

Lista Ejercicios Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

6 de junio de 2024

Índice general

1. Lista 4

2

Capítulo 1

Lista 4

Ejercicio 1.0.1

Haga lo siguiente:

- I. Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Defina $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$P(x_1, \dots, x_n) = e^{-\sum_{k=1}^n |x_k|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Fije $\nu \in \mathbb{N}$, **demuestre** la fórmula:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x) P\left(\frac{x}{\nu}\right) dx = (2\nu)^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{(1 + \nu^2 x_1^2) \cdots (1 + \nu^2 x_n^2)} dx_1 \cdots dx_n$$

- II. **Deduzca** que si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \cap \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ y $\mathcal{F}f \geq 0$, entonces $\mathcal{F}f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

Sugerencia. Aplique el teorema de Beppo-Levi.

Demostración:

De (i): Defina $g(x) = P\left(\frac{x}{\nu}\right)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Veamos que $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} P\left(\frac{x}{\nu}\right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} P\left(\frac{x_1}{\nu}, \dots, \frac{x_n}{\nu}\right) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{k=1}^n \left|\frac{x_k}{\nu}\right|} dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{\nu} \sum_{k=1}^n |x_k|} dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x_1|}{\nu}} \cdots e^{-\frac{|x_n|}{\nu}} dx_1 \cdots dx_n \\ &= \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x_1|}{\nu}} dx_1\right) \cdots \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x_n|}{\nu}} dx_n\right)}_{n\text{-veces}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|t|}{\nu}} dt\right)^n \\ &< \infty \end{aligned}$$

Usando Fubini para funciones medibles no negativas. Por tanto, por el Teorema de transferencia se sigue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x) P\left(\frac{x}{\nu}\right) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x) g(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \mathcal{F}g(x) dx \end{aligned}$$

Calculemos $\mathcal{F}g(x)$. Como $g(x) = P\left(\frac{x}{\nu}\right)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\mathcal{F}g(x) = \nu^n \mathcal{F}P(\nu x)$$

(por una proposición), donde

$$\begin{aligned} \mathcal{F}P(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y \rangle} P(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i \sum_{k=1}^n x_k y_k} e^{-\sum_{k=1}^n |y_k|} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{k=1}^n (|y_k| + i x_k y_k)} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y_1| - i x_1 y_1} \cdots e^{-|y_n| - i x_n y_n} dy_1 \cdots dy_n \\ &= \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y_1| - i x_1 y_1} dy_1 \right) \cdots \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y_n| - i x_n y_n} dy_n \right)}_{n\text{-veces}} \\ &= \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t| - i x_1 t} dt \right) \cdots \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t| - i x_n t} dt \right)}_{n\text{-veces}} \\ &= \mathcal{F}h(x_1) \cdots \mathcal{F}h(x_n) \end{aligned}$$

donde $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es la función tal que $t \mapsto e^{-|t|}$ y, se sabe que

$$\mathcal{F}h(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}P(x) &= \frac{2^n}{(1+x_1^2) \cdots (1+x_n^2)} \\ \Rightarrow \mathcal{F}P(\nu x) &= \frac{2^n}{(1+\nu^2 x_1^2) \cdots (1+\nu^2 x_n^2)} \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x) P\left(\frac{x}{\nu}\right) dx &= \nu^n \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \mathcal{F}P(\nu x) dx \\ &= \nu^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2^n f(x_1, \dots, x_n)}{(1+\nu^2 x_1^2) \cdots (1+\nu^2 x_n^2)} dx_1 \cdots dx_n \\ &= (2\nu)^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{(1+\nu^2 x_1^2) \cdots (1+\nu^2 x_n^2)} dx_1 \cdots dx_n \end{aligned}$$

De (ii): Para cada $\nu \in \mathbb{N}$ defina la función $g_\nu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ como sigue:

$$g_\nu(x) = \mathcal{F}f(x) P\left(\frac{x}{\nu}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Esta es una sucesión creciente de funciones en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, pues si $\nu \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\nu+1} \sum_{k=1}^n |x_k| &\leq \frac{1}{\nu} \sum_{k=1}^n |x_k|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\
\Rightarrow -\frac{1}{\nu} \sum_{k=1}^n |x_k| &\leq -\frac{1}{\nu+1} \sum_{k=1}^n |x_k|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\
\Rightarrow e^{\frac{1}{\nu} \sum_{k=1}^n |x_k|} &\leq e^{-\frac{1}{\nu+1} \sum_{k=1}^n |x_k|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\
\Rightarrow P\left(\frac{x}{\nu}\right) &\leq P\left(\frac{x}{\nu+1}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\
\Rightarrow \mathcal{F}f(x)P\left(\frac{x}{\nu}\right) &\leq \mathcal{F}f(x)P\left(\frac{x}{\nu+1}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\
\Rightarrow g_\nu &\leq g_{\nu+1}
\end{aligned}$$

pues, $\mathcal{F}f \geq 0$. Además, como $f \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, entonces

$$f \leq \mathcal{N}_\infty(f) \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n$$

luego,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} g_\nu(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x)P\left(\frac{x}{\nu}\right) dx \\
&= (2\nu)^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{(1 + \nu^2 x_1^2) \cdots (1 + \nu^2 x_n^2)} dx_1 \cdots dx_n
\end{aligned}$$

Hagamos el cambio de variable $(y_1, \dots, y_n) = (\frac{x_1}{\nu}, \dots, \frac{x_n}{\nu})$, se tiene que

$$\begin{aligned}
(2\nu)^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{(1 + \nu^2 x_1^2) \cdots (1 + \nu^2 x_n^2)} dx_1 \cdots dx_n &= (2\nu)^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\nu y_1, \dots, \nu y_n)}{(1 + y_1^2) \cdots (1 + y_n^2)} \frac{dy_1 \cdots dy_n}{\nu^n} \\
&= 2^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\nu y_1, \dots, \nu y_n)}{(1 + y_1^2) \cdots (1 + y_n^2)} dy_1 \cdots dy_n \\
&= 2^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathcal{N}_\infty(f)}{(1 + y_1^2) \cdots (1 + y_n^2)} dy_1 \cdots dy_n \\
&= 2^n \mathcal{N}_\infty(f) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dy_1 \cdots dy_n}{(1 + y_1^2) \cdots (1 + y_n^2)} \\
\Rightarrow \left| \int_{\mathbb{R}^n} g_\nu(x) \right| &= 2^n \mathcal{N}_\infty(f) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dy_1 \cdots dy_n}{(1 + y_1^2) \cdots (1 + y_n^2)}
\end{aligned}$$

pues $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dy_1 \cdots dy_n}{(1+y_1^2) \cdots (1+y_n^2)} < \infty$ y $\int_{\mathbb{R}^n} g_\nu(x) \geq 0$. Por tanto, por Beppo-Levi se sigue que existe una función $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ tal que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} g_\nu = g \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n$$

Pero, también se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{\nu \rightarrow \infty} g_\nu(x) &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{F}f(x)P\left(\frac{x}{\nu}\right) \\
&= \mathcal{F}f(x) \lim_{\nu \rightarrow \infty} P\left(\frac{x}{\nu}\right) \\
&= \mathcal{F}f(x)P(0, \dots, 0) \\
&= \mathcal{F}f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

Entonces $\mathcal{F}f = g$ c.t.p. en \mathbb{R}^n , luego $\mathcal{F}f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Más aún,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x) dx &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} 2^n \mathcal{N}_\infty(f) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dy_1 \cdots dy_n}{(1 + y_1^2) \cdots (1 + y_n^2)} \\
&= 2^n \mathcal{N}_\infty(f) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dy_1 \cdots dy_n}{(1 + y_1^2) \cdots (1 + y_n^2)}
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.0.2 (Problema 2 Lista 6 Análisis Matemático II)

Pruebe que si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, entonces

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f \right| = \int_{\mathbb{R}^n} |f|$$

si y sólo si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ fijo tal que $f = e^{i\alpha} |f|$ c.t.p. en \mathbb{R}^n .

Sugerencia. Suponiendo que $\left| \int_{\mathbb{R}^n} f \right| = \int_{\mathbb{R}^n} |f|$, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} f = e^{i\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f|$. Escriba

$$e^{-i\alpha} f = g + ih$$

donde g y h son funciones reales.

Demostración:**Ejercicio 1.0.3**

Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Se supone que $f(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. **Pruebe** que si $x \neq 0$, entonces

$$\mathcal{F}f(0) > |\mathcal{F}f(x)|$$

Sugerencia. Una vez que ha demostrado $|\mathcal{F}f(x)| \leq \mathcal{F}f(0)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, Para demostrar la desigualdad estricta para $x \neq 0$ proceda por reducción al absurdo y use el Problema 2 de la Lista 6 de Análisis Matemático II.

Demostración:

Notemos que como $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene en particular que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Primero probaremos que

$$\mathcal{F}f(0) \geq |\mathcal{F}f(x)|$$

es decir:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle 0|y\rangle} f(y) dy &\geq \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y) dy \right| \\ \iff \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy &\geq \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y) dy \right| \\ \iff \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy &\geq \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y) dy \right| \end{aligned}$$

pues $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Veamos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle} f(y) dy \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-i\langle x|y\rangle} f(y)| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-i\langle x|y\rangle}| |f(y)| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy \end{aligned} \tag{1.1}$$

lo que prueba el resultado. Para la desigualdad estricta suponga que existe $x \in \mathbb{R}^n$ no cero tal que

$$\mathcal{F}f(x) = \mathcal{F}f(0)$$

esto es

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y \rangle} f(y) dy \right| &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-i\langle x|y \rangle} f(y)| dy \end{aligned}$$

Por el ejercicio anterior existe $\alpha \in \mathbb{R}$ fijo tal que

$$e^{-i\langle x|y \rangle} f(y) = e^{i\alpha} |f(y)| = e^{i\alpha} f(y)$$

para casi todo $y \in \mathbb{R}^n$. En particular, tenemos que

$$f(y) (e^{-i\langle x|y \rangle} - e^{i\alpha}) = 0$$

para casi todo $y \in \mathbb{R}^n$. Como $f(y) > 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$e^{-i\langle x|y \rangle} - e^{i\alpha} = 0$$

nuevamente para casi todo $y \in \mathbb{R}^n$. Como las dos funciones involucradas son continuas y coinciden c.t.p. en \mathbb{R}^n , debe tenerse pues que

$$e^{-i\langle x|y \rangle} = e^{i\alpha}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

lo cual ocurre si y sólo si

$$e^{i(\langle x|y \rangle + \alpha)} = 1, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

es decir que

$$\langle x|y \rangle + \alpha = 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

como $x \neq 0$ en particular se tiene que

$$\langle x|x \rangle = -\alpha$$

y, además (tomando $y = 2x$):

$$2\langle x|x \rangle = -\alpha$$

pero esto sólo puede suceder si $\langle x|x \rangle = 0$, es decir que $x = 0_{\#c}$. Luego entonces

$$|\mathcal{F}f(x)| < \mathcal{F}f(0)$$

■

Ejercicio 1.0.4

Haga lo siguiente:

- I. Sean $a > 0$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. **Pruebe** que la función $x \mapsto (\cos \lambda x)/(x^2 + a^2)$ es integrable en $[0, \infty[$. **Muestre** que si $\lambda \neq 0$, la función $x \mapsto (x \sin \lambda x)/(x^2 + a^2)$ no es integrable en $[0, \infty[$, pero existe la integral impropia

$$\int_0^{\rightarrow \infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2} dx$$

Sugerencia. Muestre que

$$\left| \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2} \right| \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \left| \frac{\sin \lambda x}{x} \right|$$

Para probar la existencia de la integral impropia use los criterios de Abel.

- II. Recuerde que la función $x \mapsto (2a)/(x^2 + a^2)$ es la transformada de Fourier de la función $x \mapsto e^{-a|x|}$. Usando el teorema de inversión de Fourier, **demuestre** que

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-a|\lambda|}$$

III. Usando el inciso (ii), calcule la integral impropia

$$\int_0^{\rightarrow\infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2} dx$$

Sugerencia. Para $\lambda \neq 0$ defina

$$\Phi(\lambda) = \int_0^{\rightarrow\infty} \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} dx$$

Calcule $\Phi'(\lambda)$ primero suponiendo $\lambda > \lambda_0$, donde $\lambda_0 > 0$ es arbitrario fijo, de forma análoga para $\lambda < 0$ y finalmente para $\lambda = 0$.

Demostración:

Ejercicio 1.0.5

Sea H una matriz simétrica real $n \times n$ positiva definida, es decir, la forma cuadrática $\langle x | Hx \rangle$ sobre \mathbb{R}^n es positiva definida. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la función

$$f(x) = e^{-\langle Hx | x \rangle}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Demuestre que f es integrable y que

$$\mathcal{F}f(x) = \frac{\pi^{n/2}}{(\det H)^{1/2}} e^{-\frac{1}{4}\langle H^{-1}x | x \rangle}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Sugerencia. f es medible. Para ver que es integrable, pruebe que $\langle Hx | x \rangle \geq m\|x\|^2$, donde

$$m = \min_{x \in S} \{\langle Hx | x \rangle\} > 0$$

con $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$. Se sabe de álgebra que existe una matriz ortogonal U tal que $U^{-1}HU = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, donde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son números estrictamente positivos. En la integral $\mathcal{F}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x | y \rangle} e^{-\langle Hx | x \rangle} dy$ haga el cambio de variable $y = Uz$ siendo tal que $|\det U| = 1$, $\langle Ur | Us \rangle = \langle r | s \rangle$ (y lo análogo para U^{-1}) y observe que $(1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_n) = U^{-1}H^{-1}U$.

Demostración:

Ejercicio 1.0.6

Recuerde que si $f = \chi_{[-a, a]}$, entonces

$$\mathcal{F}f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin ax}{x}, \quad \forall x \neq 0$$

Deduzca la fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin ax}{x} \right)^2 dx = \pi a$$

Demostración:

Ejercicio 1.0.7

Haga lo siguiente:

- I. Sea $f(x) = \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) \chi_{[-a,a]}(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. **Pruebe** que

$$\mathcal{F}f(x) = a \left(\frac{\sin \frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}} \right)^2$$

- II. Usando $\mathcal{F}f$ **muestre** la fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin ax}{x} \right)^4 dx = \frac{2}{3} \pi a^3$$

- III. **Calcule** la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin ax}{x} \right)^3 dx$$

Sugerencia. Escriba $f(x) = \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) \chi_{[-a,a]}(x)$ y $g(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Aplique la identidad de Parseval

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f \mathcal{F}g = \langle \mathcal{F}f | \mathcal{F}g \rangle = \langle f | g \rangle = \int_{\mathbb{R}} fg$$

para deducir el resultado.

Solución:

□

Ejercicio 1.0.8

Sea $n \geq 2$ y $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la función $x \mapsto r(x) = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Sea $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ una función tal que $f \circ r$ es integrable en \mathbb{R}^n .

- I. **Pruebe** que la transformada de Fourier $\mathcal{F}(f \circ r)$ es una función radial.

Sugerencia. Si U es una matriz ortogonal $n \times n$, se tiene que $\mathcal{F}(f \circ r)(Ux) = \mathcal{F}(f \circ r)(x)$. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que $\|x\| = \|y\|$, siempre existe una matriz ortogonal U tal que $Ux = y$.

- II. **Muestre** que se cumple la **fórmula de Bochner**

$$\mathcal{F}(f \circ r)(x) = 2(n-1)\omega_{n-1} \int_0^\infty v_n(u(\|x\|)) f(u) u^{n-1} du, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

donde ω_{n-1} es el volumen de la bola euclídeana de radio uno en \mathbb{R}^{n-1} y v_n se define por la fórmula

$$v_n(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t \cos \theta) \sin^{n-2} \theta d\theta$$

Sugerencia. Según el inciso (i),

$$\mathcal{F}(f \circ r)(x) = \mathcal{F}(f \circ r)(\|x\|, 0, \dots, 0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\|y\|) e^{-i\|x\|y_1} dy_1 \cdots dy_n$$

Transforme esta integral por el Teorema de Fubini y exprese la integral con respecto a y_2, \dots, y_n como una integral simple. La doble integral resultante se transforma a coordenadas polares.

Solución:

□

Ejercicio 1.0.9

Haga lo siguiente:

- I. Sea $h : [0, \infty[\rightarrow 0\mathbb{C}$ una función integrable en $[0, \infty[$. Sea $a > 0$, **demuestre** que existe la integral impropia

$$\int_a^{\rightarrow\infty} \frac{dx}{x} \int_0^\infty h(y) \sin xy \, dy$$

Sugerencia. Justifique la inversión del orden de las integraciones.

- II. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e}x & \text{si } |x| < e \\ \frac{e \operatorname{sgn}(x)}{\log|x|} & \text{si } |x| \geq e \end{cases}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Muestre que, para $a > 0$ no existe la integral impropia

$$\int_a^{\rightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} \, dx$$

De este hecho y del inciso (i) **deduzca** que no existe $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tal que $f = \mathcal{F}g$. Así pues, la transformación de Fourier no es una aplicación suprayectiva de $L_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ en $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Solución:

□

Ejercicio 1.0.10

Haga lo siguiente:

- I. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función integrable en \mathbb{R} . Se supone que existe una función $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ localmente integrable en \mathbb{R} tal que

$$f(x) = f(0) + \int_0^x \varphi, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad |\varphi(x)| \underset{|x| \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{1}{|x|^m}\right)$$

donde $m > 2$. **Pruebe** que

$$|f(x)| \underset{|x| \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{1}{x^{m-1}}\right)$$

y que, para todo $x \in \mathbb{R}$, existen las sumas

$$\Phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(x+k) \quad \text{y} \quad F(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+k)$$

siendo la convergencia absoluta y uniforme en $[-1, 1]$, luego en \mathbb{R} . **Muestre** finalmente que

$$F(x) = F(0) + \int_0^x \Phi, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

F es una función periódica de periodo uno. **Demuestre** que los coeficientes de Fourier de F respecto al sistema O.N. $(e^{2\pi i n t})_{n \in \mathbb{Z}}$ son

$$\int_0^1 F(x) e^{-2\pi i n x} dx = \mathcal{F}f(2\pi n), \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Deduzca la fórmula Sumatoria de Poisson

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}f(x+k), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Aplicando la fórmula sumatoria de Poisson a la función $x \mapsto e^{-\alpha|x|}$ para $\alpha > 0$, obtenga el desarrollo

$$\coth x = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2 \pi^2}, \quad \forall x \geq 0$$

Se define la **función theta** por

$$\Theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}, \quad \forall x > 0$$

Aplicando la fórmula sumatoria de Poisson a la función $x \mapsto e^{-\alpha x^2}$ para $\alpha > 0$, **pruebe** la identidad

$$\Theta(x) = \sqrt{\frac{1}{x}} \Theta\left(\frac{1}{x}\right), \quad \forall x > 0$$

Solución:

□

Ejercicio 1.0.11

Haga lo siguiente:

- I. Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x < 0$. Para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\Im z \leq 0$ se define

$$\mathcal{F}f(x) = \int_0^{\infty} e^{-izx} f(x) dx$$

Pruebe que esta definición tiene sentido, que $\mathcal{F}f$ es continua en el semiplano cerrado $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im z \leq 0\}$ y holomorfa en el semiplano abierto $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im z < 0\}$.

Sugerencia. El teorema de derivación de funciones definidas por integrales continúa siendo válido al sustituir el intervalo I por un abierto de \mathbb{C} .

- II. Sean $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tales que $f(x) = g(x) = 0, \forall x < 0$. **Muestre** que para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\Im z \leq 0$ se tiene

$$\mathcal{F}(f * g)(z) = \mathcal{F}f(z) \mathcal{F}g(z)$$

- III. Sean f, g como en el inciso (ii). Se supone además que $\mathcal{F}(f * g) = 0$ c.t.p. en \mathbb{R} . **Demuestre** que $f = 0$ c.t.p. en \mathbb{R} o bien $g = 0$ c.t.p. en \mathbb{R} .

Sugerencia. Deduzca de (i) y (ii) que $\mathcal{F}f = 0$ o bien $\mathcal{F}g = 0$.

Solución:



Ejercicio 1.0.12

Solución:



Ejercicio 1.0.13

Solución:

