Lista Ejercicios Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

3 de junio de 2024

Índice general

Capítulo 1

Lista 4

Ejercicio 1.0.1
Haga lo siguiente:

I. Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Defina $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como:

$$P(x_1, ..., x_n) = e^{-\sum_{k=1}^{n}|x_k|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Fije $\nu \in \mathbb{N}$, **demuestre** la fórmula:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x)P\left(\frac{x}{\nu}\right)\, dx = (2\nu)^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x_1, ..., x_n)}{(x + \nu^2 x_1^2) \cdots (x + \nu^2 x_n^2)}\, dx_1 \cdots dx_n$$

II. **Deduzca** que si $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \cap \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ y $\mathcal{F}f \geqslant 0$, entonces $\mathcal{F}f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

Sugerencia. Aplique el teorema de Beppo-Levi.

Demostración:

■

Ejercicio 1.0.2
Sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Se supone que $f(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. **Pruebe** que si $x \neq 0$, entonces

$$\mathcal{F}f(0) > |\mathcal{F}f(x)|$$

Sugerencia. Una vez que ha demostrado $|\mathcal{F}f(x)| \leqslant \mathcal{F}f(0)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, Para demostrar la desigualdad estricta para $x \neq 0$ proceda por reducción al absurdo y use el Problema 2 de la Lista 6 de Análisis Matemático II.

Demostración:

■

Ejercicio 1.0.3
Haga lo siguiente:

I. Sean $a > 0$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. **Pruebe** que la función $x \mapsto (\cos \lambda x)/(x^2 + a^2)$ es integrable en $[0, \infty[$. **Muestre** que si $\lambda \neq 0$, la función $x \mapsto (x \sin \lambda x)/(x^2 + a^2)$ no es integrable en $[0, \infty[$, pero existe la integral impropia

$$\int_0^{\to\infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2}\, dx$$

Sugerencia. Muestre que

$$\left|\frac{x\sin\lambda x}{x^2+a^2}\right| \underset{x\to\infty}{\sim} \left|\frac{\sin\lambda x}{x}\right|$$

Para probar la existencia de la integral impropia use los criterios de Abel.

II. Recuerde que la función $x \mapsto (2a)/(x^2+a^2)$ es la transformada de Fourier de la función $x \mapsto e^{-a|x|}$. Usando el teorema de inversión de Fourier, **demuestre** que

$$\int_0^\infty \frac{\cos\lambda x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}e^{-a|\lambda|}$$

III. Usando el inciso (ii), calcule la integral impropia

$$\int_0^{\to\infty} \frac{x\sin\lambda x}{x^2+a^2}\,dx$$

Sugerencia. Para $\lambda \neq 0$ defina

$$\Phi(\lambda) = \int_0^{\to\infty} \frac{\cos\lambda x}{x^2+a^2}\,dx$$

Calcule $\Phi'(\lambda)$ primero suponiendo $\lambda > \lambda_0$, donde $\lambda_0 > 0$ es arbitrario fijo, de forma análoga para $\lambda < 0$ y finalmente para $\lambda = 0$.

Demostración:

■

Ejercicio 1.0.4

Sea H una matriz simétrica real $n \times n$ positiva definida, es decir, la forma cuadrática $\langle x|Hx\rangle$ sobre $\mathbb{R}^n$ es positiva definida. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la función

$$f(x) = e^{-\langle Hx|x\rangle}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Demuestre que f es integrable y que

$$\mathcal{F}f(x) = \frac{\pi^{n/2}}{(\det H)^{1/2}} e^{-\frac{1}{4}\langle H^{-1}x|x\rangle}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Sugerencia. f es medible. Para ver que es integrable, pruebe que $\langle Hx|x\rangle \geqslant m\|x\|^2$, donde

$$m = \min_{x\in S}\{\langle Hx|x\rangle\} > 0$$

con $S = \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| \|x\| = 1\right\}$. Se sabe de álgebra que existe una matriz ortogonal U tal que $U^{-1}HU = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$, donde $\lambda_1, ..., \lambda_n$ son números estrictamente positivos. En la integral $\mathcal{F}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x|y\rangle}e^{-\langle Hx|x\rangle}\,dy$ haga el cambio de variable $y = Uz$ siendo tal que $|\det U| = 0$, $\langle Ur|Us\rangle = \langle r|s\rangle$ (y lo análogo para U^{-1}) y observe que $(1/\lambda_1, ..., 1/\lambda_n) = U^{-1}H^{-1}U$.

Demostración:

■

Ejercicio 1.0.5

Recuerde que si $f = \chi_{[-a,a]}$, entonces

$$\mathcal{F}f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin ax}{x}, \quad \forall x \neq 0$$

Deduzca la fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin ax}{x}\right)^2 dx = \pi a$$

Demostración:

■

Ejercicio 1.0.6
Haga lo siguiente:

I.