Ejercicios Grupos Topológicos

Cristo Daniel Alvarado

25 de marzo de 2024

Índice general

Capítulo 1

Ejercicios Capítulo 1

Ejercicio 1.0.1
Sea H un subgrupo denso abeliano de un grupo topológico G. Entonces, G es abeliano.

Demostración:
Por la proposición 1.3.2 (4), como $ab = ba$ para todo $a, b \in H$, entonces se sigue que $ab = ba$ para todo $a, b \in \overline{H}$. Como H es denso en G es tiene entonces que $\overline{H} = G$, es decir:

$$ab = ba, \quad \forall a, b \in G$$

por tanto, G es abeliano. ■

Ejercicio 1.0.2
Suponga que H es un subgrupo denso de un grupo topológico G y $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que si $x^n = e_G$ para todo $x \in H$, entonces los elementos del grupo G satisfacen la misma ecuación.

Demostración:
Sea $f : G \to G$ tal que $x \mapsto x^n$. Esta es una función continua para la que cual se tiene que el conjunto

$$\begin{aligned} A =& f^{-1}(e_G) \\ =& \left\{ x \in G \middle| f(x) = e_G \right\} \\ =& \left\{ x \in G \middle| x^n = e_G \right\} \end{aligned}$$

es cerrado, pero $H \subseteq A$, luego $G = \overline{H} \subseteq A$, es decir que

$$x^n = e_g, \quad \forall x \in G$$

■

Definición 1.0.1
Sea G un grupo. Decimos que G es **grupo de torsión** si para todo $g \in G$ existe $n_g \in G$ tal que $g^{n_g} = e_G$.

Ejercicio 1.0.3
Sean G un grupo topológico y H un subgrupo denso de G tal que todo elemento $h \in H$ es de orden finito. ¿Es G de torsión?

Solución:
Considere el grupo $(\mathbb{S}^1, \cdot)$ donde:

$$\mathbb{S}^1 = \left\{ e^{ix} \in \mathbb{C} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$$

donde el producto $\cdot$ es el producto usual de $\mathbb{C}$, dado por:

$$e^{ix} \cdot e^{iy} = e^{i(x+y)}$$

dotado de la topología $\tau_{\mathbb{S}^1}$

$$\tau_{\mathbb{S}^1} = \left\{ U \cap \mathbb{S}^1 \middle| U \text{ es abierto en } \mathbb{C} \right\}$$

es claro que las funciones $f : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ tales que $(e^{ix}, e^{iy}) \mapsto e^{i(x+y)}$ y, $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ tales que $e^{ix} \mapsto e^{-ix}$ son continuas ya que son reestricciones de funciones continuas de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Es claro que el conjunto:

$$\mathbb{H}^1 = \left\{ e^{2\pi i r} \in \mathbb{S}^1 \middle| r \in \mathbb{Q} \right\}$$

es subgrupo de $(\mathbb{S}^1, \cdot)$, el cual es denso en $\mathbb{S}^1$, para el que se cumple que todo elemento es de orden finito, pues si $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$:

$$(e^{2\pi i r})^q = e^{2\pi i p} = 1$$

donde 1 es la identidad de $(\mathbb{S}^1, \cdot)$. Por ende, todo elemento del subgrupo denso $\mathbb{H}^1$ es de orden finito, pero G no es de torsión, ya que el elemento

$$e^i$$

no es de orden finito. $\square$

Ejercicio 1.0.4
Demuestre que si S es denso en un grupo topológico G y O es abierto no vacío en G, entonces $O \cdot S = S \cdot O = G$.

Demostración:

$\blacksquare$

Ejercicio 1.0.5
Sea G un grupo topológico. ¿Es $G' = \left\{ xyx^{-1}y^{-1} \in G \middle| x, y \in G \right\}$ un subgrupo de G? ¿Es G' cerrado en G?

Solución:
Afirmamos que G' no es subgrupo de G. En efecto, es claro que $e \in G'$, pero... (hay algo con el producto que falla)

Es cerrado, ya que si $f : G \times G \to G$ es tal que $(x, y) \mapsto xyx^{-1}y^{-1}$, se tiene que f es una función continua para la cual

$$\begin{aligned} G' &= \left\{ xyx^{-1}y^{-1} \in G \middle| x, y \in G \right\} \\ &= \left\{ f(x, y) \in G \middle| (x, y) \in G \times G \right\} \\ &= f^{-1}(G) \end{aligned}$$

es decir, que G' es la imagen inversa de un cerrado (el conjunto G) y, por ende es cerrado. $\square$

Ejercicio 1.0.6
Pruebe que si G es un grupo topológico, entonces el conjunto

$$H = \left\{ g \in G \middle| gx = xg, \forall x \in G \right\}$$

es un subgrupo cerrado normal de G.

Demostración:
Veamos que es subgrupo. En efecto, es claro que $e_G \in H$. Sean ahora $g, h \in G$, entonces se tiene que $g^{-1} \in G$, pues:

$$\begin{aligned} gx &= xg \\ \Rightarrow gxg^{-1} &= x \\ \Rightarrow xg^{-1} &= g^{-1}x \\ \Rightarrow g^{-1}x &= xg^{-1} \end{aligned}$$

$\forall x \in G$ y, además:

$$(gh)x = g(hx) = g(xh) = (gx)h = x(gh), \quad \forall x \in G$$

por tanto, $gh \in H$. Se sigue entonces que H es subgrupo de G.

Veamos que es normal. Sea $g \in G$ y $h \in G$, hay que ver que $ghg^{-1} \in H$. En efecto, veamos que:

$$(ghg^{-1})x = (gg^{-1})hx = (e_G)xh = x(he_G) = x(hgg^{-1}) = x(ghg^{-1}), \quad \forall x \in G$$

por tanto, $ghg^{-1} \in H$. Luego, H es normal en G.

Ahora, como H es subgrupo, entonces $\overline{H}$ también lo es... ■

Ejercicio 1.0.7
Sea G un grupo tal que todos sus elementos son de orden 2. Demuestre que G tiene que ser abeliano. Pruebe que si G es infinito, entonces admite una topología de Hausdorff no discreta.

Demostración:
Veamos que G es abeliano. En efecto, sean $a, b \in G$, se tiene entonces que:

$$(ab)^2 = (ab)(ab) = e_G$$

es decir, que $ab = (ab^{-1}) = b^{-1}a^{-1}$, pero $a^{-1} = a$ y $b^{-1} = b$. Por ende, $ab = ba$ luego, G es abeliano.

Suponga que G es infinito. (no sé). ■

Ejercicio 1.0.8
Dé un ejemplo de grupo que admite al menos dos topologías de Hausdorff de grupo distintas.

Solución:

□

Ejercicio 1.0.9
Sea $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ el grupo multiplicativo de los números reales con la topología usual, y sean $G' = \{-1, 1\}$ y $G'' = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| x > 0 \right\}$.

1. Pruebe que G' y G'' son subgrupos de G.

2. Pruebe que existe un isomorfismo topológico entre G/G' y G''.

3. Pruebe que G y $G' \oplus G''$ son topológicamente isomorfos.

4. Pruebe que $G' \cong \mathbb{Z}_2$, $G'' \cong \mathbb{R}$ y, deduzca que $G \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{R}$.

Demostración:

De (1): Es claro que son subgrupos de G.

De (2): Notemos que:

$$\begin{aligned} G/G' &= \left\{G'a \middle| a \in G\right\} \\ &= \left\{\{-1, 1\} a \middle| a \in G\right\} \\ &= \left\{\{-a, a\} \middle| a \in G\right\} \end{aligned}$$

Defina $f : G'' \to G/G'$ tal que $a \mapsto \{-a, a\}$. Afirmamos que esta función es continua. En efecto, ■

Ejercicio 1.0.10

Sea $GL(n, \mathbb{R})$ el grupo lineal general con la topología definida en un ejemplo anterior. Introduzcamos los siguientes subconjuntos de $GL(n, \mathbb{R})$; el conjunto $SL(n, \mathbb{R})$ de las matrices con determinante igual a 1; el conjunto $TL(n, \mathbb{R})$ de las matrices triangulares superiores con los elementos de la diagonal principal iguales a 1; el conjunto $O(n, \mathbb{R})$ de las matrices ortogonales. Pruebe lo siguiente:

1. Cada uno de los conjuntos $SL(n, \mathbb{R})$, $TL(n, \mathbb{R})$, $O(n, \mathbb{R})$ es un subgrupo cerrado de $GL(n, \mathbb{R})$.

2. $SL(n, \mathbb{R})$ es un subgrupo normal de $GL(n, \mathbb{R})$, pero $TL(n, \mathbb{R})$ y $O(n, \mathbb{R})$ no lo son si $n \geq 2$.

Demostración:

De (1): Primero, ya se sabe que $GL(n, \mathbb{R})$ es grupo con el producto usual de matrices. Veamos que es grupo topológico con la topología dotada por la métrica:

$$d(A, B) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |A_{i,j} - B_{i,j}|^2}$$

ya que, la función $(A, B) \mapsto AB^{-1}$ es continua (podemos verla como una función de $\mathbb{R}^{n^2}$ a $\mathbb{R}^n$ donde solo se involucran sumas, productos, cuadrados y diferencias de elementos de $\mathbb{R}$, por ende, es continua). Luego, es grupo topológico.

Ya se sabe que $SL(n, \mathbb{R})$, $TL(n, \mathbb{R})$, $O(n, \mathbb{R})$ son subgrupos de $GL(n, \mathbb{R})$. Veamos que son cerrados.

1. $SL(n, \mathbb{R})$ es cerrado. En efecto, la función determinante $\det : GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es continua (vista como función de $\mathbb{R}^{n^2}$ a $\mathbb{R}$ lo es), además:

$$\begin{aligned} SL(n, \mathbb{R}) &= \left\{A \in GL(n, \mathbb{R}) \middle| \det(A) = 1\right\} \\ &= \det^{-1}(1) \end{aligned}$$

donde $\{1\} \subseteq \mathbb{R}$ es cerrado, luego $SL(n, \mathbb{R})$ es cerrado.

2. $TL(n, \mathbb{R})$ es cerrado. En efecto, la función s

■

Ejercicio 1.0.11
Sea G un grupo topológico abeliano. Pruebe que para todo $n \in \mathbb{N}$, $G_n = \left\{ g \in G \middle| g^n = e_G \right\}$ es un subgrupo cerrado de G. ¿Es válida la conclusión si el grupo G no es abeliano?

Sugerencia. Considere el grupo $G = O(2, \mathbb{R})$.

Demostración:

Veamos que es subgrupo. Sea $n \in \mathbb{N}$, es claro que $e_G \in G_n$. Además, si $x, y \in G_n$, entonces:

$$\left(xy^{-1}\right)^n = x^n y^{-n} = e_G$$

pues, como $y^n = e_G$, entonces $y^{-n} = e_G$. Luego, $xy^{-1} \in G_n$. Por ende, G_n es subgrupo de G.

Veamos ahora que es cerrado. En efecto, notemos que la función $f : G \to G$ tal que $x \mapsto x^n$ es una función continua, y

$$\begin{aligned} G_n &= \left\{ g \in G \middle| x^n = e_G \right\} \\ &= \left\{ g \in G \middle| f(x) = e_G \right\} \\ &= \left\{ g \in G \middle| f(x) \in \{e_G\} \right\} \\ &= f^{-1}(e_G) \end{aligned}$$

donde el conjunto $\{e_G\}$ es cerrado, luego G_n es cerrado.

Para la otra parte, considere $G = O(2, \mathbb{R})$, se tiene entonces que:

$$asd$$

■

Ejercicio 1.0.12
Sea $S(X)$ el grupo de todas las permutaciones de un conjunto dado X, es decir, $S(X)$ consta de todas las funciones biyectivas de X en X. Si $n \in \mathbb{N}$ y $x_1, ..., x_n \in X$, y $y_1, ..., y_n \in X$, denotemos:

$$U(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n) = \left\{ f \in S(X) \middle| f(x_i) = y_i \text{ para todo } i \in \left[\left|1, n\right|\right] \right\}$$

Demuestre que la familia de todos los conjuntos $U(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)$ forma base de una topología de grupo Hausdorff $\mathcal{P}$ en $S(X)$. La topología $\mathcal{P}$ se llama **topología de la convergencia puntual en** $S(X)$.

Demostración:

Denotemos por $\mathcal{U}$ a la familia de todos estos conjuntos. Si el conjunto es vacío, esta familia es vacía, por lo que no tiene sentido analizar este caso particular, suponga entonces que $X \neq \emptyset$.

Hay que verificar que se cumplen dos condiciones:

1. Sean $m, n \in \mathbb{N}$, y $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n, z_1, ..., z_m, u_1, ..., u_m \in X$. Queremos ver que el conjunto:

$$U(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n) \cap U(z_1, ..., z_m, u_1, ..., u_m)$$

se expresa como unión de elementos de $\mathcal{U}$. En efecto, si f está en la intersección si y sólo si

$$f(x_i) = y_i \quad \text{y} \quad f(z_j) = u_j$$

$\forall i \in [|1,n|], j \in [|1,m|]$, es decir que

$$f \in U(x_1,...,x_n,z_1,...,z_m,y_1,...,y_n,u_1,...,u_m)$$

por tanto, se tiene que

$$U(x_1,...,x_n,y_1,...,y_n) \cap U(z_1,...,z_m,u_1,...,u_m) = U(x_1,...,x_n,z_1,...,z_m,y_1,...,y_n,u_1,...,u_m)$$

(podemos renombrar los x_i y z_j como algún α_k y de manera análoga con los otros elementos de X, pero no es muy relevante a la demostración tal procedimiento).

2. X es unión de elementos de esta familia. En efecto, como X es no vacío, existe $x_0 \in X$, sea $\mathcal{X}_{x_0} = \left\{U(x_0,y) \middle| y \in X\right\}$. Se tiene entonces que:

$$\bigcup_{U \in \mathcal{X}_{x_0}} U = X$$

en efecto, una contención es inmediata. Sea $f \in S(X)$, entonces $f(x_0) \in X$, luego $f \in U(x_0, f(x_0)) \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{X}} U$.

Luego, $\mathcal{U}$ es base de una topología sobre $S(X)$.

Además, es Hausdorff. En efecto, sean $f,g \in S(X)$ tales que $f \neq g$, entonces existe $x \in X$ tal que $f(x) \neq g(x)$. Tenemos que:

$$f \in U(x, f(x)) \quad \text{y} \quad g \in U(x, g(x))$$

se tiene que $U(x,f(x)) \cap U(x,g(x)) = \emptyset$ ya que los elementos de $S(X)$ son funciones. Por ende, estos son dos abiertos disjuntos que contienen a f y g. Por tanto, el espacio es Hausdorff. ■

Ejercicio 1.0.13
Sea $S_f(X)$ el subgrupo de $S(X)$ que consiste en todas las permutaciones de X que mueven a lo más un número finito de puntos. Pruebe que $S_f(X)$ es denso en $S(X)$.

Demostración:
Hay que probar que todo abierto no vacío en $S(X)$ dotado de la topología $\mathcal{P}$ del inciso anterior, contiene puntos de $S_f(X)$.

En efecto, sea $U \subseteq S(X)$ abierto no vacío y $f \in U$. Por el ejercicio anterior, como $\mathcal{U}$ es base de la topología $\mathcal{P}$ sobre $S(X)$, existen $n \in \mathbb{N}$ y $x_1,...,x_n,y_1,...,y_m \in X$ tales que

$$f \in U(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m) \subseteq U$$

es decir, que $f(x_i) = y_i$ para todo $i \in [|1,n|]$. Se tiene entones que la función:

$$i_n(x) = \begin{cases} y_i & \text{si} \quad x = x_i \text{ para algún } i \in [|1,n|] \\ x & \text{si} \quad x \neq x_i \text{ para todo } i \in [|1,n|] \end{cases}$$

está en $S_f(X)$ y, más aún, en $U(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m)$, luego $f \in U$. Por tanto, $U \cap S_f(X) \neq \emptyset$.

Finalmente, se sigue que $S_f(X)$ es denso en $S(X)$.

■

Ejercicio 1.0.14 (*)
Sea G grupo topológico que tiene una base en la identidad consistente de subgrupos de G. Demuestre que G se encaja en $S(X)$ para algún conjunto X como subgrupo topológico.

Ejercicio 1.0.15
Sean G cualquier grupo y $\mathcal{V}$ una familia de subgrupos normales de G cerrada bajo intersecciones finitas. Muestre que la familia de todos los conjuntos de la forma gN, con g recorriendo todo G y N recorriendo todo $\mathcal{V}$, es base para una topología de grupo para G.

Demostración:

■

Ejercicio 1.0.16
Sea $\mathcal{F}$ la familia de todos los subgrupos de un grupo dado G que tienen índice finito en G. Pruebe que la familia $\mathcal{F}$ es base en e_G para una topología de grupo en G.

Demostración:

■

Ejercicio 1.0.17
Sea G un grupo topológico.

1. Verifique que $G^* = G/\overline{\{e_G\}}$ es un grupo topológico Hausdorff. Muestre que si H es cualquier grupo Hausdorff y, $f : G \to H$ es un homomorfismo continuo, entonces existe un homomorfismo continuo $g : G^* \to H$ tal que $g \circ \pi = f$, donde $\pi : G \to G^*$ es el homomorfismo canónico. Comente este resultado.

2. Sea G_i el grupo G con la topología indiscreta, y sea $i : G \to G_i$ la función identidad. Verifique que la función $\pi\Delta i : G \to G^* \times G : i$, dada por:

$$\pi\Delta i(g) = (\pi(g), i(g))$$

   es un isomorfismo topológico entre G y su imagen $\pi\Delta i(G)$.

Demostración:

■

Ejercicio 1.0.18
Sea H un subgrupo abierto y divisible de un grupo topológico abeliano G. Demuestre que G es topológicamente isomorfo a $H \times G/H$ (note que G/H es un grupo discreto).

Demostración:

■

Ejercicio 1.0.19
Sea G un grupo abeliano libre de torsión. Muestre que si g y g son elementos distintos de G entonces, existe un homomorfismo ϕ de G en $\mathbb{R}$ tal que $\phi(h) \neq \phi(g)$. Use este homomorfismo para definir una topología en G que sea Hausdorff.

Demostración:

Vamos a probar que, en general, el resultado no es correcto. Considere al grupo

$$G = \prod_{i\in I} \mathbb{Z}$$

donde $I = \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Se tiene que $|I| = \aleph_2$, por ende:

$$|G| = |\prod_{i\in I} \mathbb{Z}| = |I| \cdot |\mathbb{Z}| = |I| \cdot \aleph_0 = |I|$$

Luego, $|G| = \aleph_2$. Es claro que G es abeliano. Veamos que es libre de torsión. En efecto, si $x = \{x_i\}_{i\in I} \neq 0$ es tal que $x_i \in \mathbb{Z}$, entonces como

$$x_{\{0\}}^m$$

■