Formas Diferenciales.

Consideremos a $\mathbb{R}^n$ como variedad diferenciable de dimensión n.

Def. Sea $p \in \mathbb{R}^n$. El espacio tangente a $\mathbb{R}^n$ en p es el conjunto de pares ordenados:

$$T_p\mathbb{R}^n = \{(p,v) \mid v \in \mathbb{R}^n\}$$

Claramente $T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$, $(p,v) \mapsto v$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$. Se definen puntualmente dos operaciones en $T_p\mathbb{R}^n$:

$$(p,v_1) + (p,v_2) := (p, v_1 + v_2), \quad \lambda(p,v_1) = (p, \lambda v_1)$$

$\forall\, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ y $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.

Recordemos ahora propiedades de diferenciabilidad. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $f: U \subseteq \mathbb{R}^n$ función C^1. La derivada:

$$Df(p): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \forall\, p \in U$$

es un mapeo lineal con representación matricial $\left[\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p)\right]_{1 \leq j \leq n}^{1 \leq i \leq m}$. Definimos.

Def. Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ abierto, clase C^1. Ent. se define el diferencial de f en p, como:

$$df_p: T_p\mathbb{R}^n \to T_q\mathbb{R}^m, \quad (p,v) \mapsto (q, Df(p)(v))$$

$\forall\, p \in U$, donde $q = f(p)$.

Claramente, por ser $Df(p)$ lineal, df_p también lo es.

Derivada direccional

Def. Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $C^1(U)$. Se define la derivada direccional de f en p, en la dirección de v, como:

$$\begin{aligned} v_p[f] &= D_v[f] \\ &= \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t)\Big|_{t=0} \end{aligned}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(f(p+tv)\right)\Big|_{t=0}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p = \text{``}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right) f\text{''}$$

donde $v=(v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{R}^n$, $p\in U$ y $\lambda(t):=p+tv$, $\forall\, t\in\,]-\varepsilon,\varepsilon[$ (con $\varepsilon>0$).

Def. Se definen los funciones coordenadas en $\mathbb{R}^n$, como los $x^i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, m

$$\forall\, p=(p_1,\dots,p_n)\in\mathbb{R}^n,\ x^i(p)=p_i$$

Def. Se define el germen de una función con lo siguiente. Definimos el conjunto (donde $p\in\mathbb{R}^n$).

$$\{(f,U)\mid U\subseteq\mathbb{R}^n \text{ vecindad abierta de } p\in U \text{ y } f:U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R} \text{ suave}\}$$

en donde se define una rel. de equiv:[1]

$$(f,U)\sim(g,V) \iff \text{Si } \exists\, W\subseteq U\cap V \text{ abierto m } p\in W \text{ y } f|_W=g|_W$$

En particular, $(f,u)\sim(g,V)\Rightarrow D_v[f]=D_v[g]$.

El conjunto de todos los gérmenes de funciones $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ en p, se denota por:

$$C_p^\infty(\mathbb{R}^n):=\{(f,U)\mid f:U\to\mathbb{R} \text{ es suave, } p\in U\}/\sim$$

La clase de equivalencia con representante (f,U) es llamada el germen de f en p.

Obs) $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ tiene estructura de espacio vectorial y más aún con la multiplicación de func. es un álgebra sobre $\mathbb{R}$.

Def. Sean V,W esp. vect. sobre $\mathbb{R}$. Un mapeo $L:V\to W$ es llamado un operador $\mathbb{R}$-lineal si para toda $r\in\mathbb{R}$ y $\forall\, u,v\in V$:

$$L(u+rv)=L(u)+rL(v)$$

Para cada $(p,v)\in T_p\mathbb{R}^n$, la derivada direccional induce un mapeo

$$D_v: C_p^\infty(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R},\quad f\mapsto D_v[f]=\sum_{i=1}^{n} v_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

Notemos que D_v es un operador lineal, que además satisface la regla de Leibniz:

$$D_v[fg] = D_v[f]\cdot g(p) + f(p)\cdot D_v[g]$$

Nota: Todo operador lineal que satisface la regla de Leibniz es llamado: una derivación.

Def. Cualquier operador $D: C_p^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ (con $p\in\mathbb{R}^n$) que satisface la regla de Leibniz es llamado una derivación en p ó una derivación puntual de $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Se denota al conjunto de todas las derivaciones sobre $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ en p, como:

$$\mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$$

Obs) $\mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$ es un espacio vectorial. Las derivadas direccionales en p son todas derivaciones en p.

Proponemos un mapeo $\phi: T_p(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$, $(v,p) \mapsto D_v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$. En part. ϕ es un mapeo lineal (pues $T_p\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$ son esp. vectoriales), más aún es $\mathbb{R}$-lineal.

Lema.

Si D es una derivación puntual de $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ en p, entonces $D(c) = 0$, $\forall c\in\mathbb{R}$.

Dem:

Sea $c\in\mathbb{R}$, ent.

$$\begin{aligned} D(c) &= D(c\cdot 1) \\ &= cD(1) \end{aligned}$$

y $D(1) = D(1\cdot 1) = 1\cdot D(1) + D(1)\cdot 1 = 2D(1) \Rightarrow D(1) = 0$.

$$\therefore D(c) = 0.$$

$\square$

Teorema (Taylor, L. Tu, Introduction to Manifolds).

Sea $f\in C^\infty(U)$, $U\subseteq\mathbb{R}^n$ abierto con forma de estrella con respecto al punto $p = (p^1,\dots,p^n)\in U$.

Entonces, existen funciones g_i, $i=1,\dots,n$ en U ⊓

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} (x^i - p^i)\, g_i(x), \text{ donde } g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(p + t(x-p))\,dt$$

Dem:

$\forall\, x \in U$, el segmento

$$[x, p] = \{ p + t(x-p) \mid t \in [0,1] \}$$

esta en U (por tener forma de estrella). Entonces $f(p + t(x-p))$ está definido $\forall\, t \in [0,1]$. Aplicando la regla de la cadena

$$\frac{d}{dt}\left(f(p+t(x-p))\right) = \sum_{i=1}^{n} (x^i - p^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p + t(x-p))$$

integrando con respecto a t de 0 a 1:

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{d}{dt} f(p+t(x-p))\,dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} (x^i - p^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p + t(x-p))\,dt$$

$$\Rightarrow f(p + x - p) - f(p) = \sum_{i=1}^{n} (x^i - p^i) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(p + t(x-p))\,dt$$

$$\Rightarrow f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} (x^i - p^i)\, g_i(x)$$

donde $g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(p - t(x-p))\,dt$ (las cuales existen pues $f \in C^\infty(U)$). Lo que prueba el resultado. Más aún, $g^i(p) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\,dt = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$

$\square$

Teorema.

El mapeo lineal $\phi : T_p\mathbb{R}^n \to \mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$ es un isomorfismo de esp. vect.

Dem.

Inyectividad: Sea $D_v \in \operatorname{Ker}(\phi)$, i.e $D_v \equiv 0$ (con $v \in T_p\mathbb{R}^n$). Sean $x^i : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ las func. coordenadas, i.e $p = (p^1, \dots, p^n) \mapsto p^i$, $\forall\, i \in [\![1,n]\!]$. Ent.

$$D_v[x^j] = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial x^i}(x^j) = v_j, \ \forall\, j \in [\![1,n]\!]$$

$$= 0, \ \forall\, j \in [\![1,n]\!]$$

$\therefore\ v \equiv 0$.

Suprayectividad: Sea D una derivación de $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ en p y (f, V) un representante de clase en

$C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$. Podemos elegir a V con forma de estrella (al ser abierto, $\exists\, V_2 \subseteq V$ abierto con forma de estrella). Ent. por el t. ant.

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n (x^i - p^i)\, g_i(x),\ \forall\, x \in V$$

Con $g_i(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$. Ent.

$$\begin{aligned} D[f](x) &= D\left[f(p) + \sum_{i=1}^n (x^i - p^i)\, g_i(x)\right] \\ &= \cancelto{0}{D[f(p)]} + \sum_{i=1}^n D[x^i - p^i]\, g_i(p) + \cancelto{0}{\sum_{i=1}^n (p^i - p^i)}\cdot D[g] \\ &= \sum_{i=1}^n D[x_i]\, g_i(p) \\ &= \sum_{i=1}^n D[x_i]\, \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_p \end{aligned}$$

Tomando $v = (D(x^1), \dots, D(x^n))$, $(p, v) \in T_p\mathbb{R}^n$, se obtiene el resultado. $\square$

Así $T_p\mathbb{R}^n \cong \mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$ y además

$$D_{e_j}[f] = \frac{\partial f}{\partial x_j}(p),\ \forall\, j \in [\![1, n]\!]$$

i.e $e_i \mapsto \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$, $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$. De esta forma, con este isomorfismo:

$$v = \sum_{i=1}^n v_i\, \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p,\ \forall\, (p, v) \in P$$

(haciendo abuso de notación).

Def. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Un campo vectorial V sobre U es una función, la cual asigna a cada punto $p \in U$ un vector $V(p) \in T_p\mathbb{R}^n$, es decir (con el abuso ant.)

$$V : p \in U \mapsto V(p) = \sum_{i=1}^n V_i(p)\, \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$$

EJEMPLOS.

1) Sea $v \in T_p\mathbb{R}^n$ fijo. La func. $p \mapsto (p, v)$ es un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$, llamada el campo vectorial constante.

2) Sea $\{e_i\}_{i=1}^n$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$, ent.

$$U_i : p \mapsto (p, e_i)$$

$\forall\ p \in \mathbb{R}^n$ y $\forall\ i \in [\![1,n]\!]$. $\{U_i\}_{i=1}^n$ es una familia de n esp. vectoriales denominados campo de ...

$\{U_i(p)\}_{i=1}^n$ forman una base de $T_p\mathbb{R}^n$, y se tiene que:

$$U_i(p) = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p,\ \forall\ p \in \mathbb{R}^n.$$

3) Dado un campo vectorial V en $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y una función $f: U \to \mathbb{R}$, denotamos por fV al campo vectorial en U definido por:

$$fV : p \in U \mapsto f(p)V(p) \in T_p\mathbb{R}^n$$

4) Dados V_1, V_2 campos vectoriales en $U \subseteq \mathbb{R}^n$, se define $V_1 + V_2$, como

$$p \mapsto (V_1 + V_2)(p) = V_1(p) + V_2(p) \in T_p\mathbb{R}^n$$

5) Sea $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right\}_{i=1}^n$ una base de $T_p\mathbb{R}^n$, y $g_i: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones. Podemos embedir un campo vectorial sobre U como:

$$V : p \in U \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \sum_{i=1}^n g_i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$$

Def. En el contexto del ejemplo 5), decimos que V es un campo vectorial C^∞ si $g_i \in C^\infty(U)$, $\forall\ i \in [\![1,n]\!]$.

Si $U \subseteq \mathbb{R}^n$, se denota por: $\mathfrak{X}(U)$ al conjunto de campos vectoriales C^∞ (o suaves) sobre U.

Def. Una operación básica sobre $\mathfrak{X}(U)$ es la diferencial de Lie de la sig. manera. Si $f \in C^1(U)$, se define $L_V f$ como la función sobre U cuyo valor en $p \in U$ está dado por:

$$L_V f(p) = Df(p)(v)$$

donde $V(p) = (p, v)$.

EJEMPLOS.

1) Si $V(p) = \sum_{i=1}^n g_i(p)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$, ent.

$$L_V f(p) = \sum_{i=1}^n g_i(p)\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p = V(p)[f]$$

Lema.

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $V \in \mathfrak{X}(U)$ y $f_1, f_2 \in C^1(U)$. Ent.

$$L_V(f_1 \cdot f_2) = L_V(f_1) \cdot f_2 + f_1 \cdot L_V(f_2).$$

Dem.

Es inmediata.

$\square$

Def. Sea $p \in \mathbb{R}^n$. El espacio cotangente a $\mathbb{R}^n$ en p es el esp. vect. dual:

$$T_p^* \mathbb{R}^n := (T_p \mathbb{R}^n)^*$$

$$= \{\omega : T_p \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid \omega \text{ es lineal}\}$$

Def. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Una 1-forma en U, es una función que asigna a cada $p \in U$ un funcional lineal $\omega_p \in T_p^* \mathbb{R}^n$, i.e

$$\omega : p \in U \mapsto \omega(p) = \omega_p \in T_p^* \mathbb{R}^n$$

i.e una 1-forma es un campo de funcionales lineales en U.

EJEMPLOS.

1) Sea $f : U \to \mathbb{R}$ función de clase $C^1(U)$. Para $p \in U$, definimos con $q = f(p)$

$$df_p : T_p U \to T_q \mathbb{R}$$

con $T_q \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$, $(q, v) \mapsto v$. Ent, podemos identificar que

$$df_p : T_p U \cong T_p \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

donde df_p es un funcional lineal, i.e $df_p \in T_p^* \mathbb{R}^n$, ent. el mapeo

$$df : U \to T_p^* \mathbb{R}^n, \quad p \in U \mapsto df_p \in T_p^* \mathbb{R}^n$$

i.e, df es una 1-forma en U.

2) Sea ω una 1-forma y $\phi : U \to \mathbb{R}$ una función. Se define la multiplicación de una 1-forma por una función escalar, por:

$$\phi\omega : p \in U \mapsto \phi(p)\omega_p \in T_p^* \mathbb{R}^n$$

3) Dadas ω_1, ω_2 1-formas sobre U, se define puntualmente su suma $\omega_1 + \omega_2$, por:

$$\omega_1 + \omega_2 : p \in U \mapsto \omega_{1p} + \omega_{2p} \in T_p^* \mathbb{R}^n$$

4) Sean $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \right\}_{i=1}^n$ base de $T_p\mathbb{R}^n$, con $x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ las func. coordenadas. Sabemos que $(dx_i)_p \in T_p^* \mathbb{R}^n$, de forma más general. dx_i son 1-formas en $\mathbb{R}^n$.

Notemos que

$$(dx_i)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}(x_i) \right)\Big|_p$$

$$= \delta_{ij}$$

pues $(dx_i)_p : T_p\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \in T_p\mathbb{R}^n$, $\forall\, i,j \in [\![1,n]\!]$, $\forall\, p \in \mathbb{R}^n$. Por tanto, $\{(dx_i)_p\}_{i=1}^n$ es base de $T_p^* \mathbb{R}^n$ más aún, si ω es una 1-forma, ent.

$$\omega_p = \sum_{i=1}^n f_i(p)(dx_i)_p \,,\quad f_i(p) \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \sum_{i=1}^n f_i\, dx_i$$

donde $f_i : U \to \mathbb{R}$, $p \mapsto f_i(p)$.

Def. En el contexto de 4), decimos que ω es una 1-forma diferenciable (o suave) en U, si las funciones $f_i : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son func. de clase C^∞ en U.

Se denota al conjunto de 1-formas diferenciables sobre U como

$$\Omega^1(U)$$

Lema.

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $f : U \to \mathbb{R}$ m $f \in C^\infty(U)$. Ent.

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Sea $V \in \mathcal{X}(U)$, $w \in \Omega^1(U)$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Se define su producto interior

$$i_V w$$

de manera puntual. Para $p \in U$:

$$V(p) \in T_p\mathbb{R}^n \quad y \quad w_p \in (T_p\mathbb{R}^n)^*$$

$$i_{V(p)} w_p = w_p(V(p))$$

Si $V(p) = \sum_{i=1}^n g_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$ y $w_p = \sum_{i=1}^n f_i(p) dx_i$, entonces:

$$w_p(V(p)) = \sum_{i=1}^n f_i(p) g_i(p)$$

$$\Rightarrow i_V w = \sum_{i=1}^n f_i g_i$$

donde si V y w son C^∞, $i_V w$ tambien lo es. Además, notemos que si $\phi \in C^\infty(U)$, entonces:

$$d\phi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\Rightarrow i_V d\phi = \sum_{j=1}^n g_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = L_V \phi.$$

Curvas Integrales y Campos Vectoriales.

Def. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y V un campo vectorial en U. Una curva C^1 $r : (a,b) \to U$ es una *curva integral* de V si $\forall\, t \in (a,b)$ tenemos

$$V(r(t)) = \left(r(t), \frac{dr}{dt}(t)\right)$$

Obs) Si $V(p) = \sum_{i=1}^n g_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$, $\forall\, p \in U$, ent.

$$V(p) = \left(p, \sum_{i=1}^n g_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right)$$

si $r : (a,b) \to U$:

$$r'(t)_{r(t)} = \left(r(t), \sum_{i=1}^n \frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right)$$

por tanto, si $V(r(t)) = \left(r(t), \sum_{i=1}^n g_i(r(t)) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right)$. Al ser r curva integral

$$\Rightarrow \frac{dx_i}{dt} = g_i(x_1, \ldots, x_n), \; \forall\, i \in [\![1,n]\!]$$

los cuales son sistemas de EDO's, el cuál es autónomo.

Teorema (existencia de curvas integrales).

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y V un campo vectorial en U. Dado un punto $p_0 \in U$ y $a \in \mathbb{R}$, existe un intervalo $I = (a-T, a+T)$, una vecindad U_0 de p_0 en U, y para cada $p \in U_0$ una curva integral $r_p : I \to U$ para V $\ni$ $r_p(a) = p$.

Teorema (Unicidad de curvas integrales).

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y V un campo vectorial sobre U. Para $i = 1, 2$, sea $r_i : I_i \to U$ curvas integrales para V. Si $a \in I_1 \cap I_2$ y $r_1(a) = r_2(a)$ ent. $r_1|_{I_1 \cap I_2} = r_2|_{I_1 \cap I_2}$, y la curva $r : I_1 \cup I_2 \to U$ definida por:

$$r(t) := \begin{cases} r_1(t), & t \in I_1. \\ r_2(t), & t \in I_2. \end{cases}$$

es una curva integral para V.

Teorema (dependencia de la suavidad en la inf. inicial).

Sea $V \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos. Sea V un campo vectorial clase C^∞ en V, $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, $a \in I$ y $h : V \times I \to U$ una función con los sig. propiedades:

i) $h(p, a) = p$.

ii) $\forall\, p \in V$ tenemos que la curva

$$r_p : I \to U, \quad r_p(t) := h(p, t)$$

es una curva integral de V.

Ent. h es un mapeo de clase C^∞.

Teorema.

Sean $I = (a, b)$ y para $c \in \mathbb{R}$, sea $I_c = (a-c, b-c)$. Ent. si $r : I \to U$ es una curva integral, ent. la curva reparametrizada

$$r_c : I_c \to U,\ r_c(t) := r(t+c)$$

es una curva integral.

Recordamos que una función $\phi : U \to \mathbb{R}$ C^1 es una integral del sistema

$$\frac{dr}{dt}(t) = \phi(r(t)).$$

Si para cada curva integral $r(t)$, la función $t \mapsto \phi(r(t))$ es constante. Esto es verdadero si y sólo si $\forall t$:

$$0 = \frac{d}{dt}\phi(r(t)) = (D\phi)_{r(t)}\left(\frac{dr}{dt}\right) = (D\phi)_{r(t)}(V)$$

donde $V(p) = (p,v)$.

Teorema.

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $\phi \in C^1(U)$. Ent. ϕ es una integral de

$$\frac{dr}{dt}(t) = \phi(r(t))$$

(con $r(t)$ curva integral), si y sólo si $L_V \phi = 0$.

Dem.

Si $r(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, tenemos ent. que:

$$\begin{aligned} L_V \phi = V[\phi] &= \frac{d}{dt}(\phi \circ r)(t) \\ &= \frac{d}{dt}\phi(r(t)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt}(t) \end{aligned}$$

donde $r'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{dx_i}{dt}(t) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$, y $V = (r(t), r'(t)) = \left(r(t), \sum_{i=1}^{n} \frac{dx_i}{dt}(t) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\right)$.

Si ϕ es una integral del sistema, ent.

$$\frac{d}{dt}\phi(r(t)) = L_V \phi$$

$\square$

Def. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $V \in \mathfrak{X}(U)$. Se dice que V es **completo** si existe una curva integral $\gamma: \mathbb{R} \to U$ con $\gamma(0)=p$, es decir que $\forall\, p \in U$ existe una curva integral que comienza en p y existe $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

Def. Una curva integral $\gamma: [0,b) \to U$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto con $\gamma(0)=p$ es llamada **maximal** si esta no puede ser extendida a un intervalo $[0,b')$ donde $b' > b$.

Tales curvas pueden ser de la forma:

1) $b = \infty$.

2) $|\gamma(t)| \to \infty$ cuando $t \to b$.

3) El conjunto límite de $\{\gamma(t) \mid 0 \leq t < b\}$ contiene puntos en la frontera de U.

Lema.

Los escenarios 2) y 3) no pueden suceder si existe una función C^1 propia $\phi: U \to \mathbb{R}$ m $L_\gamma \phi = 0$.

Teorema.

Suponga que existe una función propia ϕ clase C^1 $\ni$ $L_V \phi = 0$. Ent. el campo vectorial V es completo.

Ejemplos.

1) Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto. Tomemos el campo vectorial V dado como sigue:

$$V(x,y) = x^3 \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in U.$$

determinamos las EDO de las curvas integrales. Sea $r: \mathbb{R} \to U$,

$$r(t) = (x(t), y(t))$$

Para encont. las cur. int. queremos que:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -y \quad y \quad \frac{dy(t)}{dt} = x^3$$

$$\Rightarrow -\frac{dx}{y} = dt \quad y \quad \frac{dy}{x^3} = dt$$

de aquí determinamos la ec. de las características:

$$-\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x^3}$$

$$\Rightarrow x^3 dx + y\, dy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{2} = c$$

$$\Rightarrow x^4 + 2y = c$$

tomemos $\phi(x,y) = 2y + x^4$. La sol de la EDO será $u(x,y) = \varphi(\phi(x,y))$ con φ de clase $C^1(\mathbb{R})$.

Existe otra hipótesis sobre V que excluye los casos

2) $|r(t)| \to \infty$ cuando $t \to b$.

3) Conjunto límite de $\{r(t) \mid 0 \leq t < b\}$ contiene puntos sobre la frontera de U, ∂U.

Def. El **soporte de V** es el conjunto

$$\operatorname{Supp}(V) = \overline{\{q \in U \mid V(q) \neq 0\}}$$

Si $\operatorname{supp}(V)$ es compacto, se dice que V tiene soporte compacto.

Teorema.

Si un campo vect. V tiene soporte compacto, ent. V es completo.

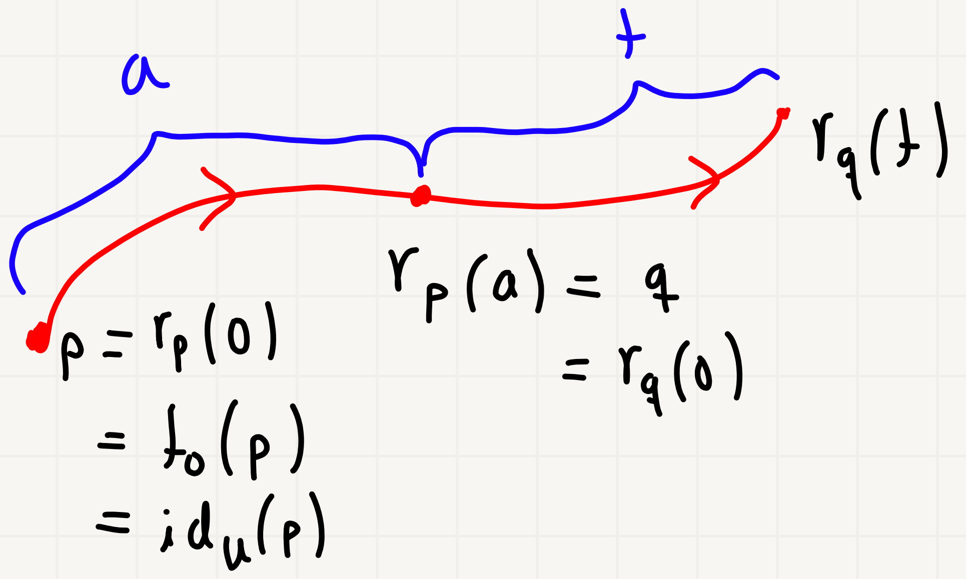
Obs) Si el campo vectorial V es completo, ent. para todo $p \in U$, existe una curva integral $r_p : \mathbb{R} \to U$ con $r_p(0) = p$.

En este caso, es posible definir un mapeo $\phi_t : U \to U$ tal que

$$p \mapsto \phi_t(p) = r_p(t)$$

En part. si $V \in \mathfrak{X}(U)$ entonces $\phi_t \in C^\infty(U)$ (por uno de los teoremas de ec. dif.), $\forall t \in \mathbb{R}$.

Además $\phi_0(p) = r_p(0) = p = id_U(p)$, $\forall p \in U$. De esta forma, con la composición es grupo. En efecto, veamos que en el diagrama de la izq.



$$r_q(t) = r_p(t+a)$$

ent. r_p y r_q son curvas integrales de V. Ent.

$$\phi_t(q) = \phi_{t+a}(p)$$

$$\Rightarrow \phi_t(\phi_a(p)) = \phi_{t+a}(p)$$

$$\Rightarrow \phi_t \circ \phi_a(p) = \phi_{t+a}(p), \ \forall p \in U.$$

$$\therefore \phi_t \circ \phi_a = \phi_{t+a}$$

la expresión ant. está definida sólo cuando ϕ_t, ϕ_a y ϕ_{t+a} están def. En general esto sólo se cumple cuando el campo V es completo localmente.

Si la expresión es válida $\forall a, t \in \mathbb{R}$, ent.

$$\phi_t \circ \phi_{-t} = id_U = \phi_0$$

Por lo cual $\phi_t^{-1} = \phi_{-t}$. Si $V \in \mathfrak{X}(U)$ ent. ϕ_t es difeomorfismo C^∞, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Def. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $W \subseteq \mathbb{R}^m$ abiertos y sea $f : U \to W$ mapeo suave. Si $V \in \mathfrak{X}(U)$ y $W \in \mathfrak{X}(W)$, se dice que V y W están *f-relacionados* si $\forall p \in U$ se cumple que

$$df_p(V(p)) = W(f(p))$$

Obs) En gral. hay problemas si f no es inyectiva.

Sean $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=1}^{n}$ base de T_pU y $\{\frac{\partial}{\partial y^j}\}_{j=1}^{m}$ base de $T_{f(p)}W$. Ent.

$$V=\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x^i}, \text{ con } v_i \in C^k(U).$$

$$W=\sum_{j=1}^{m} w_j \frac{\partial}{\partial y^j}, \text{ con } w_j \in C^k(W).$$

Recordemos que $df_p: T_pU \to T_{f(p)}W$, $(p,v) \mapsto (f(p), Df_p(v))$, donde

$$[Df_p]_{ij} = \frac{\partial f_j}{\partial x^i}\Big|_p, \forall\, i\in[\![1,n]\!],\ j\in[\![1,m]\!].$$

Ent.

$$\begin{aligned} df_p(V(p)) &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\Big|_p v_i(p) \frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_{f(p)} \\ &= W(f(p)) \\ &= \sum_{j=1}^{m} w_j(f(p)) \frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_{f(p)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\Big|_p v_i(p) = w_j(f(p)), \forall\, j \in [\![1,m]\!]. \quad \dots (1)$$

Si $n=m$ y además f es un difeomorfismo, la formula (1) define un C^∞ campo vect. sobre W, i.e

$$W=\sum_{j=1}^{n} w_j \frac{\partial}{\partial y_j}$$

es el campo vect. definido por:

$$W=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x^i} v_i\right)\circ f^{-1}$$

Teorema.

Si $f: U \xrightarrow{\sim} W$ es un dif. C^∞ y $V \in \mathfrak{X}(U)$, ent. existe un único campo vectorial suave $W \in \mathfrak{X}(W)$ tq V y W están f-relacionados.

Dem.

Es inmediato de la obs. ant.

$\square$

Def. En el sentido del teorema ant. se denota al campo W por $f_* V$ y es llamado el **push forward de V por f.**

Teorema.

Sean $U_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$, $i=1,2$ abiertos, V_i campos vectoriales de U_i y $f: U_1 \to U_2$ mapeo C^∞.
Si V_1 y V_2 están f-relacionados, toda curva integral

$$r: I \subseteq \mathbb{R} \to U_1$$

de V_1 es mapeada por f en una curva integral $f \circ r: I \to U_2$ de V_2.

Dem.

Sea $p \in U_1$, ent. V_1 y V_2 f-relacionados, significa:

$$df_p(V_1(p)) = V_2(f(p))$$

r es curva integral de V_1, i.e

$$\frac{dr}{dt} = g(r(t))$$

dónde $g = (g_1, \dots, g_{n_1})$ y $V_1 = \sum_{i=1}^{n_1} g_i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Probaremos que $f \circ r$ es curva int. de V_2.

$$V_2 = \sum_{j=1}^{n_2} V_{2j} \frac{\partial}{\partial y_j}$$

Con $V_{2j}(q) = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{\partial f_j}{\partial x^i} g_i \big|_p$, donde $p \in U_1$ es $\ni$ $q = f(p)$, $\forall\, j \in [1, n_2]$. Por tanto:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(f \circ r)(t) &= df_p\left(\frac{d}{dt}(r(t))\right), \quad p = r(t) \\
&= df_p(g(r(t))) \\
&= df_p(V_1(p)) \\
&= V_2(f(p)) \\
&= V_2(f \circ r(t)). \ \forall\, t \in I.
\end{aligned}$$

i.e $f \circ r$ es curva integral de V_2.

$\square$

Corolario.

Con las condiciones del t. ant. suponga que V_1 y V_2 son completos. Sean

$$(f_{i,t})_{t \in \mathbb{R}}: U_i \xrightarrow{\sim} U_i$$

grupos 1-paramétricos de difeomorfismos generados por V_i. Ent.

$$f \circ f_{1,t} = f_{2,t} \circ f$$

Dem.

Lo que quiere decir es que el diagrama de abajo es conmutativo. Sea $t \in \mathbb{R}$ y $p \in U_1$. Ent.

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow[\sim]{f_{1,t}} & U_1 \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ U_2 & \xrightarrow[\sim]{f_{2,t}} & U_2 \end{array}$$

$$f_{1,t}(p) = r_p(t)$$
$$\Rightarrow f \circ f_{1,t}(p) = f \circ r_p(t)$$
$$= (f \circ r_p)(t)$$
$$= f_{2,t}(f(p))$$
$$= f_{2,t} \circ f\ (p)$$
$$\therefore f \circ f_{1,t} = f_{2,t} \circ f$$

$\square$

Obs) La f-relación entre campos vectoriales puede ser expresada en términos de la diferencial de Lie.

Para $\phi \in C^\infty(U_2) = \Omega^0(U_2)$. Note que $\phi \circ f \in C^\infty(U_1) = \Omega^0(U_1)$, llamado pullback de 0-formas:

$$f^* \phi = \phi \circ f \in C^\infty(U_1)$$
$$f^* : \Omega^0(U_2) \longrightarrow \Omega^1(U_1)$$

Retomando la obs. Sea V_2 campo vectorial sobre U_2. Ent. si $\phi \in C^\infty(U_1)$. Se probará:

$$f^* L_{V_2} \phi = L_{V_1} f^* \phi$$

En efecto, veamos que:

$$L_{V_1} f^* \phi(p) = L_{V_1}(\phi \circ f)(p)$$
$$= V_1[\phi \circ f](p)$$
$$= \frac{d}{dt}(\phi \circ f \circ r_1)(t), \quad r_1 \text{ curva int. de } V_1, \text{ con } p = r(t).$$
$$= \frac{d}{dt}(\phi \circ r_2)(t), \quad r_2 \text{ curva int. de } V_2 \text{ con } f(p) = r_2(t)$$

$$= L_{v_2}\phi(f(p))$$
$$= L_{v_2}\phi\circ f(p)$$
$$= f^* L_{v_2}\phi(p)$$

esto. si V_1 y V_2 están f-relacionados.

Teorema.

Para $i=1,2,3$, sean $U_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ abiertos, V_i campos vectoriales sobre U_i, y para $i=1,2$, sea $f_i: U_i \to U_{i+1}$ mapeos $C^\infty(U_i)$. Suponga que V_1 y V_2 están f_1-relacionados y que V_2 y V_3 están f_2-relacionados.

Ent. V_1 y V_3 están $f_2\circ f_1$-relacionados. En part. si f_1 y f_2 son difeomorfismos, ent. se tiene que (tomando $v=V_1$):

$$(f_2\circ f_1)_* v = (f_2)_*\circ(f_1)_* v$$

Dem.

Sea $p\in U$, $q=f_1(p)$ y $r=f_2(q)$. Por hip.

$$df_{1(p)}(V_1(p)) = V_2(f(p)) = V_2(q) \quad \text{y}$$
$$df_{2(q)}(V_2(q)) = V_3(f_2(q)) = V_3(r)$$

Ent.

$$d(f_2\circ f_1)_p(V_1(p)) = (df_{2(q)}\circ df_{1(p)})(V_1(p))$$
$$= df_{2(q)}(df_{1(p)}(V_1(p)))$$
$$= df_{2q}(V_2(q))$$
$$= V_3(r)$$
$$= V_3(f_2\circ f_1(p))$$

así, V_1 y V_3 están $f_2\circ f_1$-relacionados. La otra parte se sigue de forma inmediata. $\square$

Pullback.

Def. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $V \subseteq \mathbb{R}^m$ abiertos, $f: U \to V$ mapeo C^∞. Dada una 1-forma $\mu \in \Omega^1(V)$, veamos que para $p \in U$, $q = f(p) \in V$, ent.

$$\mu(q) = \mu_q : T_q V \to \mathbb{R}$$

Como $df_p : T_p U \to T_q V$, ent. la composición:

$$\mu_q \circ df_p : T_p U \to \mathbb{R}$$

está bien def. y $\mu_q \circ df_p \in T_p^* U$. Se define así el pullback $f^*\mu$ como:

$$\begin{aligned}(f^*\mu)(p) &= (f^*\mu)_p \\ &= \mu_{f(p)} \circ df_p\end{aligned}$$

$\forall p \in U$, i.e $f^* : \Omega^1(V) \to \Omega^1(U)$, $\mu \mapsto f^*\mu$.

Ejemplos.

1) Si $\phi \in C^\infty(V)$, se probó que $d\phi \in \Omega^1(V)$. Tomemos $\mu = d\phi$. Si $f: U \to V$ es C^∞:

$$\begin{aligned}\Rightarrow (f^*\mu)_p &= \mu_{f(p)} \circ df_p \\ &= d\phi_{f(p)} \circ df_p \\ &= d(\phi \circ f)_p \\ &= d(f^*\phi)_p\end{aligned}$$

Con $f^*\phi$ visto como el pullback de una 0-forma.

Teorema.

Si $\omega \in \Omega^1(V)$ es una C^∞ 1-forma, su pullback $f^*\mu \in \Omega^1(U)$ es C^∞.

Dem.

Considere $x_i : U \to \mathbb{R}$ y $y_j : V \to \mathbb{R}$ las func. coordenadas resp. $i \in [\![1, n]\!]$ y $j \in [\![1, m]\!]$. Ent. por una prop. ant. ω se puede escribir como:

$$\omega_q = \sum_{j=1}^{m} \omega_j(q)(dy_j)_q, \ \forall \ q \in V$$

dónde $\omega_j : V \to \mathbb{R}$ son funciones $C^\infty(V)$. Veamos que $\forall p \in U$: 2)

$$(f^*\omega)_p = \omega_{f(p)} \circ df_p$$
$$= \left(\sum_{j=1}^{m} \omega_j(f(p))(dy_j)_{f(p)}\right) \circ df_p$$
$$= \sum_{j=1}^{m} [\omega_j(f(p))(dy_j)_{f(p)}] \circ df_p$$

Sea $j \in [\![1,m]\!]$. Ent.

$$[\omega_j(f(p))\cdot(dy_j)_{f(p)}] \circ df_p = (\omega_j \circ f)(p) \cdot (dy_j)_{f(p)} \circ df_p$$
$$= (\omega_j \circ f)(p) \cdot d(y_j \circ f)_{f(p)}$$
$$= (f^*\omega_j)(p) \cdot d(y_j \circ f)_{f(p)}$$
$$= (f^*\omega_j)(p) \cdot (df_j)_p$$

dónde $f = (f_1, \dots, f_m)$, y por otra prop.

$$(df_j)_p = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x^i}\Big|_p dx_i$$

Por tanto:

$$(f^*\omega)_p = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} (f^*\omega_j)(p) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x^i}(p)\, dx_i$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} (f^*\omega_j \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x^i})\right)(p)\, dx_i$$

dónde $p \mapsto \sum_{j=1}^{m} (f^*\omega_j \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x^i})(p)$ son func. $C^\infty(U)$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$. Así $f^*\omega$ es una 1-forma diferenciable.

$\square$

K-FORMAS DIFERENCIALES.

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $p \in U$. Recordemos que:

$$\Lambda^0(T_p^*\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}$$
$$\Lambda^1(T_p^*\mathbb{R}^n) \cong T_p^*\mathbb{R}^n$$

por tanto, podemos ver a los 0-formas y 1-formas como:

$$\Omega^0(\mathbb{R}^n) = \{\phi : p\in\mathbb{R}^n \mapsto \phi(p)\in\mathbb{R}\cong\Lambda^0(T_p^*\mathbb{R}^n) \mid \phi \text{ es suave}\}$$
$$= C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

$$\Omega^1(\mathbb{R}^n) = \{\omega^1 : p\in\mathbb{R}^n \mapsto \omega_p\in T_p^*\mathbb{R}^n\cong\Lambda^1(T_p^*\mathbb{R}^n) \mid \text{tiene func. comp. suaves}\}$$

definiremos entonces:

$$\Omega^k(\mathbb{R}^n) := \{\omega^k : p\in\mathbb{R}^n \mapsto \omega_p^k\in\Lambda^k(T_p^*\mathbb{R}^n) \mid \text{el mapeo es "suave"}\}$$

Si $I=(i_1, i_2 \dots i_k)$ es un multi-índice de n de longitud K est. creciente y $\{dx_i\}_{i=1}^n$ es base de $T_p^*\mathbb{R}^n$, ent. se ve que:

$$dx_I := dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}$$

son una base de $\Omega^k(\mathbb{R}^n)$. De esta forma, una K-forma en U es una func. de la forma:

$$\omega^k = \sum_{I \text{ est. crec.}} \omega_I\, dx_I \quad , \omega_I\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Obs). Considere $\Omega^k(\mathbb{R}^n)$:

i) Si $f\in C^\infty(U)$, $\omega\in\Omega^k(U)$, ent $f\omega\in\Omega^k(U)$

$$f\omega : p\in U \mapsto f(p)\,\omega_p$$

ii) Si $\omega_1, \omega_2\in\Omega^k(U)$ ent. $\omega_1+\omega_2\in\Omega^k(U)$, $p\in U\mapsto(\omega_1)_p+(\omega_2)_p$.

iii) $\omega_1\in\Omega^{k_1}(U)$ y $\omega_2\in\Omega^{k_2}(U)$ ent. $\omega_1\wedge\omega_2\in\Omega^{k_1+k_2}(U)$, $p\in U\mapsto(\omega_1)_p\wedge(\omega_2)_p$.

iv) $\Omega^k(U)$ es esp. vect.

Álgebra de formas.

$$\Omega^* = \bigoplus_{i=1}^{k}\Omega^k(\mathbb{R}^n)$$

llamada Ω^*, que es el álgebra generada sobre $\mathbb{R}$ por dx_i con las rel.

$$dx_i\wedge dx_i = 0$$

$$dx_i\wedge dx_j = -dx_j\wedge dx_i, \quad \forall\ i,j\in[\![1,n]\!],\ i\neq j.$$

Como esp. vect. su base es $\{1, dx_i, \underset{i<j}{dx_i\wedge dx_j}, \dots, \underset{i_1<i_2<\dots<i_k}{dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}}, \dots, dx_1\wedge\dots\wedge dx_n\}$, en part.

Las C^∞-formas diferenciables sobre $\mathbb{R}^n$ son elementos de

$$\Omega^*(\mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^n) \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \Omega^*$$

Nota: No pensar tanto en lo de arriba.

Diferenciación Exterior.

Sea $f \in C^\infty(U)$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Recordemos que:

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \in \Omega^1(U)$$

podemos ver al operador $d: \Omega^0(U) \to \Omega^1(U)$. Nuesto idea es extender este operador y definirlo de tal forma que:

i) $d: \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$, $\forall\, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

ii) Si $f \in \Omega^0(U)$, ent.

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

iii) Si $\omega \in \Omega^k(U)$, ent.

$$\omega = \sum_I \omega_I \, dx_I, \quad \omega_I \in C^\infty(U)$$

$$\Rightarrow d\omega = \sum_I d\omega_I \wedge dx_I \in \Omega^{k+1}(U).$$

Primero, asumiremos la existencia de tal operador, veremos sus propiedades (que nos gustaría que tuviera) y luego probaremos existencia y unicidad.

Proposición

i) Sean $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^k(U)$, ent. $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$.

ii) Para $\omega_1 \in \Omega^k(U)$ y $\omega_2 \in \Omega^l(U)$:

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2$$

iii) Para $\omega \in \Omega^k(U)$, $d(d\omega) = 0$.

Dem.

De (i): Por la parte ant. se sabe que:

$$\omega_1 = \sum_I \omega_{1I}\, dx_I,\ \omega_2 = \sum_I \omega_{2I}\, dx_I,\ \omega_{1I}, \omega_{2I} \in C^\infty(U),\ \forall\, I.$$

Ent.

$$d(\omega_1 + \omega_2) = d\left(\sum_I (\omega_{1I} + \omega_{2I})\, dx_I\right)$$
$$= \sum_I d(\omega_{1I} + \omega_{2I}) \wedge dx_I$$

y $d(\omega_{1I} + \omega_{2I}) = d\omega_{1I} + d\omega_{2I}$, pues $\omega_{1I}, \omega_{2I} \in C^\infty(U)$, $\forall\, I$. Luego

$$= \sum_I d\omega_{1I} \wedge dx_I + \sum_I d\omega_{2I} \wedge dx_I$$
$$= d\omega_1 + d\omega_2$$

De (ii):

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \sum_{I,J} \omega_{1I}\omega_{2J}\, dx_I \wedge dx_J$$
$$\Rightarrow d(\omega_1 \wedge \omega_2) = \sum_{I,J} d(\omega_{1I}\, \omega_{2J}) \wedge dx_I \wedge dx_J$$
$$= \sum_{I,J} [d\omega_{1I}\, \omega_{2J} + \omega_{1I}\, d\omega_{2J}] \wedge dx_I \wedge dx_J$$
$$= \sum_{I,J} \omega_{2J}\, d\omega_{1I} \wedge dx_I \wedge dx_J + \sum_{I,J} \omega_{1I}\, d\omega_{2J} \wedge dx_I \wedge dx_J$$
$$= \sum_{I,J} (d\omega_{1I} \wedge dx_I) \wedge (\omega_{2J}\, dx_J) + (-1)^k \sum_{I,J} (\omega_{1I}\, dx_I) \wedge (d\omega_{2J} \wedge dx_J)$$
$$= d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2.$$

De (iii): Procederemos por inducción sobre K. Para $K=0$, sea $f \in C^\infty(U) = \Omega^0(U)$, ent.

$$d(df) = d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i\right)$$
$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\, dx_i \wedge dx_j$$

Pero, como $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j \partial x_i}$, $\forall\, i, j \in [\![1, n]\!]$, ent.

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\, dx_i \wedge dx_j$$
$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\, dx_i \wedge dx_j$$
$$\Rightarrow d(df) = 0.$$

En gral, si $\omega \in \Omega^k(U)$, ent.

$$\omega = \sum_I \omega_I\, dx_I$$

$$\Rightarrow d(d\omega) = d\left(\sum_I d\omega_I \wedge dx_I\right)$$

$$= \sum_I d(d\omega_I \wedge dx_I)$$

$$= \sum_I d^2\omega_I \wedge dx_I + (-1)^1 d\omega_I \wedge d^2 x_I$$

$$= \sum_I (0+0)$$

$$= 0$$

$\square$

Def. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Una $\omega \in \Omega^k(U)$ es llamada **cerrada** si $d\omega = 0$. Y es **exacta** si $\exists\, \mu \in \Omega^{k-1}(U)$ $\ni$ $\omega = d\mu$.

Se probará un lema muy importante.

Lema (ant. de Poincaré).

Si ω es una 1-forma cerrada sobre $U \subseteq \mathbb{R}^n$, ent. para toda $p \in U$, existe una vecindad de p sobre la cual ω es exacta.

Dem.

Antes, notemos que $\forall\, p \in U$ $\exists\, \delta > 0$ $\ni$ $B_\delta(p) \subseteq U$, donde $B_\delta(p)$ tiene forma de estrella.

Sea $f : \bar{U} \to U$, con $\omega \in \Omega^1(U)$. Ent. dada $q \in \bar{U}$ $\ni$ $f(q) = p$:

$$(f^*\omega)_q = \omega_p \circ df_q$$

(donde f es $C^\infty(\bar{U})$, $\bar{U} \subseteq \mathbb{R}^n$). Como ω es cerrada, ent. $d\omega = 0$. Veamos que:

$$d((f^*\omega)_q) = d(\omega_p \circ df_q). \text{ Como}$$

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i\, dx_i$$

$$\Rightarrow \omega_p = \sum_{i=1}^n \omega_i(p)\,(dx_i)_p$$

$$\Rightarrow \omega_p \circ df_q = \sum_{i=1}^n \omega_i(p)\,(dx_i)_p \circ (df_q)$$

$$= \sum_{i=1}^n \omega_i(p)\, d(x_i \circ f)_q$$

$$= \sum_{i=1}^n \omega_i(f(q))\, d(x_i \circ f)_q$$

$$= \dots = f^* d\omega_p$$

Como $\omega \in \Omega^1(U)$ es cerrada, ent. $d\omega = 0$, i.e con $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i$:

$$\Rightarrow d\omega = \sum_{i=1}^n d\omega_i \wedge dx_i$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_i$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i$$

$$= \sum_{i<j}^n \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_j$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}, \ \forall \ i,j \in [\![1,n]\!].$$

Se propone

$$f(x) = \int_0^1 \gamma_x^* \omega$$

$\forall x \in B_\delta(0)$ (trasladando la bola de $p \in U$ a 0). Con $\gamma_x : [0,1] \to B_\delta(0) \cap U$, $t \mapsto xt = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$, donde:

$$\gamma_x^* \omega = \sum_{i=1}^n \omega_i(\gamma_x(t)) \cdot \frac{\partial \gamma_i}{dt} dt$$

$$= \sum_{i=1}^n \omega_i(xt) x_i dt$$

$$\therefore f(x) = \sum_{i=1}^n \int_0^1 \omega_i(xt) x_i dt, \quad \forall x \in B_\delta(0).$$

notemos que:

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

p.d. que $\frac{\partial f}{\partial x_j} = \omega_j$. En efecto:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^n \int_0^1 \omega_i(xt) x_i dt \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \int_0^1 \omega_i(xt) x_i dt \quad \text{(por el t. de der.)}$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\omega_i(xt) \cdot x_i \right) dt$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \left[t \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}(xt) \cdot x_i + \omega_i(xt) \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \right] dt$$

$$= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left[t \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}(xt) x_i \right] + \omega_j(xt) dt$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt} \left(t \omega_j(xt) \right) dt \quad \text{(por el T.F.C.)}.$$

$$= 1 \cdot \omega_j(x) - 0\,\omega_j(0\cdot x)$$
$$= \omega_j(x) \quad \forall\, x \in B_\delta(0)$$
$$\therefore \frac{\partial J}{\partial x_j}(x) = \omega_j(x), \ \forall\, x \in B_\delta(0)$$

así, ω es exacta en $B_\delta(0)$.

$\square$

Producto Interior.

Def. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, V un campo vect. sobre U y $\omega \in \Omega^k(U)$. El producto interior de V con ω es la $(k-1)$-forma $i_V\omega$ sobre U definida por: (puntualmente).

$$p \longmapsto i_{V(p)}\,\omega_p \in \Lambda^{k-1}(T_p^* \mathbb{R}^n).$$

Proposición.

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, V y W esp. vectoriales sobre U, $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \Omega^k(U)$ y $\mu \in \Omega^l(U)$. Ent.

i) $i_V(\omega_1 + \omega_2) = i_V\omega_1 + i_V\omega_2$.

ii) $i_V(\omega \wedge \mu) = i_V\omega \wedge \mu + (-1)^k\, \omega \wedge i_V \mu$.

iii) $i_V(i_W\omega) = -\,i_W(i_V\omega)$.

iv) $i_{V+W}(\omega) = i_V\omega + i_W\omega$.

v) $i_V(i_V(\omega)) = 0$.

vi) Si $\omega = \mu_1 \wedge \dots \wedge \mu_k$, $\mu_i \in \Omega^1(U), \forall\, i \in [\![1,k]\!]$, ent.

$$i_V\omega = \sum_{r=1}^{k} (-1)^{r-1}\, i_V(\mu_r)\, \mu_1 \wedge \dots \wedge \hat{\mu}_r \wedge \dots \wedge \mu_k$$

Def. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, V un campo vect. sobre U y $\omega \in \Omega^k(U)$. La derivada de Lie de ω con respecto a V es la k-forma dada por:

$$L_V\,\omega := i_V(d\omega) + d(i_V\omega)$$
$$= \{i_V, d\}\,\omega.$$

Obs) Si $\omega = \phi \in \Omega^0(U) = C^\infty(U)$, ent. $i_V\omega = i_V\phi = 0$

$$\Rightarrow L_v \omega = i_v(d\omega)$$

Proposición.

Sea $\omega \in \Omega^k(U)$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Ent.

i) $d(L_v \omega) = L_v(d\omega)$.

ii) Si $\mu \in \Omega^s(U)$, ent. $L_v(\omega \wedge \mu) = L_v\omega \wedge \mu + \omega \wedge L_v\mu$.

Dem.

De (i): Observemos que:

$$L_v \omega = d i_v \omega + i_v d\omega$$

$$\Rightarrow d(L_v\omega) = d(d i_v \omega) + d(i_v d\omega)$$

$$= 0 + d(i_v d\omega) + 0$$

$$= (d i_v + i_v d) d\omega$$

$$= L_v(d\omega)$$

De (ii):

$$L_v(\omega \wedge \mu) = (d i_v + i_v d)(\omega \wedge \mu)$$

$$= d(i_v\omega \wedge \mu + (-1)^k \omega \wedge i_v\mu) + i_v(d\omega \wedge \mu + (-1)^k \omega \wedge d\mu)$$

$$= d(i_v\omega) \wedge \mu + \cancel{(-1)^{k-1} i_v\omega \wedge d\mu} + \cancel{(-1)^k d\omega \wedge i_v\mu} + \omega \wedge d(i_v\mu)$$

$$+ i_v(d\omega) \wedge \mu + \cancel{(-1)^{k+1} d\omega \wedge i_v\mu} + \cancel{(-1)^k i_v\omega \wedge d\mu} + \omega \wedge i_v(d\mu)$$

$$= L_v\omega \wedge \mu + \omega \wedge L_v\mu$$

$\square$

Fórmula explícita para $L_v\omega$. Sea $v = \sum_{i=1}^n g_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Si $\omega = \sum_I \omega_I \, dx_I$, ent.

$$L_v(\omega) = L_v\left(\sum_I \omega_I \, dx_I\right)$$

$$= \sum_I L_v(\omega_I \, dx_I)$$

$$= \sum_I L_v(\omega_I \wedge dx_I)$$

$$= \sum_I (L_v \omega_I \wedge dx_I + \omega_I \wedge L_v(dx_I))$$

dónde $L_v \omega_I = v[\omega_I] = \sum_{i=1}^{n} g_i \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i}$ y para el otro término:

$$L_v(dx_I) = L_v(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})$$
$$= \sum_{r=1}^{k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge L_v dx_{i_r} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

y $L_v(dx_{i_r}) = d(L_v x_{i_r}) = d\left(\sum_{i=1}^{n} g_i \frac{\partial x_{i_r}}{\partial x_i}\right) = d(g_{i_r}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_{i_r}}{\partial x_i} dx_i$, así:

$$= \sum_{r=1}^{k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_{i_r}}{\partial x_i} dx_i\right) \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Lema.

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $g_1, \dots, g_n \in C^\infty(U)$ y $v = \sum_{i=1}^{n} g_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathfrak{X}(U)$. Ent.

$$L_v(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_i}\right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

Dem.

Por lo hecho antes:

$$L_v(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = \sum_{r=1}^{n} dx_1 \wedge \dots \wedge L_v(dx_r) \wedge \dots \wedge dx_n$$
$$= \sum_{r=1}^{n} dx_1 \wedge \dots \wedge \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_r}{\partial x_i} dx_i\right) \wedge \dots \wedge dx_n$$
$$= \sum_{r=1}^{n} dx_1 \wedge \dots \wedge \left(\frac{\partial g_r}{\partial x_r} dx_r\right) \wedge \dots \wedge dx_n$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

$\square$

Pullback para K-formas.

Def. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ abiertos y $f: U \to V$ mapeo C^∞. Para $p \in U$, la diferencial de f es:

$$df_p: T_p\mathbb{R}^n \to T_{f(p)}\mathbb{R}^m$$

tenemos el pullback de K-vectores exteriores

$$\Lambda^k(T^*_{f(p)}\mathbb{R}^m)$$

Se define

$$df_p^* = (df_p)^* : \Lambda^k(T_{f(p)}{}^*\mathbb{R}^m) \to \Lambda^k(T_p\mathbb{R}^n)$$
$$\omega_{f(p)} \mapsto (df_p)^* \omega_{f(p)}$$
$$= (f^*\omega)_p$$

Con: $v_1,\dots,v_k \in T_p\mathbb{R}^n$ (def. puntualmente):
$$(f^*\omega)_p(v_1,\dots,v_k) = \omega_{f(p)}(df_p(v_1),\dots, df_p(v_k))$$

El pullback para la K-forma $\omega \in \Omega^k(V)$:
$$f^*\omega : p \in U \mapsto (df_p)^*\omega_p = (f^*\omega)_p$$

Proposición.

i) Si $\phi \in C^\infty(V)$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ abierto, ent.
$$f^*\phi = \phi \circ f$$

ii) Sea $\phi \in \Omega^0(V)$, $\mu \in \Omega^1(V)$ m $\mu = d\phi$ (μ es exacta). Ent.
$$f^* d\phi = df^*\phi$$

iii) $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^k(V)$. ent.
$$f^*(\omega_1 + \omega_2) = f^*\omega_1 + f^*\omega_2$$

iv) Sea $\omega_1 \in \Omega^k(V)$, $\omega_2 \in \Omega^l(V)$, ent.
$$f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = f^*\omega_1 \wedge f^*\omega_2$$

v) $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$, $W \subseteq \mathbb{R}^p$ abiertos, $f \in C^\infty(U)$ y $g \in C^\infty(V)$. Ent.
$$(g \circ f)^*(\omega) = f^*(g^*\omega)$$

Dem.

De (iv): Para $p \in U$:
$$f^*(\omega_1 \wedge \omega_2)_p(v_1,\dots,v_{k+l}) = (\omega_1 \wedge \omega_2)_p(df_p(v_1),\dots, df_p(v_{k+l}))$$
$$= (\omega_1)_p \wedge (\omega_2)_p\,(df_p(v_1),\dots, df_p(v_{k+l}))$$
$$= (\omega_1)_p(df_p(v_1),\dots, df_p(v_k)) \cdot (\omega_2)_p(df_p(v_{k+1}),\dots)$$

$$= (f^*\omega_1)_p(v_1,\dots,v_k)\cdot(f^*\omega_2)_p(v_{k+1},\dots,v_{k+l})$$
$$= (f^*\omega_1)_p \wedge (f^*\omega_2)_p(v_1,\dots,v_{k+l})$$
$$= (f^*\omega_1 \wedge f^*\omega_2)_p(v_1,\dots,v_{k+l})$$
$$\therefore f^*(\omega_1\wedge\omega_2) = f^*\omega_1 \wedge f^*\omega_2$$

De (v): Es inmediata, pues para $p\in U$ y $v_1,\dots,v_k\in T_p\mathbb{R}^n$:

$$((g\circ f)^*\omega)_p(v_1,\dots,v_k) = \omega_{g\circ f(p)}(d(g\circ f)_p(v_1),\dots,d(g\circ f)_p(v_k))$$
$$= \omega_{g(f(p))}(dg_{f(p)}\circ df_p(v_1),\dots,dg_{f(p)}\circ df_p(v_k))$$
$$= (g^*\omega)_{f(p)}(df_p(v_1),\dots,df_p(v_k))$$
$$= (f^*(g^*\omega))_p(v_1,\dots,v_k)$$
$$\therefore (g\circ f)^*\omega = f^*(g^*\omega)$$

$\square$

Sea $\omega\in\Omega^k(V)$, $f:U\to V$ función $C^\infty(U)$. Nuestro objetivo será encontrar una fórmula para $f^*\omega$. En. Si $\omega = \sum_I \omega_I dx_I = \sum_I \omega_I \wedge dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}$:

$$f^*\omega = f^*\left(\sum_I \omega_I\wedge dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}\right)$$
$$= \sum_I f^*\omega_I \wedge f^*(dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k})$$

dónde

$$f^*(dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}) = f^*dx_{i_1}\wedge\dots\wedge f^*dx_{i_k}$$
$$= d(f^*x_{i_1})\wedge\dots\wedge d(f^*x_{i_k})$$
$$= d(x_{i_1}\circ f)\wedge\dots\wedge d(x_{i_k}\circ f)$$
$$= d(f_{i_1})\wedge\dots\wedge d(f_{i_k}) = df_I$$

Con $f=(f_1,\dots,f_m)$ func. componentes. Así:

$$f^*\omega = \sum_I f^*\omega_I\, df_I$$

(recordando que $f^*\omega_I = \omega_I\circ f$).

Proposición.

Sea $\omega \in \Omega^k(V)$, $f: U \to V$ $C^\infty(U)$. Ent.

$$d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$$

Dem.

$$\begin{aligned} d(f^*\omega) &= d\left(\sum_I f^*\omega_I \, df_I\right) \\ &= \sum_I d(f^*\omega_I) \wedge df_I \\ &\overset{4)}{=} \sum_I (f^* d\omega_I) \wedge df_I \\ &= \sum_I (f^* d\omega_I) \wedge (f^* dx_I) \\ &= f^*\left(\sum_I d\omega_I \wedge dx_I\right) \\ &= f^* d\omega \end{aligned}$$

$\square$

EJEMPLOS.

1) Sean $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos, y $\omega \in \Omega^n(V)$ $\ni$ $\omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Ent.

$$\begin{aligned} f^*\omega &= f^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) \\ &= (f^* dx_1 \wedge \dots \wedge f^* dx_n) \\ &= df_1 \wedge \dots \wedge df_n \end{aligned}$$

y $df_i = \sum_{j_i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_{j_i}} dx_{j_i}$. Luego:

$$\begin{aligned} &= \left(\sum_{j_1=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_{j_1}} dx_{j_1}\right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{j_n=1}^{n} \frac{\partial f_n}{\partial x_{j_n}} dx_{j_n}\right) \\ &\overset{5)}{=} \sum_{j_1, \dots, j_n} \frac{\partial f_1}{\partial x_{j_1}} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_{j_n}} \, dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_n} \\ &= \operatorname{Det}(f) \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \end{aligned}$$

Def. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $V \subseteq \mathbb{R}^m$ abiertos, $A \subseteq \mathbb{R}$ abierto $\ni$ $0, 1 \in A$ y, $f_0, f_1 : U \to V$ dos mapeos $C^\infty(U)$. Un mapeo C^∞ $F: U \times A \to V$ es una *C^∞ homotopía entre f_0 y f_1* si

$$F(x, 0) = f_0(x), \text{ y}$$

$$F(x, 1) = f_1(x)$$

Si existe una homotopía entre f_0 y f_1, decimos que f_0 y f_1 son homotópicas, y se escribe

$$f_0 \simeq f_1$$

Def. Un mapeo $f: U \to V$ es una equivalencia homotópica si este tiene una inversa homotópica, i.e un mapeo $g: V \to U$ tal que

$$g \circ f \simeq id_U \quad y \quad f \circ g \simeq id_V$$

En este caso, U es homotópicamente a V, o bien U y V tienen el mismo tipo de homotopía.

En part. un difeomorfismo es una equivalencia homotópica.

EJEMPLO.

1) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y S^1 tienen el mismo tipo de homotopía. En efecto. Sean $r: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to S^1$ y $i: S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$,

$$r\,(r, \theta) \mapsto (1, \theta) \quad \left(x \mapsto \frac{x}{\|x\|}\right)$$

$$i\,(1, \theta) \mapsto (1, \theta) \quad (y \mapsto y)$$

ent. $r \circ i: S^1 \to S^1$, $r \circ i(1, \theta) = r(1, \theta) = (1, \theta)$, i.e $r \circ i = id_{S^1}$. Ahora $i \circ r: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $i \circ r(r, \theta) = i(1, \theta) = (1, \theta)$.

Claramente $r \circ i \simeq id_{S^1}$. Ahora hay que ver que $i \circ r \simeq id_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} = id_0$. En efecto, sea $F: 0 \times [0,1] \to S^1$,

$$(x, t) \mapsto (1-t)\,x + t\frac{x}{\|x\|}$$

F es C^∞ y $F(x, 0) = x = id_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}(x)$ y $F(x, 1) = \frac{x}{\|x\|} = i \circ r(x)$. Así $i \circ r \simeq id_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}$.

Def. Un subconjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es contraíble si tiene el mismo tipo de homotopía de un punto, o equivalentemente, si para algún $P_0 \in U$, el mapeo $id_U: U \to U$ es homotópico al mapeo constante $f_0: U \to U$, $p \mapsto P_0$.

Probaremos la equiv. U es contraible si $f: U \to \{p_0\}$ tiene inversa homotópica. Por otro lado, debe existir $F: U \times A \to U$, A abierto $\ni 0,1 \in A$ y además:

$$F(p,0) = f_0(p) = p_0$$

$$F(p,1) = id(p) = p$$

Considere $i: \{p_0\} \to U$ el mapeo inclusión.

$\Rightarrow$) Suponga U contraible. Ent. existen las f y g ent. $\ni$

$$f \circ g \simeq id_{\{p_0\}} \quad y \quad g \circ f = id_U$$

f es el mapeo cte. y $g: \{p_0\} \to U$ no sabemos nada. Sea $q_0 = g(p_0)$, ent. $g \circ f = q_0 \simeq id_U$.
Luego id_U es homotópico al mapeo cte. de q_0.

$\Leftarrow$) Suponga que $f_1: U \to \{p_0\}$ es homotópico a id_U, ent. tomando $g = i$, tenemos que:

$$f_1 \circ g = id_{\{p_0\}} \simeq id\{p_0\}$$

y $g \circ f_1 = f_1 \simeq id_U$, así f_1 tiene inv. homotópica g y por ende $\{p_0\}$ y U son homotópicamente equiv. luego U es contraible.

$\square$

Considere $\omega \in \Omega^k(U)$ cerrada, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y contraible. Como $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es contraible, $id_U \simeq \bar{p}_0$, i.e $\exists$ $F: U \times A \to U$ ($A \subseteq \mathbb{R}$ abierto conexo $\ni 1,0 \in A$). Y

$$F(p,0) = p_0 \,,\quad F(p,1) = p$$

$\forall p \in U$. Considere $\bar{\omega} = F^*\omega$. Si $\omega = \sum_I \omega_I \wedge dx_I$, ent.

$$F^*\omega = \sum_I (F^*\omega_I) \wedge F^*(dx_I)$$

$$= \sum_I (F^*\omega_I) \wedge dF_I$$

dónde $dF_I = dF_{i_1} \wedge \dots \wedge dF_{i_k}$, $dF_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial f_i}{\partial t} dt$. Por tanto podemos escribir $F^*\omega$ como:

$$F^*\omega = \omega_1 + dt \wedge \eta$$

dónde $\omega_1 \in \Omega^k(U \times A)$, $\eta \in \Omega^{k-1}(U \times A)$, con

$$\omega_1 = \sum_I \omega_{1I}\, dx_I \quad y \quad \eta = \sum_J \eta_J\, dx_J$$

Consideremos el mapeo proyección $\pi : U \times A \to U$, $(p,t) \mapsto p$. Ent. $d\pi_{(p,t)} : T_{(p,t)}(U\times A) \to T_p U$. Si $v_t = v \frac{\partial}{\partial t} \in \mathfrak{X}(U\times A)$, ent. $v_t \in \operatorname{Ker}(d\pi_{(p,t)})$, pues:

$$d\pi = \sum_{i=1}^{n} dx_i$$

$$\Rightarrow dx_i(v_t) = v_t[x_i] = v\frac{\partial}{\partial t} x_i = 0,\ \forall\, i \in [\![1,n]\!]$$

De esta forma

$$\omega_1(v_1,\dots,v_k) = 0 = \eta(v_1,\dots,v_{k-1}) \text{ si algún } v_i \in \operatorname{Ker} d\pi_{(p,t)}.$$

Definimos $I : \Omega^k(U\times A) \to \Omega^{k-1}(U)$

$$I(\bar\omega)_p(v_1,\dots,v_{k-1}) = \int_0^1 \{\eta_{(p,t)}((di_t)_p(v_1),\dots,(di_t)_p(v_{k-1}))\}\,dt$$

donde $v_1,\dots,v_{k-1} \in T_pU$ e $i_t : U \to U\times A$, $p \mapsto (p,t)$, $\forall\, t\in[0,1]$, luego:

$$(di_t)_p : T_pU \to T_{(p,t)}U\times A$$

Claramente I está bien def. y:

$$I(\bar\omega_1 + \bar\omega_2) = I(\bar\omega_1) + I(\bar\omega_2),\ \forall\, \bar\omega_1,\bar\omega_2 \in \Omega^k(U\times A).$$

Proposición.

$$i_1^*\bar\omega - i_0^*\bar\omega = d(I\bar\omega) + I(d\bar\omega)$$

donde $\bar\omega \in \Omega^k(U\times A)$.

Dem.

Dado que $\bar\omega = \omega_1 + dt\wedge\eta$, basta probar (por linealidad los sig. casos:

a) $\bar\omega = f(p,t)\, dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}$.

b) $\bar\omega = f(p,t)\, dt\wedge dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_{k-1}}$

Caso a): $I(\bar\omega) = 0$, pues $\eta = 0$, y:

$$d\bar\omega = (\text{términos de } x_i) + \frac{\partial f}{\partial t}\, dt\wedge dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}$$

$$\Rightarrow I(d\bar\omega)_p = \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial t}\, dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}\right)(p,t)\,dt$$

$$= [f(p,1) - f(p,0)](dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k})_{(p,t)}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} i_t^*\bar\omega &= i_1^* f(p,t)\wedge i_1^*(dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}) \\ &= f(p,t)\, dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k} \end{aligned}$$

$$\therefore\ i_1^*\bar\omega - i_0^*\bar\omega = d(I\bar\omega) + I(d\bar\omega).$$

Caso b):

$$\bar\omega = f(p,t)\, dt\wedge dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_{k-1}}$$

Se tiene que $i_t^*\omega = 0 = i_1^*\omega = i_0^*\omega$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} d\bar\omega &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i\wedge dt\wedge dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_{k-1}} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^k \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dt\wedge dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_{k-1}}\wedge dx_i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I(d\bar\omega)_p = \int_0^1 \left\{\sum_{i=1}^{n} (-1)^k \frac{\partial f}{\partial x_i}(p,t)\, dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_{k-1}}\wedge dx_i\right\} dt$$

y:

$$(I\bar\omega)_p = \int_0^1 \{f(p,t)\, dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_{k-1}}\}\, dt$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d(I\bar\omega)_p &= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\partial f}{\partial x_{i_k}}\, dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_{k-1}}\wedge dx_i\right) dt \\ &= -I(d\bar\omega)_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ d(I\bar\omega) + I(d\bar\omega) &= 0 \\ &= i_1^*\bar\omega - i_0^*\bar\omega \end{aligned}$$

$\square$

Todo lo ant. fue hecho para probar que toda forma cerrada en un esp. starshape es exacta. Para ello, consideremos las func. $F: U\times A \to U$ y $i_t: U \to U\times A$, $t\in[0,1)$. Ent.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "i_t"] \arrow[rr, bend right, "F\circ i_t"'] & U\times A \arrow[r, "F"] & U \end{tikzcd}$$

En part. analizaremos a 2 mapeos: $F\circ i_0$ y $F\circ i_1$.

$$F \circ i_0(p) = p_0, \quad y \quad F \circ i_1(p) = p = id_U(p), \ \forall\, p \in U$$

Teorema.

Sea $\omega \in \Omega^k(U)$ k-forma cerrada, i.e $d\omega = 0$. Ent. si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es contraíble, ω es exacta en U.

Dem.

Al ser U contraíble, $\exists$ $F: U \times A \to U$ homotopía de $p \mapsto p_0$ y id_U. Por la prop. ant.

$$i_1^* \bar{\omega} - i_0^* \bar{\omega} = d(I\bar{\omega}) + I(d\bar{\omega})$$

dónde $\bar{\omega} = F^*\omega \in \Omega^k(U \times A)$. Por lo ant.

$$\Rightarrow (id_U)^* \omega - (F \circ i_0)^* \omega = d(I\bar{\omega})$$

Pues al ser ω cerrada, $F^*\omega$ también lo es, y:

$$(F \circ i_0)^* \omega = 0$$

$$\therefore \ \omega = d(I\bar{\omega})$$

Luego, ω es exacta.

$\square$

Teorema.

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ abiertos. $f_0, f_1: U \to V$ mapeos C^∞. Si $f_0 \simeq f_1$, ent. para toda forma cerrada $\omega \in \Omega^k(U)$ la forma $f_1^*\omega - f_0^*\omega$ es exacta.

Dem.

Es inmediato del t. ant.

$\square$

Operadores Estrella De Hodge.

Motivación.

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Notemos que:

$$\dim(\Omega^k(u)) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k} = \dim(\Omega^{n-k}(u))$$

por lo cual, sale a la luz la pregunta: ¿Es posible hacer un isomorfismo entre $\Omega^k(u)$ y $\Omega^{n-k}(u)$? Más aún, es posible preservando la orientación y el producto interno? Todo esto es la motivación de lo que se verá a continuación.

Def. Sea $\Lambda^1 T_p^* \mathbb{R}^n = T_p^* \mathbb{R}^n$. Definimos un producto interno sobre este esp. vect. $(\cdot,\cdot): T_p^*\mathbb{R}^n \times T_p^*\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, el cual cumple las sig. cond.

i) Bilineal.

ii) Simétrico, i.e $(\alpha,\beta) = (\beta,\alpha)$, $\forall\, \alpha,\beta \in T_p^*\mathbb{R}^n$.

iii) Es no degenerado, i.e si: $\alpha \in T_p^*\mathbb{R}^n$ cumple que $(\alpha,\beta) = 0, \forall\, \beta \in T_p^*\mathbb{R}^n \Rightarrow \alpha = 0$.

EJEMPLO.

1) Considere a $p \in \mathbb{R}^n$ y $T_p\mathbb{R}^n \cong T_p^*\mathbb{R}^n$, $\frac{\partial}{\partial x_i} \overset{4)}{\mapsto} dx_i$. Si $\langle , \rangle_p$ es un producto interno sobre $T_p\mathbb{R}^n$. dado un elemento $v_p \in T_p\mathbb{R}^n$ se define el funcional lineal

$$\langle v_p, - \rangle_p : T_p\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

En part. Como $\frac{\partial}{\partial x_i} \in T_p\mathbb{R}^n$, ent. podemos abusar de notación y poner:

$$dx_i = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, - \rangle$$

$$dx_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle$$

$$= \pm\, \delta_{ij}$$

2) Continuando con 1), sean $\alpha,\beta \in T_p^*\mathbb{R}^n$. Por lo ant. Podemos enc. $V_\alpha, V_\beta \in T_p\mathbb{R}^n$ m

$$\alpha = \langle V_\alpha, - \rangle \quad y \quad \beta = \langle V_\beta, - \rangle$$

donde $V_\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha(e_i) \frac{\partial}{\partial x^i}$ y $V_\beta = \sum_{i=1}^n \beta(e_i) \frac{\partial}{\partial x^i}$. Así, se define el producto interno de α y β como:

$$(\alpha,\beta) = \langle V_\alpha, V_\beta \rangle$$

Obs. Y Def.

La cond. (iii) de la def. ant. es equivalente a la sig. Si $\sigma^1, \dots, \sigma^n \in T_p^* \mathbb{R}^n$ es base, ent.

$$\operatorname{Det}\left((\sigma^i, \sigma^j)_{1 \le i,j \le n} \right) \neq 0 \quad , \forall\, i,j \in [\![1,n]\!],\ i \neq j. \quad \dots (1)$$

donde la expresión en (1) es llamada Determinante de Gram o Gramiano. Esto es inmediato, pues si σ^i es elemento de la base:

$$\operatorname{Det}(\alpha, \sigma^j) = \sum_{i=1}^{n} a_i \overset{\operatorname{Det}}{(\sigma^i, \sigma^j)} = 0, \forall\, j \in [\![1,n]\!] \iff \overset{\operatorname{Det}}{\left((\sigma^i, \sigma^j)_{i}^{j} \right)} \neq 0, \forall\, i,j.$$

En part. por Gram-Schmidt podemos hacer que

$$(dx^i, dx^j) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = \pm \delta_{ij} \ . \ \forall\, i,j \in [\![1,n]\!]$$

Eje.

1) Un ejemplo de lo ant. es la métrica de Lorentz.

Producto Interno en K-vectores.

Def. Sean $\gamma = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k$ y $\mu = \beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_k \in \Lambda^k(T_p^* \mathbb{R}^n)$. Se define el producto interno en $\Lambda^k(T_p^* \mathbb{R}^n)$ como:

$$(\ , \ )_k : \Lambda^k(T_p^* \mathbb{R}^n) \times \Lambda^k(T_p^* \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\gamma, \mu) \mapsto \operatorname{Det}\left((\alpha_i, \beta_j)_{1 \le i,j \le n} \right)$$

Ejemplo.

1) Considere a $dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$, $dx_J = dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} \in \Omega^k(U)$. Si $p \in U$, ent.

$$\left((dx_I)_p, (dx_J)_p \right) = \operatorname{Det}\left(dx_{i_s}, dx_{j_l} \right)_{0 \le s, l \le k}$$

$$= \operatorname{Det}\left(\delta_{i_s j_l} \right)_{0 \le s, l \le k}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } I \neq J. \\ a & \text{si } I = J. \end{cases}$$ a depende del producto interno.

pues si $I \neq J$, ent. una fila de la matriz $(\delta_{i_s j_l})_{1\leq s, l \leq k}$ es cero. Si n es la dim. del esp. ent. se define la **signatura de la métrica** como:

$$\mathfrak{f} := s - r$$

$$n = s + r$$

donde s es el número de términos positivos del conjunto $\{(dx_i, dx_i) \mid i \in [1,n]\}$ y $r = n - s$. Así:

$$r = \frac{1}{2}(n - \mathfrak{f})$$

En part.

$$(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = (-1)^{\frac{1}{2}(n-\mathfrak{f})}$$

$\mathfrak{f}$ es la **signatura de la métrica**.

Queremos analizar orientaciones. Considere $T_p^* \mathbb{R}^n$, $\{dx_i\}$ base de $\Lambda^1(T_p^* \mathbb{R}^n)$. El espacio $\Lambda^n(T_p^* \mathbb{R}^n)$ tiene su orientación definida por $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$.

Dado un k-vector $\lambda \in \Lambda^k(T_p^* \mathbb{R}^n)$ fijo, se define un mapeo de $\Lambda^{n-k}(T_p^* \mathbb{R}^n) \to \Lambda^n(T_p^* \mathbb{R}^n)$,

$$\mu \mapsto \mu \wedge \lambda = f(\lambda)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

Con $f_\lambda : \Lambda^{n-k}(T_p^* \mathbb{R}^n) \to \Lambda^0(T_p^* \mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}$ mapeo lineal.

Def. Se define el **Operador Estrella de Hodge**:

$$* : \Lambda^k(T_p^* \mathbb{R}^n) \longrightarrow * \Lambda^{n-k}(T_p^* \mathbb{R}^n)$$

$$\lambda \longmapsto *\lambda$$

tal que

$$\lambda \wedge \mu = (*\lambda, \mu)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n, \ \forall\, \mu \in \Lambda^{n-k}(T_p^* \mathbb{R}^n)$$

EJEMPLOS.

1) Considere a $\mathbb{R}^3$, a la forma de volumen $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$. Ent. (con el producto interno usual).

$$*dx_1 = \omega_{12}\, dx_1 \wedge dx_2 + \omega_{23}\, dx_2 \wedge dx_3 + \omega_{13}\, dx_1 \wedge dx_3$$

Para determinarlo, veamos que dado $\mu \in \Lambda^2(T_p^*\mathbb{R}^3)$:

$$(*dx_1, \mu) = (\omega_{12}\, dx_1 \wedge dx_2 + \omega_{23}\, dx_2 \wedge dx_3 + \omega_{13}\, dx_1 \wedge dx_3,\ \mu_{12}\, dx_1 \wedge dx_2 + \dots)$$

$$= \omega_{12}\mu_{12} + \omega_{13}\mu_{13} + \omega_{23}\mu_{23}$$

y $dx_1 \wedge \mu$ es:

$$dx_1 \wedge \mu = \mu_{23}\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

Por ende:

$$\mu_{23}\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = (\omega_{12}\mu_{12} + \omega_{13}\mu_{13} + \omega_{23}\mu_{23})\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3,\ \forall \mu \in \Lambda^2(T_p^*\mathbb{R}^n)$$

$$\therefore \omega_{12} = \omega_{13} = 0 \quad y \quad \omega_{23} = 1$$

$$\therefore *dx_1 = dx_2 \wedge dx_3$$

De forma análoga:

$$*dx_2 = dx_3 \wedge dx_1$$

$$*dx_3 = dx_1 \wedge dx_2$$

2) Es fácil extender $*$ a K-formas en $\mathbb{R}^n$

$$* : \Omega^k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \Omega^{n-k}(\mathbb{R}^n)$$
$$\lambda \longmapsto *\lambda$$

Complejo De Rahm En $\mathbb{R}^3$.

$$\Omega^0(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{d_0} \Omega^1(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{d_1} \Omega^2(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{d_2} \Omega^3(\mathbb{R}^3)$$

Se tiene la propiedad Cohomológica:

$$d_1 \circ d_0 = 0$$

$$d_2 \circ d_1 = 0$$

Tenemos 2 isomorfismos:

$$\Omega^0(\mathbb{R}^3) \overset{*}{\cong} \Omega^3(\mathbb{R}^3)$$

$$\Omega^1(\mathbb{R}^3) \overset{*}{\cong} \Omega^2(\mathbb{R}^3)$$

($*$ es el operador estrella de Hodge). Sea $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^3)$, ent.

$$df = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx_i$$
$$\mapsto \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i}$$
$$= \nabla f$$

$$\text{i.e } d_0 \longleftrightarrow \nabla$$

Sea $\mu \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$, $\mu = \sum_{i=1}^{3} \mu_i dx_i$, ent. $d\mu = \sum_{i=1}^{3} d\mu_i \wedge dx_i$, y:

$$d\mu = \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \mu_i}{\partial x^k} dx_k \right) \wedge dx_i$$
$$= \left(\frac{\partial \mu_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \mu_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 + \left(\frac{\partial \mu_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \mu_1}{\partial x_3} \right) dx_1 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial \mu_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \mu_2}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3$$
$$\mapsto \left(\frac{\partial \mu_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \mu_2}{\partial x_3} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} - \left(\frac{\partial \mu_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \mu_1}{\partial x_3} \right) \frac{\partial}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial \mu_2}{\partial x_1} - \frac{\partial x_1}{\partial x_2} \right) \frac{\partial}{\partial x_3}$$
$$= \nabla \times \mu \quad , \quad d_1 \longleftrightarrow \nabla \times$$

Sea $\beta \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$. $\beta = \beta_{12} dx_1 \wedge dx_2 + \beta_{23} dx_2 \wedge dx_3 + \beta_{31} dx_3 \wedge dx_1$. Ent.

$$d_2 \beta = \frac{\partial \beta_{12}}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial \beta_{31}}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial \beta_{23}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$
$$\mapsto \nabla \cdot \left(\beta_{23} \frac{\partial}{\partial x_1} + \beta_{31} \frac{\partial}{\partial x_2} + \beta_{12} \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$$

$$d_0 \longleftrightarrow \nabla \cdot$$

Notas:

1) Veamos que cumple las 3 condiciones.

2) El pullback es lineal en 1-formas, se deduce de forma inmediata de la def.

3) $(f^*d\omega)_q = (d\omega)_{f(q)} \circ df_q = (d\omega)_p \circ df_q$.

4) Para que el prof. escriba menos, elimina a p, i.e debería ser $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p \longmapsto (dx_i)_p$.

5) Collecting Work - Atiyah - Singer.