Lista 3 de Ejercicios Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

24 de abril de 2024

Índice general

Capítulo 3

Ejercicios

Ejercicio 3.1.1
Pruebe que, para todo $x \in]0, 2\pi[$,

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$$

Usando la identidad de Parseval, **demuestre** que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Demostración:

$\blacksquare$

Ejercicio 3.1.2
Sea $f \in \mathcal{L}_2^{2\pi}(\mathbb{R})$ y sean a_n, b_n los coeficientes de Fourier de f. **Pruebe** que

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x f(x) dx = \pi a_0 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}.$$

Demostración:

$\blacksquare$

Ejercicio 3.1.3
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de periodo 2π definida como

$$f(x) = \begin{cases} \pi^2 & \text{si} \quad -\pi \leq x < 0, \\ (x - \pi)^2 & \text{si} \quad 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

calcule los coeficientes de Fourier a_n, con $n = 0, 1, 2, ...$ de f y **pruebe** las fórmulas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Demostración:

$\blacksquare$

Ejercicio 3.1.4
Pruebe que
$$\frac{1}{3}x(\pi - x)(\pi - 2x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2nx}{n^3}, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$
Deduzca el valor de
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}.$$

Demostración:

■

Ejercicio 3.1.5
Haga lo siguiente:

i. **Pruebe** que
$$\int_0^{\pi} \log \operatorname{sen} \frac{x}{2} dx = -\pi \log 2.$$
Sugerencia. Haga el cambio de variables $x = 2t$ y escriba $\operatorname{sen} t = 2 \operatorname{sen} \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}$.

ii. **Muestre** que
$$-\log \left| 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}, \qquad \text{si } x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$
Sugerencia. Use el inciso (i) para probar que $a_0 = 0$. A fin de calcular a_n para $n \in \mathbb{N}$, escriba $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \log \cos \frac{x}{2} dx$, efectúe una integración por partes y transforme el nuevo integrando de suerte que aparezca el núcleo de Dirichlet.

iii. **Deduzca** de (ii) la fórmula
$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

iv. **Desarrolle** en serie de Fourier la función
$$x \mapsto \log \left| 2 \cos \frac{x}{2} \right|$$

Solución:

□

Ejercicio 3.1.6
Sea $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{R})$ y sea $x \in \mathbb{R}$. Se supone que para algúun $\alpha > 0$ se cumple
$$f(x+t) - f(x) = O(\left|t^{\alpha}\right|), \quad \text{cuando} t \to 0$$
Demuestre que la serie de Fourier de f en x converge a $f(x)$.

Demostración:

■

Ejercicio 3.1.7
Por el problema **3.1.1** se sabe que

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$$

i. Póngase

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} kx}{k}.$$

Muestre que

$$\frac{x}{2} + s_n(x) = \pi \int_0^{\pi} D_n(t)dt,$$

donde D_n es el núcleo de Dirichlet.

ii. Si $x \in]0, 2\pi[$, **pruebe** que

$$\lim_{n\to\infty} \left[\pi \int_0^x D_n(t)dt - \int_0^x \frac{\operatorname{sen} nt}{t} dt \right] = 0.$$

iii. **Deduzca** una nueva demostración de la fórmula

$$\int_0^{\to\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Demostración:

■

Ejercicio 3.1.8
Sea $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ y sean $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ los coeficientes de Fourier de f. **Demuestre** que

$$\int_0^x f = c + c_0 x + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{c_k e^{ikx}}{ik}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

donde c es una constante, la convergencia siendo uniforme en $\mathbb{R}$.

Sugerencia. Considere la función $F(x) = \int_0^x (f - c_0)$.

Deduzca que los coeficientes de Fourier b_n de cualquier función $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ satisfacen la condición de que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$$

es convergente. **Concluya** que la aplicación $f \mapsto \{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ no es una aplicación suprayectiva de $\mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ en $c_0(\mathbb{Z})$.

Demostración:

■

Ejercicio 3.1.9
Haga lo siguiente:

i. Sea α un número real no entero. **Pruebe** que

$$\pi \cos \alpha x = 2\alpha \operatorname{sen} \pi\alpha \left(\frac{1}{2\alpha^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{\alpha^2 - n^2} \right), \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

De ahí obtenga las fórmulas clásicas

$$\frac{\pi\alpha}{\operatorname{sen} \pi\alpha} = 1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} \quad \text{y} \quad \pi\alpha \cot \pi\alpha = 1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}.$$

ii. Sea $x \in]0, 1[$. **Pruebe** que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{n^2 - \alpha^2}$$

se puede integrar término por término en el intervalo $[0, x]$. De la última fórmula del inciso (i) **deduzca** la fórmula

$$\operatorname{sen} \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right), \quad \forall x \in]-1, 1[.s$$

Demostración:

■

Ejercicio 3.1.10
Se supone que la serie de Fourier de una función $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{K})$ converge en el sentido de Cesáro uniformemente en $\mathbb{R}$. **Pruebe** que f es equivalente a una función continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{K}$.

Demostración:

■

Ejercicio 3.1.11
Sea $f \in \mathcal{C}^{2\pi}(\mathbb{R})$ la función

$$f(x) = \pi - |2x|, \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

Aplique el teorema 3.9 para mostrar que la serie de Fourier de f converge a f uniformemente en $\mathbb{R}$. **Calcule**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}.$$

Solución:

□

Ejercicio 3.1.12
Sea $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{R})$ la función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{si} & -\pi \leq x < 0, \\ x^2 & \text{si} & 0 \leq x < \pi. \end{array} \right\}$$

Calcule la serie de Fourier de f. Usando el teorema fundamental para la convergencia de una serie de Fourier, **muestre** que la serie de Fourier de f converge a alguna suma $s(x)$ para todo $x \in [-\pi, \pi]$. **Calcule** $s(x)$ para todo $x \in [-\pi, \pi]$.

Solución:

$\square$

Ejercicio 3.1.13
Haga lo mismo que en el problema **3.12** con $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{R})$ dada por

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{si} & -\pi \leq x < 0, \\ x & \text{si} & 0 \leq x < \pi. \end{array} \right\}$$

Solución:

$\square$