Lista 4. Pt. 2.

4.5. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión que converge a $x \in E$, **demuestre** que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) = x.$$

Dem:

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ $\ni$ si $n \geq N$:

$$N(x_n - x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Para $n \geq N_0 = \max\{N, \left[\frac{2M(N-1)}{\varepsilon}\right]\}$

$$\begin{aligned}
N\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} - x\right) &\leq \frac{1}{n}N(x_1 - x) + \ldots + \frac{1}{n}N(x_n - x) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} N(x_i - x) \\
&= \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{n} N(x_i - x) + \sum_{i=N}^{n} \frac{1}{n} N(x_i - x) \\
&\leq \frac{1}{n}(N-1)M + \frac{n-N}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Como $n \geq \left[\frac{2M(N-1)}{\varepsilon}\right]$, entonces $\frac{1}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2M(N-1)}$, y $\frac{n-N}{n} \leq 1$, así

$$N\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} - x\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = x$$

q.e.d.

4.6. Considere el espacio normado $(\mathfrak{c}_0, \mathcal{N}_\infty)$. **Pruebe** las siguientes afirmaciones.

i. Si $x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{c}_0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x(n_0)| = \mathcal{N}_\infty(x)$.

ii. Si $x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{c}_0$, entonces se cumple la igualdad

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n) e_n,$$

donde, para toda $n \in \mathbb{N}$, $e_n = \{e_n(k)\}_{k=1}^{\infty} \in \mathfrak{c}_0$ está dado por

$$e_n(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n, \\ 0 & \text{si } k \neq n. \end{cases}$$

Dem:

De (i):

Tenemos dos casos:

1) $N_\infty(x)=0$, Como C_0 es subespacio vectorial cerrado de l_∞, entonces $N_\infty(x)=0 \iff x=\bar{0}$, luego $\exists\ 1\in\mathbb{N} \ni |x(1)|=0=N_\infty(x)$

2) $N_\infty(x)>0$. Sea $\varepsilon=\frac{N_\infty(x)}{2}>0$. Como $x\in C_0$, para $\varepsilon>0\ \exists\ N\in\mathbb{N} \ni$ si $n\geq N$:

$$|x(n)-0|<\varepsilon=\frac{N_\infty(x)}{2}$$

Como $N_\infty(x)=\sup_{n\in\mathbb{N}}|x(n)|$, para $\varepsilon>0\ \exists\ m_0\in\mathbb{N} \ni N_\infty(x)<|x(m_0)|+\varepsilon \Rightarrow \frac{N_\infty(x)}{2}<|x(m_0)|$. Por tanto, debe suceder que $m_0<N$. Sea entonces el conjunto:

$$\left\{n\in\mathbb{N} \mid |x(n)|>\frac{N_\infty(x)}{2}\right\}=A$$

Claramente $A\subseteq J_{N-1}$ y, $A\neq\emptyset$ pues $A\neq\emptyset$ $(m_0\in A)$, así A tiene elemento máximo. Por tanto $\exists\ n_0\in A \ni$

$$|x(n_0)|\geq|x(n)|,\ \forall\ n\in A$$

Pero, $|x(n)|>\frac{N_\infty(x)}{2}$, $\forall\ n\in A$, luego:

$$|x(n_0)|\geq|x(n)|,\ \forall\ n\in\mathbb{N}.$$

ya que, si $n\notin A$, $n\geq N$ ó $n<N$. Si $n\geq N$, $|x(n)|<\frac{N_\infty(x)}{2}\Rightarrow |x(n_0)|>|x(n)|$. Si $n\notin A$, $|x(n)|\leq\frac{N_\infty(x)}{2}\Rightarrow|x(n_0)|>|x(n)|$.

Por tanto debe suceder que:

$$N_\infty(x)=|x(n_0)|$$

q.e.d.

De (ii): Sea $\varepsilon>0$. Probaremos que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}x(i)e_i=x$$

Como $\{x(n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a 0, para $\varepsilon>0\ \exists\ N\in\mathbb{N} \ni$ si $n\geq N$:

$$|x(n)| < \varepsilon$$

Veamos que:

$$N_\infty\left(x - \sum_{i=1}^{n} x(i) e_i\right) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |y(n)|$$

donde $y : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ está dada como:

$$\forall m \in \mathbb{N},\ y(m) := \begin{cases} 0 & \text{si } m \leq n. \\ x(m) & \text{si } n < m. \end{cases}$$

Por tanto, determinar $\sup_{n \in \mathbb{N}} |y(n)|$ es equivalente a:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |y(n)| = \sup_{m \in \mathbb{N}} |x(n+m)|$$

Como $n \geq N$, entonces $n+m \geq N, \forall m \in \mathbb{N}$, por lo cual:

$$|x(n+m)| < \varepsilon, \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \sup_{m \in \mathbb{N}} |x(n+m)| \leq \varepsilon$$

luego:

$$N_\infty\left(x - \sum_{i=1}^{n} x(i) e_i\right) \leq \varepsilon$$

lo anterior fue para $\varepsilon > 0$ arbitrario. Como se cumple para todo, entonces:

$$N_\infty\left(x - \sum_{i=1}^{\infty} x(i) e_i\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n) e_n$$

q.e.d.

4.7. **i.** Si $f, g : E \to F$ son dos funciones continuas, **demuestre** que la función $u : E \times E \to F$ dada por

$$u(x,y) = f(x) + g(y) \quad \forall x, y \in E,$$

es continua en el espacio normado producto $E \times E$.

ii. Si $f : E \to \mathbb{R}$ y $g : E \to F$ son continuas, **pruebe** que la función $v : E \times E \to F$ dada por

$$v(x,y) = f(x)g(y), \quad \forall x, y \in E,$$

es continua en el espacio normado producto $E \times E$.

Dem:

De (i): Sea $(x_0, y_0) \in E \times E$ y $\varepsilon > 0$. Como f y g son continuas en x_0 y y_0, resp. entonces para $\varepsilon > 0$ $\exists$ $\delta_1, \delta_2 > 0$ $\ni$ si

$$\forall x, y \in E \ni N_E(x_0 - x) < \delta_1 \text{ y } N_E(y_0 - y) < \delta_2 \Rightarrow$$
$$N_F(f(x_0) - f(x)), N_F(g(x_0) - g(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Si $(x,y) \in E$ es tal que:

$$N_{E\times E}((x,y) - (x_0, y_0)) < \delta$$
$$\Rightarrow \max\{N_E(x - x_0), N_E(y - y_0)\} < \delta$$
$$\Rightarrow N_F(f(x_0) - f(x)), N_F(g(y_0) - g(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por tanto:

$$N_F(u(x_0,y_0) - u(x,y)) = N_F(f(x_0) + g(y_0) - f(x) - g(y))$$
$$\leq N_F(f(x_0) - f(x)) + N_F(g(y_0) - g(y))$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Por tanto, u es continua en (x_0, y_0). Como el $(x_0, y_0) \in E \times E$ fue arbitrario, entonces u es continua en $E \times E$.

De (ii):

Sea $(x_0, y_0) \in E \times E$. Como f y g son continuas en x_0 y y_0 resp. $\exists$ $\delta_1, \delta_2 > 0$ $\ni$

$$\forall x \in E \ni N_E(x_0 - x) < \delta_1 \Rightarrow |f(x_0) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(1 + N_F(g(x_0)))}$$
$$\forall y \in E \ni N_E(y_0 - y) < \delta_2 \Rightarrow N_F(g(y_0) - g(y)) < \frac{\varepsilon}{2(1 + |f(x_0)|)}$$

y, para $\varepsilon = 1 > 0$ $\exists$ $\delta_3 > 0$ $\ni$ si

$$\forall y \in E \ni N_E(y_0 - y) < \delta_3 \Rightarrow N_F(g(y_0) - g(y)) < 1$$

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} > 0$. Si $(x,y) \in E \times E$ $\ni$ $N_{E\times E}((x_0, y_0) - (x,y)) < \delta$, entonces:

$$N_E(x_0 - x) < \delta_1 \text{ y } N_E(y_0 - y) < \min\{\delta_2, \delta_3\}$$