

# Notas de Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

6 de junio de 2024

# Índice general

<b>1. Transformación de Fourier</b>	<b>2</b>
1.1. Conceptos Fundamentales . . . . .	2
1.2. Teoremas de Transferencia e Inversión . . . . .	13
1.3. Fórmula de inversión en $\mathbb{R}$ . . . . .	18
1.4. Homomorfismos Complejos del álgebra de Banach $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ . . . . .	19

# Capítulo 1

## Transformación de Fourier

La transformada de Fourier de una función de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{C}$  generaliza en cierta forma la noción de coeficientes de Fourier de funciones periódicas

### 1.1. Conceptos Fundamentales

#### Definición 1.1.1

Se define el **producto escalar usual en  $\mathbb{R}^n$**  como

$$\langle x|y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

en ocasiones también denotado como  $(x|y) = \langle x|y \rangle$ .

#### Definición 1.1.2

Sea  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ . Se definen  $\mathcal{F}f, \mathcal{F}^*f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  como

$$\mathcal{F}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y \rangle} f(y) dy \quad \text{y} \quad \mathcal{F}^*f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x|y \rangle} f(y) dy$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Las funciones  $\mathcal{F}f$  y  $\mathcal{F}^*f$  se llaman las **transformaciones de Fourier de  $f$** . Las aplicaciones  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{F}^*$  de  $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  en el conjunto de funciones de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{C}$  se llaman las **transformaciones de Fourier**.

#### Observación 1.1.1

Se tiene lo siguiente:

- I. Los operadores  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{F}^*$  son lineales de  $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  en el espacio de funciones de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{C}$ .
- II. Las funciones  $\mathcal{F}f(x)$  y  $\mathcal{F}^*f(x)$  están definidas para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  si y sólo si  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ .
- III. En caso de existir, se tiene que  $\mathcal{F}f(x) = \mathcal{F}^*f(-x)$ .

#### Demostración:

De (i): Es claro que si  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  entonces  $\mathcal{F}f(x)$  y  $\mathcal{F}^*f(x)$  están definidas para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Para la recíproca, en particular están definidas para  $x = \vec{0}$ , es decir que

$$\mathcal{F}f(\vec{0}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \vec{0}|y \rangle} f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} e^0 f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy < \infty$$

luego  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ .

De (ii): Es inmediata. ■

### Definición 1.1.3

Sea  $f \in \mathcal{L}_1([0, \infty[, \mathbb{C})$ . Se definen

$$\mathcal{F}_c f(x) = \int_0^\infty f(y) \cos xy \, dy \quad \text{y} \quad \mathcal{F}_s f(x) = \int_0^\infty f(y) \sin xy \, dy$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Las funciones  $\mathcal{F}_c f$  y  $\mathcal{F}_s f$  se llaman **las transformadas coseno y seno de Fourier de  $f$** .

### Definición 1.1.4

Sea  $f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{C}$  una función. Se definen las funciones  $f^P$  y  $f^I$  de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{C}$  como

$$f^P(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y,

$$f^I(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geq 0 \\ -f(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

---

### Proposición 1.1.1

Sea  $f \in \mathcal{L}_1([0, \infty[, \mathbb{C})$ . Se tiene

$$\mathcal{F} f^P(x) = 2\mathcal{F}_c f(x) \quad \text{y} \quad \mathcal{F} f^I(x) = -2i\mathcal{F}_s f(x)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

---

### Demostración:

Sea  $x \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{F} f^P(x) &= \int_{\mathbb{R}} f^P(y) e^{-i\langle x|y\rangle} \, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f^P(y) e^{-ixy} \, dy \\ &= \int_{-\infty}^0 f^P(y) e^{-ixy} \, dy + \int_0^{\infty} f^P(y) e^{-ixy} \, dy \\ &= \int_{-\infty}^0 f(-y) e^{-ixy} \, dy + \int_0^{\infty} f(y) e^{-ixy} \, dy \\ &= \int_0^{\infty} f(y) e^{ixy} \, dy + \int_0^{\infty} f(y) e^{-ixy} \, dy \\ &= \int_0^{\infty} f(y) [e^{ixy} + \overline{e^{ixy}}] \, dy \\ &= \int_0^{\infty} f(y) [2\Re(e^{ixy})] \, dy \\ &= \int_0^{\infty} 2f(y) \cos xy \, dy \\ &= 2 \int_0^{\infty} f(y) \cos xy \, dy \\ &= 2\mathcal{F}_c f(x) \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f^I(x) &= \int_{\mathbb{R}} f^I(y) e^{-ixy} dy \\
&= \int_{-\infty}^0 f^I(y) e^{-ixy} dy + \int_0^{\infty} f^I(y) e^{-ixy} dy \\
&= \int_{-\infty}^0 (-f(-y)) e^{-ixy} dy + \int_0^{\infty} f(y) e^{-ixy} dy \\
&= - \int_0^{\infty} f(y) e^{ixy} dy + \int_0^{\infty} f(y) e^{-ixy} dy \\
&= \int_0^{\infty} f(y) [-e^{ixy} + e^{-ixy}] dy \\
&= \int_0^{\infty} f(y) [-\cos xy - i \sin xy + \cos(-xy) + i \sin(-xy)] dy \\
&= \int_0^{\infty} f(y) [-2i \sin xy] dy \\
&= -2i \int_0^{\infty} f(y) \sin xy dy \\
&= -2i \mathcal{F}_s f(x)
\end{aligned}$$

lo que prueba el resultado. ■

### Corolario 1.1.1

Sea  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

- I. Si  $f$  es par, entonces  $\mathcal{F}f(x) = 2 \int_0^{\infty} f(y) \cos xy dy$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
- II. Si  $f$  es impar, entonces  $\mathcal{F}f(x) = -2i \int_0^{\infty} f(y) \sin xy dy$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

### Ejemplo 1.1.1

Se tiene lo siguiente:

- I. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función  $f = \chi_I$  donde  $I$  es un intervalo con extremos  $a < b$  en  $\mathbb{R}$ . Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_I(y) e^{-ixy} dy \\
&= \int_a^b e^{-ixy} dy \\
&= \begin{cases} \frac{e^{-ixb} - e^{-ixa}}{-ix} & \text{si } x \neq 0 \\ b - a & \text{si } x = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

En particular, si  $a > 0$  se tiene que

$$\mathcal{F}\chi_{[-a, a]}(x) = \begin{cases} \frac{2 \sin ax}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Como  $\mathcal{F}\chi_{[-a, a]}$  no es integrable en  $\mathbb{R}$  se concluye que, en general, la transformada de Fourier de una función integrable no necesariamente es integrable.

- II. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función

$$f(x) = e^{-k|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

donde  $k > 0$ . Como  $f$  es integrable, entonces

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k|y|} e^{-ixy} dy \\
 &= \int_{-\infty}^0 e^{ky} e^{-ixy} dy + \int_0^{\infty} e^{-ky} e^{-ixy} dy \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-ky} e^{ixy} dy + \int_0^{\infty} e^{-ky} e^{-ixy} dy \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-ky} e^{(-k+ix)y} dy + \int_0^{\infty} e^{-ky} e^{(-k-ix)y} dy \\
 &= \frac{-1}{-k+ix} + \frac{-1}{-k-ix} \\
 &= \frac{k+ix+k-ix}{k^2+x^2} \\
 &= \frac{2k}{k^2+x^2}
 \end{aligned}$$

### Ejemplo 1.1.2

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función

$$f(x) = e^{-kx^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

donde  $k > 0$ . Como  $f$  es par se tiene que

$$\mathcal{F}f(x) = 2 \int_0^{\infty} e^{-ky^2} \cos xy dy$$

Sea  $g(x) = \int_0^{\infty} e^{-ky^2} \cos xy dy$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Se afirma que

$$g'(x) = - \int_0^{\infty} ye^{-ky^2} \sin xy dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En efecto, observemos que

$$\left| ye^{-ky^2} \sin xy \right| \leq ye^{-ky^2}, \quad \forall y \geq 0$$

donde la función de la derecha es integrable e independiente de  $x$  (se nota fácilmente que una de sus antiderivadas es  $y \mapsto -\frac{1}{2k}e^{-ky^2}$ , por el T.F.C. II evaluando en 0 e  $\infty$  se obtiene que la función original es integrable en  $[0, \infty[$ ). Por el Teorema de derivación se sigue que

$$g'(x) = - \int_0^{\infty} ye^{-ky^2} \sin xy dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Veamos ahora que

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \int_0^\infty y e^{-ky^2} \sin xy \, dy \\
&= - \left[ -\frac{1}{2k} e^{-ky^2} \sin xy \Big|_0^\infty + \frac{1}{2k} \int_0^\infty x e^{-ky^2} \cos xy \, dy \right] \\
&= - \left[ 0 - 0 + \frac{x}{2k} \int_0^\infty e^{-ky^2} \cos xy \, dy \right] \\
&= -\frac{x}{2k} \int_0^\infty e^{-ky^2} \cos xy \, dy \\
&= -\frac{x}{2k} g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
g'(x) + \frac{x}{2k} g(x) &= 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow e^{\frac{x^2}{4k}} \left( g'(x) + \frac{x}{2k} g(x) \right) &= 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow \frac{d}{dx} \left( e^{\frac{x^2}{4k}} g(x) \right) &= 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow e^{\frac{x^2}{4k}} g(x) &= c, \quad \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

En particular,

$$\begin{aligned}
c &= g(0) \\
&= \int_0^\infty e^{-ky^2} \, dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{k}} \int_0^\infty e^{-u^2} \, du \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{k}}
\end{aligned}$$

Por ende,

$$g(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{k}} e^{-\frac{x^2}{4k}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

De donde se sigue que

$$\mathcal{F}f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{k}} e^{-\frac{x^2}{4k}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En particular, si  $k = \frac{1}{2}$  entonces  $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  y,

$$\mathcal{F}f(x) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{2\pi} f(x)$$

es decir que  $f$  es un vector propio del operador transformada de Fourier.

### Proposición 1.1.2

Sea  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ .

- I. Si  $g(x) = e^{i\langle a|x \rangle} f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , entonces

$$\mathcal{F}g(x) = \mathcal{F}f(x - a), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

II. Si  $g(x) = f(x - a)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , entonces

$$\mathcal{F}g(x) = e^{-i\langle x|a \rangle} \mathcal{F}f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

III. Si  $g(x) = \overline{f(-x)}$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , entonces

$$\mathcal{F}g(x) = \overline{\mathcal{F}f(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

IV. Sea  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Si  $g(x) = f(\frac{x}{\lambda})$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , entonces

$$\mathcal{F}g(x) = |\lambda|^n \mathcal{F}f(\lambda x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$


---

### **Demostración:**

De (i): Veamos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y \rangle} g(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y \rangle} e^{i\langle a|y \rangle} f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x-a|y \rangle} f(y) dy \\ &= \mathcal{F}f(x - a) \end{aligned}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

De (ii): Veamos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y \rangle} g(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y \rangle} f(y - a) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|u+a \rangle} f(u) du \\ &= e^{-i\langle x|a \rangle} \mathcal{F}f(x) \end{aligned}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

De (iii): Veamos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y \rangle} \overline{f(-y)} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x|y \rangle} \overline{f(y)} dy \\ &= \overline{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y \rangle} f(y) dy} \\ &= \overline{\mathcal{F}f(x)} \end{aligned}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .



De (iv): Veamos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} g(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f\left(\frac{y}{\lambda}\right) dy, \text{ haciendo el cambio de variable } u = \frac{y}{\lambda} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|\lambda u\rangle} f(u) |\lambda|^n du \\
&= |\lambda|^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \lambda x|u\rangle} f(u) du \\
&= |\lambda|^n \mathcal{F}f(\lambda x)
\end{aligned}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . ■

### Teorema 1.1.1

Si  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ , entonces,

$$|\mathcal{F}f(x)| \leq \mathcal{N}_1(f), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Así pues,  $\mathcal{F}f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  es una función acotada. Si  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  denota al espacio de funciones acotadas de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{C}$  provisto de la norma uniforme, entonces  $\mathcal{F} \cdot$  es una aplicación lineal continua de  $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  en  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  tal que  $\|\mathcal{F} \cdot\| = 1$ .

### Demostración:

Para todo  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y) dy \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy \\
&= \mathcal{N}_1(f), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

Notemos también que  $\|\mathcal{F} \cdot\| \leq 1$ .

Para probar la otra desigualdad se busca una función  $P \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  tal que  $\mathcal{N}_\infty(\mathcal{F}P) = \mathcal{N}_1(P) > 0$ . Por ejemplo, la función  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  dada por:

$$P(x) = e^{-\sum_{k=1}^n |x_k|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

satisface

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}P(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} P(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} P(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y_1| - ix_1 y_1} \dots e^{-|y_n| - ix_n y_n} dy_1 \dots dy_n \\
&= \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y_1| - ix_1 y_1} dy_1 \right) \dots \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y_n| - ix_n y_n} dy_n \right)
\end{aligned}$$

Se sabe por ejemplos anteriores que la transformada de  $t \mapsto e^{-|t|}$  es  $\frac{2}{1+t^2}$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ , así pues,

$$\mathcal{F}P(x) = \frac{2^n}{(1+x_1^2) \dots (1+x_n^2)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

de donde,

$$\mathcal{N}_\infty(\mathcal{F}P) = 2^n$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_1(P) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{k=1}^n |x_k|} dx_1 \cdots dx_n \\ &= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} dt \right]^n \\ &= 2^n \left[ \int_0^{\infty} e^{-|t|} dt \right] \\ &= 2^n\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_1(P) &= \mathcal{N}_\infty(\mathcal{F}P) \\ &\leq \|\mathcal{F} \cdot\| \mathcal{N}_1(P) \\ &\Rightarrow 1 \leq \|\mathcal{F} \cdot\|\end{aligned}$$

por tanto, de lo anterior se deduce que  $\|\mathcal{F} \cdot\| = 1$ . ■

### Proposición 1.1.3

Si  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ , entonces  $\mathcal{F}f$  es uniformemente continua en  $\mathbb{R}^n$ .

### Demostración:

Basta probar que si  $\{x_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  y  $\{y_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  son dos sucesiones en  $\mathbb{R}^n$  tales que  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|x_\nu - y_\nu\| = 0$ , entonces

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} |\mathcal{F}f(x_\nu) - \mathcal{F}f(y_\nu)| = 0$$

Considere entonces dos sucesiones que cumplan lo anterior. Se tiene

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}f(x_\nu) - \mathcal{F}f(y_\nu)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (e^{-i\langle x_\nu | z \rangle} - e^{-i\langle y_\nu | z \rangle}) f(z) dz \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x_\nu | z \rangle} (1 - e^{-i\langle y_\nu - x_\nu | z \rangle}) f(z) dz \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |(1 - e^{-i\langle y_\nu - x_\nu | z \rangle})| |f(z)| dz\end{aligned}$$

donde

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} |1 - e^{-i\langle y_\nu - x_\nu | z \rangle}| |f(z)| = 0, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$$

y, además

$$|1 - e^{-i\langle y_\nu - x_\nu | z \rangle}| |f(z)| \leq 2 |f(z)|, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$$

donde la función de la derecha es integrable e independiente de  $\nu$ . Por Lebesgue se sigue que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} |\mathcal{F}f(x_\nu) - \mathcal{F}f(y_\nu)| = 0$$

así,  $\mathcal{F}f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  es una función uniformemente continua. ■

### Observación 1.1.2

$\mathcal{F}f$  es una función uniformemente continua y acotada en  $\mathbb{R}^n$  si  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ .

---

**Teorema 1.1.2 (Teorema de Riemman-Lebesgue)**

Si  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ , entonces

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \mathcal{F}f(x) = 0$$

---

**Demostración:**

Se probará por casos:

- I. Sea  $P = I_1 \times \cdots \times I_n \subseteq \mathbb{R}^n$  un rectángulo acotado en  $\mathbb{R}^n$  donde  $I_k$  es un intervalo de extremos  $a_k \leq b_k$  para todo  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Se considera el caso en que  $f = \chi_P$ . En particular, notemos que

$$f(x) = \chi_{I_1}(x_1) \cdots \chi_{I_n}(x_n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|z \rangle} f(z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix_1 z_1} \chi_{I_1}(z_1) \cdots e^{-ix_n z_n} \chi_{I_n}(z_n) dz_1 \cdots dz_n \\ &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_1 z_1} \chi_{I_1}(z_1) dz_1 \right) \cdots \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_n z_n} \chi_{I_n}(z_n) dz_n \right) \end{aligned}$$

luego,

$$\mathcal{F}f(x) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

donde

$$\varphi_k(x_k) = \begin{cases} \frac{e^{-ix_k b_k} - e^{-ix_k a_k}}{-ik}, & \text{si } x_k \neq 0 \\ b_k - a_k, & \text{si } x_k = 0 \end{cases}$$

para  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Es claro que  $\lim_{x_k \rightarrow \infty} \varphi_k(x_k) = 0$  para todo  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Por otra parte,

$$\begin{aligned} |\varphi_k(x_k)| &\leq |\mathcal{F}\chi_{I_k}(x_k)| \\ &\leq \mathcal{N}_1(\chi_{I_k}) \\ &= b_k - a_k \end{aligned}$$

para  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Sea

$$c = \max_{1 \leq k \leq n} \{b_k - a_k\}$$

Dado  $\varepsilon > 0$  existe  $R > 0$  tal que para todo  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  se tiene

$$|x_k| > R \Rightarrow |\varphi_k(x_k)| < \varepsilon$$

Si se toma la norma cúbica  $\|\cdot\|$  de  $\mathbb{R}^n$ , al suponer que  $\|x\| > R$  se tendrá que  $|x_k| > R$  para algún  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , luego

$$\|x\| > R \Rightarrow |\mathcal{F}\chi_P(x)| = |\varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n)| \leq c^{n-1} \varepsilon$$

Así pues, el Teorema es cierto para  $f = \chi_P$ . Claramente por linealidad de la transformación de Fourier el Teorema sigue siendo cierto si  $f$  es una función escalonada en  $\mathbb{R}^n$ .

- II. Sea  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  y tomemos  $\varepsilon > 0$ . Por la densidad de  $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  en  $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ , existe  $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  tal que

$$\mathcal{N}_1(f - \varphi) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}f(x)| &= |\mathcal{F}f(x) - \mathcal{F}\varphi(x)| + |\mathcal{F}\varphi(x)| \\
&= |\mathcal{F}(f - \varphi)(x)| + |\mathcal{F}\varphi(x)| \\
&\leq \mathcal{N}_1(f - \varphi) + |\mathcal{F}\varphi(x)|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + |\mathcal{F}\varphi(x)|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

Por tanto, de (i) existe  $R > 0$  tal que

$$\|x\| > R \Rightarrow |\mathcal{F}\varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

de donde se sigue que

$$\|x\| > R \Rightarrow |\mathcal{F}f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + |\mathcal{F}\varphi(x)| < \varepsilon$$

lo que prueba el resultado. ■

### Teorema 1.1.3

Si  $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ , entonces  $\mathcal{F}(f * g) = (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g)$ .

### Demostración:

Sean  $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ . Se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f * g(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} dy \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(y - z) dz
\end{aligned}$$

ya se sabe que  $(y, z) \mapsto f(z)g(y - z)e^{-i\langle x|y\rangle}$  es integrable en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Por Fubini:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z) dz \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} g(y - z) dy, \text{ haciendo el cambio de variable } y = u + z \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(z) dz \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|u+z\rangle} g(u) du \\
&= \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|z\rangle} f(z) dz \right) \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} g(y) dy \right) \\
&= (\mathcal{F}f(x))(\mathcal{F}g(x))
\end{aligned}$$

lo que prueba el resultado. ■

### Teorema 1.1.4

Sea  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  el álgebra de Banach de las funciones de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{C}$  continuas y nulas en el infinito provisto de la norma uniforme. Entonces la aplicación  $\mathcal{F} \cdot : \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  es un homomorfismo continuo entre ambas álgebras de Banach.

La norma de  $\mathcal{F} \cdot$  considerada como aplicación lineal es  $\|\mathcal{F} \cdot\| = 1$ .

### Demostración:

Es un resumen de las propiedades anteriores. ■

**Observación 1.1.3**

Más adelante se verá que  $\mathcal{F}\cdot$  es inyectiva pero no es suprayectiva.

**Proposición 1.1.4**

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  y  $r \in \mathbb{N}$ . Se supone que  $x \mapsto x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n} f(x)$  es integrable en  $\mathbb{R}^n$  para toda colección  $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$  tales que  $m_1 + \cdots + m_n \leq r$ . Entonces,  $\mathcal{F}f$  es de clase  $C^r$  en  $\mathbb{R}^n$ . Si  $k \in \llbracket 1, k \rrbracket$  y  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  se tiene que

$$\partial_{\alpha_1} \cdots \partial_{\alpha_k} \mathcal{F}f = \mathcal{F}g$$

donde  $g(x) = (-ix_{\alpha_1})(-ix_{\alpha_2}) \cdots (-ix_{\alpha_k})f(x)$ .

**Demostración:**

Se tiene

$$\mathcal{F}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)} f(y) dy$$

Al aplicar el operador  $\partial_{\alpha_1} \cdots \partial_{\alpha_k}$  a  $x \mapsto e^{-i(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)} f(y)$  obtenemos

$$(-iy_{\alpha_1}) \cdots (-iy_{\alpha_k}) f(y)$$

Esta función en valor absoluto es menor o igual a

$$|y_{\alpha_1} \cdots y_{\alpha_k} f(y)|$$

la cual por hipótesis es integrable en  $\mathbb{R}^n$  e independiente de  $x$ . Por el Teorema de derivación parcial de funciones definidas por integrales, se tiene que

$$\partial_{\alpha_1} \cdots \partial_{\alpha_k} \mathcal{F}f = \mathcal{F}g$$

y, además  $\mathcal{F}f$  es de clase  $C^r$  en  $\mathbb{R}^n$ . ■

**Observación 1.1.4**

Si  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  y existe  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ , necesariamente

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

**Proposición 1.1.5**

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  función de clase  $C^r$  en  $\mathbb{R}^n$ . Se supone que  $f$  y todas sus derivadas parciales hasta el orden  $r$  (inclusive) son integrables. Si  $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$  y  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , entonces

$$\mathcal{F}(\partial_{\alpha_1} \cdots \partial_{\alpha_k} f)(x) = (ix_{\alpha_1}) \cdots (ix_{\alpha_k}) \mathcal{F}f(x)$$

**Demostración:**

Basta probar que

$$\mathcal{F}(\partial_j f)(x) = (ix_j) \mathcal{F}f(x)$$

con  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  pues el resto se sigue por inducción. Se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\partial_j f)(x) - (ix_j) \mathcal{F}f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y \rangle} [\partial_j f(y) - ix_j f(y)] dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial y_j} [e^{-i\langle x|y \rangle} f(y)] dy \end{aligned}$$

de donde, por el Teorema de Fubini

$$\mathcal{F}(\partial_j f)(x) - (ix_j)\mathcal{F}f(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy_1 \cdots dy_{j-1} dy_{j+1} \cdots dy_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y_j} [e^{-i\langle x|y \rangle} f(y)] dy_j$$

El Teorema de Fubini asegura que existe un conjunto despreciable  $Z_1 \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$  tal que para todo  $y' = (y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus Z_1$  existe la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y_j} [e^{-i\langle x|y \rangle} f(y)] dy_j$$

o sea que  $y_j \mapsto \frac{\partial}{\partial y_j} [e^{-i\langle x|y \rangle} f(y)]$  es integrable en  $\mathbb{R}$ . Por el 2° T.F.C. para intervalos abiertos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y_j} [e^{-i\langle x|y \rangle} f(y)] dy_j = \lim_{y_j \rightarrow \infty} e^{-i\langle x|y \rangle} f(y) - \lim_{y_j \rightarrow -\infty} e^{-i\langle x|y \rangle} f(y)$$

puesto que la función  $y \mapsto e^{-i\langle x|y \rangle} f(y)$  es integrable en  $\mathbb{R}^n$ , por el Teorema de Fubini existe un conjunto  $Z_2 \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$  tal que para todo  $y' = (y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus Z_2$ , la función  $y_j \mapsto e^{-i\langle x|y \rangle} f(y)$  es integrable en  $\mathbb{R}$ . Sea  $Z = Z_1 \cup Z_2 \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ . Por la última observación, los límites a la derecha de la ecuación anterior deben ser 0 para todo  $y' = (y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus Z$ . Por tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y_j} [e^{-i\langle x|y \rangle} f(y)] dy_j = 0$$

para todo  $y' = (y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus Z$ . Se sigue entonces que

$$\mathcal{F}(\partial_j f)(x) - (ix_j)\mathcal{F}f(x) = 0$$

lo que prueba el resultado. ■

## 1.2. Teoremas de Transferencia e Inversión

---

### Teorema 1.2.1 (Teorema de Transferencia)

Sean  $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ . Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \mathcal{F}g = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f \cdot g$$

y,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \mathcal{F}^*g = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^*f \cdot g$$


---

### Demostración:

Como  $\mathcal{F}f$  y  $\mathcal{F}g$  son continuas acotadas en  $\mathbb{R}^n$  y  $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ , ambas integrales existen (pues en particular  $\mathcal{F}f, \mathcal{F}g \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ ). Se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x) \cdot g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y \rangle} f(y) dy$$

ya se sabe que  $(x, y) \mapsto e^{-i\langle x|y \rangle} g(x)f(y)$  es integrable en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  (pues en módulo es igual al módulo del producto tensorial de  $g$  y  $f$ , siendo éste integrable). Por Fubini podemos invertir el orden de

integración, lo que resulta:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x) \cdot g(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y \rangle} g(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle y|x \rangle} g(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot \mathcal{F}g(y) dy \\
\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \mathcal{F}g &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f \cdot g
\end{aligned}$$

para la  $\mathcal{F}^*\cdot$  el procedimiento es análogo. ■

**Lema 1.2.1 (Efecto de la transformación de Fourier sobre sucesiones de Dirac)**

Sea  $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  una sucesión de Dirac en  $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ . Defina

$$h_\nu = \mathcal{F}\rho_\nu, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$$

Entonces,

- I.  $|h_\nu(x)| \leq 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .
- II.  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} h_\nu(x) = 1$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Demostración:**

De (i): Se tiene

$$\begin{aligned}
|h_\nu(x)| &= |\mathcal{F}\rho_\nu(x)| \\
&\leq \mathcal{N}_1(\rho_\nu) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\nu \\
&= 1
\end{aligned}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

De (ii): Sea  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ . Entonces  $\{f * \rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  es una sucesión en  $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  que converge en promedio a  $f$ . Como la transformación de Fourier es un homomorfismo continuo del álgebra de Banach  $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$  en  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ , se debe tener que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{F}(f * \rho_\nu) = \mathcal{F}f \text{ uniformemente en } \mathbb{R}^n$$

pero,

$$\mathcal{F}(f * \rho_\nu) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}\rho_\nu = h_\nu \mathcal{F}f$$

es decir,

$$\begin{aligned}
\lim_{\nu \rightarrow \infty} h_\nu \mathcal{F}f &= \mathcal{F}f \text{ uniformemente en } \mathbb{R}^n \\
\Rightarrow \mathcal{F}f \lim_{\nu \rightarrow \infty} h_\nu &= \mathcal{F}f \text{ uniformemente en } \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

Fijando  $f$  de tal suerte que  $\mathcal{F}f(x) \neq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  se concluye que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} h_\nu(x) = 1$$

(por ejemplo, tome  $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ ). ■

**Observación 1.2.1**

Si  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ , entonces no necesariamente su transformada de Fourier es integrable. Por ejemplo

$$\mathcal{F}\chi_{[-1,1]} = \begin{cases} \frac{2\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es continua, nula en el infinito pero no es integrable en  $\mathbb{R}$ .

**Teorema 1.2.2 (Teorema de Inversión de Fourier)**

Si  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  es tal que  $\mathcal{F}f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ , entonces

$$\mathcal{F}^*(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^*f) = (2\pi)^n f \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n$$

Si además  $f$  es continua en  $\mathbb{R}^n$ , la fórmula es válida en todo punto de  $\mathbb{R}^n$ .

**Demostración:**

Se probará por casos:

1. Suponga por el momento hallada una sucesión de Dirac  $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  en  $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  que cumpla las condiciones:

I)  $\mathcal{F}\rho_\nu \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ , luego también  $\mathcal{F}^*\rho_\nu \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ .

II)  $\mathcal{F}^*\mathcal{F}\rho_\nu = \mathcal{F}(\mathcal{F}^*\rho_\nu) = (2\pi)^n \rho_\nu$  c.t.p. en  $\mathbb{R}^n$ .

Sea  $h_\nu = \mathcal{F}\rho_\nu$  para todo  $\nu \in \mathbb{N}$ . Por (ii),  $\rho_\nu$  es una función acotada, luego  $f * \rho_\nu$  existe en todo punto de  $\mathbb{R}^n$ . Se tiene

$$\begin{aligned} f * \rho_\nu(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\nu(y) f(x-y) dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^*h_\nu(y) f(x-y) dy \end{aligned}$$

será necesario aplicar  $\mathcal{F}^*$  a la función de  $y$  tal que  $y \mapsto f(x-y)$ . Sea  $s(y) = f(-y)$ , para todo  $y \in \mathbb{R}^n$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}s(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle u|y\rangle} s(u) du \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle u|y\rangle} f(u) du \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle u|-y\rangle} f(u) du \\ &= \mathcal{F}f(-y) \end{aligned}$$

sea ahora  $r(y) = f(x-y) = f(-(y-x)) = s(y-x)$ . Por (ii) de las propiedades de la transformación de Fourier:

$$\mathcal{F}r(y) = e^{-i\langle x|y\rangle} \mathcal{F}s(y) = e^{-i\langle x|y\rangle} \mathcal{F}f(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

Así pues,

$$\mathcal{F}^*r(y) = \mathcal{F}r(-y) = e^{-i\langle x|-y\rangle} \mathcal{F}f(y) = e^{i\langle x|y\rangle} \mathcal{F}f(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$



Por el Teorema de transferencia (aplicado a  $\mathcal{F}^*$ ) se sigue que:

$$\begin{aligned} f * \rho_\nu(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^* h_\nu(y) f(x-y) dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^* h_\nu(y) r(y) dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} h_\nu \mathcal{F}^* r(y) dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} h_\nu e^{i\langle x|y \rangle} \mathcal{F} f(y) dy \end{aligned}$$

Todo lo anterior es válido bajo la sola hipótesis de que  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ . Suponga también que  $\mathcal{F}f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ . Entonces,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} h_\nu(y) e^{i\langle x|y \rangle} \mathcal{F} f(y) = e^{i\langle x|y \rangle} \mathcal{F} f(y)$$

y

$$|h_\nu(y) e^{i\langle x|y \rangle} \mathcal{F} f(y)| \leq \mathcal{F} f(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

donde la función de la derecha es integrable e independiente de  $\nu \in \mathbb{N}$ . Por Lebesgue se sigue pues que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} h_\nu(y) e^{i\langle x|y \rangle} \mathcal{F} f(y) dy = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x|y \rangle} \mathcal{F} f(y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Lo que realmente estamos diciendo es que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} f * \rho_\nu(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x|y \rangle} \mathcal{F} f(y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

puntualmente en  $\mathbb{R}^n$ . Pero  $\{f * \rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  converge en promedio a  $f$ , entonces debe tenerse que

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x|y \rangle} \mathcal{F} f(y) dy$$

para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

2. Queda por construir una sucesión de Dirac tal que cumpla (i) y (ii). La función  $x \mapsto e^{-\sum_{k=1}^n x_k^2}$  es no negativa y

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{k=1}^n x_k^2} dx_1 \cdots dx_n = \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \right)^n = \pi^{n/2}$$

defina

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi^{n/2}} e^{-\sum_{k=1}^n x_k^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Esta función satisface que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho = 1$$

Se sabe que la sucesión  $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  dada por:

$$\rho_\nu(x) = \nu^n \rho(\nu x) = \frac{\nu^n}{\pi^{n/2}} e^{-\sum_{k=1}^n \nu^2 x_k^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

es una sucesión de Dirac en  $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ . Recuerde que si  $a > 0$ , la transformada de Fourier de  $t \mapsto e^{-at^2}$  es

$$t \mapsto \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{t^2}{4a}}$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Entonces,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\rho_\nu(x) &= \frac{\nu^n}{\pi^{n/2}} e^{-\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{4\nu^2}} \\ &= e^{-\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{4\nu^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

En particular,  $\mathcal{F}\rho_\nu$  es integrable en  $\mathbb{R}^n$ . Además, por la parte (iv) de las propiedades de la transformación de Fourier

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^*(\mathcal{F}\rho_\nu)(x) &= \mathcal{F}(\mathcal{F}^*\rho_\nu)(x) \\ &= \mathcal{F}(\mathcal{F}\rho_\nu)(-x) \\ &= \mathcal{F}(\mathcal{F}\rho_\nu)(x) \\ &= \mathcal{F}\left[e^{-\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{4\nu^2}}\right] \\ &= \left[\frac{\pi}{\frac{1}{4\nu^2}}\right]^{n/2} e^{-\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{4\left(\frac{1}{4\nu^2}\right)}} \\ &= (2\pi)^n \cdot \frac{\nu^n}{\pi^{n/2}} e^{-\sum_{k=1}^n \nu^2 x_k^2} \\ &= (2\pi)^n \rho_\nu(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

lo que demuestra la existencia de tal sucesión de Dirac. ■

### Proposición 1.2.1

La transformación de Fourier  $\mathcal{F}\cdot$  es un homomorfismo inyectivo del álgebra de Banach  $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  en el álgebra de Banach  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ .

### Demostración:

Basta probar que el kernel de  $\mathcal{F}\cdot$  se reduce a 0. En efecto, sea  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  tal que  $\mathcal{F}f = 0$  en  $\mathbb{R}^n$ , luego  $\mathcal{F}f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ . Así se puede aplicar el Teorema anterior, que resulta en que

$$0 = \mathcal{F}^*0 = \mathcal{F}^*(\mathcal{F}f) = (2\pi)^n f \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n$$

por tanto,  $f = 0$  c.t.p. en  $\mathbb{R}^n$ . ■

### Proposición 1.2.2

Sean  $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ . Se supone que alguna de  $\mathcal{F}f$  y/o  $\mathcal{F}g$  es integrable en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces se cumple la **Identidad de Parseval**.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f \overline{\mathcal{F}g} = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} f \overline{g}$$

### Demostración:

Suponga que  $\mathcal{F}f$  es integrable en  $\mathbb{R}^n$ . Siendo  $\mathcal{F}g$  medible acotada, el primer lado tiene sentido. Se tiene que

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{F}g(x)} &= \overline{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} g(y) dy} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x|y\rangle} \overline{g(y)} dy \\ &= \mathcal{F}^*\overline{g}(x)\end{aligned}$$

Así pues

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f \overline{\mathcal{F}g} &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f \mathcal{F}^* \bar{g} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^* \mathcal{F}f \cdot \bar{g} \\ &= (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} f \bar{g}\end{aligned}$$

■

### 1.3. Fórmula de inversión en $\mathbb{R}$

#### Observación 1.3.1

Se afirma que

$$\int_0^{\rightarrow\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

y de la paridad de  $x \mapsto \frac{\sin ax}{x}$  se concluye que

$$\int_{\rightarrow-\infty}^{\rightarrow\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \pi, \quad \forall a > 0.$$

#### Demostración:

En efecto, veamos que para  $a > 0$ :

$$\begin{aligned}\int_0^R \frac{\sin ax}{x} dx &= \int_0^{aR} \frac{\sin y}{\frac{y}{a}} \frac{dy}{a} \\ &= \int_0^{aR} \frac{\sin y}{y} dy\end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado. Si  $a < 0$ , se tiene que

$$\int_0^R \frac{\sin ax}{x} dx = - \int_0^R \frac{\sin(-a)x}{x} dx \longrightarrow -\frac{\pi}{2}$$

Se concluye que

$$\int_0^{\rightarrow\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } a > 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

■

---

#### Teorema 1.3.1 (Teorema de inversión en $\mathbb{R}$ )

Sean  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . Se supone que  $f$  cumple la condición de Dini en cierto punto  $x \in \mathbb{R}$ , es decir, existe  $\delta > 0$  tal que

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dt < \infty$$

Entonces,

$$\begin{aligned}f(x) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R e^{ixy} \mathcal{F}f(y) dy \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R e^{ixy} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyz} f(z) dz\end{aligned}$$

y más aún:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(y(t-x)) dt$$

### **Demostración:**

Para  $R > 0$  se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R e^{ixy} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyt} f(t) dt &= \int_{-R}^R dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} e^{-iyt} f(t) dt \\ &= \int_{-R}^R dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy(t-x)} f(t) dt \\ &= \int_{-R}^R dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(y(t-x)) dt + i \int_{-R}^R dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(y(t-x)) dt \end{aligned}$$

como  $y \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(y(t-x)) dt$  es impar, entonces:

$$\int_{-R}^R dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(y(t-x)) dt = 0$$

y, como  $y \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(y(t-x)) dt$  es par,

$$\int_{-R}^R dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(y(t-x)) dt = 2 \int_0^R dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(y(t-x)) dt$$

Si se prueba que

$$f(x) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^R dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(y(t-x)) dt$$

se habrá probado también que

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(y(t-x)) dt$$

(que es más de lo que se pide probar). Sea

$$J(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^R dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(y(t-x)) dt, \quad \forall R > 0$$

Veamos que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} J(R) = f(x)$$

En efecto, ■

#### **Observación 1.3.2**

Recuerde que la condición de Dini se cumple, por ejemplo, si  $f$  tiene derivada por la derecha y la izquierda en ese punto.

## **1.4. Homomorfismos Complejos del álgebra de Banach $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$**

### **Observación 1.4.1**

$\mathbb{R}_+^n$  denota al grupo abeliano  $(\mathbb{R}^n, +)$  y  $\mathbb{C}^*$  denota al grupo abeliano  $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ .

---

**Proposición 1.4.1**

Todo homomorfismo continuo de  $\mathbb{R}_+$  en  $\mathbb{C}^*$  es de la forma

$$t \mapsto e^{at}$$

con  $a \in \mathbb{C}$ .

---

**Demostración:**

Primero, es claro que para todo  $a \in \mathbb{C}$ , la función  $t \mapsto e^{at}$  es homomorfismo continuo de  $\mathbb{R}_+$  en  $\mathbb{C}^*$ . Fije un homomorfismo continuo  $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}^*$ .

1. Se afirma que  $\varphi$  es diferenciable en todo punto de  $\mathbb{R}$ . En efecto, considere su integral indefinida

$$x \mapsto \int_0^x \varphi(t) dt$$

esta función es diferenciable con derivada  $\varphi(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  (pues  $\varphi$  es continua). Ya que  $\varphi(x) \neq 0$ , la función anterior no puede ser la constante cero. Existe pues  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que

$$c = \int_0^\alpha \varphi(t) dx \neq 0$$

Se tiene para todo  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} c\varphi(x) &= \int_0^\alpha \varphi(x)\varphi(t) dt \\ &= \int_0^\alpha \varphi(x+t) dt \\ &= \int_x^{x+\alpha} \varphi(u) du \end{aligned}$$

pues  $\varphi$  es homomorfismo y haciendo el cambio de variable  $t = u - x$ . Como la función  $x \mapsto \int_x^{x+\alpha} \varphi(t) dx$  es derivable en todo punto de  $\mathbb{R}$  (con derivada  $\varphi(x+\alpha) - \varphi(x)$ ) y  $c \neq 0$ , entonces se sigue que  $\varphi$  es derivable en todo punto de  $\mathbb{R}$ .

2. Se afirma ahora que

$$\varphi(t) = \varphi'(0)\varphi(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Esto se sigue de que

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t+0)}{h} &= \frac{\varphi(t)\varphi(h) - \varphi(t)}{h} \\ &= \varphi(t) \cdot \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} \end{aligned}$$

tomando límites cuando  $h \rightarrow 0$  se tiene el resultado.

3. Sea  $a = \varphi'(0)$ . Se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\varphi(t)e^{-at}) &= \varphi'(t)e^{-at} - a\varphi(t)e^{-at} \\ &= a\varphi(t)e^{-at} - a\varphi(t)e^{-at} \\ &= 0, \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

así pues,  $t \mapsto \varphi(t)e^{-at}$  es constante en  $\mathbb{R}$  de valor  $\varphi(0)e^{-a \cdot 0} = \varphi(0) = 1$ . Por tanto:

$$\varphi(t) = e^{at}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

■

---

**Teorema 1.4.1**

Todos los homomorfismos continuos de  $\mathbb{R}_+^n$  en  $\mathbb{C}^*$  son las funciones

$$x \mapsto e^{\langle a|x \rangle} \cdot e^{i\langle b|x \rangle}$$

donde  $a, b \in \mathbb{R}^n$ .

---

**Demostración:**

Primero, es claro que todas las funciones descritas anteriormente son homomorfismos continuos del grupo  $\mathbb{R}_+^n$  en  $\mathbb{C}^*$ .

Sea  $\varphi : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{C}^*$  un homomorfismo continuo. Sea  $(e_1, \dots, e_n)$  la base natural de  $\mathbb{R}^n$ . Para cada  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  se define

$$\varphi_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

dada como

$$\varphi_k(t) = \varphi(te_k), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Se tiene para todo  $s, t \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \varphi_k(s+t) &= \varphi(se_k + te_k) \\ &= \varphi(se_k) \cdot \varphi(te_k) \\ &= \varphi_k(s) \cdot \varphi_k(t) \end{aligned}$$

Luego  $\varphi_k$  es homomorfismo. Además,  $\varphi_k$  es continua por ser composición de funciones continuas. Por el resultado anterior existen  $a_k, b_k \in \mathbb{R}$  tales que

$$\varphi_k(t) = e^{a_k t} \cdot e^{ib_k t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Sea  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Se tiene

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi\left(\sum_{k=1}^n x_k e_k\right) \\ &= \prod_{k=1}^n \varphi(x_k e_k) \\ &= \prod_{k=1}^n e^{a_k x_k} \cdot e^{ib_k x_k} \\ &= e^{\sum_{k=1}^n a_k x_k} \cdot e^{i \sum_{k=1}^n b_k x_k} \\ &= e^{\langle a|x \rangle} \cdot e^{i\langle b|x \rangle}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

siendo  $a = (a_1, \dots, a_n)$  y  $b = (b_1, \dots, b_n)$ . ■

**Observación 1.4.2**

Sea  $\mathbb{T}$  el subgrupo de  $\mathbb{C}^*$  de todos los números complejos con módulo 1.  $\mathbb{T}$  es llamado **el grupo del círculo**.

Todos los homomorfismos continuos de  $\mathbb{R}_+^n$  en  $\mathbb{T}$  se llaman **caracteres de  $\mathbb{R}^n$** , los cuales son funciones de la forma

$$x \mapsto e^{i\langle b|x \rangle}$$

(pues si  $a \neq 0$  entonces  $e^{\langle a|x \rangle} > 1$  para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ). En particular, la transformada de

Fourier

$$\mathcal{F}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y) dy$$

es el resultado de integrar un caracter por  $f$ .

---

**Lema 1.4.1**

Si  $\Phi$  es un homomorfismo de un álgebra de Banach  $\mathcal{A}$  en  $\mathbb{K}$ , entonces  $\Phi$  es un funcional lineal continuo sobre  $\mathcal{A}$  de norma  $\|\Phi\| \leq 1$ .

---

**Demostración:**

Claramente  $\Phi$  es funcional lineal sobre  $\mathcal{A}$ . Se debe probar que

$$\|\Phi(x)\| \leq \|x\|, \quad \forall x \in \mathcal{A}$$

Suponga por el contrario que existe  $x_0 \in \mathcal{A}$  tal que

$$\|x_0\| < \|\Phi(x_0)\|$$

necesariamente debe tenerse que  $\Phi(x_0) \neq 0$ . Al tomar

$$x = \frac{x_0}{\Phi(x_0)}$$

resulta que

$$\|x\| < 1 \quad \text{y} \quad \Phi(x) = 1$$

Recuerde que en toda álgebra de Banach se cumple que  $\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ . Entonces

$$\|x^k\| \leq \|x\|^k$$

Entonces, la serie de términos positivos  $\sum_{k=1}^{\infty} \|x\|^k$  es convergente, luego la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \|x^k\|$  también es convergente, es decir que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k$$

es absolutamente convergente en el álgebra de Banach  $\mathcal{A}$ . Siendo  $\mathcal{A}$  completo, dicha serie es convergente, digamos

$$y = -\sum_{k=1}^{\infty} x^k$$

para algún  $y \in \mathcal{A}$ . Entonces

$$\begin{aligned} x \cdot y &= x \cdot \left( -\sum_{k=1}^{\infty} x^k \right) \\ &= -\sum_{k=1}^{\infty} x^{k+1} \\ &= y + x \\ &= x + y \end{aligned}$$

Como  $\Phi$  es homomorfismo:

$$\begin{aligned} \Phi(x) + \Phi(y) &= \Phi(x + y) \\ &= \Phi(xy) \\ &= \Phi(x) \cdot \Phi(y) \end{aligned}$$

lo cual es incompatible con  $\Phi(x) = 1$ . Por tanto,  $\Phi$  es continua de norma menor o igual a 1. ■

---

**Teorema 1.4.2 (Homomorfismos no nulos del álgebra de Banach  $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  en  $\mathbb{C}$ )**

Para todo  $a \in \mathbb{R}^n$ , sea  $\Phi_a : L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  la función

$$\Phi_a(f) = \mathcal{F}f(a), \quad \forall f \in L_1(\mathbb{R}^n,)$$

Entonces,  $\Phi_a$  es un homomorfismo no nulo del álgebra de Banach  $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  en  $\mathbb{C}$ . Además, la aplicación  $\Phi : a \mapsto \Phi_a$  es una biyección de  $\mathbb{R}^n$  sobre el conjunto de todos los homomorfismos no nulos de  $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  en  $\mathbb{C}$ .

---

**Demostración:**

Se harán varias cosas:

1. Para cada  $a \in \mathbb{R}^n$  fijo, se tiene

$$\begin{aligned} \Phi_a(\lambda f) &= \mathcal{F}(\lambda f)(a) \\ &= \lambda \mathcal{F}f(a) \\ &= \lambda \Phi_a(f) \end{aligned}$$

para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$ . También,

$$\begin{aligned} \Phi_a(f + g) &= \mathcal{F}(f + g)(a) \\ &= \mathcal{F}f(a) + \mathcal{F}g(a) \\ &= \Phi_a(f) + \Phi_a(g) \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned} \Phi_a(f * g) &= \mathcal{F}f * g(a) \\ &= \mathcal{F}f(a) \cdot \mathcal{F}g(a) \\ &= \Phi_a(f) \cdot \Phi_a(g) \end{aligned}$$

para todo  $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ . Por tanto,  $\Phi_a$  es homomorfismo de  $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  en  $\mathbb{C}$ .

Es claro que  $\phi_a$  no es el homomorfismo nulo, pues existen funciones  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  tales que

$$\mathcal{F}f(a) \neq 0, \quad \forall a \in \mathbb{R}^n$$

por ejemplo  $f(x) = e^{-\sum_{k=1}^n |x_k|}$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  es tal que  $f$  es integrable y

$$\mathcal{F}f(a) = \frac{2^n}{(1 + a_1^2) \cdot \dots \cdot (1 + a_n^2)} \neq 0, \quad \forall a \in \mathbb{R}^n$$

2. Se afirma que  $\Phi : a \mapsto \Phi_a$  es inyectiva de  $\mathbb{R}^n$  en el conjunto de todos los homomorfismos no nulos de  $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  en  $\mathbb{C}$ . Sean pues  $a = (a_1, \dots, a_n)$  y  $b = (b_1, \dots, b_n)$  en  $\mathbb{R}^n$  tales que

$$\Phi_a = \Phi_b$$

es decir que

$$\mathcal{F}f(a) = \mathcal{F}f(b), \quad \forall f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$$

o sea que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle a|x \rangle} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle b|x \rangle} f(x) dx, \quad \forall f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$$

se debe probar que  $a = b$ . Por el lema anterior,  $\Phi_a = \Phi_b$  es un funcional lineal continuo de  $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  en  $\mathbb{C}$ . Por el Teorema de Dualidad entre  $L_1$  y  $L_\infty$ , existe  $\beta \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  único salvo equivalencias tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle a|x \rangle} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle b|x \rangle} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \beta(x) f(x) dx$$



para todo  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ . Por tanto, de la unicidad de  $\beta$  debe suceder que

$$e^{-i\langle a|x \rangle} = e^{-i\langle b|x \rangle} = \beta(x) \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n$$

siendo las dos primeras continuas, debe tenerse que

$$r(x) = e^{-i\langle a|x \rangle} = e^{-i\langle b|x \rangle} = s(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

entonces,

$$\frac{\partial}{\partial x_k} r(0) = -ia_k = -ib_k = \frac{\partial}{\partial x_k} s(0)$$

para todo  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Así,  $a = b$ .

3.

■