Teorema de Cambio de variable (caso lineal).

Sea $T:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal invertible, $X\subset \mathbb{R}^m$ un conjunto J-medible y $f: T(X)\to\mathbb{R}$ una función integrable. Entonces:

$$\int_{T(X)} f = \int_X f\circ T \cdot |\det T|$$

Dem.

Como T es invertible, T se puede expresar como: $T=T_1\circ T_2 \dots T_n$, T_i un difeomorfismo para cada $i\in\mathbb{N}_n$. Luego:

$$\int_{T(X)} f = \int_{T_1\circ\dots\circ T_n(X)} f = |\det T_1|\cdot \int_{T_2\circ\dots\circ T_n(X)} f\circ T_1 = \dots = \int_X f\circ(T_1\circ T_2\circ\dots\circ T_n)\cdot|\det T_1|\cdot|\det T_2|\cdot\dots\cdot|\det T_n|$$

Nota: Es claro que, X J-m $\Rightarrow T_2(X)\Rightarrow T_1(T_2(X))=T_1\circ T_2(X)$ es J-m.

Donde $|\det T_1|\dots|\det T_n| = \det|T_1\circ T_2\circ\dots\circ T_n|$. Luego, basta demostrar el teorema para 2 t. lineales (pues toda t. lineal se escribe como producto de T. lineales elementales, invertibles).

i) $T:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$, $x=(x_1,x_2,\dots,x_m)\mapsto(\varphi(x_1),x_2,\dots,x_m)$ con $\varphi(x)=\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i$.

ii) $T:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$, $x=(x_1,x_2,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_m)\mapsto(x_1,x_2,\dots,x_j,\dots,x_i,\dots,x_m)$.

Se probará para (i):

Primero, note que: $\varphi(x)=\alpha_1x_1+\beta_x$, $\beta_x=\sum_{i=2}^m\alpha_i x_i$.

T está representada por la matriz:

$$T=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_m\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{bmatrix}\Rightarrow |\det T| = |\alpha_1|, \overbrace{\alpha_1\neq 0}^{\text{Pues } T \text{ invertible} \Rightarrow \alpha_1\neq 0}$$

Sea $A=[a,b]\times A'$ una celda de dimensión m que contiene a $X\cup T(X)$ (lo cual es posible, pues ambos son J-medibles $\Rightarrow$ son acotados), siendo A' una celda de dimensión $m-1$.

Considere:

$$\hat{f}:A\to\mathbb{R},\qquad \hat{f}(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\in T(X)\\ 0 & \text{si } x\notin T(X)\end{cases}$$

Los elementos de $y\in A$ se denotarán como $y=(t,w)$, $t\in[a,b]$ y $w\in A'$. Sea $y\in T(X)\subset A$. Existe $x\in X$ tal que $y=T(x)=(\varphi(x),x_1,\dots,x_m)=(\alpha_1x_1+\beta_x,w)$, donde $w=(x_2,\dots,x_m)$. Se tiene que $x=(x_1,w)$ y $t=\alpha_1x_1+\beta_x$.

De la proposición 11 y el corolario siguiente a la demostración:

$$\int_{T(\mathbb{X})} f = \int_A \hat{f} = \int_{A'} \overline{\int_a^b} \hat{f}_w \qquad \left(\text{Por el T. de Fubini: } ^{\text{Pues } A=[a,b]\times A'}\right)$$

Donde $\hat{f}_w : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x_1 \mapsto \hat{f}(x_1, w)$. Si $\hat{T} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_1 \mapsto \alpha_1 x_1 + \beta_x$, por el corolario posterior:

$$\overline{\int_a^b} \hat{f}_w = |\alpha_1| \cdot \overline{\int_a^b} \hat{f} \circ \hat{T} \; ; \; |\alpha_1| = |\det T|$$

Nota: Sea $\mathbb{Y} = \{u \in \mathbb{R} \mid \exists\, v \in \mathbb{R}^{m-1}$ m $(u,v) \in \mathbb{R}^m\}$. Se tiene que $\mathbb{Y} \subset [a,b]$ y $\hat{T}(\mathbb{Y}) \subset [a,b]$. Esto para Fubini.

Luego:

$$\int_{A'} \overline{\int_a^b} \hat{f}_w = \int_{A'} \overline{\int_a^b} \hat{f} \circ \hat{T}\, |\det T|$$
$$= |\det T| \cdot \int_{A'} \overline{\int_a^b} \hat{f} \circ \hat{T}$$

Notemos que, para $x = (x_1, w)$:

$$\begin{aligned} \hat{f}_w \circ \hat{T}(x_1) &= \hat{f}_w(\hat{T}(x_1)) \\ &= \hat{f}_w(\alpha_1 x_1 + \beta_x) \\ &= \hat{f}(\alpha_1 x_1 + \beta_x, w) \\ &= \hat{f}(T(x_1, w)) \\ &= \hat{f} \circ T(x_1, w) \\ &= (\hat{f} \circ T)_w(x_1) \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\int_{A'} \overline{\int_a^b} \hat{f}_w \circ \hat{T}\, |\det T| = \int_{A'} \overline{\int_a^b} (\hat{f} \circ T)_w (x_1)\, |\det T|$$

Luego, por el teorema de Fubini: $\int_{A'} \overline{\int_a^b} (\hat{f} \circ T)_w |\det T| = \int_A \hat{f} \circ T\, |\det T|$. Entonces:

$$\int_A \hat{f} \circ T\, |\det T| = \int_{\mathbb{X}} \hat{f} \circ T\, |\det T|$$

Pero $(\widehat{f \circ T}) = \hat{f} \circ T$. En efecto, sea $x \in A$. Si $x \in \mathbb{X} \Rightarrow (f \circ T)(x) = f(T(x)) = \hat{f}(T(x))$, pues $T(x) \in T(\mathbb{X})$. Luego $(\widehat{f \circ T}) = \hat{f} \circ T$ (si $x \notin \mathbb{X}$, es trivial). Luego se cumple lo anterior

Y:

$$\int_{\mathbb{X}} \hat{f} \circ T\, |\det T| = \int_A (\widehat{f \circ T})\, |\det T|$$
$$= \int_{\mathbb{X}} f \circ T\, |\det T|.$$

Lo que prueba la proposición para (i). □

Nota: hacer tipo (ii)

Corolario.

Sean $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto J-medible, $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ una t. lineal invertible, entonces $c(T(\mathbb{X})) = c(\mathbb{X})\,|\det T|$.

Dem:

$$c(T(\mathbb{X})) = \int_A \chi_{T(\mathbb{X})} \quad ; \quad \chi_{T(\mathbb{X})} : A \to \mathbb{R}$$

T es difeomorfismo de clase C^1, $\mathbb{X}$ J-medible $\Rightarrow T(\mathbb{X})$ J-medible. Aquí A es una celda cerrada tal que $T(\mathbb{X}), \mathbb{X} \subset A$. Luego:

$$\int_A \chi_{T(\mathbb{X})} = \int_{T(\mathbb{X})} \chi_{T(\mathbb{X})}$$

Por la prop. anterior:

$$\int_{T(\mathbb{X})} \chi_{T(\mathbb{X})} = \int_{\mathbb{X}} \chi_{T(\mathbb{X})} \circ T\, |\det T|$$

Y $\chi_{T(\mathbb{X})} \circ T$ coincide con la característica de $\mathbb{X}$ en $\mathbb{X}$. Por lo tanto:

$$c(T(\mathbb{X})) = |\det T| \cdot c(\mathbb{X})$$

$\square$