Lista 3 de Ejercicios Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

19 de mayo de 2024

Capítulo 3

Ejercicios

Ejercicio 3.1.1
Pruebe que, para todo $x \in]0, 2\pi[$,

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

Usando la identidad de Parseval, **demuestre** que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Demostración:
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}, \quad \forall x \in [0, 2\pi[$$

y extiéndase por periodicidad a todo $\mathbb{R}$. Es claro que $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{R})$, sea ahora $x \in]0, 2\pi[$. Por el teorema fundamental para la convergencia puntual de una serie de Fourier hay que encontrar un $0 < \delta < \pi$ tal que

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^{\delta} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) dt$$

tomemos $\delta = \min\{x, 2\pi - x\} > 0$. Se tienen dos casos:

1. $\delta = x$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^{\delta} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) dt \\
&= \int_0^{\delta} \frac{1}{t}\left[\frac{\pi - x - t}{2} + \frac{\pi - x + t}{2} - \frac{2(\pi - x)}{2}\right] \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) dt \\
&= \int_0^{\delta} \frac{1}{t}\left[\pi - x - \pi + x\right] \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) dt \\
&= \int_0^{\delta} 0\, dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

   por tanto, el límite cuando $m \to \infty$ resulta que da cero.

2. $\delta = 2\pi x$. El caso es análogo al anterior.

por ambos incisos se concluye que

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^\delta \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)dt=0$$

por tanto, la serie de Fourier de f converge a f puntualmente en x. Computemos ahora los coeficientes de la serie de Fourier de f. Si $n\geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi-x}{2}\cos nx dx\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos nx dx-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx dx \text{ haciendo } u=nx\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2n\pi}\cos u\frac{du}{n}-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2n\pi}\frac{u}{n}\cos u\frac{du}{n}\\
&= \frac{1}{2n}\sin u\Big|_0^{2n\pi}-\frac{1}{2\pi n^2}\int_0^{2n\pi} u\cos u du\\
&= \frac{1}{2n}\left[\sin 2\pi n-\sin 0\right]-\frac{1}{2\pi n^2}\left(u\sin u\Big|_0^{2n\pi}+\int_0^{2n\pi}\sin u du\right)\\
&= -\frac{1}{2\pi n^2}\left(u\sin u\Big|_0^{2n\pi}+\int_0^{2n\pi}\sin u du\right)\\
&= -\frac{1}{2\pi n^2}\left(\left[2n\pi\sin 2n\pi-0\right]-\cos u\Big|_0^{2n\pi}\right)\\
&- \frac{1}{2\pi n^2}\left(0-0-1+1\right)\\
&= 0
\end{aligned}$$

para todo $n \geqslant 0$. Si $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\sin nx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} \frac{\pi - x}{2}\sin nx dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} \sin nx dx - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} x\sin nx dx \text{ haciendo } u = nx \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{2n\pi} \sin u\frac{du}{n} - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2n\pi} \frac{u}{n}\sin u\frac{du}{n} \\
&= \frac{1}{2n}(-\cos u)\Big|_0^{2n\pi} - \frac{1}{2\pi n^2}\int_{0}^{2n\pi} u\sin u du \\
&= \frac{1}{2n}(-\cos 2n\pi + 1) - \frac{1}{2\pi n^2}\left(-u\cos u\Big|_0^{2n\pi} + \int_{0}^{2n\pi} \cos u du\right) \\
&= \frac{1}{2n}(-1+1) - \frac{1}{2\pi n^2}\left(-2n\pi\cos 2n\pi + 0 + \sin u\Big|_0^{2n\pi}\right) \\
&= -\frac{1}{2\pi n^2}\left(-2n\pi\cos 2n\pi + \sin 2n\pi - \sin 0\right) \\
&= -\frac{1}{2\pi n^2}\left(-2n\pi + \sin 2n\pi - \sin 0\right) \\
&= -\frac{1}{2\pi n^2}\left(-2n\pi\right) \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Por tanto, la serie de Fourier de f en $x \in]0, 2\pi[$ está dada por:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cos kx + b_k \sin kx] = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

Por el criterio de Dini se sigue que

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}, \quad \forall x \in]0, 2\pi[$$

Ahora, como $x \mapsto \frac{\pi - x}{2}$ es una función en $\mathcal{L}_2^{2\pi}$, por Parseval se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[|a_n|^2 + |b_n|^2\right] &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\pi - x}{2}\right|^2 \, dx \\
\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} |\pi - x|^2 \, dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} |\pi - x|^2 \, dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)^2 \, dx \text{ haciendo el cambio de variable } u = \pi - x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{0} -u^2 \, du \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{-u^3}{3}\Big|_{\pi}^{0} \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot [-\frac{0}{3} + \frac{\pi^3}{3}] \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi^3}{3} \\
&= \frac{\pi^2}{6} \\
\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}$$

Como se quería demostrar. ■

Ejercicio 3.1.2
Sea $f \in \mathcal{L}_2^{2\pi}(\mathbb{R})$ y sean a_n, b_n los coeficientes de Fourier de f. **Pruebe** que

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} xf(x)dx = \pi a_0 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}.$$

Demostración:
Considere la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$g(x) = x, \quad \forall x \in [0, 2\pi[$$

y extiéndase por periodicidad a todo $\mathbb{R}$. Es claro que $g \in \mathcal{L}_2^{2\pi}(\mathbb{R})$. Si $\left\{c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ y $\left\{d_k = \frac{\alpha_k - i\beta_k}{2}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ son los coeficientes de Fourier de f y g, respectivamente, al estar ambas funciones en $\mathcal{L}_2^{2\pi}(\mathbb{R})$ se tiene por las identidades de Parserval que

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)} = \frac{a_0\overline{\alpha_0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\overline{\alpha_n} + b_n\overline{\beta_n}\right]$$

en particular,

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\overline{g(x)} \, dx &= \frac{a_0\overline{\alpha_0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\overline{\alpha_n} + b_n\overline{\beta_n}\right] \\
\Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} xf(x) \, dx &= \frac{a_0\overline{\alpha_0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\overline{\alpha_k} + b_n\overline{\beta_n}\right]
\end{aligned}$$

Calculemos los coeficientes de Fourier de g. Veamos que

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}x^2\Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}x^2\Big|_0^{2\pi} \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

y, para $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos kx\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2k\pi} \frac{u}{k}\cos u\,\frac{du}{k} \\
&= \frac{1}{k^2\pi}\int_0^{2k\pi} u\cos u\,du \\
&= \frac{1}{k^2\pi}\left[u\sin u + \cos u\Big|_0^{2k\pi}\right] \\
&= \frac{1}{k^2\pi}[2k\pi\sin 2k\pi + \cos 2k\pi - \cos 0] \\
&= \frac{1}{k^2\pi}[2k\pi\sin 2k\pi + \cos 2k\pi - \cos 0] \\
&= \frac{1}{k^2\pi}[0 + 1 - 1] \\
&= 0
\end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}
\beta_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin kx\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2k\pi} \frac{u}{k}\sin kx\,\frac{du}{k} \\
&= \frac{1}{k^2\pi}\int_0^{2k\pi} u\sin kx\,du \\
&= \frac{1}{k^2\pi}\left[\sin u - u\cos u\Big|_0^{2k\pi}\right] \\
&= \frac{1}{k^2\pi}[\sin 2k\pi - 2k\pi\cos 2k\pi - \sin 0 + 0\cos 0] \\
&= \frac{1}{k^2\pi}[0 - 2k\pi - 0 + 0] \\
&= -\frac{2}{k}
\end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $u = kx$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} xf(x)\,dx &= \frac{a_0\overline{\alpha_0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\overline{\alpha_n} + b_n\overline{\beta_n}\right] \\
&= \frac{2\pi a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cdot 0 + b_n\cdot\left(\frac{-2}{n}\right)\right] \\
&= \pi a_0 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n} \\
\Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} xf(x)\,dx &= \pi a_0 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}
\end{aligned}$$

como se quería demostrar. ■

Ejercicio 3.1.3
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de periodo 2π definida como

$$f(x) = \begin{cases} \pi^2 & \text{si} \quad -\pi \leqslant x < 0, \\ (x-\pi)^2 & \text{si} \quad 0 \leqslant x < \pi. \end{cases}$$

calcule los coeficientes de Fourier a_n, con $n = 0, 1, 2, ...$ de f y **pruebe** las fórmulas

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Solución:
Primero determinemos los coeficientes de Fourier de f.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{\pi} f(x)\,dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} \pi^2\,dx + \int_0^{\pi} (x-\pi)^2\,dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\pi^3 + \int_{-\pi}^{0} u^2\,du\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\pi^3 + \int_{-\pi}^{0} u^2\,du\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\pi^3 + \left.\frac{u^3}{3}\right|_{-\pi}^{0}\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\pi^3 + \frac{\pi^3}{3}\right] \\
&= \frac{4\pi^2}{3}
\end{aligned}$$

ahora, para $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} \pi^2\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} (x-\pi)^2\cos nx\,dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} \pi^2\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} (x^2-2x\pi+\pi^2)\cos nx\,dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} \pi^2\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} x^2\cos nx\,dx - \int_{0}^{\pi} 2x\pi\cos nx\,dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} \pi^2\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} x^2\cos nx\,dx - \int_{0}^{\pi} 2x\pi\cos nx\,dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{n}\int_{-n\pi}^{n\pi} \cos u\,du + \frac{1}{n}\int_{0}^{n\pi} \left(\frac{u}{n}\right)^2\cos u\,du - \frac{1}{n}\int_{0}^{n\pi} 2\left(\frac{u}{n}\right)\pi\cos u\,du\right] \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[\pi^2\int_{-n\pi}^{n\pi} \cos u\,du + \frac{1}{n^2}\int_{0}^{n\pi} u^2\cos u\,du - \frac{2\pi}{n}\int_{0}^{n\pi} u\cos u\,du\right]
\end{aligned}$$

donde

$$\pi^2\int_{-n\pi}^{n\pi} \cos u\,du = 2\sin(n\pi)$$

con

$$\int_{0}^{n\pi} u^2\cos u\,du = \left(\pi^2 n^2 - 2\right)\sin(n\pi) + 2n\pi\cos(n\pi)$$

y

$$\int_{0}^{n\pi} u\cos u\,du = n\pi\sin(n\pi) + \cos(n\pi) - 1$$

por tanto,

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{n\pi}\left[\pi^2\int_{-n\pi}^{n\pi} \cos u\,du + \frac{1}{n^2}\int_{0}^{n\pi} u^2\cos u\,du - \frac{2\pi}{n}\int_{0}^{n\pi} u\cos u\,du\right] \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[\pi^2\cdot 2\sin(n\pi) + \frac{1}{n^2}\cdot\left[\left(\pi^2n^2-2\right)\sin(n\pi) + 2n\pi\cos(n\pi)\right] - \frac{2\pi}{n}\cdot\left[n\pi\sin(n\pi)+\cos(n\pi)-1\right]\right] \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[2\pi^2\sin(n\pi) + \pi^2\sin(n\pi) - \frac{2}{n^2}\sin(n\pi) + \frac{2\pi}{n}\cos(n\pi) - 2\pi^2\sin(n\pi) - \frac{2\pi}{n}\cos(n\pi) + \frac{2\pi}{n}\right] \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[\pi^2\sin(n\pi) - \frac{2}{n^2}\sin(n\pi) + \frac{2\pi}{n}\right] \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[\frac{n^3\pi^2\sin(n\pi) + 2n^2\pi - 2n\sin(n\pi)}{n^3}\right] \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[\frac{0 + 2n^2\pi - 0}{n^3}\right] \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[\frac{2n^2\pi}{n^3}\right] \\
&= \frac{2}{n^2}
\end{aligned}$$

pues, $\sin(n\pi) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Notemos que la función f es monotóna decreciente, en particular es de variación acotada. Luego, por el teorema de Jordan al ser f continua en $]-\pi,\pi]$ se sigue que la serie de Fourier de f en x converge a $f(x)$ para todo $x \in]-\pi, \pi]$. Esto es:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kx + b_k \sin kx]$$

en particular, en $x = 0$:

$$\begin{aligned}
f(0) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \\
&= \frac{2\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} \\
\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{1}{2}\left[\pi^2 - \frac{2\pi^2}{3}\right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{3} \\
&= \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}$$

Para la segunda parte, notemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n)^2}\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} &= \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
&= \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} \\
&= \frac{\pi^2}{8}
\end{aligned}$$

Por ende,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1-1}}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{(2n)^2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-2}}{(2n-1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n^2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
&= \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} \\
&= \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} \\
&= \frac{\pi^2[3-1]}{24} \\
&= \frac{\pi^2}{12}
\end{aligned}$$

$\square$

Ejercicio 3.1.4
Pruebe que
$$\frac{1}{3}x(\pi - x)(\pi - 2x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{n^3}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi.$$
Deduzca el valor de
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}.$$

Demostración:

Considere la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:
$$g(x) = \frac{1}{3}x(\pi - x)(\pi - 2x), \quad \forall x \in [0, \pi[$$
y extiéndase por periodicidad a todo $\mathbb{R}^+$ y hágase
$$g(x) = -g(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^-$$
. Afirmamos que g es continua en $\mathbb{R}$. En efecto, ya se tiene que g es continua en $]0, \pi[$, por lo cual para ver que es continua en $\mathbb{R}$ basta con ver que $g(0) = g(\pi)$ (en particular se tiene que g es π-periódica, luego también es 2π-periódica). Veamos que
$$g(0) = 0 = g(\pi)$$
luego, g es continua en $\mathbb{R}$. Además, g es C^1 (e casi todo $\mathbb{R}$), luego de variación acotada en $[-\pi, \pi]$. Por el Teorema de Jordan, la serie de Fourier de g converge a g uniformemente en $\mathbb{R}$, en particular lo hace puntualmente en el intervalo $[0, \pi]$. Calculemos los coeficientes de Fourier de g.

Como g se definió de tal forma que fuese impar, se sigue que
$$a_k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

y, para $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\sin kx\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{3}x(\pi-x)(\pi-2x)\sin kx\,dx \\
&= \frac{2}{3\pi}\int_0^\pi (\pi^2 x - 3\pi x^2 + 2x^3)\sin kx\,dx \\
&= \frac{2}{3\pi}\left[\pi^2\int_0^\pi x\sin kx\,dx - 3\pi\int_0^\pi x^2\sin kx\,dx + 2\int_0^\pi x^3\sin kx\,dx\right] \\
&= \frac{2}{3\pi}\left[\pi^2\left[\frac{\sin k\pi - k\pi\cos k\pi}{k^2}\right] - 3\pi\left[\frac{(2-k^2\pi^2)\cos k\pi + 2k\pi\sin k\pi - 2}{k^3}\right]\right. \\
&\left.+2\left[\frac{3(k^2\pi^2-2)\sin k\pi + k\pi(6-k^2\pi^2)\cos k\pi}{k^4}\right]\right] \\
&= \frac{2}{3\pi}\left[\pi^2\left[\frac{-k\pi(-1)^k}{k^2}\right] - 3\pi\left[\frac{(2-k^2\pi^2)(-1)^k - 2}{k^3}\right] + 2\left[\frac{k\pi(6-k^2\pi^2)(-1)^k}{k^4}\right]\right] \\
&= \frac{2}{3\pi}\left[\frac{\pi^3(-1)^{k+1}}{k} + \frac{3\pi(2-k^2\pi^2)(-1)^{k+1} + 6\pi}{k^3} + \frac{2k\pi(6-k^2\pi^2)(-1)^k}{k^4}\right] \\
&= \frac{2}{3\pi}\left[\frac{\pi^3k^3(-1)^{k+1}}{k^4} + \frac{3k\pi(2-k^2\pi^2)(-1)^{k+1} + 6k\pi}{k^4} + \frac{2k\pi(6-k^2\pi^2)(-1)^k}{k^4}\right] \\
&= \frac{2}{3k^4\pi}\left[\pi^3k^3(-1)^{k+1} + 3k\pi(2-k^2\pi^2)(-1)^{k+1} + 6k\pi + 2k\pi(6-k^2\pi^2)(-1)^k\right] \\
&= \frac{2}{3k^4\pi}\left[\pi^3k^3(-1)^{k+1} + 6k\pi(-1)^{k+1} + 3k^3\pi^3(-1)^k + 6k\pi + 12k\pi(-1)^k + 2k^3\pi^3(-1)^{k+1}\right] \\
&= \frac{2}{3k^4\pi}\left[3k^3\pi^3(-1)^{k+1} + 3k^3\pi^3(-1)^k + 6k\pi + 6k\pi(-1)^k\right] \\
&= \frac{2}{3k^4\pi}\left[6k\pi + 6k\pi(-1)^k\right] \\
&= \frac{4}{k^3}\left[1 + (-1)^k\right]
\end{aligned}$$

si $k = 2m-1$ con $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
b_{2m-1} &= \frac{4}{(2m-1)^3}\left[1 + (-1)^{2m-1}\right] \\
&= \frac{4}{(2m-1)^3}[1-1] \\
&= 0
\end{aligned}$$

y,si $k = 2m$ con $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
b_{2m} &= \frac{4}{(2m)^3}\left[1 + (-1)^{2m}\right] \\
&= \frac{8}{8m^3} \\
&= \frac{1}{m^3}
\end{aligned}$$

Por ende, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}x(\pi-x)(\pi-2x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}\sin 2nx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{n^3}, \quad \forall 0 \leqslant x \leqslant \pi
\end{aligned}$$

Para la otra parte, recuerde que

$$\sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n$$

■

Ejercicio 3.1.5
Haga lo siguiente:

i. **Pruebe** que

$$\int_0^\pi \log\sin\frac{x}{2}dx = -\pi\log 2.$$

Sugerencia. Haga el cambio de variables $x = 2t$ y escriba $\sin t = 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}$.

ii. **Muestre** que

$$-\log\left|2\sin\frac{x}{2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}, \qquad \text{si } x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Sugerencia. Use el inciso (i) para probar que $a_0 = 0$. A fin de calcular a_n para $n \in \mathbb{N}$, escriba $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \log\cos\frac{x}{2}dx$, efectúe una integración por partes y transforme el nuevo integrando de suerte que aparezca el núcleo de Dirichlet.

iii. **Deduzca** de (ii) la fórmula

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

iv. **Desarrolle** en serie de Fourier la función

$$x \mapsto \log\left|2\cos\frac{x}{2}\right|$$

Solución:
De (i): (justificar porqué esa función es integrable). Veamos que

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \log\sin\frac{x}{2}\,dx &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin t\,dt \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\left(2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\right)\,dt \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\log 2 + \log\sin\frac{t}{2} + \log\cos\frac{t}{2}\right]\,dt \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\log 2 + \log\sin\frac{t}{2} + \log\cos\frac{t}{2}\right]\,dt \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log 2\,dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin\frac{t}{2}\,dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\cos\frac{t}{2}\,dt \\
&= \pi\log 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin\frac{t}{2}\,dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\cos\frac{t}{2}\,dt
\end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos\frac{t}{2}\,dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right)\,dt \\
&= \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} -\log\sin\left(\frac{u}{2}\right)\,dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log\sin\left(\frac{u}{2}\right)\,dt
\end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $u = \pi - t$. Por ende,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \log\sin\frac{x}{2}\,dx &= \pi\log 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\frac{t}{2}\,dt + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log\sin\frac{u}{2}\,du \\
&= \pi\log 2 + 2\int_0^{\pi} \log\sin\frac{x}{2}\,dx \\
\Rightarrow \int_0^{\pi} \log\sin\frac{x}{2}\,dx &= -\pi\log 2
\end{aligned}$$

De (ii): Por lo anterior, $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}$ donde $f(x) = -\log\left|2\sin\frac{x}{2}\right|$ para todo $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$. Ahora, como f es par, se tiene que

$$b_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ahora, veamos que

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx \\
&= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} -\log\left|2\sin\frac{x}{2}\right|\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\log 2 + \log\sin\frac{x}{2}\right]\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\log 2 + \int_0^{\pi}\log\sin\frac{x}{2}\right]\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\pi\log 2 - \pi\log 2\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ahora, si $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
a_n &= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \log\left|2\sin\frac{x}{2}\right|\cos nx\,dx \\
&= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \log\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\cos nx\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-\log\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2n}\int_0^{\pi}\frac{\cos\frac{x}{2}\sin nx}{\sin\frac{x}{2}}\,dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi}\frac{\cos\frac{x}{2}\sin nx}{\sin\frac{x}{2}}\,dx
\end{aligned}$$

pero,

$$\sin A\cos B = \frac{1}{2}\left[\sin(A+B) + \sin(A-B)\right]$$

Por ende,

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2\pi n}\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x + \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}\,dx \\
&= \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[D_n(x) + D_{n-1}(x)\right]\,dx \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

De (iii): Veamos la convergencia (usar el teorema de Carleson y más cosas), de donde se deduce el hecho sorprendente que

$$\int_0^{\pi} \left(\log\left|2\cos\frac{x}{2}\right|\right)^2\,dx = \frac{\pi^2}{6}$$

$\square$

Ejercicio 3.1.6
Sea $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{R})$ y sea $x \in \mathbb{R}$. Se supone que para algúun $\alpha > 0$ se cumple

$$f(x+t) - f(x) = O(|t^\alpha|), \quad \text{cuando} \quad t \to 0$$

Demuestre que la serie de Fourier de f en x converge a $f(x)$.

Demostración:
Como

$$f(x+t) - f(x) = O(|t^\alpha|), \quad \text{cuando} \quad t \to 0$$

entonces existe $A > 0$ y $\delta > 0$ tales que

$$
\begin{aligned}
|t| < \delta &\Rightarrow |f(x+t) - f(x)| \leqslant A\,|t|^\alpha \\
&\Rightarrow -A\,|t|^\alpha \leqslant f(x+t) - f(x) \leqslant A\,|t|^\alpha
\end{aligned}
$$

Para ver que la serie de Fourier de f en x converge a $f(x)$, usaremos el Teorema Fundamental para la convergencia puntual de una serie de Fourier. Además, si $m \in \mathbb{N}$

$$-A\frac{|t|^\alpha}{t}\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t\,dt \leqslant \frac{f(x+t)-f(x)}{t}\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t\,dt \leqslant A\frac{|t|^\alpha}{t}\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t\,dt$$

Para todo $0 < |t| < \text{mín}\{\delta, \pi\}$. Considere ahora la función $t \mapsto \frac{|t|^\alpha}{t}$ (llamémosla g) definida c.t.p. en $\mathbb{R}$. Esta función es la diferencia de dos funciones monótonas en $[-\pi, \pi]$, luego de variación acotada. Además es integrable. En efecto,

$$|g(t)| = |t|^{\alpha-1}$$

donde $t \mapsto |t|^{\alpha-1}$ es integrable en $[-\pi, \pi]$ pues $\alpha - 1 > -1$. Luego, por el Teorema de Jordan la serie de Fourier de g en x converge a $g(x)$. Así, por el Teorema Fundamnetal para la convergencia puntual de una serie de Fourier, se tiene que existe $0 < \gamma < \pi$ tal que

$$\lim_{m\to\infty}\int_{-\gamma'}^{\gamma'} \frac{|t|^\alpha}{t}\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t\,dt = 0$$

Tomemos $\delta' = \text{mín}\{\delta, \gamma\}$. Se tiene que

$$-A\frac{|t|^\alpha}{t}\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t\,dt \leqslant \frac{f(x+t)-f(x)}{t}\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t\,dt \leqslant A\frac{|t|^\alpha}{t}\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t\,dt$$

$\blacksquare$

Ejercicio 3.1.7
Por el problema **3.1.1** se sabe que

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad \forall x \in]0, 2\pi[$$

i. Póngase

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}.$$

Muestre que

$$\frac{x}{2} + s_n(x) = \pi \int_0^x D_n(t)dt,$$

donde D_n es el núcleo de Dirichlet.

ii. Si $x \in]0, 2\pi[$, **pruebe** que

$$\lim_{n\to\infty} \left[\pi \int_0^x D_n(t)dt - \int_0^x \frac{\sin nt}{t} dt \right] = 0.$$

iii. **Deduzca** una nueva demostración de la fórmula

$$\int_0^{\to\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Demostración:
De (i): Recordemos que el núcleo de Dirichlet está dado por:

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-m}^{m} e^{ikx}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por ende,

$$\begin{aligned}
\int_0^x D_n(t)\,dt &= \int_0^x \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-m}^{m} e^{ikt}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^x \left[1 + \sum_{k=-m, k\neq 0}^{m} e^{ikt}\right] dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[t\Big|_0^x + \sum_{k=-m, k\neq 0}^{m} \frac{e^{ikt}}{ik}\Big|_0^x \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[x + \sum_{k=-m, k\neq 0}^{m} \frac{e^{ikx}-1}{ik} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[x + \sum_{k=-m, k\neq 0}^{m} \frac{e^{ikx}}{ik} - \underbrace{\sum_{k=-m, k\neq 0}^{m} \frac{1}{ik}}_{=0} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[x + \sum_{k=-m, k\neq 0}^{m} \frac{\cos ikx + \sin ikx}{ik} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[x + \sum_{k=-m}^{-1} \frac{\cos ikx + \sin ikx}{ik} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\cos ikx + i \sin ikx}{ik} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[x + \sum_{k=1}^{m} \frac{\cos(-ikx) + i \sin(-ikx)}{-ik} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\cos ikx + i \sin ikx}{ik} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[x + \sum_{k=1}^{m} \frac{-\cos ikx + i \sin ikx}{ik} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\cos ikx + i \sin ikx}{ik} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[x + 2\sum_{k=1}^{m} \frac{\sin ikx}{k} \right] \\
&= \frac{x}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{m} \frac{\sin ikx}{k}
\end{aligned}$$

luego,

$$\pi \int_0^x D(t)\,dt = \frac{x}{2} + s_n(x)$$

De (ii): Recordemos que podemos escribir al Núcleo de Dirichlet como:

$$D_m(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{t}{2}}, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Por tanto, si $m \in \mathbb{N}$ y $x \in]0, 2\pi[$:

$$
\begin{aligned}
\left|\pi \int_0^x D_m(t)\,dt - \int_0^x \frac{\sin mt}{t}\,dt\right| &= \left|\frac{1}{2}\int_0^x \frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt - \int_0^x \frac{\sin mt}{t}\,dt\right| \\
&= \left|\frac{1}{2}\int_0^x \frac{\sin mt\cos\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{2}\cos mt}{\sin\frac{t}{2}}\,dt - \int_0^x \frac{\sin mt}{t}\,dt\right| \\
&= \left|\int_0^x \left[\frac{\sin mt}{2\tan\frac{t}{2}} + \frac{1}{2}\cos mt\right]\,dt - \int_0^x \frac{\sin mt}{t}\,dt\right| \\
&= \left|\frac{1}{2}\int_0^x \cos mt\,dt + \int_0^x \left[\frac{\sin mt}{2\tan\frac{t}{2}} - \frac{\sin mt}{t}\right]\,dt\right| \\
&= \left|\frac{1}{2m}\int_0^{mx} \cos u\,du + \int_0^x \left[\frac{1}{2\tan\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right]\sin mt\,dt\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2m}\left|\sin u\Big|_0^{mx}\right| + \left|\int_0^x \left[\frac{1}{2\tan\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right]\sin mt\,dt\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2m}\left|\sin mx\right| + \left|\int_0^x \left[\frac{1}{2\tan\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right]\sin mt\,dt\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2m} + \left|\int_0^x \left[\frac{1}{2\tan\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right]\sin mt\,dt\right|
\end{aligned}
$$

Pero, la función

$$t \mapsto \frac{1}{2\tan\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}$$

es integrable en $]0, x[$. En efecto, como es continua en $[0, x]$ haciendo que valga 0 en $t = 0$, ya que

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{2\tan\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right] = 0$$

hace que la función sea continua, luego al ser continua en un compacto es integrable. Así, por el teorema de Riemman-Lebesgue se sigue que

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^x \left[\frac{1}{2\tan\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right]\sin mt\,dt = 0$$

Por tanto, para $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geqslant N$:

$$\frac{1}{2m} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \left|\int_0^x \left[\frac{1}{2\tan\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right]\sin mt\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

luego,

$$
\begin{aligned}
m \geqslant N \Rightarrow \left|\pi \int_0^x D_m(t)\,dt - \int_0^x \frac{\sin mt}{t}\,dt\right| &\leqslant \frac{1}{2m} + \left|\int_0^x \left[\frac{1}{2\tan\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right]\sin mt\,dt\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

así,

$$\lim_{m\to\infty}\left|\pi \int_0^x D_m(t)\,dt - \int_0^x \frac{\sin mt}{t}\,dt\right| = 0$$

De (iii): Como dado $x \in]0, 2\pi[$ se tiene que

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

y,
$$\lim_{m\to\infty}\left|\pi\int_0^x D_m(t)\,dt-\int_0^x\frac{\sin mt}{t}\,dt\right|=0$$
entonces para $x\in]0,2\pi[$ y $\varepsilon>0$ existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $m\geqslant N$ implica que
$$\left|\frac{\pi-x}{2}-\sum_{n=1}^{m}\frac{\sin nx}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}\quad\text{y}\quad\left|\pi\int_0^x D_m(t)\,dt-\int_0^x\frac{\sin mt}{t}\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$
luego, si $m\geqslant N$ se tiene que
$$\begin{aligned}\left|\pi\int_0^x D_m(t)\,dt-\int_0^x\frac{\sin mt}{t}\,dt\right|&=\left|\frac{x}{2}+s_n(x)-\int_0^x\frac{\sin mt}{t}\,dt\right|\\&=\left|\frac{x}{2}+\sum_{k=1}^{m}\frac{\sin kx}{k}-\int_0^x\frac{\sin mt}{t}\,dt\right|\\&=\left|\frac{-\pi}{2}+\frac{x}{2}+\sum_{k=1}^{m}\frac{\sin kx}{k}+\frac{\pi}{2}-\int_0^x\frac{\sin mt}{t}\,dt\right|\\&=\left|-\left(\frac{\pi-x}{2}-\sum_{k=1}^{m}\frac{\sin kx}{k}\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\int_0^x\frac{\sin mt}{t}\,dt\right)\right|\\&\geqslant\left|\int_0^x\frac{\sin mt}{t}\,dt-\frac{\pi}{2}\right|-\left|\frac{\pi-x}{2}-\sum_{k=1}^{m}\frac{\sin kx}{k}\right|\end{aligned}$$
Por tanto,
$$\begin{aligned}\left|\int_0^x\frac{\sin mt}{t}\,dt-\frac{\pi}{2}\right|&\leqslant\left|\pi\int_0^x D_m(t)\,dt-\int_0^x\frac{\sin mt}{t}\,dt\right|+\left|\frac{\pi-x}{2}-\sum_{k=1}^{m}\frac{\sin kx}{k}\right|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\\&=\varepsilon\end{aligned}$$
por ende,
$$\lim_{m\to\infty}\int_0^x\frac{\sin mt}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}$$
Pero, por el T.C.V. se tiene que para todo $m\in\mathbb{N}$:
$$\begin{aligned}&\int_0^x\frac{\sin mt}{t}\,dt\overset{u=mt}{=}\int_0^{mx}\frac{\sin u}{\frac{u}{m}}\,\frac{du}{m}\\\Rightarrow&\int_0^x\frac{\sin mt}{t}\,dt\overset{u=mt}{=}\int_0^{mx}\frac{\sin u}{u}\,du\end{aligned}$$
por ende,
$$\lim_{m\to\infty}\int_0^{mx}\frac{\sin u}{u}\,du=\frac{\pi}{2}$$
Para todo $x\in]0,2\pi[$. Veamos ahora que
$$\int_0^{\to\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}$$
En efecto, sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión que diverge a infinito. Para probar el resultado basta con ver que
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{x_n}\frac{\sin t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}$$
■

Ejercicio 3.1.8
Sea $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ y sean $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ los coeficientes de Fourier de f. **Demuestre** que

$$\int_0^x f = c + c_0 x + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{c_k e^{ikx}}{ik}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

donde c es una constante, la convergencia siendo uniforme en $\mathbb{R}$.

Sugerencia. Considere la función $F(x) = \int_0^x (f - c_0)$.

Deduzca que los coeficientes de Fourier b_n de cualquier función $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ satisfacen la condición de que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$$

es convergente. **Concluya** que la aplicación $f \mapsto \{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ no es una aplicación suprayectiva de $\mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ en $c_0(\mathbb{Z})$.

Demostración:
Como $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}$, entonces la función

$$F(x) = \int_0^x (f(t) - c_0)\ dt$$

es una función absolutamente continua y de periodicidad 2π, pues

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - c_0)\, dt = 0$$

En efecto, veamos que

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - c_0)\, dt &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt + 2\pi c_0 \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt + 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt \\ &= 0\end{aligned}$$

En particular, es de variación acotada y continua (por ser absolutamente continua), luego por el Teorema de Jordan la serie de Fourier de F en x converge puntualmente a F en x para todo $x \in \mathbb{R}$, esto es

$$\begin{aligned}F(x) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c'_k e^{ikx}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \int_0^x (f(t) - c_0) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c'_k e^{ikx}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \int_0^{\pi} f(t)\, dt &= c_0 x + \sum_{k\in\mathbb{Z}} c'_k e^{ikx}, \quad \forall x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

siendo $\{c'_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ los coeficientes de Fourier de F. Calculemos estos coeficientes, para ello, calculemos los de $f - c_0$ y recordemos que

$$c_k = \frac{\tilde{c_k}}{ik}$$

Siendo $\{\tilde{c_k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ los coeficientes de Fourier de $f - c_0$, donde estos son

$$\tilde{c_k} = \begin{cases} c_k & \text{si} \quad k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \\ c & \text{si} \quad k = 0 \end{cases}$$

Por tanto,

$$\int_0^x f(t)\,dt = c + xc_0 + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{c_k e^{ikx}}{ik}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Veamos ahora que en particular para $x = 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= c + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{c_k}{ik} \\ \Rightarrow -c &= \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{c_k}{ik} \\ &= \sum_{k\in 1}^{\infty} \frac{c_k}{ik} + \sum_{k\in 1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{-ik} \\ &= \sum_{k\in 1}^{\infty} \frac{c_k}{ik} + \sum_{k\in 1}^{\infty} \frac{-c_{-k}}{ik} \\ &= \frac{1}{i} \cdot \sum_{k\in 1}^{\infty} \frac{c_k - c_{-k}}{k} \\ &= \frac{1}{i} \cdot \sum_{k\in 1}^{\infty} \frac{b_k}{k} \end{aligned}$$

pues, la serie $\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{c_k}{ik}$ es convergente. Por tanto, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$$

es convergente y converge a $-ic$. ■

Ejercicio 3.1.9
Haga lo siguiente:

i. Sea α un número real no entero. **Pruebe** que

$$\pi \cos \alpha x = 2\alpha \sin \pi\alpha \left(\frac{1}{2\alpha^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{\alpha^2 - n^2} \right), \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

De ahí obtenga las fórmulas clásicas

$$\frac{\pi\alpha}{\sin \pi\alpha} = 1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} \quad \text{y} \quad \pi\alpha \cot \pi\alpha = 1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}.$$

ii. Sea $x \in]0,1[$. **Pruebe** que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{n^2 - \alpha^2}$$

se puede integrar término por término en el intervalo $[0, x]$. De la última fórmula del inciso (i) **deduzca** la fórmula

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right), \quad \forall x \in]-1, 1[.$$

Demostración:

■

Ejercicio 3.1.10
Se supone que la serie de Fourier de una función $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{K})$ converge en el sentido de Cesáro uniformemente en $\mathbb{R}$. **Pruebe** que f es equivalente a una función continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{K}$.

Demostración:

■

Ejercicio 3.1.11
Sea $f \in \mathcal{C}^{2\pi}(\mathbb{R})$ la función

$$f(x) = \pi - |2x|\,, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$$

Aplique el teorema 3.9 para mostrar que la serie de Fourier de f converge a f uniformemente en $\mathbb{R}$. **Calcule**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}.$$

Solución:

□

Ejercicio 3.1.12
Sea $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{R})$ la función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{si} & -\pi \leqslant x < 0, \\ x^2 & \text{si} & 0 \leqslant x < \pi. \end{array} \right\}$$

Calcule la serie de Fourier de f. Usando el teorema fundamental para la convergencia de una serie de Fourier, **muestre** que la serie de Fourier de f converge a alguna suma $s(x)$ para todo $x \in [-\pi, \pi]$. **Calcule** $s(x)$ para todo $x \in [-\pi, \pi]$.

Solución:

□

Ejercicio 3.1.13
Haga lo mismo que en el problema **3.12** con $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{R})$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -\pi \leqslant x < 0, \\ x & \text{si} \quad 0 \leqslant x < \pi. \end{cases}$$

Solución:

□