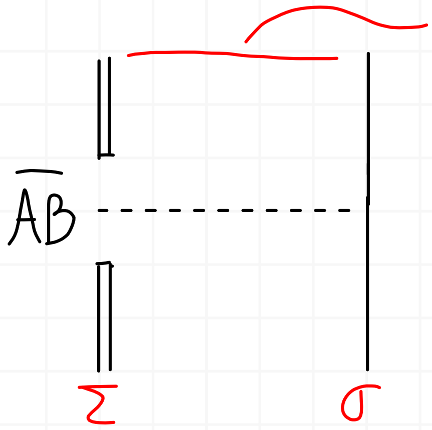
Difracción



Dependiendo esta distancia se tiene difracción de Fresnel (de campo cercano), o de Franhofer (de campo lejano).

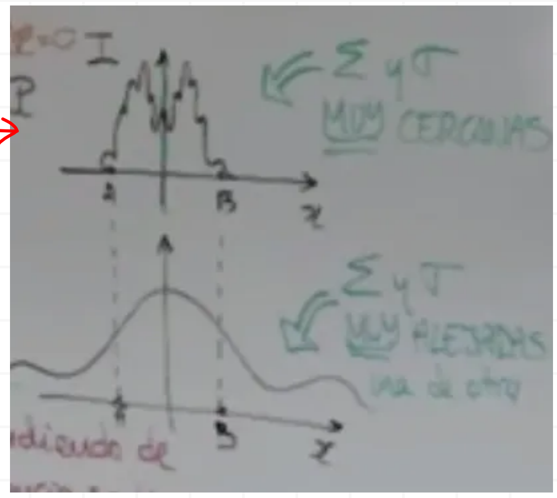
$\lambda > \overline{AB}$

$\lambda \simeq \overline{AB}$

Tendremos la intensidad I dada por:

Dif. de Fresnel →

Dif. de Franhousten →



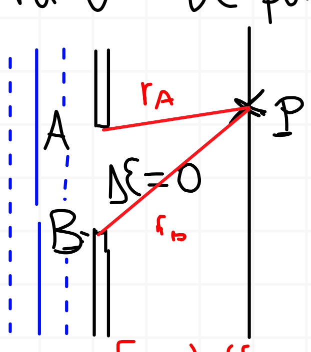
Esto fue cuando los frentes de onda eran planos. Cuando son esféricos ocurre otra cosa.

Tendremo, siempre que las ondas sean planas (incidente y emitida), se tendrá dif. de Fraunhoffen.

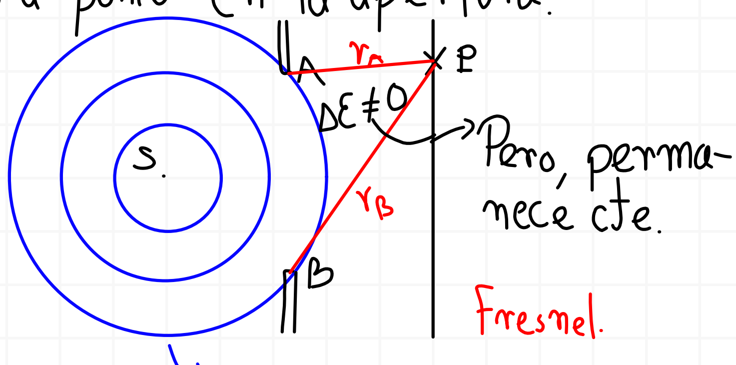
En cambio, cuando Σ y σ son muy cercanos, los frentes de onda no serán planos.

Además, la fuente puntual S debe estar muy alejada de Σ.

Cuando S está cerca del obstáculo ($S \gtrsim \overline{AB}$), la apertura es iluminada por frentes de onda esféricos. En este caso, la distancia entre S y cada punto de la apertura es diferente y, la amplitud del campo eléctrico incidente variará de de punto a punto en la apertura.



Frentes de onda



Frentes de onda.

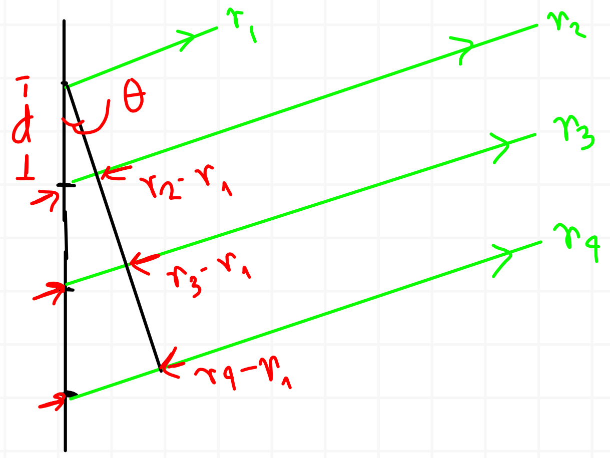
Ley Empírica

La difracción de Fraunhoffer se dará cuando

$$R > \frac{\overline{AB}^2}{\lambda}$$

Con R el min de las distancias de S a Σ y Σ a σ.

Veamos la Ley empírica. Para varios osciladores coherentes:



Es claro que:

$$r_2 - r_1 = d\,\text{sen}\theta$$
$$r_3 - r_1 = 2d\,\text{sen}\theta$$
$$r_4 - r_1 = 3d\,\text{sen}\theta$$

En grol: $r_n - r_1 = (n-1)d\,\text{sen}\theta$.

Ahora, para todas estas ondas secundarias $E_0(r_1) = E_0(r_2) = \dots = E_0(r_n) = E_0(r)$

i.e, las amplitudes son iguales.

Por tanto, el campo eléctrico E en P, debido a que las amplitudes son constantes, está dado por:

$$E_{RES} = E_0(r)\,e^{i(Kr_1-\omega t)} + E_0(r)\,e^{i(Kr_2-\omega t)} + \dots + E_0(r)\,e^{i(Kr_n-\omega t)}$$
$$= E_0(r)\,e^{-i\omega t}\cdot e^{iKr_1}\left(1 + e^{iK(r_2-r_1)} + \dots + e^{iK(r_n-r_1)}\right)$$

Ahora, la diferencia de fase entre fuentes adyacentes es $\delta = K\cdot\Lambda$. En este caso

$$\Lambda = n_m d\,\text{sen}\theta \Rightarrow \delta = K d\,\text{sen}\theta$$

índice de ref. del medio

Para el caso $n_m = 1$

Por el dibujo anterior, se tiene que $\delta = K(r_2 - r_1)$, $2\delta = K(r_3 - r_1)$, ... Donde:

$$E_{res} = E_0(r)\,e^{-i\omega t}\cdot e^{iKr_1}\underbrace{\left(1 + e^{i\delta} + (e^{i\delta})^2 + \dots + (e^{i\delta})^{n-1}\right)}$$

$$= \frac{e^{i\delta n} - 1}{e^{i\delta} - 1} = \frac{e^{in\frac{\delta}{2}}\left(e^{in\frac{\delta}{2}} - e^{-in\frac{\delta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\delta}{2}}\left(e^{i\frac{\delta}{2}} - e^{-i\frac{\delta}{2}}\right)}$$

$$= e^{i(n-1)\frac{\delta}{2}}\,\frac{\text{sen}\left(n\frac{\delta}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

Luego: $E_{res} = E_0(r)\,e^{-i\omega t}\cdot e^{i\left(Kr_1 + (n-1)\frac{\delta}{2}\right)}\cdot\dfrac{\text{sen}\left(n\frac{\delta}{2}\right)}{\text{sen}\left(\delta/2\right)}$. Tomando a $R = r_1 + \frac{1}{2}(n-1)d\,\text{sen}\theta$.

$$\Rightarrow E_{res} = E_0(r)\cdot e^{i(KR-\omega t)}\cdot\frac{\text{sen}\left(n\frac{\delta}{2}\right)}{\text{sen}\left(\delta/2\right)}.$$

Por tanto, para la distribución de irradiancia se tiene que

$$I \propto \frac{EE^*}{2} \quad \text{ó bien}$$

$$I = I_0 \cdot \frac{\operatorname{sen}^2(n\frac{\delta}{2})}{\operatorname{sen}^2(\frac{\delta}{2})}.$$ } Irradiancia asociada a una de las fuentes de apertura.

· Si $n=0$, $I=0$

· Si $n=1$, $I=I_0$

· Si $n=2$, $I = I_0 \frac{\operatorname{sen}^2(\delta)}{\operatorname{sen}^2(\frac{\delta}{2})} = 4I_0\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right).$

Como $\delta = Kd\operatorname{sen}\theta$:

$$I = I_0 \frac{\operatorname{sen}^2\left(n\left(\frac{Kd}{2}\right)\operatorname{sen}\theta\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{Kd}{2}\operatorname{sen}\theta\right)}$$ } La expresión da lugar a unos picos principales agudos separados por...

Los máximos de I se darán en θ cuando $\delta = 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$ i.e t.q.

$$d\operatorname{sen}\underbrace{\theta_m}_{} = m\lambda$$

Los osciladores están en fase en esa dirección.

Por otro lado

$$\frac{\operatorname{sen}^2(n\frac{\delta}{2})}{\operatorname{sen}^2(\frac{\delta}{2})} = n^2 \; (\delta = 2\pi m)$$

De donde el valor de la irradiancia para máximos principales será:

$$n^2 I$$

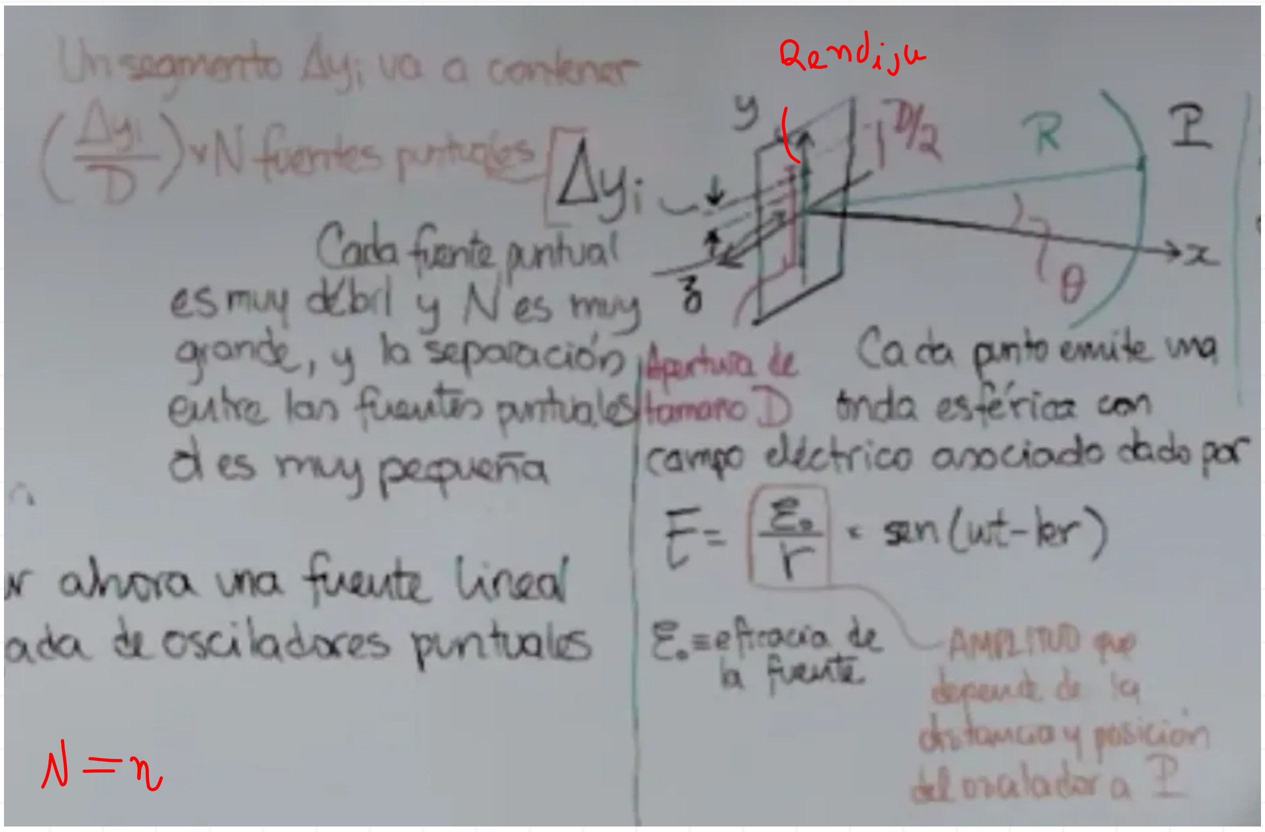
Si se introduce una fase inicial ε entre osciladores adyacentes:

$$\delta = Kd\operatorname{sen}\theta + \varepsilon.$$

y, en este caso los máximos principales se darán en ángulos θ_m t.q.

$$d\operatorname{sen}\theta_m = m\lambda - \frac{\varepsilon}{K}$$

Suponen ahora una fuente ideal de osciladores puntuales:



Suponer que la rendija esta dividida en M segmentos de longitud Δy_i (i.e, va de 1 a M)

La contribución de un segmento Δy_i a la intensidad de E en P es:

$$E_i = \left(\frac{\varepsilon_L}{r_i}\right) \operatorname{sen}(\omega t - K r_i) \cdot \left(\frac{n \Delta y_i}{D}\right)$$

Como Δy_i es muy pequeño. se puede suponer que r_i cte para todos los osciladores en ese segmento y, además los campos se suman constrctivamente.

Por otro lado, $N \to \infty$, por lo que se define

$$\varepsilon_L = \frac{1}{D} \lim_{N \to \infty} (\varepsilon_0 N)$$

De modo que la contribución de todos los segmentos M en P:

$$E = \sum_{i=1}^{N} \frac{\varepsilon_L}{r_i} \operatorname{sen}(\omega t - K r_i) \Delta y_i$$
$$= \int_{-D/2}^{D/2} \frac{\operatorname{sen}(\omega t - K r)}{r} \, dy$$

Con $r = r(y)$.

En el caso de difracción de Franhoffer

- rendija única:

$$R >> D$$

$\Rightarrow r(y)$ no se desvia de su valor medio

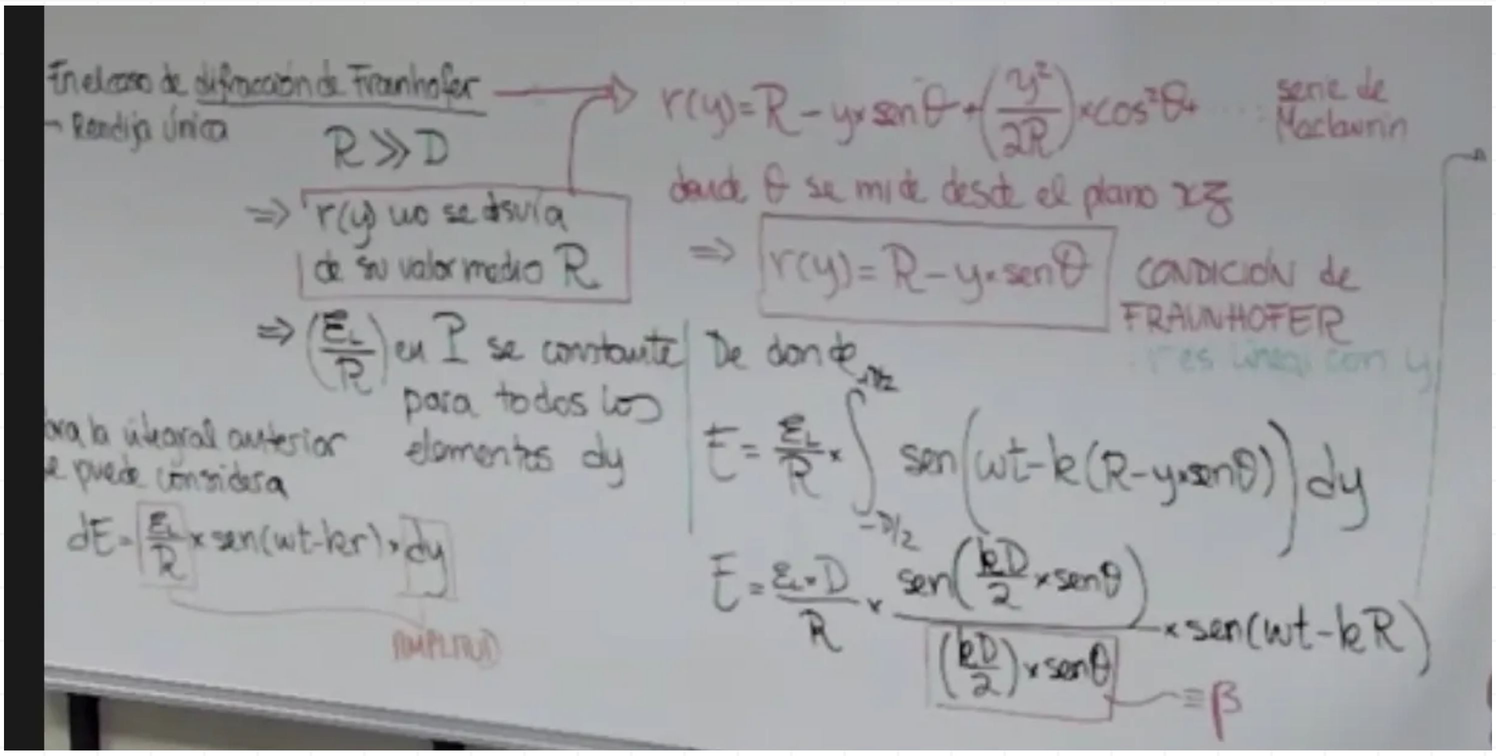
$\Rightarrow \left(\frac{\varepsilon_L}{R}\right)$ en P es cte para todos los elementos dy

Para la integral anterior se puede considerar:

$$dE = \frac{\varepsilon_L}{R}\,\text{sen}(\omega t - Kr)\,dy$$

$$r(y) = R - y\,\text{sen}\theta \Big\} \text{ Condición de Franhoffer}$$

r lineal con y.



Por tanto:

$$E = \frac{\varepsilon_L}{R} D \left(\frac{\text{sen}\,\beta}{\beta}\right) \text{sen}(\omega t - KR)$$

$$\Rightarrow I(\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_L D}{2}\right)^2 \left(\frac{\text{sen}\,\beta}{\beta}\right)$$

$$I(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_L D}{2}\right)^2 = I_{max}.$$