Lista 1 de Ejercicios Lógica Matemática: Lógica Proposicional

Cristo Daniel Alvarado

23 de septiembre de 2024

1.1. Ejercicios

Definición 1.1.1
Una **conectiva booleana n-aria** es una función $B : \{T, F\}^n \to \{T, F\}$.

Observación 1.1.1
La idea de la función anterior es que se codifique una tabla de verdad.

Ejercicio 1.1.1
Considere la conectiva booleana dada por:

$$\begin{array}{ll} B(T,T,T) = F, & B(F,T,T) = F, \\ B(T,T,F) = F, & B(F,T,F) = T, \\ B(T,F,T) = F, & B(F,F,T) = T, \\ B(T,F,F) = T, & B(F,F,F) = T, \end{array}$$

escriba una fórmula bien formada, utilizando el conjunto de conectivas $\{\neg, \wedge, \vee\}$ que realice esta función booleana.

Solución:
Sea $B : \{T, F\}^3 \to \{T, F\}$ dada por:

$$B(p_1, p_2, p_3) = (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3)$$

se verifica rápidamente que ésta función B satiface lo deseado. $\square$

Ejercicio 1.1.2
Muestre que el conjunto de conectivas $\{\perp, \Rightarrow\}$ es completo (donde $\perp$ es la conectiva 0-aria con valor constante F).

Demostración:
Basta con ver que si φ y ψ son fórmulas, entonces $\neg\varphi$ y $\varphi \Rightarrow \psi$ se pueden expresar con conectivas $\{\perp, \Rightarrow\}$.

En efecto, ya se tiene la implicación. Veamos que:

$$\neg\varphi \equiv \varphi \Rightarrow \perp$$

para un modelo m se tiene que:

φ	$\perp$	$\varphi \Rightarrow \perp$	$\neg\varphi$
T	F	F	F
F	F	T	T

es decir, que en cualquier caso $\overline{m}(\neg\varphi) = \overline{m}(\perp \Rightarrow \varphi)$. Se sigue entonces la equivalencia. Como $\{\neg, \Rightarrow\}$ es un conjunto completo de conectivas, también lo debe ser pues $\{\perp, \Rightarrow\}$. $\blacksquare$

Ejercicio 1.1.3
Reescriba las siguientes fórmulas en notación polaca a notación usual:

a). $\neg\neg \Rightarrow \vee \wedge p_3 p_8 \neg p_{10} \neg \vee p_1 p_5$.

b). $\wedge \neg \Rightarrow p_3 \vee p_4 p_1 \iff \vee \neg p_{10} \iff p_{15} p_{18} q$.

c). $\wedge \Rightarrow p_3 \wedge p_2 p_1 \neg \vee \wedge p_4 p_5 \neg p_{10}$.

Solución:

Veamos que

a). $\neg\neg \Rightarrow \vee \wedge p_3 p_8 \neg p_{10} \neg \vee p_1 p_5 \equiv \neg\neg(((p_3 \wedge p_8) \vee \neg p_{10}) \Rightarrow \neg(p_1 \vee p_5))$.

b). $\wedge\neg \Rightarrow p_3 \vee p_4 p_1 \iff \vee \neg p_{10} \iff p_{15} p_{18} q \equiv (\neg(p_3 \Rightarrow (p_4 \vee p_1))) \wedge ((\neg p_{10} \vee (p_{15} \iff p_{18})) \iff q)$.

c). $\wedge \Rightarrow p_3 \wedge p_2 p_1 \neg \vee \wedge p_4 p_5 \neg p_{10} \equiv (p_3 \Rightarrow (p_2 \vee p_1)) \wedge \neg((p_4 \wedge p_5) \vee \neg p_1 0)$.

□

Ejercicio 1.1.4

Demuestre que toda fórmula bien formada (en el formato de clase, es decir, en notación polaca) en la que no aparezca el símbolo $\neg$ debe tener longitud impar.

Demostración:

Procederemos por inducción del número de implicaciones $\Rightarrow$, digamos n, en la cadena de la fórmula φ.

- Si $n = 0$, entonces $\varphi \equiv p_1$, siendo p_1 una variable. Luego la longitud de φ es 1 que es impar.
- Si $n = 1$, entonces $\varphi \equiv \Rightarrow p_1 p_2$, siendo p_1 y p_2 variables. Luego la longitud de φ es 3 que es impar.
- Suponga que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \in [\![0, n]\!]$ se cumple que toda FBF que no contenga a $\neg$ y con una cantidad de implicaciones k tiene longitud impar.

  Sea φ una fórmula bien formada que no contenga $\neg$ y que tiene $n + 1$ implicaciones, es decir que es de la forma:
  $$\varphi \equiv \Rightarrow \psi_1 \psi_2$$
  donde ψ_1, ψ_2 son FBF. Como φ tiene $n + 1$ implicaciones, entonces debe suceder que ψ_1 y ψ_2 contengan entre 0 y n implicaciones. Por hipótesis de inducción, tanto ψ_1 como ψ_2 tienen longitud impar, luego φ tiene longitud la suma de estos dos impares (que es un par) más 1 (la primera implicación). Por tanto, φ tiene longitud impar.

Por inducción se sigue el resultado. ■

Ejercicio 1.1.5

Sea φ una fórmula bien formada. Sea c la cantidad de veces que aparece el símbolo $\Rightarrow$ en la fórmula φ, y sea s la cantidad de veces que aparecen variables en la fórmula φ (en donde, si alguna variable aparece varias veces, se cuentan cada una de sus apariciones por separado). Demuestre que
$$s = c + 1$$

Demostración:

■

Ejercicio 1.1.6
Sea φ una fórmula bien formada, y suponga que todos los símbolos de la variable que aparecen en φ se encuentran entre $p_1, ..., p_n$. Supóngase que m, m' son dos modelos que satisfacen $m(p_i) = m'(p_i)$ para todo $i \in [\![1, n]\!]$. Demuestre que

$$\overline{m}(\varphi) = \overline{m'}(\varphi)$$

Demostración:

$\blacksquare$

Ejercicio 1.1.7
Demuestre o refute, para un conjunto de fórmulas Σ, y φ, ψ dos fórmulas:

a). Si o bien $\Sigma \vDash \varphi$, o bien $\Sigma \vDash \psi$, entonces $\Sigma \vDash \varphi \wedge \psi$.

b). Si $\Sigma \vDash \varphi \wedge \psi$ entonces o bien $\Sigma \vDash \varphi$, o bien $\Sigma \vDash \psi$.

Solución:

$\square$

Ejercicio 1.1.8 (**Sustitución**)
Suponga que tenemos una lista de fórmulas bien formadas $\varphi_1, ..., \varphi_n, ...$. Quisiéramos definir formalmente la opearción que dada una fórmula bien formada ψ, reemplaza cada aparición del símbolo de la variable p_i con la fórmula φ_i, de modo que se obtiene una nueva fórmula bien formada ψ^*. Por ejemplo, si ψ es $p_4 \Rightarrow p_{32}$, entonces ψ^* es $\varphi_4 \Rightarrow \varphi_2$.

a). ¿Cómo definiría formalmente la operación $\psi \mapsto \psi^*$ por recursión?

b). Sea m cualquier modelo, y defina m' como el modelo dado por $m'(p_i) = \overline{m}(\varphi_i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Demuestre que $\overline{m'}(\psi) = \overline{m}(\psi^*)$, para cada fórmula bien formada ψ.

c). Concluya que si ψ es una tautología, entonces ψ^* también lo es.

Demostración:

$\blacksquare$

Ejercicio 1.1.9
Sea Σ un conjunto de fórmulas bien formadas. Definimos la operación $\mathcal{C}(\Sigma)$ mediante

$$\mathcal{C}(\Sigma) = \Sigma \cup \left\{\varphi \middle| \neg\varphi \in \Sigma\right\} \cup \left\{\varphi \middle| \varphi \wedge \psi \in \Sigma \text{ o } \psi \wedge \varphi \in \Sigma \text{ para alguna FBF } \psi\right\}$$

Definimos también recursivamente, para cada conjunto de fórmulas bien formadas Σ los conjuntos $\mathcal{C}^n(\Sigma)$ como sigue:

$$\mathcal{C}^0(\Sigma) = \Sigma$$
$$\mathcal{C}^{n+1}(\Sigma) = \mathcal{C}(\mathcal{C}^n(\Sigma)), \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

y más aún, se define

$$\mathcal{C}^\infty(\Sigma) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^n(\Sigma)$$

Haga lo siguiente:

a). Considere $\Sigma = \{p_1 \wedge \neg p_2, \neg(p_3 \wedge (p_4 \wedge p_5))\}$. Calcule $\mathcal{C}(\Sigma)$ y $\mathcal{C}(\mathcal{C}(\Sigma))$.

b). Si Σ es como en el inciso (a), ¿a qué es igual $\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$?

c). Ahora, sea

$$\Sigma = \left\{p_n \wedge \cdots p_n \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$$

¿A qué es igual $\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$?

d). ¿Se te puede ocurrir de alguna manera intuitiva (verbal, corta) de describir a qué es igual $\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$?

Solución:

□

Ejercicio 1.1.10
Demuestre que existe una demostración formal de los siguientes argumentos (en su defecto, complete las demostraciones):

Solución:

a).

$$\begin{array}{lllll}
1) & A & \Rightarrow & (B \wedge \neg C) & \text{Premisa} \\
2) & (B \vee C) & \Rightarrow & D & \text{Premisa} \\
3) & A & & & \text{Premisa} \\
4) & B & \wedge & \neg C & \text{1,3 M.P.} \\
5) & B & & & \text{4 Simp.} \\
6) & B & \vee & C & \text{5 Ad.} \\
7) & D & & & \text{2,6 M.P.} \\
\hline
 & & \therefore & D &
\end{array}$$

b).

$$\begin{array}{lllll}
1) & A & \Rightarrow & B & \text{Premisa} \\
2) & A & \vee & (B \vee \neg C) & \text{Premisa} \\
3) & \neg B & & & \text{Premisa} \\
4) & \neg A & & & \text{1,2 M.T.} \\
5) & B & \vee & \neg C & \text{3,2 S.D.} \\
6) & \neg C & & & \text{5,3 S.D.} \\
7) & \neg C & \wedge & \neg B & \text{5,3 Conj.} \\
\hline
 & & \therefore & \neg C \wedge \neg B &
\end{array}$$

c).

$$
\begin{array}{lrllll r}
 & 1) & A & \Rightarrow & B & & \text{Premisa} \\
 & 2) & B & \Rightarrow & C & & \text{Premisa} \\
 & 3) & (A \Rightarrow C) & \Rightarrow & (B \Rightarrow D) & & \text{Premisa} \\
 & 4) & (A \Rightarrow D) & \Rightarrow & E & & \text{Premisa} \\
| \longrightarrow & 5) & A & & & & \text{Sup.} \\
| & 6) & B & & & & \text{1,5 M.P.} \\
| & 7) & C & & & & \text{2,6 M.P.} \\
\hline
 & 8) & A & \Rightarrow & C & & \text{5-7 M.D.} \\
 & 9) & B & \Rightarrow & D & & \text{3,8 M.P.} \\
| \longrightarrow & 10) & A & & & & \text{Sup.} \\
| & 11) & B & & & & \text{1,10 M.P.} \\
| & 12) & D & & & & \text{9,11 M.P.} \\
\hline
 & 13) & A & \Rightarrow & D & & \text{10-12 M.D.} \\
 & 14) & E & & & & \text{4,14 M.P.} \\
\hline
 & & & \therefore & E & &
\end{array}
$$

d).

$$
\begin{array}{rlllr}
1) & A & \Rightarrow & (B \wedge C) & \text{Premisa} \\
2) & \neg A & \Rightarrow & ((D \Rightarrow E) \wedge (F \Rightarrow H)) & \text{Premisa} \\
3) & (B \wedge C) & \vee & ((\neg A \Rightarrow D) \wedge (\neg A \Rightarrow F)) & \text{Premisa} \\
4) & \neg(B \wedge C) & \wedge & \neg(H \wedge D) & \text{Premisa} \\
5) & \neg(B & \wedge & C) & \text{4 Simp.} \\
6) & \neg A & & & \text{1,5 M.T.} \\
7) & (D \Rightarrow E) & \wedge & (F \Rightarrow H) & \text{2,6 M.P.} \\
8) & D & \Rightarrow & E & \text{7 Simp.} \\
9) & F & \Rightarrow & H & \text{7 Conm. y Simp.} \\
10) & (\neg A \Rightarrow D) & \wedge & (\neg A \Rightarrow F) & \text{3,5 S.D.} \\
11) & \neg A & \Rightarrow & D & \text{10 Simp.} \\
12) & \neg A & \Rightarrow & F & \text{10 Conm. y Simp.} \\
13) & D & & & \text{11,6 M.P.} \\
14) & F & & & \text{12,6 M.P.} \\
15) & E & & & \text{8,13 M.P.} \\
16) & H & & & \text{9,14 M.P.} \\
17) & E & \wedge & H & \text{15,16 Conj.} \\
\hline
 & & \therefore & E \wedge H &
\end{array}
$$

e).

$$
\begin{array}{rlllr}
1) & (A \Rightarrow B) & \wedge & (C \Rightarrow D) & \text{Premisa} \\
2) & (B \Rightarrow E) & \wedge & (D \Rightarrow F) & \text{Premisa} \\
3) & (\neg A \Rightarrow E) & \wedge & (\neg B \Rightarrow D) & \text{Premisa} \\
4) & \neg E & & & \text{Premisa} \\
5) & A & \Rightarrow & B & \text{1 Simp.} \\
6) & C & \Rightarrow & D & \text{1 Conm. y Simp.} \\
7) & B & \Rightarrow & E & \text{2 Simp.} \\
8) & D & \Rightarrow & F & \text{2 Conm. y Simp.} \\
\hline
 & & \therefore & \neg C \vee \neg B &
\end{array}
$$

f).

$$
\begin{array}{rlllr}
1) & A & \Rightarrow & (B \Rightarrow C) & \text{Premisa} \\
\hline
 & & \therefore & B \Rightarrow (A \Rightarrow C) &
\end{array}
$$

g).

$$
\begin{array}{rlllr}
1) & A & \Rightarrow & (B \wedge C) & \text{Premisa} \\
\hline
 & & \therefore & A \Rightarrow B &
\end{array}
$$

h).

$$
\begin{array}{rlllr}
1) & A & \Rightarrow & (B \wedge C) & \text{Premisa} \\
2) & C & \Rightarrow & (D \wedge E) & \text{Premisa} \\
\hline
 & & \therefore & A \Rightarrow (B \wedge D) &
\end{array}
$$

i).
$$\begin{array}{lllll} 1) & A & \Rightarrow & B & \text{Premisa} \\ 2) & C & \Rightarrow & B & \text{Premisa} \\ \hline & \therefore & (A \vee C) \Rightarrow B & & \end{array}$$

j).
$$\begin{array}{lllll} 1) & ((A \vee B) \Rightarrow C) & \wedge & (\neg D \Rightarrow (B \wedge \neg C)) & \text{Premisa} \\ \hline & & \therefore & A \Rightarrow D & \end{array}$$

k).
$$\begin{array}{lllll} 1) & (A \vee B) & \Rightarrow & C & \text{Premisa} \\ 2) & D & \Rightarrow & (E \wedge F) & \text{Premisa} \\ \hline & & \therefore & (A \Rightarrow C) \wedge (D \Rightarrow F) & \end{array}$$

l).
$$\begin{array}{lllll} 1) & (A \Rightarrow B) & \wedge & (C \Rightarrow D) & \text{Premisa} \\ 2) & (B \vee D) & \Rightarrow & ((E \Rightarrow (E \vee F)) \Rightarrow A \wedge C) & \text{Premisa} \\ \hline & & \therefore & A \iff C & \end{array}$$

m).
$$\begin{array}{lllll} 1) & A & \vee & (B \Rightarrow C) & \text{Premisa} \\ 2) & (B \Rightarrow (B \wedge C)) & \Rightarrow & (D \vee E) & \text{Premisa} \\ 3) & (D \Rightarrow A) & \wedge & (E \Rightarrow F) & \text{Premisa} \\ \hline & & \therefore & A \vee F & \end{array}$$

n).
$$\begin{array}{lllll} 1) & (A \Rightarrow (\neg B \wedge \neg C)) & \wedge & (D \Rightarrow \neg(B \vee C)) & \text{Premisa} \\ 2) & (\neg E \Rightarrow A) & \wedge & (\neg F \Rightarrow D) & \text{Premisa} \\ 3) & (E \Rightarrow B) & \wedge & (F \Rightarrow C) & \text{Premisa} \\ \hline & & \therefore & B \iff C & \end{array}$$

o).
$$\begin{array}{lllll} 1) & (A \vee B) & \Rightarrow & (C \Rightarrow D) & \text{Premisa} \\ 2) & (C \Rightarrow (C \wedge D)) & \Rightarrow & E & \text{Premisa} \\ 3) & E & \Rightarrow & ((\neg F \vee \neg\neg F) \Rightarrow (A \wedge F)) & \text{Premisa} \\ \hline & & \therefore & A \iff E & \end{array}$$

p).
$$\begin{array}{ll} \hline \therefore & (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \end{array}$$

q).
$$\begin{array}{ll} \hline \therefore & (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \wedge C) \Rightarrow (B \wedge C)) \end{array}$$

r).
$$\begin{array}{ll} \hline \therefore & ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A \end{array}$$

s).
$$\begin{array}{lllll} 1) & A & \vee & (B \wedge C) & \text{Premisa} \\ 2) & A & \Rightarrow & C & \text{Premisa} \\ \hline & & \therefore & C & \end{array}$$

t).
$$\begin{array}{lllll} 1) & (A \vee B) & \Rightarrow & (C \Rightarrow D) & \text{Premisa} \\ 2) & (\neg D \vee E) & \Rightarrow & (A \wedge C) & \text{Premisa} \\ \hline & & \therefore & D & \end{array}$$

u).
$$\begin{array}{lllll} 1) & (A \vee B) & \Rightarrow & (C \wedge D) & \text{Premisa} \\ 2) & (C \vee E) & \Rightarrow & (\neg F \wedge H) & \text{Premisa} \\ 3) & (F \vee G) & \Rightarrow & (A \wedge I) & \text{Premisa} \\ \hline & & \therefore & \neg F & \end{array}$$

v).
$$\begin{array}{ll} \hline \therefore & (A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow C) \end{array}$$

w).
$$\begin{array}{ll} \hline \therefore & A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \end{array}$$

x).
$$\begin{array}{ll} \hline \therefore & (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)) \end{array}$$

y).
$$\begin{array}{ll} \hline \therefore & (A \wedge B) \Rightarrow B \end{array}$$

z). $\dfrac{}{\therefore \quad A \Rightarrow (B \Rightarrow A \wedge B)}$

$\square$