Curso de Lógica Matemática

Cristo Daniel Alvarado

21 de febrero de 2024

Índice general

Capítulo 0

Introducción

0.1. Temario

Los siguientes temas se verán a lo largo del curso:

1. Lógica (Teoría de Modelos).
   1.1) Lógica proposicional.
   1.2) Lógica de primer orden.
2. Teoría de la Computabilidad.
3. Teoría de Conjuntos.

Y la bibliografía para el curso es la siguiente:

- Enderton, 'Introducción matemática a la lógica'.
- Enderton, 'Teoría de la computabilidad'.
- Copi, 'Lógica Simbólica' o 'Computability Theory'.
- Rebeca Weber 'Computability Theory'.

0.2. Conectivas Lógicas

La disyunción ($\wedge$), conjunción ($\vee$), negación ($\neg$), implicación ($\Rightarrow$) y si y sólo si ($\iff$) son las conectivas lógicas usadas usualmente.

(Se habló un poco de una cosa llamada forma normal disyuntiva).

A $\{\wedge, \vee, \neg\}$ se le conoce como un conjunto completo de conectivas lógicas. Nos podemos quedar simplemente con conjuntos completos de disyuntivas con solo dos elementos, a saber: $\{\wedge, \neg\}$ y $\{\vee, \neg\}$, ya que $P \vee Q$ es $\neg(\neg P \wedge \neg Q)$. (de forma similar a lo otro $P \wedge Q$ es $\neg(\neg P \vee \neg Q)$).

También $\{\Rightarrow, \neg\}$ es otro conjunto completo de conectivas lógicas, ya que $P \wedge Q$ es $\neg(P \Rightarrow \neq Q)$.

Y, $\{|\}$ es un conjunto completo, donde $|$ es llamado la **barra de Scheffel**, que tiene la siguiente tabla de verdad.

P	Q	$P \vert Q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

con este, se tiene un conjunto completo de conectivas lógicas.

Como muchas veces se usan conectivas de este tipo:

$$(P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow ((P \Rightarrow R) \wedge \neg(Q \Rightarrow S) \wedge T)$$

al ser muy largas, a veces es más conveniente escribirlas en forma Polaca. De esta forma, lo anterior quedaría de la siguiente manera:

$$\Rightarrow\Rightarrow P \neg Q \wedge \wedge P R \neg \Rightarrow Q S T$$

Ahora empezamos con el estudio formal de la lógica.

Capítulo 1

Lógica Proposicional

1.1. Alfabeto

El alfabeto de la lógica proposicional es un conjunto que consta de dos tipos de símbolos:

1. **Variables**, denotadas por $p_1, p_2, ..., p_n, ...$ (a lo más una cantidad numerable). Estas representan proposiciones o enunciados (tengo un paraguas, me caí de las escaleras, no tengo café en la cafetera, etc...).

2. **Conectivas**, como $\Rightarrow$ y $\neg$.

Aceptamos la existencia de estas cosas (pues, al menos debemos aceptar la existencia de algo).

Se van a trabajar con sucesiones finitas de símbolos del alfabeto descrito anteriormente. Ahora necesitaremos especificar que tipos de sucesiones van a servirnos para tener un significado formal.

Definición 1.1.1
En el conjunto de sucesiones finitas de símbolos del alfabeto, definimos una **fórmula bien formada** (abreviada como **FBF**) como sigue:

1. Cada variable es una **FBF**.

2. Si φ, ψ son **FBF**, entonces $\neg\varphi$ y $\Rightarrow \varphi\psi$ también lo son.

Observación 1.1.1
Recordar que usamos la notación Polaca en la definición anterior.

A continuación unos ejemplos:

Ejemplo 1.1.1
p_{17}, p_{54} y $\Rightarrow p_2p_{25}$ son FBF. Las primeras dos son llamadas **variables aisladas**. También lo es $\neg \Rightarrow p_2p_{25}$ (en este ejemplo, los p_i son variables).

Pero, por ejemplo $\Rightarrow \neg p_1p_2p_3$ y $\Rightarrow p_4$ no son FBF.

Viendo el ejemplo anterior, notamos que el operador $\Rightarrow$ es binario (solo usa dos entradas) y $\neg$ es unario (solo una entrada). Por lo cual, añadir o no demás variables a los opeadores dentro de la fórmula, hace que la fórmula ya no sea una FBF.

Observación 1.1.2
Eventualmente se va a sustituir la notación Polaca por la normal, para que se pueda leer la FBF y el proceso no sea robotizado.

Definiremos ahora más conectivas lógicas para poder trabajar más cómodamente.

Definición 1.1.2
Se definirán tres conectivas lógicos adicionales.

1. Se define la **disyunción** $\varphi \vee \psi$ como $\Rightarrow \neg\psi\varphi$ (en notación Polaca).
2. Se define la **conjunción** $\varphi \wedge \psi$ como $\neg(\neg\psi \vee \neg\varphi)$.
3. Se define el **si sólo si** $\psi \iff \varphi$ como $(\psi \Rightarrow \varphi) \wedge (\varphi \Rightarrow \psi)$.

1.2. Modeos o Estructuras

En el fondo, queremos que las FBF sean cosas verdaderas o falsas. Un Modelo o Estructura es algo que le va a dar significado a las FBF. De alguna manera va a ser una forma de asignarle el valor de verdadero o falso a cada una de las variables.

Definición 1.2.1
Un **Modelo o Estructura** de la lógica proposicional es una función $m : \mathrm{Var} \to \{V, F\}$, donde Var denota al conjunto de símbolos que son variables. Básicamente estamos diciendo que hay variables que son verdaderas y otras que son falsas.

Teorema 1.2.1
Para todo modelo m, existe una única extensión $\overline{m} : \mathrm{FBF} \to \{V, F\}$, donde FBF denota al conjunto de las fórmulas bien formadas, tal que $\overline{m}(\neg\varphi) = V \iff \overline{m}(\varphi) = F$ y $\overline{m}(\neg\varphi\psi) = F \iff \overline{m}(\varphi) = V$ y $\overline{m}(\psi) = F$.

Definición 1.2.2
Sea m un modelo, φ una fórmula y Σ un cojunto de fórmulas. Definimos que

1. $m \vDash \varphi$ (m satisface φ) si $\overline{m}(\varphi) = V$.
2. $m \vDash \Sigma$ si $m \vDash \varphi$ para cada φ elemento de Σ.

Ejemplo 1.2.1
Sea m un modelo tal que $m(p_1) = V$ y $m(p_i) = F$, para todo $i \geq 2$. En este caso $m \nvDash \Rightarrow p_1 p_3$, pero $m \vDash \neg p_5$.

Definición 1.2.3
Decimos que una fórmula φ es:

1. **Satisfacible** si existe un modelo m tal que $m \vDash \varphi$.
2. **Contradictoria** si todo modelo cumple que $m \nvDash \varphi$.
3. **Una tautología** si todo modelo m cumple que $m \vDash \varphi$.

Ejemplo 1.2.2
Tomemos de ejemplo a $\Rightarrow p_1p_2$. cualquier modelo que haga a p_1 y p_3 verdaderas, o ambas falsas satisfacen la FBF, p_1, $\neg \Rightarrow p_1p_3$ o $\neg(p_1 \Rightarrow \neg p_1)$. Por lo cual, esta fórmula es satisfacible.

En cambio, $\neg(p_1 \Rightarrow p_1)$ es contradictoria y, por ende $p_1 \Rightarrow p_1$ y $\neg p_1 \Rightarrow \neg p_1$ son tautologías.

Definición 1.2.4
Sea Σ un conjunto de fórmulas. Decimos que Σ es

1. **Satisfacible** si existe un modelo m tal que $m \vDash \Sigma$.
2. **Contradictoria** si todo modelo cumple que $m \nvDash \Sigma$.
3. **Una tautología** si todo modelo m cumple que $m \vDash \Sigma$.

Ejemplo 1.2.3
El conjunto de fórmulas $\Sigma = \{\Rightarrow p_1p_2, p_1, \neg p_2\}$ no es satisfacible (en este caso, es contradictorio).

Observación 1.2.1
Se tiene lo siguiente:

1. Una tautología $\Rightarrow$ satisfacible.
2. φ es satisfacible $\iff$ $\neg\varphi$ es una contradicción.
3. Satisfacible es lo mismo que no contradictoria.

Definición 1.2.5
Si Σ es un conjunto de FBF y φ es alguna otra fórmula, entonces decimos que φ es **consecuencia lógica** de Σ, o que Σ **implica lógicamente** a φ, escrito como $\Sigma \vDash \varphi$, si para todo modelo m tal que $m \vDash \Sigma$ se tiene que $m \vDash \varphi$.

Ejemplo 1.2.4
El conjunto de FBF $\{\Rightarrow p_1p_2, p_1\} \vDash p_2$.

Observación 1.2.2
Se tiene lo siguiente:

1. Un conjunto de FBF $\Sigma \nvDash \varphi$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es satisfacible.
2. Además, un conjunto de FBF $\Sigma \vDash \varphi$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ no es satisfacible.

Lema 1.2.1
Sea Σ un conjunto de fórmulas y sean $\mathrm{Var}(\Sigma)$ el conjunto de las variables p_i que aparecen en las fórmulas de Σ. Si m_1 y m_2 son dos modelos tales que

$$m_1|_{\mathrm{Var}(\Sigma)} = m_2|_{\mathrm{Var}(\Sigma)}$$

entonces, $\overline{m_1}|_\Sigma = \overline{m_2}|_\Sigma$. En particular, para cada fórmula φ que sea elemento de Σ, entonces

$m_1 \vDash \varphi$ si y sólo si $m_2 \vDash \varphi$, más aún $m_1 \vDash \Sigma$ si y sólo si $m_2 \vDash \Sigma$.

Demostración:

Sin pérdida de generalidad, Σ es cerrado bajo subformulas.

Procederemos por inducción sobre $\varphi \in \Sigma$, demostraremos que $\overline{m_1}(\varphi) = \overline{m_2}(\varphi)$. Si φ coincide con algún p_i, entonces $p_i \in \mathrm{Var}(\Sigma)$ y, por tanto

$$\overline{m_1}(p_i) = m_1(p_i) = m_2(p_i) = \overline{m_2}(p_i)$$

Ahora hacemos el paso inductivo.

1. Tenemos el caso en que φ es de la forma $\neg\psi$ y suponemos que $\overline{m_1}(\psi) = \overline{m_2}(\psi)$. Se tiene que $\overline{m_1}(\neg\psi) = F \iff \overline{m_1}(\psi) = V \iff \overline{m_2}(\psi) = V \iff \overline{m_2}(\neg\psi) = F$. Por lo tanto, $\overline{m_1}(\psi) = \overline{m_2}(\psi)$. El caso en que sea verdadero es análogo.

2. Tenemos el caso en que φ es de la forma $\Rightarrow \varphi_1\psi$ y, supontemos que $\overline{m_1}(\varphi_1) = \overline{m_2}(\varphi_1)$ y $\overline{m_1}(\psi) = \overline{m_2}(\psi)$. Se tiene que $\overline{m_1}(\Rightarrow \varphi_1\psi) = F \iff \overline{m_1}(\varphi_1) = V$ y $\overline{m_1}(\psi) = F \iff$ (por hipótesis de inducción) $\overline{m_2}(\varphi_1) = V$ y $\overline{m_2}(\psi) = F \iff \overline{m_2}(\Rightarrow \varphi_1\psi) = F$. El caso en que sean verdaderas es análogo. Por tanto, $\overline{m_1}(\Rightarrow \varphi_1\psi) = \overline{m_2}(\Rightarrow \varphi_1\psi)$.

Lo cual completa el paso inductivo. ■

Corolario 1.2.1

Si Σ es un conjunto finito de fórmulas, entonces se puede verificar 'Mecánicamente' si es el caso, que $\Sigma \vDash \varphi$.

El procedimiento para verificar el modelo, se hace mediante la tabla de verdad de las variables y las FBF de Σ.

Definición 1.2.6

Decimos que un conjunto de fórmulas bien formadas Σ es **finitamente satisfacible** si cualquier subconjunto finito $\Delta \subseteq \Sigma$ es satisfacible.

Teorema 1.2.2 (Teorema de Compacidad de Gödel)

Si Σ es un conjunto (arbitrario) de fórmulas tal que $\Sigma \vDash \varphi$, entonces existe un $\Delta \subseteq \Sigma$ finito tal que $\Delta \vDash \varphi$.

El teorema que Gödel probó originalmente fue este:

Teorema 1.2.3 (Teorema de Gödel)

Un conjunto de fórmulas Σ es satisfacible si y sólo si es finitamente satisfacible.

Veamos por qué el teorema de Gödel implica el teorema de compacidad de Gödel. Se tiene que $\Sigma \nvDash \varphi \iff$ existe un modelo m tal que $m \vDash \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$. Es decir, si y sólo si $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es satisfacible, es decir que es finitamente satisfacible (por el teorema de Gödel), es decir que para todo $\Delta \subseteq \Sigma$ finito se cumple que

$$\Delta \cup \{\neg\varphi\}$$

es satisfacible. Y esto sucede si y sólo si para todo $\Delta \subseteq \Sigma$ finito existe m tal que $m \vDash \Delta \cup \{\neg\varphi\}$, si y sólo si para todo $\Delta \subseteq \Sigma$ finito $\Delta \nvDash \varphi$, con lo cual

$$\Sigma \nvDash \varphi \iff \Delta \nvDash \varphi$$

para todo $\Delta \subseteq \Sigma$ finito, que es el teorema de compacidad en su forma contrapositiva.

Lema 1.2.2
Sea Σ un conjunto finitamente satisfacible, y sea φ cualquier fórmula, entonces o bien $\Sigma \cup \{\varphi\}$ es finitamente satisfacible o $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ lo es.

Demostración:
Supongamos que no, es decir que tanto $\Sigma \cup \{\varphi\}$ como $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ no son finitamente satisfacibles, por lo cual existen $\Delta_1, \Delta_2 \subseteq \Sigma$ finitos tales que $\Delta_1 \cup \{\varphi\}$ y $\Delta_2 \cup \{\neg\varphi\}$ no son satisfacibles. Entonces $\Delta_1 \cup \Delta_2$ no puede ser satisfacible, pues si m es un modelo tal que $m \vDash \Delta_1 \cup \Delta_2$, entonces $m \vDash \varphi$ contradice el hecho de que $\Delta_1 \cup \{\varphi\}$ es no satisfacible y si $m \vDash \neg\varphi$ contradice el hecho de que $\Delta_2 \cup \{\neg\varphi\}$ no es satisfacible, siendo $\Delta_1 \cup \Delta_2 \subseteq \Sigma$, se contradice el hecho de que Σ es finitamente satisfacible$\#_c$. Luego se tiene el resultado. ■

Ahora procederemos a probar el teorema de Gödel.

Demostración:
Se probará la doble implicación:

$\Rightarrow$): Es inmediato.

$\Leftarrow$): Sean $\varphi_1, \varphi_2, ...$ una enumeración 'efectiva' de todas las fórmulas (checar la observación). Recursivamente, definimos conjuntos de fórmulas $\Sigma_0 \subseteq \Sigma_1 \subseteq \cdots$ tales que $\Sigma_0 = \Sigma$, y

1. Cada Σ_n es finitamente satisfacible.

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, o bien $\varphi_n \in \Sigma_{n+1}$ o bien $\neg\varphi_n \in \Sigma_{n+1}$

en este contexto, definimos:

$$\Sigma_{n+1} = \begin{cases} \Sigma_n \cup \{\varphi_n\} & \text{si este conjunto es finitamente satisfacible} \\ \Sigma_n \cup \{\neg\varphi_n\} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Esta definición es consistente con la recursión por el lema anterior.

Ahora, definimos $\Sigma_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Sigma_n$. Analicemos a este conjunto.

1. Σ_∞ **es finitamente satisfacible**. En efecto, sea $\Delta \subseteq \Sigma$ un subconjunto finito, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\Delta \subseteq \Sigma_n$, luego como Σ_n es finitamente satisfacible, Δ es satisfacible. Por lo cual Σ_∞ es finitamente satisfacible.

2. **Para cada fórmula ψ o bien $\psi \in \Sigma_\infty$ ó $\neg\psi \in \Sigma_\infty$ y no ambas.** Esto es inmediato con la enumeración efectiva de todas las fórmulas bien formadas.

3. Σ_∞ **es maximal finitamente satisfacible**.

Sea $m : \mathrm{Var}(\Sigma_\infty) \to \{V, F\}$, dado por $m(p_n) = V$ si y sólo si $p_n \in \Sigma_\infty$.

Se probará el siguiente lema:

Lema 1.2.3
Para cualquier fórmula ψ, $\overline{m}(\psi) = V$ si y sólo si $\psi \in \Sigma_\infty$ y $\overline{m}(\psi) = F$ si y sólo si $\neg\psi \in \Sigma_\infty$.

Demostración:
Procederemos por inducción sobre ψ.

- El caso base es inmediato por definición.

- $\overline{m}(\neg\psi) = V \iff \overline{m}(\psi) = F \iff \psi \notin \Sigma_\infty \iff \neg\psi \in \Sigma_\infty$.

- $\overline{m}(\Rightarrow \xi\psi) = F \iff \overline{m}(\xi) = F$ y $\overline{m}(\psi) = V \iff \neg\xi, \psi \in \Sigma_\infty$ si y sólo si $\Rightarrow \psi\xi \notin \Sigma_\infty$ (esto es cierto por la maximalidad de Σ_∞ al ser finitamente satisfacible).

por inducción se tiene lo deseado. ■

En conclusión, el modelo definido cumple que $m \vDash \psi$ si y sólo si $\psi \in \Sigma_\infty$. En particular, $m \vDash \Sigma$, y Σ es satisfacible.

■

Observación 1.2.3
Tuplas. Considere los números naturales. Podemos establecer una biyección entre las tuplas finitas de números naturales junto con el cero, y los números naturales, de esta forma:

Si $n \in \mathbb{N}$, por el TFA podemos expresar a $n = q_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot q_m^{\alpha_m}$. Establecemos la biyección dada como sigue: $n \mapsto (\alpha_1, ..., \alpha_{m-1}, \alpha_m - 1)$. De esta forma podemos enumerar algo con tuplas. Lo que Gödel hace es que hace ciertas asignaciones: $\neg = 0$, $\Rightarrow = 1$, $2 = p_1$, $3 = p_2$, etc... Esta enumeración es llamada **enumeración de Gödel**.

Cuando decimos lo de enumeración, nos referimos a esto. Básicamente enumeramos a todas las fórmulas bien formadas. Cuando decimos que la enumeración es efectiva, hacemos referencia a que podemos hacerlo de forma mecánica.

1.3. Lista de Axiomas Lógicos

Definición 1.3.1 (Axiomas Lógicos)
Se tienen los siguientes axiomas. Cualquier fórmula que caiga en alguno de los siguientes casos.

1. $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$.
2. $\varphi \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \neg\varphi) \Rightarrow \neg\psi)$.
3. $\varphi \Rightarrow \varphi'$ siempre que φ' sea el resultado de sustituir una subfórmula de la forma $\neg\neg\psi$ por ψ, o viceversa.
4. $\varphi \Rightarrow \varphi[\psi \Rightarrow \xi \leftrightsquigarrow \neg\xi \Rightarrow \neg\psi]$.
5. $\varphi \Rightarrow \varphi[\neg\psi \Rightarrow \psi \leftrightsquigarrow \psi]$.
6. $(\varphi \Rightarrow (\xi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \xi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi))$.

Junto con una única regla de inferencia, llamada **Modus Ponens**, la cual consiste en que

$$\begin{array}{lcc} \varphi & \Rightarrow & \psi \\ \varphi & & \\ \hline & \therefore & \psi \end{array}$$

Un ejemplo de 3. sería que $(p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow (p_1 \Rightarrow \neg\neg p_2)$. Cuando ponemos [.] al lado de una fórmula, nos referimos a cualquier subfórmula interna dentro de la original. Cuando ponemos $\leftrightsquigarrow$ es que podemos sustituir uno por otro.

Definición 1.3.2
Sea Γ un conjunto de fórmulas,y sea φ una fórmula.

1. Una **demostración** de φ a partifr de Γ es una sucesión finita de fórmulas $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ tales que, para cada i se cumple una de las siguientes:

   1.1) φ_i es un axioma lógico.

1.2) φ_i es un elemento de Γ.

1.3) Existen $j, k < i$ tales que: φ_j es la fórmula $\varphi_k \Rightarrow \varphi_i$.

2. φ es **demostrable a partir de** Γ, o bien φ es un **teorema de** Γ, si existe una demostración de φ a partir de Γ. Esto se simboliza por $\Gamma \vdash \varphi$.

Observación 1.3.1
$\varphi \vee \psi$ es $\neg\varphi \Rightarrow \psi$, y $\varphi \wedge \psi$ es $\neg(\psi \Rightarrow \neg\varphi)$. $\varphi \iff \psi$ es $(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$

Ejemplo 1.3.1
Se cumple que $\{\neg C, A \Rightarrow C, A \vee (B \Rightarrow C), \neg C \Rightarrow (C \Rightarrow E), B\} \vdash E$. Probemos que esto es cierto:

1)	$(A \Rightarrow C)$	$\Rightarrow$	$(\neg C \Rightarrow \neg A)$	Ax. 4
2)	A	$\Rightarrow$	C	Premisa
3)	$\neg C$	$\Rightarrow$	$\neg A$	Modus ponens
4)	$\neg C$			Premisa
5)	$\neg A$			3,4 Modus ponens
6)	$\neg A$	$\Rightarrow$	$(B \Rightarrow C)$	Premisa
7)	B	$\Rightarrow$	C	6,5 Modus ponens
8)	B			Premisa
9)	C			7,8 Modus ponens
10)	$\neg C$	$\Rightarrow$	$(C \Rightarrow E)$	Premisa
11)	C	$\Rightarrow$	E	10,4 Modus ponens
12)	E			11,9 Modus ponens
		$\therefore$	E	

Ejemplo 1.3.2
$\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$. En efecto:

1)	$\neg(\psi \Rightarrow \neg\varphi)$			Premisa
2)	$\neg\varphi$	$\Rightarrow$	$\psi \Rightarrow \neg\varphi$	Ax. 1
3)	$(\neg\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \neg\varphi))$	$\Rightarrow$	$(\neg(\psi \Rightarrow \neg\varphi) \Rightarrow \neg\neg\varphi)$	Ax. 4
4)	$\neg(\psi \Rightarrow \neg\varphi)$	$\Rightarrow$	$\neg\neg\varphi$	3,2 M.P.
5)	$\neg\neg\varphi$			4,1 M.P.
6)	$\neg\neg\varphi$	$\Rightarrow$	φ	Ax. 3
7)	φ			6,5 M.P.
		$\therefore$	φ	

esta demostración es llamada **simplificación**.

Hay varias demostraciones que son de utilidad. Como las siguientes:

Ejercicio 1.3.1
Pruebe lo siguiente:

1. $\{\varphi \Rightarrow \psi, \neg\psi\} \vdash \neg\varphi$ (llamada **Modus Tollens**).
2. $\{\varphi\} \vdash \varphi \vee \psi$ (llamada **Adición**).
3. $\{\varphi \vee \psi, \neg\varphi\} \vdash \psi$ (llamada **Silogismo Disyuntivo**).

4. $\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$ (llamada **Conjunción**).

Demostración:

Probemos cada inciso.

De (1):

$$
\begin{array}{llcll}
1) & \varphi \Rightarrow \psi & & & \text{Premisa} \\
2) & (\varphi \Rightarrow \psi) & \Rightarrow & (\neg\psi \Rightarrow \neg\psi) & \text{Ax. 4} \\
3) & \neg\psi & \Rightarrow & \neg\psi & \text{2,1 M.P.} \\
4) & \neg\psi & & & \text{Premisa} \\
5) & \neg\varphi & & & \text{3,4 M.P.} \\
\hline
 & & \therefore & \neg\varphi &
\end{array}
$$

De (2):

$$
\begin{array}{llcll}
1) & \varphi & & & \text{Premisa} \\
2) & \varphi & \Rightarrow & (\neg\psi \Rightarrow \varphi) & \text{Ax. 1} \\
3) & \neg\psi \Rightarrow \varphi & & & \text{2,1 M.P.} \\
4) & \neg\psi \Rightarrow \varphi & \Rightarrow & \neg\varphi \Rightarrow \neg\neg\psi & \text{Ax.4.} \\
5) & \neg\varphi \Rightarrow \neg\neg\psi & & & \text{4,3 M.P.} \\
6) & \neg\varphi \Rightarrow \neg\neg\psi & \Rightarrow & \neg\varphi \Rightarrow \psi & \text{Ax. 3} \\
7) & \neg\varphi \Rightarrow \psi & & & \text{6,5 M.P.} \\
8) & \varphi \vee \psi & & & 7) \\
\hline
 & & \therefore & \varphi \vee \psi &
\end{array}
$$

De (3):

$$
\begin{array}{llcll}
1) & \varphi \vee \psi & & & \text{Premisa} \\
2) & \neg\varphi & \Rightarrow & \psi & 1) \\
3) & \neg\varphi & & & \text{Premisa} \\
4) & \psi & & & \text{2,3 M.P.} \\
\hline
 & & \therefore & \psi &
\end{array}
$$

■