Espacios Hilbertianos

Cristo Daniel Alvarado

14 de marzo de 2024

Índice general

Capítulo 1

Espacios Hilbertianos

1.1. Conceptos básicos. Proyecciones ortogonales

Definición 1.1.1
Sea H un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$. Decimos que H es un **espacio prehilbertiano** si está dotado de una aplicación $(\vec{x},\vec{y}) \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ con las propiedades siguientes:

1. $\forall \vec{y} \in H$ fijo, $\vec{x} \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ es una aplicación lineal de H en $\mathbb{K}$, o sea

$$\begin{aligned}\left(\vec{x_1}+\vec{x_2}\middle|\vec{y}\right) &= \left(\vec{x_1}\middle|\vec{y}\right)+\left(\vec{x_2}\middle|\vec{y}\right)\\ \left(\alpha\vec{x}\middle|\vec{y}\right) &= \alpha\cdot\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)\end{aligned}$$

   para todo $\vec{x},\vec{x_1},\vec{x_2} \in H$ y $\alpha \in \mathbb{K}$.

2. $(\vec{y}|\vec{x}) = \overline{\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)}$, para todo $\vec{x} \in H$.

3. $\left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right) \geq 0$, para todo $\vec{x} \in H$.

4. $\left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right) = 0$ si y sólo si $\vec{x} = 0$.

Observación 1.1.1
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces 1) y 2) implican que $\forall \vec{x} \in H$ fijo, la aplicación $\vec{y} \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ de H en $\mathbb{R}$ es lineal. En este caso se dice que $(\vec{x},\vec{y}) \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ es una **forma bilineal sobre** H.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, entonces

$$\begin{aligned}\left(\vec{x}\middle|\vec{y_1}+\vec{y_2}\right) &= \left(\vec{x}\middle|\vec{y_1}\right)+\left(\vec{x}\middle|\vec{y_2}\right)\\ \left(\vec{x}\middle|\alpha\vec{y}\right) &= \overline{\alpha}\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)\end{aligned}$$

Se dice que $\vec{y} \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ es entonces **semilineal** y que $(\vec{x},\vec{y}) \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ es **sesquilineal** ($1\frac{1}{2}$-lineal).

La aplicación $(\vec{x},\vec{y}) \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ se llama **producto escalar sobre** H.

Definición 1.1.2
Para todo $\vec{x} \in H$ se define la **norma de** $\vec{x}$ como: $\|\vec{x}\| = \sqrt{\left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right)}$.

Ejemplo 1.1.1
Sea $H = \mathbb{K}^n$

Ejemplo 1.1.2
Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y sea $H = L_2(S, \mathbb{K})$. Para todo $f, g \in H$ se define

$$(f|g) = \int_S f\overline{g}$$

La integral existe por Hölder con $p = p^* = 2$. Este es un producto escalar sobre H y, en este caso:

$$\|f\| = \left[\int_S |f|^2\right]^{\frac{1}{2}} = \mathcal{N}_2(f), \quad \forall f \in H$$

Ejemplo 1.1.3
Sea $H = l_2(\mathbb{K})$ el espacio de sucesiones en $\mathbb{K}$ que son cuadrado sumables. Se sabe que $\vec{x} = (x_1, x_2, ...) \in l_2(\mathbb{K})$ si y sólo si

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$$

$l_2(\mathbb{K})$ es un espacio prehilbertiano con el producto escalar:

$$(\vec{x}|\vec{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$$

donde la serie es convergente por Hölder. En este caso:

$$\|\vec{x}\| = \left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right]^{\frac{1}{2}} = \mathcal{N}_2(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in l_2(\mathbb{K})$$

Teorema 1.1.1 (Desigualdad de Cauchy-Schwartz)
Sea H un espacio prehilbertiano. Entonces:

1. Se cumple la desigualdad de Cauchy-Schwartz:

$$\left| (\vec{x}|\vec{y}) \right| \leq \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in H$$

   y, la igualdad se da si y sólo si los vectores son linealmente dependientes.

2. Se cumple la desigualdad triangular:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in H$$

   y la igualdad se da si y sólo si uno de los vectores es múltiplo no negativo del otro.

Demostración:
De 1): Se supondrá que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (el caso en que sea $\mathbb{R}$ es similar y se deja como ejercicio).

Sean $\vec{x}, \vec{y} \in H$. En el caso de que alguno de los vectores sea $\vec{0}$, el resultado es inmediato (ambos miembros de la desigualdad son cero). Por lo cual, supongamos que ambos son no cero. Se tiene para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ que

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \left(\vec{x}+\lambda\vec{y}\middle|\vec{x}+\lambda\vec{y}\right) \\
&= \left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right) + \overline{\lambda}\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) + \lambda\left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right) + \lambda\overline{\lambda}\left(\vec{y}\middle|\vec{y}\right) \\
&= \left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right) + \overline{\lambda\left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right)} + \lambda\left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right) + \lambda\overline{\lambda}\left(\vec{y}\middle|\vec{y}\right) \\
&= \|\vec{x}\|^2 + 2\Re\lambda\left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right) + \left|\lambda\right|^2\|\vec{y}\|^2
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

En particular, para

$$
\lambda(t) = \begin{cases} t\dfrac{\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)}{\left|\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)\right|} & \text{si} \quad \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) \neq 0 \\ t & \text{si} \quad \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) = 0 \end{cases}
$$

con $t \in \mathbb{R}$, la desigualdad (1) se convierte en

$$
0 \leq \|\vec{x}\|^2 + 2t\left|\left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right)\right| + t^2\|\vec{y}\|^2 \tag{1.2}
$$

El trinomio anterior es mayor o igual a cero si y sólo si su discriminante:

$$
\left|\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)\right|^2 - \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2 \leq 0
$$

es decir

$$
\left|\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)\right| \leq \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|
$$

Si $\left|\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)\right| = \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2$, entonces el trinomio en (2) tiene una raíz doble. Luego, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que

$$
\left(\vec{x}+\lambda\vec{y}\middle|\vec{x}+\lambda\vec{y}\right) = 0
$$

pero lo anterior solo sucede si y sólo si $\vec{x}+\lambda\vec{y} = 0$, es decir si $\vec{x}$ y $\vec{y}$ son linealmente dependientes.

De 2): Se tiene lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 &= \left(\vec{x}+\vec{y}\middle|\vec{x}+\vec{y}\right) \\
&= \|\vec{x}\| + 2\Re\left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right) + \|\vec{y}\|^2 \\
&\leq \|\vec{x}\| + 2\left|\left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right)\right| + \|\vec{y}\|^2 \\
&\leq \|\vec{x}\| + 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 \\
&= (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2
\end{aligned}
$$

lo cual implica la desigualdad que se quiere probar. Ahora, la igualdad se cumple si y sólo si

$$
\left|\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)\right| = \Re\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) \text{ y } \left|\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)\right| = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|
$$

la primera igualdad implica que $\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ es real (en particular, ≥ 0 por el valor absoluto) y la segunda implica que $\vec{x}$ y $\vec{y}$ son linealmente dependientes. Es decir, si y sólo si un vector es multiplo no negativo del otro. ■

Se concluye del teorema anterior que $\|\cdot\|$ es una norma sobre H. En lo sucesivo se consdierará a H como espacio normado dotado de esta norma.

Proposición 1.1.1
La aplicación $(\vec{x},\vec{y}) \mapsto \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ es una función continua del espacio normado producto $H \times H$ en $\mathbb{K}$.

Demostración:

Sean $\vec{x}, \vec{y} \in H$ y, $\{\vec{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{\vec{y_n}\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones que convergen a $\vec{x}$ y $\vec{y}$, respectivamente. Se probará que $\left\{\left(\vec{x_n}\middle|\vec{y_n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ en $\mathbb{K}$. Se tiene que

$$\begin{aligned} \left|\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)-\left(\vec{x_n}\middle|\vec{y_n}\right)\right| &\leq \left|\left(\vec{x}-\vec{x_n}\middle|\vec{y}\right)\right|+\left|\left(\vec{x_n}\middle|\vec{y}-\vec{y_n}\right)\right| \\ &\leq \|\vec{x}-\vec{x_n}\|\|\vec{y}\|+\|\vec{x_n}\|\|\vec{y}-\vec{y_n}\| \end{aligned} \tag{1.3}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\{\vec{x_n}\}$ es convergente, es acotada. Luego existe $M > 0$ tal que

$$\|\vec{x_n}\| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Se sigue de (3) que

$$\left|\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)-\left(\vec{x_n}\middle|\vec{y_n}\right)\right| \leq \|\vec{x}-\vec{x_n}\|\|\vec{y}\|+M\|\vec{y}-\vec{y_n}\|$$

y, por ende

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)-\left(\vec{x_n}\middle|\vec{y_n}\right)\right| = 0$$

con lo que se tiene el resultado. ■

Definición 1.1.3
Decimos que un espacio prehilbertiano se llama **Hilbertiano**, si la norma $\|\cdot\|$ hace de él un espacio normado completo (o sea, un espacio normado de Banach).

Ejemplo 1.1.4
Los espacios $L_2(S,\mathbb{K})$, $l_2(\mathbb{K})$ y todo espacio prehilbertiano de dimensión finita ($\mathbb{K}^n$) son hilbretianos (ya que, todo espacio prehilbertiano de dimensión finita es isomorfo a $\mathbb{R}^k$, para algún $k \in \mathbb{N}$).

De ahora en adelante, H denotará siempre a un espacio prehilbertiano (a menos que se indique lo contrario).

Definición 1.1.4
Sean $\vec{x}, \vec{y} \in H$. Se dice que $\vec{x}$ **y** $\vec{y}$ **son ortogonales** y se escribe $\vec{x} \perp \vec{y}$, si $\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) = 0$.

Observación 1.1.2
La condición $\vec{x} \perp \vec{y}$ para todo $\vec{x} \in H$ implica que $\vec{y} = \vec{0}$, pues en particular $\left(\vec{y}\middle|\vec{y}\right) = 0 \Rightarrow \vec{y} = \vec{0}$.

Teorema 1.1.2 (Teorema de Pitágoras)
Si $(\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_n})$ es un sistema de vectores ortogonales (a pares), entonces

$$\|\vec{x_1}+\cdots+\vec{x_n}\|^2 = \|\vec{x_1}\|^2+\cdots+\|\vec{x_n}\|^2$$

Demostración:

Se procederá por inducción sobre n. Veamos el caso $n = 2$. En este caso, veamos que

$$\begin{aligned} \|\vec{x_1}+\vec{x_2}\|^2 &= \left(\vec{x_1}+\vec{x_2}\middle|\vec{x_1}+\vec{x_2}\right) \\ &= \|\vec{x_1}\|^2+\left(\vec{x_1}\middle|\vec{x_2}\right)+\left(\vec{x_2}\middle|\vec{x_1}\right)+\|\vec{x_2}\|^2 \\ &= \|\vec{x_1}\|^2+\|\vec{x_2}\|^2 \end{aligned}$$

Suponga que el resultado se cumple para $n \geq 2$. Sea $\vec{x_1}, ...\vec{x_{n+1}} \in H$ un sistema de vectores ortogonales. Observemos que

$$\begin{aligned}\left(\vec{x_1} + \cdots + \vec{x_n}\middle|\vec{x_{n+1}}\right) &= \left(\vec{x_1}\middle|\vec{x_{n+1}}\right) + \cdots + \left(\vec{x_n}\middle|\vec{x_{n+1}}\right)\\ &= 0 + \cdots + 0\\ &= 0\end{aligned}$$

por lo cual, $x_{n+1} \perp \vec{x_1} + \cdots + \vec{x_n}$. Por el caso $n = 2$ se sigue que:

$$\|\vec{x_1} + \cdots + \vec{x_{n+1}}\|^2 = \|\vec{x_1} + \cdots + \vec{x_n}\|^2 + \|\vec{x_{n+1}}\|^2$$

Pero, por hipótesis de inducción:

$$\|\vec{x_1} + \cdots + \vec{x_n}\|^2 = \|\vec{x_1}\|^2 + \cdots + \|\vec{x_n}\|^2$$

Por lo cual:

$$\|\vec{x_1} + \cdots + \vec{x_{n+1}}\|^2 = \|\vec{x_1}\|^2 + \cdots + \|\vec{x_n}\|^2 + \|\vec{x_{n+1}}\|^2$$

Aplicando inducción se sigue el resultado. ■

Proposición 1.1.2 (Identidad del paralelogramo)
Para todo $\vec{x}, \vec{y} \in H$ se cumple la identidad del paralelogramo:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2)$$

Demostración:

Sean $\vec{x}, \vec{y} \in H$. Veamos que

$$\begin{aligned}\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 &= \left(\vec{x} + \vec{y}\middle|\vec{x} + \vec{y}\right) + \left(\vec{x} - \vec{y}\middle|\vec{x} - \vec{y}\right)\\ &= \|\vec{x}\|^2 + 2\Re\left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right) + \|\vec{y}^2\| + \|\vec{x}\|^2 - 2\Re\left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right) + \|\vec{y}\|^2\\ &= 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2)\end{aligned}$$

■

Este resultado anterior es importante, pues en espacios donde la norma no venga de un producto escalar, no necesariamente se cumple la igualdad.

Ejemplo 1.1.5
Los vectores $\chi_{[0,1]}$ y $\chi_{[1,2]}$ son ortogonales en $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (es inmediato del producto escalar en $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$).

Ejemplo 1.1.6
Los vectores sen y cos son ortogonales en $L_2(]-\pi, \pi[, \mathbb{R})$. En efecto, veamos que

$$(\operatorname{sen} \mid \cos) = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x \cos x dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} 2x dx = 0$$

En particular, por Pitágoras se tiene que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\operatorname{sen} x + \cos x\right|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left|\operatorname{sen} x\right|^2 dx + \int_{-\pi}^{\pi} \left|\cos x\right|^2 dx$$

Ejemplo 1.1.7
Si $\vec{x} = (1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{3}, ...)$ y $\vec{x} = (1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{3},)$ son elementos de $l_2(\mathbb{R})$, se tiene que $\vec{x} \perp \vec{y}$. En efecto, veamos que

$$\begin{aligned}(\vec{x}|\vec{y}) &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} s_n\end{aligned}$$

donde $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de sumas parciales, siendo $s_{2m} = 0$ y $s_{2m-1} = \frac{1}{m}$. Por lo cual

$$(\vec{x}|\vec{y}) = \lim_{n\to\infty} s_n = 0$$

Teorema 1.1.3
Sea M un subespacio de un espaco prehilbertiano H y sea $\vec{x} \in H$.

1. Suponiendo que existe $\vec{x_0} \in M$ tal que $\vec{x} - \vec{x_0} \perp M$, es decir que $\vec{x} - \vec{x_0} \perp \vec{y}$, para todo $\vec{y} \in M$, se tiene
$$\|\vec{x} - \vec{x_0}\| < \|\vec{x} - \vec{y}\|, \quad \forall \vec{y} \in M, \vec{y} \neq \vec{x_0}$$
Así pues, si existe $\vec{x_0}$, tal vector es único y es llamado **la proyección ortogonal de $\vec{x}$ sobre M**. Además
$$d(\vec{x}, M)^2 = \|\vec{x} - \vec{x_0}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{x_0}\|^2$$

2. Recíprocamente, si existe un $\vec{x_0} \in M$ tal que $d(\vec{x}, M) = \|\vec{x} - \vec{x_0}\|$, entonces $\vec{x_0}$ es la proyección ortogonal de $\vec{x}$ sobre M. En particular, si $\vec{x} \in M$ entonces $\vec{x} = \vec{x_0}$, es decir que $\vec{x}$ es su propia proyección ortogonal sobre M.

Demostración:
De 1): Suponga que existe $\vec{x_0} \in M$ con la condición especificada. Sea $\vec{y} \in M$ distinto de $\vec{x_0}$. Como $\vec{x_0} - \vec{x} \perp \vec{x_0} - \vec{y}$, por el Teorema de Pitágoras se tiene que

$$\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\vec{x} - \vec{x_0}\|^2 + \vec{x_0} - \vec{y}^2 > \|\vec{x} - \vec{x_0}\|^2 \tag{1.4}$$

pues $\vec{x_0} \neq \vec{y}$. Así pues, $\vec{x_0}$ es único. Además $d(\vec{x}, M) = \|\vec{x} - \vec{x_0}\|$. Aplicando la ecuación 4) con $\vec{y} = \vec{0}$ se tiene que

$$\begin{aligned}\|\vec{x}\|^2 &= \|\vec{x} - \vec{x_0}\|^2 + \|\vec{x_0}\|^2 \\ \Rightarrow d(\vec{x}, M)^2 = \|\vec{x} - \vec{x_0}\|^2 &= \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{x_0}\|^2\end{aligned}$$

De 2) Si existe $\vec{x_0} \in M$ tal que $d(\vec{x}, M) = \|\vec{x} - \vec{x_0}\|$, entonces $\vec{x_0}$ debe ser la proyección ortogonal de $\vec{x}$ sobre M. En efecto, para todo $\vec{y} \in M$ y para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ se tiene

$$\begin{aligned}\|\vec{x} - (\vec{x_0} + \lambda\vec{y})\|^2 &\geq \|\vec{x} - \vec{x_0}\|^2 \\ \Rightarrow \|(\vec{x} - \vec{x_0}) - \lambda\vec{y}\|^2 &\geq \|\vec{x} - \vec{x_0}\|^2 \\ \Rightarrow \|\vec{x} - \vec{x_0}\|^2 + 2\Re[\overline{\lambda}\left(\vec{x} - \vec{x_0}|\vec{y}\right)] + \left|\lambda\right|^2\|\vec{y}\|^2 &\geq \|\vec{x} - \vec{x_0}\|^2 \\ \Rightarrow -2\Re[\lambda\left(\vec{x} - \vec{x_0}|\vec{y}\right)] + \left|\lambda\right|^2\|\vec{y}\|^2 &\geq 0\end{aligned} \tag{1.5}$$

en particular, para $\lambda = t\left(\vec{x} - \vec{x_0}|\vec{y}\right)$, con $t \in \mathbb{R}$, la ecuación anterior se transforma en:

$$\left|\left(\vec{x} - \vec{x_0}|\vec{y}\right)\right|^2\left[-2t + t^2\|\vec{y}\|\right] \geq 0$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Esto exige que $\left(\vec{x} - \vec{x_0}|\vec{y}\right) = 0$, o sea que $\vec{x} - \vec{x_0} \perp \vec{y}$. ■

Dado un subespacio M de un espacio prehilbertiano H un vector $\vec{x} \in H$, puede no existir la proyección ortogonal de $\vec{x}$ sobre M. Esto motiva la siguiente definición:

Definición 1.1.5
Un subespacio M de H se dice que es **distinguido** si para cada $\vec{x} \in H$ existe la proyección ortogonal de $\vec{x}$ sobre M.

Ejemplo 1.1.8
El subespacio ϕ_0 de las sucesiones eventualmente constantes de valor cero es un subespacio del espacio hilbretiano $l_2(\mathbb{R})$. Sea M el subespacio de ϕ_0 dado como sigue:

$$M = \{\vec{x} \in \phi_0 | x_2 = 0\}$$

Sea $\vec{x} = \left(0, \frac{1}{2^{0/2}}, \frac{1}{2^{1/2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^{3/2}}, ...\right)$. Se tiene que:

$$\begin{aligned}
d(\vec{x}, M) &= \inf_{\vec{y} \in M} \{\|\vec{x} - \vec{y}\|\} \\
&= \inf_{\vec{y} \in M} \left\{ \left[\left|y_1\right| + \sum_{i=2}^{\infty} \left| \frac{1}{2^{(i-2)/2}} - y_i \right|^2 \right]^{1/2} \right\} \\
&= 1 \\
&= \inf_{\vec{y} \in M} \left\{ \left[\left|y_1\right| + 1 + \sum_{i=3}^{\infty} \left| \frac{1}{2^{(i-2)/2}} - y_i \right|^2 \right]^{1/2} \right\} \\
&= 1
\end{aligned}$$

(pues, $y_2 = 0$). Pero $\|\vec{x} - \vec{y}\| > 1$, para todo $\vec{y} \in M$. En efecto, sea $\vec{y} \in M$, entonces $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq m$ se tiene que $y_k = 0 = y_2$. Veamos que

$$\begin{aligned}
\|\vec{x} - \vec{y}\| &= \left[\left|y_1\right| + 1 + \sum_{i=3}^{\infty} \left| \frac{1}{2^{(i-2)/2}} - y_i \right|^2 \right]^{1/2} \\
&\geq \left[1 + \sum_{i=3}^{k-1} \left| \frac{1}{2^{(i-2)/2}} - y_i \right|^2 + \sum_{i=k}^{\infty} \left| \frac{1}{2^{(i-2)/2}} - y_i \right|^2 \right]^{1/2} \\
&= \left[1 + \sum_{i=3}^{k-1} \left| \frac{1}{2^{(i-2)/2}} - y_i \right|^2 + \sum_{i=k}^{\infty} \left| \frac{1}{2^{(i-2)/2}} \right|^2 \right]^{1/2} \\
&\geq \left[1 + \sum_{i=k}^{\infty} \left| \frac{1}{2^{(i-2)/2}} \right|^2 \right]^{1/2} \\
&> [1]^{1/2} \\
&> 1
\end{aligned}$$

Luego no existe $\vec{x_0} \in M$ tal que $d(\vec{x}, M) = \|\vec{x} - \vec{x_0}\|$. Por lo tanto, no existe la proyección ortogonal de $\vec{x}$ sobre M (es decir, M no es distinguido).

Sin embargo, si $\vec{x} = (1, 1, 0, ...) \in l_2(\mathbb{R})$, entonces si existe la proyección ortogonal de $\vec{x}$ sobre

M, pues

$$
\begin{aligned}
d(\vec{x}, M) &= \inf_{\vec{y} \in M} \{\|\vec{x} - \vec{y}\|\} \\
&= \inf_{\vec{y} \in M} \left\{ \left[\left|1 - y_1\right|^2 + 1^2 + \sum_{i=3}^{\infty} \left|y_i\right|^2 \right]^{1/2} \right\} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

y $\|\vec{x} - \vec{e_1}\| = 1$, donde $\vec{e_1} \in M$. Por tanto, $\vec{e_1}$ es la proyección ortogonal de $\vec{x}$ sobre M.

Teorema 1.1.4
Si M es un subespacio completo de un espacio prehilbertiano, entonces M es distinguido. En particular todo subespacio de dimensión finita de un espacio prehilbertiano siempre es distinguido.

Demostración:
Sea $\vec{x} \in H$. Se debe probar que existe un $\vec{x_0} \in M$ tal que $d(\vec{x}, M) = \|\vec{x} - \vec{x_0}\|$. Sea $a = d(\vec{x}, M)$. Por propiedades del ínfimo existe una sucesión $\{\vec{y_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$ tal que

$$
\lim_{\nu \to \infty} \|\vec{x} - \vec{y_\nu}\| = a \tag{1.6}
$$

Sean $\nu, \mu \in \mathbb{N}$ arbitrarios. Por la identidad del paralelogramo se tiene que

$$
\begin{aligned}
2\left(\|\vec{x} - \vec{y_\nu}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y_\mu}\|^2\right) &= \|\vec{y_\nu} - \vec{y_\mu}\|^2 + \|2\vec{x} - (\vec{y_\nu} + \vec{y_\mu})\|^2 \\
&= \|\vec{y_\nu} - \vec{y_\mu}\|^2 + 4\|\vec{x} - \frac{\vec{y_\nu} + \vec{y_\mu}}{2}\|^2 \\
&\geq \|\vec{y_\nu} - \vec{y_\mu}\|^2 + 4a^2
\end{aligned}
$$

de donde

$$
\|\vec{y_\nu} - \vec{y_\mu}\|^2 \leq 2\left(\|\vec{x} - \vec{y_\nu}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y_\mu}\|^2\right) - 4a^2
$$

Tomando límite cuando ν, μ tienden a infinito y por (6), se tiene que

$$
\lim_{\nu, \mu \to \infty} \|\vec{y_\nu} - \vec{y_\mu}\|^2 = 0
$$

por tanto, $\{\vec{y_\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Por ser M completo, existe $\vec{x_0} \in M$ tal que $\lim_{\nu \to \infty} \vec{y_\nu} = \vec{x_0}$. Por (6):

$$
a = \lim_{\nu \to \infty} \|\vec{x} - \vec{y_\nu}\| = \|\vec{x} - \vec{x_0}\|
$$

■

Ejemplo 1.1.9
¿Es distinguido el subespacio de $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dado por:

$$
M = \{f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | f(x) = 0 \text{ c.t.p. en } [1, 2]\}
$$

?

La respuesta es que sí, ya que M es cerrado. En efecto, sea $\{f_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ una sucesión en M convergente en promedio cuadrático a una $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, es decir:

$$
\lim_{\nu \to \infty} \mathcal{N}_2(f_\nu - f) = 0
$$

Se sabe que existe una subsucesión de $\{f_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$, digamos $\left\{f_{\alpha(\nu)}\right\}_{\nu=1}^{\infty}$ que converge c.t.p. a f en $\mathbb{R}$.

Como $f_{\alpha(\nu)} = 0$ c.t.p. en $[1,2]$, entonces $f = 0$ c.t.p. en $[1,2]$, es decir $f \in M$. Por tanto, M es distinguido.

Ahora, dada $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, ¿Cuál será la proyección ortogonal de f sobre M? Es claro que

$$f_0 = f \cdot \chi_{\mathbb{R}\setminus[1,2]} \in M$$

es la proyección ortogonal de f sobre M, y además $f - f_0 \perp M$.

Definición 1.1.6
Sea $S \subseteq H$ un conjunto arbitrario. Para este conjunto se define

$$S^\perp = \{\vec{x} \in H | \vec{x} \perp \vec{s}, \forall \vec{s} \in S\}$$

Es claro que $S^\perp$ es un subespacio cerrado de H.

Solución:

En efecto, si $\{\vec{x_\nu}\}$ es una sucesión en $S^\perp$ que converge a $\vec{x} \in H$, entonces

$$\left(\vec{x}\middle|\vec{s}\right) = \lim_{\nu\to\infty} \left(\vec{x_\nu}\middle|\vec{y}\right) = 0, \quad \forall \vec{s} \in S$$

por continuidad y para todo $\vec{s} \in S$. Luego $\vec{x} \in S^\perp$. Otra forma es definiendo una función $T_{\vec{s}} : H \to \mathbb{K}$ como

$$T_{\vec{s}}(\vec{x}) = \left(\vec{x}\middle|\vec{s}\right), \quad \forall \vec{x} \in H$$

Entonces

$$S^\perp = \bigcap_{\vec{s}\in S} \ker T_{\vec{s}}$$

Como $T_{\vec{s}}$ es lineal continua para todo $\vec{s} \in S$, entonces se sigue que $S^\perp$ es cerrado. □

Proposición 1.1.3
Un subespacio M de un espacio prehilbertiano H es distinguido si y sólo si

$$H = M \oplus M^\perp$$

Demostración:

$\Rightarrow$): Suponga que M es distinguido. Como $M \cap M^\perp = \left\{\vec{0}\right\}$, para probar que $H = M \oplus M^\perp$, basta probar que es la suma simplemente, es decir que $H = M + M^\perp$.

Sea $\vec{x} \in H$, como M es distinguido entonces existe $\vec{x_1} \in M$ tal que $\vec{x} - \vec{x_1} \perp M$, tomando $\vec{x_2} = \vec{x} - \vec{x_1}$ se tiene que $\vec{x_2} \in M^\perp$. Además $\vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2}$, lo que prueba el resultado.

$\Leftarrow$): Suponga que $H = M \oplus M^\perp$. Hay que probar que M es distinguido. Sea $\vec{x} \in H$ arbitrario. Por hipótesis existen $\vec{x_1} \in M$ y $\vec{x_2} \in M^\perp$ únicos tales que $\vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2}$. Se afirma que $\vec{x_1}$ es la proyección ortogonal de $\vec{x}$ sobre M.

En efecto,

$$\vec{x} - \vec{x_1} = \vec{x_2} \in M^\perp$$

pero $\vec{x_2} \perp M$, por tanto $\vec{x_1}$ es la proyección ortogonal. ■

Ejemplo 1.1.10
Sea $M = \left\{x \in l_2(\mathbb{R}) \middle| x(2n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}\right\}$. Afirmamos que M es distinguido, para lo cual basta ver que este subespacio es cerrado (por ser $l_(\mathbb{R})$ completo, es decir por ser un espacio Hilbertiano).

Sea $\{\vec{x_n}\}$ una sucesión en $l_2(\mathbb{R})$ que converge a $\vec{x} \in l_2(\mathbb{R})$, es decir

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mathcal{N}_2(\vec{x} - \vec{x_n}) &= 0 \\ \lim_{k\to\infty} (\vec{x}(2k) - \vec{x_n}(2k)) &= 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \vec{x}(2k) &= 0 \quad \forall x \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{1.7}$$

por lo cual, $\vec{x} \in M$. Luego, M es cerrado. Dado que M es distinguido, si $\vec{x} \in l_2(\mathbb{R}) = M \oplus M^{\perp}$, se tiene

$$\vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2}$$

donde $\vec{x_1} \in M$ y $\vec{x_2} \in M^{\perp}$ son únciso y están dados por:

$$\begin{aligned} \vec{x_1} &= (\vec{x}(1), 0, \vec{x}(3), ...) \\ \vec{x_2} &= (0, \vec{x}(2), 0, \vec{x}(4), ...) \end{aligned}$$

Corolario 1.1.1
Si M es un subespacio distinguido de H, entonces $M^{\perp}$ es también un subespacio distinguido.

Demostración:
Se probará que cualquier $\vec{x} \in H$ posee una proyección ortogonal sobre $M^{\perp}$. Por el teorema anterior:

$$\vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2}$$

con $\vec{x_1} \in M$ y $\vec{x_2} \in M^{\perp}$ únicos. Luego, $\vec{x} - \vec{x_2} = \vec{x_1} \in M$, por lo que cualquier vector en $M^{\perp}$ se cumple que $\vec{x_1} \perp \vec{y}$, para todo $\vec{y} \in M$, es decir que $\vec{x_2}$ es la proyecicón ortogonal de $\vec{x}$ sobre $M^{\perp}$. ■

Proposición 1.1.4
Si M es un subespacio distinguido de H, entonces $M^{\perp\perp} = M$.

Demostración:
Claramente $M \subseteq M^{\perp\perp}$. Ahora, sea $\vec{x} \in M^{\perp\perp}$, por el teorema $\vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2}$ donde $\vec{x_1} \in M$ y $\vec{x_2} \in M^{\perp}$ únicos.

Se tiene que

$$0 = \left(\vec{x}\middle|\vec{x_2}\right) = \left(\vec{x}\middle|\vec{x_1}\right) + \left(\vec{x_2}\middle|\vec{x_2}\right) = \left(\vec{x_2}\middle|\vec{x_2}\right)$$

es decir que $\vec{x_2} = \vec{0}$. Por tanto, $\vec{x} \in M$.

Luego, $M = M^{\perp\perp}$. ■

Corolario 1.1.2
En un espacio hilbertiano H, un subespacio es distinguido si y sólo si es cerrado.

Demostración:
Si es cerrado es inmediato que es distinguido. Ahora, si es distinguido entonces es cerrado, pues por el corolario anterior $M = M^{\perp\perp}$, donde $M^{\perp\perp}$ es cerrado por ser intersección arbitraria de cerrrados, luego M es cerrado. ■

Proposición 1.1.5
Sea H un espacio prehilbertiano y sea M un subespacio distinguido de H (que no se reduce al $\left\{\vec{0}\right\}$). $\forall \vec{x} \in H$ sea $\pi(\vec{x})$ la **proyección ortogonal de** $\vec{x}$ **sobre** M.

Entonces $\pi : H \to M$ es lineal continua y tal que $\|\pi\| = 1$. Además, $\pi \circ \pi = \pi$, y $\big(\pi(\vec{x})\big|\vec{y}\big) = \big(\vec{x}\big|\pi(\vec{y})\big)$.

Demostración:

Sea $\vec{x} \in H$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Si $\alpha = 0$, el resultado es inmediato. Suponga que $\alpha \neq 0$. Se tiene que $\alpha\pi(\vec{x}) \in M$ por ser subespacio, y

$$\alpha\vec{x} - \alpha\pi(\vec{x}) = \alpha(\vec{x} - \pi(\vec{x})) \perp M$$

Luego, $\alpha\pi(\vec{x})$ es una proyección ortogonal de $\alpha\vec{x}$ sobre M, pero por unicidad de la proyección ortogonal, se tiene que $\pi(\alpha\vec{x}) = \alpha\pi(\vec{x})$.

Ahora, sean $\vec{x}, \vec{y} \in H$. Entonces, $\pi(\vec{x}) + \pi(\vec{y}) \in M$ y:

$$(\vec{x} + \vec{y}) - (\pi(\vec{x}) + \pi(\vec{x})) = (\vec{x} - \pi(\vec{x})) + (\vec{y} - \pi(\vec{y})) \perp M$$

es decir que $\pi(\vec{x}) + \pi(\vec{y})$ es una proyección ortogonal de $\vec{x} + \vec{y}$ sobre M. Por unicidad,

$$\pi(\vec{x} + \vec{y}) = \pi(\vec{x}) + \pi(\vec{y})$$

Por tanto, π es lineal.

Ahora, veamos que es continua. Se sabe que:

$$\begin{aligned} d(\vec{x}, M)^2 &= \|\vec{x} - \pi(\vec{x})\|^2 \\ &= \|\vec{x}\|^2 - \|\pi(\vec{x})\|^2 \\ \Rightarrow \|\pi(\vec{x})\|^2 &= \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{x} - \pi(\vec{x})\|^2 \\ &\leq \|\vec{x}\|^2 \end{aligned}$$

luego, π es continua y, $\|\pi\| \leq 1$.

Sea ahora $\vec{x} \in M$, $\vec{x} \neq \vec{0}$. Entonces:

$$\|\vec{x}\| = \|\pi(\vec{x})\| \leq \|\pi\|\|\vec{x}\|$$

por tanto, $\|\pi\| \geq 1$, por lo anterior se sigue que $\|\pi\| = 1$.

Ya se sabe que $\pi \circ \pi = \pi^2 = \pi$ (por la proposición anterior).

Sean $\vec{x}, \vec{y} \in H$ arbitrarios. Entonces, $\pi(\vec{x}) \in M$ y $\vec{y} - \pi(\vec{y}) \perp M$, por lo cual

$$\begin{aligned} 0 &= \big(\pi(\vec{x})\big|\vec{y} - \pi(\vec{y})\big) \\ &= \big(\pi(\vec{x})\big|\vec{y}\big) - \big(\pi(\vec{x})\big|\pi(\vec{y})\big) \\ \Rightarrow \big(\pi(\vec{x})\big|\vec{y}\big) &= \big(\pi(\vec{x})\big|\pi(\vec{y})\big) \end{aligned}$$

Intercambiando los papeles de $\vec{x}$ y $\vec{y}$ se obtiene que: $\big(\pi(\vec{y})\big|\vec{x}\big) = \big(\pi(\vec{y})\big|\pi(\vec{x})\big)$ o sea:

$$\big(\vec{x}\big|\pi(\vec{y})\big) = \big(\pi(\vec{x})\big|\pi(\vec{y})\big)$$

por lo cual $\big(\pi(\vec{x})\big|\vec{y}\big) = \big(\vec{x}\big|\pi(\vec{y})\big)$. ■

Proposición 1.1.6

Sea H prehilbertiano. Suponga que π es una aplicación lineal de H en H tal que

- $\pi^2 = \pi$.
- $\big(\pi(\vec{x})\big|\vec{y}\big) = \big(\vec{x}\big|\pi(\vec{y})\big), \forall \vec{x}, \vec{y} \in H$.

Entonces existe un único subespacio distinguido M de H tal que π es la proyección ortogonal de H sobre M.

Demostración:
Claramente, si M existe debe ser $M = \pi(H)$, o sea:

$$M = \pi(H) = \left\{\pi(\vec{x})\middle|\vec{x} \in H\right\}$$

Se debe probar que si $\vec{x} \in H$ es arbitrario $\vec{x} - \pi(\vec{x}) \perp M$, o sea

$$\left(\vec{x} - \pi(\vec{x})\middle|\pi(\vec{y})\right) = 0, \quad \forall \vec{y} \in H$$

Sean $\vec{x}, \vec{y} \in H$. Se tiene que:

$$\begin{aligned}\left(\vec{x} - \pi(\vec{x})\middle|\pi(\vec{y})\right) &= \left(\vec{x}\middle|\pi(\vec{y})\right) - \left(\pi(\vec{x})\middle|\pi(\vec{y})\right) \\ &= \left(\vec{x}\middle|\pi(\vec{y})\right) - \left(\vec{x}\middle|\pi(\vec{y})\right) \\ &=0\end{aligned}$$

usando las dos propiedades de π. Por tanto, $\pi(\vec{x})$ es la proyección ortogonal de $\vec{x}$, es decir que M es distinguido. La unicidad se sigue de la construcción de M. ■

1.2. Autodualidad de espacios hilbertianos

Si E es un espacio normado, E^* denota su **dual topológico** formado por todas las aplicaciones lineales continuas de E en $\mathbb{K}$. Si $W \in E^*$, se define la $\|W\|$ como

$$\|W\| = \inf\left\{a \in \mathbb{R}\middle|\|W(\vec{x})\| \leq a\|\vec{x}\|, \forall \vec{x}\right\}$$

Recuerde que E^* es siempre un espaico de Banach aunque E no lo sea.

Teorema 1.2.1 (Teorema de Riesz)
Sea H un espacio hilbertiano (no reducido a $\left\{\vec{0}\right\}$). Para cada $\vec{y} \in H$ se define una aplicación $G_{\vec{y}} : H \to \mathbb{K}$ como sigue:

$$G_{\vec{y}}(\vec{x}) = \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right), \forall \vec{x} \in H$$

Entonces, $G_{\vec{y}}$ es un funcional lineal continuo sobre H. Además, la aplicación $G : H \to H^*$ dada por:

$$\vec{y} \mapsto G_{\vec{y}}$$

es una isometría semilineal de H en H^* que es suprayectiva.

Demostración:
Se probarán varias cosas:

1. Por propiedades del producto escalar, para cada $\vec{y} \in H$ la aplicación $G_{\vec{y}} : H \to \mathbb{K}$ es lineal. Dicha aplicación lineal es continua, pues

$$\left|G_{\vec{y}}(\vec{x})\right| = \left|\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)\right| \leq \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|, \quad \forall \vec{x} \in H$$

(por Cauchy-Schwartz). Así que $G_{\vec{y}} \in H^*$. Además, $\|G_{\vec{y}}\| \leq \|\vec{y}\|$. Por otra, parte, si $\vec{y} \neq \vec{0}$, entonces

$$G_{\vec{y}}(\vec{y}) = \left(\vec{y}\middle|\vec{y}\right) = \|\vec{y}\|^2$$

pero, como el operador es continuo, se tiene que $\left|G_{\vec{y}}(\vec{y})\right| \leq \|G_{\vec{y}}\|\|\vec{y}\|$. Por lo cual, $\|\vec{y}\| \leq \|G_{\vec{y}}\|$. Así pues, $\|G_{\vec{y}}\| = \|\vec{y}\|$.
Si $\vec{y} = \vec{0}$, entonces $\|G_{\vec{y}}\| = 0 = \|\vec{y}\|$, pues $G_{\vec{y}} = 0$.

2. La aplicación $G : H \to H^*$, $\vec{y} \mapsto G_{\vec{y}}$ es semilineal, es decir que $G_{\alpha\vec{y}} = \overline{\alpha} G_{\vec{y}}$ y separa sumas. En efecto, sea $\vec{y} \in H$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Entonces:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\vec{y}}(\vec{x}) &= \left(\vec{x}\middle|\alpha\vec{y}\right) \\ &= \overline{\alpha}\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) \\ &= G_{\vec{y}}(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in H \end{aligned}$$

y además, para $\vec{z} \in H$ se tiene que

$$\begin{aligned} G_{\vec{y}+\vec{z}}(\vec{x}) &= \left(\vec{x}\middle|\vec{y}+\vec{z}\right) \\ &= \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) + \left(\vec{x}\middle|\vec{z}\right) \\ &= G_{\vec{y}}(\vec{x}) + G_{\vec{z}}(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in H \end{aligned}$$

por tanto, G es semilineal. Ahora, veamos que es isometría; sean $\vec{y_1}, \vec{y_2} \in H$, entonces:

$$\begin{aligned} \|G_{\vec{y_1}} - G_{\vec{y_2}}\| &= \|G_{\vec{y_1}+\vec{y_2}}\| \\ &= \|\vec{y_1} + \vec{y_2}\| \end{aligned}$$

así, esta función semilineal es isometría. Automáticamente G es inyectiva. Note que $\vec{y} \in (\ker G_{\vec{y}})^{\perp}$ y $G_{\vec{y}}(\vec{y}) = \|\vec{y}\|^2$.

3. Se probará la suprayectividad. Sea $W \in H^*$ tal que $W \neq 0$ (en caso contrario basta tomar $\vec{y} = \vec{0}$) se debe probar que existe $\vec{y} \in H$ tal que $W = G_{\vec{y}}$.

   Por la parte (2), tal $\vec{y}$ debe cumplir que $\vec{y} \in (\ker W)^{\perp}$ y $W(\vec{y}) = \|\vec{y}\|^2$. Como $\ker W$ es un subespacio cerrado de H y H es hilbertiano, entonces $\ker W$ es distinguido. Luego:

$$H = \ker W \oplus (\ker W)^{\perp}$$

   por tanto, la restricción de W a $(\ker W)^{\perp}$ es un isomorfismo de $(\ker W)^{\perp}$ sobre $\mathbb{K}$. En efecto, como $W \neq 0$ entonces existe $\vec{x} \in H$ tal que $W(\vec{x}) \neq 0$, pero podemos escribir de forma única a $\vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2}$ con $\vec{x_1} \in \ker W$ y $\vec{x_2} \in (\ker W)^{\perp}$, entonces:

$$\begin{aligned} W(\vec{x}) &= W(\vec{x_1} + \vec{x_2}) \\ &= W(\vec{x_1}) + W(\vec{x_2}) \\ &= W(\vec{x_2}) \\ &= W\big|_{(\ker W)^{\perp}}(\vec{x_2}) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

   Sea $\beta \in \mathbb{K}$ arbitrario, entonces:

$$W\big|_{(\ker W)^{\perp}}\left(\beta\frac{\vec{x_2}}{W(\vec{x_2})}\right) = \beta$$

   por tanto la restricción es suprayectiva. Ahora si para algún $\vec{u} \in (\ker W)^{\perp}$ se tiene que $W\big|_{(\ker W)^{\perp}}(\vec{u}) = 0$, en particular $\vec{u} \in \ker W$, pero:

$$(\ker W)^{\perp} \cap \ker W = \left\{\vec{0}\right\}$$

   por tanto $\vec{u} = \vec{0}$. Así la restricción es inyectiva. Luego es un isomorfismo. En particular la dimensión de $\mathbb{K}$ sobre $\mathbb{K}$ es 1, así la dimensión de $(\ker W)^{\perp}$ es 1.

Tomemos $\vec{z}$ generador de $(\ker W)^{\perp}$. El $\vec{y}$ buscado debe ser de la forma $\vec{y} = \alpha\vec{z}$ donde $\alpha \in \mathbb{K}$. Además,

$$\begin{aligned} W(\vec{y}) =& \|\vec{y}\|^2 \\ \Rightarrow \alpha W(\vec{z}) =& \alpha^2 \|\vec{z}\|^2 \\ \Rightarrow \alpha =& \overline{\frac{W(\vec{z})}{\|\vec{z}\|^2}} \end{aligned}$$

así, $\vec{y}$ debe ser

$$\vec{y} = \overline{\frac{W(\vec{z})}{\|\vec{z}\|^2}}\vec{z} \tag{1.8}$$

Verifiquemos el que vector en (1.8) es el que cumple que $W = G_{\vec{y}}$. Se tiene:

$$G_{\vec{y}}(\vec{x}) = \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$$

para todo $\vec{x} \in H$, donde este vector se descompone de forma única como $\vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2}$ con $\vec{x_1} \in \ker W$ y $\vec{x_2} \in (\ker W)^{\perp}$. Por tanto:

$$\begin{aligned} G_{\vec{y}}(\vec{x}) &= \left(\vec{x_1} + \vec{x_2}\middle|\vec{y}\right) \\ &= \left(\vec{x_1}\middle|\vec{y}\right) + \left(\vec{x_2}\middle|\vec{y}\right) \\ &= \left(\vec{x_2}\middle|\vec{y}\right) \end{aligned}$$

pero los elementos de $(\ker W)^{\perp}$ son de la forma $\beta\vec{z}$, por lo cual:

$$\begin{aligned} G_{\vec{y}}(\vec{x}) &= \left(\beta\vec{z}\middle|\vec{y}\right) \\ &= \left(\beta\vec{z}\middle|\overline{\frac{W(\vec{z})}{\|\vec{z}\|^2}}\vec{z}\right) \\ &=\beta\frac{W(\vec{z})}{\|\vec{z}\|^2}\left(\vec{z}\middle|\vec{z}\right) \\ &=\beta W(\vec{z}) \\ &=W(\beta\vec{z}) \\ &=W(\vec{x_2}) \\ &=W(\vec{x}) \end{aligned}$$

con lo que se tiene el resultado.

■

Observación 1.2.1
La demostración no cambia en vez de suponer que H es hilbertiano se supone H prehilbertiano tal que todo subespacio cerrado es distinguido (para solventar el problema que puede llegar a haber en la restricción del fucional lineal continuo W). Pero la conclusión del teorema afirma que H es (semilinealmente) isométrico al espacio de Banach H^*, luego H debe ser de Banach, es decir que es hilbertiano.

Así pues, un espacio prehilbertiano en el cual todo subespacio cerrado es distinguido es un espacio hilbertiano.

Proposición 1.2.1 (Autodualidad de L_2)
Sea S un conjunto medible en $\mathbb{R}^n$. Para cada $g \in L_2(S,\mathbb{K})$ sea φ_g el funcional lineal sobre $L_2(S,\mathbb{K})$ definido como:

$$\varphi_g(f) = \int_S fg, \quad \forall f \in L_2(S,\mathbb{K})$$

entonces, la aplicación lineal $\varphi : g \mapsto \varphi_g$ es una isometría lineal de $L_2(S,\mathbb{K})$ sobre $L_2(S,\mathbb{K})^*$.

Demostración:

Sea

$$\psi_g(f) = \int_S f\overline{g}$$

para todo $f \in L_2(S,\mathbb{K})$. Por el teorema de Riesz, $\psi : g \mapsto \psi_g$ es una isometría semilineal de $L_2(S,\mathbb{K})$ sobre $L_2(S,\mathbb{K})^*$.

Como la función η, $g \mapsto \overline{g}$ es una isometría semilineal de $L_2(S,\mathbb{K})$ sobre $L_2(S,\mathbb{K})$ y φ es la composición de η con ψ, entonces φ es una isometría lineal de $L_2(S,\mathbb{K})$ sobre $L_2(S,\mathbb{K})$. La linealidad es inmediata de las propiedades de la integral de Lebesgue.

■

¿Es posible clasificar a los espacios hilbertianos?

Consideremos las sumas de familisa de elementos en $[0,\infty]$. Se tiene que

$$[0,\infty] = [0,\infty[\cup \{\infty\}$$

todo conjunto S en $[0,\infty]$ posee un supremo, el usual si el conjunto es acotado en $[0,\infty[$ e ∞ si S no es acotado.

Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente en $[0,\infty[$, se define:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup \left\{ a_n \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$$

este límite coincide con el usual en el caso de que la sucesión sea acotada. De otra forma es igual a ∞.

Se tienen las siguientes propiedades:

1. $a + \infty = \infty + a = \infty$, para todo $a \in [0,\infty[$.
2. $a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$, para todo $a \in [0,\infty[$.
3. $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.

Definición 1.2.1
Sea $(a_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ una familia arbitraria de elementos de $[0,\infty]$. Se denota por $\mathcal{F}(\Omega)$ a la colección de **todos los subconjuntos finitos de** Ω. Toda suma:

$$\sum_{\alpha\in J} a_\alpha, \quad \forall J \in \mathcal{F}(\Omega)$$

se llama **suma parcial de la familia** $(a_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$. Al elemento de $[0,\infty]$:

$$\sum_{\alpha\in\Omega} a_\alpha = \sup \left\{ \sum_{\alpha\in J} a_\alpha \middle| J \in \mathcal{F}(\Omega) \right\}$$

se le llama **suma de la familia** $(a_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$. Se dice que $(a_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ es una **familia sumable** de números no negativos si $\sum_{\alpha\in\Omega} a_\alpha < \infty$.

Ejemplo 1.2.1
Se tiene que:

$$\sum_{t\in[0,1]} t = \infty$$

Proposición 1.2.2 (Conmutatividad general)
Si Ω' es otro conjunto de índices para indexar la familia $(a_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ y σ es una biyección de Ω sobre Ω', entonces:

$$\sum_{\alpha'\in\Omega'} a_{\sigma(\alpha')} = \sum_{\alpha\in\Omega} a_\alpha \tag{1.9}$$

Demostración:
Es inmediato del hecho de que los conjuntos de las sumas parciales de las dos familias son el mismo, por tanto al tomar el supremo se obtiene el mismo valor. ■

La ecuación (1.9) se aplica en particular al caso en el que $\Omega = \Omega'$, obteniendo una propiedad de conmutatividad general para sumas de familias en $[0,\infty]$.

Ahora, ¿se tendrá una propiedad para la asociatividad general? La respuesta es que sí, se tiene un resultado que nos permite obtener esta propiedad para sumar familias.

Teorema 1.2.2 (Sumación por paquetes de familias)
Sea $(a_\alpha)_{\alpha\in I}$ una familia en $[0,\infty]$ y $(I_\lambda)_{\lambda\in L}$ una partición aritraria de subconjuntos de I. Si

$$\Delta = \sum_{\alpha\in I} a_\alpha \quad \text{y} \quad \Delta_\lambda = \sum_{\alpha\in I_\lambda} a_\alpha, \quad \forall\lambda\in L$$

entonces,

$$\Delta = \sum_{\lambda\in L} \Delta_\lambda$$

Demostración:
Sea $J\in\mathcal{F}(I)$ y sea

$$M = \left\{\lambda\in L \middle| I_\lambda\cap J\neq\emptyset\right\}$$

Entonces $M\in\mathcal{F}(L)$ y

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in J} a_\alpha &= \sum_{\lambda\in M}\sum_{\alpha\in J\cap I_\lambda} a_\alpha \\ &\leq \sum_{\lambda\in M}\Delta_\lambda \\ &\leq \sum_{\lambda\in Ls}\Delta_\lambda\end{aligned}$$

tomando supremo respecto a J se sigue que:

$$\Delta \leq \sum_{\lambda\in L}\Delta_\lambda \tag{1.10}$$

Sea $M\in\mathcal{F}(L)$. Fijemos arbitrariamente una $H_\lambda\in\mathcal{F}(I_\lambda)$, para todo $\lambda\in M$. Se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda\in M}\sum_{\alpha\in H_\lambda} a_\alpha &= \sum_{\alpha\in\bigcup_{\lambda\in M} H_\lambda} a_\alpha \\ &\leq \Delta\end{aligned}$$

Manteniendo a M fijo y tomando supremo con respecto a $H_\lambda \in \mathcal{F}(I_\lambda)$,resulta:

$$\sum_{\lambda \in M} \Delta_\lambda \leq \Delta$$

tomando ahora el supremo con respecto a M se obtiene que:

$$\sum_{\lambda \in L} \Delta_\lambda \leq \Delta \tag{1.11}$$

de (1.10) y (1.11) se sigue la igualdad.

■

Ejemplo 1.2.2
¿Es cierto que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

La respuesta a esta pregunta la da el siguiente teorema:

Teorema 1.2.3
Para toda sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $[0, \infty]$ se cumple:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Demostración:
Sea $\Delta = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ y $\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Como la colección de sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ está contenida en la colección de sumas parciales de $\sum_{n\in J} a_n$ donde $J \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$, entonces:

$$\Sigma \leq \Delta$$

Sea $J \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$. Tomando $k = \max_{i\in J} i$ se obtiene que:

$$\sum_{n\in J} a_n \leq \sum_{n=1}^{k} a_n$$

tomando supremos se sigue que $\Delta \leq \Sigma$. Finalmente, se obtiene que $\Delta = \Sigma$.

■

Corolario 1.2.1 (Propiedad de conmutatividad para series)
Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $[0, \infty]$, y sea σ una biyección de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{N}$. Entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

Demostración:
Es inmediata del teorema anterior y de la propiedad de conmutatividad general. ■

Corolario 1.2.2
Sea $\{a_{i,j}\}$ $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ una sucesión doble en $[0, \infty]$ y, σ una biyección de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sobre $\mathbb{N}$.

Tomemos $a_{i,j} = b_{\sigma(i,j)}$ para todo $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Entonces:

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{i,j} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

Además, sumando por paquetes, se tiene en particular que:

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{is=1}^{\infty} a_{i,j}$$

Demostración:
Es inmediata del teorema de sumación por paquetes de familias. ■

Teorema 1.2.4
Para que una familia $(a_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ de elementos de $[0,\infty]$ sea sumable, son necesarias y suficientes las condiciones siguientes:

1. El conjunto:
$$\Omega_0 = \left\{\alpha \in \Omega \middle| a_\alpha \neq 0\right\}$$
sea a lo sumo numerable.

2. En el caso de que Ω_0 sea numerable, si tenemos una numeración $n \mapsto \alpha(n)$ es una biyección de $\mathbb{N}$ sobre Ω_0 se tenga que:
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\alpha(n)} < \infty$$

En este caso:

$$\sum_{\alpha\in\Omega} a_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\alpha(n)}$$

Demostración:
La suficiencia es clara. (Ejercicio)

Veamos la necesidad. Supona que la familia $(a_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ de números no negativos es sumable de suma digamos Δ. Sea:

$$A_\nu = \left\{\alpha \middle| a_\alpha \geq \frac{1}{\nu}\right\}, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$$

probaremos que los A_ν son finitos. Sea $\{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$ una familia finita de índices en A_ν con $\nu \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$\frac{k}{\nu} \leq a_{\alpha_1} + ... + a_{\alpha_k} \leq \Delta$$

por tanto, $k \leq \nu\Delta$. Esto prueba que para cada $\nu \in \mathbb{N}$, A_ν es finito.

Como $\Omega_0 = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$, entonces Ω_0 es a lo sumo numerable.

El resto se deja como ejercicio al lector. ■

1.3. Familias sumables de números complejos

Definición 1.3.1
Sea $(u_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ una familia arbitraria de números complejos. Se dice que dicha familia es **sumable** si la familia de los módulos $\left(|u_\alpha|\right)_{\alpha\in\Omega}$ es una familia sumable de números no negativos.

Proposición 1.3.1
Sea $(u_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ una familia sumable de números complejos. Defina:

$$\Omega_0 = \left\{\alpha \in \Omega \middle| u_\alpha \neq 0\right\}$$

entonces Ω_0 es a lo sumo numerable. Además, si $i \mapsto \alpha(i)$ es una biyección de $\mathbb{N}$ sobre Ω_0, la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{\alpha(i)}$$

es absolutamente convergente, y la suma de dicha serie es independiente la biyección α elegida, la cual se denomina **suma de la familia sumable** $(u_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$, y se escribe

$$\sum_{\alpha\in\Omega} a_\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} a_{\alpha(i)}$$

Si Ω' es otro conjunto numerable tal que $\Omega_0 \subseteq \Omega' \subseteq \Omega$ y $i \mapsto \alpha(i)$ es una biyección de $\mathbb{N}$ sobre Ω', entonces:

$$\sum_{\alpha\in\Omega} a_\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} a_{\alpha(i)}$$

Demostración:
Para la primera parte. Como $(u_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ es sumable, entonces la familia de módulos $\left(|u_\alpha|\right)_{\alpha\in\Omega}$ es sumable. Por la proposición anterior, el conjunto:

$$\begin{aligned}\Omega_0 &= \left\{\alpha \in \Omega \middle| |u_\alpha| > 0\right\}\\ &= \left\{\alpha \in \Omega \middle| u_\alpha \neq 0\right\}\end{aligned}$$

es a lo sumo numerable. Claramente se tiene que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} u_{\alpha(i)}$ es absolutamente convergente (nuevamente, pues la familia de los módulos es sumable).

Ahora, sea $i \mapsto \beta(i)$ otra biyección de $\mathbb{N}$ sobre Ω_0. Hay que probar que:

$$s = \sum_{i=1}^{\infty} u_{\alpha(i)} = \sum_{i=1}^{\infty} u_{\beta(i)} = t$$

Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\sum_{i>n_0} |u_{\alpha(i)}| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{y} \quad \sum_{i>n_0} |u_{\beta(i)}| < \frac{\varepsilon}{3}$$

también existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n_1 > n_0$ y $\{\alpha(1), ..., \alpha(n_0)\} \subseteq \{\beta(1), ..., \beta(n_1)\}$ (básicamente podemos cubrir todos los índices de α con los β eventualmente). Se tiene:

$$\begin{aligned}|s-t| &\leq \left|s - \sum_{i=1}^{n_0} u_{\alpha(i)}\right| + \left|\sum_{i=1}^{n_0} u_{\alpha(i)} - \sum_{i=1}^{n_1} u_{\beta(i)}\right| + \left|\sum_{i=1}^{n_1} u_{\beta(i)} - t\right|\\ &< \frac{2\varepsilon}{3} + \left|\sum_{i=1}^{n_0} u_{\alpha(i)} - \sum_{i=1}^{n_1} u_{\beta(i)}\right|\end{aligned}$$

donde la primera desigualdad se da por la convergencia de la suma de los módulos. El último término, después de la reducción, se convierte en la suma de unos cuantos $u_\alpha(i)$ con $i \geq n_0$, los cuales al ser mayorizados con sus módulos suman algo menor que $\frac{\varepsilon}{3}$. Por tanto:

$$\left|s - t\right| < \varepsilon$$

luego, $s = t$. ■

Definición 1.3.2
Sea Ω un conjunto arbitrario.

1. $l_1(\Omega, \mathbb{K})$ denota al conjunto de funciones $f : \Omega \to \mathbb{K}$ tales que $(f(\alpha))_{\alpha\in\Omega}$ es una familia sumable en $\mathbb{K}$. Si $f \in l_1(\Omega, \mathbb{K})$, se escribe:

$$\mathcal{N}_1(f) = \sum_{\alpha\in\Omega} \left|f(\alpha)\right|$$

2. $l_2(\Omega, \mathbb{K})$ denota al conjunto de funciones $f : \Omega \to \mathbb{K}$ tales que $(f(\alpha)^2)_{\alpha\in\Omega}$ es una familia sumable en $\mathbb{K}$. Si $f \in l_2(\Omega, \mathbb{K})$, se escribe:

$$\mathcal{N}_2(f) = \left[\sum_{\alpha\in\Omega} \left|f(\alpha)\right|^2\right]^{1/2}$$

Proposición 1.3.2
$l_1(\Omega, \mathbb{K})$ es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$, y $\mathcal{N}_1$ es una norma sobre $l_1(\Omega, \mathbb{K})$. Además, si $f, g \in l_1(\Omega, \mathbb{K})$ entonces,

$$\sum_{\alpha\in\Omega}(f + g)(\alpha) = \sum_{\alpha\in\Omega} f(\alpha) + \sum_{\alpha\in\Omega} g(\alpha)$$

Demostración:
Sea $f \in l_1(\Omega, \mathbb{K})$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Sea $J \in \mathcal{F}(\Omega)$, se tiene que:

$$\sum_{\alpha\in J} \left|\lambda f(\alpha)\right| = \left|\lambda\right| \sum_{\alpha\in J} \left|f(\alpha)\right| \leq \left|\lambda\right| \mathcal{N}_1(f)$$

tomando supremos se sigue que $\lambda f \in l_1(\Omega, \mathbb{K})$, pues la familia de sus módulos es sumable.

Sean ahora $f, g \in l_1(\Omega, \mathbb{K})$ y $J \in \mathcal{F}(\Omega)$. Se sabe que:

$$\sum_{\alpha\in J} \left|(f + g)(\alpha)\right| \leq \sum_{\alpha\in J} \left|f(\alpha)\right| + \sum_{\alpha\in J} \left|g(\alpha)\right| = \mathcal{N}_1(f) + \mathcal{N}_1(g)$$

por tanto, $f + g \in l_1(\Omega, \mathbb{K})$ y $\mathcal{N}_1(f + g) \leq \mathcal{N}_1(f) + \mathcal{N}_1(g)$.

Finalmente, se tiene que $\mathcal{N}_1(f) = 0$ si y sólo si $f(\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in \Omega$, si y sólo si $f = 0$.

Por tanto, $\mathcal{N}_1$ es una norma sobre $l_1(\Omega, \mathbb{K})$.

Sean ahora $f, g \in l_1(\Omega, \mathbb{K})$. Tomemos:

$$\Omega_1 = \left\{\alpha \in \Omega \middle| f(\alpha) \neq 0\right\} \quad \text{y} \quad \Omega_2 = \left\{\alpha \in \Omega \middle| g(\alpha) \neq 0\right\}$$

Defina $\Omega_0 = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Ω_0, Ω_1 y Ω_2 son a lo sumo numerables. Sea $i \mapsto \alpha(i)$ una biyección de $\mathbb{N}$ sobre

Ω_0. Entonces:

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in\Omega}(f+g)(\alpha) &= \sum_{i=1}^{\infty}(f+g)(\alpha(i))\\ &= \sum_{i=1}^{\infty} f(\alpha(i)) + \sum_{i=1}^{\infty} g(\alpha(i))\\ &= \sum_{\alpha\in\Omega} f(\alpha) + \sum_{\alpha\in\Omega} g(\alpha)\end{aligned}$$

■

Observación 1.3.1
En la sumatoria con Ω_0 se usó el último resultado de la proposición 1.3.1, ya que puede que la familia Ω_0 no coincida con aquella en la que $\alpha \in \Omega$ es tal que $(f+g)(\alpha) = 0$, sin embargo este conjunto Ω_0 contiene a este conjunto que se especificó.

Teorema 1.3.1
El espacio normado $l_1(\Omega, \mathbb{K})$ con la norma $\mathcal{N}_1$ es un espacio de Banach.

Demostración:
Sea $\{f_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $l_1(\Omega,\mathbb{K})$, y sea $\varepsilon > 0$. Existe entonces $n_0 \geq 0$ tal que:

$$\mathcal{N}_2(f_p - f_q) < \varepsilon, \quad \forall p, q \geq n_0 \tag{1.12}$$

en particular, para cada $\alpha \in \Omega$:

$$\left|f_p(\alpha) - f_q(\alpha)\right| \leq \mathcal{N}_2(f_p - f_1) < \varepsilon, \quad \forall p, q \geq n_0$$

entonces, la sucesión $\{f_\nu(\alpha)\}_{\nu=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathbb{K}$. Por tanto, al ser $\mathbb{K}$ completo, entonces para cada $\alpha \in \Omega$ existe $f(\alpha) \in \mathbb{K}$ tal que:

$$\lim_{\nu\to\infty} f_\nu(\alpha) = f(\alpha)$$

defina $f : \Omega \to \mathbb{K}$ la función tal que $\alpha \mapsto f(\alpha)$. Veamos que la sucesión $\{f_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ converge a f. En efecto, se tiene por (1.12) que si $J \in \mathcal{F}(\Omega)$:

$$\sum_{\alpha\in J}\left|f_p(\alpha) - f_q(\alpha)\right| < \varepsilon, \quad \forall p, q \geq n_0$$

tomemos $p \geq n_0$ fijo y tomemos el límite cuando $q \to \infty$, se tiene que:

$$\sum_{\alpha\in J}\left|f_p(\alpha) - f(\alpha)\right| \leq \varepsilon$$

por ser J finito arbitrario, se sigue que $f_p - f \in l_1(\Omega,\mathbb{K})$, de donde se sigue que $f \in l_1(\Omega,\mathbb{K})$ y:

$$\mathcal{N}_2(f_p - f) \leq \varepsilon, \quad \forall p \geq n_0$$

luego, $l_1(\Omega,\mathbb{K})$ es completo, es decir que es de Banach. ■

Teorema 1.3.2
Sean $f, g \in l_2(\Omega,\mathbb{K})$. Entonces, $fg \in l_1(\Omega,\mathbb{K})$ y:

$$\mathcal{N}_1(fg) \leq \mathcal{N}_2(f)\mathcal{N}_2(g)$$

Además, $l_2(\Omega,\mathbb{K})$ es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$. Se define $\forall f, g \in l_2(\Omega,\mathbb{K})$

$$(f|g) = \sum_{\alpha\in\Omega} f(\alpha)\overline{g(\alpha)}$$

La aplicación $(f,g) \mapsto \left(f \middle| g\right)$ hace de $l_2(\Omega,\mathbb{K})$ un espacio hilbertiano en el cual la norma inducida por este producto escalar es $\mathcal{N}_2$.

Demostración:

Sea $J \in \mathcal{F}(\Omega)$. Por Cauchy-Schwartz para sumas finitas se tiene que:

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in J} \left|f(\alpha)g(\alpha)\right| \leq & \left(\sum_{\alpha\in J} \left|f(\alpha)\right|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{\alpha\in J} \left|g(\alpha)\right|^2\right)^{1/2} \\ \leq & \mathcal{N}_2(f)\mathcal{N}_2(g)\end{aligned}$$

tomando supremo respecto a J se obtiene que $\mathcal{N}_1(fg) \leq \mathcal{N}_2(f)\mathcal{N}_2(g)$.

Sean $f \in l_2(\Omega,\mathbb{K})$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Para todo $J \in \mathcal{F}(\Omega)$ se tiene que:

$$\sum_{\alpha\in J} \left|\lambda f(\alpha)\right|^2 \leq \left|\lambda\right|^2 \sum_{\alpha\in J} \left|f(\alpha)\right|^2 \leq \left|\lambda\right|^2 \mathcal{N}_2(f)^2$$

tomando supremos se sigue que $\lambda f \in l_2(\Omega,\mathbb{K})$, y que $\mathcal{N}_2(\lambda f) \leq \left|\lambda\right|\mathcal{N}_2(f)$ (para la igualdad hay que fijarse en la desigualdad conversa, partiendo de $\mathcal{N}_2(f)$).

Sean $f, g \in l_2(\Omega,\mathbb{K})$. Para todo $J \in \mathcal{F}(\Omega)$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in J} \left|f(\alpha)+g(\alpha)\right|^2 =& \sum_{\alpha\in J} \left|f(\alpha)\right|^2 + \sum_{\alpha\in J} \left|g(\alpha)\right|^2 + \sum_{\alpha\in J} 2\Re(f(\alpha)\overline{g(\alpha)}) \\ \leq & \sum_{\alpha\in J} \left|f(\alpha)\right|^2 + \sum_{\alpha\in J} \left|g(\alpha)\right|^2 + \sum_{\alpha\in J} 2\left|f(\alpha)+g(\alpha)\right| \\ \leq & \mathcal{N}_2(f) + \mathcal{N}_2(g) + 2\mathcal{N}_1(fg)\end{aligned}$$

tomando supremo respecto a J se sigue que $f+g \in l_2(\Omega,\mathbb{K})$.

La definición $\left(f \middle| g\right) = \sum_{\alpha\in\Omega} f(\alpha)\overline{g(\alpha)}$ tiene sentido pues $f, g \in l_2(\Omega,\mathbb{K})$ implica que $fg \in l_1(\Omega,\mathbb{K})$. Se verifica de inmediato que $\left(f \middle| g\right)$ es un producto escalar el cual induce $\mathcal{N}_2$.

Ahora probaremos que es completo. Sea $\{f_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $l_2(\Omega,\mathbb{K})$. Sea $\varepsilon > 0$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\mathcal{N}_2(f_p - f_q) < \varepsilon, \quad \forall p, q \geq n_0$$

ya que para cada $\alpha \in \Omega$:

$$\left|f_p(\alpha) - f_q(\alpha)\right| \leq \mathcal{N}_2(f_p - f_q) < \varepsilon, \quad \forall p, q \geq n_0$$

Como $\mathbb{K}$ es completo, existe $f(\alpha) \in \mathbb{K}$ tal que:

$$\lim_{\nu\to\infty} f_\nu(\alpha) = f(\alpha)$$

Sea $J \in \mathcal{F}(\Omega)$. Se tiene entonces que:

$$\sum_{\alpha\in J} \left|f_p(\alpha) - f_q(\alpha)\right|^2 \leq \varepsilon^2, \quad \forall p, q \geq n_0$$

Manteniendo a $p \geq n_0$ fijo y tomando límite cuando $q \to \infty$ y siendo J finito,

$$\sum_{\alpha\in J} \left|f_p(\alpha) - f(\alpha)\right|^2 \leq \varepsilon^2$$

Esto prueba que $f_p - f \in l_2(\Omega,\mathbb{K})$, de donde $f \in l_2(\Omega,\mathbb{K})$ y

$$\mathcal{N}_2(f_p - f) \leq \varepsilon, \quad \forall p, q \geq n_0$$

luego, $l_2(\Omega,\mathbb{K})$ es completo. ■

1.4. Familias Ortonormales (O.N.)

Definición 1.4.1
Una familia de vectores, digamos $(\vec{u_\alpha})_{\alpha\in\Omega}$ de vectores en un espacio prehilbertiano H es **ortonormal** si:

$$\left(\vec{u_\alpha}\middle|\vec{u_\beta}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \\ 1 & \text{si } \alpha = \beta \end{cases} \qquad \forall \alpha, \beta \in \Omega$$

Recuerde que una familia $(\vec{u_\alpha})_{\alpha\in\Omega}$ en H es **linealmente independiente** si cualquier subcolección finita es linealmente independiente. Se tiene que si $(\vec{u_\alpha})_{\alpha\in\Omega}$ es una familia O.N., entonces dicha familia es l.l. (linealmente independiente). En efecto, si $(\vec{u_1}, ..., \vec{u_n})$ son O.N., entonces

$$\begin{aligned} \|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u_i}\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} \left|\alpha_i\right|^2 \|\vec{u_i}\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left|\alpha_i\right|^2 \end{aligned} \tag{1.13}$$

(esto por Pitágoras), la cual es 0 si todos los α_i son cero, es decir si los vectores son l.i.

¿Cuando un espacio hilbertiano o prehilbertiano posee una base O.N.?

Proposición 1.4.1
Se cumple lo siguiente:

1. Todo espacio hilbertiano H de dimensión finita posee una base O.N.

2. Sea M un subespacio de dimensión finita de un espacio prehilbertiano H. Sea $(\vec{e_1}, ..., \vec{e_n})$ una base O.N. de M. Dado $\vec{x} \in H$. La proyección ortogonal de $\vec{x}$ sobre M es:

$$\vec{x_0} = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{x}\middle|\vec{e_i}\right) \vec{e_i}$$

Demostración:
De (1): La prueba se hará por inducción sobre la dimensión de H.

- Suponga que la dimensión es 1. Existe $\vec{u} \in H$ tal que $\vec{u} \neq \vec{0}$. Una base O.N. de H es $(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|})$.

- Suponga que el resultado es cierto para dimensión $n-1$. Sea H de dimensión n, y $\vec{u} \in H$ diferente de $\vec{0}$, defina:

$$\vec{e_1} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

  Sea $M = \mathcal{L}(\vec{e_1})$. Ya que $H = M \oplus M^\perp$ (ya que M es distinguido por ser de dimensión finita), necesariamente $\dim M^\perp = n-1$. Por hipótesis inductiva $M^\perp$ posee una base O.N. digamos $(\vec{e_2}, ..., \vec{e_n})$.

  Entonces, es claro que $(\vec{e_1}, ..., \vec{e_n})$ es base O.N. de H.

aplicando inducción se sigue el resultado.

De (2): Sea $\vec{x_0} = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{x}\middle|\vec{e_i}\right) \vec{e_i}$. Se tiene

$$\begin{aligned}
\left(\vec{x} - \vec{x_0}\middle|\vec{e_i}\right) &= \left(\vec{x}\middle|\vec{e_i}\right) - \left(\vec{x_0}\middle|\vec{e_i}\right) \\
&= \left(\vec{x}\middle|\vec{e_i}\right) - \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\vec{x}\middle|\vec{e_j}\right) \vec{e_j}\middle|\vec{e_i}\right) \\
&= \left(\vec{x}\middle|\vec{e_i}\right) - \left(\left(\vec{x}\middle|\vec{e_j}\right) \vec{e_j}\middle|\vec{e_i}\right) \\
&= \left(\vec{x}\middle|\vec{e_i}\right) - \left(\vec{x}\middle|\vec{e_j}\right) \left(\vec{e_j}\middle|\vec{e_i}\right) \\
&= \left(\vec{x}\middle|\vec{e_i}\right) - \left(\vec{x}\middle|\vec{e_j}\right) \\
&=0
\end{aligned}$$

Siendo $M = \mathcal{L}(\vec{e_1}, ..., \vec{e_n})$, necesariamente $\left(\vec{x} - \vec{x_0}\middle|\vec{y}\right) = 0$, para todo $\vec{y} \in M$. Por tanto, $\vec{x_0}$ es efectivamente la proyección ortogonal de $\vec{x}$ sobre M. ■

Definición 1.4.2
Sea H prehilbertiano y sea $(\vec{u_\alpha})_{\alpha\in\Omega}$ una familia O.N. en H. Para cada $\vec{x} \in H$ se define una función $\hat{x} : \Omega \to \mathbb{K}$ dada por:

$$\hat{x}(\alpha) = \left(\vec{x}\middle|\vec{u_\alpha}\right), \quad \forall\alpha \in \Omega$$

los escalares $\hat{x}(\alpha)$ se llaman **los coeficientes de Fourier de $\vec{x}$ con respecto a la familia ortonormal** $(\vec{u_\alpha})_{\alpha\in\Omega}$.

Teorema 1.4.1
Con las hipótesis y notaciones de la definición anterior, $\forall\vec{x} \in H$ se tiene que $\hat{x} \in l_2(\Omega, \mathbb{K})$, y se cumple

$$\mathcal{N}_2(\hat{x}) \leq \|\vec{x}\|$$

es decir:

$$\sum_{\alpha\in\Omega} \left|\hat{x}(\alpha)\right|^2 \leq \|\vec{x}\|^2$$

la desigualdad anterior es llamada **desigualdad de Bessel**.

Demostración:
Sea $J \in \mathcal{F}(\Omega)$ y defina $M_J = \mathcal{L}((\vec{u_\alpha})_{\alpha\in J})$. Entonces M_J es un subespacio de dimensión finita de H provisto de la base O.N. $(\vec{u_\alpha})_{\alpha\in J}$. Entonces, la proyección ortogonal de $\vec{x}$ sobre M_J debe ser:

$$\vec{x_0} = \sum_{\alpha\in J} \left(\vec{x}\middle|\vec{u_\alpha}\right) \vec{u_\alpha} = \sum_{\alpha\in J} \hat{x}(\alpha)\vec{u_\alpha}$$

por la proposición anterior. Por Pitágoras:

$$\sum_{\alpha\in J} \left|\hat{x}(\alpha)\right|^2 = \| \sum_{\alpha\in J} \hat{x}(\alpha)\vec{u_\alpha}\|^2 = \|\vec{x_0}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 - d(\vec{x}, M)^2 \leq \|\vec{x}\|^2$$

tomando supremos respecto a J se tiene que:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{N}_2(\hat{x})^2 \leq \|\vec{x}\|^2 \\
\Rightarrow &\mathcal{N}_2(\hat{x}) \leq \|\vec{x}\|
\end{aligned}$$

lo cual prueba el resultado. ■

Corolario 1.4.1
La aplicación $\vec{x} \mapsto \hat{x}$ de H en $l_2(\Omega, \mathbb{K})$ es una aplicación lineal continua de norma menor o igual a 1.

Demostración:
Veamos que es lineal. Sean $\vec{x}, \vec{x_1}, \vec{x_2} \in H$ y $a \in \mathbb{K}$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} \widehat{x_1 + x_2}(\alpha) &= \left(\vec{x_1} + \vec{x_2} \middle| \vec{u_\alpha}\right) \\ &= \left(\vec{x_1} \middle| \vec{u_\alpha}\right) + \left(\vec{x_1} + \vec{x_2} \middle| \vec{u_\alpha}\right) \\ &= \hat{x_1}(\alpha) + \hat{x_2}(\alpha) \end{aligned}$$

para todo $\alpha \in \Omega$. Por tanto, $\widehat{x_1 + x_2} = \hat{x_1} + \hat{x_2}$.

Además,

$$\begin{aligned} \widehat{ax}(\alpha) &= \left(a\vec{x} \middle| \vec{u_\alpha}\right) \\ &= a\left(\vec{x} \middle| \vec{u_\alpha}\right) \\ &= a\hat{x}(\alpha) \end{aligned}$$

para todo $\alpha \in \Omega$. Por tanto, $\widehat{ax} = a\hat{x}$. Luego, $\vec{x} \mapsto \hat{x}$ es lineal y continua por la desigualdad de Bessel, donde se deduce de forma inmediata que la norma de esta aplicación lineal es menor o igual que uno.
■

Corolario 1.4.2
Si $(\vec{u}_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ es un sistema O.N. de H y $\vec{x} \in H$, entonces:

$$\hat{x}(\alpha) = \left(\vec{x} \middle| \vec{u_\alpha}\right) \neq 0$$

para una cantidad a lo sumo numerable de índices $\alpha \in \Omega$.

Demostración:
Sea

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \left\{\alpha \in \Omega \middle| \left(\vec{x} \middle| \vec{u_\alpha}\right) \neq 0\right\} \\ &= \left\{\alpha \in \Omega \middle| \hat{x}(\alpha) \neq 0\right\} \end{aligned}$$

como la familia $\{\hat{x}(\alpha)\}_{\alpha\in\Omega}$ es sumable, el conjunto Ω_0 es a lo sumo numerable, es decir que $\left(\vec{x} \middle| \vec{u_\alpha}\right) \neq 0$ para una cantidad a lo sumo numerable de $\alpha \in \Omega$. ■

Teorema 1.4.2 (Teorema de Riesz-Fischer)
Sea H prehilbertiano y sea $(\vec{u_\alpha})_{\alpha\in\Omega}$ una familia O.N. en H. Se supone que el subespacio cerrado

$$M = \overline{\mathcal{L}((\vec{u_\alpha})_{\alpha\in\Omega})}$$

es completo (lo cual se cumple en particular si H es hilbertiano). Entonces la aplicación $\vec{x} \mapsto \hat{x}$ es suprayectiva de H sobre $l_2(\Omega, \mathbb{K})$. Más precisamente, dado $\varphi \in l_2(\Omega, \mathbb{K})$ existe un único $\vec{x_0} \in M$ tal que sus coeficientes de Fourier coinciden con φ, i.e. $\hat{x_0} = \varphi$.

Además, para cualquier $\vec{x} \in H$ se cumple que $\hat{x} = \varphi$ si y sólo si $\vec{x} - \vec{x_0} \perp M$.

Demostración:

Se harán varias cosas:

1. Sea $\varphi \in l_2(\Omega, \mathbb{K})$ y sea $\Omega_0 = \left\{\alpha \in \Omega \middle| \varphi(\alpha) \neq 0\right\}$ el cual es a lo sumo numerable. Sea $i \mapsto \alpha(i)$ una biyección de $\mathbb{N}$ sobre Ω_0.

   Considere la serie
$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi(\alpha(i)) \vec{u_{\alpha(i)}}$$
   en M. Como
$$\sum_{i=1}^{\infty} \left|\varphi(\alpha(i))\right|^2 = \mathcal{N}_2(\varphi) < \infty$$
   dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $q > p \geq n_0$:
$$\begin{aligned} \|\sum_{i=p}^{q} \varphi(\alpha(i)) \vec{u_{\alpha(i)}}\|^2 &= \sum_{i=p}^{q} \left|\varphi(\alpha(i))^2\right| \|\vec{u_{\alpha(i)}}\|^2 \\ &= \sum_{i=p}^{q} \left|\varphi(\alpha(i))^2\right| \\ &\leq \varepsilon^2 \end{aligned}$$
   se cumple pues la condición de Cauchy para la convergencia de la serie en M. Como M es completo, existe $\vec{x_0} \in M$ único tal que
$$\vec{x_0} = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(\alpha(i)) \vec{u_{\alpha(i)}}$$
   Se tiene
$$\left(\sum_{i=1}^{m} \varphi(\alpha) \vec{u_{\alpha(i)}} \middle| \vec{u_{\alpha(k)}}\right) = \varphi(\alpha(k)), \quad \forall m \geq k$$
   tomando límite cuando $m \to \infty$ y usando la continuidad de $\left(\cdot\middle|\cdot\right)$:
$$\Rightarrow \hat{x_0}(\alpha(k)) = \left(\vec{x_0}\middle|\vec{u_{\alpha(k)}}\right) = \varphi(\alpha(k)), \quad \forall k \in \mathbb{N}$$
   Sea $\alpha \in \Omega \backslash \Omega_0$. Se tiene:
$$\left(\sum_{i=1}^{m} \varphi(\alpha) \vec{u_{\alpha(i)}} \middle| \vec{u_{\alpha}}\right) = 0 = \varphi(\alpha(k)), \quad \forall m \in \mathbb{N}$$
   tomando límite cuando $m \to \infty$ y usando la continuidad de $\left(\cdot\middle|\cdot\right)$ se obtiene que:
$$\Rightarrow \hat{x_0}(\alpha) = \left(\vec{x_0}\middle|\vec{u_\alpha}\right) = \varphi(\alpha)$$
   por tanto, $\hat{x_0} = \varphi$.

2. Sea $\vec{x} \in H$ tal que $\hat{x} = \varphi$. Entonces,
$$\widehat{x - x_0} = \hat{x} - \hat{x_0} = \varphi - \varphi = 0$$
   luego
$$\left(\vec{x} - \vec{x_0}\middle|\vec{u_\alpha}\right) = 0 \quad \forall \alpha \in \Omega$$
   Así pues, $\vec{x} - \vec{x_0} \perp \mathcal{L}((\vec{u_\alpha})_{\alpha \in \Omega})$. Siendo los elementos de M límites de sucesiones en $\mathcal{L}((\vec{u_\alpha})_{\alpha \in \Omega})$, por la continuidad de $\left(\cdot\middle|\cdot\right)$ se tiene que $\vec{x} - \vec{x_0} \perp M$.

   Recíprocamente, si $\vec{x} - \vec{x_0} \perp M$, es claro que $\hat{0} = \widehat{x - x_0} = \hat{x} - \hat{x_0} = \hat{x} - \varphi$. Por tanto, $\hat{x} = \varphi$. En particular, si $\vec{x} \in M$ y $\hat{x} = \varphi$, resulta que $\vec{x} - \vec{x_0} \in M$ y $\vec{x} - \vec{x_0} \perp M$, luego $\vec{x} - \vec{x_0} \perp \vec{x} - \vec{x_0}$, o sea $\vec{x} - \vec{x_0} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{x_0}$, es decir que el $\vec{x_0}$ es único.

$\blacksquare$

Observación 1.4.1
La unicidad de $\hat{x_0} \in M$ implica que $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi(\alpha(i)) \vec{u_{\alpha(i)}}$ es independiente de la biyección elegida $i \mapsto \alpha(i)$ de $\mathbb{N}$ sobre Ω_0. Abusando de la notación se escribe

$$\hat{x_0} = \sum_{\alpha \in \Omega} \varphi(\alpha) \vec{u_\alpha}$$

¿Cuándo el subespacio M coincide con H?

Definición 1.4.3
Una familia O.N. de vectores $(\vec{u_\alpha})_{\alpha \in \Omega}$ se dice **maximal** si no existe una familia O.N. que la contenga propiamente. Es decir, $(\vec{u_\alpha})_{\alpha \in \Omega}$ es O.N. maximal si y sólo si

$$\vec{x} \perp \vec{u_\alpha}, \forall \alpha \in \Omega \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

Teorema 1.4.3 (**Teorema de Parseval**)
Sea H hilbertiano, y sea $(\vec{u_\alpha})_{\alpha \in \Omega}$ una familia O.N. de vectores en H. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. $(\vec{u_\alpha})_{\alpha \in \Omega}$ es maximal.
2. $\overline{\mathcal{L}\left((\vec{u_\alpha})_{\alpha \in \Omega}\right)} = H$.
3. Para todo $\vec{x} \in H$, $\mathcal{N}_2(\hat{x}) = \|\vec{x}\|$, o sea que $\sum_{\alpha \in \Omega} \left|\hat{x}(\alpha)\right|^2 = \|\vec{x}\|^2$.
4. Para todo $\vec{x}, \vec{y} \in H$,
$$\left(\hat{x} \middle| \hat{y}\right) = \left(\vec{x} \middle| \vec{y}\right)$$
o sea
$$\sum_{\alpha \in \Omega} x(\alpha)\overline{y(\alpha)} = \left(\vec{x} \middle| \vec{y}\right)$$

Demostración:
1) $\Rightarrow$ 2): Suponga que 2. es falso, entonces,

$$M = \overline{\mathcal{L}\left((\vec{u_\alpha})_{\alpha \in \Omega}\right)} \neq H$$

es decir que existe $\vec{x} \in H$ tal que $\vec{x} \notin M$. Como M es un subesapcio cerrado de H hilbertiano, entonces es ditinguido, luego existe la proyección ortogonal de $\vec{x}$ sobre M, digamos $\vec{x_0}$, entonces $\vec{x} - \vec{x_0} \neq \vec{0}$, pues $\vec{x} \notin M$ y, en particular

$$\vec{x} - \vec{x_0} \perp M$$

luego,

$$\vec{x} - \vec{x_0} \perp \vec{u_\alpha} \quad \forall \alpha \in \Omega$$

es decir que la familia $(\vec{u_\alpha})_{\alpha \in \Omega}$ no es maximal.

2) $\Rightarrow$ 3): Ya se sabe que $\mathcal{N}_2(\hat{x}) \leq \|\vec{x}\|$ por la desigualdad de Bessel. Sea $\vec{x} \in H$ y $\varepsilon > 0$. Como $\overline{\mathcal{L}\left((\vec{u_\alpha})_{\alpha \in \Omega}\right)} = H$, existen $J \subseteq \mathcal{F}(\Omega)$ y $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in J}$ en $\mathbb{K}$ tales que:

$$\|\vec{x} - \sum_{\alpha \in J} \lambda_\alpha \vec{u_\alpha}\| < \sqrt{\varepsilon} \tag{1.14}$$

Sea $M_J = \mathcal{L}\left((\vec{u_\alpha})_{\alpha\in J}\right)$, el cual es de dimensión finita, luego cerrado. Por tanto, de la ecuación anterior se sigue que:

$$d(\hat{x}, M_J) \leq \sqrt{\varepsilon}$$

Si $\hat{x_0} = \sum_{\alpha\in J} \hat{x}(\alpha)\vec{u_\alpha}$, entonces $\vec{x_0}$ es la proyección ortogonal de $\vec{x}$ sobre M_J, luego:

$$\begin{aligned} d(\vec{x}, M_J)^2 &= \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{x_0}\|^2 \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

así pues:

$$\begin{aligned} \|\vec{x}\|^2 - \varepsilon &= \|\vec{x_0}\|^2 \\ &= \sum_{\alpha\in J} \left|\hat{x}(\alpha)\right|^2 \|\vec{u_\alpha}\|^2 \\ &= \sum_{\alpha\in J} \left|\hat{x}(\alpha)\right|^2 \\ &\leq \mathcal{N}_2\left(\hat{x}\right)^2 \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se sigue que

$$\|\vec{x}\| \leq \mathcal{N}_2\left(\hat{x}\right)$$

por tanto, $\|\vec{x}\| = \mathcal{N}_2\left(\hat{x}\right)$.

3) $\Rightarrow$ 4): La identidad $\|\vec{x}\| = \mathcal{N}_2\left(\hat{x}\right)$ puede ser reescrita como:

$$\left(\hat{x}\middle|\hat{x}\right) = \left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right), \quad \forall \vec{x} \in H$$

entonces, para todo $\vec{x}, \vec{y} \in H$ y para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ se cumple:

$$\begin{aligned} \left(\hat{x} + \lambda\hat{y}\middle|\hat{x} + \lambda\hat{y}\right) &= \left(\vec{x} + \lambda\vec{y}\middle|\vec{x} + \lambda\vec{y}\right) \\ \Rightarrow \overline{\lambda}\left(\hat{x}\middle|\hat{y}\right) + \lambda\left(\hat{y}\middle|\hat{x}\right) &= \overline{\lambda}\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) + \lambda\left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right) \end{aligned}$$

tomando $\lambda = 1$ y $\lambda = i$ tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \left(\hat{x}\middle|\hat{y}\right) + \left(\hat{y}\middle|\hat{x}\right) &= \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) + \left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right) \\ \Rightarrow \left(\hat{x}\middle|\hat{y}\right) + \overline{\left(\hat{y}\middle|\hat{x}\right)} &= \left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) + \overline{\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)} \\ \Rightarrow 2\Re\left(\hat{x}\middle|\hat{y}\right) &= 2\Re\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) \\ \Rightarrow \Re\left(\hat{x}\middle|\hat{y}\right) &= \Re\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} i\left(\hat{x}\middle|\hat{y}\right) - i\left(\hat{y}\middle|\hat{x}\right) &= i\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) - i\left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right) \\ \Rightarrow i\left(\hat{x}\middle|\hat{y}\right) + \overline{i\left(\hat{x}\middle|\hat{y}\right)} &= i\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) + \overline{i\left(\vec{y}\middle|\vec{x}\right)} \\ \Rightarrow 2\Re i\left(\hat{x}\middle|\hat{y}\right) &= 2\Re i\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) \\ \Rightarrow -\Im\left(\hat{x}\middle|\hat{y}\right) &= -\Im\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) \\ \Rightarrow \Im\left(\hat{x}\middle|\hat{y}\right) &= \Im\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right) \end{aligned}$$

lo anterior muestra que $\left(\vec{x}\middle|\vec{y}\right)$ y $\left(\hat{x}\middle|\hat{y}\right)$ tienen las mismas parte real e imaginaria, por tanto son iguales.

4) $\Rightarrow$ 1): Supongamos que 1. es falso. Entonces, existe $\vec{x} \in H\setminus\left\{\vec{0}\right\}$ tal que $\vec{x} \perp \vec{u_\alpha}$ para todo $\alpha \in \Omega$, es decir que:

$$\hat{x}(\alpha) = \left(\vec{x}\middle|\vec{u_\alpha}\right), \quad \forall \alpha \in \Omega$$

al tomar $\vec{x} = \vec{y}$, resulta que:

$$\left(\hat{x}\middle|\hat{x}\right) = 0$$

siendo que $\left(\vec{x}\middle|\vec{x}\right) \neq 0$. Luego, se tiene el resultado. ■

Observación 1.4.2
Las identidades en 3. y 4. son llamadas **identidades de Parseval**.

Observación 1.4.3
Si $(\vec{u_\alpha})_{\alpha\in\Omega}$ es un sistema ortonormal maximal en un espacio hilbertiano H, entonces $\vec{x} \mapsto \hat{x}$ es una isometría lineal de H en $l_2(\Omega, \mathbb{K})$. Pero, por el teorema de Riesz-Fischer esta aplicación es suprayectiva, luego H y $l_2(\Omega, \mathbb{K})$ son linealmente isométricos (en particular, son isomorfos). La isometría inversa está dada por: para todo $\varphi \in l_2(\Omega, \mathbb{K})$,

$$\varphi \mapsto \sum_{\alpha\in\Omega} \varphi(\alpha)\vec{u_\alpha}$$

Teorema 1.4.4
En todo espacio prehilbertiano H existe una familia O.N. maximal.

Demostración:
Sea $\mathcal{O}$ la colección de todas las familias ortonormales de vectores en H. La relación inclusión $\subseteq$ hace de $\mathcal{O}$ un conjunto ordenado (no totalmente ordenado). Se verá que $\mathcal{O}$ es inductivo. Sea $(\mathcal{F}_i)_{i\in J}$ una cadena en $\mathcal{O}$, es decir, $(\mathcal{F}_i)_{i\in J}$ es una familia de sistemas O.N. tales que:

$$\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_j \quad \text{o} \quad \mathcal{F}_j \subseteq \mathcal{F}_i$$

para todo $i, j \in J$. Sea $\mathcal{F} = \bigcup_{i\in J} \mathcal{F}_i$. Si $\vec{u_\alpha}, \vec{u_\beta} \in \mathcal{F}$, entonces existe $i \in J$ tal que $\vec{u_\alpha}, \vec{u_\beta} \in \mathcal{F}_i$, luego $\left(\vec{u_\alpha}\middle|\vec{u_\beta}\right) = \delta_{\alpha\beta}$, por tanto $\mathcal{F}$ es un sistema O.N, el cual es un mayorante de la cadena $(\mathcal{F}_i)_{i\in J}$ (es decir que tiene un elemento máximo).

Así pues, $\mathcal{O}$ es un conjunto ordenado inductivo. Por el lema de Zorn, $\mathcal{O}$ contiene un elemento maximal. Este elemento es un sistema ortonormal maximal. ■

Teorema 1.4.5
En un espacio hilbertiano H, dos familias O.N. maximales tienen la misma cardinalidad.

Demostración:
Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ dos familias ortonormales maximales en H. Se tienen dos casos:

1. $\mathcal{A}$ es finito, digamos que $\mathcal{A} = (\vec{u_1}, ..., \vec{u_n})$. Por Parseval:

   $$H = \overline{\mathcal{L}(\vec{u_1}, ..., \vec{u_n})} = \mathcal{L}(\vec{u_1}, ..., \vec{u_n})$$

   pues la dimensión del generado es finita por tanto, el generado es cerrado. Así pues, H es de dimensión finita.

   Como los elementos de $\mathcal{B}$ son l.i. entonces $\mathcal{B}$ también debe ser finito y cumplen que si $\mathcal{B} = \{\vec{v_1}, ..., \vec{v_m}\}$:

   $$H = \overline{\mathcal{L}\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_m}\}} = \mathcal{L}\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_m}\}$$

   es decir que $m = n$ por ser bases de H. Luego $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$.

2. Suponga que $\mathcal{A}$ es infinito. Por 1. también debe suceder que $\mathcal{B}$ sea infinito. Para todo $\vec{a} \in \mathcal{A}$ se define:

   $$\mathcal{B}_{\vec{a}} = \left\{\vec{b} \in \mathcal{B} \middle| \hat{a}\left(\vec{b}\right) = \left(\vec{a}|\vec{b}\right) \neq 0\right\}$$

se sabe que $\mathcal{B}_{\vec{a}}$ es a lo sumo numerable. Por otra parte, por la identidad de Parseval:

$$\begin{aligned}
1 &= \|\vec{b}\|^2 \\
&= \mathcal{N}_2\left(\hat{b}\right)^2 \\
&= \sum_{\vec{a}\in\mathcal{A}} \left(\vec{b}|\vec{a}\right)^2 \\
&= \sum_{\vec{a}\in\mathcal{A}} \left|\hat{b}(\vec{a})\right|^2
\end{aligned}$$

así que, debe existir $\vec{a} \in \mathcal{A}$ tal que $\left(\vec{b}|\vec{a}\right) \neq 0$, es decir que

$$\mathcal{B} = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{B}\right| &= \left|\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{B}_\alpha\right| \\
&\leq \left|\mathcal{A}\right|\aleph_0 \\
&\leq \left|\mathcal{A}\right|
\end{aligned}$$

pues, $\left|\mathcal{B}_{\vec{a}}\right| \leq \aleph_0$, para todo $\vec{a} \in \mathcal{A}$. Por simetría se obtiene también que $\left|\mathcal{A}\right| \leq \left|\mathcal{B}\right|$. Por tanto, por Cantor-Bernstein se sigue que $\left|\mathcal{A}\right| = \left|\mathcal{B}\right|$.

$\blacksquare$

Teorema 1.4.6 (Teorema de Clasificación de espacios Hilbertianos)
Todo espacio hilbertiano es linealmente isométrico a algún $l_2(\Omega, \mathbb{K})$. Además, $l_2(\Omega, \mathbb{K})$ y $l_2(\Omega', \mathbb{K})$ son linealmente isométricos si y sólo si $\left|\Omega\right| = \left|\Omega'\right|$.

Demostración:
Para la primera parte, sea H hilbertiano. Por un teorema anterior, H posee una familia O.N. maximal, digamos $\left(\vec{u_\alpha}\right)_{\alpha\in\Omega}$, entonces, por otro teorema H debe ser linealmente isométrico a $l_2(\Omega, \mathbb{K})$.

Para la segunda parte, sea Ω arbitrario. Para cada $\alpha \in \Omega$ se define $\varphi_\alpha \in l_2(\Omega, \mathbb{K})$ como:

$$\varphi_\alpha(\beta) = \delta_{\alpha\beta}, \quad \forall\alpha, \beta \in \Omega$$

Claramente $\left(\varphi_\alpha\right)_{\alpha\in\Omega}$ es un sistema O.N. en $l_2(\Omega, \mathbb{K})$.

Sea Ω' otro conjunto tal que $\left|\Omega'\right| \neq \left|\Omega\right|$. Si $l_2(\Omega, \mathbb{K})$ y $l_2(\Omega', \mathbb{K})$ fuesen linealmente isométricos, se tendrían dos sistemas O.N. maximales en $l_2(\Omega, \mathbb{K})$ con misma cardinalidad, a saber $\left(\varphi_\alpha\right)_{\alpha\in\Omega}$ y el inducido por el de $l_2(\Omega', \mathbb{K})$ a través de la isometría, lo cual no es posible por un teorema anterior.

Si $\left|\Omega\right| = \left|\Omega'\right|$ entonces, existe existe $h : \Omega \to \Omega'$ biyección. En este caso, la aplicación $f \mapsto f \circ h$ sería una isometría lineal de $l_2(\Omega', \mathbb{K})$ en $l_2(\Omega, \mathbb{K})$. $\blacksquare$

1.5. Espacios Separables

Definición 1.5.1
Un número complejo λ se llama **complejo racional** si su parte real e imaginaria son racionales.

Teorema 1.5.1
Un espacio hilbertiano H es separable si y sólo si H posee una familia ortonormal maximal a lo sumo numerable.

Demostración:
$\Rightarrow$): Suponga que H es separable (de dimensión infinita, si es dimensión finita el resultado es inmediato). Sea $(\vec{x_i})_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión densa en H (la cual existe por ser separable). Sea ahora $(\vec{u_\alpha})_{\alpha\in\Omega}$ una familia O.N. maximal. Para obtener el resultado, se debe probar que Ω es numerable.

Sea
$$A_i = \left\{\alpha \in \Omega \middle| \left(\vec{x_i}\middle|\vec{u_\alpha}\right) \neq 0\right\}$$
Se sabe que A_i es a lo sumo numerable (ya que coincide con los coeficientes de Fourier de $\vec{x_i}$). Para que Ω sea numerable, basta probar con que:
$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$
Una contención se tiene por definición de los A_i. Sea $\alpha \in \Omega$ arbitrario. Como $(\vec{x_i})_{i\in\mathbb{N}}$ es densa, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que:
$$\|\vec{x_l} - \vec{u_\alpha}\| < 1$$
Si fuera que $\left(\vec{x_l}\middle|u_\alpha\right) = 0$, entonces
$$\begin{aligned}\|\vec{x_l} - \vec{u_\alpha}\|^2 &= \|\vec{u_\alpha}\|^2 + \|\vec{x_\alpha}\|^2\\ &\geq 1\\ \Rightarrow \|\vec{x_l} - \vec{u_\alpha}\| &\geq 1\end{aligned}$$
lo cual no puede suceder por la elección del l. Por tanto, $\left(\vec{x_i}\middle|\vec{u_\alpha}\right) \neq 0$, es decir que $\alpha \in A_l$.

$\Leftarrow$): Suponga que $(\vec{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es O.N. maximal. Sea S la colección de todas las sumas finitas de la forma
$$\sum_{i\in J} \alpha_i \vec{u_i}$$
con α_i complejo racional (o racional en caso de que el campo sea $\mathbb{R}$) y $J \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$.Se sabe que S es numerable. Como $H = \overline{\mathcal{L}((\vec{u_n})_{n\in\mathbb{N}})}$, dado $\vec{x} \in H$ y $\varepsilon > 0$ existe $\sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{u_i}$ con $\beta_i \in \mathbb{K}$ tal que
$$\|\vec{x} - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{u_i}\| < \frac{\varepsilon}{2}$$
Ahora, para cada $i \in [|1, n|]$ existe α_i racional compljeto (o racional) tal que:
$$\left|\beta_i - \alpha_i\right| < \frac{\varepsilon}{2n}$$
Entonces:
$$\begin{aligned}\|\vec{x} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{u_i}\| &\leq \|\vec{x} - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{u_i}\| + \|\sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i)\vec{u_i}\|\\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{n} \left|\beta_i - \alpha_i\right| \|\vec{u_i}\|\\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{n} \left|\beta_i - \alpha_i\right|\\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

■

Observación 1.5.1
La prueba de la ida de la prueba anterior la hizo un alumno de la ESFM. Su nombre era *Nunez Esquer*.

Corolario 1.5.1
Un espacio hilbertiano de dimensión infinita es separable si y sólo si es linealmente isométrico a $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$:

$$l_2(\mathbb{N}, \mathbb{K}) = \left\{ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \middle| a_n \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ tal que } \sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n\right| < \infty \right\}$$

provisto del producto escalar:

$$\left(\vec{a}\middle|\vec{b}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n}$$

Demostración:
Es inmediato del teorema anterior. ■

Ejemplo 1.5.1
En particular con el corolario anterior, como $L_2(S, \mathbb{K})$ es separable (siendo $S \subseteq \mathbb{R}^n$ medible), entonces

$$L_2(S, \mathbb{K}) \equiv l_2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$$

Notemos que para tener la isometría lineal, necesitamos a la familia O.N. maximal $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de tal suerte que $f \in \mathcal{L}_2(S, \mathbb{K}) \mapsto \hat{f} = (\left(f \middle| f_n\right))_{n\in\mathbb{N}}$ y la función inversa es $\varphi \in l_2(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \mapsto f = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) f_n = f$.

1.6. L_∞ como dual de L_1

Lema 1.6.1 (Lema de los promedios)
Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ medible, y sea $f : S \to \mathbb{K}$ medible e integrable en todo conjunto medible con medida finita dentro de S. Sea F un conjunto cerrado en $\mathbb{K}$. Se supone que para todo $A \subseteq S$ medible tal que $0 < m(A) < \infty$ se cumple lo siguiente:

$$\frac{1}{m(A)} \int_A f \in F$$

Entonces, $f(x) \in F$ c.t.p. en S.

Demostración:

1. Sea C una bola cerrada en $\mathbb{K} \backslash F$ de centro u y radio $r > 0$ tal que $C \cap F = \emptyset$. Se afirma que $f^{-1}(C)$ es despreciable en S. En efecto, escriba

$$f^{-1}(C) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[f^{-1}(C) \cap P_k\right]$$

donde $P_k = [-k,k]^n$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Basta probar que

$$A_k = f^{-1}(C) \cap P_k$$

es despreciable para todo $k \in \mathbb{N}$. Se tiene que $m(A_k)$ es finita. Si $m(A_k) > 0$, entonces por la hipótesis se tiene que

$$\frac{1}{m(A_k)} \int_{A_k} f \in F$$

Pero,

$$\begin{aligned}
|\frac{1}{m(A_k)} \int_{A_k} f - u| &= \frac{1}{m(A_k)} | \int_{A_k} (f(x) - u) dx| \\
&\leq \frac{1}{m(A_k)} \int_{A_k} |f(x) - u| dx \\
&\leq r m(A_k) \frac{1}{m(A_k)} \\
&= r
\end{aligned}$$

por tanto, $\frac{1}{m(A_k)} \int_{A_k} f \in C\#_c$, ya que $F \cap C = \emptyset$. Luego, A_k tiene medida cero, así $f^{-1}(C)$ es despreciable.

2. Resta probar que $f^{-1}(\mathbb{K} \backslash F)$ es despreciable. Como F es cerrado, entonces para todo $x \in \mathbb{K} \backslash F$ existe una bola cerrada de centro x y radio $r_x > 0$ tal que

$$F \cap C_x = \emptyset$$

Note que $\left(\overset{\circ}{C}_x\right)_{x \in \mathbb{K} \backslash F}$ forman un recubrimiento abierto de $\mathbb{K} \backslash F$. Ya que $\mathbb{K}$, y por tanto $\mathbb{K} \backslash F$ es separable, existe un recubrimiento numerable $\left(\overset{\circ}{C}_n\right)_{n \in \mathbb{K} \backslash F}$ de $\mathbb{K} \backslash F$ (por el T. de Lindelöf). Entonces:

$$f^{-1}(\mathbb{K} \backslash F) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(\overset{\circ}{C}_n)$$

es despreciable por (1).

Por ambos incisos, se sigue que $f(x) \in F$ para casi todo $x \in S$. ■

Corolario 1.6.1
Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y $f : S \to \mathbb{K}$ medible e integrable en todo subconjunto de S con medida finita. Se supone que $\forall A \subseteq S$ con medida finita:

$$\int_A f = 0$$

entonces $f(x) = 0$ para casi toda $x \in S$.

Demostración:

■

Corolario 1.6.2
Sean S y f como en el corolario anterior. Se supone que existe $b \geq 0$ tal que:

$$| \int_A f| \leq b m(A)$$

para todo $A \subseteq S$ con medida finita. Entonces, $\left|f(x)\right|$ para casi toda $x \in S$.

Demostración:

■

Teorema 1.6.1
Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ medible. Para cada $g \in \mathcal{L}_\infty(S, \mathbb{K})$ se define ϕ_g como la función de $\mathcal{L}_1(S, \mathbb{K})$ en $\mathbb{K}$ dada como sigue:

$$\phi_g(f) = \int_S fg, \quad \forall f \in \mathcal{L}_1(S, \mathbb{K})$$

Entonces, ϕ_g es un funcional lineal continuo sobre $L_1(S, \mathbb{K})$ tal que $\|\phi_g\| = \mathcal{N}_\infty(g)$. Además, la aplicación $\phi : g \mapsto \phi_g$ es una isometría lineal de $L_\infty(S, \mathbb{K})$ sobre $L_1(S, \mathbb{K})^*$.

Demostración:
Note que nada cambia si se reemplazan f o g por funciones equivalentes (es decir que la norma de sus diferencias esa 0), luego es indistinto usar las notaciones $\mathcal{L}_1$ o L_1 y $\mathcal{L}_\infty$ o L_∞.

Sea $g \in \mathcal{L}_\infty(S, \mathbb{K})$. Claramente ϕ_g es un funcional lineal sobre $L_1(S, \mathbb{K})$. Además,

$$\left|\phi_g(f)\right| \leq \left|\int_S fg\right| \leq \int_S |f||g| \leq \mathcal{N}_\infty(g)\mathcal{N}_1(f)$$

por tanto, $\phi_g \in L_1(S, \mathbb{K})^*$, y $\|\phi_g\| \leq \mathcal{N}_\infty(g)$.

Si $A \subseteq S$ es medible de medida finita, entonces

$$\begin{aligned}\left|\int_A g\right| &= \left|\int_S g\chi_A\right| \\ &= \left|\phi_g(\chi_A)\right| \\ &\leq \|\phi_g\|\mathcal{N}_1(\chi_A) \\ &= \|\phi_g\| m(A)\end{aligned}$$

por el corolario anterior se sigue que

$$\left|g(x)\right| \leq \|\phi_g\|, \text{ para casi toda } x \in S$$

por ende, $\mathcal{N}_\infty(g) \leq \|\phi_g\|$. Finalmente, se sigue que $\|\phi_g\| = \mathcal{N}_\infty(g)$ (es decir que es isometría) y, claramente es lineal.

1. Probaremos que ϕ_g es suprayectiva bajo la hipótesis adicional de que $m(S) < \infty$. Sea $\varphi \in L_1(S, \mathbb{K})^*$. Como $m(S) < \infty$, entonces $L_2(S, \mathbb{K}) \subseteq L_1(S, \mathbb{K})$ luego por reestricción φ es un funcional lineal sobre $L_2(S, \mathbb{K})$.

   Recordemos que:

   $$\frac{\mathcal{N}_1(f)}{m(S)} \leq \frac{\mathcal{N}_2(f)}{m(S)^{1/2}}, \quad \forall f \in \mathcal{L}_2(S, \mathbb{K})$$

   Entonces:

   $$\begin{aligned}\left|\varphi(f)\right| &\leq \|\varphi\|\mathcal{N}_1(f) \\ &\leq \|\varphi\| m(S)^{1/2}\mathcal{N}_2(f), \quad \forall f \in \mathcal{L}_2(S, \mathbb{K})\end{aligned}$$

   Así pues, la reestricción de φ a $L_2(S, \mathbb{K})$ es lineal continua, es decir, $\varphi \in L_2(S, \mathbb{K})^*$. Por la autodualidad de $L_2(S, \mathbb{K})$, existe $g \in \mathcal{L}_2(S, \mathbb{K})$ tal que:

   $$\varphi(f) = \int_S fg, \quad \forall f \in \mathcal{L}_2(S, \mathbb{K}) \tag{1.15}$$

se afirma que $g \in \mathcal{L}_\infty(S, \mathbb{K})$. En efecto, sea $A \subseteq S$ medible. Entonces:

$$\begin{aligned} \big|\int_A g\big| &= \big|\varphi(\chi_A)\big| \\ &\leq \|\varphi\| \mathcal{N}_1(\chi_A) \\ &= \|\varphi\| m(A) \end{aligned}$$

luego, por el lema de los promedios:

$$\big|g(x)\big| \leq \|\varphi\|$$

para casi todo $x \in S$. Por ende, $g \in \mathcal{L}_\infty(S, \mathbb{K})$.

Para esta g se tiene definido el correspondiente funcional lineal ϕ_g sobre $L_1(S, \mathbb{K})$. De acuerdo a la ecuación anterior se tiene que:

$$\varphi(f) = \int_S fg = \phi_g(f), \quad \forall f \in \mathcal{L}_2(S, \mathbb{K})$$

En particular, ambos operadores lineales continuos coinciden en el conjunto de las funciones escalonadas, denso en $L_1(S, \mathbb{K})$. Por el principio de ampliación de identidades, φ y ϕ_g coinciden en todo $L_1(S, \mathbb{K})$.

2. ϕ_g es suprayectiva en el caso general. Escriba S en la forma:

$$S = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$$

donde los S_k son disjuntos a pares de medida finita. Sea $\varphi \in L_1(S, \mathbb{K})^*$ y $f \in \mathcal{L}_1(S, \mathbb{K})$. Para todo $k \in \mathbb{N}$ se define $f_k = f\chi_{S_k}$. Entonces:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$$

en todo punto de S (por ser disjuntos los S_k). Además:

$$\big|\sum_{k=1}^{m} f_k\big| \leq \big|f\big|, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

donde la última función es integrable e independiente de m. Por tanto, usando Lebesgue:

$$\lim_{m \to \infty} \mathcal{N}_1\left(f - \sum_{k=1}^{m} f_k\right) = 0$$

como φ es continua sobre $L_1(S, \mathbb{K})$,

$$\varphi(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(f_k) \tag{1.16}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$, sea φ_k la reestricción de φ a las funciones integrables en $L_1(S, \mathbb{K})$ nulas fuera de S_k. φ_k se puede considerar entonces como un funcional lineal continuo sobre $L_1(S_k, \mathbb{K})$. Por (1) existe una función $g_k \in \mathcal{L}_\infty(S_k, \mathbb{K})$, que se identifica de manera natural con una función de S en $\mathbb{K}$ nula fuera de S_k tal que:

$$\varphi_k = \phi_{g_k}$$

o sea:

$$\varphi(f_k) = \phi_{g_k}(f_k) = \int_{S_k} f_k g_k = \int_S f g_k$$

(recuerde que g_k es nula fuera de S_k). Sustituyendo en la ecuación anterior se tiene que:

$$\varphi(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_S f g_k$$

Defina $g = \sum_{k=1}^{\infty} g_k$. Esta es una función de S en $\mathbb{K}$ en todo punto de S. Es claro que esta función está bien definida ya que los S_k son disjuntos a pares. Por (1):

$$\mathcal{N}_\infty (g_k) = \|\phi_{g_k}\| = \|\varphi_k\| \leq \|\varphi\|$$

es decir, para casi toda $x \in S_k$, $\big|g_k(x)\big| \leq \|\varphi\|$. Luego, para casi toda $x \in S$,

$$\big|g(x)\big| \leq \|\varphi\|$$

es decir que $g \in \mathcal{L}_\infty(S, \mathbb{K})$ (por ser los S_k disjuntos). Observe que:

$$fg = \sum_{k=1}^{\infty} f g_k$$

en todo punto de S, Además, para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$|\sum_{k=1}^{m} f g_k| \leq \sum_{k=1}^{m} |f||g_k| \leq |f| \sum_{k=1}^{\infty} |g_k| = |f||g|$$

(otra vez, por ser los S_k disjuntos), dónde la última función es integrable e independiente de m. Por el teorema de Lebesgue se sigue que:

$$\varphi(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_S f g_k = \int_S f \sum_{k=1}^{\infty} g_k = \int_S fg$$

para esta $g \in \mathcal{L}_\infty(S, \mathbb{K})$ ya está definido el funcional lineal continuo ϕ_g como:

$$\phi_g(f) = \int_S fg$$

por tanto:

$$\varphi(f) = \phi_g(f), \quad \forall f \in L_1(S, \mathbb{K})$$

■