Integrales Impropias.

Segundo T. del Val. Medio.

Lema.

Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, y $f: I \to \mathbb{R}$ decreciente y sea $v \in \mathbb{N}$. Entonces existe una función $\varphi_v: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ numerablemente escalonada, es decir, de la forma:

$$\varphi_v = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^v \chi_{J_k^v}$$

donde los $\{J_k^v\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una familia numerable de intervalos disjuntos cuya unión es I, tal que:

i) $\varphi_v|_I$ es decreciente.

ii) $0 \leq f(x) - \varphi_v(x) \leq \frac{1}{v}$, $\forall x \in I$.

iii) Si $f \geq 0$ ent $\varphi_v \geq 0$.

Dem.

Sea $v \in \mathbb{N}$. Para $k \in \mathbb{Z}$ se define

$$J_k^v = \{x \in I \mid \frac{k}{v} \leq f(x) < \frac{k+1}{v}\}$$

Se afirma que J_k^v son subintervalos de I (posiblemente reducidos a un punto o vacíos). En efecto, basta probar que si $x_1, x_2 \in J_k^v$ $(x_1 \leq x_2)$ y x es tal que $x_1 \leq x \leq x_2 \Rightarrow x \in J_k^v$. Suponga $J_k^v \neq \emptyset$. Como f es decreciente en I:

$$f(x_2) \leq f(x) \leq f(x_1)$$

$$\Rightarrow \frac{k}{v} \leq f(x) < \frac{k+1}{v}$$

luego $x \in J_k^v$. Por tanto $\{J_k^v\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una familia de intervalos disjuntos m

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} J_k^v = I$$

Se define

$$\varphi_v(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{k}{v} \chi_{J_k^v}(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$$

(ii) se cumple de forma inmediata por la def. de los J_k^v.

(i) $\varphi_v|_I$ es decreciente. En efecto, sean $x<y$ en I, luego $\exists\ k, l \in \mathbb{Z}$ ⫪ $x \in J_k^v$ y $y \in J_l^v$, i.e

$$\frac{k}{v} \leq f(x) < \frac{k+1}{v} \quad \text{y} \quad \frac{l}{v} \leq f(y) < \frac{l+1}{v}$$

Pero $f(x) \geq f(y)$ (por ser decreciente), luego $f(x) \geq \frac{l}{v}$. Pero K es el máximo entero ⫪ $\frac{K}{v} \leq f(x)$

$\Rightarrow \frac{K}{v} \geq \frac{l}{v} \Rightarrow \varphi_v(x) \geq \varphi_v(y)$, i.e φ_v es decreciente.

(iii) Suponga que $f \geq 0$. Por (ii):

$$\varphi_v(x) > f(x) - \frac{1}{v}, \ \forall x \in I$$

$$\Rightarrow \varphi_v(x) > -\frac{1}{v}, \ \forall x \in I$$

pero $\varphi_v(x)$ es de la forma $\frac{K}{v}$ con K entero $\Rightarrow \frac{K}{v} \geq -\frac{1}{v}$, en part. $K \geq 0$

$$\therefore \varphi_v(x) \geq 0, \forall x \in I$$

y. Si $x \notin I$, $\varphi_v(x) = 0 \Rightarrow \varphi_v \geq 0$.

$\square$

Proposición.

Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f: I \to \mathbb{R}$ monótona. Ent. f es med. en I e integrable en todo subintervalo compacto de I.

Dem.

i) Cambiando (si hace falta) f por $-f$, se puede suponer que f es decreciente. Por el lema ant. $\forall v \in \mathbb{N}\ \exists\ \varphi_v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ numerablemente escalonada ⫪

$$0 \leq f(x) - \varphi_v(x) < \frac{1}{v}, \forall x \in I$$

luego $\lim_{v\to\infty} \varphi_v = f$ unif. en I. Por ser cada φ_v medible, f debe ser medible.

ii) Sea $[a,b] \subseteq I$. Por ser f decreciente $f(a) \geq f(b)$, luego:

$$f(a) \geq f(x) \geq f(b), \ \forall x \in [a,b]$$

luego f es med. acotada sobre $[a,b]$ con medida finita. Así pues, f es integrable.

$\square$

Lema.

Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es decreciente, ent. $\forall v\in\mathbb{N}$ $\exists\, \varphi_v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ func. escalonada m

i) $\varphi_v|_{[a,b]}$ es decreciente.

ii) $0\leq f(x)-\varphi_v(x)<\frac{1}{v}$, $\forall x\in I$.

iii) Si f es no neg. φ_v también.

Dem.

Considere la func. numerablemente escalonada del último lema.

$$\varphi_v=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{k}{v}\chi_{J_k^v}$$

donde $J_k^v=f^{-1}([\frac{k}{v},\frac{k+1}{v}[)$. Se afirma que φ_v es escalonada. En efecto, como $f(b)\leq f(x)\leq f(a)$, $\forall x\in[a,b]$, se tiene que $J_k^v=\emptyset$ si

$$\frac{k+1}{v}<f(b)\quad \text{o}\quad f(a)<\frac{k}{v}$$

$$\text{i.e}\quad k<vf(b)-1 \text{ o }\quad k>vf(a)$$

$\therefore$ J_k^v es vacío salvo para un número finito de $k\in\mathbb{Z}$.

$\square$

Teorema.

Sea $g:[a,b]\to\mathbb{K}$ integrable en $[a,b]$ y $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ decreciente y no neg. Ent fg es integrable en $[a,b]$ y $\left|\int_a^b fg\right|\leq f(a)\max_{a\leq x\leq b}\left|\int_a^x g\right|$.

Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $\exists\,\xi\in[a,b]$ m

$$\int_a^b fg=f(a)\int_a^{\xi}g$$

Dem.

fg es med. por ser f y g med y $fg\in\mathcal{L}^1([a,b],\mathbb{K})$ ya que:

$$|f(x)g(x)|\leq|f(a)||g(x)|,\ \forall x\in[a,b]$$

donde la func. de la der es integrable en $[a,b]$, luego $fg\in\mathcal{L}^1([a,b],\mathbb{K})$.

Defina

$$G(x)=\int_a^x g,\ \forall x\in[a,b]$$

(integral indefinida de g). Ya se sabe que G es continua en $[a,b]$ (por el teorema de continuidad)

a) Suponga que f es escalonada. Existe una subdivisión

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

m f toma un valor constante d_k en $]x_{k-1}, x_k[$, $k \in [\![1,n]\!]$. Por ser no neg, $d_k \geq 0$, $\forall k \in [\![1,n]\!]$ y $d_k \geq d_{k+1}$, $\forall k \in [\![1,n-1]\!]$. Se tiene:

$$\int_a^b fg \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} fg = \sum_{k=1}^{n} d_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} g = \sum_{k=1}^{n} d_k \left[G(x_k) - G(x_{k-1}) \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} d_k G(x_k) - \sum_{\ell=1}^{n} d_\ell G(x_{\ell-1})$$

$$= d_n G(x_n) + \sum_{k=1}^{n-1} (d_k - d_{k+1}) G(x_k) - d_0 G(x_0)$$

$$= d_n G(x_n) + \sum_{k=1}^{n-1} (d_k - d_{k+1}) G(x_k)$$

pues $d_0 G(x_0) = d_0 G(a) = 0$. Puesto que $d_n \geq 0$ y $d_k - d_{k+1} \geq 0$, ent.

$$\left| \int_a^b fg \right| \leq |d_n G(x_n)| + \sum_{k=1}^{n-1} |(d_k - d_{k+1}) G(x_k)|$$

$$\leq M \cdot \left[d_n + \sum_{k=1}^{n-1} (d_k - d_{k+1}) \right]$$

donde $M = \sup_{a \leq x \leq b} |G(x)| = \max_{a \leq x \leq b} \left| \int_a^x g \right|$.

$$= M \cdot d_1, \text{ pero } d_1 \leq f(a)$$

$$\therefore \left| \int_a^b fg \right| \leq f(a) \max_{a \leq x \leq b} \left| \int_a^x g \right|.$$

Si $K = \mathbb{R}$, sea $M = \max_{a \leq x \leq b} G(x)$ y $m = \min_{a \leq x \leq b} G(x)$. Como $G(a) = 0$, ent $m \leq 0 \leq M$. Luego

$$m f(a) \leq m d_1 \leq \int_a^b fg \leq M d_1 \leq M f(a) \dots (**)$$

b) Remueva la hip. de ser f escalonada. $\forall v \in \mathbb{N}$ $\exists \varphi_v : [a,b] \to \mathbb{R}$ escalonada m

$$0 \leq f(x) - \varphi_v(x) \leq \frac{1}{v}, \ \forall x \in [a,b]$$

$\varphi_v|_{[a,b]}$ es decreciente y no neg. Luego por a):

$$\left| \int_a^b \varphi_v g \right| \leq \varphi_v(a) K$$

Se tiene

$$\lim_{v \to \infty} \varphi_v(a) = f(a) \text{, y}$$

$$\lim_{v\to\infty} \varphi_v(x)g(x) = f(x)g(x), \forall x \in [a,b], \text{ y}$$

$$|\varphi_v g| \leq f|g|$$

Por Lebesgue, se tiene que:

$$\left|\int_a^b fg\right| \leq f(a)K$$

Suponga que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Por (**)

$$m\varphi_v(a) \leq \int_a^b \varphi_v g \leq M\varphi_v(a)$$

por Lebesgue:

$$\Rightarrow mf(a) \leq \int_a^b fg \leq Mf(a)$$

Si $f(a)=0$, ent. $f=0$, luego para cualquier $\xi \in [a,b]$ se tiene el resultado. Si $f(a)\neq 0$.

$$m \leq \frac{1}{f(a)}\int_a^b fg \leq M.$$

así, por ser G continua, por el t. del val. intermedio, $\exists\ \xi \in [a,b]$ m

$$\int_a^b fg = f(a)\int_a^\xi g$$

$\square$

Teorema (Segundo T. del val. medio).

Si $g:[a,b]\to\mathbb{K}$ es integrable en $[a,b]$ y $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es monótona:

$$\left|\int_a^b fg\right| \leq (|f(a)|+2|f(b)|)\max_{a\leq x\leq b}\left|\int_a^x g\right|$$

Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $\exists\ \xi \in [a,b]$ m

$$\int_a^b fg = f(a)\int_a^\xi g + f(b)\int_\xi^b g$$

Dem:

Se puede suponer f decreciente. La función $f-f(b)$ es decreciente no neg. Por el T. ant.

$$\left|\int_a^b (f-f(b))g\right| \leq (f(a)-f(b))K$$

con $K = \max_{a\leq x\leq b}\left|\int_a^x g\right|$. Luego

$$\Rightarrow \left|\int_a^b fg\right| - |f(b)|\left|\int_a^b g\right| \leq (f(a)-f(b))K$$

$$\Rightarrow \left|\int_a^b fg\right| \leq (|f(a)|+2|f(b)|)K$$

Suponga $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Por el T. ant.

$$\int_a^b (f-f(b))g \leq (f(a)-f(b))\int_a^\xi g$$

para algún $\xi\in[a,b]$, luego:

$$\Rightarrow \int_a^b fg \leq f(a)\int_a^\xi g + f(b)\left(-\int_a^\xi g+\int_a^b g\right)$$
$$= f(a)\int_a^\xi g + f(b)\int_\xi^b g$$

INTEGRALES IMPROPIAS EN $\mathbb{R}$.

Def. Sea $]a,b[$ intervalo abierto en $\mathbb{R}$ donde puede que $a=-\infty$ y $b=\infty$, y sea $f:]a,b[\to \mathbb{K}$.

i) Suponga que f es integrable en todo intervalo $]\alpha,b[$ con $\alpha\in]a,b[$. Se escribe

$$\int_{\to a}^b f = \lim_{\alpha\to a^+}\int_\alpha^b f$$

Si existe el límite, se le llama integral impropia de f en a.

ii) Suponga f integrable en todo intervalo $]a,\beta[$, $\forall\, \beta\in]a,b[$. Se escribe

$$\int_a^{\to b} f = \lim_{\beta\to b^-}\int_a^\beta f$$

Si existe el límite ant. y se llama integral impropia de f en b.

iii) Suponga que f es integrable en $]\alpha,\beta[$, $\forall\ \alpha<\beta$ $(\alpha,\beta\in]a,b[)$. Fije $x_0\in]a,b[$. La existencia de $\int_{\to a}^{x_0} f$ y $\int_{x_0}^{\to b} f$ es independiente de x_0. Si ambas integrales impropias existen y al menos una de las dos es finita, ent.

$$\int_{x_0}^{\to b} f + \int_{\to a}^{x_0} f$$

también es independiente de x_0. Se define

$$\int_{\to a}^{\to b} f = \int_{\to a}^{x_0} f + \int_{x_0}^{\to b} f$$

y se llama la integral impropia de f en a y b.

En lugar de decir que una integral impropia existe y es finita, se acostumbra a decir que la int. impropia es convergente, en caso cont. se dice que la int. impropia diverge. Si una integral impropia existe y es $\pm\infty$, se dice que diverge a $\pm\infty$.

Teorema (Criterio de Cauchy para la conv. de int. impropias).

Sea $f:]a,b[\to \mathbb{K}$ integrable en todo intervalo $]a,\beta[, \forall \beta \in]a,b[$.

i) Sea $b<\infty$. Para que $\int_a^{\to b} f$ sea conv, es nec. y suf. que $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0$ m

$$x_1, x_2 \in]b-\delta, b[\cap]a,b[\Rightarrow \left|\int_{x_1}^{x_2} f\right| \leq \varepsilon.$$

ii) Sea $b=\infty$. Para que $\int_a^{\infty} f$ sea conv. es nec. y suf. que $\forall \varepsilon>0 \ \exists R>0$ m

$$x_1, x_2 > R \Rightarrow \left|\int_{x_1}^{x_2} f\right| \leq \varepsilon$$

Dem.

De (i): Defina $G(x)=\int_a^x f, \forall x \in]a,b[$. Decir que $\int_a^{\to b} f$ es conv. es decir que existe en $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to b^-} G(x)$$

En el cap. 0 del semestre pasado, se demostró que una cond. nec. y suf. para la existencia de este límite es que $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0$ m

$$x_1, x_2 \in]b-\delta, b[\cap]a,b[\Rightarrow \left|\int_{x_1}^{x_2} f\right| = |G(x_1)-G(x_2)| \leq \varepsilon$$

De (ii): Es análogo a (i).

$\square$

Condiciones análogas se cumplen para $\int_{\to a}^{b} f$. En lo sucesivo, nos limitaremos al caso $\int_a^{\to b} f$, y si es útil, se supondrá que $b<\infty$.

Teorema y def.

Sea $f: [a,b[\to \mathbb{K}$ integrable en todo intervalo $[a,\beta]$, $\beta \in]a,b[$. Si $\int_a^{\to b} |f|$ es conv, ent. $\int_a^{\to b} f$ es conv. En este caso se dice que $\int_a^{\to b} f$ es absolutamente convergente.

Dem.

Se aplicará el criterio de Cauchy. Observe que

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f\right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f|$$

Como $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ m si $x_1, x_2 \in]b-\delta, b[\cap [a,b[$

$$\Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} |f| \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} f \right| \leq \varepsilon$$

$\therefore$ Se cumple la cond. de Cauchy para $\int_a^{\to b} f$.

$\square$

Teorema.

Sea $f : [a,b[\to \mathbb{K}$ int. en $[a, \beta[$, $\forall \beta \in]a,b[$. Para que la integral impropia $\int_a^{\to b} f$ sea absolutamente conv. es nec. y suf. que f sea integrable en $[a,b[$ y:

$$\int_a^{\to b} f = \int_a^b f$$

Dem.

Claramente f es med. en $[a,b[$ (por ser límite c.t.p. de medibles).

$\Leftarrow$) Supongo f integrable en $[a,b[$ y sean $\tilde{f}$, $\{\beta_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ suc. creciente en $[a,b[$ m $\lim_{\nu\to\infty} \beta_\nu = b$. Se tiene

$$\int_a^{\beta_\nu} |f| = \int_{\mathbb{R}} |\tilde{f} \chi_{[a,\beta_\nu]}|, \ \forall \nu \in \mathbb{N}$$

donde

$$\lim_{\nu\to\infty} |\tilde{f} \chi_{[a,\beta_\nu]}| = |\tilde{f}| \text{ c.t.p en } \mathbb{R}$$

y $|\tilde{f} \chi_{[a,\beta_\nu]}| \leq |\tilde{f}|$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$. Por Lebesgue:

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_a^{\beta_\nu} |f| = \int_a^b |f|$$

existe y es finito. Por tanto $\int_a^{\to b} |f|$ existe y es conv. i.e $\int_a^{\to b} f$ es abs. conv. Nuevamente por Lebesgue.

$$\lim_{\nu\to\infty} \tilde{f} \chi_{[a,\beta_\nu]} = \tilde{f} \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}$$

$$|\tilde{f} \chi_{[a,\beta_\nu]}| \leq |\tilde{f}|$$

$$\Rightarrow \int_a^{\to b} f = \lim_{\nu\to\infty} \int_a^{\beta_\nu} f = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f} = \int_a^b f$$

$\Rightarrow$) Sean $\tilde{f}$ y $\{\beta_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ como antes.

$$\int_a^{\beta_v} |f| = \int_{\mathbb{R}} |\tilde{f}| \chi_{[a,\beta_v]}, \forall v \in \mathbb{N} \dots (*)$$

por hip. el lado izquierdo de $(*)$ converge a $\int_a^{\to b} |f|$, la cual es finita. Luego $\{|\tilde{f}| \chi_{[a,\beta_v]}\}_{v=1}^{\infty}$ es una suc. creciente de funciones integrables que conv. puntualmente a $|\tilde{f}|$ y la suc. de integrales correspondiente está acotada por $\int_a^{\to b} |\tilde{f}|$. Por Beppo-Levi $|\tilde{f}|$ es int. en $\mathbb{R}$, i.e f es int. en $[a, b[$.

$\square$

Criterios De Abel.

Teorema.

Sea $g: [a,b[\to \mathbb{K}$ integrable en todo $[a,\beta], \forall \beta \in]a,b[$, y sea $f: [a,b[\to \mathbb{R}$ monótona en $[a,b[$. Se define

$$G(x) = \int_a^x g, \forall x \in [a,b[$$

ent. la integral impropia $\int_a^{\to b} fg$ es convergente en cada uno de los sig. casos.

1. $\lim_{x \to b^-} f(x) = 0$ y G es acotada en $[a,b[$.
2. f acotada en $[a,b[$ y $\int_a^{\to b} g$ es convergente.

Dem.

Se aplica el criterio de Cauchy. Sean $x_1 < x_2$, $x_i \in [a,b[$, $\forall i = 1,2$. Por el 2do teorema del valor medio

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} fg \right| \leq (|f(x_1)| + 2|f(x_2)|) \sup_{x_1 \leq x \leq x_2} \left| \int_{x_1}^{x_2} g \right| \dots (1)$$

Para 1. Sea $K = \sup_{a \leq x < b} |G(x)| < \infty$. Se tiene que

$$\sup_{x_1 \leq x \leq x_2} |G(x)| = \sup_{x_1 \leq x \leq x_2} |G(x) - G(x_1)|$$
$$\leq 2K$$

Dado $\varepsilon > 0 \ \exists\ \delta > 0$ m

$$x \in]b-\delta, b[\cap [a,b[\Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

Si $x_1 < x_2$ en $]b-\delta, b[\cap [a,b[$, se sigue de lo ant. que

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} fg \right| \leq (3\varepsilon)(2K) = 6\varepsilon K$$

luego, se cumple la cond. de Cauchy para la conv. de $\int_a^{\to b} fg$.

Para **2**. Sea $L = \sup_{a \leq x < b} |f(x)| < \infty$. Como $\int_a^{\to b} g$ es convergente, esta cumple la cond. de Cauchy. Así pues, dado $\varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ m

$$x_1 < x_2 \text{ en }]b-\delta, b[\cap [a,b[\Rightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} g \right| \leq \varepsilon$$

Por (1):

$$\Rightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} fg \right| \leq 3L\varepsilon$$

así $\int_a^{\to b} fg$ satisface la cond. de Cauchy, luego es convergente.

$\square$

EJEMPLO.

1) Análisis de las integrales impropias.

$$\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^{\alpha}}\, dx \qquad \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha}}\, dx$$

Con $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\alpha > 1$. Se afirma que dichas int. son abs. conv. En efecto, basta probar que

$$x \mapsto \frac{\operatorname{sen} x}{x^{\alpha}}, \quad x \mapsto \frac{\cos x}{x^{\alpha}}$$

Son integrables en $[1, \infty[$. Lo cual se cumple por las desigualdades:

$$|\operatorname{sen} x| \leq 1 \quad y \quad |\cos x| \leq 1$$

luego con $\alpha > 1$, $x \mapsto \frac{1}{x^{\alpha}}$ está es int. Así, las int. impropias son abs. conv. y en part. son convergentes

$\alpha = 1$) La func. $x \mapsto \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ no es integrable en $[1, \infty[$. En efecto,

$$\int_1^{\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\, dx \geq \int_{\pi}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\, dx$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\, dx$$

$$\geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\operatorname{sen} x|\,dx$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(k+1)\pi} = \infty$$

Similarmente $\int_1^{\infty} \frac{|\cos x|}{x}\,dx = \infty$. Por tanto, no son abs. conv.

$0<\alpha\leq 1)$ Se afirma que $x \mapsto \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha}$ y $x \mapsto \frac{\cos x}{x^\alpha}$ no son integrables en $[1,\infty[$. En efecto,

$$\int_1^{\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^\alpha}\,dx \geq \int_1^{\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\,dx = \infty, \quad \&$$
$$\int_1^{\infty} \frac{|\cos x|}{x^\alpha}\,dx \geq \int_1^{\infty} \frac{|\cos x|}{x}\,dx = \infty$$

Pero las int. imp. si son convergentes. La func. $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ es monótona y $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0$. y

$$\left|\int_1^x \operatorname{sen} x\,dx\right| \leq 2, \ \forall\, x \geq 1$$

luego $x \mapsto \int_1^x \operatorname{sen} x\,dx$ es acotada. Por el primer criterio de Abel, $\int_1^{\to\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha}\,dx$ es conv.

Similarmente $\int_1^{\to\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx$ es conv.

$\alpha=0)$ No hay conv. absoluta, pues $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ no son integrables en $[1,\infty[$. Y tampoco convergencia, pues:

$$\int_1^R \operatorname{sen} x\,dx = \cos 1 - \cos R$$

Como $\lim_{R\to\infty} \cos R$ no existe, tampoco existe $\int_1^{\to\infty} \operatorname{sen} x$. Y tampoco existe la otra.

$\alpha<0)$ Se afirma que las int. impropias no son convergentes. Sea $\beta = -\alpha > 0$. Se puede reescribir:

$$\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha}\,dx = \int_1^{\infty} x^\beta \operatorname{sen} x\,dx \quad \& \quad \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx = \int_1^{\infty} x^\beta \cos x\,dx$$

Si $\int_1^{+\infty} x^\beta \operatorname{sen} x$ fuera conv. como $x \mapsto \frac{1}{x^\beta}$ es decreciente y acotada, por el segundo criterio de abel sería conv. $\int_1^{\to\infty} \operatorname{sen} x\,dx = \int_1^{\to\infty} \frac{1}{x^\beta} \cdot x^\beta \operatorname{sen} x\,dx$ $\divideontimes$. Por tanto, no pueden ser conv.

2) Considere las integrales impropias de Fresnel $\int_0^{\to\infty} \cos(x^2)\,dx$ y $\int_0^{\to\infty} \operatorname{sen}(x^2)\,dx$. $\forall\, R>0$ se tiene

$$\int_0^R \cos(x^2)\,dx = \int_0^{R^2} \frac{\cos(t)}{2t^{1/2}}\,du \quad \dots (1)$$

Por el ejemplo ant, $\int_1^{\to\infty = \sqrt{t}} \frac{\cos t}{t^{1/2}}\,dt$ es convergente, luego

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2}\int_0^{R^2} \frac{\cos t}{t^{1/2}}\,dt = \int_0^{\to\infty} \frac{\cos t}{t^{1/2}}\,dt$$

así pues, existe y es finito el límite del I.i. de (1). Similarmente, es conv. la otra int. impropia. Sin embargo, no son abs. conv. En efecto, $x \mapsto \cos(x^2)$ es int. en $[0,\infty[$ $\iff$ $t \mapsto \frac{\cos t}{2t^{1/2}}$ lo es en $[0,\infty[$, pero la última no lo es, ya que no es abs. conv. en $[1,\infty[$.

3) ¿Es conv. $\int_1^{\to\infty} \operatorname{atan} x \,\frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha}\,dx$, con $0<\alpha\leq 1$? ¿Es abs. conv.? $x\mapsto \operatorname{atan} x$ es creciente, acotada y $\lim_{x\to\infty} \operatorname{atan} x = 1$, y $\int_1^{\to\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha}\,dx$ es conv. Por el 2do criterio de Abel, $\int_1^{\to\infty} \operatorname{atan} x\,\frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha}\,dx$ es conv.

Por otra parte,

$$\int_1^\infty \left|\operatorname{atan} x\,\frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha}\right| dx \geq \frac{\pi}{4}\int_1^\infty \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^\alpha}\,dx = \infty$$

luego no es abs. conv.

Def. Sea Λ un conjunto, $f:]a,b[\times\Lambda \to \mathbb{K}$, $(x,\lambda)\mapsto f(x,\lambda)$. Se supone que $\forall \lambda\in\Lambda$, la función $x\mapsto f(x,\lambda)$ es integrable en $]\alpha,\beta[$, $\forall\, \alpha,\beta\in]a,b[$. Se dice que la integral impropia

$$\int_a^{\to b} f(x,\lambda)\,dx \text{ uniformemente converge en } \Lambda$$

o con respecto a $\lambda\in\Lambda$ si el límite

$$\int_a^{\to b} f(x,\lambda)\,dx = \lim_{\beta\to b^-} \int_a^\beta f(x,\lambda)\,dx$$

existe y es uniforme respecto a $\lambda\in\Lambda$, es decir, $\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, \delta>0$ m

$$\beta\in]b-\delta,b[\,\cap\,]a,b[\Rightarrow \sup_{\lambda\in\Lambda}\left|\int_a^{\to b} f(x,\lambda)\,dx - \int_a^\beta f(x,\lambda)\,dx\right| < \varepsilon$$

o sea que δ no depende de $\lambda\in\Lambda$. Pero:

$$\begin{aligned}\int_a^{\to b} f(x,\lambda)\,dx - \int_a^\beta f(x,\lambda)\,dx &= \lim_{t\to b^-}\left[\int_a^t f(x,\lambda)\,dx - \int_a^\beta f(x,\lambda)\,dx\right]\\ &= \lim_{t\to b^-}\int_\beta^t f(x,\lambda)\,dx\\ &= \int_\beta^{\to b} f(x,\lambda)\,dx\end{aligned}$$

así pues, la cond. ant. es equivalente a que $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \;\ni$

$$B \in \left]b-\delta, b\right[\cap \left]a,b\right[\Rightarrow \sup_{\lambda\in\Lambda} \left| \int_B^{\to b} f(x,\lambda)\,dx \right| < \varepsilon$$

Teorema (Criterio de Cauchy para la conv. unif. de integrales impropias dependientes de un parámetro).

Con las mismas notaciones, la integral impropia $\int_a^{\to b} f(x,\lambda)\,dx$ unif. con resp. a $\lambda\in\Lambda \iff$ $\forall \varepsilon>0 \;\exists\, \delta>0 \;\ni$

$$x_1,x_2 \in \left]b-\delta, b\right[\cap \left]a,b\right[\Rightarrow \sup_{\lambda\in\Lambda} \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x,\lambda)\,dx \right| < \varepsilon$$

Dem.

$\Rightarrow$) Sea $\varepsilon>0$ y sea $\delta>0$ el de la conv. unif. Sean $x_1,x_2 \in \left]b-\delta, b\right[\cap \left]a,b\right[$. Ent.

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x,\lambda)\,dx = \int_{x_1}^{t} f(x,\lambda)\,dx - \int_{x_2}^{t} f(x,\lambda)\,dx$$

$\forall\, t > x_2$ (con $x_1<x_2$). Sacando límites, como el lado izq. no depende de t:

$$\Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} f(x,\lambda)\,dx = \int_{x_1}^{\to b} f(x,\lambda)\,dx - \int_{x_2}^{\to b} f(x,\lambda)\,dx$$

$$\Rightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x,\lambda)\,dx \right| \leq \left| \int_{x_1}^{\to b} f(x,\lambda)\,dx \right| + \left| \int_{x_2}^{\to b} f(x,\lambda)\,dx \right|$$

$$< 2\varepsilon, \;\forall\, \lambda\in\Lambda$$

$$\therefore \sup_{\lambda\in\Lambda} \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x,\lambda)\,dx \right| < 2\varepsilon$$

$\Leftarrow$) Suponga que $\forall \varepsilon>0 \;\exists\, \delta>0 \;\ni$

$$x_1,x_2 \in \left]b-\delta, b\right[\cap \left]a,b\right[\Rightarrow \sup_{\lambda\in\Lambda} \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x,\lambda)\,dx \right| < \varepsilon$$

en part. $\forall \lambda\in\Lambda$, se cumple la cond. de Cauchy para la conv. de la integral impropia $\int_a^{\to b} f(x,\lambda)\,dx$.

Por hip. $\varepsilon>0$ es cota sup. del conjunto

$$\left\{ \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x,\lambda)\,dx \right| \;\middle|\; x_1,x_2 \in \left]b-\delta, b\right[\cap \left]a,b\right[\right\} \subseteq [0, \varepsilon]$$

Para x_1 y λ fijo, $\varepsilon>0$ sigue siendo cota sup. de

$$\left\{ \lim_{x_2\to b} \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x,\lambda)\,dx \right| \;\middle|\; x_1 \in \left]b-\delta, b\right[\cap \left]a,b\right[,\; \lambda\in\Lambda \right\} \subseteq [0, \varepsilon]$$

$$= \left\{ \left| \int_{x_1}^{\to b} f(x,\lambda)\,dx \right| \;\middle|\; x_1 \in \left]b-\delta, b\right[\cap \left]a,b\right[,\; \lambda\in\Lambda \right\}$$

$$\Rightarrow \sup_{\lambda\in\Lambda} \left| \int_{x_0}^{\to b} f(x,\lambda)\,dx \right| < \varepsilon \text{ si } x \in]b-\delta, b[\cap]a,b[, \ \forall \lambda \in \Lambda$$

$\therefore \int_a^{\to b} f(x,\lambda)\,dx$ converge uniformemente con respecto a $\lambda \in \Lambda$.

$\square$

Teorema (intercambio de orden de límites).

Sean S un conjunto contenido en un esp. métrico $(\mathbb{X}, d)$ y T un conjunto cont. en un esp. métrico $(\mathbb{Y}, \rho)$. Sea $f: S\times T \to Z$, donde (Z, σ) es un esp. métrico completo. Sean a y b puntos de acumulación de S y T, resp. Se supone lo sig.

i) Existe en Z, $\lim_{y\to b} f(x,y)$, para cada $x \in S$.

ii) Existe en Z, $\lim_{x\to a} f(x,y)$ uniformemente con resp. a $y \in T$.

Ent. existen en Z y son iguales los límites:

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y) = \lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$$

Por ejemplo, si $\{a_n^m\}_{n,m=1}^{\infty}$ es una suc. en un esp. métrico completo Z, si

i) $\forall m \in \mathbb{N}$, existe $\lim_{n\to\infty} a_n^m$.

ii) Existe $\lim_{m\to\infty} a_n^m$ unif. respecto a $n \in \mathbb{N}$.

Ent. son iguales

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} a_n^m, \quad \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_n^m, \quad \lim_{(n,m)\to(\infty,\infty)} a_n^m$$

$S, T = \mathbb{N}$ y $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = \overline{\mathbb{R}}$.

Teorema (integración impropia de sucesiones de funciones).

Sea $\{f_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ una sucesión de func. de $]a,b[\to \mathbb{K}$. Se suponen:

i) $\forall \beta \in]a,b[$ y $\forall \nu \in \mathbb{N}$, f_ν es int. en $]a, \beta]$.

ii) $\{f_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ converge c.t.p. a alguna función f de $]a,b[\to \mathbb{K}$.

iii) $\forall \beta \in]a,b[$ fijo, f es integrable en $]a, \beta]$ y además

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_a^\beta f_\nu = \int_a^\beta f$$

(esta cond. se cumple si $\forall\ \beta \in]a,b[\ \exists\ g_\beta :]a,\beta] \to \mathbb{K}$ integrable en $]a,\beta]$ m $|f_v(x)| \leq g_\beta(x)$, para casi toda $x \in]a,\beta]$ y $\forall\ v \in \mathbb{N}$. También se cumple si a es finito y $\{f_v\}_{v=1}^{\infty}$ conv. unif. a f en $]a,\beta]$)

vi) $\int_a^{\to b} f_v(x)dx$ es unif. conv. con respecto a $v \in \mathbb{N}$.

Entonces, existe la integral impropia siguiente (y son iguales):

$$\int_a^{\to b} f(x)dx = \lim_{v\to\infty} \int_a^{\to b} f_v(x)dx$$

Dem.

$\forall\ \beta \in]a,b[$ y $\forall\ v \in \mathbb{N}$, se define

$$\phi(\beta,v) = \int_a^{\beta} f_v(x)dx$$

Por la hip. (iii):

$$\lim_{v\to\infty} \int_a^{\beta} f_v(x)dx = \int_a^{\beta} f(x)dx,\ \forall\ \beta \in]a,b[.$$

y, por (iv):

$$\lim_{\beta\to b^-} \phi(\beta,v) = \int_a^{\to b} f_v(x)dx$$

unif. respecto a $v \in \mathbb{N}$. Por el teorema de intercambio de orden de límites.

$$\begin{aligned}
\lim_{\beta\to b^-} \lim_{v\to\infty} \phi(\beta,v) &= \lim_{\beta\to b^-} \int_a^{\beta} f(x)dx \\
&= \int_a^{\to b} f(x)dx \\
&= \lim_{v\to\infty} \lim_{\beta\to b^-} \int_a^{\beta} f_v(x)dx \\
&= \lim_{v\to\infty} \int_a^{\to b} f_v(x)dx
\end{aligned}$$

$$\therefore \int_a^{\to b} f(x)dx = \lim_{v\to\infty} \int_a^{\to b} f_v(x)dx$$

$\square$

Teorema (de continuidad de func. def. por integrales impropias).

Sea Λ esp. métrico y sea $f :]a,b[\times \Lambda \to \mathbb{K}$, $(x,\lambda) \mapsto f(x,\lambda)$. Se supone lo sig.

i) $\forall\ \lambda \in \Lambda$, $f^{\lambda} :]a,b[\to \mathbb{K}$, $x \mapsto f(x,\lambda)$ es integrable en $]a,\beta]$, $\forall\ \beta \in]a,b[$.

ii) Para casi todo $x \in]a,b[$. $f_x : \Lambda \to \mathbb{K}$, $\lambda \mapsto f(x,\lambda)$ es continua en $\mu \in \Lambda$.

iii) $\forall\ \beta \in]a,b[$ fijo, $\lambda \mapsto \int_a^\beta f(x,\lambda)dx$ es continua en μ. (Esto se cumple si $\forall\ \beta \in]a,b[$ existe $g_\beta :]a,\beta] \to \mathbb{R}$ int. e independiente de λ m $|f(x,\lambda)| \leq g_\beta(x)$, para casi toda $x \in]a,b[$ y $\forall\ \lambda \in \Lambda$).

iv) La integral impropia $\int_a^{\to b} f(x,\lambda)dx$ converge unif. con respecto a $\lambda \in \Lambda$.

Ent. si $\phi(\lambda) = \int_a^{\to b} f(x,\lambda)dx$, ϕ es cont. en μ.

Dem.

Sea $\{\lambda_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ una sucesión en Λ que conv. a μ. Probaremos que

$$\lim_{\nu\to\infty} \phi(\lambda_\nu) = \phi(\mu)$$

$\forall\ \nu \in \mathbb{N}$ y $\forall\ \lambda \in \Lambda$, sea $f_\nu :]a,b[\to \mathbb{K}$

$$f_\nu(x) = f(x,\lambda_\nu)$$

Por (i), f_ν es integrable en $]a,\beta]$, $\forall\ \beta \in]a,b[$.

Por (ii), $\lim_{\nu\to\infty} f_\nu(x) = f(x,\mu)$, para casi toda $x \in]a,b[$.

Por (iii), $\lim_{\nu\to\infty} \int_a^\beta f_\nu(x)dx = \int_a^\beta f(x,\mu)dx$, $\forall\ \beta \in]a,b[$.

Por (iv), $\int_a^{\to b} f_\nu$ conv. unif. con resp. a $\nu \in \mathbb{N}$

Se cumplen pues las hip. del t. ant. Por ese teorema.

$$\begin{aligned}\phi(\mu) &= \int_a^{\to b} f(x,\mu)dx \\ &= \lim_{\nu\to\infty} \int_a^{\to b} f_\nu(x)dx \\ &= \lim_{\nu\to\infty} \int_a^{\to b} f(x,\lambda_\nu)dx \\ &= \lim_{\nu\to\infty} \phi(\lambda_\nu)\end{aligned}$$

$\square$

EJEMPLO.

1) Calcule la integral impropia $\int_0^{\to\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx$. Considero $f : [0,\infty[\times [0,\infty[\to \mathbb{R}$ dada como:

$$f(x,\lambda) := \begin{cases} e^{-\lambda x} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x \neq 0. \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

f es continua en $[0.\infty[\times [0.\infty[$. ¿Existe $\int_0^{\to\infty} e^{-\lambda x} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$, $\forall \lambda \geq 0$?

a) $\lambda > 0$. En el caso:

$$\left| e^{-\lambda x} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right| \leq e^{-\lambda x}, \ \forall x > 0.$$

Como $x \mapsto e^{-\lambda x}$ es int. en $[0.\infty[$, de hecho:

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}$$

ent. la int. impropia es absolutamente convergente. $\forall \lambda \geq 0$ se define

$$\phi(\lambda) = \int_0^{\to\infty} e^{-\lambda x} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$$

pues en $\phi(0)$ $\int_0^{\to\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ es convergente.

b) Sea $\lambda > 0$. Se calculará $\phi'(\lambda)$ por derivación bajo el signo de integral. De hecho, se afirma:

$$\phi'(\lambda) = -\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \operatorname{sen} x\,dx \quad \ldots \ (1)$$

Fije $\lambda_0 > 0$. $\forall \lambda \geq \lambda_0$,

$$|e^{-\lambda x} \operatorname{sen} x| \leq e^{-\lambda_0 x} \operatorname{sen} x, \ \forall x \geq 0.$$

donde la func de la derecha es integrable e independiente de λ. Por tanto, (1) es válido $\forall \lambda \geq \lambda_0$. Siendo λ_0 arbitrario, (1) es válida $\forall \lambda > 0$.

Por métodos elementales:

$$-\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \operatorname{sen} x\,dx \overset{\text{Lebesgue}}{=} -\frac{e^{-\lambda x}}{1+\lambda^2}\left[-\lambda \operatorname{sen} x - \cos x\right]_{x=0}^{x=\infty}$$

$$= -\frac{1}{1+\lambda^2}, \ \forall \lambda > 0$$

$$\therefore \phi'(\lambda) = \frac{-1}{1+\lambda^2}, \ \forall \lambda > 0$$

$$\Rightarrow \phi(\lambda) = C - \operatorname{atan}(\lambda), \ \forall \lambda > 0.$$

Para calcular C, se probará que

$$\lim_{\lambda \to \infty} \phi(\lambda) = 0$$

En efecto,

$$0 \leq |\phi(\lambda)| \leq \int_0^\infty |e^{-\lambda x} \frac{\operatorname{sen} x}{x}| dx \leq \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \lim_{\lambda \to \infty} \phi(\lambda) = 0$$

Pero $\lim_{\lambda \to \infty} C - \operatorname{atan}(\lambda) = C - \frac{\pi}{2}$. Luego $C = \frac{\pi}{2}$. Por lo tanto:

$$\phi(\lambda) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{atan}(\lambda), \forall \lambda > 0.$$

c) Se afirma que ϕ es cont. en 0. Se tiene lo sig.

i) $\forall R > 0$, existe $\int_0^R f(x,\lambda) dx, \forall \lambda \geq 0$.

ii) $\forall x \in [0, \infty[$, $\lambda \mapsto f(x,\lambda)$ es cont. en $[0, \infty[$.

iii) Como $|f(x,\lambda)| \leq 1, \forall x \in [0, R]$ y $\forall \lambda \in [0, \infty[$, y la func. constante es integrable en $[0, R]$ e independiente de $\lambda \geq 0$, ent.

$$\lambda \mapsto \int_0^R e^{-\lambda x} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \int_0^R f(x,\lambda) dx$$

es cont. $\forall \lambda \geq 0$. En part. en 0.

iv) Queda por comprobar que

$$\int_0^{\to\infty} e^{-\lambda x} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx \text{ conv. unif. con resp. a } \lambda \in [0, \infty[.$$

Se aplicará el criterio de Cauchy. Sean $x_2 > x_1 > 0$. Por el caso part. del segundo t. del val. medio:

$$\int_{x_1}^{x_2} e^{-\lambda x} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx \leq e^{-\lambda x_1} \cdot \sup_{x_1 \leq \xi \leq x_2} \left| \int_{x_1}^{\xi} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx \right|$$

$$\leq \sup_{x_1 \leq \xi \leq x_2} \left| \int_{x_1}^{\xi} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx \right|$$

Como $\int_0^{\to\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$ es conv. Para $\varepsilon > 0$ $\exists R > 0$ m si $\xi > x_1 > R$:

$$\Rightarrow \left| \int_{x_1}^{\xi} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right| \leq \varepsilon$$

por el criterio de Cauchy para la conv. de int. impropias. Por tanto, si $x_2 > x_1 > R$:

$$\Rightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} e^{-\lambda x} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx \right| \leq \varepsilon, \forall \lambda \geq 0.$$

Luego $\int_0^{\to\infty} e^{-\lambda x} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$ converge uniformemente con resp. a $\lambda \in [0, \infty[$.

Por el t. de cont. para func. def. por int. imp. ϕ es continua en $[0,\infty[$, en p- art. en 0. Por tanto:

$$\begin{aligned}\phi(0) &= \lim_{\lambda\to 0^+}\phi(\lambda)\\ &= \lim_{\lambda\to 0^+}\frac{\pi}{2}-\operatorname{atan}(\lambda)\\ &= \frac{\pi}{2}-0\\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

$\square$

Teorema (int. de fun. def. por integrales impropias).

Sea $f:]a,b[\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$, $(x,\lambda)\mapsto f(x,\lambda)$. Se supone:

i) $\forall\, \beta\in]a,b[$, f es integrable en $]a,\beta]\times\mathbb{R}^n$.

ii) Para casi toda $\lambda\in\mathbb{R}^n$, la integral impropia $\int_a^{\to b} f(x,\lambda)\,dx$ es convergente.

iii) $\exists\, \beta_0\in]a,b[$ y $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ integrable en $\mathbb{R}^n$, $\lambda\mapsto h(\lambda)$ tal que

$$\left|\int_a^\beta f(x,\lambda)\,dx\right|\leq h(\lambda),\ \forall\, \beta>\beta_0$$

para casi toda $\lambda\in\mathbb{R}^n$.

Entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\lambda\int_a^{\to b} f(x,\lambda)\,dx = \int_a^{\to b} dx\int_{\mathbb{R}^n} f(x,\lambda)\,d\lambda$$

Comentario. Sea $\{\beta_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ en $]a,b[$ conv. a b. Como f es int. en $]a,\beta_\nu[\times\mathbb{R}^n$, Por Fubi- ni. $\exists\, Z_\nu\subseteq\mathbb{R}^n$ despreciable $\ni$ si $\lambda\in\mathbb{R}^n\setminus Z_\nu$, la func. $x\mapsto f(x,\lambda)$ es int. en $]a,\beta_\nu[$.

Sea $Z=\bigcup_{\nu=1}^\infty Z_\nu$. $\forall\,\lambda\in\mathbb{R}^n\setminus Z$, $\forall\,\beta\in]a,b[$,

$$x\mapsto f(x,\lambda)$$

es int. en $]a,\beta[$. Luego tienen sentido las hip. (ii) y (iii).

Dem.

Sea $\{\beta_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ una sucesión en $]a,b[$ cuyo límite sea b. Por Fubini:

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\lambda \int_a^{\beta_\nu} f(x,\lambda)dx = \int_a^{\beta_\nu} dx \int_{\mathbb{R}^n} f(x,\lambda)d\lambda \ \dots \ (1)$$

pues, ambas integrales coinciden con $\int_{[a,\beta_\nu[\times\mathbb{R}^n} f$. Sea $g_\nu(\lambda) = \int_a^{\beta_\nu} f(x,\lambda)dx$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^n \setminus Z$ (Z el conjunto despreciable). La función g definida c.t.p. en $\mathbb{R}^n$ es integrable por (1). Además, por la hip. (i):

$$\lim_{\nu\to\infty} g_\nu(\lambda) = \int_a^{\to b} f(x,\lambda)dx, \text{ para casi todo. } \lambda \in \mathbb{R}^n$$

Por (iii), $\forall \nu \in \mathbb{N}$ m $\beta_\nu > \beta_0$, se tiene que.

$$|g_\nu(\lambda)| \leq h(\lambda) \text{ c.t.p. en } \mathbb{R}^n$$

donde h es integrable en $\mathbb{R}^n$ e indep. de $\nu \in \mathbb{N}$. Por Lebesgue:

$$\begin{aligned}\lim_{\nu\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_\nu(\lambda)d\lambda &= \lim_{\nu\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} d\lambda \int_a^{\beta_\nu} f(x,\lambda)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\nu\to\infty} \left[\int_a^{\beta_\nu} f(x,\lambda)dx\right] d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} d\lambda \int_a^{\to b} f(x,\lambda)dx\end{aligned}$$

Pero, por (1):

$$\begin{aligned}\lim_{\nu\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_\nu(\lambda)d\lambda &= \lim_{\nu\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} d\lambda \int_a^{\beta_\nu} f(x,\lambda)dx \\ &= \lim_{\nu\to\infty} \int_a^{\beta_\nu} dx \int_{\mathbb{R}^n} f(x,\lambda)d\lambda \\ &= \int_a^{\to b} dx \int_{\mathbb{R}^n} f(x,\lambda)d\lambda\end{aligned}$$

$$\therefore \int_a^{\to b} dx \int_{\mathbb{R}^n} f(x,\lambda)d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} d\lambda \int_a^{\to b} f(x,\lambda)dx$$

$\square$

Corolario.

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ medible con medida finita. $f: [a,b[\times S \to \mathbb{K}$, $(x,\lambda) \mapsto f(x,\lambda)$. Se suponen:

i) $\forall \beta \in]a,b[$, f es integrable en $[a,b[\times S$.

ii) $\int_a^{\to} f(x,\lambda)dx$ conv. unif. c.t.p. con respecto a $\lambda \in S$, i.e $\exists Z \subseteq S$ desp. m $\int_a^{\to b} f(x,\lambda)dx$ conv. unif. con respecto a $\lambda \in S \setminus Z$).

Ent.

$$\int_S d\lambda \int_a^{\to b} f(x,\lambda)\, dx = \int_a^{\to b} dx \int_S f(x,\lambda)\, d\lambda$$

Dem:

EJEMPLO.

1) Calcular las integrales de Fresnel:

$$\int_0^{\to\infty} \operatorname{sen}(x^2)\,dx \quad y \quad \int_0^{\to\infty} \cos(x^2)\,dx$$

ant. Se probó que $\int_0^{\to\infty} \operatorname{sen}(x^2)\,dx = \int_0^{\to\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{2\sqrt{t}}\,dt$. Se calculará:

$$\int_0^{\infty} e^{-tx^2}\,dx, \ \forall\, t>0.$$

Por el cambio de var. $x = \frac{z}{\sqrt{t}}$, se tiene que:

$$\int_0^{\infty} e^{-tx^2}\,dx = \int_0^{\infty} e^{-z^2}\,\frac{dz}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}$$

Entonces:

$$\int_0^{\to\infty} \operatorname{sen}(x^2)\,dx = \int_0^{\to\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{2\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\to\infty} dt \int_0^{\infty} e^{-tx^2} \operatorname{sen} t\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\to\infty} \operatorname{sen} t\,dt \int_0^{\infty} e^{-tx^2}\,dx$$

Se afirma que se puede intercambiar el orden de integración. En efecto, veamos que $(x,t) \mapsto \sin t\, e^{-tx^2}$ es integrable en $[0,R]\times]0,\infty[$, $\forall\, R>0$.

i) En efecto, sea $R>0$. Veamos que:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^R |\operatorname{sen} t|\,dt \int_0^{\infty} e^{-tx^2}\,dx = \int_0^R \frac{|\operatorname{sen} t|}{2\sqrt{t}}\,dt \leq \frac{1}{2}\int_0^R \frac{dt}{\sqrt{t}} < \infty$$

Por Tonelli, $(x,t) \mapsto \sin t\, e^{-tx^2}$ es int. en $[0,R]\times]0,\infty[$, $\forall\, R>0$. Luego, Por Fubini:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^R \operatorname{sen} t\,dt \int_0^{\infty} e^{-tx^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dx \int_0^R \operatorname{sen} t\, e^{-tx^2}\,dt$$

ii) $\forall\, u>0$, existe la int. impropia

$$\int_0^{\to\infty} \operatorname{sen} t\, e^{-tu^2}\,dt$$

de hecho, esta int. imp. es abs. conv. En efecto, por un cálculo directo y el T.

de Lebesgue:

$$\overset{\to\infty}{\int_0} \operatorname{sen} t\, e^{-tu^2} dt = \lim_{R\to\infty} \left[\frac{e^{-tu^2}}{1+u^4} (-u^2 \operatorname{sen} t - \cos t) \Big|_{t=0}^{t=R} \right]$$

$$= \frac{1}{1+u^4}$$

iii) $\forall R>0$, se tiene que:

$$\int_0^R \operatorname{sen} t\, e^{-tu^2} dt = \left[\frac{e^{-tu^2}}{1+u^4} (-u^2 \operatorname{sen} t - \cos t) \Big|_{t=0}^{t=R} \right]$$

$$= \frac{1}{1+u^4} - \frac{e^{-Ru^2}}{1+u^4} (u^2 \operatorname{sen} R + \cos R)$$

$$\Rightarrow \left| \int_0^R \operatorname{sen} t\, e^{-tu^2} dt \right| \leq \frac{2+u^2}{1+u^4}$$

donde $u \mapsto \frac{2+u^2}{1+u^4}$ es int. en $]0,\infty[$ y no depende de R.

Por tanto, por el t. ant y (i)-(iii) se sigue que:

$$\overset{\to\infty}{\int_0} \operatorname{sen}(x^2) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \overset{\to\infty}{\int_0} dt \int_0^\infty \operatorname{sen} t\, e^{-tx^2} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx \overset{\to\infty}{\int_0} \operatorname{sen} t\, e^{-tx^2} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}$$

Por métodos elementales:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \quad (x^4+1 = [x^2+\sqrt{2}x+1]\cdot[x^2-\sqrt{2}x+1])$$

$$\therefore \overset{\to\infty}{\int_0} \operatorname{sen}(x^2) dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Del mismo modo:

$$\overset{\to\infty}{\int_0} \cos(x^2) dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Teorema (deriv. de suc. de fun.).

Sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ funciones de un int. I de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, derivables en todo punto de I. Se supone:

i) $\lim_{n\to\infty} f_n' = g$ unif. en I para alguna $g: I \to \mathbb{R}$.

ii) $\exists\, x_0 \in I \ni \{f_n(x_0)\}_{n=1}^\infty$ es conv. en $\mathbb{R}$.

Ent.

1. Para alguna fun. $f : I \to \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ unif. en I.

2. $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$, $\forall x \in I$.

Teorema (der. de fun. def. por int. imp.).

Sea $f :]a,b[\times I \to \mathbb{K}$, $(x,\lambda) \mapsto f(x,\lambda)$. Se supone:

i) $\forall \lambda \in I$ y $\forall \beta \in]a,b[$, $x \mapsto f(x,\lambda)$ es int. Se define

$$\phi_\beta(\lambda) = \int_a^\beta f_x(\lambda)\,dx, \ \forall \lambda \in I.$$

ii) Para casi toda $x \in]a,b[$ y para toda $\lambda \in I$, existe la derivada $f_x'(\lambda)$ de la func. $\lambda \mapsto f(x,\lambda)$.

iii) $\forall \beta \in]a,b[$ y $\forall \lambda \in I$,

$$\phi_\beta'(\lambda) = \int_a^\beta f_x'(\lambda)\,dx$$

(esto se cumple cuando $\exists\, g_\beta :]a,\beta[\to \mathbb{R}$ int. en $]a,\beta[$ $\ni$ $|f_x'(\lambda)| \le g_\beta(x)$ c.t.p. en $]a,\beta[$ y $\forall \lambda \in I$).

iv) $\exists\, \lambda_0 \in I \ni \int_a^{\to b} f(x,\lambda_0)\,dx$ es convergente.

v) $\int_a^{\to b} f_x'(\lambda)\,dx$ es unif. conv. con respecto a $\lambda \in I$.

Ent.

1. $\int_a^{\to b} f(x,\lambda)\,dx$ es unif. conv. con respecto a $\lambda \in I$. Escriba

$$\phi(\lambda) = \int_a^{\to b} f(x,\lambda)\,dx, \ \forall \lambda \in I.$$

2. ϕ es derivable en todo I, y:

$$\phi'(\lambda) = \int_a^{\to b} f_x'(\lambda)\,dx, \ \forall \lambda \in I.$$

Dem.

Ejercicio.

Notas:

1) En 3.14, interpretar $f'(y)$ como una int. impropia.

$$f'(y) = \int_0^\infty \frac{\cos(xy)}{x^2+1}\,dx$$