Taller Topología Algebraica, Lectura 8: El Grupo Fundamental del Producto de Espacios, Tipo de Homotopía y Equivalencia de Homotopía

Cristo Alvarado

13 de octubre de 2024

Producto de Espacios

Para determinar el grupo fundamental del producto de dos espacios topológicos, primero recordaremos unos hechos básicos sobre espacios topológicos.

Sean X, Y y A espacios topológicos y $f : A \to X \times Y$ una continua. Dentotamos por $f_1 : A \to X$ y $f_2 : A \to Y$ a las funciones componentes de f, esto es:

$$f(a) = (f_1(a), f_2(a)), \quad \forall a \in A$$

Se sabe que

- f es continua si y sólo si f_1 y f_2 son continuas.
- Para cada f, las dos funciones f_1 y f_2 son únicas.

si denotamos por $p : X \times Y \to X$ y $q : X \times Y \to Y$ a las funciones proyección, esto es:

$$p(x, y) = x \quad \text{y} \quad q(x, y) = y$$

para todo $(x, y) \in X \times Y$, entonces se cumple que:

$$f_1 = p \circ f \quad \text{y} \quad f_2 = q \circ f$$

En el caso en que $A = I$, se tiene lo siguiente:

Proposición 1.1
En las condiciones anteriores, se cumple que:

a. Si $f, g : I \to X \times Y$ son caminos con el mismo punto inicial y terminal, entonces $f \sim g$ si y sólo si $f_1 \sim g_1$ y $f_2 \sim g_2$.

b. Sean $f, g : I \to X \times Y$ caminos tales que el punto terminal de f es el punto inicial de g, y sea $h = f \cdot g$. Entonces $h_1 = f_1 \cdot g_1$ y $h_2 = f_2 \cdot g_2$.

Demostración:
Ejercicio. ■

Con esto, estamos en condiciones de probar el siguiente resultado:

Teorema 1.1
El grupo fundamental del producto de dos espacios $\pi(X \times Y, (x, y))$ es isomorfo al producto de los grupos fundamentales $\pi(X, x)$ y $\pi(Y, y)$, siendo $(x, y) \in X \times Y$. El isomorfismo está dado por:

$$[f] \mapsto ([f_1], [f_2])$$

siendo $f: I \to X \times Y$ un bucle en $X \times Y$.

Demostración:

Sea $(x,y) \in X \times Y$. Definimos la función $\Pi : \pi(X \times Y, (x,y)) \to \pi(X,x) \times \pi(Y,y)$ dada por:

$$\Pi([f]) = ([f_1],[f_2]) = ([p \circ f],[q \circ f]) = (p_*([f]), q_*([f]))$$

para todo $[f] \in \pi(X \times Y, (x,y))$, donde recuerde que

$$p_* : \pi(X \times Y, (x,y)) \to \pi(X,x) \quad \text{y} \quad q_* : \pi(X \times Y, (x,y)) \to \pi(Y,y)$$

por ende, la función Π está bien definida. Veamos que es isomorfismo:

- Π **es homomorfismo**: Sean $[f],[g] \in \pi(X \times Y, (x,y))$, entonces:

$$\begin{aligned} \Pi([f]\cdot[g]) &= \Pi([f \cdot g]) \\ &= (p_*([f\cdot g]), q_*([f \cdot g])) \\ &= (p_*([f])\cdot p_*([g]), q_*([f])\cdot q_*([g])) \\ &= (p_*([f]), q_*([f]))\cdot(p_*([g]), q_*([g])) \\ &= \Pi([f])\cdot \Pi([g]) \end{aligned}$$

- Π **es monomorfismo**: Se tiene para $[f] \in \pi(X \times Y, (x,y))$:

$$\begin{aligned} \Pi([f]) = ([i_x],[i_y]) &\iff ([f_1],[f_2]) = ([i_x],[i_y]) \\ &\iff [f_1] = [i_x] \text{ y } [f_2] = [i_y] \\ &\iff f_1 \sim i_x \text{ y } f_2 \sim i_y \\ &\iff f \sim i_{(x,y)} \\ &\iff [f] = [i_{(x,y)}] \end{aligned}$$

  por ende, $\ker \Pi = \langle [i_{(x,y)}] \rangle$.

- Π **es epimorfismo**: Sean $([f_1],[f_2]) \in \pi(X,x) \times \pi(Y,y)$, tomemos la función

$$f(x,y) = (f_1(x), f_2(y)), \quad \forall (x,y) \in X \times Y$$

  claramente esta función define un bucle en $X \times Y$ con punto base $(x,y) \in X \times Y$, así que $[f] \in \pi(X \times Y, (x,y))$. Es claro de la definición de Π que

$$\Pi([f]) = ([f_1],[f_2])$$

por los incisos anteriores, se tiene el resultado. ■

Observación 1.1

El resultado anterior se generaliza de forma inmediata al producto de un número finito de espacios topológicos.

Teorema 1.2

Sea $\{X_i\}_{i=1}^n$ una familia finita de espacios topológicos. Sean $x_i \in X_i$ para cada $i \in [\![1,n]\!]$. Entonces:

$$\pi(X_1 \times \cdots \times X_n, (x_1,...,x_n)) \cong \pi(X_1,x_1) \times \cdots \times \pi(X_n,x_n)$$

Demostración:
Ejercicio. ■

Tipo de Homotopía y Equivalencia de Homotopía entre Espacios

Antes de continuar con el estudio detallado del grupo fundamental, hablaremos un poco sobre la topología de ciertos subespacios del plano. Un espacio topológico será llamado **disco cerrado** si es homeomorfo al conjunto

$$\mathbb{D}^2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

y será llamado **disco abierto** si es homeomorfo al conjunto

$$\mathbb{B}^2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 < 1\right\}$$

La **frontera** de un disco cerrado es el subconjunto que corresponde al círculo $\mathbb{S}^1$ bajo el homeomorfismo del disco sobre $\mathbb{D}^2$.

Probaremos algunas propiedades fundamentales de los discos:

Proposición 1.2
Cualquier subconjunto del plano $E \subseteq \mathbb{R}^2$ compacto, convexo con interior no vacío es un disco cerrado.

Demostración:
Sea $x_0 \in E$ un punto interior de E. Considere el rayo $l_\theta : [0, \infty[\to E$ dado por:

$$l_\theta(t) = x_0 + t(\cos\theta, \sin\theta)$$

para cada $\theta \in [0, 2\pi[$. Tomemos $\theta \in [0, 2\pi[$. El conjunto

$$l_\theta^{-1}([0, \infty[) \cap E$$

es un intervalo cerrado contenido en E con un punto extremo x_0 (por ser E compacto y convexo). Este intervalo es homeomorfo al intervalo cerrado con puntos extremos $(0, 0)$ y $(\cos\theta, \sin\theta)$ dentro de $\mathbb{D}^2$. De esta forma variando θ en $[0, 2\pi[$ construímos un homeomorfismo entre E y $\mathbb{D}^2$. ■

Observación 1.2
Al lector que quiera formalizar el argumento anterior le será de utilidad ver lo que está sucediéndole al conjunto E.

Proposición 1.3
Sean E_1 y E_2 discos cerrados con fronteras B_1 y B_2, respectivamente. Entonces, cualquier función continua $f : B_1 \to B_2$ puede ser extendida a una función continua $F : E_1 \to E_2$. Si f es homeomorfismo, podemos escoger a F como un homeomorfismo.

Demostración:
Como $E_1, E_2 \cong \mathbb{D}^2$ y $B_1, B_2 \cong \mathbb{S}^1$, basta con probar que si $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ es una función continua, esta función puede ser extendida continuamente a $\mathbb{D}^2$.

En efecto, sea $x \in \mathbb{D}^2$, entonces existe $t \in [0, 1]$ y $\theta \in [0, 2\pi[$ tal que

$$x = t(\cos\theta, \sin\theta), \quad t = \|x\|$$

hacemos $F : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ dada por:

$$F(x) = tf(\cos\theta, \sin\theta) = \begin{cases} tf\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & \text{si} \quad x \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad x = (0, 0) \end{cases}, \quad \forall x \in \mathbb{D}^2$$

(observe que $t = \|x\|$). Claramente F es continua, está bien definida y es extensión de f. Si f es homeomorfismo, considere f^{-1} su inversa continua. Se tiene que definiendo

$$F^{-1}(x) = tf^{-1}(\cos\theta, \sin\theta) = \begin{cases} tf^{-1}\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & \text{si} \quad x \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad x = (0,0) \end{cases}, \quad \forall x \in \mathbb{D}^2$$

para $x \in \mathbb{D}^2$ no cero (en particular, $t \neq 0$ y $f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \neq 0$) que:

$$\begin{aligned} F^{-1} \circ F(x) &= F^{-1}\left(tf\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right) \\ &= F^{-1}\left(tf\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right) \\ &= tf^{-1}\left(f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right) \\ &= \frac{tx}{\|x\|} \\ &= x \end{aligned}$$

de forma análoga

$$F \circ F^{-1}(x) = x$$

y, el cero lo manda al cero en ambos casos de la composición. Por lo cual, F es homeomorfismo. ■

Proposición 1.4
Sea E_1 un disco cerrado. Definimos E_2 como el espacio cociente de E_1 obtenido a partir de identificar un segmento cerrado de la frontera de E_1 con un punto. Entonces, este espacio cociente es nuevamente un disco cerrado.

Demostración:
Haremos la prueba por pasos:

- Por la Proposición anterior, basta con probar el resultado para el caso en que E_1 es un disco cerrado particular y el segmento es un segmento particular de E_1.
- Por el inciso anterior, tomaremos a E_1 como el trapezoide $ABDE$ dado por el subconjunto del plano xy, como se muestra en la Figura 2.2. y tomaremos a E_2 como el triángulo ABC. Definiremos una función $f : E_1 \to E_2$ tal que el segmento DE de la frontera de E_1 sea mapeada al vértice C de E_2, pero en todos sus demás puntos sea una función biyectiva.

  Completaremos entonces la prueba diciendo que la topología cociente determinada por f es la misma que la topología de E_2, esto para verificar que el espacio cociente de E_1 con su segmento es isomorfo a E_2, obteniendo así el resultado deseado.
- Definimos f con la condición de que para todo $P = (x, y) \in E_1$, el punto $f(x, y) = P' = (x', y') \in E_2$ sea tal que esté en la recta que une a P con $C = (0, 1)$, dada de la siguiente manera:

  $$f(x,y) = \left(x \cdot \left(\frac{2y-1}{y-1}\right), 2y\right) = (x', y'), \quad \forall (x,y) \in E_1$$

  se verifica rápidamente que g tiene como inversa en el conjunto E_1 menos el segmento DE a la función $g : E_2 \setminus \{(0,1)\} \to E_1 \setminus DE$ dada por:

  $$g(x', y') = \left(x' \cdot \left(\frac{y'-2}{2y'-2}\right), \frac{1}{2}y'\right) = (x,y), \quad \forall (x', y') \in E_2 \setminus \{(0,1)\}$$

  Es claro que f es continua y que g es la *inversa* de f. Como E_1 es compacto y E_2 es Hausdorff, entonces f es cerrada. Luego E_2 tiene la topología cociente inducida por f.

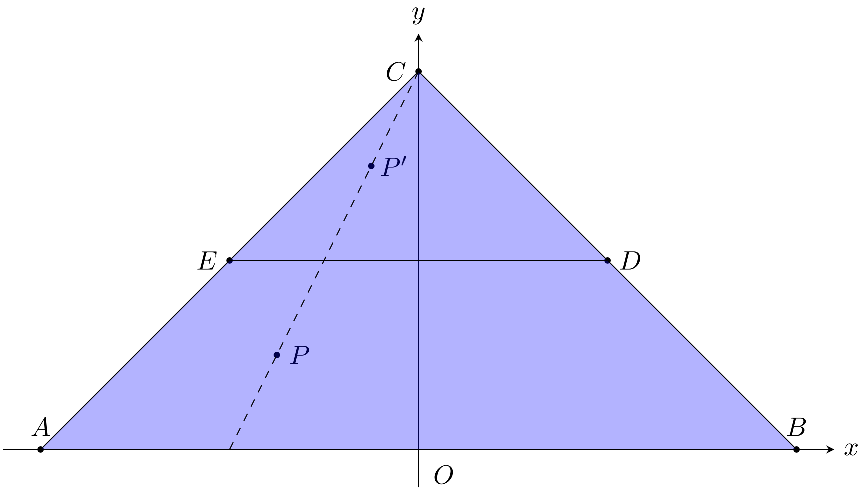

Figura 1: Trapezoide $ABDE$.

■

Estamos ahora listos para probar un lema fundamental. Sea $g : I \to \mathbb{S}^1$ (donde $\mathbb{S}^1$ denota la frontera de $\mathbb{D}^2$) la funcioń continua que da exactamente una vuelta alrededor del círculo, esto es

$$g(0) = g(1) = d_0 \in \mathbb{S}^1$$

esto es, que g mapea el intervalo $(0, 1)$ de forma homeomorfa en $B \setminus \{d_0\}$.

Lema 1.1
Sea X un espacio topológico. Una funcioń continua $f : \mathbb{S}^1 \to X$ puede ser extendida a una función $F : \mathbb{D}^2 \to X$ si y sólo si el bucle cerrado $f \circ g : I \to X$ es equivalente al bucle constante con punto base $f(d_0)$.

Demostración:
$\Rightarrow$) : Suponga que $f : \mathbb{S}^1 \to X$ puede ser extendida a una función $F : \mathbb{D}^2 \to X$. Considere el cuadrado unitario:

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 \leq x \leq 1 \text{ y } 0 \leq y \leq 1 \right\}$$

Definimos una función continua $h : S \to \mathbb{S}^1$ dada como sigue:

$$\begin{aligned} &h(x, 0) = g(x) \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ &h(x, 1) = h(0, y) = h(1, y) = d_0, \text{ si } x \in I \text{ o } y \in I \end{aligned}$$

Es claro que h es continua. Por la proposición 1.3, como $S \cong \mathbb{S}^1$, podemos extender h a una función continua $H : S \to \mathbb{S}^1$. La función continua $F \circ H : I \times I \to X$ satisface que:

$$\begin{aligned} F \circ H(x, 0) &= F(h(x, 0)) \\ &= F(g(x)) \\ &= f \circ g(x) \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned} F \circ H(x, 1) &= F(h(x, 1)) \\ &= F(d_0) \\ &= f(d_0) \end{aligned}$$

para todo $x \in I$. Además,

$$\begin{aligned} F \circ H(0, y) &= F(d_0) \\ &= f(d_0) \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned} F \circ H(1, y) &= F(d_0) \\ &= f(d_0) \end{aligned}$$

Por tanto, el bucle $f \circ g$ es equivalente al bucle constante con punto base $f(d_0)$.

$\Leftarrow)$: Suponga que el bucle cerrado $f \circ g$ es equivalente al bucle constante con punto base $f(d_0)$. Entonces, existe una función continua $G : I \times I \to X$ tal que:

$$\begin{cases} G(x, 0) = f \circ g(x) \\ G(x, 1) = G(0, y) = G(1, y) = f(d_0) \end{cases}, \quad \forall x \in I \text{ y } \forall y \in I$$

notemos que de la segunda condición, G mapea el borde superior y los dos bordes de $I \times I$ en un sólo punto, $f(d_0)$ en X, luego G induce una función continua de este espacio cociente a X. Por la proposición anterior, este espacio cociente es un disco cerrado, digamos $\mathbb{D}^2$. Así que la función inducida $\widetilde{G} : \mathbb{D}^2 \to X$ es tal que en un punto de de la frontera de $\mathbb{D}^2$, digamos $(x_0, y_0) \in \mathbb{D}^2$ se cumple que:

$$\widetilde{G}(x_0, y_0) = f(d_0)$$

y,

$$\widetilde{G}(x, y) = f \circ g(x, y)$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{(x_0, y_0)\} = I$. Por ende, G es una extensión continua de f a todo $\mathbb{D}^2$. ■

Aplicando el lema anterior, es conveniente usar el siguiente abuso de notación, diremos que la función $f : \mathbb{S}^1 \to X$ *representa* la clase de equivalencia del bucle $f \circ g$.

Teorema 1.3
Sean X y Y espacios topológicos, $\varphi_0, \varphi_1 : X \to Y$ funciones continuas homotópicas y sea $\varphi : X \times I \to Y$ la homotopía entre ambas funciones. Sea $x_0 \in X$ y considere los homomorfismos inducidos por φ_0 y φ_1:

$$\begin{cases} {\varphi_0}_* : \pi(X, x_0) \to \pi(Y, \varphi_0(x_0)) \\ {\varphi_1}_* : \pi(X, x_0) \to \pi(Y, \varphi_1(x_0)) \end{cases}$$

Sea $[\gamma]$ la clase de equivalencia del camino $\gamma : I \to Y$, dado por $t \mapsto \varphi_0(x_0, t)$. Considere el isomorfismo inducido $u : \pi(Y, \varphi_0(x_0)) \to \pi(Y, \varphi_1(x_0))$ dado por:

$$u([f]) = [\gamma]^{-1} \cdot [f] \cdot [\gamma], \quad \forall [f] \in \pi(Y, \varphi_0(x_0))$$

Entonces, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \pi(Y, \varphi_0(x_0)) \arrow[dd, "u"] \\
\pi(X, x_0) \arrow[ur, "{\varphi_0}_*"] \arrow[dr, "{\varphi_1}_*"'] & \\
 & \pi(Y, \varphi_1(x_0))
\end{tikzcd}$$

Figura 2: Conmutatividad de $\pi(X, x_0)$, $\pi(Y, \varphi_0(x_0))$ y $\pi(Y, \varphi_1(x_0))$.

es conmutativo.

Demostración:
Tenemos que probar que

$$\varphi_{1*}([f]) = [\gamma]^{-1} \cdot \varphi_{0*}([f]) \cdot [\gamma], \quad \forall [f] \in \pi(X, x_0)$$

En efecto, sea $[f] \in \pi(X, x_0)$. Considere la función $F : I \times I \to Y$ dada por:

$$F(x, y) = \varphi(f(x), y), \quad \forall x, y \in I$$

esta función es continua por ser composición de funciones continuas. Observemos que:

$$\begin{cases} F(x, 0) = \varphi(f(x), 0) = \varphi_0(f(x)) \\ F(x, 1) = \varphi(f(x), 1) = \varphi_1(f(x)) \end{cases}, \quad \forall x \in I$$

y,

$$F(0, y) = F(1, y) = F(x_0, y) = \gamma(y), \quad \forall y \in I$$

Por ende, se tiene que el producto

$$(\varphi_0 \circ f) \cdot \gamma \cdot (\varphi_1 \circ f)^{-1} \cdot \gamma^{-1}$$

es un bucle que va de la frontera de $I \times I$ (que se denotará por $\mathbb{S}^1$) a Y, esto es que es en algún sentido la función $F\big|_{\mathbb{S}^1} : \mathbb{S}^1 \to Y$, la cual puede ser extendida de forma continua a F, así, por el lema anterior, se sigue que el camino $(\varphi_0 \circ f) \cdot \gamma \cdot (\varphi_1 \circ f)^{-1} \cdot \gamma^{-1}$ es equivalente al camino constante, es decir que:

$$[(\varphi_0 \circ f) \cdot \gamma \cdot (\varphi_1 \circ f)^{-1} \cdot \gamma^{-1}] = e$$

esto es, que

$$\begin{aligned} &\varphi_{0*}([f]) \cdot [\gamma] = [\gamma] \cdot \varphi_{1*}([f]) \\ &\Rightarrow \varphi_{1*}([f]) = [\gamma]^{-1} \cdot \varphi_{0*}([f]) \cdot [\gamma] \end{aligned}$$

lo cual prueba el resultado. ■

Note que este teorema es una generalización de un teorema anterior.

Definición 1.1
Dos espacios topológicos X y Y tienen el **mismo tipo de homotopía** si existen funciones continuas, llamadas **equivalencias de homotopía**, $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ tales que:

$$g \circ f \simeq \mathbb{1}_X \quad \text{y} \quad f \circ g \simeq \mathbb{1}_Y$$

Se sigue de forma inmediata que dos espacios homeomorfos tienen el mismo tipo de homotopía, pero el converso no es cierto (en general).

Teorema 1.4
Si $f : X \to Y$ es una equivalencia de homotopía, entonces $f_* : \pi(X, x) \to \pi(Y, f(x))$ es un isomorfismo para todo $x \in X$.

Demostración:
Como f es equivalencia de homotopía, existe una función $g : Y \to X$ tal que

$$f \circ g \simeq \mathbb{1}_Y \quad \text{y} \quad g \circ f \simeq \mathbb{1}_X$$

$$\begin{tikzcd}
\pi(X,x) \arrow[r, "f_*"] \arrow[rr, bend left, "g_* \circ f_*"] \arrow[dr, "\mathbb{1}_{\pi(X,x)}"] & \pi(Y,f(x)) \arrow[r, "g_*"] & \pi(X,(g\circ f)(x)) \arrow[dl, "u"] \\
& \pi(X,x) &
\end{tikzcd}$$

Figura 3: Diagrama Conmutativo de $\mathbb{1}_{\pi(X,x)}$, $g_* \circ f_*$ y u.

$$\begin{tikzcd}
\pi(Y,y) \arrow[r, "g_*"] \arrow[rr, bend left, "f_* \circ g_*"] \arrow[dr, "\mathbb{1}_{\pi(Y,y)}"] & \pi(X,g(x)) \arrow[r, "f_*"] & \pi(Y,(f\circ g)(y)) \arrow[dl, "v"] \\
& \pi(Y,y) &
\end{tikzcd}$$

Figura 4: Diagrama Conmutativo de $\mathbb{1}_{\pi(Y,y)}$, $f_* \circ g_*$ y v.

Por el lema anterior y usando las propiedades de los homomorfismos inducidos, obtenemos los siguientes dos diagramas conmutativos.

Estos son válidos para todo $x \in X$ y para todo $y \in Y$, donde las funciones u y v son como las dadas en el Teorema anterior para algún caminos que las definan. En particular, obtenemos que:

$$u \circ (g_* \circ f_*) = \mathbb{1}_{\pi(X,x)} \quad \text{y} \quad v \circ (f_* \circ g_*) = \mathbb{1}_{\pi(Y,y)}$$

donde u y v son isomorfismos, luego de forma inmediata se sigue que f_* y g_* también deben de serlo (restringidos a los dominios adecuados). ∎

Este teorema será usado como mira para determinar los grupos fundamentales de ciertos espacios, y como un método de probar que ciertos espacios no tienen el mismo tipo de homotopía (y en consecuencia, no son homeomorfos).