Sea $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ continua tal que $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en $[a,b]\times[c,d]$. Definimos: $F(y)=\int_a^b f(x,y)dx$. Probar que $f$ es derivable, y:

$$F'(y)=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$

Dem:

Como $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en $[a,b]\times[c,d]$, entonces, $\forall y\in[c,d]$, definimos $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g_y(x)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, entonces $g_y(x)$ es continua y, por tanto, integrable. Luego:

$$\int_a^b g_y(x)dx=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$

Ahora, como $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ existe, entonces:

$$\lim_{y'\to y}\frac{1}{y'-y}(f(x,y')-f(x,y))=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

i.e.: $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\,\delta>0$ tal que si $y'\in[c,d]$ y $0<|y'-y|<\delta$, entonces:

$$\left|\frac{1}{y'-y}(f(x,y')-f(x,y))-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|<\varepsilon/_{b-a}$$

si $b-a\neq0$, luego:

$$-\frac{\varepsilon}{b-a}<\frac{1}{y'-y}(f(x,y')-f(x,y))-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

como $\int_a^b f(x,y)dx$ existe (mismo argumento por el cual $\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$ existe), entonces

$$\Rightarrow\int_a^b-\frac{\varepsilon}{b-a}dx<\int_a^b\frac{1}{y'-y}(f(x,y')-f(x,y))dx-\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx<\int_a^b\frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$\Rightarrow\left|\frac{1}{y'-y}\int_a^b(f(x,y')-f(x,y))dx-\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow\lim_{y'\to y}\frac{1}{y'-y}\int_a^b(f(x,y')-f(x,y))dx=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx\quad\ldots\ (1)$$

Ahora, por el Teorema fundamental del cálculo, sabemos que:

$$F(y)=\int_a^b\left(\int_c^y\frac{\partial f}{\partial u}(x,u)du+f(x,c)\right)dx\qquad y:$$

$$F(y')=\int_a^b\left(\int_c^{y'}\frac{\partial f}{\partial u}(x,u)du+f(x,c)\right)dx$$

con $y,y'\in[c,d]$, entonces:

$$F(y')-F(y)=\int_a^b\left(\int_c^{y'}\frac{\partial f}{\partial u}(x,u)du+f(x,c)-\int_c^{y}\frac{\partial f}{\partial u}(x,u)du-f(x,c)\right)dx$$

$$=\int_a^b\left(\int_c^{y'}\frac{\partial f}{\partial u}(x,u)du-\int_c^{y}\frac{\partial f}{\partial u}(x,u)du\right)dx$$

$$=\int_a^b\left(f(x,y')-f(x,c)-f(x,y)+f(x,c)\right)dx$$

$$=\int_a^b\left(f(x,y')-f(x,y)\right)dx$$

Por tanto:

$$\lim_{y'\to y}\frac{1}{y'-y}\int_a^b\left(f(x,y')-f(x,y)\right)dx=\lim_{y'\to y}\frac{1}{y'-y}\left(F(y')-F(y)\right)=F'(y)$$

Y, por (1):

$$F'(y)=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx.$$

q.e.d.

5.23. Sea D dada como: $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -\varphi(x)\leq y\leq\varphi(x) \text{ si } x\in[a,b]\}$, donde $\varphi$ es una función continua no negativa en $[a,b]$. Sea $f:D\to\mathbb{R}$ tal que $f(x,y)=-f(x,-y)$ $\forall (x,y)\in D$. Probar que:

$$\int_D f=0$$

Dem:

Como D es J-medible, entonces f es integrable sobre D (pues f es continua). Como $\varphi$ es continua en $[a,b]$, entonces alcanza su máximo, i.e: $\exists\, c\in[a,b]$ tal que $\varphi(x)\leq\varphi(c)$ $\forall x\in[a,b]$. Luego, es claro que $D\subset A=[a,b]\times[-\varphi(c),\varphi(c)]$

Sea $\hat{f}(x,y)$ la función característica de f en A, $\hat{f}_x:[-\varphi(c),\varphi(c)]\to\mathbb{R}$, $\hat{f}_x(y)=\hat{f}(x,y)$ y $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\int_{-\varphi(c)}^{\varphi(c)}\hat{f}_x(y)$. Por el teorema de Fubini, g es integrable, y:

$$\int_D f=\int_a^b\left(\int_{-\varphi(c)}^{\varphi(c)}\hat{f}_x(y)\right)=\int_a^b\left(\int_{-\varphi(c)}^{\varphi(c)}\hat{f}_x(y)\,dy\right)dx$$

Si $(x,y)\in D$, entonces $-\varphi(x)\leq y\leq\varphi(x)$, y $f(x,y)$ no es siempre cero, por tanto:

$$\int_D f=\int_a^b\left(\int_{-\varphi(x)}^{\varphi(x)}\hat{f}_x(y)dy\right)dx$$

Sea $F_x(y)$ una antiderivada de $\hat{f}_x(y)$ (la cual existe, pues el conjunto de discontinuidades de $\hat{f}_x$ es de medida nula). Como $\hat{f}_x$ es par ($\hat{f}_x(y) = f(x,y) = -f(x,-y) = -f_x(-y)$), entonces $F_x(y)$ es impar ($F_x(y) = F_x(-y)$). Luego:

$$\begin{aligned}\int_{-\psi(x)}^{\psi(x)} \hat{f}_x\,dy &= F_x(\varphi(x)) - F_x(-\varphi(x))\\ &= F_x(\varphi(x)) - F_x(\varphi(x))\\ &= 0\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\int_D f = \int_a^b 0\,dx = 0$$

q.e.d.

2. Sean $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $\varphi(x) \leq \psi(x)$ $\forall x \in [a,b]$. Muestre que el conjunto $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b]$ y $\varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ es J-medible, y que para toda función continua $f : \bar{X} \to \mathbb{R}$ se tiene:

$$\int_X f = \int_a^b \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Dem:

Probaremos que $X$ es J-medible, para ello, probaremos que $\partial X$ es de medida nula. Es claro que $\partial X = \{(a,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(a) \leq y \leq \psi(a)\} \cup \{(b,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(b) \leq y \leq \psi(b)\} \cup \{(x,\varphi(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b]\} \cup \{(x,\psi(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b]\}$. Basta con probar que $A = \{(a,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(a) \leq y \leq \psi(a)\}$ y $B = \{(x,\varphi(x)) \in \mathbb{R} \mid x \in [a,b]\}$ son conjuntos de medida nula.

- $A = \{(a,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(a) \leq y \leq \psi(a)\}$ es de medida nula.

Si $\varphi(a) = \psi(a)$, entonces $A$ consiste de un solo punto, por tanto, $A$ es de medida nula.

Si $\varphi(a) < \psi(a)$, sea $\varepsilon > 0$ y $C = \left[a - \frac{\varepsilon}{4(\psi(a)-\varphi(a))}, a + \frac{\varepsilon}{4(\psi(a)-\varphi(a))}\right] \times [\varphi(a), \psi(a)]$.

Es claro que $A \subset C$, y:

$$\begin{aligned}c(C) &= \left(a + \frac{\varepsilon}{4(\psi(a)-\varphi(a))} - a + \frac{\varepsilon}{4(\psi(a)-\varphi(a))}\right) \cdot (\psi(a)-\varphi(a))\\ &= \frac{\varepsilon}{2(\psi(a)-\varphi(a))} \cdot (\psi(a)-\varphi(a)) = \varepsilon/2 < \varepsilon\end{aligned}$$

tome $D=\{C\}$, entonces:

$$A\subset \bigcup_{C\in D} C \quad y \quad \sum_{C\in D} c(C)<\varepsilon$$

por tanto, A es de medida nula.

· $B=\{(x,\varphi(x))\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[a,b]\}$ es de medida nula.

Como $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ es continua, es claro que es integrable. Sea $\varepsilon>0$. Por ser $\varphi$ integrable, $\exists$ una $P$ partición de $[a,b]$ tal que: $S(\varphi,P)-i(f,P)<\varepsilon$. Por tanto, siendo $P=\{a=t_0,t_1,\dots,t_k=b\}$, donde $t_0<t_1<\dots<t_k$, se tiene que:

$$S(\varphi,P)=\sum_{i=1}^{k}(t_i-t_{i-1})\cdot M_\varphi([t_{i-1},t_i])$$
$$y \quad i(\varphi,P)=\sum_{i=1}^{k}(t_i-t_{i-1})\cdot m_\varphi([t_{i-1},t_i])$$

Donde:

$$M_\varphi([t_{i-1},t_i])=\sup\{\varphi(x)\mid x\in[t_{i-1},t_i]\}$$
$$m_\varphi([t_{i-1},t_i])=\inf\{\varphi(x)\mid x\in[t_{i-1},t_i]\}$$

Sea $D$ el conjunto de las subceldas de $[a,b]$ determinadas por la partición $P$, y $C=\{[t_{i-1},t_i]\times[m_\varphi([t_{i-1},t_i]),M_\varphi([t_{i-1},t_i])]\mid [t_{i-1},t_i]\in D\}$. Afirmamos que: $B\subset\bigcup_{C'\in C} C'$. En efecto, sea $(x,y)\in B$, entonces $(x,y)=(x,\varphi(x))$ y $x\in[a,b]$. Como $x\in[a,b]$ entonces $\exists$ $t_{j-1},t_j\in P$ tales que $t_{j-1}\leq x\leq t_j$, y $m_\varphi([t_{j-1},t_j])\leq\varphi(x)\leq M_\varphi([t_{j-1},t_j])$, esto es: $(x,\varphi(x))\in[t_{j-1},t_j]\times[m_\varphi([t_{j-1},t_j]),M_\varphi([t_{j-1},t_j])]\subset\bigcup_{C'\in C} C'$.

Además:

$$\begin{aligned}\sum_{C'\in C} c(C')&=\sum_{i=1}^{k}(t_i-t_{i-1})\cdot\left(M_\varphi([t_{i-1},t_i])-m_\varphi([t_{i-1},t_i])\right)\\&=\sum_{i=1}^{k}(t_i-t_{i-1})\cdot M_\varphi([t_{i-1},t_i])-\sum_{i=1}^{k}(t_i-t_{i-1})\,m_\varphi([t_i,t_{i-1}])\\&=S(\varphi,P)-i(\varphi,P)<\varepsilon\end{aligned}$$

Por tanto, B es de medida nula.

Como A y B son de medida nula, se sigue que $\partial\overline{X}$ es de medida nula y, por tanto, $\overline{X}$ es J-medible. $\square$

Sea ahora $A = [a,b] \times [\varphi(c), \psi(d)]$, donde $c, d \in [a,b]$ son tales que $\varphi(c) \leq \varphi(x)$ $\forall x \in [a,b]$ y $\psi(x) \leq \psi(d)$ $\forall x \in [a,b]$ (c y d existen, pues al ser $\varphi$ y $\psi$ continuas en $[a,b]$, alcanzan su máximo y mínimo). Como $f$ es continua en $\overline{X}$ J-medible, entonces es integrable. Es claro que $X \subset A$.

Sea $\hat{f}: A \to \mathbb{R}$ la función característica de $f$. Entonces:

$$\int_X f = \int_A \hat{f}$$

Sea $\hat{f}_x : [\varphi(c), \psi(d)] \to \mathbb{R}$, $\hat{f}_x(y) = \hat{f}(x,y)$ y $g: [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \int_{\varphi(c)}^{\psi(d)} \hat{f}_x(y)\,dy$.

Por el teorema de Fubini $g(x)$ es integrable en $[a,b]$, y:

$$\int_X f = \int_A \hat{f} = \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \left( \int_{\varphi(c)}^{\psi(d)} \hat{f}_x(y)\,dy \right) dx$$

$\hat{f}_x$ es integrable, pues el conjunto de discontinuidades de $\hat{f}_x$, $D_{\hat{f}_x}$ es de medida nula.

En efecto, sea $x \in [a,b]$ y $y \in [\varphi(c), \psi(d)]$, entonces: $(x,y) \in \operatorname{int}(X)$, $(x,y) \in \partial \overline{X}$ ó $(x,y) \in A \setminus \overline{X}$.

Si $(x,y) \in \operatorname{int}(X)$, como $f$ es continua en $\overline{X}$, entonces $\hat{f}_x$ lo es en $y$, en efecto: sea $\varepsilon > 0$, como $f$ es continua en $(x,y)$, entonces para $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que si $(x',y') \in \operatorname{int}(X)$ y $\|(x,y) - (x',y')\| < \delta$, entonces $\|f(x,y) - f(x',y')\| < \varepsilon$, así, en particular para los $x' = x$: si $\|(x,y) - (x,y')\| < \delta$, $(x,y') \in \operatorname{int}(X)$, entonces $\|f_x(y) - f_x(y')\| < \varepsilon$, luego $\varphi(x) < y <' \psi(x)$ y $|y - y'| < \delta$ implica que $\|f_x(y) - f_x(y')\| < \varepsilon$, por tanto $\hat{f}_x$ es continua en $y$.

Si $(x,y) \in A \setminus \overline{X}$, entonces $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{X}$, por tanto, $\exists \delta > 0$ tal que $D_\delta(x,y) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \overline{X}$, luego, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que si $(x,y') \in A \setminus \overline{X}$ y $\|(x,y) - (x,y')\| < \delta$ entonces $\|\hat{f}_x(y') - \hat{f}_x(y)\| = 0 < \varepsilon$. Por tanto $\hat{f}$ es continua.

Así, $D_{\hat{f}_x} \subset \partial X$, que es de medida nula, por tanto $\hat{f}_x$ es integrable. Luego:

$$\int_{\varphi(c)}^{\psi(d)} \hat{f}_x = \int_{\varphi(c)}^{\psi(d)} \hat{f}_x(y)\,dy$$

Si $(x,y)\in \bar{X}$, entonces: $x\in[a,b]$ y $\varphi(c)\leqslant\varphi(x)\leqslant y\leqslant\psi(x)\leqslant\psi(d)$. Luego, $\hat{f}_x(y)$ no es necesariamente cero, por lo tanto:

$$\int_{\varphi(c)}^{\psi(d)}\hat{f}_x = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}\hat{f}_x = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$$

pues, $\hat{f}_x(y) = f(x,y)$. Por lo tanto:

$$\int_{X} f = \int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$$

q.e.d.

3. Sea $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\mathbb{Q}\cap(0,1)$ y, si $x=p/m$, $(p,m)=1$, entonces $y\in\{k/m \mid k=1,2,\dots,m-1\}\}$. Muestre que $\int_0^1\int_0^1 \chi_S\,dy\,dx=0$, pero que $\int_{[0,1]\times[0,1]}\chi_S$ no existe.

Dem.

Probaremos primero que $\int_{[0,1]\times[0,1]}\chi_S$ no existe. Sea $\chi_S:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ la función característica de $S$ en $[0,1]\times[0,1]$. Probaremos que $\chi_S$ es discontinua en

Probaremos ahora que, $\chi_{sx}: [0,1] \to \mathbb{R}$, $\chi_{sx}(y) = \chi_s(x,y)$ es integrable $\forall x \in [0,1]$.

Sea $x \in [0,1]$ y $\varepsilon > 0$.

a) Si $x \notin \mathbb{Q}$, entonces $\chi_{sx}(y) = \chi_s(x,y) = 0$, pues $(x,y) \notin S$ $\forall y \in [0,1]$.

Luego, sea $P$ partición de $[0,1]$ dada por: $P = \{t_0 = 0, t_1 = 1\}$, entonces:

$$s(\chi_{sx}, P) = M([t_0, t_1]) \cdot (t_1 - t_0) = 0 \cdot 1 = 0$$
$$i(\chi_{sx}, P) = m([t_0, t_1]) \cdot (t_1 - t_0) = 0 \cdot 1 = 0$$

por tanto, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists P$ partición de $[0,1]$ tal que:

$$s(\chi_{sx}, P) - i(\chi_{sx}, P) = 0 < \varepsilon$$

así, $\chi_{sx}$ es integrable.

b) $x \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$.

Si $x \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$, entonces $x = p/m$, $(p,m) = 1$. Por tanto: $(x, \frac{K}{m}) \in S$ $\forall K = 1, 2, \dots, m-1$. Sea $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2m}\}$, y $P$ partición de $[0,1]$ dada por: