# Notas de Álgebra Moderna IV.
# Módulos.

Cristo Daniel Alvarado

11 de septiembre de 2024

# Índice general

# Capítulo 1

# Módulos Libres y Espacios Vectoriales

## 1.1. Conceptos Fundamentales

No queda de otra más que asumir este resultado de categorías:

**Teorema 1.1.1 (Hungerford, Theorem I.7.8)**
Si $\mathcal{C}$ es una categoría concreta, $F$ y $F'$ son objetos en $C$ tales que $F$ es libre en el conjunto $X$ y $F'$ lo es en $X'$ siendo estos conjuntos tales que $\left|X\right| = \left|X'\right|$, entonces $F$ es equivalente a $F'$.

En particular, la categoría de $R$-módulos unitarios es una categoría concreta, donde la equivalencia entre dos objetos de la categoría es un isomorfismo entre ambos $R$-módulos.

**Teorema 1.1.2**
Sea $R$ un anillo conmutativo con identidad. Las siguientes condiciones son equivalentes en un $R$-módulo unitario $F$:

i. $F$ tiene base no vacía.

ii. $F$ es la suma interna directa de una familia cíclica de $R$-módulos, cada uno de los cuales es isomorfo a $R$ como un $R$-módulo.

iii. $F$ es un $R$-módulo isomorfo a la suma directa de copias del $R$-módulo izquierdo $R$.

iv. Existe un conjunto no vacío $X$ y una función $i : X \to F$ con la siguiente propiedad: dado un $R$-módulo, $A$ y una función $f : X \to A$ existe un único homomorfismo de $R$-módulos $\overline{f} : F \to A$ tal que
$$\overline{f} \circ i = f$$
En otras palabras, $F$ es un objeto libre en la categoría de $R$-módulos uniatrios.

**Demostración:**
$(i) \Rightarrow (iv)$: Sea $X$ una base no vacía de $F$ y sea $i : X \to F$ el mapeo inclusión. Sea $A$ un $R$-módulo y $f : X \to A$ una función.

Si $u \in F$, entonces existen $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $r_i \in R$ y $x_i \in X$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$ tales que

$$u = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i$$

Definimos la función $\overline{f} : F \to A$ dada por:

$$\overline{f}(u) = \sum_{i=1}^{n} r_i f(x_i)$$

Esta función está bien definida, pues $F$ tiene como base a $X$ (por ende, todo elemento se representa de forma única como combinación lineal finita de elementos de $X$). Además,

$$\begin{aligned}\overline{f} \circ i(x_i) &= \overline{f}(x_i)\\ &= 1_R \cdot f(x_i)\\ &= f(x_i), \quad \forall x_i \in X\end{aligned}$$

por ende, $\overline{f} \circ i = f$.

Veamos que es homomorfismo de $R$-módulos (no sé como se verifica eso, chécalo porfa Roque).

Ahora, si $g : F \to A$ es otro homomorfismo de $R$-módulos tal que

$$g \circ i = f$$

se tiene que

$$\overline{f} \circ i = g \circ i \Rightarrow \overline{f}\big|_X = g\big|_X$$

Como $X$ genera $F$ y todo homomorfismo de $R$-módulos que vaya de $F$ en algún $R$-módulo, $B$ queda únicamente determinado por $X$, basta ver que $\overline{f} = g$ en $X$, lo cual sucede por la igualdad anterior. Por tanto, $\overline{f}$ es único.

$(iv) \Rightarrow (iii)$: Asumiendo $(iv)$, sean $X \subseteq F$ no vacío y una función $i : X \to F$ que cumplan esta propiedad. Considere el $R$-módulo

$$A = \sum_{x \in X} R$$

(es decir, es la suma directa de $\big|X\big|$-veces el $R$-módulo izquierdo $R$). Sea

$$Y = \left\{ \theta_x \middle| x \in X \right\}$$

donde

$$\theta_x(y) = \left\{ \begin{array}{lll} 1_R & \text{si} & y = x \\ 0_R & \text{si} & y \neq x \end{array} \right. , \quad \forall y \in Y$$

Como $X$ es no vacío, entonces $Y$ es no vacío. Por la parte $(iii) \Rightarrow (i)$, se sabe que $Y$ es una base del $R$-módulo unitario $A$. En particular, como $(iii) \Rightarrow (iv)$, se tiene que $A$ es un $R$-módulo libre en la categoría de $R$-módulos unitarios.

En particular, $F$ y $A$ son $R$-módulos libres en la categoría de $R$-módulos unitarios y son tales que $\big|X\big| = \big|Y\big|$ (por la forma en que se construyó $Y$), luego por el Teorema anterior son equivalentes en esta categoría, es decir que existe un isomorfismo $f : F \to A$. Así que

$$F \cong \sum_{x \in X} R$$

lo que prueba el resultado. ■