

Notas Teoría Geométrica de Grupos
10° Escuela Oaxaqueña de Matemáticas

Cristo Daniel Alvarado

13 de enero de 2025

Índice general

| | |
|---|----------|
| 1. Teoría Geométrica de Grupos | 2 |
| Introducción | 2 |
| Aplicaciones de espacios cubrientes | 2 |
| Producto Semidirecto de Grupos | 3 |
| Grupos finitamente generados y Gráfica de Caley | 4 |
| 2. Ejercicios y Problemas | 6 |
| Introducción a la teoría geométrica de grupos | 6 |

CAPÍTULO 1

TEORÍA GEOMÉTRICA DE GRUPOS

§1.1 INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores hemos hablado sobre

Definición 1.1.1

Un grupo discreto G es tal que está dotado de la topología discreta.

§1.2 APLICACIONES DE ESPACIOS CUBRIENTES

Teorema 1.2.1

Dado un espacio cubriente de X , $p : \tilde{X} \rightarrow X$, se tiene que $\pi_1(X) \curvearrowright \tilde{X}$ vía transformaciones de Deck.

Teorema 1.2.2

Un grupo G actúa de manera libre en un árbol si y sólo si G es grupo libre.

Demostración:

\Rightarrow) : Supongámslo que G actúa de manera libre en un árbol T . Considere la función proyección $p : T \rightarrow T/G$. Afirmamos que p es una función cubriente, en efecto...

Se tien que T/G es una gráfica, por lo cual:

$$\pi_1(T/G) \cong F_n$$

para algún $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Usando transormaciones de Deck deducimos que:

$$\pi_1(T/G) \cong G$$

por lo cual G es libre.

\Leftarrow) : Supongamos que G es grupo libre, entonces existe un conjunto S tal que $G = F(S)$. Notemos que:

$$F(S) \cong \pi_1 \left(X = \bigvee_{s \in S} \mathbb{S}^1 \right)$$

Se tiene que este espacio admite un cubrente universal, digamos $p : \tilde{X} \rightarrow X$. Por un teorema, \tilde{X} es una gráfica y, por ser una gráfica tal que su grupo fundamental es trivial, entonces debe ser un árbol. También se probó que:

$$\text{Deck}(\tilde{X}) \rightarrow \tilde{X}$$

actúa sobre este árbol (mediante $f \in \text{Deck}(\tilde{X})$). ■

Observación 1.2.1

Completar lo anterior formalmente y unir todo con las notas anteriores.

Proposición 1.2.1

El grupo libre F_2 contiene como subgrupo de índice finito a F_n , para todo $n \geq 2$.

Demostración:

La explicación de la proposición anterior es que, ■

Ejercicio 1.2.1

Encontrar un cubrente \tilde{X} de X con $\pi_1(X) = F_2$ tal que $\pi_1(\tilde{X}) = F_1$.

§1.3 PRODUCTO SEMIDIRECTO DE GRUPOS

Definición 1.3.1

Sean G y H grupos, y sea $\varphi : H \rightarrow \text{Aut}(G)$ un morfismo de grupos.

Definimos el **producto semidirecto** $G \rtimes_{\varphi} H$, como el grupo en $G \times H$ con la operación dada por:

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1\varphi_{h_1}(g_2^{-1}), h_1h_2)$$

Proposición 1.3.1

Probar que dados dos grupos G y H , su producto semidirecto es un grupo.

Demostración:

Ejercicio. ■

Ejemplo 1.3.1

Sean G y H grupos, y tomemos $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(H)$ el homomorfismo trivial. Entonces:

$$G \rtimes_{\varphi} H \cong G \times H$$

Ejemplo 1.3.2

Si K es la botella de Klein, entonces:

$$\pi_1(K) \cong \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$$

Demostración:

Recordemos que:

$$\pi_1(K) \cong \langle a, b | aba = b^{-1} \rangle$$

y, observemos que todo homomorfismo $f: \mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z})$ solo tiene de dos:

$$\varphi(1) = \pm 1_{\mathbb{Z}}$$

completar la demostración. ■

Ejercicio 1.3.1

Pruebe que $D_{\infty} \cong \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$.

Demostración:

Recordemos que:

$$D_{\infty} = \text{Aut}(\mathbb{R})$$

tomando los automorfismos de \mathbb{R} como gráfica (con nodos los enteros \mathbb{Z}). ■

§1.4 GRUPOS FINITAMENTE GENERADOS Y GRÁFICA DE CALEY

Definición 1.4.1

Un grupo G se dice **finitamente generado** si existe un conjunto $S \subseteq G$ finito tal que $G = \langle S \rangle$.

Ejemplo 1.4.1

$\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$ es finitamente generado.

Definición 1.4.2

Sea G un grupo finitamente generado, y sea $S \subseteq G$ un conjunto finito de generadores de G . La **gráfica de Caley**, denotada por $\text{Cay}(G, S)$ se define como una gráfica en la que:

- Los vértices son elementos de G , es decir, $V(\text{Cay}(G, S)) = G$.
- Las aristas se construyen de la siguiente manera: para cada vértice $g \in G$ y cada $s \in S \cup S^{-1} \setminus \{1\}$, se dibuja una arista entre g y gs .

Ejemplo 1.4.2

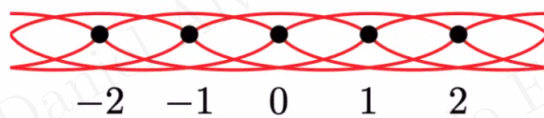
Considere $G = \mathbb{Z}$ y $S = \{1\}$. Entonces, la gráfica de Caley estará dada por la gráfica de \mathbb{R} con \mathbb{Z} los vértices de la gráfica.

Ejemplo 1.4.3

Considere $G = \mathbb{Z}$ y $S = \{2, 3\}$ ¿cuál es la gráfica de Caley?

Solución:

Resulta que:



$$\text{Cay}(\mathbb{Z}, \{2, 3\})$$

Figura 1. Caption.

es la gráfica de Caley de esta cosa, que es diferente de la gráfica del ejemplo anterior. \square

Proposición 1.4.1

La gráfica de Caley $\text{Cay}(G, S)$, para un grupo generado G y un conjunto generador S , tiene las siguientes propiedades:

- Es arco-conexa (o conexa).
 - Es localmente finita, es decir que cada vértice tiene solamente un conjunto finito de puntos como vecinos.
-

CAPÍTULO 2

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

§2.1 INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA GEOMÉTRICA DE GRUPOS

Ejercicio 2.1.1

Utilizando la teoría de cubrientes demuestra que:

- (1) Todo subgrupo de índice finito en un grupo finitamente generado es finitamente generado.
- (2) Todo subgrupo de índice finito en un grupo finitamente presentado es finitamente presentado.

Demostración:

De (1): Sea G un grupo finitamente generado y $H < G$ tal que $[G : H] < \infty$.

■

Ejercicio 2.1.2

Demuestra que en el producto semidirecto $N \rtimes_{\varphi} H$, H es un subgrupo normal si y sólo si φ es el homomorfismo trivial.

Demostración:

Recordemos que el producto semidirecto $N \rtimes_{\varphi} H$ es el grupo $N \times H$ dotado de la operación:

$$(n, h)(n', h') = (n\varphi_h(n'), hh')$$

donde $\varphi : H \rightarrow \text{Aut}(N)$ es un homomorfismo tal que $h \mapsto \varphi_h$. El elemento neutro de este grupo es (e_N, e_H) , donde cada elemento tiene como inverso:

$$(n, h)^{-1} = ((\varphi_{h^{-1}}(n))^{-1}, h^{-1})$$

Sean $(n_1, h_1) \in N \rtimes_{\varphi} H$ y $h \in H$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
(n_1, h_1)(e_N, h)(n_1, h_1)^{-1} &= (n_1, h_1)(e_N, h) \left((\varphi_{h_1^{-1}}(n_1))^{-1}, h_1^{-1} \right) \\
&= (n_1 \varphi_{h_1}(e_N), h_1 h) \left((\varphi_{h_1^{-1}}(n_1))^{-1}, h_1^{-1} \right) \\
&= (n_1 \varphi_{h_1}(e_N), h_1 h) \left((\varphi_{h_1^{-1}}(n_1))^{-1}, h_1^{-1} \right) \\
&= (n_1 e_N, h_1 h) \left((\varphi_{h_1^{-1}}(n_1))^{-1}, h_1^{-1} \right) \\
&= (n_1, h_1 h) \left((\varphi_{h_1^{-1}}(n_1))^{-1}, h_1^{-1} \right) \\
&= \left(n_1 \varphi_{h_1 h} \left((\varphi_{h_1^{-1}}(n_1))^{-1} \right), h_1 h h_1^{-1} \right) \\
&= \left(n_1 \varphi_{h_1 h} \left((\varphi_{h_1^{-1}}(n_1^{-1})) \right), h_1 h h_1^{-1} \right) \\
&= \left(n_1 \varphi_{h_1 h h_1^{-1}}(n_1^{-1}), h_1 h h_1^{-1} \right)
\end{aligned}$$

pues, $\varphi_{h_1}(e_N) = e_N$ y por ser $h \mapsto \varphi_h$ homomorfismo.

\Rightarrow): Suponga que H es un subgrupo normal de $N \rtimes_{\varphi} H$, esto es que el grupo H visto como subgrupo de $N \rtimes_{\varphi} H$:

$$H = \left\{ (e_N, h) \mid h \in H \right\}$$

es subgrupo normal de $N \rtimes_{\varphi} H$. Como es normal, se sigue que:

$$(n_1, h_1)(e_N, h)(n_1, h_1)^{-1} \in H$$

para todo $(n_1, h_1) \in N \rtimes_{\varphi} H$ y $h \in H$, por lo que:

$$\left(n_1 \varphi_{h_1 h h_1^{-1}}(n_1^{-1}), h_1 h h_1^{-1} \right) \in H$$

nuevamente, para todo $(n_1, h_1) \in N \rtimes_{\varphi} H$ y $h \in H$. En particular:

$$n_1 \varphi_{h_1 h h_1^{-1}}(n_1^{-1}) = e_N$$

por lo que para todo $n \in N$ y $h \in H$:

$$n^{-1} \varphi_h(n) = e_N \Rightarrow \varphi_h(n) = n$$

es decir, que $\varphi_h = \mathbb{1}_H$, por lo que $h \mapsto \varphi_h$ es el homomorfismo trivial.

\Leftarrow): Suponga que φ es trivial, se sigue que:

$$\begin{aligned}
(n_1, h_1)(e_N, h)(n_1, h_1)^{-1} &= \left(n_1 \varphi_{h_1 h h_1^{-1}}(n_1^{-1}), h_1 h h_1^{-1} \right) \\
&= (n_1 \mathbb{1}_H(n_1^{-1}), h_1 h h_1^{-1}) \\
&= (n_1 n_1^{-1}, h_1 h h_1^{-1}) \\
&= (e_N, h_1 h h_1^{-1}) \in H
\end{aligned}$$

para todo $(n_1, h_1) \in N \rtimes_{\varphi} H$ y $h \in H$, por lo que H es normal en $N \rtimes_{\varphi} H$. ■

Ejercicio 2.1.3

Demuestra que el grupo diédrico infinito D_{∞} es isomorfo tanto al producto libre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ como al producto semidirecto $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Demostración:

Recordemos que:

$$D_\infty = \langle r, s \mid s^2 = 1, srs = r^{-1} \rangle$$

Probaremos que es isomorfo a ambos grupos.

- Observemos que el producto semidirecto $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ es tal que el homomorfismo $\varphi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z})$ tiene dos opciones, o es el trivial, ya que:

$$\varphi(0) = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}}$$

y $\varphi(1) = -\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}$, o:

$$\varphi(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}}, \quad \forall x \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Analicemos ambos casos:

- Si φ no es trivial, se sigue que:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1)(x_2, y_2) &= (x_1 + \varphi_{y_1}(x_2), y_1 + y_2) \\ &= \begin{cases} (x_1 + \mathbb{1}_{\mathbb{Z}}(x_2), 0 + y_2) & \text{si } y_1 = 0 \\ (x_1 - \mathbb{1}_{\mathbb{Z}}(x_2), 1 + y_2) & \text{si } y_1 = 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (x_1 + x_2, y_2) & \text{si } y_1 = 0 \\ (x_1 - x_2, 1 + y_2) & \text{si } y_1 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Afirmamos que en este caso, $D_\infty \cong \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En efecto, considere la función $f : D_\infty \rightarrow \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dada por:

$$f(r) = (1, 0) \quad \text{y} \quad f(s) = (0, 1)$$

Como D_∞ admite una presentación, f se puede extender a un homomorfismo. Veamos que este homomorfismo es inyectivo y suprayectivo.

- **f es inyectiva:** Sea $s^{\epsilon_1} r^n s^{\epsilon_2} \in D_\infty$ con $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \{0, 1\}$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que:

$$f(s^{\epsilon_1} r^n s^{\epsilon_2}) = 0$$

entonces:

$$\begin{aligned} f(s^{\epsilon_1} r^n s^{\epsilon_2}) &= (0, \epsilon_1)(n, 0)(0, \epsilon_2) \\ &= (0, \epsilon_1)(n, \epsilon_2) \\ &= \begin{cases} (n, \epsilon_2) & \text{si } \epsilon_1 = 0 \\ (-n, 1 + \epsilon_2) & \text{si } \epsilon_1 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

en cualquier caso, debe tenerse que $n = 0$, por lo cual $\epsilon_2 = 0$ si $\epsilon_1 = 0$ y $\epsilon_2 = 1 = \epsilon_1$, en cualquier caso se sigue que:

$$s^{\epsilon_1} r^n s^{\epsilon_2} = 1$$

por lo que $\ker(f) = \langle 1 \rangle$.

- **f es suprayectiva:** Sea $(m, \epsilon) \in \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Veamos que:

$$f(r^m s^\epsilon) = (m, \epsilon)$$

es el elemento deseado.

Por ambos incisos se sigue que f es isomorfismo.

- Veamos que el producto libre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ está dado por:

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle x, y \mid x^2 = 1 \text{ y } y^2 = 1 \rangle$$

pues, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle x \mid x^2 = 1 \rangle$. Los elementos de este grupo son sucesiones alternantes $xyxy \cdots$ o $yxyx \cdots$ de los elementos x y y . Considere la función $f : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow D_\infty$ dada por:

$$f(x) = r \quad \text{y} \quad f(y) = s$$

esta es función y más aún, puede ser extendida a un homeomorfismo ya que como el producto libre admite presentación basta con definirlo sobre los elementos de la base (usando además las propiedades de grupos libres).

Por ende, veamos que es inyectiva y sobreyectiva:

- **f es inyectiva:** Sea $z \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ tal que $f(z) = 0$. Se tienen cuatro casos:

- (a) $z = xy \cdots xy$ sea m el número de veces que aparece r en este producto. Se sigue que $f(z) = f(x)f(y) \cdots f(x)f(y) = rs \cdots rs$. En esencia, todos los elementos están alternando y, usando el hecho de que en D_∞ se cumple:

$$rs = sr^{-1}$$

podemos reducir todo lo anterior a algo de la forma $s^\epsilon(r^{-1})^n$ con $\epsilon \in \{0, 1\}$ y $n \in \mathbb{N}$. Se sigue así que:

$$f(z) = s^\epsilon r^n = 0$$

y eso es cero si y sólo si $\epsilon = 0$ y $n = 0$. Pero n está dado por el número de veces que cambiamos r a la derecha, que fueron m -veces, es decir que $m = n$. Así que $m = 0$. Por tanto, $z = 0$.

- (b) Los otros casos son $z = xy \cdots yx$, $z = yx \cdots yx$ y $z = yx \cdots xy$, donde se procede de forma análoga al ejemplo anterior.

f es sobreyectiva. Sea $u \in D_\infty$. Por las propiedades de este grupo este elemento se expresa como:

$$s^{\epsilon_1} r^n s^{\epsilon_2}$$

donde $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \{0, 1\}$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Veamos por casos:

○

■

Definición 2.1.1

Sea G un grupo finitamente generado, y sea $S \subseteq G$ un conjunto finito de generadores de G . La **gráfica de Caley**, denotada por $\text{Cay}(G, S)$ se define como una gráfica en la que:

- Los vértices son elementos de G , es decir, $V(\text{Cay}(G, S)) = G$.
- Las aristas se construyen de la siguiente manera: para cada vértice $g \in G$ y cada $s \in S \cup S^{-1} \setminus \{1\}$, se dibuja una arista entre g y gs .

Ejercicio 2.1.4

Esboza la gráfica de Caley del producto libre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Solución:

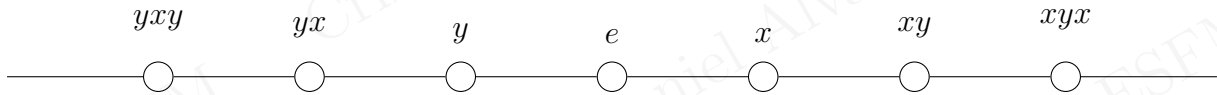
Primero, un conjunto de generadores de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle x, y \mid x^2 = y^2 = 1 \rangle$ es:

$$S = \{x, y\} = S \cup S^{-1}$$

Considere el elemento e . De este elemento parten dos aristas, una hacia x y otra hacia y .

Luego, de x se dibuja una arista hacia xy y otra hacia e , que ya estaba. De y se dibuja una hacia yx y otra hacia e , que ya estaba.

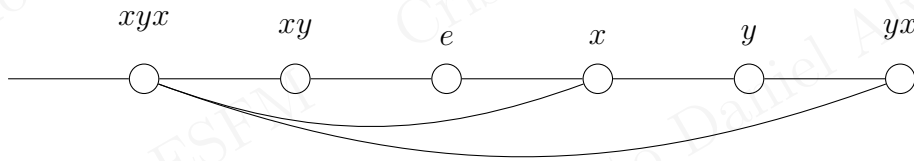
En síntesis, esto se vería como una recta con centro e y los elementos x y y sus vecinos, luego se ponen como vecinos los elementos xy y yx , alternando.



Otro conjunto de generadores es:

$$S = \{x, xy\} \Rightarrow S \cup S^{-1} = \{x, xy, yx\}$$

en este caso, va a cambiar la gráfica y quedará de la siguiente manera:



□

Ejercicio 2.1.5

Haga lo siguiente:

- (1) Demuestra que existen conjuntos generadores finitos S de \mathbb{Z} y T de D_∞ tales que $\text{Cay}(\mathbb{Z}, S) \cong \text{Cay}(D_\infty, T)$.
- (2) Demuestra que existen conjuntos generadores finitos S de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y T de D_∞ tales que $\text{Cay}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \text{Cay}(D_\infty, T)$.

Demostración:

De (1): Como $D_\infty \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, entonces por el ejercicio anterior un conjunto infinito de generadores que sirve es:

$$S = \{1\}$$

y $T = \{x, y\}$.

De (2):

■