Lista 2 de Ejercicios
Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

10 de abril de 2024

Índice general

Capítulo 1

Ejercicios Convolución

Ejercicio 1.1.1
Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ funciones nulas en $]-\infty, 0[$. Si existe $f * g(x)$, demuestre que:

$$f * g(x) = \begin{cases} \int_0^\infty f(y)g(x-y)dy & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

En los casos siguientes f y g son nulas en $]-\infty,0[$ y sus valores en $[0, \infty[$ se indican abajo. Calcule $f * g$.

I. $f(x) = e^{-x}$ y $g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

II. $f(x) = g(x) = e^{-x}$.

III. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

IV. $f(x) = g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

Solución:
Para la demostracíón, el caso $x \geq 0$ es inmediato de la definición de convolución y del hecho de que f es nula en $]-\infty, 0[$. Suponga que existe $f * g(x)$ con $x < 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy \\ &= \int_0^\infty f(y)g(x-y)dy \end{aligned}$$

sea $y \in [0, \infty[$, es decir que $0 \leq y < \infty$, por lo cual $-\infty < -y \leq 0$. Sumando x a ambos lados se sigue que:

$$-\infty < x - y \leq x < 0 \Rightarrow x - y \in]-\infty, 0[$$

por tanto, $g(x-y) = 0$, para todo $y \in [0, \infty[$. Por tanto, $f * g(x) = 0$.

De (i): Veamos que:

$$f * g(x) = \begin{cases} \int_0^\infty e^{-y} g(x-y)dy & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Sea $x \geq 0$. Analicemos varios casos:

- $0 \leq x \leq 1$, en este caso $0 \leq x - y \leq 1$ si y sólo si $y \leq x$ y $x - 1 \leq y$ (pero, $x - 1 \leq 0$, por lo cual $0 \leq y$), por ende:

$$\begin{aligned}
f * g(x) &= \int_0^x e^{-y} g(x-y) dy \\
&= \int_0^x e^{-y}(x-y) dy \\
&= x\int_0^x e^{-y} dy - \int_0^x y e^{-y} dy \\
&= x\left[-e^{-y}\right]_0^x - \left[-e^{-y}(y+1)\right]_0^x \\
&= x - xe^{-x} + \left[e^{-y}(y+1)\right]_0^x \\
&= x - xe^{-x} + (x+1)e^{-x} - 1 \\
&= (x-1) + e^{-x}
\end{aligned}$$

- $1 < x$, en este caso $0 \leq x - y \leq 1$ si y sólo si $y \leq x$ y $x - 1 \leq y$ (donde $0 < x - 1$ por como se eligió el x). Por ende:

$$\begin{aligned}
f * g(x) &= \int_{x-1}^x e^{-y} g(x-y) dy \\
&= \int_{x-1}^x e^{-y}(x-y) dy \\
&= x\int_{x-1}^x e^{-y} dy - \int_{x-1}^x y e^{-y} dy \\
&= x\left[-e^{-y}\right]_{x-1}^x + \left[(y+1)e^{-y}\right]_{x-1}^x \\
&= xe^{1-x} - xe^{-x} + (x+1)e^{-x} - (x-1+1)e^{1-x} \\
&= xe^{1-x} - xe^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} - xe^{1-x} \\
&= e^{-x}
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$f * g(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si} \quad 1 < x \\ (x-1) + e^{-x} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

De (ii): Veamos que:

$$f * g(x) = \begin{cases} \int_0^\infty e^{-y} g(x-y) & \text{si} \quad 0 \leq x \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

analicemos a $g(x-y)$. Si $x \geq 0$ entonces, $x - y \geq 0$ si y sólo si $x \geq y$. Por tanto, para $x \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-y} g(x-y) &= \int_0^x e^{-y} e^{y-x} dy \\
&= \int_0^x e^{-x} dy \\
&= xe^{-x}
\end{aligned}$$

de esta forma:

$$f * g(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{si} \quad 0 \leq x \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

De (iii): Veamos que:

$$f * g(x) = \begin{cases} \int_0^1 g(x-y) dy & \text{si} \quad 0 \leq x \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

$\square$

Ejercicio 1.1.2
Haga lo siguiente:

I. Para toda $m \in \mathbb{N}$ se define $e_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como:

$$e_m(x) = \begin{cases} \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Pruebe que

$$e_p * e_q = e_{p+q}$$

II. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ integrable en todo intervalo acotado tal que $f(x) = 0$ para todo $x \leq a$. **Muestre** que

$$e_m * f(x) = \begin{cases} \int_a^x \frac{(x-y)^{m-1}}{(m-1)!} f(y)dy & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

III. **Deduzca** que para $x \geq a$ se cumple la siguiente **fórmula de Cauchy para la n-ésima integral indefinida**

$$\int_a^x dx_{m-1} \int_a^{x_{m-1}} dx_{m-2} \cdots \int_a^{x_2} dx_1 \int_a^{x_1} f(x_0)dx_0 = \int_a^x \frac{(x-y)^{m-1}}{(m-1)!} f(y)dy$$

Demostración:

De (1): Sean $p, q \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$e_p(x) = \begin{cases} \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad e_q(x) = \begin{cases} \frac{x^{q-1}}{(q-1)!} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} e_p * e_q(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e_p(x) \cdot e_q(y-x)dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} \cdot e_q(y-x)dx \end{aligned}$$

analicemos dos casos:

- $y < 0$: Entonces, para todo $x \geq 0$, se sigue que $-x \leq 0$, luego $y - x < 0$. Por ende, $e(y-x) = 0$. Luego:

$$e_p * e_q(y) = 0 = e_{p+q}(y)$$

- $y \geq 0$: Entonces, $y - x \geq 0$ si y sólo si $x \in [0, y]$. Por tanto, la integral se vuelve en:

$$\begin{aligned} e_p * e_q(y) &= \int_0^y \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} \cdot e_q(y-x)dx \\ &= \int_0^y \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} \cdot \frac{(y-x)^{q-1}}{(q-1)!} dx \\ &= \frac{1}{(p-1)!(q-1)!} \cdot \int_0^y x^{p-1}(y-x)^{q-1}dx \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\int_0^y x^{p-1}(y-x)^{q-1}dx &= \int_0^y x^{p-1}\sum_{k=0}^{q-1}\binom{q-1}{k}(-1)^{q-1}x^k(-y)^{q-1-k}dx \\
&= (-1)^{q-1}\int_0^y \sum_{k=0}^{q-1}\binom{q-1}{k}x^{p+k-1}(-y)^{q-1-k}dx \\
&= (-1)^{q-1}\sum_{k=0}^{q-1}\binom{q-1}{k}(-y)^{q-1-k}\int_0^y x^{p+k-1}dx \\
&= (-1)^{q-1}\sum_{k=0}^{q-1}\binom{q-1}{k}(-y)^{q-1-k}\left[\frac{x^{p+k}}{p+k}\right]_0^y \\
&= (-1)^{q-1}\sum_{k=0}^{q-1}\binom{q-1}{k}(-y)^{q-1-k}\frac{y^{p+k}}{p+k} \\
&= (-1)^{2q-2}\sum_{k=0}^{q-1}\binom{q-1}{k}\frac{(-1)^k y^{p+q-1}}{p+k} \\
&= y^{p+q-1}\sum_{k=0}^{q-1}\binom{q-1}{k}\frac{(-1)^k}{p+k}
\end{aligned}$$

veamos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(p-1)!(q-1)!}\sum_{k=0}^{q-1}\binom{q-1}{k}\frac{(-1)^k}{p+k} &= \frac{1}{(p-1)!(q-1)!}\sum_{k=0}^{q-1}\frac{(q-1)!}{k!(q-1-k)!}\cdot\frac{(-1)^k}{p+k} \\
&= \frac{1}{(p-1)!(q-1)!}\sum_{k=0}^{q-1}\frac{(-1)^k(q-1)!}{k!(q-1-k)!(p+k)} \\
&= \frac{1}{(p-1)!}\sum_{k=0}^{q-1}\frac{(-1)^k}{k!(q-1-k)!(p+k)}
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 1.1.3

La integral fraccional de orden $\alpha > 0$ sobre un intervalo $[a, x]$ de una función medible f se define como:

$$I_a^\alpha[f](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt$$

para toda $x \geq a$ tal que la integral exista.

I. Fije $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Para cada $\alpha > 0$ se define

$$g_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{x^{1-\alpha}}\chi_{]0,b-a[}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Pruebe que si $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$, entonces existe la convolución $\widetilde{f} * g_\alpha$. **Calcule** $\widetilde{f} * g_\alpha$.

II. **Calcule** $I_0^{1/2}[t](x)$ y $I_0^{1/2}[I_0^{1/2}[t]](x)$. ¿**Conclusión**? Justifique.

Demostración:

■

Ejercicio 1.1.4
Para todo $p > 0$ se define:

$$f_p(t) = \begin{cases} t^{p-1}e^{-t} & \text{si} \quad t > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \end{cases}$$

Calculando de dos modos distintos la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f_p * f_q$ con $p, q > 0$, **pruebe** la fórmula

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

donde $B(p, q)$ es la función beta y $\Gamma(q)$ es la función gama.

Demostración:

$\blacksquare$

Ejercicio 1.1.5
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ una función localmente integrable en $\mathbb{R}$. Defina para todo $h > 0$, la función

$$J_h f = f * \left(\frac{1}{h}\chi_{]-h,0[}\right)$$

I. **Muestre** que, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$J_h f(x) = \frac{1}{h}\int_0^h f(x+y)dy$$

y que $J_h f$ es continua en $\mathbb{R}$.

II. Si f es integrable en $\mathbb{R}$, **pruebe** que también lo es $J_h f$ y que

$$\int_{\mathbb{R}} J_h f = \int_{\mathbb{R}} f$$

III. Si f es de clase C^r en $\mathbb{R}$, **muestre** que también lo es $J_h f$ y que $(J_h f)^{(k)} = J_h f^{(k)}$ para $k = 1, ..., r$.

Solución:

$\square$

Ejercicio 1.1.6
Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n$. Sea $B = \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| \|x\| \leq R\right\}$. Defina:

$$\mathcal{M}_R f = f * \frac{\chi_B}{\mathrm{Vol}\,(B)}$$

I. **Muestre** que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{M}_R f(x) = \frac{1}{\mathrm{Vol}\,(B)}\int_{\|x-y\|\leq R} f(y)dy$$

y que $\mathcal{M}_R f$ es continua en $\mathbb{R}^n$.

II. Si f es integrable en $\mathbb{R}^n$, **pruebe** que también lo es $\mathcal{M}_R f$ y que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}_R f = \int_{\mathbb{R}^n} f$$

III. Si f es de clase C^r en $\mathbb{R}^n$, **muestre** que también lo es $\mathcal{M}_R f$ y que $D(\mathcal{M}_R f) = \mathcal{M}_R(Df)$ para todo opeardor $D = \partial_{\alpha_1} \cdots \partial_{\alpha_k}$, con $k \in \{1, ..., r\}$.

Solución:

□

Ejercicio 1.1.7
Haga lo siguiente:

I. Sean f y g dos funciones en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $\mathcal{N}_1(f) < 1/\left|\lambda\right|$. **Demuestre** que la ecuación

$$x = \lambda x * f + g$$

admite una solución $x \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ salvo equivalencias. **Muestre** que la solución puede ser representada en forma de una serie

$$x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^\nu g * \underbrace{f * \cdots * f}_{\nu\text{-veces}}$$

que es convergente en el espacio de Banach $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$.

II. Al suponer $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y $g \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, estudie la misma ecuación con la incógnita x en $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$.

Demostración:

■

Ejercicio 1.1.8
Haga lo siguiente:

I. Sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ una función medible. **Muestre** que existe una función medible acotada $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ tal que $\left|g\right| = \alpha g$ en todo punto de $\mathbb{R}^n$.

Sugerencia. Intente con la función $\frac{g+\chi_S}{\left|g+\chi_S\right|}$ donde $S = \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| g(x) = 0\right\}$.

II. Sean $1 < p < \infty$ y $g \in \mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Defina $\phi_g : \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ como:

$$\phi_g(f) = \int_{\mathbb{R}^n} fg, \quad \forall f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$$

Pruebe que ϕ_g es una aplicación lineal continua sobre $L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y que $\|\phi_g\| = \mathcal{N}_{p^*}(g)$.

Así pues, la aplicación $g \mapsto \phi_g$ es una isometría de $\mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ en $\mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ (dicha isometría también es suprayectiva, pero este hecho más profundo no se pide probar aquí).

Sugerencia. Para probar la desigualdad $\mathcal{N}_{p^*}(g) \leq \|\phi_g\|$ considere la función $f = \alpha\left|g\right|^{p^*-1}$, donde α es la función del inciso (i).

III. Sea $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ una sucesión de Dirac en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Se quiere demostrar, sin usar la desigualdad de Jensen, que si $1 \leq p < \infty$ y $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, entonces

$$\lim_{\nu \to \infty} \mathcal{N}_p \left(f - \rho_\nu * f\right) = 0$$

Defina $g_\nu = f - \rho_\nu * f$ y considere la aplicación lineal $\phi_{g_\nu} \in L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})^*$, donde

$$\phi_{g_\nu}(h) = \int_{\mathbb{R}^n} h g_\nu, \quad \forall h \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$$

Establezca la desigualdad

$$\left|\phi_{g_\nu}\right| \leq \mathcal{N}_{p^*}\left(h\right) \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\nu(y) \mathcal{N}_p \left(f_{-y} - f\right) dy$$

Sea $\varepsilon > 0$. **Demuestre** que para ν suficientemente grande,

$$\left|\phi_{g_\nu}\right| \leq \mathcal{N}_{p^*}\left(h\right) \varepsilon$$

Utilizando el inciso (ii) termine la demostración.

Demostración:

■

Ejercicio 1.1.9
Demuestre que el sistema de potencias enteras $\left\{x^\nu \middle| \nu \in \mathbb{N}^*\right\}$ es total en $L_p([a,b], \mathbb{C})$ para $p \in [1, \infty[$.

Sugerencia. Basta demostrarlo para $L_1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. El sistema trigonométrico es total en este espacio. Desarrolle $e^{ik\pi}$ en serie de potencias de Maclaurin.

Demostración:

■

Ejercicio 1.1.10
Demuestre que el sistema de potencias enteras $\left\{x^\nu \middle| \nu \in \mathbb{N}^*\right\}$ es completo en $L_p([a,b], \mathbb{C})$ para $p \in [1, \infty[$.

Demostración:

■

Ejercicio 1.1.11
Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible con medida finita y $1 < p < \infty$. **Muestre** que si una familia de funciones $\left\{\varphi_i \middle| i \in I\right\}$ es completa en $L_p(E, \mathbb{K})$, entonces dicha familia es total en $L_{p^*}(E, \mathbb{K})$.

Sugerencia. Sea $f \in \mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Se supone que $\int_E f \varphi_i = 0$ para toda $i \in I$. Sea α una función medible acotada tal que $\left|f\right| = \alpha f$. Por hipótesis existe una sucesión de funciones $\{\psi_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ en $\mathcal{L}(\left\{\varphi_i \middle| i \in I\right\})$ tal que $\lim_{\nu \to \infty} \mathcal{N}_p \left(\alpha - \psi_\nu\right) = 0$.

Demostración:

■