

# Un Curso Introductorio en Topología Algebraica

Cristo Daniel Alvarado

4 de septiembre de 2024

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. El Grupo Fundamental</b>	<b>3</b>
2.1. Conceptos Fundamentales . . . . .	3
2.2. El Grupo Fundamental de un Espacio Topológico . . . . .	5
2.3. Efecto de una función continua en el grupo fundamental . . . . .	10
2.4. Nociones geométricas subyacentes . . . . .	13
2.5. Simplificación de algunos grupos fundamentales . . . . .	17
2.6. Espacios Recubridores . . . . .	19
2.6.1. Preliminares . . . . .	19
2.6.2. Levantamiento de caminos en un espacio recubridor . . . . .	22
2.7. El grupo fundamental del círculo . . . . .	26
2.8. Ejercicios . . . . .	34

# Capítulo 1

## Introducción

A lo largo del curso (y estudiando temas de topología) llega a resultar de utilidad analizar el siguiente problema:

**¿Cuándo dos espacios topológicos  $X$  e  $Y$  son homeomorfos?**

Desafortunadamente, esta pregunta resulta en extremo compleja de analizar. Analicemos por ejemplo los siguientes subespacios de  $\mathbb{R}^2$ :

# Capítulo 2

## El Grupo Fundamental

El concepto de grupo fundamental

### 2.1. Conceptos Fundamentales

De ahora en adelante,  $I$  denotará al intervalo  $[0, 1]$ .

#### Definición 2.1.1

Un **camino** o **arco** en un espacio topológico  $X$ , es una función continua  $f : [a, b] \rightarrow X$  de un intervalo cerrado en  $X$ .

Las imágenes  $f(a)$  y  $f(b)$  son llamadas **puntos finales del camino o arco**.  $f(a)$  es llamado **punto inicial** y  $f(b)$  **punto final**.

#### Observación 2.1.1

Por comodidad, dado a que existe un homeomorfismo lineal entre  $[0, 1]$  y  $[a, b]$  (vistos como subespacios de  $\mathbb{R}$  dotado de la topología usual) siendo  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$  podemos ver a todos los caminos o arcos de un espacio topológico  $X$  como funciones continuas de  $I$  en  $X$ . Cuando sea más conveniente de esta manera, se usará esta convención.

#### Definición 2.1.2

Un espacio topológico  $X$  es llamado **conexo por arcos** o **arco-conexo** si cualesquiera dos puntos de  $X$  pueden ser unidos mediante un arco, es decir tales que los puntos finales del arco coincidan con estos dos puntos.

---

#### Teorema 2.1.1

Todo espacio topológico arco-conexo es conexo.

---

#### Demostración:

Ejercicio. ■

Como una sugerencia para la demostración del teorema anterior, recuerde el *teorema del cactus* (la unión de una familia de conjuntos conexos tales que la intersección de la familia es no vacía, es un conjunto conexo).

El recíproco del teorema anterior no es cierto como se ha visto en varios cursos pasados (recuerde Cálculo III).

**Definición 2.1.3**

Sea  $X$  un espacio topológico. Para cada  $x \in X$  se define:

$$\mathcal{A}(x) = \left\{ y \in X \mid \text{existe una función continua } f : I \rightarrow X \text{ tal que } f(0) = x \text{ y } f(1) = y \right\}$$

Se construye así la familia  $\{\mathcal{A}(x)\}_{x \in X}$ . Esta familia forma una partición de  $X$  y se denomina como **las componentes arco-conexas de  $X$** .

En el sentido de la definición anterior, estamos obteniendo los subconjuntos de  $X$  que son arco conexos más *grandes* que tiene. Si  $X$  es arco-conexo, entonces  $\mathcal{A}(x) = X$ , para todo  $x \in X$ .

Las componentes arco-conexas de  $X$  no necesariamente son conjuntos cerrados o abiertos.

**Definición 2.1.4**

Un espacio topológico  $X$  es **localmente arco-conexo** si cada punto tiene una familia básica de vecindades arco-conexas.

**Definición 2.1.5**

Sean  $f, g : [a, b] \rightarrow X$  dos arcos en  $X$  tales que  $f(a) = g(a)$  y  $f(b) = g(b)$  (esto es, que ambos arcos tienen los mismos puntos terminales). Decimos que estos dos arcos son **equivalentes**, denotándolo por  $f \sim g$ , si existe una función continua

$$F : [a, b] \times I \rightarrow X$$

tal que

$$F(t, 0) = f(t) \quad \text{y} \quad F(t, 1) = g(t)$$

para todo  $t \in [a, b]$  y,

$$F(a, s) = f(a) = g(a) \quad \text{y} \quad F(b, s) = f(b) = g(b)$$

para todo  $s \in I$ .

**Proposición 2.1.1**

La relación de la definición anterior es una relación de equivalencia en el conjunto de todos los arcos con mismos puntos terminales de un espacio topológico  $X$ .

Notemos que el concepto anterior es casi el mismo que el de homotopía, considerando de forma adicional que en esta definición se dejen fijos los puntos terminales de ambos arcos.

**Definición 2.1.6**

Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios topológicos. Se dice que dos funciones  $f, g : X \rightarrow Y$  son **homotópicas** si existe una función continua  $F : X \times I \rightarrow Y$  tal que

$$F(x, 0) = f(x) \quad \text{y} \quad F(x, 1) = g(x)$$

para todo  $x \in X$ .

**Observación 2.1.2**

En los dos casos de las definiciones anteriores, se dota a los espacios de la topología producto.

Intuitivamente lo que uno hace es defomar, sin perder la continuidad, un arco en el otro en el espacio  $X$ , dejando fijos los puntos terminales fijos en todo momento de la deformación.

Además de esta relación inducida, queremos definir una operación para dos arcos con ciertas propiedades:

**Definición 2.1.7**

Sea  $X$  espacio topológico y  $f : [a, b] \rightarrow X$  y  $g : [b, c] \rightarrow X$  arcos tales que  $f(b) = g(b)$  (siendo  $a < b < c$ ). Entonces el producto  $f \cdot g$  se define como:

$$(f \cdot g)(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [a, b] \\ g(t) & \text{si } t \in [b, c] \end{cases}$$

para todo  $t \in [a, c]$ .

**Observación 2.1.3**

Notemos que esta operación genera otro arco, es decir otra función continua  $f \cdot g : [a, c] \rightarrow X$ .

En lo que sigue, se usará el intervalo  $I = [0, 1]$ .

## 2.2. El Grupo Fundamental de un Espacio Topológico

**Definición 2.2.1**

Sean  $f$  y  $g$  caminos en un espacio  $X$  tales que el punto final de  $f$  es el punto inicial de  $g$ . Se define el producto  $f \cdot g$  por:

$$f \cdot g(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

también, decimos que dos caminos  $f_0$  y  $f_1$  son **equivalentes** (denotado por  $f_0 \sim f_1$ ) si lo son en el sentido de la sección anterior.

---

**Lema 2.2.1**

La relación de equivalencia y el producto definido anteriormente son compatibles en el sentido siguiente: si  $X$  es un espacio,  $f_0 \sim f_1$  y  $g_0 \sim g_1$  son caminos equivalentes, entonces  $f_0 \cdot g_0 \sim f_1 \cdot g_1$  (asumiendo que el punto terminal de  $f_0$  es el punto inicial de  $g_0$ ).

---

**Demostración:**

Como el punto terminal de  $f_0$  es el punto terminal de  $g_0$ , al tenerse las relaciones  $f_0 \sim f_1$  y  $g_0 \sim g_1$  se sigue que el producto  $f_1 \cdot g_1$  está bien definido.

Como  $f_0 \sim f_1$  y  $g_0 \sim g_1$ , existen dos funciones continuas  $F, G : I \times I \rightarrow X$  tales que

$$F(t, 0) = f_0(t), \quad F(t, 1) = f_1(t), \quad G(t, 0) = g_0(t), \quad G(t, 1) = g_1(t)$$

para todo  $t \in I$ , y

$$F(0, s) = f_0(0) = f_1(0), \quad F(1, s) = f_0(1) = f_1(1)$$

y,

$$G(0, s) = g_0(0) = g_1(0), \quad G(1, s) = g_0(1) = g_1(1)$$

para todo  $s \in I$ . Definamos la función  $H : I \times I \rightarrow X$  dada por:

$$H(t, s) = \begin{cases} F(2t, s) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{t}{2} \\ G(2t - 1, s) & \text{si } \frac{t}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

para todo  $t, s \in I$ . Claramente  $H$  es continua por el lema de pegado y dado que  $F$  y  $G$  son continuas, además se cumple que:

$$\begin{aligned} H(t, 0) &= \begin{cases} F(2t, 0) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{t}{2} \\ G(2t - 1, 0) & \text{si } \frac{t}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} f_0(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{t}{2} \\ g_0(2t - 1) & \text{si } \frac{t}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \\ &= f_0 \cdot g_0(t) \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned} H(t, 1) &= \begin{cases} F(2t, 1) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{t}{2} \\ G(2t - 1, 1) & \text{si } \frac{t}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} f_1(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{t}{2} \\ g_1(2t - 1) & \text{si } \frac{t}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \\ &= f_1 \cdot g_1(t) \end{aligned}$$

para todo  $t \in I$ . Además, para todo  $s \in I$  se cumple:

$$\begin{aligned} H(0, s) &= F(0, s) \\ &= f_0(0) \\ &= f_0(2 \cdot 0) \\ &= f_0 \cdot g_0(0) \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned} H(0, s) &= F(0, s) \\ &= f_1(0) \\ &= f_1(2 \cdot 0) \\ &= f_1 \cdot g_1(0) \end{aligned}$$

por lo cual

$$H(0, s) = f_0 \cdot g_0(0) = f_1 \cdot g_1(0)$$

de forma análoga se deduce que

$$H(1, s) = f_0 \cdot g_0(1) = f_1 \cdot g_1(1)$$

Se sigue de lo anterior que  $f_0 \cdot g_0 \sim f_1 \cdot g_1$ . ■

Como resultado de este lema, se puede definir la multiplicación de clases de equivalencia de caminos (de tal suerte que el punto terminal del primer camino coincida con el inicial del segundo camino).

### Definición 2.2.2

Sea  $X$  espacio y  $f, g$  caminos en  $X$  tales que el punto terminal de  $f$  es el punto inicial de  $g$ .  $[f]$  denota a la **clase de equivalencia con representante**  $f$  y  $[g]$  a la de  $g$ .

Se define el producto de las clases  $[f]$  y  $[g]$  por:

$$[f] \cdot [g] = [f \cdot g]$$

Debido al lema anterior, el producto de clases de equivalencia está bien definido.

Este es el tipo de multiplicación que nos va a concernir en lo que sigue. En general, la multiplicación de caminos no es asociativa.

**Ejercicio 2.2.1 (La multiplicación de caminos no es asociativa.)**

Considere en  $\mathbb{R}^3$  dotado de la topología usual los caminos

$$f(t) = (t, 0, 0), \quad g(t) = (0, t, 0) \quad \text{y} \quad h(t) = (0, 0, t)$$

para todo  $t \in I$ . Compute  $f \cdot (g \cdot h)$  y  $(f \cdot g) \cdot h$ .

Sin embargo, se tiene el siguiente resultado:

**Lema 2.2.2**

La multiplicación de clases de equivalencia de caminos es asociativa.

**Demostración:**

Sean  $f, g, h$  caminos en  $X$  tales que el punto terminal de  $f$  es el punto inicial de  $g$  y el punto terminal de  $g$  es el punto inicial de  $h$ . Se tiene entonces que los productos:

$$f \cdot (g \cdot h) \quad \text{y} \quad (f \cdot g) \cdot h$$

están bien definidos (*verificar!*). Para probar el resultado, debemos ver que

$$[f] \cdot ([g] \cdot [h]) = ([f] \cdot [g]) \cdot [h]$$

lo que es equivalente a probar que

$$[f \cdot (g \cdot h)] = [(f \cdot g) \cdot h]$$

es decir, que  $f \cdot (g \cdot h) \sim (f \cdot g) \cdot h$ . Considere la función  $F : I \times I \rightarrow X$  dada por:

$$F(t, s) = \begin{cases} f\left(\frac{4t}{1+s}\right) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4} \\ g(4t - 1 - s) & \text{si } \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4} \\ h\left(1 - \frac{4(1-t)}{2-s}\right) & \text{si } \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

para todo  $s, t \in I$ . Veamos que  $F$  es continua... ■

Para cualquier punto  $x \in X$ , denotemos por  $J_x = [i_x]$  a la clase de equivalencia del mapeo identidad, es decir  $i_x : I \rightarrow X$  es tal que  $i_x(t) = x$  para todo  $y \in I$ . Esta clase tiene la siguiente propiedad fundamental:

**Lema 2.2.3**

Sea  $\mathcal{F} = [f]$  una clase de equivalencia de caminos con punto inicial  $x \in X$  y terminal  $y \in X$ . Entonces,  $J_x \cdot \mathcal{F} = \mathcal{F}$  y  $\mathcal{F} \cdot J_y = \mathcal{F}$ .

**Demostración:**

Solo se probará la primera igualdad, para ello, basta con probar que  $i_x \cdot f \sim f$ . En efecto, defina la función  $F : I \times I \rightarrow X$  dada por:

$$F(t, s) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{s}{2} \\ f\left(\frac{2t-s}{2-s}\right) & \text{si } \frac{s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$





Figura 2.1: Dominio de la función  $F$ .

para todo  $s, t \in I$ . Entonces,  $F(t, 0) = f(t)$  y  $F(t, 1) = (e \cdot f)(1)$  siendo  $F$  continua. Por tanto,  $\mathcal{I}_x \cdot \mathcal{F} = \mathcal{F}$ . ■

En cierto modo, lo que decimos es que la clase  $\mathcal{I}_x$  actúa como elemento identidad (*¿De dónde?*).

### Definición 2.2.3

Para cualquier camino  $f : I \rightarrow X$ ,  $\bar{f}$  denota al camino definido por:

$$\bar{f}(t) = f(1 - t), \quad \forall t \in I$$

El camino  $\bar{f}$  se obtiene recorriendo el camino  $f$  en sentido contrario.

---

### Lema 2.2.4

Sea  $f$  un camino y denotemos por  $\mathcal{F} = [f]$  y  $\bar{\mathcal{F}} = [\bar{f}]$ , entonces:

$$\mathcal{F} \cdot \bar{\mathcal{F}} = \mathcal{I}_x \quad \text{y} \quad \bar{\mathcal{F}} \cdot \mathcal{F} = \mathcal{I}_y$$

donde  $x \in X$  y  $y \in X$  son los puntos inicial y terminal de  $f$ , respectivamnete.

---

### Demostración:

Sólo se probará la primera igualdad, para ello es suficiente con probar que  $f \cdot \bar{f} \sim i_x$ . Definimos la función  $F : I \times I \rightarrow X$  por:

$$F(t, s) = \begin{cases} f(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{s}{2} \\ f(s) & \text{si } \frac{s}{2} \leq t \leq 1 - \frac{s}{2} \\ f(2 - 2t) & \text{si } 1 - \frac{s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

para todo  $s, t \in I$ . Entonces,

$$\begin{aligned}
 F(t, 0) &= \begin{cases} f(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 0 \\ f(s) & \text{si } 0 \leq t \leq 1 - 0 \\ f(2 - 2t) & \text{si } 1 - 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} f(0) & \text{si } t = 0 \\ f(0) & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ f(2 - 2t) & \text{si } t = 1 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ f(0) & \text{si } t = 1 \end{cases} \\
 &= x
 \end{aligned}$$

para todo  $t \in I$ . Además,

$$\begin{aligned}
 F(t, 1) &= \begin{cases} f(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f(1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 - \frac{1}{2} \\ f(2 - 2t) & \text{si } 1 - \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} f(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f(1 - (2t - 1)) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} f(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \bar{f}(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \\
 &= f \cdot \bar{f}(t)
 \end{aligned}$$

para todo  $t \in I$ . La función  $F$  es continua...

Por tanto,  $\mathcal{F} \cdot \bar{\mathcal{F}}$ . ■

En vista de estas propiedades de la clase  $\bar{\mathcal{F}}$ , de ahora en adelante la denotaremos por  $\mathcal{F}^{-1}$ .

Podemos resumir todos los lemas antes probados diciendo que el conjunto de todas las clases de caminos en un espacio  $X$  satisfacen los axiomas de grupo, excepto que el producto de dos caminos no siempre está definido. Solventamos este problema con la siguiente definición:

#### Definición 2.2.4

Un camino o una clase de camino es llamada **cerrada** o un **bucle**, si el punto inicial y terminal son el mismo. El bucle se dice que tiene **base** en el punto inicial o terminal.

#### Teorema 2.2.1

Sea  $X$  un espacio topológico y  $x \in X$  un punto fijo. Entonces, el conjunto de todas las clases de caminos cerrados que tienen como punto base a  $x$  dotado por la operación  $\cdot$ , denotado por  $\pi(X, x)$  es un grupo llamado **grupo fundamental** o **grupo de Poincaré** de  $X$  con punto base  $x$ .

#### Demostración:

Es un resumen de todos los lemas anteriores. ■

#### Observación 2.2.1

Para un espacio topológico dado  $X$  y  $x \in X$ , dotamos el grupo fundamental  $\pi(X, x)$  de una operación binaria que lo hace de grupo, de ahora en adelante tal operación se denotará al producto de dos clases  $[f]$  y  $[g]$  por  $[f] \cdot [g]$  o por yuxtaposición como  $[f][g] = [f \cdot g]$  (no confundir la operación dentro de los paréntesis cuadrados con la composición usual de funciones).

Si  $[f] \in \pi(X, x)$ , se denotará a su inverso por  $[f]^{-1}$  y, al elemento identidad por  $J$

---

**Proposición 2.2.1**

Sea  $X$  un espacio y  $x, y \in X$  dos puntos distintos. Si  $\gamma : I \rightarrow X$  es un camino con punto inicial  $x$  y terminal  $y$ , entonces  $\pi(X, x) \cong \pi(X, y)$  (es decir, son grupos isomorfos).

---

**Demostración:**

En efecto, defina la función  $u : \pi(X, x) \rightarrow \pi(X, y)$  dada por:

$$u([f]) = [\gamma]^{-1}[f][\gamma]$$

Por cursos anteriores de teoría de Grupos, se ve de forma inmediata que esta función es un isomorfismo entre los grupos  $\pi(X, x)$  y  $\pi(X, y)$ . ■

---

**Corolario 2.2.1**

Sea  $X$  un espacio topológico arco-conexo, entonces los grupos  $\pi(X, x)$  y  $\pi(X, y)$  son isomorfos para todo  $x, y \in X$ .

---

La importancia del teorema anterior radica en que el grupo  $\pi(X, x)$  tiene propiedades como grupo (es decir, es abeliano, finito, nilpotente, libre, etc...) no debido al punto elegido  $x \in X$ , sino al espacio mismo  $X$ , suponiendo que  $X$  es arco-conexo.

En general, no hay un mapeo canónico o isomorfismo natural entre  $\pi(X, x)$  y  $\pi(X, y)$ , ya que a cada elección de camino entre  $x$  y  $y$  le corresponderá un isomorfismo.

## 2.3. Efecto de una función continua en el grupo fundamental

**Observación 2.3.1**

Para esta sección resultará de utilidad definir el siguiente conjunto, para todo espacio topológico  $X$  se define

$$\wp_X = \left\{ [f] \mid f : I \rightarrow X \text{ es una función continua} \right\}$$

es decir, estamos tomando todas las clases de caminos de un espacio topológico  $X$  (note que no tiene nada que ver con el grupo fundamental, más que con el hecho de que usa las clases de caminos en su definición).

Considere dos espacios topológicos  $X$  y  $Y$  y sea  $\varphi : X \rightarrow Y$  una función continua. Si  $f_0, f_1 : I \rightarrow X$  son caminos en  $X$ , ¿también lo son  $\varphi \circ f_0$  y  $\varphi \circ f_1$ ?

---

**Proposición 2.3.1**

Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos,  $f_0, f_1 : I \rightarrow X$  caminos equivalentes. Entonces,  $\varphi \circ f_0 \sim \varphi \circ f_1$ .

---

**Demostración:**

Como  $f_1 \sim f_0$ , existe pues una función continua  $F : I \times I \rightarrow X$  tal que

$$F(x, 0) = f_0(x), \quad F(x, 1) = f_1(x)$$

para todo  $x \in I$  y,

$$F(0, t) = f_0(0) = f_1(0), \quad F(1, t) = f_0(1) = f_1(1)$$

Considere la función  $G : I \times I \rightarrow Y$  dada por:

$$G(x, t) = \varphi \circ F(x, t)$$

Es claro que esta función es continua por ser composición de funciones continuas, además se cumple que

$$\begin{aligned} G(x, 0) &= \varphi \circ F(x, 0) \\ &= \varphi(F(x, 0)) \\ &= \varphi(f_0(x)) \\ &= \varphi \circ f_0(x) \end{aligned}$$

para todo  $x \in I$ . De forma análoga

$$G(x, 1) = \varphi \circ f_1(x)$$

La otra condición se verifica de forma inmediata, con lo que se concluye que  $\varphi \circ f_0 \sim \varphi \circ f_1$ . ■

Con la proposición anterior, podemos definir sin problemas una función que mapee clases de caminos en  $X$  a clases de caminos en  $Y$ , a partir de la función continua  $\varphi$ . Esto se hará con el objetivo de ver qué sucede con el grupo fundamental bajo esta función continua  $\varphi_*$ .

### Definición 2.3.1

Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos y  $\varphi : X \rightarrow Y$  una función continua. Sea  $f : I \rightarrow X$  un camino que une a los puntos  $x, y \in X$ , se define la función  $\varphi_* : \mathcal{P}_X \rightarrow \mathcal{P}_Y$  por

$$\varphi_*([f]) = [\varphi \circ f]$$

por la proposición anterior, esta función está bien definida.

Ahora, analizaremos las propiedades de la función  $\varphi_*$ .

### Proposición 2.3.2

Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos y  $\varphi : X \rightarrow Y$  una función continua.

- I. Si  $f_0, f_1 : I \rightarrow X$  son caminos en  $X$  tales que  $f_0 \cdot f_1$  está definido (por ende,  $[f_0] \cdot [f_1]$  lo está), entonces  $\varphi_*([f_0] \cdot [f_1]) = \varphi_*([f_0]) \cdot \varphi_*([f_1])$ .
- II. Para cualquier punto  $x \in X$ ,  $\varphi_*(\mathcal{I}_x) = \mathcal{I}_{\varphi(x)}$ .
- III. Si  $f : I \rightarrow X$  es un camino, entonces  $\varphi_*([f]^{-1}) = (\varphi_*([f]))^{-1}$ .

### Demostración:

De (i): Veamos primero que el producto  $\varphi_*([f_0]) \cdot \varphi_*([f_1])$  está bien definido. En efecto, dado a que el producto  $[f_0] \cdot [f_1]$  lo está, entonces

$$f_0(1) = f_1(0)$$

luego,

$$\varphi \circ f_0(1) = \varphi \circ f_1(0)$$

donde  $\varphi_*([f_0]) = [\varphi \circ f_0]$  y  $\varphi_*([f_1]) = [\varphi \circ f_1]$ , por tanto el producto de ambas clases está definido. Probemos ahora la igualdad. Se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi_*([f_0] \cdot [f_1]) &= \varphi_*([f_0 \cdot f_1]) \\ &= [\varphi \circ (f_0 \cdot f_1)] \end{aligned}$$

siendo

$$f_0 \cdot f_1(t) = \begin{cases} f_0(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f_1(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}, \quad \forall t \in I$$

por ende,

$$\begin{aligned} \varphi \circ (f_0 \cdot f_1)(t) &= \begin{cases} \varphi(f_0(2t)) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \varphi(f_1(2t-1)) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \varphi \circ f_0(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \varphi \circ f_1(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \\ &= (\varphi \circ f_0) \cdot (\varphi \circ f_1)(t), \quad \forall t \in I \end{aligned}$$

luego entonces

$$\begin{aligned} [\varphi \circ (f_0 \cdot f_1)] &= [(\varphi \circ f_0) \cdot (\varphi \circ f_1)] \\ &= [\varphi \circ f_0] \cdot [\varphi \circ f_1] \\ &= \varphi_*([f_0]) \cdot \varphi_*([f_1]) \end{aligned}$$

lo que prueba el resultado.

De (ii) y (iii): Ejercicio. ■

Por estas razones, llamaremos a  $\varphi_*$  un *homomorfismo* u *homomorfismo inducido por  $\varphi$* .

### Proposición 2.3.3

En el contexto de la proposición anterior, si  $Z$  es un espacio topológico y  $\psi : Y \rightarrow Z$  es una función continua, entonces

$$(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$$

### Demostración:

Es claro que la composición de ambas funciones está bien definida. Probaremos ahora la igualdad, sea  $f : I \rightarrow X$  un camino, entonces:

$$\begin{aligned} (\psi \circ \varphi)_*([f]) &= [\psi \circ \varphi \circ f] \\ &= [\psi \circ (\varphi \circ f)] \\ &= \psi_*([\varphi \circ f]) \\ &= \psi_*(\varphi_*([f])) \\ &= \psi_* \circ \varphi_*([f]) \end{aligned}$$

lo que prueba la igualdad. ■

### Ejercicio 2.3.1

Sea  $X$  espacio topológico y  $i : X \rightarrow X$  la función identidad, entonces

$$i_*([f]) = [f]$$

para todo camino  $f : I \rightarrow X$  en  $X$ .

### Demostración:

Ejercicio. ■

### Observación 2.3.2

En otras palabras, lo que nos dice la proposición anterior es que el mapeo  $i_*$  restringido a  $\pi(X, x)$  coincide con la identidad de  $\mathbb{1}_{\pi(X, x)}$ , y que

$$i_* = \mathbb{1}_{\varphi_X}$$

### Corolario 2.3.1

Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos y  $\varphi : X \rightarrow Y$  una función continua y  $x \in X$ . La función  $\varphi_*$  restringida a  $\pi(X, x) \subseteq \varphi_X$  es un homomorfismo entre  $\pi(X, x)$  y  $\pi(Y, \varphi(x))$ . Más aún, si  $\varphi$  es homeomorfismo, entonces  $\varphi_*$  restringida a  $\pi(X, x)$  es isomorfismo.

### Demostración:

El hecho de que sea homomorfismo es inmediato de la proposición anterior y de que si  $f$  es un bucle con base en  $x$ , entonces

$$\varphi_*([f]) = [\varphi \circ f]$$

es la clase del camino  $\varphi \circ f$ , el cual es un bucle con base en  $\varphi(x)$ .

Veamos ue si  $\varphi$  es homeomorfismo entonces  $\varphi_*$  es isomorfismo. En efecto, como es homeomorfismo existe una función  $\varphi^{-1} : Y \rightarrow X$  continua que es la inversa de  $\varphi$ .

Se sigue de la proposición anterior que

$$(\mathbb{1}_X)_* = (\varphi \circ \varphi^{-1})_* = \varphi_* \circ \varphi_*^{-1}$$

donde  $\mathbb{1}_X$  es la identidad de  $X$ , luego

$$\varphi_* \circ \varphi_*^{-1} = \mathbb{1}_{\varphi_X}$$

de forma análoga se sigue que

$$\varphi_*^{-1} \circ \varphi_* = \mathbb{1}_{\varphi_Y}$$

por tanto, la función  $\varphi_*$  es invertible, luego  $\varphi_*$  restringida a  $\pi(X, x)$  es invertible, con inversa la restricción de  $\varphi_*^{-1}$  a  $\pi(Y, \varphi(x))$ . Así,  $\varphi_*$  es isomorfismo. ■

## 2.4. Nociones geométricas subyacentes

Para continuar con el estudio de la función inducida  $\varphi_*$ , es necesario introducir algunos conceptos geométricos relevantes,

### Definición 2.4.1

Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos. Dos funciones continuas  $\varphi_0, \varphi_1 : X \rightarrow Y$  son **homotópicas** si existe una función continua  $\Phi : X \times I \rightarrow Y$  tal que para todo  $x \in X$ :

$$\Phi(x, 0) = \varphi_0(x) \quad \text{y} \quad \Phi(x, 1) = \varphi_1(x)$$

además, para denotar que son homotópicas, se usará el símbolo  $\varphi_0 \simeq \varphi_1$ .

### Observación 2.4.1

En ciertos casos, será más conveniente denotar a la homotopía como la familia de funciones  $\{\varphi_t\}_{t \in I}$  tal que cada una es continua y que el mapeo  $t \mapsto \varphi_t$  es continuo en el espacio de funciones continuas, donde

$$\Phi(x, t) = \varphi_t(x), \quad \forall x \in X, \forall t \in I$$

y por esta razón, se denotará por  $\varphi_t$  a  $\Phi$ .

---

**Proposición 2.4.1**

Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos. Considere el conjunto:

$$\mathcal{F} = \left\{ \varphi : X \rightarrow Y \mid \varphi \text{ es una función continua} \right\}$$

entonces,  $\simeq$  es una relación de equivalencia sobre  $\mathcal{F}$ .

---

**Demostración:**

Ejercicio. ■

**Observación 2.4.2**

Para aquellos que han tomado algún curso en teoría de categorías, verán de forma casi inmediata que esta relación de equivalencia induce una partición en la clase de todos los morfismos entre espacios topológicos.

La idea detrás de la homotopía es intentar deformar de forma continua una función en la otra, conservando la continuidad de las funciones, veamos que si

$$\varphi_t(x) = \Phi(x, t)$$

para todo  $x \in X$  y todo  $t \in I$ , entonces la función  $\varphi_t : X \rightarrow Y$  es continua.

Por esta razón es que comúnmente se habla de homotopía como la deformación continua de una función.

**Observación 2.4.3**

En otros contextos, resulta más familiar decir que dos funciones son homotópicas si pueden ser unidas con un arco en el espacio de todas las funciones continuas que van de  $X$  en  $Y$ .

**Definición 2.4.2**

Dos funciones  $\varphi_0, \varphi_1 : X \rightarrow Y$  entre los espacios topológicos  $X$  y  $Y$  son **homotópicas relativas al subconjunto  $A$  de  $X$**  si existe una función continua  $\Phi : X \times I \rightarrow Y$  tal que

$$\begin{aligned} \varphi(x, 0) &= \varphi_0(x) \quad \forall x \in X \\ \varphi(x, 1) &= \varphi_1(x) \quad \forall x \in X \\ \varphi(a, t) &= \varphi_0(a) = \varphi_1(a) \quad \forall a \in A \text{ y } \forall t \in I \end{aligned}$$

Básicamente la deformación continua es tal que deja al subconjunto  $A$  sin modificarse en el proceso de deformación.

---

**Teorema 2.4.1**

Sean  $\varphi_0, \varphi_1 : X \rightarrow Y$  funciones entre dos espacios topológicos y  $x \in X$ . Suponga que son homotópicas  $\varphi_0$  y  $\varphi_1$  relativas al conjunto  $\{u\}$ , entonces

$$\varphi_{0*} = \varphi_{1*} : \pi(X, u) \rightarrow \pi(Y, \varphi_0(u))$$

esto es, los homomorfismos inducidos son el mismo.

---

**Demostración:**

Sea  $f : I \rightarrow X$  un bucle que une a  $x$  consigo mismo. Como  $\varphi_0$  y  $\varphi_1$  son homotópicas relativas al conjunto  $\{u\}$ , entonces existe una función continua  $\Phi : X \times I \rightarrow Y$  tal que

$$\begin{aligned}\Phi(x, 0) &= \varphi_0(x) \quad \forall x \in X \\ \Phi(x, 1) &= \varphi_1(x) \quad \forall x \in X \\ \Phi(u, t) &= \varphi_0(u) = \varphi_1(u) \quad \forall t \in I\end{aligned}$$

por tanto, se tiene para el camino  $f$  que la función  $G : I \times I \rightarrow Y$  dada por

$$G(s, t) = \Phi(f(s), t), \quad \forall s, t \in I$$

es continua, y cumple que

$$F(s, 0) = \varphi_0 \circ f(s) \quad \text{y} \quad F(s, 1) = \varphi_1 \circ f(s)$$

para todo  $s \in I$ . Además,

$$\begin{aligned}F(0, t) &= \Phi(f(0), t) = \Phi(u, t) = \varphi_0(u) = \varphi_1(u) \\ F(1, t) &= \Phi(f(1), t) = \Phi(u, t) = \varphi_0(u) = \varphi_1(u)\end{aligned}$$

para todo  $t \in I$ . Por tanto, los caminos

$$\varphi_0 \circ f \quad \text{y} \quad \varphi_1 \circ f$$

son equivalentes, luego:

$$\begin{aligned}\varphi_{0*}([f]) &= [\varphi_0 \circ f] \\ &= [\varphi_1 \circ f] \\ &= \varphi_{1*}([f])\end{aligned}$$

dado a que el bucle  $f$  fue arbitrario, se sigue que

$$\varphi_{0*} = \varphi_{1*}$$

■

Ahora nos dedicaremos a aplicar estos resultados.

**Definición 2.4.3**

Un subconjunto  $A \subseteq X$  de un espacio topológico es un **repliegue** de  $X$  si existe una función continua  $r : X \rightarrow A$  (llamada **retracción**) tal que  $r(a) = a$  para todo  $a \in A$ .

La condición de la definición antes mencionada, es una condición muy fuerte, ya que no todo espacio la cumple para cualquier conjunto  $A$  arbitrario. Vea estos dos ejemplos:

**Ejemplo 2.4.1**

Considere  $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  y tomemos  $A = \mathbb{R} + (1, 0)$ . ¿Existe un repliegue de  $X$  en  $A$ ?

**Ejemplo 2.4.2**

Considere el espacio  $X$  como la cinta de Möbius y sea  $A$  el círculo central de la cinta. ¿Es  $A$  una retracción de  $X$ ? En caso de que sea ¿cuál es una posible retracción?



Sea ahora  $r : X \rightarrow A$  una retracción e  $i : A \rightarrow X$  el mapeo inclusión. Para cualquier punto  $a \in A$  se consideran los homomorfismos inducidos:

$$\begin{aligned} i_* : \pi(A, a) &\rightarrow \pi(X, a) \\ r_* : \pi(X, a) &\rightarrow \pi(A, a) \end{aligned}$$

siendo éstos tales que  $r \circ i = \mathbb{1}_A$ , debe suceder entonces que  $r_* \circ i_* = \mathbb{1}_{\pi(A, a)}$  es el homomorfismo identidad.

Se sigue entonces que

- $i_*$  es monomorfismo.
- $r_*$  es epimorfismo.

Estos resultados se usarán más adelante para probar que ciertos subespacios no son repliegues del espacio original.

#### Definición 2.4.4

Un subconjunto  $A$  de  $X$  es un **repliegue de deformación** de  $X$  si existe una retracción  $r : X \rightarrow A$  y una homotopía  $F : X \times I \rightarrow X$  tal que

$$\left. \begin{aligned} F(x, 0) &= x \\ F(x, 1) &= r(x) \end{aligned} \right\} \quad \forall x \in X$$

$$F(a, t) = a, \quad \forall a \in A, \forall t \in I$$

En otras palabras, la definición anterior es equivalente a decir que  $r \simeq \mathbb{1}_X$  y es tal que  $F(A \times I) = A$ .

#### Teorema 2.4.2

Si  $A$  es un repliegue de deformación de  $X$ , entonces el mapeo inclusión  $i : A \rightarrow X$  induce un isomorfismo entre  $\pi(A, a)$  y  $\pi(X, a)$  para todo  $a \in A$ .

#### Demostración:

Sea  $a \in A$ . Ya se sabe de la parte anterior que  $i_*$  es un monomorfismo. Para probar que es isomorfismo, basta con probar que

$$i_* \circ r_* : \pi(X, a) \rightarrow \pi(X, a)$$

coincide con  $\mathbb{1}_{\pi(X, a)}$ . Afirmamos que  $i \circ r$  es homotópico a  $\mathbb{1}_X$  respecto a  $\{a\}$ . En efecto, como  $A$  es repliegue de deformación de  $X$ , entonces existe una homotopía  $F : X \times I \rightarrow X$  tal que

$$\left. \begin{aligned} F(x, 0) &= \mathbb{1}_X(x) \\ F(x, 1) &= r(x) \end{aligned} \right\} \quad \forall x \in X$$

$$F(a', t) = a', \quad \forall a' \in A, \forall t \in I$$

y, como  $i \circ r(x) = x$ , para todo  $x \in X$  (por ser  $i$  el mapeo inclusión), se sigue que

$$\left. \begin{aligned} F(x, 0) &= \mathbb{1}_X(x) \\ F(x, 1) &= i \circ r(x) \end{aligned} \right\} \quad \forall x \in X$$

$$F(a, t) = a, \quad \forall t \in I$$

lo cual prueba la afirmación. Se sigue del teorema anterior que

$$i_* \circ r_* = (i \circ r)_* = \mathbb{1}_{\pi(X, a)}$$

■

Este teorema que acabamos de probar nos va a servir de dos cosas:

- Se usará para probar que dos espacios tienen grupos fundamentales isomorfos.
- Un subespacio  $A$  no es un repliegue de deformación de  $X$  si los grupos fundamentales no son isomorfos.

En particular se usará el segundo punto para probar que ciertos repliegues no son repliegues de deformación.

#### Definición 2.4.5

Un espacio topológico  $X$  es **contraíble a un punto** si existe  $x_0 \in X$  tal que  $\{x_0\}$  es un repliegue de deformación de  $X$ .

#### Definición 2.4.6

Un espacio topológico es **simplemente conexo** si es arco-conexo y  $\pi(X, x) = \langle e \rangle$  para algún (y por ende para cualquier)  $x \in X$ .

---

#### Corolario 2.4.1

Si un espacio es contraíble a un punto, entonces es simplemente conexo.

---

#### Demostración:

Es inmediato del hecho que el grupo fundamental del espacio topológico consistente de un solo elemento es tal que su grupo fundamental es trivial. ■

## 2.5. Simplificación de algunos grupos fundamentales

#### Definición 2.5.1

Un subconjunto  $X$  del espacio  $\mathbb{R}^n$  es llamado **convexo** si la línea uniendo cualesquiera dos puntos de  $X$  está contenida en  $X$ .

Afirmamos que todo subconjunto convexo  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  es contraíble a un punto. En efecto, sea  $x_0 \in X$  arbitrario fijo. Considere la función  $f : X \times I \rightarrow X$  dada por:

$$F(x, t) = (1 - t)x + tx_0$$

#### Ejemplo 2.5.1

Todo subconjunto convexo de  $\mathbb{R}^n$  es contraíble a un punto.

#### Demostración:

Sea  $X$  un subconjunto convexo de  $\mathbb{R}^n$  y  $x_0 \in X$ . Primero debemos dar una retracción de  $X$  en  $\{x_0\}$ . Sea

$$r(x) = x_0 \quad \forall x \in X$$

es claro que esta función es continua. Para ver que  $X$  es contraíble a  $\{x_0\}$  veamos que la función  $F : X \times I \rightarrow X$  dada por:

$$F(x, t) = (1 - t)x + tx_0 \quad \forall x \in X, t \in I$$

(esta función es básicamente para  $x \in X$  fijo el segmento que une a  $x$  con  $x_0$ , y al variar  $x$  se pasan por todos los posibles segmentos que unen con  $x_0$ ). Esta función es continua y efectivamente tiene como contradominio  $X$ , ya que el espacio  $X$  es convexo. Además:

$$\left. \begin{aligned} F(x, 0) &= x \\ F(x, 1) &= x_0 = r(x) \end{aligned} \right\}, \quad \forall x \in X$$

$$F(x_0, t) = x_0, \quad \forall t \in I$$

por tanto,  $\{x_0\}$  es repliegue de deformación de  $X$ , i.e.  $X$  es contraíble a un punto. ■

### Definición 2.5.2

Un subconjunto no vacío  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  se dice que tiene **forma de estrella respecto a  $x_0 \in X$**  si el segmento que une a  $x_0$  con  $x$  está contenido en  $X$ , para todo  $x \in X$ .

Como en el ejemplo anterior, se prueba de forma análoga que cualquier conjunto con forma de estrella es contraíble a un punto.

### Ejemplo 2.5.2

Afirmamos que la  $(n-1)$ -esfera unitaria  $\mathbb{S}^{n-1}$

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$$

es una deformación de repliegue de  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

### Demostración:

En efecto, sea  $n \in \mathbb{N}$  y considere el repliegue  $r : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  dado por

$$r(x) = \frac{x}{\|x\|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$$

Claramente esta es una función continua. Construimos la homotopía  $F : (\mathbb{R}^n - \{0\}) \times I \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$  dada por:

$$F(x, t) = (1-t)x + t \cdot \frac{x}{\|x\|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}, \forall t \in I$$

Es claro que esta función es continua, para la que se cumple que

$$\left. \begin{aligned} F(x, 0) &= x \\ F(x, 1) &= r(x) \end{aligned} \right\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$$

y,

$$\begin{aligned} F(s, t) &= (1-t)s + t \cdot \frac{s}{\|s\|} \\ &= (1-t)s + ts \\ &= s, \quad \forall s \in \mathbb{S}^{n-1}, \quad \forall t \in I \end{aligned}$$

Por tanto,  $\mathbb{S}^{n-1}$  es una deformación de retracción de  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ . ■

---

### Proposición 2.5.1

Un espacio  $X$  es simplemente conexo si y sólo si existe una única clase de equivalencia de caminos que conecten cualesquiera dos puntos de  $X$ .

---

### Demostración:

Es más fácil ver la suficiencia del teorema para entender que es lo que está sucediendo.

$\Leftarrow$ ): Sea  $x_0 \in X$ . Suponga que existe una única clase de equivalencia de caminos que conecten cualesquiera dos puntos de  $X$ , digamos  $[i]$ , donde  $i : I \rightarrow X$  es tal que  $i(t) = x_0$  para todo  $t \in I$ . Entonces si dado  $x \in X$ ,  $f_x : I \rightarrow X$  es un camino tal que  $f_x(t) = x$  para todo  $t \in I$ , debe suceder que

$$[i] = [f_x] \iff i \simeq f_x$$

(en particular si dos caminos son equivalentes, son homotópicos) Por ende, existe una función continua  $F : X \times I \rightarrow X$  tal que

$$F(y, 0) = i(y) = x_0, \quad \forall y \in X$$

y

$$F(y, 1) = f_x(y) = x, \quad \forall y \in X$$

Es decir, la función  $g : I \rightarrow X$  dada por:

$$g(t) = F(x_0, t), \quad \forall t \in I$$

dadas las condiciones anteriores es un camino que une a  $x_0$  con  $x$  (por ser continua). Luego el espacio  $X$  es arco-conexo. Si  $f : I \rightarrow X$  es un bucle con centro en  $x_0$ , entonces  $f \simeq i$ , es decir que es homotópico a la identidad ■

## 2.6. Espacios Recubridores

### 2.6.1. Preliminares

Para determinar el grupo fundamental del círculo, será necesario introducir teoría sobre espacios recubridores.

#### Definición 2.6.1

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. Un **espacio recubridor** o **cubridor** de  $X$  consiste de una tupla  $(\tilde{X}, p)$  siendo  $\tilde{X}$  un espacio topológico y  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  una función tal que

- Para cada punto  $x \in X$  existe una vecindad arco-conexa  $U$  tal que cada componente arco-conexa de  $p^{-1}(U)$  es homeomorfa a  $U$  bajo la restricción de  $p$  a la componente.

Cada abierto  $U$  que satisfaga la condición anterior es llamado **vecindad elemental** y se dice que  $U$  es **recubierto uniformemente**. La función  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  es llamada habitualmente **proyección**.

Veamos algunos ejemplos para clarificar mejor las ideas.

#### Ejemplo 2.6.1

Si  $X$  es un espacio topológico y  $\mathbb{1}_X : X \rightarrow X$  denota a la función identidad, entonces  $(X, \mathbb{1}_X)$  es un espacio recubridor de  $X$ .

Similarmente, si  $X, Y$  son espacios topológicos y  $f : X \rightarrow Y$  es un homeomorfismo, entonces  $(X, f)$  es un espacio recubridor de  $Y$ .

#### Ejemplo 2.6.2

Si  $(\tilde{X}, p)$  y  $(\tilde{Y}, q)$  son espacios recubridores de  $X$  y  $Y$ , respectivamente entonces,  $(\tilde{X} \times \tilde{Y}, p \times q)$

es un espacio recubridor de  $X \times Y$ , donde

$$p \times q(x, y) = (p(x), q(y)), \quad \forall (x, y) \in X \times Y$$

### Demostración:

Ejercicio. ■

### Ejemplo 2.6.3

Considere la función  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  dada por:

$$p(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s), \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

(donde  $\mathbb{R}$  está dotado de la topología usual). Entonces  $(\mathbb{R}, p)$  es un espacio recubridor de  $\mathbb{S}^1$ . Cualquier subintervalo abierto del círculo sirve como vecindad elemental. Este ejemplo deberá ser tomado en cuenta ya que será de utilidad más adelante.

---

### Proposición 2.6.1

La función  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  definida anteriormente hace de la tupa  $(\mathbb{R}, p)$  un espacio recubridor de  $\mathbb{S}^1$ . Más aún, todo arco abierto en  $\mathbb{S}^1$  es recubierto uniformemente.

---

### Demostración:

Para la primera parte, sea  $x = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s) \in \mathbb{S}^1$  (con  $s \in [0, 1[$ ). La función  $p$  es continua, por lo que el abierto

$$U = \left\{ (\cos 2\pi(s+r), \sin 2\pi(s+r)) \mid r \in [0, 1/4[ \right\}$$

en  $\mathbb{S}^1$  es tal que  $p^{-1}(U)$  es abierto. Es claro que

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{s \in \mathbb{Z}} ]s - 1/4, s + 1/4[$$

siendo cada uno de los intervalos disjuntos en la unión homeomorfo a  $U$ .

Notemos que podemos cambiar  $U$  por un arco abierto y el resultado sigue siendo válido. ■

Usando uno de los ejemplos anteriores, uno puede construir dos espacios recubridores del toro (recuerde que  $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ ), a saber:

$$p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \quad \text{y} \quad q : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$$

(donde las funciones son fácilmente construibles a partir de los ejemplos anteriores).

### Observación 2.6.1

Para más ejemplos desarrollados explícitamente, se recomienda checar: *A basic course in Algebraic Topology* de Massey W. S.

Más adelante se abordarán estos ejemplos, el objetivo actual no tiene mucho que ver con el análisis de los mismos, sino con la prueba de un resultado imprescindible.

### Definición 2.6.2

Una función continua  $f : X \rightarrow Y$  es un **homeomorfismo local**, si para cada punto  $x \in X$  existe una vecindad abierta  $V$  de  $x$  tal que  $f(V)$  es abierto y  $f|_V$  es un homeomorfismo.

**Observación 2.6.2**

De la definición de espacio recubridor se verifica fácilmente que  $p$  es un homeomorfismo local.

**Ejemplo 2.6.4**

Si  $(\tilde{X}, p)$  es un espacio recubridor de  $X$  y  $V$  es un subconjunto propio de  $\tilde{X}$  conexo y abierto, entonces  $p|_V$  es un homeomorfismo local, pero  $(V, p|_V)$  no es un espacio recubridor de  $X$ .

**Demostración:**

Observe que puede suceder que  $p|_V$  no sea suprayectiva ■

**Proposición 2.6.2**

Todo homomorfismo local es una función abierta.

**Demostración:**

Sea  $f : X \rightarrow Y$  un homomorfismo local y  $U \subseteq X$  abierto no vacío, debemos probar que  $f(U)$  es abierto.

Sea  $x \in U$ , como  $f$  es homomorfismo local, existe un abierto  $V_x \subseteq X$  tal que  $f|_{V_x}$  es homomorfismo. En particular se tiene que  $U \cap V_x$  es un abierto en  $X$  contenido en  $V_x$ , por ser homomorfismo, se sigue que

$$f|_{V_x}(U \cap V_x)$$

es abierto en  $Y$ , pero

$$f(U) = f\left(\bigcup_{x \in U} U \cap V_x\right) = \bigcup_{x \in U} f(U \cap V_x) = \bigcup_{x \in U} f|_{V_x}(U \cap V_x)$$

donde todos los conjuntos en la unión de la derecha son abiertos, luego  $f(U)$  es abierto.

Se sigue al ser  $U$  arbitrario que  $f$  es abierta. ■

**Corolario 2.6.1**

Si  $(\tilde{X}, p)$  es un espacio recubridor de  $X$ , entonces  $p$  es una función abierta.

**Demostración:**

Inmediata del teorema anterior. ■

**Lema 2.6.1**

Sea  $(\tilde{X}, p)$  un espacio recubridor de  $X$ ,  $A$  un subespacio de  $X$  que es arco-conexo y localmente arco-conexo. Sea  $\tilde{A}$  una componente arco-conexa de  $p^{-1}(A)$ , entonces  $(\tilde{A}, p|_{\tilde{A}})$  es un espacio recubridor de  $A$ .

**Demostración:**

■

## 2.6.2. Levantamiento de caminos en un espacio recubridor

En esta parte se pretende probar algunos lemas que resultarán relevantes para algunos resultados que se verán posteriormente, relacionados con los espacios recubridores (y sobre todo con la determinación de grupos fundamentales).

Antes, se probarán algunos resultados sobre espacios métricos.

### Definición 2.6.3

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A \subseteq X$  un conjunto no vacío. Para cada  $x \in X$  definimos la **distancia de  $x$  a  $A$** , como

$$d(x, A) = \inf \left\{ d(x, a) \mid a \in A \right\}$$

En Análisis Matemático I se probó que esta función como una función de  $X$  en  $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  es continua, para la que se cumple que

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y), \quad \forall x, y \in X$$

### Definición 2.6.4

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A \subseteq X$  un conjunto acotado no vacío. El **diámetro de  $A$**  es el número real:

$$D(A) = \sup \left\{ d(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A \right\}$$

---

### Lema 2.6.2 (Lema del número de Lebesgue)

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$  una cubierta abierta de  $(X, d)$ . Si  $X$  es compacto, entonces existe  $\delta > 0$  tal que para cada subconjunto de  $X$  con diámetro menor que  $\delta$  existe  $i_0 \in I$  tal que  $A_{i_0}$  lo contiene.

$\delta$  es llamado el **número de Lebesgue de  $\mathcal{A}$** .

---

### Demostración:

Se tienen dos casos:

- Si  $X$  está totalmente contenido en algún  $A_i$ , tomando  $\delta = 1$  se tiene el resultado.
- Suponga que  $X$  no está totalmente contenido en algún  $A_i$ . Como  $X$  es compacto, existen  $A_{i_1}, \dots, A_{i_n}$  tales que

$$X = \bigcup_{j=1}^n A_{i_j}$$

Para cada  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , sea

$$C_j = X - A_{i_j}$$

defina la función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n d(x, C_j)$$

(esta distancia es la media de las distancias a cualquier conjunto  $C_j$ ). Probaremos que  $f(x) > 0$  para todo  $x \in X$ . Sea  $x \in X$ , entonces existe  $j_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tal que  $x \in A_{i_{j_0}}$ , como  $A_{i_{j_0}}$  es abierto, existe  $\varepsilon > 0$  tal que

$$B_d(x, \varepsilon) \subseteq A_{i_{j_0}}$$

Entonces,  $f(x) \geq \frac{\varepsilon}{n} > 0$ . Como  $f$  es una función continua (por ser suma de funciones continuas) en un compacto, alcanza su máximo y su mínimo, en particular alcanza su mínimo, digamos  $\delta > 0$  (tiene que ser positivo ya que en caso contrario no se cumpliría la desigualdad enunciada anteriormente).

Afirmamos que  $\delta > 0$  es el número de Lebesgue. Sea  $B \subseteq X$  no vacío tal que  $D(B) < \delta$ , sea  $x_0 \in B$ , entonces

$$B \subseteq B_d(x, \delta)$$

y, además

$$\delta \leq f(x_0) \leq d(x_0, C_m) = d(x_0, X - A_{i_m})$$

siendo  $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tal que  $d(x_0, C_m)$  es el máximo de las distancias a cualquier  $C_j$ . Luego  $x_0 \in A_{i_m}$ . Se sigue entonces que

$$B \subseteq A_{i_m}$$

por los incisos anteriores se tiene el resultado. ■

### Lema 2.6.3

Sea  $(\tilde{X}, p)$  un espacio recubridor de  $X$  y sea  $Y$  un espacio conexo. Dadas dos funciones  $f_0, f_1 : Y \rightarrow \tilde{X}$  continuas tales que

$$p \circ f_0 = p \circ f_1$$

se tiene que el conjunto

$$F = \left\{ y \in Y \mid f_0(y) = f_1(y) \right\}$$

es vacío o es todo  $Y$ .

### Demostración:

Como  $Y$  es conexo, basta con probar que el conjunto  $F$  es abierto y cerrado. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $F$  es no vacío.

- *F es cerrado:* Sea  $y \in \overline{F}$  y tomemos

$$x = p \circ f_0(y) = p \circ f_1(y)$$

Sea  $U$  una vecindad elemental de  $x$  y sean  $V_0$  y  $V_1$  las componentes arco-conexas de  $p^{-1}(U)$  que contienen a  $f_0(y)$  y  $f_1(y)$ , respectivamente. Como  $f_0$  y  $f_1$  son ambas continuas, existe una vecindad  $W \subseteq Y$  de  $y$  tal que

$$f_0(W) \subseteq V_0 \quad \text{y} \quad f_1(W) \subseteq V_1$$

se tiene que existe  $z \in W$  tal que  $f_0(z) = f_1(z)$ . Por ende, debe suceder que  $V_0 = V_1$  (dado a que  $f$  es continua y,  $V_0$  y  $V_1$  son componentes arco-conexas), luego  $f_0(y) = f_1(y)$ . Así,  $y \in F$ .

- *F es abierto:* Se prueba de forma análoga a lo anterior usando el interior de  $F$ .

por ende  $F$  es abierto y cerrado, se sigue que  $F = Y$ . ■

### Lema 2.6.4

Sea  $(\tilde{X}, p)$  un espacio recubridor de  $X$ ,  $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$  y  $x_0 = p(\tilde{x}_0)$ . Entonces, para cualquier camino  $f : I \rightarrow X$  con punto inicial  $x_0$ , existe un único camino  $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}$  con punto inicial  $\tilde{x}_0$  tal que

$$p \circ \tilde{f} = f$$



### Demostración:

Para la existencia se tienen dos casos:

- Si el camino  $f$  está contenida en alguna vecindad elemental  $U$  de  $X$ , al tenerse que  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(U)$  (pues  $f(I) \subseteq U$ ), considéramos la componente arco-conexa  $V$  de  $p^{-1}(U)$  tal que  $\tilde{x}_0 \in V$ .

Como  $p|_V : V \rightarrow U$  es un homeomorfismo, existe una única  $q : V \rightarrow U$  homeomorfismo tal que

$$\begin{cases} p|_V \circ q = \mathbb{1}_V \\ q \circ p|_V = \mathbb{1}_U \end{cases}$$

hacemos pues

$$\tilde{f}(t) = q \circ f(t), \quad \forall t \in I$$

- Pasaremos al caso general en el que puede que  $f$  no esté totalmente contenida en una vecindad elemental. Sea  $\{U_j\}_{j \in J}$  una cubierta abierta de  $X$  por vecindades elementales (esto es posible dado a que  $(\tilde{X}, p)$  es un recubrimiento de  $X$ ). Entonces,

$$\{f^{-1}(U_j)\}_{j \in J}$$

es una cubierta abierta del compacto  $I \subseteq \mathbb{R}$  (que puede ser visto como subespacio métrico de  $\mathbb{R}$ ), luego existe  $\delta > 0$  número de Lebesgue de esta cubierta. Elegimos  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$\frac{1}{n} < \delta$$

y dividimos  $I$  en los subintervalos:

$$I = [0, 1] = \bigcup_{k=1}^n \left[ \frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right]$$

se tiene que cada uno de los intervalos de la unión está contenido en una vecindad elemental, luego por la parte anterior existe una  $\tilde{f}_1 : [0, \frac{1}{n}] \rightarrow \tilde{X}$  tal que

$$p \circ \tilde{f}_1(t) = f(t), \quad \forall t \in \left[ 0, \frac{1}{n} \right]$$

hacemos  $\tilde{x}_1 = \tilde{f}_1(\frac{1}{n})$ . Repetimos el proceso construyendo las funciones  $\{\tilde{f}_k\}_{k=1}^n$  tal que el punto terminal de  $\tilde{f}_k$  coincida con el punto inicial de  $\tilde{f}_{k+1}$  para  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . Definimos así el levantamiento  $\tilde{f}$  como sigue:

$$\tilde{f}(t) = \tilde{f}_k(t) \text{ si } t \in \left[ \frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right]$$

para algún  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  con  $t \in I$ . Se sigue entonces que

$$p \circ \tilde{f} = f$$

por los dos incisos anteriores se sigue la existencia de la función.

Pasemos a la unicidad. Sea  $g : I \rightarrow \tilde{X}$  tal que  $\tilde{x}_0$  es el punto inicial de  $g$  y,

$$p \circ g = f$$

entonces,

$$p \circ g = p \circ \tilde{f}$$

el conjunto

$$F = \{t \in I \mid g(t) = \tilde{f}(t)\}$$

es no vacío pues  $0 \in F$  (ya que  $g(0) = \tilde{x}_0 = \tilde{f}(0)$ ). Por el lema anterior se sigue que  $F = I$ , es decir que  $g = \tilde{f}$ . ■

**Definición 2.6.5**

En el contexto del lema anterior, diremos que  $\tilde{f}$  es un **levantamiento** del camino  $f$ .

**Lema 2.6.5**

Sea  $(\tilde{X}, p)$  un espacio recubridor de  $X$ , y sean  $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1 : I \rightarrow \tilde{X}$  caminos tales que tienen el mismo punto inicial. Si

$$f_0 = p \circ \tilde{f}_0 \sim p \circ \tilde{f}_1 = f_1$$

entonces  $\tilde{f}_0 \sim \tilde{f}_1$ . En particular,  $\tilde{f}_0$  y  $\tilde{f}_1$  tienen el mismo punto terminal.

**Demostración:**

Suponga que  $f_0 \sim f_1$ , entonces existe una función  $F : I \times I \rightarrow X$  tal que

$$\begin{cases} F(s, 0) = f_0(s) \\ F(s, 1) = f_1(s) \end{cases}, \quad \forall s \in I$$

y,

$$\begin{cases} F(0, t) = f_0(0) = f_1(0) = x_0 \\ F(1, t) = f_0(1) = f_1(1) = x_1 \end{cases}, \quad \forall t \in I$$

sea  $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$  tal que  $f_0(0) = f_1(0) = p(\tilde{x}_0)$ . Sea  $\{U_j\}_{j \in J}$  una cubierta abierta de  $X$  por vecindades fundamentales. Por el lema del número de Lebesgue existe pues  $\delta > 0$  tal que si  $A \subseteq I \times I$  es un subconjunto con  $D(A) < \delta$ , entonces  $A$  está contenido en algún elemento de la cubierta.

Podemos entonces encontrar números  $0 < s_0 < s_1 < \dots < s_m = 1$  y  $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , tal que cada rectángulo  $[s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$  es mapeado por  $F$  a una vecindad elemental en  $X$ .

Probaremos ahora la existencia de una única función  $G : I \times I \rightarrow \tilde{X}$  tal que

$$p \circ G = F$$

siendo ésta tal que  $G(0, 0) = \tilde{x}_0$ .

- *Existencia de  $G$* : Definimos primero  $G$  sobre el rectángulo  $[0, s_1] \times [0, t_1]$  de tal forma que  $G(0, 0) = \tilde{x}_0$ , y para cada  $t \in [0, t_1]$ , el mapeo

$$s \mapsto F(s, t) = f_t(s), \quad \forall s \in [0, s_1]$$

es un camino en  $X$  que empieza en  $x_0 = p(\tilde{x}_0)$ . Del lema anterior se tiene que existe un camino  $g_t : [0, s_1] \rightarrow \tilde{X}$  tal que

$$p \circ g_t = f_t$$

hacemos pues

$$G(s, t) = g_t(s), \quad \forall (s, t) \in [0, s_1] \times [0, t_1]$$

Se cumple así que

$$p \circ G = F$$

en  $[0, s_1] \times [0, t_1]$ . Repitiendo este proceso en todos los rectángulos  $[s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$  de tal forma que todos los caminos coincidan en la frontera (primero recorriendo todos los intervalos  $[s_{i-1}, s_i]$  hasta tener el  $I \times [0, t_1]$  y luego proceder para los de la forma  $I \times [t_{j-1}, t_j]$ , esto es posible de hacer por inducción y se incita a que el alumno lo escriba formalmente), obtenemos la función  $G : I \times I \rightarrow \tilde{X}$  deseada, para la que se cumple que

$$p \circ G = F$$

Esta función  $G$  es continua, pues  $p$  es continua y  $F$  lo es.

- *Unicidad de  $G$* , suponga que existe  $H : I \times I \rightarrow \tilde{X}$  tal que

$$p \circ H = F$$

entonces el conjunto en el que coinciden  $G$  y  $H$  es no vacío. Como  $I \times I$  es conexo y cumple todas las hipótesis de un lema anterior, así que  $G = H$ . Se tiene además que

$$p \circ G(s, 0) = F(s, 0) = f_0(s) = p \circ \tilde{f}_0(s), \quad \forall s \in I$$

por unicidad debe suceder que

$$G(s, 0) = \tilde{f}_0(s)$$

de forma análoga

$$G(s, 0) = \tilde{f}_1(s)$$

además se cumple que

$$p \circ G(0, t) = F(0, t) = x_0, \quad \forall t \in I$$

al ser  $G$  continua debe suceder que  $G(0, t) = \tilde{x}_0$ . De forma análoga

$$p \circ G(0, t) = F(1, t) = x_1, \quad \forall t \in I$$

por tanto,  $G(0, t) = \tilde{x}_1$  para algún  $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}$  tal que  $p(\tilde{x}_1) = x_1$ . Por tanto, hemos probado que  $G$  es una función continua para la cual se cumplen las condiciones necesarias para que

$$\tilde{f}_0 \sim \tilde{f}_1$$

así  $\tilde{f}_0 \sim \tilde{f}_1$ , en particular se cumple que  $\tilde{f}_0$  y  $\tilde{f}_1$  tienen el mismo punto final. ■

Con estos lemas probados estamos en condiciones de caracterizar el grupo fundamental del círculo.

## 2.7. El grupo fundamental del círculo

Lo hecho en la parte anterior sobre espacios recubridores será utilizado para caracterizar en su totalidad el grupo fundamental del círculo  $\mathbb{S}^1$ .

### Definición 2.7.1

Sea  $\omega : I \rightarrow \mathbb{S}^1$  el bucle con base  $(1, 0)$  que va alrededor del círculo exactamente una vez, es decir:

$$\omega(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s), \quad \forall s \in I$$

Para cada  $n \in \mathbb{Z}$  se define:

$$\omega_n(s) = (\cos 2\pi ns, \sin 2\pi ns), \quad \forall s \in I$$

es decir, este bucle da  $n$ -vueltas alrededor del círculo cuando  $t$  varía de 0 a 1.

### Ejercicio 2.7.1

Pruebe que:

$$[\omega]^n = [\omega_n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

donde  $[\omega]^n$  es el producto de la clase con representante  $\omega$   $n$ -veces.

### **Demostración:**

Ejercicio. ■

Para la demostración del teorema, lo que se hará es que dado un camino  $f : I \rightarrow \mathbb{S}^1$ , se comparará al mismo con los caminos que genera la función recubridora  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$

$$p(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s), \quad \forall s \in I$$

este mapeo puede ser visualizado como una helicoides en  $\mathbb{R}^3$ .

#### **Observación 2.7.1**

Veamos que

$$\omega_n = p \circ \tilde{\omega}_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

donde  $\tilde{\omega}_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  es la función tal que  $s \mapsto ns$ . Básicamente esta función controla el número de giros adicionales que va a dar la helicoides en un solo intervalo de longitud 1. El signo de  $n$  determina el sentido de giro de la helicoides.

Note que  $\tilde{\omega}_n$  es un levantamiento de  $\omega_n$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

Para determinar el grupo fundamental del círculo, se estudiará como es que los caminos en  $\mathbb{S}^1$  se levantan a  $\mathbb{R}$ .

---

#### **Teorema 2.7.1**

El grupo fundamental  $\pi(\mathbb{S}^1, (1, 0))$  es cíclico infinito generado por  $[\omega]$ .

---

### **Demostración:**

Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{S}^1$  un bucle con punto base  $x_0 = (1, 0)$ . Por el lema 2.6.4 existe un levantamiento  $\tilde{f}$  empezando en 0. Este camino termina en algún entero  $n \in \mathbb{Z}$  pues al ser levantamiento se cumple que

$$f = p \circ \tilde{f}$$

luego, para  $s = 1$ :

$$p(\tilde{f}(1)) = p \circ \tilde{f}(1) = f(1) = x_0$$

y,

$$p^{-1}(x_0) = \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$$

Por tanto, debe existir  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $\tilde{f}(1) = n$ . Así  $\tilde{f}$  es un camino que va de 0 a  $n$ . Otro camino que también hace lo mismo es  $\tilde{\omega}_n$ . Además

$$\tilde{f} \sim \tilde{\omega}_n$$

tomando la función continua  $\tilde{F} : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tilde{F}(t, s) = (1 - t)\tilde{f}(s) + t\tilde{\omega}_n(s)$ , para todo  $s, t \in I$ . Tomando  $F(s, t) = p \circ \tilde{F}(s, t)$  resulta en que  $f \sim \omega_n$  (si le quedan dudas, es fácil de verificar que se cumple lo anterior), luego  $[f] = [\omega_n] = [\omega]^n$ . Se sigue entonces que  $\pi(\mathbb{S}^1, (1, 0))$  es generado por  $[\omega]$ .

Para ver que es cíclico infinito, veamos que para el bucle anterior el entero  $n$  es único. Suponga que  $[f]$  está determinado por  $[\omega_n]$  y  $[\omega_m]$ , es decir que

$$f \sim \omega_n \quad \text{y} \quad f \sim \omega_m$$

con  $m \in \mathbb{Z}$ . Se sigue que  $\omega_n \sim \omega_m$ . Por el lema 2.6.5 se tiene que  $\tilde{\omega}_n \sim \tilde{\omega}_m$ . En particular, tienen el mismo punto terminal, por lo que

$$m = \tilde{\omega}_m(1) = \tilde{\omega}_n(1) = n$$

así,  $n = m$ . Se sigue entonces que el orden de  $[\omega]$  no puede ser finito ya que en caso contrario  $f$  tendría al menos dos representaciones con este mismo generador de  $\pi(\mathbb{S}^1, (1, 0))$ .

Por lo tanto  $\pi(\mathbb{S}^1, (1, 0))$  es un grupo cíclico infinito generado por  $[\omega]$ , luego es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ . Así:

$$\pi(\mathbb{S}^1, (1, 0)) \cong \mathbb{Z}$$

■

### Observación 2.7.2

Podemos ver el círculo como subconjunto de  $\mathbb{C}$  dado por:

$$\mathbb{S}^1 = \left\{ x + iy \in \mathbb{C} \mid x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

en particular,  $1 \in \mathbb{S}^1$  y el espacio  $\mathbb{S}^1$  es arco-conexo, por lo que la elección del punto para calcular el grupo fundamental es independiente del elemento de  $\mathbb{S}^1$ .

Como aplicación tenemos el siguiente teorema:

### Teorema 2.7.2 (Teorema fundamental del álgebra)

Todo polinomio no constante con coeficientes en  $\mathbb{C}$  tiene una raíz en  $\mathbb{C}$ .

### Demostración:

Sea  $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  un polinomio. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que

$$p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

donde  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ , con  $n \geq 0$ . Si  $n = 0$  entonces  $p(z) = 1, \forall z \in \mathbb{C}$ .

Supongamos que  $p$  no tiene raíces en  $\mathbb{C}$ . Para cada  $r \geq 0$  se define la función  $f_r : I \rightarrow \mathbb{C}$  por:

$$f_r(s) = \frac{p(re^{2\pi i s})/p(r)}{|p(re^{2\pi i s})/p(r)|}, \quad \forall s \in I$$

la cual es un bucle en el círculo unitario  $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$  con base en 1. Se tiene que  $f_0$  es el bucle constante con base en 1, por lo que  $[f_0]$  es la identidad de  $\pi(\mathbb{S}^1, 1)$ . Afirmamos que

$$f_r \sim f_0$$

para todo  $r > 0$ . En efecto, sea  $r > 0$  y  $F : I \times I \rightarrow \mathbb{S}^1$  dada por:

$$F(t, s) = f_{rt}(s), \quad \forall s, t \in I$$

Es claro de la definición de  $f_r$  que  $F(t, s)$  es continua. Veamos que:

$$F(0, s) = f_0(s) \quad \text{y} \quad F(1, s) = f_r(s), \quad \forall s \in I$$

Y además:

$$F(t, 0) = f_{rt}(0) = 1 \quad \text{y} \quad F(t, 1) = f_{rt}(1) = 1, \quad \forall t \in I$$

(pues todos los bucles tienen como punto base a 1). Por tanto,  $f_0 \sim f_r$  para todo  $r \geq 0$ . Se sigue pues que

$$[f_0] = [f_r], \quad \forall r \geq 0$$

es decir que  $[f_r]$  es la identidad de  $\pi(\mathbb{S}^1, 1)$  para todo  $r \geq 0$ .

Fijemos ahora  $r > 0$  tal que

$$r > \max \{|a_1| + \dots + |a_n|, 1\}$$

Entonces si  $z \in \mathbb{C}$  es tal que  $\|z\| = r$ , tenemos que

$$\begin{aligned} t |a_1 z^{n-1} + \dots + a_n| &\leq |a_1 z^{n-1} + \dots + a_n| \\ |a_1 z^{n-1} + \dots + a_n| &\leq |a_1 z^{n-1}| + \dots + |a_n| \\ &< (|a_1| + \dots + |a_n|) |z|^{n-1} \\ &< |z|^n \\ \Rightarrow |a_1 z^{n-1} + \dots + a_n| &< |z|^n \\ \Rightarrow 0 &< |z|^n - |a_1 z^{n-1} + \dots + a_n| \end{aligned}$$

para todo  $t \in I$ , lo cual implica que

$$t |a_1 z^{n-1} + \dots + a_n| < |z|^n, \quad \forall t \in I$$

Por tanto, el polinomio

$$p_t(z) = z^n + t(a_1 z^{n-1} + \dots + a_n), \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

no tiene raíces cuando  $\|z\| = r$  (círculo centrado en 0 de radio  $r$ ) y cuando  $t \in I$ , pues si  $z$  y  $t$  cumplen estas condiciones se sigue que:

$$\begin{aligned} |p_t(z)| &= |z^n + t(a_1 z^{n-1} + \dots + a_n)| \\ &\geq |z|^n - t |a_1 z^{n-1} + \dots + a_n| \\ &> 0 \end{aligned}$$

Definimos la función  $G : I \times I \rightarrow \mathbb{C}$  dada por:

$$G(t, s) = \frac{p_t(re^{2\pi is})/p_t(r)}{|p_t(re^{2\pi is})/p_t(r)|}, \quad \forall s, t \in I$$

Esta función es tal que  $f_r \sim \omega_n$ . En efecto, esta función es continua y cumple que:

$$\begin{aligned} F(0, s) &= \frac{p_0(re^{2\pi is})/p_0(r)}{|p_0(re^{2\pi is})/p_0(r)|} \\ &= \frac{r^n e^{2\pi ins} / r^n}{|r^n e^{2\pi ins} / r^n|} \\ &= e^{2\pi ins} \\ &= \cos(2\pi ns) + i \sin(2\pi ns) \\ &= \omega_n(s), \quad \forall s \in I \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned} F(1, s) &= \frac{p_1(re^{2\pi is})/p_1(r)}{|p_1(re^{2\pi is})/p_1(r)|} \\ &= \frac{p(re^{2\pi is})/p(r)}{|p(re^{2\pi is})/p(r)|} \\ &= f_r(s), \quad \forall s \in I \end{aligned}$$

(el hecho de que los extremos que se quedan fijos se verifica rápidamente). Anteriormente se probó que  $\omega_n$  es tal que

$$[\omega_n] = [\omega]^n$$

por ende,

$$[f_r] = [\omega]^n$$

pero  $[f_r] = [f_0]$  es la identidad del grupo, así que  $n = 0$ . Luego

$$p(z) = 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

esto es, el único polinomio que no tiene raíces en  $\mathbb{C}$  es el polinomio constante no cero. ■

Ahora un resultado familiar enunciado al inicio del taller:

---

**Teorema 2.7.3 (Teorema del punto fijo de Brower para dimensión 2)**

Toda función continua  $f : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$  tiene un punto fijo, es decir existe  $z \in \mathbb{D}^2$  tal que  $f(z) = z$ , donde:

$$\mathbb{D}^2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$


---

**Demostración:**

Suponga que para todo  $z \in \mathbb{D}^2$  se tiene que  $f(z) \neq z$ . Definimos la función  $r : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$  dada como sigue:

- Sea  $z = (x, y) \in \mathbb{D}^2$ . Considere la función  $l_z : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por:

$$l_z(t) = (1 - t)f(z) + tz = ((1 - t)f_1(x, y) + tx, (1 - t)f_2(x, y) + ty)$$

(es la recta que comienza en  $f(z)$  y va en dirección de  $z$ ) donde  $f(z) = (f_1(z), f_2(z))$ . Por el teorema del valor medio se tiene que existe un único  $t_x \in ]0, \infty[$  tal que

$$\|l_z(t_x)\| = 1$$

En efecto, como  $l_z\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{f(z) + z}{2}$ , este punto es tal que no puede tener norma igual a 1, ya que en caso contrario:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{f(z) + z}{2} \right\| = 1 &\Rightarrow \|f(z) + z\| = 2 \\ &\Rightarrow 2 \leq \|f(z)\| + \|z\| \leq 2 \\ &\Rightarrow \|f(z)\| = \|z\| = 1 \end{aligned}$$

por ende,  $\|f(z)\| + \|z\| = \|f(z) + z\|$  así que deben ser colineales. Como tienen la misma norma, entonces deben ser el mismo, lo cual no puede suceder ya que  $f(z) \neq z$ . Por tanto

$$l_z\left(\frac{1}{2}\right) < 1$$

y,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|l_z(t)\| = \infty$$

del teorema del valor medio se sigue la existencia de tal  $t_x \in ]0, \infty[$ . Este elemento está determinado por una de las raíces con  $t \in ]0, \infty[$  de la ecuación:

$$\begin{aligned} \|l_z(t)\| = 1 &\iff \|l_x(t)\|^2 = 1 \\ &\iff \|((1 - t)f_1(x, y) + tx, (1 - t)f_2(x, y) + ty)\|^2 = 1 \\ &\iff ((1 - t)f_1(x, y) + tx)^2 + ((1 - t)f_2(x, y) + ty)^2 = 1 \end{aligned}$$

el cual es un polinomio de grado 2. Por tanto, la aplicación  $z \mapsto t_z$  es una función continua. Así, la aplicación  $z \mapsto l_z(t_z)$  es una función continua (por ser composición de funciones continuas). Hacemos entonces  $r(z) = l_z(t_z)$  la cual es continua y es tal que  $t_z > 0$ .

- Si  $z \in \mathbb{D}^2$  es tal que  $\|z\| = 1$ , entonces  $r(z) = z$  (pues la función  $l_z$  solo pasa por un  $t \in ]0, \infty[$  tal que  $\|l_z(t)\| = 1$ , en particular debe pasar por  $z$ ).

Por los dos incisos anteriores,  $r : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$  es una función continua siendo  $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{D}^2$ . Se tiene que  $r$  es una retracción de  $\mathbb{D}^2$ . En particular, se sabe que la función

$$r_* : \pi(\mathbb{D}^2, (1, 0)) \rightarrow \pi(\mathbb{S}^1, (1, 0))$$

es un epimorfismo. Pero como  $\mathbb{D}^2$  tiene forma de estrella respecto a  $(0, 0)$  se tiene que  $\mathbb{D}^2$  es contraíble a un punto, luego es simplemente conexo. Así que

$$\pi(\mathbb{D}^2, (1, 0)) = \langle e \rangle$$

y,

$$\pi(\mathbb{S}^1, (1, 0)) \cong \mathbb{Z}$$

por ende,  $r_*$  no puede ser epimorfismo, lo cual es una contradicción. De esta forma se sigue que debe existir  $z \in \mathbb{D}^2$  tal que  $f(z) = z$ . ■

El hecho de que  $\pi(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$  puede ser usado para probar el siguiente resultado:

---

**Teorema 2.7.4 (Teorema de Borsuk-Ulam en dimensión 2)**

Para cada función continua  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  existen un par de puntos antipodales  $x, -x \in \mathbb{S}^2$  tales que

$$f(x) = f(-x)$$

donde

$$\mathbb{S}^2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$$


---

**Demostración:**

Sea  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una función continua tal que

$$f(x) \neq f(-x), \quad \forall x \in \mathbb{S}^2$$

Podemos definir entonces una función  $g : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$  tal que

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}, \quad \forall x \in \mathbb{S}^2$$

considerando a  $\mathbb{S}^1$  como subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  es decir:

$$\mathbb{S}^1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

Definimos ahora el bucle  $\eta : I \rightarrow \mathbb{S}^2$  como:

$$\eta(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, 0)$$

y hacemos

$$h = g \circ \eta$$

éste es un bucle en  $\mathbb{S}^1$ . Como  $-g(x) = g(-x)$  para todo  $x \in \mathbb{S}^2$ , se tiene que

$$\begin{aligned} h(s + 1/2) &= g \circ \eta(s + 1/2) \\ &= g(\cos(2\pi s + \pi), \sin(2\pi s + \pi), 0) \\ &= g(-\cos 2\pi s, -\sin 2\pi s, 0) \\ &= g(-(\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, 0)) \\ &= -g \circ \eta(s) \\ &= -h(s), \quad \forall s \in [0, 1/2] \end{aligned}$$



El camino  $h$  puede ser levantado a un camino  $\tilde{h} : I \rightarrow \mathbb{R}$  empezando en cero, para el que se cumple que:

$$p \circ \tilde{h} = h$$

siendo  $p$  la función tal que  $s \mapsto (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$ . En particular,

$$p(\tilde{h}(s + 1/2)) + p(\tilde{h}(s)) = h(s + 1/2) + h(s) = 0$$

para todo  $s \in [0, 1/2]$ . Esto es:

$$\begin{aligned} 0 &= (\cos 2\pi \tilde{h}(s + 1/2), \sin 2\pi \tilde{h}(s + 1/2)) + (\cos 2\pi \tilde{h}(s), \sin 2\pi \tilde{h}(s)) \\ &= (\cos 2\pi \tilde{h}(s + 1/2) + \cos 2\pi \tilde{h}(s), \sin 2\pi \tilde{h}(s + 1/2) + \sin 2\pi \tilde{h}(s)) \\ &= \left( 2 \cos \frac{2\pi(\tilde{h}(s + 1/2) + \tilde{h}(s))}{2} \cos \frac{2\pi(\tilde{h}(s + 1/2) - \tilde{h}(s))}{2} \right. \\ &\quad \left. , 2 \sin \frac{2\pi(\tilde{h}(s + 1/2) + \tilde{h}(s))}{2} \cos \frac{2\pi(\tilde{h}(s + 1/2) - \tilde{h}(s))}{2} \right) \\ &= \left( 2 \cos \pi(\tilde{h}(s + 1/2) + \tilde{h}(s)) \cos \pi(\tilde{h}(s + 1/2) - \tilde{h}(s)) \right. \\ &\quad \left. , 2 \sin \pi(\tilde{h}(s + 1/2) + \tilde{h}(s)) \cos \pi(\tilde{h}(s + 1/2) - \tilde{h}(s)) \right) \end{aligned}$$

la única forma de que esto sea cero, es que

$$\cos \pi(\tilde{h}(s + 1/2) - \tilde{h}(s)) = 0 \iff \tilde{h}(s + 1/2) - \tilde{h}(s) = \frac{q(s)}{2}$$

donde  $q(s) \in \mathbb{Z}$  es un impar, para todo  $s \in I$ . Pero la función  $q : [0, 1/2] \rightarrow \mathbb{Z}$  es continua, por lo que debe ser constante. Así que:

$$\tilde{h}(s + 1/2) - \tilde{h}(s) = \frac{q}{2}$$

para algún  $q \in \mathbb{Z}$ . En particular:

$$\begin{aligned} \tilde{h}(1) &= \tilde{h}(1/2) + \frac{q}{2} \\ &= \left( \tilde{h}(0) + \frac{q}{2} \right) + \frac{q}{2} \\ &= \tilde{h}(0) + q \\ &= q \end{aligned}$$

por ende,  $h \sim \omega_q$ . En particular esto implica que  $h$  no es homotópica a una función constante ya que  $q$  es impar (la única forma en que fuera homotópica a una función constante es si  $q = 0$ ).

Pero  $\eta$  es homotópica a la función  $g$ ,  $s \mapsto (0, 0, 1)$  que es constante. Para ello, tome la función  $F : I \times I \rightarrow \mathbb{S}^2$  dada por:

$$F(s, t) = \left( \cos 2\pi s \cos \frac{\pi t}{2}, \sin 2\pi s \cos \frac{\pi t}{2}, \sin \frac{\pi t}{2} \right)$$

(claramente esta función está bien definida y es continua), para la cual se cumple que:

$$\begin{aligned} F(s, 0) &= (\cos 2\pi s \cos 0, \sin 2\pi s \cos 0, 0) \\ &= (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, 0) \\ &= \eta(s), \quad \forall s \in I \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned} F(s, 1) &= \left( \cos 2\pi s \cos \frac{\pi}{2}, \sin 2\pi s \cos \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2} \right) \\ &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

con lo que se tiene la homotopía deseada. Así, también debe suceder que  $g \circ \eta$  sea homotópica a una función constante, es decir que  $h$  es homotópica a una función constante, lo cual contradice lo probado anteriormente.

Así que, existe  $x \in \mathbb{S}^2$  tal que

$$f(x) = f(-x)$$

■

---

**Corolario 2.7.1**

Si  $\mathbb{S}^2$  es escrito como la unión de dos conjuntos cerrados  $A_1, A_2, A_3 \subseteq \mathbb{R}^3$ , entonces uno de estos debe tener un par de puntos antipodales  $\{x, -x\}$ .

---

## 2.8. Ejercicios

### Ejercicio 2.8.1

Pruebe que un espacio conexo y localmente arco-conexo es arco conexo.

**Demostración:**

■

### Ejercicio 2.8.2

¿Bajo qué condiciones dos clases de caminos que unen a  $x$  y  $y$  se tendrá el mismo isomorfismo entre  $\pi(X, x)$  y  $\pi(X, y)$ ?

**Solución:**

□

### Ejercicio 2.8.3

Sea  $X$  un espacio arco conexo. ¿Bajo qué condiciones es la siguiente proposición válida? Para cualesquiera dos puntos  $x, y \in X$  todas las clases de caminos de  $x$  a  $y$  dan el mismo isomorfismo entre  $\pi(X, x)$  y  $\pi(X, y)$ .

**Solución:**

□

### Ejercicio 2.8.4

Sean  $f, g : I \rightarrow X$  dos caminos con punto inicial  $x_0$  y final  $x_1$ . Pruebe que  $f \sim g$  si y sólo si  $f \cdot \bar{g}$  es equivalente al camino constante en  $x_0$  (recordando que  $\bar{g}$  es el camino que invierte la forma de recorrer a  $g$ ).

**Demostración:**

■

### Ejercicio 2.8.5

Sean  $\varphi : X \rightarrow Y$  una función continua y  $[f]$  una clase de camino en  $X$  que va de  $x_0$  a  $x_1$ . Pruebe que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \pi(X, x_0) & \xrightarrow{\varphi_*} & \pi(Y, \varphi(x_0)) \\ u \downarrow & & \downarrow v \\ \pi(X, x_1) & \xrightarrow{\varphi_*} & \pi(Y, \varphi(x_1)) \end{array}$$

donde  $u$  es el homomorfismo definido como:  $u([g]) = [f]^{-1} \cdot [g] \cdot [f]$  y  $v$  se define de forma similar usando  $\varphi_*([f])$  en lugar de  $[f]$ . ¿Qué sucede si  $\varphi(x_0) = \varphi(x_1)$ ?

**Demostración:**

■

### Ejercicio 2.8.6

Construya una deformación de retracción de  $\mathbb{R}^n$  en  $S^{n-1}$ .

Solución:

□

**Ejercicio 2.8.7**

Pruebe que un repliegue de un espacio Hausdorff debe ser un conjunto cerrado.

Demostración:

■

**Ejercicio 2.8.8**

Pruebe que si  $A$  es un repliegue de  $X$  y  $r : X \rightarrow A$  es una retracción,  $i : A \rightarrow X$  es el mapeo inclusión,  $a \in A$  es arbitrario fijo y  $i_*(\pi(A, a))$  es un subgrupo normal de  $\pi(X, a)$ , entonces  $\pi(X, a)$  es el producto directo de los subgrupos

$$i_*(\pi(A, a)) \quad \text{y} \quad \ker(r_*)$$

Demostración:

■

**Ejercicio 2.8.9**

Sea  $A$  un subespacio de  $X$ , y sea  $Y$  un espacio topológico no vacío. Pruebe que  $A \times Y$  es un repliegue de  $X \times Y$  si y sólo si  $A$  es un repliegue de  $X$ .

Demostración:

■

**Ejercicio 2.8.10**

Pruebe que la relación **ser repliegue de** es transitiva, esto es, si  $A$  es un repliegue de  $B$  y  $B$  es un repliegue de  $C$ , entonces  $A$  es un repliegue de  $C$ .

Demostración:

■