

Lista 3 de Ejercicios Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

27 de mayo de 2024

Capítulo 3

Ejercicios

Ejercicio 3.1.1

Pruebe que, para todo $x \in]0, 2\pi[$,

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

Usando la identidad de Parseval, **demuestre** que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Demostración:

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}, \quad \forall x \in [0, 2\pi[$$

y extiéndase por periodicidad a todo \mathbb{R} . Es claro que $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{R})$, sea ahora $x \in]0, 2\pi[$. Por el teorema fundamental para la convergencia puntual de una serie de Fourier hay que encontrar un $0 < \delta < \pi$ tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) dt$$

tomemos $\delta = \min\{x, 2\pi - x\} > 0$. Se tienen dos casos:

1. $\delta = x$, entonces

$$\begin{aligned} & \int_0^{\delta} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) dt \\ &= \int_0^{\delta} \frac{1}{t} \left[\frac{\pi - x - t}{2} + \frac{\pi - x + t}{2} - \frac{2(\pi - x)}{2} \right] \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) dt \\ &= \int_0^{\delta} \frac{1}{t} [\pi - x - \pi + x] \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) dt \\ &= \int_0^{\delta} 0 dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

por tanto, el límite cuando $m \rightarrow \infty$ resulta que da cero.

2. $\delta = 2\pi - x$. El caso es análogo al anterior.

por ambos incisos se concluye que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^\delta \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) dt = 0$$

por tanto, la serie de Fourier de f converge a f puntualmente en x . Computemos ahora los coeficientes de la serie de Fourier de f . Si $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \cos nx dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos nx dx - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x \cos nx dx \text{ haciendo } u = nx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2n\pi} \cos u \frac{du}{n} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2n\pi} \frac{u}{n} \cos u \frac{du}{n} \\ &= \frac{1}{2n} \sin u \Big|_0^{2n\pi} - \frac{1}{2\pi n^2} \int_0^{2n\pi} u \cos u du \\ &= \frac{1}{2n} [\sin 2\pi n - \sin 0] - \frac{1}{2\pi n^2} \left(u \sin u \Big|_0^{2n\pi} + \int_0^{2n\pi} \sin u du \right) \\ &= -\frac{1}{2\pi n^2} \left(u \sin u \Big|_0^{2n\pi} + \int_0^{2n\pi} \sin u du \right) \\ &= -\frac{1}{2\pi n^2} \left([2n\pi \sin 2n\pi - 0] - \cos u \Big|_0^{2n\pi} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2\pi n^2} (0 - 0 - 1 + 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

para todo $n \geq 0$. Si $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin nx dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin nx dx - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x \sin nx dx \text{ haciendo } u = nx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2n\pi} \sin u \frac{du}{n} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2n\pi} \frac{u}{n} \sin u \frac{du}{n} \\
&= \frac{1}{2n} (-\cos u) \Big|_0^{2n\pi} - \frac{1}{2\pi n^2} \int_0^{2n\pi} u \sin u du \\
&= \frac{1}{2n} (-\cos 2n\pi + 1) - \frac{1}{2\pi n^2} \left(-u \cos u \Big|_0^{2n\pi} + \int_0^{2n\pi} \cos u du \right) \\
&= \frac{1}{2n} (-1 + 1) - \frac{1}{2\pi n^2} \left(-2n\pi \cos 2n\pi + 0 + \sin u \Big|_0^{2n\pi} \right) \\
&= -\frac{1}{2\pi n^2} (-2n\pi \cos 2n\pi + \sin 2n\pi - \sin 0) \\
&= -\frac{1}{2\pi n^2} (-2n\pi + \sin 2n\pi - \sin 0) \\
&= -\frac{1}{2\pi n^2} (-2n\pi) \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Por tanto, la serie de Fourier de f en $x \in]0, 2\pi[$ está dada por:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kx + b_k \sin kx] = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

Por el criterio de Dini se sigue que

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad \forall x \in]0, 2\pi[$$

Ahora, como $x \mapsto \frac{\pi-x}{2}$ es una función en $\mathcal{L}_2^{2\pi}$, por Parseval se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [|a_n|^2 + |b_n|^2] &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\pi-x}{2} \right|^2 dx \\
\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} |\pi-x|^2 dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} |\pi-x|^2 dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (\pi-x)^2 dx \text{ haciendo el cambio de variable } u = \pi-x \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^0 -u^2 du \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \left. \frac{-u^3}{3} \right|_{\pi}^0 \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[-\frac{0}{3} + \frac{\pi^3}{3} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi^3}{3} \\
&= \frac{\pi^2}{6} \\
\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}$$

Como se quería demostrar. ■

Ejercicio 3.1.2

Sea $f \in \mathcal{L}_2^{2\pi}(\mathbb{R})$ y sean a_n, b_n los coeficientes de Fourier de f . **Pruebe** que

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x f(x) dx = \pi a_0 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}.$$

Demostración:

Considere la función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$g(x) = x, \quad \forall x \in [0, 2\pi[$$

y extiéndase por periodicidad a todo \mathbb{R} . Es claro que $g \in \mathcal{L}_2^{2\pi}(\mathbb{R})$. Si $\{c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ y $\{d_k = \frac{\alpha_k - i\beta_k}{2}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ son los coeficientes de Fourier de f y g , respectivamente, al estar ambas funciones en $\mathcal{L}_2^{2\pi}(\mathbb{R})$ se tiene por las identidades de Parseval que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} = \frac{a_0 \overline{\alpha_0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \overline{\alpha_n} + b_n \overline{\beta_n}]$$

en particular,

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx &= \frac{a_0 \overline{\alpha_0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \overline{\alpha_n} + b_n \overline{\beta_n}] \\
\Rightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x f(x) dx &= \frac{a_0 \overline{\alpha_0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \overline{\alpha_n} + b_n \overline{\beta_n}]
\end{aligned}$$

Calculemos los coeficientes de Fourier de g . Veamos que

$$\begin{aligned}
 \alpha_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} x^2 \Big|_0^{2\pi} \\
 &= \frac{1}{2\pi} x^2 \Big|_0^{2\pi} \\
 &= 2\pi
 \end{aligned}$$

y, para $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
 \alpha_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos kx dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2k\pi} \frac{u}{k} \cos u \frac{du}{k} \\
 &= \frac{1}{k^2\pi} \int_0^{2k\pi} u \cos u du \\
 &= \frac{1}{k^2\pi} \left[u \sin u + \cos u \Big|_0^{2k\pi} \right] \\
 &= \frac{1}{k^2\pi} [2k\pi \sin 2k\pi + \cos 2k\pi - \cos 0] \\
 &= \frac{1}{k^2\pi} [2k\pi \sin 2k\pi + \cos 2k\pi - \cos 0] \\
 &= \frac{1}{k^2\pi} [0 + 1 - 1] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}
 \beta_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin kx dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2k\pi} \frac{u}{k} \sin kx \frac{du}{k} \\
 &= \frac{1}{k^2\pi} \int_0^{2k\pi} u \sin kx du \\
 &= \frac{1}{k^2\pi} \left[\sin u - u \cos u \Big|_0^{2k\pi} \right] \\
 &= \frac{1}{k^2\pi} [\sin 2k\pi - 2k\pi \cos 2k\pi - \sin 0 + 0 \cos 0] \\
 &= \frac{1}{k^2\pi} [0 - 2k\pi - 0 + 0] \\
 &= -\frac{2}{k}
 \end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $u = kx$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x f(x) dx &= \frac{a_0 \overline{\alpha_0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \overline{\alpha_n} + b_n \overline{\beta_n}] \\
 &= \frac{2\pi a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot 0 + b_n \cdot \left(\frac{-2}{n} \right) \right] \\
 &= \pi a_0 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \\
 \Rightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x f(x) dx &= \pi a_0 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}
 \end{aligned}$$

como se quería demostrar. ■

Ejercicio 3.1.3

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de periodo 2π definida como

$$f(x) = \begin{cases} \pi^2 & \text{si } -\pi \leq x < 0, \\ (x - \pi)^2 & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

calcule los coeficientes de Fourier a_n , con $n = 0, 1, 2, \dots$ de f y **pruebe** las fórmulas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Solución:

Primero determinemos los coeficientes de Fourier de f .

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 \pi^2 dx + \int_0^{\pi} (x - \pi)^2 dx \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\pi^3 + \int_{-\pi}^0 u^2 du \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\pi^3 + \int_{-\pi}^0 u^2 du \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\pi^3 + \frac{u^3}{3} \Big|_{-\pi}^0 \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\pi^3 + \frac{\pi^3}{3} \right] \\
 &= \frac{4\pi^2}{3}
 \end{aligned}$$

ahora, para $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \cos nx \, dx + \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 \pi^2 \cos nx \, dx + \int_0^{\pi} (x - \pi)^2 \cos nx \, dx \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 \pi^2 \cos nx \, dx + \int_0^{\pi} (x^2 - 2x\pi + \pi^2) \cos nx \, dx \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \pi^2 \cos nx \, dx + \int_0^{\pi} x^2 \cos nx \, dx - \int_0^{\pi} 2x\pi \cos nx \, dx \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \pi^2 \cos nx \, dx + \int_0^{\pi} x^2 \cos nx \, dx - \int_0^{\pi} 2x\pi \cos nx \, dx \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi^2}{n} \int_{-n\pi}^{n\pi} \cos u \, du + \frac{1}{n} \int_0^{n\pi} \left(\frac{u}{n}\right)^2 \cos u \, du - \frac{1}{n} \int_0^{n\pi} 2 \left(\frac{u}{n}\right) \pi \cos u \, du \right] \\
&= \frac{1}{n\pi} \left[\pi^2 \int_{-n\pi}^{n\pi} \cos u \, du + \frac{1}{n^2} \int_0^{n\pi} u^2 \cos u \, du - \frac{2\pi}{n} \int_0^{n\pi} u \cos u \, du \right]
\end{aligned}$$

donde

$$\pi^2 \int_{-n\pi}^{n\pi} \cos u \, du = 2 \sin(n\pi)$$

con

$$\int_0^{n\pi} u^2 \cos u \, du = (\pi^2 n^2 - 2) \sin(n\pi) + 2n\pi \cos(n\pi)$$

y

$$\int_0^{n\pi} u \cos u \, du = n\pi \sin(n\pi) + \cos(n\pi) - 1$$

por tanto,

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{n\pi} \left[\pi^2 \int_{-n\pi}^{n\pi} \cos u \, du + \frac{1}{n^2} \int_0^{n\pi} u^2 \cos u \, du - \frac{2\pi}{n} \int_0^{n\pi} u \cos u \, du \right] \\
&= \frac{1}{n\pi} \left[\pi^2 \cdot 2 \sin(n\pi) + \frac{1}{n^2} \cdot [(\pi^2 n^2 - 2) \sin(n\pi) + 2n\pi \cos(n\pi)] - \frac{2\pi}{n} \cdot [n\pi \sin(n\pi) + \cos(n\pi) - 1] \right] \\
&= \frac{1}{n\pi} \left[2\pi^2 \sin(n\pi) + \pi^2 \sin(n\pi) - \frac{2}{n^2} \sin(n\pi) + \frac{2\pi}{n} \cos(n\pi) - 2\pi^2 \sin(n\pi) - \frac{2\pi}{n} \cos(n\pi) + \frac{2\pi}{n} \right] \\
&= \frac{1}{n\pi} \left[\pi^2 \sin(n\pi) - \frac{2}{n^2} \sin(n\pi) + \frac{2\pi}{n} \right] \\
&= \frac{1}{n\pi} \left[\frac{n^3 \pi^2 \sin(n\pi) + 2n^2 \pi - 2n \sin(n\pi)}{n^3} \right] \\
&= \frac{1}{n\pi} \left[\frac{0 + 2n^2 \pi - 0}{n^3} \right] \\
&= \frac{1}{n\pi} \left[\frac{2n^2 \pi}{n^3} \right] \\
&= \frac{2}{n^2}
\end{aligned}$$

pues, $\sin(n\pi) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Notemos que la función f es monotóna decreciente, en particular es de variación acotada. Luego, por el teorema de Jordan al ser f continua en $] - \pi, \pi]$ se sigue que

la serie de Fourier de f en x converge a $f(x)$ para todo $x \in]-\pi, \pi]$. Esto es:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kx + b_k \sin kx]$$

en particular, en $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \\ &= \frac{2\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{1}{2} \left[\pi^2 - \frac{2\pi^2}{3} \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{3} \\ &= \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

Para la segunda parte, notemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n)^2} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} &= \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} \\ &= \frac{\pi^2}{8} \end{aligned}$$

Por ende,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1-1}}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{(2n)^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-2}}{(2n-1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} \\ &= \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} \\ &= \frac{\pi^2 [3-1]}{24} \\ &= \frac{\pi^2}{12} \end{aligned}$$

□

Ejercicio 3.1.4**Pruebe que**

$$\frac{1}{3}x(\pi - x)(\pi - 2x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{n^3}, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Deduzca el valor de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}.$$

Demostración:

Considere la función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$g(x) = \frac{1}{3}x(\pi - x)(\pi - 2x), \quad \forall x \in [0, \pi[$$

y extiéndase por periodicidad a todo \mathbb{R}^+ y hágase

$$g(x) = -g(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^-$$

. Afirmamos que g es continua en \mathbb{R} . En efecto, ya se tiene que g es continua en $]0, \pi[$, por lo cual para ver que es continua en \mathbb{R} basta con ver que $g(0) = g(\pi)$ (en particular se tiene que g es π -periódica, luego también es 2π -periódica). Veamos que

$$g(0) = 0 = g(\pi)$$

luego, g es continua en \mathbb{R} . Además, g es C^1 (e casi todo \mathbb{R}), luego de variación acotada en $[-\pi, \pi]$. Por el Teorema de Jordan, la serie de Fourier de g converge a g uniformemente en \mathbb{R} , en particular lo hace puntualmente en el intervalo $[0, \pi]$. Calculemos los coeficientes de Fourier de g .

Como g se definió de tal forma que fuese impar, se sigue que

$$a_k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

y, para $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(x) \sin kx \, dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{3} x(\pi - x)(\pi - 2x) \sin kx \, dx \\
&= \frac{2}{3\pi} \int_0^\pi (\pi^2 x - 3\pi x^2 + 2x^3) \sin kx \, dx \\
&= \frac{2}{3\pi} \left[\pi^2 \int_0^\pi x \sin kx \, dx - 3\pi \int_0^\pi x^2 \sin kx \, dx + 2 \int_0^\pi x^3 \sin kx \, dx \right] \\
&= \frac{2}{3\pi} \left[\pi^2 \left[\frac{\sin k\pi - k\pi \cos k\pi}{k^2} \right] - 3\pi \left[\frac{(2 - k^2\pi^2) \cos k\pi + 2k\pi \sin k\pi - 2}{k^3} \right] \right. \\
&\quad \left. + 2 \left[\frac{3(k^2\pi^2 - 2) \sin k\pi + k\pi(6 - k^2\pi^2) \cos k\pi}{k^4} \right] \right] \\
&= \frac{2}{3\pi} \left[\pi^2 \left[\frac{-k\pi(-1)^k}{k^2} \right] - 3\pi \left[\frac{(2 - k^2\pi^2)(-1)^k - 2}{k^3} \right] + 2 \left[\frac{k\pi(6 - k^2\pi^2)(-1)^k}{k^4} \right] \right] \\
&= \frac{2}{3\pi} \left[\frac{\pi^3(-1)^{k+1}}{k} + \frac{3\pi(2 - k^2\pi^2)(-1)^{k+1} + 6\pi}{k^3} + \frac{2k\pi(6 - k^2\pi^2)(-1)^k}{k^4} \right] \\
&= \frac{2}{3\pi} \left[\frac{\pi^3 k^3(-1)^{k+1}}{k^4} + \frac{3k\pi(2 - k^2\pi^2)(-1)^{k+1} + 6k\pi}{k^4} + \frac{2k\pi(6 - k^2\pi^2)(-1)^k}{k^4} \right] \\
&= \frac{2}{3k^4\pi} [\pi^3 k^3(-1)^{k+1} + 3k\pi(2 - k^2\pi^2)(-1)^{k+1} + 6k\pi + 2k\pi(6 - k^2\pi^2)(-1)^k] \\
&= \frac{2}{3k^4\pi} [\pi^3 k^3(-1)^{k+1} + 6k\pi(-1)^{k+1} + 3k^3\pi^3(-1)^k + 6k\pi + 12k\pi(-1)^k + 2k^3\pi^3(-1)^{k+1}] \\
&= \frac{2}{3k^4\pi} [3k^3\pi^3(-1)^{k+1} + 3k^3\pi^3(-1)^k + 6k\pi + 6k\pi(-1)^k] \\
&= \frac{2}{3k^4\pi} [6k\pi + 6k\pi(-1)^k] \\
&= \frac{4}{k^3} [1 + (-1)^k]
\end{aligned}$$

si $k = 2m - 1$ con $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
b_{2m-1} &= \frac{4}{(2m-1)^3} [1 + (-1)^{2m-1}] \\
&= \frac{4}{(2m-1)^3} [1 - 1] \\
&= 0
\end{aligned}$$

y, si $k = 2m$ con $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
b_{2m} &= \frac{4}{(2m)^3} [1 + (-1)^{2m}] \\
&= \frac{8}{8m^3} \\
&= \frac{1}{m^3}
\end{aligned}$$

Por ende, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} x(\pi - x)(\pi - 2x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \sin 2nx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{n^3}, \quad \forall 0 \leq x \leq \pi
\end{aligned}$$

Para la otra parte, recuerde que

$$\sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2m \text{ para algún } m \in \mathbb{N} \\ (-1)^{m-1} & \text{si } n = 2m - 1 \text{ para algún } m \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Tomemos $x = \frac{\pi}{4}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^3} \\ \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} &= \frac{\pi^3}{32} \end{aligned}$$

■

Ejercicio 3.1.5

Haga lo siguiente:

i. **Pruebe** que

$$\int_0^{\pi} \log \sin \frac{x}{2} dx = -\pi \log 2.$$

Sugerencia. Haga el cambio de variables $x = 2t$ y escriba $\sin t = 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}$.

ii. **Muestre** que

$$-\log \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}, \quad \text{si } x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Sugerencia. Use el inciso (i) para probar que $a_0 = 0$. A fin de calcular a_n para $n \in \mathbb{N}$, escriba $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \log \cos \frac{x}{2} dx$, efectúe una integración por partes y transforme el nuevo integrando de suerte que aparezca el núcleo de Dirichlet.

iii. **Deduzca** de (ii) la fórmula

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

iv. **Desarrolle** en serie de Fourier la función

$$x \mapsto \log \left| 2 \cos \frac{x}{2} \right|$$

Solución:

De (i): (justificar porqué esa función es integrable). Veamos que

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi \log \sin \frac{x}{2} dx &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin t dt \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \left(2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} \right) dt \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\log 2 + \log \sin \frac{t}{2} + \log \cos \frac{t}{2} \right] dt \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\log 2 + \log \sin \frac{t}{2} + \log \cos \frac{t}{2} \right] dt \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log 2 dt + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin \frac{t}{2} dt + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos \frac{t}{2} dt \\
 &= \pi \log 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin \frac{t}{2} dt + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos \frac{t}{2} dt
 \end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos \frac{t}{2} dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} \right) dt \\
 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\log \sin \left(\frac{u}{2} \right) dt \\
 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log \sin \left(\frac{u}{2} \right) dt
 \end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $u = \pi - t$. Por ende,

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi \log \sin \frac{x}{2} dx &= \pi \log 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin \frac{t}{2} dt + 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \log \sin \frac{u}{2} du \\
 &= \pi \log 2 + 2 \int_0^\pi \log \sin \frac{x}{2} dx \\
 \Rightarrow \int_0^\pi \log \sin \frac{x}{2} dx &= -\pi \log 2
 \end{aligned}$$

De (ii): Por lo anterior, $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}$ donde $f(x) = -\log |2 \sin \frac{x}{2}|$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Ahora, como f es par, se tiene que

$$b_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ahora, veamos que

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx \\
 &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi -\log \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right| dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left[\log 2 + \log \sin \frac{x}{2} \right] dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^\pi \log 2 + \int_0^\pi \log \sin \frac{x}{2} \right] dx \\
 &= \frac{2}{\pi} [\pi \log 2 - \pi \log 2] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Ahora, si $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
 a_n &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \log \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right| \cos nx \, dx \\
 &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \log \left(2 \sin \frac{x}{2} \right) \cos nx \, dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[-\log \left(2 \sin \frac{x}{2} \right) \frac{1}{n} \sin nx \Big|_0^\pi + \frac{1}{2n} \int_0^\pi \frac{\cos \frac{x}{2} \sin nx}{\sin \frac{x}{2}} \, dx \right] \\
 &= \frac{1}{\pi n} \int_0^\pi \frac{\cos \frac{x}{2} \sin nx}{\sin \frac{x}{2}} \, dx
 \end{aligned}$$

pero,

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A+B) + \sin(A-B)]$$

Por ende,

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{2\pi n} \int_0^\pi \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x + \sin \left(n - \frac{1}{2} \right) x}{\sin \frac{x}{2}} \, dx \\
 &= \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [D_n(x) + D_{n-1}(x)] \, dx \\
 &= \frac{1}{n}
 \end{aligned}$$

De (iii): Veamos la convergencia (usar el teorema de Carleson y más cosas), de donde se deduce el hecho sorprendente que

$$\int_0^\pi \left(\log \left| 2 \cos \frac{x}{2} \right| \right)^2 \, dx = \frac{\pi^2}{6}$$

□

Ejercicio 3.1.6

Sea $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{R})$ y sea $x \in \mathbb{R}$. Se supone que para algún $\alpha > 0$ se cumple

$$f(x+t) - f(x) = O(|t|^\alpha), \quad \text{cuando } t \rightarrow 0$$

Demuestre que la serie de Fourier de f en x converge a $f(x)$.

Demostración:

Como

$$f(x+t) - f(x) = O(|t|^\alpha), \quad \text{cuando } t \rightarrow 0$$

entonces existe $A > 0$ y $\delta > 0$ tales que

$$\begin{aligned}
 |t| < \delta &\Rightarrow |f(x+t) - f(x)| \leq A |t|^\alpha \\
 &\Rightarrow -A |t|^\alpha \leq f(x+t) - f(x) \leq A |t|^\alpha
 \end{aligned}$$

Para ver que la serie de Fourier de f en x converge a $f(x)$, usaremos el Teorema Fundamental para la convergencia puntual de una serie de Fourier. Ahora, si $m \in \mathbb{N}$

$$-A \frac{|t|^\alpha}{t} \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) t \, dt \leq \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) t \, dt \leq A \frac{|t|^\alpha}{t} \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) t \, dt$$

Para todo $0 < |t| < \min\{\delta, \pi\}$. Considere ahora la función $t \mapsto \frac{|t|^\alpha}{t}$ (llamémosla g) definida c.t.p. en \mathbb{R} . Esta función es la diferencia de dos funciones monótonas en $[-\pi, \pi]$, luego de variación acotada. Además es integrable. En efecto,

$$|g(t)| = |t|^{\alpha-1}$$

donde $t \mapsto |t|^{\alpha-1}$ es integrable en $[-\pi, \pi]$ pues $\alpha - 1 > -1$. Luego, por el Teorema de Jordan la serie de Fourier de g en x converge a $g(x)$. Así, por el Teorema Fundamental para la convergencia puntual de una serie de Fourier, se tiene que existe $0 < \gamma < \pi$ tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\gamma'}^{\gamma'} \frac{|t|^\alpha}{t} \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) t \, dt = 0$$

Afirmamos que si $0 < \zeta \leq \gamma'$, entonces

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\zeta}^{\zeta} \frac{|t|^\alpha}{t} \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) t \, dt = 0$$

En efecto, sea $0 < \zeta \leq \gamma'$, se tiene para $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \int_{-\zeta}^{\zeta} \frac{|t|^\alpha}{t} \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) t \, dt &= \int_{-\zeta}^0 \frac{|t|^\alpha}{t} \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) t \, dt + \int_0^{\zeta} \frac{|t|^\alpha}{t} \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) t \, dt \\ &= - \int_{\zeta}^0 \frac{|-t|^\alpha}{-t} \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) (-t) \, dt + \int_0^{\zeta} \frac{|t|^\alpha}{t} \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) t \, dt \\ &= \int_0^{\zeta} \frac{|t|^\alpha}{t} \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) t \, dt + \int_0^{\zeta} \frac{|t|^\alpha}{t} \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) t \, dt \\ &= 2 \int_0^{\zeta} \frac{|t|^\alpha}{t} \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) t \, dt \end{aligned}$$

Tomemos $\delta' = \min \{\delta, \gamma\}$. Se tiene que

$$-A \frac{|t|^\alpha}{t} \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) t \, dt \leq \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) t \, dt \leq A \frac{|t|^\alpha}{t} \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) t \, dt$$

para todo $|t| < \delta'$ ■

Ejercicio 3.1.7

Por el problema 3.1.1 se sabe que

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad \forall x \in]0, 2\pi[$$

i. Póngase

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k}.$$

Muestre que

$$\frac{x}{2} + s_n(x) = \pi \int_0^x D_n(t) dt,$$

donde D_n es el núcleo de Dirichlet.

ii. Si $x \in]0, 2\pi[$, **pruebe** que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\pi \int_0^x D_n(t) dt - \int_0^x \frac{\sin nt}{t} dt \right] = 0.$$

iii. **Deduzca** una nueva demostración de la fórmula

$$\int_0^{\rightarrow \infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Demostración:

De (i): Recordemos que el núcleo de Dirichlet está dado por:

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-m}^m e^{ikx}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por ende,

$$\begin{aligned} \int_0^x D_n(t) dt &= \int_0^x \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-m}^m e^{ikt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^x \left[1 + \sum_{k=-m, k \neq 0}^m e^{ikt} \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[t \Big|_0^x + \sum_{k=-m, k \neq 0}^m \frac{e^{ikt}}{ik} \Big|_0^x \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[x + \sum_{k=-m, k \neq 0}^m \frac{e^{ikx} - 1}{ik} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[x + \sum_{k=-m, k \neq 0}^m \frac{e^{ikx}}{ik} - \underbrace{\sum_{k=-m, k \neq 0}^m \frac{1}{ik}}_{=0} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[x + \sum_{k=-m, k \neq 0}^m \frac{\cos ikx + \sin ikx}{ik} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[x + \sum_{k=-m}^{-1} \frac{\cos ikx + \sin ikx}{ik} + \sum_{k=1}^m \frac{\cos ikx + i \sin ikx}{ik} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[x + \sum_{k=1}^m \frac{\cos(-ikx) + i \sin(-ikx)}{-ik} + \sum_{k=1}^m \frac{\cos ikx + i \sin ikx}{ik} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[x + \sum_{k=1}^m \frac{-\cos ikx + i \sin ikx}{ik} + \sum_{k=1}^m \frac{\cos ikx + i \sin ikx}{ik} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[x + 2 \sum_{k=1}^m \frac{\sin ikx}{k} \right] \\ &= \frac{x}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^m \frac{\sin ikx}{k} \end{aligned}$$

luego,

$$\pi \int_0^x D(t) dt = \frac{x}{2} + s_n(x)$$

De (ii): Recordemos que podemos escribir al Núcleo de Dirichlet como:

$$D_m(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{t}{2}}, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Por tanto, si $m \in \mathbb{N}$ y $x \in]0, 2\pi[$:

$$\begin{aligned}
\left| \pi \int_0^x D_m(t) dt - \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt \right| &= \left| \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\sin \left(m + \frac{1}{2}\right) t}{\sin \frac{t}{2}} dt - \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt \right| \\
&= \left| \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\sin mt \cos \frac{t}{2} + \sin \frac{t}{2} \cos mt}{\sin \frac{t}{2}} dt - \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt \right| \\
&= \left| \int_0^x \left[\frac{\sin mt}{2 \tan \frac{t}{2}} + \frac{1}{2} \cos mt \right] dt - \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt \right| \\
&= \left| \frac{1}{2} \int_0^x \cos mt dt + \int_0^x \left[\frac{\sin mt}{2 \tan \frac{t}{2}} - \frac{\sin mt}{t} \right] dt \right| \\
&= \left| \frac{1}{2m} \int_0^{mx} \cos u du + \int_0^x \left[\frac{1}{2 \tan \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right] \sin mt dt \right| \\
&\leq \frac{1}{2m} |\sin u|_0^{mx} + \left| \int_0^x \left[\frac{1}{2 \tan \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right] \sin mt dt \right| \\
&\leq \frac{1}{2m} |\sin mx| + \left| \int_0^x \left[\frac{1}{2 \tan \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right] \sin mt dt \right| \\
&\leq \frac{1}{2m} + \left| \int_0^x \left[\frac{1}{2 \tan \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right] \sin mt dt \right|
\end{aligned}$$

Pero, la función

$$t \mapsto \frac{1}{2 \tan \frac{t}{2}} - \frac{1}{t}$$

es integrable en $]0, x[$. En efecto, como es continua en $[0, x]$ haciendo que valga 0 en $t = 0$, ya que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2 \tan \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right] = 0$$

hace que la función sea continua, luego al ser continua en un compacto es integrable. Así, por el teorema de Riemman-Lebesgue se sigue que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^x \left[\frac{1}{2 \tan \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right] \sin mt dt = 0$$

Por tanto, para $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq N$:

$$\frac{1}{2m} \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \left| \int_0^x \left[\frac{1}{2 \tan \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right] \sin mt dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

luego,

$$\begin{aligned}
m \geq N \Rightarrow \left| \pi \int_0^x D_m(t) dt - \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt \right| &\leq \frac{1}{2m} + \left| \int_0^x \left[\frac{1}{2 \tan \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right] \sin mt dt \right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

así,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \pi \int_0^x D_m(t) dt - \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt \right| = 0$$

De (iii): Como dado $x \in]0, 2\pi[$ se tiene que

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

y,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \pi \int_0^x D_m(t) dt - \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt \right| = 0$$

entonces para $x \in]0, 2\pi[$ y $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq N$ implica que

$$\left| \frac{\pi - x}{2} - \sum_{n=1}^m \frac{\sin nx}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \left| \pi \int_0^x D_m(t) dt - \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

luego, si $m \geq N$ se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \pi \int_0^x D_m(t) dt - \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt \right| &= \left| \frac{x}{2} + s_n(x) - \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt \right| \\ &= \left| \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^m \frac{\sin kx}{k} - \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt \right| \\ &= \left| \frac{-\pi}{2} + \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^m \frac{\sin kx}{k} + \frac{\pi}{2} - \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt \right| \\ &= \left| -\left(\frac{\pi - x}{2} - \sum_{k=1}^m \frac{\sin kx}{k} \right) + \left(\frac{\pi}{2} - \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt \right) \right| \\ &\geq \left| \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt - \frac{\pi}{2} \right| - \left| \frac{\pi - x}{2} - \sum_{k=1}^m \frac{\sin kx}{k} \right| \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt - \frac{\pi}{2} \right| &\leq \left| \pi \int_0^x D_m(t) dt - \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt \right| + \left| \frac{\pi - x}{2} - \sum_{k=1}^m \frac{\sin kx}{k} \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

por ende,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

Pero, por el T.C.V. se tiene que para todo $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt &\stackrel{u=mt}{=} \int_0^{mx} \frac{\sin u}{\frac{u}{m}} \frac{du}{m} \\ &\Rightarrow \int_0^x \frac{\sin mt}{t} dt \stackrel{u=mt}{=} \int_0^{mx} \frac{\sin u}{u} du \end{aligned}$$

por ende,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{mx} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}$$

Para todo $x \in]0, 2\pi[$. Veamos ahora que

$$\int_0^{\rightarrow \infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

Ya se sabe que la integral impropia converge, por tanto, considerando la sucesión $\left\{ \frac{\pi m}{2} \right\}_{m=1}^{\infty}$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_0^{\rightarrow \infty} \frac{\sin t}{t} dt &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi m}{2}} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

■

Ejercicio 3.1.8

Sea $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ y sean $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ los coeficientes de Fourier de f . **Demuestre** que

$$\int_0^x f = c + c_0 x + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{c_k e^{ikx}}{ik}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

donde c es una constante, la convergencia siendo uniforme en \mathbb{R} .

Sugerencia. Considere la función $F(x) = \int_0^x (f - c_0)$.

Deduzca que los coeficientes de Fourier b_n de cualquier función $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ satisfacen la condición de que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$$

es convergente. **Concluya** que la aplicación $f \mapsto \{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ no es una aplicación suprayectiva de $\mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ en $c_0(\mathbb{Z})$.

Demostración:

Como $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}$, entonces la función

$$F(x) = \int_0^x (f(t) - c_0) dt$$

es una función absolutamente continua y de periodicidad 2π , pues

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - c_0) dt = 0$$

En efecto, veamos que

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - c_0) dt &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + 2\pi c_0 \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

En particular, es de variación acotada y continua (por ser absolutamente continua), luego por el Teorema de Jordan la serie de Fourier de F en x converge puntualmente a F en x para todo $x \in \mathbb{R}$, esto es

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c'_k e^{ikx}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \int_0^x (f(t) - c_0) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c'_k e^{ikx}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \int_0^x f(t) dt &= c_0 x + \sum_{k \in \mathbb{Z}} c'_k e^{ikx}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

siendo $\{c'_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ los coeficientes de Fourier de F . Calculemos estos coeficientes, para ello, calculemos los de $f - c_0$ y recordemos que la aplicación que a cada función en $L_1^{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ envía a sus coeficientes de Fourier es una aplicación lineal inyectiva, en particular por ser lineal basta con calcular los coeficientes de f y c_0 por separado y, los coeficientes de $f - c_0$ serán la diferencia de cada uno de estos coeficientes.

Sean entonces $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ y $\{d_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ los coeficientes de Fourier de f y c_0 respectivamente, se tiene entonces que

$$c'_k = \frac{c_k - d_k}{ik}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

tomando $c_0 = c' \in \mathbb{C}$ una constante. Siendo:

$$\begin{aligned} d_k &= \int_{-\pi}^{\pi} c_0 e^{-ikx} dx \\ &= c_0 \cdot \left. \frac{e^{-ikx}}{-ik} \right|_{-\pi}^{\pi} \\ &= c_0 \cdot \frac{e^{-ik\pi} - e^{ik\pi}}{-ik} \\ &= c_0 \cdot \frac{\cos(-k\pi) + i \sin(-k\pi) - \cos(k\pi) - i \sin(k\pi)}{-ik} \\ &= c_0 \cdot \frac{\cos(k\pi) - i \sin(k\pi) - \cos(k\pi) - i \sin(k\pi)}{-ik} \\ &= c_0 \cdot \frac{2i \sin(k\pi)}{ik} \\ &= 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$c'_k = \frac{c_k}{ik}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

De esta forma, tenemos que:

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c'_k e^{ikx} \\ &= c + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} c'_k e^{ikx} \\ &= c + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{c_k e^{ikx}}{ik}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \int_0^x (f(t) - c_0) dt &= c + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{c_k e^{ikx}}{ik}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \int_0^x f(t) dt &= c + c_0 x + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{c_k e^{ikx}}{ik}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

En particular para $x = 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= c + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{c_k}{ik} \\ \Rightarrow -c &= \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{c_k}{ik} \\ &= \sum_{k \in 1}^{\infty} \frac{c_k}{ik} + \sum_{k \in 1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{-ik} \\ &= \sum_{k \in 1}^{\infty} \frac{c_k}{ik} + \sum_{k \in 1}^{\infty} \frac{-c_{-k}}{ik} \\ &= \frac{1}{i} \cdot \sum_{k \in 1}^{\infty} \frac{c_k - c_{-k}}{k} \\ &= \frac{1}{i} \cdot \sum_{k \in 1}^{\infty} \frac{b_k}{k} \end{aligned}$$

pues, la serie $\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{c_k}{ik}$ es convergente. Por tanto, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$$

es convergente y converge a $-ic$.

Para la última parte, considere la sucesión $\{c_k\}_k \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

tomando

$$a_k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

y,

$$b_k = \frac{1}{\ln k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2$$

y haciendo:

$$b_{-k} = -b_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2$$

Afirmamos que no puede existir ninguna función $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ tal que tenga como coeficientes de Fourier los escritos anteriormente, ya que en tal caso, se tendría que la serie:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$$

sería convergente. Pero, como la integral (haciendo $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$):

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} &= \int_0^{\infty} \frac{du}{u} \\ &= \infty \end{aligned}$$

tal serie no puede converger, luego estos coeficientes de Fourier no pueden pertenecer a ninguna función en $\mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$. ■

Ejercicio 3.1.9

Haga lo siguiente:

- i. Sea α un número real no entero. **Pruebe** que

$$\pi \cos \alpha x = 2\alpha \sin \pi \alpha \left(\frac{1}{2\alpha^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{\alpha^2 - n^2} \right), \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

De ahí obtenga las fórmulas clásicas

$$\frac{\pi \alpha}{\sin \pi \alpha} = 1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} \quad \text{y} \quad \pi \alpha \cot \pi \alpha = 1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}.$$

- ii. Sea $x \in]0, 1[$. **Pruebe** que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{n^2 - \alpha^2}$$

se puede integrar término por término en el intervalo $[0, x]$. De la última fórmula del inciso (i) **deduzca** la fórmula

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right), \quad \forall x \in]-1, 1[.$$

Demostración:

De (i): Considere la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada como sigue:

$$x \mapsto \cos \alpha x, \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$$

y extiéndase por periodicidad a todo \mathbb{R} . Es claro que esta función es continua, pues

$$f(-\pi) = \cos(-\alpha\pi) = \cos \alpha\pi = f(\pi)$$

(al hacerse la extensión se tiene que es continua en π , como es continua en $] - \pi, \pi[$, se sigue que lo es en todo \mathbb{R}). Esta función es clase C^1 en $] - \pi, \pi[$, luego es de variación acotada en $[-\pi, \pi]$. Por el Teorema de Jordan la serie de Fourier de f en x converge puntualmente a $f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (en particular, en $[-\pi, \pi]$). Notemos que f es par, por lo cual se tiene que

$$b_k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Y,

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad \forall k \in \mathbb{N}^+$$

calculemos estos coeficientes.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \alpha x \, dx, \text{ sea } u = \alpha x \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha\pi} \cos u \frac{du}{\alpha} \\ &= \frac{2}{\pi\alpha} \int_0^{\pi\alpha} \cos u \, du \\ &= \frac{2}{\pi\alpha} \sin u \Big|_0^{\alpha\pi} \\ &= \frac{2}{\pi\alpha} \sin u \Big|_0^{\pi\alpha} \\ &= \frac{2}{\pi\alpha} \sin \pi\alpha \end{aligned}$$

Recordemos antes que

$$\cos A \cos B = \frac{\cos(A - B) + \cos(A + B)}{2}$$

y,

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \left(\frac{A + B}{2} \right) \cos \left(\frac{A - B}{2} \right)$$

Ahora, para $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos kx \, dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos \alpha x \cos kx \, dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(\alpha - k)x + \cos(\alpha + k)x}{2} \, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^\pi \cos(\alpha - k)x \, dx + \int_0^\pi \cos(\alpha + k)x \, dx \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{\alpha - k} \int_0^{(\alpha - k)\pi} \cos u \, du + \frac{1}{\alpha + k} \int_0^{(\alpha + k)\pi} \cos v \, dv \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{\alpha - k} \sin u \Big|_0^{(\alpha - k)\pi} + \frac{1}{\alpha + k} \sin v \Big|_0^{(\alpha + k)\pi} \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{\alpha - k} \sin u(\alpha - k)\pi + \frac{1}{\alpha + k} \sin(\alpha + k)\pi \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\alpha \sin(\alpha - k)\pi + k \sin(\alpha - k)\pi}{\alpha^2 - k^2} + \frac{\alpha \sin(\alpha + k)\pi - k \sin(\alpha + k)\pi}{\alpha^2 - k^2} \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\alpha \sin(\alpha - k)\pi + \alpha \sin(\alpha + k)\pi + k \sin(\alpha - k)\pi + k \sin(-\alpha - k)\pi}{\alpha^2 - k^2} \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{2\alpha \sin\left(\frac{\alpha - k + \alpha + k}{2}\right)\pi \cos\left(\frac{\alpha - k - \alpha - k}{2}\right)\pi + 2k \sin\left(\frac{\alpha - k - \alpha - k}{2}\right)\pi \cos\left(\frac{\alpha - k + \alpha + k}{2}\right)\pi}{\alpha^2 - k^2} \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{2\alpha \sin \alpha\pi \cos(-k\pi) + 2k \sin(-k\pi) \cos \alpha\pi}{\alpha^2 - k^2} \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{2\alpha \sin \alpha\pi \cos k\pi - 2k \sin k\pi \cos \alpha\pi}{\alpha^2 - k^2} \right], \text{ pero } \sin k\pi = 0 \text{ y } \cos k\pi = (-1)^k \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{2(-1)^k \alpha \sin \alpha\pi}{\alpha^2 - k^2} \right] \\
&= \frac{2\alpha \sin \alpha\pi}{\pi} \cdot \frac{(-1)^k}{\alpha^2 - k^2}
\end{aligned}$$

Por tanto, se tiene que

$$\begin{aligned}
\cos \alpha x &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \\
&= \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha \sin \alpha\pi}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} \cos nx \\
&= \frac{2\alpha \sin \pi\alpha}{\pi} \left(\frac{1}{2\alpha^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{\alpha^2 - n^2} \right), \quad \forall x \in [-\pi, \pi] \\
\Rightarrow \pi \cos \alpha x &= 2\alpha \sin \pi\alpha \left(\frac{1}{2\alpha^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{\alpha^2 - n^2} \right), \quad \forall x \in [-\pi, \pi]
\end{aligned}$$

En particular, cuando $x = 0$ y $x = \pi$ se tiene que

$$\begin{aligned}\pi \cos \alpha 0 &= 2\alpha \sin \pi \alpha \left(\frac{1}{2\alpha^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos 0}{\alpha^2 - n^2} \right) \\ \Rightarrow \pi \alpha &= 2\alpha^2 \sin \pi \alpha \left(\frac{1}{2\alpha^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} \right) \\ \Rightarrow \frac{\pi \alpha}{\sin \pi \alpha} &= 1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}\end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}\pi \cos \alpha \pi &= 2\alpha \sin \pi \alpha \left(\frac{1}{2\alpha^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos n\pi}{\alpha^2 - n^2} \right) \\ \Rightarrow \pi \cot \alpha \pi &= 2\alpha \left(\frac{1}{2\alpha^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos n\pi}{\alpha^2 - n^2} \right) \\ \Rightarrow \alpha \pi \cot \alpha \pi &= 2\alpha^2 \left(\frac{1}{2\alpha^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2} \right) \\ &= 1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2} \\ \therefore \alpha \pi \cot \alpha \pi &= 1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}\end{aligned}$$

De (ii): Veamos que se puede integrar respecto a α . En efecto, para cada $\nu \in \mathbb{N}$ defina:

$$s_\nu(\alpha) = \sum_{n=1}^{\nu} \frac{2\alpha}{n^2 - \alpha^2}$$

Considere así la sucesión de funciones $\{s_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$. Como cada función es integrable en $]0, x[$ (pues el $0 < x < 1$) y,

$$\begin{aligned}|s_\nu(\alpha)| &= \left| \sum_{n=1}^{\nu} \frac{2\alpha}{n^2 - \alpha^2} \right| \\ &= \sum_{n=1}^{\nu} \frac{2\alpha}{n^2 - \alpha^2} \\ &= \frac{2\alpha}{1 - \alpha^2} + \sum_{n=2}^{\nu} \frac{2\alpha}{n^2 - \alpha^2} \\ &\leq \frac{2\alpha}{1 - \alpha^2} + \sum_{n=2}^{\nu} \frac{2\alpha}{n^2 - 1^2} \\ &\leq \frac{2\alpha}{1 - \alpha^2} + 2\alpha \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

donde la función $g : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\alpha \mapsto \frac{2\alpha}{1 - \alpha^2} + 2\alpha \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$ es continua en el compacto $[0, x]$ pues

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{3}{4} < \infty$$

luego integrable en $[0, x]$. Por tanto, del Teorema de Lebesgue se sigue que:

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_0^x s_\nu(\alpha) d\alpha &= \int_0^x \lim_{\nu \rightarrow \infty} s_\nu(\alpha) d\alpha \\ \Rightarrow \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_0^x \sum_{n=1}^{\nu} \frac{2\alpha}{n^2 - \alpha^2} d\alpha &= \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{n^2 - \alpha^2} d\alpha \end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned} \int_0^x \sum_{n=1}^{\nu} \frac{2\alpha}{n^2 - \alpha^2} d\alpha &= \sum_{n=1}^{\nu} \int_0^x \frac{2\alpha}{n^2 - \alpha^2} d\alpha, \text{ tomemos } u = n^2 - \alpha^2 \Rightarrow du = -2\alpha d\alpha \\ &= \sum_{n=1}^{\nu} \int_{n^2}^{n^2-x^2} \frac{2\alpha}{u} \frac{du}{-2\alpha} \\ &= \sum_{n=1}^{\nu} \int_{n^2-x^2}^{n^2} \frac{du}{u} \\ &= \sum_{n=1}^{\nu} \ln |u| \Big|_{n^2-x^2}^{n^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\nu} [\ln |n^2| - \ln |n^2 - x^2|] \\ &= \sum_{n=1}^{\nu} \left[\ln \left| \frac{n^2}{n^2 - x^2} \right| \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\nu} \ln \frac{n^2}{n^2 - x^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\nu} \ln \left(\frac{n^2}{n^2 - x^2} \right) \\ &= \ln \left(\prod_{n=1}^{\nu} \frac{n^2}{n^2 - x^2} \right) \end{aligned}$$

Por tanto, como la función $x \mapsto \ln x$ es continua en $]0, \infty[$, se sigue que:

$$\ln \left(\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2 - x^2} \right) = - \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{n^2 - \alpha^2} d\alpha$$

Ahora, si integramos en $[0, x]$ ambos lados de la última igualdad de (i), se tiene que:

$$\begin{aligned} \alpha \pi \cot \alpha \pi &= 1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2} \\ \Rightarrow \pi \cot \pi \alpha &= \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \\ \Rightarrow \pi \cot \pi \alpha - \frac{1}{\alpha} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \end{aligned}$$

Ahora, veamos que

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\alpha} \left(\ln \left(\frac{\sin \pi \alpha}{\alpha} \right) \right) &= \frac{1}{\frac{\sin \pi \alpha}{\alpha}} \cdot \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\sin \pi \alpha}{\alpha} \right) \\
 &= \frac{\alpha}{\sin \pi \alpha} \cdot \frac{d}{d\alpha} (\alpha^{-1} \sin \pi \alpha) \\
 &= \frac{\alpha}{\sin \pi \alpha} \cdot (-\alpha^{-2} \sin \pi \alpha + \pi \alpha^{-1} \cos \pi \alpha) \\
 &= \frac{1}{\alpha \sin \pi \alpha} \cdot (-\sin \pi \alpha + \pi \alpha \cos \pi \alpha) \\
 &= -\frac{1}{\alpha} + \pi \cot \pi \alpha \\
 &= \pi \cot \pi \alpha - \frac{1}{\alpha}
 \end{aligned}$$

Luego, por el primer Teorema Fundamental del Cálculo para intervalos abiertos, se sigue que:

$$\begin{aligned}
 \int_0^x \left(\pi \cot \pi \alpha - \frac{1}{\alpha} \right) d\alpha &= \ln \left(\frac{\sin \pi x}{x} \right) - \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \ln \left(\frac{\sin \pi \alpha}{\alpha} \right) \\
 &= \ln \left(\frac{\sin \pi x}{x} \right) - \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \ln \left(\pi \frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha} \right) \\
 &= \ln \left(\frac{\sin \pi x}{x} \right) - \ln \left(\pi \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha} \right) \\
 &= \ln \left(\frac{\sin \pi x}{x} \right) - \ln(\pi \cdot 1) \\
 &= \ln \left(\frac{\sin \pi x}{x} \right) - \ln(\pi) \\
 &= \ln \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x} \right)
 \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 \int_0^x \left(\pi \cot \pi \alpha - \frac{1}{\alpha} \right) d\alpha &= \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{n^2 - \alpha^2} d\alpha \\
 &= - \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} d\alpha \\
 \Rightarrow \ln \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x} \right) &= - \ln \left(\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2 - x^2} \right) \\
 &= \ln \left(\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - x^2}{n^2} \right) \\
 &= \ln \left(\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right) \right) \\
 \Rightarrow \frac{\sin \pi x}{\pi x} &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right) \\
 \Rightarrow \sin \pi x &= \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right)
 \end{aligned}$$

para todo $0 < x < 1$. Sea ahora $-1 < x < 0$. Como la función seno es impar, entonces:

$$\begin{aligned}\sin(\pi x) &= -\sin(-\pi x) \\ &= \pi(-x) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(-x)^2}{n^2}\right) \\ &= -\left[\pi(-x) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(-x)^2}{n^2}\right)\right] \\ &= \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)\end{aligned}$$

y, si $x = 0$ se tiene de forma inmediata que:

$$\sin(\pi x) = 0 = 0 \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1) = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

Por tanto, para todo $x \in]-1, 1[$ se cumple:

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

■

Ejercicio 3.1.10

Se supone que la serie de Fourier de una función $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{K})$ converge en el sentido de Cesàro uniformemente en \mathbb{R} . **Pruebe** que f es equivalente a una función continua de \mathbb{R} en \mathbb{K} .

Demostración:

■

Ejercicio 3.1.11

Sea $f \in \mathcal{C}^{2\pi}(\mathbb{R})$ la función

$$f(x) = \pi - |2x|, \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

Demuestre que la serie de Fourier de f converge a f uniformemente en \mathbb{R} aplicando primero el Teorema 3.5 y después el Teorema de Jordan. **Calcule**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}.$$

Solución:

Se tiene que probar el resultado usando el Teorema 3.4.1 (de mis notas). Para ello, debemos encontrar una función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g \in \mathcal{L}_2^{2\pi}(\mathbb{R})$ que satisfaga:

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt = 0$$

y que

$$f(x) = c + \int_0^x g(t) dt$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ siendo $c \in \mathbb{R}$. De esta forma se sigue de manera inmediata que la serie de Fourier de f converge a f uniformemente en \mathbb{R} .

Tomemos $c = \pi$ y,

$$g(t) = \begin{cases} 2 & \text{si } -\pi \leq t < 0 \\ -2 & \text{si } 0 \leq t < \pi \end{cases}, \quad \forall t \in [-\pi, \pi[$$

y extiéndase por periodicidad a todo \mathbb{R} . Afirmamos que

$$\int_0^x g(t) dt = -|2x|, \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$$

En efecto, sea $x \in [-\pi, \pi]$, se tienen dos casos:

- $x < 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^x g(t) dt &= - \int_x^0 2 dt \\ &= -2t \Big|_x^0 \\ &= 2x \\ &= -(-2x) \\ &= -|2x| \end{aligned}$$

- $x \geq 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^x g(t) dt &= - \int_0^x -2 dt \\ &= -2 \int_0^x dt \\ &= -2t \Big|_0^x \\ &= -2x \\ &= -|2x| \end{aligned}$$

luego, como $g \in \mathcal{L}_2^{2\pi}(\mathbb{R})$ se sigue que la serie de Fourier de f converge a f uniformemente en \mathbb{R} , pues

$$f(x) = \pi + \int_0^x g(t) dt$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ahora, aplicando el teorema de Jordan basta con ver que f es 2π periódica, de variación acotada en $[-\pi, \pi]$ y continua en \mathbb{R} . En efecto, ya se tiene que f es 2π periódica, veamos que

- **f es de variación acotada:** Sea $\Delta = \{-\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \pi\}$ una partición del intervalo $[-\pi, \pi]$, entonces

$$\begin{aligned} S_\Delta(f) &= \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \\ &= \sum_{k=1}^n |\pi - |2x_k|| - \pi + |2x_{k-1}|| \\ &= 2 \sum_{k=1}^n ||x_k| - |x_{k-1}|| \end{aligned}$$

existe $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que

$$x_m \leq 0 < x_{m+1}$$

se divide pues la suma como:

$$\begin{aligned} S_{\Delta}(f) &= 2 \sum_{k=1}^n ||x_k| - |x_{k-1}|| \\ &= 2 \sum_{k=1}^m ||x_k| - |x_{k-1}|| + 2 \sum_{k=m+1}^n ||x_k| - |x_{k-1}|| \end{aligned}$$

si $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, entonces

$$x_{k-1} < x_k \leq 0 \Rightarrow |x_k| < |x_{k-1}|$$

y, si $k \in \llbracket m+1, n \rrbracket$,

$$0 < x_{k-1} < x_k \Rightarrow |x_{k-1}| < |x_k|$$

por lo cual

$$\begin{aligned} S_{\Delta}(f) &= 2 \sum_{k=1}^m ||x_k| - |x_{k-1}|| + 2 \sum_{k=m+1}^n ||x_k| - |x_{k-1}|| \\ &= 2 \sum_{k=1}^m (|x_{k-1}| - |x_k|) + 2 \sum_{k=m+1}^n (|x_k| - |x_{k-1}|) \\ &= 2 \sum_{k=1}^m (|x_{k-1}| - |x_k|) + 2 \sum_{k=m+1}^n (|x_k| - |x_{k-1}|) \\ &= 2(|x_0| - |x_m|) + 2(|x_n| - |x_m|) \\ &= 4(|x_0| + |x_n|) \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

por tanto,

$$V_f([- \pi, \pi]) = 4\pi$$

así, f es de variación acotada en $[- \pi, \pi]$.

- **f es continua en \mathbb{R} .** Ya se tiene que f es continua en $] - \pi, \pi[$, para ver que es continua en \mathbb{R} basta con ver que es continua en π , para ello, se debe verificar que

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = f(\pi) = f(-\pi) = \lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x)$$

Los dos límites ya se tienen pues la función $\pi - |2x|$ es continua en \mathbb{R} . Por lo cual, solo basta con ver que

$$f(\pi) = \pi - |2\pi| = -\pi = \pi - |2(-\pi)| = f(-\pi)$$

luego, f es continua en \mathbb{R} .

Por tanto, usando el Teorema de Jordan se sigue que la serie de Fourier de f converge a f uniformemente en \mathbb{R} .

Ahora, calculemos los coeficientes de la serie de Fourier de f , notemos antes que f es par, por ende

$b_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Sea $k \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi - |2t|) dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi - 2t) dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[\pi t - t^2 \right]_0^\pi \\
 &= \frac{2}{\pi} [\pi^2 - \pi^2] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos kt dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi - |2t|) \cos kt dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi - 2t) \cos kt dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^\pi \pi \cos kt dt - \int_0^\pi 2t \cos kt dt \right] \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[\pi \int_0^\pi \cos kt dt - 2 \int_0^\pi t \cos kt dt \right], \text{ haciendo el cambio de variable } u = kt \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[\pi \int_0^{k\pi} \cos u \frac{du}{k} - 2 \int_0^{k\pi} \frac{u}{k} \cos u \frac{du}{k} \right] \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi}{k} \int_0^{k\pi} \cos u du - \frac{2}{k^2} \int_0^{k\pi} u \cos u du \right] \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi}{k} \sin u \Big|_0^{k\pi} - \frac{2}{k^2} \left[u \sin u + \cos u \Big|_0^{k\pi} \right] \right] \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi}{k} [\sin k\pi - 0] - \frac{2}{k^2} [k\pi \sin k\pi + \cos k\pi - 0 - \cos 0] \right] \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{2}{k^2} [1 - (-1)^k] \right] \\
 &= \frac{4}{\pi k^2} [1 - (-1)^k]
 \end{aligned}$$

si $k = 2m - 1$ con $m \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{4}{\pi k^2} [1 - (-1)^k] \\
 &= \frac{4}{\pi k^2} [1 - (-1)^{2m-1}] \\
 &= \frac{4}{\pi k^2} [1 + 1] \\
 &= \frac{8}{\pi k^2}
 \end{aligned}$$

y, si $k = 2m$ con $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $a_k = 0$. Por tanto, se tiene que

$$\begin{aligned}\pi - |2x| &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^2} \cos(2k-1)x \\ &= \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}, \quad \forall x \in [-\pi, \pi]\end{aligned}$$

en particular, lo anterior se cumple para $x = 0$, es decir que

$$\begin{aligned}\pi &= \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} &= \frac{\pi^2}{8}\end{aligned}$$

Ahora, se sabe que en particular $f \in \mathcal{L}_2^{2\pi}(\mathbb{R})$. Por las identidades de Parseval se tiene que:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |a_{2k-1}|^2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \\
\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{64}{\pi^2(2k-1)^4} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\pi - |2x||^2 dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} |\pi - |2x||^2 dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\pi - |2x||^2 dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\pi - |2x||^2 dx \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} (|2x| - \pi)^2 dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\pi - |2x|)^2 dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (|2x| - \pi)^2 dx \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} (-2x - \pi)^2 dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (\pi + 2x)^2 dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)^2 dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (2x - \pi)^2 dx \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (\pi + 2x)^2 dx + \int_0^{\pi} (\pi - 2x)^2 dx \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\int_{\pi}^0 (\pi - 2x)^2 (-dx) + \int_0^{\pi} (\pi - 2x)^2 dx \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} (\pi - 2x)^2 dx + \int_0^{\pi} (\pi - 2x)^2 dx \right] \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - 2x)^2 dx, \text{ sea } u = \pi - 2x \\
&= \frac{2}{\pi} \int_{\pi}^{-\pi} u^2 \frac{-du}{2} \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{u^3}{3} \Big|_{\pi}^{-\pi} \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{2\pi^3}{3} \\
&= \frac{2\pi^2}{3} \\
\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{64}{\pi^2(2k-1)^4} &= \frac{2\pi^2}{3} \\
\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} &= \frac{\pi^4}{96}
\end{aligned}$$

□

Ejercicio 3.1.12

Sea $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{R})$ la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi \leq x < 0, \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Calcule la serie de Fourier de f . Usando el teorema fundamental para la convergencia puntual de una serie de Fourier, **muestre** que la serie de Fourier converge a alguna suma $s(x)$ para todo $x \in [-\pi, \pi]$. **Calcule** $s(x)$ para todo $x \in [-\pi, \pi]$.

Solución:

Calculemos los coeficientes de Fourier de f :

- Veamos que

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} x^2 dx \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \Big|_0^{\pi} \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^3}{3} \\
 &= \frac{\pi^2}{3}
 \end{aligned}$$

- Sea $k \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \cos kx dx + \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 0 \cdot \cos kx dx + \int_0^{\pi} x^2 \cos kx dx \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos kx dx, \text{ sea } u = kx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{k\pi} \left(\frac{u}{k} \right)^2 \cos u \frac{du}{k} \\
 &= \frac{1}{k^3 \pi} \int_0^{k\pi} u^2 \cos u du \\
 &= \frac{1}{k^3 \pi} \left[(u^2 - 2) \sin u + 2u \cos u \Big|_0^{k\pi} \right] \\
 &= \frac{1}{k^3 \pi} \left[((k\pi)^2 - 2) \sin k\pi + 2k\pi \cos k\pi - (0^2 - 2) \sin 0 - 2 \cdot 0 \cdot \cos 0 \right] \\
 &= \frac{1}{k^3 \pi} \cdot 2k\pi (-1)^k \\
 &= \frac{2(-1)^k}{k^2}
 \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \sin kx \, dx + \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 0 \cdot \sin kx \, dx + \int_0^{\pi} x^2 \sin kx \, dx \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin kx \, dx, \text{ sea } u = kx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{k\pi} \left(\frac{u}{k}\right)^2 \sin u \frac{du}{k} \\
&= \frac{1}{k^3\pi} \int_0^{k\pi} u^2 \sin u \, du \\
&= \frac{1}{k^3\pi} \left[2u \sin u - (u^2 - 2) \cos u \right]_0^{k\pi} \\
&= \frac{1}{k^3\pi} [2k\pi \sin k\pi - ((k\pi)^2 - 2) \cos k\pi - 2 \cdot 0 \cdot \sin 0 + (0^2 - 2) \cos 0] \\
&= \frac{1}{k^3\pi} [-((k\pi)^2 - 2)(-1)^k - 2] \\
&= \frac{1}{k^3\pi} [((k\pi)^2 - 2)(-1)^{k+1} - 2] \\
&= \frac{1}{k^3\pi} [(k\pi)^2(-1)^{k+1} + 2(-1)^k - 2] \\
&= \frac{(k\pi)^2(-1)^{k+1} + 2(-1)^k - 2}{k^3\pi}
\end{aligned}$$

Se tienen dos casos, si $k = 2m - 1$ con $m \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\begin{aligned}
a_{2m-1} &= \frac{1}{k^3\pi} [(k\pi)^2(-1)^{2m-1+1} + 2(-1)^{2m-1} - 2] \\
&= \frac{1}{k^3\pi} [(k\pi)^2(-1)^{2m} - 2 - 2] \\
&= \frac{1}{k^3\pi} [(k\pi)^2 - 4] \\
&= \frac{(k\pi)^2 - 4}{k^3\pi}
\end{aligned}$$

y, si $k = 2m$ con $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{k^3\pi} [(k\pi)^2(-1)^{2m+1} + 2(-1)^{2m} - 2] \\
&= \frac{1}{k^3\pi} [-(k\pi)^2 + 2 - 2] \\
&= -\frac{(k\pi)^2}{k^3\pi} \\
&= -\frac{\pi}{k}
\end{aligned}$$

Por tanto, la serie de Fourier de f es:

$$\begin{aligned}
s_f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \\
&= \frac{\pi^2}{6} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2(-1)^k}{k^2} \cos kx + \frac{(k\pi)^2(-1)^{k+1} + 2(-1)^k - 2}{k^3\pi} \sin kx \right), \quad \forall x \in [-\pi, \pi[
\end{aligned}$$

Ahora, sea $x \in [-\pi, \pi]$. Para que la serie de Fourier de f converja en x a una suma $s(x)$, es necesario y suficiente que para algún $0 < \delta < \pi$ se cumpla:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^\delta \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2s(x)}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t dt = 0$$

afirmamos que la serie de Fourier converge puntualmente a f en $] -\pi, \pi[$ y en $x = \pi$ o $x = -\pi$ lo hace a $\frac{\pi^2}{2}$, esto es:

$$s(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in] -\pi, \pi[\\ \frac{\pi^2}{2} & \text{si } x = \pi \text{ ó } x = -\pi \end{cases}$$

■ Si $x \in] -\pi, \pi[$, se tienen dos casos:

• $x \in] -\pi, 0[$, tomemos $\delta = \min\{-x, \pi + x\} > 0$, entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^\delta \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2s(x)}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t dt &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^\delta \frac{0 + 0 - 2 \cdot 0}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t dt \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^\delta 0 \cdot \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t dt \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

• $x \in]0, \pi[$, tomemos $\delta = \min\{x, \pi - x\} > 0$, entonces:

$$\begin{aligned} \int_0^\delta \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2s(x)}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t dt &= \int_0^\delta \frac{(x+t)^2 + (x-t)^2 - 2x^2}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t dt \\ &= \int_0^\delta \frac{2x^2 + 2t^2 - 2x^2}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t dt \\ &= \int_0^\delta \frac{2t^2}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t dt \\ &= 2 \int_0^\delta t \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t dt \end{aligned}$$

Por Riemman-Lebsgue, como la función $t \mapsto t$ está en $\mathcal{L}_1([0, \pi], \mathbb{R})$, entonces

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^\delta t \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t dt = 0$$

por tanto,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^\delta \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2s(x)}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t dt = 0$$

• $x = 0$

(no es necesario hacer lo anterior ya que con solo afirmar que s tiene derivadas por la derecha e izquierda en x para todo $x \in] -\pi, \pi[$ se sigue la convergencia puntual de la serie de Fourier a $s(x) = f(x)$).

□

Ejercicio 3.1.13

Haga lo mismo que en el problema **3.12** con $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{R})$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi \leq x < 0, \\ x & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Solución:

□