Ejercicios Grupos Topológicos

Cristo Daniel Alvarado

12 de marzo de 2024

Índice general

Capítulo 1

Ejercicios Capítulo 1

Ejercicio 1.0.1
Sea H un subgrupo denso abeliano de un grupo topológico G. Entonces, G es abeliano.

Demostración:
Por la proposición 1.3.2 (4), como $ab = ba$ para todo $a, b \in H$, entonces se sigue que $ab = ba$ para todo $a, b \in \overline{H}$. Como H es denso en G es tiene entonces que $\overline{H} = G$, es decir:

$$ab = ba, \quad \forall a, b \in G$$

por tanto, G es abeliano. ■

Ejercicio 1.0.2
Suponga que H es un subgrupo denso de un grupo topológico G y $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que si $x^n = e_G$ para todo $x \in H$, entonces los elementos del grupo G satisfacen la misma ecuación.

Demostración:
Sea $f : G \to G$ tal que $x \mapsto x^n$. Esta es una función continua para la que cual se tiene que el conjunto

$$\begin{aligned} A =& f^{-1}(e_G) \\ =& \left\{ x \in G \middle| f(x) = e_G \right\} \\ =& \left\{ x \in G \middle| x^n = e_G \right\} \end{aligned}$$

es cerrado, pero $H \subseteq A$, luego $G = \overline{H} \subseteq A$, es decir que

$$x^n = e_g, \quad \forall x \in G$$

■

Definición 1.0.1
Sea G un grupo. Decimos que G es **grupo de torsión** si para todo $g \in G$ existe $n_g \in G$ tal que $g^{n_g} = e_G$.

Ejercicio 1.0.3
Sean G un grupo topológico y H un subgrupo denso de G tal que todo elemento $h \in H$ es de orden finito. ¿Es G de torsión?

Solución:

Considere el grupo $(\mathbb{S}^1, \cdot)$ donde:

$$\mathbb{S}^1 = \left\{ e^{ix} \in \mathbb{C} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$$

donde el producto $\cdot$ es el producto usual de $\mathbb{C}$, dado por:

$$e^{ix} \cdot e^{iy} = e^{i(x+y)}$$

dotado de la topología $\tau_{\mathbb{S}^1}$

$$\tau_{\mathbb{S}^1} = \left\{ U \cap \mathbb{S}^1 \middle| U \text{ es abierto en } \mathbb{C} \right\}$$

es claro que las funciones $f : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ tales que $(e^{ix}, e^{iy}) \mapsto e^{i(x+y)}$ y, $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ tales que $e^{ix} \mapsto e^{-ix}$ son continuas ya que son reestricciones de funciones continuas de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Es claro que el conjunto:

$$\mathbb{H}^1 = \left\{ e^{2\pi ir} \in \mathbb{S}^1 \middle| r \in \mathbb{Q} \right\}$$

es subgrupo de $(\mathbb{S}^1, \cdot)$, el cual es denso en $\mathbb{S}^1$, para el que se cumple que todo elemento es de orden finito, pues si $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$:

$$(e^{2\pi ir})^q = e^{2\pi ip} = 1$$

donde 1 es la identidad de $(\mathbb{S}^1, \cdot)$. Por ende, todo elemento del subgrupo denso $\mathbb{H}^1$ es de orden finito, pero G no es de torsión, ya que el elemento

$$e^i$$

no es de orden finito. □

Ejercicio 1.0.4
Demuestre que si S es denso en un grupo topológico G y O es abierto no vacío en G, entonces $O \cdot S = S \cdot O = G$.

Demostración:

■

Ejercicio 1.0.5
Sea G un grupo topológico. ¿Es $G' = \left\{ xyx^{-1}y^{-1} \in G \middle| x, y \in G \right\}$ un subgrupo de G? ¿Es G' cerrado en G?

Solución:

Afirmamos que G' no es subgrupo de G. En efecto, es claro que $e \in G'$, pero... (hay algo con el producto que falla)

Es cerrado, ya que si $f : G \times G \to G$ es tal que $(x, y) \mapsto xyx^{-1}y^{-1}$, se tiene que f es una función continua para la cual

$$\begin{aligned} G' &= \left\{ xyx^{-1}y^{-1} \in G \middle| x, y \in G \right\} \\ &= \left\{ f(x, y) \in G \middle| (x, y) \in G \times G \right\} \\ &= f^{-1}(G) \end{aligned}$$

es decir, que G' es la imagen inversa de un cerrado (el conjunto G) y, por ende es cerrado. □

Ejercicio 1.0.6
Pruebe que si G es un grupo topológico, entonces el conjunto

$$H = \left\{ g \in G \middle| gx = xg, \forall x \in G \right\}$$

es un subgrupo cerrado normal de G.

Demostración:
Veamos que es subgrupo. En efecto, es claro que $e_G \in H$. Sean ahora $g, h \in G$, entonces se tiene que $g^{-1} \in G$, pues:

$$\begin{aligned} gx &= xg \\ \Rightarrow gxg^{-1} &= x \\ \Rightarrow xg^{-1} &= g^{-1}x \\ \Rightarrow g^{-1}x &= xg^{-1} \end{aligned}$$

$\forall x \in G$ y, además:

$$(gh)x = g(hx) = g(xh) = (gx)h = x(gh), \quad \forall x \in G$$

por tanto, $gh \in H$. Se sigue entonces que H es subgrupo de G.

Veamos que es normal. Sea $g \in G$ y $h \in G$, hay que ver que $ghg^{-1} \in H$. En efecto, veamos que:

$$(ghg^{-1})x = (gg^{-1})hx = (e_G)xh = x(he_G) = x(hgg^{-1}) = x(ghg^{-1}), \quad \forall x \in G$$

por tanto, $ghg^{-1} \in H$. Luego, H es normal en G.

Ahora, como H es subgrupo, entonces $\overline{H}$ también lo es... ■

Ejercicio 1.0.7
Sea G un grupo tal que todos sus elementos son de orden 2. Demuestre que G tiene que ser abeliano. Pruebe que si G es infinito, entonces admite una topología de Hausdorff no discreta.

Demostración:
Veamos que G es abeliano. En efecto, sean $a, b \in G$, se tiene entonces que:

$$(ab)^2 = (ab)(ab) = e_G$$

es decir, que $ab = (ab^{-1}) = b^{-1}a^{-1}$, pero $a^{-1} = a$ y $b^{-1} = b$. Por ende, $ab = ba$ luego, G es abeliano.

Suponga que G es infinito. (no sé). ■

Ejercicio 1.0.8
Dé un ejemplo de grupo que admite al menos dos topologías de Hausdorff de grupo distintas.

Solución:

□

Ejercicio 1.0.9
Sea $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ el grupo multiplicativo de los números reales con la topología usual, y sean $G' = \{-1, 1\}$ y $G'' = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| x > 0 \right\}$.

1. Pruebe que G' y G'' son subgrupos de G.

2. Pruebe que existe un isomorfismo topológico entre G/G' y G''.
3. Pruebe que G y $G' \oplus G''$ son topológicamente isomorfos.
4. Pruebe que $G' \cong \mathbb{Z}_2$, $G'' \cong \mathbb{R}$ y, deduzca que $G \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{R}$.

Demostración:

De (1): Es claro que son subgrupos de G.

De (2): Notemos que:

$$\begin{aligned} G/G' &= \left\{ G'a \middle| a \in G \right\} \\ &= \left\{ \{-1,1\}\, a \middle| a \in G \right\} \\ &= \left\{ \{-a,a\} \middle| a \in G \right\} \end{aligned}$$

Defina $f : G'' \to G/G'$ tal que $a \mapsto \{-a, a\}$ ■