Capítulo 1

Álgebra Exterior sobre un espacio vectorial de dimensión finita

Ejercicio 1.1.1 (Ejercicio 19)
Sea E un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo $\mathbb{K}$ provisto de una base $\{\vec{e_1}, \dots \vec{e_n}\}$.

Para todo entero no negativo $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ se considera un espacio vectorial E^p provisto de una base $\left\{\vec{e}_{\alpha_1,\dots\alpha_p}\right\}_{\alpha_1\cdots\alpha_p}$ en correspondencia biyectiva con el conjunto de todas las n^p sucesiones finitas $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ de elementos en $\left[\left|1, n\right|\right]$.

Es claro que $E^0 \cong \mathbb{K}$ y que $E^1 \cong E$. Se define el espacio vectorial de dimensión finita:

$$\otimes E = \bigoplus_{p\geq 0} E^p$$

(a) Muestre que $\otimes E$ es un álgebra asociativa con uno, mediante la tabla de multiplicación:

$$\vec{e}_{\alpha_1,\dots,\alpha_p} \otimes \vec{e}_{\beta_1,\dots,\beta_q} = \vec{e}_{\alpha_1,\dots,\alpha_p,\beta_1,\dots,\beta_q}$$

En particular, $\vec{e}_{\alpha_1,\dots,\alpha_p} = \vec{e}_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{\alpha_p}$.

(b) De aquí en adelante, álgebra querrá decir álgera asociativa con uno y los homomorifmos ϕ de álgebras deberán satisfacer que $\phi(1) = 1$.

Sea E un espacio vectorial, $\mathcal{A}$ un álgebra, i una aplicación lineal de E en $\mathcal{A}$. La tripleta $(E, \mathcal{A}, i)$ se llama álgebra tensorial sobre E si satisface la siguiente propiedad universal:

Definición 1.1.1 (Propiedad Universal)
Para toda aplicación lineal $\lambda : E \to \mathcal{B}$ de E en un álgebra $\mathcal{B}$ existe un único homomorfismo de álgebras $\lambda^* : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tal que:

$$\lambda = \lambda^* \circ i$$

es decir, que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\lambda"'] & \mathcal{A} \arrow[d, "\lambda^*"] \\ & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Muestre que el álgebra tensorial, si existe, es única en el sentido siguiente:

- Si $(E, \mathcal{A}, i)$ son álgebras tensoriales sobre E, existe un único homomorfismo p de $\mathcal{A}$ sobre $\mathcal{A}'$ tal que $i' = p \circ i$.

(c) Muestre que si E es de dimensión finita, entonces el álgebra $\otimes E$, construída en *(a)* es un álgebra tensorial sobre E.

(d) Si $\otimes E$ es un álgebra tensorial sobre E, constrído de un modo cualquiera, se tiene que $\otimes E = \bigoplus_{p \geq 0} E^p$, donde E^p es el subespacio vectorial de $\otimes E$ engendrado por los tensores descomponibles de orden p.

Si $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ es una base de E, los n^p productos tensoriales $\vec{e}_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{\alpha_p}$ constituyen una base de E^p.