Espacio Normado $C\mathcal{L}(E,F)$.

Sean E y F espacios vectoriales. Se denota por $\mathcal{L}(E,F)$ al espacio vectorial de transformaciones lineales de E en F. Si $F=E$ se escribe $\mathcal{L}(E,E)=\mathcal{L}(E)$.

$\mathcal{L}(E,\mathbb{R})=E'$ es llamado el dual algebraico de E.

Def. Sean E y F espacios normados. El conjunto de aplicaciones lineales continuas de E en F se denota por $C\mathcal{L}(E,F)$. Si $F=E$, $C\mathcal{L}(E,E)=C\mathcal{L}(E)$. Si $F=\mathbb{R}$, $C\mathcal{L}(E,\mathbb{R})=E^*$ es llamado el dual topológico de E.

Teorema y Def.

Sean E y F espacios normados sobre el campo $\mathbb{R}$. Se define $\|\cdot\|: C\mathcal{L}(E,F)\to\mathbb{R}$ como:

$$\|T\|=\inf\{M\geq 0 \mid N_F(T(x))\leq M N_E(x), \forall x\in E\}, \forall\, T\in C\mathcal{L}(E,F).$$

A $\|T\|$ se le llama la norma de T.

Se cumplen:

i) $\|T\|=\sup\left\{\frac{N_F(T(x))}{N_E(x)} \mid x\in E\setminus\{0\}\right\}$

ii) $\|T\|=\sup\{N_F(T(x)) \mid x\in U_E\}$

iii) $N_F(T(x))\leq \|T\| N_E(x)$, $\forall\, x\in E$.

$\|\,\|$ es una norma sobre $C\mathcal{L}(E,F)$.

Dem:

$\forall\, T\in C\mathcal{L}(E,F)$, $\|T\|$ existe, pues existe al menos un $M\geq 0$ ⊓ $N_F(T(x))\leq M\cdot N_E(x)$, $\forall\, x\in E$.

De (i): Sea

$$S(T)=\sup\left\{\frac{N_F(T(x))}{N_E(x)} \,\middle|\, x\in E\setminus\{0\}\right\}$$

si $M\geqslant 0$ es tal que $N_F(T(x))\leqslant M N_E(x), \forall x\in E^{*}$, entonces

$$\frac{N_F(T(x))}{N_E(x)}\leqslant M, \forall x\in E\setminus\{0\}$$

entonces $S(T)\leqslant M$. Luego $S(T)$ es cota inferior de los M que cumplen $*$, así $S(T)\leqslant\|T\|$. Pero también:

$$\frac{N_F(T(x))}{N_E(x)}\leqslant S(T), \forall x\in E\setminus\{0\}$$

$$\Rightarrow N_F(T(x))\leqslant S(T)N_E(x), \forall x\in E$$

$$\Rightarrow S(T)\in\{M\geqslant 0 \mid N_F(T(x))\leqslant N_E(x), \forall x\in E\}$$

$$\Rightarrow \|T\|\leqslant S(T).$$

Por tanto, $S(T)=\|T\|$.

De (ii): Sea

$$q(T)=\sup\{N_F(T(x)) \mid x\in U_E\}$$

Veamos que

$$N_F(T(x))\leqslant\frac{N_F(T(x))}{N_E(x)}\leqslant S(T), \forall x\in U_E\setminus\{0\}$$

$$\Rightarrow q(T)\leqslant S(T)$$

además:

$$\frac{N_F(T(x))}{N_E(x)}=N_F\left(\frac{1}{N_E(x)}\cdot T(x)\right)$$

$$=N_F\left(T\left(\frac{x}{N_E(x)}\right)\right)\leqslant q(T), \forall x\in E\setminus\{0\}.$$

$$\Rightarrow S(T)\leqslant q(T)$$

Por tanto, $q(T)=\|T\|$.

De (iii): Por (i),

$$\frac{N_F(T(x))}{N_E(x)}\leqslant\|T\|, \forall x\in E\setminus\{0\}.$$

q.e.d.

Proposición.

$\|\cdot\|: C\mathcal{L}(E,F) \to \mathbb{R}$ es una norma sobre $C\mathcal{L}(E,F)$.

Dem:

i) Sea $T \in C\mathcal{L}(E,P)$. Entonces:

$$0 \leqslant \frac{N_F(T(x))}{N_E(x)} \leqslant \|T\|, \ \forall x \in E\setminus\{0\}$$

por tanto, $\|T\| \geqslant 0$.

ii) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $T \in C\mathcal{L}(E,F)$. Como $C\mathcal{L}(E,F)$ es espacio vectorial:

$$N_F(\lambda T(x)) \leqslant \|\lambda T\| N_E(x), \ \forall x \in E$$

$$\Rightarrow N_F(T(x)) \leqslant \frac{\|\lambda T\|}{|\lambda|} N_E(x), \ \forall x \in E$$

Si $\lambda \neq 0$. Si $\lambda = 0$, claramente $|\lambda| \cdot \|T\| = \|\lambda T\|$. Por tanto,

$$\|T\| \leqslant \frac{1}{|\lambda|} \cdot \|\lambda T\| \ \ldots \ (1)$$

También, $\forall x \in E$:

$$N_F(T(x)) \leqslant \|T\| N_E(x)$$

$$\Rightarrow N_F(\lambda T(x)) \leqslant |\lambda| \|T\| N_E(x)$$

por tanto:

$$\|\lambda T\| \leqslant |\lambda| \|T\| \ \ldots \ (2)$$

Por 1) y 2),

$$\|\lambda T\| = |\lambda| \cdot \|T\|$$

iii) Sean $T, \mathcal{L} \in C\mathcal{L}(E,F)$. Entonces:

$$\forall x \in E, \ N_F(T(x)) \leqslant \|T\| N_E(x) \ \text{y} \ N_F(\mathcal{L}(x)) \leqslant \|\mathcal{L}\| N_E(x)$$

$$\Rightarrow \forall x \in E, \ N_F((T+\mathcal{L})(x)) \leqslant (\|T\| + \|\mathcal{L}\|) N_E(x)$$

por tanto, $\|T+\mathcal{L}\| \leqslant \|T\| + \|\mathcal{L}\|$.

iv) Sea $T \in C\mathcal{L}(E,F)$.

$$\|T\| = 0 \Leftrightarrow \frac{N_F(T(x))}{N_E(x)} = 0, \ \forall x \in E\setminus\{0\} \Leftrightarrow N_F(T(x)) = 0, \ \forall x \in E \Leftrightarrow T = 0$$

q.e.d.

Corolario.

Sea $T: E \to F$ una transformación lineal. Entonces T es continua si y sólo si $T(U_E)$ es acotado en F.

Dem:

$\Rightarrow$) Si T es continua, $\exists\, M \geq 0$ 𝗆

$$\forall\, x \in E, \quad N_F(T(x)) \leq M \cdot N_E(x)$$

luego el conjunto:

$$\{M \geq 0 \mid N_F(T(x)) \leq M \cdot N_E(x),\ \forall\, x \in E\}$$

es no vacío y acotado inferiormente. Por tanto, el ínfimo $\|T\|$ existe y, entonces el conjunto:

$$\{N_F(T(x)) \mid x \in U_E\}$$

tiene supremo. Por tanto, $T(U_E)$ es acotado.

$\Leftarrow$) Supongo que $T(U_E)$ es acotado, como

$$0 \in \{N_F(T(x)) \mid x \in U_E\}$$

pues $0 \in U_E$ y $T(0) = 0$, entonces el conjunto anterior está acotado superiormente y es no vacío, luego su supremo $\|T\|$ existe y, cumple que:

$$N_F(T(x)) \leq \|T\| N_E(x), \ \forall\, x \in E.$$

por tanto, T es lineal continua.

q.e.d.

Corolario.

Sea $\phi: E \to \mathbb{R}$ una tranformación lineal. Si ϕ es continuo, entonces

$$\|\phi\| = \sup \phi(U_E) = \sup\{|\phi(x)| \mid x \in E\}.$$

EJEMPLO.

1) Sea $T:(\mathbb{R}^2, N_\infty)\to(\mathbb{R}^2, N_\infty);\ (x,y)\mapsto(-2x+y, x-y)$. Se probó anteriormente que T es función lineal continua, y

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ N_\infty(T(x,y))\leq 2M\cdot N_\infty(x,y)\leqslant 4N_\infty(x,y)$$

donde $M=\text{máx}\{N_\infty(T(e_1)), N_\infty(T(e_2))\}=2$. Por tanto $\|T\|\leqslant 4$, donde

$$\|T\|=\inf\{M\geq 0 \mid N_F(T(x))\leqslant M\cdot N_E(x), \forall x\in E\}$$

este 4 no promete ser el óptimo, es decir, $\|T\|$ no necesariamente será el 4.

Alternativamente podemos:

$$\begin{aligned} N_\infty(T(x,y)) &= N_\infty(2x-y, x-y)=\text{máx}\{|2x-y|, |x-y|\} \\ &\leqslant \text{máx}\{2|x|+|y|, |x|+|y|\}=2|x|+|y| \\ &\leqslant 3\,\text{máx}\{|x|,|y|\}=3N_\infty(x,y),\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \|T\|\leqslant 3$. Se afirma que $\|T\|=3$. En efecto. Para probar que $\|T\|\geq 3$, se usa:

$$\|T\|=\sup_{x\in U_E}\|T(x)\|$$

se busca un vector $x_0\in U_E$ tq $T(x_0)=3$. Pues así $3\leqslant\|T(x_0)\|$. Por ejemplo, $(-1,1)\in U_E$ y satisface:

$$T(-1,1)=(2+1,-1-1)=(3,-2)$$

Por tanto:

$$N_\infty(T(-1,1))=N_\infty(3,-2)=\text{máx}\{|3|,|-2|\}=3$$

luego $3\leqslant\|T\|$. Como $\|T\|\geq 3$, se tiene entonces que $\|T\|=3$.

2) Sea $f:(\phi_0, N_1)\to(\mathbb{R}, |\cdot|)$ el funcional lineal continuo

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x(n),\ \forall x\in\phi_1$$

Anteriormente se demostró que

$$|f(x)| \leqslant 1 \cdot N_1(x), \forall x \in \phi_0$$

Luego $\|f\| \leqslant 1$. Se afirma que $\|f\| \geq 1$. Se busca $x_0 \in U_{\phi_0}$ m $|f(x_0)| = 1$.

Se tiene que $e_1 = (1,0,0,\dots) \in U_{\phi_0}$ (pues $N_1(e_1) = 1$), y

$$|f(x_0)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} e_1(n)\right| = 1$$

Por tanto $\|f\| \geq 1$, como $\|f\| \leq 1$, entonces $\|f\| = 1$.

En el ejemplo anterior con ϕ_0, se vió que la misma f, pero ahora de $f : (\phi_0, N_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ no es un funcional lineal continuo. Basta probar que

$$f(U_E) \subseteq \mathbb{R}$$

no es acotado. En efecto, considere la sucesión $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ en ϕ_0 dados como

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_m(n) := \begin{cases} 1 & \text{si } n \leqslant m. \\ 0 & \text{si } m < n. \end{cases}$$

$x_m \in U_{\phi_0}$ $\forall m \in \mathbb{N}$, pues $N_\infty(x_m) = 1$. Pero

$$f(x_m) = \sum_{n=1}^{\infty} x_m(n) = m, \forall m \in \mathbb{N}.$$

por tanto, $f(U_{\phi_0})$ no es acotado en $\mathbb{R}$.

3) Considere a $\phi : (\mathcal{C}([a,b]), N_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ dada como:

$$\phi(f) = \int_a^b f(u)\,du, \forall f \in \mathcal{C}([a,b]).$$

Se sabe que $\phi \in \mathcal{C}([a,b])^*$ y

$$|\phi(f)| \leqslant (b-a) N_\infty(f), \forall f \in \mathcal{C}([a,b])$$

Por tanto $\|\phi\| \leqslant b-a$. Se afirma que $\|\phi\| \geq b-a$. Se busca $f_0 \in \mathcal{C}([a,b])$ tales que

$$|\phi(f_0)| = b-a.$$

Si $f_0 = 1$, entonces $f_0 \in \mathcal{C}([a,b])$. Veamos que:

$$|\phi(f_0)| = \left|\int_a^b f(u)\,du\right| = \int_a^b 1 \cdot du = b-a$$

por tanto, $\|\phi\| \geq b-a \Rightarrow \|\phi\| = b-a$.

Si $\phi:(\mathcal{C}([a,b]),N_1)\to(\mathbb{R},|\cdot|)$, entonces $\phi\in\mathcal{C}([a,b])^*$ y

$$|\phi(f)|\leqslant 1\cdot N_1(f),\ \forall f\in\mathcal{C}([a,b]).$$

Por tanto $\|\phi\|\leqslant 1$. Se afirma que $\|\phi\|\geqslant 1$. Veamos que $f_0=\frac{1}{b-a}\in\mathcal{C}([a,b])$ y $N_1(f_0)=1$. Por tanto $f_0\in\mathcal{U}_{\mathcal{C}([a,b])}$, así

$$|\phi(f_0)|=\left|\int_a^b f_0\right|=1.$$

Luego $\|\phi\|\geqslant 1\Rightarrow\|\phi\|=1$.

4) Pruebe que $id:(\mathcal{C}([a,b]),N_\infty)\to(\mathcal{C}([a,b]),N_1)$ es lineal continua, y $\|id\|=b-a$, pero $id^{-1}:(\mathcal{C}([a,b]),N_1)\to(\mathcal{C}([a,b]),N_\infty)$ es lineal no continua.

Dem:

Veamos que:

$$\begin{aligned}N_1(id(f))&=N_1(f)\\&=\int_a^b|f|\\&\leqslant\int_a^b N_\infty(f)\\&=(b-a)\cdot N_\infty(f),\ \forall f\in\mathcal{C}([a,b])\end{aligned}$$

por tanto, $id:(\mathcal{C}([a,b]),N_1)\to(\mathcal{C}([a,b]),N_\infty)$ es continua. Veamos que $id^{-1}:(\mathcal{C}([a,b]),N_\infty)\to(\mathcal{C}([a,b]),N_1)$ no es continua.

$\forall n\in\mathbb{N}$, definimos $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ como sigue:

$$\forall x\in[a,b],\ f_n(x):=\begin{cases}\left(\frac{n+1}{b-a}\right)^2\left(x-a-\frac{b-a}{n+1}\right) & \text{si } x\in\left[a,a+\frac{b-a}{n+1}\right].\\ 0 \text{ si } x\in\left]a+\frac{b-a}{n+1},\ b-\frac{b-a}{n+1}\right[.\\ \left(\frac{n+1}{b-a}\right)^2\left(x-b+\frac{b-a}{n+1}\right) & \text{si } x\in\left[b-\frac{b-a}{n+1},b\right].\end{cases}$$

Por el teorema del pegado, f_n es continua, y:

$$N_1(f)=\int_a^b|f|=\int_a^{a+\frac{b-a}{n+1}}\left(\frac{n+1}{b-a}\right)^2\left(-x+a+\frac{b-a}{n+1}\right)dx+\int_{b-\frac{b-a}{n+1}}^{b}\left(\frac{n+1}{b-a}\right)^2\left(x-b+\frac{b-a}{n+1}\right)$$

$$= \left(\frac{n+1}{b-a}\right)^2 \left[-\frac{x^2}{2} + ax + \frac{b-a}{n+1}x\right]_a^{a+\frac{b-a}{n+1}} + \left(\frac{n+1}{b-a}\right)^2\left[\frac{x^2}{2} - bx + \frac{b-a}{n+1}x\right]_{b-\frac{b-a}{n+1}}^{b}$$

$$= \left(\frac{n+1}{b-a}\right)^2 \left(-\frac{1}{2}\left(a^2+2a\frac{b-a}{n+1}+\left(\frac{b-a}{n+1}\right)^2\right) + a^2 + a\frac{b-a}{n+1} + a\frac{b-a}{n+1} + \left(\frac{b-a}{n+1}\right)^2 + \frac{a^2}{2} - a^2 \right.$$
$$- a\frac{b-a}{n+1} + \frac{b^2}{2} - b^2 + \frac{b-a}{n+1}b - \frac{1}{2}\left(b^2 - 2b\frac{b-a}{n+1} + \left(\frac{b-a}{n+1}\right)^2\right) + b^2 - b\frac{b-a}{n+1} -$$
$$\left. b\cdot\frac{b-a}{n+1} + \left(\frac{b-a}{n+1}\right)^2\right)$$

$$= \left(\frac{n+1}{b-a}\right)^2 \left(-\cancel{\frac{a^2}{2}} - \cancel{a\frac{b-a}{n+1}} - \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n+1}\right)^2 + \cancel{a^2} + \cancel{a\frac{b-a}{n+1}} + \cancel{a\frac{b-a}{n+1}} + \left(\frac{b-a}{n+1}\right)^2 + \cancel{\frac{a^2}{2}} - \cancel{a^2}\right.$$
$$- \cancel{a\frac{b-a}{n+1}} + \cancel{\frac{b^2}{2}} - \cancel{b^2} + \cancel{\frac{b-a}{n+1}b} - \cancel{\frac{b^2}{2}} + \cancel{b\frac{b-a}{n+1}} - \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n+1}\right)^2 + \cancel{b^2} - \cancel{b\frac{b-a}{n+1}} -$$
$$\left. \cancel{b\frac{b-a}{n+1}} + \left(\frac{b-a}{n+1}\right)^2\right)$$

$$= \left(\frac{n+1}{b-a}\right)^2\left(\frac{b-a}{n+1}\right)^2 = 1$$

Por tanto, $f_n \in U_{N_1}$, pero:

$$N_\infty(f_n) = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)| = \frac{n+1}{b-a}$$

Luego, $id^{-1}(U_{N_1})$ no es acotado con la N_∞. Así, id^{-1} no es función continua.

q.e.d.

Proposición.

Sea $T: E \to F$ lineal. Se tiene que

$$d_F(T(x), T(x')) = d_E(x, x'), \ \forall \ x, x' \in E.$$

Si y sólo si

$$N_F(T(x)) = N_E(x), \ \forall \ x \in E.$$

en este caso, $T \in C\mathcal{L}(E, T(E))$ y $\|T\| = \|T^{-1}\| = 1$.

Dem:

$\Rightarrow$) Suponga que $d_F(T(x), T(x')) = d_E(x, x')$, $\forall \ x, x' \in E$. En particular, para $x' = 0$:

$$d_F(T(x), T(0)) = d_F(T(x), 0) = N_F(T(x))$$

y $d_E(x, 0) = N_E(x)$. Así: $N_F(T(x)) = N_E(x)$.

$\Leftarrow$) Suponga que $N_F(T(x)) = N_E(x)$, $\forall \ x \in E$. Entonces $\forall \ x, x' \in E$:

$$d_F(T(x), T(x')) = N_F(T(x) - T(x')) = N_F(T(x - x'))$$
$$= N_E(x - x') = d_E(x, x')$$

En particular, $\|T\| \leq 1$, pues $N_F(T(x)) = 1 \cdot N_E(x)$, $\forall \ x \in E$. Veamos que si $x \in S_E \subseteq U_E$, entonces $N_E(x) = 1 \Rightarrow N_F(x) = 1$. Por tanto $\|T\| \geq 1$. Así, $\|T\| = 1$.

Similarmente $\|T^{-1}\| = 1$.

q.e.d.

EJEMPLO.

1) Sea $T: l_\infty \to l_\infty$. $x \mapsto T(x)$, donde si $x = (x(1), x(2), \ldots)$, entonces

$$T(x) = (0, x(1), x(2), \ldots)$$

T es llamado el operador transferencia. Claramente:

$$N_\infty(T(x)) = N_\infty(x), \ \forall \ x \in l_\infty.$$

Por tanto, T es lineal continuo y $\|T\| = 1$.

2) Sea $S: l_\infty \to l_\infty$, $y \to S(y)$ donde si $y = (y(1), y(2), \dots)$, entonces

$$S(y) = (y(2), y(3), \dots)$$

Por tanto S es operador lineal continuo, y $\|S\| \leq 1$. Afirmamos que $\|S\| = 1$. En efecto, como $(0,1,0,0,\dots) \in U_{l_\infty}$, y $N_\infty(0,1,\dots) = 1$, y

$$N_\infty(S(0,1,\dots)) = N_\infty(1,0,\dots) = 1$$

así $1 = N_\infty(S(0,1,0,\dots)) \leq \sup_{x \in U_E} N_\infty(S(x)) = \|S\|$. Por tanto $\|S\| = 1$. S es llamado el operador retrotransferencia, y $S \circ T = id_{l_\infty}$ pero $S \circ T \neq id_{N_\infty}$

3) Sea $p \in]1, \infty[$ y $p^* \in]1, \infty[$ $\ni$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. Fije $c = \{c(n)\}_{n=1}^{\infty} \in l_{p^*}$ y defina $T: l_p \to l_1$ como

$$T(x) = c \cdot x = (c(1) \cdot x(1), c(2) \cdot x(2), \dots), \forall x \in l_p$$

Por Hölder $cx \in l_1$, y

$$N_1(T(x)) = N_1(cx) \leq N_{p^*}(c) \cdot N_p(x), \forall x \in l_p$$

T es lineal continuo y $\|T\| \leq N_{p^*}(c)$. Probar que $\|T\| = 1$.

3) Sea $f: l_1 \to \mathbb{R}$ dada como

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n+1} x(n) \quad , \forall x \in l_1$$

f está bien definido, pues:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{2n-1}{n+1}\right| |x(n)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot |x(n)| = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| < \infty \quad \text{, pues } x \in l_1$$

Así, f está bien definida. Veamos que $\left\{\frac{2n-1}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty} \in l_\infty$. Si $x \in l_1$ (como f es lineal:

$$|f(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n+1} x(n)\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{2n-1}{n+1}\right| |x(n)| \leq N_\infty\left(\left\{\frac{2n-1}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}\right) \cdot N_1(x)$$

$$= \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \left|2 - \frac{3}{n+1}\right|\right) \cdot N_1(x)$$

$$= 2 \cdot N_1(x)$$

Así, f es lineal continua, y $\|f\| \leq 2$. Se afirma que $\|f\| = 2$. En este caso no existe $x_0 \in U_{l_1}$ ⫪ $|f(x_0)| = 2$. Se debe entonces buscar una sucesión de vectores $x_m \in U_{l_1}$ ⫪ $|f(x_m)| \xrightarrow[m\to\infty]{} 2$. Entonces:

$$|f(x_m)| \leq \sup_{x \in U_{l_1}} |f(x)| = \|f\|, \forall m \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow 2 = \lim_{m\to\infty} |f(x_m)| = \|f\|.$$

Por ejemplo, $x_m = e_m \in U_{l_1}$, $\forall m \in \mathbb{N}$:

$$f(x_m) = f(e_m) = \frac{2m-1}{m+1}, \forall m \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow \frac{2m-1}{m+1} = |f(x_m)| \leq \|f\|, \forall m \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow 2 = \lim_{m\to\infty} \frac{2m-1}{m+1} \leq \|f\| \Rightarrow \|f\| = 2.$$

Proposición.

Sea E un espacio normado, y $f: E \to \mathbb{R}$ un funcional lineal. Entonces f es continua ssi $\operatorname{Ker} f$ es un subespacio cerrado de E.

Dem:

$\Rightarrow)$ Basta observar que $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{0\})$ el cual es cerrado, pues $\{0\}$ es cerrado en $\mathbb{R}$.

$\Leftarrow)$ Suponga que f no es continua. Se debe probar que $\operatorname{Ker} f$ no es cerrado. Para ello, probaremos que $\operatorname{Ker} f$ es un subespacio denso en E. Sean $x \in E$ y $\varepsilon > 0$ arbitrarios. Como f no es continuo, entonces $f(U_E)$ no es acotado en $\mathbb{R}$, luego tampoco $f(\varepsilon U_E) = \varepsilon f(U_E)$ (por ser f lineal). Dado $f(x) \in \mathbb{R}$ $\exists\, y \in \varepsilon U_E$ tq $|f(y)| > |f(x)|$, y $N(y) \leq \varepsilon$.

Entonces:

$$N(y) \leq \varepsilon \quad \text{y} \quad \left|\frac{f(x)}{f(y)}\right| < 1$$

Veamos que $x - \frac{f(x)}{f(y)} y \in \operatorname{Ker} f$, pues $f\left(x - \frac{f(x)}{f(y)} y\right) = f(x) - \frac{f(x)}{f(y)} \cdot f(y) = 0$.

Además:

$$N\left(x - \left(x - \frac{f(x)}{f(y)} y\right)\right) = N(y) \leq \varepsilon.$$

q.e.d.

Proposición.

Si $T \in \mathcal{CL}(E, F)$ y $S \in \mathcal{CL}(F, G)$, entonces $S \circ T \in \mathcal{CL}(E, G)$, y $\|S \circ T\| \leq \|T\| \cdot \|S\|$

Dem:

Claramente $S \circ T \in \mathcal{CL}(E, G)$. Se tiene:

$$\begin{aligned} N_G(S \circ T(x)) &= N_G(S(T(x))) \\ &\leq \|S\| \cdot N_F(T(x)) \end{aligned}$$

Por tanto, $\|S\circ T\| \leq \|S\|\cdot\|T\|$. $\leq \|S\|\cdot\|T\|\cdot N_E(x)$, $\forall\, x\in E$.

q.e.d.

Corolario.

Si $T\in C\mathcal{L}(E,F)$ y $T^n = T^{n-1}\circ T$, $\forall\, n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ con $T^1 = T$, entonces $\|T^n\| \leq \|T\|^n$.

Teorema:

Sean E, F espacios normados. Si F es de Banach, entonces $(C\mathcal{L}(E,F), \|\cdot\|)$ es de Banach.

Dem:

(Probar en vacaciones).

Corolario:

El dual topológico de un espacio normado es siempre de Banach, i.e $(E^*, \|\cdot\|)$ es de Banach, con $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.