Segundo Examen Geometría Diferencial III

Cristo Daniel Alvarado

31 de diciembre de 2023

1.1. Demostración del teorema de punto fijo de Brower

En este documento se pretende dar una prueba, lo más entendible posible, del teorema del punto fijo de Brower, desde el punto de vista de las formas diferenciales.

Para la demostración del teorema, se requieren de unos resultados anteriores. Entre ellos se tiene el Teorema 3.5.11 y un lema (casi inmediato) del mismo:

Teorema 1.1.1
Sea $V \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Si $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $\operatorname{supp}(\phi) \subseteq V$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe una función $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con soporte compacto tal que $\operatorname{supp}(\psi) \subseteq V$ y

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\phi(x) - \psi(x)| < \varepsilon$$

Demostración:
Denotemos por $A = \operatorname{supp}(\phi)$, y definamos

$$d = \text{ínf}\{\|x-y\|_\infty | x \in A \text{ y } y \in V^c\}$$

Recordando que

$$\|x\|_\infty = \text{máx}\{|x_i| | i = 1, \ldots, n\}, \text{ donde } x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Afirmamos que $d > 0$. Como $A \subseteq V$, entonces se tiene que $A \cap V^c = \emptyset$. Siendo que V es abierto, se sigue que V^c es cerrado. Defina $f : A \to \mathbb{R}$ dada como sigue:

$$\begin{aligned} f(x) =& \text{ínf}\{\|x-z\|_\infty | z \in V^c\} \\ =& d_\infty(x, V^c) \end{aligned}$$

para todo $x \in A$. Afirmamos que la función f es continua en A. En efecto, sean $x \in A$ $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de puntos de A que convergen a x (con la norma infinito). Se tiene

$$|f(x) - f(x_n)| = |d_\infty(x, V^c) - d_\infty(x_n, V^c)| \tag{1.1}$$

Por la desigualdad del triángulo, se tiene que si $z \in V^c$:

$$d_\infty(x, z) \leq d_\infty(x, x_n) + d_\infty(x_n, z)$$

Pero $d_\infty(x, V^c) \leq d_\infty(x, z)$. Por lo cual:

$$\begin{aligned} d_\infty(x, V^c) \leq& d_\infty(x, x_n) + d_\infty(x_n, z) \\ \Rightarrow d_\infty(x, V^c) - d_\infty(x, x_n) \leq& d_\infty(x_n, z) \end{aligned}$$

para todo $z \in V^c$. De esta forma, $d_\infty(x, V^c) - d_\infty(x, x_n)$ es cota inferior de $\{d_\infty(x_n, z) | z \in V^c\}$. Así

$$\begin{aligned} d_\infty(x, V^c) - d_\infty(x, x_n) \leq& d_\infty(x_n, V^c) \\ \Rightarrow d_\infty(x, V^c) - d_\infty(x_n, V^c) \leq& d_\infty(x, x_n) \end{aligned}$$

de forma análoga se prueba también que

$$-(d_\infty(x, V^c) - d_\infty(x_n, V^c)) \leq d_\infty(x, x_n)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo cual

$$|d_\infty(x, A) - d_\infty(x_n, A)| \leq d_\infty(x, x_n)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Retomando la ecuación (1.1) se sigue que

$$0 \leq |f(x_n) - f(x)| \leq d_\infty(x, x_n)$$

Tomando ambos límites de ambos lados

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(x)| = 0$$

pues $\lim_{n\to\infty} d_\infty(x, x_n) = 0$. Luego f es continua en x. Por ser $x \in A$ arbitrario, se sigue que f es continua en A.

Pero A es un conjunto compacto y f es una función que toma valores reales, por lo cual alcanza su máximo y su mínimo, digamos lo alcanza en $a \in A$, es decir

$$f(a) \leq f(x), \quad \forall x \in A$$

donde $a \notin V^c$, pues en caso contrario se tendría que $A \cap V^c \neq \emptyset$. Se tiene que $f(a) = d_\infty(a, V^c) > 0$, ya que en caso contrario, por propiedades del ínfimo existiría una sucesión en V^c que converge a a, cosa que no puede suceder, pues V^c es cerrado y $a \notin V^c$ (esto implicaría que V^c no tiene a todos sus puntos de acumulación). Así

$$\begin{aligned}
d =& \inf \{\|x - y\|_\infty | x \in A \text{ y } y \in V^c\} \\
=& \inf \{d_\infty(x, V^c) | x \in A\} \\
=& \inf \{f(x) | x \in A\} \\
=& \min \{f(x) | x \in A\} \\
=& f(a) \\
>& 0
\end{aligned}$$

por lo cual $d > 0$.

Como ϕ es continua en el compacto A, es uniformemente continua en A. Pero también es uniformemente continua fuera de A, pues toma el valor constante 0, así ϕ es continua en todo su dominio. Por tanto, para $\varepsilon > 0$ existe $\delta' > 0$ tal que si $x, y \in \mathbb{R}^n$ son tales que $\|x - y\|_\infty < \delta'$, entonces $|\phi(x) - \phi(y)| < \varepsilon$. Sea $\delta = \min\left\{\delta', \frac{d}{2}\right\} > 0$.

Definamos

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\|_\infty \leq \delta\}$$

y sea $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función C^∞ no negativa con soporte compacto tal que $\operatorname{supp}(\rho) \subseteq Q$ y

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(y)dy = 1$$

Defina $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada como:

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \rho(y - x)\phi(y)dy \\
&= \int_A \rho(y - x)\phi(y)dy
\end{aligned}$$

(ya que ϕ tiene soporte en A). Como ρ es de clase C^∞, se sigue que ψ también lo es.

Sea

$$A_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n | d_\infty(x, A) \leq \delta\}$$

Notemos que si $x \notin A_\delta$ entonces para todo $y \in A$, $\|x - y\|_\infty > \delta$, como $\operatorname{supp}(\rho) \subseteq Q$ entonces $\rho(x - y) = 0$. Por tanto se tendría que para $x \notin A_\delta$:

$$\begin{aligned}
\psi(x) =& \int_A \rho(y - x)\phi(y)dy \\
=& 0
\end{aligned}$$

de esta forma el soporte de ψ está contenido en A_δ $\square$

Con la prueba de este teorema hecha, se procederá a probar el siguiente lema:

Lema 1.1.1
Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $C \subseteq U$ compacto y $\phi : U \to \mathbb{R}$ una función continua que es clase C^∞ en el complemento de C. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe una función $\psi : U \to \mathbb{R}$ C^∞ en U, tal que $\phi - \psi$ tiene soporte compacto y $|\phi - \psi| < \varepsilon$.

Demostración:
Sea $\varepsilon > 0$ y $\rho : U \to \mathbb{R}$ una función $C_0^\infty(U)$ tal que toma el valor de 1 en C. □

Proposición 1.1.1
Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto conexo y $f : U \to U$ un mapeo propio C^∞. Entonces si $f|_{C^c} = \mathrm{id}_{C^c}$ donde $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto, entonces f es propio y $\deg(f) = 1$.

Demostración:

□

Denotemos por B^n a la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$, es decir, se denota al conjunto

$$\begin{aligned} B^n =& \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| \leq 1\}. \\ =& \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

Teorema 1.1.2 (Punto Fijo de Brower)
Sea $f : B^n \to B^n$ una función continua. Entonces f tiene un punto fijo, es decir existe $x_0 \in B^n$ tal que $f(x_0) = x_0$.

Demostración:
Procederemos por contradicción. Suponga que para todo $x \in B^n$ se tiene que $f(x) \neq x$. Sea $l_x : [0, \infty[\to \mathbb{R}^\ltimes$ la función dada por:

$$s \mapsto f(x) + s\,(x - f(x))\,, \quad \forall s \in [0, \infty[$$

En esencia, l_x es el rayo que une a x con $f(x)$, y es prolongado en la dirección de x. Afirmamos que para $x \in B^n$ existe $s_0 \in [0, \infty[$ tal que $\|l_x(s_0)\| = 1$, es decir, que este rayo tiene un punto en $\partial B^n = S^{n-1}$, donde

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| = 1\}$$

En efecto, sea $x \in B^n$. El mapeo l_x es continuo en $[0, \infty[$ (por ser lineal). Como $\|x - f(x)\| > 0$ ya que $x \neq f(x)$, se sigue que

$$\begin{aligned} l_x(\frac{2}{\|x - f(x)\|}) =& f(x) + \frac{2}{\|x - f(x)\|}\,(x - f(x)) \\ \Rightarrow \|l_x(\frac{2}{\|x - f(x)\|})\| =& \|f(x) + \frac{2}{\|x - f(x)\|}\,(x - f(x))\,\| \\ \geq& 2 \cdot \frac{\|x - f(x)\|}{\|x - f(x)\|} - \|f(x)\| \\ =& 2 - \|f(x)\| \\ \geq& 1 \end{aligned}$$

pues $0 \leq \|f(x)\| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \|f(x)\| \leq 0$. Tomando $s_1 = \frac{2}{\|x - f(x)\|}$, se sigue que $\|l_x(s_1)\| \geq 1$ y $\|l_x(0)\| = \|f(x)\| \leq 1$. Por ser l_x continua y $[0, \infty[$ conexo, entonces existir $s_0 \in [0, s_1]$ tal que $\|l_x(s_0)\| = 1$. Pero la función l_x es inyectiva, por tanto este s_0 es único.

Observación 1.1.1
De ahora en adelanta $s_0(x)$ denotara al único elemento de $[0, \infty[$ tal que $l_x(s_0(x)) = 1$.

Definamos $\gamma : B^n \to S^{n-1}$, $x \mapsto l_x(s_0)$. Por lo anterior esta función está bien definida. Veamos que es continua. Sea $x_0 \in B^n$, $\varepsilon > 0$ y $S = \max\{s_0(x), s_0(x_0)\} \geq 0$. Como f es continua en x_0 existe $\delta' > 0$ si $x \in B^n$ con $\|x - x_0\| \leq \delta'$, entonces

$$\|f(x) - f(x_0)\| < \frac{\varepsilon}{2(S+1)}$$

tomemos $\delta = \min\left\{\delta', \frac{\varepsilon}{2(S+1)}\right\}$. Si $x \in B^n$ es tal que $\|x - x_0\| \leq \delta$, entonces

$$\begin{aligned}
\|\gamma(x) - \gamma(x_0)\| =& \|l_x(s_0(x)) - l_{x_0}(s_0(x_0))\| \\
=& \|f(x) - s_0(x) \cdot (x - f(x)) - f(x_0) + s_0(x_0) \cdot (x_0 - f(x_0))\| \\
\leq& \|f(x) - f(x_0)\| + S \cdot \|x - x_0 - f(x) + f(x_0)\| \\
\leq& \|f(x) - f(x_0)\| + S \cdot \|x - x_0\| + S \cdot \|f(x) - f(x_0)\| \\
\leq& (S+1) \cdot \|f(x) - f(x_0)\| + S \cdot \|x - x_0\| \\
\leq& (S+1) \cdot \|f(x) - f(x_0)\| + (S+1) \cdot \|x - x_0\| \\
<& (S+1) \cdot \frac{\varepsilon}{2(S+1)} + (S+1) \cdot \frac{\varepsilon}{2(S+1)} \\
=& \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
=& \varepsilon
\end{aligned}$$

Por tanto, γ es continua en x_0. Por ser el x_0 arbitrario se sigue que γ es continua en B^n.

$\square$