4. Se hará estallar una carga de explosivos en un área de un kilómetro cuadrado. En cada esquina del cuadrado hay un edificio abandonado. Si la carga explota a una distancia menor o igual que $\frac{1}{\sqrt{3}}$km de alguno de los edificios, éste quedará destruido. Supongamos que la carga de explosivos se coloca aleatoriamente en cualquier parte del cuadrado. Calcula la probabilidad de que

   a) Ninguno de los edificios sea destruido.
   b) Sólo un edificio queda destruido.
   c) Más de un edificio queda destruido.
   d) La carga quede exactamente a 0.25km de un edificio particular.

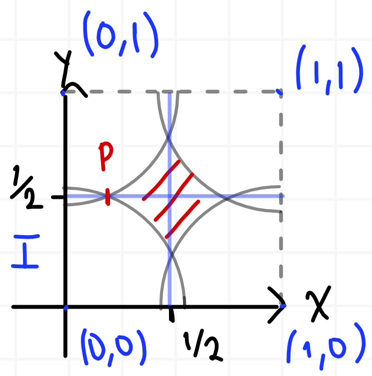
Solución.

Con la situación planteada anteriormente, considere el siguiente espacio muestral: $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y \in [0,1]\}$. Ahora con las probabilidades de cada evento en cada inciso:

a) El evento: "ninguno de los edificios es destruido", está dado por:

$$A = \{(x,y) \in \Omega \mid d((x,y),(0,0)) > \tfrac{1}{\sqrt{3}},\ d((x,y),(0,1)) > \tfrac{1}{\sqrt{3}},\ d((x,y),(1,1)) > \tfrac{1}{\sqrt{3}} \text{ y } d((x,y),(1,0)) > \tfrac{1}{\sqrt{3}}\},$$ donde $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es la métrica usual en $\mathbb{R}^2$.

Con este evento en mente, podemos intuir que la medida de probabilidad a usar más óptima, es la medida geométrica.



El evento A descrito anteriormente, gráficamente se ve como el área de la izquierda en color rojo. Para determinar esta área, es más sencillo determinar la de los circulos circundantes.

Notemos que en el diagrama, basta con determinar el área que ocupa el círculo en la cuadrícula I para obtener el área que ocupan los 4 círculos solapados.

El área que ocupa la circunferencia en la cuadrícula $I = [0, 1/2] \times [0, 1/2]$ está dada por:

$$A_c = \frac{1}{2} \cdot x_0 + \int_{x_0}^{1/2} \sqrt{\tfrac{1}{3} - x^2}\, dx$$

Donde x_0 es el punto de la circunferencia donde $\sqrt{\frac{1}{3}-x_0^2}=\frac{1}{2}$ (En el diagrama, $P=(x_0,\frac{1}{2})$). x_0 es:

$$\sqrt{1/3-x_0^2}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{3}-x_0^2=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x_0=\frac{1}{\sqrt{12}}$$

Luego:

$$A_c=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{12}}+\int_{1/\sqrt{12}}^{1/2}\sqrt{\frac{1}{3}-x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{12}}+\frac{\pi}{36}$$

Con esta información, sabemos entonces que:

$$m(A)=1-4A_c=1-\frac{2}{\sqrt{12}}-\frac{\pi}{9}$$

$$=1-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{9}$$

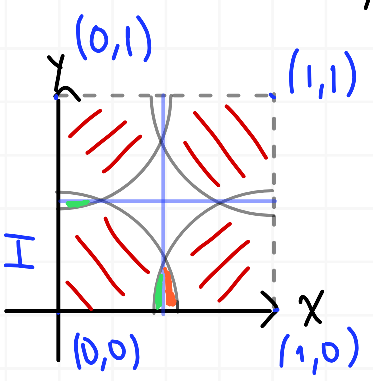
pues $m([0,1]\times[0,1])=1$, donde $m(A)$ y $m([0,1]\times[0,1])$ son las medidas de ambos conjuntos en $\mathbb{R}^2$. De esta forma:

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{9}}{m([0,1]\times[0,1])}=1-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{9}\approx 0.0736$$

$$\Rightarrow a)\ P(A)\approx 0.0736$$

b) Considere el evento B "solo un edificio queda destruido" dado como sigue: $B=\{(x,y)\in\Omega \mid (d((x,y),(0,0))\leq\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $d((x,y),(0,1))>\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $d((x,y),(1,1))>\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $d((x,y),(1,0))>\frac{1}{\sqrt{3}})$ o $(d((x,y),(0,0))>\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $d((x,y),(0,1))\leq\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $d((x,y),(1,1))>\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $d((x,y),(1,0))>\frac{1}{\sqrt{3}})$ o … o $(d((x,y),(0,0))>\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $d((x,y),(0,1))>\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $d((x,y),(1,1))>\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $d((x,y),(1,0))\leq\frac{1}{\sqrt{3}})\}$

Gráficamente, podemos ver el evento B en el siguiente diagrama:



El área en rojo es donde, en caso de colocarse la bomba, la misma terminaría explotando sólo un edificio. Aplicando una estrategia similar a la usada en a), deseamos determinar nuevamente el área roja que ocu-

pu un sólo circulo. Para ello, obtenemos el cuadrante $I=[0,\frac{1}{2}]\times[0,\frac{1}{2}]$.
Queremos ver el área roja, la cuál está dada por:

$$A_r = 4(A_c - 2A_v)$$

Donde A_c es el área que ocupa el circulo en I y A_v es una de las 2 áreas de color verde, la cual está dada por:

$$A_v = \int_{1/2}^{1/\sqrt{3}} \sqrt{\tfrac{1}{3}-x^2}\,dx$$

El área verde es esa, pues notemos que tanto el área verde como la naranja son iguales. Luego:

$$A_v = \frac{\pi}{36} - \frac{\sqrt{3}}{24}$$

Con $A_c = \frac{1}{2\sqrt{12}} + \frac{\pi}{36} = \frac{1}{4\sqrt{3}} + \frac{\pi}{36}$, se tiene que:

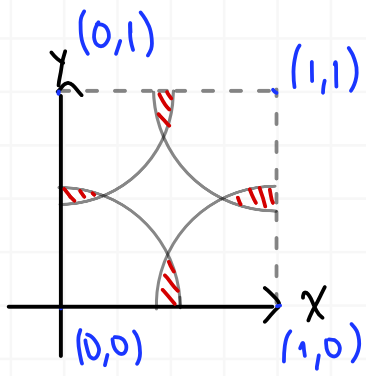
$$\begin{aligned} A_r &= 4\left(\frac{1}{4\sqrt{3}} + \frac{\pi}{36} - 2\left(\frac{\pi}{36} - \frac{\sqrt{3}}{24}\right)\right) \\ &= 4\left(\frac{1}{4\sqrt{3}} + \frac{\pi}{36} - \frac{\pi}{18} + \frac{1}{4\sqrt{3}}\right) \\ &= 4\left(\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{\pi}{36}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{9} \end{aligned}$$

Por tanto, la probabilidad de B será:

$$P(B) = \frac{m(B)}{m(\Omega)} = \frac{A_r}{1} = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{9} \approx 0.806$$

$\Rightarrow$ b) $P(B) \approx 0.806$ //

c) Considere el evento C: "más de un edificio queda destruido". Es complicado escribir este evento en términos de conjuntos, pero visualmente lo podemos observar en el siguiente diagrama:



Anteriormente vimos que, si la bomba es colocada fuera de alguno de los círculos y sus interiores, ningún edificio será destruido. Por el contrario, si es colocada dentro de alguno de los círculos pero no dentro de las áreas rojas que marca el diagrama, solo un edificio será destruido. De esta forma sabemos que si la bomba se coloca en el área roja, entonces más de un edificio será destruido.

Por el inciso b), sabemos que esta área roja está dada por:

$$A_r = 8A_V$$

Donde $A_V = \frac{\pi}{36} - \frac{\sqrt{3}}{24}$, luego:

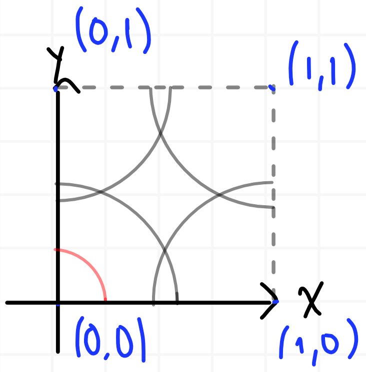
$$\begin{aligned} A_r &= 8\left(\frac{\pi}{36} - \frac{\sqrt{3}}{24}\right) \\ &= \frac{2}{9}\pi - \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$P(C) = \frac{m(C)}{m(\Omega)} = \frac{A_r}{1} = \frac{2}{9}\pi - \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.121$$

$$\Rightarrow c)\ P(C) \approx 0.121$$

d) Considere el evento D "la carga queda a exactamente 0.25 Km de un edificio particular". $D = \{(x,y) \in \Omega \mid d((x,y),(0,0)) = 0.25\}$, donde el edificio particular es el que está en $(0,0)$. Gráficamente vemos a D como el cuarto de circunferencia rojo en el diagrama:



La medida de este conjunto en $\mathbb{R}^2$ es cero, pues es un conjunto de medida cero, luego $m(D) = 0$.

De esta forma:

$$P(D) = \frac{m(D)}{m(\Omega)} = \frac{0}{1} = 0$$

Tomando cualquier otra esquina obtenemos el mismo resultado, pues el conjunto D cambiará solo con rotaciones y traslaciones, dependiendo del punto. De esta forma: $m(D) = 0$ sin importar la esquina elegida. Por tanto:

$$d)\ P(D) = 0$$

8. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad donde $\mathcal{A}$ es el conjunto potencia de Ω y P es una medida de probabilidad que asigna la misma $p > 0$ a cada punto de Ω.

a) Demuestra que Ω debe ser finito.

b) Demuestra que si n es el número de puntos muestrales en Ω, entonces $p = \frac{1}{n}$.

Dem:

a)

Suponga que Ω no es finito, entonces $\Omega = \{\omega_\alpha \mid \alpha \in I\}$ donde I es un conjunto infinito de índices α, y $\omega_\alpha \neq \omega_{\alpha'}$ si $\alpha \neq \alpha'$, con $\alpha, \alpha' \in I$. Como I es infinito entonces existe un subconjunto J de I numerable, digamos $J = \{\alpha(1), \alpha(2), \ldots\}$ donde $\alpha(i) \in I$ y $\alpha(i) \neq \alpha(j)$, $\forall\, i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$. Sea:

$$\mathcal{B} = \{\{\omega_{\alpha(i)}\} \mid i \in \mathbb{N}\}$$

Claramente $\mathcal{B}$ es una familia numerable de eventos de $\mathcal{A}$, pues $\{\omega_{\alpha(i)}\} \in \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\forall\, i \in \mathbb{N}$. Además $\{\omega_{\alpha(i)}\} \cap \{\omega_{\alpha(j)}\} = \emptyset$ si $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{N}$, i.e $\mathcal{B}$ es una familia numerable de eventos ajenos a pares de $\mathcal{A}$. Luego por ser P una medida de probabilidad:

$$P\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{\omega_{\alpha(i)}\}\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} P(\{\omega_{\alpha(i)}\}), \text{ pero } P(\{\omega_{\alpha(i)}\}) = p > 0 \quad \forall\, i \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow \sum_{i \in \mathbb{N}} P(\{\omega_{\alpha(i)}\}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} p$$

Como $\sum_{i \in \mathbb{N}} p$ converge a $+\infty$, pues $p > 0$, se sigue que $P\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{\omega_{\alpha(i)}\}\right) > 1$ #c.

Por tanto, Ω debe ser finito.

q.e.d.

b)

Suponga que Ω tiene n puntos muestrales, entonces $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, donde $\omega_i \neq \omega_j$ si $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$. Sea $\Upsilon = \{\{\omega_i\} \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$.

γ' es una familia finita de eventos ajenos en $\mathcal{A}$, pues $\{\omega_i\} \cap \{\omega_j\} = \phi$ si $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Luego, por una proposición:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{\omega_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} P(\{\omega_i\}) = \sum_{i=1}^{n} p = pn$$

Pero, notemos que:

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \{\omega_i\}$$

$$\Rightarrow 1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{\omega_i\}\right)$$

$$\Rightarrow 1 = pn$$

$$\Rightarrow p = 1/n$$

q.e.d.

12. Considera $\Omega = (0,1)$ con la $\sigma-$álgebra de Borel (investiga qué tipo de subconjuntos de Ω la componen). Demuestra que las siguientes son medidas de probabilidad.

   a) $P(A) = \int_A 2x dx$
   b) $P(A) = \int_A \frac{3}{2}\sqrt{x} dx$.

Demostración:

Los conjuntos en la σ-álgebra de Borel con $\Omega=(0,1)$ son: (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$ si $a<b$ y $[a,b]$ si $a\leq b$, con $a,b\in(0,1)$ (Si a ó b son extremos abiertos, entonces a y b pueden ser 0 y 1), ó la unión de este tipo de conjuntos

Para demostrar el caso de (ii) ($P(A)\geq 0$ $\forall A\in \mathcal{B}((0,1))$), podemos considerar que A es un intervalo (ó un punto) sin pérdida de generalidad, pues al integrar una función f: $\int_A f = \sum_{\alpha\in I}\int_{A_\alpha} f$, donde $A=\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ y $A_\alpha\in\mathcal{B}(0,1)$ $\forall \alpha\in I$, donde A_α es un intervalo, y $A_\alpha\cap A_\beta=\emptyset$ si $\alpha\neq\beta$, con $A\in\mathcal{B}(0,1)$. De esta forma $\int_A f\geq\int_{A_\alpha} f$ para algún $\alpha\in I$. Así, hasta probar el resultado cuando A es un intervalo de cualquier tipo.

a) Probaremos que P es medida de probabilidad.

i) Veamos que:

$$P(\Omega)=\int_{(0,1)} 2x dx = 2\int_0^1 x dx = 2\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2\cdot\left[\frac{1}{2}-0\right]=1$$

$$\therefore P(\Omega)=1$$

ii) Sea $A\in\mathcal{B}(0,1)$, A un intervalo con extremos a y b. Entonces:

$$P(A)=\int_A 2x dx = \int_a^b 2x dx = 2\int_a^b x dx = x^2\Big|_a^b = b^2-a^2$$

Como $0\leq a\leq b\leq 1$, entonces $a^2\leq b^2 \Rightarrow 0\leq b^2-a^2$, así:

$$P(A)\geq 0$$

iii) Sea $A_1, A_2,\ldots$ una colección numerable de eventos ajenos de $\mathcal{B}((0,1))$, entonces:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \int_{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i} 2x dx = \int_{A_1} 2x dx + \int_{A_2} 2x dx + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Pues $\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f$ si $A \cap B = \emptyset$, luego se cumple lo anterior.
Por (i), (ii) y (iii), P es una medida de probabilidad.

q.e.d.

b) Probaremos que P es una medida de probabilidad.

i) Veamos que:

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= \int_\Omega \frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx \\ &= \frac{3}{2}\int_0^1 \sqrt{x}\,dx \\ &= \frac{3}{2}\cdot\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 \\ &= 1^{3/2} - 0^{3/2} = 1 \end{aligned}$$

ii) Sea $A \in \mathcal{B}((0,1))$, donde A es un intervalo con extremos a y b tales que $a \leqslant b$. Entonces:

$$\begin{aligned} P(A) &= \int_A \frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx \\ &= \frac{3}{2}\int_a^b \sqrt{x}\,dx \\ &= \frac{3}{2}\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_a^b \\ &= b^{3/2} - a^{3/2} \end{aligned}$$

Como $a \leqslant b$ y $0 \leqslant a, b$, entonces $a^{3/2} \leqslant b^{3/2}$, luego $P(A) = b^{3/2} - a^{3/2} \geqslant 0$.

(iii) Sea $A_1, A_2, \ldots$ una colección numerable de eventos ajenos en $\mathcal{B}((0,1))$. Entonces:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} \frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx \\ &= \int_{A_1} \frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx + \int_{A_2} \frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx + \ldots \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \end{aligned}$$

Por tanto, por (i), (ii) y (iii), P es una medida de probabilidad.

q.e.d.