Espacios Hilbertianos

Cristo Daniel Alvarado

13 de febrero de 2024

Índice general

Capítulo 1

Espacios Hilbertianos

1.1. Conceptos básicos. Proyecciones ortogonales

Definición 1.1.1
Sea H un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$. Decimos que H es un **espacio prehilbertiano** si está dotado de una aplicación $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ con las propiedades siguientes:

1). $\forall \vec{y} \in H$ fijo, $\vec{x} \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ es una aplicación lineal de H en $\mathbb{K}$, o sea

$$\begin{aligned} \left(\vec{x_1} + \vec{x_2}\middle|\vec{y}\right) &= \left(\vec{x_1}\middle|\vec{y}\right) + \left(\vec{x_2}\middle|\vec{y}\right) \\ \left(\alpha\vec{x}\middle|\vec{y}\right) &= \alpha \cdot \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) \end{aligned}$$

para todo $\vec{x}, \vec{x_1}, \vec{x_2} \in H$ y $\alpha \in \mathbb{K}$.

2). $(\vec{y}|\vec{x}) = \overline{\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)}$, para todo $\vec{x} \in H$.

3). $\left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right) \geq 0$, para todo $\vec{x} \in H$.

4). $\left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right) = 0$ si y sólo si $\vec{x} = 0$.

Observación 1.1.1
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces 1) y 2) implican que $\forall \vec{x} \in H$ fijo, la aplicación $\vec{y} \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ de H en $\mathbb{R}$ es lineal. En este caso se dice que $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ es una **forma bilineal sobre** H.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, entonces

$$\begin{aligned} \left(\vec{x}\middle|\vec{y_1} + \vec{y_2}\right) &= \left(\vec{x}\middle|\vec{y_1}\right) + \left(\vec{x}\middle|\vec{y_2}\right) \\ \left(\vec{x}\middle|\alpha\vec{y}\right) &= \overline{\alpha}\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) \end{aligned}$$

Se dice que $\vec{y} \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ es entonces **semilineal** y que $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ es **sesquilineal** ($1\frac{1}{2}$-lineal).

La aplicación $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ se llama **producto escalar sobre** H.

Definición 1.1.2
Para todo $\vec{x} \in H$ se define la **norma de** $\vec{x}$ como: $\|\vec{x}\| = \sqrt{\left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right)}$.

Ejemplo 1.1.1
Sea $H = \mathbb{K}^n$

Ejemplo 1.1.2
Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y sea $H = L_2(S, \mathbb{K})$. Para todo $f, g \in H$ se define

$$\left(f|g\right) = \int_S f\overline{g}$$

La integral existe por Hölder con $p = p^* = 2$. Este es un producto escalar sobre H y, en este caso:

$$\|f\| = \left[\int_S \left|f\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} = \mathcal{N}_2(f), \quad \forall f \in H$$

Ejemplo 1.1.3
Sea $H = l_2(\mathbb{K})$ el espacio de sucesiones en $\mathbb{K}$ que son cuadrado sumables. Se sabe que $\vec{x} = (x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{K})$ si y sólo si

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$$

$l_2(\mathbb{K})$ es un espacio prehilbertiano con el producto escalar:

$$\left(\vec{x}|\vec{y}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\overline{y_i}$$

donde la serie es convergente por Hölder. En este caso:

$$\|\vec{x}\| = \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left|x_i\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} = \mathcal{N}_2(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in l_2(\mathbb{K}) \tag{1.1}$$

Demostración:
Entorno de Prueba ■

Solución:
Entorno de Solución □

Teorema 1.1.1 (Nombre)
Teorema

Proposición 1.1.1 (Nombre)
Proposición

Corolario 1.1.1 (Nombre)
Corolario

Lema 1.1.1 (Nombre)
Lema

Definición 1.1.3 (Nombre)
Definición

Observación 1.1.2 (Nombre)
Observación

Ejemplo 1.1.4 (Nombre)
Ejemplo

Ejercicio 1.1.1 (Nombre)
Ejercicio