Notas curso Topología I.
Separabilidad, Filtros

Cristo Daniel Alvarado

7 de mayo de 2024

Índice general

Capítulo 2

Separabilidad

2.1. Axiomas de separación

Definición 2.1.1
Sea (X, τ) un espacio topológico.

1. (X, τ) se dice un **espacio** T_0 si dados $a, b \in X$ con $a \neq b$ existe un abierto que contiene a alguno de los dos puntos, pero no contiene al otro.

2. (X, τ) se dice un **espacio** T_1 si dados $a, b \in X$ con $a \neq b$ existen $U, V \subseteq X$ abiertos tales que $a \in U$, $b \in V$ y, $a \notin V$, $b \notin U$.

3. (X, τ) se dice un **espacio** T_2 si dados $a, b \in X$ con $a \neq b$ existen $U, V \subseteq X$ abiertos tales que $a \in U$, $b \in V$ y, $U \cap V = \emptyset$. Esto es equivalente a que el espacio sea de Hausdorff.

4. (X, τ) se dice un **espacio** T_3 si dados $p \in X$ y $A \subseteq X$ cerrado tal que $p \notin A$, existen $U, V \in \tau$ tales que $p \in U$, $A \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

5. (X, τ) se dice un **espacio** T_4 si dados $A, B \subseteq X$ cerrados y disjuntos, existen $U, V \in \tau$ tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y, $U \cap V = \emptyset$.

6. (X, τ) se dice un **espacio regular** si es un espacio T_3 y T_1.

7. (X, τ) se dice un **espacio normal** si es un espacio T_4 y T_1.

Observación 2.1.1
Notemos que:

$$T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$$

Ejemplo 2.1.1
Considere al conjunto $X = \{1, 2\}$ y $\tau = \{X, \emptyset, \{1\}\}$. Afirmamos que (X, τ) es T_0, pero no es T_1 y, por ende tampoco puede ser T_2.

Ejemplo 2.1.2
Sea $(\mathbb{R}, \tau_{cf})$. Afirmamos que $(\mathbb{R}, \tau_{cf})$ es T_1. En efecto, sean $r, s \in \mathbb{R}$ tales que $r \neq s$. Los conjuntos $U = \mathbb{R} - \{s\}, V = \mathbb{R} - \{r\} \in \tau_{cf}$ pues sus complementos son finitos, además:

$$r \in U \quad \text{y} \quad s \in V$$

donde, $r \notin V$ y $s \notin U$. Por tanto, el espacio de T_1. Pero no es T_2.

En efecto, suponga que existen $U, V \in \tau_{cf}$ abiertos tales que $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \in U$, $\frac{1}{\pi} \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. En particular, se tiene que $\mathbb{R} - U$ y $\mathbb{R} - V$ son finitos. Por tanto:

$$\begin{aligned}(\mathbb{R} - U) \cup (\mathbb{R} - V) &= \mathbb{R} - (U \cap V)\\ &= \mathbb{R}\end{aligned}$$

es finito, por tanto, $\mathbb{R}$ es finito$\#_c$. Así, este espacio no puede ser T_2.

Ejemplo 2.1.3
Considere al espacio $(\mathbb{R}, \tau_I = \{X, \emptyset\})$. Afirmamos que $(\mathbb{R}, \tau_I)$ es T_4 y T_3, pero NO es T_0, pues si $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{\pi} \in \mathbb{R}$, solo hay un abierto que contiene a alguno de los dos puntos, el cual es $\mathbb{R}$, que siempre tiene a los dos puntos. Por ende, el espacio no es T_0 (luego no es T_1 ni T_2).

Proposición 2.1.1
T_4 y $T_1 \Rightarrow T_3$ y $T_1 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.

Demostración:
La prueba se hará más adelante. ■

2.2. Espacios T_1

Proposición 2.2.1
Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces (X, τ) es un espacio T_1 si y sólo si todo subconjunto unitario de X es cerrado.

Demostración:
Se probará la doble implicación.

$\Rightarrow)$: Suponga que (X, τ) es T_1. Sea $x \in X$. Hay que probar que $X - \{x\} \in \tau$. En efecto, sea $y \in X - \{x\}$, entonces $x \neq y$. Como el espacio es T_1 existen un par de abiertos $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $x \notin V$ y $y \notin U$.

Como $y \in V$ y $x \notin V$, entonces $y \in V \subseteq X - \{x\}$. Luego $X - \{x\}$ es unión arbitraria de abiertos, se sigue que también es abierto. Por ende, $\{x\}$ es cerrado.

$\Leftarrow)$: Suponga que todo subconjunto unitario de X es cerrado. Sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Como $\{x\}, \{y\}$ son cerrados, entonces $U = X = \{y\}$ y $V = X - \{x\}$ son abiertos y cumplen que:

$$x \in U, y \in V \quad x \notin V, y \notin U$$

por tanto, como fueron arbitrarios los dos elementos $x, y \in X$ distintos, se sigue que (X, τ) es T_1. ■

Corolario 2.2.1
Sea (X, τ) un espacio topológico. (X, τ) es T_1 si y sólo si todo subconjunto finito de X es cerrado.

Demostración:
Es inmediata de la proposición anterior. ■

Corolario 2.2.2
Sea X un conjunto finito y τ una topología definida sobre X. (X,τ) es T_1 si y sólo $\tau = \tau_D$.

Demostración:
Es inmediata de la proposición anterior. ■

Proposición 2.2.2
Sea (X,τ) un espacio topológico. Entonces, (X,τ) es T_1 si y sólo si $\tau_{cf} \subseteq \tau$.

Demostración:
Se probarán las dos implicaciones.

$\Rightarrow)$: Sea $A \in \tau_{cf}$ con $A \neq \emptyset$, luego $X - A$ es un conjunto finito. Como (X,τ) es T_1, entonces $X - A$ es cerrado (por ser finito), luego A es abierto, es decir $A \in \tau$.

$\Leftarrow)$: Supongamos que $\tau_{cf} \subseteq \tau$. Sean $x \in X$. El conjunto $X - \{x\}$ es finito, luego $X - \{x\} \in \tau$, por ende el conjunto $\{x\}$ es cerrado. Como el x fue arbitrario, se sigue que todo conjunto unipuntual es cerrado luego, por una proposición anterior (ya que al ser el unipuntual cerrado, todo subconjunto finito de X es cerrado), se sigue que (X,τ) es T_1. ■

Corolario 2.2.3
La topología τ_{cf} es la topología más gruesa (o menos fina) que podemos definir sobre un conjunto para que el espacio topológico (X,τ_{cf}) sea T_1.

Demostración:
Es inmediata de la proposición anterior. ■

Proposición 2.2.3
La propiedad de ser un espacio topológico T_1 es hereditaria.

Demostración:
Sea (X,τ) un espacio topológico T_1 y, tomemos $Y \subseteq X$. Formemos así al espacio (Y,τ_Y), queremos ver que este espacio es T_1. En efecto, sea $y \in Y$, entonces:

$$\{y\} = \{y\} \cap Y$$

luego, $\{y\} \subseteq Y$ es un conjunto cerrado en (Y,τ_Y), ya que $\{y\} \subseteq X$ es un conjunto cerrado en (X,τ). Por ende, todo conjunto unipuntual es cerrado en (Y,τ_Y), luego este subespacio es T_1. ■

Proposición 2.2.4
La propiedad de ser un espacio topológico T_1 es topológica.

Demostración:
Sean (X_1,τ_1) y (X_2,τ_2) espacios topológicos homeomorfos y, suponga que (X_1,τ_1) es un espacio T_1. Sea $h : (X_1,\tau_1) \to (X_2,\tau_2)$ el homeomorfismo entre estos dos espacios. Como esta función es homeomorfismo, es una biyección cerrada y continua. Sea $x_2 \in X_2$. Entonces, existe $x_1 \in X_1$ tal que:

$$h(x_1) = x_2$$

luego, por ser biyección:

$$h(\{x_1\}) = \{x_2\}$$

donde $\{x_1\}$ es cerado en (X_1, τ_1). Como h es cerrada entonces, $\{x_2\}$ es cerrado en (X_2, τ_2). Por tanto, todo conjunto unipuntual es cerrado en (X_2, τ_2), así (X_2, τ_2) es T_1. ■

Proposición 2.2.5
Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ una familia de espacios topológicos y

$$X = \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$$

entonces, (X, τ_p) es T_1 si y sólo si (X_α, τ_α) es T_1, para todo $\alpha \in I$.

Demostración:

Se probarán las dos implicaciones.

$\Rightarrow)$: Suponga que (X, τ_p) es T_1. Como la propiedad de ser un espacio T_1 es hereditaria y topológica, entonces al tenerse que (X_α, τ_α) es homeomorfo a un subespacio de (X, τ_p), tal subespacio es T_1 y la propiedad se conserva bajo homeomorfismos luego, se tiene que (X_α, τ_α) es T_1, para todo $\alpha \in I$.

$\Leftarrow)$: Suponga que (X_α, τ_α) es T_1, para todo $\alpha \in I$. Sean $x = (x_\alpha)_{\alpha\in I}, y = (y_\alpha)_{\alpha\in I} \in X$ con $x \neq y$. Por ser diferentes, existe $\alpha_0 \in I$ tal que

$$x_{\alpha_0} \neq y_{\alpha_0}$$

Como $(X_{\alpha_0}, \tau_{\alpha_0})$ es T_1, existen $U, V \in \tau_{\alpha_0}$ tales que:

$$x_{\alpha_0} \in U, y_{\alpha_0} \in V \quad x_{\alpha_0} \notin V, y_{\alpha_0} \notin U$$

tomemos $M = \prod_{\alpha\in I} M_\alpha$ y $N = \prod_{\alpha\in I} N_\alpha$, donde:

$$M_\alpha = \begin{cases} X_\alpha & \text{si} \quad \alpha \neq \alpha_0 \\ U & \text{si} \quad \alpha = \alpha_0 \end{cases}$$

y

$$N_\alpha = \begin{cases} X_\alpha & \text{si} \quad \alpha \neq \alpha_0 \\ V & \text{si} \quad \alpha = \alpha_0 \end{cases}$$

para todo $\alpha \in I$. Entonces, $x \in M$, $y \in N$ con $N, M \in \tau_p$, pero $x \notin N$, $y \notin M$.

Por tanto, (X, τ_p) es T_1. ■

2.3. Espacios T_2

Proposición 2.3.1
Sea (X, τ) un espacio topológico, y sea

$$\Delta = \left\{(x, x) \in X \times X \middle| x \in X\right\}$$

entonces, (X, τ) es T_2 si y sólo si Δ es un subconjunto cerrado de $(X \times X, \tau_p)$ (da igual si es la topología producto o de caja ya que ambas coinciden).

Demostración:

Se probarán las dos implicaciones.

$\Rightarrow$) : Suponga que (X,τ) es T_2. Veamos que Δ es cerrado en $(X\times X,\tau_p)$. Tomemos $(a,b)\in X\times X$ tal que $(a,b)\notin\Delta$, luego $a\neq b$. Como (X,τ) es T_2, existen dos abiertos $U,V\in\tau$ tales que:

$$a\in U, b\in V \quad U\cap V=\emptyset$$

Sea $L=U\times V$. Se tiene que $(a,b)\in L$ y $L\in\tau_p$. Además, $\Delta\cap L=\emptyset$. En efecto, suponga que existe un elemento $(x,x)\in L$, entonces $x\in U$ y $x\in V$, luego $U\cap V\neq\emptyset\#_c$. Por tanto, $\Delta\cap L=\emptyset$. Así, el conjunto $X\times X-\Delta$ es abierto por ser unión arbitraria de abiertos, luego Δ es cerrado en $(X\times X,\tau_p)$.

$\Leftarrow$) : Suponga que Δ es cerrado en $(X\times X,\tau_p)$. Sean $x,y\in X$ con $x\neq y$. Entonces, $(x,y)\notin\Delta$, luego $(x,y)\in X\times X-\Delta$ el cual es abierto, luego existe un básico $B=U\times V$ tal que $(x,y)\in U\times V\subseteq X\times X-\Delta$, siendo $U,V\in\tau$.

Por la parte anterior, se tiene que $U\cap V=\emptyset$. Por tanto:

$$x\in U, y\in V \quad U\cap V=\emptyset$$

por ende, al ser los elementos diferentes $x,y\in X$ arbitrarios, se sigue que (X,τ) es T_2. ■

2.4. Espacios T_3

Proposición 2.4.1

Sea (X,τ) un espacio topológico. Entonces, el espacio es T_3 si y sólo si dado $x\in X$ y $U\in\tau$ tal que $x\in U$ existe $V\in\tau$ tal que $x\in V$ y $\overline{V}\subseteq U$.

Demostración:

$\Rightarrow$) : Suponga que (X,τ) es T_3. Sea $x\in X$ y $U\in\tau$ tal que $x\in U$, luego $x\notin X-U$, el cual es cerrado, luego por ser el espacio T_3 existen $W,V\in\tau$ abiertos disjuntos tales que:

$$x\in V \quad \text{y} \quad X-U\subseteq W$$

es claro que $V\subseteq U$ (pues, $W\subseteq X-U$ y $W\cap V=\emptyset$). Veamos que $\overline{V}\subseteq U$. En efecto, supongamos que $y\in\overline{V}$ y $y\notin U$, entonces $y\in W$, luego el conjunto $W\cap V\neq\emptyset\#_c$. Por ende, $\overline{V}\subseteq U$.

$\Leftarrow$) : Sea $x\in X$ y $F\subseteq X$ cerrado tal que $x\notin F$, entonces $x\in X-F$ el cual es abierto. Luego por hipótesis existe un cerrado $\overline{V}$ tal que $x\in V\subseteq\overline{V}\subseteq X-F$.

Así, $F\subseteq X-\overline{V}$. Tomemos $W=X-\overline{V}$. Entonces, V y W son abiertos tales que $x\in V$, $F\subseteq W$ con $W\cap V=\emptyset$. Por tanto, (X,τ) es T_3. ■

Ejemplo 2.4.1

Considere el espacio topológico $(X=\{1,2\},\tau_I)$. Este espacio es T_3 pero no es T_0.

Ejemplo 2.4.2

Sea $K=\left\{\frac{1}{n}\middle| n\in\mathbb{N}\right\}$, tomemos $\mathcal{B}$ la colección de subconjuntos de $\mathbb{R}$ formada por los siguientes conjuntos:

1. Todos los intervalos abiertos (a,b).

2. Todos los conjuntos de la forma $(a,b)-K$.

Tenemos que $\mathcal{B}$ es una base para una topología sobre $\mathbb{R}$.

Sea τ_K la topología generada por la colección $\mathcal{B}$. Tenemos que $\tau_u \subseteq \tau_K$. Por ende, como $(\mathbb{R}, \tau_u)$ es T_2, se sigue que $(\mathbb{R}, \tau_K)$ también lo es.

Sean $l \notin \mathbb{R} - K$ y $L = (l-1, l+1) - K$. Tenemos que $l \in L$. El conjunto L es un básico y, además, $L \subseteq \mathbb{R} - \mathbb{K}$. Por tanto, $\mathbb{R} - K \in \tau_K$, luego K es un conjunto cerrado en $(\mathbb{R}, \tau_K)$.

Tenemos que $0 \notin K$. Suponga que $U, V \in \tau$ son abiertos tales que $0 \in U$, $K \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. Como $0 \in U$. Sea $B \in \mathcal{B}$ un básico tal que $x \in B \subseteq V$. Tenemos que, dado un intervalo abierto que contenga al 0, este siempre contiene puntos de K, luego B debe ser de la forma $B = (a, b) - K$.

Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} \in (a, b)$. Se tiene que $\frac{1}{m} \in K \subseteq V$, luego existe un básico (c, d) (debe ser de esta forma) tal que $\frac{1}{m} \in (c, d) \subseteq V$. Ahora, podemos suponer que $a < 0 < c < d < b$. Sea $\zeta\mathbb{R}$ tal que $\zeta < \frac{1}{m}$ y $\max\left\{c, \frac{1}{m+1}\right\} < \zeta$, luego:

$$c < \zeta < \frac{1}{m}$$

entonces, en particular, $\zeta \in (c, d)$, $\zeta \notin K$ ya que $\frac{1}{m+1} < \zeta < \frac{1}{m}$ y $\zeta \in (a, b)$. Por tanto, $\zeta \in U \cap V \#_c$. Así, $(\mathbb{R}, \tau_K)$ no es T_3.

Proposición 2.4.2
La propiedad de ser T_3 cumple:

1. Se hereda.
2. Es topológica.

Demostración:
De (1): Sea (X, τ) un espacio topológico T_3 y sea $Y \subseteq X$. Probaremos que (Y, τ_Y) es T_3. Tomemos $A \subseteq Y$ cerrado con la topología τ_Y y $p \in Y - A$.

Como A es cerrado en el subespacio, existe $C \subseteq X$ cerrado en (X, τ) tal que:

$$A = Y \cap C$$

En particular, $A \subseteq C$, es decir que $Y - C \subseteq Y - A$, luego $p \notin C$. Como (X, τ) es T_3, existen $U, V \in \tau$ disjuntos tales que:

$$p \in V \quad \text{y} \quad C \subseteq U$$

luego, los conjuntos $Y \cap U, Y \cap V \in \tau_Y$ son tales que:

$$p \in Y \cap V \quad \text{y} \quad A = Y \cap C \subseteq Y \cap U$$

siendo estos disjuntos (pues U y V lo son). Por tanto, (Y, τ_Y) es T_3.

De (2): Sean (X, τ) y (Y, σ) espacios topológicos homeomorfos, y $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ el homeomorfismo entre ambos.

Suponga que (X, τ) es T_3. Probaremos que (Y, σ) también es T_3. En efecto, sean $p \in Y$ y $F \subseteq Y$ cerrado tales que $p \notin F$, es decir que $p \in Y - F$. Sea

$$F' = f^{-1}(F)$$

y $p' = f^{-1}(p)$. Por ser homeomorfismo, se tiene que F' es cerrado en (X, τ) y, por ser inyectiva se tiene que $p' \notin F'$. Luego, como (X, τ) es T_3 existen $U', V' \in \tau$ disjuntos tales que:

$$p' \in V' \quad \text{y} \quad F' \subseteq U'$$

Sean $U = f(U')$ y $V = f(V')$, los cuales son abiertos en (Y, σ) tales que:

$$p = f(p') \in V \quad \text{y} \quad F = f(F') \subseteq U$$

siendo U, V disjuntos por serlo U', V'. Luego, (Y, σ) es T_3. ■

Proposición 2.4.3
Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ una familia de espacios topológicos, sea

$$X = \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$$

entonces, (X, τ_p) es T_3 si y sólo si (X_α, τ_α) es T_3, para todo $\alpha \in I$.

Demostración:
$\Rightarrow)$: Es inmediata del hecho de que la propiedad de que un espacio sea T_3 es hereditaria y topológica.

$\Leftarrow)$: Suponga que para todo $\alpha \in I$, (X_α, τ_α) es T_3. Veamos que (X, τ_p) es T_3. Sea $x \in X$ y $U \in \tau_p$ un abierto tal que $x \in U$.

Como $U \in \tau_p$, podemos encontrar un básico B, que podemos expresar como $B = \prod_{\alpha\in I} B_\alpha$, donde $B_\alpha = X_\alpha$ para casi todo salvo una cantidad finita de $\alpha \in I$, y B_α es abierto en (X_α, τ_α) para todo $\alpha \in I$.

Como cada (X_α, τ_α) es T_3, entonces para cada B_α existe $V_\alpha \in \tau_\alpha$ tal que $x_\alpha \in V_\alpha$ y $\overline{V_\alpha} \subseteq B_\alpha$, para todo $\alpha \in I$.

Si $B_\alpha = X_\alpha$, tomemos $V_\alpha = X_\alpha$, en caso contrario lo dejamos igual. Entonces, el conjunto $V = \prod_{\alpha\in I} V_\alpha$ es un básico, en particular, abierto, tal que $x \in V$, y

$$\overline{V} = \overline{\prod_{\alpha\in I} V_\alpha} = \prod_{\alpha\in I} \overline{V_\alpha} \subseteq \prod_{\alpha\in I} B_\alpha = B \subseteq U$$

por tanto, (X, τ_p) es T_3. ■

Corolario 2.4.1
Sea (X, τ) un espacio topológico.

1. Si (X, τ) es regular, entonces y $Y \subseteq X$, entonces (Y, τ_Y) es regular.
2. Si (X, τ) y (X', τ') son espacios homeomorfos y, (X, τ) es regular, entonces (X', τ') es regular.
3. Si $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ es una familia de espacios topológicos. Si $X = \prod_{\alpha\in I}$, entonces (X, τ_p) es regular si y sólo si (X_α, τ_α) es regular, para todo $\alpha \in I$.

Demostración:
Son inmediatas del hecho que la propiedad de ser T_1 y T_3 se hereda y es topológicsa y, de que esta propiedad se preserva bajo productos y elementos del producto. ■

2.5. Espacios T_4

Proposición 2.5.1
Sea $(X.\tau)$ un espacio topológico. Entonces, (X, τ) es T_4 si y sólo si dados $A \subseteq X$ cerrado y $U \in \tau$ tales que $A \subseteq U$, existe un abierto V tal que $A \subseteq V$ y $\overline{V} \subseteq U$.

Demostración:

$\Rightarrow$) : Supongamos que (X,τ) es T_4. Sean $A\subseteq X$ cerrado y $U\in\tau$ tal que $A\subseteq U$. El conjunto $B=X-U$ es un cerrado tal que $A\cap B=\emptyset$. Como el espacio (X,τ) es T_4, existen dos abiertos $V,W\in\tau$ tales que:

$$A\subseteq V \quad \text{y} \quad B\subseteq W$$

y, $V\cap W=\emptyset$. Como $V\cap W=\emptyset$, entonces $V\subseteq X-W\subseteq X-B=U$. Afirmamos que $\overline{V}\subseteq U$. En efecto, notemos que $X-W$ es un cerrado que contiene a V, por ende $\overline{V}\subseteq X-W\subseteq U$, luego $\overline{V}\subseteq U$. Con lo cual se sigue el resultado.

$\Leftarrow$) : Sean $A,B\subseteq X$ cerrados tales que $A\cap B=\emptyset$. Se tiene entonces que:

$$A\subseteq X-B$$

donde $X-B\in\tau$, luego por hipótesis existe $U\in\tau$ abierto tal que:

$$A\subseteq U\subseteq\overline{U}\subseteq X-B$$

el conjunto $V=X-\overline{U}$ es un abierto para el cual, se tiene que $B\subseteq V$. Luego, $U,V\in\tau$ son tales que $A\subseteq U$, $B\subseteq V$ y $U\cap V=\emptyset$. Luego el espacio es T_4. ■

Proposición 2.5.2
Sea (X,τ) un espacio T_4 y sea $A\subseteq X$ un conjunto cerrado. Entonces, (A,τ_A) es T_4.

Demostración:

Sean $M,N\subseteq(A,\tau_A)$ cerrados tales que $M\cap N=\emptyset$. Como A es cerrado en (X,τ), entonces M,N son cerrados en (X,τ). Luego, como (X,τ) es T_4, existen dos abiertos $U',V'\in\tau$ tales que

$$M\subseteq U',\quad N\subseteq V',\quad U'\cap V'=\emptyset$$

Luego, los conjuntos $U=A\cap U',V=A\cap V'\in\tau_A$ son disjuntos tales que $M\subseteq U$ y $N\subseteq V$, ya que $M,N\subseteq A$. Así, (A,τ_A) es T_4. ■

Lema 2.5.1
Sean (X_1,τ_1) y (X_2,τ_2) dos espacios topológicos homeomorfos. Entonces, si $f:(X_1,\tau_1)\to(X_2,\tau_2)$ es el homeomorfismo entre ambos espacios, se tiene que $f(\overline{A})=f(\overline{A})$, para todo $A\subseteq X_1$.

Demostración:

Como f es homeomorfismo, en particular es continua ■

Proposición 2.5.3
La propiedad de ser T_4 es topológica.

Demostración:

Sean (X_1,τ_1) y (X_2,τ_2) espacios topológicos homeomorfos tales que (X_1,τ_1) es T_4. Sea $f:(X_1,\tau_1)\to(X_2,\tau_2)$ el homeomorfismo entre ellos.

Veamos que (X_2,τ_2) es T_4. En efecto, sea $A\subseteq X_2$ cerrado y $U\in\tau_2$ abierto tal que $A\subseteq U$. Como f es homeomorfismo, entonces $f^{-1}(A)\subseteq X_1$ es cerrado y, $f^{-1}(U)\in\tau_1$ son tales que:

$$f^{-1}(A)\subseteq f^{-1}(U)$$

Luego, como (X_1, τ_1) es T_4, existe $W \in \tau_1$ tal que:

$$f^{-1}(A) \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq f^{-1}(U)$$

Sea $V = f(W)$. Como f es homeomorfismo, es una función abierta, luego $V \in \tau_2$, para la cual se cumple que:

$$A \subseteq V \subseteq U$$

pero, $f(\overline{V}) = \overline{f(V)}$ (por ser f homeomorfismo), se tiene que:

$$A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$$

por tanto, (X_2, τ_2) es T_4. ■

Lema 2.5.2 (Lema de Urysohn)
Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces, (X, τ) es T_4 si y sólo si para todos $A, B \subseteq X$ cerrados disjuntos, existe una función continua $f : (X, \tau) \to ([0,1], \tau_u)$ tal que $f(A) = \{1\}$ y $f(B) = \{0\}$.

Demostración:
$\Rightarrow)$: Para probar el resultado, debemos hacer varias cosas antes:

1. Sea
$$P = \mathbb{Q} \cap [0,1]$$
Nuestro objetivo es que para cada $p \in P$ le asignemos un conjunto abierto $U_p \subseteq X$ tal que si $p, q \in P$ son tales que
$$p < q \Rightarrow \overline{U}_p \subseteq U_q$$
de esta forma, la familia $\left\{U_p \middle| p \in P\right\}$ estará simplemente ordenada de la misma forma en la que sus subíndices lo están en P. Como el conjunto P es numerable, podemos usar inducción para definir cada uno de los U_p. Ordenemos los elementos de P en una sucesión de tal forma que los números 0 y 1 son los primeros de la sucesión (denotada de ahora en adelante por $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$).

   Definiremos ahora los conjuntos U_p como sigue: defina
$$U_1 = X - B$$
Como A es un cerrado contenido en U_1, por ser (X, τ) T_4, se tiene que existe un conjunto abierto $U_0 \subseteq X$ tal que
$$A \subseteq U_0 \quad \text{y} \quad \overline{U}_0 \subseteq U_1$$
En general, sea P_n el conjunto de los primeros n números racionales en la sucesión de los elementos de P. Suponga que U_p está definido para cada $p \in P_n$ y, satisface la condición:
$$p, q \in P_n \text{ tal que } p < q \Rightarrow \overline{U}_p \subseteq U_q$$
Sea r el siguiente número racional en la sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, esto es $r = p_{n+1}$. Definiremos U_r.

   Considere el conjunto
$$P_{n+1} = P_n \cup \{r\}$$
Este es un subconjunto finito del intervalo $[0,1]$ y, tiene un orden simple derivado del orden simple $<$ de $[0,1]$.

   En un conjunto finito simplemente ordenado, todo elemento tiene un predecesor inmediato y un sucesor inmediato. El número 0 es el elemento más pequeño y, 1 es el elemento más grande de P_{n+1} y, r no es 0 o 1. Por tanto, r tiene un sucesor y un predecesor inmediato, denotados respectivamente por q y p. Los conjuntos U_p y U_q están definidos y son tales que

$$\overline{U}_p \subseteq U_q$$

por hipótesis de inducción. Como (X, τ) es T_4, entonces existe un conjunto abierto $U_r \subseteq X$ tal que

$$\overline{U}_p \subseteq U_r \quad \text{y} \quad \overline{U}_r \subseteq U_q$$

Es claro (pues los conjuntos U_p con $p \in P_n$ están ordenados por la contención), que

$$p, q \in P_{n+1} \text{ tal que } p < q \Rightarrow \overline{U}_p \subseteq U_q$$

Usando inducción, tenemos definidos los conjuntos U_p, para todo $p \in P$.

2. Ahora que se tiene definido U_p para todo número en $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, extenderemos esta definición a todo $\mathbb{Q}$, haciendo

$$\begin{aligned} U_p &= \emptyset, \quad p < 0 \\ U_p &= X, \quad 1 < p \end{aligned}$$

para todo $p \in \mathbb{Q}$. Se sigue cumpliendo que para todo $p, q \in \mathbb{Q}$

$$p < q \Rightarrow \overline{U}_p \subseteq U_q$$

3. Dado un punto $p \in X$, definamos el conjunto $\mathbb{Q}(x)$ como el conjunto de todos los números racionales $p \in \mathbb{Q}$ tales que los correspondientes U_p contengan a x, es decir:

$$\mathbb{Q}(x) = \left\{ p \in \mathbb{Q} \middle| x \in U_p \right\}$$

Este conjunto no contiene a ningún número menor que 0 ya que $x \notin U_p$ para todo $p \in \mathbb{Q}^-$, además, contiene a todo número mayor que 1, pues $x \in U_p$ para todo $p \in \mathbb{Q}$, $p > 1$. Por tanto, $\mathbb{Q}(x)$ es acotado inferiormente y no vacío, luego tiene ínfimo en el intervalo $[0,1]$. Defina

$$f(x) = \inf \mathbb{Q}(x) = \inf \left\{ p \in \mathbb{Q} \middle| x \in U_p \right\}$$

4. Afirmamos que f es la función deseada. Si $x \in A$, entonces $x \in U_p$ para todo $p \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$, luego

$$f(x) = \inf \mathbb{Q}(x) = 0$$

Similarmente, si $x \in B$, entonces $x \notin U_p$ para todo $p \in \mathbb{Q}$ con $p \leq 1$. Luego, $\mathbb{Q}(x)$ consiste de todos los números racionales mayores a 1 y, por ende, $f(x) = 1$.

Probaremos que f es continua. Para ello, probaremos que se cumplen dos cosas:

I) $x \in \overline{U}_r$ implica que $f(x) \leq r$.

II) $x \notin U_r$ implica que $f(x) \geq r$.

Para probar (1), notemos que si $x \in \overline{U}_r$, entonces $x \in U_s$, para todo $s > r$. Entonces, $\mathbb{Q}(x)$ contiene a todos los números racionales mayores que r, así que, por definición tenemos que

$$f(x) = \inf \mathbb{Q}(x) \leq r$$

Para probar (2), notemos que si $x \notin U_r$, entonces x no está en U_s para todo $s < r$. Por tanto, $\mathbb{Q}(x)$ no contiene números racionales menores que r, por lo cual

$$f(x) = \inf \mathbb{Q}(x) \geq r$$

Ahora probaremos la continuidad de f. Sea $x_0 \in X$ y un intervalo abierto (c, d) en $\mathbb{R}$ tal que

$$c < f(x_0) < d$$

podemos encontrar números racionales $p, q \in \mathbb{Q}$ tales que

$$c < p < f(x_0) < q < d$$

Afirmamos que el conjunto

$$U = U_q - \overline{U}_p$$

es un abierto que cumple que $f(U) \subseteq (c, d)$ y es tal que $x_0 \in U$. En efecto, notemos que $x_0 \in U_q$ pues $f(x_0) < q$ implica por (2) que $f(x_0) \in U_q$ y, como $p < f(x_0)$, implica por (1) que $f(x_0) \notin \overline{U}_p$. Por tanto, $f(x_0) \in U$.

Sea $x \in U$, entonces $x \in U_q \subseteq \overline{U}_q$, por lo cual de (1), $f(x) \leq q$ y, $x \notin \overline{U}_p$ implica que $x \notin \overline{U}_p$ por lo cual de (2) se sigue que $p \leq f(x)$. Por tanto, $f(x) \in [p, q] \subseteq (c, d)$.

Luego, $f(U) \subseteq (c, d)$. Así, f es continua en $x_0 \in X$. Como el punto fue arbitrario, se sigue que f es continua en X.

Por los 4 incisos anteriores, se sigue el resultado.

$\Leftarrow)$: Sean $A, B \subseteq X$ cerrados disjuntos. Por hipótesis existe una función continua $f : (X, \tau) \to ([0, 1], \tau_u)$ tal que $f(A) = 1$ y $f(B) = 0$. Los conjuntos $U = f^{-1}((r, 1])$ $V = f^{-1}([0, r))$, donde $r \in (0, 1)$, son dos abiertos (ya que f es continua y $[0, r), (r, 1], \in \tau_u$) tales que:

$$A \subseteq U \quad B \subseteq V$$

y, $U \cap V = \emptyset$. ■

Capítulo 3

Filtros

3.1. Conceptos Fundamentales

Definición 3.1.1
Sean X un conjunto no vacío y $\mathcal{F}$ una familia no vacía de subconjuntos no vacíos de X. $\mathcal{F}$ se dice que es un **filtro** si cumple lo siguiente:

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
2. Si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.
3. Si $K \subseteq X$ y $F \subseteq K$ para algún $F \in \mathcal{F}$, entonces $K \in \mathcal{F}$. (*Propiedad de absorción*).

Ejemplo 3.1.1
Sea X un conjunto no vacío. Entonces, $\{X\}$ es un filtro sobre X.

Observación 3.1.1
Si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre un conjunto no vacío X entonces, se cumple lo siguiente:

1. $\forall A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B \neq \emptyset$.
2. Si $A_1, ..., A_n \in \mathcal{F}$, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$ y es no vacía.

Ejemplo 3.1.2
Sea X un conjunto no vacío y $A \subseteq X$ no vacío. Entonces,

$$\mathcal{F}_A = \left\{ M \subseteq X \middle| A \subseteq M \right\}$$

es un filtro sobre X.

Observación 3.1.2
Si $A = \{x\}$, escribiremos $\mathcal{F}_x$ en vez de $\mathcal{F}_{\{x\}}$.

Ejemplo 3.1.3
Sea (X, τ) un espacio topológico con X. Sea

$$\xi_x = \left\{ V \subseteq X \middle| V \in \mathcal{V}(x) \right\}$$

con $x \in X$ (recordando que $\mathcal{V}(x)$ es el conjunto de todas las vecindades de x). Entonces, ξ_x es un filtro sobre X. Este filtro es llamado el **filtro de vecindades sobre el punto** x.

Demostración:
Tenemos que verificar 4 condiciones:

1. $X \in \xi_x$.
2. $\emptyset \notin \xi_x$.
3. $M, N \in \mathcal{V}(x)$ implica que $M \cap N \in \mathcal{V}(x)$.
4. Sea $L \subseteq X$ tal que $V \in \mathcal{V}(x)$ cumple que $V \subseteq L$, entonces $L \in \mathcal{V}(x)$.

Luego, ξ_x es un filtro sobre X. ■

Observación 3.1.3
Si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X, entonces $X \in \mathcal{F}$.

Proposición 3.1.1
Sean X un conjunto no vacío y $\{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de filtros sobre X. Entonces, $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha$ es un filtro en X.

Demostración:
Sea

$$\mathcal{K} = \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha$$

1. $\mathcal{K} \neq \emptyset$, pues $X \in \mathcal{F}_\alpha$, para todo $\alpha \in I$.
2. $\emptyset \notin \mathcal{K}$, pues $\emptyset \notin \mathcal{F}_\alpha$ para todo $\alpha \in I$.
3. Sean $A, B \in \mathcal{K}$, entonces $A, B \in \mathcal{F}_\alpha$ para todo $\alpha \in I$. Por ser filtros se sigue que $A \cap B \in \mathcal{F}_\alpha$ para todo $\alpha \in I$, luego $A \cap B \in \mathcal{K}$.
4. Sea $M \subseteq X$ y sea $L \in \mathcal{K}$ tal que $L \subseteq M$, entonces $L \in \mathcal{F}_\alpha$ para todo $\alpha \in I$. Como cada $\mathcal{F}_\alpha$ cumple la propiedad de absorción, se tiene que $M \in \mathcal{F}_\alpha$ para todo $\alpha \in I$, luego $M \in \mathcal{K}$.

Por los 4 incisos anteriores, se sigue que $\mathcal{K}$ es un filtro sobre X. ■

Ejemplo 3.1.4
Sea $X = \{a, b\}$ con $a \neq b$. Tomemos $\mathcal{F}_1 = \{X, \{a\}\}$ y $\mathcal{F}_2 = \{X, \{b\}\}$. Entonces $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ no es un filtro, ya que en caso contario se tendría que $\{a\} \cap \{b\} = \emptyset \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$, lo cual no puede ser.

Así, la unión de filros no necesariamente es un filtro.

Proposición 3.1.2
Si $\{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una familia de filtros sobre X tal que dados $\alpha, \beta \in I$ se tiene que

$$\mathcal{F}_\alpha \subseteq \mathcal{F}_\beta \text{ o } \mathcal{F}_\beta \subseteq \mathcal{F}_\alpha$$

entonces $\mathcal{F} = \bigcup_{\alpha\in I} \mathcal{F}_\alpha$ es un filtro.

Demostración:
En efecto, veamos que $\mathcal{F}$ es un filtro.

1. $\mathcal{F} \neq \emptyset$ ya que $X \in \mathcal{F}_\alpha$ para algún $\alpha \in I$.
2. $\emptyset \notin \mathcal{F}$, pues $\emptyset \notin \mathcal{F}_\alpha$ para todo $\alpha \in I$.
3. Sean $A, B \in \mathcal{F}$. Entonces, existen $\alpha, \beta \in I$ tales que $A \in \mathcal{F}_\alpha$ y $B \in \mathcal{F}_\beta$, entonces se tiene una de las dos contenciones:
$$\mathcal{F}_\alpha \subseteq \mathcal{F}_\beta \text{ o } \mathcal{F}_\beta \subseteq \mathcal{F}_\alpha$$
supongamos que $\mathcal{F}_\alpha \subseteq \mathcal{F}_\beta$, entonces $A, B \in \mathcal{F}_\beta$. Por tanto, $A \cap B \in \mathcal{F}_\beta$. Así, $A \cap B \in \mathcal{F}$.
4. Sea $M \subseteq X$ y $L \in \mathcal{F}$ tal que $L \subseteq M$. Como $L \in \mathcal{F}$ existe $\alpha \in I$ tal que $L \in \mathcal{F}_\alpha$, luego por la propiedad de absorción $M \in \mathcal{F}_\alpha$. Por tanto, $M \in \mathcal{F}$.

Por los cuatro incisos anteriores, se sigue que $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X. ■

Definición 3.1.2
Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Una familia no vacía $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X de X es **una base para el filtro** $\mathcal{F}$ si se cumple lo siguiente:

1. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$.
2. $\forall F \in \mathcal{F}$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq F$.

Observación 3.1.4
Observamos que

1. Si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre un conjunto X, entonces $\mathcal{F}$ es una base para sí mismo.
2. Si $\mathcal{B}$ es una base para el filtro $\mathcal{F}$ sobre X y, $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Definición 3.1.3
Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{B}$ una familia no vacía de subconjuntos no vacíos de X. Se dice que $\mathcal{B}$ es **una base de filtro en** X, si se cumple lo siguiente: Dados $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Proposición 3.1.3
Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{B}$ una base de filtro en X. Entonces:

$$\mathcal{B}^+ = \left\{ A \subseteq X \middle| \exists B \in \mathcal{B} \text{ tal que } B \subseteq A \right\}$$

es un filtro en X y este se dice **el filtro generado por la base $\mathcal{B}$**. Además, $\mathcal{B}$ es una base para $\mathcal{B}^+$.

Demostración:
Se tienen que probar dos cosas:

1. Es claro que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}^+$. Por tanto, $\mathcal{B}^+ \neq \emptyset$.
2. $\emptyset \notin \mathcal{B}^+$ es cierto pues $\emptyset \notin \mathcal{B}$, ya que $\mathcal{B}$ es una subcolección no vacía de conjuntos no vacíos.
3. Tomemos $K, M \in \mathcal{B}^+$ luego, existen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tal que $B_1 \subseteq K$ y $B_2 \subseteq M$. Por tanto, $B_1 \cap B_2 \subseteq K \cap M$. Por ser $\mathcal{B}$ base para un filtro sobre X, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq K \cap M$. Luego, $K \cap M \in \mathcal{B}^+$.
4. Sea $W \subseteq X$ y $L \in \mathcal{B}^+$ tal que $L \subseteq W$. Existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq L \subseteq W$, luego $B \subseteq W$. Por tanto, $W \in \mathcal{B}^+$.

Por los cuatro incisos anteriores, se sigue que $\mathcal{B}^+$ es un filtro sobre X. ■

Proposición 3.1.4
Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre X y $A \subseteq X$ tal que $\forall F \in \mathcal{F}$, $A \cap F \neq \emptyset$. Entonces

$$\mathcal{B} = \left\{ A \cap F \middle| F \in \mathcal{F} \right\}$$

es una base de filtro y, el filtro generado por ella $\mathcal{B}^+$ cumple lo siguiente:

1. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}^+$.
2. $A \in \mathcal{B}^+$.

Demostración:
Se deben cumplir varios incisos:

1. $\mathcal{B} \neq \emptyset$, pues el conjunto $A \cap X = A \in \mathcal{B}$ ya que $X \in \mathcal{F}$.
2. $\emptyset \notin \mathcal{B}$ ya que se contradeciría la hipótesis de que $A \cap F = \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$.
3. $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ implica que existen $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ tales que $B_1 = A \cap F_1$ y $B_2 = A \cap F_2$. Por tanto

$$B_1 \cap B_2 = A \cap (F_1 \cap F_2)$$

donde, $A \cap (F_1 \cap F_2) \in \mathcal{B}$ pues, $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X. Luego, tomando $B_3 = B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$, se sigue que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

por los tres incisos anteriores, se sigue que $\mathcal{B}$ es base para un filtro sobre X. Ya se tiene que $A \in \mathcal{B}^+$, pues $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}^+$.

Sea ahora $F \in \mathcal{F}$. Entonces, $F \cap A \in \mathcal{B}^+$. Por propiedad de absorción se debe tener que como $F \cap A \subseteq F$, entonces $F \in \mathcal{B}^+$. ■

Proposición 3.1.5
Sean X y Y dos conjuntos no vacíos. Sea $\mathcal{F}$ un filtro en X y $f : X \to Y$ una función. Entonces,

$$\mathcal{B} = \left\{ f(A) \middle| A \in \mathcal{F} \right\}$$

es una base de filtro en Y. En este caso, se denotará por $f(\mathcal{F})$ a $\mathcal{B}^+$, esto es $f(\mathcal{F}) = \mathcal{B}^+$.

Demostración:

Se deben verificar tres condiciones

1. $\mathcal{B} \neq \emptyset$, pues $f(X) \in \mathcal{B}$.
2. Todos los elementos de $\mathcal{B}$ son no vacíos, pues como $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X, todos sus elementos son no vacíos, así $f(F) \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$.
3. Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, entonces existen $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ tales que $B_1 = f(F_1)$ y $B_2 = f(F_2)$. Por tanto, el conjunto
$$B_3 = f(F_1 \cap F_2) \subseteq f(F_1) \cap f(F_2) = B_1 \cap B_2$$
es tal que $B_3 \in \mathcal{B}$, ya que $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.

por los incisos anteriores, se sigue que $\mathcal{B}$ es base de un filtro en Y. ■

Ejemplo 3.1.5

Considere $X = \{a, b\}$, $a \neq b$. Sea $f : X \to X$ dada como sigue:
$$f(a) = a = f(b)$$
el conjunto $\mathcal{F} = \{X, \{a\}\}$ es un filtro sobre X. la colección
$$f(\mathcal{F}) = \{\{a\}\}$$
no es un filtro en X ya que $X \notin f(\mathcal{F})$.

Proposición 3.1.6

Sean X y Y dos conjuntos no vacíos, $\mathcal{F}$ un filtro en X y $f : X \to Y$ una función. Entonces, f es una función suprayectiva si y sólo si $\left\{ f(F) \middle| F \in \mathcal{F} \right\}$ es un filtro en Y.

Demostración:

Necesidad: Suponga que f es suprayectiva. Ya se sabe que
$$\mathcal{K} = \left\{ f(F) \middle| F \in \mathcal{F} \right\}$$
es una base de filtro. Se tiene que por ser f suprayectiva que
$$f(f^{-1}(A)) = A, \quad \forall A \subseteq Y$$
Se cumplen tres condiciones:

1. $\mathcal{K} \neq \emptyset$ pues, $f(X) \in \mathcal{K}$.
2. Como $\mathcal{F}$ no contiene al vacío, entonces $\mathcal{K}$ tampoco lo contiene.
3. Sea $L \subseteq Y$ tal que existe $F \in \mathcal{F}$ con $f(F) \subseteq L$. Entonces:
$$F \subseteq f^{-1}(f(F)) \subseteq f^{-1}(L)$$
por ser $\mathcal{F}$ un filtro, luego: $f^{-1}(L) \in \mathcal{F}$. Así, $L = f(f^{-1}(L)) \in \mathcal{K}$.

4. Sean $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$. Se tiene que $f(F_1), f(F_2) \in \mathcal{K}$. Luego:

$$F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$$

además, $f(F_1 \cap F_2) \subseteq f(F_1) \cap f(F_2)$. Luego, por la propiedad anterior se sigue que $f(F_1) \cap f(F_2) \in \mathcal{K}$ ya que $f(F_1 \cap F_2) \in \mathcal{K}$.

Por los 4 incisos anteriores se sigue que $\mathcal{K}$ es un filtro.

Suficiencia: Es inmediata del hecho de que Y está en la familia $f(\mathcal{F})$, luego $f(X) = Y$.

■

Definición 3.1.4
Sea X un conjunto no vacío. Un **ultrafiltro** $\mathcal{F}$ en X es un filtro maximal respecto a la inclusión.

Proposición 3.1.7
Sea X un conjunto no vacío y sea ξ un filtro en X. Entonces existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ en X tal que $\xi \subseteq \mathcal{U}$.

Demostración:
Considere la familia

$$\mathcal{L} = \left\{ \xi_\alpha \middle| \alpha \in I \right\}$$

de todos los filtros ξ_α en X que contienen a ξ. Esta familia es no vacía ya que $\xi \in \mathcal{L}$. Además, esta familia está parcialmente ordenada bajo la relación $\subseteq$. Sea $\mathcal{C}$ una cadena de $(\mathcal{L}, \subseteq)$. Tomemos

$$\rho = \bigcup_{\xi \in \mathcal{L}} \xi$$

por tanto, ρ es un filtro en X (ver observación anterior para garantizar que la unión de filtros sea un filtro); además, $\xi \subseteq \rho$. Tenemos que $\rho \in \mathcal{L}$ y, por construcción para todo $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$, $\mathcal{F} \subseteq \rho$.

Por el lema de Zorn existe un elemento maximal $\mathcal{U}$ de $(\mathcal{L}, \subseteq)$ el cual es el ultrafiltro buscado que contiene a ξ. ■

Ejemplo 3.1.6
Sea $X = \{a, b\}$ con $a \neq b$. Tomemos al filtro

$$\mathcal{F} = \{X\}, \quad \mathcal{U}_1 = \{X, \{a\}\} \quad \mathcal{U}_2 = \{X, \{b\}\}$$

se tiene que $\mathcal{F}$ es un filtro y, $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ son ultrafiltros en X. Además $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}_1$ y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}_2$.

Es decir, la existencia del ultrafiltro no es única.

Proposición 3.1.8
Sea ξ un ultrafiltro en el conjunto no vacío X. Entonces se cumple lo siguiente:

1. Si $A, B \subseteq X$ y $A \cup B \in \xi$, entonces alguno de los dos A, B es elemento del filtro.
2. Si $A_1, ..., A_k \subseteq X$ tales que $\bigcup_{i=1}^{k} A_i \in \xi$, entoncex existe $l \in [\![1, k]\!]$ tal que $A_l \in \xi$.

Demostración:

De (1): Sean $A, B \subseteq X$ tales que $A \cup B \in \xi$. Se tienen varios casos:

1. Suoponga que para todo $C \in \xi$ se tiene que $C \cap A \neq \emptyset$. Entonces, el conjunto

$$\mathcal{B} = \left\{ C \cap A \middle| A \in \xi \right\}$$

es una base de filtro y, $\mathcal{B}$ cumple que $\xi \subseteq \mathcal{B}$. Por tanto, $\xi = \mathcal{B}$. Pero, $A \in \mathcal{B}$, luego $A \in \mathcal{B}$.

2. Suponga que existe $C_0 \in \xi$ tal que $C_0 \cap A = \emptyset$. Entonces:

$$\begin{aligned} C \cap B &= (C \cap A) \cup (C \cap B) \\ &= C \cap (A \cup B) \end{aligned}$$

donde $C \in \xi$ y $A \cup B \in \xi$. Por tanto, $C \cap B \in \xi$. Pero, $C \cap B \subseteq B$, luego por absorción se sigue que $B \in \xi$.

De (2): Se hace usando inducción sobre k. ■

Proposición 3.1.9

Sea ξ un filtro en X. Entonces, ξ es un ultrafiltro si y sólo si para todo subconjunto $A \subseteq X$, $A \in \xi$ ó $X - A \in \xi$.

Demostración:

Necesidad: Sea $A \subseteq X$. Escribimos $X = A \cup (X - A)$. Como ξ es un filtro, entonces $X \in \xi$. Por la proposición anterior se tiene que $A \in \xi$ ó $X - A \in \xi$.

Suficiencia: Sea η un filtro en X tal que $\xi \subseteq \eta$. Tomemos $A \subseteq X$ tal que $A \in \eta$. Entonces, $X - A \notin \eta$, luego $X - A \notin \xi$. Por hipótesis, debe suceder que $A \in \xi$. De esta forma, $\xi = \eta$.

Luego, ξ es un ultrafiltro. ■

Ejercicio 3.1.1

Sean X y Y conjuntos, ξ un ultrafiltro de X y sea $f : X \to Y$ una función suprayectiva. Entonces, $f(\xi)$ es un ultrafiltro en Y.

Demostración:

Ya se tiene que $f(\xi)$ es un filtro en Y. Veamos que es ultrafiltro. En efecto, sea $A \subseteq Y$, veremos que $A \in f(\xi)$ ó $Y - A \in f(\xi)$.

Sea $B = f^{-1}(A) \subseteq X$. Como ξ es ultrafiltro, entonces $B \in \xi$ ó $X - B \in \xi$.

1. Suponga que $B \in \xi$, se tiene que, al ser f suprayectiva:

$$f(B) = f(f^{-1}(A)) = A$$

por ende, $A \in f(\xi)$.

2. Suponga que $X - B \in \xi$, se tiene que

$$f(X - B) = f(X - f^{-1}(A)) = f(f^{-1}(Y - A)) = Y - A$$

pues, $X - f^{-1}(A) = f^{-1}(Y - A)$ y por ser f suprayectiva. Luego, $Y - A \in f(\xi)$.

Por (1) y (2), se sigue que $A \in f(\xi)$ ó $Y - A \in f(\xi)$. Por tanto, $f(\xi)$ es ultrafiltro. ■

Ejemplo 3.1.7
Sea X un conjunto no vacío y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos en X, entonces

$$\rho = \left\{A \subseteq X \middle| \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall k \geq N, x_k \in A\right\}$$

es un filtro en X y, se dice el **filtro asociado a la sucesión**.

Demostración:
Hay que verificar 4 condiciones:

1. $\emptyset \notin \rho$.
2. $X \in \rho$ ya que la sucesión está en X.
3. Sean $A, B \in \rho$. Entonces, existen $N, M \in \mathbb{N}$ tales que $k \geq N \Rightarrow x_k \in A$ y, $k \geq M \Rightarrow x_k \in B$. Sea
$$N_0 = \text{máx}\{N, M\} \in \mathbb{N}$$
entonces, si $k \geq N_0$ se tiene que $x_k \in A$ y $x_k \in B$, luego $x_k \in A \cap B$. Por ende, $A \cap B \in \rho$.
4. Sea $L \subsetneq X$ y $A \in \rho$ tal que $A \subseteq L$. Como $A \in \rho$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N \Rightarrow x_k \in A \subseteq L$. Por ende, $L \in \rho$.

por los incisos anteriores, se sigue que ρ es un filtro en X. ■

Definición 3.1.5
Sea (X, τ) un espacio topológico. Una sucesión de puntos de X, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se dice que **converge** a un punto $l \in X$ si para todo $U \in \tau$ tal que $l \in U$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq N$, $x_k \in U$.

Proposición 3.1.10
Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de X y sea ρ el filtro asociado a la sucesión. Sea $l \in X$, entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto l si y sólo si $\xi_l \subseteq \rho$.

Demostración:
Necesidad: Suponga que la sucesión converge a $l \in X$. Sea $V \in \xi_l$, entonces existe un abierto $U \subseteq X$ tal que $l \in U \subseteq V$. Como la sucesión converge a l y U es abierto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq N$ se tiene que $x_k \in U \subseteq V$. Por tanto, $V \in \rho$.

Luego, $\xi_l \subseteq \rho$.

Suficiencia: Suponga que $\xi_l \subseteq \rho$. Si $U \subseteq X$ es abierto tal que $l \in U$, entonces $U \in \xi_l \subseteq \rho$, luego existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq N$ implica que $x_k \in U$.

Así, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a l. ■

Ejemplo 3.1.8
Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y considere la topología $\tau = \{X, \emptyset, \{1, 2\}, \{3\}\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define $X_n = 1$.

Se tiene que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 1 y 2.

Observación 3.1.5
El punto al que converge una sucesión en un espacio topológico no necesariamente es único.

Definición 3.1.6
Sea (X, τ) un espacio topológico, $\mathcal{F}$ un filtro en X y $l \in X$.

1. Se dice que el filtro $\mathcal{F}$ **converge al punto** l y se escribe $\mathcal{F} \to l$ si $\xi_l \subseteq \mathcal{F}$.
2. Se dice que l es un **punto de acumulación** del filtro $\mathcal{F}$ si para todo $A \in \mathcal{F}$, $l \in \overline{A}$.

Ejemplo 3.1.9
Considere $X = \{a, b\}$ con $a \neq b$ y $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}$. El filtro de vecindades de b es:

$$\xi_b = \{X\}$$

y el de a:

$$\xi_a = \{X, \{a\}\}$$

se tiene que $\xi_a \to a$ y $\xi \to b$.

Proposición 3.1.11
Sea (X, τ) un espacio topológico, ξ un filtro en X y $x \in X$. Entonces x es un punto de acumulación de ξ si y sólo si existe un filtro $\mathcal{F}$ de X tal que $\xi \subseteq \mathcal{F}$ y $\mathcal{F} \to x$.

Demostración:
$\Rightarrow)$: Supongamos que $x \in X$ es un punto de acumulación de ξ, entonces para todo $A \in \xi$, $x \in \overline{A}$, esto es que para todo $A \in \xi$ y $V \in \xi_x$ se tiene que $A \cap V \neq \emptyset$. Sea

$$\eta = \left\{ A \cap V \middle| A \in \xi, V \in \xi_x \right\}$$

esta colección es no vacía y no contiene al vacío por la observación anterior. Por una proposición anterior se tiene que es una base para filtro y el filtro generado por ella η^+ cumple que

1. $\xi \subseteq \eta^+$.
2. $\xi_x \subseteq \eta^+$.

(esto por una proposición anterior) por tanto, por la segunda observación se tiene que $\eta^+ \to x$.

$\Leftarrow)$: Sea $\mathcal{F}$ un filtro tal que $\xi \subseteq \mathcal{F}$ y $\mathcal{F} \to x$. Sea $U \in \tau$ tal que $x \in U$ y $A \in \xi$. Debemos probar que $U \cap A \neq \emptyset$. Como $\mathcal{F} \to x$, debe tenerse que $U \in \mathcal{F}$.

Pero, como $A \in \xi \subseteq \mathcal{F}$ entonces $U, A \in \mathcal{F}$, luego $U \cap A \in \mathcal{F}$, así $U \cap A \neq \emptyset$. ∎

Ejercicio 3.1.2
Sean (X, τ) un espacio topológico, $A \subseteq X$ y $x \in X$ Entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe un filtro ξ de X tal que $\xi \to x$ y $A \in \xi$.

Demostración:

$\Rightarrow$). Suponga que $x \in \overline{A}$, entonces para toda $V \subseteq X$ vecindad de x, $A \cap V \neq \emptyset$. Sea

$$\mathcal{B} = \left\{ A \cap V \middle| V \in \xi_x \right\}$$

Por una proposición anterior, $\mathcal{B}$ es una base de filtro sobre X tal que

1. $\xi_x \subseteq \mathcal{B}^+$.
2. $A \in \mathcal{B}^+$

siendo $\mathcal{B}^+$ el filtro generado por la base de filtro $\mathcal{B}$. Sea $\xi = \mathcal{B}^+$. Este filtro cumple que $\xi \to x$ (pues $\xi_x \subseteq \xi$) y que $A \in \xi$, con lo que se tiene el resultado.

$\Leftarrow$): Suponga que existe un filtro ξ sobre X tal que $\xi \to x$ y $A \in \xi$. Como $\xi \to x$, entonces $\xi_x \subseteq \xi$. Además, como $A \in \xi$ se tiene que

$$A \cap F \neq \emptyset, \quad \forall F \in \xi$$

en particular,

$$A \cap V \neq \emptyset, \quad \forall V \in \xi_x$$

luego, $x \in \overline{A}$. $\blacksquare$

Ejercicio 3.1.3
Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces, (X, τ) es Hausdorff (o T_2) si y sólo si dado $\mathcal{F}$ un filtro de X que converge existe un único $l \in X$ tal que $\mathcal{F} \to l$.

Demostración:

$\Rightarrow$): Suponga que (X, τ) es T_2 y sea $\mathcal{F}$ un filtro que converge digamos a $l \in X$. Probaremos que l es único. En efecto, sea $m \in X$ tal que $m \neq l$. Como el espacio es T_2, existen dos abiertos $U, V \in \tau$ tales que

$$l \in U, \quad m \in V, \quad \text{y} \quad U \cap V = \emptyset$$

Como $\mathcal{F} \to l$, entonces $\xi_l \subseteq \mathcal{F}$, luego no puede suceder que $V \in \mathcal{F}$, pues $V \cap U = \emptyset$, así $\xi_m \nsubseteq \mathcal{F}$. Por tanto, $\mathcal{F} \nrightarrow m$. Luego el l al que converge el filtro es único.

$\Leftarrow$): Suponga la tesis. Sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Afirmamos que y no es punto de acumulación del filtro ξ_x. En efecto, si y fuera punto de acumulación de ξ_x entonces por una proposición anterior existiría un filtro $\mathcal{F}$ sobre X tal que $\xi_x \subseteq \mathcal{F}$ y $\mathcal{F} \to y$ luego, $\mathcal{F} \to x, y$. Por hipótesis se seguiría que $x = y \#_c$.

Por tanto, y no es punto de acumulación de ξ_x, luego existe $W \subseteq X$ vecindad de x tal que $y \notin \overline{W}$, es decir que existe V abierto que contiene a y tal que $W \cap V = \emptyset$. En particular, como W es vecindad de x existe U abierto que contiene a x tal que $U \subseteq W$. Por tanto,

$$x \in U, \quad y \in V \quad \text{y} \quad U \cap V = \emptyset$$

Así, (X, τ) es T_2. $\blacksquare$

Proposición 3.1.12
Sean (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) dos espacios topológicos y $f : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$ una función. Entonces, f es continua en $x_0 \in X_1$ si y sólo si para todo ξ filtro de X_1 tal que $\xi \to x_0$, tenemos que $f(\xi) \to f(x_0)$.

Demostración:

$\Rightarrow)$: Suponga que f es continua en $x_0 \in X_1$. Sea ξ un filtro de X_1 tal que $\xi \to x_0$. Hay que demostrar que $\xi_{f(x_0)} \subseteq f(\xi)$.

Sea $W \in \tau_2$ tal que $f(x_0) \in W$. Como f es continua en x_0, existe un abierto $V \in \tau_1$ tal que $x_0 \in V$ y $f(V) \subseteq W$. Por hipótesis, $\xi \to x_0$, luego $\xi_{x_0} \subseteq \xi$, así $V \in \xi$, luego $f(V) \in f(\xi)$, por absorción se sigue que $W \in f(\xi)$. Por absorción se sigue que

$$\xi_{f(x_0)} \subseteq f(\xi)$$

por tanto, $f(\xi) \to f(x_0)$.

$\Leftarrow)$: Tenemos que $\xi_{x_0} \to x_0$, por hipótesis se sigue que $f(\xi_{x_0}) \to f(x_0)$. Sea $W \in \tau_2$ tal que $f(x_0) \in W$, luego $W \in f(\xi_{x_0})$, existe entonces $M \in \xi_{x_0}$ tal que

$$f(M) \subseteq W$$

Como M es vecindad de x_0 existe entonces $V \in \tau_1$ tal que $x_0 \in V \subseteq M$, luego

$$f(U) \subseteq W$$

con $x_0 \in V$. Por tanto, f es continua en x_0. ■

Proposición 3.1.13
Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ una familia de espacios topológicos, considere

$$X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$$

junto con la topología producto τ_p. Sea ξ un filtro en X y $x_0 \in X$. Entonces $\xi \to x_0$ si y sólo si para todo $\alpha \in I$ el filtro $p_\alpha(\xi) \to p_\alpha(x_0)$.

Demostración:

$\Rightarrow)$: Es inmedita de la proposición anterior y del hecho de que cada función proyección es continua.

$\Leftarrow)$: Suponga que para todo $\alpha \in I$, $p_\alpha(\xi) \to p_\alpha(x_0)$. Hay que probar que

$$\xi_{x_0} \subseteq \xi$$

(en particular, basta con probar la contención para elementos básicos de (X, τ_p)). Sea $U = \prod_{\alpha \in I} U_\alpha$ un elemento básico de τ_p tal que $x_0 \in U$. Sean $\alpha_1, ..., \alpha_n \in I$ tales que

$$U = p_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \cdots \cap p_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})$$

con $U_{\alpha_i} \in \tau_{\alpha_i}$ para todo $i \in [\![1, n]\!]$. Tenemos que para todo $i \in [\![1, n]\!]$, $x_{0\alpha_i} \in U_{\alpha_i}$.

Como para todo $\alpha \in I$, $p_\alpha(\xi) \to p_\alpha(x_0)$, es decir que para todo $i \in [\![1, n]\!]$, $U_{\alpha_i} \in p_{\alpha_i}(\xi)$. Por tanto, para todo $i \in [\![1, n]\!]$ existe $F_i \in \xi$ tal que

$$\begin{aligned} p_{\alpha_i}(F_i) &\subseteq U_{\alpha_i} \\ \Rightarrow p_{\alpha_i}^{-1}(p_{\alpha_i}(F_i)) &\subseteq p_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) \\ \Rightarrow F_i &\subseteq p_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) \end{aligned}$$

por absorción se sigue que $p_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) \in \xi$ para todo $i \in [\![1, n]\!]$, luego por ser ξ filtro se sigue que $U \in \xi$. Luego, se tiene que $\xi \to x_0$. ■

Capítulo 4

Espacios Compactos

4.1. Conceptos Fundamentales

Definición 4.1.1
Sea (X, τ) un espacio topológico.

1. Una familia $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ formada por subconjuntos de X es una **cubierta de** X, si

$$X = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$$

2. Si $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una cubierta de X y para todo $\alpha \in I$, U_α es un abierto, diremos que $\mathcal{U}$ es una **cubierta abierta de** X.

3. El espacio (X, τ) es un **espacio compacto** si toda cubierta abierta $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de X existe una subfamilia finita $\{U_{\alpha_1}, ..., U_{\alpha_n}\}$ de $\mathcal{U}$ tal que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$$

4. Un subconjunto $C \subseteq X$ es un **subconjunto compacto de** X si (C, τ_C) es un espacio compacto.

Proposición 4.1.1
Sea (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{B}$ una base para la topología τ. Entonces, (X, τ) es compacto si y sólo si para cada cubierta de X, $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$ formada por básicos de τ existen $\alpha_1, ..., \alpha_n \in I$ tales que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B_{\alpha_i}$$

Demostración:
$\Rightarrow)$: Es inmediata del hecho de que (X, τ) es compacto.

$\Leftarrow)$: Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \tau$ tal que

$$X = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$$

Dado $\alpha \in I$, existe $\left\{B^{\alpha}_{\beta}\right\}_{\beta\in J_\alpha}$ tal que

$$U_\alpha = \bigcup_{\beta\in J_\alpha} B^{\alpha}_{\beta}$$

así,

$$X = \bigcup_{\alpha\in I}\bigcup_{\beta\in J_\alpha} B^{\alpha}_{\beta}$$

luego, la colección formada por todos estos básicos es una cubierta de X. Por hipótesis, existen $\alpha_1, ..., \alpha_n \in I$ tales que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{\beta\in J_{\alpha_i}} B^{\alpha_i}_{\beta} = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$$

luego, X es compacto. ■

Proposición 4.1.2
Sea $(X, \prec)$ un conjunto ordenado tal que cada conjunto no vacío de X acotado superiormente tiene una mínima cota superior. Entonces al considerar $(X, \tau_\prec)$ se tiene que cada intervalo cerrado de X es compacto.

Demostración:
Sean $a, b \in X$ con $a \prec b$ y sea $\mathcal{U}$ una cubierta de intervalo cerrado $[a, b]$ formada por conjuntos abiertos en $[a, b]$ con la topología usual del subespacio. Se hará en varios pasos:

1. Veamos que dado $x \in [a, b]$ con $x \neq b$ podemos encontrar un punto $y \in [a, b]$ tal que $x \prec y$ y tal que el invervalo cerrado $[x, y]$ está contenido en la unión de uno o dos elementos de $\mathcal{U}$.

   I) Suponga que x no tiene sucesor inmediato. Sea $V \in \mathcal{U}$ tal que $x \in V$ (en particular se tiene que $V \in \tau_{\prec_{[a,b]}}$), entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $[x, c) \subseteq V$ y $(x, c) \neq \emptyset$. Sea $y \in (x, c)$, de lo anterior se sigue que $[x, y] \subseteq V$.

   II) Suponga que x tiene sucesor inmediato. Sea $z \in X$ el sucesor inmediato de x, entonces $[x, z] = \{x, z\}$. Además,

   $$x \prec z \preceq b$$

   sean $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ tales que $x \in U_1$ y $z \in U_2$. Entonces:

   $$[x, z] \subseteq U_1 \cup U_2$$

2. Sea

   $$\mathcal{L} = \Big\{x \in [a, b] \Big| a \prec x \text{ y } [a, x] \text{ está contenido en una unión finita de elementos de } \mathcal{U}\Big\}$$

   por (1) la familia $\mathcal{L} \neq \emptyset$. Como para todo $l \in \mathcal{L}$, $a \prec l \preceq b$, entonces $\mathcal{L}$ es un conjunto acotado superiormente y no vacío. Por hipótesis tiene mínima cota superior. Sea $c \in X$ la mínima cota superior de $\mathcal{L}$. Entonces

   $$a \prec c \preceq b$$

3. Veamos que $c \in \mathcal{L}$. Sea $A \in \mathcal{U}$ tal que $c \in A \in \tau_{\prec_{[a,b]}}$, luego existe $d \in [a, b]$ tal que $c \in (d, c] \subseteq A$. Si $\mathcal{L} \cap (d, c) = \emptyset$, entonces d sería cota superior de $\mathcal{L}$ tal que $d \prec c\#_c$. Por tanto, $\mathcal{L} \cap (d, c) \neq \emptyset$. Sea $z \in \mathcal{L} \cap (d, c)$, entonces existen $U_1, .., U_n \in \mathcal{U}$ tales que

   $$[a, z] \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n$$

   por ende,

   $$[a, c] \subseteq [a, z] \cup (d, c] \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n \cup A$$

   así $c \in \mathcal{L}$.

4. Veamos que $c = b$. Suponga que $c \prec b$. Por (1) existe $y \in [a, b]$ tal que $c \prec y$ y $[c, y]$ y está contenido en una unión finita de elementos de $\mathcal{U}$. Como $c \in \mathcal{L}$ tenemos que

$$[a, y] = [a, c] \cup [c, y]$$

donde $[a, y]$ está contenido en una unión finita de elementos de $\mathcal{U}$ y por lo tanto, $y \in \mathcal{L}$, pero $c \prec y \#_c$. Por tanto, $c = b$.

por los incisos anteriores se sigue que $[a, b]$ es compacto. ■

Corolario 4.1.1
Todo invervalo cerrado de $(\mathbb{R}, \tau_u)$ es compacto.

Demostración:
Es inmediato del teorema anterior. ■

Ejemplo 4.1.1
Sea $([0,1], \tau_{u_{[0,1]}})$. Considere

$$\mathcal{U} = \left\{ (\frac{1}{n}, 1] \middle| n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \tau_{u_{[0,1]}}$$

además, $(0, 1] \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$. Si $m \in \mathbb{N}$ existe un número real $k \in \mathbb{R}$ tal que $0 < k < \frac{1}{m}$. Por ende, $\mathcal{U}$ no tiene una subcubierta abierta finita para $(0, 1]$. Luego el intervalo semi-abierto $(0, 1]$ no es compacto.

Este ejemplo demuestra que la propiedad de ser compacto no se hereda.

Proposición 4.1.3
Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $A \subseteq X$. Entonces (A, τ_A) es compacto si y sólo si para cada colección $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de abiertos en X tales que

$$A \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$$

existen $\alpha_1, .., \alpha_n \in I$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$$

Demostración:
$\Rightarrow)$: Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$$

entonces, $\{U_\alpha \cap A\}_{\alpha \in I}$ es una cubierta abierta de (A, τ_A). Como (A, τ_A) es compacto, existen $\alpha_1, ..., \alpha_n \in I$ tales que

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \cap A$$

es decir, se tiene que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$$

$\Leftarrow)$: Sea $\{V_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una cubierta abierta de (A,τ_A). Entonces, dado $\alpha\in J$ existe $U_\alpha\in\tau$ tal que

$$V_\alpha = U_\alpha \cap A$$

luego,

$$A \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$$

por hipótesis existen $\alpha_1,...,\alpha_n \in I$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$$

por ende,

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} (U_{\alpha_i} \cap A) = \bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha_i}$$

Así, el espacio (A,τ_A) es compacto. ■

Proposición 4.1.4
Sea (X,τ) un espacio compacto y $A\subseteq X$ cerrado. Entonces, A es compacto.

Demostración:
Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una colección de abiertos de τ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$$

Luego

$$X = \left(\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha\right) \cup (X-A)$$

por ser (X,τ) compacto, existen $\alpha_1,...,\alpha_n\in I$ tales que

$$X = \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}\right) \cup (X-A)$$

En particular, se tiene que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$$

por la proposición anterior se sigue que A es un subconjunto compacto de X. ■

Proposición 4.1.5
Sea (X,τ) un espacio Hausdorff y sea $A\subseteq X$ compacto, entonces A es un cerrado de X.

Demostración:
Sea $x\in X-A$, entonces para cada $y\in A$ existen $U_y, V_u\in\tau$ tales que

$$x\in U_y \quad y\in V_y \quad U_y\cap V_y=\emptyset$$

(por ser (X,τ) Hausdorff). Luego,

$$A \subseteq \bigcup_{y\in A} V_y$$

Como A es compacto existen $y_1, ..., y_n \in A$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i} = V$$

es claro que V es un abierto que contiene a A. Definamos

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$$

el cual es abierto por ser intersección finita de abiertos, además cumple que $x \in U$. Por construcción se sigue que

$$U \cap V = \emptyset \Rightarrow U \cap A = \emptyset$$

por lo cual

$$x \in U \subseteq X - A$$

así para cada $x \in X - A$ existe un abierto U tal que $x \in U \subseteq X - A$. Por tanto, $A - X$ es abierto, es decir que A es cerrado. ■

Ejemplo 4.1.2
Considere $X = \{1, 2, 3\}$ y considere a $\tau_I = \{X, \emptyset\}$. Se tiene que (X, τ_I) no es de Hausdorff pero $\{1, 2\}$ es compacto y no es cerrado.

Proposición 4.1.6
Sean (X, τ) y (Y, σ) espacios topológicos y $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ una función continua. Si (X, τ) es un espacio compacto, entonces $f(X)$ es un subconjunto compacto de (Y, σ).

Demostración:
Sea $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \sigma$ tal que

$$f(X) \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$$

luego

$$X \subseteq f^{-1}(f(X))$$
$$\Rightarrow X = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(V_\alpha)$$

como (X, τ) es compacto, existen $\alpha_1, ..., \alpha_n \in I$ tales que

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(V_{\alpha_i})$$

■

Corolario 4.1.2
La propiedad de ser compacto es topológica.

Demostración:

■

Definición 4.1.2
Decimos que una colección $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de conjuntos tiene **la propiedad de la intersección finita**, si para cada subcolección finita $\{A_{\alpha_1}, ..., A_{\alpha_n}\}$ de $\mathcal{A}$ se tiene que

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_{\alpha_i} \neq \emptyset$$

Proposición 4.1.7
Sea (X,τ) un espacio topológico. Entonces (X,τ) es compacto si y sólo si para cada colección $\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de conjuntos cerrados de X que tiene la propiedad de intersección finita cumple que

$$\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha \neq \emptyset$$

Demostración:
$\Rightarrow$) : Sea $\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una colección de cerrados tales que tienen la propiedad de intersección finita. Queremos que

$$\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha \neq \emptyset$$

Suponga que no se cumple esto, es decir que

$$\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha = \emptyset$$

Entonces,

$$X = \bigcup_{\alpha\in I} X - F_\alpha$$

pero cada F_α es cerrado, es decir que $\{X - F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una cubierta abierta de (X,τ). Por ser (X,τ) compacto, existen $\alpha_1, ..., \alpha_n \in I$ tales que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} X - F_{\alpha_i}$$

Luego,

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = \emptyset$$

es decir que $\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ no tiene la propiedad de intersección finita$\#_c$. Por tanto,

$$\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha \neq \emptyset$$

$\Leftarrow$) : Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una cubierta abierta de X, es decir que

$$X = \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$$

luego,

$$\bigcap_{\alpha\in I} X - U_\alpha = \emptyset$$

donde $X - U_\alpha$ es cerrado para todo $\alpha \in I$. Así, la familia $\{X - U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia de cerrados que no puede tener la propiedad de la intersección finita. Por ende, existen $\alpha_1, ..., \alpha_n \in I$ tales que

$$\bigcap_{i=1}^{n} X - U_{\alpha_i} = \emptyset$$

es decir, que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$$

por tanto, el espacio (X, τ) es compacto. ■

Corolario 4.1.3
Sea $C_1 \supseteq C_2 \supseteq ... \supseteq C_n \supseteq C_{n+1} \supseteq ...$ una sucesión de conjuntos cerrados no vacíos de un espacio topológico (X, τ) compacto. Entonces,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$$

Corolario 4.1.4
Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces, (X, τ) es compacto si y sólo si toda colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X que tiene la propiedad de intersección finita cumple que

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \overline{A} \neq \emptyset$$

Proposición 4.1.8
Sea (X, τ) un espacio topológico, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. (X, τ) es compacto.
2. Cada filtro de X tiene un punto de acumulación.
3. Todo ultrafiltro de X es convergente.

Demostración:
(1) $\Rightarrow$ (2) : Queremos ver que todo filtro tiene un punto de acumulación. Sea ξ un filtro en X. Tenemos que ξ satisface la propiedad de la intersección finita, luego por el corolario anterior

$$\bigcap_{A \in \xi} \overline{A} \neq \emptyset$$

Luego, existe $x \in X$ tal que $x \in \overline{A}$ para todo $A \in \xi$.

(2) $\Rightarrow$ (3) : Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro. Por hipótesis existe $p \in X$ tal que p es punto de acumulación de $\mathcal{F}$. Existe ρ filtro de x tal que $\mathcal{F} \subseteq \rho$ y además, $\rho \to p$. Como $\mathcal{F}$ es ultrafiltro, se sigue que $\mathcal{F} = \rho$. Por ende, $\mathcal{F} \to p$.

(3) $\to$ (1): Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una cubierta abierta de X. Suponga que dado $F \subseteq I$ finito, existe $x \in X$ tal que

$$x \notin \bigcup_{\alpha \in F} U_\alpha$$

La familia

$$\mathcal{L}=\left\{X-\bigcup_{\alpha\in F}U_\alpha \middle| F\subseteq I \text{ finito}\right\}$$

es no vacía y no contiene al vacío. En particular se tiene que es una base de filtro. Sea $\mathcal{L}^+$ el filtro generado por dicha base. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro de X tal que $\mathcal{L}^+\subseteq\mathcal{U}$. Sea $p\in X$ tal que

$$\mathcal{U}\to p$$

Sea $\alpha\in I$ tal que $p\in U_\alpha\in\mathcal{U}$ (ya que $\xi_p\subseteq\mathcal{U}$). Tenemos que $X-U_\alpha\in\mathcal{L}\subseteq\mathcal{L}^+\subseteq\mathcal{U}$. Por tanto, $U_\alpha, X-U_\alpha\in\mathcal{U}\#_c$. Por tanto existen $\alpha_1,..,\alpha_n\in I$ tales que

$$\bigcup_{i=1}^{n}U_{\alpha_i}=X$$

luego, (X,τ) es compacto. ■

Teorema 4.1.1 (**Teorema de Tychonov**)
Sea $\{(X_\alpha,\tau_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ una familia de espacios topológicos arbitaria y tomemos

$$X=\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$$

consideramos el espacio topológico (X,τ_p). Entonces, (X,τ_p) es compacto si y sólo si (X_α,τ_α) es compacto, para todo $\alpha\in I$.

Demostración:
$\Rightarrow$) : Sea $\alpha\in I$, consideremos $p_\alpha:(X,\tau_p)\to(X_\alpha,\tau_\alpha)$ la α-ésima proyección. Esta función es suprayectiva y continua. Por tanto,

$$p_\alpha(X)=X_\alpha$$

es un compacto en (X_α,τ_α), es decir que (X_α,τ_α) es compacto.

$\Leftarrow$) : Sea ξ un ultrafiltro de X. Sea $\alpha\in I$, consideremos $p_\alpha(\xi)$ siendo $p_\alpha:(X,\tau_p)\to(X_\alpha,\tau_\alpha)$ la función α-ésima proyección. Por un ejercicio se tiene que $p_\alpha(\xi)$ es un filtro de X_α, más aún, es un ultrafiltro de (X_α,τ_α).

Como (X_α,τ_α) es compacto, entonces el filtro $p_\alpha(\xi)$ es convergente, luego existe $x_\alpha\in X_\alpha$ tal que $p_\alpha(\xi)\to x_\alpha$. Por la proposición 3.1.13 se sigue que $\xi\to x$, donde

$$x=(x_\alpha)_{\alpha\in I}$$

Por tanto, (X,τ_p) es compacto. ■

Ejemplo 4.1.3
Sea $X=\{0,1\}$ y $\tau=\{X,\emptyset,\{0\},\{1\}\}$. Para todo $n\in\mathbb{N}$ definimos $X_n=X$ y $\tau_n=\tau$. Tomemos

$$Y=\prod_{n=1}^{\infty}X_n$$

y consideremos (Y,τ_c). Se tiene que

$$\tau_c=\tau_D$$

como Y es no finito, entonces (Y,τ_c) no es compacto.

Teorema 4.1.2
Si (X, τ) es compacto y Hausdorff, entonces es normal.

Demostración:
Como es Hausdorff, ya es T_1, por lo que basta con probar que (X, τ) es T_4. Se harán dos cosas:

1. (X, τ) es T_3. Sea $A \subseteq X$ cerrado y $x \in X$ tal que $x \notin A$. Como $x \notin A$ se sigue que $x \neq a$ para todo $a \in A$. Por ser (X, τ) T_2, existen $U_a, V_a \in \tau$ tales que

$$a \in U_a \quad x \in V_a \quad U_a \cap V_a = \emptyset$$

Se tiene que $\{U_a\}_{a \in I}$ es una cubierta abierta de A. Como (X, τ) es compacto y A es cerrado, A es compacto, luego existen $a_1, ..., a_n \in A$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i}$$

tomemos $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i}$ y $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i}$. Es claro que $U, V \in \tau$ y son tales que

$$A \subseteq U, \quad x \in V, \quad U \cap V = \emptyset$$

por tanto, (X, τ) es T_3.

2. Sean $A, B \subseteq X$ cerrados tales que $A \cap B = \emptyset$ (siendo ambos no vacíos). Como (X, τ) es T_3 entonces para cada $b \in B$ existen dos abiertos $U_b, B_b \in \tau$ tales que

$$A \subseteq U_b, \quad b \in V_b, \quad U_b \cap V_b = \emptyset$$

Entonces, $\{V_b\}_{b \in B}$ es una cubierta abierta del cerrado B. Como (X, τ) es compacto se sigue que B es un subconjunto compacto de X, luego existen $b_1, ..., b_n \in B$ tales que

$$B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{b_i}$$

Tomemos $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{b_i}$ y $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{b_i}$, se tiene entonces por la elección de los U_b y V_b que:

$$A \subseteq U, \quad B \subseteq V, \quad U \cap V = \emptyset$$

luego, el espacio (X, τ) es T_4.

■

Proposición 4.1.9
Sea (X, τ) un espacio T_2 y sea ∞ un elemento que no está en X. Definimos $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$. Entonces, podemos dotar a $\hat{X}$ de una topología $\hat{\tau}$ al considerar todos los conjuntos:

1. U con $U \in \tau$.
2. $\hat{X} - C$ con C un subconjunto compacto de (X, τ).

Demostración:

Veamos que $\hat{\tau}$ es una topología sobre $\hat{X}$. En efecto:

1. $\emptyset \in \hat{\tau}$ ya que $\emptyset \in \tau$. Y, $\hat{X} \in \hat{\tau}$ pues el vacío $\emptyset$ es compacto.

2. Sean $A, B \in \hat{\tau}$.

   I) Si A y B son del tipo 1), como τ es una topología se sigue que $A \cap B \in \tau \subseteq \hat{\tau}$.

   II) Si A y B son del tipo 2), existen $C, D \subseteq X$ compactos tales que

   $$A = \hat{X} - C \quad \text{y} \quad B = \hat{X} - D$$

   entonces,

   $$\begin{aligned} A \cap B &= (\hat{X} - C) \cap (\hat{X} - D) \\ &= \hat{X} - C \cup D \end{aligned}$$

   donde $C \cup D$ es compacto en (X, τ). Se sigue entonces que $A \cap B \in \hat{\tau}$.

   III) Suponga que A es de tipo 1) y B es de tipo 2), entonces existe $C \subseteq X$ compacto tal que

   $$B = \hat{X} - C$$

   Como (X, τ) es T_2, entonces C es cerrado, luego

   $$\begin{aligned} A \cap B &= A \cap (\hat{X} - C) \\ &= A \cap (X - C) \end{aligned}$$

   el cual está en τ pues $\infty \notin A$.

3. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \hat{\tau}$.

   I) Suponga que $\forall \alpha \in I$, $U_\alpha \in \tau$. Entonces, $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau \subseteq \hat{\tau}$.

   II) Suponga que para todo $\alpha \in I$ existe $C_\alpha \subseteq (X, \tau)$ compacto tal que

   $$U_\alpha = \hat{X} - C_\alpha$$

   Entonces,

   $$\begin{aligned} \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha &= \bigcup_{\alpha \in I} (\hat{X} - C_\alpha) \\ &= \hat{X} - \bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha \end{aligned}$$

   luego la intersección $\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha$ es compacto en (X, τ) (pues al ser cada uno de los C_α compacto en este espacio T_2, se sigue que cada uno es cerrado, luego la intersección es cerrada pues es subconjunto cerrado de un compacto, digamos C_{α_0} para algún $\alpha_0 \in I$). Así, la unión está en $\hat{\tau}$.

   III) Sean $I_1, I_2 \subseteq I$ tales que para todo $\alpha \in I_1$, $U_\alpha \in \tau$ y para todo $\alpha \in I_2$ existe C_α subconjunto compacto de (X, τ) tal que $U_\alpha = \hat{X} - C_\alpha$. Tenemos que

   $$\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = \left(\bigcup_{\beta \in I_1} U_\beta \right) \cup \left(\bigcup_{\gamma \in I_2} U_\gamma \right) = U \cup (\hat{X} - C)$$

con $U \in \tau$ y C un subconjunto de (X, τ) compacto (esto por los incisos anteriores). Notemos que

$$\begin{aligned} x \in U \cup (\hat{X} - C) &\iff x \in U \text{ o } x \in \hat{X} - C \\ &\iff x \in \hat{X} - (C - U) \end{aligned}$$

pues, $C - U = C \cap (X - U)$. Pero, $C - U$ es un subconjunto cerrado del compacto C (el cual es cerrado y es T_2 con la topología del subespacio), luego la unión de todos los U_α es del tipo 2), esto es

$$\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \hat{\tau}$$

por los tres incisos, se sigue que $\hat{\tau}$ es una topología sobre $\hat{\tau}$. ■

Observación 4.1.1
Tenemos que $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$. Además, $\tau \subseteq \hat{\tau}$. Por lo tanto, $\tau \subseteq \hat{\tau}_X$.

Sea $U \in \hat{\tau}_X$. Entonces existe $U' \in \tau$ tal que $U = U' \cap X$. Se tienen dos casos:

1. U' es del tipo 1). Entonces $U = U' \cap X = U' \in \tau$.
2. U' es del tipo 2), es decir que existe $C \subsetneq X$ compacto en (X, τ) tal que $U' = \hat{X} - C$. Luego,

$$U = U' \cap X = (\hat{X} - C) \cap X = X - C$$

   donde C es cerrado pues (X, τ) es Hausdorff. Luego, $X - C \in \tau$.

Por los dos incisos, se sigue que $\tau = \hat{\tau}_X$.

4.2. Compacidad Local

Definición 4.2.1
Un espacio topológico (X, τ) se dice **localmente compacto en el punto** $x \in X$ si existe $C \subseteq X$ compacto tal que C es una vecindad de x.

Si (X, τ) es localmente compacto en cada uno de sus puntos, se dice que (X, τ) es **localmente compacto**.

Observación 4.2.1
Todo espacio compacto es localmente compacto.

Ejemplo 4.2.1
$(\mathbb{R}, \tau_u)$ es localmente compacto. En efecto, para todo $r \in \mathbb{R}$, la vecindad $[r - \pi, r + \pi]$ es compacta (por ser un invervalo cerrado). Pero, este espacio no es compacto.

Ejemplo 4.2.2
Considere $(\mathbb{Q}, \tau_{u_\mathbb{Q}})$. Afirmamos que este espacio no es localmente compacto. Sea $x \in \mathbb{Q}$ y suponga que C es una vecindad compacta de x en $(\mathbb{Q}, \tau_{u_\mathbb{Q}})$. Luego, existe un intervalo $]a, b[\subseteq \mathbb{R}$ que contiene a x tal que

$$x \in]a, b[\cap \mathbb{Q} \subseteq C$$

Sea $i_0 \in]a,b[$ irracional, para cada $q \in C$ definimos

$$U_q = \begin{cases} \left\{ r \in \mathbb{R} \middle| q < r \right\} & \text{si} \quad i_0 < q. \\ \left\{ r \in \mathbb{R} \middle| r < q \right\} & \text{si} \quad q < i_0. \end{cases}$$

es claro que $\{V_q = U_q \cap C\}_{q \in C}$ es una cubierta abierta de C (considerándola en el subespacio (C, τ_{u_C})). Como C es compacto existen $q_1, ..., q_n \in C$ tales que

$$C = \bigcup_{i=1}^{n} V_{q_i}$$

podemos suponer que

$$q_1 < \cdots < q_l < i_0 < q_{l+1} < \cdots < q_n$$

En particular, se sabe que $(q_l, q_{l+1}) \cap C \neq \emptyset$ (por la densidad de los racionales). Sea $t \in (q_l, q_{l+1}) \cap C$, se tiene que

$$t \notin V_{q_i}, \quad \forall i \in [\![1, n]\!]$$

luego $C \nsubseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{q_i} \#_c$. Por tanto, la propiedad de ser localmente compacto no es hereditaria.

Proposición 4.2.1
Sea $\{(X_1, \tau_1), ..., (X_n, \tau_n)\}$ una familia finita de espacios localmente compactos. Tomemos

$$X = \prod_{i=1}^{n} X_i$$

entonces, $(X, \tau_p = \tau_c)$ es localmente compacto.

Demostración:
Sea $x \in X$, digamos $x = (x_1, ..., x_n)$ donde $x_i \in X_i$ para todo $i \in [\![1, n]\!]$. Como cada (X_i, τ_i) es localmente compacto, existe $V_i \in \tau_i$ vecindad de x_i tal que $\overline{V_i}$ es compacto.

Tomemos $V = V_1 \times \cdots \times V_n$, por lo anterior se tiene que $x \in V$, es decir

$$x \in \prod_{i=1}^{n} V_i \in \tau_p$$

si definimos $C = \prod_{i=1}^{n} \overline{V_i}$, dotándolo de la topología producto (C, τ_p) es un espacio compacto (por el teorema de Tychonov), tal que

$$x \in V \subseteq C$$

donde $C \subseteq X$ es compacto en (X, τ_p). Luego, el espacio es localmente compacto. ■

Ejemplo 4.2.3
Para $n \in \mathbb{N}$ definimos $X_n = \mathbb{R}$ y $\tau_n = \tau_u$. Tomemos $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_n$ y considere así al espacio topológico (X, τ_p). Tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, (X_n, τ_n) es localmente compacto. Mostraremos que (X, τ_p) no es localmente compacto.

Demostración:
En efecto, sea $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X$ y suponga que existe $U \in \tau_p$ abierto y $C \subseteq X$ compacto tales que

$$x \in U \subseteq C$$

podemos suponer que U es un básico de τ_p, de esta forma

$$U = \prod_{n\in\mathbb{N}} U_n$$

donde $U_n \in \tau_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ siendo $U_n \neq \mathbb{R}$ para casi todo $n \in \mathbb{N}$ salvo una cantidad finita, es decir que existe $M \subseteq \mathbb{N}$ finito tal que para todo $n \in \mathbb{N} - M$, $U_n = \mathbb{R}$. Tenemos además, que para todo $n \in \mathbb{N}$, (X_n, τ_n) es de Hausdorff, por lo tanto, (X, τ_p) es de Hausdorff. Como $C \subseteq X$ es compacto, por lo anterior debe suceder que C es cerrado. Luego, el conjunto

$$\overline{U} = \overline{\prod_{n\in\mathbb{N}} U}_{n} = \prod_{n\in\mathbb{N}} \overline{U}_n$$

es compacto. Pero para $s \in \mathbb{N} - M$ se tiene que $U_s = \mathbb{R}$, es decir que $(U_s, \tau_s) = (\mathbb{R}, \tau_u)$ es compacto$\#_c$. Luego la propiedad de compacidad local no necesariamente se preserva bajo productos arbitrarios. ■

Proposición 4.2.2
Sean (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) espacios topológicos. Si $f : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$ es una función suprayectiva, continua y abierta siendo (X_1, τ_1) localmente compacto, entonces (X_2, τ_2) es loclamente compacto.

Demostración:
Sea $x_2 \in X_2$. Como f es suprayectiva, existe $x_1 \in X_1$ tal que $f(x_1) = x_2$. Al ser (X_1, τ_1) localmente compacto, existe $U \in \tau$ y $C \subseteq X$ vecindad compacta de x_1 tal que

$$x \in U \subseteq C$$

luego, $x_2 = f(x_1) \in f(U) \subseteq f(C)$. Donde $f(U) \in \tau_2$ y, al ser f continua se sigue que $f(C)$ es compacto en (X_2, τ_2). ■

Observación 4.2.2
Nótese que en la proposición anterior se debilitó la hipótesis de que f sea homomorfismo, pues no se pide que f sea inyectiva para obtener el resultado.

Corolario 4.2.1
La propiedad de compacidad local es topológica.

Demostración:
Inmediato del teorema anterior. ■

Proposición 4.2.3
Sea (X, τ) un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto el cual **no** es compacto. Entonces,

1. $\overline{X} = \hat{X}$ en $(\hat{X}, \hat{\tau})$.
2. $(\hat{X}, \hat{\tau})$ es un espacio compacto y Hausdorff.

Demostración:

De (1): Sea $U \in \hat{\tau}$ tal que $\infty \in U$, por tanto, $U = \hat{X} - C$ donde $C \subseteq X$ es un compacto de (X, τ). Como (X, τ) no es compacto, entonces $C \neq X$. Luego

$$U \cap X = (\hat{X} - C) \cap X = X - C \neq \emptyset$$

así, $\infty \in \overline{X}$. Por ende, $\overline{X} = \hat{X}$.

De (2): Veamos que $(\hat{X}, \hat{\tau})$ es de Hausdorff. En efecto, sean $x, y \in \hat{X}$ con $x \neq y$.

1. Si $x, y \in X$ al ser (X, τ) de Hausdorff existen dos abiertos $U, V \in \tau$ tales que

   $$x \in U \quad y \in V \quad \text{y} \quad U \cap V = \emptyset$$

   en particular, $U, V \in \hat{\tau}$.

2. Suponga que $x = \infty$. Como (X, τ) es localmente compacto, existe $C \subseteq X$ compacto $V \in \tau$ abierto en (X, τ) tales que

   $$y \in V \subseteq C$$

   Tomemos $U = X - C$. Se tiene que $U \in \hat{\tau}$, entonces

   $$x \in U, \quad y \in V \quad U \cap V = \emptyset$$

   donde $V \in \tau \subseteq \hat{\tau}$.

Por los dos incisos anterioes, se sigue que $(\hat{X}, \hat{\tau})$ es Hausdorff.

Veamos que es compacto. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una cubierta abierta de $(\hat{X}, \hat{\tau})$. Como $\infty \notin X$ existe $\alpha_0 \in I$ tal que

$$\infty \in U_{\alpha_0} = \hat{X} - C_{\alpha_0}$$

donde $C_{\alpha_0} \subseteq X$ es compacto en (X, τ). Sea

$$\mathcal{U}' = \{U_\alpha \cap X\}_{\alpha \in I}$$

este conjunto es una cubierta abierta de X (pues, recordemos que $\hat{\tau}_X = \tau$, es decir que la topología del subespacio coincide con la de (X, τ)). Como C_{α_0} es compacto, por un teorema existen $\alpha_1, ..., \alpha_n \in I$ tales que

$$C_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$$

Luego,

$$\hat{X} = (\hat{X} - C_{\alpha_0}) \cup C_{\alpha_0} = \bigcup_{i=0}^{n} U_{\alpha_i}$$

por tanto, $(\hat{X}, \hat{\tau})$ es compacto. ∎

La anterior es llamada **unificación unipuntual de** X.

Sean (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) espacios Hausdorff localmente compactos y no compactos tales que son homeomorfos. ¿Los espacios $(\hat{X}_1, \hat{\tau}_1)$ y $(\hat{X}_2, \hat{\tau}_2)$ son homeomorfos?