Conjuntos Numerables y No Numerables

Proposición.

La unión de toda familia, a lo sumo numerable de conjuntos numerables, es numerable.

Dem:

Sea $\mathcal{A} = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una familia a lo sumo numerable de conjuntos numerables.

- Si $\mathcal{A}$ es finito, entonces $\exists\, K \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{A} \sim J_K$. Podemos en este caso, suponer sin pérdida de generalidad:

$$\mathcal{A} = \{A_n \mid n \in J_K\}$$

Probaremos que:

$$A^* = \bigcup_{n=1}^{K} A_n$$

Como cada A_n es numerable, podemos escribir:

$$A_n = \{a_{nm} \mid m \in \mathbb{N}\},\ \forall\, n \in J_K$$

De esta forma:

$$A^* = \{a_{nm} \mid n \in J_K \text{ y } m \in \mathbb{N}\}$$

Sea $f : \mathbb{N} \to A^*$ descrita como:

$$\begin{array}{rcccc}
 & & f(2K) & & \\
 & & \| & & \\
f(1) = & a_{11} & a_{12} & \to a_{13} & \cdots \\
 & \downarrow & \uparrow & \downarrow & \\
 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\
 & \downarrow & \uparrow & \downarrow & \ddots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 & \downarrow & \uparrow & \downarrow & \\
f(K) = & a_{K1} & \to a_{K2} & a_{K3} \to & \cdots
\end{array}$$

Descrita de esta forma, f es suprayectiva, por tanto:

$$\operatorname{Card} A^* \leq \operatorname{Card} \mathbb{N} \quad \ldots (1)$$

Como $A_1 \subset A^*$ y $A_1 \sim \mathbb{N}$, entonces:

$$\operatorname{Card} \mathbb{N} = \operatorname{Card} A_1 \leq \operatorname{Card} A^* \quad \ldots (2)$$

Por (1) y (2), $A^* \sim \mathbb{N}$. Por tanto, A^* es numerable.

- Este caso es análogo al anterior. (Caso, con $\mathcal{A}$ numerable).

q.e.d.

Ejemplos.

$\mathbb{Q}$ y $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ son numerables. Como

$$\mathbb{Q}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{Q}_n \qquad \text{y} \qquad \mathbb{N}\times\mathbb{N}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{N}_n$$

Donde $\mathbb{Q}_n=\{\frac{m}{n} \mid m\in\mathbb{Z}\}\sim\mathbb{Z}\sim\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}_n=\{(m,n) \mid m\in\mathbb{N}\}\sim\mathbb{N}$, tenemos que $\{\mathbb{Q}_i \mid i\in\mathbb{Z}\}$ y $\{\mathbb{N}_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ son dos familias numerables. Luego, su unión también es numerable. Así $\mathbb{Q}\sim\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\sim\mathbb{N}$.

Proposición:

$\mathbb{R}$ es un conjunto infinito no numerable.

Dem:

Suponga que $\mathbb{R}$ es numerable. Como $\mathbb{R}\sim(0,1)$, entonces $(0,1)$ es numerable. Por un lema ant., podemos escribir $(0,1)=\{r_n \mid n\in\mathbb{N}\}$. Podemos escribir cada r_n en su representación decimal, esto es:

$$\begin{aligned} r_n &= 0.r_{n1}r_{n2}r_{n3}\dots \quad \forall n\in\mathbb{N} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{r_{ni}}{10^i} \end{aligned}$$

Donde $r_{km}\in\{0,1,\dots,9\}$ $\forall$ $k,m\in\mathbb{N}$. Podemos enlistar los elementos de la sig. forma:

$$\begin{array}{l} 0.r_{11}r_{12}r_{13}\dots \\ 0.r_{21}r_{22}r_{23}\dots \\ 0.r_{31}r_{32}r_{33}\dots \\ \vdots \end{array}$$

Defina $r=0.s_1s_2s_3\dots$, donde $s_i\in\{1,2,\dots,8\}$ y $s_i\neq r_{ii}$ $\forall i\in\mathbb{N}$. Claramente $r\neq r_i$ $\forall i\in\mathbb{N}$, pues sus representaciones binarias no son iguales. #c.

Por tanto, $\mathbb{R}$ es infinito no numerable.

q.e.d.

Por lo anterior:

$$\aleph_0 = \text{Card}\,\mathbb{N} < \text{Card}\,\mathbb{R} = c$$

De ahora en adelante: $\text{Card}\,\mathbb{R} = \aleph_1$.

PROPIEDADES DE LOS CONJUNTOS INFINITOS.

Proposición:

Todo conjunto infinito tiene un subconjunto numerable.

Dem:

Sea X un conjunto infinito. Al ser infinito, no es finito y tampoco vacío. Sea entonces $x_1 \in X$.

Como $X \setminus \{x_1\} \neq \emptyset$ (de otra forma, $X = \{x_1\} \sim J_1$, así X sería finito), $\exists\, x_2 \in X \setminus \{x_1\}$. Es claro que $x_1 \neq x_2$ y $x_1, x_2 \in X$.

Suponga que $\exists\, x_1, x_2, \dots, x_n \in X$, todos distintos entre sí. Como $X \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \neq \emptyset$, $\exists\, x_{n+1} \in X \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, diferente a otro x_i, $i \in J_n$.

Aplicando inducción, $\exists$ un conjunto $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, donde $x_i \neq x_j$ $\forall\, i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$.

Claramente este conjunto es numerable, y $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset X$, como se quería demostrar.

q.e.d.

Lema:

Si X es infinito y N es a lo sumo numerable, entonces $X \cup N \sim X$.

Dem:

1) Si N es vacío, entonces claramente: $X \cup \emptyset = X \sim X$. Si N es finito y $N \neq \emptyset$, sea $N_1 = N \setminus X$. Si $N_1 = \emptyset$, entonces $X \cup N = X \sim X$. Si no es vacío, sea entonces $M \subset X$, M numerable. Probaremos que $M \cup N_1 \sim M$.

Como $N_1 \subset N$, entonces N_1 es finito. Así, $N_1 \sim J_K$, $K \in \mathbb{N}$. Por ser M numerable, podemos escribir $M = \{m_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ y $N_1 = \{n_i \mid i = 1, 2, \ldots, K\}$.
Sea $f: M \to M \cup N_1$ como sigue:

$$f(m) := \begin{cases} n_i & \text{si } m = m_i \text{ para algún } i \in \{1, 2, \ldots, K\}. \\ m_i & \text{si } m = m_{i+K} \text{ para algún } i \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Claramente f es biyección. Así, $M \cup N_1 \sim M$. Veamos que:

$$\underline{X} \cup N = \underline{X} \cup N_1 = (\underline{X} \setminus M) \cup M \cup N_1$$
$$\underline{X} = (\underline{X} \setminus M) \cup M$$

Sea $g: \underline{X} \to \underline{X} \cup N$ dada como:

$$\forall x \in \underline{X},\ g(x) := \begin{cases} i_{\underline{X} \setminus M}(x) & \text{si } x \in \underline{X} \setminus M. \\ f(x) & \text{si } x \in M. \end{cases}$$

g es biyección, por tanto, $\underline{X} \cup N \sim \underline{X}$.

2) Si N es numerable, sea $N_2 = N \setminus \underline{X}$. Si N_2 es finito, por 1) se tiene que $\underline{X} \cup N = \underline{X} \cup N_2 \sim \underline{X}$, con lo que se llega a la conclusión.
Si N_2 es numerable, sea $M \subset \underline{X}$, M numerable. Por la proposición auxiliar, $\exists\, M_1, M_2 \subset M$ numerables tales que $M_1 \cup M_2 = M$ y $M_1 \cap M_2 = \emptyset$. Veamos que:

$$\underline{X} \cup N = \underline{X} \cup N_1 = (\underline{X} \setminus M) \cup M \cup N_1$$
$$\underline{X} = (\underline{X} \setminus M) \cup M = (\underline{X} \setminus M) \cup M_1 \cup M_2$$

Como M, M_1, M_2 y N son numerables, entonces $M_1 \sim M$ y $M_2 \sim N_1$. Así, $\exists$ $f: M_1 \to M$ y $g: M_2 \to N_1$ funciones biyectivas. Sea $h: M \to M \cup N_1$, dada por:

$$\forall m \in M,\ h(m) := \begin{cases} f(m) & \text{si } m \in M_1. \\ g(m) & \text{si } m \in M_2. \end{cases}$$

h es biyectiva. En efecto, suponga que $\exists\, m, m' \in M$ tales que $h(m) = h(m')$. Si $m \in M_1$, entonces $h(m) = f(m) = h(m')$. Si $m' \in M_1$, entonces $h(m') = f(m')$ lo que implica que $m = m'$. $m' \notin M_2$, pues de otra forma, $f(m) = g(m')$, lo cual implica que $M \cap N_1 \neq \phi$, lo cual no puede pasar, pues $N_1 \cap \overline{X} = \phi$ y $M \subset \overline{X}$, así $N_1 \cap M \subset N_1 \cap \overline{X} = \phi$, luego $M \cap N_1 = \phi$.
Si $m \in M_2$, el caso es análogo. Por lo tanto, h es inyectiva. h es suprayectiva, pues f y g lo son. Así, h es biyección.
Por lo anterior, $M_1 \cup M_2 \sim M \cup N$.
Sea $l : \overline{X} \to \overline{X} \cup N$ dada como sigue:

$$\forall x \in \overline{X},\ l(x) := \begin{cases} i_{\overline{X} \setminus M}(x) & \text{si } x \in \overline{X} \setminus M. \\ h(x) & \text{si } x \in M. \end{cases}$$

Por motivos semejantes a los de h, l es biyectiva. Así, $\overline{X} \cup N \sim \overline{X}$.

q.e.d.

Proposición auxiliar.

Sea M un conjunto numerable. Entonces, $\exists\, M_1, M_2 \subset M$ numerables tales que $M = M_1 \cup M_2$ y $M_1 \cap M_2 = \emptyset$.

Dem:

Como M es numerable, se puede escribir como: $M = \{m_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Sean $M_1, M_2 \subset M$ dados por:

$$M_1 := \{m_i \in M \mid i = 2n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$$
$$M_2 := \{m_i \in M \mid i = 2n-1 \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$$

Claramente $M_1 \cup M_2 = M$ y $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ (de otra forma, $2j = 2K-1$ para algunos $K, j \in \mathbb{N}$, cosa que no puede suceder). Ambos son numerables, pues $\exists\, f: \mathbb{N} \to M_1$ y $g: \mathbb{N} \to M_2$, $f(n) = m_{2n}$ y $g(n) = m_{2n-1}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, biyectivas.

q.e.d.

Ejemplo:

$\mathbb{I}$ es infinito no numerable. Además:

$$\text{Card}\, \mathbb{I} = \text{Card}\, \mathbb{R} = c = \aleph_1$$

Dem:

$\mathbb{I}$ es infinito. En efecto, si $\mathbb{I}$ fuera finito, entonces por la proposición anterior, $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} \sim \mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$. Luego:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} \sim \mathbb{N}$$

Lo cual no puede suceder, pues $\mathbb{R} \nsim \mathbb{N}$. Así, $\mathbb{I}$ es infinito. Como $\mathbb{Q}$ es numerable, por el teorema anterior:

$$\mathbb{R} = \mathbb{I} \cup \mathbb{Q} \sim \mathbb{I}$$

por tanto, $\mathbb{I}$ es infinito no numerable.

q.e.d.

Def. Si X es un conjunto, se denota $\mathcal{P}(X)$ como el conjunto potencia de X, esto es: $\mathcal{P}(X): \{U \mid U \subset X\}$. También lo denotamos: $\mathcal{P}(X) = 2^X$.

Proposición:

$$\text{Card}(2^{\mathbb{N}}) = \text{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = \text{Card}[0,1]$$

Luego: $2^{\aleph_0} = c = \aleph_1$.

Dem:

Se probará que $\text{Card}\,\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq \text{Card}[0,1]$. Sea $f: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,1]$, dada como sigue:

$$f(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{2^i} \text{ donde } b_i = 1 \text{ si } i \in A \text{ y } b_i = 0 \text{ si } i \notin A.$$

Sea $x \in [0,1]$. x tiene representación binaria, así $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{2^i}$, $b_i \in \{0,1\}$ $\forall i \in \mathbb{N}$. Entonces $\exists A$:

$$A = \{i \in \mathbb{N} \mid b_i = 1\}$$

tal que $f(A) = x$. Por tanto, f es suprayectiva, así $\text{Card}\,\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq \text{Card}[0,1]$.

Se probará ahora que $\text{Card}[0,1] \leq \text{Card}\,\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Sea $g: [0,1] \setminus Z_2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Si $x \in [0,1] \setminus Z_2$, entonces

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{2^i}, \quad b_i \in \{0,1\} \ \forall i \in \mathbb{N}$$

Defina $g(x)$ como

$$g(x) := \{i \in \mathbb{N} \mid b_i = 1\}$$

Por tanto, f es inyectiva. Así... ¿?

Proposición:

$\forall\, X \neq \emptyset$, $\operatorname{Card} X < \operatorname{Card} P(X)$.

Dem:

Sea X un conjunto no vacío. Claramente $\operatorname{Card} X \leqslant \operatorname{Card} \mathcal{P}(X)$, pues $\exists\, f: X \to Y$, donde:

$$Y = \{\{x\} \mid x \in X\} \subset \mathcal{P}(X)$$

Claramente f es biyectiva. Así $\operatorname{Card} X \leqslant \operatorname{Card} \mathcal{P}(X)$.

Procederemos por reducción al absurdo. Suponga que $\exists\, f: X \to \mathcal{P}(X)$ biyectiva. Sea A dado como sigue:

$$A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(X)$$

Por ser f suprayectiva, para esta A $\exists\, a \in X$ tal que $f(a) = A$. Si

- $a \in f(a) \Rightarrow a \notin A \Rightarrow a \notin f(a)$ $\#C$.
- $a \notin f(a) \Rightarrow a \in A \Rightarrow a \in f(a)$ $\#C$.

Lo cual es un absurdo. Por tanto, $\operatorname{Card} X \neq \operatorname{Card} \mathcal{P}(X)$.

q.e.d.

Corolario:

Todo conjunto infinito es equipotente a un subconjunto propio.