Lista 2 de Ejercicios
Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

21 de marzo de 2024

Índice general

Capítulo 1

Ejercicios Convolución

Ejercicio 1.1.1
Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ funciones nulas en $]-\infty, 0[$. Si existe $f * g(x)$, demuestre que:

$$f * g(x) = \begin{cases} \int_0^{\infty} f(y)g(x-y)dy & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

En los casos siguientes f y g son nulas en $]-\infty,0[$ y sus valores en $[0,\infty[$ se indican abajo. Calcule $f * g$.

I. $f(x) = e^{-x}$ y $g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

II. $f(x) = g(x) = e^{-x}$.

III. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

IV. $f(x) = g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

Solución:

□

Ejercicio 1.1.2
Haga lo siguiente:

I. Para toda $m \in \mathbb{N}$ se define $e_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como:

$$e_m(x) = \begin{cases} \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Pruebe que

$$e_p * e_q = e_{p+q}$$

II. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ integrable en todo intervalo acotado tal que $f(x) = 0$ para todo $x \leq a$. **Muestre** que

$$e_m * f(x) = \begin{cases} \int_a^x \frac{(x-y)^{m-1}}{(m-1)!} f(y)dy & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

III. **Deduzca** que para $x \geq a$ se cumple la siguiente **fórmula de Cauchy para la n-ésima integral indefinida**

$$\int_a^x dx_{m-1} \int_a^{x_{m-1}} dx_{m-2} \cdots \int_a^{x_2} dx_1 \int_a^{x_1} f(x_0)dx_0 = \int_a^x \frac{(x-y)^{m-1}}{(m-1)!} f(y)dy$$

Demostración:

$\blacksquare$

Ejercicio 1.1.3
La integral fraccional de orden $\alpha > 0$ sobre un intervalo $[a, x]$ de una función medible f se define como:

$$I_a^\alpha[f](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt$$

para toda $x \geq a$ tal que la integral exista.

I. Fije $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Para cada $\alpha > 0$ se define

$$g_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{x^{1-\alpha}} \chi_{]0,b-a[}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Pruebe que si $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$, entonces existe la convolución $\widetilde{f} * g_\alpha$. **Calcule** $\widetilde{f} * g_\alpha$.

II. **Calcule** $I_0^{1/2}[t](x)$ y $I_0^{1/2}[I_0^{1/2}[t]](x)$. ¿**Conclusión**? Justifique.

Demostración:

$\blacksquare$

Ejercicio 1.1.4
Para todo $p > 0$ se define:

$$f_p(t) = \begin{cases} t^{p-1}e^{-t} & \text{si} \quad t > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \end{cases}$$

Calculando de dos modos distintos la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f_p * f_q$ con $p, q > 0$, **pruebe** la fórmula

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

donde $B(p,q)$ es la función beta y $\Gamma(q)$ es la función gama.

Demostración:

$\blacksquare$

Ejercicio 1.1.5
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ una función localmente integrable en $\mathbb{R}$. Defina para todo $h > 0$, la función

$$J_h f = f * \left(\frac{1}{h} \chi_{]-h,0[} \right)$$

I. **Muestre** que, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$J_h f(x) = \frac{1}{h} \int_0^h f(x+y)dy$$

y que $J_h f$ es continua en $\mathbb{R}$.

II. Si f es integrable en $\mathbb{R}$, **pruebe** que también lo es $J_h f$ y que

$$\int_{\mathbb{R}} J_h f = \int_{\mathbb{R}} f$$

III. Si f es de clase C^r en $\mathbb{R}$, **muestre** que también lo es $J_h f$ y que $(J_h f)^{(k)} = J_h f^{(k)}$ para $k = 1, ..., r$.

Solución:

$\square$

Ejercicio 1.1.6

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n$. Sea $B = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| \|x\| \leq R \right\}$. Defina:

$$\mathcal{M}_R f = f * \frac{\chi_B}{\text{Vol}\,(B)}$$

I. **Muestre** que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{M}_R f(x) = \frac{1}{\text{Vol}\,(B)} \int_{\|x-y\| \leq R} f(y) dy$$

y que $\mathcal{M}_R f$ es continua en $\mathbb{R}^n$.

II. Si f es integrable en $\mathbb{R}^n$, **pruebe** que también lo es $\mathcal{M}_R f$ y que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}_R f = \int_{\mathbb{R}^n} f$$

III. Si f es de clase C^r en $\mathbb{R}^n$, **muestre** que también lo es $\mathcal{M}_R f$ y que $D(\mathcal{M}_R f) = \mathcal{M}_R(Df)$ para todo opeardor $D = \partial_{\alpha_1} \cdots \partial_{\alpha_k}$, con $k \in \{1, ..., r\}$.