Teorema De Cambio De Variable.

Conjuntos Cuadrables y Paralelepípedos.

Def. Sea $a \in \mathbb{R}^n$. La aplicación $T_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x+a$ es llamada traslación de vector a. T_a es un homeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$.

Notación: Si $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $T_a(S) = S+a$.

Proposición.

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Se tiene que S es medible en $\mathbb{R}^n \iff T_a(S) = S+a$ es medible y $m(T_a(S)) = m(S)$, para algún $a \in \mathbb{R}^n$.

Dem:

Se probó el semestre pasado.

$\square$

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. Si S_x es despreciable en $\mathbb{R}^q$ para casi toda $x \in \mathbb{R}^p$, entonces S es despreciable.

Corolario.

Sea $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. Si la gráfica de f es un conjunto medible en $\mathbb{R}^{p+q}$, entonces dicha gráfica es un conjunto despreciable en $\mathbb{R}^{p+q}$. 1)

Corolario.

Todo conjunto en $\mathbb{R}^n$ contenido en algún subespacio vectorial de dimensión menor que n es despreciable.

Dem:

Todo subespacio de dimensión $n-1$ es un conjunto cerrado, el cual se puede ver como la gráfica de una aplicación lineal de $\mathbb{R}^{n-1}$ en $\mathbb{R}$.

Def. Se dice que un conjunto S en $\mathbb{R}^n$ es **cuadrable** si su frontera es despreciable.

Note que todo conjunto cuadrable es medible, pues:

$$S = \underbrace{S^\circ}_{\text{med.}} \cup \underbrace{(F_r(S) \cap S)}_{\subseteq F_r(S) \text{ con } m(F_r(S))=0}$$

$$\Rightarrow F_r(S) \cap S \text{ es med.}$$

Paralelepípedos.

Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base natural o canónica de $\mathbb{R}^n$, y $\{p, v_1, \dots, v_n\}$ un sistema de $n+1$ vectores.

Sea $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la única aplicación lineal tq $L(e_i) = v_i$, $i \in [\![1,n]\!]$ y sea $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la aplicación afín:

$$\Phi(x) = p + L(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Sea C el cubo patrón de $\mathbb{R}^n$ dado por:

$$C = [0,1[^n$$
$$= \left\{ \sum_{i=1}^n t_i e_i \mid 0 \leq t_i < 1, \forall i \in [\![1,n]\!] \right\}$$

Se define el paralelepípedo $\pi(p, v_1, \dots, v_n)$ de vértice p y lados $\{v_1, \dots, v_n\}$ como el conjunto $\Phi(C)$, es decir:

$$\pi(p, v_1, \dots, v_n) = \left\{ p + \sum_{i=1}^n t_i v_i \mid 0 \leq t_i < 1, \forall i \in [\![1,n]\!] \right\}$$

Suponga que $\{v_1, \dots, v_n\}$ son l.i. En este caso L y Φ son homeomorfismos de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. Entonces el interior de $\pi(p, v_1, \dots, v_n)$ es $\Phi(C^\circ)$, i.e el paralelepípedo abierto

$$\mathring{\pi}(p, v_1, \dots, v_n) = \left\{ p + \sum_{i=1}^n t_i v_i \mid 0 < t_i < 1, \forall i \in [\![1,n]\!] \right\} \neq \emptyset.$$

que es no vacío, pues $C^\circ \neq \emptyset$ (así, el paralelepípedo no es despreciable), y:

$$\bar{\pi}(p, v_1, \dots, v_n) = \left\{ p + \sum_{i=1}^n t_i v_i \mid 0 \leq t_i \leq 1, \forall i \in [\![1,n]\!] \right\}$$
$$= \Phi(\bar{C}).$$

Como la frontera de C consta de $2n$-caras:

$$\left\{ \varepsilon e_k + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n t_i e_i \mid 0 \leq t_i \leq 1, i \neq k \text{ y } \varepsilon \in \{0,1\} \right\}.$$

Entonces la frontera de $\pi(p,v_1,\dots,v_n)$ que debe ser $\Phi(Fr\,C)$, consta de $2n$ caras:

$$\{p+\varepsilon e_k+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} t_i e_i \mid 0\leq t_i\leq 1,\ i\neq K \text{ y } \varepsilon\in\{0,1\}\}$$

los cuáles son conjuntos despreciables, pues son conjuntos que resultan de traslaciones de conjuntos en subespacios de dimensión $n-1$. $\therefore \pi(p,v_1,\dots,v_n)$ es cuadrable, y:

$$Vol(\pi(p,v_1,\dots,v_n))=Vol(\mathring{\pi}(p,v_1,\dots,v_n))=Vol(\bar{\pi}(p,v_1,\dots,v_n))$$

Suponga ahora que $\{v_1,\dots,v_n\}$ son l.d, entonces $L(\mathbb{R}^n)$ es un subespacio de dimensión menor que n, luego $\Phi(C)=p+L(C)$ es un conjunto despreciable, en part. $\Phi(C)$ es cuadrable (por ser cerrado) y:

$$Vol(p,v_1,\dots,v_n)=0$$

En los casos l.i y l.d, el volumen del paralelotopo no depende de p, por lo que se puede denotar como:

$$Vol(v_1,\dots,v_n)$$

Se concluye que $Vol(v_1,\dots,v_n)=0 \iff \{v_1,\dots,v_n\}$ son l.d.

Def. Sea E espacio vectorial de dimensión n, y sea $f:\overbrace{E\times\dots\times E}^{n\text{-veces}}\to\mathbb{R}$ una función.

i) f es una forma n-lineal si $x_i\mapsto f(x_1,\dots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\dots,x_n)$ es lineal, $\forall\, i\in[\![1,n]\!]$.

ii) Una forma n-lineal es alternada si $f(x_1,\dots,x_n)=0$ cada vez que dos o más vectores son iguales.

Si f es una forma n-lineal alternada sobre E, entonces $f(x_1,\dots,x_n)$ se multiplica por -1 al intercambiar dos entradas de los vectores $x_1,\dots,x_n$.

TEOREMA Y DEF.

Sea E esp. vect. real de dimensión n, y $\{e_1,\dots,e_n\}$ una base de E. Entonces existe una y sólo una forma lineal alternada sobre E $\ni$ $f(e_1,\dots,e_n)=1$. Se usa la notación:

$$\frac{[x_1,\dots,x_n]}{[e_1,\dots,e_n]} = f(x_1,\dots,x_n)$$

y se llama el determinante de la n-tupla $\{x_1,\dots,x_n\}$. Este determinante es cero si y sólo si $\{x_1,\dots,x_n\}$ es l.d. En el caso de $\mathbb{R}^n$ con base natural, se escribe

$$[x_1,\dots,x_n] = \frac{[x_1,\dots,x_n]}{[e_1,\dots,e_n]}$$

Def. Sea $X = [\xi_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$ una matriz real $n\times n$. El determinante de X se define como el determinante de $[x_1,\dots,x_n]$ donde:

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ij} e_i \ , \ j=1,\dots,n.$$

con $\{e_1,\dots,e_n\}$ la base natural de $\mathbb{R}^n$.

Teorema.

Sea E esp. vect. de dim. n y $\{e_1,\dots,e_n\}$ una base de E. Si $T: E\to E$ es lineal, entonces

$$\frac{[Te_1,\dots,Te_n]}{[e_1,\dots,e_n]}$$

es independiente de la base y se llama determinante de T ($\operatorname{Det} T$). El determinante de T es igual al determinante de la matriz T con resp. a una base arbitraria de T. Se cumplen:

i) S, T endomorfismos lineales de $E \Rightarrow$

$$\operatorname{Det}(S\circ T) = (\operatorname{Det} S)(\operatorname{Det} T)$$

ii) Si I es la identidad de E, ent. $\operatorname{Det} I = 1$.

iii) $\operatorname{Det} T \neq 0 \iff T$ es aut. de E. En este caso:

$$\operatorname{Det} T^{-1} = 1/\operatorname{Det} T$$

Volumen y Determinante.

Def. Sea $\{v_1,\dots,v_n\}$ una n-upla de vectores en $\mathbb{R}^n$. Se define el volumen orientado del paralelotopo $\pi(v_1,\dots,v_n)$ como:

$$\mathrm{Vol}^\circ(v_1,\dots,v_n) = \mathrm{Sgn}([v_1,\dots,v_n])\ \mathrm{Vol}(v_1,\dots,v_n)$$

Teorema.

$$\mathrm{Vol}^\circ(v_1,\dots,v_n) = [v_1,\dots,v_n]$$

$\forall$ n-tupla $v_1,\dots,v_n \in \mathbb{R}^n$.

Dem.

Se probará que $\mathrm{Vol}^\circ : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ es una forma n-lineal alternada con $\mathrm{Vol}^\circ(e_1,\dots,e_n)=1$, donde $\{e_1,\dots,e_n\}$ es la base natural. Esto último es claro. También es claro que si dos vectores son iguales, $\{v_1,\dots,v_n\}$ es l.d, entonces $\mathrm{Vol}^\circ(v_1,\dots,v_n) = 0 = [v_1,\dots,v_n]$.

Por simetría bastará probar que al fijar $v_2,\dots,v_n$, la función $v \mapsto \mathrm{Vol}^\circ(v,v_2,\dots,v_n)$ es lineal.

I) Escalares. Se probará que:

$$\mathrm{Vol}^\circ(\alpha v, v_2,\dots,v_n) = \alpha\, \mathrm{Vol}^\circ(v,v_2,\dots,v_n),\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}. \quad \dots (1)$$

Si $\alpha = 0$, el resultado es inmediato. Basta suponer que $v_2,\dots,v_n$ son l.i. Es claro que ambos lados tienen el mismo signo.

a) Se probará el caso en que $\alpha = K \in \mathbb{N}$. Suponga que se cumple para $\alpha = K-1$. Se tiene:

$$\pi(0; Kv, v_2,\dots,v_n) = \pi(0;(K-1)v, v_2,\dots,v_n) \cup \pi((K-1)v; v, v_2 \dots, v_n)$$

donde la unión es disjunta. Entonces:

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(Kv, v_2,\dots,v_n) &= \mathrm{Vol}((K-1)v, v_2,\dots,v_n) + \mathrm{Vol}(v,v_2,\dots,v_n)\\ &= (K-1)\mathrm{Vol}(v,v_2,\dots,v_n) + \mathrm{Vol}(v,v_2,\dots,v_n)\\ &= K\,\mathrm{Vol}(v,v_2,\dots,v_n)\end{aligned}$$

Por inducción se tiene lo deseado.

b) Si $\alpha = \frac{p}{q}$, $p,q \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\begin{aligned}p\mathrm{Vol}(v,v_2,\dots,v_n) &= \mathrm{Vol}(pv, v_2,\dots,v_n)\\ &= \mathrm{Vol}(p(\tfrac{q}{q}v), v_2,\dots,v_n)\end{aligned}$$

$$= q\,Vol\left(\tfrac{p}{q}v, v_2, \dots, v_n\right)$$

$$\therefore \tfrac{p}{q} Vol(v, \dots, v_n) = Vol\left(\tfrac{p}{q}v, \dots, v_n\right)$$

c) Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $\varepsilon > 0$. Sean $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}^+$ $\ni$ $\alpha - \varepsilon < r_1 < \alpha < r_2 < \alpha + \varepsilon$. Se tiene que:

$$\pi(r_1 v, \dots, v_n) \subseteq \pi(\alpha v, \dots, v_n) \subseteq \pi(r_2 v, \dots, v_n)$$

$$\Rightarrow Vol(r_1 v, \dots, v_n) \leq Vol(\alpha v, \dots, v_n) \leq Vol(r_2 v, \dots, v_n)$$

$$\Rightarrow (\alpha - \varepsilon) Vol(v, \dots, v_n) < Vol(\alpha v, \dots, v_n) < (\alpha + \varepsilon) Vol(v, \dots, v_n), \ \forall \varepsilon > 0.$$

$$\therefore Vol(\alpha v, \dots, v_n) = \alpha Vol(v, \dots, v_n)$$

d) Observe que: $\bar{\pi}(0; v_1, \dots, v_n) = v_1 + \bar{\pi}(0; -v_1, \dots, v_n)$, donde:

$$Vol(-v_1, \dots, v_n) = Vol(v_1, \dots, v_n)$$

Tomando en cuenta los signos, tenemos que:

$$Vol^\circ(-v_1, \dots, v_n) = -Vol^\circ(v_1, \dots, v_n)$$

Sea finalmente $\alpha < 0$ y defina $\beta = -\alpha > 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} Vol^\circ(\alpha v_1, \dots, v_n) &= Vol^\circ(-\beta v_1, \dots, v_n) \\ &= -Vol^\circ(\beta v_1, \dots, v_n) \\ &= -\beta Vol^\circ(v_1, \dots, v_n) \\ &= \alpha Vol^\circ(v_1, \dots, v_n) \end{aligned}$$

II) SUMA. Se probará que si $\{v_2, \dots, v_n\}$ son fijos y l.i. entonces:

$$Vol^\circ(x + y, v_2, \dots, v_n) = Vol^\circ(x, v_2, \dots, v_n) + Vol^\circ(y, v_2, \dots, v_n)$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$. Sea $v_1 \in \mathbb{R}^n$ $\ni$ $\{v_1, \dots, v_n\}$ es base de $\mathbb{R}^n$.

a) Se afirma que

$$Vol^\circ(v_1 + v_2, v_2, \dots, v_n) = Vol^\circ(v_1, \dots, v_n)$$

En efecto, defina

$$S_1 = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i v_i \mid 0 \leq t_i < 1 \text{ y } 0 \leq t_2 < t_1, \ \forall i \in [\![1, n]\!] \right\}$$

$$S_2 = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i v_i \mid 0 \leq t_i < 1 \text{ y } t_1 \leq t_2 < 1, \ \forall i \in [\![1, n]\!] \right\}$$

S_1 y S_2 son med. disjuntos y $S_1 \cup S_2 = \Pi(v_1, v_2, \dots, v_n)$. Se tiene:

$$v_2 + S_1 = \{ \sum_{i=1}^{n} t_i v_i \mid 0 \leq t_i < 1,\ i \neq 2 \text{ y } 1 \leq t_2 < 1 + t_1 \}$$

Es claro que S_2 y $v_2 + S_1$ son med. disjuntos, y:

$$S_2 \cup (v_2 + S_1) = \{ \sum_{i=1}^{n} t_i v_i \mid 0 \leq t_i < 1 \text{ y } t_1 \leq t_2 < 1 + t_1 \}$$

$$= \{ t_1(v_1 + v_2) + \sum_{i=1}^{n} t_i v_i \mid 0 \leq t_i < 1,\ i \in [\![1, n]\!] \}$$

$$= \Pi(v_1 + v_2, v_2, \dots, v_n)$$

$$\therefore \mathrm{Vol}(v_1 + v_2, v_2, \dots, v_n) = \mathrm{Vol}(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

ya que $\mathrm{Vol}^\circ(v_1 + v_2, v_2, \dots, v_n) = \mathrm{Vol}^\circ(v_1, \dots, v_n)$.

b) Se afirma que:

$$\mathrm{Vol}^\circ(v_1 + \alpha v_2, v_2, \dots, v_n) = \mathrm{Vol}^\circ(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

Si $\alpha = 0$ el resultado es inmediato. Suponga $\alpha \neq 0$. Por la parte (i):

$$\alpha \mathrm{Vol}^\circ(v_1 + \alpha v_2, v_2, \dots, v_n) = \mathrm{Vol}^\circ(v_1 + \alpha v_2, \alpha v_2, \dots, v_n)$$

$$= \mathrm{Vol}^\circ(v_1, \alpha v_2, v_3, \dots, v_n)$$

$$= \alpha \mathrm{Vol}^\circ(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

$$\therefore \mathrm{Vol}^\circ(v_1 + \alpha v_2, v_2, \dots, v_n) = \mathrm{Vol}^\circ(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

Por simetría,

$$\mathrm{Vol}^\circ(v_1 + \alpha v_k, v_1, \dots, v_k, \dots, v_n) = \mathrm{Vol}^\circ(v_1, v_2, \dots, v_n),\ \forall k \in [\![1, n]\!].$$

c) Se sigue de b) que:

$$\mathrm{Vol}^\circ(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, v_2, \dots, v_n) = \alpha_1 \mathrm{Vol}^\circ(v_1, v_2, \dots, v_n),\ \forall \alpha_i \in \mathbb{R};\ i \in [\![1, n]\!]. \quad 2)$$

Sean $x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ y $y = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i$. Entonces:

$$\mathrm{Vol}^\circ(x + y, v_2, \dots, v_n) = \mathrm{Vol}^\circ\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) v_i, v_2, \dots, v_n \right)$$

$$= (x_1 + y_1) \mathrm{Vol}^\circ(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

$$= x_1 \mathrm{Vol}^\circ(v_1, \dots, v_n) + y_1 \mathrm{Vol}^\circ(v_1, \dots, v_n)$$

$$= \mathrm{Vol}^\circ(x, v_2, \dots, v_n) + \mathrm{Vol}^\circ(y, v_2, \dots, v_n)$$

Corolario.

$$Vol(v_1,\dots,v_n) = |[v_1,\dots,v_n]|$$

Ejemplo.

1) Determinar el volumen del paralelepípedo $\pi(p; v_1, v_2, v_3)$ donde:

$$p=(3,-1,2),\quad v_1=(2,0,3),\quad v_2=(1,1,-1) \quad y \quad v_3=(1,-1,2)$$

Por el corolario:

$$Vol(v_1,v_2,v_3) = \left| \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \right| = |-2| = 2$$

Conjuntos Cuadrables y T. lineales.

Proposición.

Sea $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal, $P \subseteq \mathbb{R}^n$ rect. acotado. Entonces $T(P)$ es cuadrable y:

$$m(T(P)) = |Det\, T|\, Vol\, P$$

Dem:

Si T no es aut. entonces $T(P)$ es un conjunto contenido en un subespacio de $\mathbb{R}^n$ con dimensión menor que n. Como tales subespacios son conjuntos cerrados, entonces $\overline{T(P)}$ permanece en el sub. espacio, en part. $Fr(T(P))$ está contenida. Luego $m(Fr(T(P)))=0$ y así $T(P)$ es cuadrable y

$$m(T(P)) = 0$$
$$= |Det\, T|\, Vol(P)$$

Suponga que T es un automorfismo, en part. T es homeomorfismo sobre $\mathbb{R}^n$. Entonces $Fr(T(P)) = T(Fr(P))$. La $Fr(P)$ consta de $2n$ caras que se deducen por traslaciones de conjuntos cont. en subespacios de dimensión menor que n. Entonces $Fr(T(P))$ consta de $2n$ caras que se deducen de conjuntos cont. en subespacios de dim $< n$. Luego dichas caras son desp. Así: $T(P)$ es cuadrable. Se puede suponer que P es un rect. "semiabierto por la derecha"

$$P = \pi(a; l_1 e_1, \dots, l_n e_n)$$

$$\Rightarrow T(P) = \pi(T(a); l_1 T(e_1), \dots, l_n T(e_n))$$

de donde:

$$\begin{aligned} m(T(P)) &= \| l_1 T(e_1), \dots, l_n T(e_n) \| \\ &= l_1 \cdot \dots \cdot l_n \, \| T e_1, \dots, T e_n \| \\ &= |\operatorname{Det} T| \, l_1 \cdot \dots \cdot l_n \\ &= |\operatorname{Det} T| \operatorname{Vol} P \end{aligned}$$

Con $\operatorname{Vol} P = l_1 \cdot \dots \cdot l_n$.

$\square$

Proposición.

Si $G \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto, entonces $\exists \{C_v\}_{v=1}^{\infty}$ sucesión de cubos disjuntos $\ni$ $\bar{C}_v \subseteq G$, $\forall v \in \mathbb{N}$, y:

$$G = \bigcup_{v=1}^{\infty} C_v$$

Para $r = 0, 1, \dots$ Sea $\mathcal{K}_r$ una cuadrícula de $\mathbb{R}^n$ formada por los cubos:

$$C^r_{(p_1, \dots, p_n)} = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \frac{p_k}{2^r} \leq x_k < \frac{p_k + 1}{2^r}, \ k \in [\![1, n]\!] \right\}$$

$\forall p_1, \dots, p_n \in \mathbb{Z}$. Dichos cubos de arista $\frac{1}{2^r}$ forman una partición de $\mathbb{R}^n$. Además, los cubos de la cuadrícula $\mathcal{K}_{r+1}$ se obtienen al subdividir en dos partes iguales cada arista de cada cubo de $\mathcal{K}_r$.

Sea $\mathcal{F}_0$ la colección de cubos de $\mathcal{K}_0$ cuyas adherencias están contenidas en G.

Se define inductivamente $\mathcal{F}_r$ como la colección de cubos de $\mathcal{K}_r$ $\ni$

i) No están contenidos en ningún cubo de $\mathcal{F}_0 \cup \dots \cup \mathcal{F}_{r-1}$.

ii) Su adherencia está contenida en G.

Sea $\mathcal{F} = \bigcup_{r=0}^{\infty} \mathcal{F}_r$. Los elementos de $\mathcal{F}$ son cubos disjuntos cuyas adherencias están cont.

en G. Sea S la unión de los cubos de $\mathcal{I}$. Ent. $S \subseteq G$.

Se afirma que $S^c \subseteq G^c$. Sea $x \in S^c = \mathbb{R}^n \setminus S$, entonces $\forall r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ pertenece a algún cubo de $\mathcal{K}_r$ cuya adherencia intersecta a G^c. Así pues, $\exists\, y_r \in \mathbb{R}^n \setminus G$ m

$$\|x - y_r\|_\infty \leq \frac{1}{2^r} \text{ (arista del cubo)}, \forall r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\Rightarrow d_\infty(x, G^c) = 0$$

Como G^c es cerrado $\Rightarrow x \in G^c$. Así $G \subseteq S$.

$\square$

Corolario.

Si Z es un conjunto desp. en $\mathbb{R}^n$, ent. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \{C_v\}_{v=1}^\infty$ sucesión de cubos disjuntos m $Z \subseteq \bigcup_{v=1}^\infty C_v$ y $\sum_{v=1}^\infty Vol(C_v) \leq \varepsilon$.

Dem:

Por la regularidad de m, $\exists\, G \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto m $Z \subseteq G$ y $m(G \setminus Z) < \varepsilon \Rightarrow m(G) < \varepsilon$. Por la prop. ant. $\exists \{C_v\}_{v=1}^\infty$ sucesión de rect. ac. disj. en $\mathbb{R}^n$ m

$$G = \bigcup_{v=1}^\infty C_v$$

$$\Rightarrow \sum_{v=1}^\infty Vol(C_v) = m(G)$$

$$\leq \varepsilon$$

$\square$

Proposición.

Si T es un aut. lineal de $\mathbb{R}^n$, entonces:

i) T transforma conjuntos despreciables en despreciables.

ii) Si G es cuadrable en $\mathbb{R}^n$, ent. $T(Q)$ es cuadrable y:

$$m(T(G)) = |Det\, T|\, m(G)$$

Dem:

Sea $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ despreciable y $\varepsilon > 0$. Por el corolario $\exists \{C_r\}_{r=1}^\infty$ cubos disjuntos en $\mathbb{R}^n$ m

$$Z \subseteq \bigcup_{\nu=1}^{\infty} C_\nu \quad y \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} Vol(C_\nu) \leq \varepsilon$$

ent. $T(Z) \subseteq T\left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} C_\nu\right) = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} T(C_\nu)$, y $m(T(C_\nu)) = |Det T| Vol(C_\nu)$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$. Luego:

$$\begin{aligned} m(T(Z)) &\leq \sum_{\nu=1}^{\infty} m(T(C_\nu)) \\ &= |Det T| \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} Vol\, C_\nu \\ &\leq |Det T| \varepsilon \end{aligned}$$

$\therefore T(Z)$ es despreciable.

Sea Q cuadrable. Como T es aut. lineal, T es homeomorfismo, luego $Fr(T(Q)) = T(Fr(Q))$. Como $Fr(Q)$ es desp. entonces $Fr(T(Q))$ es desp. Por tanto, $T(Q)$ es cuadrable. Sea $G \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto $\ni$ $G = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} C_\nu$, $\{C_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ una sucesión de cubos disjuntos en $\mathbb{R}^n$. Como T es homeomorfismo, $T(G)$ es abierto y además $\{T(C_\nu)\}_{\nu=1}^{\infty}$ es una sucesión de paralelotopos disjuntos en $\mathbb{R}^n$ $\ni$

$$T(G) = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} T(C_\nu)$$

ent.

$$\begin{aligned} m(T(G)) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} m(T(C_\nu)) \\ &= |Det T| \sum_{\nu=1}^{\infty} Vol(C_\nu) \\ &= |Det T|\, m(G) \end{aligned}$$

Siendo Q cuadrable, $T(Q)$ lo es y:

$$\begin{aligned} m(T(Q)) &= m(T(Q)^{\circ}) \\ &= m(T(\mathring{Q})) \\ &= |Det T|\, m(\mathring{Q}) \\ &= |Det T|\, m(Q) \end{aligned}$$

$\square$

REPASO DE CÁLCULO DIF.

Def. Sean E y F esp. normados, $S \subseteq E$ abierto y $\phi: S \to F$ una función. ϕ es diferenc.

iable en un punto $x_0 \in S$ si $\exists$ una aplicación lineal continua $d\phi(x_0): E \to F$ m

$$\lim_{h\to 0} \frac{\phi(x_0+h)-\phi(x_0)-d\phi(x_0)(h)}{\|h\|} = 0$$

$d\phi(x_0)$ se llama la diferencial de ϕ en x_0.

Si $E=\mathbb{R}^n$ y $F=\mathbb{R}^m$ no importan las normas elegidas y no es nec. que sea continua (pues ya lo es).

Si ϕ es la restricción de S de una aplicación lineal continua $L: E \to F$, ent:

$$d\phi(x_0) = L, \ \forall\, x_0 \in S$$

En part. si $\phi = I_S \Rightarrow d\phi(x_0) = I_E, \forall\, x_0 \in S$.

Proposición.

Si $\phi: S \to F$ es diferenciable en un punto $x_0 \in S$, ent. ϕ es continua en x_0.

MATRIZ JACOBIANA

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m)$ donde $\phi_k: S \to \mathbb{R}$, $\forall\, k \in [\![1,m]\!]$ son las funciones componentes de ϕ.

Si ϕ es diferenciable en $x_0 \in S$, entonces $\exists$ las mn derivadas parciales

$$\partial_j \phi^i, \ i \in [\![1,m]\!] \text{ y } j \in [\![1,n]\!].$$

La matriz de $d\phi(x_0)$ con respecto a las bases naturales de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ es la matriz $m\times n$.

$$\left[\partial_j \phi^i(x_0)\right]^{1\le j\le n}_{1\le i\le m} = \begin{pmatrix} \partial_1\phi^1(x_0) & \dots & \partial_n\phi^1(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1\phi^m(x_0) & \dots & \partial_n\phi^m(x_0) \end{pmatrix}$$

llamada matriz jacobiana de ϕ en x_0.

Si $m=n$ y ϕ es dif. en x_0, ent $d\phi(x_0)$ es un endomorfismo lineal de $\mathbb{R}^n$ y su determinante se llama el jacobiano de ϕ en x_0, denotado por:

$$J\phi(x_0) = \det(d\phi(x_0)) = \det\left(\left[\partial_j \phi^i(x_0)\right]^{1\le j\le n}_{1\le i\le m}\right)$$

Regla de la Cadena.

Sean E, F y G esp. normados, $S \subseteq E$ y $T \subseteq F$ abiertos y $\Phi: S \to T$ y $\Psi: T \to G$, $x_0 \in S$. Si ϕ es diferenciable en x_0 y Ψ es diferenciable en $\phi(x_0)$, ent. $\Psi \circ \Phi$ es dif. en x_0 y:

$$d(\psi \circ \phi)(x_0) = d\psi(\phi(x_0)) \circ d\phi(x_0)$$

La matriz jacobiana en el caso que $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$ y $G = \mathbb{R}^p$ debe ser:

$$\begin{bmatrix} \partial_1(\psi \circ \phi)^1(x_0) & \cdots & \partial_n(\psi \circ \phi)^1(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1(\psi \circ \phi)^p(x_0) & \cdots & \partial_n(\psi \circ \phi)^p(x_0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \partial_1\psi^1(\phi(x_0)) & \cdots & \partial_m\psi^1(\phi(x_0)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1\psi^p(\phi(x_0)) & \cdots & \partial_p\psi^p(\phi(x_0)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial_1\phi^1(x_0) & \cdots & \partial_n\phi^1(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1\phi^m(x_0) & \cdots & \partial_n\phi^m(x_0) \end{bmatrix}$$

Isomorfismos C^1.

Def. Sean E y F esp. normados, $S \subseteq E$ abierto, $T \subseteq F$ abierto en F y $\phi: S \to T$. ϕ es un **isomorfismo diferenciable de S sobre T** si

i) ϕ es una función biyectiva de S sobre T.

ii) ϕ es diferenciable en todo punto de S.

iii) ϕ^{-1} es dif. en todo punto de T.

Obs) $\phi^{-1} \circ \phi = I_S$, $\phi \circ \phi^{-1} = I_T$

$\Rightarrow d\phi(x) \circ d\phi^{-1}(\phi(x)) = I_F$

$d\phi^{-1}(y) \circ d\phi(\phi^{-1}(y)) = I_E$, $\forall\, x \in S$ y $\forall\, y \in T$.

Esto prueba que, $\forall\, x \in S$, $d\phi(x)$ es un homeomorfismo lineal de E sobre F cuyo homeomorfismo inverso es $d\phi^{-1}(\phi(x))$. En part. si $E = \mathbb{R}^n$ y $F = \mathbb{R}^m$, nec. $n = m$ y así $d\phi(x)$ es un automorfismo lineal de $\mathbb{R}^n$, $\forall x \in S$.

En part. $J\phi(x) \neq 0, \forall x \in S$. y de lo ant. se sigue que $J\phi^{-1}(\phi^{-1}(x)) = \frac{1}{J\phi(x)}$

Def. Sean E y F esp. normados, $S \subseteq E$ y $T \subseteq F$ abiertos con $\phi: S \to T$ función. Se dice que ϕ es una aplicación de clase C^1, si:

i) ϕ es diferenciable en todo punto de ϕ.

ii) La aplicación $d\phi: x \mapsto d\phi(x)$ es continua como función de S en $CL(E,F)$ con la norma usual de operadores.

Proposición.

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $\phi: S \to \mathbb{R}^m$, $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m)$ donde $\phi_k: S \to \mathbb{R}$, $\forall K \in [\![1, m]\!]$. Ent. ϕ es de clase C^1 en $S \iff \exists$ las mn derivadas parciales $\partial_j \phi^i(x)$, $\forall x \in S$, $j \in [\![1, n]\!]$, $i \in [\![1, m]\!]$ y las mn aplicaciones $\partial_j \phi^i: S \to \mathbb{R}$ son cont. en S.

Se dirá que una función $\phi: S \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación de clase C^k en S, si las funciones $\phi^1, \dots, \phi^m$ tienen derivadas parciales hasta el orden K y que sean todas continuas en S.

y ϕ es de clase C^∞ si es de clase C^k, $\forall K \in \mathbb{N}$.

Def. Sea ϕ un isomorfismo diferenciable de un abierto Ω de $\mathbb{R}^n$ en un abierto $\phi(\Omega)$ de $\mathbb{R}^n$. ϕ es un isomorfismo C^k, si ϕ y ϕ^{-1} son aplicaciones de clase C^k. Análogo para C^∞.

Proposición.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $\phi: \Omega \to \mathbb{R}^n$ una función. Se supone:

i) ϕ es inyectiva.

ii) ϕ es de clase C^k en Ω $(1 \leq K \leq \infty)$.

iii) $J\phi(x) \neq 0$, $\forall x \in \Omega$ ($d\phi(x)$ es un aut. lineal).

Entonces $\phi(\Omega)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y ϕ es un isomorfismo C^k de Ω sobre $\phi(\Omega)$.

Sea E esp. vect. real, $a,b \in E$. El segmento $[a,b]$ se define como el conjunto:

$$[a,b] = \{ (1-t)a + tb \mid t \in [0,1] \}$$

Teorema (de incrementos finitos).

Sean E y F esp. normados. $S \subseteq E$ abierto y $\phi: S \to F$ una función. Sean $a,b \in S$ m $[a,b] \subseteq S$. Si ϕ es diferenciable en todos los puntos de $[a,b]$, se cumple:

i) $\|\phi(b) - \phi(a)\| \leq \|b-a\| \cdot \sup_{x \in [a,b]} \|d\phi(x)\|$

Si $d\phi$ es cont. en $[a,b]$, el supremo se alcanza en algún punto, luego es finito (y en este caso será un máximo).

Proposición.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\phi: \Omega \to \mathbb{R}^n$ aplicación de clase C^1. Si Z es un conjunto despreciable cont. en Ω, ent. $\phi(Z)$ es despreciable en $\mathbb{R}^n$.

Dem:

Como Ω puede ser escrito como unión numerable de cubos disjuntos cuyas adherencias están contenidas en Ω, basta probar que ϕ transforma la intersección de Z con cada una de esas adherencias en un conjunto despreciable.

Podemos suponer entonces que Z está contenido en un cubo cerrado K cont. en Ω. Se usará la norma $\|\cdot\|_\infty$. Sea $\varepsilon > 0$. Por un res. ant. $Z \subseteq \bigcup_{v=1}^{\infty} C_v$ donde los C_v son cubos disjuntos m

$$\sum_{v=1}^{\infty} Vol(C_v) \leq \varepsilon$$

Podemos suponer que $Z \cap C_v \neq \emptyset$, $\forall v \in \mathbb{N}$. Fije $x_v \in Z \cap C_v$, $\forall v \in \mathbb{N}$. Si $x \in Z \cap C_v$, el segmento $[x, x_v]$ está contenido en K (por ser K convexo). Sea l_v la arista de C_v, $\forall v \in \mathbb{N}$. Por el teorema ant:

$$\|\phi(x) - \phi(x_v)\|_\infty \leq \|x - x_v\|_\infty \left(\sup_{z \in [x, x_v]} \|d\phi(z)\| \right)$$

$$\leq l_\nu \underbrace{\sup_{z\in K} \| d\phi(z)\|}_{=\alpha}$$

(por ser $z \mapsto d\phi(z)$ continua en el cerrado K, que se supone además compacto por ser acotado). Esto significa que $\phi(Z\cap C_\nu)$ está contenido en un cubo Q_ν de centro $\phi(x_\nu)$ y de arista $2\alpha l_\nu$, i.e, de volumen $(2\alpha)^n \operatorname{Vol}(C_\nu)$ $(\operatorname{Vol}(C_\nu) = l_\nu^n)$. Así pues

$$\phi(Z) \subseteq \bigcup_{\nu=1}^{\infty} Q_\nu \text{, donde}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \operatorname{Vol}(Q_\nu) \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} (2\alpha)^n \operatorname{Vol}(C_\nu) \leq (2\alpha)^n \varepsilon$$

$\square$

Proposición.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y ϕ isomorfismo de clase C^1 de Ω sobre un abierto $\phi(\Omega)$ en $\mathbb{R}^n$. Si Q es un conjunto cuadrable (o acotado) cuya adherencia está contenida en Ω, ent. $\phi(Q)$ es un conjunto cuadrable (o acotado) en $\phi(\Omega)$.

Dem:

En part. ϕ es un homeomorfismo de Ω sobre $\phi(\Omega)$. Como $Fr(\phi(Q)) = \phi(Fr(Q))$, por el resultado anterior, $Fr(\phi(Q))$ debe ser desp. $\therefore$ Q cuadrable $\Rightarrow \phi(Q)$ cuadrable.

Si Q es acotado, ent. $\bar{Q}$ es compacto contenido en Ω, luego $\phi(\bar{Q})$ es compacto cont. en $\phi(\Omega)$, en part. acotado. Como $\phi(Q) \subseteq \phi(\bar{Q})$, ent. $\phi(Q)$ es acotado.

$\square$

Teorema (primer t. del val. medio).

Sea K compacto, conexo en $\mathbb{R}^n$. Si $f: K \to \mathbb{R}$ es continua, ent. $\exists\ x_0 \in K$ tq

$$\int_K f = f(x_0)\, m(K)$$

Dem.

Como K es compacto, $\exists\ x_1, x_2 \in K$ tq $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, $\forall\ x \in K$. Entonces:

$$f(x_1)\, m(K) \leq \int_K f \leq f(x_2)\, m(K)$$

Descartando el caso trivial $m(K)=0$, tenemos

$$f(x_1)\leq \frac{1}{m(K)}\int_K f \leq f(x_2)$$

Por ser K conexo y f continua, entonces $f(K)=[f(x_1),f(x_2)]$, luego $\exists\, x_0\in K \ni f(x_0)m(K)=\int_K f$.

Lema (primer lema fundamental).

Sea $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ abierto y ϕ isomorfismo C^1 de Ω sobre el abierto $\phi(\Omega)$ de $\mathbb{R}^n$. Si C es un cubo $\ni \bar{C}\subseteq\Omega$, ent.

$$m(\phi(C))\leq\int_C |J\phi|$$

Dem:

El primer miembro tiene sentido por ser $\phi(C)$ cuadrable y el segundo miembro tiene sentido pues $z\mapsto |J\phi|$ es continua en C.

a) Se afirma que si Q es un cubo $\ni \bar{Q}\subseteq\Omega$ y T es cualquier automorfismo lineal de $\mathbb{R}^n$, ent.

$$m(\phi(Q))\leq|\det T|\left(\sup_{z\in Q}\|T^{-1}\circ d\phi(z)\|\right)^n \operatorname{Vol} Q$$

En efecto, sean x_0 y λ el centro y arista de Q, resp. Se usará la norma $\|\cdot\|_\infty$. Por el teorema de incrementos finitos

$$\begin{aligned}\|\phi(x)-\phi(x_0)\|_\infty &\leq \|x-x_0\|_\infty \sup_{z\in Q}\|d\phi(z)\|\\ &\leq \frac{\lambda}{2}\sup_{z\in Q}\|d\phi(z)\|\end{aligned}$$

Ent. $\phi(Q)$ está cont. en un cubo de centro $\phi(x_0)$ y arista $\lambda\left(\sup_{x\in Q}\|d\phi(z)\|\right)$, i.e. de volumen:

$$\left[\lambda\left(\sup_{x\in Q}\|d\phi(z)\|\right)\right]^n=\left(\sup_{z\in Q}\|d\phi(z)\|\right)^n \operatorname{Vol} Q.$$ Por tanto:

$$m(\phi(Q))\leq\left(\sup_{z\in Q}\|d\phi(z)\|\right)^n\operatorname{Vol} Q \quad\ldots (1)$$

Sea T un aut. lineal arbitrario de $\mathbb{R}^n$. Como $T^{-1}\circ\phi$ es un isomorfismo clase C^1 de Ω sobre $T^{-1}(\phi(\Omega))$, se sigue de (1):

$$m(T^{-1}\circ\phi(Q))\leq\left(\sup_{z\in Q}\|d(T^{-1}\circ\phi)(z)\|\right)^n\operatorname{Vol} Q$$

$$= \left(\sup_{z \in Q} \| T^{-1} \circ d\phi(z) \| \right)^n \text{Vol } Q$$

Por la regla de la cadena y usando el hecho de que $dT^{-1}(\phi(z)) = T^{-1}$, $\forall z \in Q$. También:

$$m(T^{-1} \circ \phi(Q)) = m(T^{-1}(\phi(Q)))$$
$$= |\det T^{-1}| \, m(\phi(Q))$$
$$= \frac{1}{|\det T|} m(\phi(Q))$$

donde $\phi(Q)$ es cuadrable cuya adherencia está contenida en $\phi(\Omega)$. Luego:

$$m(\phi(Q)) = |\text{Det } T| \, m(T^{-1} \circ \phi(Q))$$
$$\leq |\text{Det } T| \, \text{Vol } Q \left(\sup_{z \in Q} \| T^{-1} \circ d\phi(z) \| \right)^n \ldots (2)$$

b) Sea C un cubo $\ni$ $\bar{C} \subseteq \Omega$. Como ϕ es un isomorfismo C^1 de Ω sobre $\phi(\Omega)$, la aplicación $z \mapsto d\phi(z)^{-1} = [d\phi^{-1}](\phi(z))$ de Ω en $CL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ es continua en Ω, luego es acotada en el compacto $\bar{C}$. Sea $M = \sup_{z \in \bar{C}} \| d\phi(z)^{-1} \|$. También, $z \mapsto d\phi(z)$ de Ω en $CL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ es cont. en Ω, en part. unif. cont. en $\bar{C}$.

Así pues, dado $\varepsilon > 0$ $\exists$ $\delta > 0$ $\ni$ si $z_1, z_2 \in \bar{C}$ y $\|z_1 - z_2\|_\infty < \delta \Rightarrow \| d\phi(z_1) - d\phi(z_2) \| \leq \frac{\varepsilon}{M}$. Divida a $\bar{C}$ en un número finito de cubos disjuntos cada uno con arista $< \delta$ $(C_1, \ldots, C_r)$.

Sea $x_k \in \bar{C_k}$, $\forall k \in [1, r]$. Si $T = d\phi(x)$, ent. $\det T = J\phi(x_k)$. Aplicando (2) a cada cubo C_k con estos T, se obtiene:

$$(3) \ldots \quad m(\phi(C)) = \sum_{k=1}^{r} m(\phi(C_k)) \leq \sum_{k=1}^{r} |J\phi(x_k)| \, \text{Vol } C_k \left(\sup_{z \in \bar{C_k}} \| d\phi(x_k)^{-1} \circ d\phi(z) \| \right)^n$$

Debido a la cont. uniforme, $d\phi(z)$ es casi $d\phi(x_k)$, luego $d\phi(z)^{-1}$ es casi $d\phi(x_k)^{-1}$, de donde $d\phi(x_k)^{-1} \circ d\phi(z)$ debe ser casi la identidad. Más formalmente:

$$\| I - d\phi(x_k)^{-1} \circ d\phi(z) \| \leq \| d\phi(x_k)^{-1} \circ (d\phi(x_k) - d\phi(z)) \|$$
$$\leq \| d\phi(x_k) \|^{-1} \cdot \| d\phi(x_k) - d\phi(z) \|$$
$$\leq M \cdot \frac{\varepsilon}{M}$$
$$= \varepsilon$$

$$\Rightarrow \| d\phi(x_k)^{-1} \circ d\phi(z) \| \leq \varepsilon + 1, \quad \forall k \in [1, r], \forall z \in \bar{C_k}$$

Pues $\|I\|=1$. Luego en (1):

$$m(\phi(C)) \leq (1+\varepsilon)^n \cdot \sum_{k=1}^{r} |J\phi(x_k)| \, Vol(C_k)$$

En part. cada $x_k \in \overline{C_k}$ puede ser elegido tal que $|J\phi(x_k)| Vol\, \overline{C_k} = \int_{\overline{C_k}} |J\phi|$, por el t. anterior. Se tiene entonces que:

$$m(\phi(C)) \leq (1+\varepsilon)^n \sum_{k=1}^{r} \int_{\overline{C_k}} |J\phi|$$
$$= (1+\varepsilon)^n \sum_{k=1}^{r} \int_{C_k} |J\phi|$$
$$= (1+\varepsilon)^n \cdot \int_C |J\phi|$$

Por ser $\varepsilon > 0$ arbitrario, se tiene que

$$m(\phi(C)) \leq \int_C |J\phi|$$

$\square$

Proposición.

Sea $\phi: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \phi(\Omega)$ isomorfismo C^1 (Ω abierto). Si Q es un conjunto abierto o cuadrable cont. en Ω, ent. $\phi(Q)$ es medible contenido en $\phi(\Omega)$ y:

$$m(\phi(Q)) \leq \int_Q |J\phi| \leq \infty$$

Dem:

a) Sea G abierto tal que $G \subseteq \Omega$. Ent. $G = \bigcup_{v=1}^{\infty} C_v$ donde los $C_v \subseteq \mathbb{R}^n$ son cubos disjuntos tal que $\overline{C_v} \subseteq \Omega$, $\forall v \in \mathbb{N}$. Ent. $\phi(G) = \bigcup_{v=1}^{\infty} \phi(C_v)$ donde los $\phi(C_v)$ son med. disjuntos (ϕ es homeomorfismo) y:

$$m(\phi(G)) = \sum_{v=1}^{\infty} m(\phi(C_v)) \leq \sum_{v=1}^{\infty} \int_{C_v} |J\phi| \overset{T.C.M}{=} \int_G |J\phi| \leq \infty$$

b) Sea Q cuadrable cont. en Ω. Ent.

$$\phi(Q) = \phi(\mathring{Q} \cup (Q \setminus \mathring{Q})) = \phi(\mathring{Q}) \cup \phi(Q \setminus \mathring{Q})$$

donde $\phi(\mathring{Q})$ es abierto y $\phi(Q \setminus \mathring{Q})$ es despreciable (pues Q es cuadrable). Por tanto $\phi(Q)$ es med. y:

$$m(\phi(Q)) = m(\phi(\mathring{Q})) \leq \int_{\mathring{Q}} |J\phi| = \int_Q |J\phi| \leq \infty$$

$\square$

Def. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Una función $\varphi : \Omega \to \mathbb{K}$ se dice que es escalonada en el abierto Ω, si es de la forma:

$$\varphi = \sum_{k=1}^{r} c_k \chi_{P_k}$$

donde los P_k son red. acot. disjuntos $\ni$ $\overline{P_k} \subseteq \Omega$ y $c_k \in \mathbb{K}$, $\forall k \in [\![1, r]\!]$. $\mathcal{E}(\Omega, \mathbb{K})$ denota al conjunto de fun. esc. en el abierto Ω.

Lema (Segundo lema fundamental).

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y ϕ isomorfismo C^1 de Ω sobre el abierto $\phi(\Omega)$. Si $f : \phi(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ es med. no neg. en $\phi(\Omega)$, ent. $|J\phi| f \circ \phi : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ es med. no neg, equivalentemente, $f \circ \phi : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ es med. no neg. en Ω y:

$$\int_{\phi(\Omega)} f \leq \int_{\Omega} |J\phi| f \circ \phi \leq \infty$$

Dem:

a) Suponga $f = \chi_{S'}$, donde $S' \subseteq \phi(\Omega)$ cuadrable y acotado $\ni$ $\overline{S'} \subseteq \phi(\Omega)$. Ent.

$$\begin{aligned} |J\phi| f \circ \phi &= |J\phi| \chi_{S'} \circ \phi \\ &= |J\phi| \chi_{\phi^{-1}(S')} \\ &= |J\phi| \chi_S \end{aligned}$$

donde $S = \phi^{-1}(S')$ es cuadrable acotado, luego $|J\phi| \chi_S$ es med. (o aún integrable) y:

$$\int_{\phi(\Omega)} \chi_{S'} \leq \int_{\Omega} |J\phi| \chi_S \,, \text{ i.e.:}$$

$$m(S') \leq \int_S |J\phi| \text{ equiv.}$$

$$m(\phi(S)) \leq \int_S |J\phi|$$

lo cual se probó anteriormente. En particular si $f=\chi_{P'}$, P' rect. acotado $\ni$ $\overline{P'}\subseteq\phi(\Omega)$ $\ni$ $\overline{P}\subseteq\phi(\Omega)$, el enunciado es correcto y por linealidad, el resultado es cierto si $f\in$ $\mathcal{E}(\phi(\Omega),\mathbb{K})$.

b) Suponga ahora que $f:\phi(\Omega)\to\overline{\mathbb{R}}$ es med. no neg. acotada y nula fuera de algún elemental $Q'\subseteq\phi(\Omega)$ $\ni$ $\overline{Q'}\subseteq\phi(\Omega)$. Sea $\tilde{f}$ la amp. canónica de f en todo $\mathbb{R}^n$. $\exists$ $\{\psi_v\}_{v=1}^{\infty}$ sucesión en $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ $\ni$:

$$\lim_{v\to\infty}\psi_v=\tilde{f}\ \text{c.t.p. en } \mathbb{R}^n$$

Sea $M\geq 0$ $\ni$ $|f|\leq M$. Defino:

$$\varphi_v=\min\{|\psi_v|,M\}\chi_{Q'},\ \forall v\in\mathbb{N}$$

Claramente $\{\varphi_v\}_{v=1}^{\infty}$ es una sucesión en $\mathcal{E}(\phi(\Omega),\mathbb{R})$ $\ni$

$$\begin{aligned}\lim_{v\to\infty}\varphi_v&=\lim_{v\to\infty}\min\{|\varphi_v|,M\}\chi_{Q'}\\&=\min\{|f|,M\}\chi_{Q'}\\&=f\ \text{c.t.p. en } \phi(\Omega)\ (\text{donde es c.t.p. tome } \phi(Z))\end{aligned}$$

$$\text{y}\quad 0\leq\varphi_v\leq M\chi_{Q'},\ \forall v\in\mathbb{N}.$$

donde $M\chi_{Q'}$ es integrable e indep. de v. Por Lebesgue y a)

$$0\leq\int_{\phi(\Omega)}\varphi_v\leq\int_{\Omega}|J\phi|\varphi_v\circ\phi,\ \forall v\in\mathbb{N}.$$

Como ϕ^{-1} transforma conjuntos desp. sobre conjuntos desp.:

$$\lim_{v\to\infty}|J\phi|\varphi_v\circ\phi=|J\phi|f\circ\phi\ \text{c.t.p en } \Omega$$

donde el c.t.p. es Z. Además:

$$0\leq|J\phi|\varphi_v\circ\phi\leq|J\phi|M\chi_{Q'}\circ\phi=M|J\phi|\chi_{\phi^{-1}(Q')}$$

$\forall v\in\mathbb{N}$, donde $\phi^{-1}(Q')$ es cuadrable acotado $\ni$ $\overline{\phi^{-1}(Q')}\subseteq\Omega$, luego $|J\phi|M\chi_{\phi^{-1}(Q')}$ es integrable e indep. de v. Por Lebesgue, resulta:

$$\int_{\phi(\Omega)}f\leq\int_{\Omega}|J\phi|f\circ\phi$$

($J\circ\phi$ es med. por ser límite c.t.p. de medibles).

c) Suponga f med. no neg. en $\phi(\Omega)$. Como $\phi(\Omega)$ es abierto: $\phi(\Omega)=\bigcup_{v=1}^{\infty} C_v$, $\{C_v\}_{v=1}^{\infty}$ son cubos disjuntos m $\overline{C_v}\subseteq\phi(\Omega)$. Sea:

$$Q_v'=\bigcup_{k=1}^{v} C_k$$

los Q_v' son elementales y $\overline{Q_v}\subseteq\phi(\Omega)$, $\forall v\in\mathbb{N}$. Defina

$$f_k=\min\{f,k\}\chi_{Q_k'}, \ \forall k\in\mathbb{N}$$

$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ son med. acotadas y nulas fuera de un elemental, así se puede aplicar b) a estas funciones:

$$0\leq\int_{\phi(\Omega)} f_k\leq\int_{\Omega}|J\phi|f_k\circ\phi$$

$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de func. crecientes de med. no neg. m

$$\lim_{k\to\infty} f_k(y)=f(y), \ \forall y\in\phi(\Omega)$$

Ent.

$$\lim_{k\to\infty}|J\phi|f_k\circ\phi(x)=|J\phi|f\circ\phi, \ \forall x\in\Omega$$

además $\{|J\phi|f_k\circ\phi\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente no neg. de func. medibles. Por conv. monótona:

$$0\leq\int_{\phi(\Omega)} f\leq\int_{\Omega}|J\phi|f\circ\phi$$

En part. $|J\phi|f\circ\phi$ es med. no neg. en ϕ.

$\square$

Teorema (Cambio de variable para med. no neg.)

Sea $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ abierto, $\phi:\Omega\to\mathbb{R}^n$ isomorfismo C^1 y sea $f:\phi(\Omega)\to\overline{\mathbb{R}}$ una función. f es med. no neg. en $\phi(\Omega)\iff|J\phi|f\circ\phi$ es med. no neg. en Ω, equiv. $f\circ\phi$ es med. no negativa y en este caso:

$$\int_{\phi(\Omega)} f=\int_{\Omega}|J\phi|f\circ\phi\leq\infty$$

Dem:

Ya se sabe que si f es med. no neg. ent. $g = |J\phi| f\circ\phi$ es med. no neg. y además:

$$\int_{\phi(\Omega)} f \leq \int_{\Omega} g = \int_{\Omega} |J\phi| f\circ\phi \leq \infty$$

por el lema ant.

Suponiendo g med. no neg. en Ω, se puede aplicar el lema ant. a g en lugar de f a $\phi(\Omega)$ en lugar de Ω y a ϕ^{-1} en lugar de ϕ, resulta que $|J\phi^{-1}| g\circ\phi^{-1}$ es med. no neg. y:

$$\begin{aligned} |J\phi^{-1}| g\circ\phi^{-1} &= |J\phi^{-1}|\cdot((|J\phi| f\circ\phi)\circ\phi^{-1}) \\ &= |J\phi^{-1}|\cdot|(J\phi)\circ\phi^{-1}| f \\ &= f \end{aligned}$$

i.e f es med. no neg. y:

$$\int_{\Omega} g \leq \int_{\phi(\Omega)} f \Rightarrow \int_{\Omega} |J\phi| f\circ\phi \leq \int_{\phi(\Omega)} f$$

$$\therefore \int_{\phi(\Omega)} f = \int_{\Omega} |J\phi| f\circ\phi \leq \infty$$

$\square$

Corolario.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $\phi: \Omega \to \phi(\Omega)$ isomorfismo C^1, $f: \phi(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ una fun. y $A \subseteq \Omega$.
Ent. f es med. no neg. en $\phi(A) \iff f\circ\phi$ es med. no neg. en A y:

$$\infty \geq \int_{\phi(A)} f = \int_A |J\phi| f\circ\phi \quad (A \text{ med}).$$

Dem:

Basta aplicar el t. ant. a $f\cdot\chi_{\phi(A)}$.

$\square$

Corolario.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $\phi: \Omega \to \phi(\Omega)$ isomorfismo C_1. $A \subseteq \Omega$ es medible $\iff \phi(A)$ es medible en $\phi(\Omega)$ y:

$$m(\phi(A)) = \int_A |J\phi| \leq \infty$$

En part. si $\Omega = \mathbb{R}^n$ y T es aut. lineal y $A \subseteq \mathbb{R}^n$. ent. A es medible $\Longleftrightarrow$ $T(A)$ es med.

y

$$m(T(A)) = |\operatorname{Det} T| \, m(A) \leq \infty$$

Teorema (Cambio de Variable para fun. integrables).

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $\phi: \Omega \to \phi(\Omega)$ isomorfismo C^1 y $f: \phi(\Omega) \to \mathbb{K}$. Ent. f es integrable en $\phi(\Omega) \Longleftrightarrow |J\phi| f \circ \phi$ es integrable en Ω y en este caso:

$$\int_{\phi(\Omega)} f = \int_\Omega |J\phi| f \circ \phi < \infty$$

Dem:

a) Suponga $f: \phi(\Omega) \to \mathbb{R}$ integrable en $\phi(\Omega)$. Ent. f^+ y f^- son int. no neg. en $\phi(\Omega)$, por el T.C.V para med. no neg. $|J\phi| f^+ \circ \phi$ y $|J\phi| f^- \circ \phi$ son med. no neg.

Además:

$$\int_\Omega |J\phi| f^+ \circ \phi = \int_{\phi(\Omega)} f^+ < \infty$$

lo mismo con f^-, luego: $|J\phi| f \circ \phi = |J\phi| f^+ \circ \phi - |J\phi| f^- \circ \phi$ es int. en Ω y:

$$\int_\Omega |J\phi| f \circ \phi = \int_\Omega |J\phi| f^+ \circ \phi - \int_\Omega |J\phi| f^- \circ \phi = \int_{\phi(\Omega)} f^+ - \int_{\phi(\Omega)} f^- = \int_{\phi(\Omega)}$$

b) Suponga $f: \phi(\Omega) \to \mathbb{C}$ integrable. Ent. $g, h: \phi(\Omega) \to \mathbb{R}$ son integrables, donde:

$$g = \operatorname{Re} f \quad y \quad h = \operatorname{Im} f$$

Por a)

$$|J\phi| f \circ \phi = |J\phi| g \circ \phi + i |J\phi| h \circ \phi$$

es int. en $\phi(\Omega)$ y:

$$\int_\Omega |J\phi| f \circ \phi = \int_\Omega |J\phi| g \circ \phi + i \int_\Omega |J\phi| h \circ \phi$$

$$= \int_{\phi(\Omega)} g + i \int_{\phi(\Omega)} h$$

$$= \int_{\phi(\Omega)} f$$

c) Se aplica b) a $\phi(\Omega)$ en lugar de Ω y a ϕ^{-1} en lugar de ϕ y a $g = |J\phi| f\circ\phi$ en lugar de f. Resulta que es integrable en Ω:

$$|J\phi^{-1}| g\circ\phi^{-1} = |J\phi^{-1}| |J\phi\circ\phi^{-1}| f\circ\phi\circ\phi^{-1}$$
$$= f$$

$\square$

Teorema (Criterio de medibilidad)

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, ϕ isomorfismo C^1 de Ω sobre el abierto $\phi(\Omega)$ y $f:\phi(\Omega) \to \mathbb{K}$ una función. Ent. f es med. en $\phi(\Omega) \iff f\circ\phi$ es med. en Ω.

Dem:

a) Suponga $f:\phi(\Omega)\to\mathbb{R}$ medible, ent. f^+ y f^- son med. no neg. en $\phi(\Omega)$, por tanto $f^+\circ\phi$ y $f^-\circ\phi$ son med. no neg. en Ω. Luego

$$f\circ\phi = f^+\circ\phi - f^-\circ\phi$$

es med.

b) Suponga $f:\phi(\Omega)\to\mathbb{C}$, $g = \mathrm{Re} f$ y $h = \mathrm{Im} f$, ent. g y h son med. y por a) es med. en Ω $g\circ\phi$ y $h\circ\phi$, por tanto $f\circ\phi = g\circ\phi + i h\circ\phi$ es med.

c) Sea $f:\phi(\Omega)\to\mathbb{K}$. Suponga que $f\circ\phi:\Omega\to\mathbb{K}$ es med. Por b): aplicando a $\phi(\Omega)$ en vez de Ω, ϕ^{-1} en lugar de ϕ y g en lugar de f, es med. en $\phi(\Omega)$ $g\circ\phi^{-1} = f$.

$\square$

Corolario.

Sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{K}$ una función y sea $a\in\mathbb{R}^n$. Se define $f_a:\mathbb{R}^n\to\mathbb{K}$, $x\mapsto x+a$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$. f es med. $\iff$ f_a es med. Además, f es int. en un conjunto $a+A$ en $\mathbb{R}^n$ $\iff$ f_a es int. en A y:

$$\int_{A+a} f(x)\,dx = \int_A f_a(x)\,dx = \int_A f(x+a)\,dx$$

Si $A=\mathbb{R}^n$ (A med.): $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x+u)\,dx$.

Dem:

Tome $\Omega=\mathbb{R}^n$ y $\phi(x)=x+u$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$. Aplicar el criterio de med. a ϕ isomorfismo C^1, f y Ω, con Jacobiano $|J\phi|=1$.

$\square$

Corolario.

Sea $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ abierto, ϕ isomorfismo C^1 de Ω sobre el abierto $\phi(\Omega)$, $f:\phi(\Omega)\to\mathbb{R}$ y $A\subseteq\Omega$.

Ent. f es integrable en $\phi(A)$ $\iff$ $|J\phi|\,f\circ\phi$ es int. en A y:

$$\int_{\phi(A)} f = \int_A |J\phi|\, f\circ\phi$$

Dem:

Basta aplicar el TCV a $f\chi_{\phi(A)}$.

$\square$

Ejemplo.

1) Calcule (si existe) la integral reiterada:

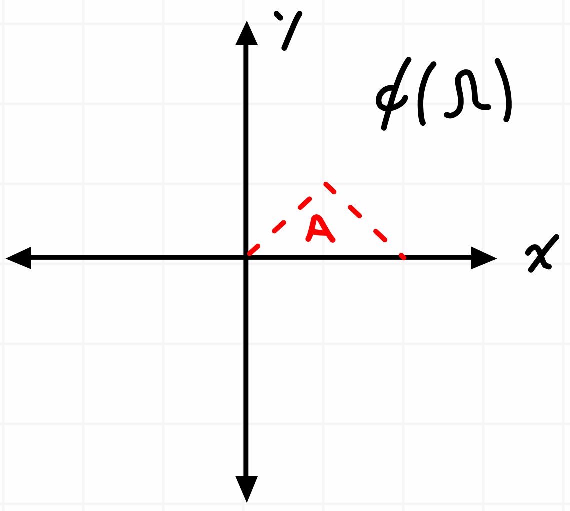
$$\int_0^{1/2} dy \int_y^{1-y} \frac{x-y}{(x+y)}\,dx$$

Considere el abierto $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<y<\frac{1}{2},\ y<x<1-y\}$ y $f:\mathbb{R}^2\to\overline{\mathbb{R}}$, $f(x,y)=\frac{x-y}{(x+y)^2}$ si $(x,y)\in A\setminus\Delta$ y $f(x,y)=0$ si $(x,y)\in\Delta$. Donde:

$$\Delta=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=-y\}.$$

f es med. no neg. Por Fubini para med. no neg.

$$\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{1/2} dy \int_y^{1-y} \frac{x-y}{(x+y)^2}\,dx$$



Considere el isomorfismo C^1: $\phi^{-1}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

$\phi^{-1}(x,y)=(u(x,y),v(x,y))=(x+y,x-y)$

ϕ^{-1} es invertible con inversa $\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $(u,v)\mapsto\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right)$

De Jacobiano:

$$|J\phi(u,v)| = |\mathrm{Det}\,\phi| = \left\|\begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2},\ \forall\,(u,v)\in\mathbb{R}^2$$

Por el T.C.V para med. no neg.

$$\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\phi^{-1}(A)} |J\phi(u,v)|\, f\circ\phi(u,v)\,du\,dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\phi^{-1}(A)} \frac{v}{u^2}\,du\,dv$$

donde

$$\phi^{-1}(A) = B$$

$$= \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<u<1 \text{ y } 0<v<u\}$$

Por tanto, por Fubini para med. no neg.

$$\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 du \int_0^u \frac{v}{u^2}\,dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left.\frac{v^2}{2u^2}\right|_0^u$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 du$$

$$= \frac{1}{4}$$

2) Sea A la región del primer cuadrante en $\mathbb{R}^2$ limitada por las curvas siguientes:

$$x-y=0,\quad y^2-x^2=1,\quad xy=a \text{ y } xy=b$$

donde $b \geq a > 0$. Sea $f: A \to \mathbb{R}$ la función:

$$f(x,y) = (y^2-x^2)^{xy}(x^2+y^2),\ \forall\,(x,y)\in A$$

Pruebe que A es medible, f es integrable en A y calcule:

$$\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_A (y^2-x^2)^{xy}(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

Sol.

Se tiene:

$$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0,\ y>0,\ 0\leq y^2-x^2\leq 1 \text{ y } a\leq xy\leq b\}$$

(en el primer cuadrante, $x^2 = y^2 \iff x = y$). Se sugiere cambiar a nuevas coordenadas

$$u(x,y) = y^2 - x^2 \quad y \quad v(x,y) = xy$$

Con estas nuevas coordenadas, el conjunto A puede ser descrito como $[0,1] \times [a,b]$. Se tiene una función $\phi^{-1} : \phi(\Omega) \to \Omega$, $(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$. ($\phi(\Omega)$ es el primer cuadrante en $\mathbb{R}^2$).

Claramente ϕ^{-1} es clase C^1 en $\phi(\Omega)$ y:

$$|J\phi^{-1}(x,y)| = \left\| \begin{vmatrix} -2x & 2y \\ y & x \end{vmatrix} \right\| = 2(x^2+y^2) \neq 0, \ \forall (x,y) \in \phi(\Omega)$$

Entonces $\phi^{-1}(\phi(\Omega))$ es abierto en $\mathbb{R}^2$ (por el t. de la func. inversa) denotado por Ω y ϕ^{-1} es un isomorfismo C^1 de $\phi(\Omega)$ de $\mathbb{R}^2$ sobre Ω. Se tiene

$$B = \phi^{-1}(A) = [0,1] \times [a,b]$$

el cual es med. (por ser rect.). Como ϕ^{-1} es isomorfismo C^1, entonces $A = \phi(B)$ es medible.

Observe que:

$$|J\phi(\phi^{-1}(x,y))| = \frac{1}{|J\phi^{-1}(x,y)|} = \frac{1}{2(x^2+y^2)}, \ \forall (x,y) \in \phi(\Omega)$$

Ent.

$$\begin{aligned} |J\phi(u,v)| f\circ\phi(u,v) &= |J\phi(\phi^{-1}(x,y))| f\circ\phi(\phi^{-1}(x,y)) \\ &= \frac{1}{2(x^2+y^2)} f(x,y) \\ &= \frac{1}{2(x^2+y^2)} (y^2-x^2)^{xy} \cdot (x^2+y^2) \\ &= \frac{1}{2}(y^2-x^2)^{xy} \\ &= \frac{1}{2} u^v, \ \forall (u,v) \in \Omega \end{aligned}$$

Por el T.C.V.

$$\begin{aligned} \int_A f(x,y)\,dx\,dy &= \int_B |J\phi(u,v)| f\circ\phi(u,v)\,du\,dv \\ &= \int_B \frac{1}{2} u^v\,du\,dv \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\int_B u^v\,du\,dv$$

$g: B \to \mathbb{R}$, $(u,v) \mapsto u^v$ es no neg. med. por tanto, por Tonelli:

$$= \frac{1}{2}\int_a^b dv \int_0^1 u^v\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b dv \left(\frac{u^{v+1}}{v+1} \Big|_0^1 \right)$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b \frac{1}{v+1}\,dv$$

$$= \frac{1}{2}\ln|v+1|\Big|_a^b$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right)$$

$\square$

Note en este ejemplo que no fue necesario calcular explícitamente a ϕ.

COORDENADAS POLARES Y ESFÉRICAS.

Sea P un punto en $\mathbb{R}^2$. Por ejemplo el disco de centro 0 y radio 3, en coords. rect. se representaría como:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 9\}$$

En coordenadas polares $(r \geq 0 \text{ y } -\pi \leq \theta \leq \pi)$ será:

$$A = \{(r,\theta) \mid 0 \leq r \leq 3 \text{ y } -\pi \leq \theta \leq \pi\}$$

Un posible "traductor" entre ambos tipos de coordenadas sería un isomorfismo C^∞, pero para definirlo, hay que eliminar los puntos con doble representación polar. Se definen:

$$\Omega =]0,\infty[\times]-\pi,\pi[\quad \text{(Polares)}$$

$$\Omega' = \mathbb{R}^2 \setminus \{]-\infty,0] \times \{0\}\} \quad \text{(Rectangulares)}$$

ambos abiertos en $\mathbb{R}^2$. Se define $\phi: \Omega \to \Omega'$, $(r,\theta) \mapsto (x(r,\theta) = r\cos\theta,\ y(r,\theta) = r\,\text{sen}\,\theta)$. ϕ es clase C^∞ y es isomorfismo C^∞ de Ω sobre Ω'. En efecto:

$$\phi^{-1} \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = 2\,\text{atan}\,\dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

dónde la última fórmula se obtiene de la identidad:

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta} \quad \text{inyectiva en }]-\pi,\pi[$$

y sustituyendo $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ y $\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Por tanto ϕ es biyectiva y

$$\phi^{-1}(x,y) = (r(x,y), \theta(x,y)) = \left(\sqrt{x^2+y^2},\ 2\operatorname{atan}\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

claramente ϕ^{-1} es clase C^∞, luego ϕ es isomorfismo C^∞ de Ω sobre Ω'. Y:

$$|J\phi(r,\theta)| = \left|\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}\right| = r, \ \forall (r,\theta)\in\Omega$$

$\therefore$ Si $f:\Omega'\to \mathbb{K}$ o $f:\Omega'\to[0,\infty]$, entonces:

$$\int_{\Omega'} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\Omega} |J\phi(r,\theta)|\, f\circ\phi(r,\theta)\,dr\,d\theta$$
$$= \int_{\Omega} r\, f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\,dr\,d\theta$$

Siempre que uno de los dos lados tenga sentido. Finalmente, como $\mathbb{R}^2\setminus\Omega'$ y $[0,\infty[\times[-\pi,\pi]\setminus\Omega$ son despreciables, se puede escribir:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{[0,\infty[\times[-\pi,\pi]} r\, f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\,dr\,d\theta$$

EJEMPLO.

1) Sea $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$. Calcule $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy$. Cambiando a polares como f es med. no neg.

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{[0,\infty[\times[-\pi,\pi]} r\,e^{-r^2}\,dr\,d\theta$$

Como $(r,\theta)\mapsto re^{-r^2}$ es med. no neg. Por Fubini:

$$= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^\infty r\,e^{-r^2}\,dr$$
$$= 2\pi\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^\infty\right]$$ (falta usar T.C.M y T.F.C para Riemann
$$= \pi$$

También, para Fubini en func. med. no neg.

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}dt\right)^2 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$$

Calcule $\int_0^\infty e^{-t^2}dt$. Se tiene:

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-t^2}dt + \int_0^\infty e^{-t^2}dt$$

En la primera haciendo el c.de.v $t=-u$, el jacobiano tiene valor absoluto 1 y: $\varphi^{-1}(]-\infty,0]) = [0,\infty[$, resulta:

$$\sqrt{\pi} = \int_0^\infty e^{-t^2}dt + \int_0^\infty e^{-u^2}du = 2\int_0^\infty e^{-t^2}dt$$

$$\therefore \int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \;//$$

$\square$

Más generalmente, si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una func. integrable par, entonces:

$$\int_{\mathbb{R}} f = 2\int_0^\infty f$$

y si f es impar $\int_{\mathbb{R}} f = \int_{-a}^{a} f = 0$, $\forall\ a\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}$.

Volumen De La Bola Euclidiana En $\mathbb{R}^n$ (con la norma N_2).

Se calculará primero el volumen de una bola euclidiana arbitraria en func. del volumen de la bola euclideana unitaria.

a) Sea

$$U = \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^n x_k^2 \leq 1\}$$

y sea $B'(a,r) = \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^n (x_k-a_k)^2 \leq r^2\}$. Sea $\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $(x_1,\dots,x_n)\mapsto(rx_1+a_1,\dots,rx_n+a_n)$. ϕ claramente es isomorfismo C^∞ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, con $\phi^{-1}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$,

$$(y_1,\dots,y_n) = \left(\tfrac{1}{r}(y_1-a_1),\dots,\tfrac{1}{r}(y_n-a_n)\right)$$

Se afirma que $\phi(U) = B'(a,r)$. Si $x\in U$,

$$\phi(x_1,\dots,x_n) = (rx_1+a_1,\dots,rx_n+a_n)$$

y $N_2(x-a) = \sum_{k=1}^n (rx_k+a_k-a_k)^2 = r^2\sum_{k=1}^n x_k^2 \leq r^2 \Rightarrow \phi(x)\in B'(a,r)$. El punto $y\in B'(a,r)$ viene del punto $\left(\frac{y_1-a_1}{r},\dots,\frac{y_n-a_n}{r}\right)\in U$.

Por tanto, se tiene la igualdad. Y:

$$|J\phi(x_1,\dots,x_n)| = \left\| \begin{matrix} r & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r \end{matrix} \right\| = r^n$$

Ent.

$$\begin{aligned} m(B'(a,r)) &= \int_{\phi^{-1}(B'(a,r))} |J\phi(v_1,\dots,v_n)|\, dv_1 \cdot \dots \cdot dv_n \\ &= \int_U r^n du_1 \cdot \dots \cdot du_n \\ &= r^n \omega_n \end{aligned}$$

donde $\omega_n = \int_U du_1 \cdot \dots \cdot du_n = m(U)$.

Si $B(a,r)$ es abierta, su frontera es $S(a,r)$, la cual es medible por ser cerrada. La sección al nivel $(x_1,\dots,x_{n-1})$ consta a lo más de dos puntos, luego la sección debe ser despreciable. Por Fubini: $m(S(a,r)) = 0$.

$$\therefore m(B(a,r)) = m(B'(a,r)) = r^n \omega_n$$

Ahora, para calcular ω_n, escribimos (cuando $n \geq 3$) $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$, $\pi_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$, $(x_1,\dots,x_n) \mapsto (x_1,x_2)$.

Ent. Por Cavalieri:

$$\omega_n = \int_{\pi_2(U)} m_{n-2}([U]_{(x_1,x_2)})\, dx_1 dx_2$$

donde:

$$\begin{aligned} [U]_{(x_1,x_2)} &= \{(x_3,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n-2} \mid (x_1,\dots,x_n) \in U\} \\ &= \{(x_3,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n-2} \mid \sum_{k=3}^{n} x_k^2 \leq 1 - x_1^2 - x_2^2\} \end{aligned}$$

Ent. $[U]_{(x_1,x_2)} \neq \emptyset \iff x_1^2 + x_2^2 \leq 1$, luego:

$$\begin{aligned} \pi_2(U) &= \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 / [U]_{(x_1,x_2)} \neq \emptyset\} \\ &= \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \end{aligned}$$

así: $\pi_2(u)$ es la bola unitaria en $\mathbb{R}^2$ y $[u]_{(x_1,x_2)}$ es la bola de radio $\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}$, $\forall (x_1, x_2) \in \pi_2(u)$. Así:

$$\begin{aligned}
w_n &= \int_{x_1^2+x_2^2\leq 1} (1-x_1^2-x_2^2)^{\frac{n-2}{2}} w_{n-2}\, dx_1\, dx_2 \\
&= w_{n-2} \int_{x_1^2+x_2^2\leq 1} (1-x_1^2-x_2^2)^{\frac{n}{2}-1} dx_1\, dx_2 \\
\text{(Polares).}\quad &= w_{n-2} \int_0^1 dr \int_{-\pi}^{\pi} (1-r^2)^{\frac{n}{2}-1} r\, d\theta \\
&= \frac{2\pi}{n} w_{n-2}
\end{aligned}$$

Así:

$$w_1 = \frac{2\pi^0}{1}, \quad w_3 = \frac{2\pi}{3} w_1, \quad w_{2n-1} = \frac{2\pi}{2n-1} w_{2n-3}, \dots$$

$$\therefore w_{2n-1} = \frac{2^n \pi^{n-1}}{(2n-1)!!}, \ \forall n \in \mathbb{N}. \ (\text{donde } (2n-1)!! = 1\cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1))$$

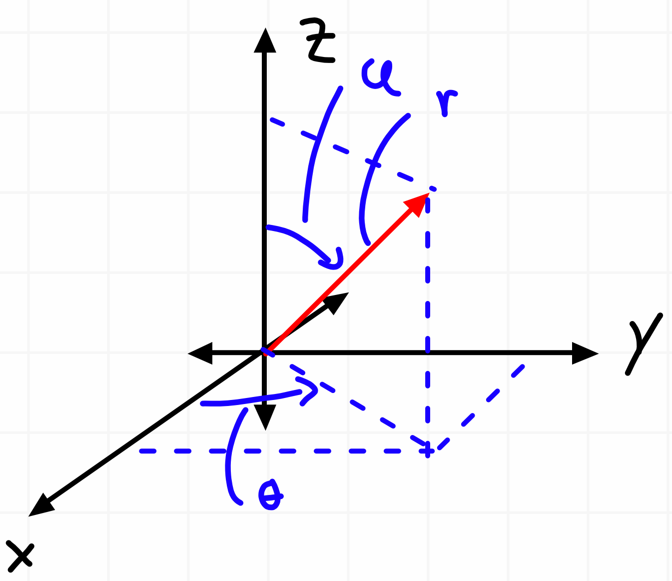
$$w_2 = \frac{2\pi}{2}, \quad w_4 = \frac{2\pi}{4} w_2, \ \dots, \ w_{2n} = \frac{2\pi}{2n} w_{2n-2}, \dots$$

$$\therefore w_{2n} = \frac{\pi^n}{n!}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Por ejemplo: $w_1 = 2$, $w_2 = \pi$, $w_3 = \frac{4}{3}\pi$, ...

COORDENADAS ESFÉRICAS.

Considere un punto $P(x,y,z)$ representado en coordenadas rectangulares. Podemos expresar a este punto (considerando que no está en A), como:



$$x = r \operatorname{sen}\varphi \cos\theta$$

$$y = r \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta$$

$$z = r \cos\varphi$$

En este caso, $J\phi(r, \varphi, \theta) = r^2 \operatorname{sen}\varphi$. Entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_{\substack{r>0 \\ 0<\varphi<\pi \\ -\pi<\theta<\pi}} f(r\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, r\cos\varphi) r^2 \sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta$$

donde $r>0$, $0<\varphi<\pi$ y $-\pi<\theta<\pi$. $A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=0, \ x\leq 0\}$.

Coordenadas Esféricas En $\mathbb{R}^n$.

Dado $p \in \mathbb{R}^n$ se describe esféricamente usando la distancia r de p al origen, y en ángulo φ_K formado por la proyección ortogonal del segmento que une a p con el origen sobre el subespacio generado por $x_K, \ldots, x_n$ y el eje x_K positivo, para $K \in [\![1, n-1]\!]$.

En $\mathbb{R}^3$, $x_1 = z$, $x_2 = x$ y $x_3 = y$.

Para evitar duplicidad de representaciones se restringen $r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ $\Rightarrow$ $0 < \varphi_K < \pi$, $K \in [\![1, n-1]\!]$, $r > 0$ y $-\pi < \varphi_{n-1} < \pi$.

Teorema.

Considere los abiertos en $\mathbb{R}^n$:

$$\Omega_n = \{ (r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \varphi_K < \pi,\ K \in [\![1, n-1]\!],\ r > 0 \text{ y } -\pi < \varphi_{n-1} < \pi \}$$

$$\Omega_n' = \mathbb{R}^n \setminus \{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_{n-1} < 0,\ x_n = 0 \}$$

Sea $\phi : \Omega_n \to \Omega_n'$:

$$\phi \begin{cases} x_1(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) = r \cos\varphi_1 \\ x_2(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) = r \operatorname{sen}\varphi_1 \cos\varphi_2 \\ \vdots \\ x_{n-1}(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) = r \operatorname{sen}\varphi_1 \cos\varphi_2 \cdot \ldots \cdot \operatorname{sen}\varphi_{n-2} \cos\varphi_{n-1} \\ x_n(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) = r \operatorname{sen}\varphi_1 \cos\varphi_2 \cdot \ldots \cdot \operatorname{sen}\varphi_{n-2} \operatorname{sen}\varphi_{n-1} \end{cases}$$

Ent. ϕ es isomorfismo C^∞ de Ω_n sobre Ω_n' y ϕ^{-1} está dado por:

$$\phi^{-1} \begin{cases} r(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \\ \varphi_K(x_1, \ldots, x_n) = 2\arctan\left(\dfrac{\sqrt{x_{K+1}^2 + \ldots + x_n^2}}{x_K + \sqrt{x_K^2 + \ldots + x_n^2}} \right),\ K \in [\![1, n-1]\!] \\ \varphi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) = 2\arctan\left(\dfrac{x_n}{x_{n-1} + \sqrt{x_{n-1}^2 + x_n^2}} \right) \end{cases}$$

Además:

$$J\phi(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}) = r^{n-1}\operatorname{sen}^{n-2}\varphi_1\cdot\ldots\cdot\operatorname{sen}\varphi_{n-2}, \ \forall\,(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})\in \mathcal{S}_n$$

Dem.

Funciones Radiales.

Sea $r: \mathbb{R}^n \to [0,\infty[$ la función $(x_1,\dots,x_n) \mapsto \sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$.

Def. Una función $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ se dice que es una función radial si $\exists\, g:[0,\infty[\to \mathbb{K}$ m

$$f = g\circ r$$

(los valores de f permanecen ctes. sobre cada esfera de centro 0).

Teorema (de funciones radiales).

Sea $g:[0,\infty[\to \mathbb{K}$ (ó $g:[0,\infty[\to [0,\infty[$) una función. Entonces la función radial $g\circ r$ es integrable (med. no neg.) $\iff$ $\rho \mapsto \rho^{n-1} g(\rho)$ es integrable (resp. med. no neg.) y en este caso:

$$\int_{\mathbb{R}^n} g\circ r = n\omega_n \int_0^\infty \rho^{n-1} g(\rho)\, d\rho$$

Dem.

a) Supongo que $g\circ r$ es integrable. Cambiando a coordenadas esféricas:

$$\int_{\mathbb{R}^n} g\circ r = \int_{\substack{\rho>0\\ 0<\varphi_k<\pi,\ k\in[\![1,n-2]\!]\\ -\pi<\varphi_{n-1}<\pi}} g(\rho)\,\rho^{n-1}\,\mathrm{sen}^{n-2}\varphi_1\cdot\ldots\cdot \mathrm{sen}\,\varphi_{n-2}\, d\rho\, d\varphi_1\cdots d\varphi_{n-1}$$

$$= K_n \int_0^\infty \rho^{n-1} g(\rho)\, d\rho \quad (\text{por Fubini}) \quad \ldots (*)$$

donde $K_n = \int_{\substack{0<\varphi_k<\pi\\ -\pi<\varphi_{n-1}<\pi\\ k\in[\![1,n-2]\!]}} \mathrm{sen}^{n-2}\varphi_1\cdot\ldots\cdot \mathrm{sen}\,\varphi_{n-1}\, d\varphi_1\cdots d\varphi_{n-1}$. Para calcular K_n, se aplica $(*)$ con $g=\chi_{[0,1]}$. Por tanto:

$$\int_{\mathbb{R}^n} g\circ r = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{[0,1]}\circ r$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_u$$

$$= \omega_n$$

$$= K_n \int_0^\infty \rho^{n-1} g(\rho)\, d\rho$$

$$= K_n \int_0^1 \rho^{n-1} d\rho$$

$$= \frac{K_n}{n}$$

$$\Rightarrow K_n = n\,\omega_n$$

con lo que se obtiene el resultado.

b) Suponga que $\rho \mapsto \rho^{n-1} g(\rho)$ es int. en $]0,\infty[$. Luego $\rho \mapsto |\rho^{n-1} g(\rho)|$ es integrable en $]0,\infty[$, como:

$$\int_0^\infty \rho^{n-1} |g(\rho)|\, d\rho \int_{\substack{0<\varphi_k<\pi \\ -\pi<\varphi_{n-1}<\pi}} \operatorname{sen}^{n-2}\varphi_1 \cdot \ldots \cdot \operatorname{sen}\varphi_{n-2}\, d\varphi_1 \cdot \ldots \cdot d\varphi_{n-1}$$

$$= n\,\omega_n \int_0^\infty \rho^{n-1} |g(\rho)|\, d\rho < \infty$$

Por Tonelli $(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}) \mapsto \rho^{n-1} g(\rho)\, \operatorname{sen}^{n-1}\varphi_1 \cdot \ldots \cdot \operatorname{sen}\varphi_{n-1}$ es int. en Ω_n. Por el T.D.C.V $g \circ r$ es integrable en $\mathbb{R}^n$.

$\square$

Teorema (un criterio de integrabilidad).

Sea $r: \mathbb{R}^n \to [0,\infty[$ la func. dist. euclidiana. Sea $B_a = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^n x_k^2 \leq a^2\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Ent.

$$\int_{x_1^2+\ldots+x_n^2 \leq a} \frac{dx_1 \cdot \ldots \cdot dx_n}{(x_1^2+\ldots+x_n^2)^{\alpha/2}} = \int_{B_a} \frac{1}{r^\alpha} < \infty \iff \alpha < n$$

y

$$\int_{a^2 < x_1^2+\ldots+x_n^2} \frac{dx_1 \cdot \ldots \cdot dx_n}{(x_1^2+\ldots+x_n^2)^{\alpha/2}} = \int_{B_a^c} \frac{1}{r^\alpha} < \infty \iff \alpha > n$$

Dem.

a) Si $\alpha \neq n$, por el t. ant.

$$\int_{B_a} \frac{1}{r^\alpha} = n\omega_n \int_0^a \rho^{n-1} g(\rho)\, d\rho, \text{ con } g(t) = \frac{1}{t^\alpha} \chi_{]0,a]}(t)$$

$$= n\omega_n \int_0^a \rho^{n-1} \cdot \frac{1}{\rho^\alpha} = n\omega_n \int_0^a \rho^{n-1-\alpha} < \infty$$

$\Leftrightarrow n-1-\alpha > -1 \Leftrightarrow n > \alpha$.

b) Si $\alpha = n$.

$$\int_{B_a} \frac{1}{r^n}\, dr = n\omega_n \int_0^a \rho^{-1}\, d\rho = \infty$$

c) La otra fórmula es análoga.

$\square$

Corolario.

Sean $p \in \mathbb{R}^n$ y $a > 0$. Ent. si $r : \mathbb{R}^n \to]0, \infty[$ es la func. dist. euc. a p, se tiene:

$$\int_{B(p,a)} \frac{1}{r^\alpha} < \infty \Leftrightarrow \alpha < n$$

$$\int_{B(p,a)^c} \frac{1}{r^\alpha} < \infty \Leftrightarrow n < \alpha$$

Dem:

(Aplicar T.D.C.V).

Ejemplo.

1) Sea $K \subseteq \mathbb{R}^3$ compacto y $\mu: K \to \mathbb{R}$ med. acotada. Fije $a \in \mathbb{R}^3$ y $\|\cdot\|$ la norma euclidiana.

¿Es la función

$$x \mapsto \frac{\mu(x)}{\|x-a\|} \quad (\text{llamada } \sigma)$$

integrable en K?

Si $a \notin K$, σ es una func. med. acotada donde $m(K) < \infty$, luego integrable en K.

Si $a \in K$, sea $M = \sup_{x \in K} |\mu(x)|$, ent.

$$|\sigma(x)| \leq \frac{M}{\|x-a\|}, \quad \forall x \in K$$

Por ser K compacto, $\exists\, r > 0 \ni K \subseteq B(a,r)$. Como $1 < 3$, ent.

$$x \mapsto \frac{M}{\|x-a\|}$$

es integrable en $B(a,r)$ y luego, es integrable en $K \Rightarrow \sigma$ es integrable en K.

Se define $u(a) = \int_K \frac{\mu(x)}{\|x-a\|}\, dx$, $\forall a \in \mathbb{R}^3$. Esta u se llama potencial creado por cargas de densidad μ distribuidas sobre K.

Criterios de Comparación de Func. e Integrabilidad.

Def. Sea $\|\cdot\|$ una norma arbitraria en $\mathbb{R}^n$.

i) Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ y p un punto de acumulación de S. Sean $f, g: S \to \mathbb{K}$ funciones.

a) $f \underset{p}{=} \mathcal{O}(g)$ o $f(x) \underset{x \to p}{=} \mathcal{O}(g(x))$, si $\exists\, \delta > 0$ y $A > 0 \ni$

$$x \in S \ni \|x-p\| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq A|g(x)|$$

b) $f \underset{p}{\sim} g$ o $f(x) \underset{x \to p}{\sim} g(x)$, si $\lim_{x \to p} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 1$

c) $f \underset{p}{=} o(g)$ o $f(x) \underset{x \to p}{=} o(g(x))$ si $\lim_{x \to p} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$.

ii) Si S no es acotado y $f, g: S \to \mathbb{R}$ son dos func.

a) $f \underset{\infty}{=} \mathcal{O}(g)$ si $\exists\, N \in \mathbb{N}$ y $A > 0 \ni$

$x \in S$ ∄ $\|x\| > N \Rightarrow |f(x)| \leq A|g(x)|$

b) $f \underset{\infty}{\sim} g$ si $\lim_{x \to \infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 1$.

c) $f \underset{\infty}{=} o(g)$ si $\lim_{x \to \infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$.

Propiedades.

i) $f \underset{p}{\sim} g \Rightarrow f \underset{p}{=} O(g)$ y $f \underset{p}{=} o(g)$.

$f \underset{p}{=} o(g) \Rightarrow f \underset{p}{=} O(g)$.

ii) $f \underset{p}{=} o(h)$, $g \underset{p}{=} o(h) \Rightarrow f + ag \underset{p}{=} o(h)$ $(a \in \mathbb{K})$.

donde p puede ser ∞ y "o" puede ser reemplazado por "O" o "$\sim$".

Ejemplos.

1) $x^\alpha \underset{x\to\infty}{=} o(e^x),\ \forall \alpha>0.$

2) $x^\alpha \underset{x\to 0^+}{=} o(e^{1/x}),\ \forall \alpha<0.$

3) $\log(x) \underset{x\to\infty}{=} o(x^\alpha),\ \forall \alpha>0.$

4) $\log(x) \underset{x\to 0^+}{=} o(x^\alpha),\ \forall \alpha<0.$

5) $\operatorname{sen} x \underset{x\to 0}{\sim} x.$

6) $e^x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{N} \frac{x^k}{k!} + o(x^N),\ \forall N\in\mathbb{N}.$

7) $\log(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} + o(x^N),\ \forall N\in\mathbb{N}.$

Criterios de integrabilidad.

i) Sea $S\subseteq\mathbb{R}^n$ y p un punto de acumulación de S y $f,g: S\to\mathbb{K}$ dos funciones. Se supone f y g son integrables en $S\setminus B(p,\delta),\ \forall\delta>0.$

Si $f \underset{p}{=} O(g)$ y g es integrable en S, ent. f es int. en S.

ii) $S\subseteq\mathbb{R}^n$ acotado, $f,g: S\to\mathbb{K}$ dos func. integrables en todo subconjunto med. acotado de S. Si $f \underset{\infty}{=} O(g)$ y g es integrable en S, ent. f es int. en S.

Dem:

Ejemplo.

1) Sean r y r' las funciones dist. a un punto $p \in \mathbb{R}^n$ con respecto a dos normas arbitrarias en $\mathbb{R}^n$. Como en $\mathbb{R}^n$ todas las normas son equivalentes, ent.

$$\frac{1}{(r')^\alpha} \underset{p}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^\alpha}\right) \quad y \quad \frac{1}{r^\alpha} \underset{p}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{(r')^\alpha}\right)$$

al tomar como r la norma euclidiana, resulta

$$\frac{1}{(r')^\alpha} \text{ es int. en } B(p,\delta) \iff \alpha < n.$$
$$\frac{1}{(r')^\alpha} \text{ es int. en } B(p,\delta)^c \iff \alpha > n.$$

$\forall \delta > 0.$

2) Sea r la dist. euclidiana en $\mathbb{R}^n$. $B_a = B(0,a)$. ¿Es $\log r$ integrable en B_a?

$$\int_{x_1^2+\dots+x_n^2<a} \log\left(\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}\right) dx_1 \dots dx_n$$

Como $\log r \underset{r \to 0^+}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{n-\frac{1}{2}}}\right)$ y $r \mapsto \frac{1}{r^{n-\frac{1}{2}}}$ es integrable en $B(0,a)$ $\left(n-\frac{1}{2} < n\right)$, ent. $\log r$ es int. en $B(0,a)$.

Función Gamma.

Determine todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ es int. en $]0,\infty[$. Dicha func. es continua no neg. Además.

$$t^{x-1}e^{-t} \underset{t \to 0^+}{\sim} t^{x-1}$$

luego $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ es int. en vecindades de $0 \iff t^{x-1}$ es int. en vecindades de $0 \iff x-1 > -1$
$\iff x > 0.$

También $t^{x+1} \underset{t \to \infty}{=} \mathcal{O}(e^t)$ luego $t^{x-1}e^{-t} \underset{t \to \infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. donde la última func. es int. en vecindades de ∞, así $t^{x-1}e^{-t}$ es integrable en vecindades de ∞, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Así, $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ es integrable en $]0,\infty[\iff x > 0$. Se define la función gama: $\Gamma :]0,\infty[\to \mathbb{R}$:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt, \ \forall\ x > 0.$$

Se tiene

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x), \ \forall\ x > 0. \ \ldots (*)$$

Integrando por partes:

$$x \int_r^R t^{x-1} e^{-t}\, dt = \int_r^R e^{-t} D(t^x)\, dt$$

$$= e^{-t} t^x \Big|_r^R - \int_r^R D(e^{-t})\, t^x\, dt$$

$$= e^{-R} R^x - e^{-r} r^x + \int_r^R e^{-t} t^x\, dt$$

Luego, usando T.C.M:

$$\Rightarrow x\,\Gamma(x) = x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

$$= \int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt$$

$$= \Gamma(x+1), \ \forall\ x > 0.$$

Claramente, $\Gamma(1) = 1$. Por $(*)$: $\Gamma(n+1) = n!$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Sea w_n la medida de la bola euclidiana unitaria. Por el teorema de func. radiales:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2 + \ldots + x_n^2)}\, dx_1 \ldots dx_n = n w_n \int_0^\infty \rho^{n-1} e^{-\rho^2}\, d\rho$$

hacemos el cambio $\rho = t^{1/2}$, $\rho = \phi(t)$, $\phi :]0,\infty[\to]0,\infty[$, $t \mapsto t^{1/2}$, claramente ϕ es C^∞ en $]0,\infty[$ y su inversa es $\phi^{-1} :]0,\infty[\to]0,\infty[$, $t \mapsto t^2$ que es clase $C^\infty \Rightarrow \phi$ es isomorfismo C^∞. además:

$$|J\phi(t)| = \frac{1}{2t^{1/2}}, \ \forall\ t > 0$$

Por el T.C.V:

$$n w_n \int_0^\infty \rho^{n-1} e^{-\rho^2}\, d\rho = n w_n \int_0^\infty t^{\frac{n-1}{2}} e^{-t}\, d \cdot \frac{dt}{2t^{1/2}}$$

$$= \frac{n w_n}{2} \int_0^\infty t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t}\, dt$$

$$= \frac{n w_n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$= w_n \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right), \text{ por } (*).$$

Pero, por Fubini:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2+\dots+x_n)^2} dx_1 \dots dx_n = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^n$$

$$= \pi^{\frac{n}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \pi^{\frac{n}{2}} = w_n \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) \Rightarrow w_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

En general $\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{2n-1}{2}+1\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}(2n-1)!!, \forall n \in \mathbb{N}.$

Notas:

1)

2) La prueba no es trivial, tome $v_1' = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{n-1} v_{n-1}$.

3) Repasar t. de func. inversa y func. inversa.