

# Tercer Examen Geometría Diferencial III

Cristo Daniel Alvarado

10 de enero de 2024

# Índice general

<b>1. Examen</b>	<b>2</b>
1.1. Ejercicio 1 . . . . .	2
1.2. Ejercicio 2 . . . . .	4
1.3. Ejercicio 3 . . . . .	5
1.4. Ejercicio 4 . . . . .	6

# Capítulo 1

## Examen

### 1.1. Ejercicio 1

**Ejercicio 1.1.1 (Pullback de una forma diferencial)**

Considere  $U \subseteq ]0, \infty[ \times ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[$  abierto en el espacio  $(\rho, \phi, \theta)$  de  $\mathbb{R}^3$ . Defina  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada como

$$(x, y, z) = F(\rho, \phi, \theta) = (\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi)$$

pruebe que  $F^*(dx \wedge dy \wedge dz) = \rho^2 \sin \phi d\rho \wedge d\phi \wedge d\theta$ .

**Demostración:**

Primeramente, veamos que

$$F^*(dx \wedge dy \wedge dz) = F^*dx \wedge F^*dy \wedge F^*dz$$

pues  $F$  es un mapeo  $C^\infty$  entre las variedades  $U$  y  $\mathbb{R}^3$ . Por la Proposición 18.11 se sigue la identidad de arriba. Pero, el producto wedge conmuta con la diferencial exterior, por lo cual

$$F^*dx = d(F^*x), \quad F^*dy = d(F^*y) \quad \text{y} \quad F^*dz = d(F^*z) \quad (1.1)$$

siendo  $x, y, z : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  las funciones coordenadas de  $\mathbb{R}^3$ . Con esto en mente, analicemos cada una de las diferenciales exteriores de (1.1).

(I) Notemos que  $F^*x = x \circ F$ , por lo cual

$$\begin{aligned} d(F^*x) &= d(x \circ F) \\ &= d(F_1) \end{aligned}$$

donde  $F_1 : U \rightarrow \mathbb{R}$  es la función tal que  $((\rho, \phi, \theta)) \mapsto x \circ F((\rho, \phi, \theta)) = \rho \sin \phi \cos \theta$ , para todo  $(\rho, \phi, \theta) \in U$ . Por lo cual

$$\begin{aligned} d(F^*x) &= d(\rho \sin \phi \cos \theta) \\ &= \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \sin \phi \cos \theta) d\rho + \frac{\partial}{\partial \phi}(\rho \sin \phi \cos \theta) d\phi + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho \sin \phi \cos \theta) d\theta \\ &= \sin \phi \cos \theta d\rho + \rho \cos \phi \cos \theta d\phi - \rho \sin \phi \sin \theta d\theta \\ \Rightarrow d(F^*x) &= \sin \phi \cos \theta d\rho + \rho \cos \phi \cos \theta d\phi - \rho \sin \phi \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

(II) De forma similar al inciso (I), se tiene que

$$\begin{aligned} d(F^*y) &= d(y \circ F) \\ &= d(F_2) \end{aligned}$$

donde  $F_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$  es la función tal que  $((\rho, \phi, \theta)) \mapsto y \circ F((\rho, \phi, \theta)) = \rho \sin \phi \sin \theta$ , para todo  $(\rho, \phi, \theta) \in U$ . Luego

$$\begin{aligned} d(F^*y) &= d(\rho \sin \phi \sin \theta) \\ &= \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \sin \phi \sin \theta) d\rho + \frac{\partial}{\partial \phi}(\rho \sin \phi \sin \theta) d\phi + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho \sin \phi \sin \theta) d\theta \\ &= \sin \phi \sin \theta d\rho + \rho \cos \phi \sin \theta d\phi + \rho \sin \phi \cos \theta d\theta \\ \Rightarrow d(F^*y) &= \sin \phi \sin \theta d\rho + \rho \cos \phi \sin \theta d\phi + \rho \sin \phi \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

(III) De forma similar al inciso (I), se tiene que

$$\begin{aligned} d(F^*z) &= d(z \circ F) \\ &= d(F_3) \end{aligned}$$

donde  $F_3 : U \rightarrow \mathbb{R}$  es la función tal que  $((\rho, \phi, \theta)) \mapsto z \circ F((\rho, \phi, \theta)) = \rho \cos \phi$ , para todo  $(\rho, \phi, \theta) \in U$ . Luego

$$\begin{aligned} d(F^*z) &= d(\rho \cos \phi) \\ &= \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \cos \phi) d\rho + \frac{\partial}{\partial \phi}(\rho \cos \phi) d\phi + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho \cos \phi) d\theta \\ &= \cos \phi d\rho - \rho \sin \phi d\phi \\ \Rightarrow d(F^*z) &= \cos \phi d\rho - \rho \sin \phi d\phi \end{aligned}$$

Por los tres incisos anteriores, se sigue que

$$\begin{aligned} F^*(dx \wedge dy \wedge dz) &= (\sin \phi \cos \theta d\rho + \rho \cos \phi \cos \theta d\phi - \rho \sin \phi \sin \theta d\theta) \\ &\quad \wedge (\sin \phi \sin \theta d\rho + \rho \cos \phi \sin \theta d\phi + \rho \sin \phi \cos \theta d\theta) \wedge (\cos \phi d\rho - \rho \sin \phi d\phi) \end{aligned}$$

Computemos  $(\sin \phi \sin \theta d\rho + \rho \cos \phi \sin \theta d\phi + \rho \sin \phi \cos \theta d\theta) \wedge (\cos \phi d\rho - \rho \sin \phi d\phi)$ :

$$\begin{aligned} &(\sin \phi \sin \theta d\rho + \rho \cos \phi \sin \theta d\phi + \rho \sin \phi \cos \theta d\theta) \wedge (\cos \phi d\rho - \rho \sin \phi d\phi) \\ &= (\rho \cos^2 \phi \sin \theta d\phi \wedge d\rho + \rho \sin \phi \cos \phi \cos \theta d\theta \wedge d\rho) + (-\rho \sin^2 \phi \sin \theta d\phi \wedge d\phi - \rho^2 \sin^2 \phi \cos \theta d\theta \wedge d\phi) \\ &= (-\rho \cos^2 \phi \sin \theta d\rho \wedge d\phi - \rho \sin \phi \cos \phi \cos \theta d\rho \wedge d\theta) + (-\rho \sin^2 \phi \sin \theta d\rho \wedge d\phi + \rho^2 \sin^2 \phi \cos \theta d\phi \wedge d\theta) \\ &= -\rho \sin \theta d\rho \wedge d\phi - \rho \sin \phi \cos \phi \cos \theta d\rho \wedge d\theta + \rho^2 \sin^2 \phi \cos \theta d\phi \wedge d\theta \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned} \Rightarrow &(\sin \phi \cos \theta d\rho + \rho \cos \phi \cos \theta d\phi - \rho \sin \phi \sin \theta d\theta) \\ &\quad \wedge (\sin \phi \sin \theta d\rho + \rho \cos \phi \sin \theta d\phi + \rho \sin \phi \cos \theta d\theta) \wedge (\cos \phi d\rho - \rho \sin \phi d\phi) \\ &= (\sin \phi \cos \theta d\rho + \rho \cos \phi \cos \theta d\phi - \rho \sin \phi \sin \theta d\theta) \\ &\quad \wedge (-\rho \sin \theta d\rho \wedge d\phi - \rho \sin \phi \cos \phi \cos \theta d\rho \wedge d\theta + \rho^2 \sin^2 \phi \cos \theta d\phi \wedge d\theta) \\ &= \rho^2 \sin \phi \sin^2 \theta d\theta \wedge d\rho \wedge d\phi - \rho^2 \sin \phi \cos^2 \phi \cos^2 \theta d\phi \wedge d\rho \wedge d\theta + \rho^2 \sin^3 \phi \cos^2 \theta d\rho \wedge d\phi \wedge d\theta \\ &= \rho^2 \sin \phi \sin^2 \theta d\rho \wedge d\phi \wedge d\theta + \rho^2 \sin \phi \cos^2 \phi \cos^2 \theta d\rho \wedge d\phi \wedge d\theta + \rho^2 \sin^3 \phi \cos^2 \theta d\rho \wedge d\phi \wedge d\theta \\ &= \rho^2 \sin \phi \sin^2 \theta d\rho \wedge d\phi \wedge d\theta + \rho^2 \sin \phi \cos^2 \theta [\cos^2 \phi + \sin^2 \phi] d\rho \wedge d\phi \wedge d\theta \\ &= \rho^2 \sin \phi \sin^2 \theta d\rho \wedge d\phi \wedge d\theta + \rho^2 \sin \phi \cos^2 \theta d\rho \wedge d\phi \wedge d\theta \\ &= \rho^2 \sin \phi [\sin^2 \theta + \cos^2 \theta] d\rho \wedge d\phi \wedge d\theta \\ &= \rho^2 \sin \phi d\rho \wedge d\phi \wedge d\theta \end{aligned}$$

por tanto

$$F^*(dx \wedge dy \wedge dz) = \rho^2 \sin \phi d\rho \wedge d\phi \wedge d\theta$$

□

## 1.2. Ejercicio 2

### Ejercicio 1.2.1 (Pullback de una forma diferencial)

Sea  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la función dada por

$$F(x, y) = (u, v) = (x^2 + y^2, xy)$$

Compute  $F^*(u du + v dv)$ .

### Demostración:

Como el pullback es lineal, se tiene entonces que

$$F^*(u du + v dv) = F^*(u du) + F^*(v dv)$$

Determinemos  $F^*(u du)$  y  $F^*(v dv)$ .

(I) Veamos que

$$\begin{aligned} F^*(u du) &= F^*(u \wedge du) \\ &= (F^*u) \wedge (F^*du) \\ &= (F^*u) \wedge d(F^*u) \end{aligned}$$

pues, podemos ver a la 1-forma  $u du$  como el producto wedge de una 0-forma con una 1-forma. De esta forma, por propiedades del pullback, se sigue la primera y segunda igualdad. Para la tercera, se cumple ya que el producto wedge conmuta con la diferencial exterior.

Computemos  $F^*u$ :

$$F^*u = u \circ F$$

es decir,  $F^*u$  es la función de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}$  tal que  $(x, y) \mapsto u \circ F(x, y) = u(x^2 + y^2, xy) = x^2 + y^2$ . De esta forma, se tiene que

$$\begin{aligned} d(F^*u) &= d(x^2 + y^2) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) dx + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2) dy \\ &= 2x dx + 2y dy \\ \Rightarrow d(F^*u) &= 2x dx + 2y dy \end{aligned}$$

(II) Como en el inciso (I), se tiene que

(III)

□

## 1.3. Ejercicio 3

### Ejercicio 1.3.1 (Pullback de una forma diferencial por una curva)

Sea  $\omega$  la 1-forma dada por

$$\omega = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Defina  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ . Compute  $c^*\omega$ .

## 1.4. Ejercicio 4

### Ejercicio 1.4.1 (Una forma que no se desvanece sobre una hypersuperficie suave)

Resuelva los siguientes incisos.

- (a) Sea  $f(x, y)$  una función  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}^2$  y asuma que 0 es valor regular de  $f$ . Por el teorema del valor regular, el conjunto cero  $M$  de  $f(x, y)$  es una subvariedad 1-dimensional de  $\mathbb{R}^2$ . Construya una 1-forma que no se anula en  $M$ .
- (b) Sea  $f(x, y, z)$  una función  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}^3$  y asuma que 0 es valor regular de  $f$ . Por el teorema del valor regular, el conjunto cero  $M$  de  $f(x, y, z)$  es una subvariedad 2-dimensional de  $\mathbb{R}^3$ . Sean  $f_x$ ,  $f_y$  y  $f_z$  las derivadas parciales de  $f$  con respecto a  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente. Muestre que las igualdades

$$\frac{dx \wedge dy}{f_z} = \frac{dy \wedge dz}{f_x} = \frac{dz \wedge dx}{f_y}$$

son válidas en  $M$  siempre y cuando estas tengan sentido, y por tanto juntas dan una 2-forma sobre  $M$  que no se desvanece en ninguna parte.

- (c) Generalice este problema al conjunto de nivel regular de  $f(x^1, \dots, x^{n+1})$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

---

**Teorema 1.4.1** (Nombre)  
Teorema

---

---

**Proposición 1.4.1** (Nombre)  
Proposición

---

---

**Corolario 1.4.1** (Nombre)  
Corolario

---

---

**Lema 1.4.1** (Nombre)  
Lema

---

**Definición 1.4.1** (Nombre)  
Definición

**Observación 1.4.1** (Nombre)  
Observación

**Ejemplo 1.4.1** (Nombre)  
Ejemplo

**Ejercicio 1.4.2** (Nombre)  
Ejercicio