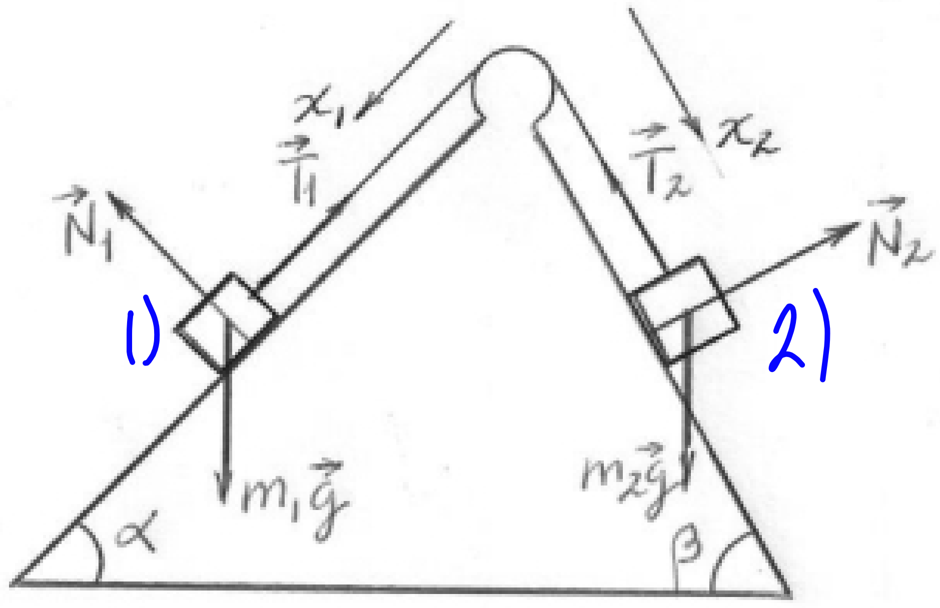
Introducción

Se presentarán algunos problemas interesantes:

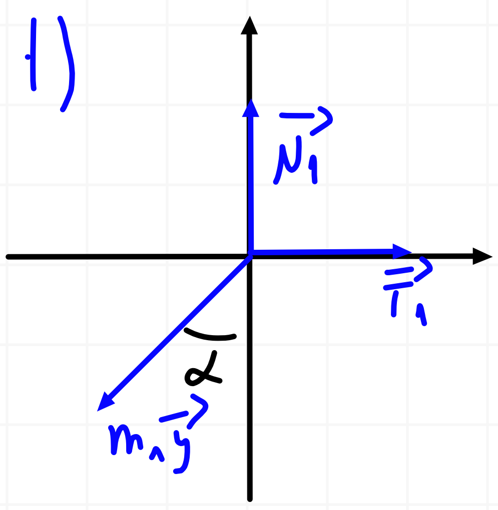
Dos bloques unidos con una cuerda en una cuña fija

Dos bloques de masas m_1 y m_2 unidos por una cuerda inextensible se deslizan sin fricción sobre las superficies de una cuña fija como se muestra en la figura. Calcule las aceleraciones de los bloques.

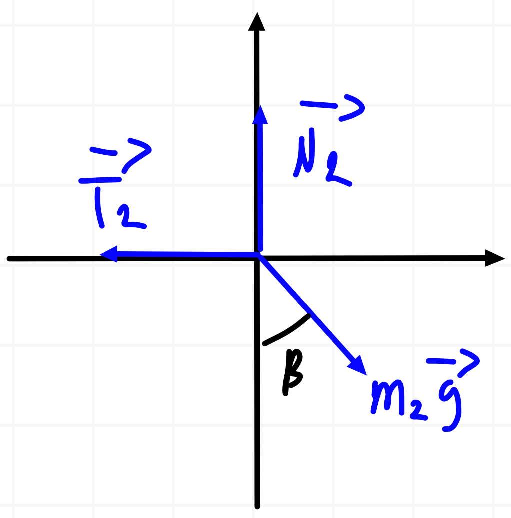


Observemos primero las fuerzas actuando sobre ambos bloques, y luego calculemos sus aceleraciones mediante la ec. de Newton.

1)



2)



$$\vec{N}_1 + m_1\vec{g} + \vec{T}_1 = m_1\ddot{\vec{r}}_1 \,, \quad y$$
$$\vec{N}_2 + \vec{T}_2 + m_2\vec{g} = m_2\ddot{\vec{r}}_2$$

Con $\vec{r}_1$ el vector posición de m_1 y $\vec{r}_2$ el de m_2. Si $\vec{r}_1 = (x_1, y_1)$ y $\vec{r}_2 = (x_2, y_2)$, entonces, en el sistema elegido:

$$(0, N_1) + (-m_1 g\sin\alpha, -m_1 g\cos\alpha) + (T_1, 0) = (m_1\ddot{x}_1, 0)$$
$$(0, N_2) + (-T_2, 0) + (m_2 g\sin\beta, -m_2 g\cos\beta) = (m_2\ddot{x}_2, 0)$$
$$\Rightarrow (-m_1 g\sin\alpha + T_1, N_1 - m_1 g\cos\alpha) = (m_1\ddot{x}_1, 0)$$
$$(-T_2 + m_2 g\sin\beta, N_2 - m_2 g\cos\beta) = (m_2\ddot{x}_2, 0)$$

Del sistema, observamos que para un tiempo t: (considerando la cuerda inextensible)

$$x_1(0) - x_1(t) = x_2(0) - x_2(t)$$
$$\Rightarrow \ddot{x}_1 = \ddot{x}_2$$

por tanto, las ecuaciones se reducen a 2:

$$-m_1 g\sin\alpha + T_1 = m_1\ddot{x}_1, \; y$$

$$m_2 g\sin\beta - T_2 = m_2\ddot{x}_2$$

Por no tener (se considera una cuerda ideal, inextensible) masa la cuerda, entonces $T_1 = T_2$. Por tanto (podemos verlo como pares de fuerzas por la 3ra Ley).

$$\Rightarrow -m_1 g\sin\alpha + T = m_1\ddot{x}_1$$

$$m_2 g\sin\beta - T = m_2\ddot{x}_2$$

$$\Rightarrow -m_1 g\sin\alpha + m_2 g\sin\beta - m_2\ddot{x}_2 = m_1\ddot{x}_1$$

$$\Rightarrow g(m_2\sin\beta - m_1\sin\alpha) = (m_1 + m_2)\ddot{x}_1$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_1 = g\,\frac{m_2\sin\beta - m_1\sin\alpha}{m_1 + m_2} = \ddot{x}_2$$

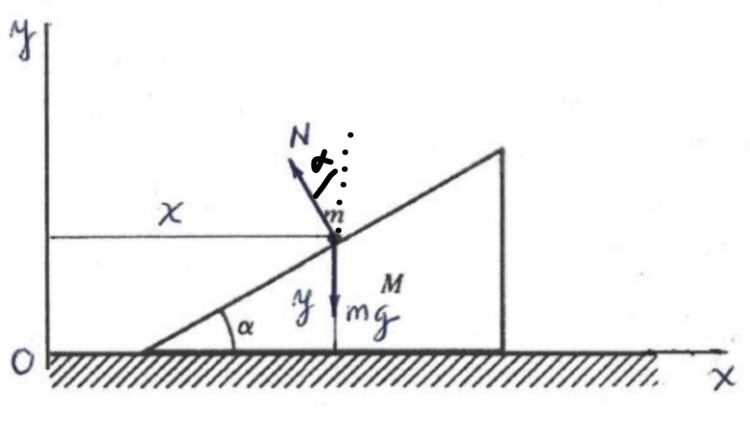
Movimiento de una partícula sobre una cuña móvil en una superficie lisa

Clifford Truesdell refiere en su libro *Ensayos de historia de la mecánica*:

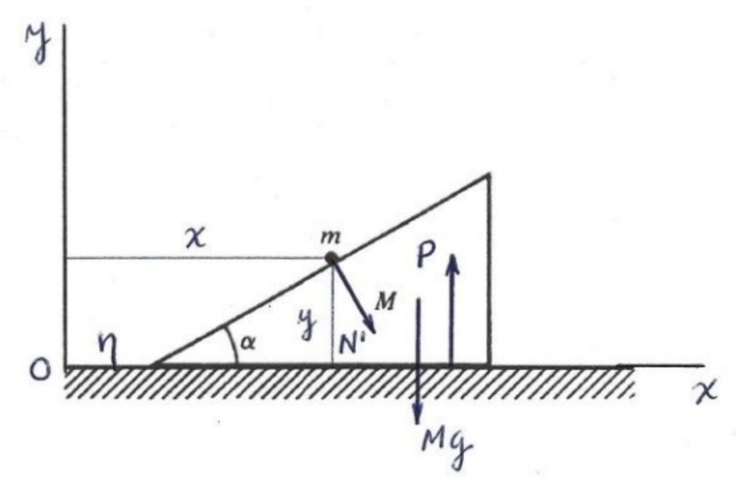
> «Por los años de 1740, Daniel Bernoulli, Euler y Clairaut se plantearon algunos problemas de gran dificultad, por ejemplo:
>
> Determinar el movimiento de una masa puntual que desciende por una cuña, la que a su vez se desliza sobre una mesa…».

Veamos cómo resolvemos este problema 280 años después.

Primero es conveniente elaborar dibujos que muestren las fuerzas que actúan y las coordenadas relevantes en el sistema de referencia inercial como se muestra



Fuerzas aplicadas a *m*



Fuerzas aplicadas a *M*

Para la masa m, la 2da Ley de Newton nos dice que:

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}_m$$

$$\Rightarrow (-N\sin\alpha, N\cos\alpha) + (0, -mg) = (m\ddot{x}, m\ddot{y})$$

Y, para la masa M:

$$\vec{N'} + M\vec{g} + \vec{P} = M\vec{a}_M$$

$$\Rightarrow (N\sin\alpha, -N\cos\alpha) + (0, -Mg) + (0, P) = (M\ddot{\eta}, 0)$$

Pues $\vec{N}$ y $\vec{N'}$ son pares de fuerzas de acción-reacción derivadas de la 3ra Ley de Newton, así $\vec{N'} = -\vec{N}$. Por tanto:

$$\begin{cases} -N\sin\alpha = m\ddot{x} \quad \dots (1) \\ N\cos\alpha - mg = m\ddot{y} \quad \dots (2) \end{cases}$$

y, además para un tiempo t:

$$\tan\alpha = \frac{y(t)}{(x-\eta)(t)}$$

$$\begin{cases} N\sin\alpha = M\ddot{\eta} \quad \dots (3) \\ -N\cos\alpha - Mg + P = 0 \quad \dots (4) \end{cases} \Rightarrow (x-\eta)\tan\alpha = y \quad \dots (0)$$

Nos interesa analizar el movimiento de la masa m, i.e obtener a x y y. Para ello, veamos que de (1):

$$N = -\frac{m}{\sin\alpha}\ddot{x} \quad \dots (5)$$

también, de (1) y (3):

$$m\ddot{x} + M\ddot{\eta} = 0 \Leftrightarrow \ddot{\eta} = -\frac{m}{M}\ddot{x} \quad \dots (6)$$

por (0) y (6):

$$\ddot{x}\left(1+\frac{m}{M}\right)\tan\alpha = \ddot{y} \quad \dots (7)$$

Sustituyendo (5) en (2), y volviendo a sustituir en (7):

$$m\ddot{x}\left(1+\frac{m}{M}\right)\tan\alpha = -m\ddot{x}\cot\alpha - mg$$

$$\Rightarrow \ddot{x}\left(\tan\alpha + \cot\alpha + \frac{m}{M}\tan\alpha\right) = -g$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = -\frac{g}{\tan\alpha + \cot\alpha + \frac{m}{M}\tan\alpha}$$

donde:

$$\tan\alpha + \cot\alpha + \frac{m}{M}\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{m\sin\alpha}{M\cos\alpha}$$

$$= \frac{M\sin^2\alpha + M\cos^2\alpha + m\sin^2\alpha}{M\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$= \frac{M + m\sin^2\alpha}{M\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = \frac{-Mg\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$$

Para $\ddot{y}$:

$$\ddot{y} = \ddot{x}\left(1+\frac{m}{M}\right)\tan\alpha$$

$$= \left(-\frac{Mg\sin\alpha\cos\alpha}{M+m\sin^2\alpha}\right)\left(\frac{M+m}{M}\right)\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$= -\frac{(M+m)g\sin^2\alpha}{M+m\sin^2\alpha}$$

Y, para $\ddot{\eta}$:

$$\ddot{\eta} = -\frac{m}{M}\ddot{x}$$
$$= -\frac{m}{M}\cdot\left(-\frac{Mg\sin\alpha\cos\alpha}{M+m\sin^2\alpha}\right)$$
$$= \frac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{M+m\sin^2\alpha}$$

Obtengamos la ec. de movimiento de la masa m. Como:

$$\ddot{x}, \ddot{y} \text{ son ctes}$$

el movimiento en x y y es rectilíneo unif. acelerado. Por tanto:

$$x(t) = x(0) + \dot{x}(0)t + \frac{1}{2}\ddot{x}(0)t^2$$
$$y(t) = y(0) + \dot{y}(0)t + \frac{1}{2}\ddot{y}(0)t^2$$

Con $\dot{x}(0) = 0 = \dot{y}(0)$, y $y(0) = h$, $x(0) = \underbrace{\frac{h}{\tan\alpha}}_{=l}$, entonces:

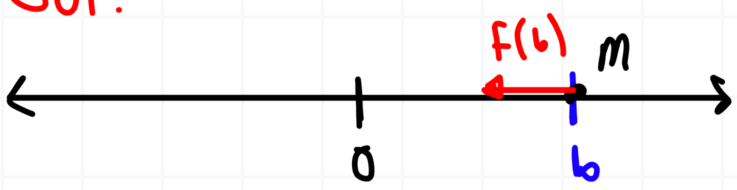
$$x(t) = l + \frac{1}{2}\left(-\frac{Mg\sin\alpha\cos\alpha}{M+m\sin^2\alpha}\right)t^2$$
$$y(t) = h + \frac{1}{2}\left(-\frac{(M+m)g\sin^2\alpha}{M+m\sin^2\alpha}\right)t^2$$

$$\Rightarrow \frac{x(t)-l}{y(t)-h} = \frac{M\sin\alpha\cos\alpha}{(M+m)\sin^2\alpha} = \frac{M}{M+m}\cdot\frac{1}{\tan\alpha}$$
$$\Rightarrow y = \left(\frac{M+m}{m}\right)\tan\alpha(x-l)+h$$
$$= \left(\frac{M+m}{m}\right)\tan\alpha\, x - \left(\frac{M+m}{m}\right)h + h$$
$$= \left(\frac{M+m}{m}\right)\tan\alpha\, x - \frac{M}{m}h$$

7. Una partícula de masa m se suelta desde el reposo a una distancia b de un origen de fuerzas fijo que atrae a la partícula con una fuerza $F(x) = -kx^{-2}$. Calcule el tiempo requerido para que la partícula alcance el origen.

R. $T = \pi\sqrt{mb^3/8k}$

Sol.



Veamos que, la fuerza F está asociada a un campo Conservativo. En efecto, si $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$:

$$\int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b -Kx^{-2}$$
$$= K x^{-1} \Big|_a^b$$
$$= K\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = -V(b) + V(a)$$

Donde $V(x) = -Kx^{-1}$ es la función potencial asociada a la Fuerza conservativa F, la cual depende únicamente de sus extremos. Si $\vec{r} = x\hat{\imath}$ denota la posición de la partícula, entonces por conservación de la energía:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2(0) - \frac{K}{x(0)} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{K}{x} = E$$

donde E es constante, $x(0) = b$ y $\dot{x}(0) = 0$. Así:

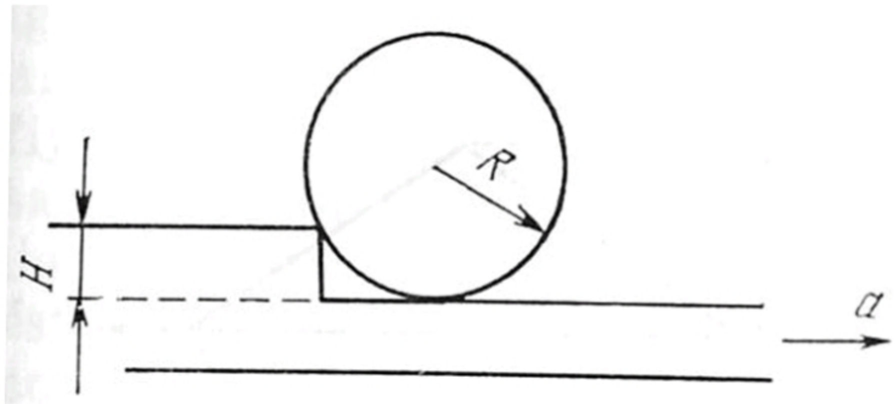
$$K\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$
$$\Rightarrow \frac{2K}{m}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{b}\right) = \dot{x}^2$$
$$\Rightarrow \sqrt{\frac{2K}{m}} = \frac{\dot{x}}{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{b}\right)^{1/2}}$$
$$\Rightarrow \int_0^t \sqrt{\frac{2K}{m}}\,dt = \int_0^t \frac{\frac{dx}{dt}\,dt}{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{b}\right)^{1/2}}$$
$$\Rightarrow \sqrt{\frac{2K}{m}}\,t = \int_b^x \frac{dx}{\left(\frac{b-x}{xb}\right)^{1/2}}$$

Donde:

$$\int_b^x \left(\frac{xb}{b-x}\right)^{1/2} dx; \text{ con } u = b - x \Rightarrow du = -dx, \text{ luego:}$$

$$\int_b^x \left(\frac{xb}{b-x}\right)^{1/2} dx = \int_0^{b-x} -\left(\frac{b(b-u)}{u}\right)^{1/2} du = -\int_0^{b-x}\left(\frac{b^2}{u} - b\right)^{1/2} du$$
$$= -\sqrt{b}\int_0^{b-x}\left(\frac{b}{u} - 1\right)^{1/2} du$$

8. Sobre una tabla horizontal con un escalón de altura H se apoya un cilindro homogéneo de radio $R > H$ como se muestra en la figura. Determine la aceleración máxima posible a de la tabla, de tal manera que el cilindro no empiece a subir el escalón. Se desprecia el rozamiento entre la tabla y el piso.



R. $a_{máx} = \frac{g\sqrt{2RH-H^2}}{R-H}$

Sol.