

# Ejercicios Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

13 de octubre de 2024

# Índice general

<b>1. Espacios Hilbertianos</b>	<b>2</b>
1.1. Ejercicios . . . . .	2

# Capítulo 1

## Espacios Hilbertianos

### 1.1. Ejercicios

#### Ejercicio 1.1.1

Pruebe lo siguiente:

- I. Sean  $H, H'$  espacios hilbertianos y sea  $T$  una aplicación lineal continua de  $H$  en  $H'$ . **Demuestre** que existe una única aplicación lineal  $\tilde{T} : H' \rightarrow H$  tal que

$$(\vec{x}|\tilde{T}\vec{x}') = (T\vec{x}|\vec{x}'), \quad \forall \vec{x} \in H \text{ y } \forall \vec{x}' \in H'$$

**Pruebe** también que  $\tilde{T}$  es continua,  $\tilde{\tilde{T}} = T$  y  $\|\tilde{T}\| = \|T\|$ . El operador  $\tilde{T}$  se llama la **adjunta de  $T$** .

- II. **Demuestre** las reglas:

$$\widetilde{T_1 + T_2} = \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 \quad \text{y} \quad \widetilde{\alpha T} = \bar{\alpha} \tilde{T}$$

- III. Sea  $H''$  un tercer espacio hilbertiano. Sean  $T$  una aplicación lineal continua de  $H$  en  $H'$  y  $U$  una aplicación lineal continua de  $H'$  en  $H''$ . **Pruebe** que:

$$\widetilde{U \circ T} = \tilde{T} \circ \tilde{U}$$

#### Demostración:

De (i): Se probarán dos cosas:

- **Unicidad.** Suponga que existen  $S, W : H' \rightarrow H$  tales que:

$$(\vec{x}|S\vec{x}') = (T\vec{x}|\vec{x}') \quad \text{y} \quad (\vec{x}|W\vec{x}') = (T\vec{x}|\vec{x}'), \quad \forall \vec{x} \text{ y } \vec{x}' \in H'$$

entonces, se tiene que para  $\vec{x}' \in H'$  fijo:

$$\begin{aligned} (\vec{x}|S\vec{x}') &= (\vec{x}|W\vec{x}') \\ \Rightarrow (\vec{x}|S\vec{x}') - (\vec{x}|W\vec{x}') &= 0 \\ \Rightarrow (\vec{x}|S\vec{x}' - W\vec{x}') &= 0 \forall \vec{x} \in H \end{aligned} \tag{1.1}$$

Por tanto,  $S\vec{x}' = W\vec{x}'$ . Como el  $\vec{x}' \in H'$  fue arbitrario, se sigue que  $S = W$ .

- **Existencia.** Para cada  $\vec{x}' \in H'$ , sea  $L_{\vec{x}'} : H \rightarrow \mathbb{K}$  definida como sigue:

$$L_{\vec{x}'}(\vec{x}) = (T\vec{x}|\vec{x}')$$

Afirmamos que  $L_{\vec{x}}$  es lineal continuo. En efecto, si  $\vec{x}, \vec{y} \in H$  y  $\alpha \in \mathbb{K}$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} L_{\vec{x}}(\vec{x} + \alpha\vec{y}) &= (T(\vec{x} + \alpha\vec{y})|\vec{x}') \\ &= (T\vec{x}|\vec{x}') + \alpha (T\vec{y}|\vec{x}') \\ &= L_{\vec{x}}(\vec{x}) + \alpha L_{\vec{x}}(\vec{y}) \end{aligned}$$

luego es lineal, y es continuo ya que

$$\begin{aligned} |L_{\vec{x}}(\vec{x}')| &= |(T\vec{x}|\vec{x}')| \\ &\leq \|T\vec{x}\| \|\vec{x}'\| \\ &\leq (\|T\| \|\vec{x}\|) \|\vec{x}'\| \end{aligned}$$

donde la primera desigualdad es por Cauchy-Schwartz, y la segunda es por el hecho de que  $T$  es un funcional lineal continuo. Por tanto:  $\|L_{\vec{x}}\| \leq \|T\| \|\vec{x}\|$ . Luego,  $L_{\vec{x}}$  es lineal continuo, i.e.  $L_{\vec{x}} \in H^*$ .

Por el teorema de Riesz, como la aplicación  $G : H \rightarrow H^*$  es suprayectiva, para  $\vec{x}' \in H'$  existe  $\tilde{T}\vec{x}' \in H$  tal que  $L_{\vec{x}'} = G_{\tilde{T}\vec{x}'}$ , es decir que:

$$L_{\vec{x}'}\vec{x} = (T\vec{x}|\vec{x}') = (\vec{x}|\tilde{T}\vec{x}') = G_{\tilde{T}\vec{x}'}\vec{x}, \quad \forall \vec{x} \in H$$

Afirmamos que la aplicación  $\tilde{T} : H' \rightarrow H$  está bien definida y es lineal. En efecto, si  $\tilde{T}\vec{x}'_1, \tilde{T}\vec{x}'_2 \in H$  son tales que  $L_{\vec{x}'} = G_{\tilde{T}\vec{x}'_1}$  y  $L_{\vec{x}} = G_{\tilde{T}\vec{x}'_2}$ , entonces:

$$(T\vec{x}|\vec{x}') = (\vec{x}|\tilde{T}\vec{x}'_1) \quad \text{y} \quad (T\vec{x}|\vec{x}') = (\vec{x}|\tilde{T}\vec{x}'_2), \quad \forall \vec{x} \in H$$

entonces:

$$\begin{aligned} (\vec{x}|\tilde{T}\vec{x}'_1) &= (\vec{x}|\tilde{T}\vec{x}'_2), \quad \forall \vec{x} \in H \\ \Rightarrow (\vec{x}|\tilde{T}\vec{x}'_1 - \tilde{T}\vec{x}'_2) &= 0 \quad \forall \vec{x} \in H \\ \Rightarrow \tilde{T}\vec{x}'_1 - \tilde{T}\vec{x}'_2 &= \vec{0} \\ \Rightarrow \tilde{T}\vec{x}'_1 &= \tilde{T}\vec{x}'_2 \end{aligned}$$

por tanto,  $\tilde{T} : H' \rightarrow H$  está bien definida. Comprobemos ahora la linealidad, sean  $\vec{x}', \vec{y}' \in H'$ , entonces:

$$\begin{aligned} (T\vec{x}|\vec{x}') &= (\vec{x}|\tilde{T}\vec{x}'), (T\vec{x}|\vec{y}') = (\vec{x}|\tilde{T}\vec{y}') \quad \text{y} \quad (T\vec{x}|\vec{x}' + \vec{y}') = (\vec{x}|\tilde{T}(\vec{x}' + \vec{y}')) \quad \forall \vec{x} \in H \\ \Rightarrow (T\vec{x}|\vec{x}') + (T\vec{x}|\vec{y}') &= (\vec{x}|\tilde{T}\vec{x}') + (\vec{x}|\tilde{T}\vec{y}') \quad \text{y} \quad (T\vec{x}|\vec{x}' + \vec{y}') = (\vec{x}|\tilde{T}(\vec{x}' + \vec{y}')) \quad \forall \vec{x} \in H \\ \Rightarrow (T\vec{x}|\vec{x}' + \vec{y}') &= (\vec{x}|\tilde{T}\vec{x}' + \tilde{T}\vec{y}') \quad \text{y} \quad (T\vec{x}|\vec{x}' + \vec{y}') = (\vec{x}|\tilde{T}(\vec{x}' + \vec{y}')) \quad \forall \vec{x} \in H \\ \Rightarrow (\vec{x}|\tilde{T}\vec{x}' + \tilde{T}\vec{y}') &= (\vec{x}|\tilde{T}(\vec{x}' + \vec{y}')) \quad \forall \vec{x} \in H \\ \Rightarrow (\vec{x}|\tilde{T}\vec{x}' + \tilde{T}\vec{y}' - \tilde{T}(\vec{x}' + \vec{y}')) &= 0 \quad \forall \vec{x} \in H \\ \Rightarrow (\tilde{T}\vec{x}' + \tilde{T}\vec{y}' - \tilde{T}(\vec{x}' + \vec{y}')) &= \vec{0} \\ \Rightarrow \tilde{T}\vec{x}' + \tilde{T}\vec{y}' &= \tilde{T}(\vec{x}' + \vec{y}') \end{aligned}$$

y, si  $\alpha \in \mathbb{K}$ , tenemos que:

$$\begin{aligned}
& (T\vec{x}|\alpha\vec{x}') = (\vec{x}|\tilde{T}(\alpha\vec{x}')) \text{ y } (T\vec{x}|\vec{x}') = (\vec{x}|\tilde{T}\vec{x}') \quad \forall \vec{x} \in H \\
& \Rightarrow \bar{\alpha} (T\vec{x}|\vec{x}') = (\vec{x}|\tilde{T}(\alpha\vec{x}')) \text{ y } \bar{\alpha} (T\vec{x}|\vec{x}') = \bar{\alpha} (\vec{x}|\tilde{T}\vec{x}') \quad \forall \vec{x} \in H \\
& \Rightarrow \bar{\alpha} (T\vec{x}|\vec{x}') = (\vec{x}|\tilde{T}(\alpha\vec{x}')) \text{ y } \bar{\alpha} (T\vec{x}|\vec{x}') = (\vec{x}|\alpha\tilde{T}\vec{x}') \quad \forall \vec{x} \in H \\
& \Rightarrow (\vec{x}|\tilde{T}(\alpha\vec{x}')) = (\vec{x}|\alpha\tilde{T}\vec{x}') \quad \forall \vec{x} \in H \\
& \Rightarrow (\vec{x}|\tilde{T}(\alpha\vec{x}')) - (\vec{x}|\alpha\tilde{T}\vec{x}') = 0 \quad \forall \vec{x} \in H \\
& \Rightarrow (\vec{x}|\tilde{T}(\alpha\vec{x}') - \alpha\tilde{T}\vec{x}') = 0 \quad \forall \vec{x} \in H \\
& \Rightarrow \tilde{T}(\alpha\vec{x}') - \alpha\tilde{T}\vec{x}' = \vec{0} \\
& \Rightarrow \tilde{T}(\alpha\vec{x}') = \alpha\tilde{T}\vec{x}'
\end{aligned}$$

por tanto  $\tilde{T}$  es lineal. Además, se cumple para todos  $\vec{x} \in H$  y  $\vec{x}' \in H'$  que:

$$(T\vec{x}|\vec{x}') = (\vec{x}|\tilde{T}\vec{x}')$$

Veamos ahora que es continua, en efecto, por Cauchy-Schwartz se tiene que para todo  $\vec{x}' \in H' \setminus \{\vec{0}\}$ :

$$\begin{aligned}
\|\tilde{T}\vec{x}'\|^2 &= (\tilde{T}\vec{x}'|\tilde{T}\vec{x}') \\
&= (T(\tilde{T}\vec{x}')|\vec{x}') \\
&\leq |(T(\tilde{T}\vec{x}')|\vec{x}')| \\
&\leq \|T(\tilde{T}\vec{x}')\| \|\vec{x}'\| \\
&\leq \|T\| \|\tilde{T}\vec{x}'\| \|\vec{x}'\|
\end{aligned}$$

si  $\vec{x}' \in \ker \tilde{T}$  es claro que

$$0 = \|\tilde{T}\vec{x}'\| \leq \|T\| \|\vec{x}'\|$$

y, en caso de que no esté, por la ecuación anterior se sigue que:

$$\Rightarrow \|\tilde{T}\vec{x}'\| \leq \|T\| \|\vec{x}'\|$$

En cuyo caso se sigue que  $\tilde{T}$  es continua y tal que  $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$ . Para ver la igualdad se intercambian los papeles de  $T$  y  $\tilde{T}$  en las desigualdades anteriores, con lo que se obtiene que  $\|T\| \leq \|\tilde{T}\|$ .

Y, para ver que  $\tilde{\tilde{T}}$ , notemos que para todo  $\vec{x} \in H$  y  $\vec{x}' \in H'$

$$(\tilde{\tilde{T}}\vec{x}|\vec{x}') = (\vec{x}|\tilde{T}\vec{x}') = (T\vec{x}|\vec{x}')$$

por ende

$$(\tilde{\tilde{T}}\vec{x}|\vec{x}') = (T\vec{x}|\vec{x}')$$

pero, por unicidad de la adjunta debe suceder que  $\tilde{\tilde{T}} = T$ .

De (ii): Probaremos las dos igualdades.

I.  $\widetilde{T_1 + T_2} = \widetilde{T_1} + \widetilde{T_2}$ . Tenemos que:

$$\left(\vec{x}|\widetilde{T_1}\vec{x}'\right) = \left(T_1\vec{x}|\vec{x}'\right) \quad \text{y} \quad \left(\vec{x}|\widetilde{T_2}\vec{x}'\right) = \left(T_2\vec{x}|\vec{x}'\right), \quad \forall \vec{x} \in H, \vec{x}' \in H'$$

por tanto

$$\begin{aligned} \left(\vec{x}|\widetilde{T_1}\vec{x}'\right) + \left(\vec{x}|\widetilde{T_2}\vec{x}'\right) &= \left(T_1\vec{x}|\vec{x}'\right) + \left(T_2\vec{x}|\vec{x}'\right) \quad \forall \vec{x} \in H, \vec{x}' \in H' \\ \Rightarrow \left(\vec{x}|\widetilde{T_1}\vec{x}' + \widetilde{T_2}\vec{x}'\right) &= \left(T_1\vec{x} + T_2\vec{x}|\vec{x}'\right) \quad \forall \vec{x} \in H, \vec{x}' \in H' \\ \Rightarrow \left(\vec{x}|\widetilde{(T_1 + T_2)}\vec{x}'\right) &= \left((T_1 + T_2)\vec{x}|\vec{x}'\right) \quad \forall \vec{x} \in H, \vec{x}' \in H' \end{aligned}$$

de la unicidad de la adjunta, se sigue que  $\widetilde{T_1 + T_2} = \widetilde{T_1} + \widetilde{T_2}$ .

II.  $\widetilde{\alpha T} = \overline{\alpha} \widetilde{T}$ . Es similar al caso anterior.

De los dos incisos anteriores se sigue el resultado.

De (iii): Se tiene que:

$$\left(\vec{x}|\widetilde{T}\vec{x}'\right) = \left(T\vec{x}|\vec{x}'\right) \quad \text{y} \quad \left(\vec{x}'|\widetilde{U}\vec{x}''\right) = \left(U\vec{x}'|\vec{x}''\right), \quad \forall \vec{x} \in H, \vec{x}' \in H', \vec{x}'' \in H''$$

debemos probar que:

$$\left(\vec{x}|\widetilde{(T \circ U)}\vec{x}''\right) = \left((U \circ T)\vec{x}|\vec{x}''\right) \quad \forall \vec{x} \in H, \vec{x}'' \in H''$$

para usar la unicidad y de forma inmediata deducir el resultado. Sean  $\vec{x} \in H$  y  $\vec{x}'' \in H''$ . Como  $\widetilde{U}\vec{x}''T\vec{x} \in H'$ , tenemos que:

$$\left(\vec{x}|\widetilde{T}(\widetilde{U}\vec{x}'')\right) = \left(T\vec{x}|\widetilde{U}\vec{x}''\right) \quad \text{y} \quad \left(T\vec{x}|\widetilde{U}\vec{x}''\right) = \left(U(T\vec{x})|\vec{x}''\right)$$

por tanto:

$$\begin{aligned} \left(\vec{x}|\widetilde{T}(\widetilde{U}\vec{x}'')\right) &= \left(U(T\vec{x})|\vec{x}''\right) \\ \Rightarrow \left(\vec{x}|\widetilde{(T \circ U)}\vec{x}''\right) &= \left((U \circ T)\vec{x}|\vec{x}''\right) \end{aligned}$$

lo cual prueba el resultado al ser los vectores arbitrarios. ■

### Ejercicio 1.1.2

Sea  $H$  un espacio hilbertiano complejo. A toda aplicación lineal continua  $T$  de  $H$  en  $H$  se le asocia la aplicación  $Q_T : H \rightarrow \mathbb{C}$  (llamada **forma hermitiana**) definida por:

$$Q_T(\vec{x}) = (T\vec{x}|\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in H$$

Haga lo siguiente:

I. **Establezca** la fórmula:

$$(T\vec{x}|\vec{y}) = \frac{1}{4} [Q_T(\vec{x} + \vec{y}) - Q_T(\vec{x} - \vec{y}) + iQ_T(\vec{x} + i\vec{y}) - iQ_T(\vec{x} - i\vec{y})]$$

II. **Muestre** que

$$Q_{\widetilde{T}}(\vec{x}) = \overline{Q_T(\vec{x})}, \quad \forall \vec{x} \in H$$

y que  $Q_T(\vec{x})$  es real,  $\forall \vec{x} \in H$ , si y sólo si  $T$  es autoadjunto (es decir, que  $T = \widetilde{T}$ ).

**Solución:**

Establezcamos ambos incisos:

De (i): Sean  $\vec{x}, \vec{y} \in H$ . Tenemos que:

$$\begin{aligned}
 Q_T(\vec{x} + \vec{y}) &= (T(\vec{x} + \vec{y})|\vec{x} + \vec{y}) \\
 &= (T(\vec{x}) + T(\vec{y})|\vec{x} + \vec{y}) \\
 &= (T(\vec{x}) + T(\vec{y})|\vec{x}) + (T(\vec{x}) + T(\vec{y})|\vec{y}) \\
 &= (T(\vec{x})|\vec{x}) + (T(\vec{y})|\vec{x}) + (T(\vec{x})|\vec{y}) + (T(\vec{y})|\vec{y}) \\
 &= Q_T(\vec{x}) + (T(\vec{y})|\vec{x}) + (T(\vec{x})|\vec{y}) + Q_T(\vec{y})
 \end{aligned}$$

por lo cual,

$$\begin{aligned}
 Q_T(\vec{x} - \vec{y}) &= Q_T(\vec{x}) + (T(-\vec{y})|\vec{x}) + (T(\vec{x})|-\vec{y}) + Q_T(-\vec{y}) \\
 &= Q_T(\vec{x}) - (T(\vec{y})|\vec{x}) - (T(\vec{x})|\vec{y}) + Q_T(\vec{y})
 \end{aligned}$$

Luego:

$$Q_T(\vec{x} + \vec{y}) - Q_T(\vec{x} - \vec{y}) = 2((T(\vec{y})|\vec{x}) + (T(\vec{x})|\vec{y}))$$

y, por ende:

$$\begin{aligned}
 iQ_T(\vec{x} + i\vec{y}) - iQ_T(\vec{x} - i\vec{y}) &= 2i((T(i\vec{y})|\vec{x}) + (T(\vec{x})|i\vec{y})) \\
 &= 2i(i(T(\vec{y})|\vec{x}) - i(T(\vec{x})|\vec{y})) \\
 &= 2(-(T(\vec{y})|\vec{x}) + (T(\vec{x})|\vec{y}))
 \end{aligned}$$

Finalmente, se sigue que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4}[Q_T(\vec{x} + \vec{y}) - Q_T(\vec{x} - \vec{y}) + iQ_T(\vec{x} + i\vec{y}) - iQ_T(\vec{x} - i\vec{y})] &= \frac{1}{4}[4(T(\vec{x})|\vec{y})] \\
 &= (T(\vec{x})|\vec{y})
 \end{aligned}$$

lo cual establece la fórmula.

De (ii): Sea  $\vec{x} \in H$ , entonces:

$$\begin{aligned}
 Q_{\tilde{T}}(\vec{x}) &= (\tilde{T}\vec{x}|\vec{x}) \\
 &= (\tilde{T}\vec{x}|\vec{x}) \\
 &= \overline{(\vec{x}|\tilde{T}\vec{x})} \\
 &= \overline{(T\vec{x}|\vec{x})} \\
 &= \overline{Q_T(\vec{x})}
 \end{aligned}$$

Para la otra parte, veamos que:

$$\begin{aligned}
 Q_T(\vec{x}) \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in H &\iff Q_T(\vec{x}) = \overline{Q_T(\vec{x})}, \forall \vec{x} \in H \\
 &\iff Q_T(\vec{x}) = Q_{\tilde{T}}(\vec{x}), \forall \vec{x} \in H \\
 &\iff (T\vec{x}|\vec{x}) = (\tilde{T}\vec{x}|\vec{x}), \forall \vec{x} \in H \\
 &\iff (T\vec{x}|\vec{x}) - (\tilde{T}\vec{x}|\vec{x}) = 0, \forall \vec{x} \in H \\
 &\iff (T\vec{x} - \tilde{T}\vec{x}|\vec{x}) = 0, \forall \vec{x} \in H \\
 &\iff ([T - \tilde{T}]\vec{x}|\vec{x}) = 0, \forall \vec{x} \in H
 \end{aligned}$$

Veamos que  $\left(\left[T - \tilde{T}\right] \vec{x} | \vec{x}\right) = 0, \forall \vec{x} \in H$  si y sólo si  $T = \tilde{T}$ .

$\Rightarrow$ ) Suponga que  $\left(\left[T - \tilde{T}\right] \vec{x} | \vec{x}\right) = 0, \forall \vec{x} \in H$ . Esto es inmediato, pues se tiene que:  $Q_{T-\tilde{T}}(\vec{x}) = 0$ , para todo  $\vec{x} \in H$ , luego

$$\left(\left[T - \tilde{T}\right] \vec{x} | \vec{y}\right) = 0, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in H$$

en particular para  $\vec{x}$  fijo,  $\left(\left[T - \tilde{T}\right] \vec{x} | \vec{y}\right) = 0$  para todo  $\vec{y} \in H$ , luego  $\left[T - \tilde{T}\right] \vec{x} = \vec{0}$ . Como fue arbitrario se sigue entonces que  $T = \tilde{T}$ .

$\Leftarrow$ ) Suponga que  $T = \tilde{T}$ . De forma inmediata se sigue que  $\left(\left[T - \tilde{T}\right] \vec{x} | \vec{x}\right) = 0, \forall \vec{x} \in H$ . □

### Ejercicio 1.1.3

Sea  $A$  un endomorfismo lineal continuo de un espacio prehilbertiano  $H$ . Defina  $Q_A : H \rightarrow \mathbb{K}$  como:

$$Q_A(\vec{x}) = (A\vec{x} | \vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in H$$

Sea

$$\alpha = \sup \left\{ \frac{|Q_A(\vec{x})|}{\|\vec{x}\|^2} \mid \vec{x} \in H, \vec{x} \neq \vec{0} \right\}$$

I. **Pruebe** que  $\alpha \leq \|A\|$ .

II. Al suponer  $A$  autoadjunto, **demuestre** la igualdad opuesta. Luego, si  $A$  es autoadjunto se tiene que

$$\|A\| = \sup \left\{ \frac{|Q_A(\vec{x})|}{\|\vec{x}\|^2} \mid \vec{x} \in H, \vec{x} \neq \vec{0} \right\}$$

*Indicación.* Compruebe que  $\forall \vec{x} \in H$  y  $\forall \lambda > 0$ ,

$$(A\vec{x} | A\vec{x}) = \frac{1}{4} (Q_A(\lambda\vec{x} + \lambda^{-1}A\vec{x}) - Q_A(\lambda\vec{x} - \lambda^{-1}A\vec{x}))$$

de ahí obtenga que  $\|A\vec{x}\|^2 \leq \frac{\alpha}{2} (\lambda^2 \|\vec{x}\|^2 + \frac{1}{\lambda^2} \|A\vec{x}\|^2)$  y elija  $\lambda$  convenientemente.

### Demostración:

Demostremos cada inciso.

De (i): Basta con ver que  $\|A\|$  es cota superior del conjunto al que se le quiere sacar el supremo. Para ello, notemos que al ser  $A$  lineal continuo, se tiene que:

$$|(A\vec{x} | \vec{x})| \leq \|A\vec{x}\| \|\vec{x}\| \leq \|A\| \|\vec{x}\|^2$$

para todo  $\vec{x} \in H$ . En particular, para  $\vec{x} \neq \vec{0}$  se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{|(A\vec{x} | \vec{x})|}{\|\vec{x}\|^2} &\leq \|A\| \\ \Rightarrow \frac{|Q_A(\vec{x})|}{\|\vec{x}\|^2} &\leq \|A\| \end{aligned}$$

luego,  $\|A\|$  es cota superior del conjunto. Por tanto  $\alpha \leq \|A\|$ .

De (ii): Suponga que  $A$  es autoadjunto. Sean  $\vec{x} \in H$  y  $\lambda > 0$ . Entonces:

$$\begin{aligned} Q_A(\lambda\vec{x} + \lambda^{-1}A\vec{x}) &= (A(\lambda\vec{x} + \lambda^{-1}A\vec{x}) | \lambda\vec{x} + \lambda^{-1}A\vec{x}) \\ &= (\lambda A\vec{x} + \lambda^{-1}(A \circ A)\vec{x} | \lambda\vec{x} + \lambda^{-1}A\vec{x}) \\ &= (\lambda A\vec{x} + \lambda^{-1}(A \circ A)\vec{x} | \lambda\vec{x}) + (\lambda A\vec{x} + \lambda^{-1}(A \circ A)\vec{x} | \lambda^{-1}A\vec{x}) \\ &= (\lambda A\vec{x} | \lambda\vec{x}) + (\lambda^{-1}(A \circ A)\vec{x} | \lambda\vec{x}) + (\lambda A\vec{x} | \lambda^{-1}A\vec{x}) + (\lambda^{-1}(A \circ A)\vec{x} | \lambda^{-1}A\vec{x}) \end{aligned}$$



y

$$\begin{aligned}
Q_A(\lambda\vec{x} - \lambda^{-1}A\vec{x}) &= (A(\lambda\vec{x} - \lambda^{-1}A\vec{x})|\lambda\vec{x} - \lambda^{-1}A\vec{x}) \\
&= (\lambda A\vec{x} - \lambda^{-1}(A \circ A)\vec{x}|\lambda\vec{x} - \lambda^{-1}A\vec{x}) \\
&= (\lambda A\vec{x} - \lambda^{-1}(A \circ A)\vec{x}|\lambda\vec{x}) - (\lambda A\vec{x} - \lambda^{-1}(A \circ A)\vec{x}|\lambda^{-1}A\vec{x}) \\
&= (\lambda A\vec{x}|\lambda\vec{x}) - (\lambda^{-1}(A \circ A)\vec{x}|\lambda\vec{x}) - (\lambda A\vec{x}|\lambda^{-1}A\vec{x}) + (\lambda^{-1}(A \circ A)\vec{x}|\lambda^{-1}A\vec{x})
\end{aligned}$$

por tanto:

$$\begin{aligned}
Q_A(\lambda\vec{x} + \lambda^{-1}A\vec{x}) - Q_A(\lambda\vec{x} - \lambda^{-1}A\vec{x}) &= 2((\lambda^{-1}(A \circ A)\vec{x}|\lambda\vec{x}) + (\lambda A\vec{x}|\lambda^{-1}A\vec{x})) \\
&= 2(((A \circ A)\vec{x}|\vec{x}) + (A\vec{x}|A\vec{x})) \\
&= 2((A\vec{x}|A\vec{x}) + (A\vec{x}|A\vec{x})) \\
&= 4(A\vec{x}|A\vec{x})
\end{aligned}$$

pues,  $A$  es autoadjunto. Luego:

$$(A\vec{x}|A\vec{x}) = \frac{1}{4}(Q_A(\lambda\vec{x} + \lambda^{-1}A\vec{x}) - Q_A(\lambda\vec{x} - \lambda^{-1}A\vec{x}))$$

por tanto:

$$\begin{aligned}
\|A\vec{x}\|^2 &= \frac{1}{4}|Q_A(\lambda\vec{x} + \lambda^{-1}A\vec{x}) - Q_A(\lambda\vec{x} - \lambda^{-1}A\vec{x})| \\
&\leq \frac{1}{4}(|Q_A(\lambda\vec{x} + \lambda^{-1}A\vec{x})| + |Q_A(\lambda\vec{x} - \lambda^{-1}A\vec{x})|) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\|\lambda\vec{x} + \lambda^{-1}A\vec{x}\|^2}{\|\lambda\vec{x} + \lambda^{-1}A\vec{x}\|^2}|Q_A(\lambda\vec{x} + \lambda^{-1}A\vec{x})| + \frac{\|\lambda\vec{x} - \lambda^{-1}A\vec{x}\|^2}{\|\lambda\vec{x} - \lambda^{-1}A\vec{x}\|^2}|Q_A(\lambda\vec{x} - \lambda^{-1}A\vec{x})|\right) \\
&\leq \frac{1}{4}(\alpha\|\lambda\vec{x} + \lambda^{-1}A\vec{x}\|^2 + \alpha\|\lambda\vec{x} - \lambda^{-1}A\vec{x}\|^2) \\
&= \frac{\alpha}{4}((\lambda\vec{x} + \lambda^{-1}A\vec{x}|\lambda\vec{x} + \lambda^{-1}A\vec{x}) + (\lambda\vec{x} - \lambda^{-1}A\vec{x}|\lambda\vec{x} - \lambda^{-1}A\vec{x})) \\
&= \frac{\alpha}{4}((\lambda\vec{x} + \lambda^{-1}A\vec{x}|\lambda\vec{x}) + (\lambda\vec{x} + \lambda^{-1}A\vec{x}|\lambda^{-1}A\vec{x}) + (\lambda\vec{x} - \lambda^{-1}A\vec{x}|\lambda\vec{x}) - (\lambda\vec{x} - \lambda^{-1}A\vec{x}|\lambda^{-1}A\vec{x})) \\
&= \frac{\alpha}{4}(\lambda^2(\vec{x}|\vec{x}) + (A\vec{x}|\vec{x}) + (\vec{x}|A\vec{x}) + \lambda^{-2}(A\vec{x}|A\vec{x}) + \lambda^2(\vec{x}|\vec{x}) - (A\vec{x}|\vec{x}) - (\vec{x}|A\vec{x}) + \lambda^{-2}(A\vec{x}|A\vec{x})) \\
&= \frac{\alpha}{2}(\lambda^2(\vec{x}|\vec{x}) + \lambda^{-2}(A\vec{x}|A\vec{x})) \\
&= \frac{\alpha}{2}(\lambda^2\|\vec{x}\|^2 + \lambda^{-2}\|A\vec{x}\|^2)
\end{aligned}$$

por Cauchy-Schwartz y usando la definición de  $\alpha$ . Por tanto, si consideramos que  $\alpha > 0$ :

$$\begin{aligned}
\|A\vec{x}\|^2 &\leq \frac{\alpha}{2}(\lambda^2\|\vec{x}\|^2 + \lambda^{-2}\|A\vec{x}\|^2) \\
\Rightarrow \left(1 - \frac{\alpha}{2\lambda^2}\right)\|A\vec{x}\|^2 &\leq \frac{\alpha\lambda^2}{2}\|\vec{x}\|^2 \\
\Rightarrow \frac{2\lambda^2 - \alpha}{2\lambda^2}\|A\vec{x}\|^2 &\leq \frac{\alpha\lambda^2}{2}\|\vec{x}\|^2 \\
\Rightarrow \|A\vec{x}\|^2 &\leq \frac{2\alpha\lambda^4}{2(2\lambda^2 - \alpha)}\|\vec{x}\|^2 \\
\Rightarrow \|A\vec{x}\|^2 &\leq \frac{\alpha\lambda^4}{2\lambda^2 - \alpha}\|\vec{x}\|^2
\end{aligned}$$

tomemos  $\lambda > 0$  tal que:

$$\begin{aligned}\alpha^2 = \frac{\alpha\lambda^4}{2\lambda^2 - \alpha} &\iff \alpha = \frac{\lambda^4}{2\lambda^2 - \alpha} \\ &\iff \alpha(2\lambda^2 - \alpha) = \lambda^4 \\ &\iff 0 = \lambda^4 - 2\alpha\lambda^2 + \alpha^2 \\ &\iff 0 = (\lambda^2 - \alpha)^2 \\ &\iff 0 = (\lambda^2 - \alpha)^2 \\ &\iff 0 = \lambda^2 - \alpha \\ &\iff \sqrt{\alpha} = \lambda\end{aligned}$$

de esta forma:

$$\begin{aligned}\|A\vec{x}\|^2 &\leq \alpha^2 \|\vec{x}\|^2 \\ \|A\vec{x}\| &\leq \alpha \|\vec{x}\|\end{aligned}$$

es decir que  $\|A\| \leq \alpha$  y por ende  $\alpha = \|A\|$ , esto si  $\alpha > 0$ . Si  $\alpha = 0$ , entonces:

$$\begin{aligned}\frac{|Q_A(\vec{x})|}{\|\vec{x}\|^2} &= 0 \quad \forall \vec{x} \in H \\ \Rightarrow |Q_A(\vec{x})| &= 0 \quad \forall \vec{x} \in H \\ \Rightarrow (A\vec{x}|\vec{x}) &= 0 \quad \forall \vec{x} \in H\end{aligned}$$

pero, por (i) de 1.4 se sigue que  $A = 0$ , pues  $(A\vec{x}|\vec{y}) = 0$  para todo  $\vec{x}, \vec{y} \in H \setminus \{\vec{0}\}$ . En este caso  $\alpha = 0 = \|A\|$ . En cualquier caso, se concluye que  $\alpha = \|A\|$ . ■

#### Ejercicio 1.1.4

**Muestre** que todo endomorfismo continuo  $T$  de un espacio hilbertiano  $H$  se expresa únicamente en la forma:

$$T = A + iB$$

donde  $A$  y  $B$  son endomorfismos autoadjuntos de  $H$ .

#### Demostración:

Tomemos  $A = \frac{1}{2}(T + \tilde{T})$  y  $B = \frac{1}{2i}(T - \tilde{T})$ , siendo  $\tilde{T} : H \rightarrow H$  la adjunta de  $T$ . Es claro que  $T = A + iB$  y, que tanto  $A$  como  $B$  son adjuntos, pues:

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \widetilde{\frac{1}{2}(T + \tilde{T})} \\ &= \frac{1}{2} \widetilde{(T + \tilde{T})} \\ &= \frac{1}{2}(\tilde{T} + \tilde{\tilde{T}}) \\ &= \frac{1}{2}(T + \tilde{T}) \\ &= A\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\widetilde{B} &= \frac{1}{2i} \widetilde{(T - \widetilde{T})} \\
&= \frac{-i}{2} \widetilde{(T - \widetilde{T})} \\
&= -\frac{i}{2} \widetilde{(T - \widetilde{T})} \\
&= \frac{i}{2} (\widetilde{T} - \widetilde{\widetilde{T}}) \\
&= -\frac{1}{2i} (\widetilde{T} - T) \\
&= \frac{1}{2i} (T - \widetilde{T}) \\
&= B
\end{aligned}$$

además, son endomorfismos (pues van de  $H$  en  $H$ ). Veamos que éstos son únicos. En efecto, si  $A', B' : H \rightarrow H$  son lineales adjuntos tales que

$$T = A' + iB'$$

se tiene que:

$$i(B' - B) = A - A'$$

en particular, son continuos, por lo cual podemos tomar la adjunta de ambos lados:

$$\begin{aligned}
i(\widetilde{B' - B}) &= \widetilde{A - A'} \\
\Rightarrow -i(\widetilde{B' - B}) &= A - A' \\
\Rightarrow -i(B' - B) &= A - A' \\
\Rightarrow -i(B' - B) &= i(B' - B)
\end{aligned}$$

ya que son adjuntos. Por tanto  $B' - B = 0 \Rightarrow B' = B$ , con lo cual  $A = A'$ . ■

### Ejercicio 1.1.5

Sea  $H$  un espacio prehilbertiano. **Construya** un espacio hilbertiano  $\hat{H}$  y una inyección lineal  $j : H \rightarrow \hat{H}$  tal que

$$(j\vec{x} | j\vec{y}) = (\vec{x} | \vec{y}), \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in H.$$

y que  $j(H)$  sea denso en  $\hat{H}$ . El espacio hilbertiano  $\hat{H}$  se llama la **completación** del espacio prehilbertiano  $H$ . **Formule y demuestre** un teorema de unicidad de esta completación.

### Demostración:

Sea

$$\hat{H} = \left\{ \{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \mid \{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ es sucesión de Cauchy en } H \right\}$$

se definen sobre  $\hat{H}$  dos operaciones, para todo  $\hat{x}' = \{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}, \hat{y}' = \{\vec{y}_n\}_{n=1}^{\infty} \in \hat{H}$  y  $\alpha \in K$ :

$$\hat{x}' + \hat{y}' = \{\vec{x}_n + \vec{y}_n\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{y} \quad \alpha \hat{x}' = \{\alpha \vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$$

Con estas operaciones  $\hat{H}$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$ . Definimos una relación  $\sim$  en  $\hat{H}$  dada como sigue:

$$\hat{x}' \sim \hat{y}' \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|\vec{x}_n - \vec{y}_n\| = 0$$

donde  $\|\cdot\|$  es la norma inducida por el producto interno sobre  $H$ . Tomemos  $\hat{0}' = \{\vec{0}\}_{n=1}^{\infty} \in \hat{H}'$ , y sea:

$$\hat{K} = \left\{ \hat{x}' \in \hat{H}' \mid \hat{x}' \sim \hat{0}' \right\}$$

Afirmamos que  $\hat{K}$  es subespacio vectorial de  $\hat{H}$ . En efecto, sean  $\hat{x}' = \{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}, \hat{y}' = \{\vec{y}_n\}_{n=1}^{\infty} \in \hat{K}'$  y  $\alpha \in \mathbb{K}$ , entonces:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|\vec{x}_n + \alpha \vec{y}_n - \vec{0}\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|\vec{x}_n + \alpha \vec{y}_n\| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|\vec{x}_n\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|\alpha \vec{y}_n\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|\vec{x}_n\| + \lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha| \cdot \|\vec{y}_n\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|\vec{x}_n - \vec{0}\| + |\alpha| \lim_{n \rightarrow \infty} \|\vec{y}_n - \vec{0}\| \\ &= 0 + |\alpha| \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

por tanto,  $\hat{x}' + \alpha \hat{y}' \in \hat{K}'$ . Así  $\hat{K}'$  es espacio vectorial. Tomemos

$$\hat{H} = \hat{H}' / \hat{K}'$$

el espacio vectorial cociente, cuyos elementos los denotaremos por  $\hat{x} = [\hat{x}'] = \hat{x}' + \hat{K}'$ . Definimos un producto escalar en  $\hat{H}$  como sigue; para cada  $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{H}$ :

$$(\hat{x} | \hat{y}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\vec{x}_n | \vec{y}_n)$$

■

### Ejercicio 1.1.6

Si  $E$  es un espacio vectorial complejo, la adición de elementos de  $E$  y la multiplicación de elementos de  $E$  por números reales, hacen de  $E$  un espacio vectorial real que se designa por  $E_{\mathbb{R}}$ .

- I. Sea  $H$  un espacio prehilbertiano complejo. Se designa por  $(\vec{x} | \vec{y})$  un producto escalar en  $H$ . **Muestre** que la aplicación:

$$(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto (\vec{x} | \vec{y})_{\mathbb{R}} = \Re (\vec{x} | \vec{y})$$

hace de  $H_{\mathbb{R}}$  un espacio prehilbertiano real para el que se cumple:

$$(i\vec{x} | i\vec{y})_{\mathbb{R}} = (\vec{x} | \vec{y})_{\mathbb{R}}$$

**Pruebe** la relación:

$$(\vec{x} | \vec{y}) = (\vec{x} | \vec{y})_{\mathbb{R}} + i (\vec{x} | i\vec{y})_{\mathbb{R}} \quad (1.2)$$

- II. Sea  $H$  un espacio vectorial complejo. Se supone que  $H_{\mathbb{R}}$  está provisto de un producto escalar  $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto (\vec{x} | \vec{y})_{\mathbb{R}}$  que hace de  $H_{\mathbb{R}}$  un espacio prehilbertiano real. Se supone también que  $(i\vec{x} | i\vec{y})_{\mathbb{R}} = (\vec{x} | \vec{y})_{\mathbb{R}}$ , para todo  $\vec{x}, \vec{y} \in H$ . Se define en  $H$  un producto  $(\vec{x} | \vec{y})$  por la fórmula (1.1). **Demuestre** que  $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto (\vec{x} | \vec{y})$  es un producto escalar complejo que hace de  $H$  un espacio prehilbertiano complejo.

### Demostración:

De (i): Hay que verificar que se cumplen cuatro condiciones:

- I. Para todo  $\vec{y} \in H_{\mathbb{R}}$  fijo, la aplicación  $\vec{x} \mapsto (\vec{x}|\vec{y})_{\mathbb{R}}$  es lineal de  $H_{\mathbb{R}}$  en  $\mathbb{R}$ . En efecto, sea  $\vec{y} \in H_{\mathbb{R}}$ . Si  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x} \in H_{\mathbb{R}}$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , tenemos que

$$\begin{aligned} (\vec{x}_1 + \vec{x}_2|\vec{y})_{\mathbb{R}} &= \Re(\vec{x}_1 + \vec{x}_2|\vec{y}) \\ &= \Re[(\vec{x}_1|\vec{y}) + (\vec{x}_2|\vec{y})] \\ &= \Re(\vec{x}_1|\vec{y}) + \Re(\vec{x}_2|\vec{y}) \\ &= (\vec{x}_1|\vec{y})_{\mathbb{R}} + (\vec{x}_2|\vec{y})_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned} (\alpha\vec{x}|\vec{y})_{\mathbb{R}} &= \Re(\alpha\vec{x}|\vec{y}) \\ &= \Re\alpha(\vec{x}|\vec{y}) \\ &= \alpha\Re(\vec{x}|\vec{y}) \\ &= \alpha(\vec{x}|\vec{y})_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

con lo cual, la aplicación es lineal.

- II.  $(\vec{x}|\vec{y})_{\mathbb{R}} = \overline{(\vec{y}|\vec{x})_{\mathbb{R}}} = (\vec{y}|\vec{x})_{\mathbb{R}}$ , para todo  $\vec{x}, \vec{y} \in H_{\mathbb{R}}$ . En efecto, sean  $\vec{x}, \vec{y} \in H_{\mathbb{R}}$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} (\vec{x}|\vec{y})_{\mathbb{R}} &= \Re(\vec{x}|\vec{y}) \\ &= \Re\overline{(\vec{y}|\vec{x})} \\ &= \Re(\vec{y}|\vec{x}) \\ &= (\vec{y}|\vec{x})_{\mathbb{R}} \\ &= \overline{(\vec{y}|\vec{x})_{\mathbb{R}}} \end{aligned}$$

pues, el producto escalar toma valores reales.

- III.  $(\vec{x}|\vec{x})_{\mathbb{R}} \geq 0$ , para todo  $\vec{x} \in H_{\mathbb{R}}$ . En efecto, como  $(\cdot|\cdot)$  es un producto escalar sobre  $H$ , se cumple que  $(\vec{x}|\vec{x}) \geq 0$ , por ende  $(\vec{x}|\vec{x})_{\mathbb{R}} = (\vec{x}|\vec{x}) \geq 0$ .

- IV. Sea  $\vec{x} \in H_{\mathbb{R}}$ , entonces  $(\vec{x}|\vec{x})_{\mathbb{R}} = 0$  si y sólo si  $\vec{x} = \vec{0}$ . La vuelta es inmediata, suponga que  $(\vec{x}|\vec{x})_{\mathbb{R}} = 0$ , como  $(\vec{x}|\vec{x})_{\mathbb{R}} = \Re(\vec{x}|\vec{x}) = (\vec{x}|\vec{x})$ , se sigue que  $\vec{x} = \vec{0}$ .

con lo cual, por los 4 incisos anteriores se sigue que  $(\cdot|\cdot)_{\mathbb{R}}$  es un producto escalar sobre  $H_{\mathbb{R}}$ , es decir que  $H_{\mathbb{R}}$  es un espacio prehilbertiano real.

Verifiquemos que se cumple que:

$$(i\vec{x}|i\vec{y})_{\mathbb{R}} = (\vec{x}|\vec{y})_{\mathbb{R}}, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in H_{\mathbb{R}}$$

en efecto, si  $\vec{x}, \vec{y} \in H_{\mathbb{R}}$ , entonces:

$$\begin{aligned} (i\vec{x}|i\vec{y})_{\mathbb{R}} &= \Re(i\vec{x}|i\vec{y}) \\ &= \Re(i \cdot (-i))(\vec{x}|\vec{y}) \\ &= \Re(-(-1))(\vec{x}|\vec{y}) \\ &= \Re(\vec{x}|\vec{y}) \\ &= (\vec{x}|\vec{y})_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

con lo que se verifica la igualdad. Probemos la relación. Sean  $\vec{x}, \vec{y} \in H$ , se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} (\vec{x}|\vec{y}) &= \Re(\vec{x}|\vec{y}) + i\Im(\vec{x}|\vec{y}) \\ &= \Re(\vec{x}|\vec{y}) + i\Re(-i(\vec{x}|\vec{y})) \\ &= \Re(\vec{x}|\vec{y}) + i\Re(\bar{i}(\vec{x}|\vec{y})) \\ &= \Re(\vec{x}|\vec{y}) + i\Re((\vec{x}|i\vec{y})) \\ &= (\vec{x}|\vec{y})_{\mathbb{R}} + i(\vec{x}|i\vec{y})_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

lo cual prueba la relación.

De (ii): Hay que verificar que se cumplen cuatro condiciones:

- I. Para todo  $\vec{y} \in H$  fijo, la aplicación  $\vec{x} \mapsto (\vec{x}|\vec{y})$  es lineal de  $H$  en  $\mathbb{C}$ . En efecto, sea  $\vec{y} \in H$ . Si  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x} \in H$  y  $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} (\vec{x}_1 + \vec{x}_2|\vec{y}) &= (\vec{x}_1 + \vec{x}_2|\vec{y})_{\mathbb{R}} + i(\vec{x}_1 + \vec{x}_2|i\vec{y})_{\mathbb{R}} \\ &= (\vec{x}_1|\vec{y})_{\mathbb{R}} + (\vec{x}_2|\vec{y})_{\mathbb{R}} + i(\vec{x}_1|i\vec{y})_{\mathbb{R}} + i(\vec{x}_2|i\vec{y})_{\mathbb{R}} \\ &= ((\vec{x}_1|\vec{y})_{\mathbb{R}} + i(\vec{x}_1|i\vec{y})_{\mathbb{R}}) + ((\vec{x}_2|\vec{y})_{\mathbb{R}} + i(\vec{x}_2|i\vec{y})_{\mathbb{R}}) \\ &= (\vec{x}_1|\vec{y}) + (\vec{x}_2|\vec{y}) \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned} (\alpha\vec{x}|\vec{y}) &= (\alpha\vec{x}|\vec{y})_{\mathbb{R}} + i(\alpha\vec{x}|i\vec{y})_{\mathbb{R}} \\ &= ([a + ib]\vec{x}|\vec{y})_{\mathbb{R}} + i([a + ib]\vec{x}|i\vec{y})_{\mathbb{R}} \\ &= (a\vec{x}|\vec{y})_{\mathbb{R}} + (ib\vec{x}|\vec{y})_{\mathbb{R}} + i(a\vec{x}|i\vec{y})_{\mathbb{R}} + i(ib\vec{x}|i\vec{y})_{\mathbb{R}} \\ &= a(\vec{x}|\vec{y})_{\mathbb{R}} + b(i\vec{x}|\vec{y})_{\mathbb{R}} + ia(\vec{x}|i\vec{y})_{\mathbb{R}} + ib(i\vec{x}|i\vec{y})_{\mathbb{R}} \\ &= a(\vec{x}|\vec{y})_{\mathbb{R}} - b(\vec{x}|i\vec{y})_{\mathbb{R}} + ia(\vec{x}|i\vec{y})_{\mathbb{R}} + ib(\vec{x}|\vec{y})_{\mathbb{R}} \\ &= (a + ib)(\vec{x}|\vec{y})_{\mathbb{R}} + (ia - b)(\vec{x}|i\vec{y})_{\mathbb{R}} \\ &= (a + ib)(\vec{x}|\vec{y})_{\mathbb{R}} + i(a + ib)(\vec{x}|i\vec{y})_{\mathbb{R}} \\ &= \alpha(\vec{x}|\vec{y})_{\mathbb{R}} + i\alpha(\vec{x}|i\vec{y})_{\mathbb{R}} \\ &= \alpha((\vec{x}|\vec{y})_{\mathbb{R}} + i(\vec{x}|i\vec{y})_{\mathbb{R}}) \\ &= \alpha(\vec{x}|\vec{y}) \end{aligned}$$

por tanto, es lineal de  $H$  en  $\mathbb{C}$ .

- II. Sean  $(\vec{x}|\vec{y}) = \overline{(\vec{y}|\vec{x})}$ , para todo  $\vec{x}, \vec{y} \in H$ . En efecto, si  $\vec{x}, \vec{y} \in H$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} (\vec{x}|\vec{y}) &= (\vec{x}|\vec{y})_{\mathbb{R}} + i(\vec{x}|i\vec{y})_{\mathbb{R}} \\ &= (\vec{y}|\vec{x})_{\mathbb{R}} + i(i\vec{x}|\vec{y})_{\mathbb{R}} \\ &= (\vec{y}|\vec{x})_{\mathbb{R}} - i(\vec{y}|i\vec{x})_{\mathbb{R}} \\ &= \overline{(\vec{y}|\vec{x})_{\mathbb{R}} + i(\vec{y}|i\vec{x})_{\mathbb{R}}} \\ &= \overline{(\vec{y}|\vec{x})} \end{aligned}$$

- III.  $(\vec{x}|\vec{x}) \geq 0$  para todo  $\vec{x} \in H$ . En efecto, si  $\vec{x} \in H$ , se tiene primeramente que:

$$\begin{aligned} (\vec{x}|i\vec{x}) &= (i\vec{x}|\vec{x}) \\ &= -(i\vec{x}|\vec{x}) \\ &= -(\vec{x}|i\vec{x}) \\ \Rightarrow (\vec{x}|i\vec{x}) &= 0 \end{aligned}$$

por tanto,

$$\begin{aligned} (\vec{x}|\vec{x}) &= (\vec{x}|\vec{x})_{\mathbb{R}} + i(\vec{x}|i\vec{x})_{\mathbb{R}} \\ &= (\vec{x}|\vec{x})_{\mathbb{R}} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

donde  $(\vec{x}|\vec{x})_{\mathbb{R}} \geq 0$ . Luego se tiene el resultado.

IV. Sea  $\vec{x} \in H$ . Entonces,  $(\vec{x}|\vec{x}) = 0$  si y sólo si  $\vec{x} = \vec{0}$ . La vuelta es inmediata. Suponga que  $(\vec{x}|\vec{x}) = 0$ , entonces:

$$0 = (\vec{x}|\vec{x}) = (\vec{x}|\vec{x})_{\mathbb{R}}$$

usando lo obtenido en (iii), pero  $(\vec{x}|\vec{x}) = 0$  implica  $\vec{x} = \vec{0}$ , luego  $\vec{x} = \vec{0}$  con lo que se tiene el resultado.

por los cuatro incisos se sigue que  $(\cdot|\cdot)$  es un producto escalar complejo sobre  $H$  que hace de él un espacio prehilbertiano complejo. ■

### Ejercicio 1.1.7

Haga lo siguiente:

I. **Muestre** que en todo espacio prehilbertiano real se cumple

$$(\vec{x}|\vec{y}) = \frac{1}{4} (\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2)$$

y en todo espacio prehilbertiano complejo se cumple

$$(\vec{x}|\vec{y}) = \frac{1}{4} (\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 + i\|\vec{x} + i\vec{y}\|^2 - i\|\vec{x} - i\vec{y}\|^2)$$

II. Sea  $E$  un espacio vectorial normado real en el que se verifica la identidad del paralelogramo:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2)$$

**Pruebe** que se puede definir de manera única un producto escalar  $(\cdot|\cdot)$  sobre  $E$  que hace de  $E$  un espacio prehilbertiano real para el cual  $\|\vec{x}\|^2 = (\vec{x}|\vec{x})$ ,  $\forall \vec{x} \in E$ .

*Indicación.* Defina  $(\vec{x}|\vec{y})$  por la primera fórmula del inciso (i). Usando la fórmula del paralelogramo compruebe que  $(\vec{x}|2\vec{y}) = 2(\vec{x}|\vec{y})$ . Transforme  $(\vec{x}_1|\vec{y}_1) + (\vec{x}_2|\vec{y}_2)$  por la identidad del paralelogramo y deduzca la fórmula  $(\vec{x}_1|\vec{y}) + (\vec{x}_2|\vec{y}) = (\vec{x}_1 + \vec{x}_2|\vec{y})$ .

III. Misma pregunta que en (ii) en el caso de ser  $E$  espacio vectorial complejo.

*Indicación.* Use (ii) y el problema 1.6.

### Solución:

De (i): Sea  $H$  un espacio prehilbertiano real, y sean  $\vec{x}, \vec{y} \in H$ , se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} (\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2) &= \frac{1}{4} ((\vec{x} + \vec{y}|\vec{x} + \vec{y}) - (\vec{x} - \vec{y}|\vec{x} - \vec{y})) \\ &= \frac{1}{4} ((\vec{x}|\vec{x}) + (\vec{x}|\vec{y}) + (\vec{y}|\vec{x}) + (\vec{y}|\vec{y}) - (\vec{x}|\vec{x}) + (\vec{x}|\vec{y}) + (\vec{y}|\vec{x}) - (\vec{y}|\vec{y})) \\ &= \frac{1}{4} (2(\vec{x}|\vec{y}) + 2(\vec{y}|\vec{x})) \\ &= \frac{1}{4} (4(\vec{x}|\vec{y})) \\ &= (\vec{x}|\vec{y}) \end{aligned}$$

para un espacio prehilbertiano complejo, sean  $\vec{x}, \vec{y} \in H$ . Por el ejercicio 1.1.6 (i) se tiene que:

$$\begin{aligned} (\vec{x}|\vec{y}) &= (\vec{x}|\vec{y})_{\mathbb{R}} + i(\vec{x}|i\vec{y})_{\mathbb{R}} \\ &= \frac{1}{4} (\|\vec{x} + \vec{y}\|_{\mathbb{R}}^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|_{\mathbb{R}}^2) + i\frac{1}{4} (\|\vec{x} + i\vec{y}\|_{\mathbb{R}}^2 - \|\vec{x} - i\vec{y}\|_{\mathbb{R}}^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 + i\|\vec{x} + i\vec{y}\|^2 - i\|\vec{x} - i\vec{y}\|^2) \end{aligned}$$

pues,  $\|\cdot\|_{\mathbb{R}} = \|\cdot\|$ .

De (ii). Defina:

$$(\vec{x}|\vec{y}) = \frac{1}{4} (\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2), \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in H$$

veamos que  $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto (\vec{x}|\vec{y})$  verifica las cuatro condiciones para ser producto escalar real sobre  $H$ :

I. Hay que probar que para todo  $\vec{y} \in E$  fijo,  $\vec{x} \mapsto (\vec{x}|\vec{y})$  es una aplicación lineal de  $E$  en  $\mathbb{R}$ . En efecto, veamos que se cumplen dos cosas:

i) Sea  $\vec{y} \in H$ . Hay que ver que la función  $\vec{x} \mapsto (\vec{x}|\vec{y})$  separa sumas. En efecto, sean  $\vec{x}, \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in H$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , tenemos que:

$$(\vec{x}_1 + \vec{x}_2|\vec{y}) = \frac{1}{4} (\|\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x}_1 + \vec{x}_2 - \vec{y}\|^2)$$

de la identidad del paralelogramo obtenemos que:

$$\begin{cases} \|\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2 - \vec{y}\|^2 &= 2\|\vec{x}_1\|^2 + 2\|\vec{x}_2 + \vec{y}\|^2 \\ \|\vec{x}_1 + \vec{x}_2 - \vec{y}\|^2 + \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2 + \vec{y}\|^2 &= 2\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2 \end{cases}$$

ii) Notemos antes que si  $\vec{x}, \vec{y} \in H$ :

$$\begin{aligned} (2\vec{x}|\vec{y}) &= \frac{1}{4} (\|2\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|2\vec{x} - \vec{y}\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|2\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|2\vec{x} - \vec{y}\|^2) \end{aligned}$$

de la identidad del paralelogramo obtenemos que

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \|\vec{x} + \vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{x} - \vec{y}\|^2 &= 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 \\ \|\vec{x} + \vec{x} - \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{x} + \vec{y}\|^2 &= 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} \|2\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 &= 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 \\ \|2\vec{x} - \vec{y}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 &= 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} \|2\vec{x} + \vec{y}\|^2 &= 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{y}\|^2 \\ \|2\vec{x} - \vec{y}\|^2 &= 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 - \|\vec{y}\|^2 \end{cases} \end{aligned}$$

por tanto,

$$\begin{aligned} (2\vec{x}|\vec{y}) &= \frac{1}{4} (2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{y}\|^2 - 2\|\vec{x}\|^2 - 2\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 + \|\vec{y}\|^2) \\ &= \frac{2}{4} (\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2) \\ &= 2 (\vec{x}|\vec{y}) \end{aligned}$$

Queremos ver que este producto interno saca escalares. Por inducción se prueba rápidamente que

$$(n\vec{x}|\vec{y}) = n (\vec{x}|\vec{y}), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y, tomando  $\vec{x} = -\vec{u}$ , el resultado es válido para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , esto es

$$(m\vec{x}|\vec{y}) = m (\vec{x}|\vec{y}), \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

Ahora, para el vector  $\frac{1}{n}\vec{x}$  se tiene que

$$\begin{aligned} n \left( \frac{1}{n}\vec{x}|\vec{y} \right) &= \left( \frac{n}{n}\vec{x}|\vec{y} \right) \\ &= (\vec{x}|\vec{y}) \\ \Rightarrow \left( \frac{1}{n}\vec{x}|\vec{y} \right) &= \frac{1}{n} (\vec{x}|\vec{y}), \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$



luego, por el resultado anterior se tiene que

$$(r\vec{x}|\vec{y}) = r(\vec{x}|\vec{y}) \quad \forall r \in \mathbb{Q}$$

y, para todo  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}$ . Veamos que se cumple para todo  $r \in \mathbb{R}$ . En efecto, como las aplicaciones  $r \mapsto (r\vec{x}|\vec{y})$  y  $r \mapsto r(\vec{x}|\vec{y})$  son continuas (pues, son composición de funciones continuas) y, son iguales en  $\mathbb{Q}$  el cual es tal que  $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ , por un teorema de análisis matemático I se sigue que

$$(\alpha\vec{x}|\vec{y}) = \alpha(\vec{x}|\vec{y}), \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

II. Sean  $\vec{x}, \vec{y} \in E$ . Se tiene que

$$\begin{aligned} (\vec{y}|\vec{x}) &= \frac{1}{4} (\|\vec{y} + \vec{x}\|^2 - \|\vec{y} - \vec{x}\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2) \\ &= (\vec{x}|\vec{y}) \\ \Rightarrow (\vec{y}|\vec{x}) &= (\vec{x}|\vec{y}) \end{aligned}$$

III. Sea  $\vec{x} \in E$ , entonces

$$\begin{aligned} (\vec{x}|\vec{x}) &= \frac{1}{4} (\|\vec{x} + \vec{x}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{x}\|^2) \\ &= \frac{1}{4} \|2\vec{x}\|^2 \\ &= \frac{4}{4} \|\vec{x}\|^2 \\ &= \|\vec{x}\|^2 \\ &\geq 0 \\ \Rightarrow (\vec{x}|\vec{x}) &\geq 0 \end{aligned}$$

IV. Es claro que si  $\vec{x} = \vec{0}$ , entonces  $(\vec{x}|\vec{x}) = 0$ . El converso es inmediato del hecho que  $\|\cdot\|$  es una norma sobre  $E$ .

por los cuatro incisos anteriores, se sigue que  $(\cdot|\cdot)$  es un producto escalar real sobre  $E$  tal que  $(\vec{x}|\vec{x}) = \|\vec{x}\|^2$  para todo  $\vec{x} \in E$ .

De (iii): Es análogo a (ii) usando hechos del problema 1.6. □

### Ejercicio 1.1.8

Para todo  $s \in \mathbb{R}$  sea  $u_s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  la función definida por:

$$u_s(x) = e^{isx}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sea  $X$  el espacio vectorial complejo compuesto de todas las combinaciones lineales finitas de estas funciones  $u_s$ ,  $\forall f, g \in X$  se define:

$$(f|g) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R f \bar{g}.$$

**Pruebe** que esta definición tiene sentido y que la aplicación  $(f, g) \mapsto (f|g)$  es un producto escalar que hace de  $X$  un espacio prehilbertiano.

Sea  $H$  el espacio prehilbertiano, completación del espacio prehilbertiano  $X$  (ver problema 1.5). **Muestre** que  $H$  es un espacio hilbertiano no separable y que la familia  $(u_s)_{s \in \mathbb{R}}$  es un sistema ortonormal maximal en  $H$ .

**Demostración:**

Para la primera parte, notemos que por linealidad de la integral, basta probar que este mapeo tiene sentido para las funciones  $u_s$ . Sean  $r, s \in \mathbb{R}$ , entonces:

$$\begin{aligned} (u_s | u_r) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R u_s(x) \overline{u_r(x)} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R e^{isx} \overline{e^{irx}} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R e^{isx} e^{-irx} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R e^{i(s-r)x} dx \end{aligned}$$

si  $s = r$ , entonces

$$\begin{aligned} (u_s | u_r) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} 2R \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

si  $s \neq r$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} (u_s | u_r) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \frac{e^{i(s-r)x}}{i(s-r)} \Big|_{x=-R}^{x=R} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \frac{e^{i(s-r)R} - e^{-i(s-r)R}}{i(s-r)} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \frac{\cos((s-r)R) + i \sin((s-r)R) - \cos(-(s-r)R) - i \sin(-(s-r)R)}{i(s-r)} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \frac{\cos((s-r)R) + i \sin((s-r)R) - \cos((s-r)R) + i \sin((s-r)R)}{i(s-r)} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \frac{2i \sin((s-r)R)}{i(s-r)} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sin((s-r)R)}{(s-r)R} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(usar teorema del emparedado para verificar que ese es el límite). Por tanto,  $(\cdot | \cdot)$  está bien definida.

Veamos ahora que esa aplicación es un producto escalar sobre  $X$ . En efecto, se deben verificar cuatro condiciones:

1. Sea  $g \in X$  fijo, hay que ver que la aplicación  $f \mapsto (f | g)$  es lineal. En efecto, sean  $f, f_1, f_2 \in X$

y  $\alpha \in \mathbb{C}$ , se tiene que:

$$\begin{aligned}
(f_1 + f_2|g) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R (f_1 + f_2)\bar{g} \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R f_1\bar{g} + f_2\bar{g} \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2R} \int_{-R}^R f_1\bar{g} + \frac{1}{2R} \int_{-R}^R f_2\bar{g} \right) \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R f_1\bar{g} + \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R f_2\bar{g} \\
&= (f_1|g) + (f_2|g)
\end{aligned}$$

pues, ambos límites existen. Además:

$$\begin{aligned}
(\alpha f|g) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R \alpha f\bar{g} \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{2R} \int_{-R}^R f\bar{g} \\
&= \alpha \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R f\bar{g} \\
&= \alpha (f|g)
\end{aligned}$$

por tanto, esa aplicación es lineal.

II.  $(g|f) = \overline{(f|g)}$ , para todo  $f, g \in X$ . En efecto, sean  $f, g \in X$ , se tiene que:

$$\begin{aligned}
\overline{(f|g)} &= \overline{\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R f\bar{g}} \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R \overline{f\bar{g}} \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R \overline{f}g \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R \overline{f}g \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R g\bar{f} \\
&= (g|f)
\end{aligned}$$

con lo que se tiene el resultado.

III.  $(f|f) \geq 0$ , para todo  $f \in X$ . En efecto, sea  $f \in X$ , se tiene que:

$$\begin{aligned}
(f|f) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R f\bar{f} \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R |f|^2 \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

pues  $|f|^2 \geq 0$ .

IV.  $(f|f) = 0$  si y sólo si  $f = 0$ . La vuelta es inmediata, suponga que  $(f|f) = 0$ , digamos que  $f = \lambda_1 u_{s_1} + \dots + \lambda_n u_{s_n}$  donde  $\lambda_i \in \mathbb{C}$  y  $s_i \in \mathbb{R}$  para todo  $i \in [1, n]$ , se tiene entonces que:

$$\begin{aligned}
(f|f) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R f \bar{f} \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R (\lambda_1 u_{s_1} + \dots + \lambda_n u_{s_n}) \overline{\lambda_1 u_{s_1} + \dots + \lambda_n u_{s_n}} \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R (\lambda_1 u_{s_1} + \dots + \lambda_n u_{s_n}) (\bar{\lambda}_1 u_{-s_1} + \dots + \bar{\lambda}_n u_{-s_n}) \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R (\lambda_1 u_{s_1} + \dots + \lambda_n u_{s_n}) (\bar{\lambda}_1 u_{-s_1} + \dots + \bar{\lambda}_n u_{-s_n}) \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R \sum_{i,j=1}^n \lambda_i u_{s_i} \bar{\lambda}_j u_{-s_j} \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \bar{\lambda}_j \frac{1}{2R} \int_{-R}^R u_{s_i} u_{-s_j} \\
&= \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \bar{\lambda}_j \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R u_{s_i} u_{-s_j}
\end{aligned}$$

sean  $i, j \in [1, n]$ , se tienen dos casos,  $i \neq j$  o  $i = j$ . Por lo analizado anteriormente si  $i \neq j$  se sigue que

$$\lambda_i \bar{\lambda}_j \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R u_{s_i} u_{-s_j} = 0$$

y, si  $i = j$ :

$$\lambda_i \bar{\lambda}_i \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R u_{s_i} u_{-s_i} = |\lambda_i|^2$$

Por tanto:

$$(f|f) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 = 0$$

esto ocurre si y sólo si  $\lambda_i = 0$  para todo  $i \in [1, n]$ , es decir si  $f = 0$ .

por los cuatro incisos anteriores, se sigue que  $(\cdot|\cdot)$  es un producto escalar sobre  $X$  que lo hace un espacio prehilbertiano.

Para la segunda parte, al inicio ya se vió que  $(u_s)_{s \in \mathbb{R}}$  es un sistema O.N. de vectores en  $X$ . Para ver que no es separable, considere la familia de bolas:

$$\mathcal{B} = \left\{ B_s \mid s \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

donde  $B_s = \left\{ f \in H \mid \|f - u_s\| < \frac{1}{2} \right\}$ , para todo  $s \in \mathbb{R}^+$ . Afirmamos que estas bolas son disjuntas a pares, en efecto, sean  $s, r \in \mathbb{R}^+$  con  $s \neq r$ . Si  $f \in B_s$  y  $f \in B_r$ , entonces:

$$\|f - u_s\| < \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \|f - u_r\| < \frac{1}{2} \Rightarrow \|u_s - u_r\| \leq \|u_s - f\| + \|f - u_r\| < 1$$

pero,

$$\begin{aligned}
(u_s - u_r | u_s - u_r) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R (u_s - u_r) \overline{(u_s - u_r)} \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R (u_s - u_r)(u_{-s} - u_{-r}) \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R (u_s u_{-s} - u_s u_{-r} - u_r u_{-s} + u_r u_{-r}) \\
&= 1 + 0 + 0 + 1 \\
&= 2 \\
\Rightarrow \|u_s - u_r\| &= \sqrt{2}
\end{aligned}$$

el cual no es menor que 1, por tanto tal  $f$  no puede existir, así  $B_s \cap B_r = \emptyset$ . Con lo que  $\mathcal{B}$  es una familia no numerable de bolas abiertas disjuntas a pares, por una proposición de análisis I debe suceder que  $H$  no es separable.

Veamos que  $(u_s)_{s \in \mathbb{R}}$  es O.N. maximal. Ya se vió que es O.N., veamos que es maximal. Por el teorema de Parserval al ser  $H$  hilbertiano, basta con ver que:

$$\overline{\mathcal{L}((u_s)_{s \in \mathbb{R}})} = H$$

esto es inmediato, pues  $\mathcal{L}((u_s)_{s \in \mathbb{R}}) = X$  ya que el conjunto de la izquierda es el generado por todas las combinaciones lineales finitas de elementos de  $(u_s)_{s \in \mathbb{R}}$ , y el conjunto  $i(X)$  es denso en  $H$  (usando la notación del ejercicio 1.1.5), luego se tiene que:

$$\overline{i(X)} = H \Rightarrow \overline{\mathcal{L}((u_s)_{s \in \mathbb{R}})} = H$$

pues,  $i(u_s) = u_s$ . Por tanto,  $(u_s)_{s \in \mathbb{R}}$  es O.N. maximal. ■

### Ejercicio 1.1.9

Sea  $H$  un espacio hilbertiano de dimensión infinita. **Demuestre** que existe una aplicación continua inyectiva  $\gamma$  de  $[0, 1]$  en  $H$  (un **camino simple** en  $H$ ) tal que si  $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 1$ , los vectores  $\gamma(b) - \gamma(a)$  y  $\gamma(d) - \gamma(c)$  son ortogonales.

*Indicación.* Tome  $H = L_2([0, 1], \mathbb{K})$  y considere funciones características de ciertos subconjuntos de  $[0, 1]$ .

### Demostración:

Consideremos primero  $H' = L_2([0, 1], \mathbb{K})$ . Sea  $\gamma' : [0, 1] \rightarrow H'$  dada por:

$$\gamma'(x) = \chi_{[0, x]}, \quad \forall x \in [0, 1]$$

es claro que  $\gamma'$  es inyectiva. Además, si  $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 1$ , se tiene que:

$$\begin{aligned}
\gamma'(b) - \gamma'(a) &= \chi_{[0, b]} - \chi_{[0, a]} \\
&= \chi_{]a, b]}
\end{aligned}$$

y,  $\gamma'(d) - \gamma'(c) = \chi_{]c, d]}$ . Por tanto:

$$\begin{aligned}
(\gamma'(b) - \gamma'(a) | \gamma'(d) - \gamma'(c)) &= \int_0^1 \chi_{]a, b]} \overline{\chi_{]c, d]}} \\
&= \int_0^1 \chi_{]a, b]} \chi_{]c, d]} \\
&= 0
\end{aligned}$$

por tanto,  $\gamma'(b) - \gamma'(a)$  y  $\gamma'(d) - \gamma'(c)$  son ortogonales.

Ahora, sea  $H$  un espacio hilbertiano arbitrario de dimensión infinita. Entonces, existe  $\Omega$  tal que  $H \equiv l_2(\Omega, \mathbb{K})$ , sea  $F : l_2(\Omega, \mathbb{K}) \rightarrow H$  la isometría suprayectiva entre estos dos espacios (en particular, es biyectiva por lo que es un isomorfismo de espacios hilbertianos).

Notemos que como  $H' = L_2([0, 1], \mathbb{K})$  siendo  $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$  medible, entonces  $H'$  es separable, es decir que  $H' \equiv l_2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$  (son isométricos), sea  $G : H' \rightarrow l_2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$  la isometría suprayectiva entre estos dos espacios (nuevamente, se tiene que en particular es biyectiva, por lo que es un isomorfismo de espacios hilbertianos).

Como  $\Omega$  es infinito (ya que el espacio  $H$  es de dimensión infinita, luego la familia O.N. maximal debe ser infinita, es decir a lo sumo numerable) existe una subfamilia  $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$  numerable de elementos de  $\Omega$ , defina así  $j : \mathbb{N} \rightarrow \Omega$  tal que  $n \mapsto \omega_n$ . Definimos con esto la función  $J : l_2(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \rightarrow l_2(\Omega, \mathbb{K})$  tal que:

$$\{x(n)\}_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \{y(\omega)\}_{\omega \in \Omega}$$

donde

$$y(\omega) = \begin{cases} x(n) & \text{si } \omega = \omega_n \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad \forall \omega \in \Omega$$

Esta función está bien definida y es claro que es inyectiva (más aún, es una isometría). Por lo cual la función

$$\gamma = F \circ J \circ G \circ \gamma' : [0, 1] \rightarrow H$$

es inyectiva, y cumple que (al ser  $F$ ,  $J$  y  $G$  isometrías):

$$\begin{aligned} (\gamma(b) - \gamma(a) | \gamma(d) - \gamma(c)) &= (\gamma'(b) - \gamma'(a) | \gamma'(d) - \gamma'(c)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

para todo  $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq 1$  (pues,  $F \circ J \circ G$  es una isometría por lo cual preserva el producto escalar). Así,  $\gamma$  es la función buscada. ■

### Ejercicio 1.1.10

Sea  $\{\vec{x}_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$  una sucesión de elementos de un espacio hilbertiano  $H$ . La sucesión  $\{\vec{x}_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$  se llama **martingala** (en el sentido amplio) si,  $\forall \nu \in \mathbb{N}$ ,  $\vec{x}_\nu$  es el vector de  $\mathcal{L}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_\nu)$  menos alejado de  $\vec{x}_{\nu+1}$  (básicamente  $\vec{x}_\nu$  es la proyección ortogonal de  $\vec{x}_{\nu+1}$  sobre el subespacio generado por los vectores anteriores).

I. Sea  $\{\vec{x}_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$  una martingala. Se definen:

$$\vec{y}_1 = \vec{x}_1 \quad \text{e} \quad \vec{y}_\nu = \vec{x}_\nu - \vec{x}_{\nu-1}, \quad \forall \nu \geq 2.$$

**Muestre** que los vectores  $\vec{y}_\nu$  son ortogonales a pares y que  $\{\|\vec{x}_\nu\|\}_{\nu=1}^{\infty}$  es una sucesión creciente de números no negativos.

II. Sea  $\{\vec{y}_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$  una sucesión de vectores en  $H$  ortogonales a pares. Se define

$$\vec{x}_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \vec{y}_k, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

**Pruebe** que  $\{\vec{y}_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$  es una martingala.

### Demostración:

De (i): Procederemos por inducción sobre  $\nu$ . Para  $\nu = 2$  el resultado se cumple, pues notemos que  $\vec{x}_1$  es el vector de  $\mathcal{L}(\vec{x}_1)$  menos alejado de  $\vec{x}_2$ , es decir que  $\vec{x}_1$  es la proyección ortogonal de  $\vec{x}_2$ , luego

$\vec{x}_1 \perp \vec{x}_2 - \vec{x}_1$ , es decir que  $\vec{y}_1 \perp \vec{y}_2$ . Además, por este hecho (y, usando Pitágoras) se sigue que:

$$\begin{aligned}\|\vec{x}_1\|^2 + \|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|^2 &= \|\vec{x}_2\|^2 \\ \Rightarrow \|\vec{x}_1\| &\leq \|\vec{x}_2\|\end{aligned}$$

Suponga que el resultado se cumple para algún  $\nu$ . Veamos que se cumple para  $\nu + 1$ . En efecto, ya se tiene que  $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_\nu$  son ortogonales a pares. Como  $\vec{x}_\nu$  es el vector menos alejado de  $x_{\nu+1}$ , es decir que es su proyección ortogonal sobre  $\mathcal{L}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_\nu)$ , por ende,  $y_{\nu+1} = x_{\nu+1} - \vec{x}_\nu \perp \mathcal{L}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_\nu)$ , en particular,  $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_\nu \in \mathcal{L}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_\nu)$ , luego los vectores  $\vec{y}_1, \dots, y_{\nu+1}$  son ortogonales a pares.

Además, como en el paso inductivo, se tiene que:

$$\begin{aligned}\|\vec{x}_\nu\|^2 + \|x_{\nu+1} - \vec{x}_\nu\|^2 &= \|x_{\nu+1}\|^2 \\ \Rightarrow \|\vec{x}_\nu\| &\leq \|x_{\nu+1}\|\end{aligned}$$

Aplicando inducción, el resultado se tiene para todo  $\nu \in \mathbb{N}$ .

De (ii): Sea  $\nu \in \mathbb{N}$ . Hay que probar que  $\vec{x}_\nu$  es la proyección de  $x_{\nu+1}$  sobre  $\mathcal{L}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_\nu)$ . En efecto, veamos que

$$\begin{aligned}x_{\nu+1} &= \sum_{k=1}^{\nu+1} \vec{y}_k \\ &= \sum_{k=1}^{\nu} \vec{y}_k + y_{\nu+1} \\ &= \vec{x}_\nu + y_{\nu+1}\end{aligned}$$

siendo  $y_{\nu+1} \perp M = \mathcal{L}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_\nu)$ , por tanto al ser  $M$  distinguido (por ser de dimensión finita), se sigue que esta descomposición es única, es decir que el vector  $\vec{x}_\nu$  es la proyección ortogonal de  $x_{\nu+1}$  sobre  $M$ , que es lo que se quería demostrar. ■

### Ejercicio 1.1.11

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$  una función medible, integrable en todo subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  de medida finita. Si

$$\int f = 0, \quad \forall \text{ rectángulo acotado } P \subseteq \mathbb{R}^n,$$

**demuestre** que  $f = 0$  c.t.p. en  $\mathbb{R}^n$ .

*Indicación.* Redúzcase a un corolario del lema de los promedios.

### Demostración:

Sea  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  rectángulo acotado con medida positiva, es decir,  $m(P) > 0$ . Probaremos que:

$$\int_P |f| = 0$$

en efecto, como  $f$  es integrable en  $\mathbb{R}^n$  en todo subconjunto con medida finita, entonces  $|f|$  también lo es. Además:

$$\int_P f = \int_P f^+ + \int_P f^- = 0$$

si  $\int_P f^+ = \int_P f^- = 0$ , ya se tiene el resultado. Suponga que alguna de las dos integrales es positiva, digamos

$$\int_P f^+ > 0$$

entonces, el conjunto:

$$A = \left\{ x \in P \mid f(x) > 0 \right\}$$

tiene medida positiva. Se tiene que:

$$A = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_{\nu}$$

donde  $A_{\nu} = \left\{ x \in P \mid f(x) \geq \frac{1}{\nu} \right\}$ . Por el teorema de continuidad, existe  $\nu_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $m(A_{\nu_0}) > 0$ . Ahora, como todas las normas sobre  $\mathbb{R}^n$  son equivalentes, existe  $r > 0$  tal que:

$$B_{\infty}(x_0, r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x_0 - x\|_{\infty} < r \right\} \subseteq A_{\nu_0}$$

(donde  $\|\cdot\|_{\infty}$  es la norma infinito sobre  $\mathbb{R}^n$  y  $x_0 \in A_{\nu_0}$ ). Este conjunto es un rectángulo acotado en el que se cumple que:

$$\int_{A_{\nu_0}} f^+ = \int_{A_{\nu_0}} f \geq \int_{B_{\infty}(x_0, r)} f \geq \frac{1}{\nu_0} \int_{B_{\infty}(x_0, r)} dx = \frac{1}{\nu_0} m(B_{\infty}(x_0, r)) > 0$$

lo cual contradice la hipótesis. Por tanto,

$$\int_P f^+ = \int_P f^- = 0$$

es decir, que

$$\int_P |f| = 0$$

siendo  $P$  un rectángulo acotado con medida positiva. Notemos que si la medida de este rectángulo fuese 0, el resultado seguiría siendo válido. Por ende:

$$\int |f| = 0, \quad \forall \text{ rectángulo acotado } P \subseteq \mathbb{R}^n,$$

Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  conjunto medible tal que  $0 < m(A) < \infty$ . Por un resultado de Análisis II, existe  $\{P_{\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$  sucesión de rectángulos acotados disjuntos con medida finita tales que:

$$A \subseteq \bigcup_{\nu=1}^{\infty} P_{\nu} = P$$

donde  $m(P) < \infty$ . Se tiene entonces que, al ser  $|f| \geq 0$ :

$$0 \leq \frac{1}{m(A)} \int_A |f| \leq \frac{1}{m(P)} \int_P |f|$$

pero, por un corolario de Beppo-Levi, se tiene que:

$$\int_P |f| = \int_{\bigcup_{\nu=1}^{\infty} P_{\nu}} |f| = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{P_{\nu}} |f| = 0$$

por lo probado anteriormente, luego:

$$\frac{1}{m(A)} \int_A |f| = 0 \in F$$

donde  $F = \{0\}$  es cerrado. Por el lema de los promedios se sigue que  $f = 0$  c.t.p. en  $\mathbb{R}^n$ . ■



### Ejercicio 1.1.12 (Funciones de Hermite)

Por inducción se ve inmediatamente que

$$D^n e^{-x^2} = (-1)^n H_n(x) e^{-x^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

donde  $(-1)^n H_n$  es un polinomio de grado  $n$ . Estos polinomios  $(-1)^n H_n$  se llaman **polinomios de Hermite**. Se definen las **funciones de Hermite**  $\varphi_n$  por:

$$\varphi_n(x) = H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

equivalentemente,

$$\varphi_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} D^n e^{-x^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

I. **Demuestre** que las funciones de Hermite satisfacen la relación:

$$\varphi_n''(x) = (x^2 - 2n - 1)\varphi_n(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

*Indicación.* Expresar a  $\varphi_n''(x)$  mediante  $D^n e^{-x^2}$ ,  $D^{n+1} e^{-x^2}$  y  $D^{n+2} e^{-x^2}$  y calcule  $D^{n+2} e^{-x^2} = D^{n+1}(-2xe^{-x^2})$  por la fórmula de Leibniz para la derivada  $n+1$ -enésima de un producto de factores.

II. **Muestre** que las funciones de Hermite constituyen un sistema ortogonal en el espacio hilbertiano  $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{K})$

*Indicación.* Del inciso (i) se sigue que  $\varphi_n''\varphi_m - \varphi_m''\varphi_n = 2(m-n)\varphi_n\varphi_m$ .

III. **Pruebe** la relación

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x).$$

*Indicación.* Expresar  $H_n'(x)$  mediante  $D^n e^{-x^2}$  y  $D^{n+1} e^{-x^2}$ . Calcule  $D^{n+1} e^{-x^2} = D^n(-2xe^{-x^2})$  por la fórmula de Leibniz.

IV. **Demuestre** que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^2(x) dx = 2n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{n-1}^2(x) dx$$

y deduzca que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^2(x) dx = \pi^{1/2} 2^n n!.$$

Luego el sistema de funciones:

$$\Psi_n = \frac{1}{\pi^{1/2} 2^n n!} \varphi_n$$

es un sistema ortonormal en  $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{K})$  (En un ejercicio posterior se probará que dicho sistema ortonormal es, de hecho, maximal).

*Indicación.* Integre por partes

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^2(x) dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) D^n e^{-x^2} dx$$

y use (iii).

**Demostración:**

De (i): Sea  $n \in \mathbb{N}^*$ . Veamos que:

$$\begin{aligned}
 \varphi'_n(x) &= \frac{d}{dx} \left( (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} D^n e^{-x^2} \right) \\
 &= (-1)^n \frac{d}{dx} \left( e^{\frac{x^2}{2}} D^n e^{-x^2} \right) \\
 &= (-1)^n \left[ \frac{d}{dx} \left( e^{\frac{x^2}{2}} \right) D^n e^{-x^2} + e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d}{dx} \left( D^n e^{-x^2} \right) \right] \\
 &= (-1)^n \left[ x e^{\frac{x^2}{2}} D^n e^{-x^2} + e^{\frac{x^2}{2}} D^{n+1} e^{-x^2} \right]
 \end{aligned}$$

por tanto:

$$\begin{aligned}
 \varphi''_n(x) &= (-1)^n \frac{d}{dx} \left[ x e^{\frac{x^2}{2}} D^n e^{-x^2} + e^{\frac{x^2}{2}} D^{n+1} e^{-x^2} \right] \\
 &= (-1)^n \left[ \frac{d}{dx} (x e^{\frac{x^2}{2}}) D^n e^{-x^2} + x e^{\frac{x^2}{2}} D^{n+1} e^{-x^2} + \frac{d}{dx} (e^{\frac{x^2}{2}}) D^{n+1} e^{-x^2} + e^{\frac{x^2}{2}} D^{n+2} e^{-x^2} \right] \\
 &= (-1)^n \left[ (x^2 + 1) e^{\frac{x^2}{2}} D^n e^{-x^2} + x e^{\frac{x^2}{2}} D^{n+1} e^{-x^2} + x e^{\frac{x^2}{2}} D^{n+1} e^{-x^2} + e^{\frac{x^2}{2}} D^{n+2} e^{-x^2} \right] \\
 &= (-1)^n \left[ (x^2 + 1) e^{\frac{x^2}{2}} D^n e^{-x^2} + 2x e^{\frac{x^2}{2}} D^{n+1} e^{-x^2} + e^{\frac{x^2}{2}} D^{n+2} e^{-x^2} \right] \\
 &= (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \left[ (x^2 + 1) D^n e^{-x^2} + 2x D^{n+1} e^{-x^2} + D^{n+2} e^{-x^2} \right]
 \end{aligned}$$

por la regla general de Leibniz para la derivada de un producto, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 D^{n+2} e^{-x^2} &= D^{n+1} (D(e^{-x^2})) \\
 &= D^{n+1} (-2x e^{-x^2}) \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (D^{n+1-k} e^{-x^2}) (-2D^k x) \\
 &= -2x D^{n+1} e^{-x^2} - 2(n+1) D^n e^{-x^2}
 \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}
 \varphi''_n(x) &= (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \left[ (x^2 + 1) D^n e^{-x^2} + 2x D^{n+1} e^{-x^2} - 2x D^{n+1} e^{-x^2} - 2(n+1) D^n e^{-x^2} \right] \\
 &= (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \left[ (x^2 + 1) D^n e^{-x^2} - 2(n+1) D^n e^{-x^2} \right] \\
 &= (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} D^n e^{-x^2} [x^2 + 1 - 2n - 2] \\
 &= (x^2 - 2n - 1) (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} D^n e^{-x^2} \\
 &= (x^2 - 2n - 1) \varphi_n(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

como se quería probar.

De (ii): Observemos que si  $m, n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\begin{aligned}
 \varphi''_n(x) \varphi_m(x) - \varphi''_m(x) \varphi_n(x) &= (x^2 - 2n - 1) \varphi_n(x) \varphi_m(x) - (x^2 - 2m - 1) \varphi_n(x) \varphi_m(x) \\
 &= (x^2 - 2n - 1 - x^2 + 2m + 1) \varphi_n(x) \varphi_m(x) \\
 &= 2(m - n) \varphi_n(x) \varphi_m(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Por tanto, si  $m \neq n$ , se tiene que:

$$\begin{aligned}
(\varphi_n | \varphi_m) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) \overline{\varphi_m(x)} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx \\
&= \frac{1}{2(m-n)} \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi_n''(x) \varphi_m(x) - \varphi_m''(x) \varphi_n(x)] dx \\
&= \frac{1}{2(m-n)} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R [\varphi_n''(x) \varphi_m(x) - \varphi_m''(x) \varphi_n(x)] dx
\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
&\int_{-R}^R [\varphi_n''(x) \varphi_m(x) - \varphi_m''(x) \varphi_n(x)] dx \\
&= [\varphi_n'(x) \varphi_m(x) - \varphi_m'(x) \varphi_n(x)] \Big|_{-R}^R - \int_{-R}^R (\varphi_n'(x) \varphi_m'(x) - \varphi_m'(x) \varphi_n'(x)) dx \\
&= [\varphi_n'(R) \varphi_m(R) - \varphi_m'(R) \varphi_n(R) - \varphi_n'(-R) \varphi_m(-R) + \varphi_m'(-R) \varphi_n(-R)]
\end{aligned}$$

además,

$$\begin{aligned}
\varphi_n'(x) &= \frac{d}{dx} \left( H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \right) \\
&= H_n'(x) e^{-\frac{x^2}{2}} - 2x H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \\
&= e^{-\frac{x^2}{2}} [H_n'(x) - 2x H_n(x)]
\end{aligned}$$

Por lo cual:

$$\varphi_n'(x) \varphi_m(x) = e^{-x^2} [H_n'(x) - 2x H_n(x)] H_m(x)$$

luego, al tomar el límite cuando  $R \rightarrow \infty$ , se tiene que el término  $e^{-x^2}$  domina a lo que sea que valga el producto de polinomios de la derecha con lo cual, se sigue que:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} [\varphi_n'(R) \varphi_m(R) - \varphi_m'(R) \varphi_n(R) - \varphi_n'(-R) \varphi_m(-R) + \varphi_m'(-R) \varphi_n(-R)] = 0$$

y, por ende:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R [\varphi_n''(x) \varphi_m(x) - \varphi_m''(x) \varphi_n(x)] dx = 0$$

así, se tiene que:

$$(\varphi_n | \varphi_m) = 0$$

Por tanto, el sistema  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  es un sistema ortogonal en  $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ .

De (iii): Sea  $n \in \mathbb{N}$ , entonces:

$$\begin{aligned}
\varphi_n(x) &= \varphi_n(x) \\
\Rightarrow H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} &= (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} D^n e^{-x^2} \\
\Rightarrow H_n(x) &= (-1)^n e^{x^2} D^n e^{-x^2}
\end{aligned}$$

derivando se tiene que:

$$\begin{aligned}
H_n'(x) &= \frac{d}{dx} \left( (-1)^n e^{x^2} D^n e^{-x^2} \right) \\
&= (-1)^n \left[ \frac{d}{dx} \left( e^{x^2} \right) D^n e^{-x^2} + e^{x^2} D^{n+1} e^{-x^2} \right] \\
&= (-1)^n \left[ 2x e^{x^2} D^n e^{-x^2} + e^{x^2} D^{n+1} e^{-x^2} \right] \\
&= (-1)^n e^{x^2} \left[ 2D^n e^{-x^2} + D^{n+1} e^{-x^2} \right]
\end{aligned}$$

con:

$$\begin{aligned} D^{n+1}e^{-x^2} &= D^n(-2xe^{-x^2}) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (D^{n-k}e^{-x^2})(D^k(-2x)) \\ &= -2xD^n e^{-x^2} - 2nD^{n-1}e^{-x^2} \end{aligned}$$

por tanto:

$$\begin{aligned} H'_n(x) &= (-1)^n e^{x^2} \left[ 2xD^n e^{-x^2} + D^{n+1}e^{-x^2} \right] \\ &= (-1)^n e^{x^2} \left[ 2xD^n e^{-x^2} - 2xD^n e^{-x^2} - 2nD^{n-1}e^{-x^2} \right] \\ &= (-1)^{n-1} e^{x^2} \left[ 2nD^{n-1}e^{-x^2} \right] \\ &= 2n \left[ (-1)^{n-1} e^{x^2} D^{n-1}e^{-x^2} \right] \\ &= 2nH_{n-1}(x) \end{aligned}$$

como se quería demostrar.

De (iv): Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x)^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{\left( H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \right)}^{\varphi_n(x)} \overbrace{\left( (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} D^n e^{-x^2} \right)}^{\varphi_n(x)} dx \\ &= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) D^n e^{-x^2} dx \\ &= (-1)^n \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R H_n(x) D^n e^{-x^2} dx \\ &= (-1)^n \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ H_n(x) D^{n-1} e^{-x^2} \Big|_{x=-R}^{x=R} - \int_{-R}^R H'_n(x) D^{n-1} e^{-x^2} dx \right] \\ &= (-1)^n \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ (-1)^{n-1} H_n(x) H_{n-1}(x) e^{-x^2} \Big|_{x=-R}^{x=R} - \int_{-R}^R H'_n(x) D^{n-1} e^{-x^2} dx \right] \end{aligned}$$

pero:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} (-1)^{n-1} H_n(x) H_{n-1}(x) e^{-x^2} \Big|_{x=-R}^{x=R} = \lim_{R \rightarrow \infty} P(R) e^{-R^2}$$

donde  $P(x) = (-1)^{n-1} (H_n(x) H_{n-1}(x) - H_n(-x) H_{n-1}(-x))$ . Luego el límite anterior es cero, pues la función exponencial tiende a 0 más rápido. Usando además lo obtenido en (iii), se sigue que:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x)^2 dx &= (-1)^{n-1} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R H'_n(x) D^{n-1} e^{-x^2} dx \\ &= 2n(-1)^{n-1} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R H_{n-1}(x) D^{n-1} e^{-x^2} dx \\ &= 2n(-1)^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} H_{n-1}(x) D^{n-1} e^{-x^2} dx \\ &= 2n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{n-1}(x)^2 dx \\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x)^2 dx &= 2n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{n-1}(x)^2 dx \end{aligned}$$

para probar la otra parte, veamos que:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x)^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( (-1)^0 e^{\frac{x^2}{2}} e^{-x^2} \right)^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \\ &= \pi^{1/2}\end{aligned}$$

Por inducción (no es tan complicado), se prueba que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x)^2 dx = \pi^{1/2} 2^n n!$$

con lo cual, el sistema formado por:

$$\psi_n = \frac{\varphi_n}{\pi^{1/2} 2^n n!}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}^*$  es un sistema ortonormal sobre  $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ , como se quería demostrar. ■