Función de onda unidimencional: $\Psi(x,t) = f(x \pm vt)$

Para obtener el perfil de onda: $\Psi(x,t)\big|_{t=0} = f(x,0) = f(x)$.

En este análisis, tomamos las consideraciones:

- El perfil de la onda no cambia.
- La velocidad v es constante.

Más variaciones.

Se considera la variación espacial de la función de onda unidimensional:

$$\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial f(x \pm vt)}{\partial x} = \frac{\partial f(x')}{\partial x'} \cdot \underbrace{\frac{\partial x'}{\partial x}}_{\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x \pm vt)}$$

Donde $x' = x \pm vt$. Luego:

$$\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial f(x')}{\partial x'} \cdot 1 = \frac{\partial f(x')}{\partial x} \quad \ldots \quad (1)$$

Se considera la variación temporal de la función de onda unidimensional:

$$\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial f(x \pm vt)}{\partial t} = \frac{\partial f(x')}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial t}$$

$$= \pm v \frac{\partial f(x')}{\partial x'} \quad \ldots \quad (2)$$

De (1) y (2) podemos escribir:

$$\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x} = \pm v \cdot \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} \quad \ldots \quad (3)$$

El cambio de Ψ con el tiempo, es proporcional al cambio en la posición.

Por tanto:

$$\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial f(x')}{\partial x'} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = \pm \frac{\partial f(x')}{\partial x'}$$

Derivando ambas expresiones:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\pm v \cdot \frac{\partial f(x')}{\partial x'}\right) \quad \ldots \quad (4) \text{ y } (5)$$

Luego:

$$\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = \mp v \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)$$

Pero:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = \pm v \frac{\partial}{\partial x'}\left(\underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial t}}_{\pm v \cdot \frac{\partial f}{\partial x'}}\right)$$

$$= v^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}$$

Por (4) y (5):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$ ECUACIÓN DIFERENCIAL de ONDA en una dimensión.

Toda función ψ que cumpla esta ecuación, es una ONDA.

Ejemplo.

- La solución más simple de esta ecuación diferencial son las ondas armónicas simples y las funciones senoidales, i.e el seno y coseno.

Sea el perfil dado por la siguiente función:

$$\psi(x,t)\big|_{t=0} = \psi(x,0) = A \cdot \operatorname{sen}(Kx)$$

Donde $K>0$ y es llamada: número de onda.

$$[K] = \frac{\text{radianes}}{\text{unidad de longitud}}$$

y A es llamada: amplitud de la onda, la cual tambien es constante. Define el valor máximo que puede tener la onda. Llámemos al perfil de onda $f(x)$:

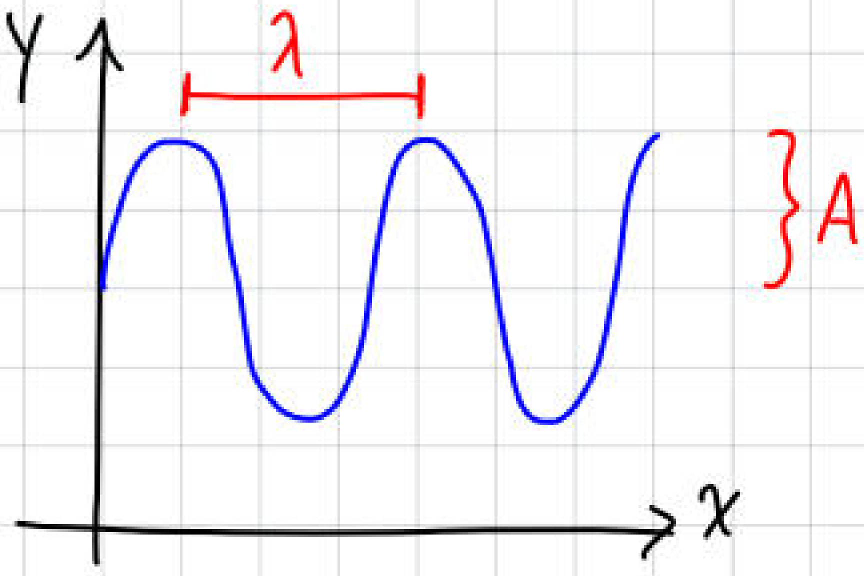
$$f(x) = A \cdot \operatorname{sen}(K \cdot x)$$

Ahora se convierte la expresión anterior en una onda que se desplaza en $+x$. Esto, cambiando a x por $x' = x - vt$.

Luego:

$$\Psi(x,t) = A \cdot sen(K(x-vt)) \Big\} \text{ONDA SIMPLE.}$$

Definimos al periodo espacial como la longitud de onda λ (distancia entre crestas consecutivas).



Las funciones seno y coseno son periódicas y su periodo es 2π.

$$f(\theta) = sen(\theta)$$

Periodo temporal, T, es la distancia entre dos valles con x constante. De esta forma:

$$\Psi(x \pm \lambda, t) = \Psi(x,t) \quad y \quad \Psi(x, t \pm T) = \Psi(x,t)$$

Por otro lado, la función seno tiene un periodo de 2π:

Por un lado: $sen(K(x-vt)) = sen(K((x\pm\lambda)-vt))$

Por otro lado: $sen(K(x-vt)) = sen(K(x-vt) \pm 2\pi)$

Igualando:

$$sen(K((x\pm\lambda)-vt)) = sen(K(x-vt) \pm 2\pi)$$

$$\Rightarrow sen(Kx \pm K\lambda - K(vt)) = sen(Kx - K(vt) \pm 2\pi)$$

$$\Rightarrow sen(K(x-vt) \pm K\lambda) = sen(K(x-vt) \pm 2\pi)$$

$$\therefore K\lambda = 2\pi \Rightarrow K = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Por otro lado: $\Psi(x,t) = \Psi(x, t \pm T)$, ya que se está trabajando con la función seno:

Por otro lado: $sen(K(x-vt) \pm 2\pi) = sen(K(x-vt))$

Por otro lado: $sen(K(x-v(t\pm T)) = sen(K(x-vt))$

$$\therefore sen(K(x-vt \mp vT)) = sen(Kx - Kvt \pm 2\pi)$$

$$\Rightarrow sen(Kx - Kvt \mp KvT) = sen(Kx - Kvt \pm 2\pi)$$

$$\Rightarrow |KvT| = 2\pi \quad \text{con} \quad K = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} \cdot v \cdot T = 2\pi \Rightarrow v = \frac{\lambda}{T} \qquad v = \frac{\lambda}{T}$$

Definimos ν en $[Hz] = [s^{-1}]$, como: $\nu = \frac{1}{T}$. FRECUENCIA TEMPORAL.