

# Taller de Topología Algebraica, Lectura 7: El Grupo Fundamental de $\mathbb{S}^1$

Cristo Alvarado

13 de octubre de 2024

$\pi(\mathbb{S}^1)$

Lo hecho en la parte anterior sobre espacios recubridores será utilizado para caracterizar en su totalidad el grupo fundamental del círculo  $\mathbb{S}^1$ .

## Definición 7.1

Sea  $\omega : I \rightarrow \mathbb{S}^1$  el bucle con base  $(1, 0)$  que va alrededor del círculo exactamente una vez, es decir:

$$\omega(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s), \quad \forall s \in I$$

Para cada  $n \in \mathbb{Z}$  se define:

$$\omega_n(s) = (\cos 2\pi ns, \sin 2\pi ns), \quad \forall s \in I$$

es decir, este bucle da  $n$ -vueltas alrededor del círculo cuando  $t$  varía de 0 a 1.

## Ejercicio 7.1

Pruebe que:

$$[\omega]^n = [\omega_n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

donde  $[\omega]^n$  es el producto de la clase con representante  $\omega$   $n$ -veces.

## Demostración:

Ejercicio. ■

Para la demostración del teorema, lo que se hará es que dado un camino  $f : I \rightarrow \mathbb{S}^1$ , se comparará al mismo con los caminos que genera la función recubridora  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$

$$p(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s), \quad \forall s \in I$$

este mapeo puede ser visualizado como una helicoides en  $\mathbb{R}^3$ .

## Observación 7.1

Veamos que

$$\omega_n = p \circ \tilde{\omega}_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

donde  $\tilde{\omega}_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  es la función tal que  $s \mapsto ns$ . Básicamente esta función controla el número de giros adicionales que va a dar la helicoides en un solo intervalo de longitud 1. El signo de  $n$  determina el sentido de giro de la helicoides.

Note que  $\tilde{\omega}_n$  es un levantamiento de  $\omega_n$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

Para determinar el grupo fundamental del círculo, se estudiará como es que los caminos en  $\mathbb{S}^1$  se levantan a  $\mathbb{R}$ .

---

**Teorema 7.1**

El grupo fundamental  $\pi(\mathbb{S}^1, (1, 0))$  es cíclico infinito generado por  $[\omega]$ .

---

**Demostración:**

Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{S}^1$  un bucle con punto base  $x_0 = (1, 0)$ . Por el lema ?? existe un levantamiento  $\tilde{f}$  empezando en 0. Este camino termina en algún entero  $n \in \mathbb{Z}$  pues al ser levantamiento se cumple que

$$f = p \circ \tilde{f}$$

luego, para  $s = 1$ :

$$p(\tilde{f}(1)) = p \circ \tilde{f}(1) = f(1) = x_0$$

y,

$$p^{-1}(x_0) = \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$$

Por tanto, debe existir  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $\tilde{f}(1) = n$ . Así  $\tilde{f}$  es un camino que va de 0 a  $n$ . Otro camino que también hace lo mismo es  $\tilde{\omega}_n$ . Además

$$\tilde{f} \sim \tilde{\omega}_n$$

tomando la función continua  $\tilde{F} : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tilde{F}(t, s) = (1 - t)\tilde{f}(s) + t\tilde{\omega}_n(s)$ , para todo  $s, t \in I$ . Tomando  $F(s, t) = p \circ \tilde{F}(s, t)$  resulta en que  $f \sim \omega_n$  (si le quedan dudas, es fácil de verificar que se cumple lo anterior), luego  $[f] = [\omega_n] = [\omega]^n$ . Se sigue entonces que  $\pi(\mathbb{S}^1, (1, 0))$  es generado por  $[\omega]$ .

Para ver que es cíclico infinito, veamos que para el bucle anterior el entero  $n$  es único. Suponga que  $[f]$  está determinado por  $[\omega_n]$  y  $[\omega_m]$ , es decir que

$$f \sim \omega_n \quad \text{y} \quad f \sim \omega_m$$

con  $m \in \mathbb{Z}$ . Se sigue que  $\omega_n \sim \omega_m$ . Por el lema ?? se tiene que  $\tilde{\omega}_n \sim \tilde{\omega}_m$ . En particular, tienen el mismo punto terminal, por lo que

$$m = \tilde{\omega}_m(1) = \tilde{\omega}_n(1) = n$$

así,  $n = m$ . Se sigue entonces que el orden de  $[\omega]$  no puede ser finito ya que en caso contrario  $f$  tendría al menos dos representaciones con este mismo generador de  $\pi(\mathbb{S}^1, (1, 0))$ .

Por lo tanto  $\pi(\mathbb{S}^1, (1, 0))$  es un grupo cíclico infinito generado por  $[\omega]$ , luego es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ . Así:

$$\pi(\mathbb{S}^1, (1, 0)) \cong \mathbb{Z}$$

■

### Aplicaciones

**Observación 7.2**

Podemos ver el círculo como subconjunto de  $\mathbb{C}$  dado por:

$$\mathbb{S}^1 = \left\{ x + iy \in \mathbb{C} \mid x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

en particular,  $1 \in \mathbb{S}^1$  y el espacio  $\mathbb{S}^1$  es arco-conexo, por lo que la elección del punto para calcular el grupo fundamental es independiente del elemento de  $\mathbb{S}^1$ .

Como aplicación de los resultados anteriores, tenemos el siguiente teorema:

---

**Teorema 7.2 (Teorema fundamental del álgebra)**

Todo polinomio no constante con coeficientes en  $\mathbb{C}$  tiene una raíz en  $\mathbb{C}$ .

---

**Demostración:**

Sea  $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  un polinomio. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que

$$p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

donde  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ , con  $n \geq 0$ . Si  $n = 0$  entonces  $p(z) = 1, \forall z \in \mathbb{C}$  (estamos diciendo que el polinomio  $p$  es mónico).

Supongamos que  $p$  no tiene raíces en  $\mathbb{C}$ . Para cada  $r \geq 0$  se define la función  $f_r : I \rightarrow \mathbb{C}$  por:

$$f_r(s) = \frac{p(re^{2\pi i s})/p(r)}{|p(re^{2\pi i s})/p(r)|}, \quad \forall s \in I$$

la cual es un bucle en el círculo unitario  $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$  con base en 1. Se tiene que  $f_0$  es el bucle constante con base en 1, por lo que  $[f_0]$  es la identidad de  $\pi(\mathbb{S}^1, 1)$ . Afirmamos que

$$f_r \sim f_0$$

para todo  $r > 0$ . En efecto, sea  $r > 0$  y  $F : I \times I \rightarrow \mathbb{S}^1$  dada por:

$$F(t, s) = f_{rt}(s), \quad \forall s, t \in I$$

Es claro de la definición de  $f_r$  que  $F(t, s)$  es continua. Veamos que:

$$F(0, s) = f_0(s) \quad \text{y} \quad F(1, s) = f_r(s), \quad \forall s \in I$$

Y además:

$$F(t, 0) = f_{rt}(0) = 1 \quad \text{y} \quad F(t, 1) = f_{rt}(1) = 1, \quad \forall t \in I$$

(pues todos los bucles tienen como punto base a 1). Por tanto,  $f_0 \sim f_r$  para todo  $r \geq 0$ . Se sigue pues que

$$[f_0] = [f_r], \quad \forall r \geq 0$$

es decir que  $[f_r]$  es la identidad de  $\pi(\mathbb{S}^1, 1)$  para todo  $r \geq 0$ .

Fijemos ahora  $r > 0$  tal que

$$r > \max\{|a_1| + \dots + |a_n|, 1\}$$

Entonces si  $z \in \mathbb{C}$  es tal que  $\|z\| = r$ , tenemos que

$$\begin{aligned} t |a_1 z^{n-1} + \dots + a_n| &\leq |a_1 z^{n-1} + \dots + a_n| \\ |a_1 z^{n-1} + \dots + a_n| &\leq |a_1 z^{n-1}| + \dots + |a_n| \\ &< (|a_1| + \dots + |a_n|) |z|^{n-1} \\ &< |z|^n \\ \Rightarrow |a_1 z^{n-1} + \dots + a_n| &< |z|^n \\ &\Rightarrow 0 < |z|^n - |a_1 z^{n-1} + \dots + a_n| \end{aligned}$$

para todo  $t \in I$ , lo cual implica que

$$t |a_1 z^{n-1} + \dots + a_n| < |z|^n, \quad \forall t \in I$$

Por tanto, el polinomio

$$p_t(z) = z^n + t(a_1 z^{n-1} + \dots + a_n), \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

no tiene raíces cuando  $\|z\| = r$  (círculo centrado en 0 de radio  $r$ ) y cuando  $t \in I$ , pues si  $z$  y  $t$  cumplen estas condiciones se sigue que:

$$\begin{aligned} |p_t(z)| &= |z^n + t(a_1 z^{n-1} + \dots + a_n)| \\ &\geq |z|^n - t |a_1 z^{n-1} + \dots + a_n| \\ &> 0 \end{aligned}$$

Definimos la función  $G : I \times I \rightarrow \mathbb{C}$  dada por:

$$G(t, s) = \frac{p_t(re^{2\pi is})/p_t(r)}{|p_t(re^{2\pi is})/p_t(r)|}, \quad \forall s, t \in I$$

Esta función es tal que  $f_r \sim \omega_n$ . En efecto, esta función es continua y cumple que:

$$\begin{aligned} F(0, s) &= \frac{p_0(re^{2\pi is})/p_0(r)}{|p_0(re^{2\pi is})/p_0(r)|} \\ &= \frac{r^n e^{2\pi i n s} / r^n}{|r^n e^{2\pi i n s} / r^n|} \\ &= e^{2\pi i n s} \\ &= \cos(2\pi n s) + i \sin(2\pi n s) \\ &= \omega_n(s), \quad \forall s \in I \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned} F(1, s) &= \frac{p_1(re^{2\pi is})/p_1(r)}{|p_1(re^{2\pi is})/p_1(r)|} \\ &= \frac{p(re^{2\pi is})/p(r)}{|p(re^{2\pi is})/p(r)|} \\ &= f_r(s), \quad \forall s \in I \end{aligned}$$

(el hecho de que los extremos que se quedan fijos se verifica rápidamente). Anteriormente se probó que  $\omega_n$  es tal que

$$[\omega_n] = [\omega]^n$$

por ende,

$$[f_r] = [\omega]^n$$

pero  $[f_r] = [f_0]$  es la identidad del grupo, así que  $n = 0$ . Luego

$$p(z) = 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

esto es, el único polinomio que no tiene raíces en  $\mathbb{C}$  es el polinomio constante no cero. ■

Ahora un resultado familiar enunciado al inicio del taller:

---

**Teorema 7.3 (Teorema del punto fijo de Brower para dimensión 2)**

Toda función continua  $f : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$  tiene un punto fijo, es decir existe  $z \in \mathbb{D}^2$  tal que  $f(z) = z$ , donde:

$$\mathbb{D}^2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$


---

**Demostración:**

Suponga que para todo  $z \in \mathbb{D}^2$  se tiene que  $f(z) \neq z$ . Definimos la función  $r : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$  dada como sigue:

- Sea  $z = (x, y) \in \mathbb{D}^2$ . Considere la función  $l_x : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por:

$$l_z(t) = (1-t)f(z) + tz = ((1-t)f_1(x, y) + tx, (1-t)f_2(x, y) + ty)$$

(es la recta que comienza en  $f(z)$  y va en dirección de  $z$ ) donde  $f(z) = (f_1(z), f_2(z))$ . Por el teorema del valor medio se tiene que existe un único  $t_x \in ]0, \infty[$  tal que

$$\|l_z(t_x)\| = 1$$

En efecto, como  $l_z\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{f(z)+z}{2}$ , este punto es tal que no puede tener norma igual a 1, ya que en caso contrario:

$$\begin{aligned}\left\|\frac{f(z)+z}{2}\right\| = 1 &\Rightarrow \|f(z)+z\| = 2 \\ &\Rightarrow 2 \leq \|f(z)\| + \|z\| \leq 2 \\ &\Rightarrow \|f(z)\| = \|z\| = 1\end{aligned}$$

por ende,  $\|f(z)\| + \|z\| = \|f(z)+z\|$  así que deben ser colineales. Como tienen la misma norma, entonces deben ser el mismo, lo cual no puede suceder ya que  $f(z) \neq z$ . Por tanto

$$l_z\left(\frac{1}{2}\right) < 1$$

y,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|l_z(t)\| = \infty$$

del teorema del valor medio se sigue la existencia de tal  $t_x \in ]0, \infty[$ . Este elemento está determinado por una de las raíces con  $t \in ]0, \infty[$  de la ecuación:

$$\begin{aligned}\|l_z(t)\| = 1 &\iff \|l_x(t)\|^2 = 1 \\ &\iff \|((1-t)f_1(x,y) + tx, (1-t)f_2(x,y) + ty)\|^2 = 1 \\ &\iff ((1-t)f_1(x,y) + tx)^2 + ((1-t)f_2(x,y) + ty)^2 = 1\end{aligned}$$

el cual es un polinomio de grado 2. Por tanto, la aplicación  $z \mapsto t_z$  es una función continua. Así, la aplicación  $z \mapsto l_z(t_z)$  es una función continua (por ser composición de funciones continuas). Hacemos entonces  $r(z) = l_z(t_z)$  la cual es continua y es tal que  $t_z > 0$ .

- Si  $z \in \mathbb{D}^2$  es tal que  $\|z\| = 1$ , entonces  $r(z) = z$  (pues la función  $l_z$  solo pasa por un  $t \in ]0, \infty[$  tal que  $\|l_z(t)\| = 1$ , en particular debe pasar por  $z$ ).

Por los dos incisos anteriores,  $r : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$  es una función continua siendo  $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{D}^2$ . Se tiene que  $r$  es una retracción de  $\mathbb{D}^2$ . En particular, se sabe que la función

$$r_* : \pi(\mathbb{D}^2, (1,0)) \rightarrow \pi(\mathbb{S}^1, (1,0))$$

es un epimorfismo. Pero como  $\mathbb{D}^2$  tiene forma de estrella respecto a  $(0,0)$  se tiene que  $\mathbb{D}^2$  es contraíble a un punto, luego es simplemente conexo. Así que

$$\pi(\mathbb{D}^2, (1,0)) = \langle e \rangle$$

y,

$$\pi(\mathbb{S}^1, (1,0)) \cong \mathbb{Z}$$

por ende,  $r_*$  no puede ser epimorfismo, lo cual es una contradicción. De esta forma se sigue que debe existir  $z \in \mathbb{D}^2$  tal que  $f(z) = z$ . ■

El hecho de que  $\pi(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$  puede ser usado para probar el siguiente resultado:

---

#### **Teorema 7.4 (Teorema de Borsuk-Ulam en dimensión 2)**

Para cada función continua  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  existen un par de puntos antipodales  $x, -x \in \mathbb{S}^2$  tales que

$$f(x) = f(-x)$$

donde

$$\mathbb{S}^2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$$


---

**Demostración:**

Sea  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una función continua tal que

$$f(x) \neq f(-x), \quad \forall x \in \mathbb{S}^2$$

Podemos definir entonces una función  $g : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$  tal que

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}, \quad \forall x \in \mathbb{S}^2$$

considerando a  $\mathbb{S}^1$  como subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  es decir:

$$\mathbb{S}^1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

Definimos ahora el bucle  $\eta : I \rightarrow \mathbb{S}^2$  como:

$$\eta(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, 0)$$

y hacemos

$$h = g \circ \eta$$

éste es un bucle en  $\mathbb{S}^1$ . Como  $-g(x) = g(-x)$  para todo  $x \in \mathbb{S}^2$ , se tiene que

$$\begin{aligned} h(s + 1/2) &= g \circ \eta(s + 1/2) \\ &= g(\cos(2\pi s + \pi), \sin(2\pi s + \pi), 0) \\ &= g(-\cos 2\pi s, -\sin 2\pi s, 0) \\ &= g(-(\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, 0)) \\ &= -g \circ \eta(s) \\ &= -h(s), \quad \forall s \in [0, 1/2] \end{aligned}$$

El camino  $h$  puede ser levantado a un camino  $\tilde{h} : I \rightarrow \mathbb{R}$  empezando en cero, para el que se cumple que:

$$p \circ \tilde{h} = h$$

siendo  $p$  la función tal que  $s \mapsto (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$ . En particular,

$$p(\tilde{h}(s + 1/2)) + p(\tilde{h}(s)) = h(s + 1/2) + h(s) = 0$$

para todo  $s \in [0, 1/2]$ . Esto es:

$$\begin{aligned} 0 &= (\cos 2\pi \tilde{h}(s + 1/2), \sin 2\pi \tilde{h}(s + 1/2)) + (\cos 2\pi \tilde{h}(s), \sin 2\pi \tilde{h}(s)) \\ &= (\cos 2\pi \tilde{h}(s + 1/2) + \cos 2\pi \tilde{h}(s), \sin 2\pi \tilde{h}(s + 1/2) + \sin 2\pi \tilde{h}(s)) \\ &= \left( 2 \cos \frac{2\pi(\tilde{h}(s + 1/2) + \tilde{h}(s))}{2} \cos \frac{2\pi(\tilde{h}(s + 1/2) - \tilde{h}(s))}{2} \right. \\ &\quad \left. , 2 \sin \frac{2\pi(\tilde{h}(s + 1/2) + \tilde{h}(s))}{2} \cos \frac{2\pi(\tilde{h}(s + 1/2) - \tilde{h}(s))}{2} \right) \\ &= \left( 2 \cos \pi(\tilde{h}(s + 1/2) + \tilde{h}(s)) \cos \pi(\tilde{h}(s + 1/2) - \tilde{h}(s)) \right. \\ &\quad \left. , 2 \sin \pi(\tilde{h}(s + 1/2) + \tilde{h}(s)) \cos \pi(\tilde{h}(s + 1/2) - \tilde{h}(s)) \right) \end{aligned}$$

la única forma de que esto sea cero, es que

$$\cos \pi(\tilde{h}(s + 1/2) - \tilde{h}(s)) = 0 \iff \tilde{h}(s + 1/2) - \tilde{h}(s) = \frac{q(s)}{2}$$

donde  $q(s) \in \mathbb{Z}$  es un impar, para todo  $s \in I$ . Pero la función  $q : [0, 1/2] \rightarrow \mathbb{Z}$  es continua, por lo que debe ser constante. Así que:

$$\tilde{h}(s + 1/2) - \tilde{h}(s) = \frac{q}{2}$$

para algún  $q \in \mathbb{Z}$ . En particular:

$$\begin{aligned}\tilde{h}(1) &= \tilde{h}(1/2) + \frac{q}{2} \\ &= \left(\tilde{h}(0) + \frac{q}{2}\right) + \frac{q}{2} \\ &= \tilde{h}(0) + q \\ &= q\end{aligned}$$

por ende,  $h \sim \omega_q$ . En particular esto implica que  $h$  no es homotópica a una función contante ya que  $q$  es impar (la única forma en que fuera homotópica a una función constante es si  $q = 0$ ).

Pero  $\eta$  es homotópica a la función  $g, s \mapsto (0, 0, 1)$  que es constante. Para ello, tome la función  $F : I \times I \rightarrow \mathbb{S}^2$  dada por:

$$F(s, t) = \left( \cos 2\pi s \cos \frac{\pi t}{2}, \sin 2\pi s \cos \frac{\pi t}{2}, \sin \frac{\pi t}{2} \right)$$

(claramente esta función está bien definida y es continua), para la cual se cumple que:

$$\begin{aligned}F(s, 0) &= (\cos 2\pi s \cos 0, \sin 2\pi s \cos 0, 0) \\ &= (\cos 2\pi s \cos, \sin 2\pi s, 0) \\ &= \eta(s), \quad \forall s \in I\end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}F(s, 1) &= \left( \cos 2\pi s \cos \frac{\pi}{2}, \sin 2\pi s \cos \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2} \right) \\ &= (0, 0, 1)\end{aligned}$$

con lo que se tiene la homotopía deseada. Así, también debe suceder que  $g \circ \eta$  sea homotópica a una función constante, es decir que  $h$  es homotópica a una función constante, lo cual contradice lo probado anteriormente.

Así que, existe  $x \in \mathbb{S}^2$  tal que

$$f(x) = f(-x)$$

■

---

### Corolario 7.1

Si  $\mathbb{S}^2$  es escrito como la unión de tres conjuntos cerrados  $A_1, A_2, A_3 \subseteq \mathbb{S}^2$ , entonces uno de estos debe tener un par de puntos antipodales  $\{x, -x\}$ .

---

### Demostración:

Sean  $A_1, A_2, A_3 \subseteq \mathbb{S}^2$  conjuntos tales que

$$\mathbb{S}^2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

para cada  $i = 1, 2$  definimos la función  $d_i : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$d_i(x) = \inf \left\{ \|x - y\| \mid y \in A_i \right\}$$

se sabe que esta es una función continua por cursos de análisis matemático. Por el teorema de Borsuk-Ulam, para la función  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  continua dada por:

$$f(x) = (d_1(x), d_2(x))$$

existen un par de puntos antipodales  $x, -x \in \mathbb{S}^2$  tales que:

$$f(x) = f(-x) \Rightarrow d_1(x) = d_1(-x) \text{ y } d_2(x) = d_2(-x)$$

Se tienen dos casos:

- $d_1(x) = d_1(-x) = 0$  o  $d_2(x) = d_2(-x) = 0$ , en el primer caso se sigue que al ser  $A_1$  cerrado, entonces  $x, -x \in A_1$ . De forma análoga en el segundo caso se sigue que  $x, -x \in A_2$ .
- $d_1(x) = d_1(-x) > 0$  y  $d_2(x) = d_2(-x) > 0$ . Como los conjuntos  $A_1$  y  $A_2$  son cerrados, forzosamente debe suceder que  $x, -x \notin A_1, A_2$ . Por tanto,  $x, -x \in A_3$  ya que  $\mathbb{S}^2$  es la unión de los  $A_i$ .

por los dos incisos anteriores se tiene el resultado. ■