Teorema De Fubini

Notación. Sean $p,q\in\mathbb{N}$. Entonces $\mathbb{R}^{p+q}\equiv\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$, $(x,y)\in\mathbb{R}^{p+q}\Rightarrow x\in\mathbb{R}^p$ y $y\in\mathbb{R}^q$. Si $f:\mathbb{R}^{p+q}\to\mathbb{R}$, entonces

$$f_x:\mathbb{R}^q\to\mathbb{R},\ f_x(y)=f(x,y)\ (y\in\mathbb{R}^q)$$
$$f_y:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R},\ f_y(x)=f(x,y)\ (x\in\mathbb{R}^p)$$

y:

$$\int_{\mathbb{R}^q}f(x,y)dy=\int_{\mathbb{R}^q}f_x(y)\,dy$$
$$\int_{\mathbb{R}^p}f(x,y)dx=\int_{\mathbb{R}^p}f_y(x)\,dx$$

Si para casi toda $x\in\mathbb{R}^p$, f_x es integrable en $\mathbb{R}^q$ y la función $x\mapsto\int_{\mathbb{R}^q}f(x,y)dy$ de $\mathbb{R}^p$ en $\mathbb{R}$ es integrable en $\mathbb{R}^p$, entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^p}dx\int_{\mathbb{R}^q}f(x,y)dy=\int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q}f(x,y)dy\right)dx$$

se llama la integral reiterada de f. Análogamente se define la otra integral reiterada:

$$\int_{\mathbb{R}^q}dy\int_{\mathbb{R}^p}f(x,y)dx=\int_{\mathbb{R}^q}\left(\int_{\mathbb{R}^p}f(x,y)dx\right)dy$$

Def. Sea $A\subseteq\mathbb{R}^{p+q}$. $\forall x\in\mathbb{R}^p$, se define la sección de A al nivel x como el subconjunto de $\mathbb{R}^q$

$$A_x=\{y\in\mathbb{R}^q\mid(x,y)\in A\}$$

y, $\forall y\in\mathbb{R}^q$, la sección de A al nivel de y se define como:

$$A_y=\{x\in\mathbb{R}^p\mid(x,y)\in A\}$$

Def. Las funciones $\pi:\mathbb{R}^{p+q}\to\mathbb{R}^p$ y $\pi':\mathbb{R}^{p+q}\to\mathbb{R}^q$, $\pi(x,y)=x$ y $\pi'(x,y)=y$ $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^{p+q}$ son llamadas proyecciones naturales o canónicas.

Para un $A\subseteq\mathbb{R}^{p+q}$:

$$m_{p+q}(A)=\int_{\pi(A)}m_q(A_x)dx$$
$$=\int_{\pi'(A)}m_p(A_y)\,dy$$

Obs) $\forall \{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ en $\mathbb{R}^{p+q}$: $\left[\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right]_x = \bigcup_{\alpha\in I}[A_\alpha]_x$ y $\left[\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right]_x = \bigcap_{\alpha\in I}[A_\alpha]_x$, y $[A^c]_x = (A_x)^c$, $\forall x\in\mathbb{R}^p$. Además:

$$[\chi_A]_x = \chi_{A_x}, \forall x\in\mathbb{R}^p$$

en efecto, sea $y\in\mathbb{R}^q$, entonces $[\chi_A]_x(y) = \chi_A(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y)\in A \\ 0 & \text{si no}\end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } y\in A_x \\ 0 & \end{cases}$
$= \chi_{A_x}(y)$.

También denotamos por $\mathcal{R}$ a la familia de rectángulos acotados en $\mathbb{R}^n$. Por $\mathcal{R}_\sigma$ a la familia de uniones a lo sumo numerables de elementos de $\mathcal{R}$ en $\mathbb{R}^n$.

y a $\mathcal{R}_{\sigma\delta}$ a la familia de intersecciones a lo sumo numerables de elementos de $\mathcal{R}_\sigma$.

Se tiene $\mathcal{R}\subseteq\mathcal{R}_\sigma\subseteq\mathcal{R}_{\sigma\delta}\subseteq\mathcal{M}$. Como $\mathbb{R}^n$ posee una base numerable formada por rectángulos acotados, todo abierto es un $\mathcal{R}_\sigma$, luego:

$$\mathcal{G}_\delta\subseteq\mathcal{R}_{\sigma\delta}$$

Lema.

Si A es un conjunto en $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_\sigma$ o $\mathcal{R}_{\sigma\delta}$ en $\mathbb{R}^{p+q}$, entonces A_x es un conjunto en $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_\sigma$ o $\mathcal{R}_{\sigma\delta}$ en $\mathbb{R}^q$. $\forall x\in\mathbb{R}^p$. En particular, A_x es medible en $\mathbb{R}^q$, $\forall x\in\mathbb{R}^p$.

Dem:

Sea R un rectángulo acotado en $\mathbb{R}^{p+q}$. Escriba $R = P\times Q$ donde P y Q son rectángulos acotados en $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$ resp. Entonces:

$$R_x = \{y\in\mathbb{R}^q \mid (x,y)\in R\} = \begin{cases} Q & \text{si } x\in P. \\ \emptyset & \text{si } x\notin P.\end{cases}$$

$\therefore R_x$ es un rectángulo acotado en $\mathbb{R}^q$, $\forall x\in\mathbb{R}^p$.

Sea $A\in\mathcal{R}_{\sigma\delta}$ en $\mathbb{R}^{p+q}$, entonces:

$$A = \bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty} R_{ij}$$

donde $R_{ij}\in\mathcal{R}$, $\forall i,j\in\mathbb{N}$. Luego:

$$
\begin{aligned}
A_x &= \left[\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty} R_{ij}\right]_x \\
&= \bigcap_{j=1}^{\infty}\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} R_{ij}\right]_x \\
&= \bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty} [R_{ij}]_x
\end{aligned}
$$

por el caso anterior, $[R_{ij}]_x \in \mathcal{R}$ en $\mathbb{R}^q$. Luego $A_x \in \mathcal{R}_{\sigma\delta}$ en $\mathbb{R}^q$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^p$. En particular si $R_{ij} = R_{ij'}$, $\forall\; j, j' \in \mathbb{N}$ con $i \in \mathbb{N}$, entonces $A_x \in \mathcal{R}_\sigma$ en $\mathbb{R}^q$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^p$.

q.e.d.

Lema.

i) Si $A \in \mathcal{R}_\sigma$ en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$A = \bigcup_{v=1}^{\infty} R_v$$

donde los R_v son elementos de $\mathcal{R}$ disjuntos en $\mathbb{R}^n$.

Dem:

Como $A = \bigcup_{v=1}^{\infty} B_v$, donde B_v son rectángulos acotados en $\mathbb{R}^n$. Pero:

$$A = \bigcup_{v=1}^{\infty} B_v = \bigcup_{v=1}^{\infty} \underbrace{\left[B_v \setminus \bigcup_{k=1}^{v-1} B_k\right]}_{①}, \quad \text{con } B_0 = \emptyset$$

Donde los conjuntos en ① son elementales disjuntos. Por el cap. 1, todo elemento de $\mathcal{E}$ puede ser escrito como unión finita de rectángulos acotados disjuntos.

q.e.d.

ii) Sean $A, B \in \mathcal{R}_\sigma \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{R}_\sigma$.

Dem:

Expresemos A y B como:

$$A = \bigcup_{v=1}^{\infty} R_v \qquad y \quad B = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$$

$$\Rightarrow A \cap B = \bigcup_{v=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} R_v \cap Q_j$$

Donde $R_v \cap Q_j \in \mathcal{R}$. Por tanto $A \cap B \in \mathcal{R}_\sigma$.[1]

q.e.d.

iii) Sea $A \in \mathcal{R}_{\sigma\delta}$, entonces $A = \bigcap_{v=1}^{\infty} A_v$, donde $\{A_v\}_{v=1}^{\infty}$ es decreciente en $\mathcal{R}_\sigma$. Si $m(A) < \infty \Rightarrow$

Se puede escoger A_1 $\ni$ $m(A_1)<\infty$.

Dem:

Se tiene que $A=\bigcap_{v=1}^{\infty} B_v$ con $B_v \in R_\sigma$. Entonces:

$$A=\bigcap_{v=1}^{\infty} B_v = \bigcap_{v=1}^{\infty}\left(\bigcap_{j=1}^{v} B_j\right)$$

Con $\left\{\bigcap_{j=1}^{v} B_j\right\}_{v=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente de medibles en R_σ (por (i)).

Suponga que $m(A)<\infty$. Por la regularidad de la medida, $\exists$ G abierto $\ni$ $m(G/A)<1$ y $A\subseteq G$.

Entonces:

$$m(G)<m(A)+1<\infty$$

Como $G\in R_\sigma$, entonces:

$$A=A\cap G=\bigcap_{v=1}^{\infty} A_v\cap G$$

Con $\{A_v\cap G\}_{v=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente en R_σ $\ni$ $m(A_v\cap G)\leq m(G)<\infty$.

q.e.d.

Lema.

Sea $A\in R_{\sigma\delta}$ en $\mathbb{R}^{p+q}$ con medida finita. Entonces:

$$m_{p+q}(A)=\int_{\mathbb{R}^p} m_q(A_x)\,dx$$

(i.e la función $x\mapsto m_q(A_x)$ es integrable no neg. (luego finita c.t.p. en $\mathbb{R}^q$) y se cumple la igualdad).

Dem:

a) Si $A\in\mathbb{R}^{p+q}$, con $A\in R$, entonces $A=P\times Q$ donde P y Q son rectángulos acotados en $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$ resp. Se tiene:

$$m_q(A_x)=\begin{cases} m_q(Q) & \text{si } x\in P \\ 0 & \text{si } x\notin P\end{cases} = m_q(Q)\chi_P(x),\ \forall\, x\in\mathbb{R}^p.$$

Luego $x\mapsto m_q(A_x)$ es integrable no neg. en $\mathbb{R}^p$, y:

$$\int_{\mathbb{R}^p} m_q(A_x)\,dx=\int_{\mathbb{R}^p} m_q(Q)\chi_P(x)\,dx=m_q(Q)m_p(P)=m_{p+q}(A)$$

b) $A\in R_\sigma$ en $\mathbb{R}^{p+q}$ con medida finita, como A se puede escribir como.

$$A = \bigcup_{v=1}^{\infty} R_v$$

donde los R_v son todos rectángulos acotados disjuntos en $\mathbb{R}^{p+q}$. Entonces:

$$m_{p+q}(A) = \sum_{v=1}^{\infty} m_{p+q}(R_v) \ \ldots (1)$$

Se tiene:

$$A_x = \bigcup_{v=1}^{\infty} [R_v]_x$$

donde los $[R_v]_x$ son rectángulos acotados disjuntos en $\mathbb{R}^q$[3]. Así pues:

$$\infty > m_q(A_x) = \sum_{v=1}^{\infty} m_q([R_v]_x), \ \forall \ x \in \mathbb{R}^p$$

Luego $x \mapsto m_q(A_x)$ de $\mathbb{R}^p$ en $\overline{\mathbb{R}}$ debe ser medible no negativa (por ser límite puntual de funciones medibles)[4].

Por el T. de Conv. Monótona:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^p} m_q(A_x)\, dx &= \sum_{v=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^p} m_q([R_v]_x)\, dx \\ &= \sum_{v=1}^{\infty} m_{p+q}(R_v) \\ &= m_{p+q}(A) < \infty \end{aligned}$$

por (1). $\therefore x \mapsto m_q(A_x)$ es integrable no negativa en $\mathbb{R}^p$, luego finita c.t.p. en $\mathbb{R}^p$ y se cumple la igualdad anunciada.

c) Caso $A \in R_{\sigma\delta}$ en $\mathbb{R}^{p+q}$ con medida finita. Por el lema anterior:

$$A = \bigcap_{v=1}^{\infty} B_v$$

donde los $B_v \in R_\sigma$, son decrecientes y $m(B_1) < \infty$. Por el T. de continuidad:

$$m_{p+q}(A) = \lim_{v \to \infty} m_{p+q}(B_v)$$

Se tiene:

$$A_x = \bigcap_{v=1}^{\infty} [B_v]_x$$

donde $\{[B_v]_x\}_{v=1}^{\infty}$ son decrecientes en $\mathbb{R}^q$. Por (b), $x \mapsto m_q([B_1]_x)$ es integrable no negativa en $\mathbb{R}^p$. Luego finita c.t.p. en $\mathbb{R}^p$, pues:

$$\int_{\mathbb{R}^p} m_q([B_1]_x)\, dx = m_{p+q}(B_1) < \infty$$

Luego, $\exists\ Z \subseteq \mathbb{R}^p$ despreciable $\ni$ $m_q([B_1]_x) < \infty\ \forall x \in \mathbb{R}^p \setminus Z$. Entonces:

$$\lim_{r \to \infty} m([B_r]_x) = m([A_r]_x)$$

$\forall x \in \mathbb{R}^p \setminus Z$ (por el teorema de continuidad). Además,

$$0 \leq m_q([B_r]_x) \leq m_q([B_1]_x)$$

$\forall x \in \mathbb{R}^p$, y $\forall r \in \mathbb{N}$, donde $x \mapsto m_q([B_1]_x)$ es integrable. Por el T. de Lebesgue:

$$\lim_{r \to \infty} \int_{\mathbb{R}^p} m_q([B_r]_x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^p} m_q(A_x)\,dx$$

Así pues

$$\begin{aligned} m_{p+q}(A) &= \lim_{r \to \infty} m_{p+q}(B_r) \\ &= \lim_{r \to \infty} \int m_q([B_r]_x)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} m_q(A_x)\,dx \end{aligned}$$

q.e.d.

EJEMPLO.

1) Sea $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x < 1,\ 0 < y < x,\ 0 < z < x+y\}$. Pruebe que A es medible y calcule su medida.

Dem:

Como A es abierto, entonces $A \in \mathcal{R}_\sigma \subseteq \mathcal{R}_{\sigma\delta}$. Además $m_3(A) < \infty$, pues $A \subseteq [0,2]^3$. Se puede por tanto aplicar el lema anterior. Para ello, identificaremos a $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$. Por el lema:

$$m_3(A) = \int_{\mathbb{R}} m_2(A_x)\,dx$$

donde $A_x = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < x \text{ y } 0 < z-y < x,\ 0 < x < 1\}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$A_x = \begin{cases} \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < x \text{ y } 0 < z < x+y\} & \text{si } 0 < x < 1. \\ \emptyset & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

$$\therefore m_3(A) = \int_0^1 m_2(A_x)\,dx$$

Para calcular $m_2(A_x)$, se usa el mismo lema:

$$m_2(A_x) = \int_{\mathbb{R}} m_1([A_x]_y)\,dy$$

donde $[A_x]_y = \{ z \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1,\ 0 < y < x,\ 0 < z < x+y \}$

$$= \begin{cases} \{ z \in \mathbb{R} \mid 0 < z < x+y \} & \text{si } 0 < y < x \\ \phi & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Por tanto:

$$m_2(A_x) = \int_0^x m_1([A_x]_y)\,dy$$
$$= \int_0^x m_1(]0, x+y[)\,dy$$
$$= \int_0^x x+y\,dy$$
$$\therefore m_3(A) = \int_0^1 dx \left(\int_0^x x+y\,dy \right) = \ldots = \frac{1}{2}.$$

q.e.d.

Lema.

Si $m_{p+q}(A) = 0$, entonces $m_q(A_x) = 0$ para casi toda $x \in \mathbb{R}^p$.

Dem:

Por la regularidad de la medida de Lebesgue, $\exists\, G \in \mathcal{G}_\delta \subseteq \mathcal{R}_{\sigma\delta}$ $\ni$ $A \subseteq G$ y $m_{p+q}(G \setminus A) = 0$ en $\mathbb{R}^{p+q}$.

Note que $m_{p+q}(G) = m_{p+q}(G \setminus A) + m_{p+q}(A) = 0$. Por el lema anterior. $x \mapsto m_q(G_x)$ es integrable no negativa en $\mathbb{R}^p$ (luego finita c.t.p.) y:

$$0 = m_{p+q}(G) = \int_{\mathbb{R}^p} m_q(G_x)\,dx$$

$\therefore x \mapsto m_q(G_x)$ es 0 c.t.p. en $\mathbb{R}^p$. $\exists$ así $Z \subseteq \mathbb{R}^p$ despreciable $\ni$ $m_q(G_x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^p \setminus Z$. Pero $A_x \subseteq G_x$, $\forall x \in \mathbb{R}^p \Rightarrow m_q(A_x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^p \setminus Z$. (en Z, A_x puede ser no medible).

q.e.d.

Proposición.

Sea A medible en $\mathbb{R}^{p+q}$ con medida finita. Entonces para casi toda $x \in \mathbb{R}^p$, A_x es medible en $\mathbb{R}^q$, y la función $x \mapsto m_q(A_x)$ definida c.t.p. en $\mathbb{R}^p$, es integrable no negativa (luego finita c.t.p.) y

$$\int_{\mathbb{R}^p} m_q(A_x)\,dx = m_{p+q}(A)$$

Dem:

Por la regularidad de la medida de Lebesgue, $\exists\, G \in \mathcal{G}_\delta \subseteq \mathcal{R}_{\sigma\delta}$ en $\mathbb{R}^{p+q}$ $\ni$ $A \subseteq G$ y $m_{p+q}(G \setminus A) = 0$.

Como $m_{p+q}(G) = m_{p+q}(G \setminus A) + m_{p+q}(A) = m_{p+q}(A) < \infty$. Como G tiene medida finita y es $R_{\sigma\delta}$, entonces G_x es medible $\forall x \in \mathbb{R}^p$, la función $x \mapsto m_q(G_x)$ es integrable no negativa en $\mathbb{R}^p$ (luego finita c.t.p.) y:

$$m_{p+q}(A) = m_{p+q}(G) = \int_{\mathbb{R}^p} m_q(G_x)\,dx$$

Pero $A = G \setminus (G \setminus A) \Rightarrow A_x = G_x \setminus (G_x \setminus A_x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^p$. Por el lema anterior, como $m_{p+q}(G \setminus A) = 0$, entonces $m_q(G_x \setminus A_x) = 0$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^p$. Para estos $x \in \mathbb{R}^p$:

$$m_q(G_x) = m_q(G_x \setminus A_x) + m_q(A_x) = m_q(A_x)$$

$$\Rightarrow m_q(G_x) = m_q(A_x) \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^p$$

$\Rightarrow x \mapsto m_q(A_x)$ es integrable en $\mathbb{R}^p$, y:

$$\int_{\mathbb{R}^p} m_q(A_x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^p} m_q(G_x)\,dx$$

$$\therefore m_{p+q}(A) = \int_{\mathbb{R}^p} m_q(A_x)\,dx$$

Apostol análisis matem-, variables reales.

q.e.d.

EJEMPLO

1) Sean $n \in \mathbb{N}$ y $c > 0$. Sea

$$T_{n,c} = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_k \geq 0 \text{ y } \sum_{i=1}^{n} x_i \leq c,\ \forall k \in [\![1, n]\!] \right\}.$$

$T_{n,c}$ es medible (por ser cerrado), y además es compacto. Pues:

$$T(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

es continua (T), y $T_{n,c} = T^{-1}(]-\infty, c]) \cap [0, \infty[^n$, que es cerrado en $\mathbb{R}^n$. Para calcular la medida, se usará el lema. Se afirma:

$$m_n(T_{n,c}) = \frac{c^n}{n!},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

La prueba es por inducción. Para $n=1$ es válida (pues $T_{1,c} = [0, c]$). Suponga que se cumple para k. Se identifica:

$$\mathbb{R}^{k+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$$

Por la prop. anterior:

$$m_{k+1}(T_{k+1,c}) = \int_{\mathbb{R}} m_k([T_{k+1,c}]_x)\, dx \quad \ldots (1)$$

donde:

$$[T_{k+1,c}]_x = \{(x_1,\ldots,x_k)\in\mathbb{R}^k \mid (x, x_1,\ldots,x_k)\in T_{k+1,c}\}$$

$$= \{(x_1,\ldots,x_k)\in\mathbb{R}^k \mid x\geq 0, x_i\geq 0 \text{ y } x+\sum_{i=1}^{k} x_i \leq c\}$$

$$= \begin{cases} \emptyset & \text{e.o.c} \\ \{(x_1,\ldots,x_k)\in\mathbb{R}^k \mid x_i\geq 0 \text{ y } \sum_{i=1}^{k} x_i \leq c-x\} & \text{; } 0\leq x\leq c \end{cases}$$

$$= \begin{cases} T_{k,c-x} & \text{si } 0\leq c\leq x. \\ \emptyset & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Sustituyendo en (1):

$$m_{k+1}(T_{k+1,c}) = \int_0^c m_k(T_{k,c-x})\, dx$$

$$= \int_0^c \frac{(c-x)^k}{k!}\, dx$$

$$= R\int_0^c \frac{(c-x)^k}{k!}\, dx$$

$$= \frac{(c-x)^{k+1}}{(k+1)!}\Big|_0^c$$

$$= \frac{c^{k+1}}{(k+1)!}$$

por inducción, $T_{n,c} = \frac{c^n}{n!}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

2) Calcular lo mismo para $A = \{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid 0\leq x_1\leq x_2 \leq \ldots \leq x_n\leq c\}$.

Teorema (de Fubini)

Si $f:\mathbb{R}^{p+q}\to\mathbb{R}$ es integrable en $\mathbb{R}^{p+q}$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^p} dx \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy$$

(i.e. para casi toda $x\in\mathbb{R}^p$, $y\mapsto f_x(y)=f(x,y)$ es integrable en $\mathbb{R}^q$, y que la función $x\mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy$, definida c.t.p. en $\mathbb{R}^p$, es integrable en $\mathbb{R}^p$ y su valor es $\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f(x,y)\,dx\,dy$).

Al intercambiar x con y, resulta:

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^q} dy \int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dx$$

Dem:

Caso a) Suponga que $f=\chi_A$ con A medible en $\mathbb{R}^{p+q}$ con A de medida finita (y medible). Recuerde que:

$$f_x = [\chi_A]_x = \chi_{A_x},\ \forall x\in\mathbb{R}^p$$

Por la prop. anterior:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f(x,y)\,dx\,dy &= \int_{\mathbb{R}^{p+q}} \chi_A(x,y)\,dx\,dy\\ &= m_{p+q}(A)\\ &= \int_{\mathbb{R}^p} m_q(A_x)\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^p} dx\int_{\mathbb{R}^q}\chi_{A_x}(y)\,dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^p} dx\int_{\mathbb{R}^q}[\chi_A]_x\,dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^p} dx\int_{\mathbb{R}^q} f_x(y)\,dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^p} dx\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy\end{aligned}$$

Caso b) Por linealidad de la integral, el resultado es válido para funciones $S(\mathbb{R}^{p+q},\mathbb{R})$.

Caso c) Suponga que f es medible no negativa (no nec. integrable) en $\mathbb{R}^{p+q}$. Por un resultado del cap. 4, $\exists\ \{\varphi_r\}_{r=1}^{\infty}$ creciente y no negativa que converge en todo punto a f (puntualmente). Por el T.C.M:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f &= \lim_{r\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{p+q}}\varphi_r(x,y)\,dx\,dy\\ &= \lim_{r\to\infty}\int_{\mathbb{R}^p} dx\int_{\mathbb{R}^q}\varphi_r(x,y)\,dy \quad \dots (1)\end{aligned}$$

Como $\{\varphi_v\}_{v=1}^{\infty}$ es creciente en $\mathbb{R}^{p+q}$, entonces $\{[\varphi_v]_x\}_{v=1}^{\infty}$ es creciente en $\mathbb{R}^q$, no neg. y medibles salvo en un conjunto de medida cero en $\mathbb{R}^p$. Por el T.C.M:

$$\lim_{v\to\infty} \int_{\mathbb{R}^q} [\varphi_v]_x dy = \int_{\mathbb{R}^q} f_x dy \leq \infty$$

Pues $\lim_{v\to\infty} [\varphi_v]_x = f_x$ c.t.p. Pero como $\{x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} [\varphi_v]_x dy\}_{v=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente de funciones medibles no neg. definidas c.t.p. en $\mathbb{R}^p$ con valores no neg. en $\overline{\mathbb{R}}$ que convergen c.t.p. en $\mathbb{R}^p$ a $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy$, la cual es medible no neg. Por T.C.M.

$$\lim_{v\to\infty} \int_{\mathbb{R}^p} dx \int_{\mathbb{R}^q} \varphi_v(x,y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^p} dx \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy \quad \ldots (2)$$

Por (1) y (2):

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^p} dx \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy \leq \infty \quad \ldots (3)$$

Caso d): Suponga f integrable no neg. en $\mathbb{R}^{p+q}$. Por (3):

$$\infty > \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^p} dx \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy$$

i.e $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy$ es integrable no neg. (luego finita c.t.p) en $\mathbb{R}^q$. Luego $y \mapsto f(x,y)$ de $\mathbb{R}^q$ en $\mathbb{R}$ es int. no neg. para casi toda $x \in \mathbb{R}^p$.

Caso e) Suponga f integrable en $\mathbb{R}^{p+q}$. Como

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f &= \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f^+ - \int_{\mathbb{R}^{p+q}} f^- \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} dx \int_{\mathbb{R}^q} f^+(x,y)\,dy - \int_{\mathbb{R}^p} dx \int_{\mathbb{R}^q} f^-(x,y)\,dy\end{aligned}$$

Por d), podemos usar la linealidad de la integral. luego:

$$= \int_{\mathbb{R}^p} \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy$$

q.e.d.

Teorema de Fubini (para med. no neg.)

Si $f:\mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{R}$ es medible no negativa, entonces:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f(x,y)\,dx\,dy &= \int_{\mathbb{R}^p} dx \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^q} dy \int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dx \leq \infty\end{aligned}$$

y, para casi toda $x \in \mathbb{R}^p$, $y \mapsto f(x,y)$ es medible no neg. en $\mathbb{R}^q$, y la función $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy$

definida c.t.p. en $\mathbb{R}^p$ es medible no neg. y se cumple lo anterior.

Dem:

Se deduce de la parte c).

Corolario.

Sea $f:\mathbb{R}^{p+q}\to\mathbb{R}$ medible. Una cond. nec. y suficiente para que f sea integrable en $\mathbb{R}^{p+q}$ es que:

$$\int_{\mathbb{R}^p} dx \int_{\mathbb{R}^q} |f(x,y)|dy \quad \text{o} \quad \int_{\mathbb{R}^q} dy \int_{\mathbb{R}^p} |f(x,y)|dx$$

sea finita.

$\Rightarrow$) Inmediata.

$\Leftarrow$) Como $|f|$ es medible no neg.

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} |f| = \int_{\mathbb{R}^p} dx \int_{\mathbb{R}^q} |f(x,y)| dy < \infty$$

Luego f es integrable.

q.e.d.

Teorema (de Fubini) sobre conjuntos.

Sea $A\subseteq\mathbb{R}^{p+q}$ medible $\ni$ $\pi(A)$ y $\pi'(A)$ son medibles en $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$, resp. Si $f:A\to\mathbb{R}$ es integrable en A, entonces:

i) Para casi toda $x\in\pi(A)$, la función $f_x: A_x\to\mathbb{R}$, $y\mapsto f(x,y)$, es integrable en A_x. La funcion $x\mapsto\int_{A_x} f(x,y)dy$ definida c.t.p. en $\pi(A)$ es integrable en $\pi(A)$, y se cumple:

$$\int_A f(x,y)dxdy = \int_{\pi(A)} dx \int_{A_x} f(x,y)dy$$

ii) Similarmente:

$$\int_A f(x,y)dxdy = \int_{\pi'(A)} dy \int_{A_y} f(x,y)dx$$

Teorema de Fubini para funciones med. no neg.

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^{p+q}$ medible m $\pi(A)$, $\pi'(A)$ son medibles en $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$, resp. Si $f: A \to \mathbb{R}$ es medible no neg. en A, entonces,

i) Para casi toda $x \in \pi(A)$, $f_x: A_x \to \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x,y)$ es medible no neg. en A_x. La función $x \mapsto \int_A f(x,y)dy$ definida c.t.p. en $\pi(A)$ con valores no negativos en $\overline{\mathbb{R}}$ es medible no neg. en $\pi(A)$ y se cumple:

$$\int_A f(x,y)dxdy = \int_{\pi(A)} dx \int_{A_x} f(x,y)dy \leq \infty$$

ii) Similarmente,

$$\int_A f(x,y)dxdy = \int_{\pi'(A)} dy \int_{A_y} f(x,y)dx \leq \infty$$

Corolario. (Fórmula de Cavaliery)

Si $A \subseteq \mathbb{R}^{p+q}$ es medible m $\pi(A)$ y $\pi'(A)$ son medibles en $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$ (resp.). Entonces:

$$m_{p+q}(A) = \int_{\pi(A)} m_q(A_x)dx \leq \infty$$
$$= \int_{\pi'(A)} m_p(A_y)dy \leq \infty$$

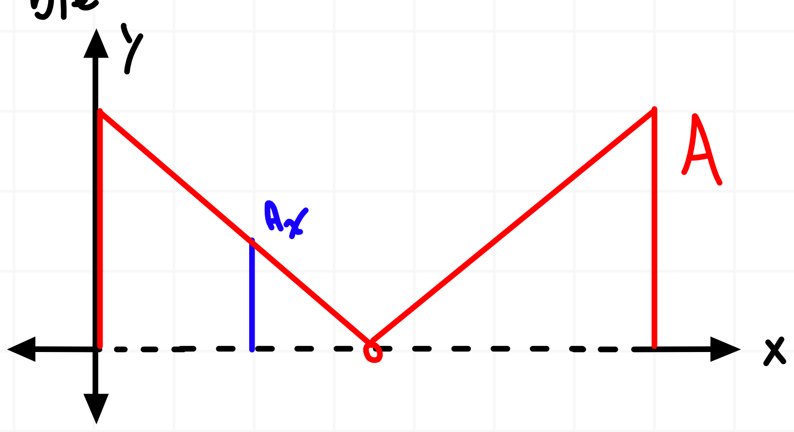
Teorema (de Tonelli) sobre conjuntos.

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^{p+q}$ med. m $\pi(A)$, $\pi'(A)$ son med. en $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$ (resp.). Sea $f: A \to \mathbb{R}$ una función medible. Entonces f es integrable en $A \iff$ es finita alguna de las dos integrales reiteradas:

$$\int_{\pi(A)} dx \int_{A_x} |f(x,y)|dy \quad \text{o} \quad \int_{\pi'(A)} dy \int_{A_y} f(x,y)dx$$

EJEMPLO.

Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \frac{1}{2},\ x \neq \frac{1}{4},\ 0 < y \leq |x - \frac{1}{4}|\}$, y $f: A \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \frac{1}{(x-\frac{1}{4})^3}$. A es medible



A es medible por ser la intersección de un abierto y un cerrado. f es medible por ser continua en A. Se tiene:

$$A_x = \{(x,y)\in A \mid y\in\mathbb{R}\}$$
$$= \begin{cases}]0,|x-\tfrac{1}{2}|[& \text{si } x\in[0,\tfrac{1}{2}[\,\cup\,]\tfrac{1}{2},1] \\ \emptyset & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

y $\pi(A) = [0,\tfrac{1}{2}[\,\cup\,]\tfrac{1}{2},1]$. Para A_y:

$$A_y = \begin{cases} [0,\tfrac{1}{2}-y]\cup[y+\tfrac{1}{2},1] & \text{si }]0,\tfrac{1}{2}]\ni y. \\ \emptyset & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

y $\pi'(A) =]0,\tfrac{1}{2}]$. Donde $\pi(A)$ y $\pi'(A)$ son medibles. $\forall\, x\in\pi(A)$ se tiene:

$$\int_{A_x} f(x,y)\,dy = \int_0^{|x-\frac{1}{2}|} \frac{dy}{(x-\frac{1}{2})^3} = \frac{|x-\frac{1}{2}|}{(x-\frac{1}{2})^3}, \quad \forall\, x\in\pi(A)$$

Se afirma que $x\mapsto \int_{A_x} f(x,y)\,dy$ no es integrable en $\pi(A)$ (luego no existiría la integral reiterada $\int_{\pi(A)}dx\int_{A_x} f(x,y)\,dy$ y, por Fubini f no sería integrable en A). De hecho, $x\mapsto\int_{A_x} f(x,y)\,dy$ no es integrable en $]\tfrac{1}{2},1]$. En efecto,

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \left|\frac{|x-\frac{1}{2}|}{(x-\frac{1}{2})^3}\right| dx = \int_{1/2}^1 \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2} \overset{\text{T.C.M}}{=} \lim_{v\to\infty} \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{v}}^1 \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2}$$
$$= \lim_{v\to\infty} \mathcal{R}\int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{v}}^1 \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2}, \text{ por el T.F.C para Rieman:}$$
$$= \lim_{v\to\infty} -\frac{1}{(x-\frac{1}{2})}\Big|_{\frac{1}{2}+\frac{1}{v}}^1$$
$$= \lim_{v\to\infty}\left[-\frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{(\frac{1}{2}+\frac{1}{v}-\frac{1}{2})}\right]$$
$$= \lim_{v\to\infty}[v-2] = \infty$$

Sin embargo, si existe la otra integral reiterada. En efecto:

$$\int_{A_y} f(x,y)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}-y} \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^3} + \int_{\frac{1}{2}+y}^1 \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^3} \quad (\text{pues } y\neq 0 \text{ y los int. son compactos})$$
$$= \mathcal{R} -\frac{1}{2(x-\frac{1}{2})^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}-y} + \mathcal{R}\,\frac{1}{2(x-\frac{1}{2})^2}\Big|_{\frac{1}{2}+y}^1$$
$$= \dots = 0.$$

$$\therefore \int_{\pi'(A)} dy \int_{A_y} f(x,y)\,dx = 0, \text{ i.e } f \text{ no es integrable.}$$

Alternativamente, por Tonelli:

$$\int_{\pi(A)} dx \int_{A_x} f(x,y)\,dy = \int_{[0,\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2},1]} dx \int_0^{|x-\frac{1}{2}|} \frac{dy}{|x-\frac{1}{2}|^3} \geq \int_{1/2}^1 dx \int_0^{|x-\frac{1}{2}|} \frac{dy}{|x-\frac{1}{2}|^3} = \int_{1/2}^1 \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2} = \infty$$

EJEMPLOS.

1) Sea $f:]0,\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}$, $\forall x>0$. Verifique que f es integrable y calcule su integral. $(0<a<b)$.

Como $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} = b-a$, entonces f tiene una discontinuidad removible en 0 (luego es acotada en una vecindad de 0). Ya que f es continua en $]0,\infty[$, entonces f es integrable en una vecindad de 0, digamos $]0,\delta[$.

Se tiene:

$$0 < \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} \leq \frac{1}{\delta}\left[e^{-ax}-e^{-bx}\right],\ \forall x \geq \delta$$

ya se sabe que $x \mapsto \frac{1}{\delta}(e^{-ax}-e^{-bx})$ es integrable en $[\delta,\infty[$, luego f es integrable en $]0,\infty[$.

Observe que:

$$\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-xy}\,dy$$

Entonces:

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^\infty dx \int_a^b e^{-xy}\,dy$$

Como $(x,y) \mapsto e^{-xy}$ se puede aplicar el T. de Fub. para funciones medibles no neg.

$$\int_0^\infty dx \int_a^b e^{-xy}\,dy = \int_A e^{-xy}\,dx\,dy = \int_a^b dy \int_0^\infty e^{-xy}\,dx$$

y $\displaystyle\int_0^\infty e^{-xy}\,dx \overset{T.C.M.}{=} \lim_{v\to\infty} \int_0^v e^{-xy}\,dx = \lim_{v\to\infty} -\frac{e^{-xy}}{y}\Big|_0^v = \frac{1}{y} - \lim_{v\to\infty} \frac{e^{-vy}}{y} = \frac{1}{y}$. Por tanto:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = \int_a^b \frac{dy}{y} = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$\square$

2) Verifique que

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1-x^2-y^2\}$$

es medible y calcule su volumen.

A es medible por ser compacto. Se identifica $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ de tal suerte que (x,y,z) se representa en la forma $(z,(x,y))$.

Se tiene:

$$A_z = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid z \leq 1-x^2-y^2,\ z\geq 0\}$$
$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1-z,\ z\geq 0\}$$
$$= \begin{cases} \emptyset & \text{e.o.c.} \\ \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1-z\} & \text{si } 0\leq z\leq 1. \end{cases}$$

Entonces $\pi(A) = [0,1]$. Por tanto, usando la fórmula de Cavalieri:

$$m_3(A) = \int_{\mathbb{R}} m_2(A_z)\,dz$$
$$= \int_0^1 m_2(A_z)\,dz$$

Para calcular $m_2(A_z)$, aplicamos cavalieri otra vez. Llamemos $B = A_z$.

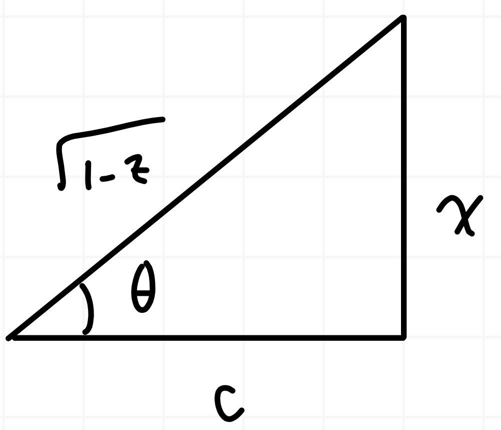
$$m_2(B) = \int_{\mathbb{R}} m_1(B_x)\,dx$$

Y

$$B_x = \{y\in\mathbb{R} \mid (x,y)\in B\}$$
$$= \{y\in\mathbb{R} \mid x^2+y^2\leq 1-z\},\ x\in\mathbb{R}$$
$$= \{y\in\mathbb{R} \mid y^2 \leq 1-z-x^2\},\ x\in\mathbb{R}.$$

$B_x \neq \emptyset$ si $x^2 \leq 1-z$, i.e $-\sqrt{1-z} \leq x \leq \sqrt{1-z}$, i.e $\pi(B) = [-\sqrt{1-z}, \sqrt{1-z}]$. Luego:

$$m_2(B) = \int_{\mathbb{R}} m_1(B_x)\,dx$$
$$= \int_{\pi(B)} m_1\left(\left[-\sqrt{1-z-x^2},\ \sqrt{1-z-x^2}\right]\right)dx$$
$$= 2\int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}} \sqrt{1-z-x^2}\,dx$$
$$= 2\,R\int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}} \sqrt{1-z-x^2}\,dx$$



hacemos $x = \sqrt{1-z}\ \operatorname{sen}\theta \Rightarrow dx = \sqrt{1-z}\cos\theta\,d\theta$. Luego:

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} 2\sqrt{(1-z)(1-\operatorname{sen}^2\theta)}\ \cos\theta\,d\theta\ \sqrt{1-z}$$
$$= 2(1-z)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta$$

$$= 2(1-z)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt$$

$$= \ldots = \pi(1-z)$$

Por tanto:

$$m_3(B) = \int_0^1 \pi(1-z)\, dz$$

$$= \ldots = \frac{\pi}{2}$$

$\square$

Alternativamente se puede calcular a $\mathbb{R}^3$ con $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, siendo $(x,y,z) = ((x,y),z)$

$$m_3(A) = \int_{x^2+y^2\leq 1} (1-x^2-y^2)\, dx\, dy$$

Notus.

1) $y \in [A^c]_x \Leftrightarrow (x,y) \in A^c \Leftrightarrow (x,y) \notin A \Leftrightarrow y \notin A_x \Leftrightarrow y \in (A_x)^c$.