

# Ejercicios Dugundji Topology

Cristo Daniel Alvarado

20 de febrero de 2024

# Índice general

<b>1. Espacios Topológicos</b>	<b>2</b>
1.1. Conceptos Fundamentales . . . . .	2
1.3. Creación de topologías dados conjuntos . . . . .	6

# Capítulo 1

## Espacios Topológicos

### 1.1. Conceptos Fundamentales

#### Observación 1.1.1

El símbolo  $\aleph(X)$ , donde  $X$  es un conjunto, denota al cardinal del conjunto (realmente denota a otra cosa que viene a ser lo mismo, pero para usos prácticos tomaremos lo anterior como cierto).

#### Ejercicio 1.1.1

Pruebe lo siguiente:

1. Sea  $X$  un conjunto infinito. Pruebe que  $\mathcal{A}_0 = \{A \subseteq X \mid X - A \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$  es una topología sobre  $X$ .
2. Sea  $\aleph(X) \geq \aleph_0$ . Pruebe que  $\mathcal{A}_1 = \{A \subseteq X \mid \aleph(X - A) < \aleph(X)\} \cup \{\emptyset\}$  es una topología sobre  $X$ .

#### Demostración:

De (1): Es la topología de los complementos finitos (la prueba de esto se hizo en las notas).

De (2): Veamos que se verifican las tres condiciones:

1. Por definición de  $\mathcal{A}_1$  se tiene que  $\emptyset \in \mathcal{A}_1$  y, como  $\aleph(\emptyset) < \aleph_0$ , entonces  $\aleph(X - \emptyset) < \aleph(X)$ , por ende  $X \in \mathcal{A}_1$ .
2. Sea  $\mathcal{E}$  una subfamilia no vacía arbitraria de  $\mathcal{A}_1$ . Considere a  $\bigcup \mathcal{E}$ . Como la familia es no vacía, existe  $E_0 \in \mathcal{E}$ , se tiene así que:

$$\begin{aligned} E_0 \subseteq \bigcup \mathcal{E} &\Rightarrow X - \bigcup \mathcal{E} \subseteq X - E_0 \\ &\Rightarrow \aleph\left(X - \bigcup \mathcal{E}\right) \subseteq \aleph(X - E_0) \end{aligned}$$

por Cantor-Bernstein. Por lo cual al tenerse que  $\bigcup \mathcal{E} \subseteq X$ , se sigue que  $\bigcup \mathcal{E} \in \mathcal{A}_1$ .

3. Sean  $A, B \in \mathcal{A}_1$ , entonces  $\aleph(X - A) < \aleph(X)$  y  $\aleph(X - B) < \aleph(X)$ . Notemos que

$$X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B)$$

Entonces  $\aleph(X - (A \cap B)) = \aleph((X - A) \cup (X - B)) \leq \aleph(X - A) + \aleph(X - B) < \aleph(X) + \aleph(X) = 2\aleph(X) = \aleph(X)$ , pues  $\aleph(X) \geq \aleph_0$ . Por tanto, al ser  $A \cap B \subseteq X$ , se sigue que  $A \cap B \in \mathcal{A}_1$ .

Por las tres condiciones anteriores, se sigue que  $\mathcal{A}_1$  es una topología sobre  $X$ . ■

**Ejercicio 1.1.2**

¿Cuántas topologías distintas puede tener un conjunto de tres elementos? ¿Cuál es su orden parcial?

**Solución:**

Considere  $X = \{a, b, c\}$ . De todas las topologías que puede tener, deben de estar al menos la topología discreta y la indiscreta, formada por los conjuntos:

$$\begin{aligned}\tau_D &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b, c\}\} = \mathcal{P}(\{a, b, c\}) \\ \tau_I &= \{\emptyset, \{a, b, c\}\}\end{aligned}$$

Ahora, las otras que se pueden tener son aquellas que solo contienen a uno de los elementos, es decir las siguientes:

$$\begin{aligned}\tau_a &= \{\emptyset, \{a\}, \{a, b, c\}\} \\ \tau_b &= \{\emptyset, \{b\}, \{a, b, c\}\} \\ \tau_c &= \{\emptyset, \{c\}, \{a, b, c\}\}\end{aligned}$$

y, también aquellas que contengan a un par de elementos, pero de esta forma:  $\{a, b\}$ , que serían las siguientes:

$$\begin{aligned}\tau_{a,b} &= \{\emptyset, \{a, b\}, \{a, b, c\}\} \\ \tau_{b,c} &= \{\emptyset, \{b, c\}, \{a, b, c\}\} \\ \tau_{c,a} &= \{\emptyset, \{c, a\}, \{a, b, c\}\}\end{aligned}$$

(en esta se verifica casi de forma inmediata que es una topología sobre  $X$ ). Ahora, se deben considerar aquellas en las que se tiene más de un elemento no trivial (cuando menciono la palabra trivial, me refiero a que no sea alguno de  $\emptyset$  o  $X = \{a, b, c\}$ ). Por ejemplo, consideremos a  $\{a, b\}$  un elemento no trivial, y sea  $\tau$  una topología sobre  $X$  que contiene a este elemento. Se tienen seis casos:

1.  $a \in \tau$ , entonces al ser cerrado bajo uniones e intersecciones se tiene que (al menos)  $\tau$  debe ser de la forma:

$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$

2.  $\{b\} \in \tau$ , como con el caso anterior, se tendría que (al menos)  $\tau$  debe ser de la forma:

$$\tau = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$

Ahora, si  $\{a\} \in \tau$ , entonces (al menos)  $\tau$  debe ser de la forma:

$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$

3.  $\{c\} \in \tau$ , se tiene entonces que una topología sobre  $X$  (al menos), debe ser:

$$\tau = \{\emptyset, \{c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$

4.  $\{b, c\} \in \tau$ , se tiene entonces que  $\tau$  debe ser de la forma (al menos):

$$\tau = \{\emptyset, \{b\}, \{b, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$

Son un vergo, nmms.

□

**Ejercicio 1.1.3**

Sean  $\tau_X$  y  $\tau_Y$  dos topologías en  $X$  y  $Y$ , respectivamente. ¿Es

$$\tau = \{A \times B \mid A \in \tau_X, B \in \tau_Y\}$$

una topología en  $X \times Y$ ?

**Solución:**

Veamos si se cumplen las tres condiciones para que  $\tau$  sea una topología sobre  $X$ .

1. Es claro que  $\emptyset, X \times Y \in \tau$ , pues  $\emptyset \in \tau_X, \tau_Y$  y  $X \in \tau_X$  y  $Y \in \tau_Y$ .
2. Sea  $\mathcal{C}$  una subfamilia no vacía de  $\tau$ . Entonces, cada elemento de  $\mathcal{C} = \{C_\alpha \mid \alpha \in I\}$  es de la forma:

$$C_\alpha = A_\alpha \times B_\alpha$$

donde  $A_\alpha \in \tau_X$  y  $B_\alpha \in \tau_Y$ , para todo  $\alpha \in I$ . Luego:

$$\bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \times B_\alpha$$

Veamos que en general no es cierto que  $\bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha \in \tau$ . En efecto, tomemos  $X = Y = \mathbb{R}$  (con la topología usual) y como conjuntos de la familia a:  $C_1 = (0, 1) \times (0, 1)$ , y  $C_2 = (1, 2) \times (1, 2)$ . Se tiene que:

$$C_1 \cup C_2 \notin \tau$$

ya que, en caso contrario se tendría que  $C_1 \cup C_2 = A \times B$ , con  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  abiertos con la topología usual.

Entonces, en particular los elementos  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) \in C_1 \cup C_2$ , por lo cual los elementos  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) \in C_1 \cup C_2 \#_c$ , por la forma en que se tomaron  $C_1$  y  $C_2$ . Por lo cual,  $C_1 \cup C_2$  no puede expresarse como el producto cartesiano de dos abiertos.

3. Sean  $C, D \in \tau$ , es decir que  $C = A_1 \times B_1$  y  $D = A_2 \times B_2$ , donde  $A_i \in \tau_X$  y  $B_i \in \tau_Y$  para  $i \in \{1, 2\}$ . Entonces:

$$\begin{aligned} C \cap D &= (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) \\ &= (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \end{aligned}$$

donde  $A_1 \cap A_2 \in \tau_X$  y  $B_1 \cap B_2 \in \tau_Y$ , por ende  $C \cap D \in \tau$ .

Por el inciso (2), se tiene que  $\tau$  (al menos en un caso particular) no es una topología sobre  $X \times Y$ .  $\square$

Recordemos la definición de un preorden y orden parcial:

**Definición 1.1.1**

Una relación binaria  $R$  en un conjunto  $A$  es llamada un **preorden** si es reflexiva y transitiva, esto es:

1.  $\forall a \in A, aRa$ .
2.  $(aRb) \vee (bRc) \Rightarrow aRc$ .

denotamos (en general) al preorden por  $\prec$ .

**Definición 1.1.2**

Sea  $(A, \prec)$  un conjunto preordenado.

1.  $m \in A$  es llamado **elemento maximal** en  $A$  si para todo  $a \in A$  tal que  $m \prec a \Rightarrow a \prec m$ .
2. Un elemento  $a_0 \in A$  es llamado **cota superior de un subconjunto**  $B \subseteq A$  si para todo  $b \in B$ ,  $b \prec a_0$ .
3. Un subconjunto  $B \subseteq A$  es llamado una **cadena** si cualesquiera dos elementos de  $B$  están relacionados, es decir que  $a, b \in B$  implica que  $a \prec b$  o  $b \prec a$ .

**Definición 1.1.3**

Sea  $A$  un conjunto preordenado. Un **orden parcial** es un preorden en  $A$  junto con la propiedad adicional:

$$(a \prec b) \wedge (b \prec a) \Rightarrow (a = b)$$

esta propiedad es llamada antisimetría. Un conjunto  $A$  adjutandole además un orden parcial es llamado un **conjunto parcialmente ordenado**. Un conjunto parcialmente ordenado que es también una cadena es llamado un **conjunto totalmente ordenado**.

**Ejercicio 1.1.4**

Sea  $X$  un conjunto parcialmente ordenado. Defina  $U \subseteq X$  abierto si y sólo si satisface la condición:  $(x \in U) \wedge (y \prec x) \Rightarrow y \in U$ . Pruebe que la familia

$$\mathcal{A} = \{U \subseteq X \mid U \text{ es abierto}\}$$

es una topología sobre  $X$ .

**Demostración:**

Se deben verificar que se cumplen las tres condiciones.

1.  $\emptyset \in \mathcal{A}$ , pues por vacuidad se cumple que  $\emptyset$  satisface la condición. Ahora, sea  $x \in X$  y  $y \prec x$ , entonces  $y \in X$  (pues es dónde se define el preorden). Por tanto,  $X \in \mathcal{A}$ .
2. Sea  $\mathcal{B}$  una familia no vacía de subconjuntos de  $\mathcal{A}$ . Si  $x \in \bigcup \mathcal{B}$ , entonces existe  $B_0 \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B_0$ .  
Ahora, si  $y \in X$  es tal que  $y \prec x$ , como  $x \in B_0$ , por ser  $B_0$  abierto se tiene que  $y \in B_0 \subseteq \bigcup \mathcal{B}$ . Por lo cual  $\bigcup \mathcal{B}$  es abierto.
3. Sean  $U, V \in \mathcal{A}$ , si  $U \cap V = \emptyset$  es claro que  $U \cap V \in \mathcal{A}$ . Suponga que la intersección es no vacía y sean  $x \in U \cap V$  y  $y \in X$  tal que  $y \prec x$ . En particular  $(x \in U) \wedge (y \prec x)$  y  $(x \in V) \wedge (y \prec x)$ , por ende  $y \in U \cap V$ , es decir que  $U \cap V \in \mathcal{A}$ .

Por los incisos anteriores, se tiene que  $\mathcal{A}$  es una topología sobre  $X$ . ■

**Ejercicio 1.1.5**

En  $\mathbb{Z}^+$  defina  $U \subseteq \mathbb{Z}^+$  que sea abierto si satisface la condición  $n \in U \Rightarrow$  cada divisor de  $n$  pertenece a  $U$ . Pruebe que esta es una topología en  $\mathbb{Z}^+$  y que no es la topología discreta.

**Demostración:**

Llamemos  $\tau$  a la familia de todos los conjuntos abiertos en  $\mathbb{Z}^+$ . Veamos que para  $\tau$  se cumplen las tres condiciones:

1.  $\emptyset \in \tau$ , esto es cierto por vacuidad. Ahora si  $n \in \mathbb{Z}^+$ , entonces todos sus divisores están en  $\mathbb{Z}^+$  (divisores positivos), por lo cual  $\mathbb{Z}^+ \in \tau$ .
2. Sea  $\mathcal{A}$  una familia no vacía de elementos de  $\tau$ , y sea  $n \in \bigcap \mathcal{A}$ , entonces existe  $A_0$  tal que  $n \in A_0$ , pero  $A_0$  es abierto, por lo cual contiene a todos los divisores de  $n$ . Como  $A \subseteq \bigcup \mathcal{A}$  entonces  $\bigcup \mathcal{A}$  contiene a todos los divisores de  $n$ , luego  $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$ .
3. Sean  $A, B \in \tau$  tales que  $A \cap B \neq \emptyset$ . Si  $n \in A \cap B$  entonces  $n \in A$  y  $n \in B$ , como  $A$  y  $B$  son abiertos, entonces estos dos conjuntos cumplen que cada divisor de  $n$  pertenece a  $A$  y  $B$ , en particular cada divisor de  $n$  pertenece a  $A \cap B$ . Por tanto,  $A \cap B \in \tau$ .

Por los tres incisos anteriores, se sigue que  $\tau$  es una topología sobre  $\mathbb{Z}^+$ . ■

**Ejercicio 1.1.6**

Pruebe lo siguiente:  $\tau$  es la topología discreta en  $X$  si y sólo si todo punto de  $X$  es un conjunto abierto (hablando de los conjuntos unipuntuales).

**Demostración:**

Se probará la doble implicación:  $\Rightarrow$ ): Suponga que  $\tau$  es la topología discreta, entonces  $\tau = \mathcal{P}(X)$ , en particular  $\{x\} \in \mathcal{P}(X)$ , para cada  $x \in X$ , esto es  $\{x\} \in \tau$ .

$\Leftarrow$ ): Suponga que todo conjunto unipuntual de  $X$  está en  $\tau$ , y sea  $A \in \mathcal{P}(X)$ , entonces:

$$A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$$

donde  $\{a\}$  es abierto y, por ende  $A$  es abierto al ser una unión arbitraria de abiertos. Por tanto,  $A \in \tau$ . Por ende  $\mathcal{P}(X) \subseteq \tau$ , pero siempre se tiene que  $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ , luego  $\tau = \mathcal{P}(X) = \tau_D$ . ■

## 1.3. Creación de topologías dados conjuntos

**Ejercicio 1.3.1**