Notas de Álgebra Moderna IV.
Módulos.

Cristo Daniel Alvarado

14 de octubre de 2024

Índice general

Capítulo 1

Moduos, Homomorfismos y Secuencias exactas

Los módulos son una generalización de los grupos abelianos y lo enteros (los cuales son módulos sobre $\mathbb{Z}$).

Definición 1.0.1
Sea R un anillo no trivial. Decimos que R es un **anillo de división**, si R es unitario y para cada $a \in A$ existe $a^{-1} \in A$.

Si R es conmutativo, entonces R es un **campo**.

Definición 1.0.2
Sea R un anillo, un R**-módulo (izquierdo)** es un grupo abeilano A junto con una función $\cdot : R \times A \to A$ (denotada simplemente por $(r, a) \mapsto ra$) tal que para todo $r, s \in R$ y para todo $a \in A$:

(1) $r(a + b) = ra + rb$.

(2) $(r + s)a = ra + sa$.

(3) $r(sa) = (rs)a$.

si R además tiene elemento identidad 1_R y se cumple que

(4) $1_R a = a$, para todo $a \in A$.

entonces decimos que A es un R**-módulo unitario (izquierdo)**. En caso de que R sea un anillo de división, el módulo unitario A será llamado **espacio vectorial (izquierdo)**.

De forma análoga podemos definir los R-módulos derechos, cambiando el orden en el que se hacen las operaciones. Sin embargo, a lo largo del texto solo trabajaremos con módulos izquierdos y todos los resultados que se prueben para esto, también se cumplirán para los derechos.

Ejercicio 1.0.1
Sea A un R-módulo izquierdo. Si R es conmutativo, podemos hacer de A un R-módulo derecho definiendo:

$$ar = ra, \quad \forall a \in A \text{ y } \forall r \in R$$

Demostración:

Considere la función de $\cdot : A \times R \to A$ dada por:

$$(a, r) \mapsto ar = ra, \quad \forall (a, r) \in A \times R$$

Afirmamos que esta función hace de A un R-módulo derecho. En efecto, debemos verificar tres condiciones, sean $r, s \in R$ y $a, b \in A$:

(1) Se tiene que:

$$\begin{aligned}(a+b)r &= r(a+b)\\ &= ra + rb\\ &= ar + br\end{aligned}$$

(2) Se tiene que:

$$\begin{aligned}a(r+s) &= (r+s)a\\ &= ra + sa\\ &= ar + as\end{aligned}$$

(3) Se tiene que:

$$\begin{aligned}(as)r &= r(as)\\ &= r(sa)\\ &= (rs)a, \text{ como } R \text{ es conmutativo:}\\ &= (sr)a\\ &= a(sr)\end{aligned}$$

por los tres incisos anteriores se sigue que A es un R-módulo derecho. ■

Observación 1.0.1
A menos que se especifique lo contrario, todo R-módulo A sobre un anillo conmutativo R será izquierdo y derecho haciendo:

$$ra = ar, \quad \forall a \in A \text{ y } \forall r \in R$$

Observación 1.0.2
Denotaremos al elemento identidad de un R-módulo A por 0_A, y al elemento neutro de R por 0_R.

Proposición 1.0.1
Sea A un R-módulo, entonces:

$$r0_A = 0_A \quad \text{y} \quad 0_R a = 0_A$$

para todo $r \in R$ y para todo $a \in A$.

Demostración:

Sea $r \in R$, se tiene que:

$$r0_A = r(0_A + 0_A) = r0_A + r0_A \Rightarrow r0_A = 0_A$$

y, para todo $a \in A$:

$$0_R a = (0_R + 0_R)a = 0_R a + 0_R a \Rightarrow 0_R a = 0_A$$

■

Por lo que, en lo que sigue del texto se denotará por 0 a $0_A, 0_R$, $0 \in \mathbb{Z}$ y al módulo trivial $\{0\}$.

1.1. Referencias

- *Algebra* de Thomas Hungerford, ed. Springer.

Capítulo 2

Módulos Libres y Espacios Vectoriales

2.1. Conceptos Fundamentales

No queda de otra más que asumir este resultado de categorías:

Teorema 2.1.1 (Hungerford, Theorem I.7.8)
Si $\mathcal{C}$ es una categoría concreta, F y F' son objetos en C tales que F es libre en el conjunto X y F' lo es en X' siendo estos conjuntos tales que $\left|X\right| = \left|X'\right|$, entonces F es equivalente a F'.

En particular, la categoría de R-módulos unitarios es una categoría concreta, donde la equivalencia entre dos objetos de la categoría es un isomorfismo entre ambos R-módulos.

Teorema 2.1.2
Sea R un anillo conmutativo con identidad. Las siguientes condiciones son equivalentes en un R-módulo unitario F:

I. F tiene base no vacía.

II. F es la suma interna directa de una familia cíclica de R-módulos, cada uno de los cuales es isomorfo a R como un R-módulo.

III. F es un R-módulo isomorfo a la suma directa de copias del R-módulo izquierdo R.

IV. Existe un conjunto no vacío X y una función $i : X \to F$ con la siguiente propiedad: dado un R-módulo, A y una función $f : X \to A$ existe un único homomorfismo de R-módulos $\overline{f} : F \to A$ tal que

$$\overline{f} \circ i = f$$

En otras palabras, F es un objeto libre en la categoría de R-módulos uniatrios.

Demostración:
$(i) \Rightarrow (iv)$: Sea X una base no vacía de F y sea $i : X \to F$ el mapeo inclusión. Sea A un R-módulo y $f : X \to A$ una función.

Si $u \in F$, entonces existen $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $r_i \in R$ y $x_i \in X$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$ tales que

$$u = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i$$

Definimos la función $\overline{f} : F \to A$ dada por:

$$\overline{f}(u) = \sum_{i=1}^{n} r_i f(x_i)$$

Esta función está bien definida, pues F tiene como base a X (por ende, todo elemento se representa de forma única como combinación lineal finita de elementos de X). Además,

$$\begin{aligned} \overline{f} \circ i(x_i) &= \overline{f}(x_i) \\ &= 1_R \cdot f(x_i) \\ &= f(x_i), \quad \forall x_i \in X \end{aligned}$$

por ende, $\overline{f} \circ i = f$.

Veamos que es homomorfismo de R-módulos (no sé como se verifica eso, chécalo porfa Roque).

Ahora, si $g : F \to A$ es otro homomorfismo de R-módulos tal que

$$g \circ i = f$$

se tiene que

$$\overline{f} \circ i = g \circ i \Rightarrow \overline{f}\big|_X = g\big|_X$$

Como X genera F y todo homomorfismo de R-módulos que vaya de F en algún R-módulo, B queda únicamente determinado por X, basta ver que $\overline{f} = g$ en X, lo cual sucede por la igualdad anterior. Por tanto, $\overline{f}$ es único.

$(iv) \Rightarrow (iii)$: Asumiendo (iv), sean $X \subseteq F$ no vacío y una función $i : X \to F$ que cumplan esta propiedad. Considere el R-módulo

$$A = \sum_{x \in X} R$$

(es decir, es la suma directa de $|X|$-veces el R-módulo izquierdo R). Sea

$$Y = \left\{ \theta_x \middle| x \in X \right\}$$

donde

$$\theta_x(y) = \begin{cases} 1_R & \text{si} \quad y = x \\ 0_R & \text{si} \quad y \neq x \end{cases}, \quad \forall y \in Y$$

Como X es no vacío, entonces Y es no vacío. Por la parte $(iii) \Rightarrow (i)$, se sabe que Y es una base del R-módulo unitario A. En particular, como $(iii) \Rightarrow (iv)$, se tiene que A es un R-módulo libre en la categoría de R-módulos unitarios.

En particular, F y A son R-módulos libres en la categoría de R-módulos unitarios y son tales que $|X| = |Y|$ (por la forma en que se construyó Y), luego por el Teorema anterior son equivalentes en esta categoría, es decir que existe un isomorfismo $f : F \to A$. Así que

$$F \cong \sum_{x \in X} R$$

lo que prueba el resultado. ■