# Lista 1 de Ejercicios Lógica Matemática: Lógica Proposicional

Cristo Daniel Alvarado

29 de septiembre de 2024

## 1.1. Ejercicios

**Definición 1.1.1**
Una **conectiva booleana $n$-aria** es una función $B:\{T,F\}^n\to\{T,F\}$.

**Observación 1.1.1**
La idea de la función anterior es que se codifique una tabla de verdad.

**Ejercicio 1.1.1**
Considere la conectiva booleana dada por:

$$\begin{array}{ll} B(T,T,T)=F, & B(F,T,T)=F,\\ B(T,T,F)=F, & B(F,T,F)=T,\\ B(T,F,T)=F, & B(F,F,T)=T,\\ B(T,F,F)=T, & B(F,F,F)=T, \end{array}$$

escriba una fórmula bien formada, utilizando el conjunto de conectivas $\{\neg,\wedge,\vee\}$ que realice esta función booleana.

**Solución:**
Sea $B:\{T,F\}^3\to\{T,F\}$ dada por:

$$B(p_1,p_2,p_3)=(p_1\wedge\neg p_2\wedge\neg p_3)\vee(\neg p_1\wedge p_2\wedge\neg p_3)\vee(\neg p_1\wedge\neg p_2\wedge p_3)\vee(\neg p_1\wedge\neg p_2\wedge\neg p_3)$$

se verifica rápidamente que ésta función $B$ satiface lo deseado. □

**Ejercicio 1.1.2**
Muestre que el conjunto de conectivas $\{\perp,\Rightarrow\}$ es completo (donde $\perp$ es la conectiva 0-aria con valor constante $F$).

**Demostración:**
Basta con ver que si $\varphi$ y $\psi$ son fórmulas, entonces $\neg\varphi$ y $\varphi\Rightarrow\psi$ se pueden expresar con conectivas $\{\perp,\Rightarrow\}$.

En efecto, ya se tiene la implicación. Veamos que:

$$\neg\varphi\equiv\varphi\Rightarrow\perp$$

para un modelo $m$ se tiene que:

| $\varphi$ | $\perp$ | $\varphi\Rightarrow\perp$ | $\neg\varphi$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | $F$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $T$ | $T$ |

es decir, que en cualquier caso $\overline{m}(\neg\varphi)=\overline{m}(\perp\Rightarrow\varphi)$. Se sigue entonces la equivalencia. Como $\{\neg,\Rightarrow\}$ es un conjunto completo de conectivas, también lo debe ser pues $\{\perp,\Rightarrow\}$. ■

**Ejercicio 1.1.3**
Reescriba las siguientes fórmulas en notación polaca a notación usual:

a). $\neg\neg\Rightarrow\vee\wedge p_3p_8\neg p_{10}\neg\vee p_1p_5$.

b). $\wedge\neg\Rightarrow p_3\vee p_4p_1\iff\vee\neg p_{10}\iff p_{15}p_{18}q$.

c). $\wedge \Rightarrow p_3 \wedge p_2 p_1 \neg \vee \wedge p_4 p_5 \neg p_{10}$.

**Solución:**

Veamos que

a). $\neg\neg \Rightarrow \vee \wedge p_3 p_8 \neg p_{10} \neg \vee p_1 p_5 \equiv \neg\neg(((p_3 \wedge p_8) \vee \neg p_{10}) \Rightarrow \neg(p_1 \vee p_5))$.

b). $\wedge\neg \Rightarrow p_3 \vee p_4 p_1 \iff \vee\neg p_{10} \iff p_{15} p_{18} q \equiv (\neg(p_3 \Rightarrow (p_4 \vee p_1))) \wedge ((\neg p_{10} \vee (p_{15} \iff p_{18})) \iff q)$.

c). $\wedge \Rightarrow p_3 \wedge p_2 p_1 \neg \vee \wedge p_4 p_5 \neg p_{10} \equiv (p_3 \Rightarrow (p_2 \vee p_1)) \wedge \neg((p_4 \wedge p_5) \vee \neg p_1 0)$.

□

**Ejercicio 1.1.4**

Demuestre que toda fórmula bien formada (en el formato de clase, es decir, en notación polaca) en la que no aparezca el símbolo $\neg$ debe tener longitud impar.

**Demostración:**

Procederemos por inducción del número de implicaciones $\Rightarrow$, digamos $n$, en la cadena de la fórmula $\varphi$.

- Si $n = 0$, entonces $\varphi \equiv p_1$, siendo $p_1$ una variable. Luego la longitud de $\varphi$ es 1 que es impar.
- Si $n = 1$, entonces $\varphi \equiv\Rightarrow p_1 p_2$, siendo $p_1$ y $p_2$ variables. Luego la longitud de $\varphi$ es 3 que es impar.
- Suponga que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \in [\![0, n]\!]$ se cumple que toda FBF que no contenga a $\neg$ y con una cantidad de implicaciones $k$ tiene longitud impar.

  Sea $\varphi$ una fórmula bien formada que no contenga $\neg$ y que tiene $n+1$ implicaciones, es decir que es de la forma:

  $$\varphi \equiv\Rightarrow \psi_1 \psi_2$$

  donde $\psi_1, \psi_2$ son FBF. Como $\varphi$ tiene $n+1$ implicaciones, entonces debe suceder que $\psi_1$ y $\psi_2$ contengan entre 0 y $n$ implicaciones. Por hipótesis de inducción, tanto $\psi_1$ como $\psi_2$ tienen longitud impar, luego $\varphi$ tiene longitud la suma de estos dos impares (que es un par) más 1 (la primera implicación). Por tanto, $\varphi$ tiene longitud impar.

Por inducción se sigue el resultado. ■

**Ejercicio 1.1.5**

Sea $\varphi$ una fórmula bien formada. Sea $c$ la cantidad de veces que aparece el símbolo $\Rightarrow$ en la fórmula $\varphi$, y sea $s$ la cantidad de veces que aparecen variables en la fórmula $\varphi$ (en donde, si alguna variable aparece varias veces, se cuentan cada una de sus apariciones por separado). Demuestre que

$$s = c + 1$$

**Demostración:**

Procederemos por inducción sobre $c$.

- Para $c = 0$, se tiene que $\varphi$ solo está conformada por variables y por aplicaciones sucesivas de la operación unaria $\neg$, por lo que solamente puede tener una variable. Así que $s = 1$. Se sigue entonces que:
$$s = c + 1$$
- Para $c = 1$, se tiene que $\varphi$ es de la forma $\Rightarrow \psi\chi$, donde $\psi$ y $\chi$ son subfórmulas bien formadas de $\varphi$ que no contienen implicaciones, luego por la parte anterior $\psi$ y $\chi$ contienen una variable, es decir que $\varphi$ contiene dos variables. Luego $s = 2$. Así que:
$$s = c + 1$$
- Suponga que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \leq n$ con $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se tiene que toda fórmula bien formada en la que aparecen $k$ veces el símbolo $\Rightarrow$, se tiene que
$$s = k + 1$$
siendo $s$ el número de variables de la fórmula.

  Suponga que $\varphi$ es una fórmula bien formada en la que el símbolo $\Rightarrow$ aparece $n + 1$ veces, esto es que $c = n + 1$. Entonces, $\varphi$ es de la forma:
$$\Rightarrow \psi\chi$$
donde $\psi$ y $\chi$ son subfórmulas bien formadas de $\varphi$. Sean $c_1$ y $c_2$ el número de veces que aparece el símbolo $\Rightarrow$ en $\psi$ y $\chi$, respectivamente. Se tiene que $0 \leq c_1, c_2 \leq n$, luego por hipótesis indictiva se sigue que
$$s_i = c_i + 1, \quad \forall i = 1, 2$$
donde $s_1$ y $s_2$ es el número de variables que aparecen en $\psi$ y $\chi$, respectivamente. Así pues, el número de variables que aparecen en $\varphi$ es:
$$s = s_1 + s_2$$
y, el número de veces que aparece el símbolo $\Rightarrow$ es la suma de el número de veces que aparece en $\psi$ y $\chi$ más uno. Por lo cual:
$$c = c_1 + c_2 + 1$$
Así pues:
$$\begin{aligned} s &= s_1 + s_2 \\ &= c_1 + 1 + c_2 + 1 \\ &= (c_1 + c_2 + 1) + 1 \\ &= c + 1 \end{aligned}$$

Aplicando inducción se sigue el resultado. ■

**Ejercicio 1.1.6**

Sea $\varphi$ una fórmula bien formada, y suponga que todos los símbolos de la variable que aparecen en $\varphi$ se encuentran entre $p_1, ..., p_n$. Supóngase que $m, m'$ son dos modelos que satisfacen $m(p_i) = m'(p_i)$ para todo $i \in [\![1, n]\!]$. Demuestre que
$$\overline{m}(\varphi) = \overline{m'}(\varphi)$$

**Demostración:**
Procederemos por inducción sobre $\varphi$.

- Si $\varphi$ es una variable, digamos $p_i$ (con $i \in [\![1, n]\!]$), se tiene que:

$$\begin{aligned}\overline{m}(\varphi) &= m(p_i)\\ &= m'(p_i)\\ &= \overline{m'}(\varphi)\end{aligned}$$

- Se verán dos casos:

  - $\varphi$ es de la forma $\neg\psi$ siendo $\psi$ una fórmula bien formada. Se tiene que las variables de $\psi$ son las mismas que las variables de $\varphi$. Suponga que $\overline{m}(\psi) = \overline{m'}(\psi)$, entonces:

$$\begin{aligned}\overline{m}(\varphi) = V \text{ si y sólo si } & \overline{m}(\neg\psi) = V\\ \text{si y sólo si } & \overline{m}(\psi) = F\\ \text{si y sólo si } & \overline{m'}(\psi) = F\\ \text{si y sólo si } & \overline{m'}(\neg\psi) = V\\ \text{si y sólo si } & \overline{m'}(\varphi) = V\end{aligned}$$

  de forma análoga se deduce que $\overline{m}(\varphi) = F$ si y sólo si $\overline{m'}(\varphi) = F$. Así que:

$$\overline{m}(\varphi) = \overline{m'}(\varphi)$$

  - $\varphi$ es de la forma $\Rightarrow \psi\chi$ siendo $\psi$ y $\chi$ subfórmulas bien formadas de $\varphi$. Se tiene en el inciso anterior que $\psi$ y $\chi$ son tienen algunas de las variables $p_1, ..., p_n$. Supongamos que $\overline{m}(\psi) = \overline{m'}(\psi)$ y $\overline{m}(\chi) = \overline{m'}(\chi)$. Entonces:

$$\begin{aligned}\overline{m}(\varphi) = F \text{ si y sólo si } & \overline{m}(\Rightarrow \psi\chi) = F\\ \text{si y sólo si } & \overline{m}(\psi) = F \text{ y } \overline{m}(\chi) = V\\ \text{si y sólo si } & \overline{m'}(\psi) = F \text{ y } \overline{m'}(\chi) = V\\ \text{si y sólo si } & \overline{m'}(\Rightarrow \psi\chi) = F\\ \text{si y sólo si } & \overline{m'}(\varphi) = F\end{aligned}$$

  se sigue entonces que $\overline{m}(\varphi) = \overline{m'}(\varphi)$.

Por induccioń, se sigue que

$$\overline{m}(\varphi) = \overline{m'}(\varphi)$$

■

**Ejercicio 1.1.7**
Demuestre o refute, para un conjunto de fórmulas $\Sigma$, y $\varphi, \psi$ dos fórmulas:

a). Si o bien $\Sigma \models \varphi$, o bien $\Sigma \models \psi$, entonces $\Sigma \models \varphi \wedge \psi$.

b). Si $\Sigma \models \varphi \wedge \psi$ entonces o bien $\Sigma \models \varphi$, o bien $\Sigma \models \psi$.

**Solución:**

De (a): Suponga que $\Sigma = \{p_1\}$. Entonces, $\Sigma \vDash p_1$. No puede suceder que $\Sigma \vDash \neg p_1$. En efecto, si $m$ es un modelo tal que $m \vDash \Sigma$, entonces:

$$m(p_1) = V$$

por tanto:

$$m(\neg p_1) = F$$

luego, $m \nvDash \neg p_1$. Por tanto, $\Sigma \nvDash \neg p_1$. Afirmamos que $\Sigma \nvDash p_1 \wedge \neg p_1$. En efecto, si $m$ es un modelo que satisface $\Sigma$, entonces:

$$\begin{aligned} \overline{m}(p_1 \wedge \neg p_1) &= \overline{m}(\neg(p_1 \Rightarrow \neg\neg p_1)) \\ &= \overline{m}(\neg(p_1 \Rightarrow p_1)) \end{aligned}$$

como $\overline{m}(p_1) = m(p_1) = V$, entonces $\overline{m}(p_1 \Rightarrow p_1) = V$. Así, $\overline{m}(p_1 \wedge \neg p_1) = F$. Así que $\Sigma \nvDash p_1 \wedge \neg p_1$.

De (b): Probaremos que $\Sigma \vDash \varphi \wedge \psi$ implica que $\Sigma \vDash \varphi$ y $\Sigma \vDash \psi$. En efecto, por el Teorema de Completud se tiene que

$$\Sigma \vdash \chi \text{ si y sólo si } \Sigma \vDash \chi$$

para toda fórmula $\chi$. Por tanto, $\Sigma \vdash \varphi \wedge \psi$. Entonces, $\Sigma \vdash \varphi$ y $\Sigma \vdash \psi$ (usando conjunción). Luego, $\Sigma \vDash \varphi$ y $\Sigma \vDash \psi$. $\square$

**Ejercicio 1.1.8** (**Sustitución**)

Suponga que tenemos una lista de fórmulas bien formadas $\varphi_1, ..., \varphi_n, ...$. Quisiéramos definir formalmente la opearción que dada una fórmula bien formada $\psi$, reemplaza cada aparición del símbolo de la variable $p_i$ con la fórmula $\varphi_i$, de modo que se obtiene una nueva fórmula bien formada $\psi^*$. Por ejemplo, si $\psi$ es $p_4 \Rightarrow p_{32}$, entonces $\psi^*$ es $\varphi_4 \Rightarrow \varphi_2$.

a). ¿Cómo definiría formalmente la operación $\psi \mapsto \psi^*$ por recursión?

b). Sea $m$ cualquier modelo, y defina $m'$ como el modelo dado por $m'(p_i) = \overline{m}(\varphi_i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Demuestre que $\overline{m'}(\psi) = \overline{m}(\psi^*)$, para cada fórmula bien formada $\psi$.

c). Concluya que si $\psi$ es una tautología, entonces $\psi^*$ también lo es.

**Demostración:**

De (a): Sea $f : \text{FBF} \to \text{FBF}$ dada como sigue:

- Si $\psi$ es una variable, digamos $p_i$ con $i \in \mathbb{N}$, entonces $f(\psi) = \varphi_i$.
- Para las conectivas:
  - Si $\psi$ es de la forma $\neg\chi$, entonces $f(\psi) = \neg f(\chi)$.
  - Si $\psi$ es de la forma $\Rightarrow \chi\xi$, entonces $f(\psi) == \Rightarrow f(\chi)f(\xi)$.

De tal forma, se define recursivamente el valor de $\psi$, ya que se va descomponiendo en sus subfórmulas en las cuales, cada variable $p_i$ es sustutuída por $\varphi_i$.

De (b): ■

**Ejercicio 1.1.9**

Sea $\Sigma$ un conjunto de fórmulas bien formadas. Definimos la operación $\mathcal{C}(\Sigma)$ mediante

$$\mathcal{C}(\Sigma) = \Sigma \cup \left\{\varphi \middle| \neg\varphi \in \Sigma\right\} \cup \left\{\varphi \middle| \varphi \wedge \psi \in \Sigma \text{ o } \psi \wedge \varphi \in \Sigma \text{ para alguna FBF } \psi\right\}$$

Definimos también recursivamente, para cada conjunto de fórmulas bien formadas $\Sigma$ los conjuntos

$\mathcal{C}^n(\Sigma)$ como sigue:

$$\mathcal{C}^0(\Sigma) = \Sigma$$
$$\mathcal{C}^{n+1}(\Sigma) = \mathcal{C}(\mathcal{C}^n(\Sigma)), \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

y más aún, se define

$$\mathcal{C}^\infty(\Sigma) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^n(\Sigma)$$

Haga lo siguiente:

a). Considere $\Sigma = \{p_1 \wedge \neg p_2, \neg(p_3 \wedge (p_4 \wedge p_5))\}$. Calcule $\mathcal{C}(\Sigma)$ y $\mathcal{C}(\mathcal{C}(\Sigma))$.

b). Si $\Sigma$ es como en el inciso $(a)$, ¿a qué es igual $\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$?

c). Ahora, sea

$$\Sigma = \left\{p_n \wedge \cdots p_n \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$$

¿A qué es igual $\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$?

d). ¿Se te puede ocurrir de alguna manera intuitiva (verbal, corta) de describir a qué es igual $\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$?

**Solución:**
De (a): □

**Ejercicio 1.1.10**
Demuestre que existe una demostración formal de los siguientes argumentos (en su defecto, complete las demostraciones):

**Solución:**

a).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1) | $A$ | $\Rightarrow$ | $(B \wedge \neg C)$ | Premisa |
| 2) | $(B \vee C)$ | $\Rightarrow$ | $D$ | Premisa |
| 3) | $A$ | | | Premisa |
| 4) | $B$ | $\wedge$ | $\neg C$ | 1,3 M.P. |
| 5) | $B$ | | | 4 Simp. |
| 6) | $B$ | $\vee$ | $C$ | 5 Ad. |
| 7) | $D$ | | | 2,6 M.P. |
| | | $\therefore$ | $D$ | |

b).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1) | $A$ | $\Rightarrow$ | $B$ | Premisa |
| 2) | $A$ | $\vee$ | $(B \vee \neg C)$ | Premisa |
| 3) | $\neg B$ | | | Premisa |
| 4) | $\neg A$ | | | 1,2 M.T. |
| 5) | $B$ | $\vee$ | $\neg C$ | 3,2 S.D. |
| 6) | $\neg C$ | | | 5,3 S.D. |
| 7) | $\neg C$ | $\wedge$ | $\neg B$ | 5,3 Conj. |
| | | $\therefore$ | $\neg C \wedge \neg B$ | |

c).

$$
\begin{array}{lrlcll}
 & 1) & A & \Rightarrow & B & \text{Premisa} \\
 & 2) & B & \Rightarrow & C & \text{Premisa} \\
 & 3) & (A \Rightarrow C) & \Rightarrow & (B \Rightarrow D) & \text{Premisa} \\
 & 4) & (A \Rightarrow D) & \Rightarrow & E & \text{Premisa} \\
\mid \longrightarrow & 5) & A & & & \text{Sup.} \\
\mid & 6) & B & & & \text{1,5 M.P.} \\
\mid & 7) & C & & & \text{2,6 M.P.} \\
\hline
 & 8) & A & \Rightarrow & C & \text{5-7 M.D.} \\
 & 9) & B & \Rightarrow & D & \text{3,8 M.P.} \\
\mid \longrightarrow & 10) & A & & & \text{Sup.} \\
\mid & 11) & B & & & \text{1,10 M.P.} \\
\mid & 12) & D & & & \text{9,11 M.P.} \\
\hline
 & 13) & A & \Rightarrow & D & \text{10-12 M.D.} \\
 & 14) & E & & & \text{4,14 M.P.} \\
\hline
 & & & \therefore & E &
\end{array}
$$

d).

$$
\begin{array}{rlcll}
1) & A & \Rightarrow & (B \wedge C) & \text{Premisa} \\
2) & \neg A & \Rightarrow & ((D \Rightarrow E) \wedge (F \Rightarrow H)) & \text{Premisa} \\
3) & (B \wedge C) & \vee & ((\neg A \Rightarrow D) \wedge (\neg A \Rightarrow F)) & \text{Premisa} \\
4) & \neg(B \wedge C) & \wedge & \neg(H \wedge D) & \text{Premisa} \\
5) & \neg(B & \wedge & C) & \text{4 Simp.} \\
6) & \neg A & & & \text{1,5 M.T.} \\
7) & (D \Rightarrow E) & \wedge & (F \Rightarrow H) & \text{2,6 M.P.} \\
8) & D & \Rightarrow & E & \text{7 Simp.} \\
9) & F & \Rightarrow & H & \text{7 Conm. y Simp.} \\
10) & (\neg A \Rightarrow D) & \wedge & (\neg A \Rightarrow F) & \text{3,5 S.D.} \\
11) & \neg A & \Rightarrow & D & \text{10 Simp.} \\
12) & \neg A & \Rightarrow & F & \text{10 Conm. y Simp.} \\
13) & D & & & \text{11,6 M.P.} \\
14) & F & & & \text{12,6 M.P.} \\
15) & E & & & \text{8,13 M.P.} \\
16) & H & & & \text{9,14 M.P.} \\
17) & E & \wedge & H & \text{15,16 Conj.} \\
\hline
 & & \therefore & E \wedge H &
\end{array}
$$

e).

$$
\begin{array}{rlcll}
1) & (A \Rightarrow B) & \wedge & (C \Rightarrow D) & \text{Premisa} \\
2) & (B \Rightarrow E) & \wedge & (D \Rightarrow F) & \text{Premisa} \\
3) & (\neg A \Rightarrow E) & \wedge & (\neg B \Rightarrow D) & \text{Premisa} \\
4) & \neg E & & & \text{Premisa} \\
5) & A & \Rightarrow & B & \text{1 Simp.} \\
6) & C & \Rightarrow & D & \text{1 Conm. y Simp.} \\
7) & B & \Rightarrow & E & \text{2 Simp.} \\
8) & D & \Rightarrow & F & \text{2 Conm. y Simp.} \\
9) & \neg A & \Rightarrow & E & \text{3 Simp.} \\
10) & \neg B & \Rightarrow & D & \text{3 Conm. y Simp.} \\
11) & \neg B & & & \text{7,4 M.T.} \\
12) & \neg B & \vee & \neg C & \text{11 Ad.} \\
13) & \neg C & \vee & \neg B & \text{12 Conm.} \\
\hline
 & & \therefore & \neg C \vee \neg B &
\end{array}
$$

$$\text{f).}\quad \begin{array}{ll|llll r}
 & & 1) & A & \Rightarrow & (B \Rightarrow C) & \text{Premisa} \\
| \longrightarrow & & 2) & B & & & \text{Sup.} \\
|| \longrightarrow & & 3) & A & & & \text{Sup.} \\
|| & & 4) & B & \Rightarrow & C & 1{,}3 \text{ M.P.} \\ \hline
| & & 5) & A & \Rightarrow & C & \text{3-4 M.D.} \\ \hline
 & & 6) & B & \Rightarrow & (A \Rightarrow C) & \text{2-5 M.D.} \\ \hline
 & & & & \therefore & B \Rightarrow (A \Rightarrow C) &
\end{array}$$

$$\text{g).}\quad \begin{array}{lllll}
1) & A & \Rightarrow & (B \wedge C) & \text{Premisa} \\ \hline
 & & \therefore & A \Rightarrow B &
\end{array}$$

$$\text{h).}\quad \begin{array}{lllll}
1) & A & \Rightarrow & (B \wedge C) & \text{Premisa} \\
2) & C & \Rightarrow & (D \wedge E) & \text{Premisa} \\ \hline
 & & \therefore & A \Rightarrow (B \wedge D) &
\end{array}$$

$$\text{i).}\quad \begin{array}{lllll}
1) & A & \Rightarrow & B & \text{Premisa} \\
2) & C & \Rightarrow & B & \text{Premisa} \\ \hline
 & & \therefore & (A \vee C) \Rightarrow B &
\end{array}$$

$$\text{j).}\quad \begin{array}{lllll}
1) & ((A \vee B) \Rightarrow C) & \wedge & (\neg D \Rightarrow (B \wedge \neg C)) & \text{Premisa} \\ \hline
 & & \therefore & A \Rightarrow D &
\end{array}$$

$$\text{k).}\quad \begin{array}{lllll}
1) & (A \vee B) & \Rightarrow & C & \text{Premisa} \\
2) & D & \Rightarrow & (E \wedge F) & \text{Premisa} \\ \hline
 & & \therefore & (A \Rightarrow C) \wedge (D \Rightarrow F) &
\end{array}$$

$$\text{l).}\quad \begin{array}{lllll}
1) & (A \Rightarrow B) & \wedge & (C \Rightarrow D) & \text{Premisa} \\
2) & (B \vee D) & \Rightarrow & ((E \Rightarrow (E \vee F)) \Rightarrow A \wedge C) & \text{Premisa} \\ \hline
 & & \therefore & A \iff C &
\end{array}$$

$$\text{m).}\quad \begin{array}{lllll}
1) & A & \vee & (B \Rightarrow C) & \text{Premisa} \\
2) & (B \Rightarrow (B \wedge C)) & \Rightarrow & (D \vee E) & \text{Premisa} \\
3) & (D \Rightarrow A) & \wedge & (E \Rightarrow F) & \text{Premisa} \\ \hline
 & & \therefore & A \vee F &
\end{array}$$

$$\text{n).}\quad \begin{array}{lllll}
1) & (A \Rightarrow (\neg B \wedge \neg C)) & \wedge & (D \Rightarrow \neg(B \vee C)) & \text{Premisa} \\
2) & (\neg E \Rightarrow A) & \wedge & (\neg F \Rightarrow D) & \text{Premisa} \\
3) & (E \Rightarrow B) & \wedge & (F \Rightarrow C) & \text{Premisa} \\ \hline
 & & \therefore & B \iff C &
\end{array}$$

$$\text{o).}\quad \begin{array}{lllll}
1) & (A \vee B) & \Rightarrow & (C \Rightarrow D) & \text{Premisa} \\
2) & (C \Rightarrow (C \wedge D)) & \Rightarrow & E & \text{Premisa} \\
3) & E & \Rightarrow & ((\neg F \vee \neg\neg F) \Rightarrow (A \wedge F)) & \text{Premisa} \\ \hline
 & & \therefore & A \iff E &
\end{array}$$

$$\text{p).}\quad \begin{array}{ll} \hline
\therefore & (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow C))
\end{array}$$

$$\text{q).}\quad \begin{array}{ll} \hline
\therefore & (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \wedge C) \Rightarrow (B \wedge C))
\end{array}$$

$$\text{r).}\quad \begin{array}{ll} \hline
\therefore & ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A
\end{array}$$

$$\text{s).}\quad \begin{array}{lllll}
1) & A & \vee & (B \wedge C) & \text{Premisa} \\
2) & A & \Rightarrow & C & \text{Premisa} \\ \hline
 & & \therefore & C &
\end{array}$$

t).

$$
\begin{array}{rlcll}
1) & (A \vee B) & \Rightarrow & (C \Rightarrow D) & \text{Premisa} \\
2) & (\neg D \vee E) & \Rightarrow & (A \wedge C) & \text{Premisa} \\
\hline
 & & \therefore & D &
\end{array}
$$

u).

$$
\begin{array}{rlcll}
1) & (A \vee B) & \Rightarrow & (C \wedge D) & \text{Premisa} \\
2) & (C \vee E) & \Rightarrow & (\neg F \wedge H) & \text{Premisa} \\
3) & (F \vee G) & \Rightarrow & (A \wedge I) & \text{Premisa} \\
\hline
 & & \therefore & \neg F &
\end{array}
$$

v).

$$
\begin{array}{c}
\hline
\therefore \quad (A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow C)
\end{array}
$$

w).

$$
\begin{array}{c}
\hline
\therefore \quad A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)
\end{array}
$$

x).

$$
\begin{array}{c}
\hline
\therefore \quad (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C))
\end{array}
$$

y).

$$
\begin{array}{c}
\hline
\therefore \quad (A \wedge B) \Rightarrow B
\end{array}
$$

z).

$$
\begin{array}{c}
\hline
\therefore \quad A \Rightarrow (B \Rightarrow A \wedge B)
\end{array}
$$

$\square$