces $\{f_v\}_{v=1}^{\infty}$ converge a $f$ c.t.p.

**Dem:**

$\forall \ k \in \mathbb{N} \ \exists \ C_k \subseteq A \ni m(C_k) \leq \frac{1}{k}$ y $\{f_v\}_{v=1}^{\infty}$ converge a $f$ unif. en $A \setminus C_k$. En particular:

$$\lim_{v\to\infty} f_v(x) = f(x),\ \forall x \in A\setminus C_k$$

Entonces:

$$\lim_{v\to\infty} f_v(x) = f(x).\ \forall x \in \bigcup_{k=1}^{\infty}(A\setminus C_k)$$

Pero:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A\setminus C_k = A\setminus Z,\ \text{donde } Z = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$$

Como $m(Z) \leq m(C_k) \leq \frac{1}{k},\ \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow m(Z) = 0$. Por tanto:

$$\lim_{v\to\infty} f_v(x) = f(x) \quad \text{c.t.p. en } A.$$

q.e.d.

Lema:

Si $\varepsilon > 0$ y $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ con $N(f) \leq \varepsilon^2$, entonces el conjunto:

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| \geq \varepsilon\}$$

tiene medida $\leq \varepsilon$.

Dem:

Como

$$0 \leq \varepsilon \chi_A \leq |f(x)|\chi_A \leq |f(x)|,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Luego:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon\chi_A \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f| = N(f) \leq \varepsilon^2$$

Como $\varepsilon\chi_A$ es medible no negativa, por el T.C.M:

$$\Rightarrow \varepsilon m(A) \leq \varepsilon^2$$

$$\therefore m(A) \leq \varepsilon$$

q.e.d.

Lema:

Sea $\{f_v\}_{v=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), N)$, entonces existe una subsucesión $\{f_{\alpha(v)}\}_{v=1}^{\infty}$ y una función $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\{f_{\alpha(v)}\}_{v=1}^{\infty}$ converge casi uniformemente (luego también c.t.p.) a $f$ en $\mathbb{R}^n$.

**Dem:**

Existe una subsucesión $\{f_{\alpha(v)}\}_{v=1}^{\infty}$ tal que

$$N\left(f_{\alpha(v+1)} - f_{\alpha(v)}\right) \leq \left(\frac{1}{2^v}\right)^2$$

Sea $A_v = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_{\alpha(v+1)}(x) - f_{\alpha(v)}(x) \geq \frac{1}{2^v}\}$. Por el lema anterior: $m(A_v) \leq \frac{1}{2^v}$. Note que:

$$|f_{\alpha(v+1)}(x) - f_{\alpha(v)}(x)| < \frac{1}{2^v},\ \forall\, v \in \mathbb{N}.$$

Fije $k \in \mathbb{N}$. Defina

$$M_k = \bigcup_{v=k}^{\infty} A_v$$

Entonces $M_k$ es medible y $m(M_k) \leq \sum_{v=k}^{\infty} m(A_v) = \frac{1}{2^{k-1}}$, y:

$$|f_{\alpha(v+1)}(x) - f_{\alpha(v)}(x)| < \frac{1}{2^v},\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus M_k$$

Como la serie numérica $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{2^v} < \infty$, por el criterio M de Weierestrass la serie:

$$\sum_{v=1}^{\infty} \left(f_{\alpha(v+1)} - f_{\alpha(v)}\right)$$

Converge absoluta y uniformemente en $\mathbb{R}^n \setminus M_k$. Esto es:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus M_k} \left| \sum_{v=1}^{N} |f_{\alpha(v+1)}(x) - f_{\alpha(v)}(x)| - h_k(x) \right| \xrightarrow{N \to \infty} 0$$

a alguna función $h_k$. Puesto que:

$$f_{\alpha(v)} = f_{\alpha(1)} + \sum_{j=1}^{v-1} \left(f_{\alpha(j+1)} - f_{\alpha(j)}\right),\ \forall\, v \in \mathbb{N}$$

lo anterior prueba que $\{f_{\alpha(v)}\}_{v=1}^{\infty}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}^n \setminus M_k$ a dicha función $g_k = h_k + f_{\alpha(1)}$. Note que $g_{k+1}(x) = g_l(x), \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus M_l$ cuando $l \leq k+1$ pues $M_{k+1} \subseteq M_l \Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus M_l \subseteq \mathbb{R}^n \setminus M_{k+1}$. Luego, la función $f: \bigcup_{k=1}^{\infty} (\mathbb{R}^n \setminus M_k) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = g_k(x),\ \text{si } x \in \mathbb{R}^n \setminus M_k \text{ para algún } k \in \mathbb{N}$$

$f$ está bien definida, y:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} (\mathbb{R}^n \setminus M_k) = \mathbb{R}^n \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} M_k\right) = \mathbb{R}^n \setminus Z$$

Como $m(Z) \leq m(M_k) \leq \frac{1}{2^{k-1}}, \forall\, k \in \mathbb{N} \Rightarrow m(Z) = 0$. Por tanto $f$ es una función definida c.t.p. en $\mathbb{R}^n$. Considerando la ampliación canónica de $f$ a todo $\mathbb{R}^n$, podemos suponer que $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Otra vez, como $m(M_k) < \frac{1}{2^{k-1}}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, entonces lo anterior prueba que $\{f_{\sigma(r)}\}_{r=1}^{\infty}$ converge a $f$ casi uniformemente en $\mathbb{R}^n$.

2)

q.e.d.

## Teorema (De Completez).

El espacio normado $(L_1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}), N)$ es de Banach.

**Dem:**

Sea $\{f_v\}_{v=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $(L_1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}), N)$. Por el lema anterior existen una subsucesión $\{f_{\alpha(v)}\}_{v=1}^{\infty}$ y una función $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ m $\lim_{v\to\infty} f_{\alpha(v)} = f$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$. Es claro que $f$ es medible. Se afirma que $f$ es integrable y que:

$$\lim_{v\to\infty} N(f-f_v) = 0$$

Sea $\varepsilon>0$ arbitrario. Por la condición de Cauchy $\exists N\in\mathbb{N}$ m $r,s\geq N \Rightarrow N(f_r-f_s)\leq\varepsilon$, i.e:

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f_r-f_s|\leq\varepsilon$$

Por def. de subsucesión, $\alpha(K)\geq K, \forall n\in\mathbb{N}$. Entonces: $r,s\geq N$:

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f_{\alpha(r)}-f_s|\leq\varepsilon$$

Fije $s\geq N$. Entonces:

$$\lim_{r\to\infty}|f_{\alpha(r)}-f_s| = |f-f_s| \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n.$$

Por el Lema de Fatou:

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f-f_s| \leq \liminf_{r\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|f_{\alpha(r)}-f_s|\leq\varepsilon$$

En particular $f-f_s\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) \Rightarrow f\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. Luego:

$$N(f-f_s)\leq\varepsilon,\ \forall s\geq N$$

$$\therefore \lim_{v\to\infty} N(f-f_v) = 0$$

q.e.d.

**Nota:** Si $\{f_v\}_{v=1}^{\infty}$ ya se sabe que converge c.t.p. en $\mathbb{R}^n$ a alguna $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ no es necesario aplicar el lema y se concluirá que $f\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ y $\{f_v\}_{v=1}^{\infty}$ converge en promedio a $f$.

## Corolario.

Si $\{f_v\}_{v=1}^{\infty}$ es una sucesión en $L_1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ que converge a $f$ en promedio y que también converge c.t.p. en $\mathbb{R}^n$ a alguna función $g:\mathbb{R}^n\to$

$\mathbb{R}$, entonces $f = g$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$.

**Dem:**

Como $\{f_v\}_{v=1}^{\infty}$ es convergente en $(L_1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}), N)$, entonces es de Cauchy en $(L_1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}), N)$. Ya que

$$\lim_{v\to\infty} f_v = g \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n$$

Por la dem. del teorema de completez, $g$ es integrable y

$$\lim_{v\to\infty} N(f_v - g) = 0$$

Como $\lim_{v\to\infty} N(f_v - f) = 0$, por unicidad del límite $f = g$ en $L_1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) \Rightarrow f = g$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$.

q.e.d.

**Corolario.**

$\{f_v\}_{v=1}^{\infty}$ converge en promedio a alguna $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, entonces existe alguna subsucesión que converge casi uniformemente (luego c.t.p. en $\mathbb{R}^n$) a $f$ en $\mathbb{R}^n$.

**Dem:**

$\{f_v\}_{v=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $L_1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. Por un lema anterior $\exists$ $\{f_{\alpha(v)}\}_{v=1}^{\infty}$ que converge casi uniformemente a $g$ en $\mathbb{R}^n$. $\{f_{\alpha(v)}\}_{v=1}^{\infty}$ converge a $f$ en promedio (por hip.). Por el corolario ant. $f = g$ c.t.p. $\therefore$ $\{f_{\alpha(v)}\}_{v=1}^{\infty}$ converge casi uniformemente a $f$ en $\mathbb{R}^n$.

q.e.d.

**Lema:**

Si $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es medible, $\exists$ una sucesión $\{\varphi_v\}_{v=1}^{\infty}$ en $S(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ que converge puntualmente a $f$ en $\mathbb{R}^n$. Y si $f$ es no negativa, $\{\varphi_v\}_{v=1}^{\infty}$ se puede escoger creciente y no negativa.

**Dem:**

Por el P.T.A, existe $\{\psi_v\}_{v=1}^{\infty}$ sucesión de simples de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ $\ni$

$$\lim_{v\to\infty} \psi_v(x) = f(x), \ \forall \ x \in \mathbb{R}^n$$

Sea $\{P_v\}_{v=1}^{\infty}$ una sucesión creciente de rectángulos acotados $\ni$ $\mathbb{R}^n = \bigcup_{v=1}^{\infty} P_v$. Defina $\varphi_v = \psi_v \chi_{P_v}$. Si $x \in \mathbb{R}^n$, $\exists$ $N \in \mathbb{N}$ $\ni$ $x \in P_N \Rightarrow \forall\ v \geq N: x \in P_v$. Por tanto:

$$\lim_{v\to\infty} \varphi_v(x) = \lim_{v\to\infty} \psi_v(x) = f(x)$$

Si $f$ es creciente y no neg. $\{\psi_v\}_{v=1}^{\infty}$ puede ser elegida creciente y no negativa $\Rightarrow \{\varphi_v\}_{v=1}^{\infty}$ es creciente y no neg.

q.e.d.

**Teorema:**

Una función $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es medible en $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow \exists \{\psi_v\}_{v=1}^{\infty}$ sucesión de funciones escalonadas $\ni$

$$\lim_{v\to\infty} \psi_v = f \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n.$$

**Dem:**

$\Rightarrow$) Por el lema, $\exists \{\varphi_v\}_{v=1}^{\infty}$ en $S(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) \ni$

$$\lim_{v\to\infty} \varphi_v(x) = f(x), \ \forall \ x\in\mathbb{R}^n$$

Por la densidad de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ en $L_1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, $\forall \ v\in\mathbb{N} \ \exists \ \eta_v \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) \ni$

$$N(\varphi_v - \eta_v) \leq \frac{1}{v}$$

Luego $\lim_{v\to\infty} N(\varphi_v - \eta_v) = 0$, i.e $\{\varphi_v - \eta_v\}_{v=1}^{\infty}$ converge a cero en promedio. Por un corolario anterior, $\exists$ $\{\varphi_{\alpha(v)} - \eta_{\alpha(v)}\}_{v=1}^{\infty} \ni \lim_{v\to\infty} \varphi_{\alpha(v)} - \eta_{\alpha(v)} = 0$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$. Por tanto:

$$\lim_{v\to\infty} \varphi_{\alpha(v)} = f \quad \text{puntualmente.}$$

$$\therefore \lim_{v\to\infty} \eta_{\alpha(v)} = f \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n.$$

$\Leftarrow$) Es inmediata.[3)]

q.e.d.

**Corolario:**

Un conjunto $A\subseteq\mathbb{R}^n$ es medible $\Leftrightarrow \exists \{\varphi_v\}_{v=1}^{\infty}$ en $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) \ni \lim_{v\to\infty}\varphi_v = \chi_A$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$

**Corolario.**

Una función $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ es integrable $\Leftrightarrow \exists$ una sucesión de Cauchy (respecto a la norma $N$) en $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ que converge a $f$ en promedio y también c.t.p. a $f$ en $\mathbb{R}^n$. En particular, toda función integrable es límite c.t.p. de una sucesión de Cauchy de funciones escalonadas.

**Corolario.**

Una función $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ es integrable en $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow \exists \{\psi_v\}_{v=1}^{\infty}$ en $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ que satisface la condción de Cauchy c.r. a $N$ y que converge a $f$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$.

Dem:

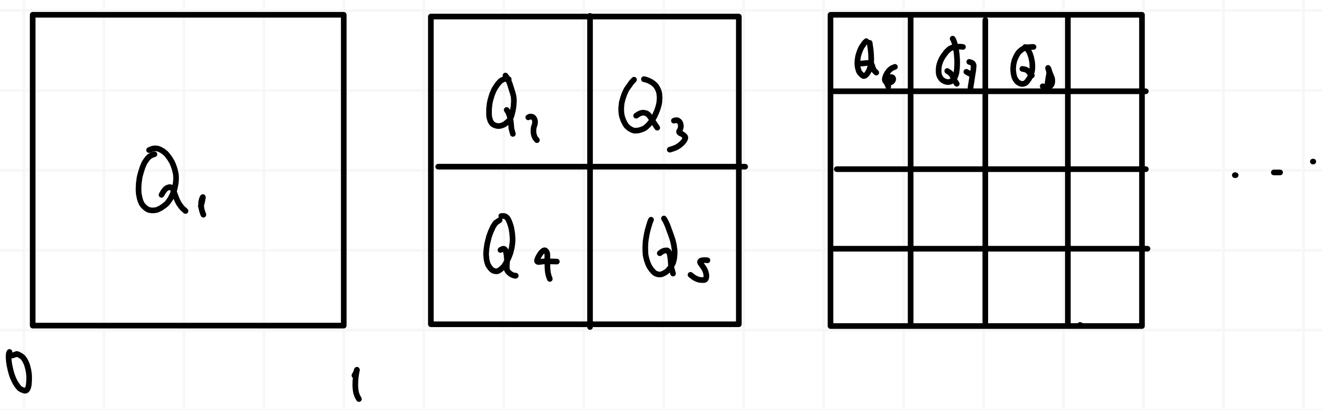
$\Rightarrow$) Suponga $f$ integrable en $\mathbb{R}^n$. Por la densidad de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, $\exists \{\varphi_v\}_{v=1}^{\infty}$ en $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ que converge en promedio a $f$, luego $\{\varphi_v\}_{v=1}^{\infty}$ es de Cauchy c.r. a $N$. Por un corolario anterior $\exists \{\varphi_{\alpha(v)}\}_{v=1}^{\infty} \ni \lim_{v\to\infty} \varphi_{\alpha(v)} = f$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$. Tome así $\{\varphi_{\alpha(v)}\}_{v=1}^{\infty}$.

$\Leftarrow$) Suponga que se cumple la condición. Existe $\{\varphi_v\}_{v=1}^{\infty}$ de Cauchy en $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ que converge a $f$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$. Por ser $L_1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ completo, $\exists g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) \ni \{\varphi_v\}_{v=1}^{\infty}$ converge a $g$ en promedio. Por otro corolario $f = g$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n \Rightarrow f$ integrable en $\mathbb{R}^n$.

q.e.d.

## Teoremas de Convergencia.

La convergencia en promedio no implica convergencia c.t.p. Por ejemplo:




Considere la sucesión $\{\chi_{Q_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Se tiene que:

$$N(\chi_{Q_k}) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{Q_k}$$
$$= m(Q_k)$$

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} N(\chi_{Q_k}) = 0$. Por tanto $\{\chi_{Q_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge en promedio a la función cero. Sea ahora $x \in Q_1$. Por como está dado el conjunto $\lim_{k\to\infty} \chi_{Q_k}(x)$ no existe, i.e $\{\chi_{Q_k}\}_{k=1}^{\infty}$ no converge c.t.p.

Tampoco es cierto que la convergencia c.t.p. implique la convergencia promedio. Por ejemplo $\{v^2\chi_{]0,\frac{1}{v}]}\}_{v=1}^{\infty}$ converge a $\bar{0}$ c.t.p. pero:

$$N(v^2\chi_{]0,\frac{1}{v}]}) = \int_{\mathbb{R}^n} v^2\chi_{]0,\frac{1}{v}]} = v^2\cdot\frac{1}{v} = v$$

$$\therefore \lim_{v\to\infty} N(v^2\chi_{]0,\frac{1}{v}]}) = \infty$$

luego $\{v^2\chi_{]0,\frac{1}{v}]}\}_{v=1}^{\infty}$ no converge en promedio a ninguna función (por no ser acotada).

## Proposición.

Sea $\{f_v\}_{v=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $(L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), N)$ m $\lim_{v\to\infty} f_v = f$ c.t.p en $\mathbb{R}^n$, para alguna función $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida c.t.p. en $\mathbb{R}^n$. Entonces:

i) $f$ es integrable en $\mathbb{R}^n$.

ii) $\lim_{v\to\infty} N(f_v - f) = 0$.

iii) $\lim_{v\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_v = \int_{\mathbb{R}^n} f$.

Dem: Ejercicio.

## Teorema (de Lebesgue de conv. dominada).

Sea $\{f_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ una sucesión en $L_1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. Se supone:

i) $\lim_{\nu\to\infty} f_\nu = f$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$ (para alguna $f$ definida c.t.p. en $\mathbb{R}^n$).

ii) $\exists\, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ ⊓

$$|f_\nu| \leq g \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n,\ \forall\, \nu \in \mathbb{N}.$$

Entonces:

a) $f$ es int. en $\mathbb{R}^n$.

b) $\lim_{\nu\to\infty} N(f_\nu - f) = 0$.

c) $\lim_{\nu\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_\nu = \int_{\mathbb{R}^n} f$.

**Dem:**

a) y c) se siguen de la primera versión. Se pide probar que:

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f_\nu - f| = 0$$

Por a) tenemos que $\lim_{\nu\to\infty} |f_\nu - f| = 0$ c.t.p. y además $|f_\nu - f| \leq |f_\nu| + |f| \leq 2g$, $\forall\, \nu \in \mathbb{N}$ c.t.p en $\mathbb{R}^n$, donde $2g$ es integrable. Por la primera versión:

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f_\nu - f| = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{0} = 0$$

q.e.d.

## Teorema de conv. monótona (de Beppo-Levi).

Sea $\{f_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ una sucesión creciente en $L_1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ ⊓ $\{\int_{\mathbb{R}^n} f_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ es acotada superiormente en $\mathbb{R}$. Entonces:

i) $\lim_{\nu\to\infty} f_\nu = f$ c.t.p para alguna $f$ definida c.t.p. en $\mathbb{R}^n$ y con valores en $\overline{\mathbb{R}}$.

ii) $f$ es integrable en $\mathbb{R}^n$.

iii) $\lim_{\nu\to\infty} N(f_\nu - f) = 0$.

iv) $\lim_{\nu\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_\nu = \int_{\mathbb{R}^n} f$.

**Dem:**

Probaremos que $\{f_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $(L_1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}), N)$. Fije $p>q$. Entonces:

$$N(f_p - f_q) = \int_{\mathbb{R}^n} |f_p - f_q| = \int_{\mathbb{R}^n} f_p - \int_{\mathbb{R}^n} f_q \quad \text{(por ser la sucesión creciente).}$$
$$= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f_p - \int_{\mathbb{R}^n} f_q \right|$$

Como $\{\int_{\mathbb{R}^n} f_v\}_{v=1}^{\infty}$ es creciente y acotada superiormente, es convergente, luego de Cauchy $\Rightarrow$ $\{f_v\}_{v=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Por ser $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ completo, $\exists\ f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ m

$$\lim_{v \to \infty} N(f_v - f) = 0$$

luego:

$$\lim_{v \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_v = \int_{\mathbb{R}^n} f$$

Por el paso de la conv. en promedio a la c.t.p., $\exists\ \{f_{\alpha(v)}\}_{v=1}^{\infty}$ que converge a $f$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$. Puesto que $\{f_v\}_{v=1}^{\infty}$ es creciente, $\{f_v\}_{v=1}^{\infty}$ debe converger a $f$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$. J)

q.e.d.

Corolario.

Con las notaciones e hipótesis del teorema, se concluye que:

$$m(\{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| = \infty\}) = 0$$

Por ser $f$ integrable.

Las conclusiones del teorema siguen siendo válidas si se supone que $\{f_v\}_{v=1}^{\infty}$ es decreciente y que $\{\int_{\mathbb{R}^n} f_v\}_{v=1}^{\infty}$ es acotada inferiormente.

Corolario.

$\{f_v\}_{v=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones integrables no negativas m $\sum_{v=1}^{\infty} \int f_v < \infty$. Entonces:

i) $\sum_{v=1}^{\infty} f_v = f$ c.t.p en $\mathbb{R}^n$ para alguna $f$ definida c.t.p. en $\mathbb{R}^n$.

ii) $f$ integrable en $\mathbb{R}^n$.

iii) $\lim_{m \to \infty} N\left(f - \sum_{v=1}^{m} f_v\right) = 0$.

iv) $\sum_{v=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_v = \int_{\mathbb{R}^n} f$.

## Teorema

Si la serie de término general $f_v$ es absolutamente convergente en el esp. de Banach $(L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), N)$, entonces si $\sum_{v=1}^{\infty} N(f_v) < \infty$:

i) $\sum_{v=1}^{\infty} f_v$ converge absolutamente c.t.p. en $\mathbb{R}^n$. En particular $\sum_{v=1}^{\infty} f_v = f$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$ para alguna función $f$ definida c.t.p. en $\mathbb{R}^n$; $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

ii) $\lim_{m \to \infty} N\left(f - \sum_{v=1}^{m} f_v\right) = 0$.

iii) $\int_{\mathbb{R}^n} f = \sum_{v=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_v$

**Dem:**

La sucesión $\left\{\sum_{v=1}^{m} |f_v|\right\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente de funciones integrables ∋

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{v=1}^{m} |f_v| = \sum_{v=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} |f_v|$$
$$= \sum_{v=1}^{m} N(f_v) < \infty$$

Por Beppo-Levi, existe $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ∋

$$\sum_{v=1}^{\infty} |f_v| = g \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n$$

Como $g$ es integrable, entonces $g(x) < \infty$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$. Luego $\sum_{v=1}^{m} f_v$ es absolutamente convergente c.t.p. en $\mathbb{R}^n$. Como $\mathbb{R}$ es completo, $\sum_{v=1}^{\infty} f_v = f$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$ para alguna $f$ definida c.t.p. en $\mathbb{R}^n$.

Note que:

$$f = \lim_{m \to \infty} \sum_{v=1}^{m} f_v \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n$$

y además:

$$\left|\sum_{v=1}^{m} f_v\right| \leq \sum_{v=1}^{m} |f_v| \leq g, \ \forall m \in \mathbb{N}$$

donde $g$ es integrable. Por tanto, usando el teorema de Lebesgue $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$,

$$\lim_{m \to \infty} N\left(f - \sum_{v=1}^{m} f_v\right) = 0$$

y $\lim_{m \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{v=1}^{m} f_v = \int_{\mathbb{R}^n} f \Rightarrow \lim_{m \to \infty} \sum_{v=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} f_v = \int_{\mathbb{R}^n} f \Rightarrow \sum_{v=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_v = \int_{\mathbb{R}^n} f$.

q.e.d.

Notas:

1) Si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \Rightarrow \lim_{\nu \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \operatorname{sen} \nu x \, dx = 0$. Probar para $f$ escalonada y luego usando la densidad de $\mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, probar el resultado de forma general.

3) Si $\alpha(N)$ m $|x - x_{\alpha(\nu)}| \leq \varepsilon, \forall\ \alpha(\nu) \geq \alpha(N) \Rightarrow \forall\ \nu \in \mathbb{N}$, por ser la suc. creciente:

$$\Rightarrow |x - x_\nu| \leq \varepsilon, \forall\ \nu \geq \alpha(N).$$