Teorema (4.2.4)

Sea $(D,+,\cdot,0,1)$ un dominio entero, y P un subconjunto de D que satisface las condiciones siguientes:

i) $\forall\, x,y \in P,\ x+y \in P$ y $x\cdot y \in P$

ii) $\forall\, x \in D$ se cumple una y sólo una de:

a) $x \in P$.

b) $x = 0$.

c) $-x \in P$.

Si definimos en D la relación $<$ como sigue: $\forall\, x,y \in D$:

$$x < y \Leftrightarrow y-x \in P,$$

entonces $(D,+,\cdot,<,0,1)$ es un dominio entero simplemente ordenado y $P = D^+$.

Dem:

Ideas: $(D,+,\cdot,0,1)$ es dominio entero por hipótesis. Luego $(D,<)$ es simplemente ordenado. Probar que:

a) $<$ es tricotómico

en esencia, ver la def. anterior.

Anotaciones previas al Teorema (4.2.5)

Sea $(D, \oplus, \odot, <', 0, 1)$ un dominio entero simplemente ordenado por $<'$, y sea:

$$\mathbb{P} = \{n1 : n \in P\} \subset D$$

el cual es un subconjunto de D. Entonces las operaciones $\oplus$ y $\odot$ de D, restringidas a $\mathbb{P}$, son cerradas en $\mathbb{P}$. En efecto:

i) $m1, n1 \in \mathbb{P} \Rightarrow m1 \oplus n1 = (m+n)1 \Rightarrow m1 \oplus n1 \in \mathbb{P}$.

ii) $m1, n1 \in \mathbb{P} \Rightarrow m1 \odot n1 = m(1 \odot n1)$

$$\begin{aligned} &= m(n1) \\ &= (mn)1 \\ &\Rightarrow m1 \odot n1 \in \mathbb{P} \end{aligned}$$

Además $\mathbb{P} \subset D^+$, en efecto: puesto que $1 = 11$ y $0 < 1$, pues $1 \in D^+$, entonces:

$$0 \oplus 11 <' 11 \oplus 11 = 21$$

e inductivamente:

$$0 <' 11 <' 21 <' 31 <' \dots <' n1 <' (n+1)1$$

por tanto:

$$0 <' n1 \quad \forall n \in P$$

Luego $\mathbb{P} \subset D^+$.

Veamos ahora que:

$$m < n \Leftrightarrow m1 <' n1$$

Veamos primero que:

$$m < n \Rightarrow m1 <' n1$$

Claro que $m < n \Rightarrow \exists\, v \in P$ tal que:

$$\begin{aligned} n = m + v &\Rightarrow n1 = (m+v)1 = m1 \oplus n1 \\ &\Rightarrow n1 - m1 = v1 \Rightarrow 0 <' n1 - m1 \end{aligned}$$

pues $v1 \in \mathbb{P}$, por tanto:

$$m1 <' n1$$

Inversamente, probaremos ahora que:

$$m1 <' n1 \Rightarrow m < n$$

Supongamos que $m \not< n$, entonces $n < m$ ó $m = n$. Si $m = n$, entonces $m\mathbf{1} = n\mathbf{1}$, lo que contradice la hipótesis $(m\mathbf{1} <' n\mathbf{1})$. Si $n < m$, entonces, por la parte (i), $n\mathbf{1} <' m\mathbf{1}$, lo que nuevamente contradice la hipótesis. Por tanto:

$$m\mathbf{1} <' n\mathbf{1} \Rightarrow m < n$$

Finalmente $m < n \Leftrightarrow m\mathbf{1} <' n\mathbf{1}$.

Teorema (4.2.5)

Sea $(D, \oplus, \odot, <', \mathbf{0}, \mathbf{1})$ un dominio entero simplemente ordenado por $<'$. Sea:

$$\mathbb{P} = \{n\mathbf{1} : n \in P \text{ y } \mathbf{1} \in D\}$$

el cual es un subconjunto de D. Entonces:

$$(P, +, \odot, <, 0, 1) \cong (D, \oplus, \odot, <', \mathbf{0}, \mathbf{1})$$

Dem:

Debemos encontrar una función $F : P \to \mathbb{P}$ la cual sea biyectiva, preserve operación y $F(1) = \mathbf{1}$. Sea:

$$F : P \to \mathbb{P}$$

La regla de asociación definida por

$$F(n) = n\mathbf{1}$$

1) F es función: Sean $m, n \in P$, $m = n \Rightarrow m\mathbf{1} = n\mathbf{1} \Rightarrow F(m) = F(n)$.

2) F es inyectiva. Si $m, n \in P$ y $n \neq m$, entonces $n < m$ ó $m < n$, entonces, por resultados anteriores: $n\mathbf{1} <' m\mathbf{1}$ ó $m\mathbf{1} <' n\mathbf{1}$, entonces $F(n) <' F(m)$ ó $F(m) <' F(n)$, por tanto $F(n) \neq F(m)$.

3) F es supravectiva: $\forall\, n\mathbf{1} \in \mathbb{P}\ \exists\, n \in P$ tal que $F(n) = n\mathbf{1}$.

4) F preserva la suma:

$$\begin{aligned}\forall\, m, n \in P,\ F(m+n) &= (m+n)\mathbf{1} \\ &= m\mathbf{1} \oplus n\mathbf{1} \\ &= F(m) \oplus F(n)\end{aligned}$$

5) F preserva el producto:

$$\begin{aligned}\forall\, m, n \in P:\ F(m \cdot n) &= (m \cdot n)\mathbf{1} \\ &= m(n\mathbf{1})\end{aligned}$$

$$= m(1 \odot n1)$$
$$= m1 \odot n1$$
$$= F(m) \odot F(n)$$

ūwū :3

6) F preserva relación. Sean $m, n \in P$, $m < n \Leftrightarrow m1 <' n1 \Leftrightarrow F(m) <' F(n)$.

7) $F(1) = 1$. Se sigue de la definición.

q.e.d.

Def. Sea $(D, +, \cdot, <, 0, 1)$ un dominio entero simplemente ordenado por $<$. Definimos en D la relación $\leqslant$, como sigue: $\forall\, x, y \in D$:

$$x \leqslant y \Leftrightarrow x < y \text{ ó } x = y$$

Teorema (4.2.7).

Si $(D, +, \cdot, <, 0, 1)$ es un dominio entero simplemente ordenado por $<$, entonces:

i) $\leqslant$ es una relación de orden en D.

ii) $\leqslant$ es un orden total en D.

Dem:

Ideas: probar que $\leqslant$ es rel. de orden.

Teorema (4.2.8)

Sea $(D, \oplus, \odot, <', \mathbf{0}, \mathbf{1})$ un dominio entero simplemente ordenado por $<'$. Sea:

$$\mathbb{P} = \{n\mathbf{1} : n \in P \text{ y } \mathbf{1} \in D\}$$

el cual es un subconjunto de D. Entonces

$$(P, +, \cdot, \leqslant, 0, 1) \cong (D, \oplus, \odot, \leqslant', \mathbf{0}, \mathbf{1})$$

Donde $\leqslant'$ es el orden del teorema anterior.

Dem:

Def. Sea $(D,+,\cdot,<,0,1)$ un dominio entero simplemente ordenado, y sea $x\in D$. Definimos el valor absoluto de x, denotado por $|x|$, como:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } 0\leq x \\ -x & \text{si } x<0 \end{cases}$$

obs: el valor absoluto es una función con dominio D y rango $D^+\cup\{0\}$. $|\ |: D\to D^+\cup\{0\}$.

Teorema (4.2.10)

Si $(D,+,\cdot,<,0,1)$ un dominio entero simplemente ordenado, entonces $\forall x,y,z\in D$: