

Notas de Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

15 de marzo de 2024

Índice general

2. Convolución	2
2.1. Preliminares	2
2.2. Convolución	4
2.3. Convolución en \mathcal{L}_p	9

Capítulo 2

Convolución

Se sabe que el producto puntual de dos funciones integrables no necesariamente es una función integrable (por ejemplo, $f(x) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\chi_{[0,1]}$). Sin embargo, es posible definir un auténtico producto en $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ que sea compatible con la adición y el producto por escalares, con el cual $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ sea un **álgebra de Banach conmutativa sin elemento identidad**. Tal operación se llama la **convolución**.

2.1. Preliminares

Lema 2.1.1

Si M es un subconjunto despreciable de \mathbb{R}^n , entonces $M \times \mathbb{R}^m$ es despreciable en \mathbb{R}^{n+m} .

Demostración:

Escriba a \mathbb{R}^m como unión numerable de rectángulos acotados disjuntos. Basta probar que si Q es un rectángulo acotado en \mathbb{R}^m , entonces $M \times Q$ es despreciable en \mathbb{R}^{n+m} .

Sea $\varepsilon > 0$. Por definición de medida exterior, existe $\{P_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ sucesión de rectángulos acotados tales que $M \subseteq \bigcup_{\nu=1}^\infty P_\nu$ y:

$$\sum_{\nu=1}^\infty \text{Vol}(P_\nu) < \varepsilon$$

Entonces, $\{P_\nu \times Q\}_{\nu=1}^\infty$ es una sucesión de rectángulos acotados en \mathbb{R}^{n+m} tales que $M \times Q \subseteq \bigcup_{\nu=1}^\infty P_\nu \times Q$, y

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^\infty \text{Vol}(P_\nu \times Q) &= \text{Vol}(Q) \cdot \sum_{\nu=1}^\infty \text{Vol}(P_\nu) \\ &< \text{Vol}(Q)\varepsilon \end{aligned}$$

(en caso de que $\text{Vol}(Q) > 0$), luego, el conjunto $M \times Q$ es despreciable, con lo cual el conjunto $M \times \mathbb{R}^m$ también lo es. ■

Definición 2.1.1

Si $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{K}$ y $g : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{K}$, se define el **producto tensorial de f y g** como la función: $f \otimes g : \mathbb{R}^{p+q} \rightarrow \mathbb{K}$, dada por:

$$f \otimes g(x, y) = f(x)g(y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^{p+q}$$

Proposición 2.1.1

Si $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{K}$ y $g : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{K}$ son funciones medibles, entonces $f \otimes g : \mathbb{R}^{p+q} \rightarrow \mathbb{K}$ es medible.

Demostración:

1. Afirmamos que el resultado es cierto para funciones escalonadas $\varphi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{K}$ y $\psi : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{K}$ escritas canónicamente como:

$$\varphi = \sum_{i=1}^r c_i \chi_{P_i} \quad \text{y} \quad \psi = \sum_{j=1}^s d_j \chi_{Q_j}$$

donde los P_i y Q_j son rectángulos acotados disjuntos. En este caso:

$$\begin{aligned} \varphi \otimes \psi(x, y) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s c_i d_j \chi_{P_i}(x) \chi_{Q_j}(y) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s c_i d_j \chi_{P_i \times Q_j}(x, y) \end{aligned}$$

la cual es una función escalonada en \mathbb{R}^{p+q} , luego medible.

2. En el caso general, se sabe que existen $\{\varphi_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ en $\mathcal{E}(\mathbb{R}^p, \mathbb{K})$ y $\{\psi_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ en $\mathcal{E}(\mathbb{R}^q, \mathbb{K})$ y conjuntos despreciables $M \subseteq \mathbb{R}^p$, $N \subseteq \mathbb{R}^q$ tales que:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \varphi_\nu(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^p \setminus M$$

y,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \psi_\nu(x) = g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^q \setminus N$$

luego, se tiene que:

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow \infty} \varphi_\nu \otimes \psi_\nu(x, y) &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \varphi_\nu(x) \psi_\nu(y) \\ &= f(x)g(y) \end{aligned}$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^{p+q} \setminus [M \times \mathbb{R}^q \cup \mathbb{R}^p \times N]$. Por el lema anterior se tiene que $M \times \mathbb{R}^q \cup \mathbb{R}^p \times N$ es despreciable en \mathbb{R}^{p+q} . Como $\varphi_\nu \otimes \psi_\nu$ son medibles para todo $\nu \in \mathbb{N}$, entonces $f \otimes g$ es medible. ■

Corolario 2.1.1

Si $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{K}$ es medible, entonces $F : \mathbb{R}^{p+q} \rightarrow \mathbb{K}$ dada como:

$$F(x, y) = f(x), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^{p+q}$$

es medible.

Demostración:

Es inmediata de la proposición anterior tomando a f y $g = \chi_{\mathbb{R}^q}$. ■

Corolario 2.1.2

Si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^p, \mathbb{K})$, $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^q, \mathbb{K})$, entonces $f \otimes g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^{p+q}, \mathbb{K})$ y:

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f \otimes g = \int_{\mathbb{R}^p} f \cdot \int_{\mathbb{R}^q} g$$

Demostración:

Es inmediato del teorema de Tonelli. ■

2.2. Convolución

Definición 2.2.1

Sean $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ funciones medibles. La **convolución de f por g** se define como la función de \mathbb{R}^n en \mathbb{K} tal que:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy$$

para toda $x \in \mathbb{R}^n$ tal que la integral exista.

Ejemplo 2.2.1

Considere la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

entonces,

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dx = \int_0^{\infty} f(y)g(x-y)dx$$

se tienen dos casos, por como están dadas las funciones f y g :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(y)g(x-y)dx &= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \\ \int_0^x f(y)g(x-y)dy & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \\ \int_0^x f(y)g(x-y)dy & \text{si } 0 < x < 1 \\ \int_0^1 f(y)g(x-y)dy & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \\ \int_0^x g(x-y)dy & \text{si } 0 < x < 1 \\ \int_0^1 g(x-y)dy & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \\ \int_0^x g(x-y)dy & \text{si } 0 < x < 1 \\ \int_0^1 g(x-y)dy & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \\ \int_0^x g(x-y)dy & \text{si } 0 < x < 1 \\ \int_0^1 g(x-y)dy & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ \int_0^1 g(x-y)dy & \text{si } x > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_0^\infty f(y)g(x-y)dx &= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \\ \int_0^x (x-y)dy & \text{si } 0 < x < 1 \\ \int_{x-1}^1 g(x-y)dy & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \\ -\frac{(x-y)^2}{2} \Big|_0^x & \text{si } 0 < x < 1 \\ \int_{x-1}^1 (x-y)dy & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \\ \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 < x < 1 \\ -\frac{(x-y)^2}{2} \Big|_{x-1}^1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \\ \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 < x < 1 \\ -\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{1}{2} & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \\ \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 < x < 1 \\ -\frac{x^2}{2} + x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Observación 2.2.1

Note que la función $f * g$ es continua. (esto servirá para ver que la convolución obtenida es correcta).

Ejemplo 2.2.2

Recuerde la fórmula de Cauchy para la n -ésima integral reiterada:

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-n}} dt$$

la igualdad anterior es la misma que la de la función:

$$\int_0^x f(t) \frac{dt}{\Gamma(n)(x-t)^{n-1}} = f * g(x)$$

donde

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{\Gamma(n)x^{n-1}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Si $0 < \alpha \leq 1$, definimos:

$$\int_0^x f(t) \frac{dx}{\Gamma(\alpha)(x-t)^{1-\alpha}} = I_0^\alpha[f](x)$$

llamada la **integral fraccional de orden α de f en x** . Por ejemplo:

$$I_0^{1/2}[t](x) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} x^{3/2}$$

$$I_0^{1/2} \left[\frac{4}{3\sqrt{\pi}} t^{3/2} \right] (x) = \frac{x^2}{2}$$

que concuerda con la integral normal de t .

Ahora estudiaremos algunas propiedades de este operador.

Proposición 2.2.1 (Asociatividad y conmutatividad de la convolución)

Sean $f, g, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ medibles.

1. Si para algún $x \in \mathbb{R}^n$ existe la convolución $f * g(x)$, entonces también existe $g * f(x)$, y,

$$f * g(x) = g * f(x)$$

2. Si la función $|f| * |g|$ está definida c.t.p. en \mathbb{R}^n y, para algún $x \in \mathbb{R}^n$ existe $(|f| * |g|) * |h|(x)$, entonces existen $(f * g) * h(x)$, $f * (g * h)(x)$ y,

$$(f * g) * h(x) = f * (g * h)(x)$$

Demostración:

De (1): Se tiene que:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(u)du = \int_{\mathbb{R}^n} g(u)f(x-y)du = g * f(x)$$

por el cambio de variable $u = x - y$, de Jacobiano $|(-1)^n| = 1$.

En particular, esto garantiza la existencia de $g * f(x)$.

De (2): Se demostrará primero que la función

$$(y, z) \mapsto f(x)g(y-z)h(x-y)$$

es medible como función de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en \mathbb{K} , para un $x \in \mathbb{R}^n$ fijo. Ya se sabe que $(y, z) \mapsto f(z)$ es medible (por una proposición sobre productos tensoriales).

Se afirma que la función $(y, z) \mapsto h(x-y)$ es medible. En efecto, $u \mapsto h(u)$ es medible. Por el cambio de variable $u = x - y$, la función $y \mapsto h(x-y)$ también es medible (por el teorema de cambio de variable). Luego, como con f , se sigue que $(y, z) \mapsto h(x-y)$ es medible.

También $(y, z) \mapsto g(y-z)$ es medible. Por productos tensoriales:

$$G(u, v) = g(u)$$

es medible. La función $\Phi(r, s) = (r - s, s)$ es un isomorfismo C^∞ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Por el teorema de cambio de variable se sigue que es medible la función:

$$G \circ \Phi(y, z) = g(y - z)$$

Por lo tanto, la función inicial es medible.

Puesto que para $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h(x-y)|dy \int_{\mathbb{R}^n} |f(z)||g(y-z)|dz = \int_{\mathbb{R}^n} |h(x-y)|(|f| * |g|)(y)dy = (|f| * |g|) * |h|(x) < \infty$$

(para los x en que esté definida la función), entonces por Tonelli la función $(y, z) \mapsto f(z)g(y-z)h(x-y)$ es integrable, y por Fubini:

$$(f * g) * h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x-y)dy \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(y-z)dz$$

y,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} h(x-y)f(z)g(y-z)dydz &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)dx \int_{\mathbb{R}^n} h(x-y)g(y-z)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)dz \int_{\mathbb{R}^n} h((x-z)-u)g(y-z)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)(g * h)(x-z)dz \\
&= f * (g * h)(x)
\end{aligned}$$

En particular, existen y son iguales $f * (g * h)(x)$ y $(f * g) * h(x)$. ■

Teorema 2.2.1

Si $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, se cumplen las afirmaciones siguientes.

1. Para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$, existe $f * g(x)$.
2. La función $f * g$, definida c.t.p. en \mathbb{R}^n , es integrable en \mathbb{R}^n .
3. $\int_{\mathbb{R}^n} f * g = \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)$.
4. $\mathcal{N}_1(f * g) \leq \mathcal{N}_1(|f| * |g|) = \mathcal{N}_1(f) \mathcal{N}_1(g)$.

Demostración:

De (1): Ya se sabe que la función $(x, y) \mapsto f(y)g(x-y)$ es medible (ver la proposición anterior). Como

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|dy \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|dx = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|dy\right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(z)|dz\right) < \infty$$

haciendo el cambio de variable $x = y + z$ y por ser f, g integrables, entonces la función $(x, y) \mapsto f(y)g(x-y)$ es integrable en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Por el teorema de Fubini, la función $y \mapsto f(y)g(x-y)$ es integrable para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$, lo cual prueba el primer inciso.

De (2): Además, por Fubini nuevamente, la función $x \mapsto f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy$ definida c.t.p. en \mathbb{R}^n también es integrable, lo cual prueba el segundo inciso.

De (3): Y, por Fubini:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dx dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)dy \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)dy \int_{\mathbb{R}^n} g(u)du \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)dy\right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(u)du\right)
\end{aligned}$$

lo cual prueba el tercer inciso.

De (4): Aplicando (3) a $|f|, |g|$, resulta que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_1(f * g) &= \int_{\mathbb{R}^n} |f * g|(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x - y) dy \right| dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y) g(x - y)| dx dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (|f| * |g|)(x) dx \\
&= \mathcal{N}_1(|f| * |g|) \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f| \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g| \right) \\
&= \mathcal{N}_1(f) \mathcal{N}_1(g)
\end{aligned}$$

lo cual prueba el cuarto inciso. ■

Observación 2.2.2 1. La existencia y el valor de la convolución dependen solamente de las clases de equivalencia de f y g , se puede pues considerar la convolución como una aplicación de $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{T}) \times L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ en $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, tal que:

$$\mathcal{N}_1(f * g) \leq \mathcal{N}_1(f) \mathcal{N}_1(g)$$

2. Es claro que:

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) * g = \alpha_1 (f_1 * g) + \alpha_2 (f_2 * g)$$

y

$$f * (\beta_1 g_1 + \beta_2 g_2) = \beta_1 (f * g_1) + \beta_2 (f * g_2)$$

o sea, que la convolución es un aplicación bilineal y asociativa.

Definición 2.2.2

Un **Álgebra de Banach** es un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|)$ provisto de un producto $(x, y) \mapsto x \cdot y$. Este producto es bilineal y, además,

$$\|x \cdot y\| \leq \|x\| \|y\|$$

si el producto es conmutativo, se dice que el álgebra de Banach es **conmutativa**.

Ejercicio 2.2.1

En un álgebra de Banach, la función $(x, y) \mapsto x \cdot y$ es continua del espacio normado producto $E \times E$ en E .

Demostración:

Sea $\varepsilon > 0$ y $(x_0, y_0) \in E \times E$. Tomemos $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, entonces, si $(x, y) \in E \times E$ es tal que:

$$\|(x_0, y_0) - (x, y)\| < \delta$$

entonces,

$$\|x_0 - x\| < \delta \quad \text{y} \quad \|y_0 - y\| < \delta$$

luego, se tiene que: ■

Ejemplo 2.2.3

Considere \mathbb{K} como espacio vectorial sobre sí mismo con la norma usual y, provisto de la multiplicación usual en \mathbb{K} , es un álgebra de Banach conmutativa con elemento uno.

Ejemplo 2.2.4

Sea S un conjunto no vacío. El espacio vectorial $\mathcal{B}(S, \mathbb{K})$ de las funciones acotadas de S en \mathbb{K} , provisto de la norma uniforme $\|\cdot\|_\infty$ y con la multiplicación definida puntualmente, es un álgebra de Banach conmutativa con elemento uno (la función constante de valor uno).

Ejemplo 2.2.5

Sea S un espacio métrico. El subespacio $\mathcal{BC}(S, \mathbb{K})$ de las funciones continuas y acotadas de S en \mathbb{K} es una sub-álgebra de Banach del ejemplo anterior con elemento uno.

Ejemplo 2.2.6

El subespacio $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ de las funciones continuas nulas en infinito es una sub-álgebra de Banach de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ sin elemento uno.

Ejemplo 2.2.7

Sea E un espacio de Banach. El espacio normado $\text{End}(E)$ de todos los endomorfismos continuos de E provisto del producto $(A, B) \mapsto A \circ B$ es un álgebra de Banach no conmutativa con elemento uno.

Ejemplo 2.2.8

$L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ provisto de la convolución también es un álgebra de Banach conmutativa (¿con elemento identidad?).

2.3. Convolución en \mathcal{L}_p

Teorema 2.3.1 (Desigualdad de Hölder Generalizada)

Sean p_1, \dots, p_m números positivos tales que:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_m} = 1$$

entonces, si $f_1 \in \mathcal{L}_{p_1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, $f_2 \in \mathcal{L}_{p_2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, ..., $f_m \in \mathcal{L}_{p_m}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, entonces $f_1 \cdot f_2 \cdots f_m \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, y

$$\mathcal{N}_1(f_1 \cdot f_2 \cdots f_m) \leq \mathcal{N}_{p_1}(f_1) \mathcal{N}_{p_2}(f_2) \cdots \mathcal{N}_{p_m}(f_m)$$

Demostración:

■

Proposición 2.3.1

Si $f : \mathbb{R}^{p+q} \rightarrow \mathbb{K}$ es medible, se cumple lo siguiente:

1. Para casi toda $x \in \mathbb{R}^p$, la función $f_x(y) = f(x, y)$ de \mathbb{R}^q en \mathbb{K} es medible.

2. Si para casi toda $x \in \mathbb{R}^p$, la función f_x es integrable en \mathbb{R}^q , entonces:

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f_x = \int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) dy$$

definida c.t.p. es medible.

Demostración:

■

Teorema 2.3.2 (Teorema de Young)

Sean $p, q \in [1, \infty[$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$ y defina r como sigue:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$$

Entonces, si $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y $g \in \mathcal{L}_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, se cumple lo siguiente:

1. Para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$, existe la convolución $f * g$, es decir:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)dy$$

para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$.

2. $f * g \in \mathcal{L}_r(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$.

3. $\mathcal{N}_r(f * g) \leq \mathcal{N}_p(f) \mathcal{N}_q(g)$.

Demostración:

Observemos primero que los números p, q, r satisfacen lo siguiente:

$$r > 1, \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{r} \geq 0, \quad \frac{1}{q} - \frac{1}{r} \geq 0$$

En efecto,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \leq 2 - 1 = 1 \Rightarrow r \geq 1$$

las otras dos son inmediatas, ya que:

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{r} > 1 - \frac{1}{q} \geq 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{q} - \frac{1}{r} > 1 - \frac{1}{p} \geq 0$$

Se verá que para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$, la función $y \mapsto f(y)g(x - y)$ es integrable en \mathbb{R}^n . Por un teorema anterior, ya se sabe que dicha función es medible. Escriba

$$|f(y)||g(x - y)| = (|f(y)|^p |g(x - y)|^q)^{\frac{1}{r}} (|f(y)|^p)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} (|g(x - y)|^q)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}}$$

Para probar el resultado, se probarán dos casos:

1. $p > 1$ y $q > 1$ En este caso, $\frac{1}{p} - \frac{1}{r} > 0$ y $\frac{1}{q} - \frac{1}{r} > 0$. Si

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{r}, \quad \frac{1}{\beta} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r}, \quad \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{r}$$

entonces,

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 1$$

La función $y \mapsto (|f(y)|^p |g(x-y)|^q)^{\frac{1}{r}}$ está en $\mathcal{L}_\alpha(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ (pues, existe la convolución $|f|^p * |g|^q(x)$ para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$). También, $y \mapsto (|f(y)|^p)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}}$ está en $\mathcal{L}_\beta(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y $y \mapsto (|g(x-y)|^q)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}}$ está en $\mathcal{L}_\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$.

Por Hölder generalizado, se tiene que $y \mapsto |f(y)| |g(x-y)|$ es integrable, en particular, existe la convolución $f * g$, lo que prueba (1). Además,

$$\begin{aligned} |f * g|(x) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| |g(x-y)| dy \\ &\leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p |g(x-y)|^q dy \right]^{\frac{1}{r}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p dy \right]^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^q dy \right]^{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}} \\ &= [|f|^p * |g|^q(x)]^{\frac{1}{r}} \mathcal{N}_p(f)^{1 - \frac{p}{r}} \mathcal{N}_q(g)^{1 - \frac{q}{r}} \end{aligned}$$

luego,

$$|f * g|^r(x) \leq \mathcal{N}_p(f)^{r-p} \mathcal{N}_q(g)^{r-q} (|f|^p * |g|^q(x))$$

por el teorema anterior (el cual asegura que $|f|^p * |g|^q$ es integrable), implica que $|f| * |g| \in \mathcal{L}_3(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, lo cual prueba (2).

Finalmente,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_r(f * g)^r &= \int_{\mathbb{R}^n} |f * g(x)|^r dx \\ &\leq \mathcal{N}_p(f)^{r-q} \mathcal{N}_g(r-p) \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p * |g|^q(x) dx \\ &= \mathcal{N}_p(f)^{r-q} \mathcal{N}_g(r-p) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g|^q \right) \\ &= \mathcal{N}_p(f)^{r-q} \mathcal{N}_g(r-p) \mathcal{N}_p(f)^p \mathcal{N}_q(g) \\ &= (\mathcal{N}_p(f) \mathcal{N}_q(g))^r \\ &\Rightarrow \mathcal{N}_r(f * g) \leq \mathcal{N}_p(f) \mathcal{N}_q(g) \end{aligned}$$

2. $p > 1$, $q = 1$. En este caso, $r = p$, luego se sigue que:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{r} = \frac{1}{p}, \quad \frac{1}{\beta} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r} = 0, \quad \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{r} = \frac{1}{p^*}$$

Luego, si $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que:

$$\begin{aligned} |f(y)| |g(x-y)| &= (|f(y)|^p |g(x-y)|^q)^{\frac{1}{r}} (|f(y)|^p)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} (|g(x-y)|^q)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}} \\ &= (|f(y)|^p |g(x-y)|)^{\frac{1}{p}} (|f(y)|^p)^0 (|g(x-y)|^q)^{\frac{1}{p^*}} \\ &= (|f(y)|^p |g(x-y)|)^{\frac{1}{p}} (|g(x-y)|^q)^{\frac{1}{p^*}} \end{aligned}$$

Como $y \mapsto (|f(y)|^p |g(x-y)|)^{\frac{1}{p}}$ está en $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ (pues existe $|f|^p * |g|(x)$ para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$) y $y \mapsto (|g(x-y)|^q)^{\frac{1}{p^*}}$ está en $\mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, entonces por Hölder y la ecuación anterior, se sigue que $y \mapsto |f(y)g(x-y)|$ es integrable en \mathbb{R}^n , luego existe $|f| * |g|(x)$ para casi toda

$x \in \mathbb{R}^n$, lo que prueba (1). Además,

$$\begin{aligned}
|f * g|(x) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| |g(x-y)| dy \\
&\leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p |g(x-y)| dy \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)| dy \right]^{\frac{1}{p^*}} \\
&= [|f|^p * |g|](x)^{\frac{1}{p}} \mathcal{N}_1(g)^{\frac{1}{p^*} = 1 - \frac{1}{p}} \\
\Rightarrow |f * g|^p(x) &\leq [|f|^p * |g|](x) \mathcal{N}_1(g)^{1-p}
\end{aligned}$$

luego, $f * g \in \mathcal{L}_r(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ (recuerde que $r = p$) lo cual prueba (2), y

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f * g|^p(x) dx &\leq \mathcal{N}_1(g)^{p-1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g| \right) \\
&\leq \mathcal{N}_1(g)^{p-1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \right) \mathcal{N}_1(g) \\
&\leq \mathcal{N}_p(f)^p \mathcal{N}_1(g)^p
\end{aligned}$$

lo cual prueba (3).

El caso $p = q = 1$ es el teorema anterior, y por la conmutatividad de la convolución, no es necesario probar el caso $q = 1, p > 1$. ■

Observación 2.3.1

El caso $q = 1$ y $r = p$ es importante, dice: Si $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ entonces, para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$ existe $f * g(x) \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y $\mathcal{N}_p(f * g) \leq \mathcal{N}_p(f) \mathcal{N}_1(g)$.