ANALISIS MATEMATICO III, Grupo 7FM1, 2024-1

EXAMEN # 1

Resuelva TRES problemas.

1. Sean $p, q \in [1, \infty[$ tales que $0 < 1/p + 1/q \leq 1$ y sea

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Muestre que si $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y $g \in \mathcal{L}_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, entonces $fg \in \mathcal{L}_s(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y

$$\mathcal{N}_s(fg) \leq \mathcal{N}_p(f)\mathcal{N}_q(g).$$

2. Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. **Pruebe** que

$$\lim_{y \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x+y)|\, dx = 0.$$

Sugerencia. Puede suponer que si h es integrable en $\mathbb{R}^n$, entonces $x \mapsto h(x+y)$ es integrable en $\mathbb{R}^n$ y que $\int_{\mathbb{R}^n} h(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} h(x+y)dx$, $\forall y \in \mathbb{R}^n$. También puede suponer toda función continua de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$.

3. Pruebe primero que $g(x) = \operatorname{sen} x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, pertenece a $\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y **calcule (justificando)** $\mathcal{N}_\infty(g)$. Sea $\Phi : L_1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ el funcional lineal

$$\Phi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx, \quad \forall f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Demuestre que Φ es continuo y que $\|\Phi\| = \mathcal{N}_\infty(g)$.

Sugerencia. Considere el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |g(x)| > \mathcal{N}_\infty(g) - \varepsilon\}$. Aplique Φ a alguna función **integrable** f definida en términos de A y de la función α (donde $\alpha g = |g|$, no necesita especificar a α).

4. Pruebe que si $f \in L_4([0,2], \mathbb{R})$, entonces $a + bf + cf^2 \in L_2([0,2], \mathbb{R})$, donde a, b y c son constantes reales. Sea $F : L_4([0,2], \mathbb{R}) \to L_2([0,2], \mathbb{R})$ la función

$$F(f) = a + bf + cf^2, \quad \forall f \in L_4([0,2], \mathbb{R}).$$

Aplique la definición $\varepsilon - \delta$ de continuidad para **demostrar** que F es continua en todo punto de $L_4([0,2], \mathbb{R})$.

1. Sean $p, q \in [1, \infty[$ tales que $0 < 1/p + 1/q \leq 1$ y sea

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Muestre que si $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y $g \in \mathcal{L}_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, entonces $fg \in \mathcal{L}_s(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ y

$$\mathcal{N}_s(fg) \leq \mathcal{N}_p(f)\mathcal{N}_q(g).$$

2. Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. **Pruebe** que

$$\lim_{y \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x+y)|\, dx = 0.$$

Sugerencia. Puede suponer que si h es integrable en $\mathbb{R}^n$, entonces $x \mapsto h(x+y)$ es integrable en $\mathbb{R}^n$ y que $\int_{\mathbb{R}^n} h(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} h(x+y)dx$, $\forall y \in \mathbb{R}^n$. También puede suponer toda función continua de soporte compacto en $\mathbb{R}^n$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$.

3. Pruebe primero que $g(x) = \operatorname{sen} x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, pertenece a $\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y **calcule (justificando)** $\mathcal{N}_\infty(g)$. Sea $\Phi : L_1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ el funcional lineal

$$\Phi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx, \quad \forall f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Demuestre que Φ es continuo y que $\|\Phi\| = \mathcal{N}_\infty(g)$.

Sugerencia. Considere el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |g(x)| > \mathcal{N}_\infty(g) - \varepsilon\}$. Aplique Φ a alguna función **integrable** f definida en términos de A y de la función α (donde $\alpha g = |g|$, no necesita especificar a α).

4. Pruebe que si $f \in L_4([0,2],\mathbb{R})$, entonces $a+bf+cf^2 \in L_2([0,2],\mathbb{R})$, donde a, b y c son constantes reales. Sea $F : L_4([0,2],\mathbb{R}) \to L_2([0,2],\mathbb{R})$ la función

$$F(f) = a + bf + cf^2, \quad \forall f \in L_4([0,2],\mathbb{R}).$$

Aplique la definición $\varepsilon - \delta$ de continuidad para **demostrar** que F es continua en todo punto de $L_4([0,2],\mathbb{R})$.