Notas Integracion de Formas GD III

Cristo Daniel Alvarado

Diciembre de 2023

Índice general

Capítulo 3

Integración de formas

3.1. Introducción

El objetivo

3.2. Lema de Poincaré para formas con soporte compacto en rectángulos acotados

Definición 3.2.1
Sea ν una k-forma en $\mathbb{R}^n$. Definimos el **suporte de** ν como

$$\operatorname{supp}(\nu) = \{x \in \overline{\mathbb{R}^n} | \nu_x \neq 0\}$$

y decimos que ν tiene **soporte compacto** si $\operatorname{supp}(\nu)$ es compacto.

Teorema 3.2.1 (**Lema de Poincaré para rectángulos**)
Sea ω una n-forma con soporte compacto tal que $\operatorname{supp}(\omega) \subseteq \operatorname{int}(Q)$. Entonces los siguientes son equivalentes:

1. $\int \omega = 0$.
2. Existe una (n-1)-forma μ con soporte compacto tal que $\operatorname{supp}(\mu) \subseteq \operatorname{int}(Q)$ que satisface $d\mu = \omega$.

Demostración:
(1) $\Rightarrow$ (2): Sea

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n \tag{3.1}$$

$\square$

Teorema 3.2.2
Sea $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ un abierto y $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Entonces si U tiene la propiedad P, entonces $U \times A$ también la tiene.

Observación 3.2.1
Es muy sencillo ver que el intervalo abierto A por si mismo tiene la propiedad P

3.3. Lema de Poincaré para formas con soporte compacto en abiertos conexos en $\mathbb{R}^n$

Teorema 3.3.1
Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto conexo y ω una n-forma con soporte compacto tal que $\text{supp}(\omega) \subseteq U$. Entonces las siguientes son equivalentes:

1. $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0$.
2. Existe una (n-1)-forma con soporte compacto μ tal que $\text{supp}(\mu) \subseteq U$ y $d\mu = \omega$.

Demostración:
(2) $\Rightarrow$ (1): Es inmediata de la parte anterior.
(1) $\Rightarrow$ (2): Supongase que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0.$$

para probar el resultado se probará un resultado anterior

Teorema 3.3.2
Si ω es una n-forma con soporte compacto tal que $\text{supp}(\omega) \subseteq U$ y $c = \int_{\mathbb{R}^n} \omega$ entonces $\omega \sim c\omega_0$.

Demostración:
Para demostrar el teorema, sea $\{Q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia de rectángulos acotados contenidos en U tales que $\cup_{i\in\mathbb{N}}\text{int}(Q_i) = U$ y sea $\{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una partición de la unidad tal que $\text{supp}(\phi_i) \subseteq \text{int}(Q_i)$, es decir, se tiene que

1. $\sum_{i\in\mathbb{N}} \phi_i = 1$.
2. $\text{supp}(\phi_i) \subseteq \text{int}(Q_i), \forall i \in \mathbb{N}$.

Para la demostración del teorema, asumiremos la condición de finitud local, es decir... Dado a que el soporte de ω está contenido en el abierto U, entonces se debe tener que existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{supp}(\omega) \subseteq \cup_{i=1}^m Q_i$$

De esta forma, podemos escribir a ω como:

$$\omega = \sum_{i=1}^m \phi_i\omega$$

Donde, para cada $i = 1, \ldots, m$ se tiene que $\text{supp}(\phi_i\omega) \subseteq \text{int}(Q_i)$. Con esto se tiene que

$$c = \int_{\mathbb{R}^n} \omega = \sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} \phi_i\omega = \sum_{i=1}^m c_i, \quad \text{donde } c_i = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_i\omega$$

Para continuar con la demostración, se asumirá el siguiente resultado:

Lema 3.3.1
Para cada $j = 1 \cdots, m$ existe una sucesión de rectangulos acotados $\{R_{i,j}\}_{i=0}^{N+1}$ tales que $R_{0,j} = Q_0$ y $R_{N+1,j} = Q_j$

Con esto en mente, podemos elegir para cada $j = 1 \cdots m$, $N+2$ n-formas $\nu_{k,j}$ (con $k = 1, \cdots N+2$) tales que

$$\begin{aligned} \text{supp}(\nu_{k,j}) \subseteq& \text{int}(R_{k,j}) \cap \text{int}(R_{k,j}) \\ \int_{\mathbb{R}^n} \nu_{k,j} =& 1 \end{aligned}$$

En particular, se cumple que

$$\text{supp}(\nu_{k,j} - \nu_{k+1,j}) \subseteq \text{int}(Q_{k+1,j})$$

Por lo cual, integrando se debe tener que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nu_{k,j} - \nu_{k+1,j} = 0$$

Por el lema de Poincaré para rectángulos, se tiene que la n-forma que estamos integrando es exacta, por lo cual se puede ver como

$$\nu_{k,j} - \nu_{k+1,j} = d\mu_{k+1,j}$$

Cumpliendo esta n-forma que

$$\text{supp}(\mu_{k+1,j}) \subseteq \text{int}(Q_{k+1,j})$$

Para cada $k = 0, \cdots, N+1$. Por otro lado $\omega_0 \sim \nu_{0,j}$, pues la integral de su diferencia es 0 y el soporte de su diferencia está contenido en el interior del Q_0. De esta forma escribimos

$$\omega_0 - \nu_{0,j} = d\mu_{0,j}, \quad \text{con supp}(\mu_{0,j}) \subseteq \text{int}(Q_0)$$

También, se afirm que $c_i\mu_{N+1,j} \sim \phi_i\omega$. En efecto, pues como en lo anterior se tiene que la diferencia de sus integrales es cero y el soporte de cada una está contenido en un rectángulo, aplicando el lema de Poincaré para rectángulos se sigue el resultado. De esta forma se puede escribir

$$c_j\mu_{N+1,j} - \phi_j\omega = dc_j\mu_{N+2,j}$$

en resumen

$$\begin{aligned} c_j\omega_0 - c_j\omega_{0,j} =& d(c_j\omega_{0,j}) \\ c_j\omega_0 - c_j\omega_{1,j} =& d(c_j\omega_{1,j}) \\ c_j\omega_1 - c_j\omega_{2,j} =& d(c_j\omega_{2,j}) \\ c_j\omega_N - c_j\omega_{N+1,j} =& d(c_j\omega_{N+1,j}) \\ c_j\omega_{N+1} - \phi_j\omega =& d(c_j\omega_{N+2,j}) \end{aligned}$$

Sumando todas las ecuaciones anteriores, se sigue que

$$c_j\omega_0 - \phi_j\omega = d\left(c_j \sum_{k=0}^{N+2} \mu_{k,j}\right) = -d\lambda_j$$

donde λ_j es una (n-1)-forma que se define de forma natural como la suma. Así:

$$\phi_j\omega = c_j\omega_0 + d\lambda_j, \quad j = 1, \cdots, m$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
\omega =& \sum_{j=1}^{m} \phi_i \omega \\
=& \sum_{j=1}^{m} (c_j\omega_0 + d\lambda_j) \\
=& \omega_0 \sum_{j=1}^{m} (c_j) + d\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j\right) \\
\Rightarrow \omega - c\omega_0 =& d\Lambda
\end{aligned}$$

Donde Λ es una (n-1)-forma con soporte en U. Por tanto $\omega \sim c\omega_0$, lo que prueba al resultado. □

Por este teorema, como c = 0, se sigue que, usando la notación del teorema anterior, podemos escribir $w = d\Lambda$. □

3.4. El grado de un mapeo diferencial

Definición 3.4.1
Sean U y V subconjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$. Un mapeo continuo $f : U \to V$, es llamado **propio** si para cada subconjunto compacto $K \subseteq V$, la imagen inversa $f^{-1}(K)$ es compacto en U.

Este tipo de mapeos tienen (entre muchas otras), las siguientes propiedades:

Observación 3.4.1
Sea $f : U \to V$ un mapeo propio C^∞ y ω una k-forma en $\mathbb{R}^m$ con soporte compacto tal que $\text{supp}(\omega) \subseteq V$, entonces $f * \omega$ es una k-forma en $\mathbb{R}^n$ tal que $\text{supp}(f * \omega) \subseteq U$.

En particular, si $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ son abiertos conexos y $f : U \to V$ es un mapeo propio C^∞ entonces existe un invariante topológico de f, llamado el **grado de f** (denotado por $\deg(f)$) tal que

$$\int_U f^*\omega = \deg(f) \int_V \omega$$

para toda $\omega \in \Omega_c^n(V)$

La parte de que sea un invariante topológico es extremandamente complicado de probar (ahora mismo), pero se probará la identidad de la ecuación anterior. Veamos a que se refiere la ecuación anterior. Si

$$\omega = \phi(y) dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$$

(para esto, estamos en el acuerdo de que $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ y $y = (y_1, \ldots, y_n) \in V$) Con $\phi : V \to \mathbb{R}$ es una función $C_0^\infty(V)$. Entonces en $x \in U$:

$$f^*\omega = (\phi \circ f)(x) \det(Df(x))\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Por lo cual, la igualdad anterior lo que nos dice es que

$$\int_U (\phi \circ f)(x) \det(Df(x)) dx = \deg(f) \int_V \phi(y) dy$$

Probaremos el resultado

Demostración:

Sea $\omega_0 \in \Omega_c^n(V)$ tal que

$$\begin{aligned} \mathrm{supp}(\omega_0) \subseteq & V \\ \int_V \omega_0 = & 1 \end{aligned}$$

Si $\deg(f) = \int_U f^*\omega$, el resultado se sigue de forma inmediata (usando la expresión obtendida anteriormente).

Para el caso general, por un teorema anterior, se tiene que

$$\omega - c\omega_0 = d\mu$$

donde μ es una (n-1)-forma tal que $\mathrm{supp}(\mu) \subseteq V$ y $c = \int_V \omega$. Como el pullback conmuta con la diferencial exterior, se tiene entonces de la ecuación anterior que

$$\begin{aligned} \int_U f^*\omega - c\int_U f^*\omega_0 = & \int_U d(f^*\mu) \\ = & 0 \end{aligned}$$

ya que $f^*\mu$ es una (n-1)-forma en el abierto V, el cual es conexto, luego por el Lema de Poincaré, su integral es cero y así:

$$\int_U f^*\omega = c\int_U f^*\omega_0$$

pero $\int_U f^*\omega_0 = \deg(f)$ y $c = \int_V \omega$. Por tanto:

$$\int_U f^*\omega = \deg(f)\int_V \omega \tag{3.2}$$

□

Proposición 3.4.1
Sean $U, V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ conjuntos abiertos conexos y $f : U \to V$, $g : V \to W$ mapeos propios C^∞. Entonces

$$\deg(g \circ f) = \deg(f)\deg(g) \tag{3.3}$$

Demostración:

□

De la ecuación (3.3) se deduce de forma inmediata el siguiente resultado

---

Teorema 3.4.1
Sea A una matriz no singular $n \times n$ y $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ el mapeo asociado a A. Entonces $\deg(f_A) = 1$ si $\mathrm{Det}(A) > 0$ y $\deg(f_A) = -1$ si $\mathrm{Det}(A) < 0$.

Demostración:

□

3.5. La fórmula de cambio de variable