Lista 3 de Ejercicios Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

27 de mayo de 2024

Capítulo 3

Ejercicios

Ejercicio 3.1.1
Pruebe que, para todo $x \in]0, 2\pi[$,

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

Usando la identidad de Parseval, **demuestre** que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Demostración:
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}, \quad \forall x \in [0, 2\pi[$$

y extiéndase por periodicidad a todo $\mathbb{R}$. Es claro que $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{R})$, sea ahora $x \in]0, 2\pi[$. Por el teorema fundamental para la convergencia puntual de una serie de Fourier hay que encontrar un $0 < \delta < \pi$ tal que

$$\lim_{m \to \infty} \int_0^{\delta} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) dt$$

tomemos $\delta = \min\{x, 2\pi - x\} > 0$. Se tienen dos casos:

1. $\delta = x$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^{\delta} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) dt & \\
&= \int_0^{\delta} \frac{1}{t}\left[\frac{\pi - x - t}{2} + \frac{\pi - x + t}{2} - \frac{2(\pi - x)}{2}\right] \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) dt \\
&= \int_0^{\delta} \frac{1}{t}\left[\pi - x - \pi + x\right] \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) dt \\
&= \int_0^{\delta} 0\, dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

   por tanto, el límite cuando $m \to \infty$ resulta que da cero.

2. $\delta = 2\pi x$. El caso es análogo al anterior.

por ambos incisos se concluye que

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^\delta \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)dt=0$$

por tanto, la serie de Fourier de f converge a f puntualmente en x. Computemos ahora los coeficientes de la serie de Fourier de f. Si $n\geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi-x}{2}\cos nx dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos nx dx - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx dx \text{ haciendo } u=nx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2n\pi}\cos u\frac{du}{n} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2n\pi}\frac{u}{n}\cos u\frac{du}{n} \\
&= \frac{1}{2n}\sin u\Big|_0^{2n\pi} - \frac{1}{2\pi n^2}\int_0^{2n\pi} u\cos u du \\
&= \frac{1}{2n}[\sin 2\pi n - \sin 0] - \frac{1}{2\pi n^2}\left(u\sin u\Big|_0^{2n\pi} + \int_0^{2n\pi}\sin u du\right) \\
&= -\frac{1}{2\pi n^2}\left(u\sin u\Big|_0^{2n\pi} + \int_0^{2n\pi}\sin u du\right) \\
&= -\frac{1}{2\pi n^2}\left([2n\pi\sin 2n\pi - 0] - \cos u\Big|_0^{2n\pi}\right) \\
&- \frac{1}{2\pi n^2}(0-0-1+1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

para todo $n \geqslant 0$. Si $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\sin nx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} \frac{\pi - x}{2}\sin nx dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} \sin nx dx - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} x\sin nx dx \text{ haciendo } u = nx \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{2n\pi} \sin u\frac{du}{n} - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2n\pi} \frac{u}{n}\sin u\frac{du}{n} \\
&= \frac{1}{2n}(-\cos u)\Big|_{0}^{2n\pi} - \frac{1}{2\pi n^2}\int_{0}^{2n\pi} u\sin u du \\
&= \frac{1}{2n}(-\cos 2n\pi + 1) - \frac{1}{2\pi n^2}\left(-u\cos u\Big|_{0}^{2n\pi} + \int_{0}^{2n\pi} \cos u du\right) \\
&= \frac{1}{2n}(-1 + 1) - \frac{1}{2\pi n^2}\left(-2n\pi\cos 2n\pi + 0 + \sin u\Big|_{0}^{2n\pi}\right) \\
&= -\frac{1}{2\pi n^2}\left(-2n\pi\cos 2n\pi + \sin 2n\pi - \sin 0\right) \\
&= -\frac{1}{2\pi n^2}\left(-2n\pi + \sin 2n\pi - \sin 0\right) \\
&= -\frac{1}{2\pi n^2}\left(-2n\pi\right) \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Por tanto, la serie de Fourier de f en $x \in]0, 2\pi[$ está dada por:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos kx + b_k\sin kx] = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

Por el criterio de Dini se sigue que

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}, \quad \forall x \in]0, 2\pi[$$

Ahora, como $x \mapsto \frac{\pi - x}{2}$ es una función en $\mathcal{L}_2^{2\pi}$, por Parseval se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[|a_n|^2 + |b_n|^2\right] &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\pi - x}{2}\right|^2 \, dx \\
\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} |\pi - x|^2 \, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} |\pi - x|^2 \, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x)^2 \, dx \text{ haciendo el cambio de variable } u = \pi - x \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{0} -u^2 \, du \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{-u^3}{3}\Big|_{\pi}^{0} \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot [-\frac{0}{3} + \frac{\pi^3}{3}] \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi^3}{3} \\
&= \frac{\pi^2}{6} \\
\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}$$

Como se quería demostrar. ■

Ejercicio 3.1.2
Sea $f \in \mathcal{L}_2^{2\pi}(\mathbb{R})$ y sean a_n, b_n los coeficientes de Fourier de f. **Pruebe** que

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x f(x) dx = \pi a_0 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}.$$

Demostración:

Considere la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$g(x) = x, \quad \forall x \in [0, 2\pi[$$

y extiéndase por periodicidad a todo $\mathbb{R}$. Es claro que $g \in \mathcal{L}_2^{2\pi}(\mathbb{R})$. Si $\left\{c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}\right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ y $\left\{d_k = \frac{\alpha_k - i\beta_k}{2}\right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ son los coeficientes de Fourier de f y g, respectivamente, al estar ambas funciones en $\mathcal{L}_2^{2\pi}(\mathbb{R})$ se tiene por las identidades de Parserval que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)} = \frac{a_0 \overline{\alpha_0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \overline{\alpha_n} + b_n \overline{\beta_n}\right]$$

en particular,

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\overline{g(x)} \, dx &= \frac{a_0 \overline{\alpha_0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \overline{\alpha_n} + b_n \overline{\beta_n}\right] \\
\Rightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x f(x) \, dx &= \frac{a_0 \overline{\alpha_0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \overline{\alpha_k} + b_n \overline{\beta_n}\right]
\end{aligned}$$

Calculemos los coeficientes de Fourier de g. Veamos que

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}x^2\Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}x^2\Big|_0^{2\pi} \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

y, para $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos kx\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2k\pi} \frac{u}{k}\cos u\,\frac{du}{k} \\
&= \frac{1}{k^2\pi}\int_0^{2k\pi} u\cos u\,du \\
&= \frac{1}{k^2\pi}\left[u\sin u + \cos u\Big|_0^{2k\pi}\right] \\
&= \frac{1}{k^2\pi}\left[2k\pi\sin 2k\pi + \cos 2k\pi - \cos 0\right] \\
&= \frac{1}{k^2\pi}\left[2k\pi\sin 2k\pi + \cos 2k\pi - \cos 0\right] \\
&= \frac{1}{k^2\pi}\left[0 + 1 - 1\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}
\beta_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin kx\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2k\pi} \frac{u}{k}\sin kx\,\frac{du}{k} \\
&= \frac{1}{k^2\pi}\int_0^{2k\pi} u\sin kx\,du \\
&= \frac{1}{k^2\pi}\left[\sin u - u\cos u\Big|_0^{2k\pi}\right] \\
&= \frac{1}{k^2\pi}\left[\sin 2k\pi - 2k\pi\cos 2k\pi - \sin 0 + 0\cos 0\right] \\
&= \frac{1}{k^2\pi}\left[0 - 2k\pi - 0 + 0\right] \\
&= -\frac{2}{k}
\end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $u = kx$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} xf(x)\,dx &= \frac{a_0\overline{\alpha_0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\overline{\alpha_n} + b_n\overline{\beta_n}\right] \\
&= \frac{2\pi a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cdot 0 + b_n\cdot\left(\frac{-2}{n}\right)\right] \\
&= \pi a_0 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n} \\
\Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} xf(x)\,dx &= \pi a_0 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}
\end{aligned}$$

como se quería demostrar. ■

Ejercicio 3.1.3
Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ periódica de periodo 2π definida como

$$f(x) = \begin{cases} \pi^2 & \text{si} \quad -\pi \leqslant x < 0, \\ (x-\pi)^2 & \text{si} \quad 0 \leqslant x < \pi. \end{cases}$$

calcule los coeficientes de Fourier a_n, con $n = 0, 1, 2, ...$ de f y **pruebe** las fórmulas

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Solución:

Primero determinemos los coeficientes de Fourier de f.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{\pi} f(x)\,dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} \pi^2\,dx + \int_0^{\pi} (x-\pi)^2\,dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\pi^3 + \int_{-\pi}^{0} u^2\,du\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\pi^3 + \int_{-\pi}^{0} u^2\,du\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\pi^3 + \frac{u^3}{3}\Big|_{-\pi}^{0}\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\pi^3 + \frac{\pi^3}{3}\right] \\
&= \frac{4\pi^2}{3}
\end{aligned}$$

ahora, para $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} \pi^2\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} (x-\pi)^2\cos nx\,dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} \pi^2\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} (x^2-2x\pi+\pi^2)\cos nx\,dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} \pi^2\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} x^2\cos nx\,dx - \int_{0}^{\pi} 2x\pi\cos nx\,dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} \pi^2\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} x^2\cos nx\,dx - \int_{0}^{\pi} 2x\pi\cos nx\,dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{n}\int_{-n\pi}^{n\pi} \cos u\,du + \frac{1}{n}\int_{0}^{n\pi} \left(\frac{u}{n}\right)^2\cos u\,du - \frac{1}{n}\int_{0}^{n\pi} 2\left(\frac{u}{n}\right)\pi\cos u\,du\right] \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[\pi^2\int_{-n\pi}^{n\pi} \cos u\,du + \frac{1}{n^2}\int_{0}^{n\pi} u^2\cos u\,du - \frac{2\pi}{n}\int_{0}^{n\pi} u\cos u\,du\right]
\end{aligned}$$

donde

$$\pi^2\int_{-n\pi}^{n\pi}\cos u\,du = 2\sin(n\pi)$$

con

$$\int_{0}^{n\pi} u^2\cos u\,du = \left(\pi^2n^2-2\right)\sin(n\pi) + 2n\pi\cos(n\pi)$$

y

$$\int_{0}^{n\pi} u\cos u\,du = n\pi\sin(n\pi) + \cos(n\pi) - 1$$

por tanto,

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{n\pi}\left[\pi^2\int_{-n\pi}^{n\pi} \cos u\,du + \frac{1}{n^2}\int_{0}^{n\pi} u^2\cos u\,du - \frac{2\pi}{n}\int_{0}^{n\pi} u\cos u\,du\right] \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[\pi^2\cdot 2\sin(n\pi) + \frac{1}{n^2}\cdot\left[\left(\pi^2n^2-2\right)\sin(n\pi) + 2n\pi\cos(n\pi)\right] - \frac{2\pi}{n}\cdot\left[n\pi\sin(n\pi)+\cos(n\pi)-1\right]\right] \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[2\pi^2\sin(n\pi) + \pi^2\sin(n\pi) - \frac{2}{n^2}\sin(n\pi) + \frac{2\pi}{n}\cos(n\pi) - 2\pi^2\sin(n\pi) - \frac{2\pi}{n}\cos(n\pi) + \frac{2\pi}{n}\right] \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[\pi^2\sin(n\pi) - \frac{2}{n^2}\sin(n\pi) + \frac{2\pi}{n}\right] \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[\frac{n^3\pi^2\sin(n\pi) + 2n^2\pi - 2n\sin(n\pi)}{n^3}\right] \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[\frac{0 + 2n^2\pi - 0}{n^3}\right] \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[\frac{2n^2\pi}{n^3}\right] \\
&= \frac{2}{n^2}
\end{aligned}$$

pues, $\sin(n\pi) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Notemos que la función f es monotóna decreciente, en particular es de variación acotada. Luego, por el teorema de Jordan al ser f continua en $]-\pi,\pi]$ se sigue que la serie de Fourier de f en x converge a $f(x)$ para todo $x \in]-\pi, \pi]$. Esto es:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kx + b_k \sin kx]$$

en particular, en $x = 0$:

$$\begin{aligned}
f(0) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \\
&= \frac{2\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} \\
\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{1}{2}\left[\pi^2 - \frac{2\pi^2}{3}\right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{3} \\
&= \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}$$

Para la segunda parte, notemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n)^2}\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} &= \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
&= \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} \\
&= \frac{\pi^2}{8}
\end{aligned}$$

Por ende,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1-1}}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{(2n)^2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-2}}{(2n-1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n^2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
&= \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} \\
&= \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} \\
&= \frac{\pi^2[3-1]}{24} \\
&= \frac{\pi^2}{12}
\end{aligned}$$

□

Ejercicio 3.1.4
Pruebe que
$$\frac{1}{3}x(\pi - x)(\pi - 2x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{n^3}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi.$$
Deduzca el valor de
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}.$$

Demostración:

Considere la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:
$$g(x) = \frac{1}{3}x(\pi - x)(\pi - 2x), \quad \forall x \in [0, \pi[$$
y extiéndase por periodicidad a todo $\mathbb{R}^+$ y hágase
$$g(x) = -g(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^-$$
. Afirmamos que g es continua en $\mathbb{R}$. En efecto, ya se tiene que g es continua en $]0, \pi[$, por lo cual para ver que es continua en $\mathbb{R}$ basta con ver que $g(0) = g(\pi)$ (en particular se tiene que g es π-periódica, luego también es 2π-periódica). Veamos que
$$g(0) = 0 = g(\pi)$$
luego, g es continua en $\mathbb{R}$. Además, g es C^1 (e casi todo $\mathbb{R}$), luego de variación acotada en $[-\pi, \pi]$. Por el Teorema de Jordan, la serie de Fourier de g converge a g uniformemente en $\mathbb{R}$, en particular lo hace puntualmente en el intervalo $[0, \pi]$. Calculemos los coeficientes de Fourier de g.

Como g se definió de tal forma que fuese impar, se sigue que
$$a_k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

y, para $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(x) \sin kx \, dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{3} x(\pi - x)(\pi - 2x) \sin kx \, dx \\
&= \frac{2}{3\pi} \int_0^\pi (\pi^2 x - 3\pi x^2 + 2x^3) \sin kx \, dx \\
&= \frac{2}{3\pi} \left[\pi^2 \int_0^\pi x \sin kx \, dx - 3\pi \int_0^\pi x^2 \sin kx \, dx + 2 \int_0^\pi x^3 \sin kx \, dx \right] \\
&= \frac{2}{3\pi} \left[\pi^2 \left[\frac{\sin k\pi - k\pi \cos k\pi}{k^2} \right] - 3\pi \left[\frac{(2 - k^2\pi^2) \cos k\pi + 2k\pi \sin k\pi - 2}{k^3} \right] \right. \\
&\left. +2 \left[\frac{3(k^2\pi^2 - 2) \sin k\pi + k\pi(6 - k^2\pi^2) \cos k\pi}{k^4} \right] \right] \\
&= \frac{2}{3\pi} \left[\pi^2 \left[\frac{-k\pi(-1)^k}{k^2} \right] - 3\pi \left[\frac{(2 - k^2\pi^2)(-1)^k - 2}{k^3} \right] + 2 \left[\frac{k\pi(6 - k^2\pi^2)(-1)^k}{k^4} \right] \right] \\
&= \frac{2}{3\pi} \left[\frac{\pi^3(-1)^{k+1}}{k} + \frac{3\pi(2 - k^2\pi^2)(-1)^{k+1} + 6\pi}{k^3} + \frac{2k\pi(6 - k^2\pi^2)(-1)^k}{k^4} \right] \\
&= \frac{2}{3\pi} \left[\frac{\pi^3 k^3(-1)^{k+1}}{k^4} + \frac{3k\pi(2 - k^2\pi^2)(-1)^{k+1} + 6k\pi}{k^4} + \frac{2k\pi(6 - k^2\pi^2)(-1)^k}{k^4} \right] \\
&= \frac{2}{3k^4\pi} \left[\pi^3 k^3 (-1)^{k+1} + 3k\pi(2 - k^2\pi^2)(-1)^{k+1} + 6k\pi + 2k\pi(6 - k^2\pi^2)(-1)^k \right] \\
&= \frac{2}{3k^4\pi} \left[\pi^3 k^3 (-1)^{k+1} + 6k\pi(-1)^{k+1} + 3k^3\pi^3(-1)^k + 6k\pi + 12k\pi(-1)^k + 2k^3\pi^3(-1)^{k+1} \right] \\
&= \frac{2}{3k^4\pi} \left[3k^3\pi^3(-1)^{k+1} + 3k^3\pi^3(-1)^k + 6k\pi + 6k\pi(-1)^k \right] \\
&= \frac{2}{3k^4\pi} \left[6k\pi + 6k\pi(-1)^k \right] \\
&= \frac{4}{k^3} \left[1 + (-1)^k \right]
\end{aligned}$$

si $k = 2m - 1$ con $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
b_{2m-1} &= \frac{4}{(2m-1)^3} \left[1 + (-1)^{2m-1} \right] \\
&= \frac{4}{(2m-1)^3} [1 - 1] \\
&= 0
\end{aligned}$$

y,si $k = 2m$ con $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
b_{2m} &= \frac{4}{(2m)^3} \left[1 + (-1)^{2m} \right] \\
&= \frac{8}{8m^3} \\
&= \frac{1}{m^3}
\end{aligned}$$

Por ende, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} x(\pi - x)(\pi - 2x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \sin 2nx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{n^3}, \quad \forall 0 \leqslant x \leqslant \pi
\end{aligned}$$

Para la otra parte, recuerde que

$$\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = 2m \text{ para algún } m \in \mathbb{N} \\ (-1)^{m-1} & \text{si} \quad n = 2m-1 \text{ para algún } m \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Tomemos $x = \frac{\pi}{4}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot(\pi-\frac{\pi}{4})(\pi-\frac{\pi}{2}) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n^3} \\ \Rightarrow \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{3\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{2} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} &= \frac{\pi^3}{32} \end{aligned}$$

■

Ejercicio 3.1.5
Haga lo siguiente:

i. **Pruebe** que

$$\int_0^{\pi}\log\sin\frac{x}{2}dx = -\pi\log 2.$$

Sugerencia. Haga el cambio de variables $x = 2t$ y escriba $\sin t = 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}$.

ii. **Muestre** que

$$-\log\left|2\sin\frac{x}{2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}, \qquad \text{si } x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Sugerencia. Use el inciso (i) para probar que $a_0 = 0$. A fin de calcular a_n para $n \in \mathbb{N}$, escriba $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\log\cos\frac{x}{2}dx$, efectúe una integración por partes y transforme el nuevo integrando de suerte que aparezca el núcleo de Dirichlet.

iii. **Deduzca** de (ii) la fórmula

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

iv. **Desarrolle** en serie de Fourier la función

$$x \mapsto \log\left|2\cos\frac{x}{2}\right|$$

Solución:

De (i): (justificar porqué esa función es integrable). Veamos que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \log\sin\frac{x}{2}\,dx &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin t\,dt \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\right)\,dt \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\log 2 + \log\sin\frac{t}{2} + \log\cos\frac{t}{2}\right]\,dt \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\log 2 + \log\sin\frac{t}{2} + \log\cos\frac{t}{2}\right]\,dt \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log 2\,dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\frac{t}{2}\,dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos\frac{t}{2}\,dt \\
&= \pi\log 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\frac{t}{2}\,dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos\frac{t}{2}\,dt
\end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos\frac{t}{2}\,dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right)\,dt \\
&= \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} -\log\sin\left(\frac{u}{2}\right)\,dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log\sin\left(\frac{u}{2}\right)\,dt
\end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $u = \pi - t$. Por ende,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \log\sin\frac{x}{2}\,dx &= \pi\log 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\frac{t}{2}\,dt + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log\sin\frac{u}{2}\,du \\
&= \pi\log 2 + 2\int_0^{\pi} \log\sin\frac{x}{2}\,dx \\
\Rightarrow \int_0^{\pi} \log\sin\frac{x}{2}\,dx &= -\pi\log 2
\end{aligned}$$

De (ii): Por lo anterior, $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}$ donde $f(x) = -\log\left|2\sin\frac{x}{2}\right|$ para todo $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$. Ahora, como f es par, se tiene que

$$b_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ahora, veamos que

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx \\
&= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} -\log\left|2\sin\frac{x}{2}\right|\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left[\log 2 + \log\sin\frac{x}{2}\right]\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi} \log 2 + \int_0^{\pi} \log\sin\frac{x}{2}\right]\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\pi\log 2 - \pi\log 2\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ahora, si $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
a_n &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \log \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right| \cos nx \, dx \\
&= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \log \left(2 \sin \frac{x}{2} \right) \cos nx \, dx \\
&= \frac{2}{\pi} \left[-\log \left(2 \sin \frac{x}{2} \right) \frac{1}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2n} \int_0^{\pi} \frac{\cos \frac{x}{2} \sin nx}{\sin \frac{x}{2}} \, dx \right] \\
&= \frac{1}{\pi n} \int_0^{\pi} \frac{\cos \frac{x}{2} \sin nx}{\sin \frac{x}{2}} \, dx
\end{aligned}$$

pero,

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} \left[\sin(A+B) + \sin(A-B) \right]$$

Por ende,

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2\pi n} \int_0^{\pi} \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x + \sin \left(n - \frac{1}{2} \right) x}{\sin \frac{x}{2}} \, dx \\
&= \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[D_n(x) + D_{n-1}(x) \right] \, dx \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

De (iii): Veamos la convergencia (usar el teorema de Carleson y más cosas), de donde se deduce el hecho sorprendente que

$$\int_0^{\pi} \left(\log \left| 2 \cos \frac{x}{2} \right| \right)^2 \, dx = \frac{\pi^2}{6}$$

□

Ejercicio 3.1.6
Sea $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{R})$ y sea $x \in \mathbb{R}$. Se supone que para algúun $\alpha > 0$ se cumple

$$f(x+t) - f(x) = O(|t^\alpha|), \quad \text{cuando} \quad t \to 0$$

Demuestre que la serie de Fourier de f en x converge a $f(x)$.

Demostración:

Como

$$f(x+t) - f(x) = O(|t^\alpha|), \quad \text{cuando} \quad t \to 0$$

entonces existe $A > 0$ y $\delta > 0$ tales que

$$\begin{aligned}
|t| < \delta &\Rightarrow |f(x+t) - f(x)| \leqslant A \, |t|^\alpha \\
&\Rightarrow -A \, |t|^\alpha \leqslant f(x+t) - f(x) \leqslant A \, |t|^\alpha
\end{aligned}$$

Para ver que la serie de Fourier de f en x converge a $f(x)$, usaremos el Teorema Fundamental para la convergencia puntual de una serie de Fourier. Ahora, si $m \in \mathbb{N}$

$$-A \frac{|t|^\alpha}{t} \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) t \, dt \leqslant \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) t \, dt \leqslant A \frac{|t|^\alpha}{t} \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) t \, dt$$

Para todo $0 < |t| < \text{mín}\{\delta, \pi\}$. Considere ahora la función $t \mapsto \frac{|t|^\alpha}{t}$ (llamémosla g) definida c.t.p. en $\mathbb{R}$. Esta función es la diferencia de dos funciones monótonas en $[-\pi, \pi]$, luego de variación acotada. Además es integrable. En efecto,

$$|g(t)| = |t|^{\alpha - 1}$$

donde $t \mapsto |t|^{\alpha-1}$ es integrable en $[-\pi, \pi]$ pues $\alpha - 1 > -1$. Luego, por el Teorema de Jordan la serie de Fourier de g en x converge a $g(x)$. Así, por el Teorema Fundamnetal para la convergencia puntual de una serie de Fourier, se tiene que existe $0 < \gamma < \pi$ tal que

$$\lim_{m\to\infty} \int_{-\gamma'}^{\gamma'} \frac{|t|^\alpha}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t\, dt = 0$$

Afirmamos que si $0 < \zeta \leqslant \gamma'$, entonces

$$\lim_{m\to\infty} \int_{-\zeta}^{\zeta} \frac{|t|^\alpha}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t\, dt = 0$$

En efecto, sea $0 < \zeta \leqslant \gamma'$, se tiene para $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\zeta}^{\zeta} \frac{|t|^\alpha}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t\, dt &= \int_{-\zeta}^{0} \frac{|t|^\alpha}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t\, dt + \int_{0}^{\zeta} \frac{|t|^\alpha}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t\, dt \\
&= -\int_{\zeta}^{0} \frac{|-t|^\alpha}{-t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) (-t)\, dt + \int_{0}^{\zeta} \frac{|t|^\alpha}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t\, dt \\
&= \int_{0}^{\zeta} \frac{|t|^\alpha}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t\, dt + \int_{0}^{\zeta} \frac{|t|^\alpha}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t\, dt \\
&= 2\int_{0}^{\zeta} \frac{|t|^\alpha}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t\, dt
\end{aligned}$$

Tomemos $\delta' = \text{mín}\{\delta, \gamma\}$. Se tiene que

$$-A\frac{|t|^\alpha}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t\, dt \leqslant \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t\, dt \leqslant A\frac{|t|^\alpha}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t\, dt$$

para todo $|t| < \delta'$ ■

Ejercicio 3.1.7

Por el problema **3.1.1** se sabe que

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad \forall x \in]0, 2\pi[$$

i. Póngase

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}.$$

Muestre que

$$\frac{x}{2} + s_n(x) = \pi \int_0^x D_n(t) dt,$$

donde D_n es el núcleo de Dirichlet.

ii. Si $x \in]0, 2\pi[$, **pruebe** que

$$\lim_{n\to\infty} \left[\pi \int_0^x D_n(t)dt - \int_0^x \frac{\sin nt}{t} dt\right] = 0.$$

iii. **Deduzca** una nueva demostración de la fórmula

$$\int_0^{\to\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Demostración:
De (i): Recordemos que el núcleo de Dirichlet está dado por:

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-m}^{m} e^{ikx}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por ende,

$$\begin{aligned}
\int_0^x D_n(t)\,dt &= \int_0^x \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-m}^{m} e^{ikt}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^x \left[1 + \sum_{k=-m,k\neq 0}^{m} e^{ikt}\right] dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[t\Big|_0^x + \sum_{k=-m,k\neq 0}^{m} \frac{e^{ikt}}{ik}\Big|_0^x \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[x + \sum_{k=-m,k\neq 0}^{m} \frac{e^{ikx}-1}{ik} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[x + \sum_{k=-m,k\neq 0}^{m} \frac{e^{ikx}}{ik} - \underbrace{\sum_{k=-m,k\neq 0}^{m} \frac{1}{ik}}_{=0} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[x + \sum_{k=-m,k\neq 0}^{m} \frac{\cos ikx + \sin ikx}{ik} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[x + \sum_{k=-m}^{-1} \frac{\cos ikx + \sin ikx}{ik} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\cos ikx + i\sin ikx}{ik} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[x + \sum_{k=1}^{m} \frac{\cos(-ikx) + i\sin(-ikx)}{-ik} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\cos ikx + i\sin ikx}{ik} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[x + \sum_{k=1}^{m} \frac{-\cos ikx + i\sin ikx}{ik} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\cos ikx + i\sin ikx}{ik} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[x + 2\sum_{k=1}^{m} \frac{\sin ikx}{k} \right] \\
&= \frac{x}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{m} \frac{\sin ikx}{k}
\end{aligned}$$

luego,

$$\pi \int_0^x D(t)\,dt = \frac{x}{2} + s_n(x)$$

De (ii): Recordemos que podemos escribir al Núcleo de Dirichlet como:

$$D_m(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Por tanto, si $m \in \mathbb{N}$ y $x \in]0, 2\pi[$:

$$\begin{aligned}
\left|\pi \int_0^x D_m(t)\,dt - \int_0^x \frac{\sin mt}{t}\,dt\right| &= \left|\frac{1}{2}\int_0^x \frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt - \int_0^x \frac{\sin mt}{t}\,dt\right| \\
&= \left|\frac{1}{2}\int_0^x \frac{\sin mt\cos\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{2}\cos mt}{\sin\frac{t}{2}}\,dt - \int_0^x \frac{\sin mt}{t}\,dt\right| \\
&= \left|\int_0^x \left[\frac{\sin mt}{2\tan\frac{t}{2}} + \frac{1}{2}\cos mt\right]dt - \int_0^x \frac{\sin mt}{t}\,dt\right| \\
&= \left|\frac{1}{2}\int_0^x \cos mt\,dt + \int_0^x \left[\frac{\sin mt}{2\tan\frac{t}{2}} - \frac{\sin mt}{t}\right]dt\right| \\
&= \left|\frac{1}{2m}\int_0^{mx} \cos u\,du + \int_0^x \left[\frac{1}{2\tan\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right]\sin mt\,dt\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2m}\left|\sin u\Big|_0^{mx}\right| + \left|\int_0^x \left[\frac{1}{2\tan\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right]\sin mt\,dt\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2m}\left|\sin mx\right| + \left|\int_0^x \left[\frac{1}{2\tan\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right]\sin mt\,dt\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2m} + \left|\int_0^x \left[\frac{1}{2\tan\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right]\sin mt\,dt\right|
\end{aligned}$$

Pero, la función

$$t \mapsto \frac{1}{2\tan\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}$$

es integrable en $]0, x[$. En efecto, como es continua en $[0, x]$ haciendo que valga 0 en $t = 0$, ya que

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{2\tan\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right] = 0$$

hace que la función sea continua, luego al ser continua en un compacto es integrable. Así, por el teorema de Riemman-Lebesgue se sigue que

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^x \left[\frac{1}{2\tan\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right]\sin mt\,dt = 0$$

Por tanto, para $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geqslant N$:

$$\frac{1}{2m} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \left|\int_0^x \left[\frac{1}{2\tan\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right]\sin mt\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

luego,

$$\begin{aligned}
m \geqslant N \Rightarrow \left|\pi\int_0^x D_m(t)\,dt - \int_0^x \frac{\sin mt}{t}\,dt\right| &\leqslant \frac{1}{2m} + \left|\int_0^x \left[\frac{1}{2\tan\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right]\sin mt\,dt\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

así,

$$\lim_{m\to\infty}\left|\pi\int_0^x D_m(t)\,dt - \int_0^x \frac{\sin mt}{t}\,dt\right| = 0$$

De (iii): Como dado $x \in]0, 2\pi[$ se tiene que

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

y,
$$\lim_{m\to\infty}\left|\pi\int_0^x D_m(t)\,dt-\int_0^x\frac{\sin mt}{t}\,dt\right|=0$$
entonces para $x\in]0,2\pi[$ y $\varepsilon>0$ existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $m\geqslant N$ implica que
$$\left|\frac{\pi-x}{2}-\sum_{n=1}^{m}\frac{\sin nx}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}\quad\text{y}\quad\left|\pi\int_0^x D_m(t)\,dt-\int_0^x\frac{\sin mt}{t}\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$
luego, si $m\geqslant N$ se tiene que
$$\begin{aligned}\left|\pi\int_0^x D_m(t)\,dt-\int_0^x\frac{\sin mt}{t}\,dt\right|&=\left|\frac{x}{2}+s_n(x)-\int_0^x\frac{\sin mt}{t}\,dt\right|\\&=\left|\frac{x}{2}+\sum_{k=1}^{m}\frac{\sin kx}{k}-\int_0^x\frac{\sin mt}{t}\,dt\right|\\&=\left|\frac{-\pi}{2}+\frac{x}{2}+\sum_{k=1}^{m}\frac{\sin kx}{k}+\frac{\pi}{2}-\int_0^x\frac{\sin mt}{t}\,dt\right|\\&=\left|-\left(\frac{\pi-x}{2}-\sum_{k=1}^{m}\frac{\sin kx}{k}\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\int_0^x\frac{\sin mt}{t}\,dt\right)\right|\\&\geqslant\left|\int_0^x\frac{\sin mt}{t}\,dt-\frac{\pi}{2}\right|-\left|\frac{\pi-x}{2}-\sum_{k=1}^{m}\frac{\sin kx}{k}\right|\end{aligned}$$
Por tanto,
$$\begin{aligned}\left|\int_0^x\frac{\sin mt}{t}\,dt-\frac{\pi}{2}\right|&\leqslant\left|\pi\int_0^x D_m(t)\,dt-\int_0^x\frac{\sin mt}{t}\,dt\right|+\left|\frac{\pi-x}{2}-\sum_{k=1}^{m}\frac{\sin kx}{k}\right|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\\&=\varepsilon\end{aligned}$$
por ende,
$$\lim_{m\to\infty}\int_0^x\frac{\sin mt}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}$$
Pero, por el T.C.V. se tiene que para todo $m\in\mathbb{N}$:
$$\begin{aligned}&\int_0^x\frac{\sin mt}{t}\,dt\overset{u=mt}{=}\int_0^{mx}\frac{\sin u}{\frac{u}{m}}\,\frac{du}{m}\\\Rightarrow&\int_0^x\frac{\sin mt}{t}\,dt\overset{u=mt}{=}\int_0^{mx}\frac{\sin u}{u}\,du\end{aligned}$$
por ende,
$$\lim_{m\to\infty}\int_0^{mx}\frac{\sin u}{u}\,du=\frac{\pi}{2}$$
Para todo $x\in]0,2\pi[$. Veamos ahora que
$$\int_0^{\to\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}$$
Ya se sabe que la integral impropia converge, por tanto, considerando la sucesión $\left\{\frac{\pi m}{2}\right\}_{m=1}^{\infty}$ se tiene que:
$$\begin{aligned}\int_0^{\to\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt&=\lim_{m\to\infty}\int_0^{\frac{\pi m}{2}}\frac{\sin u}{u}\,du=\frac{\pi}{2}\\&=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$
$\blacksquare$

Ejercicio 3.1.8
Sea $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ y sean $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ los coeficientes de Fourier de f. **Demuestre** que

$$\int_0^x f = c + c_0 x + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{c_k e^{ikx}}{ik}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

donde c es una constante, la convergencia siendo uniforme en $\mathbb{R}$.

Sugerencia. Considere la función $F(x) = \int_0^x (f - c_0)$.

Deduzca que los coeficientes de Fourier b_n de cualquier función $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ satisfacen la condición de que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$$

es convergente. **Concluya** que la aplicación $f \mapsto \{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ no es una aplicación suprayectiva de $\mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ en $c_0(\mathbb{Z})$.

Demostración:

Como $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}$, entonces la función

$$F(x) = \int_0^x \left(f(t) - c_0\right)\, dt$$

es una función absolutamente continua y de periodicidad 2π, pues

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - c_0)\, dt = 0$$

En efecto, veamos que

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - c_0)\, dt &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt + 2\pi c_0 \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt + 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

En particular, es de variación acotada y continua (por ser absolutamente continua), luego por el Teorema de Jordan la serie de Fourier de F en x converge puntualmente a F en x para todo $x \in \mathbb{R}$, esto es

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k' e^{ikx}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow \int_0^x (f(t) - c_0) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k' e^{ikx}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow \int_0^{\pi} f(t)\, dt &= c_0 x + \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k' e^{ikx}, \quad \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

siendo $\{c_k'\}_{k\in\mathbb{Z}}$ los coeficientes de Fourier de F. Calculemos estos coeficientes, para ello, calculemos los de $f - c_0$ y recordemos que la aplicación que a cada función en $L_1^{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ envía a sus coeficientes de Fourier es una aplicación lineal inyectiva, en particular por ser lineal basta con calcular los coeficientes de f y c_0 por separado y, los coeficientes de $f - c_0$ serán la diferencia de cada uno de estos coeficientes.

Sean entonces $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ y $\{d_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ los coeficientes de Fourier de f y c_0 respectivamente, se tiene entonces que

$$c'_k = \frac{c_k - d_k}{ik}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$$

tomando $c_0 = c' \in \mathbb{C}$ una constante. Siendo:

$$\begin{aligned}
d_k &= \int_{-\pi}^{\pi} c_0 e^{-ikx}\,dx \\
&= c_0 \cdot \frac{e^{-ikx}}{-ik}\Big|_{-\pi}^{\pi} \\
&= c_0 \cdot \frac{e^{-ik\pi} - e^{ik\pi}}{-ik} \\
&= c_0 \cdot \frac{\cos(-k\pi) + i\sin(-k\pi) - \cos(k\pi) - i\sin(k\pi)}{-ik} \\
&= c_0 \cdot \frac{\cos(k\pi) - i\sin(k\pi) - \cos(k\pi) - i\sin(k\pi)}{-ik} \\
&= c_0 \cdot \frac{2i\sin(k\pi)}{ik} \\
&= 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$c'_k = \frac{c_k}{ik}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$$

De esta forma, tenemos que:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c'_k e^{ikx} \\
&= c + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} c'_k e^{ikx} \\
&= c + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{c_k e^{ikx}}{ik}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow \int_0^x (f(t) - c_0)\,dt &= c + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{c_k e^{ikx}}{ik}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow \int_0^x f(t)\,dt &= c + c_0 x + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{c_k e^{ikx}}{ik}, \quad \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

En particular para $x = 0$ se tiene que

$$\begin{aligned}
0 &= c + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{c_k}{ik} \\
\Rightarrow -c &= \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{c_k}{ik} \\
&= \sum_{k\in 1}^{\infty} \frac{c_k}{ik} + \sum_{k\in 1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{-ik} \\
&= \sum_{k\in 1}^{\infty} \frac{c_k}{ik} + \sum_{k\in 1}^{\infty} \frac{-c_{-k}}{ik} \\
&= \frac{1}{i} \cdot \sum_{k\in 1}^{\infty} \frac{c_k - c_{-k}}{k} \\
&= \frac{1}{i} \cdot \sum_{k\in 1}^{\infty} \frac{b_k}{k}
\end{aligned}$$

pues, la serie $\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{c_k}{ik}$ es convergente. Por tanto, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$$

es convergente y converge a $-ic$.

Para la última parte, considere la sucesión $\{c_k\}_k\in\mathbb{Z}$ tal que:

$$c_k=\frac{a_k-ib_k}{2},\quad \forall k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$$

tomando

$$a_k=0,\quad \forall k\in\mathbb{Z}$$

y,

$$b_k=\frac{1}{\ln k},\quad \forall k\in\mathbb{N},k\geqslant 2$$

y haciendo:

$$b_{-k}=-b_k,\quad \forall k\in\mathbb{N},k\geqslant 2$$

Afirmamos que no puede existir ninguna función $f\in\mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$ tal que tenga como coeficientes de Fourier los escritos anteriormente, ya que en tal caso, se tendría que la serie:

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln k}$$

sería convergente. Pero, como la integral (haciendo $u=\ln x\Rightarrow du=\frac{dx}{x}$):

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}&=\int_0^{\infty}\frac{du}{u}\\&=\infty\end{aligned}$$

tal serie no puede converger, luego estos coeficientes de Fourier no pueden pertenecer a ninguna función en $\mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$. ■

Ejercicio 3.1.9
Haga lo siguiente:

i. Sea α un número real no entero. **Pruebe** que

$$\pi\cos\alpha x=2\alpha\sin\pi\alpha\left(\frac{1}{2\alpha^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{\alpha^2-n^2}\right),\quad \forall x\in[-\pi,\pi].$$

De ahí obtenga las fórmulas clásicas

$$\frac{\pi\alpha}{\sin\pi\alpha}=1+2\alpha^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}\quad\text{y}\quad \pi\alpha\cot\pi\alpha=1+2\alpha^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2-n^2}.$$

ii. Sea $x\in]0,1[$. **Pruebe** que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{n^2-\alpha^2}$$

se puede integrar término por término en el intervalo $[0, x]$. De la última fórmula del inciso (i) **deduzca** la fórmula

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right), \quad \forall x \in]-1, 1[.$$

Demostración:

De (i): Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada como sigue:

$$x \mapsto \cos \alpha x, \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$$

y extiéndase por periodicidad a todo $\mathbb{R}$. Es claro que esta función es continua, pues

$$f(-\pi) = \cos(-\alpha\pi) = \cos \alpha\pi = f(\pi)$$

(al hacerse la extensión se tiene que es continua en π, como es continua en $]-\pi, \pi[$, se sigue que lo es en todo $\mathbb{R}$). Esta función es clase C^1 en $]-\pi, \pi[$, luego es de variación acotada en $[-\pi, \pi]$. Por el Teorema de Jordan la serie de Fourier de f en x converge puntualmente a $f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (en particular, en $[-\pi, \pi]$). Notemos que f es par, por lo cual se tiene que

$$b_k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Y,

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad \forall k \in \mathbb{N}^+$$

calculemos estos coeficientes.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \, dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \alpha x \, dx, \text{ sea } u = \alpha x \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha\pi} \cos u \, \frac{du}{\alpha} \\
&= \frac{2}{\pi\alpha} \int_0^{\pi\alpha} \cos u \, du \\
&= \frac{2}{\pi\alpha} \sin u \Big|_0^{\alpha\pi} \\
&= \frac{2}{\pi\alpha} \sin u \Big|_0^{\pi\alpha} \\
&= \frac{2}{\pi\alpha} \sin \pi\alpha
\end{aligned}$$

Recordemos antes que

$$\cos A \cos B = \frac{\cos(A - B) + \cos(A + B)}{2}$$

y,

$$\sin A + \sin B = 2 \sin\left(\frac{A + B}{2}\right) \cos\left(\frac{A - B}{2}\right)$$

Ahora, para $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\alpha x\cos kx\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos(\alpha-k)x+\cos(\alpha+k)x}{2}\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\cos(\alpha-k)x\,dx+\int_0^{\pi}\cos(\alpha+k)x\,dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha-k}\int_0^{(\alpha-k)\pi}\cos u\,du+\frac{1}{\alpha+k}\int_0^{(\alpha+k)\pi}\cos v\,dv\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha-k}\sin u\Big|_0^{(\alpha-k)\pi}+\frac{1}{\alpha+k}\sin v\Big|_0^{(\alpha+k)\pi}\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha-k}\sin u(\alpha-k)\pi+\frac{1}{\alpha+k}\sin(\alpha+k)\pi\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\alpha\sin(\alpha-k)\pi+k\sin(\alpha-k)\pi}{\alpha^2-k^2}+\frac{\alpha\sin(\alpha+k)\pi-k\sin(\alpha+k)\pi}{\alpha^2-k^2}\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\alpha\sin(\alpha-k)\pi+\alpha\sin(\alpha+k)\pi+k\sin(\alpha-k)\pi+k\sin(-\alpha-k)\pi}{\alpha^2-k^2}\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2\alpha\sin(\frac{\alpha-k+\alpha+k}{2})\pi\cos(\frac{\alpha-k-\alpha-k}{2})\pi+2k\sin(\frac{\alpha-k-\alpha-k}{2})\pi\cos(\frac{\alpha-k+\alpha+k}{2})\pi}{\alpha^2-k^2}\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2\alpha\sin\alpha\pi\cos(-k\pi)+2k\sin(-k\pi)\cos\alpha\pi}{\alpha^2-k^2}\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2\alpha\sin\alpha\pi\cos k\pi-2k\sin k\pi\cos\alpha\pi}{\alpha^2-k^2}\right],\ \text{pero}\ \sin k\pi=0\ \text{y}\ \cos k\pi=(-1)^k \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2(-1)^k\alpha\sin\alpha\pi}{\alpha^2-k^2}\right] \\
&= \frac{2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi}\cdot\frac{(-1)^k}{\alpha^2-k^2}
\end{aligned}$$

Por tanto, se tiene que

$$\begin{aligned}
\cos\alpha x &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx \\
&= \frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}\cos nx \\
&= \frac{2\alpha\sin\pi\alpha}{\pi}\left(\frac{1}{2\alpha^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{\alpha^2-n^2}\right),\quad \forall x\in[-\pi,\pi] \\
\Rightarrow \pi\cos\alpha x &= 2\alpha\sin\pi\alpha\left(\frac{1}{2\alpha^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{\alpha^2-n^2}\right),\quad \forall x\in[-\pi,\pi]
\end{aligned}$$

En particular, cuando $x = 0$ y $x = \pi$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\pi\cos\alpha 0 &= 2\alpha\sin\pi\alpha\left(\frac{1}{2\alpha^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos 0}{\alpha^2-n^2}\right)\\
\Rightarrow \pi\alpha &= 2\alpha^2\sin\pi\alpha\left(\frac{1}{2\alpha^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}\right)\\
\Rightarrow \frac{\pi\alpha}{\sin\pi\alpha} &= 1+2\alpha^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}
\end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}
\pi\cos\alpha\pi &= 2\alpha\sin\pi\alpha\left(\frac{1}{2\alpha^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos n\pi}{\alpha^2-n^2}\right)\\
\Rightarrow \pi\cot\alpha\pi &= 2\alpha\left(\frac{1}{2\alpha^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos n\pi}{\alpha^2-n^2}\right)\\
\Rightarrow \alpha\pi\cot\alpha\pi &= 2\alpha^2\left(\frac{1}{2\alpha^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2-n^2}\right)\\
&= 1+2\alpha^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2-n^2}\\
\therefore\ \alpha\pi\cot\alpha\pi &= 1+2\alpha^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2-n^2}
\end{aligned}$$

De (ii): Veamos que se puede integrar respecto a α. En efecto, para cada $\nu \in \mathbb{N}$ defina:

$$s_\nu(\alpha) = \sum_{n=1}^{\nu}\frac{2\alpha}{n^2-\alpha^2}$$

Considere así la sucesión de funciones $\{s_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$. Como cada función es integrable en $]0, x[$ (pues el $0 < x < 1$) y,

$$\begin{aligned}
|s_\nu(\alpha)| &= \left|\sum_{n=1}^{\nu}\frac{2\alpha}{n^2-\alpha^2}\right|\\
&= \sum_{n=1}^{\nu}\frac{2\alpha}{n^2-\alpha^2}\\
&= \frac{2\alpha}{1-\alpha^2}+\sum_{n=2}^{\nu}\frac{2\alpha}{n^2-\alpha^2}\\
&\leqslant \frac{2\alpha}{1-\alpha^2}+\sum_{n=2}^{\nu}\frac{2\alpha}{n^2-1^2}\\
&\leqslant \frac{2\alpha}{1-\alpha^2}+2\alpha\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}, \quad \forall\nu\in\mathbb{N}
\end{aligned}$$

donde la función $g : [0, 1[\to \mathbb{R}$ tal que $\alpha \mapsto \frac{2\alpha}{1-\alpha^2} + 2\alpha\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$ es continua en el compacto $[0, x]$ pues

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4} < \infty$$

luego integrable en $[0,x]$. Por tanto, del Teorema de Lebesgue se sigue que:

$$\begin{aligned}
\lim_{\nu\to\infty}\int_0^x s_\nu(\alpha)\,d\alpha &= \int_0^x \lim_{\nu\to\infty} s_\nu(\alpha)\,d\alpha \\
\Rightarrow \lim_{\nu\to\infty}\int_0^x \sum_{n=1}^{\nu}\frac{2\alpha}{n^2-\alpha^2}\,d\alpha &= \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{n^2-\alpha^2}\,d\alpha
\end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned}
\int_0^x \sum_{n=1}^{\nu}\frac{2\alpha}{n^2-\alpha^2}\,d\alpha &= \sum_{n=1}^{\nu}\int_0^x \frac{2\alpha}{n^2-\alpha^2}\,d\alpha, \text{ tomemos } u=n^2-\alpha^2 \Rightarrow du=-2\alpha\,d\alpha \\
&= \sum_{n=1}^{\nu}\int_{n^2}^{n^2-x^2}\frac{2\alpha}{u}\,\frac{du}{-2\alpha} \\
&= \sum_{n=1}^{\nu}\int_{n^2-x^2}^{n^2}\frac{du}{u} \\
&= \sum_{n=1}^{\nu}\ln|u|\,\Big|_{n^2-x^2}^{n^2} \\
&= \sum_{n=1}^{\nu}\left[\ln\left|n^2\right|-\ln\left|n^2-x^2\right|\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\nu}\left[\ln\left|\frac{n^2}{n^2-x^2}\right|\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\nu}\ln\frac{n^2}{n^2-x^2} \\
&= \sum_{n=1}^{\nu}\ln\left(\frac{n^2}{n^2-x^2}\right) \\
&= \ln\left(\prod_{n=1}^{\nu}\frac{n^2}{n^2-x^2}\right)
\end{aligned}$$

Por tanto, como la función $x\mapsto \ln x$ es continua en $]0,\infty[$, se sigue que:

$$\ln\left(\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2-x^2}\right) = -\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{n^2-\alpha^2}\,d\alpha$$

Ahora, si integramos en $[0,x]$ ambos lados de la última igualdad de (i), se tiene que:

$$\begin{aligned}
\alpha\pi\cot\alpha\pi &= 1+2\alpha^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2-n^2} \\
\Rightarrow \pi\cot\pi\alpha &= \frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2} \\
\Rightarrow \pi\cot\pi\alpha-\frac{1}{\alpha} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}
\end{aligned}$$

Ahora, veamos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\alpha}\left(\ln\left(\frac{\sin\pi\alpha}{\alpha}\right)\right) &= \frac{1}{\frac{\sin\pi\alpha}{\alpha}}\cdot\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\sin\pi\alpha}{\alpha}\right)\\
&= \frac{\alpha}{\sin\pi\alpha}\cdot\frac{d}{d\alpha}\left(\alpha^{-1}\sin\pi\alpha\right)\\
&= \frac{\alpha}{\sin\pi\alpha}\cdot\left(-\alpha^{-2}\sin\pi\alpha+\pi\alpha^{-1}\cos\pi\alpha\right)\\
&= \frac{1}{\alpha\sin\pi\alpha}\cdot(-\sin\pi\alpha+\pi\alpha\cos\pi\alpha)\\
&= -\frac{1}{\alpha}+\pi\cot\pi\alpha\\
&= \pi\cot\pi\alpha-\frac{1}{\alpha}
\end{aligned}$$

Luego, por el primer Teorema Fundamental del Cálculo para intervalos abiertos, se sigue que:

$$\begin{aligned}
\int_0^x\left(\pi\cot\pi\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)\,d\alpha &= \ln\left(\frac{\sin\pi x}{x}\right)-\lim_{\alpha\to 0^+}\ln\left(\frac{\sin\pi\alpha}{\alpha}\right)\\
&= \ln\left(\frac{\sin\pi x}{x}\right)-\lim_{\alpha\to 0^+}\ln\left(\pi\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}\right)\\
&= \ln\left(\frac{\sin\pi x}{x}\right)-\ln\left(\pi\lim_{\alpha\to 0^+}\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}\right)\\
&= \ln\left(\frac{\sin\pi x}{x}\right)-\ln\left(\pi\cdot 1\right)\\
&= \ln\left(\frac{\sin\pi x}{x}\right)-\ln(\pi)\\
&= \ln\left(\frac{\sin\pi x}{\pi x}\right)
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_0^x\left(\pi\cot\pi\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)\,d\alpha &= \int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{n^2-\alpha^2}\,d\alpha\\
&= -\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}\,d\alpha\\
\Rightarrow \ln\left(\frac{\sin\pi x}{\pi x}\right) &= -\ln\left(\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2-x^2}\right)\\
&= \ln\left(\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-x^2}{n^2}\right)\\
&= \ln\left(\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\right)\\
\Rightarrow \frac{\sin\pi x}{\pi x} &= \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\\
\Rightarrow \sin\pi x &= \pi x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

para todo $0 < x < 1$. Sea ahora $-1 < x < 0$. Como la función seno es impar, entonces:

$$\begin{aligned}
\sin(\pi x) &= -\sin(-\pi x) \\
&= \pi(-x)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{(-x)^2}{n^2}\right) \\
&= -\left[\pi(-x)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{(-x)^2}{n^2}\right)\right] \\
&= \pi x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

y, si $x = 0$ se tiene de forma inmediata que:

$$\sin(\pi x) = 0 = 0\cdot\prod_{n=1}^{\infty}(1) = \pi x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$$

Por tanto, para todo $x \in]-1, 1[$ se cumple:

$$\sin \pi x = \pi x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$$

■

Ejercicio 3.1.10
Se supone que la serie de Fourier de una función $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{K})$ converge en el sentido de Cesáro uniformemente en $\mathbb{R}$. **Pruebe** que f es equivalente a una función continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{K}$.

Demostración:

Ya se sabe por Fejér-Lebesgue que la serie de Fourier f converge puntualmente c.t.p. en $\mathbb{R}$ en el sentido de Cesáro a f.

Ahora, como la serie de Fourier de f converge en el sentido de Cesáro uniformemente a una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$, al ser g el límite uniforme de funciones continuas en $\mathbb{R}$ (por ser combinaciones lineales de sin y cos), entonces g es continua en $\mathbb{R}$. En particular, la serie de Fourier de f converge puntualmente en el sentido de Cesáro a g en $\mathbb{R}$.

Por tanto, de lo anterior se sigue que $f = g$ c.t.p. en $\mathbb{R}$, es decir que f es equivalente a una función continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{K}$.

(Nota: convergencia uniforme de funciones continuas.) ■

Ejercicio 3.1.11
Sea $f \in \mathcal{C}^{2\pi}(\mathbb{R})$ la función

$$f(x) = \pi - |2x|\,, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$$

Demuestre que la serie de Fourier de f converge a f uniformemente en $\mathbb{R}$ aplicando primero el Teorema 3.5 y después el Teorema de Jordan. **Calcule**

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}.$$

Solución:

Se tiene que probar el resultado usando el Teorema 3.4.1 (de mis notas). Para ello, debemos encontrar una función $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $g\in\mathcal{L}_2^{2\pi}(\mathbb{R})$ que satisfaga:

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,dt = 0$$

y que

$$f(x) = c + \int_0^x g(t)\,dt$$

para todo $x\in\mathbb{R}$ siendo $c\in\mathbb{R}$. De esta forma se sigue de manera inmediata que la serie de Fourier de f converge a f uniformemente en $\mathbb{R}$.

Tomemos $c=\pi$ y,

$$g(t) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad -\pi \leqslant t < 0 \\ -2 & \text{si} \quad 0 \leqslant t < \pi \end{cases}, \qquad \forall t \in [-\pi,\pi[$$

y extiéndase por periodicidad a todo $\mathbb{R}$. Afirmamos que

$$\int_0^x g(t)\,dt = -\left|2x\right|, \quad \forall x\in[-\pi,\pi]$$

En efecto, sea $x\in[-\pi,\pi]$, se tienen dos casos:

- $x<0$, se tiene que

$$\begin{aligned}\int_0^x g(t)\,dt &= -\int_x^0 2\,dt \\ &= -2t\Big|_x^0 \\ &= 2x \\ &= -(-2x) \\ &= -\left|2x\right|\end{aligned}$$

- $x\geqslant 0$, se tiene que

$$\begin{aligned}\int_0^x g(t)\,dt &= -\int_0^x -2\,dt \\ &= -2\int_0^x dt \\ &= -2t\Big|_0^x \\ &= -2x \\ &= -\left|2x\right|\end{aligned}$$

luego, como $g\in\mathcal{L}_2^{2\pi}(\mathbb{R})$ se sigue que la serie de Fourier de f converge a f uniformement en $\mathbb{R}$, pues

$$f(x) = \pi + \int_0^x g(t)\,dt$$

para todo $x\in\mathbb{R}$.

Ahora, aplicando el teorema de Jordan basta con ver que f es 2π periódica, de variación acotada en $[-\pi,\pi]$ y continua en $\mathbb{R}$. En efecto, ya se tiene que f es 2π periódica, veamos que

- f **es de variación acotada**: Sea $\Delta = \{-\pi = x_0 < x_1 < ... < x_n = \pi\}$ una partición del intervalo $[-\pi, \pi]$, entonces

$$\begin{aligned} S_\Delta(f) &= \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \\ &= \sum_{k=1}^{n} |\pi - |2x_k| - \pi + |2x_{k-1}|| \\ &= 2\sum_{k=1}^{n} ||x_k| - |x_{k-1}|| \end{aligned}$$

existe $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que

$$x_m \leqslant 0 < x_{m+1}$$

se divide pues la suma como:

$$\begin{aligned} S_\Delta(f) &= 2\sum_{k=1}^{n} ||x_k| - |x_{k-1}|| \\ &= 2\sum_{k=1}^{m} ||x_k| - |x_{k-1}|| + 2\sum_{k=m+1}^{n} ||x_k| - |x_{k-1}|| \end{aligned}$$

si $k \in [\![1, m]\!]$, entonces

$$x_{k-1} < x_k \leqslant 0 \Rightarrow |x_k| < |x_{k-1}|$$

y, si $k \in [\![m+1, n]\!]$,

$$0 < x_{k-1} < x_k \Rightarrow |x_{k-1}| < |x_k|$$

por lo cual

$$\begin{aligned} S_\Delta(f) &= 2\sum_{k=1}^{m} ||x_k| - |x_{k-1}|| + 2\sum_{k=m+1}^{n} ||x_k| - |x_{k-1}|| \\ &= 2\sum_{k=1}^{m} (|x_{k-1}| - |x_k|) + 2\sum_{k=m+1}^{n} (|x_k| - |x_{k-1}|) \\ &= 2\sum_{k=1}^{m} (|x_{k-1}| - |x_k|) + 2\sum_{k=m+1}^{n} (|x_k| - |x_{k-1}|) \\ &= 2(|x_0| - |x_m|) + 2(|x_n| - |x_m|) \\ &= 4(|x_0| + |x_n|) \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

por tanto,

$$V_f([-\pi, \pi]) = 4\pi$$

así, f es de variación acotada en $[-\pi, \pi]$.

- f **es continua en** $\mathbb{R}$. Ya se tiene que f es continua en $]-\pi, \pi[$, para ver que es continua en $\mathbb{R}$ basta con ver que es continua en π, para ello, se debe verificar que

$$\lim_{x \to \pi^-} f(x) = f(\pi) = f(-\pi) = \lim_{x \to -\pi^+} f(x)$$

Los dos límites ya se tienen pues la función $\pi - |2x|$ es continua en $\mathbb{R}$. Por lo cual, solo basta con ver que

$$f(\pi) = \pi - |2\pi| = -\pi = \pi - |2(-\pi)| = f(-\pi)$$

luego, f es continua en $\mathbb{R}$.

Por tanto, usando el Teorema de Jordan se sigue que la serie de Fourier de f converge a f uniformemente en $\mathbb{R}$.

Ahora, calculemos los coeficientes de la serie de Fourier de f, notemos antes que f es par, por ende $b_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Sea $k \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - |2t|)\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - 2t)\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\pi t - t^2\Big|_0^\pi\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\pi^2 - \pi^2\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos kt\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - |2t|)\cos kt\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - 2t)\cos kt\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^\pi \pi\cos kt\,dt - \int_0^\pi 2t\cos kt\,dt\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\pi\int_0^\pi \cos kt\,dt - 2\int_0^\pi t\cos kt\,dt\right], \text{ haciendo el cambio de variable } u = kt \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\pi\int_0^{k\pi} \cos u\,\frac{du}{k} - 2\int_0^{k\pi} \frac{u}{k}\cos u\,\frac{du}{k}\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{k}\int_0^{k\pi} \cos u\,du - \frac{2}{k^2}\int_0^{k\pi} u\cos u\,du\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{k}\sin u\Big|_0^{k\pi} - \frac{2}{k^2}\left[u\sin u + \cos u\Big|_0^{k\pi}\right]\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{k}\left[\sin k\pi - 0\right] - \frac{2}{k^2}\left[k\pi\sin k\pi + \cos k\pi - 0 - \cos 0\right]\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{2}{k^2}\left[1 - (-1)^k\right]\right] \\
&= \frac{4}{\pi k^2}\left[1 - (-1)^k\right]
\end{aligned}$$

si $k = 2m - 1$ con $m \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{4}{\pi k^2}\left[1 - (-1)^k\right] \\
&= \frac{4}{\pi k^2}\left[1 - (-1)^{2m-1}\right] \\
&= \frac{4}{\pi k^2}\left[1 + 1\right] \\
&= \frac{8}{\pi k^2}
\end{aligned}$$

y, si $k = 2m$ con $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $a_k = 0$. Por tanto, se tiene que

$$\begin{aligned}
\pi - |2x| &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^2} \cos(2k-1)x \\
&= \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}, \quad \forall x \in [-\pi, \pi]
\end{aligned}$$

en particular, lo anterior se cumple para $x = 0$, es decir que

$$\begin{aligned}
\pi &= \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \\
\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} &= \frac{\pi^2}{8}
\end{aligned}$$

Ahora, se sabe que en particular $f \in \mathcal{L}_2^{2\pi}(\mathbb{R})$. Por las identidades de Parserval se tiene que:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |a_{2k-1}|^2 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \ dx \\
\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{64}{\pi^2(2k-1)^4} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\pi-|2x||^2 \ dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} |\pi-|2x||^2 \ dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\pi-|2x||^2 \ dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\pi-|2x||^2 \ dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} (|2x|-\pi)^2 \, dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\pi-|2x|)^2 \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (|2x|-\pi)^2 \, dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} (-2x-\pi)^2 \, dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (\pi+2x)^2 \, dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\pi-2x)^2 \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (2x-\pi)^2 \, dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} (\pi+2x)^2 \, dx + \int_{0}^{\pi} (\pi-2x)^2 \, dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{\pi}^{0} (\pi-2x)^2 \, (-dx) + \int_{0}^{\pi} (\pi-2x)^2 \, dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi} (\pi-2x)^2 \, dx + \int_{0}^{\pi} (\pi-2x)^2 \, dx\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\pi-2x)^2 \, dx, \text{ sea } u = \pi - 2x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi} u^2 \, \frac{-du}{2} \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{u^3}{3}\Big|_{\pi}^{-\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{2\pi^3}{3} \\
&= \frac{2\pi^2}{3} \\
\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{64}{\pi^2(2k-1)^4} &= \frac{2\pi^2}{3} \\
\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} &= \frac{\pi^4}{96}
\end{aligned}$$

□

Ejercicio 3.1.12
Sea $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{R})$ la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -\pi \leqslant x < 0, \\ x^2 & \text{si} \quad \ \ 0 \leqslant x < \pi. \end{cases}$$

Calcule la serie de Fourier de f. Usando el teorema fundamental para la convergencia puntual de una serie de Fourier, **muestre** que la serie de Fourier converge a alguna suma $s(x)$ para todo $x \in [-\pi, \pi]$. **Calcule** $s(x)$ para todo $x \in [-\pi, \pi]$.

Solución:
Calculemos los coeficientes de Fourier de f:

- Veamos que

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi} x^2\,dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi}\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi^3}{3} \\
&= \frac{\pi^2}{3}
\end{aligned}
$$

- Sea $k \in \mathbb{N}$, entonces:

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos kx\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\cdot\cos kx\,dx + \int_{0}^{\pi} x^2\cos kx\,dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\cos kx\,dx,\ \text{ sea } u = kx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{k\pi} \left(\frac{u}{k}\right)^2 \cos u\,\frac{du}{k} \\
&= \frac{1}{k^3\pi}\int_{0}^{k\pi} u^2\cos u\,du \\
&= \frac{1}{k^3\pi}\left[(u^2-2)\sin u + 2u\cos u\Big|_0^{k\pi}\right] \\
&= \frac{1}{k^3\pi}\left[((k\pi)^2-2)\sin k\pi + 2k\pi\cos k\pi - (0^2-2)\sin 0 - 2\cdot 0\cdot\cos 0\right] \\
&= \frac{1}{k^3\pi}\cdot 2k\pi(-1)^k \\
&= \frac{2(-1)^k}{k^2}
\end{aligned}
$$

y,

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin kx\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\cdot\sin kx\,dx + \int_{0}^{\pi} x^2\sin kx\,dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\sin kx\,dx,\ \text{ sea } u = kx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{k\pi} \left(\frac{u}{k}\right)^2 \sin u\,\frac{du}{k} \\
&= \frac{1}{k^3\pi}\int_{0}^{k\pi} u^2\sin u\,du \\
&= \frac{1}{k^3\pi}\left[2u\sin u - (u^2-2)\cos u\Big|_{0}^{k\pi}\right] \\
&= \frac{1}{k^3\pi}\left[2k\pi\sin k\pi - ((k\pi)^2-2)\cos k\pi - 2\cdot 0\cdot\sin 0 + (0^2-2)\cos 0\right] \\
&= \frac{1}{k^3\pi}\left[-((k\pi)^2-2)(-1)^k - 2\right] \\
&= \frac{1}{k^3\pi}\left[((k\pi)^2-2)(-1)^{k+1} - 2\right] \\
&= \frac{1}{k^3\pi}\left[(k\pi)^2(-1)^{k+1} + 2(-1)^k - 2\right] \\
&= \frac{(k\pi)^2(-1)^{k+1} + 2(-1)^k - 2}{k^3\pi}
\end{aligned}
$$

Se tienen dos casos, si $k = 2m-1$ con $m \in \mathbb{N}$, entonces:

$$
\begin{aligned}
a_{2m-1} &= \frac{1}{k^3\pi}\left[(k\pi)^2(-1)^{2m-1+1} + 2(-1)^{2m-1} - 2\right] \\
&= \frac{1}{k^3\pi}\left[(k\pi)^2(-1)^{2m} - 2 - 2\right] \\
&= \frac{1}{k^3\pi}\left[(k\pi)^2 - 4\right] \\
&= \frac{(k\pi)^2 - 4}{k^3\pi}
\end{aligned}
$$

y, si $k = 2m$ con $m \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{k^3\pi}\left[(k\pi)^2(-1)^{2m+1} + 2(-1)^{2m} - 2\right] \\
&= \frac{1}{k^3\pi}\left[-(k\pi)^2 + 2 - 2\right] \\
&= -\frac{(k\pi)^2}{k^3\pi} \\
&= \frac{-\pi}{k}
\end{aligned}
$$

Por tanto, la serie de Fourier de f es:

$$
\begin{aligned}
s_f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) \\
&= \frac{\pi^2}{6} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^k}{k^2}\cos kx + \frac{(k\pi)^2(-1)^{k+1} + 2(-1)^k - 2}{k^3\pi}\sin kx\right), \quad \forall x \in [-\pi, \pi[
\end{aligned}
$$

Ahora, sea $x \in [-\pi, \pi]$. Para que la serie de Fourier de f converja en x a una suma $s(x)$, es necesario y suficiente que para algún $0 < \delta < \pi$ se cumpla:

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^\delta \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2s(x)}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t = 0$$

afirmamos que la serie de Fourier converge puntualmente a f en $]-\pi, \pi[$ y en $x = \pi$ o $x = -\pi$ lo hace a $\frac{\pi^2}{2}$, esto es:

$$s(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in]-\pi, \pi[\\ \frac{\pi^2}{2} & \text{si} \quad x = \pi \text{ ó } x = -\pi \end{cases}$$

- Si $x \in]-\pi, \pi[$, se tienen dos casos:
  - $x \in]-\pi, 0[$, tomemos $\delta = \min\{-x, \pi + x\} > 0$, entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} \int_0^\delta \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2s(x)}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t &= \lim_{m\to\infty} \int_0^\delta \frac{0 + 0 - 2 \cdot 0}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t \\ &= \lim_{m\to\infty} \int_0^\delta 0 \cdot \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t \\ &= \lim_{m\to\infty} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

  - $x \in]0, \pi[$, tomemos $\delta = \min\{x, \pi - x\} > 0$, entonces:

$$\begin{aligned} \int_0^\delta \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2s(x)}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t &= \int_0^\delta \frac{(x+t)^2 + (x-t)^2 - 2x^2}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t \\ &= \int_0^\delta \frac{2x^2 + 2t^2 - 2x^2}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t \\ &= \int_0^\delta \frac{2t^2}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t \\ &= 2 \int_0^\delta t \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t \end{aligned}$$

    Por Riemman-Lebsgue, como la función $t \mapsto t$ está en $\mathcal{L}_1(]0, \pi[, \mathbb{R})$, entonces

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^\delta t \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t = 0$$

    por tanto,

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^\delta \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2s(x)}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t = 0$$

  - $x = 0$

  (no es necesario hacer lo anterior ya que con solo afirmar que s tiene derivadas por la derecha e izquierda en x para todo $x \in]-\pi, \pi[$ se sigue la convergencia puntual de la serie de Fourier a $s(x) = f(x)$).

$\square$

Ejercicio 3.1.13

Haga lo mismo que en el problema **3.12** con $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{R})$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -\pi \leqslant x < 0, \\ x & \text{si} \quad 0 \leqslant x < \pi. \end{cases}$$

Solución:

$\square$