Notas Introduction to Commutative Algebra

Cristo Daniel Alvarado

4 de enero de 2026

Índice general

Capítulo 1

Anillos e Ideales

Muchos de los resultados que se usarán se han visto en el curso de Álgebra Moderna II, por lo que solo se incluirán resultados nuevos.

A lo largo de todo el documento, todo anillo será un anillo conmutativo con identidad.

1.1. Nilradical y Radical de Jacobson

Definición 1.1.1
Sea A un anillo. Un elemento $x \in A$ es llamado **nilpotente** si $x^n = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$

Observación 1.1.1
Todo elemento nilpotente es divisor de cero, sin embargo el converso no es cierto.

Proposición 1.1.1
El conjunto $\mathfrak{N}$ de todos los elementos nilpotentes de un anillo A es un ideal, y el ideal cociente $A/\mathfrak{N}$ no tiene elmentos nilpotentes distintos de cero.

Demostración:
Veamos que $\mathfrak{N}$ es un ideal.

(1) Sean $x, y \in \mathfrak{N}$, entonces existen $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $x^n = y^m = 0$. Por ende:

$$(x+y)^{n+m} = 0$$

pues, en el desarrollo binomial de esta expresión, todo término es de la forma $c_{(r,s)}x^r y^s$ con $c_{(r,s)} \in \mathbb{N}$ el cual además cumple que

$$r + s = n + m$$

con $r, s \in [\![0, n+m]\!]$. Si $r < n$ entonces debe suceder que $s > m$, luego $y^s = 0$. Si $r > n$ se sigue que $x^r = 0$. En cualquier caso, todos los coeficientes de la forma $x^r y^s = 0$, lo cual prueba lo enunciado.

(2) Sea $x \in \mathfrak{N}$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n = 0$, entonces:

$$(ax)^n = a^n x^n = 0$$

por lo que $ax \in \mathfrak{N}$.

Por los dos incisos anteriores se sigue que $\mathfrak{N}$ es un ideal de A. Sea $\mathfrak{N} + x \in A/\mathfrak{N}$ con $x \in A$ tal que

$$(\mathfrak{N} + x)^n = \mathfrak{N}$$

para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\mathfrak{N} + x^n = \mathfrak{N} \Rightarrow x^n \in \mathfrak{N}$$

luego existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(x^n)^k = 0$, esto es que $x \in \mathfrak{N}$, por lo que

$$\mathfrak{N} + x = \mathfrak{N}$$

■

Definición 1.1.2
El ideal de la proposición anterior es llamado el **nilradical de** A cuando se trabaje con varios anillos, será denotado por $\mathfrak{N}_A$.

Resulta que podemos caracterizar de otra manera al nilradical $\mathfrak{N}$:

Proposición 1.1.2
El nilradical $\mathfrak{N}$ de A es la intersección de todos los ideales primos de A.

Demostración:
Sea $\mathfrak{N}'$ la intersección de todos los ideales primos de A. Se tiene que este es un ideal de A.

- Si $x \in A$ es tal que $x \in \mathfrak{N}$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n = 0$. Como $0 \in \mathfrak{N}'$ y $\mathfrak{N}'$, entonces

  $$x^n \in \mathfrak{p}$$

  para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de A, luego por inducción se tiene que $x \in \mathfrak{p}$, es decir que $x \in \mathfrak{N}'$.

- Sea $x \in A$ tal que $x \notin \mathfrak{N}$, probaremos que $x \notin \mathfrak{N}'$. Sea

  $$\Sigma = \left\{\mathfrak{a}\middle|\mathfrak{a} \text{ es ideal de } A \text{ tal que } n \in \mathbb{N} \Rightarrow x^n \notin \mathfrak{a}\right\}$$

  el conjunto Σ es no vacío, pues $\langle 0 \rangle \in \Sigma$. Sea $\mathcal{C}$ una cadena de elementos de Σ. Como

  $$\mathcal{C} = \{I_n\}_{n=1}^{\infty}$$

  es tal que $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_m \subseteq \cdots$, se sigue de una proposición que

  $$I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

  es un ideal de A, el cual debe estar en Σ. Por el Lema de Zorn, este conjunto tiene elementos maximales, digamos $\mathfrak{p}$. Es claro que $x^n \notin \mathfrak{p}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Veamos que $\mathfrak{p}$ es primo. En efecto, sean $y, z \notin \mathfrak{p}$, entonces los ideales

  $$\mathfrak{p} + \langle y \rangle \text{ y } \mathfrak{p} + \langle z \rangle$$

  son dos ideales de A que contienen propiamente a $\mathfrak{p}$, por lo que $x \in \mathfrak{p} + \langle y \rangle$ y $x \in \mathfrak{p} + \langle z \rangle$, luego existen $m, n \in \mathbb{N}$ tales que

  $$x^n \in \mathfrak{p} + \langle y \rangle, \quad \text{y} \quad x^m \in \mathfrak{p} + \langle z \rangle$$

  por ende,

  $$x^{n+m} \in (\mathfrak{p} + \langle y \rangle)(\mathfrak{p} + \langle z \rangle) = \mathfrak{p} + \langle yz \rangle$$

  por tanto, $\mathfrak{p} + \langle yz \rangle$ contiene propiamente a $\mathfrak{p}$, luego no puede estar en Σ, así que $yz \notin \mathfrak{p}$. Se sigue entonces que $\mathfrak{p}$ es primo. Por tanto, $x \notin \mathfrak{N}'$.

Por los dos incisos anteriores se sigue que $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}'$. ■

Definición 1.1.3
Sea A un anillo, el **radical de Jacobson $\mathfrak{R}$ de** A se define como la intersección de todos los ideales maximales de A. Cuando se trabaje con varios anillos, será denotado por $\mathfrak{R}_A$.

El radical de Jacobson (que claramente es un ideal), se caracteriza de la siguiente manera:

Proposición 1.1.3
Sea A un anillo. Entonces, $x \in \mathfrak{R}$ si y sólo si $1 - xy$ es una unidad en A para todo $y \in A$.

Demostración:
$\Rightarrow)$: Suponga que existe $y \in A$ tal que $1 - xy$ no es una unidad de A, entonces existe un ideal maximal que contiene a $1 - xy$, digamos $\mathfrak{m}$, pero $x \in \mathcal{R}$, en particular $x \in \mathfrak{m}$ por lo que $xy \in \mathfrak{m}$ lo cual implica que $1 \in \mathfrak{m}$, lo cual no puede suceder pues $\mathfrak{m}$ es ideal maximal.

$\Leftarrow)$: Suponga que existe un ideal maximal $\mathfrak{m}$ tal que $x \notin \mathfrak{m}$. Entonces,

$$\mathfrak{m} + \langle x \rangle = \langle \mathfrak{m} + x \rangle = A = \langle 1 \rangle$$

es decir, existe $u \in \mathfrak{m}$ y $y \in A$ tales que

$$u + xy = 1$$

luego, $1 - xy$ no puede ser unidad de A. ■

Definición 1.1.4
Sea A anillo y $\mathfrak{a}$ un ideal de A. Se define el **radical de $\mathfrak{a}$** como el conjunto

$$r(\mathfrak{a}) = \left\{ x \in A \middle| x^n \in \mathfrak{a} \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \right\}$$

Proposición 1.1.4
Dado un anillo A un ideal $\mathfrak{a}$ de A, se tiene que $r(\mathfrak{a})$ es un ideal de A.

Demostración:
Considere el homomorfismo natural $\pi : A \to A/\mathfrak{a}$, afirmamos que

$$r(A) = \pi^{-1}\left(\mathfrak{N}_{A/\mathfrak{a}}\right)$$

donde $\mathfrak{N}_{A/\mathfrak{a}}$ es el nilradical de $A/\mathfrak{a}$. En efecto, veamos que: $x \in r(\mathfrak{a})$ si y sólo si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n \in \mathfrak{a}$, lo cual ocurre si y sólo si

$$(\mathfrak{a} + x)^n = \mathfrak{a} + x^n = \mathfrak{a}$$

si y sólo si $\mathfrak{a}+x$ es un elemento nilpotente de $A/\mathfrak{a}$, si y sólo si $\mathfrak{a}+x \in \mathfrak{N}_{A/\mathfrak{a}}$, si y sólo si $x \in \pi^{-1}\left(\mathfrak{N}_{A/\mathfrak{a}}\right)$.

Lo anterior prueba la igualdad. ■

Ejercicio 1.1.1
Sea A un anillo y $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ideales de A. Se cumple lo siguiente:

(1) $\mathfrak{a} \subseteq r(\mathfrak{a})$.

(2) $r(r(a)) = r(\mathfrak{a})$.

(3) $r(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = r(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = r(\mathfrak{a}) \cap r(\mathfrak{b})$.

(4) $r(\mathfrak{a}) = \langle 1 \rangle$ si y sólo si $\mathfrak{a} = \langle 1 \rangle$.

(5) $r(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = r(r(\mathfrak{a}) + r(\mathfrak{b}))$.

(6) Si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de A, entonces $r(\mathfrak{p}^n) = \mathfrak{p}$ para todo $n > 0$.

Demostración:

De *(1)*: Tomemos $x \in \mathfrak{a}$, entonces $x^1 \in \mathfrak{a}$, así que $x \in r(\mathfrak{a})$.

De *(2)*: Por el inciso anterior ya se tiene que $r(r(\mathfrak{a})) \subseteq r(\mathfrak{a})$. Ahora, si $x \in r(\mathfrak{a})$, entonces existe $1 \in \mathbb{N}$ tal que $x^1 \in r(\mathfrak{a})$, así que $x \in r(r(\mathfrak{a}))$. Se sigue así la igualdad.

De *(3)*: Haremos la demostración por partes:

- Primero, probaremos que $r(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = r(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$. En efecto, sea $x \in r(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$x^n \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}$$

  Por ser $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ ideales, se sigue que $x^n \in \mathfrak{a}$ y $x^n \in \mathfrak{b}$, por lo cual $x \in r(\mathfrak{a}) \cap r(\mathfrak{b})$ y $x \in r(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$.

- Si $x \in r(\mathfrak{a}) \cap r(\mathfrak{b})$, entonces existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $x^n \in \mathfrak{a}$ y $x^m \in \mathfrak{b}$, luego $x^{nm} \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, lo cual implica que $x \in r(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$.

  Si $x \in r(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, así que $x^{2n} \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, esto es que $x \in r(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$.

Por ambos casos se sigue la doble igualdad.

De *(6)*: Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A. Procederemos por inducción sobre n.

- Por *(1)* se tiene que $\mathfrak{p} \subseteq r(\mathfrak{p})$. Sea $x \in r(\mathfrak{p})$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x^m \in \mathfrak{p}$. Esto implica que $x \in \mathfrak{p}$ (tal hecho se verifica usando inducción). De esta forma se sigue la igualdad.

- Supongamos que lo anterior se cumple para algún $n \in \mathbb{N}$. Sea $x \in r(\mathfrak{p}^{n+1})$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x^m \in \mathfrak{p}^{n+1} \subseteq \mathfrak{p}$, así que $x \in \mathfrak{p}$.

De ambos incisos se sigue la igualdad. ■

Observación 1.1.2
Si I y J son ideales, entonces IJ es un ideal, siendo este último definido por:

$$IJ = \left\{ \sum_{k=1}^{n} i_k j_k \middle| i_k \in I \text{ and } j_k \in J, \forall k \in [\![1, n]\!] \,; n \in \mathbb{N} \right\}$$

Proposición 1.1.5
El radical de un ideal $\mathfrak{a}$ es la intersección de todos ideales primos que contienen a $\mathfrak{a}$.

Demostración:

Considere $A/\mathfrak{a}$. ■

1.2. Ejercicios

Proposición 1.2.1
Todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A es ideal primo de A.

Demostración:
En efecto, se tiene que $A/\mathfrak{m}$ es campo, en particular es dominio entero (por no tener divisores de cero), luego $\mathfrak{m}$ es ideal primo. ■

Ejercicio 1.2.1
En el anillo $A[x]$, el radical de Jacobson es igual al nilradical.

Demostración:
Como todo ideal maximal es un ideal primo, se tiene la contención:

$$\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{R}$$

sea ahora $f(x) \in \mathfrak{R}$ se tiene que

$$1 - f(x)g(x) \text{ es unidad de } A[x] \text{ para todo } g(x) \in A[x]$$

en particular, $1 - xf(x)$ es unidad de $A[x]$, luego si $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$. Debe suceder entonces que los coeficientes de:

$$1 - xf(x) = -a_n x^{n+1} - a_{n-1}x^n - \cdots - a_0 x + 1$$

sean tales que a_i es nilpotente para todo $i \in [\![0, n]\!]$, luego $f(x)$ es elemento nilpotente de $A[x]$.

Se sigue entonces la igualdad. ■

Ejercicio 1.2.2
Sea A un anillo y sea $A[[x]]$ el anillo de series de potencias formales con coeficientes en A. Pruebe que:

1 f es unidad de ...

Demostración:
■

Ejercicio 1.2.3

Demostración:
■

Ejercicio 1.2.4
Sea A un anillo tal que para todo $x \in A$ existe $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ tal que $x^n = x$. Pruebe que todo ideal primo de A es maximal.

Demostración:
Sea $\mathfrak{p}$ un ideal propio primo de A. Probaremos que $A/\mathfrak{p}$ es campo. En efecto, no tiene divisores de cero, pues si

$$\mathfrak{p} + xy = (\mathfrak{p} + x)\,(\mathfrak{p} + y) = \mathfrak{p}$$

con $x, y \notin \mathfrak{p}$, entonces $xy \in \mathfrak{p}\#_c$. Por tanto, no tiene divisores de cero. Hay que ver que todo elemento no cero es invertible. Sea $x \in A \setminus \mathfrak{p}$. Se tiene que existe $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$ tal que

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} + x^n &= \mathfrak{p} + x \\ \Rightarrow (\mathfrak{p} + x)\left((\mathfrak{p} + x^{n-1}) - (\mathfrak{p} + 1)\right) &= \mathfrak{p} \end{aligned}$$

como no hay divisores de cero, debe suceder que

$$\mathfrak{p} + x^{n-1} = \mathfrak{p} + 1$$

por ende, al ser $n > 1$, se tiene que $n - 1 > 0$, así que:

$$(\mathfrak{p} + x)\left(\mathfrak{p} + x^{n-2}\right) = \mathfrak{p} + 1$$

con $n - 2 \geq 0$. Luego $\mathfrak{p} + x$ es invertible. Así que $A/\mathfrak{p}$ es campo, es decir que $\mathfrak{p}$ es ideal maximal. ■

Ejercicio 1.2.5
Sea x un elemento nilpotente de un anillo A. Muestre que $1 + x$ es una unidad de A. Deduzca que la suma de elementos nilpotentes con una unidad es una unidad.

Demostración:
Dado que x es nilpotente, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$x^n = 0$$

Entonces:

$$\begin{aligned} &(1 + x)\left(1 - x + \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1}\right) \\ &= \left[1 - x + \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1}\right] + \left[x - x^2 + \cdots + (-1)^{n-2}x^{n-1} + (-1)^{n-1}x^n\right] \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por ende, $1 + x$ es unidad. Si a y b son nilpotentes, entonces existen $n, m \in \mathbb{N}$ tal que:

$$a^n = b^m = 0$$

Rápidamente se verifica que $(a + b)^{nm} = 0$. Se sigue así que $a + b$ es nilpotente. En particular, usando inducción se generaliza que la suma de elementos nilpotentes es nilpotente. Por ende, de lo anterior se sigue que la suma de 1 mas un elemento nilpotente es una unidad. ■

Ejercicio 1.2.6
Sea A un anillo en el cual todo elemento satisface que $x^n = x$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que todo ideal primo en A es maximal.

Demostración:
Sea I un ideal primo en A. Entonces, A/I es dominio entero. Afirmamos que A/I es campo. En efecto, para ello basta con mostrar que todo elemento de este anillo posee inverso. Sea $I + x \in A/I$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n = x$, luego:

$$(I + x)(I + x^{n-1}) = I + x^n = I$$

Se sigue así que A/I es campo, luego I es ideal maximal. ■

Ejercicio 1.2.7
Sea A un anilo tal que cada ideal no contenido en el nilradical contiene un elemento idempotente no cero (esto es, un elemento e tal que $e^2 = e \neq 0$). Pruebe que el nilradical y el radical de Jacobson de A son iguales.

Demostración:
Recordemos que el nilradical es la itnerseccion de todos los ideales primos de A y, el radical de Jacobson es el la intersección de todos los ideales maximales de A.

Denotamos a los primer y segundo ideales mencionados anteriormente por $\mathfrak{N}$ y $\mathfrak{R}$. Dado que todo ideal maximal es en particular un ideal primo, se sigue que:

$$\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{R}$$

Supongamos que la contención es propia, se sigue por hipótesis que $\mathfrak{R}$ contiene un elemento idempotente no cero, digamos $e = e^2 \neq 0$. Observemos que:

$$(1-e)^2 = 1 - e - e + e^2 = 1 - 2e + e = 1 - e$$

por lo cual $1-e$ también es idempotente. Por la caracterización del radical de Jacobson se tiene que $1-e$ es una unidad en A.

Ahora, dado que $1-e$ es unidad en A, existe $y \in A$ tal que $(1-e)y = 1$, luego:

$$1 = (1-e)^2 y^2 = (1-e)yy = y$$

Por lo cual $1 - e = 1$, lo cual contradice la elección de e como elemento no cero. Se sigue así que $\mathfrak{N} = \mathfrak{R}$. ■

Observación 1.2.1
Créditos a la demostración del ejercicio anterior: The Jacobson Radical.

Ejercicio 1.2.8
Sea A un anillo no cero. Muestre que el conjunto de ideales primos de A tiene elemento mínimo con respecto a la relación inclusión.

Demostración:

■

Ejercicio 1.2.9
Sea $\mathfrak{a} \neq (1)$ un ideal en un anillo A. Muestre que $\mathfrak{a} = r(\mathfrak{a})$ si y solo si $\mathfrak{a}$ es la intersección de ideales primos.

Demostración:

■

1.3. Referencias

- *Introduction to Commutative Algebra*, M. F. Atiyah y I. G. MacDonald, University of Oxford.