

Lista 2 de Ejercicios
Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

29 de abril de 2024

Índice general

1. Ejercicios Convolución	2
---------------------------	---

2

Capítulo 1

Ejercicios Convolución

Ejercicio 1.1.1

Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ funciones nulas en $] - \infty, 0[$. Si existe $f * g(x)$, demuestre que:

$$f * g(x) = \begin{cases} \int_0^\infty f(y)g(x-y)dy & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En los casos siguientes f y g son nulas en $] - \infty, 0[$ y sus valores en $[0, \infty[$ se indican abajo. Calcule $f * g$.

I. $f(x) = e^{-x}$ y $g(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

II. $f(x) = g(x) = e^{-x}$.

III. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

IV. $f(x) = g(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Solución:

Para la demostración, el caso $x \geq 0$ es inmediato de la definición de convolución y del hecho de que f es nula en $] - \infty, 0[$. Suponga que existe $f * g(x)$ con $x < 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy \\ &= \int_0^{\infty} f(y)g(x-y)dy \end{aligned}$$

sea $y \in [0, \infty[$, es decir que $0 \leq y < \infty$, por lo cual $-\infty < -y \leq 0$. Sumando x a ambos lados se sigue que:

$$-\infty < x - y \leq x < 0 \Rightarrow x - y \in] - \infty, 0[$$

por tanto, $g(x-y) = 0$, para todo $y \in [0, \infty[$. Por tanto, $f * g(x) = 0$.

De (i): Veamos que:

$$f * g(x) = \begin{cases} \int_0^\infty e^{-y}g(x-y)dy & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Sea $x \geq 0$. Analicemos varios casos:

- $0 \leq x \leq 1$, en este caso $0 \leq x - y \leq 1$ si y sólo si $y \leq x$ y $x - 1 \leq y$ (pero, $x - 1 \leq 0$, por lo cual $0 \leq y$), por ende:

$$\begin{aligned}
f * g(x) &= \int_0^x e^{-y} g(x-y) dy \\
&= \int_0^x e^{-y} (x-y) dy \\
&= x \int_0^x e^{-y} dy - \int_0^x y e^{-y} dy \\
&= x [-e^{-y}]_0^x - [-e^{-y}(y+1)]_0^x \\
&= x - x e^{-x} + [e^{-y}(y+1)]_0^x \\
&= x - x e^{-x} + (x+1)e^{-x} - 1 \\
&= (x-1) + e^{-x}
\end{aligned}$$

- $1 < x$, en este caso $0 \leq x - y \leq 1$ si y sólo si $y \leq x$ y $x - 1 \leq y$ (donde $0 < x - 1$ por como se eligió el x). Por ende:

$$\begin{aligned}
f * g(x) &= \int_{x-1}^x e^{-y} g(x-y) dy \\
&= \int_{x-1}^x e^{-y} (x-y) dy \\
&= x \int_{x-1}^x e^{-y} dy - \int_{x-1}^x y e^{-y} dy \\
&= x [-e^{-y}]_{x-1}^x + [(y+1)e^{-y}]_{x-1}^x \\
&= x e^{1-x} - x e^{-x} + (x+1)e^{-x} - (x-1+1)e^{1-x} \\
&= x e^{1-x} - x e^{-x} + x e^{-x} + e^{-x} - x e^{1-x} \\
&= e^{-x}
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$f * g(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } 1 < x \\ (x-1) + e^{-x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

De (ii): Veamos que:

$$f * g(x) = \begin{cases} \int_0^\infty e^{-y} g(x-y) dy & \text{si } 0 \leq x \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

analicemos a $g(x-y)$. Si $x \geq 0$ entonces, $x-y \geq 0$ si y sólo si $x \geq y$. Por tanto, para $x \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-y} g(x-y) dy &= \int_0^x e^{-y} e^{y-x} dy \\
&= \int_0^x e^{-x} dy \\
&= x e^{-x}
\end{aligned}$$

de esta forma:

$$f * g(x) = \begin{cases} x e^{-x} & \text{si } 0 \leq x \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

De (iii): Veamos que:

$$f * g(x) = \begin{cases} \int_0^1 g(x-y) dy & \text{si } 0 \leq x \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

□

Ejercicio 1.1.2

Haga lo siguiente:

- I. Para toda $m \in \mathbb{N}$ se define $e_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$e_m(x) = \begin{cases} \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Pruebe que

$$e_p * e_q = e_{p+q}$$

- II. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ integrable en todo intervalo acotado tal que $f(x) = 0$ para todo $x \leq a$.

Muestre que

$$e_m * f(x) = \begin{cases} \int_a^x \frac{(x-y)^{m-1}}{(m-1)!} f(y) dy & \text{si } x \geq a \\ 0 & \text{si } x < a \end{cases}$$

- III. **Deduzca** que para $x \geq a$ se cumple la siguiente **fórmula de Cauchy para la n -ésima integral indefinida**

$$\int_a^x dx_{m-1} \int_a^{x_{m-1}} dx_{m-2} \cdots \int_a^{x_2} dx_1 \int_a^{x_1} f(x_0) dx_0 = \int_a^x \frac{(x-y)^{m-1}}{(m-1)!} f(y) dy$$

Demostración:

De (i): Sean $p, q \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$e_p(x) = \begin{cases} \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad e_q(x) = \begin{cases} \frac{x^{q-1}}{(q-1)!} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} e_p * e_q(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e_p(x) \cdot e_q(y-x) dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} \cdot e_q(y-x) dx \end{aligned}$$

analicemos dos casos:

- $y < 0$: Entonces, para todo $x \geq 0$, se sigue que $-x \leq 0$, luego $y-x < 0$. Por ende, $e(y-x) = 0$. Luego:

$$e_p * e_q(y) = 0 = e_{p+q}(y)$$

- $y \geq 0$: Entonces, $y-x \geq 0$ si y sólo si $x \in [0, y]$. Por tanto, la integral se vuelve en:

$$\begin{aligned} e_p * e_q(y) &= \int_0^y \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} \cdot e_q(y-x) dx \\ &= \int_0^y \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} \cdot \frac{(y-x)^{q-1}}{(q-1)!} dx \\ &= \frac{1}{(p-1)!(q-1)!} \cdot \int_0^y x^{p-1} (y-x)^{q-1} dx \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\int_0^y x^{p-1}(y-x)^{q-1}dx &= \int_0^y x^{p-1} \sum_{k=0}^{q-1} \binom{q-1}{k} (-1)^{q-1} x^k (-y)^{q-1-k} dx \\
&= (-1)^{q-1} \int_0^y \sum_{k=0}^{q-1} \binom{q-1}{k} x^{p+k-1} (-y)^{q-1-k} dx \\
&= (-1)^{q-1} \sum_{k=0}^{q-1} \binom{q-1}{k} (-y)^{q-1-k} \int_0^y x^{p+k-1} dx \\
&= (-1)^{q-1} \sum_{k=0}^{q-1} \binom{q-1}{k} (-y)^{q-1-k} \left[\frac{x^{p+k}}{p+k} \right]_0^y \\
&= (-1)^{q-1} \sum_{k=0}^{q-1} \binom{q-1}{k} (-y)^{q-1-k} \frac{y^{p+k}}{p+k} \\
&= (-1)^{2q-2} \sum_{k=0}^{q-1} \binom{q-1}{k} \frac{(-1)^k y^{p+q-1}}{p+k} \\
&= y^{p+q-1} \sum_{k=0}^{q-1} \binom{q-1}{k} \frac{(-1)^k}{p+k}
\end{aligned}$$

veamos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(p-1)!(q-1)!} \sum_{k=0}^{q-1} \binom{q-1}{k} \frac{(-1)^k}{p+k} &= \frac{1}{(p-1)!(q-1)!} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{(q-1)!}{k!(q-1-k)!} \cdot \frac{(-1)^k}{p+k} \\
&= \frac{1}{(p-1)!(q-1)!} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{(-1)^k (q-1)!}{k!(q-1-k)!(p+k)} \\
&= \frac{1}{(p-1)!} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{(-1)^k}{k!(q-1-k)!(p+k)} \\
&= \dots \\
&= \frac{1}{(p-1)!} \cdot \frac{(p-1)!}{(p+q-1)!} \\
&= \frac{1}{(p+q-1)!}
\end{aligned}$$

por tanto,

$$e_p * e_q(y) = \frac{y^{p+q-1}}{(p+q-1)!} = e_{p+q}(y)$$

por ambos incisos, se sigue que $e_p * e_q = e_{p+q}$.

De (ii): Veamos que:

$$f * e_m(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e_m(x-y) dy$$

Como $f(y) = 0$ para todo $y \leq a$, se sigue que:

$$f * e_m(x) = \int_a^{\infty} f(y) e_m(x-y) dy$$

Se tienen dos casos:

- Si $x < a$, entonces para todo $a \leq y$ se tiene que $x - y < 0$, luego $e_m(x - y) = 0$. Por tanto:

$$f * e_m(x) = 0$$

- Si $a \leq x$, entonces $x - y \geq 0$ si y sólo si $a \leq y \leq x$. Por tanto,

$$\begin{aligned} f * e_m(x) &= \int_a^x f(y) e_m(x - y) dy \\ &= \int_a^x f(y) \frac{(y - x)^{m-1}}{(m-1)!} dy \\ &= \int_a^x \frac{(y - x)^{m-1}}{(m-1)!} f(y) dy \end{aligned}$$

donde, esta integral existe, pues la función $y \mapsto (x - y)^{m-1}$ es acotada en $[a, x]$ y, $y \mapsto f(y)$ es integrable en este intervalo acotado.

Por ambos incisos, se sigue que la convolución existe para todo $x \in \mathbb{R}$ y, su valor es:

$$f * e_m(x) = e_m * f(x) = \begin{cases} \int_a^x \frac{(x-y)^{m-1}}{(m-1)!} f(y) dy & \text{si } x \geq a \\ 0 & \text{si } x < a \end{cases}$$

De (iii): Procederemos por inducción sobre m .

- Para $m = 1$ el resultado es inmediato, pues

$$\begin{aligned} \int_a^x f(x_0) dx_0 &= \int_a^x \frac{1}{1} f(y) dy \\ &= \int_a^x \frac{(x - y)^{1-1}}{(1-1)!} f(y) dy \end{aligned}$$

- Suponga el resultado válido para algún $m \in \mathbb{N}$. Probaremos que se cumple para $m + 1$. En efecto, primero notemos que la función $e_m * f$ es una función integrable en todo intervalo acotado (ya que la integral de la convolución es el producto de las integrales de las funciones en la convolución), nula para todo $x \leq a$. Por ende:

$$(e_m * f) * e_1(x) = \begin{cases} \int_a^x \frac{(x-y)^{1-1}}{(1-1)!} (e_m * f)(y) dy & \text{si } x \geq a \\ 0 & \text{si } x < a \end{cases}$$

en el caso que $x \geq a$:

$$(e_m * f) * e_1(x) = \int_a^x \frac{(x - y)^{1-1}}{(1-1)!} (e_m * f)(y) dy$$

Por tanto, se sigue que

$$\begin{aligned}
\int_a^x dx_m \int_a^{x_m} dx_{m-1} \cdots \int_a^{x_2} dx_1 \int_a^{x_1} f(x_0) dx_0 &= \int_a^x dx_m \int_a^{x_m} \frac{(x_m - y)^{m-1}}{(m-1)!} f(y) dy \\
&= \int_a^x (e_m * f)(x_m) dx_m \\
&= \int_a^x \frac{(x - y)^{1-1}}{(1-1)!} (e_m * f)(y) dy \\
&= (e_m * f) * e_1(x) \\
&= (f * e_m) * e_1(x) \\
&= f * (e_m * e_1)(x) \\
&= f * e_{m+1}(x) \\
&= \int_a^x f(y) \frac{(x - y)^m}{m!} dy \\
&= \int_a^x \frac{(x - y)^m}{m!} f(y) dy \\
&= \int_a^x \frac{(x - y)^{m+1-1}}{(m+1-1)!} f(y) dy
\end{aligned}$$

por lo cual, el resultado se cumple para $m + 1$.

Aplicando inducción, se obtiene lo deseado. ■

Ejercicio 1.1.3

La integral fraccional de orden $1 \geq \alpha > 0$ sobre un intervalo $[a, x]$ de una función medible f se define como:

$$I_a^\alpha[f](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt$$

para toda $x \geq a$ tal que la integral exista.

I. Fije $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Para cada $1 \geq \alpha > 0$ se define

$$g_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{x^{1-\alpha}} \chi_{]0, b-a[}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Pruebe que si $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$, entonces existe la convolución $\tilde{f} * g_\alpha$. **Calcule** $\tilde{f} * g_\alpha$.

II. **Calcule** $I_0^{1/2}[t](x)$ y $I_0^{1/2}[I_0^{1/2}[t]](x)$. ¿**Conclusión**? Justifique.

Demostración:

De (i): Sea $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$. Veamos que existe la convolución. En efecto, se tiene que $\tilde{f} \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, para todo $p \in [1, \infty]$. Ahora, notemos que:

$$1 - \alpha \geq 0$$
■

Ejercicio 1.1.4

Para todo $p > 0$ se define:

$$f_p(t) = \begin{cases} t^{p-1}e^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

Calculando de dos modos distintos la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f_p * f_q$ con $p, q > 0$, **pruebe** la fórmula

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

donde $B(p, q)$ es la función beta y $\Gamma(q)$ es la función gama.

Demostración:

Sean $p, q > 0$. Como las funciones $f_p, f_q \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ (ver la definición de la función Gamma) entonces, por el teorema de Young, $f_p * f_q \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{K})$. Ahora, se tiene además que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_p * f_q(y) dy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_p(y) dy \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_q(y) dy \right) = \Gamma(p)\Gamma(q)$$

(ya que $\int_{-\infty}^{\infty} f_p = \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t} dt = \Gamma(p)$). Ahora, si $y \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$\begin{aligned} f_p * f_q(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_p(t) f_q(y-t) dt \\ &= \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t} f_q(y-t) dt \end{aligned}$$

Por un ejercicio anterior, si $y \leq 0$, la convolución es cero (suponemos entonces que $y > 0$). Entonces, $y-t > 0$ si y sólo si $y > t$. Por ende:

$$\begin{aligned} f_p * f_q(y) &= \int_0^y t^{p-1} e^{-t} f_q(y-t) dt \\ &= \int_0^y t^{p-1} e^{-t} (y-t)^{q-1} e^{-y+t} dt \\ &= e^{-y} \int_0^y t^{p-1} (y-t)^{q-1} dt \end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $x = \frac{t}{y}$, obtenemos que

$$\begin{aligned} e^{-y} \int_0^y t^{p-1} (y-t)^{q-1} dt &= e^{-y} \int_0^1 (xy)^{p-1} (y-xy)^{q-1} y dx \\ &= e^{-y} y^{p+q-1} \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \\ &= e^{-y} y^{p+q-1} B(p, q) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_p * f_q(y) dy &= \int_0^{\infty} e^{-y} y^{p+q-1} B(p, q) dy \\ &= B(p, q) \int_0^{\infty} e^{-y} y^{p+q-1} dy \\ &= B(p, q) \Gamma(p+q) \end{aligned}$$

de ambas igualdades, se sigue que

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= B(p, q)\Gamma(p+q) \\ \Rightarrow B(p, q) &= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \end{aligned}$$

■

Ejercicio 1.1.5

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ una función localmente integrable en \mathbb{R} . Defina para todo $h > 0$, la función

$$J_h f = f * \left(\frac{1}{h} \chi_{]-h, 0[} \right)$$

I. **Muestre** que, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$J_h f(x) = \frac{1}{h} \int_0^h f(x+y) dy$$

y que $J_h f$ es continua en \mathbb{R} .

II. Si f es integrable en \mathbb{R} , **pruebe** que también lo es $J_h f$ y que

$$\int_{\mathbb{R}} J_h f = \int_{\mathbb{R}} f$$

III. Si f es de clase C^r en \mathbb{R} , **muestre** que también lo es $J_h f$ y que $(J_h f)^{(k)} = J_h f^{(k)}$ para $k = 1, \dots, r$.

Solución:

De (i): Sea $x \in \mathbb{R}$. Calculemos $J_h f$, para ello, calcularemos $\left(\frac{1}{h} \chi_{]-h, 0[} \right) * f(x)$. Veamos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{h} \chi_{]-h, 0[} \right) * f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h} \chi_{]-h, 0[}(y) f(x-y) dy \\ &= \frac{1}{h} \int_{-h}^0 f(x-y) dy \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h f(x+u) du \end{aligned}$$

pues, como f es localmente integrable, se sigue que la función $y \mapsto f(x-y)$ también lo es y, haciendo el cambio de variable $u = -y$.

Veamos la continuidad, en efecto, sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Queremos que

$$\begin{aligned} |J_h f(x_0) - J_h f(x)| &= \frac{1}{h} \cdot \left| \int_0^h f(x_0+y) - f(x+y) dy \right| \\ &\leq \frac{1}{h} \cdot \int_0^h |f(x_0+y) - f(x+y)| dy \end{aligned}$$

...

De (ii): Suponga que f es integrable en \mathbb{R} , es decir que $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, como la función $x \mapsto \frac{1}{h} \chi_{]-h, 0[}(x)$ es una función acotada nula fuera de un conjunto con medida finita así, está en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, luego por el teorema de Young se sigue que $J_h f = f * \left(\frac{1}{h} \chi_{]-h, 0[} \right)$ es una función definida c.t.p. en \mathbb{R} la cual es integrable, para la que se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} J_h f(y) dy = \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) dy \right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{h} \chi_{]-h, 0[}(y) dy \right) = \int_{\mathbb{R}} f(y) dy$$

De (iii): Como f es de clase C^r , en particular hasta la r -ésima derivada es una función continua. Luego, las funciones $f^{(k)}$ con $k = 0, 1, \dots, r$ son continuas en \mathbb{R} , en particular, localmente integrables en \mathbb{R} . Luego, por (i) las convoluciones $J_h f^{(k)}$ existen en todo \mathbb{R} y son funciones continuas. Para probar el resultado, basta con ver que

$$(J_h f)^{(1)} = J_h f^{(1)}$$

(aplicando inducción sobre r , se obtendría que $J_h f$ es una función clase C^r tal que $(J_h f)^{(k)} = J_h f^{(k)}$, para todo $k = 1, \dots, r$). En efecto, sea $x \in \mathbb{R}$ y considere la vecindad $]x - h, x + h[$ de x . Se tiene que:

$$J_h f^{(1)}(x) = \frac{1}{h} \int_0^h f^{(1)}(x + y) dy$$

donde, $y \mapsto f^{(1)}(x + y)$ es una función continua, en particular alcanza su máximo en todo intervalo compacto. Observemos que si $M = \sup \left\{ |f^{(1)}(z)| \mid z \in]x - h, x + h[\right\}$, se tiene que:

$$|\chi_{[0, h]}(y) f(x + y)| \leq M \chi_{[0, h]}(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

donde $y \mapsto M \chi_{[0, h]}(y)$ es una función integrable independiente de x . Luego, por el teorema de derivación, se sigue del teorema de derivación de funciones definidas por integrales, que existe $(J_h f)^{(1)}$ en $]x - h, x + h[$ y, su valor es:

$$(J_h f)^{(1)}(z) = J_h f^{(1)}(z) \quad \forall x \in]x - h, x + h[$$

Como el $x \in \mathbb{R}$ fue arbitrario y esto se cumple para la vecindad $]x - h, x + h[$ de x , entonces el resultado se cumple para todo \mathbb{R} , es decir que:

$$(J_h f)^{(1)} = J_h f^{(1)}$$

□

Ejercicio 1.1.6

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ una función localmente integrable en \mathbb{R}^n . Sea $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq R\}$. Defina:

$$\mathcal{M}_R f = f * \frac{\chi_B}{\text{Vol}(B)}$$

I. **Muestre** que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{M}_R f(x) = \frac{1}{\text{Vol}(B)} \int_{\|x-y\| \leq R} f(y) dy$$

y que $\mathcal{M}_R f$ es continua en \mathbb{R}^n .

II. Si f es integrable en \mathbb{R}^n , **pruebe** que también lo es $\mathcal{M}_R f$ y que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}_R f = \int_{\mathbb{R}^n} f$$

III. Si f es de clase C^r en \mathbb{R}^n , **muestre** que también lo es $\mathcal{M}_R f$ y que $D(\mathcal{M}_R f) = \mathcal{M}_R(Df)$ para todo operador $D = \partial_{\alpha_1} \cdots \partial_{\alpha_k}$, con $k \in \{1, \dots, r\}$.

Solución:

El problema es probar la continuidad. Notemos que

$$\mathcal{M}_R f(x) = f * \frac{\chi_B}{\text{Vol}(B)}(x) = \frac{1}{\text{Vol}(B)} \int_B f(x-y) dt = \frac{1}{\text{Vol}(B)} \int_{\|x-y\| < R} f(z) dz = \frac{1}{\text{Vol}(B)} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \chi_C(x) dx$$

donde

$$C = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|z - y\| \leq R\}$$

Notemos que (para probar continuidad)

$$|\mathcal{M}_R f(x) - \mathcal{M}_R f(y)| \leq \frac{1}{\text{Vol}(B)} \int_B |f(x-t) - f(y-t)| dt$$

Sea $C = B'(0, 1) + B$ (el cual es compacto). Defina $h = f\chi_C \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Existe $\alpha \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ tal que $\mathcal{N}_1(h - \alpha) < \varepsilon$ donde α es uniformemente continua en \mathbb{R} . Usar este α para encontrar un $0 < \delta < 1$ tal que la integral de arriba se haga menor que ε . \square

Definición 1.1.1

Sea $F : X \rightarrow X$ con (X, d) espacio métrico. Se dice que F es una **función contractante** si existe $\alpha \in]0, 1[$ tal que

$$d(F(x), F(y)) \leq \alpha \cdot d(x, y), \quad \forall x, y \in X$$

claramente, F es lipschitziana y, por lo tanto, uniformemente continua.

Teorema 1.1.1 (Teorema del punto fijo)

Si F es una función contractante de un espacio métrico completo (X, d) en sí mismo, entonces F posee un único punto fijo, es decir $\exists! x_0 \in X$ tal que

$$F(x_0) = x_0$$

Además, si $x \in X$ es arbitrario, entonces

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x)$$

Ejercicio 1.1.7

Haga lo siguiente:

- I. Sean f y g dos funciones en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Sea $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $\mathcal{N}_1(f) < 1/|\lambda|$. **Demuestre** que la ecuación

$$x = \lambda x * f + g$$

admite una solución $x \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ salvo equivalencias. **Muestre** que la solución puede ser representada en forma de una serie

$$x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^\nu g * \underbrace{f * \cdots * f}_{\nu\text{-veces}}$$

que es convergente en el espacio de Banach $L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$.

- II. Al suponer $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y $g \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, estudie la misma ecuación con la incógnita x en $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$.

Demostración:

De (i): Sea $F : \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ la función tal que

$$x \mapsto F(x) = \lambda x * f + g$$

Podemos considerar a esta función del espacio de Banach $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ en sí mismo. Para probar el resultado, usaremos el teorema del punto fijo, con lo cual se probará la existencia de $x \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ tal que

$$x = \lambda x * f + g$$

el cual es único salvo equivalencias (esto, pues la solución es única en el espacio de Banach $L_1(\mathbb{R}, \mathbb{K})$). En efecto, para esto basta con probar que F es contractante. Veamos que si $x_1, x_2 \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_1(F(x_1) - F(x_2)) &= \mathcal{N}_1(\lambda x_1 * f + g - \lambda x_2 * f - g) \\ &= |\lambda| \mathcal{N}_1(x_1 * f - x_2 * f) \\ &= |\lambda| \mathcal{N}_1((x_1 - x_2) * f) \\ &\leq |\lambda| \mathcal{N}_1(f) \mathcal{N}_1(x_1 - x_2)\end{aligned}$$

donde, $0 \leq \lambda \mathcal{N}_1(f) < 1$. Por tanto, F es contractante. Luego existe tal $x \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

Veamos que la solución puede ser representada en forma de la serie:

$$x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^{\nu} g * \underbrace{f * \cdots * f}_{\nu\text{-veces}}$$

Por el teorema del punto fijo, sabemos que la solución está dada por:

$$x = \lim_{\nu \rightarrow \infty} F^{\nu}(y)$$

donde $y \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ es un elemento arbitrario de este espacio. Tomando $y = g$, obtenemos que

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} F^k(g)$$

donde F^k es la composición de F k -veces. Afirmamos que

$$F^k(g) = \sum_{\nu=0}^k \lambda^{\nu} g * \underbrace{f * \cdots * f}_{\nu\text{-veces}}$$

En efecto procederemos por inducción sobre k . Para $k = 1$ el resultado es inmediato de la definición de F . Suponga que el resultado se cumple para algún $k \in \mathbb{N}$. Veamos que se cumple para $k + 1$. En efecto, notemos que

$$\begin{aligned}F^{k+1}(g) &= F(F^k(g)) \\ &= F\left(\sum_{\nu=0}^k \lambda^{\nu} g * \underbrace{f * \cdots * f}_{\nu\text{-veces}}\right) \\ &= \lambda \left(\sum_{\nu=0}^k \lambda^{\nu} g * \underbrace{f * \cdots * f}_{\nu\text{-veces}}\right) * f + g \\ &= \sum_{\nu=0}^k \lambda^{\nu+1} g * \underbrace{f * \cdots * f}_{\nu+1\text{-veces}} + g \\ &= \sum_{\nu=1}^{k+1} \lambda^{\nu} g * \underbrace{f * \cdots * f}_{\nu\text{-veces}} + g \\ &= \sum_{\nu=0}^{k+1} \lambda^{\nu} g * \underbrace{f * \cdots * f}_{\nu\text{-veces}}\end{aligned}$$

lo cual prueba el resultado. Por tanto:

$$\begin{aligned}
 x &= \lim_{k \rightarrow \infty} F^k(g) \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^k \lambda^\nu g * \underbrace{f * \cdots * f}_{\nu \text{ veces}} \\
 &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^\nu g * \underbrace{f * \cdots * f}_{\nu \text{ veces}}
 \end{aligned}$$

De (ii): ■

Ejercicio 1.1.8

Haga lo siguiente:

- I. Sea $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ una función medible. **Muestre** que existe una función medible acotada $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ tal que $|g| = \alpha g$ en todo punto de \mathbb{R}^n .

Sugerencia. Intente con la función $\frac{|g+\chi_S|}{g+\chi_S}$ donde $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0\}$.

- II. Sean $1 < p < \infty$ y $g \in \mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Defina $\phi_g : \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ como:

$$\phi_g(f) = \int_{\mathbb{R}^n} fg, \quad \forall f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$$

Pruebe que ϕ_g es una aplicación lineal continua sobre $L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y que $\|\phi_g\| = \mathcal{N}_{p^*}(g)$.

Así pues, la aplicación $g \mapsto \phi_g$ es una isometría de $\mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ en $\mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ (dicha isometría también es suprayectiva, pero este hecho más profundo no se pide probar aquí).

Sugerencia. Para probar la desigualdad $\mathcal{N}_{p^*}(g) \leq \|\phi_g\|$ considere la función $f = \alpha |g|^{p^*-1}$, donde α es la función del inciso (i).

- III. Sea $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ una sucesión de Dirac en $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Se quiere demostrar, sin usar la desigualdad de Jensen, que si $1 \leq p < \infty$ y $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, entonces

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{N}_p(f - \rho_\nu * f) = 0$$

Defina $g_\nu = f - \rho_\nu * f$ y considere la aplicación lineal $\phi_{g_\nu} \in L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})^*$, donde

$$\phi_{g_\nu}(h) = \int_{\mathbb{R}^n} hg_\nu, \quad \forall h \in \mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$$

Establezca la desigualdad

$$|\phi_{g_\nu}(h)| \leq \mathcal{N}_{p^*}(h) \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\nu(y) \mathcal{N}_p(f_{-y} - f) dy$$

Sea $\varepsilon > 0$. **Demuestre** que para ν suficientemente grande,

$$|\phi_{g_\nu}(h)| \leq \mathcal{N}_{p^*}(h) \varepsilon$$

Utilizando el inciso (ii) termine la demostración.

Demostración:

De (i): Tomemos la función $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ dada como sigue

$$\alpha = \frac{|g + \chi_S|}{g + \chi_S}$$

donde $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0\}$. Esta función está bien definida y cumple que $|g| = \alpha g$, pues si $x \in \mathbb{R}^n$, se tienen dos casos:

- $x \in \mathbb{R}^n \setminus S$, en este caso $\chi_S(x) = 0$ y $g(x) \neq 0$. Por tanto,

$$\alpha(x) = \frac{|g(x)|}{g(x)} \Rightarrow |g(x)| = \alpha g(x)$$

- $x \in S$, en cuyo caso se tiene que $\chi_S(x) = 1$ y, $g(x) = 0$. Por lo cual

$$\alpha(x) = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow |g(x)| = 0 = \alpha g(x) = 0$$

así, α está bien definida y cumple lo deseado. Además, es medible por ser el cociente de dos funciones medibles. También es acotada, ya que por los dos incisos anteriores se tiene que

$$|\alpha| = 1$$

De (ii): Es claro por la linealidad de la integral y por Hölder que φ_g es un operador lineal, para todo $g \in \mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Veamos que es continuo, en efecto, por Hölder se tiene que:

$$\begin{aligned} |\phi_g(f)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} fg \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |fg| \\ &= \mathcal{N}_1(fg) \\ &\leq \mathcal{N}_p(f) \mathcal{N}_{p^*}(g) \\ &= \mathcal{N}_{p^*}(g) \mathcal{N}_p(f) \end{aligned}$$

por tanto, ϕ_g es acotado, luego continuo. Se tiene entonces que

$$\|\phi_g\| \leq \mathcal{N}_{p^*}(g)$$

Probaremos la otra desigualdad. Se tiene que $\alpha |g|^{p^*-1} \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. En efecto, veamos que

$$\begin{aligned} \left| \alpha |g|^{p^*-1} \right|^p &= |g|^{pp^*-p} \\ &= |g|^{p^*} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \end{aligned}$$

pues, $g \in \mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y, por definición de $p, p^* \in]0, \infty[$. Luego $\alpha |g|^{p^*-1} \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Se sigue entonces que

$$\begin{aligned} \left| \phi_g(\alpha |g|^{p^*-1}) \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \alpha |g|^{p^*-1} g \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} |g| |g|^{p^*-1} \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} |g|^{p^*} \right| \\ &= \int_{\mathbb{R}} |g|^{p^*} \\ &= \mathcal{N}_{p^*}(g)^{p^*} \end{aligned}$$

y, además

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_p \left(\alpha |g|^{p^*-1} \right) &= \left(\int_{\mathbb{R}} |\alpha|^p |g|^{pp^*-p} \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} |g|^{p^*} \right)^{1/p} \\ &= \mathcal{N}_{p^*}(g)^{p^*/p}\end{aligned}$$

por tanto, al tenerse que

$$\begin{aligned}\left| \phi_g(\alpha |g|^{p^*-1}) \right| &\leq \|\phi_g\| \mathcal{N}_p \left(\alpha |g|^{p^*-1} \right) \\ &\Rightarrow \mathcal{N}_{p^*}(g)^{p^*} \leq \|\phi_g\| \mathcal{N}_{p^*}(g)^{p^*/p}\end{aligned}$$

si $\mathcal{N}_{p^*}(g) = 0$, es claro que $|\phi_g| = \mathcal{N}_{p^*}(g)$. En caso contrario, se sigue de la ecuación anterior que

$$\begin{aligned}\Rightarrow \mathcal{N}_{p^*}(g)^{p^* - \frac{p^*}{p}} &\leq \|\phi_g\| \\ \Rightarrow \mathcal{N}_{p^*}(g) &\leq \|\phi_g\|\end{aligned}$$

Por ambas desigualdades, se sigue que $|\phi_g| = \mathcal{N}_{p^*}(g)$.

De (iii): Sea $h \in \mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, se tiene que

$$\begin{aligned}|\phi_{g_\nu}(h)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} h g_\nu \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |h| |g_\nu| \\ &= \phi_{|g_\nu|}(|h|) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |h|(x) |f - \rho_\nu * f|(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |h(x)| \cdot \left| f(x) - \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \rho_\nu(y) dy \right| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |h(x)| dx \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x-y)| \rho_\nu(y) dy\end{aligned}$$

donde la función $(x, y) \mapsto |h(x)| |f(x) - f(x-y)| \rho_\nu(y)$ es integrable en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, pues $|h| \in \mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y $|g_\nu| \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, luego $\phi_{|g_\nu|}(|h|) < \infty$, esto por Tonelli. Por Fubini se puede cambiar el orden de integración, así:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h(x)| dx \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x-y)| \rho_\nu(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\nu(y) dy \int_{\mathbb{R}^n} |h(x)| |f(x) - f(x-y)| dx$$

sea $y \in \mathbb{R}^n$. Observemos que por Hölder se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |h(x)| |f(x) - f(x-y)| dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |h(x)| |f(x) - f_{-y}(x)| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |h| |f - f_{-y}| \\ &= \mathcal{N}_1(h \cdot [f - f_{-y}]) \\ &\leq \mathcal{N}_{p^*}(h) \cdot \mathcal{N}_p(f - f_{-y})\end{aligned}$$

por ende,

$$\begin{aligned}|\phi_{g_\nu}(h)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{N}_{p^*}(h) \cdot \mathcal{N}_p(f - f_{-y}) \rho_\nu(y) dy \\ \Rightarrow |\phi_{g_\nu}(h)| &\leq \mathcal{N}_{p^*}(h) \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\nu(y) \mathcal{N}_p(f - f_{-y}) dy\end{aligned}$$

como se quería demostrar.

Para la otra parte, sea $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$. Observemos que

$$\begin{aligned}
|\phi_{g_\nu}(h)| &\leq \mathcal{N}_{p^*}(h) \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\nu(y) \mathcal{N}_p(f - f_{-y}) dy \\
&= \mathcal{N}_{p^*}(h) \left[\int_{\|y\| < \delta} \rho_\nu(y) \mathcal{N}_p(f - f_{-y}) dy + \int_{\delta \leq \|y\|} \rho_\nu(y) \mathcal{N}_p(f - f_{-y}) dy \right] \\
&\leq \mathcal{N}_{p^*}(h) \left[\int_{\|y\| < \delta} \rho_\nu(y) \mathcal{N}_p(f - f_{-y}) dy + \int_{\delta \leq \|y\|} \rho_\nu(y) [\mathcal{N}_p(f) + \mathcal{N}_p(f_{-y})] dy \right] \\
&= \mathcal{N}_{p^*}(h) \left[\int_{\|y\| < \delta} \rho_\nu(y) \mathcal{N}_p(f_0 - f_{-y}) dy + 2\mathcal{N}_p(f) \int_{\delta \leq \|y\|} \rho_\nu(y) dy \right]
\end{aligned}$$

Se tienen dos cosas, como $y \mapsto f_y$ es una función uniformemente continua de \mathbb{R}^n en $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, en particular es continua en 0, luego existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\|y\| < \delta_1 \Rightarrow \mathcal{N}_p(f_0 - f_{-y}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

además, como $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ es una sucesión de Dirac, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\nu \geq N \Rightarrow \int_{\delta_1 \leq \|y\|} \rho_\nu(y) dy < \frac{\varepsilon}{2(2\mathcal{N}_p(f) + 1)}$$

por tanto, si $\delta = \delta_1$ y $\nu \geq N$, se tiene que

$$\begin{aligned}
|\phi_{g_\nu}(h)| &\leq \mathcal{N}_{p^*}(h) \left[\int_{\|y\| < \delta_1} \rho_\nu(y) \mathcal{N}_p(f_0 - f_{-y}) dy + 2\mathcal{N}_p(f) \int_{\delta_1 \leq \|y\|} \rho_\nu(y) dy \right] \\
&\leq \mathcal{N}_{p^*}(h) \left[\frac{\varepsilon}{2} \int_{\|y\| < \delta_1} \rho_\nu(y) dy + 2\mathcal{N}_p(f) \frac{\varepsilon}{2(2\mathcal{N}_p(f) + 1)} \right] \\
&\leq \mathcal{N}_{p^*}(f) \left[\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \right] \\
&= \mathcal{N}_{p^*}(f) \varepsilon
\end{aligned}$$

por tanto,

$$\nu \geq N \Rightarrow |\phi_{g_\nu}(h)| \leq \mathcal{N}_{p^*}(f) \varepsilon$$

Observemos ahora que

$$\|\phi_{g_\nu}\| = \inf \left\{ M \geq 0 \mid \mathcal{N}_p(\phi_{g_\nu}(h)) \leq M \cdot \mathcal{N}_{p^*}(h), \forall h \in \mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \right\}$$

de lo anterior se deduce que ε es un elemento del conjunto anterior para todo $\nu \geq N$, se sigue entonces que

$$\nu \geq N \Rightarrow \|\phi_{g_\nu}\| \leq \varepsilon$$

por el inciso (ii) sabemos que $\mathcal{N}_p(g_\nu) = \|\phi_{g_\nu}\|$, luego

$$\nu \geq N \Rightarrow \mathcal{N}_p(g_\nu) = \mathcal{N}_p(f - \rho_\nu * f) \leq \varepsilon$$

por tanto,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{N}_p(f - \rho_\nu * f) = 0$$

como se quería demostrar. ■

Ejercicio 1.1.9

Demuestre que el sistema de potencias enteras $\{x \mapsto x^\nu \mid \nu \in \mathbb{N}^*\}$ es total en $L_p([a, b], \mathbb{C})$ para $p \in [1, \infty[$.

Sugerencia. Basta demostrarlo para $L_1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. El sistema trigonométrico es total en este espacio. Desarrolle $e^{ik\pi}$ en serie de potencias de Maclaurin.

Demostración:

Podemos ver una función $f \in \mathcal{L}_p([a, b], \mathbb{C})$ como una función en $\mathcal{L}_p([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, haciendo

$$g = f \circ \alpha$$

donde $\alpha : [-\pi, \pi] \rightarrow [a, b]$ es una función lineal. Más aún, como $\mathcal{L}_p([a, b], \mathbb{C}) \subseteq \mathcal{L}_1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ (pues la medida del intervalo $[-\pi, \pi]$ es finita), basta con probar el resultado para $\mathcal{L}_1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$.

Para probar que el sistema

$$\mathcal{P} = \{x \mapsto x^\nu \mid \nu \in \mathbb{N}^*\} \subseteq \mathcal{L}_\infty([-\pi, \pi], \mathbb{C})$$

es total en $L_1([a, b], \mathbb{C})$ (realmente sería usar funciones periódicas, pero como podemos ver una función periódica como aquella que es limitada a cierto intervalo de definición, no es necesario tomar tales funciones más que las definidas en ese intervalo), basta con probar que

$$f \in \mathcal{L}_1([-\pi, \pi], \mathbb{C}) \text{ tal que } \int_{-\pi}^{\pi} f \varphi = 0, \forall \varphi \in \mathcal{P} \Rightarrow f = 0 \text{ c.t.p. en } [-\pi, \pi]$$

es decir, que

$$f \in \mathcal{L}_1([-\pi, \pi], \mathbb{C}) \text{ tal que } \int_{-\pi}^{\pi} f(x) x^\nu dx = 0, \forall \nu \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f = 0 \text{ c.t.p. en } [-\pi, \pi]$$

En efecto, sea $f \in \mathcal{L}_1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ y suponga que para todo $\nu \in \mathbb{N}^*$ se tiene que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) x^\nu dx = 0$$

recordemos que el sistema trigonométrico complejo

$$\tau_{\mathbb{C}} = \{x \mapsto e^{ikx} \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

es total en $\mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$, luego es total en $\mathcal{L}_1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. Sabemos que para todo $x \in [-\pi, \pi]$ y $k \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$e^{ikx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ikx)^n}{n!}$$

Probaremos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ikx} dx = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

En efecto, sea $k \in \mathbb{Z}$. Observemos que

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ikx} dx &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ikx)^n}{n!} dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(x) (ikx)^n}{n!} dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m \frac{f(x) (ikx)^n}{n!} dx \end{aligned}$$

queremos sacar el límite de la integral, para ello, considere las funciones

$$g_m(x) = \sum_{n=0}^m \frac{f(x)(ikx)^n}{n!}, \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$$

para todo $x \in [-\pi, \pi]$ tal que $f(x)$ esté bien definida. Estas funciones están definidas c.t.p. en $[-\pi, \pi]$. Además, es claro que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} g_m(x) = f(x)e^{ikx}$$

para casi todo $x \in [-\pi, \pi]$. También,

$$\begin{aligned} |g_m|(x) &= \left| \sum_{n=0}^m \frac{f(x)(ikx)^n}{n!} \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^m \left| \frac{f(x)(ikx)^n}{n!} \right| \\ &= \sum_{n=0}^m |f(x)| \frac{|ikx|^n}{n!} \\ &= |f(x)| \sum_{n=0}^m \frac{|kx|^n}{n!} \\ &\leq |f(x)| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|kx|^n}{n!} \\ &= |f(x)| e^{|kx|} \\ &\leq |f(x)| e^{|k|\pi} \end{aligned}$$

para casi todo $x \in [-\pi, \pi]$, pues $|x| \mapsto e^{|kx|}$ tiene un máximo en $x = \pi$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Además, la función $x \mapsto |f(x)| e^{|k|\pi}$ está en $\mathcal{L}_1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, pues f lo está, luego $|f|$ lo está. Así, por Lebesgue se tiene que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \lim_{m \rightarrow \infty} g_m(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} g_m(x) dx$$

esto es

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m \frac{f(x)(ikx)^n}{n!} dx &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^m \frac{f(x)(ikx)^n}{n!} dx \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x)(ikx)^n}{n!} dx \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m \frac{(ik)^n}{n!} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)x^n dx \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m \frac{(ik)^n}{n!} \cdot 0 \\ &= 0 \\ \therefore \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx} dx &= 0 \end{aligned}$$

por la suposición hecha inicialmente. Luego, $f = 0$ c.t.p. en $[-\pi, \pi]$ por ser $\tau_{\mathbb{C}}$ total en $[-\pi, \pi]$. Finalmente, se sigue que \mathcal{P} es total en $L_1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. ■

Ejercicio 1.1.10

Demuestre que el sistema de potencias enteras $\{x^\nu \mid \nu \in \mathbb{N}^*\}$ es completo en $L_p([a, b], \mathbb{C})$ para $p \in [1, \infty[$.

Demostración:

Podemos ver una función $f \in \mathcal{L}_p([a, b], \mathbb{C})$ como una función en $\mathcal{L}_p([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, haciendo

$$g = f \circ \alpha$$

donde $\alpha : [-\pi, \pi] \rightarrow [a, b]$ es una función lineal. Más aún, como $\mathcal{L}_p([a, b], \mathbb{C}) \subseteq \mathcal{L}_1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ (pues la medida del intervalo $[-\pi, \pi]$ es finita), basta con probar el resultado para $\mathcal{L}_1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. Debemos probar que

$$\overline{\mathcal{L}(\mathcal{P})} = L_1([a, b], \mathbb{C})$$

es decir, que $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ es denso en $L_1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. En efecto, sea $f \in \mathcal{L}_1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. Considere la restricción $g = f|_{]-\pi, \pi[}$, es inmediato que $g \in \mathcal{L}_1(]-\pi, \pi[, \mathbb{C})$. Por un teorema existe una función $h \in \mathcal{C}_c^\infty(]-\pi, \pi[, \mathbb{C})$ tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1(g - h) &< \frac{\varepsilon}{2} \\ \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - h(x)| dx &< \frac{\varepsilon}{2} \\ \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - h(x)| dx &< \frac{\varepsilon}{2} \\ \Rightarrow \mathcal{N}_1(f - h) &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

podemos extender a h a $[-\pi, \pi]$ de tal forma que sea continua. Como h es continua y el intervalo $[-\pi, \pi]$ es compacto, por Wierstrass existe un polinomio $p \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ tal que

$$\sup_{x \in [-\pi, \pi]} |h(x) - p(x)| < \frac{\varepsilon}{4\pi}$$

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1(h - p) &= \int_{-\pi}^{\pi} |h(x) - p(x)| dx \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \sup_{y \in [-\pi, \pi]} |h(y) - p(y)| dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1(f - p) &\leq \mathcal{N}_1(f - h) + \mathcal{N}_1(g - h) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

donde $p \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$. Por tanto, $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ es denso en $\mathcal{L}_1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. Así, el sistema \mathcal{P} es completo en $L_1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. ■

Ejercicio 1.1.11

Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible con medida finita y $1 < p < \infty$. **Muestre** que si una familia de funciones $\{\varphi_i \mid i \in I\}$ es completa en $L_p(E, \mathbb{K})$, entonces dicha familia es total en $L_{p^*}(E, \mathbb{K})$.

Sugerencia. Sea $f \in \mathcal{L}_{p^*}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. Se supone que $\int_E f \varphi_i = 0$ para toda $i \in I$. Sea α una función medible acotada tal que $|f| = \alpha f$. Por hipótesis existe una sucesión de funciones $\{\psi_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ en $\mathcal{L}(\{\varphi_i \mid i \in I\})$ tal que $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{N}_p(\alpha - \psi_\nu) = 0$.

Demostración:

Sea

$$\mathcal{F} = \{\varphi_i \mid i \in I\}$$

es completa en $L_p(E, \mathbb{K})$, es decir que $\overline{\mathcal{L}(\mathcal{F})} = L_p(E, \mathbb{K})$. Hay que probar que para cada $f \in \mathcal{L}_{p^*}(E, \mathbb{K})$ se cumple que

$$\int_E f \varphi = 0, \forall \varphi \in \mathcal{F} \Rightarrow f = 0 \text{ c.t.p. en } E$$

En efecto, sea $f \in \mathcal{L}_{p^*}(E, \mathbb{K})$ tal que se cumple que

$$\int_E f \varphi = 0, \forall \varphi \in \mathcal{F}$$

Tomemos

$$\alpha = \frac{|f + \chi_S|}{f + \chi_S}$$

donde $S = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$. α es la función tal que $|f| = \alpha f$ (se probó en un inciso anterior). Además, es elemento de $\mathcal{L}_1(E, \mathbb{K})$ (en particular, de $\mathcal{L}_p(E, \mathbb{K})$ pues E tiene medida finita) pues es una función medible, acotada nula fuera de un conjunto con medida finita (nula fuera de $S \subseteq E$). Como la familia anterior es completa, se tiene que existe una sucesión $\{\psi_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ tal que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{N}_p(\alpha - \psi_\nu) = 0$$

Sea $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\nu \geq N \Rightarrow \mathcal{N}_p(\alpha - \psi_\nu) < \frac{\varepsilon}{1 + \mathcal{N}_{p^*}(f)}$$

Veamos que para todo $\nu \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \int_E |f| &= \int_E [\alpha f + f \psi_\nu] \\ &\leq \int_E |f| |\alpha + \psi_\nu| \\ &= \mathcal{N}_1(|f| \cdot |\alpha + \psi_\nu|) \\ &\leq \mathcal{N}_{p^*}(f) \mathcal{N}_p(\alpha + \psi_\nu) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

pues cada ψ_ν es combinación lineal finita de elementos de \mathcal{F} , por hipótesis como $\int_E f \varphi = 0$ para todo $\varphi \in \mathcal{F}$, se sigue entonces que $\int_E f \psi_\nu = 0$, para todo $\nu \in \mathbb{N}$. Como el $\varepsilon > 0$ fue arbitrario, se sigue que

$$f = 0 \text{ c.t.p. en } E$$

luego, la familia es total en $L_{p^*}(E, \mathbb{K})$. ■