

Notas Curso Topología Algebraica  
10° Escuela Oaxaqueña de Matemáticas

Cristo Daniel Alvarado

11 de enero de 2025

# Índice general

<b>1. Topología Algebraica</b>	<b>2</b>
El grupo fundamental	2
Caminos y Homotopías: El grupo fundamental	3
Funtorialidad	6
Teorema de Van Kampen	7
Grupo Fundamental de una gráfica	9
Espacios Cubrientes	9
Levantamientos	10
<b>2. Ejercicios y Problemas</b>	<b>12</b>
Preeliminaries: el grupo fundamental	12
Grupo Fundamental: Definiciones y Primeros Ejemplos	16
Espacios Cubrientes	21

---

# CAPÍTULO 1

---

## TOPOLOGÍA ALGEBRAICA

---

### §1.1 EL GRUPO FUNDAMENTAL

---

#### Observación 1.1.1

De ahora en adelante  $X$  y  $Y$  serán espacios topológicos.

#### Definición 1.1.1

Sean  $X$  y  $Y$  espacios. Dos funciones continuas  $f, g : X \rightarrow Y$  son **homotópicas** si  $\exists H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  continua (una **homotopía**) tal que:

$$H(x, 0) = f(x) \text{ y } H(x, 1) = g(x), \quad \forall x \in X$$

Escribimos que  $f \simeq g$ .

#### Definición 1.1.2

Los espacios  $X$  y  $Y$  son **homotópicamente equivalentes** si  $\exists f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow X$  funciones continuas (llamadas **equivalencias homotópicas**) tales que:

$$f \circ g \simeq \mathbb{1}_X \quad \text{y} \quad g \circ f = \mathbb{1}_Y$$

a lo cual escribimos  $X \simeq Y$ .

#### Observación 1.1.2

$\simeq$  define una relación de equivalencia en la clase de espacios topológicos.

#### Demostración:

Ejercicio. ■

---

#### Proposición 1.1.1

Si  $X$  es homeomorfo a  $Y$ , entonces  $X \simeq Y$ .

---

#### Definición 1.1.3

Un espacio  $X$  es **contráctil** si  $X \simeq \{*\}$ .

### Observación 1.1.3

Otra equivalencia es que  $C_p : X \rightarrow X$   $x \mapsto p$  es homotópica a la identidad.

### Ejemplo 1.1.1

$\mathbb{R}^n, I = [0, 1], \mathbb{D}^n$  son contráctiles.

### Definición 1.1.4

Un subespacio  $A$  de  $X$  es **un retracts de  $X$**  si  $\exists r : X \rightarrow A$  continua tal que  $r|_A = \mathbb{1}_A$ . En este caso  $r$  es llamada una **retracción**.

### Definición 1.1.5

Dos funciones son homotópicas relativas a  $A$  si para la función  $H : X \times I \rightarrow Y$  es tal que:

$$H(a, t) = a, \quad \forall a \in A \forall t \in I$$

### Definición 1.1.6

Un retracts  $A$  de  $X$  se llama **retracts por deformación** si  $i \circ x : X \rightarrow X$  es homotópica a  $\mathbb{1}_X$  relativa a  $A$ .

### Ejemplo 1.1.2

$X$  es contráctil si y sólo si  $\forall p \in X, \{p\} \subseteq X$  es un retracts por deformación.

### Ejemplo 1.1.3

$\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C} \setminus 0$  es un retracts por deformación.

### Ejemplo 1.1.4

$\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C} \setminus \{p, q\}$  es un retracts por deformación (con  $p \neq q$ ). En este caso,  $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$  es la suma puntuada (o wedge). En este caso:

$$\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1 / x \sim y$$

donde  $x$  está en la primer esfera y  $y$  en la segunda.

### Ejemplo 1.1.5

$\underbrace{\mathbb{S}^1 \vee \dots \vee \mathbb{S}^1}_{n-\text{veces}}$  la rosa de  $n$ -pétalos es una deformación de retracción de  $\mathbb{C} \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ .

### Ejemplo 1.1.6

El círculo central de la banda de Möbius es retracts por deformación de  $X$ .

Surge naturalmente la siguiente pregunta:

*¿Cuándo dos espacios topológicos  $X$  y  $Y$  NO son topológicamente equivalentes?*

La topología algebraica nos da repuestas para este tipo de preguntas, ya que traducimos el problema a algo algebraico para luego resolverlo a partir de invariantes algebraicos.

## §1.2 CAMINOS Y HOMOTOPÍAS: EL GRUPO FUNDAMENTAL

**Definición 1.2.1**

Sea  $X$  espacio topológico. Un **camino de  $p$  a  $q$  en  $X$**  (con  $p, q \in X$ ) es una función continua  $f : [0, 1] \rightarrow X$  tal que  $f(0) = p$  y  $f(1) = q$ .

**Definición 1.2.2**

Dos caminos  $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow X$  de  $p \in X$  a  $q \in X$  son **homotópicos** si  $\exists H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  continua tal que:

$$H|_{[0,1] \times \{0\}} = \gamma_0, H|_{[0,1] \times \{1\}} = \gamma_1$$

$$\text{y, } H|_{\{0\} \times [0,1]} = p \text{ y } H|_{\{1\} \times [0,1]} = q.$$

**Observación 1.2.1**

En cierto sentido, la familia de caminos:

$$\left\{ \gamma_t = H|_{[0,1] \times \{t\}} \mid t \in [0, 1] \right\}$$

deforma al camino  $\gamma_0$  en  $\gamma_1$ .

**Proposición 1.2.1**

$\simeq$  es una relación de equivalencia en el conjunto de caminos en  $X$  de  $p$  a  $q$ .

**Observación 1.2.2**

Escribimos  $[\gamma]$  para la clase de  $\gamma$ .

**Lema 1.2.1**

Sea  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  un camino de  $p$  a  $q$  y  $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  continua. Entonces,  $\gamma \simeq \gamma \circ \varphi$ .

En otras palabras, reparametrizar da caminos homotópicos. Más aún, da básicamente el mismo recorrido a diferentes velocidades.

**Definición 1.2.3 (Concatenación de caminos)**

Sean  $\gamma$  un camino de  $p$  a  $q$  en  $X$  y  $\mu$  un camino de  $q$  a  $r$ . Definimos el camino  $\gamma * \mu : [0, 1] \rightarrow X$  de  $p$  a  $r$  como:

$$\gamma * \mu(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \mu(2t - 1) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

**Definición 1.2.4**

Sea  $p \in X$ ,  $e_p : [0, 1] \rightarrow X$  dado por:  $e_p(t) = p$  para todo  $t \in [0, 1]$  es el **camino constante** de  $p$  a  $p$ .

**Lema 1.2.2**

Sean  $\gamma_0 \simeq \gamma_1$  caminos de  $p$  a  $q$  y  $\mu_0 \simeq \mu_1$  caminos de  $q$  a  $r$ . Entonces:  $\gamma_0 * \mu_0 \simeq \gamma_1 * \mu_1$ .

**Lema 1.2.3**

Sea  $\gamma$  camino de  $p$  a  $q$ ,  $\mu$  de  $q$  a  $r$  y  $\tau$  de  $r$  a  $s$ . Entonces,  $\gamma * (\mu * \tau) \simeq (\gamma * \mu) * \tau$ .

---

**Lema 1.2.4**

Sea  $\gamma$  camino de  $p$  a  $q$ . Entonces:

$$\gamma * e_p \simeq \gamma \simeq e_p * \gamma$$

---

**Definición 1.2.5**

Sea  $\gamma$  un camino de  $p$  a  $q$ . El **camio inverso**  $\bar{\gamma} : [0, 1] \rightarrow X$  de  $q$  a  $p$  está dado por:

$$\bar{\gamma}(t) = \gamma(1 - t), \quad \forall t \in [0, 1]$$

---

**Lema 1.2.5**

$\gamma * \bar{\gamma} \simeq e_p$ ,  $\bar{\gamma} * \gamma \simeq e_q$  y  $\bar{\bar{\gamma}} = \gamma$ .

---

**Definición 1.2.6**

Un camino es **cerrado/lazo** si sus extremos coinciden.

**Definición 1.2.7**

Decimos que  $\gamma$  es un **lazo basado en**  $x_0 \in X$  si  $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ .

**Definición 1.2.8**

Sea  $x_0 \in X$ . El **grupo fundamental de  $X$  con punto base en  $x_0$**  es el conjunto  $\pi_1(X, x_0)$  dado por:

$$\pi_1(X, x_0) = \left\{ [\gamma] \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow X \text{ es un lazo basado en } x_0 \in X \right\}$$

con el producto dado por el inducido por la concatenación de caminos.

**Observación 1.2.3**

$*$  es asociativa,  $[e_{x_0}]$  es el elemento neutro y  $[\bar{\gamma}]$  es el inverso de  $[\gamma]$ .

**Ejemplo 1.2.1**

$$\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) = \{[e_{x_0}]\}.$$

**Ejemplo 1.2.2**

Si  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  tiene forma de estrella relativo a  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , entonces  $\pi_1(U, x_0) = \langle e \rangle$ .

**Observación 1.2.4**

Veremos que:

(a)  $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ .

(b)  $\pi_1(\mathbb{S}^n, x_0) \cong \langle e \rangle$  si  $n \geq 2$ .

(c)  $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{p, q\}, x_0) \cong F_2$ , el grupo libre en dos elementos.

**Definición 1.2.9**

Si  $X$  arco-conexo tal que  $\pi(X, x_0) = \langle e \rangle$ ,  $X$  es llamado **simplemente conexo**.

**Lema 1.2.6 (Cambio de punto base)**

Sea  $X$  espacio topológico y  $\gamma$  un camino de  $p$  a  $q$ . Definimos  $\varphi_\gamma : \pi_1(X, p) \rightarrow \pi_1(X, q)$  dada por:

$$[\delta] \mapsto [\gamma * \delta * \bar{\gamma}]$$

Entonces,  $\varphi_\gamma$  es un homomorfismo de grupos que solo depende de la clase de homotopía de  $\gamma$ .

**Lema 1.2.7**

Se tiene que:

$$\begin{aligned}\varphi_{[\gamma]} \circ \varphi_{[\bar{\gamma}]} &= \mathbb{1}_{\pi_1(X, q)} \\ \varphi_{[\bar{\gamma}]} \circ \varphi_{[\gamma]} &= \mathbb{1}_{\pi_1(X, p)}\end{aligned}$$

**Corolario 1.2.1**

$\varphi_{[\gamma]}$  es un isomorfismo de grupos.

**Lema 1.2.8**

Si  $p, q$  están en la misma componentente arco-conexa, entonces  $\pi_1(X, p) = \pi_1(X, q)$ .

**§1.3 FUNTORIALIDAD****Observación 1.3.1**

Podemos ver al grupo fundamental como un funtor:

$$\pi_1 : \text{Top}_* \rightarrow \text{Grp}$$

tal que  $(X, x) \mapsto \pi_1(X, x)$ .

**Proposición 1.3.1**

Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua y  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  un camino de  $p$  a  $q$ . Definimos  $f_*(\gamma) = f \circ \gamma$ .

- (a)  $f_*(\gamma)$  es un camino de  $Y$  que une a  $f(p)$  con  $f(q)$ .
- (b) Si  $\gamma \simeq \gamma'$  entonces  $f_*(\gamma) \simeq f_*(\gamma')$ .
- (c)  $\gamma$  es un camino de  $p$  a  $q$  implica que  $f_*(\gamma * \mu) =$ .
- (d) Si  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow Z$  son funciones continuas, entonces:

$$g_* \circ f_* = g_* \circ f_*$$

- (e)  $(\mathbb{1}_X)_* = \mathbb{1}_{\pi_1(X, x_0)}$ .

Con lo anterior estamos diciendo que  $\pi_1$  es un funtor covariante de la categoría de espacios topológicos puntuados en la categoría de grupos.

---

**Teorema 1.3.1**

$\pi_1$  es un invariante de homeomorfismo, es decir si  $X \cong Y$ , entonces  $\pi_1(X, x_0) \stackrel{f_0}{\cong} \pi_1(Y, f(x_0))$ .

---

**Lema 1.3.1**

Sean  $f, g : X \rightarrow Y$  y  $x_0 \in X$ . Si  $f \simeq g$  relativas a  $x_0$ , entonces:

$$f_* = g_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$$

---

**Teorema 1.3.2**

Sea  $f : X \rightarrow Y$  y  $y_0 = f(x_0)$ . Si  $f$  es una equivalencia de homotopía, entonces  $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$  es un isomorfismo, es decir que  $\pi_1$  es un invariante de homotopía.

---

**Teorema 1.3.3**

Si  $A$  es un retracto por deformación de  $X$  y  $x_0 \in A$ , entonces el mapeo inclusión  $i : A \rightarrow X$  induce un homomorfismo:

$$i_* : \pi_1(A, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

---

**Teorema 1.3.4**

Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos arco-conexos,  $x_0 \in X$  y  $y_0 \in Y$ , entonces:

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

---

**Ejemplo 1.3.1**

$$\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, (0, 0)) \cong \mathbb{Z}^2.$$

**Observación 1.3.2**

En particular, si  $X$  es contráctil, entonces:

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(Y, y_0)$$

---

---

## §1.4 TEOREMA DE VAN KAMPEN

---

**Proposición 1.4.1**

Sea  $X = U \cup V$  donde  $U$  y  $V$  son abiertos arco-conexos y  $U \cap V$  es arco conexo. Tomemos  $x_0 \in X$ . Sean  $i : (U, x_0) \rightarrow (X, x_0)$  y  $j : (V, x_0) \rightarrow (X, x_0)$  los homomorfismos inducidos. Entonces, las imágenes de:

$$i_* : \pi_1(U, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

$$j_* : \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

generan el grupo  $\pi_1(X, x_0)$ , es decir que el homomorfismo inducido:

$$\psi : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

es sobreyectivo.



### Demostración:

La estrategia de la prueba consiste en dividir el dominio de un lazo con punto base  $x_0$  en intervalos más pequeños tales que las imágenes de cada uno de estos esté en  $U$  o  $V$ . En esencia, queremos escribir a  $[\gamma]$  como producto de elementos en cada uno de los grupos fundamentales (no necesariamente va a ser grupo libre, por lo que el homomorfismo será solamente sobreyectivo!). ■

#### Observación 1.4.1

Hay un teorema de forma más general que el anterior. Si  $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$  todos los elementos de la unión abiertos arco-conexos con  $x_0 \in X$  en cada uno de ellos y cada una de las intersecciones  $U_\alpha \cap U_\beta$  es arco conexa, entonces  $\pi_1(X, x_0)$  está generado por las imágenes de  $(i_\alpha)_* : \pi_1(U_\alpha, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ .

#### Ejemplo 1.4.1

Tomemos  $X = \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ . Considere los puntos  $p = (0, 0, 1)$  y  $q = (0, 0, -1)$ . Consideremos los abiertos:

$$\begin{aligned} U &= \mathbb{S}^2 \setminus \{p\} \cong \mathbb{R}^2 \\ V &= \mathbb{S}^2 \setminus \{q\} \cong \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

se tiene que  $U \cap V = \mathbb{S}^2 \setminus \{p, q\}$  es arco conexo,  $U$  y  $V$  son arco conexos y  $\mathbb{S}^2 = U \cup V$ , por lo que el homomorfismo:

$$\psi : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^2, x_0)$$

es epimorfismo, pero como  $U$  y  $V$  son contráctiles, se sigue que:

$$\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) = \langle e \rangle$$

luego,  $\pi_1(\mathbb{S}^2, x_0) = \langle e \rangle$ .

#### Ejercicio 1.4.1

¿Cuál es el grupo fundamental de  $\pi_1(\mathbb{S}^n, x_0)$  con  $n \geq 3$ ? ¿Qué sucede si  $n = 1$ ?

#### Ejercicio 1.4.2

Prueba que  $\mathbb{R}^2$  no es homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  si  $n \neq 2$ .

### Demostración:

Suponga que son homeomorfos. Se tienen dos casos:

- $n = 1$
- $n \geq 3$ . Considere el

■

#### Teorema 1.4.1 (Teorema de Seifert-Van Kampen)

Sea  $X = U \cup V$  y  $x_0 \in U \cap V$  con  $U, V$  y  $U \cap V$  abiertos arco-conexos. Sean  $i_1 : U \rightarrow X$ ,  $i_2 : V \rightarrow X$  y  $j_1 : U \cap V \rightarrow U$  y  $j_2 : U \cap V \rightarrow V$  los mapeos inclusión. Entonces, el morfismo inducido por  $i_1$  y  $i_2$

$$\psi : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

y más aún,

$$\ker(\psi) = \langle \langle (j_1)_*[\gamma] ((j_2)_*([\gamma]))^{-1} = [\gamma] \in \pi_1(U \cap V, x_0) \rangle \rangle$$

(subgrupo normal que contiene a lo de adentro) es decir,

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_1(U, x_0) *_{\pi_1(U \cap V, x_0)} \pi_1(V, x_0)$$

es el producto amalgamado respecto al grupo formado por la intersección.

### Ejercicio 1.4.3

Se tiene que  $\pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1, x_0) \cong F_2$  (probar cada detalle de la demostración junto con las homotopías deseadas).

### Ejercicio 1.4.4

$\pi_1(\bigvee_{i=1}^n \mathbb{S}^1, x_0) \cong F_n$ .

## §1.5 GRUPO FUNDAMENTAL DE UNA GRÁFICA

Resulta que:

- Todo árbol es contráctil.
- Toda gráfica conexa tiene un árbol maximal.

### Definición 1.5.1

Sea  $X$  una gráfica. Un **subárbol maximal** es una subgráfica de  $X$  que es un árbol y es tal que  $V(T) = V(X)$ .

### Teorema 1.5.1

Sea  $X$  una gráfica conexa y  $x_0 \in V(X)$ . Entonces,  $\pi_1(X, x_0)$  es un grupo libre.

### Demostración:

Sea  $T \subseteq X$  árbol maximal y sea  $\{e_\alpha\}$  las aristas de  $X$  que no están en  $T$ . Dividimos a  $e_\alpha$  en tres intervalos, esto es:

$$e_\alpha = e'_\alpha \cup e''_\alpha \cup e'''_\alpha$$

tal que  $f_\alpha = e'_\alpha \cup e'''_\alpha$  es abierto en  $e_\alpha$ . Tomemos  $G_\alpha = T \cup e_\alpha$  y

$$U_\alpha = T \cup e_\alpha \cup \left( \bigcup_{\substack{\beta \\ \beta \neq \alpha}} f_\beta \right)$$

es tal que  $G_\alpha \subseteq U_\alpha$  con  $U_\alpha$  abierto y  $U_\alpha \simeq G_\alpha$ . Entonces:

$$\pi_1(G_\alpha, x_0) \cong \mathbb{Z}$$

se tiene que  $U_\alpha \cap U_\beta$  es arco-conexo y que  $\pi_1(U_\alpha \cap U_\beta) \cong \langle e \rangle$  ya que  $U_\alpha \cap U_\beta \simeq T$ . Por Van-Kampen (en su versión general, se ocupan que las intersecciones dobles y triples sean arco-conexas). Luego:

$$\pi_1(X, x_0) \cong *_\alpha \pi_1(G_\alpha, x_0) \cong *_\alpha \mathbb{Z}$$

■

## §1.6 ESPACIOS CUBRIENTES

**Definición 1.6.1**

Sea  $B$  un espacio topológico. Un **espacio de recubrimiento** de  $B$  consiste de: un espacio topológico  $E$ , una función continua sobreyectiva  $p : E \rightarrow B$  que satisface:

- $\forall x \in B$  existe un abierto con  $x \in U_x$  tal que  $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha} V_{\alpha}$  y  $p|_{V_{\alpha}} : V_{\alpha} \rightarrow U$  es homeomorfismo, para todo  $\alpha$ .

$p$  es llamada **función cubriente** y  $B$  es llamado **espacio base**.

**Proposición 1.6.1**

Sea  $(E, p)$  un espacio de recubrimiento de  $B$ . Entonces:

1. La **fibra** de  $b \in B$ ,  $p^{-1}b \subseteq E$  tiene la topología discreta.
2.  $p : E \rightarrow B$  es una función abierta.

**Ejemplo 1.6.1**

Dado un espacio  $X$ ,  $\mathbb{1}_X : X \rightarrow X$  es una función cubriente.

**Ejemplo 1.6.2**

Dado un espacio  $X$ , la función  $p : X \times \{1, \dots, n\} \rightarrow X$  dada por:

$$f(x, i) = x, \quad \forall x \in X$$

y para todo  $i = 1, \dots, n$ , es una función cubriente. Este espacio no es arco-conexo ni conexo, por lo que no resulta muy interesante analizarlo.

**Proposición 1.6.2**

Sea  $p : E \rightarrow B$  una función cubriente. Si  $B_0 \subseteq B$  y  $E_0 = p^{-1}(B_0)$ , entonces  $p|_{E_0} : E_0 \rightarrow B_0$  es función cubriente.

**Proposición 1.6.3**

Sean  $p : E \rightarrow B$  y  $p' : E' \rightarrow B'$  funciones cubrientes, entonces:

$$p \times p' : E \times E' \rightarrow B \times B'$$

es función cubriente.

**Ejemplo 1.6.3**

Si  $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ , entonces  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  tal que  $s \mapsto e^{2\pi i s}$ , entonces  $p \times p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}$  es función cubriente.

## §1.7 LEVANTAMIENTOS

**Definición 1.7.1**

Sea  $p : E \rightarrow B$  una función cubriente. Si  $f : X \rightarrow B$  es una función continua, un **levantamiento** de  $f$  es una función continua  $\tilde{f} : X \rightarrow E$  tal que:

$$p \circ \tilde{f} = f$$

**Teorema 1.7.1**

Sea  $p : E \rightarrow B$  una función cubriente.

1. Para cada camino  $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$  que comienza en  $x_0 \in B$  y  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ , existe un único levantamiento  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow E$  que empieza en  $\tilde{x}_0$ .
2. Para cada homotopía  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow B$  de caminos que empiezan en  $x_0 \in B$  y cada  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$  existe un único levantamiento  $\tilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow E$  que es una homotopía de caminos que comienzan en  $\tilde{x}_0$

Si  $p : E \rightarrow B$  es una función cubriente con  $p(e_0) = b_0$ , entonces la función  $\phi : \pi_1(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0)$ ,  $[\gamma] \mapsto \tilde{\gamma}(1)$ , está bien definida, donde  $\tilde{\gamma}$  es el único levantamiento de  $\gamma$  que empieza en  $e_0$ .

**Teorema 1.7.2**

Se tienen las siguientes propiedades de  $\phi$ :

- Si  $E$  es arco-conexo, entonces  $\phi$  es sobreyectiva.
- Si  $E$  es simplemente conexo, entonces  $\phi$  es inyectiva.

**Proposición 1.7.1**

Sea  $p : E \rightarrow B$  función cubriente y  $p(e_0) = b_0$ .

1. El homomorfismo inducido  $p_* : \pi_1(E, e_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)$  es inyectivo.
2. El subgrupo imagen  $p_*(\pi_1(E, e_0)) \leq \pi_1(B, b_0)$  consiste de las clases de homotopía de lazos en  $B$  basados en  $b_0$  cuyos levantamientos a  $E$  empiezan en  $e_0$  son lazos en  $E$ .

**Proposición 1.7.2**

Sea  $H = p_*(\pi_1(E, e_0))$  la correspondencia  $\phi : \pi_1(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0)$ ,  $[\gamma] \mapsto \tilde{\gamma}(1)$  induce una función inyectiva

$$\phi : \pi_1(B, b_0)/H \rightarrow p^{-1}(b_0)$$

es biyectiva si  $E$  es conexo.

En particular,  $|p^{-1}(b_0)| = [\pi_1(B, b_0) : H]$  llamado **número de hojas de la cubierta**.

**Teorema 1.7.3**

Sea  $B$  arco-conexo, localmente arco-conexo

---

## CAPÍTULO 2

---

# EJERCICIOS Y PROBLEMAS

---

### §2.1 PREELIMINARES: EL GRUPO FUNDAMENTAL

---

**Observación 2.1.1**

Durante todo el curso todas las funciones son continuas a menos que se diga explícitamente lo contrario.

**Ejercicio 2.1.1**

Muestre que el homomorfismo de cambio de punto base  $\beta_h$  depende sólo de la clase de homotopía de  $h$ .

**Demostración:**

Sea  $X$  espacio topológico y  $\beta$  un camino en  $X$  con puntos inicial y final  $p$  y  $q$ . Asumimos probado que  $\beta_h : \pi_1(X, p) \rightarrow \pi_1(X, q)$  es homomorfismo. Veamos que depende solo de la clase de homotopía.

En efecto, sea  $h' : [0, 1] \rightarrow X$  otro camino homotópico a  $h$  y considere el homomorfismo  $\beta_{h'} : \pi_1(X, p) \rightarrow \pi_1(X, q)$  dado por:

$$\beta_{h'}([\gamma]) = [h' * \gamma * \bar{h}']$$

Sea  $\gamma$  un camino en  $X$  con punto base  $p$ , se tiene que como  $h \simeq h'$ , entonces por un lema  $h * \gamma \simeq \gamma * h'$  y nuevamente por ese mismo lema

$$h * \gamma * \bar{h} \simeq h' * \gamma * \bar{h}'$$

por ende,

$$[h * \gamma * \bar{h}] = [h' * \gamma * \bar{h}']$$

es decir que:

$$\beta_h([\gamma]) = \beta_{h'}([\gamma])$$

de forma inmediata se sigue que ambos homomorfismos son iguales.

Ahora, suponga que  $\beta_h$  y  $\beta_{h'}$  son dos homomorfismos tales que:

$$\beta_h = \beta_{h'}$$

probaremos que  $h = h'$ . En efecto, por la igualdad se tiene que:

$$h * \gamma * \bar{h} \simeq h' * \gamma * \bar{h}'$$

por ende,

$$\gamma \simeq \bar{h} * h' * \gamma * \bar{h}' * h$$

para todo camino  $\gamma$ . Tomando clases sucede que:

$$[\gamma] = [\bar{h} * h'] * [\gamma] * [\overline{h' * h}], \quad \forall [\gamma] \in \pi_1(X, p)$$

y, por la estructura de grupo de  $\pi_1(X, p)$  debe tenerse que este mapeo  $[\gamma] \mapsto [\bar{h} * h'] * [\gamma] * [\overline{h' * h}]$  es el homomorfismo trivial, lo cual implica que  $[\bar{h} * h']$  está en el centralizador de  $\pi_1(X, p)$ . ■

### Ejercicio 2.1.2

Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua. Si  $\alpha, \beta : I \rightarrow X$  son caminos homotópicos muestre que los caminos  $f \circ \alpha$  y  $f \circ \beta$  son homotópicos.

### Demostración:

Suponga que  $\alpha, \beta : I \rightarrow X$  son homotópicos, entonces existe una función  $H : I \times I \rightarrow X$  continua tal que:

$$H(s, 0) = \alpha(s), H(s, 1) = \beta(s), \quad \forall s \in I$$

y además,

$$H(0, t) = \alpha(0) = \beta(0), H(1, t) = \alpha(1) = \beta(1), \quad \forall t \in I$$

Considere la función  $G : I \times I \rightarrow Y$  dada por:

$$G(s, t) = f \circ H(s, t)$$

como  $f$  y  $H$  son funciones continuas, entonces  $G$  es continua y cumple por las condiciones anteriores que:

$$G(s, 0) = f(H(s, 0)) = f \circ \alpha(s), G(s, 1) = f(H(s, 1)) = f \circ \beta(s), \quad \forall s \in I$$

y,

$$G(0, t) = f(H(0, t)) = f \circ \alpha(0) = f \circ \beta(0), G(1, t) = f(H(1, t)) = f \circ \alpha(1) = f \circ \beta(1), \quad \forall t \in I$$

por lo cual, se sigue que los caminos  $f \circ \alpha$  y  $f \circ \beta$  son homotópicos. ■

### Ejercicio 2.1.3

Si  $X_0$  es la componente conexa por caminos del espacio  $X$  que contiene al punto base  $x_0$ , muestre que la inclusión  $i : X_0 \rightarrow X$  induce un isomorfismo  $i_* : \pi_1(X_0, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  dado por  $[\gamma] \mapsto [i \circ \gamma]$ .

Note que hay que mostrar que  $i_*$  está bien definido, es un homomorfismo y es biyectivo.

### Demostración:

Veamos que está bien definido. Sean  $\gamma_1, \gamma_2$  caminos en  $X_0$  con punto base  $x_0$  tales que  $\gamma_1 \simeq \gamma_2$ . Se tiene que por el ejercicio anterior que  $i \circ \gamma_1 \simeq i \circ \gamma_2$ , luego  $[i \circ \gamma_1] = [i \circ \gamma_2]$ , es decir que  $i_*([\gamma_1]) = i_*([\gamma_2])$ , por lo que  $i_*$  está bien definido.

Veamos ahora que es homeomorfismo. En efecto, sean  $\gamma_1, \gamma_2$  caminos en  $X_0$  con punto base  $x_0$ , se tiene que:

$$i_*(\gamma_1 * \gamma_2) = [i \circ (\gamma_1 * \gamma_2)]$$

Afirmamos que:

$$i \circ (\gamma_1 * \gamma_2) \simeq (i \circ \gamma_1) * (i \circ \gamma_2)$$

En efecto, esto se tiene pues  $i$  es el mapeo inclusión.

Por lo cual,

$$\begin{aligned}i_*(\gamma_1 * \gamma_2) &= [(i \circ \gamma_1) * (i \circ \gamma_2)] \\&= [i \circ \gamma_1] * [i \circ \gamma_2] \\&= i_*([\gamma_1]) * i_*([\gamma_2])\end{aligned}$$

así que  $i_*$  es homeomorfismo.

Veamos que es isomorfismo. Primero notemos que es monomorfismo. En efecto, si  $\gamma$  es un camino tal que  $i_*([\gamma]) = [e_{x_0}]$ , entonces:

$$i \circ \gamma \simeq e_{x_0}$$

pero, notemos que  $i \circ \gamma = \gamma$ , por lo que  $\gamma \simeq e_{x_0}$ , es decir que  $[\gamma] = [e_{x_0}]$ .

Ahora veamos que es epimorfismo. Si  $\eta$  es un camino en  $X$  con punto base  $x_0$ , por ser camino y al tenerse que  $x_0 \in X_0$  siendo  $X_0$  componente arco-conexa de  $X$ , debe suceder que  $\gamma([0, 1]) \subseteq X_0$ , luego tomando  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X_0$ :

$$\gamma(t) = \eta(t), \quad \forall t \in [0, 1]$$

se sigue que  $i_*([\gamma]) = [\eta]$ . ■

#### Ejercicio 2.1.4

Muestre que no existen retracciones en los siguientes casos:

- (a)  $X = \mathbb{R}^3$  con  $A$  cualquier subespacio homeomorfo a  $\mathbb{S}^1$ .
- (b)  $X = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$  con  $A$  su frontera  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ .
- (c)  $X$  la banda de Möbius y  $A$  su círculo frontera.

**Demostración:** ■

#### Ejercicio 2.1.5

Muestre que cualquier homomorfismo  $\pi_1(\mathbb{S}^1) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1)$  puede ser realizado como el homomorfismo inducido  $\psi_*$  de una función  $\psi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ .

**Demostración:** ■

#### Ejercicio 2.1.6

Muestre que el complemento de un conjunto finito de puntos en  $\mathbb{R}^n$  es simplemente conexo si  $n \geq 3$ .

**Demostración:**

Sea  $n \geq 3$  y tomemos  $\{x_1, \dots, x_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ . Se tienen dos casos:

1.  $0 \notin \{x_1, \dots, x_m\}$ . Existe una recta que pasa por 0 tal que no pasa por ninguno de este conjunto finito de puntos, digamos la ecuación de esta recta es:
-

**Ejercicio 2.1.7**

Calcule el grupo fundamental del espacio obtenido de dos toros  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  identificando el círculo  $\mathbb{S}^1 \times \{x_0\}$  en un toro con el correspondiente círculo  $\mathbb{S}^1 \times \{x_0\}$  en el otro toro.

**Solución:**

**Ejercicio 2.1.8**

Calcula el grupo fundamental de la botella de Klein, el plano proyectivo  $\mathbb{R}P^2$  y  $\mathbb{S}^3$ .

**Solución:**

**Ejercicio 2.1.9**

Calcula el grupo fundamental del complemento de un conjunto finito de puntos en  $\mathbb{R}^2$ .

**Solución:**

**Ejercicio 2.1.10**

Demuestra que  $\pi_1(\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2)$  no es numerable.

**Demostración:**

**Ejercicio 2.1.11**

Sea  $X$  el espacio cociente obtenido de  $\mathbb{S}^2$  identificando el polo norte con el polo sur. Calcula  $\pi_1(X)$ .

**Solución:**

**Ejercicio 2.1.12**

El **mapping torus**  $T_f$  de una función  $f : X \rightarrow X$  es el cociente obtenido de  $X \times I$  identificando cada punto  $(x, 0)$  con  $(f(x), 1)$ . En el caso  $X = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$  con  $f$  preservando el punto base, calcule una presentación de  $\pi_1(T_f)$  en términos del homomorfismo inducido  $f_* : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(X)$ .

**Solución:**

**Ejercicio 2.1.13**

Demuestre que el subespacio de  $\mathbb{R}^3$  que es la unión de esferas de radio  $\frac{1}{n}$  y centro  $(\frac{1}{n}, 0, 0)$  para  $n = 1, 2, \dots$ , es simplemente conexo.

**Demostración:**





**Ejercicio 2.1.14**

Sea  $X$  el subespacio de  $\mathbb{R}^2$  que consiste de la unión de los círculos  $C_n$  de radio  $n$  y centro  $(n, 0)$  para  $n = 1, 2, \dots$ . Calcule  $\pi_1(X)$ .

**Solución:**

□

**Ejercicio 2.1.15**

Calcula el grupo fundamental de cualquier árbol conexo.

**Solución:**

Es trivial.

□

## §2.2 GRUPO FUNDAMENTAL: DEFINICIONES Y PRIMEROS EJEMPLOS

**Ejercicio 2.2.1**

Haga lo siguiente:

(a) Prueba que  $\mathbb{R}$  y  $I$  son espacios contráctiles.

**Ejercicio 2.2.2**

Sea  $X \subseteq \mathbb{R}^3$  la unión de  $n$  líneas que pasan por el origen. Calcula  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus X)$ .

**Solución:**

□

**Ejercicio 2.2.3**

Si  $m \geq 2$ , entonces  $\pi_1(\mathbb{S}^m, p) \cong \langle e \rangle$ .

**Demostración:**

Antes, recordemos que:

$$\mathbb{S}^{n-1} \setminus \{p\} \cong \mathbb{R}^n$$

para todo  $p \in \mathbb{S}^{n-1}$  (esta es la proyección estereográfica  $m$ -dimensional). Ahora, sean  $p, -p \in \mathbb{S}^m$  puntos antipodales considere los abiertos  $U, V \subseteq \mathbb{S}^m$  dados por:

$$\begin{aligned} U &= \mathbb{S}^m \setminus \{p\} \\ V &= \mathbb{S}^m \setminus \{-p\} \end{aligned}$$

éstos cumplen que  $\mathbb{S}^m \cong U \cup V$ . Se tiene que  $U \cap V$  es un conjunto arco conexo no vacío si  $m \geq 2$  ya que  $\mathbb{S}^m \setminus \{p, -p\}$  es un conjunto arco conexo. En caso de que  $m = 1$  se tendría que el  $U \cap V$  no es arco conexo. Si  $m = 0$  se tendría que  $U \cap V = \emptyset$ .

Sea  $x_0 \in U \cap V$ , por Seifert-Van Kampen el homomorfismo inducido por los mapeos inclusión de  $U$  y  $V$  en  $\mathbb{S}^m$ , respectivamente:

$$\psi : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^m, x_0)$$

es suprayectivo, por el recordatorio del inicio de la demostración se tiene que:

$$\pi_1(U, x_0) = \pi_1(\mathbb{S}^m \setminus \{p\}, x_0) \cong \pi_1(\mathbb{R}^{m+1}, 0) \cong \langle e \rangle$$

ya que  $\mathbb{R}^{m+1}$  es convexo (en particular tiene forma de estrella respecto a cualquier punto) de forma análoga:

$$\pi_1(U, x_0) \cong \langle e \rangle$$

así que:  $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) = \langle e \rangle * \langle e \rangle = \langle e \rangle$ , por ser  $\psi$  suprayectiva debe suceder que  $\pi(\mathbb{S}^m, x_0) \cong \langle e \rangle$ . ■

#### Ejercicio 2.2.4

Demuestra que  $\mathbb{R}^2$  no es homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  para  $n \neq 2$ .

#### Demostración:

Analicemos varios casos:

- (1)  $n = 1$ : En caso de que fuesen homeomorfos bajo el homeomorfismo  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , se tendría que los conjuntos:

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \cong \mathbb{R} \setminus \{f(0, 0)\}$$

son homeomorfos, donde  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  tiene una componente conexa y  $\mathbb{R} \setminus \{f(0, 0)\}$  tiene dos, cosa que no puede suceder ya que todo homeomorfismo preserva las componentes conexas.

- (2)  $n > 2$ : Suponga que existe tal homeomorfismo, digamos  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ , en particular los espacios

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \cong \mathbb{R}^n \setminus \{f(0, 0)\}$$

son homeomorfos.

**Afirmación:**  $\mathbb{S}^{m-1}$  es retracto de deformación de  $\mathbb{R}^m \setminus \{p\}$ . En efecto, sea  $p \in \mathbb{R}^m$ , como  $\mathbb{R}^m \setminus \{p\} \cong \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ , podemos asumir que  $p = 0$ . Considere la función  $r : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}$  dada por:

$$x \mapsto \frac{x}{\|x\|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$$

claramente esta función es continua y es tal que  $r|_{\mathbb{S}^{m-1}} = \mathbb{1}_{\mathbb{S}^{m-1}}$ . Veamos que:

$$i \circ r \simeq \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$$

En efecto, considere la función continua  $H : I \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  dada por:

$$H(x, t) = tx + (1 - t) \frac{x}{\|x\|}$$

se tiene que que:

$$H(x, 0) = \frac{x}{\|x\|} = r(x) = i \circ r(x)$$

y,

$$H(x, 1) = x = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}(x)$$

por lo cual  $i \circ r \simeq \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ . Por tanto,  $\mathbb{S}^{m-1}$  es retracto de deformación de  $\mathbb{R}^m \setminus \{p\}$ , en particular:

$$\pi_1(\mathbb{S}^{m-1}, q) = \pi_1(\mathbb{R}^m \setminus \{p\}, q)$$

para todo  $q \in \mathbb{S}^{m-1}$ .

Ahora, como los espacios  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  y  $\mathbb{R}^n \setminus \{f(0, 0)\}$  son homeomorfos y arco-conexos, se tiene que sus grupo fundamentales en cualquier punto deben ser isomorfos, es decir:

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) \cong \pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{f(0, 0)\})$$

projective plane - disc = Möbius band  
(aka  $\mathbb{RP}^2 = M \cup D^2$ )

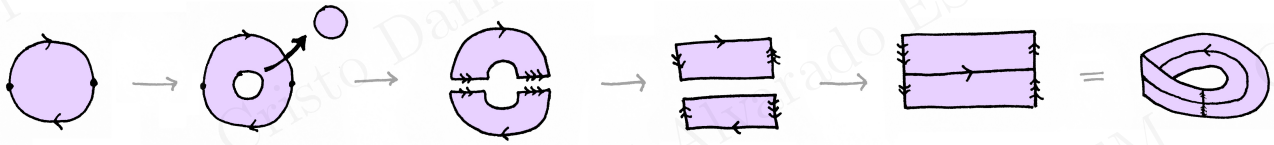


Figura 2.1: Construcción de la banda de Möbius en el espacio  $\mathbb{RP}^2$ .

lo probado en la afirmación anterior implica que:

$$\pi_1(\mathbb{S}^1, q) \cong \pi_1(\mathbb{S}^n, q)$$

donde  $\pi_1(\mathbb{S}^1, q) \cong \mathbb{Z}$  y  $\pi_1(\mathbb{S}^1, q) \cong \langle e \rangle \#_c$ .

Por tanto, de los dos incisos anteriores se sigue que  $\mathbb{R}^2$  no puede ser homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ . ■

### Ejercicio 2.2.5

Calcula el grupo fundamental de la botella de Klein, el plano proyectivo  $\mathbb{RP}^2$  y  $\mathbb{S}^3$ .

### Solución:

Por un ejercicio anterior se tiene que  $\mathbb{S}^3 \cong \langle e \rangle$ .

Calculemos el grupo fundamental de  $\mathbb{RP}^2$ . Antes, notemos que:

$$\mathbb{RP}^2 \setminus \mathbb{D}^2 \cong X$$

donde  $\mathbb{D}^2$  es el 2-disco y  $X$  es la banda de Möbius.

Considere los abiertos  $U, V \subseteq \mathbb{RP}^2$  dados por:  $U = \mathring{\mathbb{D}}^2$  y  $V = \mathbb{RP}^2 \setminus \widetilde{\mathbb{D}}^2$ , donde  $\widetilde{\mathbb{D}}^2 \subseteq \mathbb{D}^2$  es un disco de radio estrictamente menor que el radio de  $\mathbb{D}^2$ . Se tiene que:

$$\mathbb{RP}^2 = U \cup V$$

Los dos conjuntos  $U$  y  $V$  son arco-conexos. Además, se tiene que  $U \cap V$  es arco-conexo, pues éste coincide con el conjunto:

$$U \cap V = \mathring{\mathbb{D}}^2 \setminus \widetilde{\mathbb{D}}^2$$

es (en términos descriptivos) un aro. Por Seifert-Van Kampen para  $x_0 \in U \cap V$  se tiene que:

$$\pi_1(\mathbb{RP}^2, x_0) \cong \pi_1(U, x_0) *_{\pi_1(U \cap V, x_0)} \pi_1(V, x_0)$$

donde:

$$\pi_1(U, x_0) = \pi_1(\mathring{\mathbb{D}}^2, x_0) \cong \langle e \rangle$$

por ser un conjunto convexo (en particular, tiene forma de estrella respecto a  $x_0$ ), y

$$\pi_1(V, x_0) = \pi_1(\mathbb{RP}^2 \setminus \widetilde{\mathbb{D}}^2, x_0) \cong \pi_1(X, y_0)$$

siendo  $\pi_1(X, y_0)$  el grupo fundamental de la banda de Möbius, el cuál es  $\pi_1(\mathbb{S}^1, y_0) \cong \mathbb{Z}$ . Finalmente:

$$\pi_1(U \cap V) \cong \mathbb{Z}$$

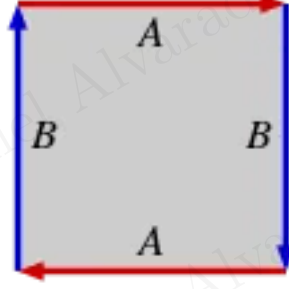


Figura 2.2: Modelo del espacio proyectivo  $\mathbb{R}P^2$  como cociente a partir de la identificación de los lados de un cuadrado.

ya que  $U \cap V$  es homotópico a  $\mathbb{S}^1$ , con grupo fundamental  $\mathbb{Z}$ . Por ende:

$$\pi_1(\mathbb{R}P^2, x_0) \cong \langle e \rangle *_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$$

Calculemos este grupo. Recordemos que:

$$\langle e \rangle * \mathbb{Z} / \langle \langle R \rangle \rangle$$

donde:

$$R = \left\{ (i_1)_*([\gamma])(i_2)_*([\gamma])^{-1} \mid [\gamma] \in \pi_1(U \cap V, x_0) \right\}$$

siendo  $(i_1)_* : \pi_1(U \cap V, x_0) \rightarrow \langle e \rangle$  y  $(i_2)_* : \pi_1(U \cap V, x_0) \rightarrow \mathbb{Z}$  los homomorfismos dados a partir del mapeo inclusión. En particular,  $i_1$  es trivial, por lo que todo depende de  $i_2$ . Notamos que:

$$\langle e \rangle * \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$$

Así que todo se reduce a:

$$\pi_1(\mathbb{R}P^2, x_0) \cong \mathbb{Z} / \langle \langle R \rangle \rangle$$

con:

$$R = \left\{ (i_2)_*([\gamma]) \mid [\gamma] \in \pi_1(U \cap V, x_0) \right\}$$

Analicemos a  $(i_2)_* : \pi_1(U \cap V, x_0) \rightarrow \pi_1(U, x_0)$ , es decir a:

$$(i_2)_* : \pi_1(\mathbb{D}^2 \setminus \widetilde{\mathbb{D}}^2, x_0) \rightarrow \mathbb{R}P^2 \setminus \widetilde{\mathbb{D}}^2$$

Como todos los subgrupos normales de  $\mathbb{Z}$  son de la forma  $n\mathbb{Z}$ , entonces debe existir  $n \in \mathbb{N}$  tal que:

$$\pi_1(\mathbb{R}P^2, x_0) \cong \mathbb{Z} / n\mathbb{Z}$$

Sea ahora  $[\gamma]$  una clase de camino en  $\pi_1(U \cap V, x_0)$  y considere el mapeo inclusión  $i_2 : U \cap V \rightarrow U$ . Ahora, se tiene que el homomorfismo que hace que  $U \simeq \mathbb{S}^1$  es tal que todo elemento de  $U$  es enviado a la frontera del mismo. En términos simples, si  $\gamma$  es un camino que genera al grupo fundamental de  $\pi_1(U, x_0)$ :

$$[\gamma] \mapsto abab$$

(donde  $a$  y  $b$  son elementos de  $\langle e \rangle$  y  $\mathbb{Z}$ , respectivamente y, el producto se considera en el producto libre del grupo). Por ende:

$$[\gamma] \mapsto b^2$$

es mapeado bajo  $(i_2)_*$ , así que:

$$R = \left\{ b^2 \mid [\gamma] \in \pi_1(U \cap V, x_0) \right\}$$

es tal que su cerradura normal visto como subgrupo de  $\mathbb{Z}$  es:

$$\langle \langle R \rangle \rangle \cong 2\mathbb{Z}$$

(pues  $b$  es un generador de  $\mathbb{Z}$ ). Así que:

$$\pi_1(\mathbb{R}P^2, x_0) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Para la botella de Klein... □

### Ejercicio 2.2.6

Sea  $X$  el subespacio de  $\mathbb{R}^2$  que consiste en la unión de los círculos  $C_n$  de radio  $n$  y centro  $(n, 0)$  para  $n \in \mathbb{N}$ . Calcula  $\pi_1(x)$ .

### Solución:

Para cada  $n \in \mathbb{N}$  definamos:

$$U_n = \left( \bigcup_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ m \neq n}} C_m \right)$$

□

### Ejercicio 2.2.7

Obtener el grupo fundamental del toro con Seifert-Van Kampen.

### Solución:

Considere el toro  $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ . Sean  $x, y \in \mathbb{T}$  puntos opuestos del toro. Tomemos  $U = \mathbb{T} \setminus \{p\}$  y  $V = \mathbb{T} \setminus \{q\}$ . El conjunto  $U \cap V = \mathbb{T} \setminus \{p, q\}$  es arco-conexo y, además, se tiene que para  $x_0 \in U \cap V$ :

$$\pi_1(U, x_0) \cong \pi_1(V, x_0) \cong \langle a, b \rangle$$

En efecto, lo probaremos para  $\pi_1(U, x_0)$  (para el otro conjunto el proceso es análogo). Lo que estamos haciendo es *ponchar* al toro y con ello, podemos retraer todos los puntos al conjunto  $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$  como se muestra en la figura:

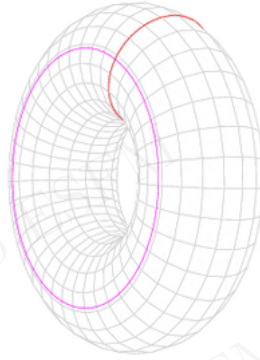


Figura 1. Toro  $\mathbb{T}$ .

tal conjunto tiene como grupo fundamental a  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ . Por el Teorema de Van-Kampen se tiene que:

$$\pi_1(\mathbb{T}, x_0) \cong (\mathbb{Z} * \mathbb{Z}) *_{\pi_1(U \cap V, x_0)} \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

obtenemos a  $\pi_1(U \cap V, x_0)$ . Se tiene que este espacio se retrae a  $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ , que tiene como grupo fundamental a  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ , por lo cual:

$$\pi_1(\mathbb{T}, x_0) \cong F_2 *_{F_3} F_2 = \langle a, b, c, d | R \rangle$$

siendo  $a$  y  $c$  los círculos horizontales (en  $U$ ) y,  $b$  y  $d$  los verticales (en  $V$ ).

Tomemos una clase de camino  $[\gamma]$  en  $\pi_1(U \cap V, x_0)$ . Este camino se expresa como producto de  $x, y, z$  de elementos en  $F_3$  (en ese orden son los anillitos, siendo  $y$  el horizontal). Se tiene que:

- $x$  y  $z$  son mandados en  $\pi_1(U, x_0)$  a  $a$  y  $a^{-1}$  (respectivamente), y  $y$  a  $b$ .
- $x$  y  $z$  son mandados en  $\pi_1(U, x_0)$  a  $c^{-1}$  y  $c$  (respectivamente), y  $y$  a  $d$ .

por lo que, la expresión de  $[\gamma]$  es enviada a algo en  $\langle x, y, z \rangle$  y luego a ese mismo producto cambiando algunas letras. En particular, se tiene que:

$$c^{-1}a, d^{-1}b, \in R,$$

por lo que el producto amalgamado solo tiene dos elementos generadores. Más aún, se tiene que:

$$xy \mapsto ab \quad y \quad xy \mapsto c^{-1}d$$

por lo cual,

$$d^{-1}cab \in R$$

por ende, las relaciones son:

$$\begin{aligned} \pi_1(\mathbb{T}, x_0) &\cong \langle a, b, c, d | a = c, d = c, b^{-1}a^2b = 1 \rangle \\ &\cong \langle a, b | ab = a^{-1}b \rangle \end{aligned}$$

Era más simple con la identificación del toro como espacio cociente. □

### Ejercicio 2.2.8

Sea  $X$  el subespacio de  $\mathbb{R}^3$

## §2.3 ESPACIOS CUBRIENTES

### Ejercicio 2.3.1

Para un espacio cubriente  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  y un subespacio  $A \subseteq X$ , sea  $\tilde{A} = p^{-1}(A)$ . Muestre que la restricción  $p|_{\tilde{A}} : \tilde{A} \rightarrow A$  es un espacio cubriente.

### Demostración:

Sea  $q = p|_{\tilde{A}}$ . Esta función es continua por ser la restricción de una función continua, además es suprayectiva pues  $f$  lo es.

Veamos que cumple la condición deseada. Sea  $x \in A$ , en particular,  $x \in X$ , por lo que existe un abierto  $U_x \subseteq X$  que contiene a  $x$  tal que

$$p^{-1}(U_x) = \bigsqcup_{\alpha \in I} V_\alpha$$

con  $V_\alpha \cong U_x$  para todo  $\alpha \in I$ . Tomemos  $V_x = U_x \cap A$ . Este conjunto es abierto en  $A$  tal que  $x \in V_x$ . Se cumple que:

$$\begin{aligned} p^{-1}(V_x) &= p^{-1}(U_x \cap A) \\ &= p^{-1}(U_x) \cap p^{-1}(A) \\ &= \left( \bigsqcup_{\alpha \in I} V_\alpha \right) \cap \tilde{A} \\ &= \bigsqcup_{\alpha \in I} V_\alpha \cap \tilde{A} \\ &= \bigsqcup_{\alpha \in I} W_\alpha \end{aligned}$$

donde  $W_\alpha = V_\alpha \cap \tilde{A}$ . Claramente la unión es disjunta pues originalmente era la unión disjunta de conjuntos. Veamos pues que la función  $p|_{W_\alpha} = q|_{W_\alpha} : W_\alpha \rightarrow V_x$  es homeomorfismo. En efecto, sea  $\alpha$ . Como  $p|_{V_\alpha}$  es homeomorfismo entre  $V_\alpha$  y  $U_x$ , se tiene que en particular que la función  $q|_{W_\alpha} : W_\alpha \rightarrow q|_{W_\alpha}(W_\alpha)$  también lo es, donde el conjunto el conjunto:

$$W_\alpha = V_\alpha \cap \tilde{A}$$

es homeomorfo a:

$$\begin{aligned} q|_{W_\alpha}(W_\alpha) &= p|_{V_\alpha}(W_\alpha) \\ &= p|_{V_\alpha}(V_\alpha \cap \tilde{A}) \\ &= p|_{V_\alpha}(V_\alpha) \cap p|_{V_\alpha}(\tilde{A}) \\ &= U_x \cap A \\ &= W_x \end{aligned}$$

Se sigue pues que  $q : \tilde{A} \rightarrow A$  es espacio cubriente. ■

### Ejercicio 2.3.2

Sean  $p_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X_1$  y  $p_2 : \tilde{X}_2 \rightarrow X_2$  proyecciones cubrientes. Demuestre que la función  $p_1 \times p_2 : \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2 \rightarrow X_1 \times X_2$  también es una función cubriente.

### Demostración:

Sea  $q = p_1 \times p_2$  dada por:

$$q(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = (p_1(\tilde{x}_1), p_2(\tilde{x}_2))$$

Claramente esta función es continua pues sus componentes son continuas, además es suprayectiva ya que también ambas funciones componentes son suprayectivas.

Sea  $x = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ , entonces existen  $U_{x_1} \subseteq X_1$  y  $U_{x_2} \subseteq X_2$  abiertos que contienen a  $x_1$  y  $x_2$  (respectivamente), tales que:

$$p_1^{-1}(U_{x_1}) = \bigsqcup_{\alpha_1} V_{\alpha_1} \quad \text{y} \quad p_2^{-1}(U_{x_2}) = \bigsqcup_{\alpha_2} V_{\alpha_2}$$

Tomemos  $U_x = U_{x_1} \times U_{x_2}$ . Este conjunto es abierto en  $X_1 \times X_2$  (con la topología producto o de caja). Se tiene que:

$$\begin{aligned} p^{-1}(U_x) &= \left\{ y \in \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2 \mid p(y) \in U_{x_1} \times U_{x_2} \right\} \\ &= \left\{ (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \in \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2 \mid p(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \in U_{x_1} \times U_{x_2} \right\} \\ &= \left\{ (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \in \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2 \mid p_1(\tilde{y}_1) \in U_{x_1} \text{ y } p_2(\tilde{y}_2) \in U_{x_2} \right\} \\ &= \left\{ (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \in \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2 \mid \tilde{y}_1 \in p_1^{-1}(U_{x_1}) \text{ y } \tilde{y}_2 \in p_2^{-1}(U_{x_2}) \right\} \\ &= p_1^{-1}(U_{x_1}) \times p_2^{-1}(U_{x_2}) \\ &= \bigsqcup_{\alpha_1, \alpha_2} V_{\alpha_1} \times V_{\alpha_2} \\ &= \bigsqcup_{\alpha} V_{\alpha} \end{aligned}$$

donde  $V_\alpha = V_{\alpha_1} \times V_{\alpha_2}$  siendo  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$  un indexador de esta familia. Veamos que la función  $p|_{V_\alpha}$  es un homeomorfismo entre  $V_\alpha$  y  $U_x$ , para todo  $\alpha$ . En efecto, se tiene que las funciones:

$$p|_{V_{\alpha_1}} : V_{\alpha_1} \rightarrow U_{x_1} \quad \text{y} \quad p|_{V_{\alpha_2}} : V_{\alpha_2} \rightarrow U_{x_2}$$

son homeomorfismos, en particular al tenerse que  $p|_{V_\alpha} = p|_{V_{\alpha_1}} \times p|_{V_{\alpha_2}}$ , entonces  $p|_{V_\alpha}$  es función continua, biyectiva, con biyección también continua. Así que  $p|_{V_\alpha}$  es homeomorfismo.

Por tanto,  $p = p_1 \times p_2$  es función cubriente. ■

### Ejercicio 2.3.3

Sea  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  un espacio cubriente con  $X$  conexo. Si  $p^{-1}(x_0)$  tiene  $k$ -elementos para algún  $x_0 \in X$ , entonces  $p^{-1}(x)$  tiene  $k$ -elementos para todo  $x \in X$ .

### Demostración:

Supongamos que existe  $x \in X$  tal que  $p^{-1}(x)$  posee una cantidad distinta de  $k$ -elementos. Se tienen dos casos:

- $|p^{-1}(x)| < k = |p^{-1}(x_0)|$ :

■

### Definición 2.3.1

Sea  $X$  espacio topológico y  $G$  un grupo. Una acción  $G \curvearrowright X$  es una **acción de grupo continua** tal que el mapeo:

$$g \cdot x \mapsto x$$

es continuo, para todo  $g \in G$ . En otras palabras, la acción es un homomorfismo entre el grupo  $G$  y el grupo de todos los homeomorfismos de  $X$  en  $X$ . En tal caso, se dice que  $X$  es un  **$G$ -espacio**.

### Ejercicio 2.3.4

Sea  $X$  un  $G$ -espacio, es decir,  $X$  es un espacio topológico en el que  $G$  actúa. ¿Qué condiciones debemos pedir a la acción para que la función cociente  $p : X \rightarrow X/G$  sea un espacio cubriente?

### Solución:

Como  $X$  es un  $G$ -espacio, existe una acción de  $G$  en  $X$ , es decir, un homomorfismo  $\varphi : G \rightarrow \text{Hom}(X)$  (donde el conjunto  $\text{Hom}(X)$  es el conjunto de homeomorfismos de  $X$  en  $X$ ).

Se tiene que la función cociente:

$$p : X \rightarrow X/G, x \mapsto [x]_G$$

donde:  $[x]_G = \{y \in X \mid \exists g \in G \text{ tal que } y = gx\} = G \cdot x$ . Esta función es continua y suprayectiva, por lo que hay que ver cuándo se cumple la condición de los abiertos.

Sea  $x \in X$ , debemos encontrar un subconjunto  $U_{[x]_G}$  de  $X/G$  tal que:

$$p^{-1}(U_{[x]_G}) = \bigsqcup_{\alpha} V_{\alpha}$$

siendo  $V_{\alpha}$  conjuntos abiertos en  $X$  y tales que  $p|_{V_{\alpha}} : V_{\alpha} \rightarrow U_{[x]_G}$  es un homeomorfismo para todo  $\alpha$ .  
□



---

**Proposición 2.3.1**

Sea  $X$  un espacio conexo y localmente arco-conexo, entonces  $X$  es arco-conexo.

---

**Observación 2.3.1**

No todo espacio arco-conexo es localmente arco-conexo.

**Ejercicio 2.3.5**

Sean  $\tilde{X}$  y  $\tilde{Y}$  espacios cubrientes simplemente conexos de espacios arco-conexos y localmente arco-conexos. Muestre que si  $X$  tiene el mismo tipo de homotopía que  $Y$ , entonces  $\tilde{X}$  tiene el mismo tipo de homotopía que  $\tilde{Y}$ .

**Demostración:**

Sean  $x_0 \in X$  y tomemos  $y_0 = f(x_0)$ . Por el teorema de clasificación de espacios de recubrimiento, existe una biyección entre los cubrientes de  $X$  y  $Y$ , con los subgrupos de  $\pi_1(X, x_0)$  y  $\pi_1(Y, y_0)$ . Al ser  $X \simeq Y$ , se tiene que la función:

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0), \quad f_*([\gamma]) \mapsto [f \circ \gamma]$$

es un isomorfismo de grupos. En particular, se tienen los siguientes subgrupos de  $\pi_1(X, x_0)$  y  $\pi_1(Y, y_0)$ :

$$\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \quad \text{y} \quad \pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$$

donde  $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$  y  $\tilde{y}_0 \in \tilde{Y}$  son tales que  $x_0 = p(\tilde{x}_0)$  y  $y_0 = q(\tilde{y}_0)$  (con  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  y  $q : \tilde{Y} \rightarrow Y$  los respectivos cubrientes). Por tanto, como ambos son el grupo trivial (pues son simplemente conexos) el isomorfismo  $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$  debe ser tal que:

$$f_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = \pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$$

**Observación 2.3.2**

Como  $\tilde{X}$  y  $\tilde{Y}$  son simplemente conexos, entonces tienen el mismo tipo de homotopía que un punto, esto es que  $\tilde{X} \simeq \{*\}$  y  $\tilde{Y} \simeq \{*\}$  por lo que, al ser  $\simeq$  una relación de equivalencia, se sigue que  $\tilde{X} \simeq \tilde{Y}$ . ■

**Ejercicio 2.3.6**

Encuentre todos los espacios conexos de 2 y 3 hojas de  $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$  hasta homeomorfismo.

**Solución:**

□

**Ejercicio 2.3.7**

Construye el cubriente universal de los siguientes espacios:  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}P^2$  y  $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$ .

### Solución:

Veamos uno por uno:

- Para el espacio:  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}P^2$  basta con encontrar un cubriente universal de  $\mathbb{T}^n$  y otro de  $\mathbb{R}P^2$  tales que ambos sean simplemente conexos, luego por un ejercicio anterior se seguiría que el producto de ambos es cubriente universal del producto de estos dos espacios y, como:

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

entonces el producto de éstos dos cubrientes universales seguirá siendo cubriente universal.

Recordemos que:

$$\mathbb{T}^n \cong \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{n\text{-veces}}$$

por lo que, como  $\mathbb{S}^1$  tiene como un cubriente universal a  $\mathbb{R}$ , se sigue que  $\mathbb{R}^n$  es cubriente universal de  $\mathbb{T}^n$ .

Ahora para  $\mathbb{R}P^2$ , afirmamos que  $\mathbb{S}^2$  es cubriente universal de la esfera. En efecto, para ello recordemos que el espacio proyectivo es construido a partir de la identificación:

$$\mathbb{R}P^2 = \mathbb{S}^2 / (x \sim -x)$$

Consideremos el mapeo cociente  $q : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$  dado por:

$$x \mapsto [x] = \{x, -x\}$$

esta función es continua y suprayectiva. Sea  $[x]$  una clase y considere el abierto:

$$U_{[x]} = q(U_x) \subseteq \mathbb{R}P^2$$

(ya que  $q$  es función abierta) donde  $U_x \subseteq \mathbb{S}^2$  es tal que  $x \in U_x$  y:

$$U_x = B(x, \delta) \cap \mathbb{S}^2$$

donde  $B(x, \delta)$  es una bola en  $\mathbb{R}^3$  de radio  $d > 0$  que es menor al radio de la esfera  $\mathbb{S}^2$ . Se tiene que:

$$q^{-1}(U_{[x]})$$

tiene dos componentes, dadas por:

$$q^{-1}(U_{[x]}) = U_x \sqcup U_{-x}$$

y,  $q|_{U_x}$  es homeomorfismo (pues es en ese abierto continua, biyectiva y con inversa continua). Así que  $\mathbb{S}^2$  es cubriente universal de  $\mathbb{R}P^2$ .

Por tanto,  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^2$  es cubriente universal de  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}P^2$ .

- Para el espacio:  $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$ , veamos que el espacio:

$$X = \mathbb{R} \sqcup \left( \bigsqcup_{m \in \mathbb{Z}} \mathbb{S}^2 \right) / \{m \sim p_m, \forall m \in \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}\}$$

donde  $p_m$  es el polo norte de la  $m$ -ésima 2-esfera en la unión disjunta es cubriente universal. En efecto, no se complicado verificar (usando Van-Kampen) que este espacio es simplemente conexo. sea  $p : X \rightarrow \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$  dada por:

$$p(s) = \begin{cases} e^{2\pi i s} & \text{si } s \in \mathbb{R} \\ \pi(s) & \text{si } s \in X \setminus \mathbb{R} \end{cases}$$

donde  $\pi : \bigsqcup_{m \in \mathbb{Z}} \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  es la proyección de un elemento de cualquier 2-esfera en la otra 2-esfera, la cual es una función cubriente. Claramente esta función es suprayectiva y continua (por el lema del pegado y por ser  $s \mapsto e^{2\pi i s}$  y  $\pi$  funciones continuas). Veamos que cumple la condición de los abiertos. Se tienen tres casos:

- $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , entonces existe un entero  $m \in \mathbb{Z}$  tal que  $m < x < m+1$ . Tomando este intervalo se sigue, al ser  $s \mapsto e^{2\pi is}$  cubriente universal de  $\mathbb{S}^1$ , que tomando el abierto correspondiente en ese cubrente se sigue el resultado.
- $x \in X \setminus \mathbb{R}$ , existe un abierto  $U_x$  en  $\mathbb{S}^2$  tal que  $x \in U_x \subseteq \mathbb{S}^1 \setminus \{1\}$ . De forma inmediata se sigue que  $p^{-1}(U_x)$  cumple la condición deseada.
- Si  $x \in \mathbb{Z}$ , entonces tomando los dos abiertos resultantes de las dos funciones cubrientes y haciendo su unión, se tiene el resultado.

por los tres incisos se sigue el resultado. □

### Ejercicio 2.3.8

Sean  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  y  $q : \tilde{Y} \rightarrow Y$  dos cubrientes universales. Muestre que para cada función  $f : X \rightarrow Y$  existe una función  $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$  tal que:

$$f \circ p = q \circ \tilde{f}$$

**Demostración:** ■

### Ejercicio 2.3.9

Demuestra la siguiente proposición: Si  $p : (E, e_0) \rightarrow (X, x_0)$  y  $p' : (E', e'_0) \rightarrow (X, x_0)$  son ambos espacios cubrientes simplemente conexos de  $X$ , entonces existe un único homeomorfismo  $\varphi : (E', e'_0) \rightarrow (E, e_0)$  tal que  $p \circ \varphi = p'$ . ■

**Demostración:** ■

### Ejercicio 2.3.10

Para cualquier  $n > 0$ , sea  $C_n$  el círculo con centro  $(\frac{1}{n}, 0)$  y radio  $\frac{1}{n}$ , defina  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ . Muestre que este espacio no tiene cubriente universal.