Hiperbolicidad: Ejemplos y Aplicaciones en Teoría Geométrica de Grupos

Instituto Politécnico Nacional - Escuela Superior de Física y Matemáticas

Cristo Daniel Alvarado

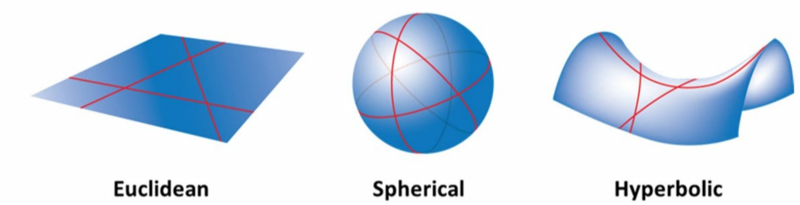
Escuela Superior de Física y Matemáticas
Instituto Politécnico Nacional

19 de octubre de 2025

Espacios Hiperbólicos y el Problema de la Palabra

Espacios Hiperbólicos y el Problema de la Palabra

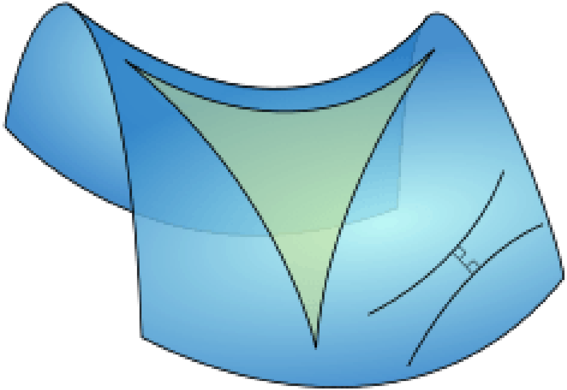
Hablaremos de triángulos.



y luego de grupos...

Hiperbólicidad y δ-hiperbolicidad

Triángulos geodésicos sobre superficie *hiperbólica*:



Hiperbólicidad y δ-hiperbolicidad

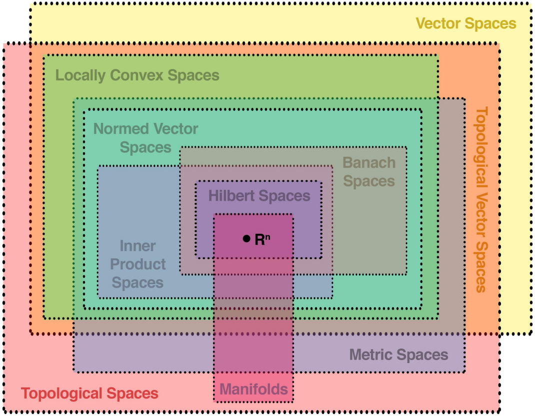
Idea: generalizar noción de hiperbolicidad a espacios métricos.

- Queremos conservar noción de distancia mínima (geodésicas).
- Vía triángulos geodésicos.
- Ensanchamientos.

Hiperbólicidad y δ-hiperbolicidad

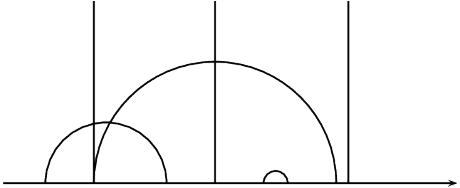
Idea: generalizar noción de hiperbolicidad a espacios métricos.

- Queremos conservar noción de distancia mínima (geodésicas).
- Vía triángulos geodésicos.
- Ensanchamientos.



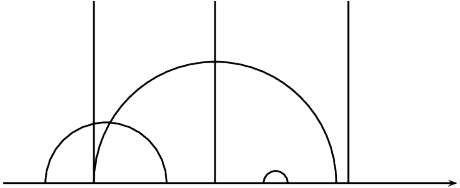
Hiperbólicidad y δ-hiperbolicidad

Geodésicas:

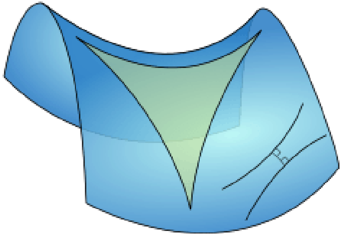


Hiperbólicidad y δ-hiperbolicidad

Geodésicas:



Triángulos geodésicos:



Hiperbólicidad y δ-hiperbolicidad

Ensanchamiento:

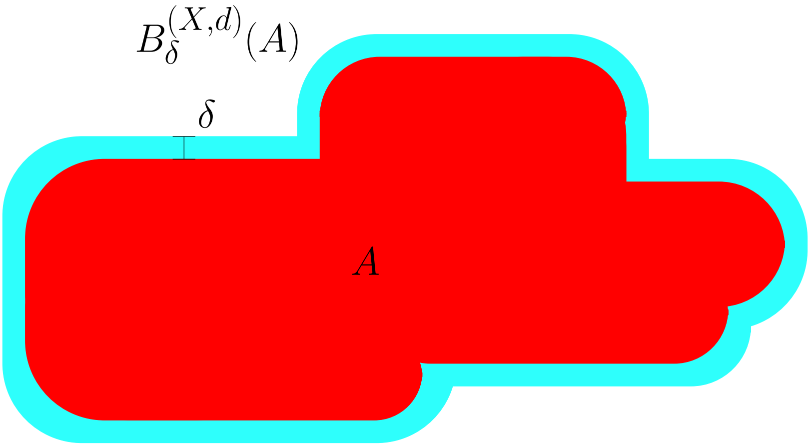


Figura: Ejemplo de conjunto A y $B_{\delta}^{(X,d)}(A)$ (ensanchamiento de A).

Hiperbólicidad y δ-hiperbolicidad

Definición

Sea (X, d) un espacio métrico. Para cada $\delta > 0$ y para cada $A \subseteq X$ se define el conjunto:

$$B_{\delta}^{(X,d)}(A) = \left\{ x \in X \middle| \exists a \in A \text{ tal que } d(x,a) \leq \delta \right\}$$

en este caso $B_{\delta}^{(X,d)}(A)$ será llamado **ensanchamiento de** A **por factor** δ.

Hiperbólicidad y δ-hiperbolicidad

Definición (Triángulos geodésicos δ-delgados)

Sea (X, d) un espacio métrico. Un **triángulo geodésico en X** es una tripleta $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ de geodésicas $\gamma_i : [0, L_i] \to X$ en X tales que:

$$\gamma_0(L_0) = \gamma_1(0), \quad \gamma_1(L_1) = \gamma_2(0), \quad \gamma_2(L_2) = \gamma_0(0)$$

Definición (Triángulos geodésicos δ-delgados)

Un triángulo geodésico es **δ-delgado** si:

$$\begin{aligned}
\operatorname{im}(\gamma_0) &\subseteq B_\delta^{(X,d)}(\operatorname{im}(\gamma_1) \cup \operatorname{im}(\gamma_2)),\\
\operatorname{im}(\gamma_1) &\subseteq B_\delta^{(X,d)}(\operatorname{im}(\gamma_0) \cup \operatorname{im}(\gamma_2)),\\
\operatorname{im}(\gamma_2) &\subseteq B_\delta^{(X,d)}(\operatorname{im}(\gamma_0) \cup \operatorname{im}(\gamma_1))
\end{aligned}$$

Hiperbólicidad y δ-hiperbolicidad

Noción: Hacer que los ensanchamientos de dos lados contengan al otro lado.

Hiperbólicidad y δ-hiperbolicidad

Noción: Hacer que los ensanchamientos de dos lados contengan al otro lado.

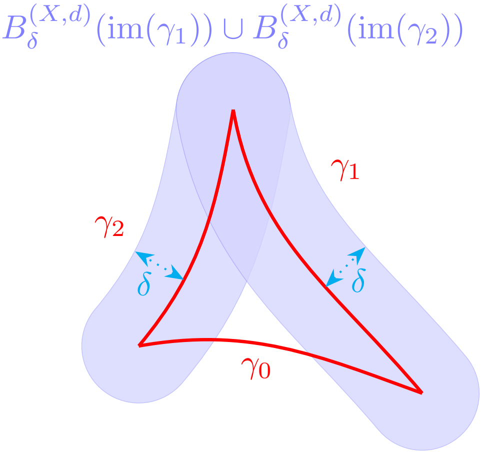


Figura: Triángulo geodésico $\Delta = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ y $B_\delta^{(X,d)}$.

Hiperbólicidad y δ-hiperbolicidad

¿El triángulo anterior es δ-delgado?

Hiperbólicidad y δ-hiperbolicidad

¿El triángulo anterior es δ-delgado?

No, la imagen de γ_0 no está contenida en $B_\delta^{(X,d)}(\mathrm{im}\,(\gamma_1)) \cup B_\delta^{(X,d)}(\mathrm{im}\,(\gamma_2))$.

Hiperbólicidad y δ-hiperbolicidad

Definición (Espacios hiperbólicos)

Sea (X, d) un espacio métrico.

(1) Sea $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Decimos que (X, d) es δ-**hiperbólico** si X es geodésico y todos los triángulos geodésicos de X son δ-delgados.

Hiperbólicidad y δ-hiperbolicidad

Definición (Espacios hiperbólicos)

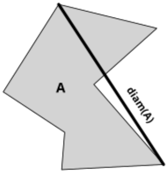
Sea (X, d) un espacio métrico.

(1) Sea $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Decimos que (X, d) es δ-**hiperbólico** si X es geodésico y todos los triángulos geodésicos de X son δ-delgados.

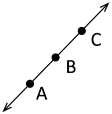
(2) (X, d) es **hiperbólico** si existe $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que (X, d) es δ-hiperbólico.

Hiperbólicidad y δ-hiperbolicidad

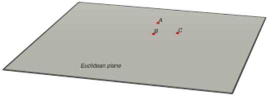
Ejemplos:



Espacio de diámetro finito



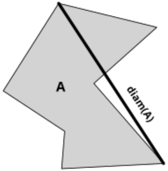
Recta Real

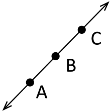


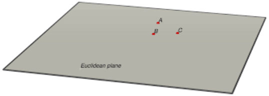
Plano Euclideano

Hiperbólicidad y δ-hiperbolicidad

Ejemplos:







Espacio de diámetro finito	Recta Real	Plano Euclideano
diam (A)-hiperbólico	0-hiperbólico	No es hiperbólico

Hiperbólicidad y δ-hiperbolicidad

¿Por qué $\mathbb{R}^2$ no es hiperbólico?

Hiperbólicidad y δ-hiperbolicidad

¿Por qué $\mathbb{R}^2$ no es hiperbólico?

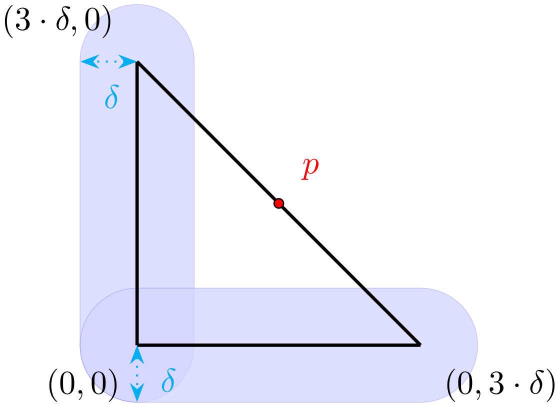


Figura: Triángulo que no es δ-hiperbólico.

Hiperbólicidad y δ-hiperbolicidad

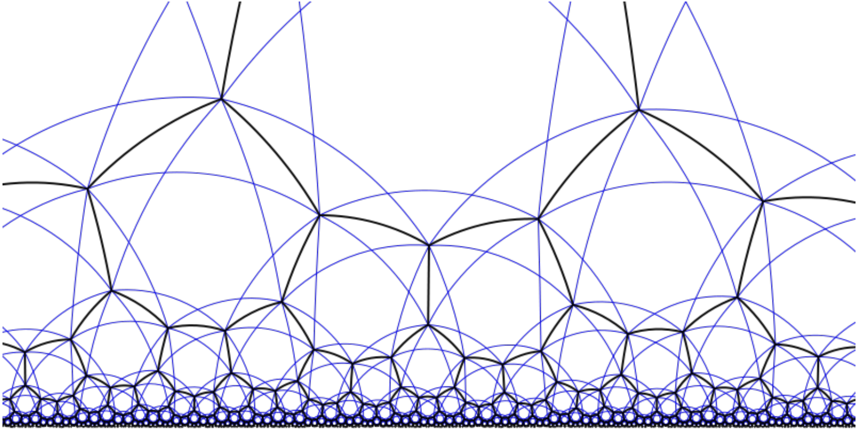
Con esta nueva definición surge una duda:

Hiperbólicidad y δ-hiperbolicidad

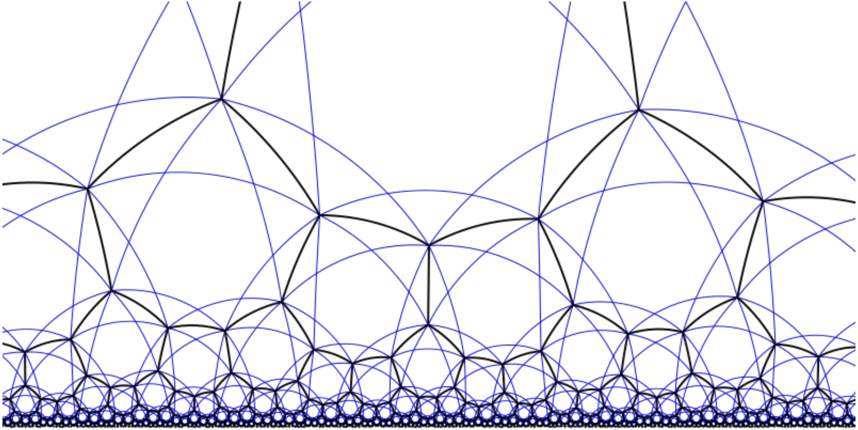
Con esta nueva definición surge una duda:

¿Coincide esta nueva noción de hiperbolicidad de espacios métricos con la definición sobre superficies?

Hiperbolicidad del Plano $\mathbb{H}^2$...



Hiperbolicidad del Plano $\mathbb{H}^2$...



como espacio métrico

Hiperbolicidad del Plano $\mathbb{H}^2$

Definición (Integral hiperbólica y Área hiperbólica)

Si $A \subseteq H$ es un conjunto Lebesgue medible, definimos el **área hiperbólica de** A por:

$$\mu_{\mathbb{H}^2}(A) = \int_H \chi_A \, dA_{\mathbb{H}^2} = \int_H \frac{\chi_A}{y^2} \, dxdy$$

Hiperbolicidad del Plano $\mathbb{H}^2$

Definición (**Integral hiperbólica y Área hiperbólica**)

Si $A \subseteq H$ es un conjunto Lebesgue medible, definimos el **área hiperbólica de** A por:

$$\mu_{\mathbb{H}^2}(A) = \int_H \chi_A \, dA_{\mathbb{H}^2} = \int_H \frac{\chi_A}{y^2} \, dxdy$$

Ejemplo (**Cuadrado**)

$$\mu_{\mathbb{H}^2}(A) = \int_0^{e^{2/10}} \int_1^e \frac{dx\, dy}{y^2}$$
$$= e^{\frac{2}{10}} \left(1 - e^{-1}\right)$$

Hiperbolicidad del Plano $\mathbb{H}^2$

Teorema (Teorema de Gauß-Bonnet para triángulos hiperbólicos)

Sea Δ un triángulo geodésico no degenerado en (H, d_H) con ángulos α, β, γ. Entonces:

$$\mu_{\mathbb{H}^2}(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

images/Triangle.png

Hiperbolicidad del Plano $\mathbb{H}^2$

Teorema (Teorema de Gauß-Bonnet para triángulos hiperbólicos)

Sea Δ un triángulo geodésico no degenerado en (H, d_H) con ángulos α, β, γ. Entonces:

$$\mu_{\mathbb{H}^2}(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

En particular:

$$\mu_{\mathbb{H}^2}(\Delta) < \pi$$

images/Triangle.png

Hiperbolicidad del Plano $\mathbb{H}^2$

Proposición (Crecimiento exponencial del área hiperbólica)

Para todo $r \in \mathbb{R}_{>10}$:

$$\mu_{\mathbb{H}^2}(B_r^{(H,d_H)}(i)) \geq e^{\frac{r}{10}}(1 - e^{-\frac{r}{2}})$$

Demostración:

Hiperbolicidad del Plano $\mathbb{H}^2$

Proposición (Crecimiento exponencial del área hiperbólica)

Para todo $r \in \mathbb{R}_{>10}$:

$$\mu_{\mathbb{H}^2}(B_r^{(H,d_H)}(i)) \geq e^{\frac{r}{10}}(1 - e^{-\frac{r}{2}})$$

Demostración:

Sea $r \in \mathbb{R}_{>10}$, el conjunto:

$$Q_r = \left\{ x + iy \;\middle|\; x \in [0, e^{r/10}],\; y \in [1, e^{r/2}] \right\}$$

está contenido en $B_r^{(H,d_H)}(i)$. En particular:

Proposición (Crecimiento exponencial del área hiperbólica)

Para todo $r \in \mathbb{R}_{>10}$:

$$\mu_{\mathbb{H}^2}(B_r^{(H,d_H)}(i)) \geq e^{\frac{r}{10}}(1 - e^{-\frac{r}{2}})$$

Demostración:

Sea $r \in \mathbb{R}_{>10}$, el conjunto:

$$Q_r = \left\{ x + iy \;\middle|\; x \in [0, e^{r/10}],\; y \in [1, e^{r/2}] \right\}$$

está contenido en $B_r^{(H,d_H)}(i)$. En particular:

$$\begin{aligned}\mu_{\mathbb{H}^2}(B_r^{(H,d_H)}(i)) &\geq \mu_{\mathbb{H}^2}(Q_r) \\ &= \int_0^{e^{r/10}} \int_1^{e^{r/2}} \frac{dx\,dy}{y^2} \\ &= e^{\frac{r}{10}} \left(1 - e^{-\frac{r}{2}}\right)\end{aligned}$$

`images/Circle.pdf`

Hiperbolicidad del Plano $\mathbb{H}^2$

Teorema (Triángulos son delgados)

Existe una constante $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que todo triángulo geodésico en (H, d_H) es δ-delgado.

Hiperbolicidad del Plano $\mathbb{H}^2$

Teorema (Triángulos son delgados)

Existe una constante $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que todo triángulo geodésico en (H, d_H) es δ-delgado.

Demostración:

Por la proposición anterior, existe $\delta > 0$ tal que:

$$\mu_{\mathbb{H}^2}(B_\delta^{(H,d_H)}(i)) \geq 2 \cdot \pi$$

Teorema (Triángulos son delgados)

Existe una constante $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que todo triángulo geodésico en (H, d_H) es δ-delgado.

Demostración:

Por la proposición anterior, existe $\delta > 0$ tal que:

$$\mu_{\mathbb{H}^2}(B_\delta^{(H,d_H)}(i)) \geq 2 \cdot \pi$$

(por ejemplo $\delta = 14$).

Teorema (Triángulos son delgados)

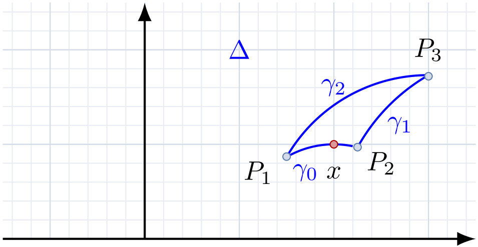
Existe una constante $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que todo triángulo geodésico en (H, d_H) es δ-delgado.

Demostración:
Por la proposición anterior, existe $\delta > 0$ tal que:

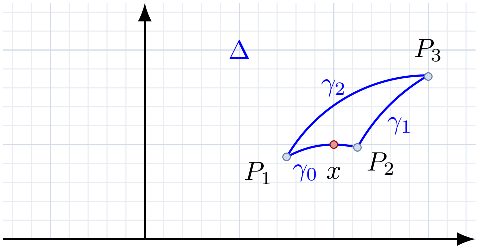
$$\mu_{\mathbb{H}^2}(B_\delta^{(H,d_H)}(i)) \geq 2 \cdot \pi$$

(por ejemplo $\delta = 14$). Tomemos $\Delta = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ un triángulo geodésico en (H, d_H) y sea $x \in \operatorname{im}(\gamma_0)$.

Hiperbolicidad del Plano $\mathbb{H}^2$

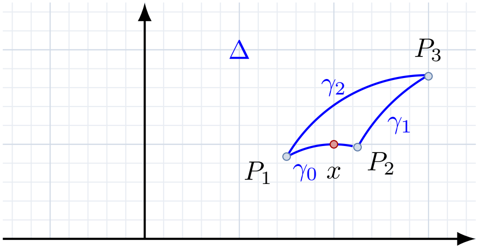


Hiperbolicidad del Plano $\mathbb{H}^2$



Dos casos:

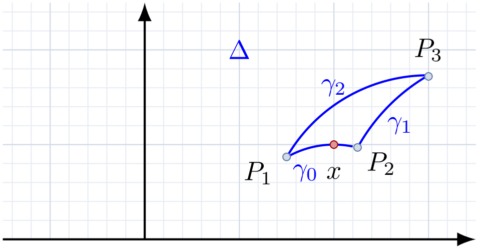
Hiperbolicidad del Plano $\mathbb{H}^2$



Dos casos:

- Δ es degenerado (está en una línea geodésica). Es inmediato.

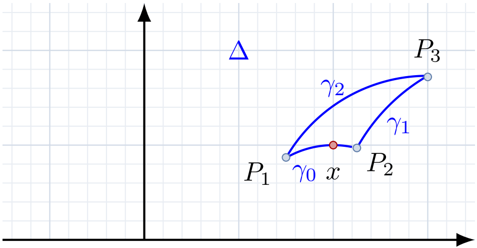
Hiperbolicidad del Plano $\mathbb{H}^2$



Dos casos:

- Δ es degenerado (está en una línea geodésica). Es inmediato.
- Trasladamos con una isometría la geodésica de P_1 a P_2 al eje y tal que x vaya a i.

Hiperbolicidad del Plano $\mathbb{H}^2$



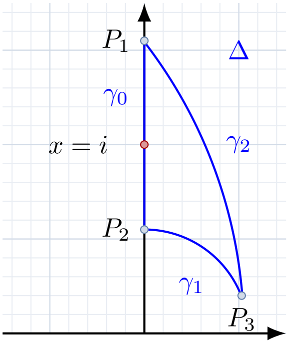


Figura: Movimiento de Δ por isometría.

Hiperbolicidad del Plano $\mathbb{H}^2$

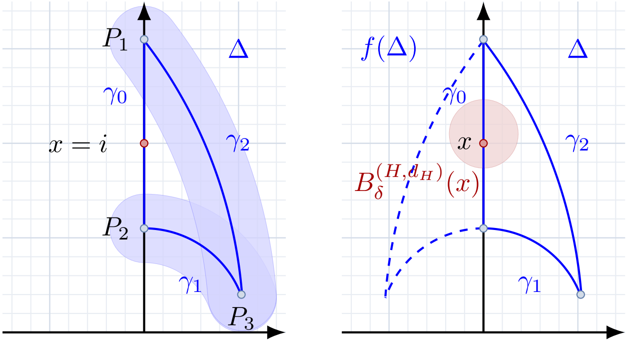


Figura: Ensanchamiento de los lados γ_1 y γ_2, junto con la bola centrada en i de radio δ y la reflexión de Δ.

Hiperbolicidad del Plano $\mathbb{H}^2$

Supongamos $\forall y \in \operatorname{im}(\gamma_1) \cup \operatorname{im}(\gamma_2)$, $d_H(x, y) > C$. Se tiene entonces que:

$$B_c^{(H,d_H)}(i) \subseteq \Delta \cup \operatorname{im}(\gamma_0) \cup f(\Delta)$$

Hiperbolicidad del Plano $\mathbb{H}^2$

Supongamos $\forall y \in \operatorname{im}(\gamma_1) \cup \operatorname{im}(\gamma_2)$, $d_H(x, y) > C$. Se tiene entonces que:

$$B_c^{(H,d_H)}(i) \subseteq \Delta \cup \operatorname{im}(\gamma_0) \cup f(\Delta)$$

con $f : H \to H$ la isometría $z \mapsto -\overline{z}$.

Hiperbolicidad del Plano $\mathbb{H}^2$

Supongamos $\forall y \in \operatorname{im}(\gamma_1) \cup \operatorname{im}(\gamma_2)$, $d_H(x, y) > C$. Se tiene entonces que:

$$B_c^{(H,d_H)}(i) \subseteq \Delta \cup \operatorname{im}(\gamma_0) \cup f(\Delta)$$

con $f : H \to H$ la isometría $z \mapsto -\overline{z}$. Así que:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \pi &\leq \mu_{\mathbb{H}^2}(B_\delta^{(H,d_H)}(i)) \\ &\leq \mu_{\mathbb{H}^2}(\Delta \cup \operatorname{im}(\gamma_0) \cup f(\Delta)) \\ &= \mu_{\mathbb{H}^2}(\Delta) + \mu_{\mathbb{H}^2}(\operatorname{im}(\gamma_0)) + \mu_{\mathbb{H}^2}(f(\Delta)) \\ &= 2\mu_{\mathbb{H}^2}(\Delta) \\ &< 2 \cdot \pi \end{aligned}$$

Hiperbolicidad del Plano $\mathbb{H}^2$

Contradicción. Entonces existe $y \in \operatorname{im}(\gamma_1) \cup \operatorname{im}(\gamma_2)$ tal que $d(x, y) \leq C$:

$$\operatorname{im}(\gamma_0) \subseteq B_C^{(H,d_H)}(\operatorname{im}(\gamma_1) \cup \operatorname{im}(\gamma_2))$$

Hiperbolicidad del Plano $\mathbb{H}^2$

Contradicción. Entonces existe $y \in \operatorname{im}(\gamma_1) \cup \operatorname{im}(\gamma_2)$ tal que $d(x, y) \leq C$:

$$\operatorname{im}(\gamma_0) \subseteq B_C^{(H,d_H)}(\operatorname{im}(\gamma_1) \cup \operatorname{im}(\gamma_2))$$

Análogamente para las otras geodésicas:

$$\begin{aligned} \operatorname{im}(\gamma_0) &\subseteq B_C^{(H,d_H)}(\operatorname{im}(\gamma_1) \cup \operatorname{im}(\gamma_2)), \\ \operatorname{im}(\gamma_1) &\subseteq B_C^{(H,d_H)}(\operatorname{im}(\gamma_0) \cup \operatorname{im}(\gamma_2)), \\ \operatorname{im}(\gamma_2) &\subseteq B_C^{(H,d_H)}(\operatorname{im}(\gamma_0) \cup \operatorname{im}(\gamma_1)) \end{aligned}$$

Hiperbolicidad del Plano $\mathbb{H}^2$

Contradicción. Entonces existe $y \in \operatorname{im}(\gamma_1) \cup \operatorname{im}(\gamma_2)$ tal que $d(x,y) \leq C$:

$$\operatorname{im}(\gamma_0) \subseteq B_C^{(H,d_H)}(\operatorname{im}(\gamma_1) \cup \operatorname{im}(\gamma_2))$$

Análogamente para las otras geodésicas:

$$\operatorname{im}(\gamma_0) \subseteq B_C^{(H,d_H)}(\operatorname{im}(\gamma_1) \cup \operatorname{im}(\gamma_2)),$$
$$\operatorname{im}(\gamma_1) \subseteq B_C^{(H,d_H)}(\operatorname{im}(\gamma_0) \cup \operatorname{im}(\gamma_2)),$$
$$\operatorname{im}(\gamma_2) \subseteq B_C^{(H,d_H)}(\operatorname{im}(\gamma_0) \cup \operatorname{im}(\gamma_1))$$

Δ es un triángulo geodésico δ-delgado. Se sigue que el plano hiperbólico es δ-hiperbólico.

Hiperbolicidad del Plano $\mathbb{H}^2$

¿Se puede mejorar este resultado?

Hiperbolicidad del Plano $\mathbb{H}^2$

¿Se puede mejorar este resultado?

Sí, se puede disminuir el valor de δ...

...encontrar δ tal que $B_{\delta}^{(H.d_H)(i)} = 2 \cdot \pi$

Hiperbolicidad del Plano $\mathbb{H}^2$

Un resultado más general nos dice lo siguiente:

Hiperbolicidad del Plano $\mathbb{H}^2$

Un resultado más general nos dice lo siguiente:

Teorema (Hiperbolicidad de variedades Riemannianias)

Si M es una variedad de Riemann cerrada, conexa y de curvatura seccional negativa, entonces el cubriente universal de M es hiperbólico como espacio métrico.

Hiperbolicidad del Plano $\mathbb{H}^2$

Y, ¿para qué nos sirve la hiperbolicidad?

La hiperbolicidad es un invariante cuasi-isométrico

La hiperbolicidad es un invariante cuasi-isométrico

$$A \underset{C.I.}{\sim} B$$

Hiperbolicidad es invariante cuasi-isométrico

Debilitar la definición de hiperbolicidad. *¿Cómo?*

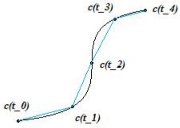
Hiperbolicidad es invariante cuasi-isométrico

Debilitar la definición de hiperbolicidad. *¿Cómo?* con cuasi-geodésicas.

Hiperbolicidad es invariante cuasi-isométrico

Debilitar la definición de hiperbolicidad. *¿Cómo?* con cuasi-geodésicas.

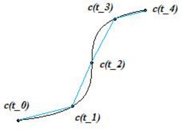
- Cuasi-geodésicas: curvas que quieren ser geodésicas.



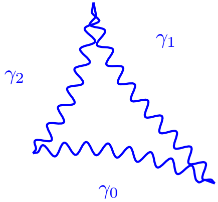
Hiperbolicidad es invariante cuasi-isométrico

Debilitar la definición de hiperbolicidad. *¿Cómo?* con cuasi-geodésicas.

- Cuasi-geodésicas: curvas que quieren ser geodésicas.



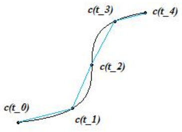
- Formar triángulos con cuasi-geodésicas.



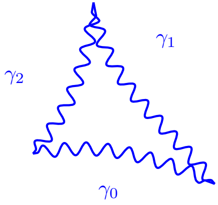
Hiperbolicidad es invariante cuasi-isométrico

Debilitar la definición de hiperbolicidad. *¿Cómo?* con cuasi-geodésicas.

- Cuasi-geodésicas: curvas que quieren ser geodésicas.



- Formar triángulos con cuasi-geodésicas.



- Lo mismo que en hiperbolicidad ahora con cuasi-geodésicas. Esto será llamado **quasi-hiperbolicidad**.

Hiperbolicidad es invariante cuasi-isométrico

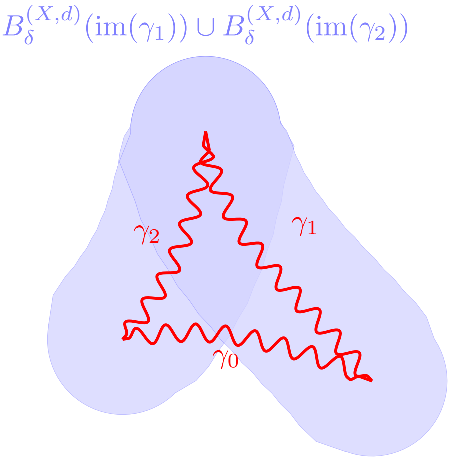


Figura: Triángulo cuasi-geodésico y $B_\delta^{(X,d)}$

Hiperbolicidad es invariante cuasi-isométrico

¿El triángulo cuasi-geodésico anterior es δ-delgado?

Hiperbolicidad es invariante cuasi-isométrico

¿El triángulo cuasi-geodésico anterior es δ-delgado?

Sí

Hiperbolicidad es invariante cuasi-isométrico

Ejemplo

Todos los espacios métricos de diámetro finito son cuasi-hiperbólicos.

Hiperbolicidad es invariante cuasi-isométrico

Ejemplo

Todos los espacios métricos de diámetro finito son cuasi-hiperbólicos.

En general resultará muy complicado probar que un espacio es cuasi-hiperbólico.

Hiperbolicidad es invariante cuasi-isométrico

Teorema (Hiperbolicidad y cuasi-hiperbolicidad)

Sea (X, d) un espacio métrico geodésico. Entonces (X, d) es hiperbólico si y sólo si es cuasi-hiperbólico.

Hiperbolicidad es invariante cuasi-isométrico

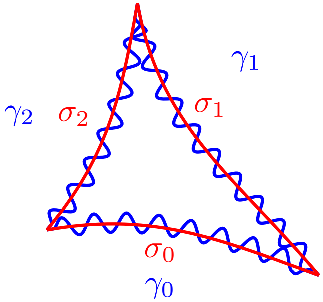


Figura: Aproximación del triángulo cuasi-geodésico $\Delta = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ por el triángulo geodésico $\Delta' = (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2)$.

Hiperbolicidad es invariante cuasi-isométrico

Teorema (Invariancia cuasi-isométrica de la cuasi-hiperbolicidad)

Sean (X, d) y (Y, ρ) espacios métricos. Si (X, d) y (Y, ρ) son cuasi-isométricos, entonces (X, d) es cuasi-hiperbólico si y sólo si (Y, ρ) es cuasi-hiperbólico.

Hiperbolicidad es invariante cuasi-isométrico

Teorema (Invariancia cuasi-isométrica de la cuasi-hiperbolicidad)

Sean (X, d) y (Y, ρ) espacios métricos. Si (X, d) y (Y, ρ) son cuasi-isométricos, entonces (X, d) es cuasi-hiperbólico si y sólo si (Y, ρ) es cuasi-hiperbólico.

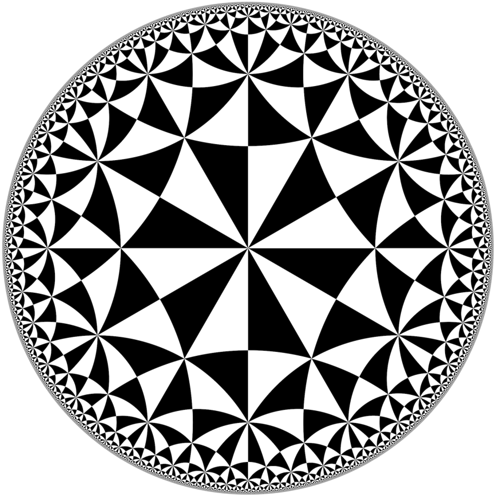
Corolario (Invariancia cuasi-isométrica de la hiperbolicidad)

Sean (X, d) y (Y, ρ) espacios métricos. Si (X, d) y (Y, ρ) son geodésicos y cuasi-isométricos, entonces (X, d) es hiperbólico si y sólo si (Y, ρ) es hiperbólico.

Hiperbolicidad es invariante cuasi-isométrico

¿Y para qué sirve la hiperbolicidad?

Grupos Hiperbólicos



Grupos Hiperbólicos

Podemos extender la noción de hiperbolicidad a grupos:

Definición (Grupos hiperbólicos)

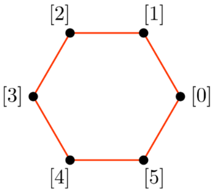
Un grupo finitamente generado G es **hiperbólico** si para algún conjunto generador S de G se tiene que la gráfica de Caley $\mathrm{Cay}(G, S)$ es cuasi-hiperbólica.

Gráfica de Caley:

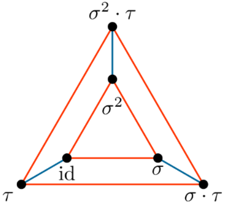
- Asociar una gráfica a un grupo.
- Un grupo puede tener varias gráficas de Caley (dependiendo del conjunto generador).
- Es invariante cuasi-isométrico
- Hiperbolicidad bien definida por ser invariante quasi-isométrico.

Gráfica de Caley:

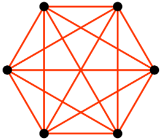
- Asociar una gráfica a un grupo.
- Un grupo puede tener varias gráficas de Caley (dependiendo del conjunto generador).
- Es invariante cuasi-isométrico
- Hiperbolicidad bien definida por ser invariante quasi-isométrico.



$\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}/6, \{[1]\})$



$\mathrm{Cay}(S_3, \{\tau, \sigma\})$



$\mathrm{Cay}(S_3, S_3)$
$\cong \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}/6, \mathbb{Z}/6)$

Grupos Hiperbólicos

Proposición (Hiperbolicidad es un invariante cuasi-isométrico)

Sean G y H grupos finitamente generados. Si G y H son cuasi-isométricos, entonces G es hiperbólico si y sólo si H es hiperbólico.

Grupos Hiperbólicos

Grupo:	F Finito	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^2$

Grupos Hiperbólicos

Grupo:	F Finito	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^2$
Hiperbólico:	Sí	Sí	No

Grupos Hiperbólicos

Grupo:	F Finito	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^2$
Hiperbólico:	Sí	Sí	No
	$\mathrm{Cay}\,(F, S)$ tiene diámetro finito	Cuasi-isométrico a $\mathbb{R}$	Cuasi-isométrico a $\mathbb{R}^2$

Grupos Hiperbólicos

¿De qué nos sirve generalizar esta noción a grupos?

El problema de la palabra en Grupos Hiperbólicos

El problema de la palabra en Grupos Hiperbólicos

Definición

Sea $\langle S|R\rangle$ una presentación finita de un grupo. Decimos que **el problema de la palabra es soluble para la presentación** $\langle S|R\rangle$, si existe un algoritmo que determine en tiempo finito si una palabra de $(S \cup S^{-1})^*$ es elemento trivial de $\langle S|R\rangle$ o no.

El problema de la palabra en Grupos Hiperbólicos

Ejemplo

La presentación $F_2 = \langle x, y | \emptyset \rangle$ tiene problema de la palabra soluble

El problema de la palabra en Grupos Hiperbólicos

Ejemplo

La presentación $F_2 = \langle x, y | \emptyset \rangle$ tiene problema de la palabra soluble, al igual que $\mathbb{Z}^2 \cong \langle x, y | xyx^{-1}y^{-1} \rangle$.

El problema de la palabra en Grupos Hiperbólicos

Por ejemplo, Donald Collins encontró en 1986 que el grupo:

El problema de la palabra en Grupos Hiperbólicos

Por ejemplo, Donald Collins encontró en 1986 que el grupo:

$$
\left\langle \begin{array}{lll}
a,b,c,d,e,p,q,r,t,k & \Big| & \\
p^{10}a = ap, & pacqr = rpcaq, & ra = ar, \\
p^{10}b = bp, & p^2adq^2r = rp^2daq^2, & rb = br, \\
p^{10}c = cp, & p^3bcq^3r = rp^3cbq^3, & rc = cr, \\
p^{10}d = dp, & p^4bdq^4r = rp^4dbq^4, & rd = dr, \\
p^{10}e = ep, & p^5ceq^5r = rp^5ecaq^5, & re = er, \\
aq^{10} = qa, & p^6deq^6r = rp^6edbq^6, & pt = tp, \\
bq^{10} = qb, & p^7cdcq^7r = rp^7cdceq^7, & qt = tq, \\
cq^{10} = qc, & p^8ca^3q^8r = rp^8a^3q^8, & \\
dq^{10} = qd, & p^9da^3q^9r = rp^9a^3q^9, & \\
eq^{10} = qe, & a^{-3}ta^3k = ka^{-3}ta^3 &
\end{array} \right\rangle
$$

El problema de la palabra en Grupos Hiperbólicos

Por ejemplo, Donald Collins encontró en 1986 que el grupo:

$$
\begin{array}{llll}
\langle & a, b, c, d, e, p, q, r, t, k & \mid & \\
 & p^{10}a = ap, & pacqr = rpcaq, & ra = ar, \\
 & p^{10}b = bp, & p^2adq^2r = rp^2daq^2, & rb = br, \\
 & p^{10}c = cp, & p^3bcq^3r = rp^3cbq^3, & rc = cr, \\
 & p^{10}d = dp, & p^4bdq^4r = rp^4dbq^4, & rd = dr, \\
 & p^{10}e = ep, & p^5ceq^5r = rp^5ecaq^5, & re = er, \\
 & aq^{10} = qa, & p^6deq^6r = rp^6edbq^6, & pt = tp, \\
 & bq^{10} = qb, & p^7cdcq^7r = rp^7cdceq^7, & qt = tq, \\
 & cq^{10} = qc, & p^8ca^3q^8r = rp^8a^3q^8, & \\
 & dq^{10} = qd, & p^9da^3q^9r = rp^9a^3q^9, & \\
 & eq^{10} = qe, & a^{-3}ta^3k = ka^{-3}ta^3 & \rangle
\end{array}
$$

no tiene problema de la palabra soluble.

El problema de la palabra en Grupos Hiperbólicos

¿Cómo garantizar solubilidad de problema de la palabra?

El problema de la palabra en Grupos Hiperbólicos

¿Cómo garantizar solubilidad de problema de la palabra?

Presentaciones de Dehn

El problema de la palabra en Grupos Hiperbólicos

¿Cómo garantizar solubilidad de problema de la palabra?

Presentaciones de Dehn

Su definición da un algoritmo que hace lo siguiente:

- Nos dice como simplificar palabras.
- Acorta palabras.
- Caracteriza a los elementos neutros.

El problema de la palabra en Grupos Hiperbólicos

¿Cómo garantizar solubilidad de problema de la palabra?

Presentaciones de Dehn

Su definición da un algoritmo que hace lo siguiente:

- Nos dice como simplificar palabras.
- Acorta palabras.
- Caracteriza a los elementos neutros.

Presentación de Dehn resuelven problema de la palabra.

El problema de la palabra en Grupos Hiperbólicos

Proposición (Algoritmo de Dehn)

Si $\langle S|R \rangle$ es una presentación de Dehn, entonces el problema de la palabra es soluble para $\langle S|R \rangle$.

El problema de la palabra en Grupos Hiperbólicos

Ejemplo

La presentación:

$$\langle x, y | xx^{-1}e, yy^{-1}e, x^{-1}xe, y^{-1}ye \rangle$$

es una presentacion de Dehn del grupo libre de rango 2.

El problema de la palabra en Grupos Hiperbólicos

Ejemplo

La presentación:

$$\langle x, y | xx^{-1}e, yy^{-1}e, x^{-1}xe, y^{-1}ye \rangle$$

es una presentacion de Dehn del grupo libre de rango 2.

Ejemplo

La presentación:

$$\langle x, y | [x, y] \rangle$$

no es una presentación de Dehn de $\mathbb{Z}^2$.

El problema de la palabra en Grupos Hiperbólicos

Teorema (Presentaciones de Dehn en grupos hiperbólicos)

Sea G un grupo hiperbólico y S un conjunto generador finito de G. Entonces existe un conjunto finito $R \subseteq (S \cup S^{-1})^*$ tal que $\langle S|R \rangle$ es una presentación de Dehn y $G \cong \langle S|R \rangle$.

El problema de la palabra en Grupos Hiperbólicos

Corolario (Grupos hiperbólicos tienen problema de la palabra soluble)

Sea G grupo hiperbólico y $S \subseteq G$ un conjunto generador finito. Entonces existe una presentación finita $\langle S | R \rangle$ de G tal que el problema de la palabra es soluble.

El problema de la palabra en Grupos Hiperbólicos

Corolario (Grupos hiperbólicos tienen problema de la palabra soluble)

Sea G grupo hiperbólico y $S \subseteq G$ un conjunto generador finito. Entonces existe una presentación finita $\langle S | R \rangle$ de G tal que el problema de la palabra es soluble.

Idea: Atajos en ciclos dentro de grupos *hiperbólicos*. Esto se logra con la acotación de triángulos que nos da la hiperbolicidad.

El problema de la palabra en Grupos Hiperbólicos

Corolario (Grupos hiperbólicos tienen problema de la palabra soluble)

Sea G grupo hiperbólico y $S \subseteq G$ un conjunto generador finito. Entonces existe una presentación finita $\langle S|R\rangle$ de G tal que el problema de la palabra es soluble.

Idea: Atajos en ciclos dentro de grupos *hiperbólicos*. Esto se logra con la acotación de triángulos que nos da la hiperbolicidad.

Conclusión: Todo grupo hiperbólico finitamente generado tiene problema de la palabra soluble.

Grupos Fundamentales de Superficies

Grupos Fundamentales de Superficies

- S_g superficie de Riemann de género g.
- Si $g \geq 2$ entonces su cubriente universal es $p : \mathbb{H}^2 \to S_g$ (recordar Uniformización de Riemann).
- Se tiene:

$$\mathrm{Deck}(p) = \pi_1(S_g)$$

- Para este caso, si $f \in \mathrm{Deck}(p)$, entonces $f \in \mathrm{Isom}\left(\mathbb{H}^2\right) \cong \mathrm{PSL}\,(2, \mathbb{R})$. Luego:

$$\pi_1(S_g) < \mathrm{PSL}\,(2, \mathbb{R})$$

Grupos Fundamentales de Superficies

- S_g superficie de Riemann de género g.
- Si $g \geq 2$ entonces su cubriente universal es $p : \mathbb{H}^2 \to S_g$ (recordar Uniformización de Riemann).
- Se tiene:

$$\mathsf{Deck}(p) = \pi_1(S_g)$$

- Para este caso, si $f \in \mathsf{Deck}(p)$, entonces $f \in \mathsf{Isom}\left(\mathbb{H}^2\right) \cong \mathsf{PSL}\left(2, \mathbb{R}\right)$. Luego:

$$\pi_1(S_g) < \mathsf{PSL}\left(2, \mathbb{R}\right)$$

- $\pi_1(S_g)$ actúa por isometrías en $\mathbb{H}^2$:

$$(f, z) \mapsto f \cdot z = f(z)$$

cumple Svarc-Milnor.

Grupos Fundamentales de Superficies

- S_g superficie de Riemann de género g.
- Si $g \geq 2$ entonces su cubriente universal es $p : \mathbb{H}^2 \to S_g$ (recordar Uniformización de Riemann).
- Se tiene:
$$\text{Deck}(p) = \pi_1(S_g)$$
- Para este caso, si $f \in \text{Deck}(p)$, entonces $f \in \text{Isom}\left(\mathbb{H}^2\right) \cong \text{PSL}\left(2, \mathbb{R}\right)$. Luego:
$$\pi_1(S_g) < \text{PSL}\left(2, \mathbb{R}\right)$$
- $\pi_1(S_g)$ actúa por isometrías en $\mathbb{H}^2$:
$$(f, z) \mapsto f \cdot z = f(z)$$
cumple Svarc-Milnor.
$$\pi_1(S_g) \underset{C.I.}{\sim} \mathbb{H}^2$$

El problema de la palabra en Grupos Hiperbólicos

Conclusión: Grupos de superficies son hiperbólicos y finitamente generados, luego son finitamente presentados con problema de la palabra soluble.

FIN

FIN

Gracias a Néstor, Porfirio, Rita...

FIN

Gracias a Néstor, Porfirio, Rita...

y gracias a mis compañeros de equipo: Juan, Alexia, Luis y Tadeo.

Referencias