

Curso de Lógica Matemática

Cristo Daniel Alvarado

17 de septiembre de 2024

Índice general

0. Introducción	2
0.1. Temario	2
0.2. Conectivas Lógicas	2
0.3. Ejercicios	3
1. Lógica Proposicional	4
1.1. Alfabeto	4
1.2. Modeos o Estructuras	5
1.3. Cálculo Proposicional	8

Capítulo 0

Introducción

0.1. Temario

Los siguientes temas se verán a lo largo del curso:

1. Lógica (Teoría de Modelos).
 - 1.1) Lógica proposicional.
 - 1.2) Lógica de primer orden.
2. Teoría de la Computabilidad.
 - 2.1) Conjuntos/Funciones computables.
 - 2.2) Teoremas de incompletitud.
3. Teoría de Conjuntos.
 - 3.1) Ordinales.
 - 3.2) Cardinalidad.

Y la bibliografía para el curso es la siguiente:

- Enderton, 'Introducción matemática a la lógica'.
- Enderton, 'Teoría de la computabilidad'.
- Copi, 'Lógica Simbólica' o 'Computability Theory'.
- Rebeca Weber 'Computability Theory'.
- Hrbacek, Seda.
- Hernández Hernández.

0.2. Conectivas Lógicas

La disyunción (\vee), conjunción (\wedge), negación (\neg), implicación (\Rightarrow) y si y sólo si (\iff) son las conectivas lógicas usadas usualmente. Para las demostraciones se tienen que tomar los casos que se cumplan con estas implicaciones, por lo que si podemos simplificar el conjunto de conectivas lógicas, todo se simplificará.

Para ello, veamos que

$$P \Rightarrow Q \equiv \neg(P \wedge \neg Q)$$

tienen las mismas tablas de verdad. Por ejemplo también se tiene

$$P \wedge Q \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q)$$

ó

$$P \vee Q \equiv \neg(\neg P \wedge \neg Q)$$

A $\{\wedge, \vee, \neg\}$ se le conoce como un **conjunto completo de conectivas lógicas** (es decir que toda conectiva se expresa como combinaciones de ellas). Nos podemos quedar simplemente con conjuntos completos de disyuntivas con solo dos elementos, a saber: $\{\wedge, \neg\}$ y $\{\vee, \neg\}$, ya que $P \vee Q$ es $\neg(\neg P \wedge \neg Q)$. (de forma similar a lo otro $P \wedge Q$ es $\neg(\neg P \vee \neg Q)$).

También $\{\Rightarrow, \neg\}$ es otro conjunto completo de conectivas lógicas, ya que $P \wedge Q$ es $\neg(P \Rightarrow \neg Q)$.

Y, $\{|\}$ es un conjunto completo, donde $|$ es llamado la **barra de Scheffel**, que tiene la siguiente tabla de verdad.

P	Q	$P Q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

con este, se tiene un conjunto completo de conectivas lógicas. Veamos que

$$P|P \equiv \neg P$$

y,

$$P \wedge Q \equiv \neg(P|Q) \equiv (P|Q)|(P|Q)$$

Como muchas veces se usan conectivas de este tipo:

$$(P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow ((P \Rightarrow R) \wedge \neg(Q \Rightarrow S) \wedge T)$$

al ser muy largas, a veces es más conveniente escribirlas en forma Polaca. De esta forma, lo anterior quedaría de la siguiente manera:

$$\Rightarrow \Rightarrow P \neg Q \wedge \wedge P R \neg \Rightarrow Q S T$$

Ahora empezamos con el estudio formal de la lógica.

0.3. Ejercicios

Convierta a/de notación Polaca, según sea el caso.

1. $P \Rightarrow (Q \wedge \neg A)$. Sería $\Rightarrow P \wedge Q \neg A$.
2. $\Rightarrow A \neg \wedge C D$. Sería $A \Rightarrow \neg(C \wedge D)$.
3. $(A \Rightarrow B) \iff (\neg A \vee \neg(\neg B \vee C))$. Sería $\iff \Rightarrow A B \vee \neg A \neg \vee \neg B C$.
4. $\vee \neg \neg \Rightarrow B C \wedge \Rightarrow A \wedge B C A$. Sería $(\neg \neg(B \Rightarrow C)) \vee ((A \Rightarrow (B \wedge C)) \wedge A)$.
5. $(P \Rightarrow Q) \iff (\neg Q \Rightarrow \neg P)$. Sería $\iff \Rightarrow P Q \Rightarrow \neg Q \neg P$.

Capítulo 1

Lógica Proposicional

1.1. Alfabeto

Hablaremos un poco de sintaxis y semántica.

- Sintaxis: la forma en la que vamos a ordenar nuestras variables y conectivas.
- Semántica: da significado al orden de nuestras variables y conectivas.

Definiremos el lenguaje de la lógica proposicional. Para ello primero definiremos el alfabeto. El **alfabeto** de la lógica proposicional es un conjunto que consta de dos tipos de símbolos:

1. **Variables**, denotadas por $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ (a lo más una cantidad numerable). Estas representan proposiciones o enunciados (tengo un paraguas, me caí de las escaleras, no tengo café en la cafetera, etc. ...).
2. **Conectivas**, como \Rightarrow y \neg .

El alfabeto que usaremos es: $\{\Rightarrow, \neg, p_1, p_2, \dots\}$.

Observación 1.1.1

Podríamos usar otro alfabeto, pero dado a que $\{\Rightarrow, \neg\}$ es un conjunto completo de conectivas lógicas (y resulta más sencillo usarlas que la barra de Scheffel), se tomará este alfabeto con estas conectivas.

Aceptamos la existencia de estas cosas (pues, al menos debemos aceptar la existencia de algo).

Se van a trabajar con sucesiones finitas de símbolos del alfabeto descrito anteriormente. Ahora necesitaremos especificar que tipos de sucesiones van a servirnos para tener un significado formal.

Ejemplo 1.1.1

Por ejemplo la sucesión $(p_3), \emptyset, (\Rightarrow, p_2, \neg, p_5)$. Básicamente estas sucesiones finitas representan fórmulas en notación polaca.

Definición 1.1.1

En el conjunto de sucesiones finitas de símbolos del alfabeto, definimos una **fórmula bien formada** (abreviada como **FBF**) como sigue:

1. Cada variable es una **FBF**.
2. Si φ, ψ son **FBF**, entonces $\neg\varphi$ y $\Rightarrow \varphi\psi$ también lo son.

Observación 1.1.2

Recordar que usamos la notación Polaca en la definición anterior. Cuando se colocan en (2) $\neg\varphi$ y $\Rightarrow \varphi\psi$, hace referencia a concatenar estas sucesiones finitas.

A continuación unos ejemplos:

Ejemplo 1.1.2

p_{17}, p_{54} y $\Rightarrow p_2 p_{25}$ son FBF. Las primeras dos son llamadas **variables aisladas**. También lo es $\neg \Rightarrow p_2 p_{25}$ (en este ejemplo, los p_i son variables).

Pero, por ejemplo $\Rightarrow \neg p_1 p_2 p_3$ y $\Rightarrow p_4$ no son FBF.

Viendo el ejemplo anterior, notamos que el operador \Rightarrow es binario (solo usa dos entradas) y \neg es unario (solo una entrada). Por lo cual, añadir o no demás variables a los operadores dentro de la fórmula, hace que la fórmula ya no sea una FBF.

Observación 1.1.3

Eventualmente se va a sustituir la notación Polaca por la normal, para que se pueda leer la FBF y el proceso no sea robotizado.

Definiremos ahora más conectivas lógicas para poder trabajar más cómodamente.

Definición 1.1.2

Se definirán tres conectivas lógicas adicionales.

1. Se define la **disyunción** $\varphi \vee \psi$ como $\Rightarrow \neg\psi\varphi$ (en notación Polaca).
2. Se define la **conjunción** $\varphi \wedge \psi$ como $\neg(\neg\psi \vee \neg\varphi)$.
3. Se define el **si sólo si** $\psi \iff \varphi$ como $(\psi \Rightarrow \varphi) \wedge (\varphi \Rightarrow \psi)$.

1.2. Modeos o Estructuras

En el fondo, queremos que las FBF sean cosas verdaderas o falsas. Un Modelo o Estructura es algo que le va a dar significado a las FBF, esta es la parte de la semántica. De alguna manera va a ser una forma de asignarle el valor de verdadero o falso a cada una de las variables.

Definición 1.2.1

Un **Modelo o Estructura** de la lógica proposicional es una función $m : \text{Var} \rightarrow \{V, F\}$, donde Var denota al conjunto de símbolos que son variables. Básicamente estamos diciendo que hay variables que son verdaderas y otras que son falsas.

Teorema 1.2.1

Para todo modelo m , existe una única extensión $\overline{m} : \text{FBF} \rightarrow \{V, F\}$, donde FBF denota al conjunto de las fórmulas bien formadas, tal que

1. $\overline{m}(p) = m(p)$ para todo $p \in \text{Var}$.
2. Para todo $\varphi, \psi \in \text{FBF}$:

$$\overline{m}(\neg\varphi) = V \text{ si y sólo si } \overline{m}(\varphi) = F$$

y,

$$\overline{m}(\Rightarrow \varphi\psi) = F \text{ si y sólo si } \overline{m}(\varphi) = V \text{ y } \overline{m}(\psi) = F$$

Demostración:

La prueba aún no se hará, pero es por recursión. ■

Definición 1.2.2

Sea m un modelo, φ una fórmula y Σ un conjunto de fórmulas. Decimos que

1. m **satisface** φ (denotado por $m \models \varphi$) si $\overline{m}(\varphi) = V$.
2. m **satisface** Σ (denotado por $m \models \Sigma$) si $m \models \varphi$ para cada $\varphi \in \Sigma$.

Ejemplo 1.2.1

Sea m un modelo tal que $m(p_1) = V$ y $m(p_i) = F$, para todo $i \geq 2$. En este caso $m \not\models p_1 p_3$, pero $m \models \neg p_5$.

Definición 1.2.3

Sea φ una fórmula y Σ un conjunto de fórmulas.

1. Decimos que φ es **consecuencia lógica** de Σ o que Σ **lógicamente implica** φ (denotado por $\Sigma \models \varphi$) si para todo modelo m tal que $m \models \Sigma$, se cumple que $m \models \varphi$.
2. Decimos que φ es una **tautología** si $\emptyset \models \varphi$.
3. Decimos que φ es una **contradicción** si $\emptyset \models \neg\varphi$ es una tautología.

Veamos ejemplos para aclarar las ideas:

Ejemplo 1.2.2

Se tiene $\{\Rightarrow p_1 p_2, p_2\} \not\models p_1$. En efecto, para un modelo m tal que $m(p_2) = V$ y $m(p_1) = F$ es tal que m no satisface p_1 .

Ejemplo 1.2.3

Muestre que $\{\Rightarrow p_1 p_2, \Rightarrow p_2 p_3\} \models \Rightarrow p_1 p_3$.

Observación 1.2.1

De ahora en adelante, $f \upharpoonright A$ denotará la restricción de f al conjunto A .

Lema 1.2.1

Sean n, m dos modelos y sea φ una fórmula. Sean $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}$ las variables que ocurren en φ . Si $n \upharpoonright \{p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}\} = m \upharpoonright \{p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}\}$, entonces

$$n \models \varphi \text{ si y sólo si } m \models \varphi$$

Demostración:

Por la definición de \models , basta con demostrar que

$$\bar{n}(\varphi) = \bar{m}(\varphi)$$

Esto lo haremos por inducción sobre φ .

- Si φ es una variable p_t , entonces

$$\begin{aligned}\bar{n}(\varphi) &= \bar{n}(p_t) \\ &= n(p_t) \\ &= m(p_t) \\ &= \bar{m}(p_t) \\ &= \bar{m}(\varphi)\end{aligned}$$

- Hay que ver que se cumple también para las conectivas:

1. Supongamos que $\varphi = \neg\psi$, siendo ψ una FBF tal que $\bar{n}(\psi) = \bar{m}(\psi)$. Entonces,

$$\bar{n}(\varphi) = \bar{n}(\neg\psi)$$

se tiene que

$$\begin{aligned}\bar{n}(\neg\psi) &= V \text{ si y sólo si } \bar{n}(\psi) = F \\ &\text{si y sólo si } \bar{m}(\psi) = F \\ &\text{si y sólo si } \bar{m}(\neg\psi) = V \\ &\text{si y sólo si } \bar{m}(\varphi) = V\end{aligned}$$

por tanto, $\bar{m}(\varphi) = V$ si y sólo si $\bar{m}(\varphi) = V$. De forma análoga se llega a que $\bar{m}(\varphi) = F$ si y sólo si $\bar{m}(\varphi) = F$. Por tanto:

$$\bar{m}(\varphi) = \bar{n}(\varphi)$$

2. Supongamos que φ es de la forma $\Rightarrow \psi\chi$ y que $\bar{m}(\psi) = \bar{n}(\psi)$, y $\bar{m}(\chi) = \bar{n}(\chi)$.

Se tiene que $\bar{m}(\Rightarrow \psi\chi) = F$ si y sólo si $\bar{m}(\psi) = V$ y $\bar{m}(\chi) = F$, si y sólo si $\bar{n}(\psi) = V$ y $\bar{n}(\chi) = F$, si y sólo si $\bar{n}(\Rightarrow \psi\chi) = F$ (que es el único caso en que es falso). Por tanto:

$$\bar{m}(\varphi) = \bar{n}(\varphi)$$

por inducción se sigue que

$$n \models \varphi \text{ si y sólo si } m \models \varphi$$

■

Con este lema, se tiene que el ejemplo 1.2.2 ya tiene fundamentación, ya que únicamente basta que el modelo sea válido en las variables p_1 y p_2 (no en la cantidad infinita de variables que podemos llegar a tener).

Observación 1.2.2

Si Σ es un conjunto finito de fórmulas (digamos $\Sigma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$), entonces $\Sigma \models \varphi$ si y sólo si $(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \Rightarrow \varphi$ es una tautología.

1.3. Cálculo Proposicional

Nuestro cálculo proposicional se compondrá de lo siguiente:

1. **Axiomas Lógicos.**
2. **Reglas de inferencia.**

más adelante se probará que si hubiesemos elegido diferentes axiomas lógicos y reglas de inferencia, habríamos llegado al mismo resultado (siempre que se haya cumplido una hipótesis adicional ¿?).

Definición 1.3.1 (Axiomas Lógicos)

Tenemos para nuestro cálculo proposicional los siguientes axiomas lógicos:

1. $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$.
2. $\varphi \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \neg\varphi) \Rightarrow \neg\psi)$.
3. $\varphi \Rightarrow \varphi'$ siempre que φ resulte de sustituir ψ por $\neg\neg\psi$ o viceversa (siendo ψ una subfórmula de φ).
4. $\varphi \Rightarrow \varphi'$ siempre que φ resulte de sustituir $\psi \Rightarrow \chi$ por $\neg\chi \Rightarrow \neg\psi$ o viceversa (siendo ψ y χ subfórmulas de φ).
5. $\varphi \Rightarrow \varphi'$ siempre que φ resulte de sustituir $\neg\psi \Rightarrow \psi$ por ψ (siendo ψ una subfórmula de φ).
6. $(\varphi \Rightarrow (\chi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi))$.

siendo φ una FBF dada y ψ una FBF arbitraria en 1 y 2, y φ, ψ, χ FBF dadas.

Ejemplo 1.3.1

Ejemplo del axioma 1: si p_1 es una variable,

$$p_1 \Rightarrow (p_3 \Rightarrow p_1)$$

siendo p_3 una variable arbitraria.

Ejemplo 1.3.2

Ejemplo del axioma 3:

$$(p_1 \Rightarrow \neg\neg p_3) \Rightarrow (p_1 \Rightarrow p_3)$$

o

$$(p_1 \Rightarrow p_3) \Rightarrow (p_1 \Rightarrow \neg\neg p_3)$$

Definición 1.3.2 (Reglas de Inferencia)

Se define una única regla de inferencia, denominada **Modus Ponens** (abreviada **MP**) dada por:

$$\frac{\varphi \quad \varphi \Rightarrow \psi}{\therefore \psi}$$

Definición 1.3.3

Sea Σ un conjunto y φ una fórmula.

1. Una **demostración** de φ a partir de Σ es una sucesión finita de fórmulas $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ tal que:
 - 1.I) $\varphi_n = \varphi$.
 - 1.II) Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ se tiene una de las tres:
 - I.II.a) $\varphi_i \in \Sigma$.
 - I.II.b) φ_i es axioma lógico.
 - I.II.c) existen $k, j \in \{1, \dots, n\}$ con $k < j < i$ tales que φ_j es $\Rightarrow \varphi_k \varphi_i$.
2. Decimos que φ es **demostrable a partir de Σ** , o que φ es un **teorema de Σ** si existe una demostración de φ a partir de Σ , esto se simboliza por $\Sigma \vdash \varphi$.

Definición 1.3.4

Convenimos que

- $\varphi \vee \psi \equiv \neg\varphi \Rightarrow \psi$.
- $\varphi \wedge \psi \equiv \neg(\varphi \Rightarrow \neg\psi)$.
- $\varphi \iff \psi \equiv (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$.

Observación 1.3.1

De ahora en adelante **R.E.** simplifica reescritura.

Ejemplo 1.3.3

Se cumple que $\{\neg p_3, p_1 \Rightarrow p_3, p_1 \vee (p_2 \Rightarrow p_3), \neg p_3 \Rightarrow (p_3 \Rightarrow p_5), p_2\} \vdash p_5$.

Demostración:

Se tiene la siguiente demostración de p_5 :

1)	$\neg p_3$		Premisa
2)	p_1	\Rightarrow	Premisa
3)	p_1	\vee	Premisa
4)	$\neg p_3$	\Rightarrow	Premisa
5)	p_2		Premisa
6)	$(p_1 \Rightarrow p_3)$	\Rightarrow	2 Ax. 4
7)	$\neg p_3$	\Rightarrow	6,2 M.P.
8)	$\neg p_1$		1,6 M.P.
9)	$\neg(p_2 \Rightarrow p_3)$	\Rightarrow	3 R.E.
10)	$(\neg(p_2 \Rightarrow p_3) \Rightarrow p_1)$	\Rightarrow	9 Ax. 4
11)	$\neg p_1$	\Rightarrow	10,9 M.P.
12)	$(\neg p_1 \Rightarrow \neg\neg(p_2 \Rightarrow p_3))$	\Rightarrow	11 Ax. 3
13)	$\neg p_1$	\Rightarrow	11,12 M.P.
14)	p_2	\Rightarrow	11,12 M.P.
15)	p_3		13,5 M.P.
16)	p_3	\Rightarrow	1,4 M.P.
17)	p_5		16,15 M.P.
<hr/>			
		\therefore	p_5



Tenemos las siguientes reglas de inferencia adicionales:

Proposición 1.3.1

Se cumple lo siguiente:

Modus Tollens

$$\frac{\begin{array}{c} \varphi \Rightarrow \psi \\ \neg \psi \end{array}}{\therefore \neg \varphi}$$

Silogismo Disyuntivo

$$\frac{\begin{array}{c} \varphi \vee \psi \\ \neg \varphi \end{array}}{\therefore \psi}$$

Adición

$$\frac{\varphi}{\therefore \varphi \vee \psi}$$

siendo ψ una FBF cualquiera.

Simplificación

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\therefore \varphi}$$

Conjunción

$$\frac{\begin{array}{c} \varphi \\ \psi \end{array}}{\therefore \varphi \wedge \psi}$$

Demostración:

En efecto, veamos que existen las demostraciones:

■ Modus Tollens:

1)	φ	\Rightarrow	ψ	Premisa
2)	$\neg \psi$			Premisa
3)	$(\varphi \Rightarrow \psi)$	\Rightarrow	$(\neg \psi \Rightarrow \neg \varphi)$	1 Ax. 4
4)	$\neg \psi$	\Rightarrow	$\neg \varphi$	1,3 M.P.
5)	$\neg \varphi$			2,4 M.P.
$\therefore \neg \varphi$				

■ Silogismo Disyuntivo:

1)	φ	\vee	ψ	Premisa
2)	$\neg \varphi$			Premisa
3)	$\neg \varphi$	\Rightarrow	ψ	1 R.E.
4)	ψ			2,1 M.P.
$\therefore \psi$				

■ **Adición:**

1)	φ		Premisa
2)	φ	$\Rightarrow (\neg\psi \Rightarrow \varphi)$	1 Ax. 1
3)	$\neg\psi$	$\Rightarrow \varphi$	1,2 M.P.
4)	$(\neg\psi \Rightarrow \varphi)$	$\Rightarrow (\neg\varphi \Rightarrow \neg\neg\psi)$	3 Ax. 4
5)	$\neg\varphi$	$\Rightarrow \neg\neg\psi$	3,4 M.P.
6)	$(\neg\varphi \Rightarrow \neg\neg\psi)$	$\Rightarrow (\neg\varphi \Rightarrow \psi)$	5 Ax. 3
7)	$\neg\varphi$	$\Rightarrow \psi$	5,6 M.P.
8)	φ	$\vee \psi$	7 R.E.
<hr/>			
$\therefore \varphi \vee \psi$			

■ **Simplificación:**

1)	φ	$\wedge \psi$	Premisa
2)	$\neg(\varphi$	$\Rightarrow \neg\psi)$	1 R.E.
3)	$\neg(\varphi \Rightarrow \neg\psi)$	$\Rightarrow \neg(\neg\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$	2 Ax. 4
4)	$\neg(\neg\neg\psi$	$\Rightarrow \neg\varphi)$	3,2 M.P.
5)	$\neg(\neg\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$	$\Rightarrow \neg(\psi \Rightarrow \neg\varphi)$	4 Ax. 3
6)	$\neg(\psi$	$\Rightarrow \neg\varphi)$	5,4 M.P.
7)	$\neg\varphi$	$\Rightarrow \neg(\psi \Rightarrow \neg\varphi)$	6 Ax. 1 y M.P.
8)	$(\neg\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \neg\varphi))$	$\Rightarrow (\neg\varphi \Rightarrow (\neg\neg\varphi \Rightarrow \neg\psi))$	7 Ax. 1
5)	$\neg\varphi$	$\Rightarrow (\neg\neg\varphi \Rightarrow \neg\psi)$	8,7 M.P.
6)	$(\neg\varphi \Rightarrow (\neg\neg\varphi \Rightarrow \neg\psi))$	$\Rightarrow (\neg\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \neg\psi))$	5 Ax. 3
7)	$\neg\varphi$	$\Rightarrow (\varphi \Rightarrow \neg\psi)$	6,5 M.P.
8)	$\neg(\varphi \Rightarrow \neg\psi)$	$\Rightarrow \neg\neg\varphi$	Ax. 4 + M.P.
9)	$\neg\neg\varphi$		M.P.
10)	φ		M.P.
<hr/>			
$\therefore \varphi$			

La prueba está mal, pero el resultado es correcto (debo verificar que detalles de la prueba anoté mal).

■ **Conjunción:**

1)	φ		Premisa
2)	ψ		Premisa
3)	φ	$\Rightarrow ((\psi \Rightarrow \neg\varphi) \Rightarrow \neg\psi)$	1 Ax. 2
4)	$(\psi \Rightarrow \neg\varphi)$	$\Rightarrow \neg\psi$	3,1 M.P.
5)	$((\psi \Rightarrow \neg\varphi) \Rightarrow \neg\psi)$	$\Rightarrow (\neg\neg\psi \Rightarrow \neg(\psi \Rightarrow \neg\varphi))$	4 Ax. 3
6)	$\neg\neg\psi$	$\Rightarrow \neg(\psi \Rightarrow \neg\varphi)$	5,4 M.P.
7)	ψ	$\Rightarrow \neg\neg\psi$	2 Ax. 3
8)	$\neg\neg\psi$		7,1 M.P.
9)	$\neg(\psi$	$\Rightarrow \neg\varphi)$	6,8 M.P.
10)	ψ	$\wedge \varphi$	10 R.E.
<hr/>			
$\therefore \psi \wedge \varphi$			

■

Proposición 1.3.2

Se cumple lo siguiente:

Conmutatividad de \vee

$$\frac{\varphi \quad \vee \quad \psi}{\therefore \psi \vee \varphi}$$

Conmutatividad de \wedge

$$\frac{\varphi \quad \wedge \quad \psi}{\therefore \psi \wedge \varphi}$$

Demostración:

■ Conmutatividad de \vee

1)	φ	\vee	ψ	Premisa
2)	$\neg\varphi$	\Rightarrow	ψ	1 R.E.
3)	$(\neg\varphi \Rightarrow \psi)$	\Rightarrow	$(\neg\psi \Rightarrow \neg\neg\varphi)$	2 Ax. 4
4)	$\neg\psi$	\Rightarrow	$\neg\neg\varphi$	3,2 M.P.
5)	$(\neg\psi \Rightarrow \neg\neg\varphi)$	\Rightarrow	$(\neg\psi \Rightarrow \varphi)$	4 Ax. 3
6)	$\neg\psi$	\Rightarrow	φ	5,4 M.P.
7)	ψ	\vee	φ	6 R.E.
$\therefore \psi \vee \varphi$				

■ Conmutatividad de \wedge

1)	φ	\wedge	ψ	Premisa
2)	$\neg(\varphi$	\Rightarrow	$\neg\psi)$	1 R.E.
3)	$\neg(\varphi \Rightarrow \neg\psi)$	\Rightarrow	$\neg(\neg\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$	2 Ax. 4
4)	$\neg(\neg\neg\psi$	\Rightarrow	$\neg\varphi)$	3,2 M.P.
5)	$\neg(\neg\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$	\Rightarrow	$\neg(\psi \Rightarrow \neg\varphi)$	4 Ax. 3
6)	$\neg(\psi$	\Rightarrow	$\neg\varphi)$	5,4 M.P.
7)	ψ	\wedge	φ	5,4 M.P.
$\therefore \psi \wedge \varphi$				



Ejercicio 1.3.1

Complete las siguientes demostraciones (que es equivalente a probar que existe una demostración de los siguientes enunciados):

1. $\{p_1 \vee (p_5 \vee p_7), (p_5 \vee p_7) \Rightarrow (p_{13} \vee p_{14}), (p_3 \vee p_{14}) \Rightarrow (p_1 \vee p_7), \neg p_1\} \vdash p_7$.
2. $\{p_4 \Rightarrow (p_5 \Rightarrow p_6), (p_5 \Rightarrow p_6) \Rightarrow p_{10}, (p_{20} \vee p_{30}) \Rightarrow \neg p_{40}, \neg p_{40} \Rightarrow (p_5 \iff \neg p_{45}), \neg p_{10}, \neg(p_5 \iff \neg p_{45}), \neg p_4 \wedge (p_{20} \vee p_{30})\}$.

Demostración:

De (1):

1)	p_1	\vee	$(p_5 \vee p_7)$	Premisa
2)	$(p_5 \vee p_7)$	\Rightarrow	$(p_{13} \vee p_{14})$	Premisa
3)	$(p_{13} \vee p_{14})$	\Rightarrow	$(p_1 \vee p_7)$	Premisa
4)	$\neg p_1$			Premisa
5)	p_5	\vee	p_7	1,4 S.D.
6)	p_{13}	\vee	p_{14}	2,5 M.P.
7)	p_1	\vee	p_7	3,6 M.P.
8)	p_7			7,4 S.D.
$\therefore p_7$				

De (2):

1)	p_4	\Rightarrow	$(p_5 \Rightarrow p_7)$	Premisa
2)	$(p_5 \Rightarrow p_7)$	\Rightarrow	p_{10}	Premisa
3)	$(p_{20} \Rightarrow p_{30})$	\Rightarrow	$\neg p_{40}$	Premisa
4)	$\neg p_{40}$	\Rightarrow	$(p_5 \iff \neg p_{45})$	Premisa
5)	$\neg p_{10}$			Premisa
6)	$\neg(p_5$	\iff	$\neg p_{45})$	Premisa
7)	p_{40}			4,6 M.T.
8)	p_{40}	\Rightarrow	$\neg\neg p_{40}$	7 Ax. 3
9)	$\neg\neg p_{40}$			8,7 M.P.
10)	$\neg(p_{20}$	\Rightarrow	$p_{30})$	3,9 M.T.
11)	p_{20}	\vee	p_{30}	10 R.E.
12)	$((p_5 \Rightarrow p_7) \Rightarrow p_{10})$	\Rightarrow	$(\neg p_{10} \Rightarrow \neg(p_5 \Rightarrow p_7))$	2 Ax. 4
13)	$\neg p_{10}$	\Rightarrow	$\neg(p_5 \Rightarrow p_7)$	12,2 M.P.
14)	$\neg(p_5$	\Rightarrow	$p_7)$	13,5 M.P.
15)	$\neg p_4$			1,14 M.T.
16)	$\neg p_4$	\wedge	$(p_{20} \vee p_{30})$	15,11 Ad.
		\therefore	$\neg p_4 \wedge (p_{20} \vee p_{30})$	

■

Proposición 1.3.3

Se cumple lo siguiente:

Doble Negación

$$\frac{\varphi}{\therefore \neg\neg\varphi}$$

y,

$$\frac{\neg\neg\varphi}{\therefore \varphi}$$

Transposición

$$\frac{\begin{array}{l} \varphi \\ \varphi \Rightarrow \varphi' \text{ (con Ax. 4)} \end{array}}{\therefore \varphi'}$$

Tautología

$$\frac{\neg\psi \Rightarrow \psi}{\therefore \psi}$$

Demostración:

■ Doble Negación:

1)	φ		Premisa
2)	φ	\Rightarrow	$\neg\neg\varphi$ 1 Ax. 4
3)	$\neg\neg\varphi$		2,1 M.P.
		\therefore	$\neg\neg\varphi$

y,

1)	$\neg\neg\varphi$	Premisa
2)	$\neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi$	1 Ax. 4
3)	φ	2,1 M.P.
$\therefore \varphi$		

- **Transposición:** Solo basta con usar un Modus Ponens y una instancia del axioma 4.
- **Tautología:**

1)	$\neg\psi$	$\Rightarrow \psi$	Premisa
2)	$(\neg\psi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi$		1 Ax. 5
3)	ψ		2,1 M.P.
$\therefore \varphi$			

■

Ejercicio 1.3.2

Complete las siguientes demostraciones.

Demostración:

De (a):

1)	A	$\Rightarrow B$	Premisa
2)	C	$\Rightarrow D$	Premisa
3)	$\neg B$	$\vee \neg D$	Premisa
4)	$\neg\neg A$		Premisa
5)	$E \wedge F$	$\Rightarrow C$	Premisa
6)	A		4 D.N.
7)	B		1,6 M.P.
8)	$\neg\neg B$		7 D.N.
9)	$\neg D$		3,8 S.D.
10)	$\neg D$	$\Rightarrow \neg C$	2 Transp.
11)	$\neg C$		9,10 M.P.
12)	$\neg(E \wedge F)$		5,11 S.D.
$\therefore \neg(E \wedge F)$			

De (b):

1)	E	$\Rightarrow (F \wedge \neg G)$	Premisa
2)	$(F \vee G) \Rightarrow H$		Premisa
3)	E		Premisa
4)	F	$\wedge \neg G$	1,3 M.P.
5)	F		4, Simp.
6)	F	$\vee G$	4 Ad.
7)	H		2,6 M.P.
$\therefore H$			

■

Ejercicio 1.3.3

Demuestre que existe una demostración formal de los siguientes argumentos:

Demostración:

De (c):

1)	J	\Rightarrow	K	Premisa
2)	J	\vee	$(K \vee \neg L)$	Premisa
3)	$\neg K$			Premisa
4)	$\neg J$			1,3 M.T.
5)	K	\vee	$\neg L$	2,4 S.D.
6)	$\neg L$			3,5 S.D.
7)	$\neg L$	\vee	$\neg K$	6 Ad.
$\therefore \neg L \vee \neg K$				

De (d):

1)	$(R \Rightarrow \neg S)$	\wedge	$(T \Rightarrow \neg U)$	Premisa
2)	$(V \Rightarrow \neg W)$	\wedge	$(X \Rightarrow \neg Y)$	Premisa
3)	$(T \Rightarrow W)$	\wedge	$(U \Rightarrow S)$	Premisa
4)	V			Premisa
5)	R			Premisa
6)	R	\Rightarrow	$\neg S$	1 Simp.
7)	$\neg S$			6,5 M.P.
8)	$(U \Rightarrow S)$	\wedge	$(T \Rightarrow W)$	3 Conm.
9)	U	\Rightarrow	S	3 Simp.
10)	$\neg U$			9,7 M.T.
11)	V	\Rightarrow	$\neg W$	2 Simp.
12)	$\neg W$			4,11 M.P.
13)	T	\Rightarrow	W	3 Simp.
14)	$\neg T$			13,12 M.T.
15)	$\neg T$	\wedge	$\neg U$	14,10 Conj.
$\therefore \neg T \wedge \neg U$				

■

Proposición 1.3.4 (Leyes de DeMorgan)

Se cumple que:

$$\frac{\neg(\varphi \wedge \psi)}{\therefore \neg\varphi \vee \neg\psi}$$

y,

$$\frac{\neg(\varphi \vee \psi)}{\therefore \neg\varphi \wedge \neg\psi}$$

Demostración:

En efecto, veamos que

1)	$\neg(\varphi \wedge \psi)$	Premisa
2)	$\neg(\neg(\varphi \Rightarrow \neg\psi))$	1 R.E.
3)	$\varphi \Rightarrow \neg\psi$	2 D.N.
4)	$\neg\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$	3 Transp.
5)	$\neg\psi \vee \neg\varphi$	4 R.E.
6)	$\neg\varphi \vee \neg\psi$	5 Conm.
$\therefore \neg\varphi \vee \neg\psi$		

y,

1)	$\neg(\varphi \vee \psi)$	Premisa
2)	$\neg(\neg\varphi \Rightarrow \psi)$	1 R.E.
3)	$\neg(\neg\varphi \Rightarrow \neg\neg\psi)$	2 Ax. 3 y M.P.
$\therefore \neg\varphi \wedge \neg\psi$		

Falta completar esta prueba. ■

Lema 1.3.1

$\emptyset \vdash \varphi \Rightarrow \varphi$ para cualquier fórmula φ .

Demostración:

En efecto, veamos que

1)	φ	$\Rightarrow ((\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi)$	Ax. 1
2)	$(\varphi \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi))$	$\Rightarrow ((\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi))$	Ax. 3
3)	$(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi))$	$\Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi)$	2,1 M.P.
4)	φ	$\Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$	Ax. 1
5)	φ	$\Rightarrow \varphi$	3,4 M.P.
		$\therefore \varphi \Rightarrow \varphi$	

■

Teorema 1.3.1 (Metateorema de Deducción)

Si Σ es un conjunto de fórmulas y φ, ψ son fórmulas, entonces:

$$\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \text{ si y sólo si } \Sigma \vdash \varphi \Rightarrow \psi$$

Demostración:

Probemos la suficiencia. Suponga que $\Sigma \vdash \varphi \Rightarrow \psi$, entonces a partir de $\Sigma \cup \{\varphi\}$ tenemos:

$n)$	φ	Premisa
\vdots	\vdots	\vdots
$n+k)$	$\varphi \Rightarrow \psi$	Líneas de Σ que prueban $\varphi \Rightarrow \psi$
$n+k+1)$	ψ	$\Sigma \vdash \varphi \Rightarrow \psi$
		$n, n+k$ M.P.
		$\therefore \psi$

ya que se sabe que existe una demostración de $\varphi \Rightarrow \psi$ a partir de Σ . Por tanto, $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.

Para la necesidad, supongamos que existe una demostración $(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, \psi)$ de ψ a partir de $\Sigma \cup \{\varphi\}$, y supongamos por hipótesis de inductiva que $\Sigma \vdash \varphi \Rightarrow \varphi_i$ para cada $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

ψ cumple algunos de los siguiente casos:

1. ψ fue un axioma lógico.
2. $\psi \in \Sigma$.
3. ψ es φ .
4. Existen $i, j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tales que $i < j$ y φ_j es $\varphi_i \Rightarrow \psi$.

Consideremos los casos 1) y 2). En cualquier caso tenemos la siguiente demostración:

\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	Líneas de Σ
$n)$	ψ	Premisa de Σ /Axioma Lógico		
$n+1)$	$\psi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$	n Ax.1		
$n+2)$	$\varphi \Rightarrow \psi$	$n+1, n$ M.P.		
		$\therefore \varphi \Rightarrow \psi$		

Consideremos el caso 3), en cuyo caso por el lema anterior se tiene que $\emptyset \vdash \varphi \Rightarrow \varphi$, esto es que $\emptyset \vdash \varphi \Rightarrow \psi$, en particular $\Sigma \vdash \varphi \Rightarrow \psi$.

Consideremos ahora el caso 4), se tiene que:

\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	Líneas de Σ
$j)$	φ_i	\Rightarrow	ψ	Línea j de Σ
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	Líneas de Σ
$k)$	φ	\Rightarrow	φ_i	Deducción de $\varphi \Rightarrow \varphi_i$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	Más demostraciones a partir de Σ
$l)$	φ	\Rightarrow	$(\varphi_i \Rightarrow \psi)$	j Ax. 1
$l+1)$	$(\varphi \Rightarrow (\varphi_i \Rightarrow \psi))$	\Rightarrow	$((\varphi \Rightarrow \varphi_i) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi))$	l Ax. 6
$l+2)$	$(\varphi \Rightarrow \varphi_i)$	\Rightarrow	$(\varphi \Rightarrow \psi)$	$l+1, l$ M.P.
$l+3)$	φ	\Rightarrow	ψ	$l+2, l+2$ M.P.
$\therefore \varphi \Rightarrow \psi$				

aplicando inducción se tiene lo deseado. ■

Observación 1.3.2

Metateorema de Deducción será denotado por M.D. La palabra Sup. abrevia a Suposición.

Ejemplo 1.3.4

Muestre que existe una demostración de $\{P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow S\} \vdash P \Rightarrow S$.

Solución:

La forma de hacer pruebas con el Metateorema de Deducción será la siguiente: si se quiere probar $P \Rightarrow S$, entonces se supondrá P y se marcará a la izquierda con una línea que nos indicará a partir de suponer P , llegar a S . Llegando a S , cerramos la línea y ponemos línea abajo con $P \Rightarrow S$, indicando las líneas que marcan desde la suposición de P hasta la deducción de S , como se muestra en la siguiente demostración:

	1)	$P \Rightarrow Q$	Premisa
	2)	$Q \Rightarrow S$	Premisa
\rightarrow	3)	P	Sup.
	4)	Q	1,3 M.P.
	5)	S	2,4 M.P.
<hr/>			
	6)	$P \Rightarrow S$	2-5 M.D.
<hr/>			
	$\therefore Q$		

□

Teorema 1.3.2 (Metateorema (Demostración por Contradicción))

Si Σ es un conjunto de fórmulas y φ, ψ son fórmulas, entonces

$$\Sigma \cup \{\neg\psi\} \vdash \varphi \wedge \neg\varphi \text{ si y sólo si } \Sigma \vdash \psi$$

Demostración:

Necesidad, supongamos que $\Sigma \cup \{\neg\psi\} \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$. Entonces,

	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	Líneas de Σ
$\mid \longrightarrow$	$k)$	$\neg\psi$			Suposición
\mid	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	Líneas de $\Sigma \cup \{\neg\psi\}$ que prueban $\varphi \wedge \neg\varphi$
\mid	$m)$	φ	\wedge	$\neg\varphi$	
	$m+1)$	$\neg\psi$	\Rightarrow	$(\varphi \wedge \neg\varphi)$	$k-m$ M.D.
	$m+2)$	$\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$	\Rightarrow	$\neg\neg\psi$	$m+1$ Transp.
	$m+3)$	$\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$	\Rightarrow	ψ	$m+2$ M.P. y D.N.
$\mid \longrightarrow$	$m+4)$	$\neg\psi$			Sup.
\mid	$m+5)$	φ	\wedge	$\neg\varphi$	$m, m+4$ M.P.
\mid	$m+6)$	$\neg\varphi$	\wedge	φ	$m+5$ Conm.
\mid	$m+7)$	$\neg\varphi$			$m+6$ Simp.
\mid	$m+8)$	$\neg\varphi$	\vee	$\neg\neg\varphi$	$m+7$ Ad.
\mid	$m+9)$	$(\neg\varphi \vee \neg\neg\varphi)$	\Rightarrow	$\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$	$m+8$ DeMorgan
\mid	$m+10)$	$\neg(\varphi$	\wedge	$\neg\varphi)$	$m+9, m+8$ M.P.
\mid	$m+11)$	ψ			$m+3, m+10$ M.P.
	$m+12)$	$\neg\psi$	\Rightarrow	ψ	$m+4-m+11$ M.D.
	$m+13)$	ψ			$m+12$ Tautología
			\therefore	ψ	

por tanto, $\Sigma \vdash \psi$.

Suficiencia, supongamos que $\Sigma \vdash \psi$. Partamos de $\Sigma \cup \{\neg\psi\}$:

1)	$\neg\psi$			Premisa
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	Líneas de Σ
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	Líneas de Σ que prueban ψ
$n)$	ψ			Prueba de φ a partir de Σ
$n+1)$	ψ	\vee	$(\varphi \wedge \neg\varphi)$	n Ad.
$n+2)$	φ	\wedge	$\neg\varphi$	$n+1$ S.D.
		\therefore	$\varphi \wedge \neg\varphi$	

por tanto, $\Sigma \cup \{\neg\psi\} \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$. ■

Ejercicio 1.3.4

Complete las siguientes demostraciones.

Solución:

De 1):

	1)	M	\Rightarrow	N	Premisa
	2)	N	\Rightarrow	O	Premisa
	3)	$(M \Rightarrow O)$	\Rightarrow	$(N \Rightarrow P)$	Premisa
	4)	$(M \Rightarrow P)$	\Rightarrow	Q	Premisa
$\mid \longrightarrow$	5)	M			Sup.
\mid	6)	N			1,5 M.P.
\mid	7)	O			2,6 M.P.
	8)	M	\Rightarrow	O	5-7 M.D.
	9)	N	\Rightarrow	P	3,8 M.P.
$\mid \longrightarrow$	10)	M			Sup.
\mid	11)	N			2,10 M.P.
\mid	12)	P			9,11 M.P.
	13)	M	\Rightarrow	P	10-12 M.D.
	14)	Q			13, 4 M.P.
			\therefore	Q	

De 2):

1)	V	\Rightarrow	W	Premisas
2)	X	\Rightarrow	Y	Premisas
3)	Z	\Rightarrow	W	Premisas
4)	X	\Rightarrow	A	Premisas
5)	W	\Rightarrow	X	Premisas
6)	$((V \Rightarrow Y) \wedge (Z \Rightarrow A))$	\Rightarrow	$V \vee Z$	Premisas
$\therefore \neg Y \Rightarrow A$				

Falta completar esta demostración, es un poco larga de hacer (el profesor la hizo en clase).

De 3):

	1)	P	\Rightarrow	$(Q \wedge R)$	Premisa
	2)	R	\Rightarrow	$(A \wedge B)$	Premisa
\rightarrow	3)	P			Sup.
	4)	Q	\wedge	R	1,3 M.P.
	5)	R	\wedge	Q	4 Conm.
	6)	R			5 Simp.
	7)	A	\wedge	B	6,2 M.P.
	8)	A			6,2 M.P.
	9)	A	\Rightarrow	$(Q \Rightarrow A)$	Ax. 1
	10)	Q	\Rightarrow	A	9,8 M.P.
$\therefore P \Rightarrow (Q \Rightarrow A)$					3-10 M.D.

□

Ejercicio 1.3.5

Complete las siguientes demostraciones.

Solución:

De (1):

1)	Q			Premisa
2)	Q	\Rightarrow	$(P \Rightarrow Q)$	1 Ax. 1
3)	P	\Rightarrow	Q	2,1 M.P.
$\therefore P \Rightarrow Q$				

De (2):

	1)	$(P \Rightarrow Q)$	\wedge	$(C \Rightarrow D)$	Premisa
	2)	$(Q \vee D)$	\Rightarrow	$((E \Rightarrow (E \vee F)) \Rightarrow P \wedge C)$	Premisa
	3)	P	\Rightarrow	Q	1 Simp.
	4)	C	\Rightarrow	D	1 Conm. y Simp.
\rightarrow	5)	E			Sup.
	6)	E	\vee	F	5 Ad.
<hr/>					
	7)	E	\Rightarrow	$(E \vee F)$	5-6 M.D.
\rightarrow	8)	C			Sup.
	9)	D			8,4 M.P.
	10)	Q	\vee	D	9 Ad. y Conm.
	11)	$(E \Rightarrow (E \Rightarrow D))$	\Rightarrow	$P \wedge C$	2,10 M.P.
\rightarrow	12)	$\neg P$			Sup.
	13)	$\neg P$	\vee	$\neg C$	12 Ad.
	14)	$\neg(P$	\wedge	$C)$	13 DeMorgan
	15)	$\neg(E$	\Rightarrow	$(E \vee F))$	11,14 M.T.
	16)	$(E \Rightarrow (E \vee F))$	\wedge	$\neg(E \Rightarrow (E \vee F))$	7,15 Ad.
<hr/>					
	17)	P			12-16 D.C.
<hr/>					
	18)	C	\Rightarrow	P	18-17 D.C.
\rightarrow	19)	P			Sup.

$\therefore P \iff C$

De (3):

	1)	P	\vee	$(Q \wedge R)$	Premisa
	2)	P	\Rightarrow	R	Premisa
\rightarrow	3)	$\neg R$			Sup.
	4)	$\neg P$			2,3 M.T.
	5)	Q	\wedge	R	1,4 S.D.
	6)	R			5 Conm. y Simp.
	7)	R	\wedge	$\neg R$	6,3 Conj.
<hr/>					
	8)	R			3-7 M.D.C.
<hr/>					
$\therefore R$					

De (4):

	1)	$(P \vee Q)$	\Rightarrow	$(R \Rightarrow D)$	Premisa
	2)	$(\neg D \vee E)$	\Rightarrow	$(P \wedge R)$	Premisa
\rightarrow	3)	$\neg D$			Sup.
	4)	$\neg D$	\vee	E	3 Ad.
	5)	P	\wedge	R	2,4 M.P.
	6)	P			5 Simp.
	7)	P	\vee	Q	6 Ad.
	8)	R	\Rightarrow	D	1,7 M.P.
	9)	R			5 Conm. y Simp.
	10)	D			8,9 M.P.
	11)	D	\wedge	$\neg D$	10,3 Conj.
<hr/>					
	12)	D			3-11 D.C.
<hr/>					
$\therefore D$					

De (5):

	1)	$(P \vee Q)$	\Rightarrow	$(R \wedge D)$	Premisa
	2)	$(R \wedge F)$	\Rightarrow	$(\neg F \wedge G)$	Premisa
	3)	$(F \vee H)$	\Rightarrow	$(P \wedge I)$	Premisa
\rightarrow	4)	F			Sup.
	5)	F	\vee	H	4 Ad.
	6)	P	\wedge	I	2,5 M.P.
	7)	P			6 Simp.
	8)	R	\wedge	D	1,7 M.P.
	9)	R			8 Simp.
	10)	R	\wedge	F	9,4 Conj.
	11)	$\neg F$	\wedge	G	2,10 M.P.
	12)	$\neg F$			11 Simp.
	13)	F	\wedge	$\neg F$	4,12 Conj.
<hr/>					
	14)	$\neg F$			4-13 D.C.
<hr/>					
				$\therefore \neg F$	

□

Definición 1.3.5

Un conjunto de fórmulas Σ es **consistente** si para cualquier fórmula φ , $\Sigma \not\vdash \varphi \wedge \neg\varphi$. Σ es **inconsistente** si no es consistente.

Teorema 1.3.3 (Explosividad de la Lógica)

Si Σ es un conjunto de fórmulas bien formadas que es inconsistente, entonces para toda fórmula φ , $\Sigma \vdash \varphi$.

Demostración:

Sea φ una fórmula. Como Σ no es consistente, existe ψ fórmula tal que $\Sigma \vdash \psi \wedge \neg\psi$. Se tiene que:

	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	Líneas de Σ .
	$n)$	ψ	\wedge	$\neg\psi$	Suposición.
\rightarrow	$n+1)$	ψ			n Simp.
	$n+2)$	ψ	\vee	φ	$n+1$ Ad.
	$n+3)$	$\neg\psi$			n Conm. y Simp.
	$n+4)$	φ			$n+2, n+3$ S.D.
<hr/>					
	$n+5)$	$\psi \wedge \neg\psi$	\Rightarrow	φ	$n-n+4$ M.D.
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	Líneas de Σ que prueban $\psi \wedge \neg\psi$.
	$m)$	$\psi \wedge \neg\psi$			
	$m+1)$	φ			$n+5, m$ M.P.
<hr/>					
				$\therefore \varphi$	

■

Corolario 1.3.1

Un conjunto de fórmulas Σ es consistente si y sólo si existe una fórmula φ tal que $\Sigma \not\vdash \varphi$.

Demostración:

Necesidad: Suponga que Σ es consistente, entonces para una fórmula ψ siempre sucede que $\Sigma \not\vdash \psi \wedge \neg\psi$. Tomando $\varphi = \psi \wedge \neg\psi$ se sigue el resultado.

Suficiencia: Suponga que Σ no es consistente, entonces por el Teorema anterior $\Sigma \vdash \varphi$ para toda fórmula φ . ■

Lema 1.3.2 (Demostración por casos)

Si Σ es un conjunto de FBF y φ, ψ son fórmulas tales que $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ y $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \psi$, entonces $\Sigma \vdash \psi$.

Demostración:

Por las hipótesis y el Metateorema de Deducción,

$$\Sigma \vdash \varphi \Rightarrow \psi \quad \text{y} \quad \Sigma \vdash \neg\varphi \Rightarrow \psi$$

Veamos que

	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	Líneas de Σ .
$ \rightarrow$	$n)$	$\neg\psi$			Suposición.
$ $	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	Líneas de Σ que prueban $\varphi \Rightarrow \psi$
$ $	$m_1)$	φ	\Rightarrow	ψ	
$ $	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	Líneas de Σ que prueban $\neg\varphi \Rightarrow \psi$
$ $	$m_2)$	$\neg\varphi$	\Rightarrow	ψ	
$ $	$m_2 + 1)$	$\neg\varphi$			m_1, n M.T.
$ $	$m_2 + 2)$	$\neg\neg\varphi$			m_2, n M.T.
$ $	$m_2 + 3)$	φ			$m_2 + 2$ D.N.
$ $	$m_2 + 4)$	φ	\wedge	$\neg\varphi$	$m_2 + 3, m_2 + 1$ Ad.
$ $	$m_2 + 5)$	ψ			$n - m_2 + 4$ D.C.
$\therefore \psi$					

lo que prueba el resultado. ■

Corolario 1.3.2

Sea Σ un conjunto de fórmulas bien formadas y sea φ una fórmula. Entonces:

1. $\Sigma \not\vdash \varphi$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\varphi\}$ es consistente.
 2. $\Sigma \vdash \varphi$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente.
-

Demostración:

De (1):

\Rightarrow): Suponga que $\Sigma \cup \{\varphi\}$ es inconsistente, entonces por el teorema anterior

$$\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\varphi$$

y, de forma inmediata se tiene:

$$\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$$

por tanto, por el Lema anterior se sigue que $\Sigma \vdash \varphi$.

\Leftarrow):

De (2): Veamos las dos implicaciones:

\Rightarrow): Suponga que $\Sigma \vdash \varphi$, entonces existe una demostración $(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, \varphi)$ de φ a partir de Σ .

En particular, se tiene a partir de $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ que:

\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	Líneas de Σ que prueban φ .
$n)$	φ			
$n + 1)$	$\neg\varphi$			Premisa.
$n + 2)$	φ	\wedge	$\neg\varphi$	$n, n + 1$ Ad.
$\therefore \varphi \wedge \neg\varphi$				

por tanto, $\Sigma \cup \{\neg\phi\} \vdash \phi \wedge \neg\phi$. Se sigue que $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$ es inconsistente.

\Leftarrow): Suponga que $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$ es inconsistente, entonces existe una fórmula ψ tal que $\Sigma \cup \{\neg\phi\} \vdash \psi \wedge \neg\psi$. A partir de Σ tenemos que:

	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	Líneas de Σ .
$ \rightarrow$	$n)$	$\neg\phi$			Sup.
$ $	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	Líneas de $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$ que prueban $\psi \wedge \neg\psi$.
$ $	$m)$	ψ	\wedge	$\neg\psi$	
	$m)$	ϕ			$m-n$ D.C.
		\therefore	ϕ		

por tanto, $\Sigma \vdash \phi$. ■

Definición 1.3.6

Un conjunto de FBF Σ es **satisfacible** si existe un modelo m tal que $m \models \Sigma$.

Lema 1.3.3

Para todo conjunto de fórmulas Σ , si Σ es consistente, entonces es satisfacible.

Demostración:

Haremos la demostración paso a paso:

- **Enumerar todas las fórmulas:** La idea va a ser usar *codificación*. Hacemos lo siguiente:

\neg	\longleftrightarrow	1
\Rightarrow	\longleftrightarrow	2
p_1	\longleftrightarrow	3
p_2	\longleftrightarrow	4
p_3	\longleftrightarrow	5
\vdots	\vdots	\vdots

siendo p_1, p_2, p_3, \dots variables y \neg, \Rightarrow conectivas.

Recordemos antes que existe una biyección entre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y \mathbb{N} , dada por:

$$(n, m) \mapsto 2^{n-1}(2m-1)$$

ó

$$(n, m) \mapsto \frac{(n+m-1)(n+m)}{2} + m$$

para todo $n, m \in \mathbb{N}$ (verifique que esto es cierto). En general, uno puede establecer una biyección entre \mathbb{N}^n y \mathbb{N} , para todo $n \in \mathbb{N}$. Lo que nos va a interesar es codificar sucesiones finitas de esta manera.

Uno puede hacer lo siguiente: si $n \in \mathbb{N}$, podemos escribir:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

donde $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de números primos ordenados de menor a mayor y $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, para todo $i \in \llbracket 1.k \rrbracket$. En este caso, p_k es el mayor primo para el cual $\alpha_k \neq 0$. De esta fórmula, lo que haremos es codificar tuplas, a n le corresponde la k -tupla:

$$n \rightsquigarrow (\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1, \dots, \alpha_{k-1} + 1, \alpha_k)$$

por ejemplo, en este caso la fórmula $\neg p_3 = (\neg, p_3)$ se codificaría como tupla en el número 243 (asignándole lo establecido a \neg y p_3). ■

Observación 1.3.3

Probado este lema anterior, tenemos que:

$\Sigma \models \varphi$ implica que no existe $m \models \Sigma$ tal que $m \not\models \varphi$;
lo cual implica que no existe $m \models \Sigma$ tal que $m \models \neg\varphi$.

Esto significa que

$\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ no es satisfacible.

lo cual implica por el Lema (1.3.3) que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente. Esto implica que $\Sigma \vdash \varphi$.

Ejercicio 1.3.6

Pruebe que $\emptyset \models \phi$ siendo ϕ axioma lógico.

Demostración:

Se tienen tres casos:

1. $\phi \equiv \varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$, siendo φ y ψ FBF. Sea m un modelo, para ver que $\emptyset \models \phi$ basta con probar que $\overline{m}(\phi) = V$.

Por el Lema 1.2.1. basta con ver los valores de \overline{m} en φ y ψ . Para el modelo m se tienen los posibles valores de φ , ψ , $\psi \Rightarrow \varphi$ y ϕ :

φ	ψ	$\psi \Rightarrow \varphi$	$\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V

en cualquier caso, $\overline{m}(\phi) = V$. Por tanto, $\emptyset \models \phi$.

2. $\phi \equiv \varphi \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \neg\varphi) \Rightarrow \neg\psi)$. Como en el caso anterior, sea m un modelo. Veamos que se tienen los posibles valores:

φ	ψ	$\psi \Rightarrow \neg\varphi$	$(\psi \Rightarrow \neg\varphi) \Rightarrow \neg\psi$	$\varphi \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \neg\varphi) \Rightarrow \neg\psi)$
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

en cualquier caso, $\overline{m}(\phi) = V$. Por tanto, $\emptyset \models \phi$.

3. Suponga que ϕ es de la forma $\varphi \Rightarrow \varphi'$, donde φ' es una fórmula donde alguna subfórmula ψ de φ fue sustituida por $\neg\neg\psi$. Para esto, basta con ver que $\overline{m}(\psi) = \overline{m}(\neg\neg\psi)$ (lo cual siempre se cumple por definición de modelo). Para formalizar esta prueba, todo se debe hacer por inducción.

4.

■

Teorema 1.3.4 (Teorema de Completud)

Sea Σ un conjunto de fórmulas y φ otra fórmula. Entonces,

$$\Sigma \vdash \varphi \text{ si y sólo si } \Sigma \models \varphi$$

La necesidad es llamada **correctud** y la suficiencia es **completud**.

Demostración:

Se probará la doble implicación:

- **Correctud:** Sea $(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, \varphi)$ una demostración de φ a partir de Σ . La hipótesis inductiva es:

$$\Sigma \models \varphi_i, \quad \forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$$

Se tienen tres casos:

- φ es un elemento de Σ : Al tenerse que cualquier modelo que satisfaga Σ en particular satisface φ (chechar la definición de satisfabilidad). Por tanto $\Sigma \models \varphi$.
- φ es axioma lógico: Afirmamos que $\emptyset \models \varphi$ (*ejercicio*, chechar con tabla de verdad y usar proposiciones pasadas). En particular se tiene que $\Sigma \models \varphi$.
- *Existen $i, j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ con $i < j$ tales que φ_j es $\varphi_i \Rightarrow \varphi$* : Se tiene por hipótesis inductiva $\Sigma \models \varphi_i$ y $\Sigma \models \varphi_j$, por tanto si m es cualquier modelo que satisfaga Σ , esto es $m \models \Sigma$, entonces $m \models \varphi_i$ y $m \models \varphi_j$, se sigue que:

$$m \models \varphi_i \quad \text{y} \quad m \models \varphi_i \Rightarrow \varphi$$

asi que $\overline{m}(\varphi_i) = V$ y $\overline{m}(\varphi_i \Rightarrow \varphi) = V$, lo cual implica que $\overline{m}(\varphi) = V$, por lo que $m \models \varphi$.
Por ende, $\Sigma \models \varphi$.

por inducción se sigue que $\Sigma \models \varphi$.

- **Completud:**

■