Lista Ejercicios Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

3 de junio de 2024

Índice general

Capítulo 1

Lista 4

Ejercicio 1.0.1
Haga lo siguiente:

I. Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Defina $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como:

$$P(x_1, ..., x_n) = e^{-\sum_{k=1}^{n}|x_k|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Fije $\nu \in \mathbb{N}$, **demuestre** la fórmula:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x) P\left(\frac{x}{\nu}\right)\, dx = (2\nu)^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x_1, ..., x_n)}{(x + \nu^2 x_1^2) \cdots (x + \nu^2 x_n^2)}\, dx_1 \cdots dx_n$$

II. **Deduzca** que si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \cap \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ y $\mathcal{F}f \geqslant 0$, entonces $\mathcal{F}f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

Sugerencia. Aplique el teorema de Beppo-Levi.

Demostración:

■

Ejercicio 1.0.2
Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Se supone que $f(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. **Pruebe** que si $x \neq 0$, entonces

$$\mathcal{F}f(0) > |\mathcal{F}f(x)|$$

Sugerencia. Una vez que ha demostrado $|\mathcal{F}f(x)| \leqslant \mathcal{F}f(0)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, Para demostrar la desigualdad estricta para $x \neq 0$ proceda por reducción al absurdo y use el Problema 2 de la Lista 6 de Análisis Matemático II.

Demostración:

■

Ejercicio 1.0.3
Haga lo siguiente:

I. Sean $a > 0$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. **Pruebe** que la función $x \mapsto (\cos \lambda x)/(x^2 + a^2)$ es integrable en $[0, \infty[$. **Muestre** que si $\lambda \neq 0$, la función $x \mapsto (x \sin \lambda x)/(x^2 + a^2)$ no es integrable en $[0, \infty[$, pero existe la integral impropia

$$\int_0^{\to\infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2}\, dx$$

Sugerencia. Muestre que

$$\left|\frac{x\sin\lambda x}{x^2+a^2}\right| \underset{\sim}{x\to\infty} \left|\frac{\sin\lambda x}{x}\right|$$