Lista 4.

1. Sea $\{N_i\}_{i\in I}$ una familia de subgrupos normales de un grupo G. Pruebe que $\bigcap_{i\in I} N_i$ es un subgrupo normal de G.

Dem:

Sea $N = \bigcap_{i\in I} N_i$. Como $N_i < G$, $\forall i \in I$, entonces por una proposición anterior, $N < G$. Sea $g \in G$ y $n \in N$, como $gng^{-1} \in N_i$, $\forall i \in I$ (pues $n \in N_i$, $\forall i \in I$ y $N_i \triangleleft G$), entonces $gng^{-1} \in \bigcap_{i\in I} N_i = N \Rightarrow N \triangleleft G$.

q.e.d.

2. En $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$, sean $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ donde $i^2 = -1$. Sea $Q_8 = \langle a, b\rangle$ con la multiplicación de matrices. Pruebe que Q_8 es un grupo no abeliano de orden 8, el cual es llamado el **grupo de los cuaternios**. (Sugerencia: Pruebe que $ba = a^3 b$, y de aquí que cada elemento de Q_8 es de la forma $a^i b^j$. Note que $a^4 = b^4 = e$, donde e es la matriz identidad, elemento identidad de Q_8.)

Dem:

Veamos primero las potencias de a y b.

$$a^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$a^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a^4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e$$

$$b^2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$b^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$b^4 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e$$

Veamos además que:

$$ba = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$$a^3 b = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow ba = a^3 b$$

Veamos a Q_8. Sea $x \in Q_8 = \langle a, b \rangle$.

3. Sea $H := \{-1,\ 1,\ -i,\ i,\ j,\ -j,\ -k,\ k\}$ sujeto a las siguientes relaciones:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ ij = k = -ji,\ jk = i = -kj,\ ki = j = -ik.$$

Pruebe que H es un grupo multiplicativo en el cual todos sus subgrupos son normales.

El grupo H es llamado el **grupo de los cuaternios**. Además, todo grupo en el que todos sus subgrupos son normales es llamado **hamiltoniano**.

4. Sea D_n el conjunto de todos los símbolos formales $a^i b^j$ con $i = 0, 1$, $j = 0, \dots, n-1$, sujeto a las siguientes reglas:

(i) $a^i b^j = a^s b^t$ si, y sólo si $i = s$ y $j = t$;

(ii) $a^2 = b^n = e$, $n > 2$; y

(iii) $ab = b^{-1}a$.

Pruebe lo siguiente:

a) Encuentre la forma del producto $(a^i b^j)(a^k b^m)$ del tipo $a^\alpha b^\beta$.

b) Usando el inciso (*a*), pruebe que D_n es un grupo no abeliano de orden $2n$.

c) D_n es exactamente el grupo diédrico de orden $2n$.

Sol.

De a):

Sean $i, k \in \{0, 1\}$ y $j, m \in [\![0, n-1]\!]$, tenemos 3 casos:

1) $j = 0$, en este caso:

5. Encuentre subgrupos H y K de D_4 tales que $H \lhd K$ y $K \lhd D_4$, pero que H no sea normal en D_4.

6. Sea H un subgrupo cíclico de un grupo G tal que $H \lhd G$. Pruebe que todo subgrupo de H es normal en G.

Dem:

Como H es cíclico, $H = \langle a \rangle$, donde $a \in G$. Como $H \lhd G \Rightarrow \langle a \rangle = g \langle a \rangle g^{-1}$, $\forall g \in G$. Como $K < H \Rightarrow \exists\, m \in \mathbb{Z}$ ∋ $K = \langle a^m \rangle$.

Sea $g \in G$ y $a^{ml} \in K$. Veamos que:

$$g a^{ml} g^{-1} = (g a^l g^{-1})^m$$

Como $\langle a \rangle = g \langle a \rangle g^{-1} \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{Z}$ ∋ $a^n = g a^l g^{-1} \Rightarrow g a^{ml} g^{-1} = a^{mn} \in \langle a^m \rangle$. Por tanto, $K \lhd G$.

q.e.d.

7. Sea N un subgrupo finito de un grupo G. Pruebe que si N es el único subgrupo de G con $|N|$ elementos, entonces N es un subgrupo normal de G.

Dem:

8. Sean N y M subgrupos normales de un grupo G tales que $N \cap M = \langle e \rangle$. Pruebe que para cada $n \in N$ y para cada $m \in M$ se cumple que $nm = mn$.

Dem:

Sean $n \in N$ y $m \in M$. Como $N \triangleleft G$ y $M \triangleleft G$ y, $m, n \in G \Rightarrow nmn^{-1} \in M$ y $mn^{-1}m^{-1} \in N$. Luego $nmn^{-1}m^{-1} \in M$ y $nmn^{-1}m^{-1} \in N \Rightarrow nmn^{-1}m^{-1} \in N \cap M = \langle e \rangle \Rightarrow nmn^{-1}m^{-1} = e \Rightarrow nm = mn$.

9. Sea N un subgrupo de un grupo G. Para cada $a, b \in G$, defina la relación

$$Na * Nb := Nab.$$

Pruebe que la relación $*$ define una operación en el conjunto cociente $G/_D N$ si y sólo si N es un subgrupo normal de G.

Dem:

$\Rightarrow$) Suponga que $*$ define una operación en $G/_D N$. Entonces $* : G/_D N \times G/_D N \to G/_D N$ es una función.

Sea $g \in G$.