Lista 7.

1. Sean G un grupo y X un conjunto no vacío. Pruebe que G actúa sobre X si, y sólo si existe una función ψ de $G \times X$ en X tal que para cada $g, h \in G$ y para cada $x \in X$

   a) $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$;

   b) $e \cdot x = x$;

   c) $g \cdot X = X$,

   donde, por notación, $g \cdot x := \psi(g, x)$ y $g \cdot X = \{g \cdot x \mid x \in X\}$.

Dem:

$\Rightarrow$) Suponga que G actúa sobre X, entonces existe un homomorfismo $\varphi : G \to S_X$.
Defina $\psi : G \times X \to X$ como:

$$\forall\, g \in G \text{ y } x \in X,\ \psi(g, x) := g \cdot x = \varphi(g)(x) = \varphi_g(x)$$

Claramente ψ está bien definida. Veamos que:

a) Sean $g, h \in G$ y $x \in X$, entonces:

$$\begin{aligned}(gh)\cdot x &= \varphi(gh)(x), \text{ como } \varphi \text{ es homomorfismo:}\\ &= \varphi(g)\circ\varphi(h)(x)\\ &= \varphi(g)(\varphi(h)(x))\\ &= \varphi(g)(h\cdot x)\\ &= g\cdot(h\cdot x)\end{aligned}$$

b) Sea $x \in X$:

$$\begin{aligned}e\cdot x &= \varphi(e)(x), \text{ como } \varphi(e) = id_X, \text{ entonces:}\\ &= id(x)\\ &= x\end{aligned}$$

c) Sea $g \in G$. Entonces:

$$\begin{aligned}g\cdot X &= \{g\cdot x \mid x \in X\}\\ &= \{\varphi_g(x) \mid x \in X\}, \text{ como } \varphi_g \in S_X, \text{ entonces es biyección}\\ &= X\end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Suponga que $\exists\, \psi : G \times X \to X$ tal que se cumple lo anterior. $\forall\, g \in G$, sea $\varphi_g : X \to X$ dada como:

$$\forall\, x \in X,\ \varphi_g(x) = \Psi(g,x) := g \cdot x$$

Claramente, φ_g está bien definida. Sea ahora $\varphi: G \to S_X$ dada como:

$$\varphi(g) = \varphi_g,\ \forall\, g \in G.$$

Veamos que φ está bien definida. Sea $g \in G$ y considere $\varphi(g) = \varphi_g$. Probaremos que $\varphi_g \in S_X$.

i) φ_g es inyectiva.

Sean $x, y \in X \ni \varphi_g(x) = \varphi_g(y)$, entonces:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow g \cdot x = g \cdot y, \text{ aplicando } \varphi_{g^{-1}} \\
&\Rightarrow \varphi_{g^{-1}}(g \cdot x) = \varphi_{g^{-1}}(g \cdot x) \\
&\Rightarrow g^{-1} \cdot (g \cdot x) = g^{-1}\,(g \cdot x) \\
&\Rightarrow (g^{-1}g) \cdot x = (g^{-1}g) \cdot y \\
&\Rightarrow e \cdot x = e \cdot y \\
&\Rightarrow x = y \ (\text{por b)}).
\end{aligned}$$

ii) φ_g es suprayectiva.

Sea $x \in X$. Como $g \cdot X = X$, $\exists\, y \in X \ni$

$$\begin{aligned}
&g \cdot y = x \\
&\Rightarrow \Psi(g, y) = x \\
&\Rightarrow \varphi_g(y) = x
\end{aligned}$$

Por i) y ii), $\varphi_g \in S_X$. Claramente si $g = g' \Rightarrow \varphi_g = \varphi_{g'} \Rightarrow \varphi(g) = \varphi(g')$. Luego, φ está bien definida. Probaremos que es homomorfismo.

Sean $g, h \in G$, entonces:

$$\begin{aligned}
\forall\, x \in X,\ \varphi(gh)(x) &= (gh) \cdot x, \text{ por a)} \\
&= g \cdot (h \cdot x) \\
&= \varphi(g)(h \cdot x) \\
&= \varphi(g)(\varphi(h)(x))
\end{aligned}$$

$= \varphi(g) \circ \varphi(h)(x)$

por tanto: $\varphi(gh) = \varphi(g) \circ \varphi(h)$. Así φ es un homomorfismo de G en $S_{\underline{X}}$. Por tanto, G actúa sobre $\underline{X}$.

q.e.d.

2. Pruebe que la relación $\sigma \cdot k = \sigma(k)$ para cada $\sigma \in S_n$ y para $k \in \{1, \ldots, n\}$, determina una acción de S_n en el conjunto $\{1, \ldots, n\}$.

Dem:

Sea $\psi : S_n \times J_n \to J_n$ dada como:

$$\forall \sigma \in S_n \text{ y } \forall K \in J_n, \ \psi(\sigma, K) = \sigma \cdot K = \sigma(K)$$

Veamos que la relación anterior determina una acción de S_n sobre J_n. En efecto:

a) Sean $\sigma, \pi \in S_n$ y $K \in J_n$, entonces:

$$\begin{aligned}(\sigma \circ \pi)(K) &= \sigma \circ (\pi(K)) \\ &= \sigma \circ (\pi \cdot K) \\ &= \sigma \cdot (\pi \cdot K)\end{aligned}$$

b) Sea $id_{J_n} \in S_n$ y $K \in J_n$, entonces:

$$\begin{aligned}id_{J_n} \cdot K &= id_{J_n}(K) \\ &= K\end{aligned}$$

c) Sea $\sigma \in S_n$, Como σ es biyectiva:

$$\begin{aligned}J_n &= \{\sigma(K) \mid K \in J_n\} \\ &= \sigma \circ J_n\end{aligned}$$

Por a)–c), S_n actúa sobre J_n.

q.e.d.

3. Sean H, K subgrupos de un grupo G. Pruebe lo siguiente:

a) $hKh^{-1} \cong K$, para cada $h \in H$;

b) Sea $X = \{L \mid L < G\}$. La relación $h \cdot L = hLh^{-1}$ para cada $h \in H$ y para cada $L \in X$, determina una acción de H en X. Calcule las órbitas y estabilizadores. ¿Cuántos elementos tienen las órbitas? ¿Cuántos puntos fijos tiene?

Dem:

De a):

Sea $h \in H$. Considere $f: K \to hKh^{-1}$, dada como:

$$\forall k \in K,\ f(k) = hkh^{-1}$$

Claramente f está bien definida. Veamos que es isomorfismo:

i) Sean $k_1, k_2 \in K$ m $f(k_1) = f(k_2)$:

$$f(k_1) = f(k_2) \Rightarrow hk_1h^{-1} = hk_2h^{-1}$$
$$\Rightarrow k_1 = k_2$$

ii) Sea $hkh^{-1} \in hKh^{-1}$, $\exists\, k \in K$ m

$$f(k) = hkh^{-1}.$$

iii) Sean $k_1, k_2 \in K$. Entonces:

$$\begin{aligned} f(k_1k_2) &= hk_1k_2h^{-1} \\ &= (hk_1h^{-1})(hk_2h^{-1}) \\ &= f(k_1)f(k_2) \end{aligned}$$

Por i) - iii), f es isomorfismo. Así $K \overset{f}{\cong} hKh^{-1}$.

De b):

Veamos que la relación determina una acción.

iv) Sean $h, h_1 \in H$. Veamos que:

$$\begin{aligned} \forall L \in \overline{X},\quad (hh_1) \cdot L &= hh_1L(hh_1)^{-1} \\ &= h(h_1Lh_1^{-1})h^{-1} \\ &= h \cdot (h_1Lh_1^{-1}), \text{ pues } h_1Lh_1^{-1} \in \overline{X} \\ &= h \cdot (h_1 \cdot L) \end{aligned}$$

v) Sea $e \in H$ y $L \in \overline{X}$, entonces:

$$e \cdot L = eLe^{-1} = eLe = L$$

vi) Sea $h \in H$. Veamos que:

$$h\cdot \overline{X} = \{ h\lambda h^{-1} \mid \lambda \in \overline{X} \}$$

Como $h\lambda h^{-1} < G$, $\forall \lambda \in \overline{X}$, entonces $h\cdot \overline{X} \subseteq \overline{X}$. Sea $\lambda \in \overline{X}$, como $h^{-1}\lambda h < G$, entonces $\lambda = h\cdot(h^{-1}\lambda h)$, con $h^{-1}\lambda h \in \overline{X} \Rightarrow \lambda \in h\cdot \overline{X}$. Así: $\overline{X} \subseteq h\cdot \overline{X}$.

Por tanto, $h\cdot \overline{X} = \overline{X}$.

Por $iv) - vi)$, H actúa sobre $\overline{X}$.

Veamos las órbitas. Sea C la órbita de H en $\overline{X}$ con representante $\lambda \in \overline{X}$. Entonces:

$$\begin{aligned} C_\lambda &= \{ M \in \overline{X} \mid M = h\cdot \lambda \text{ para algún } h \in H \} \\ &= \{ M \in \overline{X} \mid M = h\lambda h^{-1} \text{ para algún } h \in H \} \\ &= \{ h\lambda h^{-1} \mid h \in H \} \end{aligned}$$

Si $H \subseteq \lambda$, entonces $h\lambda h^{-1} = \lambda$ (fácil de probar). Entonces $C_\lambda = \{\lambda\} \Rightarrow \lambda \in \overline{X}^H$. De esta forma:

$$H_\lambda = \{ h \in H \mid h\cdot \lambda = \lambda \} = H$$

q.e.d.

4. Sea G un grupo y N un subgrupo normal abeliano. Pruebe que G/N actúa sobre N por conjugación.

Dem:

$\forall g \in G$, definimos la acción:

$$(Ng)\cdot n = gng^{-1}, \ \forall n \in N.$$

Veamos que está bien definida. Sea $g \in G$ y $n \in N$, como $N \triangleleft G$, $gng^{-1} \in N$, así: $(Ng)\cdot n \in N$.

Sean ahora $g_1, g_2 \in G$ $\mid$ $Ng_1 = Ng_2$, entonces $\exists\, m \in N$ $\mid$ $g_1 g_2^{-1} = m \Rightarrow g_1 = m g_2$.

Así, si $n \in N$:

$$(Ng_1)\cdot n = g_1 n g_1^{-1} = m g_2 n g_2^{-1} m^{-1}$$

Como N es abeliano:

$$= m \cdot m^{-1} \cdot g_2 n g_2^{-1}, \text{ pues } g_2 n g_2^{-1} \in N.$$
$$= g_2 n g_2^{-1}$$
$$= (Ng_2) \cdot n$$

Así, la relación $\varphi(Ng, n) = Ng \cdot n$ está bien definida. Veamos que:

a) Sean $g_1, g_2 \in G$ y $n \in N$. Entonces:

$$(Ng_1 Ng_2) \cdot n = (Ng_1 g_2) \cdot n$$
$$= g_1 g_2 n g_2^{-1} g_1^{-1}$$
$$= g_1 (Ng_2 \cdot n) g_1^{-1}$$
$$= Ng_1 \cdot (Ng_2 \cdot n)$$

b) Sea $e \in G$ y $n \in N$, entonces:

$$Ne \cdot n = e \cdot n e^{-1}$$
$$= n$$

c) Sea $g \in G$. Entonces:

$$Ng \cdot N = gNg^{-1}, \text{ como } N \triangleleft G:$$
$$= N$$

Por a)-c), G/N actúa sobre N por conjugación.

$\mathcal{Q.E.D.}$

5. Sean G un grupo y $a \in G$ el cual tiene exactamente dos conjugados. Pruebe que G tiene un subgrupo propio normal $\neq \langle e \rangle$.

Dem:

6. Sea G un grupo actuando sobre un conjunto X el cual tiene al menos dos elementos, y la acción es transitiva, es decir, se cumple que para cada $x, y \in X$ existe $g \in G$ tal que $g \cdot x = y$. Pruebe lo siguiente

a) Para cada $x \in X$, $G \cdot x = X$;

b) Todos los estabilizadores G_x ($x \in X$) son conjugados, es decir, si $x, y \in X$ entonces existe $g \in G$ tal que $G_x = gG_yg^{-1}$;

c) Si G tiene la propiedad: $\{g \in G \mid g \cdot x = x, \ \forall x \in X\} = \langle e \rangle$, y N es un subgrupo normal de G tal que está contenido en G_x para algún $x \in X$, entonces $N = \langle e \rangle$;

d) $[G : G_x] = [G : G_y]$ para cada $x, y \in X$;

e) Supóngase que $|X| = [G : G_x]$ para cada $x \in X$. Si G es finito entonces $|X|$ divide a $|G|$.

Dem:

De a):

Sea $x \in \overline{X}$. Claramente $G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\} \subseteq \overline{X}$. Sea $y \in \overline{X}$, como la acción es transitiva, $\exists \ g \in G \ \text{m} \ g \cdot x = y \Rightarrow y \in G \cdot x$. Así $G \cdot x = \overline{X}$.

De b):

Sean $x, y \in \overline{X}$, los estabilizadores de x y y están dados por:

$$G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\} \quad y \quad G_y = \{g \in G \mid g \cdot y = y\}$$

por ser la acción transitiva, $\exists \ g \in G \ \text{m} \ x = g \cdot y$. Veamos que

$$g_1 \in G_x \Leftrightarrow g_1 \cdot x = x \Leftrightarrow g_1 \cdot (g \cdot y) = g \cdot y \Leftrightarrow (g_1 g) \cdot y = g \cdot y \Leftrightarrow (g^{-1} g_1 g) \cdot y = y$$

$$\Leftrightarrow g^{-1} g_1 g \in G_y \Leftrightarrow g_1 \in g G_y g^{-1}$$

Por tanto, $G_x = g G_y g^{-1}$

De c):

Como $N \subseteq G_x$, y $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\} \subseteq \{g \in G \mid g \cdot x = x\} = \langle e \rangle$, entonces $N = \langle e \rangle$.

De d):

Como $[G : G_x] = |G \cdot x|$ y $[G : G_y] = |G \cdot y|$, y $|G \cdot x| = |\overline{X}| = |G \cdot y|$, entonces $[G : G_x] = [G : G_y]$, $\forall x, y \in \overline{X}$.

De e):

Por la ecuación de clase:

$$|G| = |X^G| + \sum_{x \in R \setminus X^G} [G : G_x]$$

Veamos que $X^G = \emptyset$. Suponga que no, $\exists\, x \in X^G$, como $x \in X^G$:

$$g \cdot x = x, \ \forall\, g \in G.$$

Como X tiene más de 2 elementos, $\exists\, y \in X$ m $y \neq x$. Por hip. $\exists\, g \in G$ m

$$y = g \cdot x \ \text{\#c}.$$

Por tanto, $X^G = \emptyset$. Así:

$$|G| = \sum_{x \in R} [G : G_x] = \sum_{x \in R} |X| = |R| \cdot |X|$$

$$\Rightarrow |X| \mid |G|$$

q.e.d.

7. Sean G un grupo finito y H un subgrupo de G tal que $|H| = p^n$ con p número primo y $n \geq 0$. Sea X el conjunto de clases laterales izquierdas de H en G. Pruebe lo siguiente:

   a) H actúa sobre X por translación izquierda;

   b) $[\mathrm{N}_G(H) : H] \equiv [G : H] \bmod p$;

   c) Si p divide a $[G : H]$, entonces $\mathrm{N}_G(H) \neq H$.

Todo lo anterior se hizo en clase.