

# Notas de Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

17 de marzo de 2024

# Índice general

<b>2. Convolución</b>	<b>2</b>
2.1. Preliminares . . . . .	2
2.2. Convolución . . . . .	4
2.3. Convolución en $\mathcal{L}_p$ . . . . .	9

# Capítulo 2

## Convolución

Se sabe que el producto puntual de dos funciones integrables no necesariamente es una función integrable (por ejemplo,  $f(x) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\chi_{[0,1]}$ ). Sin embargo, es posible definir un auténtico producto en  $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  que sea compatible con la adición y el producto por escalares, con el cual  $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  sea un **álgebra de Banach conmutativa sin elemento identidad**. Tal operación se llama **convolución**.

### 2.1. Preliminares

---

**Lema 2.1.1**

Si  $M$  es un subconjunto despreciable de  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $M \times \mathbb{R}^m$  es despreciable en  $\mathbb{R}^{n+m}$ .

---

**Demostración:**

Escriba a  $\mathbb{R}^m$  como unión numerable de rectángulos acotados disjuntos. Basta probar que si  $Q$  es un rectángulo acotado en  $\mathbb{R}^m$ , entonces  $M \times Q$  es despreciable en  $\mathbb{R}^{n+m}$ .

Sea  $\varepsilon > 0$ . Si  $\text{Vol}(Q) = 0$ , el resultado es inmediato, pues se sigue que  $\text{Vol}(M \times Q) = 0$ . Suponga que  $\text{Vol}(Q) > 0$ , se tiene para  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  que por definición de medida exterior existe  $\{P_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  sucesión de rectángulos acotados disjuntos tales que  $M \subseteq \bigcup_{\nu=1}^\infty P_\nu$  y:

$$\sum_{\nu=1}^\infty \text{Vol}(P_\nu) < \frac{\varepsilon}{\text{Vol}(Q)}$$

Entonces,  $\{P_\nu \times Q\}_{\nu=1}^\infty$  es una sucesión de rectángulos acotados en  $\mathbb{R}^{n+m}$  tales que  $M \times Q \subseteq \bigcup_{\nu=1}^\infty P_\nu \times Q$ , y

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^\infty \text{Vol}(P_\nu \times Q) &= \text{Vol}(Q) \cdot \sum_{\nu=1}^\infty \text{Vol}(P_\nu) \\ &< \text{Vol}(Q) \cdot \frac{\varepsilon}{\text{Vol}(Q)} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

luego, el conjunto  $M \times Q$  es despreciable, con lo cual el conjunto  $M \times \mathbb{R}^m$  también lo es. ■

**Definición 2.1.1**

Si  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{K}$  y  $g : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{K}$  son funciones, se define el **producto tensorial de  $f$  y  $g$**  como la

función:  $f \otimes g : \mathbb{R}^{p+q} \rightarrow \mathbb{K}$ , dada por:

$$f \otimes g(x, y) = f(x)g(y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^{p+q}$$

---

**Proposición 2.1.1**

Si  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{K}$  y  $g : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{K}$  son funciones medibles, entonces  $f \otimes g : \mathbb{R}^{p+q} \rightarrow \mathbb{K}$  es medible.

---

**Demostración:**

Se probarán dos casos:

1. Afirmamos que el resultado es cierto para funciones escalonadas  $\varphi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{K}$  y  $\psi : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{K}$  escritas canónicamente como:

$$\varphi = \sum_{i=1}^r c_i \chi_{P_i} \quad \text{y} \quad \psi = \sum_{j=1}^s d_j \chi_{Q_j}$$

donde los  $P_i$  y  $Q_j$  son rectángulos acotados disjuntos. En efecto, en este caso:

$$\begin{aligned} \varphi \otimes \psi(x, y) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s c_i d_j \chi_{P_i}(x) \chi_{Q_j}(y) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s c_i d_j \chi_{P_i \times Q_j}(x, y) \end{aligned}$$

la cual es una función escalonada en  $\mathbb{R}^{p+q}$ , luego medible.

2. En el caso general, se sabe que existen  $\{\varphi_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  en  $\mathcal{E}(\mathbb{R}^p, \mathbb{K})$  y  $\{\psi_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  en  $\mathcal{E}(\mathbb{R}^q, \mathbb{K})$  y conjuntos despreciables  $M \subseteq \mathbb{R}^p$ ,  $N \subseteq \mathbb{R}^q$  tales que:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \varphi_\nu(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^p \setminus M$$

y,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \psi_\nu(x) = g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^q \setminus N$$

luego, se tiene que:

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow \infty} \varphi_\nu \otimes \psi_\nu(x, y) &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \varphi_\nu(x) \psi_\nu(y) \\ &= f(x)g(y) \end{aligned}$$

para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^{p+q} \setminus [M \times \mathbb{R}^q \cup \mathbb{R}^p \times N]$ . Por el lema anterior se tiene que  $M \times \mathbb{R}^q \cup \mathbb{R}^p \times N$  es despreciable en  $\mathbb{R}^{p+q}$ . Como  $\varphi_\nu \otimes \psi_\nu$  son medibles para todo  $\nu \in \mathbb{N}$ , entonces  $f \otimes g$  es medible. ■

---

**Corolario 2.1.1**

Si  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{K}$  es medible, entonces  $F : \mathbb{R}^{p+q} \rightarrow \mathbb{K}$  dada como:

$$F(x, y) = f(x), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^{p+q}$$

es medible.

---

**Demostración:**

Es inmediata de la proposición anterior tomando a  $f$  y  $g = \chi_{\mathbb{R}^q}$ . ■

---

**Corolario 2.1.2**

Si  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^p, \mathbb{K})$ ,  $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^q, \mathbb{K})$ , entonces  $f \otimes g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^{p+q}, \mathbb{K})$  y:

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f \otimes g = \int_{\mathbb{R}^p} f \cdot \int_{\mathbb{R}^q} g$$

---

**Demostración:**

Es inmediato del teorema de Tonelli. ■

## 2.2. Convolución

**Definición 2.2.1**

Sean  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$  funciones medibles. La **convolución de  $f$  por  $g$**  se define como la función de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{K}$  tal que:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy$$

para toda  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que la integral exista.

**Ejemplo 2.2.1**

Considere la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

entonces,

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dx = \int_0^{\infty} f(y)g(x-y)dx$$

se tienen dos casos, por como están dadas las funciones  $f$  y  $g$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(y)g(x-y)dx &= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \\ \int_0^x f(y)g(x-y)dy & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \\ \int_0^x f(y)g(x-y)dy & \text{si } 0 < x < 1 \\ \int_0^1 f(y)g(x-y)dy & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \\ \int_0^x g(x-y)dy & \text{si } 0 < x < 1 \\ \int_0^1 g(x-y)dy & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \\ \int_0^x g(x-y)dy & \text{si } 0 < x < 1 \\ \int_0^1 g(x-y)dy & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \\ \int_0^x g(x-y)dy & \text{si } 0 < x < 1 \\ \int_0^1 g(x-y)dy & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ \int_0^1 g(x-y)dy & \text{si } x > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_0^\infty f(y)g(x-y)dx &= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \\ \int_0^x (x-y)dy & \text{si } 0 < x < 1 \\ \int_{x-1}^1 g(x-y)dy & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \\ -\frac{(x-y)^2}{2} \Big|_0^x & \text{si } 0 < x < 1 \\ \int_{x-1}^1 (x-y)dy & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \\ \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 < x < 1 \\ -\frac{(x-y)^2}{2} \Big|_{x-1}^1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \\ \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 < x < 1 \\ -\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{1}{2} & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \\ \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 < x < 1 \\ -\frac{x^2}{2} + x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

### Observación 2.2.1

Note que la función  $f * g$  es continua. (esto servirá para ver que la convolución obtenida es correcta).

### Ejemplo 2.2.2

Recuerde la fórmula de Cauchy para la  $n$ -ésima integral reiterada:

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{n-1}} dt$$

la igualdad anterior es la misma que la de la función:

$$\int_0^x \frac{f(t)dt}{\Gamma(n)(x-t)^{n-1}} = f * g(x)$$

donde

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{\Gamma(n)x^{n-1}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Si  $0 < \alpha \leq 1$ , definimos:

$$\int_0^x \frac{f(t)dt}{\Gamma(\alpha)(x-t)^{1-\alpha}} = I_0^\alpha[f](x)$$

llamada la **integral fraccional de orden  $\alpha$  de  $f$  en  $x$** . Por ejemplo:

$$I_0^{1/2}[t](x) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}}x^{3/2}$$

$$I_0^{1/2} \left[ \frac{4}{3\sqrt{\pi}} t^{3/2} \right] (x) = \frac{x^2}{2}$$

que concuerda con la integral normal de  $t$ .

Ahora estudiaremos algunas propiedades de este operador.

---

**Proposición 2.2.1 (Asociatividad y conmutatividad de la convolución)**

Sean  $f, g, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$  funciones medibles.

1. Si para algún  $x \in \mathbb{R}^n$  existe la convolución  $f * g(x)$ , entonces también existe  $g * f(x)$ , y,

$$f * g(x) = g * f(x)$$

2. Si la función  $|f| * |g|$  está definida c.t.p. en  $\mathbb{R}^n$  y, para algún  $x \in \mathbb{R}^n$  existe  $(|f| * |g|) * |h|(x)$ , entonces existen  $(f * g) * h(x)$ ,  $f * (g * h)(x)$  y,

$$(f * g) * h(x) = f * (g * h)(x)$$


---

**Demostración:**

De (1): Se tiene que:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-u)g(u)du = \int_{\mathbb{R}^n} g(u)f(x-u)du = g * f(x)$$

por el cambio de variable  $u = x - y$ , de Jacobiano  $|(-1)^n| = 1$ . En particular, esto garantiza la existencia de  $g * f(x)$ .

De (2): Se demostrará primero que la función

$$(y, z) \mapsto f(z)g(y-z)h(x-y)$$

es medible como función de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{K}$ , para un  $x \in \mathbb{R}^n$  fijo. Ya se sabe que  $(y, z) \mapsto f(z)$  es medible (por una proposición sobre productos tensoriales).

Se afirma que la función  $(y, z) \mapsto h(x-y)$  es medible. En efecto,  $u \mapsto h(u)$  es medible. Por el cambio de variable  $u = x - y$ , la función  $y \mapsto h(x-y)$  también es medible (por el teorema de cambio de variable). Luego, como con  $f$ , se sigue que  $(y, z) \mapsto h(x-y)$  es medible.

También  $(y, z) \mapsto g(y-z)$  es medible. Por productos tensoriales:

$$G(u, v) = g(u)$$

es medible. La función  $\Phi(r, s) = (r - s, s)$  es un isomorfismo  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  sobre  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ . Por el teorema de cambio de variable se sigue que es medible la función:

$$G \circ \Phi(y, z) = g(y - z)$$

Por lo tanto, la función inicial es medible.

Puesto que para  $x \in \mathbb{R}^n$ :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h(x-y)|dy \int_{\mathbb{R}^n} |f(z)||g(y-z)|dz = \int_{\mathbb{R}^n} |h(x-y)|(|f| * |g|)(y)dy = (|f| * |g|) * |h|(x) < \infty$$

(para los  $x$  en que esté definida la función), entonces por Tonelli la función  $(y, z) \mapsto f(z)g(y-z)h(x-y)$  es integrable y, por Fubini:

$$(f * g) * h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x-y)dy \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(y-z)dz$$

además,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} h(x-y)f(z)g(y-z)dydz &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)dx \int_{\mathbb{R}^n} h(x-y)g(y-z)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)dz \int_{\mathbb{R}^n} h((x-z)-u)g(y-z)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)(g * h)(x-z)dz \\
&= f * (g * h)(x)
\end{aligned}$$

En particular, existen y son iguales  $f * (g * h)(x)$  y  $(f * g) * h(x)$ . ■

### Teorema 2.2.1

Si  $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ , se cumplen las afirmaciones siguientes.

1. Para casi toda  $x \in \mathbb{R}^n$ , existe  $f * g(x)$ .
2. La función  $f * g$ , definida c.t.p. en  $\mathbb{R}^n$ , es integrable en  $\mathbb{R}^n$ .
3.  $\int_{\mathbb{R}^n} f * g = \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)$ .
4.  $\mathcal{N}_1(f * g) \leq \mathcal{N}_1(|f| * |g|) = \mathcal{N}_1(f) \mathcal{N}_1(g)$ .

### Demostración:

De (1): Ya se sabe que la función  $(x, y) \mapsto f(y)g(x-y)$  es medible (ver la proposición anterior). Como

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|dy \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|dx = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|dy\right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(z)|dz\right) < \infty$$

haciendo el cambio de variable  $x = y + z$  y por ser  $f, g$  integrables, entonces la función  $(x, y) \mapsto f(y)g(x-y)$  es integrable en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ . Por el teorema de Fubini, la función  $y \mapsto f(y)g(x-y)$  es integrable para casi toda  $x \in \mathbb{R}^n$ , lo cual prueba el primer inciso.

De (2): Además, por Fubini nuevamente, la función  $x \mapsto f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy$  definida c.t.p. en  $\mathbb{R}^n$  también es integrable, lo cual prueba el segundo inciso.

De (3): Y, por Fubini:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dx dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)dy \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)dy \int_{\mathbb{R}^n} g(u)du \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)dy\right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(u)du\right)
\end{aligned}$$

lo cual prueba el tercer inciso.



De (4): Aplicando (3) a  $|f|, |g|$ , resulta que:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N}_1(f * g) &= \int_{\mathbb{R}^n} |f * g|(x) dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x - y) dy \right| dx \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y) g(x - y)| dx dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} (|f| * |g|)(x) dx \\
 &= \mathcal{N}_1(|f| * |g|) \\
 &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f| \right) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |g| \right) \\
 &= \mathcal{N}_1(f) \mathcal{N}_1(g)
 \end{aligned}$$

lo cual prueba el cuarto inciso. ■

### Observación 2.2.2

Se tiene lo siguiente:

1. La existencia y el valor de la convolución dependen solamente de las clases de equivalencia de  $f$  y  $g$ , se puede pues considerar la convolución como una aplicación de  $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \times L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  en  $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ , tal que:

$$\mathcal{N}_1(f * g) \leq \mathcal{N}_1(f) \mathcal{N}_1(g)$$

2. Es claro que:

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) * g = \alpha_1 (f_1 * g) + \alpha_2 (f_2 * g)$$

y

$$f * (\beta_1 g_1 + \beta_2 g_2) = \beta_1 (f * g_1) + \beta_2 (f * g_2)$$

o sea, que la convolución es un aplicación bilineal y asociativa.

### Definición 2.2.2

Un **Álgebra de Banach** es un espacio de Banach  $(E, \|\cdot\|)$  provisto de un producto  $(x, y) \mapsto x \cdot y$ . Este producto es bilineal y, además,

$$\|x \cdot y\| \leq \|x\| \|y\|$$

si el producto es conmutativo, se dice que el álgebra de Banach es **conmutativa**.

### Ejercicio 2.2.1

En un álgebra de Banach, la función  $(x, y) \mapsto x \cdot y$  es continua del espacio normado producto  $E \times E$  en  $E$ .

### Demostración:

Sean  $\varepsilon > 0$  y  $(x_0, y_0) \in E \times E$ . Tomemos  $\delta = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2(\|x_0\|+1)}, \frac{\varepsilon}{2(\|y_0\|+1)}, 1 \right\} > 0$ , entonces, si  $(x, y) \in E \times E$  es tal que:

$$\|(x_0, y_0) - (x, y)\| < \delta$$

entonces,

$$\|x_0 - x\| < \delta \quad \text{y} \quad \|y_0 - y\| < \delta \Rightarrow \|y\| < 1 + \|y_0\|$$

luego, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\|x_0 \cdot y_0 - x \cdot y\| &= \|x_0 \cdot y_0 - x_0 \cdot y + x_0 \cdot y - x \cdot y\| \\
&\leq \|x_0 \cdot (y_0 - y)\| + \|(x_0 - x) \cdot y\| \\
&\leq \|x_0\| \|y_0 - y\| + \|x_0 - x\| \|y\| \\
&< \|y_0 - y\| (\|x_0\| + 1) + \|x_0 - x\| (\|y_0\| + 1) \\
&< \frac{\varepsilon}{2(\|x_0\| + 1)} (\|x_0\| + 1) + \frac{\varepsilon}{2(\|y_0\| + 1)} (\|y_0\| + 1) \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

por tanto,  $(x, y) \mapsto x \cdot y$  es continua en  $(x_0, y_0) \in E \times E$ . Por ser este elemento de  $E \times E$  arbitrario, se sigue que es continua en todo  $E \times E$ . ■

### Ejemplo 2.2.3

Considere  $\mathbb{K}$  como espacio vectorial sobre sí mismo con la norma usual y, provisto de la multiplicación usual en  $\mathbb{K}$ , es un álgebra de Banach conmutativa con elemento uno.

### Ejemplo 2.2.4

Sea  $S$  un conjunto no vacío. El espacio vectorial  $\mathcal{B}(S, \mathbb{K})$  de las funciones acotadas de  $S$  en  $\mathbb{K}$ , provisto de la norma uniforme  $\|\cdot\|_\infty$  y con la multiplicación definida puntualmente, es un álgebra de Banach conmutativa con elemento uno (la función constante de valor uno).

### Ejemplo 2.2.5

Sea  $S$  un espacio métrico. El subespacio  $\mathcal{BC}(S, \mathbb{K})$  de las funciones continuas y acotadas de  $S$  en  $\mathbb{K}$  es una sub-álgebra de Banach del ejemplo anterior con elemento uno.

### Ejemplo 2.2.6

El subespacio  $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  de  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  de las funciones continuas nulas en infinito es una sub-álgebra de Banach de  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  sin elemento uno.

### Ejemplo 2.2.7

Sea  $E$  un espacio de Banach. El espacio normado  $\text{End}(E)$  de todos los endomorfismos continuos de  $E$  provisto del producto  $(A, B) \mapsto A \circ B$  es un álgebra de Banach no conmutativa con elemento uno.

### Ejemplo 2.2.8

$L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  provisto de la convolución también es un álgebra de Banach conmutativa (¿con elemento identidad?).

## 2.3. Convolución en $\mathcal{L}_p$

---

**Teorema 2.3.1 (Desigualdad de Hölder Generalizada)**

Sean  $p_1, \dots, p_m$  números positivos tales que:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_m} = 1$$

entonces, si  $f_1 \in \mathcal{L}_{p_1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ ,  $f_2 \in \mathcal{L}_{p_2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ , ...,  $f_m \in \mathcal{L}_{p_m}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ , entonces  $f_1 \cdot f_2 \cdots f_m \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ , y

$$\mathcal{N}_1(f_1 \cdot f_2 \cdots f_m) \leq \mathcal{N}_{p_1}(f_1) \mathcal{N}_{p_2}(f_2) \cdots \mathcal{N}_{p_m}(f_m)$$

---

**Demostración:**

Procederemos por inducción sobre  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 2$ . El caso  $n = 2$  es inmediato de la desigualdad de Hölder clásica.

Suponga que el resultado se cumple para algún  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 2$ . Veamos que se cumple para  $m + 1$ . En efecto, sean  $f_1 \in \mathcal{L}_{p_1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ ,  $f_2 \in \mathcal{L}_{p_2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ , ...,  $f_{m+1} \in \mathcal{L}_{p_{m+1}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  con  $p_1, \dots, p_{m+1}$  números positivos tales que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_{m+1}} &= 1 \\ \Rightarrow \frac{1}{p_{m+1}^*} &= 1 - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_m} \end{aligned}$$

afirmamos que  $f_1 \cdots f_m \in \mathcal{L}_{p_{m+1}^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ . En efecto, observemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} ||$$

■

---

**Proposición 2.3.1**

Si  $f : \mathbb{R}^{p+q} \rightarrow \mathbb{K}$  es medible, se cumple lo siguiente:

1. Para casi toda  $x \in \mathbb{R}^p$ , la función  $f_x(y) = f(x, y)$  de  $\mathbb{R}^q$  en  $\mathbb{K}$  es medible.
2. Si para casi toda  $x \in \mathbb{R}^p$ , la función  $f_x$  es integrable en  $\mathbb{R}^q$ , entonces:

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f_x = \int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) dy$$

definida c.t.p. es medible.

---

---

**Teorema 2.3.2 (Teorema de Young)**

Sean  $p, q \in [1, \infty[$  tales que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$  y defina  $r$  como sigue:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$$

Entonces, si  $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  y  $g \in \mathcal{L}_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ , se cumple lo siguiente:

1. Para casi toda  $x \in \mathbb{R}^n$ , existe la convolución  $f * g$ , es decir:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)dy$$

para casi toda  $x \in \mathbb{R}^n$ .

$$2. f * g \in \mathcal{L}_r(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}).$$

$$3. \mathcal{N}_r(f * g) \leq \mathcal{N}_p(f) \mathcal{N}_q(g).$$


---

### Demostración:

Observemos primero que los números  $p, q, r$  satisfacen lo siguiente:

$$r > 1, \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{r} \geq 0, \quad \frac{1}{q} - \frac{1}{r} \geq 0$$

En efecto,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \leq 2 - 1 = 1 \Rightarrow r \geq 1$$

las otras dos son inmediatas, ya que:

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{r} > 1 - \frac{1}{q} \geq 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{q} - \frac{1}{r} > 1 - \frac{1}{p} \geq 0$$

Se verá que para casi toda  $x \in \mathbb{R}^n$ , la función  $y \mapsto f(y)g(x-y)$  es integrable en  $\mathbb{R}^n$ . Por un teorema anterior, ya se sabe que dicha función es medible. Escriba

$$|f(y)||g(x-y)| = (|f(y)|^p |g(x-y)|^q)^{\frac{1}{r}} (|f(y)|^p)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} (|g(x-y)|^q)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}$$

Para probar el resultado, se probarán dos casos:

1.  $p > 1$  y  $q > 1$  En este caso,  $\frac{1}{p} - \frac{1}{r} > 0$  y  $\frac{1}{q} - \frac{1}{r} > 0$ . Si

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{r}, \quad \frac{1}{\beta} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r}, \quad \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{r}$$

entonces,

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 1$$

La función  $y \mapsto (|f(y)|^p |g(x-y)|^q)^{\frac{1}{r}}$  está en  $\mathcal{L}_\alpha(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  (pues, existe la convolución  $|f|^p * |g|^q(x)$  para casi toda  $x \in \mathbb{R}^n$ ). También,  $y \mapsto (|f(y)|^p)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}$  está en  $\mathcal{L}_\beta(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  y  $y \mapsto (|g(x-y)|^q)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}$  está en  $\mathcal{L}_\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ .

Por Hölder generalizado, se tiene que  $y \mapsto |f(y)||g(x-y)|$  es integrable, en particular, existe la convolución  $f * g$ , lo que prueba (1). Además,

$$\begin{aligned} |f * g|(x) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)||g(x-y)| dy \\ &\leq \left[ \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p |g(x-y)|^q dy \right]^{\frac{1}{r}} \left[ \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p dy \right]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \left[ \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^q dy \right]^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} \\ &= [|f|^p * |g|^q(x)]^{\frac{1}{r}} \mathcal{N}_p(f)^{1-\frac{p}{r}} \mathcal{N}_q(g)^{1-\frac{q}{r}} \end{aligned}$$

luego,

$$|f * g|^r(x) \leq \mathcal{N}_p(f)^{r-p} \mathcal{N}_q(g)^{r-q} (|f|^p * |g|^q(x))$$

por el teorema anterior (el cual asegura que  $|f|^p * |g|^q$  es integrable), implica que  $|f| * |g| \in \mathcal{L}_3(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ , lo cual prueba (2).

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_r(f * g)^r &= \int_{\mathbb{R}^n} |f * g(x)|^r dx \\
&\leq \mathcal{N}_p(f)^{r-q} \mathcal{N}_q(g)^{r-p} \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p * |g|^q(x) dx \\
&= \mathcal{N}_p(f)^{r-q} \mathcal{N}_q(g)^{r-p} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \right) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |g|^q \right) \\
&= \mathcal{N}_p(f)^{r-q} \mathcal{N}_q(g)^{r-p} \mathcal{N}_p(f)^p \mathcal{N}_q(g)^q \\
&= (\mathcal{N}_p(f) \mathcal{N}_q(g))^r \\
\Rightarrow \mathcal{N}_r(f * g) &\leq \mathcal{N}_p(f) \mathcal{N}_q(g)
\end{aligned}$$

2.  $p > 1$ ,  $q = 1$ . En este caso,  $r = p$ , luego se sigue que:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{r} = \frac{1}{p}, \quad \frac{1}{\beta} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r} = 0, \quad \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{r} = \frac{1}{p^*}$$

Luego, si  $x \in \mathbb{R}^n$ , se tiene que:

$$\begin{aligned}
|f(y)| |g(x-y)| &= (|f(y)|^p |g(x-y)|^q)^{\frac{1}{r}} (|f(y)|^p)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} (|g(x-y)|^q)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}} \\
&= (|f(y)|^p |g(x-y)|)^{\frac{1}{p}} (|f(y)|^p)^0 (|g(x-y)|^q)^{\frac{1}{p^*}} \\
&= (|f(y)|^p |g(x-y)|)^{\frac{1}{p}} (|g(x-y)|^q)^{\frac{1}{p^*}}
\end{aligned}$$

Como  $y \mapsto (|f(y)|^p |g(x-y)|)^{\frac{1}{p}}$  está en  $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}, \mathbb{K})$  (pues existe  $|f|^p * |g|(x)$  para casi toda  $x \in \mathbb{R}^n$ ) y  $y \mapsto (|g(x-y)|^q)^{\frac{1}{p^*}}$  está en  $\mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ , entonces por Hölder y la ecuación anterior, se sigue que  $y \mapsto |f(y)g(x-y)|$  es integrable en  $\mathbb{R}^n$ , luego existe  $|f| * |g|(x)$  para casi toda  $x \in \mathbb{R}^n$ , lo que prueba (1). Además,

$$\begin{aligned}
|f * g|(x) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| |g(x-y)| dy \\
&\leq \left[ \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p |g(x-y)| dy \right]^{\frac{1}{p}} \left[ \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)| dy \right]^{\frac{1}{p^*}} \\
&= [|f|^p * |g|(x)]^{\frac{1}{p}} \mathcal{N}_1(g)^{\frac{1}{p^*} = 1 - \frac{1}{p^*}} \\
\Rightarrow |f * g|^p(x) &\leq [|f|^p * |g|(x)] \mathcal{N}_1(g)^{1-p}
\end{aligned}$$

luego,  $f * g \in \mathcal{L}_r(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  (recuerde que  $r = p$ ) lo cual prueba (2), y

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f * g|^p(x) dx &\leq \mathcal{N}_1(g)^{p-1} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \right) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |g| \right) \\
&\leq \mathcal{N}_1(g)^{p-1} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \right) \mathcal{N}_1(g) \\
&\leq \mathcal{N}_p(f)^p \mathcal{N}_1(g)^p
\end{aligned}$$

lo cual prueba (3).

El caso  $p = q = 1$  es el teorema anterior, y por la conmutatividad de la convolución, no es necesario probar el caso  $q = 1$ ,  $p > 1$ . ■

**Observación 2.3.1**

El caso  $q = 1$  y  $r = p$  es importante, dice: Si  $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  y  $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  entonces, para casi toda  $x \in \mathbb{R}^n$  existe  $f * g(x) \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  y  $\mathcal{N}_p(f * g) \leq \mathcal{N}_p(f) \mathcal{N}_1(g)$ .