Notas de Álgebra Moderna IV.
Una introducción a la teoría de categorías.

Cristo Daniel Alvarado

25 de abril de 2024

Índice general

Capítulo 3

Funtores

3.1. Conceptos Fundamentales

Definición 3.1.1
Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías. Un **funtor covariante** (respectivamente, **funtor contravariante**), denotado por $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, consta de

1. Un mapeo $F : \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C}) \to \mathcal{D}$ tal que $A \mapsto F(A)$.

2. Para cualesquier dos pares de objetos $A, B \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$, un mapeo $F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,(F(A), F(B))$ (resp. $F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,(F(B), F(A))$) tal que $f \mapsto F(f)$, que cumple las condiciones siguientes:

   I) Para cada $A \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$, $F(1_A) = 1_{F(A)}$.
   II) Para cada $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A, B)$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(B, C)$, se tiene que

   $$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

   (resp. $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$).

Un **bifuntor** es un funtor que va del producto de dos categorías en una categoría.

Definición 3.1.2
La **imagen de un funtor** F **entre las categorías** $\mathcal{C}$ **y** $\mathcal{D}$, consta de una clase $\left\{F(C) \middle| C \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})\right\}$ junto con todos los conjuntos $\left\{F(f) \middle| f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A, B) \text{ con } A, B \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})\right\}$.

Observación 3.1.1
La imagen de un funtor no necesariamente es una categoría. En cambio, si el funtor es inyectivo sobre objetos, se tiene que la imagen de un funtor si es una categoría.

Demostración:
En efecto, sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías. Para cualesquiera $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ y $D_1, D_2, D_3 \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{D})$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(C_1, C_2)$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(C_3, C_4)$, $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,(D_1, D_2)$ y $k \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,(D_2, D_3)$. Se tiene lo siguiente:

$$C_1 \longrightarrow C_2 \text{ y } C_3 \longrightarrow C_4$$
$$D_1 \longrightarrow D_2 \longrightarrow D_3$$

la imagen de $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ noes una categoría, pues si hacemos que

$$F(C_1) = D_1, F(C_2) = F(C_3) = D_2 \text{ y } F(C_4) = D_4$$

haciendo

$$F(f) = h, F(g) = k$$

además,

$$F(1_{C_1}) = 1_{D_1} \quad F(1_{C_2}) = F(1_{C_3}) = 1_{D_2} \quad F(1_{C_4}) = 1_{D_3}$$

pues, h y k paretenecen a la imagen de F, pero su composición no lo está. ■

Observación 3.1.2
Si F es inyectiva, entonces la imagen de F será una categoría.

Proposición 3.1.1
Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor covariante (resp. contravariante), entonces $F' : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$ es un funtor contravariante (resp. covariante).

Demostración:
Se hará el segundo caso. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor contravariante. Definimos F' tal que

$$F(A) = F'(A), \quad \forall A \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C}^{op})$$

y,

$$F(1_A) = F'(1_A), \quad \forall A \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C}^{op})$$

1. Sea f un morfismo de A en B, con $A, B \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C}^{op}) = \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$. Entonces su respectivo elemento f^{op} el $\mathcal{C}$

$$F(f) = F'(f^{op})$$

Claramente esto está bien definido. Con lo cual se tiene que $F'(f^{op}) : F(B) \to F(A)$, que es la primera parte para probar que F es funtor covariante.

2. Sean $f^{op} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(B, A)$ y $g^{op} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(C, B)$. Entonces, existen $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} F'(f^{op} \circ g^{op}) &= F'((g \circ f)^{op}) \\ &= F(g \circ f) \\ &= F(f) \circ F(g) \\ &= F'(f^{op}) \circ F'(g^{op}) \end{aligned}$$

por tanto, de los dos incisos anteriores se sigue que F' es un funtor covariante. ■

Definición 3.1.3
Sea $\mathcal{C}$ una categoría.

1. Si $\mathcal{C}'$ es una subcategoría de $\mathcal{C}$, definimos el **funtor inclusión** $I : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ el cual asigna a cada objeto y cada morfismo a sí mismo. En el caso que $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$,tendremos simplemente que $I : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es el **funtor identidad**, denotado por $1_{\mathcal{C}}$.

2. Sea $\sim$ una congruencia en $\mathcal{C}$ categoría y, $\mathcal{C}/\sim$ la categoría cociente correspondiente. Se define el **funtor cociente**, denotado por $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\sim$ de la siguiente manera:

   - $\pi(C) = C$ para todo $C \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$.
   - $\pi(f) = \overline{f}$ para todo morfismo f en la categoría $\mathcal{C}$.

donde $\overline{f}$ denota a la clase de equivalencia de los morfismos de f en $\mathcal{C}$.

Además, si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son morfismos en $\mathcal{C}$, con $A, B \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$, se tiene que

$$\pi(g \circ f) = \overline{g \circ f} = \overline{g} \circ \overline{f} = \pi(g) \circ \pi(f)$$

3. Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ son dos funtores, siendo $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ categorías, podemos definirl el **funtor composición puntual** $G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ como sigue:

$$G \circ F(C) = G(F(C)), \quad \forall C \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$$

y,

$$G \circ F(f) = G(F(f)), \quad \forall f \text{ morfismo en } \mathcal{C}$$

   I) Si F y G son ambos covariantes ó contravariantes, entonces $G \circ F$ es un funtor covariante.

   II) Si uno de ellos es covariante y el otro contravariante, entonces $G \circ F$ es contravariante.

Demostración:

Verifiquemos en 3 que es un funtor. En efecto, claramente manda objetos en objetos y morfismos en morfismos de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{E}$.

Suponga que F y G son ambos contravariantes (el caso en el que son covariantes es inmediato). Entonces para $F : A \to B$ morfismo en $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} &F(f) : F(B) \to F(A) \\ \Rightarrow &G(F(f)) : G(F(A)) \to G(F(B)) \end{aligned}$$

además, si f, g son morifsmos en $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} G \circ F(g \circ f) &= G(F(g \circ f)) \\ &= G(F(f) \circ F(g)) \\ &= G(F(g)) \circ G(F(f)) \end{aligned}$$

luego, el funtor composición puntual es covariante.

Para el caso en el que uno sea covariante y otro contravariante, el caso es similar. ∎

Definición 3.1.4

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías.

1. Fijemos un objeto $D_0 \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{D})$. Definimos el **funtor constante**, $A_{D_0} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ el cual asigna a cada objeto $C \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ al objeto D_0 y a cada morfismo f de $\mathcal{C}$ el morfismo 1_{D_0} de $\mathcal{D}$.

2. Considere la categoría producto $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$. Definimos los **funtores proyección** de la siguiente mantera:

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{C}, \quad (C, D) \mapsto C \quad (f, g) \mapsto f \\ \rho_{\mathcal{D}} : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}, \quad (C, D) \mapsto D \quad (f, g) \mapsto g \end{aligned}$$

Definición 3.1.5

Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Definimos el **bifuntor** $\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to$ **Set** como $\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A, B)$, para todo $(A, B) \in \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}$.

Además, si $(f^{op}, g) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}}\,((A, B), (C, D))$, entonces se tiene que $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(C, A)$ y

$g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, D)$.

Luego

$$\begin{aligned}\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}\times\mathcal{C}}((A,B),(C,D)) &\to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}\left(\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}(A,B)}, \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}(C,D)}\right)\\ (f^{op}, g) &\mapsto \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(f^{op}, g)\end{aligned}$$

donde $\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(f^{op}, g)(h) = g \circ h \circ f$, para todo $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.

Demostración:

Probaremos que $\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}$ es un funtor. Hay que ver que se cumplen algunas condiciones:

1. $\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$, tal que $(A, B) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, y $(f^{op}, g) \mapsto (h \mapsto g \circ h \circ f)$ para todo $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ (siendo los f y g como se dió en la definición). Así, está bien definido.

2. Sean $(A, B) \in \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}$, $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, entonces:

$$\begin{aligned}\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}((1_A, 1_B))(h) &= \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}((1_A^{op}, 1_B))(h)\\ &= 1_b \circ g \circ 1_A\\ &= h\\ &= 1_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)}(h)\\ &= 1_{\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(A,B)(h)}\end{aligned}$$

luego manda identidades en identidades.

3. Sean ahora $(f^{op}, g) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}\times\mathcal{C}}((A,B),(C,D))$ y $(r^{op}, t) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}\times\mathcal{C}}((C,D),(E,F))$. Tomemos $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.

Se tiene que $\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(r^{op}, t) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B), \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, F))$ y $g \circ h \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$, de manera que

$$\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(r^{op}, t)(g \circ h \circ f) = t \circ (g \circ h \circ f) \circ r$$

luego,

$$\begin{aligned}\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}((r^{op}, t) \circ (f^{op}, g))(h) &= \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(r^{op} \circ f^{op}, t \circ g)(h)\\ &= \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}((f \circ r)^{op}, t \circ g)(h)\\ &= (t \circ g) \circ h \circ (f \circ r)\\ &= \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(r^{op}, t)(g \circ h \circ f)\\ &= \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(r^{op}, t) \circ \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(f^{op}, g)(h)\\ \Rightarrow \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}((r^{op}, t) \circ (f^{op}, g)) &= \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(r^{op}, t) \circ \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(f^{op}, g)(h)\end{aligned}$$

Por los incisos anteriores, se sigue que este es un bifuntor, denominado **bifuntor Hom**. ■

Ejemplo 3.1.1

Los funtores olvidados (o *forgetful*). Consideremos por ejemplo a las categorías **Rng** y **Ab**. Entonces:

1. F : **Ring** $\to$ **Ab** tal que $(A, +, \cdot) \mapsto (A, +)$ y a cada morfismo lo manda a sí mismo es un funtor, el cual .ºlvida”propiedades del objeto original del que partió. En este caso, olvida el producto entre dos elementos del anillo.

2. **Grp** $\to$ **Set**. A cada grupo lo manda al conjunto de sus elementos y morfismo a la función entre grupos.

Proposición 3.1.2
Las categorías pequeñas y los funtores entre ellas forman una categoría (localmente pequeña), la cual denotamos como **Cat**, definiendo:

1. $\operatorname{Obj}(\mathbf{Cat}) = \left\{\mathcal{C} \middle| \mathcal{C} \text{ es una categoría pequeña}\right\}$.

2. Para cada par de objetos $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \operatorname{Obj}(\mathbf{Cat})$, el conjunto:

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \left\{F \middle| F : \mathcal{C} \to \mathcal{D} \text{ es un funtor}\right\}$$

   (como $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son conjuntos, entonces la clase anterior debe ser un conjunto).

3. La composición de morfismos en esta categoría se define como la composición funtorial puntual de dos funtores. Además, la identidad es el funtor identidad de la misma categoría.

Demostración:
Basta con ver que la composición es asociativa en la categoría **Cat**. En efecto, sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{T}$ categorías pequeñas y, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ y $H : \mathcal{E} \to \mathcal{T}$ funtores. Se tiene que:

$$\begin{aligned}(H \circ (G \circ F))(A) &= H(G \circ F(A)) \\ &= (H \circ G)(F(A)) \\ &= H \circ G \circ F(A)\end{aligned}$$

(pues la composición de funtores como se definió es asociativa en objetos). ∎

Proposición 3.1.3
Sea $F : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ un bifuntor. Entonces, para todo $A \in \operatorname{Obj}(\mathcal{A})$ existe un funtor $F_A : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, llamado el **funtor asociado derecho respecto a** A y está definido como sigue:

1. $F_A(B) = F(A, B)$ para todo $B \in \operatorname{Obj}(\mathcal{B})$.

2. $F_A(f) = F = (1_A, f)$ para todo f morfismo en la categoría $\mathcal{B}$.

Similaremente, para cada $B \in \operatorname{Obj}(\mathcal{B})$, existe un funtor $F^B : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$, llamado **funtor asociado izquierdo respecto a** B, como sigue:

1. $F^B(A) = F(A, B)$ para todo $A \in \operatorname{Obj}(\mathcal{A})$.

2. $F^B(f) = F = (f, 1_B)$ para todo f morfismo en la categoría $\mathcal{A}$.

Y, si F es covariante (resp. contravariante), entonces F_A y F^B son covariantes (resp. contravariantes).

Demostración:
Sea $A \in \operatorname{Obj}(\mathcal{A})$. Se probará que el funtor asociado derecho respecto a $A \in \operatorname{Obj}(\mathcal{A})$ es un funtor. Claramente está bien definido (manda objetos de $\mathcal{A}$ en objetos de $\mathcal{C}$ y lo mismo con morfismos). Veamos que se cumplen dos condiciones:

1. Sea $B \in \mathcal{B}$. Entonces,

$$\begin{aligned} F_A(1_B) &= F(1_A, 1_B) \\ &= 1_{F(A,B)} \\ &= 1_{F_A(B)} \end{aligned}$$

2. Suponga que F es covariante. Sean $A, B, C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{B})$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(A, B)$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(B, C)$. Entonces:

$$\begin{aligned} F_A(g \circ f) &= F(1_A, g \circ f) \\ &= F(1_A \circ 1_A, g \circ f) \\ &= F((1_A, g) \circ (1_A f)) \\ &= F(1_A, g) \circ F(1_A, f) \\ &= F_A(g) \circ F_A(f) \end{aligned}$$

de los incisos anteriores, se sigue que F_A es un funtor covariante (los demás casos son análogos). ■

Ejemplo 3.1.2
Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. El funtor $\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}C} = \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(C, -)$ es el funtor asociado derecho respecto a C y ${\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}}^C = \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(-, C)$ es el funtor asociado izquierdo respecto a C.

Ejemplo 3.1.3
El bifuntor producto cartesiano $- \times - : \mathbf{Set} \times \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$, $(- \times -)(A, B) \mapsto A \times B$ y tal que $(- \times -)(f, g) \mapsto f \times g$, donde si $(f, g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(A, C) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(B, D)$, entonces

$$\begin{aligned} f \times g : A \times B &\to C \times D \\ (a, b) &\mapsto (f(a), g(b)) \end{aligned}$$

Ejemplo 3.1.4
Para cualquier conjunto X, los funtores producto cartesiano $X \times -$ y $- \times X$ son los funtores derecho e izquierdo asociados con respecto a X del bifuntor producto cartesiano, respectivamnete.

3.2. Isomorfismos entre categorías

Definición 3.2.1
Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor entre dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$. Diremos que F es **fiel** (respectivamente, **pleno**) si para cada par de objetos $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, la función

$$\begin{aligned} F_{A,B} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) &\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B)) \\ f &\mapsto F(f) \end{aligned}$$

es inyectiva (respectivamente, suprayectiva).

Se dirá que F es **plenamente fiel** cuando sea fiel y pleno.

Ejemplo 3.2.1
Si $\mathcal{C}$ es una subcategoría de una categoría $\mathcal{D}$, entonces el funtor inclusión $i : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor fiel.

Más aún, i es plenamente fiel si y sólo si $\mathcal{C}$ es subcategoría llena de $\mathcal{D}$. Particularmente,

$$i : \mathcal{D}^{grp} \hookrightarrow \mathcal{D}$$

y, será plenamente fiel si y sólo si $\mathcal{D}$ ya es un grupoide.

Ejemplo 3.2.2
Sean $\mathcal{C}$ y $\sim$ una relación de congruencia en $\mathcal{C}$. Considere el mapeo proyección

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{C} &\to \mathcal{C}/\sim \\ A &\mapsto A \\ f &\mapsto [f] = \overline{f} \end{aligned}$$

es un funtor pleno. En general no va a ser fiel. En particular, si tomamos

$$\pi : \mathbf{Set} \to \mathbf{HTop}$$

resulta que $\pi_{(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ no es inyectiva. Más aún, es una función constante (donde $(\mathbb{R},\mathbb{R})$ denota al conjunto de todas lsa funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$). En efecto, sean

$$f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

Definimos

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \times [0,1] &\to \mathbb{R} \\ (x,t) &\mapsto (1-t)f(x) + tg(x) \end{aligned}$$

es claro que F es continua y, además,

$$F(x,0) = f(x), \quad \text{y} \quad F(x,1) = g(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, es decir que f y g son homotópicas, luego todas están en la misma clase de equivalencia, así π de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ no es continuo.

Ejemplo 3.2.3
Definimos un funtor

$$U : \mathbf{Ring} \to \mathbf{Grp}$$

como sigue, para cada $R \in \mathrm{Obj}\,(\mathbf{Ring})$ (anillo conmutativo con identidad). $U(R) = R^*$. Además, si $R, S \in \mathrm{Obj}\,(\mathbf{Ring})$, para $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(R,S)$,

$$U(f) = f\big|_{R^*} : R^* \to S^*$$

(donde S^* es el conjunto de todos los elementos de R invertibles respecto al producto del anillo). Es claro que U es un funtor, pero no es fiel ni pleno.

Demostración:
Probaremos que U no es fiel. En efecto, consideremos el anillo $\mathbb{Z}_2[X]$ (siendo $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Observemos que

$$\mathbb{Z}_2[X]^* = \mathbb{Z}_2^* = \{[1]\}$$

(por ser $\mathbb{Z}_2$ campo) luego,

$$U_{\mathbb{Z}_2[X],\mathbb{Z}_2[X]} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(\mathbb{Z}_2[X],\mathbb{Z}_2[X]) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(\{[1]\},\{[1]\})$$

Se afirma que $\left|\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}\left(\mathbb{Z}_2[X], \mathbb{Z}_2[X]\right)\right| \geq 2$. En efecto, primeramente el morfismo identidad es un morfismo en la categoría **Ring**, pero también

$$\begin{aligned} g : \mathbb{Z}_2[X] &\to \mathbb{Z}_2[x] \\ p(x) &\mapsto p(x)^2 \end{aligned}$$

luego este conjunto de morfismos tiene al menos dos elementos, así que U no puede ser fiel.

Veamos ahora que U no es pleno. Observemos que

1. $\mathbb{Z}^* = \{-1, 1\} \cong \mathbb{Z}_2$.
2. Si $p \in \mathbb{N}$ es un número primo, entonces

   $$\mathbb{Z}_p^* \cong \mathbb{Z}_{p-1}$$

   (visto como isomorfismo de grupos).
3. Si $m, n \in \mathbb{N}$ con $m, n \geq 1$, entonces

   $$\left|\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}\left(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m\right)\right| = (n, m)$$

   donde (n, m) es el máximo común divisor de m y n (basta con observar que $f(1)$ determina por completo a f, siendo $f : \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_n$ un homomorfismo).

Volviendo al problema original. Sea $p \in \mathbb{N}$ tal que $p > 2$. Se tiene que

$$U_{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}\left(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p\right) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}\left(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_{p-1}\right)$$

por (1), (2) y (3), $\left|\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}\left(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_{p-1}\right)\right| = 2$. Pero, como $\mathbb{Z}$ es un objeto inicial de la categoría **Ring**, por definición se tiene que

$$\left|\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}\left(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p\right)\right| = 1$$

así, U no puede ser pleno. ■

Definición 3.2.2
Se dice que una categoría $\mathcal{C}$ es concreta cuando existe un funtor fiel $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ (es como si pudiéramos encajar la categoría $\mathcal{C}$ en **Set**).

Proposición 3.2.1
Toda categoría pequeña es concreta.

Demostración:
Sea $\mathcal{C}$ una categoría pequeña, es decir que su clase de objetos $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ es un conjunto. Definimos

$$F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$$

como sigue

1. Para cada $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$,

   $$F(A) = \left\{(C, \alpha) \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}) \times \mathrm{Hom}(\mathcal{C}) \middle| \alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)\right\}$$

   en donde

   $$\mathrm{Hom}(\mathcal{C}) = \bigcup_{C, D \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$$

   (notemos que $F(A)$ es efectivamente un conjunto, ya que tanto $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ como $\mathrm{Hom}(\mathcal{C})$ son conjuntos).

2. Para cada $A, B \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A, B)$:

$$\begin{aligned} F(f) : F(A) &\to F(B) \\ (C, \alpha) &\mapsto (C, f \circ \alpha) \end{aligned}$$

Se afirma que F es un funtor fiel. En efecto,

I. Fijando $A \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$, queremos ver que

$$F(1_A) = 1_{F(A)}$$

Tomamos $(C, \alpha) \in F(A)$, es decir, $C \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ y $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(C, A)$. Entonces,

$$\begin{aligned} F(1_A)(C, \alpha) &= (C, 1_A \circ \alpha) \\ &= (C, \alpha) \\ &= 1_{F(A)}(C, \alpha) \end{aligned}$$

II. Sean $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A, B)$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(B, D)$. Para cada $(C, \alpha) \in F(A)$ se verifica que

$$\begin{aligned} F(g \circ f)(C, \alpha) &= (C, g \circ f \circ \alpha) \\ &= F(g)(C, f \circ \alpha) \\ &= F(g)(F(f)(C, \alpha)) \\ &= (F(g) \circ F(f))(C, \alpha) \\ \Rightarrow F(g \circ f) &= F(g) \circ F(f) \end{aligned}$$

por los dos incisos anteriores se sigue que F es un funtor covariante. Veamos que es inyectivo. En efecto, sean $A, B \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$. Hay que probar que

$$F_{A,B} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}\,(F(A), F(B))$$

es inyectivo. En efecto, sean $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(A, B)$ y supongamos que

$$F(f) = F(g)$$

entonces,

$$\begin{aligned} (A, f) &= F(f)(A, 1_A) \\ &= F(g)(A, 1_A) \\ &= (A, 1_A \circ g) \\ &= (A, g) \\ \Rightarrow f &= g \end{aligned}$$

así pues, f es inyectiva, luego F es fiel. ■

Definición 3.2.3
Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías. Un funtor covariante (respectivamente, contravariante) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ se denomina **isomorfismo** (respectivamente, **anti-isomorfismo**) de categorías si existe un funtor covariante (respectivamente, contravariante) $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tal que

$$G \circ F = 1_{\mathcal{C}} \quad \text{y} \quad F \circ G = 1_{\mathcal{D}}$$

Proposición 3.2.2
Todo isomorfismo de categorías es plenamente fiel.

Demostración:
Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un isomorfismo de categorías y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ el respectivo funtor tal que

$$G \circ F = 1_{\mathcal{C}} \quad \text{y} \quad F \circ G = 1_{\mathcal{D}}$$

Tomando $A, B \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$ arbitrarios, se tiene que $G(F(A)) = A$ y $G(F(B)) = B$. Consideramos las funciones:

$$F_{A,B} : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$$

y,

$$G_{F(A),F(B)} : \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B)) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$$

Para cada $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$,

$$G_{F(A),F(B)}(F_{A,B}(f)) = G(F(f)) = 1_{\mathcal{C}}(f) = f$$

por tanto, $G_{F(A),F(B)} \circ F_{A,B} = 1_{\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)}$ y, $F_{A,B} \circ G_{F(A),F(B)} = 1_{\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A),F(B))}$. Por tanto, $F_{A,B}$ es invertible, luego biyectiva. Por tanto, F es plenamente fiel. ■

Corolario 3.2.1
Se tiene lo siguiente:

1. Los isomorfismos entre categorías mapean objetos finales (resp. iniciales) en objetos finales (resp. iniciales).
2. Los anti-isomorfismos mapean objetos iniciales (resp. finales) en objetos finales (resp. iniciales).

Demostración:
Sean $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un anti-isomorfismo y $A \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$ un objeto inicial. Sea $D \in \operatorname{Obj}(\mathcal{D})$ y $B \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$ tal que $F(B) = D$. Se tiene que

$$\left|\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)\right| = 1$$

Luego,

$$\left|\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(D, F(A))\right| = \left|\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(B), F(A))\right| = 1$$

(pues existe una biyección entre estos dos conjuntos de morfismos). Así, $F(A)$ es un objeto final de $\mathcal{D}$. ■