Taller Topología Algebraica
Homología

Cristo Daniel Alvarado

6 de diciembre de 2024

Índice general

Capítulo 4

Homología Simplicial y Singular

Antes de empezar con la parte de homología singular, veremos un poco de homología singular, que es una versión primitiva de ésta la cual nos permitirá entender los conceptos abstractos de la homología singular de forma más sencilla.

4.1. Homología Simplcial

El dominio natural de la definición de la homología simplicial es una clase de espacios llamado **Δ-complejos**, los cuales son una generalización de una noción más clásica, la de **complejo simplicial**.

4.1.1. Δ-complejos

El toro, el plano proyectivo y la botella de Klein pueden ser obtenidas mediante un procedimiento de identificación de lados opuestos de un cuadrado, manteniendo la orientación deseada.

Cortar un cuadrado sobre la diagona produce dos triángulos. De forma análoga, podemos cortar un polígono en triángolos más pequeños. Más aún, toda superficie cerrada puede ser construida usando triángulos e identificando sus lados de forma adecuada.

Así que, tenemos un sólo bloque de construcción para todas las superficies. Usando sólo triángulos podemos construir una clase de espacios 2-dimensionales que no son superficies en el sentido estricto, perimitiendo que más de dos lados se identifiquen juntos a la vez.

La idea de un Δ-complejo es la de generalizar este tipo de construcciones a cualquier número de dimensiones. El análogo n-dimensional de un triángulo es el **n-simplejo**.

Definición 4.1.1
Sean $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ con $m > 0$. Se define el **n-simplejo** como el subconjunto convexo más pequeño en $\mathbb{R}^m$ tal que contiene a $n+1$ puntos $v_0, ..., v_n \in \mathbb{R}^m$ que no yacen en el mismo hiperplano de dimensión menor o igual a n.

Los puntos v_i son llamados **vértices del simplejo** y éste es denotado por $[v_0, ..., v_n]$

Observación 4.1.1
En la práctica, esto se vería más o menos así:

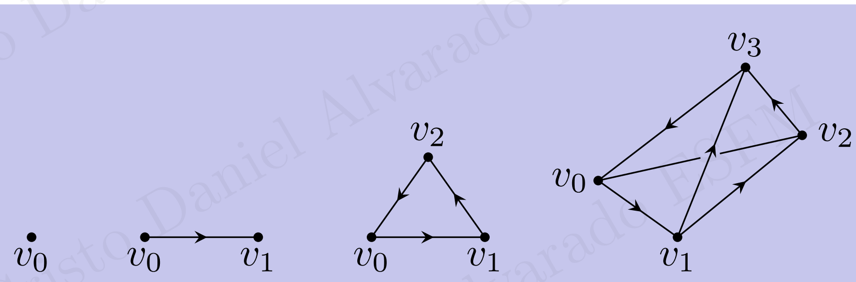

Figura 1. n simplejos para $n = 0, 1, 2$ y 3.

De izquierda a derecha se muestran como serían el 0-simplejo, 1-simplejo, 2-simplejo y 3-simplejo metidos en $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 4.1.1
El n-simplejo que contiene a los vectores canónicos $e_1, ..., e_n$ y al cero en $\mathbb{R}^m$ es el conjunto:

$$\Delta^n = \left\{ (t_0, ..., t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \middle| \sum_{i=0}^{n} t_i \text{ y } t_i \geq 0 \ \forall i = 0, ..., n \right\}$$

es llamado n-**simplejo estándar**. Notemos que $\Delta^n = [0, e_1, ..., e_n]$ donde O es el origen de $\mathbb{R}^{n+1}$.

En homología va a resultar importante mantener el orden de los vértices del simplejo, por lo que cuando digamos *n-simplejo*, realmente estaremos diciendo *n-simplejo con un ordenamiento de vértices*.

Una consecuencia de ordenar los vértices de un simplejo $[v_0, ..., v_n]$ es que éstos determinan la orientación de los vértices $[v_i, v_j]$ de acuerdo a los subíndices ordenados de forma creciente.

Especificar este orden de los vértices determina un homomorfismo lineal del n-simplejo estándar en cualquier otro n-simplejo $[v_0, ..., v_n]$ que preserve el orden de los vértices, a saber:

$$(t_0, ..., t_n) \mapsto \sum_{i=0}^{n} t_i v_i$$

los coeficientes t_i son llamados i-ésimas **coordenadas baricéntricas** del punto $\sum_{i=0}^{n} t_i v_i$ en el simplejo $[v_0, ..., v_n]$.

Definición 4.1.2
Sea $[v_0, ..., v_n]$ un n-simplejo y tomemos $j = 0, ..., n$. Entonces el simplejo $[v_0, ..., \hat{v_j}, ..., v_n]$ es un $(n-1)$-simplejo llamado j**-ésima cara de** $[v_0, ..., v_n]$.

Observación 4.1.2
Bajo la definición que hicimos anteriormente, todo subsimplejo de un simplejo estará siempre con los vértices ordenados de forma creciente, de acuerdo al orden que establecimos en el simplejo original.

Definición 4.1.3
El conjunto formado por la unión de todas las caras de un simplejo Δ^n es la **frontera de** Δ^n y se denota por $\partial\Delta^n$. El **simplejo abierto** $\mathring{\Delta}^n$ es el conjunto $\Delta^n \setminus \partial\Delta^n$.

Definición 4.1.4
Una **estructura de Δ-complejo en un espacio** X (o llamado simplemente **Δ-complejo**) es una colección $\{\sigma_\alpha : \Delta^{n_\alpha} \to X\}_{\alpha\in I}$ (con $n_\alpha \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ para todo $\alpha \in I$) tal que:

(1) Para todo $\alpha \in I$, la reestricción $\sigma_\alpha\big|_{\mathring{\Delta}^{n_\alpha}}$ es inyectiva, y todo punto de X es la imagen de exactamente una reestriccion $\sigma_\alpha\big|_{\mathring{\Delta}^{n_\alpha}}$.

(2) Para todo $\alpha \in I$ y para cada reestricción de σ_α a alguna cara de Δ^{n_α} existe $\beta \in I$ tal que esta reestricción coincide con $\sigma_\beta : \Delta^{n_\alpha - 1} \to X$ (donde $n_\beta = n_\alpha - 1$).

(3) $A \subseteq X$ es abierto si y sólo si $\sigma_\alpha^{-1}(A)$ es abierto en Δ^{n_α} para todo $\alpha \in I$.

Observación 4.1.3
En el inciso *(2)* identificamos cada cara de Δ^n con Δ^{n-1} mediante el homomorfismo lineal entre ellos que preserva la orientación.

La condición *(3)* nos quita la condición trivial de que todos los puntos de X sean vértices de algún simplejo.

Una consecuencia inmediata de todas estas condiciones es que un espacio X puede ser construido a partir de una colección de simplejos disjuntos $\Delta_\alpha^{n_\alpha}$, uno por cada $\sigma_\alpha : \Delta^{n_\alpha} \to X$, el espacio obtenido a partir de identificar cada cara de $\Delta_\alpha^{n_\alpha}$ con el correspondiente $\Delta_\beta^{n_\alpha - 1}$, correspondeinte a la reestricción de σ_β de σ_α de la cara en cuestión.

Para nuestro caso, basta con analizar por ejemplo al Toro:

Ejemplo 4.1.2

4.1.2. Homología Simplicial

Nuestro objetivo ahora es definir los grupos de homología de un Δ-complejo X. Para ello, será imprescindible contar con todo lo hecho en la teoría sobre grupos libres y grupos abelianos libres.

Definición 4.1.5
Sea

4.2. Homología Singular

Con lo hecho en la parte de homología simplicial, resultará un poco más sencillo observar qué es lo que está sucediendo en homología singular. En esta sección se dan definiciones y algunas otras propiedades básicas.

4.2.1. Definición de los grupos cúbicos singulares de homología

Observación 4.2.1
De ahora en adelante $I = [0, 1]$ denotará a este intervalo. Además, convenimos en que:

$$I^0$$

es un conjunto con un sólo punto. Además, el conjunto $\mathbb{N}^*$ denotará a $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Definición 4.2.1
Sea X un espacio topológico. Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $X \cong I^n$, diremos que X es un **cubo n-dimensional**.

Definición 4.2.2
Sea X espacio topológico y $n \in \mathbb{N}^*$ **n-cubo singular en X** es una función continua $T : I^n \to X$.

Ejemplo 4.2.1
Si $n = 0$, entonces $T : \{*\} \to X$ es una función que manda un punto en un punto.

Si $n = 0$, entonces $T : I \to X$ es un camino con puntos extremos $T(0)$ y $T(1)$.

Observación 4.2.2
Note que a diferencia de la parte de homología simplicial, en esta parte permitimos que nuestro mapeo T no necesariamente sea lineal, ya que en la parte anterior se deduce rápidamente que $\Delta^n \cong I^n$.

Más aún, esta es llamada homología singular ya que puede que la función T tenga singularidades.

Esta generalización nos permitirá hacer la construcción de la homología singular de forma similiar a como se hizo anteriormente.

Definición 4.2.3