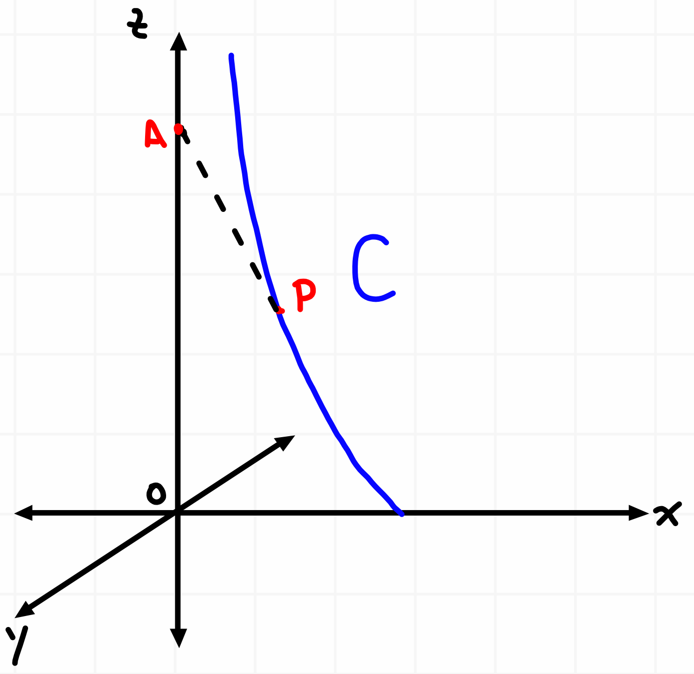
Problema 1.

De a): Obtengamos una parametrización de la curva plana C (en el plano xz) tomando como línea r al eje



z. Digamos que $C = Tr\,\alpha$, donde $\alpha(s) = (x(s), 0, z(s))$ es la parametrización por longitud de arco de C, la cual cumple que:

$$\alpha(s) + \alpha'(s) = (0,0,u(s)) \;\; ó \;\; \alpha(s) - \alpha'(s) = (0,0,u(s))$$

Con $u(s)$ una función de s. Entonces

$$x(s) + x'(s) = 0 \qquad ó \qquad x(s) - x'(s) = 0$$

Analicemos ambos casos:

1) $x(s) + x'(s) = 0$, esta es una E.D.O de primer orden con solución $x(s) = ce^{-s}$. Como α está parametrizada por longitud de arco, se cumple que $\|\alpha'(s)\|^2 = 1 \Rightarrow x'(s)^2 + z'(s)^2 = 1$.
Sabemos que en $s=0$, $\alpha(0) = (1,0,0)$, por tanto $z(0)=0$, luego $z(s) = z(s) - z(0) = \pm\int_0^s \sqrt{1-c^2e^{-2\bar{s}}}\,d\bar{s}$, dónde la integral se encuentra bien definida si $s \geq 0$. Por comodidad, tomamos la parte positiva (que nos dará la parte positiva de la tractrix). Por tanto con $x(0) = 1 = ce^{-0} = c$:

$$\alpha(s) = \left(e^{-s}, 0, \int_0^s \sqrt{1-e^{-2\bar{s}}}\,d\bar{s}\right), \forall s \geq 0.$$

2) $x(s) - x'(s) = 0$. Nuevamente esta es una E.D.O de primer orden pero que tiene solución $x(s) = ce^{s}$, como $x(0) = 1 \Rightarrow c = 1$. Así de forma análoga a 1): $x(s) = e^s$ y $z(s) = \int_0^s \sqrt{1-e^{2\bar{s}}}\,d\bar{s}$, pero ahora $s \leq 0$ (para que la integral tenga sentido). Por tanto:

$$\alpha(s) = \left(e^s, 0, \int_0^s \sqrt{1-e^{2\bar{s}}}\,d\bar{s}\right), \forall s \leq 0.$$

Tanto 1) como 2) parametrizan a la parte positiva de la tractrix (para la negativa, hay que tomar $-\int_0^s \sqrt{1-e^{2\bar{s}}}\,d\bar{s}$). Usamos la obtenida en 2) para parametrizarla y, para que sea suave, hacemos $s \neq 0$:

$$\alpha(s) = \left(e^s, 0, \int_0^s \sqrt{1-e^{2\bar{s}}}\,d\bar{s}\right), \; s < 0 \qquad \square$$

De b): Rotemos la tractrix alrededor del eje z, usando la matriz de rotación

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La sup. de rev. obtenida será parametrizada por:

$$\bar{X}(s,\theta) = \left(e^s\cos\theta,\ e^s \operatorname{sen}\theta,\ \int_0^s \sqrt{1-e^{2\bar{s}}}\, d\bar{s} \right)$$

Donde $s \in \mathbb{R}^-$, $0<\theta<2\pi$. Obtengamos el dominio $U \subseteq \mathbb{R}^- \times]0,2\pi[$ dónde $\bar{X}$ parametriza a una sup. regular.

$\bar{X}$ es diferenciable y luego continua, pues sus funciones coordenadas son clase C^∞. Veamos cuando $d\bar{X}_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es inyectivo. Para ello, veamos:

$$\bar{X}_s(s,\theta) = \left(e^s\cos\theta,\ e^s\operatorname{sen}\theta,\ (1-e^{2s})^{1/2} \right)$$

$$\bar{X}_\theta(s,\theta) = \left(-e^s\operatorname{sen}\theta,\ e^s\cos\theta,\ 0 \right)$$

$$\Rightarrow \bar{X}_s \wedge \bar{X}_\theta = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ e^s\cos\theta & e^s\operatorname{sen}\theta & (1-e^{2s})^{1/2} \\ -e^s\operatorname{sen}\theta & e^s\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \left(-(1-e^{2s})^{1/2} e^s\cos\theta,\ -(1-e^{2s})^{1/2} e^s\operatorname{sen}\theta,\ e^{2s} \right)$$

$$\Rightarrow \| \bar{X}_s \wedge \bar{X}_\theta \|^2 = (1-e^{2s})e^{2s}\cos^2\theta + (1-e^{2s})e^{2s}\operatorname{sen}^2\theta + e^{4s}$$

$$= (1-e^{2s})e^{2s} + e^{2s}\cdot e^{2s} = e^{2s}(1-e^{2s}+e^{2s}) = e^{2s} \neq 0,\ \forall s<0.$$

Por tanto, $d\bar{X}_q$ es inyectivo, $\forall q \in U = \mathbb{R}^- \times]0,2\pi[$. Por un ejemplo del libro, se sigue que $\bar{X}$ es homeomorfismo (pues α es curva regular dónde $z(s)>0, \forall s<0$). Luego $\bar{X}(U)$ es sup. regular con

$$\bar{X}(s,\theta) = \left(e^s\cos\theta,\ e^s\operatorname{sen}\theta,\ \int_0^s \sqrt{1-e^{2\bar{s}}}\, d\bar{s} \right),\ \forall s<0,\ \forall \theta \in]0,2\pi[$$

Que parametriza a la parte positiva de la tractrix, excepto con $\theta=0$, para parametrizar esa parte usamos la misma $\bar{X}$ cambiando el dominio de θ de $]0,2\pi[$ a $]-\pi,\pi[$.

Para la parte negativa usamos:

$$\bar{Y}(s,\theta) = \left(e^s\cos\theta,\ e^s\operatorname{sen}\theta,\ -\int_0^s \sqrt{1-e^{2\bar{s}}}\, d\bar{s} \right),\ \forall s<0,\ y\ \forall \theta \in]0,2\pi[$$

Para cubrir la franja faltante hacemos (como con $\bar{X}$) que $\theta \in]-\pi, \pi[$.

$\square$

De c): Obtengamos la curvatura de un punto $p \in \bar{X}(u)$. Veamos que:

$$\bar{X}_s(s,\theta) = \left(e^s \cos\theta,\ e^s \operatorname{sen}\theta,\ (1-e^{2s})^{1/2}\right)$$

$$\bar{X}_\theta(s,\theta) = \left(-e^s \operatorname{sen}\theta,\ e^s\cos\theta,\ 0\right)$$

$$\bar{X}_s \wedge \bar{X}_\theta = \left(-(1-e^{2s})^{1/2} e^s \cos\theta,\ -(1-e^{2s})^{1/2} e^s \operatorname{sen}\theta,\ e^{2s}\right)$$

y $\|\bar{X}_s \wedge \bar{X}_\theta\| = e^s$. Por tanto:

$$N(p) = \left(-(1-e^{2s})^{1/2}\cos\theta,\ -(1-e^{2s})^{1/2}\operatorname{sen}\theta,\ e^s\right)$$

y:

$$\bar{X}_{ss}(s,\theta) = \left(e^s\cos\theta,\ e^s\operatorname{sen}\theta,\ \frac{-e^{2s}}{(1-e^{2s})^{1/2}}\right),\ \bar{X}_{s\theta}(s,\theta) = \left(-e^s\operatorname{sen}\theta,\ e^s\cos\theta,\ 0\right),\ \bar{X}_{\theta\theta}(s,\theta) = \left(-e^s\cos\theta,\ -e^s\operatorname{sen}\theta,\ 0\right)$$

Por tanto:

$$E = \langle \bar{X}_s, \bar{X}_s\rangle = 1 \qquad e = \langle N, \bar{X}_{ss}\rangle = -(1-e^{2s})^{1/2} e^s - \frac{e^{3s}}{(1-e^{2s})^{1/2}}$$

$$F = \langle \bar{X}_s, \bar{X}_\theta\rangle = 0 \qquad = \frac{-e^s + e^{3s} - e^{3s}}{(1-e^{2s})^{1/2}}$$

$$G = \langle \bar{X}_\theta, \bar{X}_\theta\rangle = e^{2s} \qquad = -\frac{e^s}{(1-e^{2s})^{1/2}}$$

$$f = \langle N, \bar{X}_{s\theta}\rangle = 0$$

$$g = \langle N, \bar{X}_{\theta\theta}\rangle = e^s(1-e^{2s})^{1/2}$$

La curvatura K será entonces:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{e^{2s}}{e^{2s}} = -1$$

Esto para el lado positivo. Como el lado negativo es una reflexión del positivo, se seguirá cumpliendo que $K=-1$. (en el sig. problema se verá que, para superficies de rev. generadas por curvas regulares, K no depende de $z(s)$, lo cuál justificará esta afirmación).

$\square$

Problema 2.

De a): Sea $X(u,v) = (\varphi(v)\cos u, \varphi(v)\sin u, \psi(v))$ parametrización de la sup. de revolución con curvatura constante K, con $0<u<2\pi$ y $a<v<b$. Calculemos los coef. de I_p y II_p:

$$\bar{X}_u = (-\varphi(v)\operatorname{sen}u, \varphi(v)\cos u, 0), \qquad \bar{X}_v = (\varphi'(v)\cos u, \varphi'(v)\sin u, \psi'(v))$$

$$\bar{X}_{uu} = (-\varphi(v)\cos u, -\varphi(v)\operatorname{sen}u, 0), \ \bar{X}_{uv} = (-\varphi'(v)\operatorname{sen}u, \varphi'(v)\cos u, 0), \ \bar{X}_{vv} = (\varphi''(v)\cos u, \varphi''(v)\sin(u), \psi''(v))$$

y:

$$\bar{X}_u \wedge \bar{X}_v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\varphi(v)\operatorname{sen}u & \varphi(v)\cos u & 0 \\ \varphi'(v)\cos u & \varphi'(v)\sin u & \psi'(v) \end{vmatrix} = (\psi'(v)\varphi(v)\cos u, \psi'(v)\varphi(v)\operatorname{sen}u, -\varphi(v)\varphi'(v))$$

$\Rightarrow \|\bar{X}_u \wedge \bar{X}_v\| = \sqrt{(\psi'(v))^2\varphi(v)^2 + \varphi(v)^2(\varphi'(v))^2} = |\varphi(v)|\sqrt{\varphi'(v)^2+\psi'(v)^2} = |\varphi(v)|$, pues $\varphi'(v)^2 + \psi'(v)^2 = 1$. Para que no haya puntos donde la sup. no sea regular, hacemos $\varphi(v) \neq 0$ y más aún, $\varphi(v) > 0$ (pues lo que haya del lado neg. lo pasamos al pos. ya que, como la curva va a girar, ese espacio se puede llenar). Por tanto:

$$N(p) = (\psi'(v)\cos u, \psi'(v)\operatorname{sen}u, -\varphi'(v))$$

Los coef. de la I_p y II_p serán:

$$E = \langle \bar{X}_u, \bar{X}_u \rangle = \varphi(v)^2 \qquad e = \langle N, \bar{X}_{uu} \rangle = -\varphi(v)\psi'(v)$$

$$F = \langle \bar{X}_u, \bar{X}_v \rangle = 0 \qquad f = \langle N, \bar{X}_{uv} \rangle = 0$$

$$G = \langle \bar{X}_v, \bar{X}_v \rangle = 1 \qquad g = \langle N, \bar{X}_{vv} \rangle = \psi'(v)\varphi''(v) - \varphi'(v)\psi''(v)$$

Luego:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-\varphi(v)\psi'(v)^2\varphi''(v) + \varphi(v)\varphi'(v)\psi'(v)\psi''(v)}{\varphi'(v)^2}$$

Como $\varphi'(v)^2 + \psi'(v)^2 = 1 \Rightarrow \varphi'(v)\varphi''(v) = -\psi'(v)\psi''(v)$. Por tanto:

$$\Rightarrow K = -\frac{\psi'(v)^2\varphi''(v) + \varphi''(v)\varphi'(v)^2}{\varphi(v)} = -\frac{\varphi''(v)}{\varphi(v)} \Rightarrow \varphi''(v) + K\varphi(v) = 0$$

$$\therefore \varphi'' + K\varphi = 0 \ (\text{i.e. } K \text{ no depende de } \psi)$$

y además, como $(\varphi'(v))^2 + (\psi'(v))^2 = 1 \Rightarrow \psi'(v) = \pm\sqrt{1-\varphi'(v)^2}$, tomando la parte positiva tenemos que

$$\psi'(v) = \sqrt{1-\varphi'(v)^2} \Rightarrow \psi(v) = \int_a^v \sqrt{1-(\varphi'(\bar{v}))^2}\, d\bar{v}$$

donde c es m $\psi(c)=0$.

q.e.d.

De b): Cuando $K=1$, obtenemos la E.D.O

$$\varphi'' + \varphi = 0$$

La cual tiene como familia de soluciones: $\varphi(v) = c_2\cos(v+c_1)$, donde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Como intersectan perpendicularmente al plano (digamos en $v=0$), tenemos que

$$\varphi'(0) = 0 \quad y \quad \psi'(0) = 1$$

Con $\varphi'(v) = -c_2 \sin(v+c_1)$ y $\psi'(v) = \sqrt{1-c_2^2\sin^2(v+c_1)}$. Luego:

$$-c_2\sin(c_1) = 0 \qquad y \quad 1-c_2^2\sin^2(c_1) = 1$$

Como pedimos que $\varphi(v) \neq 0, \forall v$, entonces $\sin(c_1)=0$. Por tanto, podemos hacer $c_1=0$. Luego:

$$\varphi(v) = C\cos(v)$$

y como $\psi'(v) = \sqrt{1-c^2\operatorname{sen}^2(v)} \Rightarrow \psi(v) - \psi(0) = \int_0^v \sqrt{1-c^2\operatorname{sen}^2(\bar{v})}\, d\bar{v}$. Pero en 0 como la curva intersecta al plano $xOy \Rightarrow \psi(0) = 0$. Por lo tanto:

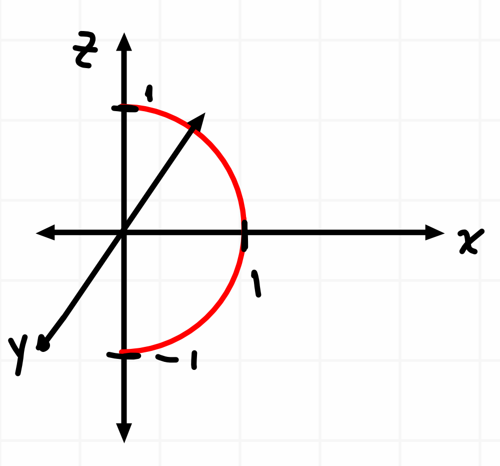
$$\psi(v) = \int_0^v \sqrt{1-c^2\operatorname{sen}^2(\bar{v})}\, d\bar{v}$$

Veamos los casos:

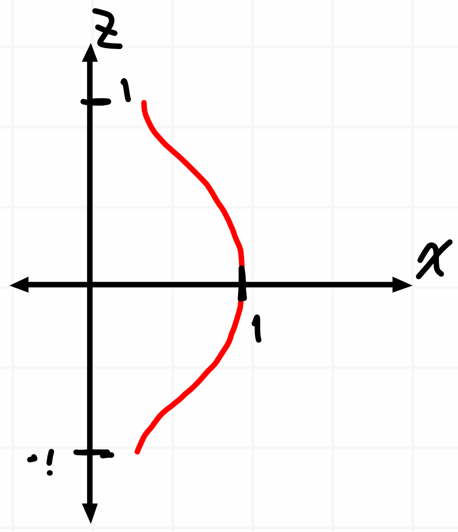
1) Si $c=1 \Rightarrow \varphi(v) = \cos v$, $\psi(v) = \int_0^v \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\bar{v}}\, d\bar{v} = \int_0^v |\cos\bar{v}|\, d\bar{v}$. Como $\varphi(v)>0, \forall v$, entonces $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$, luego $\int_0^v |\cos\bar{v}|\, d\bar{v} = \int_0^v \cos\bar{v}\, d\bar{v} = \operatorname{sen} v \Rightarrow \psi(v) = \operatorname{sen} v$,

$$\varphi(v) = \cos v \quad y \quad \psi(v) = \operatorname{sen} v, \; -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$$

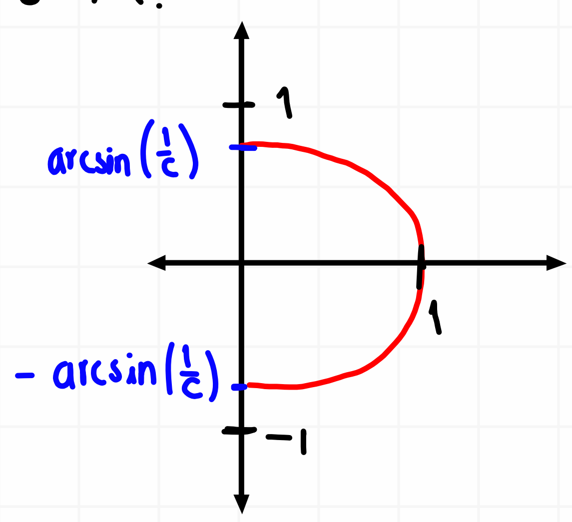
i.e tenemos como sup. de rev. una esfera sin los polos.



2) Si $c<1$, entonces con $\varphi(v)=c\cos v$, como $\varphi(v)>0$ debe suceder que $0<c<1$. Luego $-\frac{\pi}{2}<v<\frac{\pi}{2}$. En este intervalo $\psi(v)=\int_0^v\sqrt{1-c^2\sin^2\bar{v}}\,d\bar{v}$ se encuentra bien definida pues $1-c^2\sin^2\bar{v}>0$, $\forall\, v\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Se vería así:



3) Si $c>1$, para que ψ esté bien definida, $1-c^2\sin^2 v\geqslant 0\Rightarrow\frac{1}{c^2}\geqslant\sin^2 v\Rightarrow|\sin v|\leqslant\frac{1}{c}\Rightarrow|v|\leqslant\arcsin\left(\frac{1}{c}\right)$. La gráfica sería:



$\square$

De c): Si $K=-1$, tenemos la E.D.O:

$$\varphi''-\varphi=0\Rightarrow S^2-1=0\Rightarrow S=\pm 1.$$

La cual tiene como familia de soluciones a $\varphi(v)=C_1e^v+C_2e^{-v}$. Recordemos que:

$$\cosh x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\ \text{y}\ \sinh(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$$

Entonces:

$$\cosh x+\sinh x=e^x\ \text{y}\ \cosh x-\sinh x=e^{-x}$$

Luego:

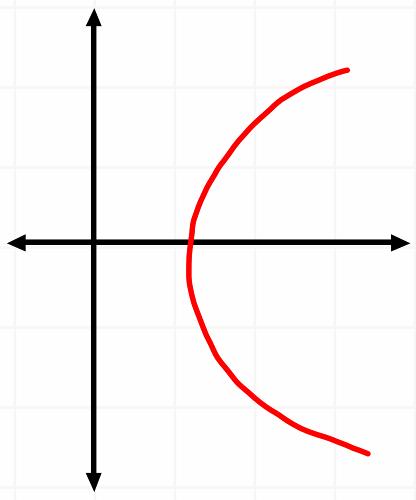
$$\begin{aligned}\varphi(v)&=C_1(\cosh v+\sinh v)+C_2(\cosh v-\sinh v)\\&=(C_1+C_2)\cosh v+(C_1-C_2)\sinh v\end{aligned}$$

Si $C_1-C_2=0$, obtenemos la sup. de rev. generada por 1). Si $C_1+C_2=0$, obtenemos la de 2). Supongamos que $|C_1|\neq|C_2|$, entonces obtenemos $\varphi(v)=C_1e^v+C_2e^{-v}$ que es una suma de dos funciones del tipo 3).

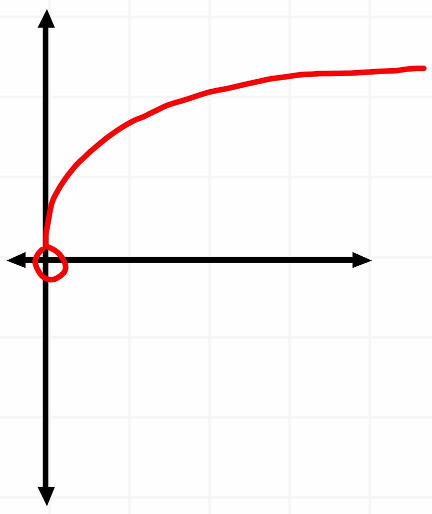
Veamos ahora cada tipo:

1) Para que $\varphi(v)$ esté bien definida, $1-c^2\sinh v>0 \Rightarrow |\sinh v|<\frac{1}{c} \Rightarrow |v|<\operatorname{arcsinh}\left(\frac{1}{c}\right)$.

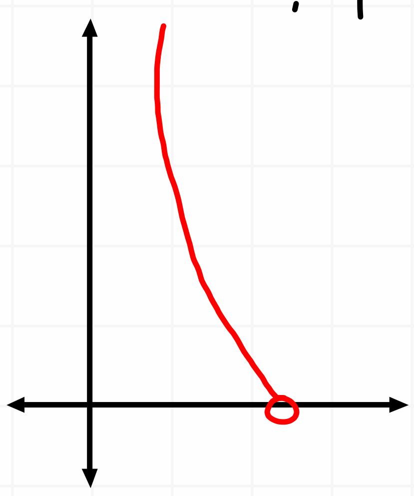
Se vería aprox. de esta forma: (tomando a $c>0$).



2) Como $\varphi(v)>0$ entonces si $c>0 \Rightarrow v\in\mathbb{R}^+$ y si $c<0 \Rightarrow v\in\mathbb{R}^-$ (por ser sinh creciente). Por ende, la gráfica sería aproximadamente (con $c>0$):



3) Del problema 1), vemos que esta es la misma parametrización de la tractrix. En este caso para que φ esté bien definida: $v\in\mathbb{R}^-$, y se vería así:



De d): Del problema 1) observamos que se tiene la misma parametrización y, como ambas giran alrededor del eje z, tenemos que la sup. de rev. de 3) es la pseudoesfera (ver problema 1))

De c): Si $K=0$, tenemos la E.D.O:

$$\varphi''=0 \Rightarrow \varphi(v)=C_1v+C_2$$

Si $C_1=0$, como $\varphi(v)>0 \Rightarrow C_2>0$, luego con $\varphi'(v)=0$ tendríamos que $\varphi(v)=v$, i.e una recta alejada una dist. C_2 del eje z que, al rotar genera un cilindro de radio C_1.

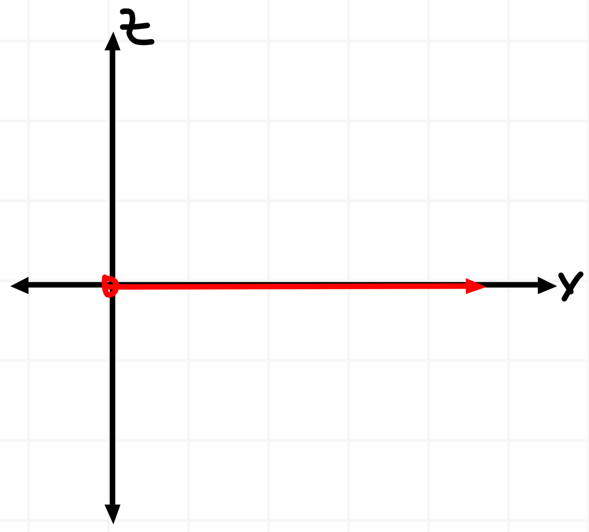
Si $c_2 = 0 \Rightarrow c_1$ es m $c_1 v > 0$. Para que φ esté bien definida, $1 < |c_1|$, y sería:

$$\psi(v) = \sqrt{1 - c_1^2}\, v$$

Con $c_1 > 0 \Rightarrow v > 0$. Por tanto tendríamos una recta en el plano xz que, al rotar, generaría un cono.

Si $c_1, c_2 \neq 0$ de forma análoga a arriba, tendríamos como sup. de rev. un cono.

Si $c_1 = 1 \Rightarrow \varphi(v) = v$ y $\psi(v) = 0$, que al rotar alrededor del eje z generaría un plano sin el origen:



Problema 3

a) Sea $p \in S$ punto crítico de h, es decir $dh_p \equiv 0$. $\alpha:]-\varepsilon, \varepsilon[\to S$ y $\alpha_{loc}:]-\varepsilon, \varepsilon[\to U \subseteq \mathbb{R}^2$ curvas regulares $\ni$ $\alpha(0) = \underline{X} \circ \alpha_{loc}(0) = p$ (esto es, $\alpha(t) = \underline{X}(u(t), v(t))$, donde $\alpha_{loc}(t) = (u(t), v(t))$). Llamémos $w = \alpha'(0) = (\underline{X}(u(t), v(t)))'(0) = u'(0)\underline{X}_u(u(0), v(0)) + v'(0)\underline{X}_v(u(0), v(0))$.

Para probar el resultado, notemos que:

$$H_p h(u'(0)\underline{X}_u(u(0), v(0)) + v'(0)\underline{X}_v(u(0), v(0))) = H_p h(w)$$

Por definición de Hessiano de h en p, tenemos:

$$\begin{aligned} H_p h(w) &= \frac{d^2}{dt^2}(h \circ \alpha(t))\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}(h \circ \alpha)(t)\right)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}(h \circ \underline{X}(u(t), v(t)))\right)\Big|_{t=0} \end{aligned}$$

Recordemos que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(h \circ \underline{X}(u(t), v(t))) &= dh_{\underline{X}(u(t), v(t))}\left(\frac{d}{dt}(\underline{X}(u(t), v(t)))\right) \\ &= dh_{\underline{X}(u(t), v(t))}(u'(t)\underline{X}_u(u(t), v(t)) + v'(t)\underline{X}_v(u(t), v(t))) \end{aligned}$$

Como $dh_{\underline{X}(u(t), v(t))}$ es transformación lineal, entonces:

$$\begin{aligned} H_p h(w) &= \frac{d}{dt}\left(u'(t)\, dh_{\underline{X}(u(t), v(t))}(\underline{X}_u(u(t), v(t))) + v'(t)\, dh_{\underline{X}(u(t), v(t))}(\underline{X}_v(u(t), v(t)))\right)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\left(u'(t)\, dh_{\underline{X}(u(t), v(t))}(\underline{X}_u(u(t), v(t)))\right)\Big|_{t=0} + \frac{d}{dt}\left(v'(t)\, dh_{\underline{X}(u(t), v(t))}(\underline{X}_v(u(t), v(t)))\right)\Big|_{t=0} \end{aligned}$$

Analicemos los términos de esta suma. Por la regla del producto, y tomando en cuenta que $\underline{X}(u(0), v(0)) = p$, tenemos

$$\frac{d}{dt}\left(u'(t)\, dh_{\underline{X}(u(t), v(t))}(\underline{X}_u(u(t), v(t)))\right)\Big|_{t=0} = u''(0)\, dh_p(\underline{X}_u(u(0), v(0))) + u'(0) \cdot \frac{d}{dt}\left(dh_{\underline{X}(u(t), v(t))}(\underline{X}_u(u(t), v(t)))\right)\Big|_{t=0}$$

Pero $dh_p \equiv 0$, y

$$dh_{\underline{X}(u(t), v(t))}(\underline{X}_u(u(t), v(t))) = \begin{pmatrix} h_u(u(t), v(t)) & h_v(u(t), v(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = h_u(u(t), v(t))$$

expresando a $dh_{\underline{X}(u(t), v(t))}$ en coordenadas locales. Luego:

$$\frac{d}{dt}\left(dh_{\bar{X}(u(t),v(t))}\left(\bar{X}_u(u(t),v(t))\right)\right)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(h_u(u(t),v(t))\right)\Big|_{t=0}$$
$$= u'(0)\,h_{uu}(u(0),v(0)) + v'(0)h_{uv}(u(0),v(0))$$

Por tanto:

$$\frac{d}{dt}\left(u'(t)\,dh_{\bar{X}(u(t),v(t))}\left(\bar{X}_u(u(t),v(t))\right)\right)\Big|_{t=0} = (u'(0))^2 h_{uu}(u(0),v(0)) + u'(0)v'(0)\,h_{uv}(u(0),v(0))$$

De forma análoga obtenemos que:

$$\frac{d}{dt}\left(v'(t)\,dh_{\bar{X}(u(t),v(t))}\left(\bar{X}_v(u(t),v(t))\right)\right)\Big|_{t=0} = u'(0)v'(0)\,h_{vu}(u(0),v(0)) + (v'(0))^2 h_{vv}(u(0),v(0))$$

Por ser h diferenciable, entonces sus derivadas parciales de todos los órdenes existen y son continuas. Por tanto:

$$h_{uv}(u(0),v(0)) = h_{vu}(u(0),v(0))$$

Luego, sustituyendo en el Hessiano obtenemos:

$$H_p h\left(u'(0)\bar{X}_u(u(0),v(0)) + v'(0)\bar{X}_v(u(0),v(0))\right) = (u'(0))^2 h_{uu}(u(0),v(0)) + 2u'(0)v'(0)\,h_{uv}(u(0),v(0)) + (v'(0))^2 h_{vv}(u(0),v(0))$$

q.e.d.

Veamos que está bien definido. Sean $\alpha, \beta :]-\varepsilon, \varepsilon[\to S$ curvas regulares parametrizadas m $\alpha(0) = \beta(0) = p$ y $\alpha'(0) = \beta'(0) = u'(0)\bar{X}_u(u(0),v(0)) + v'(0)\bar{X}_v(u(0),v(0)) = w$. Entonces:

$$\frac{d^2}{dt^2}(h\circ\alpha)\Big|_{t=0} = H_p h(w)$$
$$= H_p h\left(u'(0)\bar{X}_u(u(0),v(0)) + v'(0)\bar{X}_v(u(0),v(0))\right)$$
$$= (u'(0))^2 h_{uu}(u(0),v(0)) + 2u'(0)v'(0)\,h_{uv}(u(0),v(0)) + (v'(0))^2 h_{vv}(u(0),v(0))$$
$$= H_p h\left(u'(0)\bar{X}_u(u(0),v(0)) + v'(0)\bar{X}_v(u(0),v(0))\right)$$
$$= H_p h(w)$$
$$= \frac{d^2}{dt^2}(h\circ\beta)\Big|_{t=0}$$

i.e el Hessiano no depende de la parametrización α o β. Y es forma cuadrática ya que:

$$H_p h(w) = \begin{pmatrix} u'(0) & v'(0) \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} h_{uu}(u(0),v(0)) & h_{uv}(u(0),v(0)) \\ h_{uv}(u(0),v(0)) & h_{vv}(u(0),v(0)) \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix}$$

Donde la matriz B depende únicamente del punto p.

De b): Sea $p \in S$ y $\mathbb{X}: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ una parametrización de S m $p \in \mathbb{X}(U)$. El vector normal a S en p $N(p)$ estará dado por:

$$N(p) = \left.\frac{\mathbb{X}_u \wedge \mathbb{X}_v}{\|\mathbb{X}_u \wedge \mathbb{X}_v\|}\right|_p$$

Tomemos la curva $\alpha:]-\varepsilon, \varepsilon[\to S$ de la parte a), con $\alpha(0) = p$, $\alpha(t) = \mathbb{X}(u(t), v(t))$ y $\alpha'(0) = w \in T_pS$. Entonces:

$$\begin{aligned} dh_p(w) &= \frac{d}{dt}(h \circ \alpha(t))\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(\langle \alpha(t) - p, N(p)\rangle)\Big|_{t=0} \\ &= \langle \alpha'(t), N(p)\rangle\Big|_{t=0} + \langle \alpha(t) - p, 0\rangle\Big|_{t=0} \\ &= \langle w, N(p)\rangle + 0 \end{aligned}$$

Como $w \in T_pS$, entonces $\langle w, N(p)\rangle = 0$. Por tanto $dh_p(w) = 0$, $\forall\, w \in T_pS$. Luego $dh_p \equiv 0$, así $p \in S$ es punto crítico de h. De esta forma H_ph está bien definido.

Notemos también que:

$$dh_{\mathbb{X}(u(t),v(t))}\left(u'(t)\mathbb{X}_u(u(t),v(t)) + v'(t)\mathbb{X}_v(u(t),v(t))\right) = \begin{pmatrix} h_u(u(t),v(t)) & h_v(u(t),v(t)) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \langle u'(t)\mathbb{X}_u(u(t),v(t)) + v'(t)\mathbb{X}_v(u(t),v(t)), N(p)\rangle \\ &= u'(t)\langle \mathbb{X}_u(u(t),v(t)), N(p)\rangle + v'(t)\langle \mathbb{X}_v(u(t),v(t)), N(p)\rangle \end{aligned}$$

Por tanto:

$$h_u(u(t),v(t)) = \langle \mathbb{X}_u(u(t),v(t)), N(p)\rangle \quad \text{y} \quad h_v(u(t),v(t)) = \langle \mathbb{X}_v(u(t),v(t)), N(p)\rangle$$

$$\Rightarrow h_{uu}(u,v) = \langle \mathbb{X}_{uu}(u,v), N(p)\rangle,\ h_{uv}(u,v) = \langle \mathbb{X}_{uv}(u,v), N(p)\rangle \text{ y } h_{vv}(u,v) = \langle \mathbb{X}_{vv}(u,v), N(p)\rangle$$

Por lo tanto:

$$H_ph(w) = (u'(0))^2\langle \mathbb{X}_{uu}(u(0),v(0)), N(p)\rangle + 2u'(0)v'(0)\langle \mathbb{X}_{uv}(u(0),v(0)), N(p)\rangle + (v'(0))^2\langle \mathbb{X}_{vv}(u(0),v(0)), N(p)\rangle$$

Donde $\langle \mathbb{X}_{uu}(u(0),v(0)), N(p)\rangle = e(u(0),v(0))$, $\langle \mathbb{X}_{uv}(u(0),v(0)), N(p)\rangle = f(u(0),v(0))$ y $\langle \mathbb{X}_{vv}(u(0),v(0)), N(p)\rangle$ son los coef. de la II_p. Luego:

$$H_p h(w) = \mathrm{II}_p(w)$$

Si w es tal que $\|w\| = 1$, entonces:

$$H_p h(w) = \frac{d^2}{dt^2}(h \circ \alpha(t))\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}(\langle \alpha(t) - p, N(p)\rangle)\right)\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}(\langle \alpha'(t), N(p)\rangle)\Big|_{t=0}$$

$$= \langle N(p), \alpha''(0)\rangle$$

Pero $\alpha''(0) = K(0)n(0)$. Por tanto:

$$= \langle N(p), K(0)n(0)\rangle$$

$$= K_n(p)$$

Pues $n(0)$ es normal a la curva $\mathrm{Tr}\,\alpha$ en p, $K(0)$ es la curvatura de α y $N(p)$ es el normal a S en p. Por def. ese es la curvatura normal a p en la dir. de w.

q.e.d.

Problema 4.

De a): Sea $p \in S$, y sea $\alpha:]-\varepsilon, \varepsilon[\to S$ curva regular parametrizada in $\alpha(t) = \mathbb{X}(u(t), v(t))$, $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = w$. Entonces:

$$\begin{aligned} dh_{r_p}(w) = 0 &\iff \frac{d}{dt}(h_r \circ \alpha(t))\Big|_{t=0} = 0 \\ &\iff \frac{d}{dt}\left(\sqrt{\langle \alpha(t)-r, \alpha(t)-r \rangle}\right)\Big|_{t=0} = 0 \\ &\iff \frac{2\langle \alpha'(0), \alpha(0)-r \rangle}{2\sqrt{\langle \alpha(0)-r, \alpha(0)-r \rangle}} = 0 \\ &\iff \langle w, p-r \rangle = 0 \end{aligned}$$

Con $w \in T_pS$ arbitrario. Por tanto $dh_{r_p} \equiv 0 \iff$ la línea recta que va de r a p es perpendicular a T_pS, i.e es normal a S en p.

q.e.d.

De b): Veamos que:

$$\begin{aligned} H_p h_r(w) &= \frac{d^2}{dt^2}(h \circ \alpha(t))\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\left(\sqrt{\langle \alpha(t)-r, \alpha(t)-r \rangle}\right)\right)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\langle \alpha'(t), \alpha(t)-r \rangle}{\sqrt{\langle \alpha(t)-r, \alpha(t)-r \rangle}}\right)\Big|_{t=0} \\ &= -\frac{\langle \alpha'(t), \alpha(t)-r \rangle}{2(\langle \alpha(t)-r, \alpha(t)-r \rangle)^{3/2}} \cdot 2\langle \alpha'(t), \alpha(t)-r \rangle\Big|_{t=0} + \frac{\langle \alpha''(t), \alpha(t)-r \rangle + \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle}{\sqrt{\langle \alpha(t)-r, \alpha(t)-r \rangle}}\Big|_{t=0} \\ &= \frac{-\langle w, p-r \rangle^2}{\|p-r\|^3} + \frac{\langle \alpha''(0), p-r \rangle + \langle w, w \rangle}{\|p-r\|} \end{aligned}$$

Como $p \in S$ es punto crítico, entonces por a): $\langle w, p-r \rangle = 0$. Luego con $\langle w, w \rangle = \|w\|^2 = 1$:

$$= \frac{1}{h_r(p)} - \left\langle n(0)K(0), \frac{r-p}{\|r-p\|} \right\rangle$$

Donde $n(0)$ es el vector normal a α en p, K es su curvatura y $\frac{r-p}{\|r-p\|}$ es un vector normal a S en p.

De la def. de curvatura normal se sigue que:

$$H_p h_r(w) = \frac{1}{h_r(p)} - K_n$$

q.e.d.

Sean ahora e_1 y e_2 las direcciones principales de T_pS. Entonces:

$$H_p h_r(e_1) = \frac{1}{h_r(p)} - K_1 \quad \text{y} \quad H_p h_r(e_2) = \frac{1}{h_r(p)} - K_2$$

Para probar que la base $\{e_1, e_2\}$ diagonaliza a $A_p h_r$, hay que mostrar que:

$$\langle A_p h_r(e_1), e_2 \rangle = \langle A_p h_r(e_2), e_1 \rangle = 0$$

Para ello, se tiene que:

$$\langle A_p h_r(v), w \rangle = \frac{1}{2}\left[H_p h_r(v+w) - H_p h_r(v) - H_p h_r(w) \right]$$

(Por el apéndice del Do Carmo). Entonces:

$$\begin{aligned}\langle A_p h_r(e_1), e_2 \rangle &= \frac{1}{2}\left[H_p h_r(e_1+e_2) - H_p h_r(e_1) - H_p h_r(e_2) \right] \\ &= \frac{1}{2}\left[2 H_p h_r\left(\frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{h_r(p)} + K_1 - \frac{1}{h_r(p)} + K_2 \right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{h_r(p)} - 2K_1 \cos^2\frac{\pi}{4} - 2K_2 \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4} - \frac{2}{h_r(p)} + K_1 + K_2 \right]\end{aligned}$$

Pues, por la fórmula de Euler, la curvatura normal en la dirección de $\frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}} = K_1 \cos^2\frac{\pi}{4} + K_2 \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4} = \frac{K_1}{2} + \frac{K_2}{2}$.

Luego:

$$= \frac{1}{2}\left[-K_1 - K_2 + K_1 + K_2 \right] = 0$$

De forma análoga, $\langle A_p h_r(e_2), e_1 \rangle = 0$. Así, la base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ diagonaliza a $A_p h_r$.

$p \in S$ es un punto crítico degenerado de $h_r \iff \langle A_p h_r(e_1), e_1 \rangle = 0$ o $\langle A_p h_r(e_2), e_2 \rangle = 0$, pues la base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ diagonaliza a $A_p h_r$ y, para que esta t. lineal sea no singular, y así p sea un punto crítico degenerado de h_r, alguna de las dos entradas $a_{11} = \langle A_p h_r(e_1), e_1 \rangle$ o $a_{22} = \langle A_p h_r(e_2), e_2 \rangle$ debe ser cero $\iff H_p h_r(e_1) = 0$ o $H_p h_r(e_2) = 0$ (pues $\langle A_p h_r(v), v \rangle = H_p h_r(v)$) $\iff 0 = \frac{1}{h_r(p)} - K_1$ o $0 = \frac{1}{h_r(p)} - K_2 \iff h_r(p) = \frac{1}{K_1}$ o $h_r(p) = \frac{1}{K_2}$.

q.e.d.

De c): Veamos que B es abierto. Para ello, veamos que h_r es función Morse $\iff$ sus puntos críticos son no degenerados. De b) sabemos que $p \in S$ es punto crítico degenerado de $h_r \iff h_r(p) = \frac{1}{K_1}$ o $h_r(p) = \frac{1}{K_2}$.

Por tanto h_r es función Morse $\iff h_r(p) \neq \frac{1}{K_1}, \frac{1}{K_2}$ y p es punto crítico, pero al ser punto crítico, se cumple que $N(p) \parallel r-p$, $N(p)$ un vector normal a p en S. Así:

$$h_r \text{ es función Morse} \iff r \neq p \pm \frac{1}{K_1} N(p) \text{ y } r \neq p \pm \frac{1}{K_2} N(p)$$

En particular:

$$B^c = \{ r \in \mathbb{R}^3 \mid r = p + i \frac{1}{K_j} N(p), \text{ para algún } p \in S,\ i \in \{-1,1\} \text{ y } j \in \{1,2\} \}$$

Si $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es cerrada, entonces B^c es un conjunto cerrado (pues B^c es la unión de 2 expansiones y 2 contracciones de S). Luego B es abierto.

Además, como $m(S) = 0$ (por ser S sup. regular) entonces $m(B^c) = 0$ (m la medida de Lebesgue del c-onjunto). Por tanto, B es denso en $\mathbb{R}^3$ (por un resultado de análisis).

q.e.d.