

Ejercicios

§0.1 EJERCICIOS

Ejercicios de cada una de las secciones.

§0.1.1 SERIES DE POTENCIAS

Ejercicio 0.1.1

Pruebe que si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, entonces:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$$

Demostración:

En efecto, veamos que:

$$\begin{aligned} e^{x+iz_2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} z_1^k z_2^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z_1^k}{k!} \cdot \frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!} \end{aligned}$$

donde, recordemos que:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{y} \quad e^{z_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!}$$

por tanto, de la Proposición ?? se sigue que:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$$

■

Ejercicio 0.1.2

Pruebe que

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

donde $z = x + iy$.

Demostración:

Sea $z \in \mathbb{C}$. Se tiene que:

$$e^z = e^x e^{iy}$$

Veamos que:

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

■

Ejercicio 0.1.3

Pruebe que si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ son dos sucesiones de números no negativos tales que $0 \leq b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ y $a = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$, entonces:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$$

Demostración:

Antes, notemos que al tenerse:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

se tiene que el siguiente límite existe:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} a_k \right)$$

por tanto, la sucesión $\{\sup_{k \geq n} a_k\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada. Así que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que el supremo:

$$\sup_{k \geq n} a_k$$

existe. Veamos ahora que:

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} a_k b_k \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\sup_{k \geq n} a_k \right) \left(\sup_{k \geq n} b_k \right) \right) \end{aligned}$$

donde el supremo se puede separar ya que ambos supremos existen y ser las dos sucesiones acotadas y de números no negativos. Por ende:

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\sup_{k \geq n} a_k \right) \left(\sup_{k \geq n} b_k \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} a_k \right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} b_k \right) \\ &= \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \cdot \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \right) \\ &= \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) \\ &= ab \end{aligned}$$

■

Ejercicio 0.1.4

Sea $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ analítica en G y $h : [0, 1] \rightarrow G$ función real diferenciable. Entonces la función $f \circ h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ cumple que:

$$\lim_{t \rightarrow s} \frac{f \circ h(s) - f \circ h(t)}{s - t} = f'(h(s)) \cdot h'(s)$$

para todo $s \in [0, 1]$.

Demostración:**Ejercicio 0.1.5**

Pruebe que la función $u(x, y) = \log(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ es armónica en $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Demostración:

§0.1.2 FUNCIONES ANALÍTICAS

Bibliografía

- A. Markusevich, *Teoría de las funciones analíticas*, Ed. Mir Moscú.
- J. Conway, *Complex Analysis*, Ed. Mir Moscú.