Cap. 1.

Nociones de cardinalidad.

· Conjuntos equipotentes.

Def.

Dos conjuntos A y B son equipotentes, ó tienen el mismo número de elementos, si existe una función $f: A \to B$, biyectiva. En tal caso, se escribe $A \sim B$.

Proposición aux 1.

"$\sim$" como se definió anteriormente, es una relación de equivalencia.

Dem:

Sean A, B y C conjuntos.

i) $A \sim A$, en efecto, tome $f = i_A$, donde $i_A: A \to A$ es la función identidad, la cual es biyectiva. Por tanto, $A \sim A$.

ii) Si $A \sim B$, entonces $B \sim A$.

En efecto, como $A \sim B$, entonces existe una funcion $f: A \to B$ biyectiva. Por ser biyectiva, existe $f^{-1}: B \to A$ biyectiva también. Por tanto, $B \sim A$.

iii) Si $A \sim B$ y $B \sim C$, entonces $A \sim C$.

Como $A \sim B$ y $B \sim C$, existen $f: A \to B$ y $g: B \to C$ funciones biyectivas. Sea $h = g \circ f$, es claro que $h: A \to C$ y, por ser f y g biyectivas, su composición lo es. Por tanto, $A \sim C$.

Por i), ii) y iii), "$\sim$" es una relación de equivalencia.

Ejemplos:

- $\mathbb{N} \sim \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} \sim \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Veremos que $\mathbb{N} \sim \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. En efecto:

Sea $f: \mathbb{N} \to \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ dada como: $f(n) = 2^n$. Probaremos que f es biyectiva.

- f es inyectiva.

  Sean $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $f(m) = f(n)$, entonces:

$$
\begin{aligned}
f(m) = f(n) &\Rightarrow 2^m = 2^n \\
&\Rightarrow \ln(2^m) = \ln(2^n) \\
&\Rightarrow m\ln(2) = n\ln(2) \\
&\Rightarrow m = n
\end{aligned}
$$

  por tanto, f es inyectiva.

- f es sobreyectiva.

  Sea $y \in \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, entonces $\exists\, m \in \mathbb{N}$ tal que $y = 2^m$, por tanto $y = f(m)$.

Por lo anterior, f es biyectiva.

- $\mathbb{R} \sim (-1, 1)$

  En efecto, sea $f: \mathbb{R} \to (-1, 1)$, $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$. Probaremos que f es biyección.

  - f es inyectiva.

    Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) = f(y)$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
&\frac{x}{1+|x|} = \frac{y}{1+|y|} \\
\Rightarrow\ &\left|\frac{x}{1+|x|}\right| = \left|\frac{y}{1+|y|}\right| \\
\Rightarrow\ &\frac{|x|}{1+|x|} = \frac{|y|}{1+|y|} \\
\Rightarrow\ &|x| + |x|\cdot|y| = |y| + |x|\cdot|y| \\
\Rightarrow\ &|x| = |y|.
\end{aligned}
$$

    Por tanto:

$$\frac{x}{1+|x|} = \frac{y}{1+|x|}$$
$$\Rightarrow x = y.$$

· f es supráyectiva.

Sea $y \in (-1,1)$. Si $0 < y$, existe $x = \frac{y}{1-y}$, esto es:

$$x = \frac{y}{1-y}$$
$$\Rightarrow x - xy = y$$
$$\Rightarrow x = y(1+x)$$
$$\Rightarrow y = \frac{x}{1+x} = \frac{x}{1+|x|} = f(x)$$

pues $0 < x$. Si $y = 0$, $\exists\ 0$ tal que:

$$y = 0$$
$$\Rightarrow y = \frac{0}{1+|0|} = f(0)$$

Si $y < 0$, tenemos un caso análogo al primero. Por tanto, f es supra-yectiva.

Def. A cada conjunto A se le asigna un llamado **número cardinal**, denotado por $\text{Card}\,A$ de tal suerte que un mismo número cardinal se le asigna a dos conjuntos equipotentes, esto es:

$$\text{Card}\,A = \text{Card}\,B$$
$$\Leftrightarrow A \sim B$$

Los símbolos usados para los números cardinales son: $0, 1, 2, \ldots, \aleph_0, c, \aleph_1, \ldots$

Ejemplos:

- $\text{Card}\,\emptyset = 0$
- $\text{Card}\,J_n = n$
- $\text{Card}\,\mathbb{R} = \text{Card}\,(a,b)$
- $\text{Card}\,\mathbb{N} = \aleph_0.$

Def. Se dice que un conjunto X es finito si $X = \emptyset$ o $X \sim J_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. para este caso: $\text{Card}\, X = n$.

X es numerable si $X \sim \mathbb{N}$, y en tal caso: $\text{Card}\, X = \aleph_0$.

X es a lo sumo numerable si es finito o numerable.

X es infinito si no es finito.

Ejemplo:

- $\mathbb{Z}$ es numerable.

Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por:

$$f(n) := \begin{cases} 1-k & \text{si } n = 2k \text{ para algún } k \in \mathbb{N} \\ k & \text{si } n = 2k-1 \text{ para algún } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Probaremos que f es biyectiva.

i) Sean $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $f(m) = f(n)$, veamos que m no puede ser par o n impar, y viceversa.

Suponga que m es par y n es par, entonces $\exists\, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tales que $m = 2k_1$ y $n = 2k_2 - 1$. Como $f(m) = f(n)$, entonces

$$1 - k_1 = k_2$$

$k_1 \geq 1$, luego $1 - k_1 \leq 0$, entonces $k_2 \notin \mathbb{N}$ ※c. Por tanto, ó m y n son ambos pares o ambos impares.

Si ambos son pares, entonces $\exists\, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tales que $m = 2k_1$ y $n = 2k_2$. Como $f(m) = f(n)$, entonces

$$1 - k_1 = 1 - k_2$$
$$\Rightarrow k_1 = k_2$$
$$\Rightarrow 2k_1 = 2k_2$$
$$\Rightarrow m = n$$

Si ambos son impares, el caso es análogo al anterior.

2) Sea $y \in \mathbb{Z}$. Si $y \leq 0$, entonces $1 \leq 1-y$, por tanto, $1-y \in \mathbb{N}$. Sea $K = 1-y$, entonces:

$$y = 1-K$$

Tome $n = 2K$, es claro que $f(n) = 1-K = y$.

Si $y > 0$, el caso es análogo.

Por 1) y 2), f es biyectiva.

q.e.d.

Propiedades De Los Conjuntos Finitos

Proposición:

Sean $m, n \in \mathbb{N}$:

i) Si $A \subset J_n$, entonces $A = \emptyset$ o bien, $\exists K \in \mathbb{N}$, $K \leq n$ tal que $A \sim J_K$.

ii) $J_n \sim J_m \Leftrightarrow n = m$.

iii) $\mathbb{N} \nsim J_n \; \forall n \in \mathbb{N}$.

Dem:

De (i): Procederemos por inducción sobre n.

- Sea $A \subset J_1$, entonces $A = \emptyset$ o $A = \{1\}$. Si $A = \{1\}$, entonces $\exists 1 \in \mathbb{N}$, $1 \leq 1$ tal que $A \sim J_1$ (tome como biyección la identidad de A a J_1).
  Por tanto, el resultado es válido para $n = 1$.
- Suponga el resultado válido para $n = m$.
- Probaremos el resultado para $n = m+1$. Sea $A \subset J_{m+1}$. Si $A = \emptyset$, el resultado es válido. Suponga que $A \neq \emptyset$ y $A \subset J_{m+1}$.
  Tome $B = A \setminus \{m+1\}$. Es claro que $B \subset J_m$, por tanto, $B = \emptyset$ o $\exists K' \in \mathbb{N}$, $K' \leq m$ tal que $B \sim J_{K'}$.
  Si $B = \emptyset$, entonces $A \setminus \{m+1\} = \emptyset$, luego como $A \neq \emptyset$, entonces $A = \{m+

$1\}$. Así, $\exists\, 1 \in \mathbb{N}$, $1 \leq m+1$ tal que $A \sim J_1$, (tome $f: \{1\} \to \{m+1\}$, $f(1) = m+1$. f es biyección).

Si $B \neq \emptyset$, entonces $\exists\, K' \in \mathbb{N}$, $K' \leq m$ tal que $B \sim J_{K'}$. Como $B \sim J_{K'}$, $\exists\, f: B \to J_{K'}$ biyectiva. Sea $K = K'+1$ y $g: A \to J_K$ dada por:

$$g(a) := \begin{cases} f(a) & \text{si } a \in B \\ K & \text{si } a = m+1 \end{cases}$$

Nota: esto si $A \neq A \setminus \{m+1\}$.

g es una biyección entre A y J_K, luego $A \sim J_K$. Por tanto, $\exists\, K \in \mathbb{N}$, $K \leq m+1$ ($K' \leq m \Rightarrow K = K'+1 \leq m+1$) tal que $A \sim J_K$.

Aplicando inducción se tiene lo deseado.

De (ii):

$\Rightarrow$) Si $J_n \sim J_m$, entonces $\operatorname{Card} J_n = \operatorname{Card} J_m$, como $\operatorname{Card} J_n = n$ y $\operatorname{Card} J_m = m$, entonces $n = m$.

$\Leftarrow$) Si $n = m$, entonces, como $\sim$ es rel. de equiv., $J_n \sim J_n \Rightarrow J_n \sim J_m$.

De (iii):

Procederemos por inducción sobre n.

- $\mathbb{N} \not\sim J_1$, en efecto, Suponga que $\mathbb{N} \sim J_1$, entonces $\exists\, f: \mathbb{N} \to J_1$ biyectiva. Como $J_1 = \{1\}$, entonces $f(1) = 1$ y $f(2) = 1$, luego $f(1) = f(2)$ y $1 \neq 2$ #c, pues f es biyectiva.
- Suponga que $\mathbb{N} \not\sim J_K$, para $n = K$.
- Probaremos que $\mathbb{N} \not\sim J_{K+1}$. Suponga que $\mathbb{N} \sim J_{K+1}$, entonces $\exists\, f: \mathbb{N} \to J_{K+1}$ biyectiva. Como f es biyectiva, para $K+1 \in J_{K+1}$ $\exists\, \ell \in \mathbb{N}$ tal que $f(\ell) = K+1$. Sea $g: \mathbb{N} \setminus \{\ell\} \to J_K$, $g(a) = f(a)$ $\forall\, a \in \mathbb{N} \setminus \{\ell\}$. Claramente g es biyectiva. Sea ahora $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{\ell\}$ dada por:

$$h(p) := \begin{cases} p & \text{si } p < l \\ p+1 & \text{si } l \leqslant p \end{cases}$$

Claramente h es biyección, por tanto, $g \circ h : \mathbb{N} \to J_K$ lo es $\#_c$, pues $\mathbb{N} \not\sim J_K$. Por tanto, $\mathbb{N} \not\sim J_{K+1}$.

Por inducción, se tiene lo deseado.

q.e.d.

Proposición:

X es a lo sumo numerable ssi X es equipotente a algún subconjunto de $\mathbb{N}$. En particular, todo subconjunto de un conjunto numerable es a lo sumo numerable.

Dem:

$\Rightarrow$) Suponga que X es a lo sumo numerable.

- Si X es numerable, entonces $X \sim \mathbb{N} \subset \mathbb{N}$.
- Si X es finito, entonces $\exists\, K \in \mathbb{N}$ tal que $X \sim J_K \subset \mathbb{N}$.

$\Leftarrow$) Suponga que $X \sim A$, $A \subset \mathbb{N}$.

- Si A es acotado, entonces $\exists\, m \in \mathbb{N} \;\sqcap\; n \leq m$.
  - Si $A = \emptyset$, entonces $X = \emptyset$ y, $\operatorname{Card} X = 0$, luego X es finito.
  - Si $A \neq \emptyset$, entonces, como $A \subset J_m$, por una proposición anterior $\exists\, K \in \mathbb{N}$, $K \leq m$ tal que $A \sim J_K$. Como $\sim$ es transitiva, $X \sim J_K$. Por tanto, X es finito.
- Si A no es acotado, probaremos que A es numerable.

  Sea $\alpha(1)$ el primer elemento de A ($A \neq \emptyset$, pues de otra forma, A sería acotado). $\alpha(1)$ cumple que:

$$1 \leqslant \alpha(1) < K,\; K \in A \setminus \{\alpha(1)\}$$

($A \setminus \{\alpha(1)\} \neq \emptyset$, pues de otra forma, $\alpha(1)$ sería cota de A). De esta forma, definamos $\alpha(2), \alpha(3), \dots, \alpha(n)$ tales que:

$$i \leqslant \alpha(i) < K \quad \forall K \in A \setminus \{\alpha(1), \dots, \alpha(n)\}$$

$\forall i = 1, 2, \dots, n$. Probaremos que $\alpha(n+1)$ $\exists$ y cumple la desigualdad anterior.

Como A no es acotado, $A \setminus \{\alpha(1), \dots, \alpha(n)\} \neq \emptyset$. Sea $\alpha(n+1)$ el primer elemento de $A \setminus \{\alpha(1), \dots, \alpha(n)\}$. Es claro que:

$$n \leqslant \alpha(n) < \alpha(n+1) < K \quad \forall K \in A \setminus \{\alpha(1), \dots, \alpha(K)\}$$

$$\Rightarrow n < \alpha(n+1) < K$$

Como n y $\alpha(n+1)$ son enteros, entonces: $n+1 \leqslant \alpha(n+1)$. Por tanto

$$i \leqslant \alpha(i) < K \quad \forall K \in A \setminus \{\alpha(1), \dots, \alpha(n+1)\}$$

con $i = 1, 2, \dots, n+1$. Por inducción, podemos definir $\alpha(K)$ $\forall K \in \mathbb{N}$.

Tenemos entonces a $\alpha : \mathbb{N} \to A$, una función inyectiva, pues si $K \neq l$ entonces $\alpha(K) \neq \alpha(l)$ $(K < l \Rightarrow \alpha(K) < \alpha(l))$.

Y α es supra yectiva, en efecto, suponga que $\exists K \in A \ni \alpha(i) \neq K$ $\forall i \in \mathbb{N}$. Si esto sucede, entonces $\alpha(i) < K$ $\forall i \in \mathbb{N}$ (Si $K \in A$ y $K < \alpha(i)$ $\forall i \in \mathbb{N}$, entonces $\alpha(1)$ no sería el primer elemento de $A_{\#c.}$)

Luego, $i < K$ $\forall i \in \mathbb{N}_{\#c}$, pues $\mathbb{N}$ no es acotado.

Por tanto, α es una biyección entre $\mathbb{N}$ y A. Así, $A \sim \mathbb{N}$.

Como $X \sim A$, entonces $X \sim \mathbb{N}$, así, X es numerable.

q.e.d.

Para el caso particular:

Lema:

Todo subconjunto de un conjunto numerable es a lo sumo numerable.

Dem:

Sea X un conjunto numerable y $A \subset X$. Como X es numerable, $\exists f : X \to \mathbb{N}$

función biyectiva. Sea $g: A \to f(A)$, $g = f_{|A}$. Como f es biyectiva, g también lo es. Así, $A \sim f(A)$ y $f(A) \subset \mathbb{N}$. Por la proposición anterior, A es a lo sumo numerable.

q.e.d.