Ejercicios Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

1 de marzo de 2024

Índice general

Capítulo 1

Espacios Hilbertianos

1.1. Ejercicios

Ejercicio 1.1.1
Pruebe lo siguiente:

I. Sean H, H' espacios hilbertianos y sea T una aplicación lineal continua de H en H'. **Demuestre** que existe una única aplicación lineal $\widetilde{T} : H' \to H$ tal que

$$\left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'}\right) = \left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right), \quad \forall\vec{x} \in H \text{ y } \forall\vec{x'} \in H'$$

II. **Demuestre** las reglas:

$$\widetilde{T_1 + T_2} = \widetilde{T}_1 + \widetilde{T}_2 \quad \text{y} \quad \widetilde{\alpha T} = \overline{\alpha}\widetilde{T}$$

III. Sea H'' un tercer espacio hilbertiano. Sean T una aplicación lineal continua de H en H' y U una aplicación lineal continua de H' en H''. **Pruebe** que:

$$\widetilde{U \circ T} = \widetilde{T} \circ \widetilde{U}$$

Demostración:
De (i): Se probarán dos cosas:

- **Unicidad**. Suponga que existen $S, W : H' \to H$ tales que:

$$\left(\vec{x}\middle|S\vec{x'}\right) = \left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) \quad \text{y} \quad \left(\vec{x}\middle|W\vec{x'}\right) = \left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right), \quad \forall\vec{x} \text{ y } \vec{x'} \in H'$$

entonces, se tiene que para $\vec{x'} \in H'$ fijo:

$$\begin{aligned} \left(\vec{x}\middle|S\vec{x'}\right) &= \left(\vec{x}\middle|W\vec{x'}\right) \\ \Rightarrow \left(\vec{x}\middle|S\vec{x'}\right) - \left(\vec{x}\middle|W\vec{x'}\right) &=0 \\ \Rightarrow \left(\vec{x}\middle|S\vec{x'} - W\vec{x'}\right) &=0\forall\vec{x} \in H \end{aligned} \tag{1.1}$$

Por tanto, $S\vec{x'} = W\vec{x'}$. Como el $\vec{x'} \in H'$ fue arbitrario, se sigue que $S = W$.

- **Existencia**. Para cada $\vec{x'} \in H'$, sea $L_{\vec{x'}} : H \to \mathbb{K}$ definida como sigue:

$$L_{\vec{x'}}(\vec{x}) = \left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right)$$

Afirmamos que $L_{\vec{x'}}$ es lineal continuo. En efecto, si $\vec{x},\vec{y} \in H$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} L_{\vec{x'}}(\vec{x}+\alpha\vec{y}) =& \left(T(\vec{x}+\alpha\vec{y})\middle|\vec{x'}\right) \\ =& \left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right)+\alpha\left(T\vec{y}\middle|\vec{x'}\right) \\ =& L_{\vec{x'}}(\vec{x})+\alpha L_{\vec{x'}}(\vec{y}) \end{aligned}$$

luego es lineal, y es continuo ya que

$$\begin{aligned} \left|L_{\vec{x}}(\vec{x'})\right| =& \left|\left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right)\right| \\ \leq& \|T\vec{x}\|\|\vec{x'}\| \\ \leq& (\|T\|\|\vec{x'}\|)\|\vec{x}\| \end{aligned}$$

donde la primera desigualdad es por Cauchy-Schwarts, y la segunda es por el hecho de que T es un funcional lineal continuo. Por tanto: $\|L_{\vec{x'}}\| \leq \|T\|\|\vec{x'}\|$. Luego, $L_{\vec{x'}}$ es lineal continuo, i.e. $L_{\vec{x'}} \in H^*$.

Por el teorema de Riesz, como la aplicación $G : H \to H^*$ es suprayectiva, para $\vec{x'} \in H'$ existe $\widetilde{T}\vec{x'} \in H$ tal que $L_{\vec{x'}} = G_{\widetilde{T}\vec{x'}}$, es decir que:

$$L_{\vec{x'}}\vec{x} = \left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'}\right) = G_{\widetilde{T}\vec{x'}}\vec{x}, \quad \forall\vec{x} \in H$$

Afirmamos que la aplicación $\widetilde{T} : H' \to H$ está bien definida y es lineal. En efecto, si $\widetilde{T}\vec{x'_1}, \widetilde{T}\vec{x'_2} \in H$ son tales que $L_{\vec{x'}} = G_{\widetilde{T}\vec{x'_1}}$ y $L_{\vec{x}} = G_{\widetilde{T}\vec{x'_1}}$, entonces:

$$\left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'_1}\right) \quad \text{y} \quad \left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'_2}\right), \quad \forall\vec{x} \in H$$

entonces:

$$\begin{aligned} \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'_1}\right) =& \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'_2}\right), \quad \forall\vec{x} \in H \\ \Rightarrow \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'_1}-\widetilde{T}\vec{x'_2}\right) =& 0 \quad \forall\vec{x} \in H \\ \Rightarrow \widetilde{T}\vec{x'_1}-\widetilde{T}\vec{x'_2} =& \vec{0} \\ \Rightarrow \widetilde{T}\vec{x'_1} =& \widetilde{T}\vec{x'_2} \end{aligned}$$

por tanto, $\widetilde{T} : H' \to H$ está bien definida. Comprobemos ahora la linealidad, sean $\vec{x'}, \vec{y'} \in H'$, entonces:

$$\begin{aligned} &\left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'}\right), \left(T\vec{x}\middle|\vec{y'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{y'}\right) \text{ y } \left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}+\vec{y'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}(\vec{x'}+\vec{y'})\right) \quad \forall\vec{x} \in H \\ \Rightarrow &\left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right)+\left(T\vec{x}\middle|\vec{y'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'}\right)+\left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{y'}\right) \text{ y } \left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}+\vec{y'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}(\vec{x'}+\vec{y'})\right) \quad \forall\vec{x} \in H \\ \Rightarrow &\left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}+\vec{y'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'}+\widetilde{T}\vec{y'}\right) \text{ y } \left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}+\vec{y'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}(\vec{x'}+\vec{y'})\right) \quad \forall\vec{x} \in H \\ \Rightarrow &\left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'}+\widetilde{T}\vec{y'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}(\vec{x'}+\vec{y'})\right) \quad \forall\vec{x} \in H \\ \Rightarrow &\left(\vec{x}\middle|(\widetilde{T}\vec{x'}+\widetilde{T}\vec{y'})-\widetilde{T}(\vec{x'}+\vec{y'})\right) = 0 \quad \forall\vec{x} \in H \\ \Rightarrow &(\widetilde{T}\vec{x'}+\widetilde{T}\vec{y'})-\widetilde{T}(\vec{x'}+\vec{y'}) = 0 \\ \Rightarrow &\widetilde{T}\vec{x'}+\widetilde{T}\vec{y'} = \widetilde{T}(\vec{x'}+\vec{y'}) \end{aligned}$$

y, si $\alpha \in \mathbb{K}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\left(T\vec{x}\middle|\alpha\vec{x'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}(\alpha\vec{x'})\right) \text{ y } \left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'}\right) \quad \forall\vec{x} \in H\\
\Rightarrow&\overline{\alpha}\left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}(\alpha\vec{x'})\right) \text{ y } \overline{\alpha}\left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) = \overline{\alpha}\left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'}\right) \quad \forall\vec{x} \in H\\
\Rightarrow&\overline{\alpha}\left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}(\alpha\vec{x'})\right) \text{ y } \overline{\alpha}\left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\alpha\widetilde{T}\vec{x'}\right) \quad \forall\vec{x} \in H\\
\Rightarrow&\left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}(\alpha\vec{x'})\right) = \left(\vec{x}\middle|\alpha\widetilde{T}\vec{x'}\right) \quad \forall\vec{x} \in H\\
\Rightarrow&\left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}(\alpha\vec{x'})\right) - \left(\vec{x}\middle|\alpha\widetilde{T}\vec{x'}\right) = 0 \quad \forall\vec{x} \in H\\
\Rightarrow&\left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}(\alpha\vec{x'}) - \alpha\widetilde{T}\vec{x'}\right) = 0 \quad \forall\vec{x} \in H\\
\Rightarrow&\widetilde{T}(\alpha\vec{x'}) - \alpha\widetilde{T}\vec{x'} = \vec{0}\\
\Rightarrow&\widetilde{T}(\alpha\vec{x'}) = \alpha\widetilde{T}\vec{x'}
\end{aligned}$$

por tanto $\widetilde{T}$ es lineal. Además, se cumple para todos $\vec{x} \in H$ y $\vec{x'} \in H'$ que:

$$\left(T\vec{x}\middle|\vec{x'}\right) = \left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x'}\right)$$

De (ii): ■

Ejercicio 1.1.2
Sea H un espacio hilbertiano complejo. A toda aplicación lineal continua T de H en H se le asocia la aplicación $Q_T : H \to \mathbb{C}$ (llamada **forma hermitiana**) definida por:

$$Q_T(\vec{x}) = \left(T\vec{x}\middle|\vec{x}\right), \quad \forall\vec{x} \in H$$

Haga lo siguiente:

I. **Establezca** la fórmula:

$$\left(T\vec{x}\middle|\vec{y}\right) = \frac{1}{4}\left[Q_T(\vec{x}+\vec{y}) - Q_T(\vec{x}-\vec{y}) + iQ_T(\vec{x}+i\vec{y}) - iQ_T(\vec{x}-i\vec{y})\right]$$

II. **Muestre** que

$$Q_{\widetilde{T}}(\vec{x}) = \overline{Q_T(\vec{x})}, \quad \forall\vec{x} \in H$$

y que $Q_T(\vec{x})$ es real, $\forall\vec{x} \in H$, si y sólo si T es autoadjunto (es decir, que $T = \widetilde{T}$).

Solución:
Establezcamos ambos incisos:
De (i): Sean $\vec{x}, \vec{y} \in H$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
Q_T(\vec{x}+\vec{y}) &= \left(T(\vec{x}+\vec{y})\middle|\vec{x}+\vec{y}\right)\\
&= \left(T(\vec{x}) + T(\vec{y})\middle|\vec{x}+\vec{y}\right)\\
&= \left(T(\vec{x}) + T(\vec{y})\middle|\vec{x}\right) + \left(T(\vec{x}) + T(\vec{y})\middle|\vec{y}\right)\\
&= \left(T(\vec{x})\middle|\vec{x}\right) + \left(T(\vec{y})\middle|\vec{x}\right) + \left(T(\vec{x})\middle|\vec{y}\right) + \left(T(\vec{y})\middle|\vec{y}\right)\\
&= Q_T(\vec{x}) + \left(T(\vec{y})\middle|\vec{x}\right) + \left(T(\vec{x})\middle|\vec{y}\right) + Q_T(\vec{y})
\end{aligned}$$

por lo cual,

$$\begin{aligned}
Q_T(\vec{x}-\vec{y}) &= Q_T(\vec{x}) + \left(T(-\vec{y})\middle|\vec{x}\right) + \left(T(\vec{x})\middle|-\vec{y}\right) + Q_T(-\vec{y})\\
&= Q_T(\vec{x}) - \left(T(\vec{y})\middle|\vec{x}\right) - \left(T(\vec{x})\middle|\vec{y}\right) + Q_T(\vec{y})
\end{aligned}$$

Luego:

$$Q_T(\vec{x}+\vec{y}) - Q_T(\vec{x}-\vec{y}) = 2\left(\left(T(\vec{y})\middle|\vec{x}\right) + \left(T(\vec{x})\middle|\vec{y}\right)\right)$$

y, por ende:

$$\begin{aligned} iQ_T(\vec{x}+i\vec{y}) - iQ_T(\vec{x}-i\vec{y}) &= 2i\left(\left(T(i\vec{y})\middle|\vec{x}\right) + \left(T(\vec{x})\middle|i\vec{y}\right)\right) \\ &= 2i\left(i\left(T(\vec{y})\middle|\vec{x}\right) - i\left(T(\vec{x})\middle|\vec{y}\right)\right) \\ &= 2\left(-\left(T(\vec{y})\middle|\vec{x}\right) + \left(T(\vec{x})\middle|\vec{y}\right)\right) \end{aligned}$$

Finalmente, se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\left[Q_T(\vec{x}+\vec{y}) - Q_T(\vec{x}-\vec{y}) + iQ_T(\vec{x}+i\vec{y}) - iQ_T(\vec{x}-i\vec{y})\right] =& \frac{1}{4}\left[4\left(T(\vec{x})\middle|\vec{y}\right)\right] \\ =& \left(T(\vec{x})\middle|\vec{y}\right) \end{aligned}$$

lo cual establece la fórmula.

De (ii): Sea $\vec{x} \in H$, entonces:

$$\begin{aligned} Q_{\widetilde{T}}(\vec{x}) &= \left(\widetilde{T}\vec{x}\middle|\vec{x}\right) \\ &= \left(\widetilde{T}\vec{x}\middle|\vec{x}\right) \\ &= \overline{\left(\vec{x}\middle|\widetilde{T}\vec{x}\right)} \\ &= \overline{\left(T\vec{x}\middle|\vec{x}\right)} \\ &= \overline{Q_T(\vec{x})} \end{aligned}$$

Para la otra parte, veamos que:

$$\begin{aligned} Q_T(\vec{x}) \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in H &\iff Q_T(\vec{x}) = \overline{Q_T(\vec{x})}, \forall \vec{x} \in H \\ &\iff Q_T(\vec{x}) = Q_{\widetilde{T}}(\vec{x}), \forall \vec{x} \in H \\ &\iff \left(T\vec{x}\middle|\vec{x}\right) = \left(\widetilde{T}\vec{x}\middle|\vec{x}\right), \forall \vec{x} \in H \\ &\iff \left(T\vec{x}\middle|\vec{x}\right) - \left(\widetilde{T}\vec{x}\middle|\vec{x}\right) = 0, \forall \vec{x} \in H \\ &\iff \left(T\vec{x} - \widetilde{T}\vec{x}\middle|\vec{x}\right) = 0, \forall \vec{x} \in H \\ &\iff \left(\left[T - \widetilde{T}\right]\vec{x}\middle|\vec{x}\right) = 0, \forall \vec{x} \in H \end{aligned}$$

Veamos que $\left(\left[T - \widetilde{T}\right]\vec{x}\middle|\vec{x}\right) = 0, \forall \vec{x} \in H$ si y sólo si $T = \widetilde{T}$. La vuelta es inmediata.

□

Ejercicio 1.1.3

Sea A un endomorfismo lineal continuo de un espacio prehilbertiano H. Defina $Q_A : H \to \mathbb{K}$ como:

$$Q_A(\vec{x}) = \left(A\vec{x}\middle|\vec{x}\right), \quad \forall \vec{x} \in H$$

Sea

$$\alpha = \sup\left\{\frac{|Q_A(\vec{x})|}{\|\vec{x}\|^2}\middle|\vec{x} \in H, \vec{x} \neq \vec{0}\right\}$$

I. **Pruebe** que $\alpha \leq \|A\|$.

II. Al suponer A autoadjunto, **demuestre** la igualdad opuesta. Luego, si A es autoadjunto se tiene que

$$\|A\| = \sup\left\{\frac{|Q_A(\vec{x})|}{\|\vec{x}\|^2}\Big|\vec{x}\in H, \vec{x}\neq\vec{0}\right\}$$

Indicación. Compruebe que $\forall\vec{x}\in H$ y $\forall\lambda>0$,

$$\left(A\vec{x}\middle|A\vec{x}\right) = \frac{1}{4}\left(Q_A(\lambda\vec{x}+\lambda^{-1}A\vec{x}) - Q_A(\lambda\vec{x}-\lambda^{-1}A\vec{x})\right)$$

de ahí obtenga que $\|A\vec{x}\|^2 \leq \frac{\alpha}{2}\left(\lambda^2\|\vec{x}\|^2 + \frac{1}{\lambda^2}\|A\vec{x}\|^2\right)$ y elija λ convenientemente.

Demostración:

Demostremos cada inciso.

De (i): Basta con ver que $\|A\|$ es cota superior del conjunto al que se le quiere sacar el supremo. Para ello, notemos que al ser A lineal continuo, se tiene que:

$$\left|\left(A\vec{x}\middle|\vec{x}\right)\right| \leq \|A\vec{x}\|\|\vec{x}\| \leq \|A\|\|\vec{x}\|^2$$

para todo $\vec{x}\in H$. En particular, para $\vec{x}\neq\vec{0}$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\left|\left(A\vec{x}\middle|\vec{x}\right)\right|}{\|\vec{x}\|^2} &\leq \|A\| \\ \Rightarrow \frac{|Q_A(\vec{x})|}{\|\vec{x}\|^2} &\leq \|A\| \end{aligned}$$

luego, $\|A\|$ es cota superior del conjunto. Por tanto $\alpha\leq\|A\|$.

De (ii): Suponga que A es autoadjunto ■

Ejercicio 1.1.4

Muestre que todo endomorfismo continuo T de un espacio hilbertiano H se expresa únicamente en la forma:

$$T = A + iB$$

donde A y B son endomorfismos adjuntos de H.

Demostración:

■

Ejercicio 1.1.5

Sea H un espacio prehilbertiano. **Construya** un espacio hilbertiano $\hat{H}$ y una inyección lineal $j: H\to\hat{H}$ tal que

$$\left(j\vec{x}\middle|j\vec{y}\right) = \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right), \quad \forall\vec{x},\vec{y}\in H.$$

y que $j(H)$ sea denso en $\hat{H}$. El espacio hilbertiano $\hat{H}$ se llama la **completación** del espacio prehilibertiano H. **Formule y demuestre** un teorema de unicidad de esta completación.

Demostración:

■

Ejercicio 1.1.6

Si E es un espacio vectorial complejo, la adición de elementos de E y la multiplicación de elementos de E por números reales, hacen de E un espacio vectorial real que se designa por $E_{\mathbb{R}}$.

I. Sea H un espacio prehilbertiano complejo. Se designa por $\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ un producto escalar en H.

Muestre que la aplicación:

$$(\vec{x},\vec{y}) \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} = \Re\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$$

hace de $H_{\mathbb{R}}$ un espacio prehilbertiano real para el que se cumple:

$$\left(i\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} = \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}}$$

Pruebe la relación:

$$\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) = \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} + i\left(i\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} \tag{1.2}$$

II. Sea H un espacio vectorial complejo. Se supone que $H_{\mathbb{R}}$ está provisto de un producto escalar $(\vec{x},\vec{y}) \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}}$ que hace de $H_{\mathbb{R}}$ un espacio prehilbertiano real. Se supone también que $\left(i\vec{x}\middle|i\vec{y}\right)_{\mathbb{R}} = \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)_{\mathbb{R}}$, para todo $\vec{x},\vec{y} \in H$. Se define en H un producto $\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ por la fórmula (1.1). **Demuestre** que $(\vec{x},\vec{y}) \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ es un producto escalar complejo que hace de H un espacio prehilbertiano complejo.

Demostración:

■

Ejercicio 1.1.7
Haga lo sugiente:

I. **Muestre** que en todo espacio prehilbertiano real se cumple

$$\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) = \frac{1}{4}\left(\|\vec{x} + vecy\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2\right)$$

y en todo espacio prehilbertiano complejo se cumple

$$\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) = \frac{1}{4}\left(\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 + i\|\vec{x} + i\vec{y}\|^2 - i\|\vec{x} - i\vec{y}\|^2\right)$$

II. Sea E un espacio vectorial normado real en el que se verifica la identidad del paralelogramo:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2)$$

Pruebe que se puede definir de manera única un producto escalar $\left(\middle|\right)$ sobre E que hace de E un espacio prehilbertiano real para el cual $\|\vec{x}\|^2 = \left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right)$, $\forall \vec{x} \in E$.

Indicación. Defina $\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ por la primera fórmula del inciso (i). Usando la fórmula del paralelogramo compruebe que $\left(\vec{x}\middle|2\vec{y}\right) = 2\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$. Transforme $\left(\vec{x_1}\middle|\vec{y_1}\right) + \left(\vec{x_2}\middle|\vec{y_2}\right)$ por la identidad del paralelogramo y deduzca la fórmula $\left(\vec{x_1}\middle|\vec{y}\right) + \left(\vec{x_2}\middle|\vec{y}\right) = \left(\vec{x_1} + \vec{x_2}\middle|\vec{y}\right)$.

III. Misma pregunta que en (ii) en el caso de ser E espacio vectorial complejo.

Indicación. Use (ii) y el problema 1.6.

Solución:

□

Ejercicio 1.1.8
Para todo $s \in \mathbb{R}$ sea $u_s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la función definida por:

$$u_s(x) = e^{isx}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sea X el espacio vectorial complejo compuesto de todas las combinaciones lineales finitas de estas funciones u_s, $\forall f, g \in X$ se define:

$$\left(f\middle|g\right) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} f\overline{g}.$$

Pruebe que esta definición tiene sentido y que la aplicación $(f,g) \mapsto \left(f\middle|g\right)$ es un producto escalar que hace de X un espacio prehilbertiano.

Sea H el espacio prehilbertiano, completación del espacio prehilbertiano X (ver problema 1.5). **Muestre** que H es un espacio hilbertiano no separable y que la familia $(u_s)_{s\in\mathbb{R}}$ es un sistema ortonormal maximal en H.

Demostración:

■

Ejercicio 1.1.9

Sea H un espacio hilbertiano de dimensión infinita. **Demuestre** que existe una aplicación continua inyectiva γ de $[0,1]$ en H (un **camino simple** en H) tal que si $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 1$, los vectores $\gamma(b) - \gamma(a)$ y $\gamma(d) - \gamma(c)$ son ortogonales.

Indicación. Tome $H = L_2([0,1], \mathbb{K})$ y considere funciones características de ciertos subconjuntos de $[0,1]$.

Demostración:

■

Ejercicio 1.1.10

Sea $\{\vec{x_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de un espacio hilbertiano H. La sucesión $\{\vec{x_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$ se llama **martingala** (en el sentido amplio) si, $\forall \nu \in \mathbb{N}$, $\vec{x_\nu}$ es el vector de $\mathcal{L}(\vec{x_1}, ..., \vec{x_\nu})$ menos alejado de $\vec{x_{\nu+1}}$.

I. Sea $\{\vec{x_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$ una martingala. Se definen:

$$\vec{y_1} = \vec{x_1} \quad \text{e} \quad \vec{y_\nu} = \vec{x_\nu} - \vec{x_{\nu-1}}, \quad \forall \nu \geq 2.$$

Muestre que los vectores $\vec{y_\nu}$ son ortogonales a pares y que $\{\|\vec{x_\nu}\|\}_{\nu=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente de números no negativos.

II. Sea $\{\vec{y_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$ una sucesión de vectores en H ortogonales a pares. Se define

$$\vec{x_\nu} = \sum k = 1^\nu \vec{y_k}, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

Pruebe que $\{\vec{y_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$ es una martingala.

Demostración:

■

Ejercicio 1.1.11

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ una función medible, integrable en todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ de medida finita. Si

$$\int f = 0, \quad \forall \text{ rectángulo acotado } P,$$

demuestre que $f = 0$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$.

Indicación. Redúzcase a un corolario del lema de los promedios.

Demostración:

■

Ejercicio 1.1.12 (Funciones de Hermite)
Por inducción se ve inmediatamente que

$$D^n e^{-x^2} = (-1)^n H_n(x) e^{-x^2}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

donde $(-1)H_n$ es un polinomio de grado n. Estos polinomios $(-1)H_n$ se llaman **polinomios de Hermite**. Se definen las **funciones de Hermite** φ_n por:

$$\varphi_n(x) = H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

equivalentemente,

$$\varphi_n(x) = (-1)^n e^{-\frac{x^2}{2}} D^n e^{-x^2}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

I. **Demuestre** que las funciones de Hermite satisfacen la relación:

$$\varphi_n''(x) = (x^2 - 2n - 1)\varphi_n(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Indicación. Exprese a $\varphi_n''(x)$ mediante $D^n e^{-x^2}$, $D^{n+1} e^{-x^2}$ y $D^{n+2} e^{-x^2}$ y calcule $D^{n+2} e^{-x^2} = D^{n+1}(-2xe^{-x^2})$ por la fórmula de Leibniz para la derivada $n+1$-enésima de un producto de factores.

II. **Muestre** que las funciones de Hermite consistituyen un sistema ortogonal en el espacio hilbertiano $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{K})$

Indicación. Del inciso (i) se sigue que $\varphi_n''\varphi_m - \varphi_m''\varphi_n = 2(m-n)\varphi_n\varphi_m$.

III. **Pruebe** la relación

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x).$$

Indicación. Exprese $H_n'(x)$ mediante $D^n e^{-x^2}$ y $D^{n+1} e^{-x^2}$. Calcule $D^{n+1} e^{-x^2} = D^n(-2xe^{-x^2})$ por la fórmula de Leibniz.

IV. **Demuestre** que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^2(x)dx = 2n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{n-1}^2(x)dx$$

y deduzca que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^2(x)dx = \pi^{1/2} 2^n n!.$$

Luego el sistema de funciones:

$$\Psi_n = \frac{1}{\pi^{1/2} 2^n n!} \varphi_n$$

es un sistema ortonormal en $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ (En un ejercicio posterior se probará que dicho sistema ortonormal es, de hecho, maximal).

Indicación. Integre por partes

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^2(x)dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) D^n e^{-x^2} dx$$

y use (iii).