Charlas CIMAT 2024

Cristo Daniel Alvarado

13 de noviembre de 2024

Índice general

Capítulo 1

Hilbert, Fronenius y los cuadrados mágicos

Denotaremos por K un campo algebraicamente cerrado de característica $p > 0$. Sea $S = K[x_1, ..., x_n]$ el anillo graduado por todos los polinomios homogéneos de grado n, esto es:

$$[S]_n = \bigoplus_{|\alpha|=n} Kx^\alpha$$

Consideremos $I \subseteq S$ el deal homogéneo:

$$[I]_n = I \cap [S]_n$$

podemos considerar así al ideal graduado dado por:

$$I = \bigoplus_{n=0}^{\infty} [I]_n$$

sea $R = S/I$, entonces:

$$[R]_n = [S]_n/[I]_n$$

Definición 1.0.1
Se define la función de Hilbert de R, dada por:

$$HF_R(n) = \dim_K([R]_n)$$

y su **serie de Hilbert** es:

$$HS_R(t) = \sum_{n=0}^{\infty} HF_R(n)t^n \in \mathbb{Q}[t]$$

Ejemplo 1.0.1
Considere $R = K[x]$, se tiene que:

$$HS_R(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$$

pues,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right) \cdot (1-t) = 1$$

Ejercicio 1.0.1
En el anillo $R = K[x_1, ..., x_l]$, pruebe que:

$$HF_R(n) = \left(\begin{array}{c} n+l-1 \\ n \end{array} \right)$$

por lo que,

$$HS_R(t) = \frac{1}{(1-t)^l}$$

Demostración:

■

Teorema 1.0.1
Sea $d = \dim(R)$, entonces:

- Existe $q(t) \in \mathbb{Q}[t]$ tal que $\deg(q) = d - 1$ y $HF_R(n) = q(n)$ para todo $n \gg 0$.
- Existe $h(t) \in \mathbb{Q}[t]$ tal que

$$HS_R(t) = \frac{h(n)}{(1-t)^d}$$

Ejercicio 1.0.2
Se tiene que:

$$HF_R(n) = q(n) \forall n \iff \deg(h) < d$$

Observación 1.0.1
En el ejercicio anterior, veamos que podemos expresar a h por:

$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t-1)^n$$

1.1. Cuadrados Mágicos

Definición 1.1.1
Una matriz $A \in \mathcal{M}_{l\times l}(\mathbb{Z})$ es un **cuadrado mágico** si existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$\sum_{j=1}^{l} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{l} a_{i,j} = n$$

para todo $i, j \in \{1, ..., l\}$

Teorema 1.1.1 (**Teormea de Birkhoff-Von Neumann**)
Si A es un cuadrado mágico que suma n, entonces A es combinación lineal entera ≥ 0 de matrizes de permutación.

Observación 1.1.1
Una permutación se ve como el vector columna:

$$P_\sigma = [e_{\sigma(1)}, ..., e_{\sigma(l)}]$$

con $\sigma \in S_l$ y $e_1, ..., e_l \in \mathbb{Z}^l$ son vectores columna.

¿Cuántos cuadrados mágicos (denotado por $\square_l(newline)$) de $l \times l$ que suman n existen?

De forma inmediata uno deduce que:

$$\square_l(0) = 1, \quad \text{y} \quad \square_l(1) = l!$$

1.2. Vuelta al álgebra

Consideremos el anillo de polinomios $K[x_{i,j} \big| i, j \in \{1, ..., l\}]$ (la idea es hacer una especie de anillo de matrices). Dada una $A \in \mathcal{M}_{l\times l}(\mathbb{Z}_{\geq 0})$, tenemos que:

$$y^A = \prod_{i,j} y_{i,j}^{a_{i,j}}$$

Ejemplo 1.2.1
Se tine que:

$$y^I = y_{1,1} y_{2,2} \cdots y_{l,l}$$

y,

$$y^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = y_{1,2} y_{2,1}$$

Sea ahora $T(l) = K[y^A \big| A \text{ es matriz de permutación}]$. Se tiene pues que:

$$T(2) = K[y_{1,1}y_{2,2}, y_{1,2}y_{2,1}]$$

con esta nueva noción, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1.2.1
A es una matriz cuadrada si y sólo si $A = \sum_{\sigma \in S_l} c_\sigma P_\sigma$, si y sólo si $y^A = \prod_{\sigma \in S_l} (y^{P_\sigma})^{c_\sigma}$ (siendo $c_\sigma \geq 0$).

Con esta nueva noción, se verifica rápidamente que:

$$\square_l(n) = \dim_K([T(l)]_{nl})$$

Ejemplo 1.2.2
Podemos ver en $T(2)$ simplemente al anillo

$$K[x_1, x_2] \xrightarrow{\alpha} T(2) = K[y_{1,1}y_{2,2}, y_{1,2}y_{2,1}]$$

tal que $x_1 \mapsto y_{1,1}y_{2,2}$ y $x_2 \mapsto y_{1,2}y_{2,1}$. De forma inmediata por el primer teorema de isomorfismos se sigue que:

$$K[x_1, x_2]/\ker\alpha \cong T(2)$$

con lo que nos hemos quitado un montón de ceros que no nos sirven.

Observación 1.2.1
Generalizando este proceso, hacemos:

$$K[x_\sigma \big| \sigma \in S_l] \xrightarrow{\alpha_l} T(l)$$

tal que $x_\sigma \mapsto y^{P_\sigma}$, lo que resulta en el isomorfismo:

$$R(l) = K[x_\sigma \big| \sigma \in S_l]/\ker(\alpha_l) \cong T(l)$$

Por esta razón, se simplifica el problema de cálculo simplemente a hacer:

$$\Box_l(n) = \dim_K([T(l)]_{nl}) = \dim_K[R(l)]_n$$

Definición 1.2.1
Sea $\underline{f} = f_1, ..., f_u \in A$ una sucesión de elementos del anillo A. El **complejo de Cech de** $\underline{f}$ (denotado por $\check{C}(\underline{f})$) se define como:

$$0 \to A \to \bigoplus_{i=1}^{u} A\left[1/f_i\right] \to \bigoplus_{i<j} A\left[1/f_i, 1/f_j\right] \to \cdots \to A[1/f_i, 1/f_j] \to 0$$

La **i-ésima cohomología local de** A en $\underline{f}$ es

$$H^i_{\underline{f}}(A) = H^i(\check{C}(\underline{f}))$$

Si ocupan saber más, mandar correo al Dr. que dió la plática.

Proposición 1.2.2
Se tiene que:

$$H^i_{\underline{f}}(A) = H^i_{\underline{g}}(A)$$

si $(\underline{f}) = (\underline{g})$.

Proposición 1.2.3
Sea $A = K[x]/I$ y $m = (\underline{x})$.

- $H^i_m(A) = 0$ para todo $i > \dim A = d$.
- $H^j_m(A) \neq 0$.

Definición 1.2.2
Decimos que A es de **Cohen-Maculay** si

$$H^i_m(A) \neq 0 \quad \forall i \neq d$$

¿Para qué se ocupa lo anterior?

- $V(I)$.
- Tiene procesos inductivos.

Teorema 1.2.1
$R(l)$ es Cohen-Maculay.

Demostración:

La idea es que $R(l)$ es un sumando directo de $K[y^A \Big| a_{i,j} \geq 0]$.

Luego se usa un teorema de Coxen-Maculay. ∎

Recordemos que el homomorfismo de Fröbenius:

$$\begin{aligned} F : R(l) &\to R(l) \\ f &\mapsto f^p \end{aligned}$$

(en campos de característica p).

Proposición 1.2.4
El homomorfismo de Fröbenius $F : R(l) \to R(l)$ induce un morfismo en la cohomología:

$$F : H^i_m(R(l)) \to H^i_m(R(l))$$

Teorema 1.2.2
$q(t) \in \mathbb{Q}[t]$ es tal que $\square_l(n) = q(n)$, para todo $n \geq 0$.

Demostración:

- $\square_l(n) = HF_{R(l)}(n)$.
- $\dim(R(l)) = (l-1)^2 + 1$.
- F en $H^i_m(R(l))$ es inyectivo.

Como $R(l)$ es Cohen-Maculay con proceso inductivos demuestra que h... ∎

Capítulo 2

Un contraejemplo a la resolución de singularidades vía explosiones de Nash

Capítulo 3

Sobre los teoremas de Cayley-Bacharach

Capítulo 4

Título por anunciar