

# Lista 3 de Ejercicios Análisis Matemático IV

Cristo Daniel Alvarado

8 de mayo de 2024

# Índice general

3. Ejercicios

2

# Capítulo 3

## Ejercicios

### Ejercicio 3.1.1

Pruebe que, para todo  $x \in ]0, 2\pi[$ ,

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$$

Usando la identidad de Parseval, **demuestre** que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

### Demostración:

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}, \quad \forall x \in [0, 2\pi[$$

y extiéndase por periodicidad a todo  $\mathbb{R}$ . Es claro que  $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{R})$ , sea ahora  $x \in ]0, 2\pi[$ . Por el teorema fundamental para la convergencia puntual de una serie de Fourier hay que encontrar un  $0 < \delta < \pi$  tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) dt$$

tomemos  $\delta = \min\{x, 2\pi - x\} > 0$ . Se tienen dos casos:

1.  $\delta = x$ , entonces

$$\begin{aligned} & \int_0^{\delta} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) dt \\ &= \int_0^{\delta} \frac{1}{t} \left[ \frac{\pi - x - t}{2} + \frac{\pi - x + t}{2} - \frac{2(\pi - x)}{2} \right] \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) dt \\ &= \int_0^{\delta} \frac{1}{t} [\pi - x - \pi + x] \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) dt \\ &= \int_0^{\delta} 0 dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

por tanto, el límite cuando  $m \rightarrow \infty$  resulta que da cero.

2.  $\delta = 2\pi - x$ . El caso es análogo al anterior.

por ambos incisos se concluye que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^\delta \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t} \sin \left( m + \frac{1}{2} \right) dt = 0$$

por tanto, la serie de Fourier de  $f$  converge a  $f$  puntualmente en  $x$ . Computemos ahora los coeficientes de la serie de Fourier de  $f$ . Si  $n \geq 0$ :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \cos nx dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos nx dx - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x \cos nx dx \text{ haciendo } u = nx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2n\pi} \cos u \frac{du}{n} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2n\pi} \frac{u}{n} \cos u \frac{du}{n} \\ &= \frac{1}{2n} \sin u \Big|_0^{2n\pi} - \frac{1}{2\pi n^2} \int_0^{2n\pi} u \cos u du \\ &= \frac{1}{2n} [\sin 2\pi n - \sin 0] - \frac{1}{2\pi n^2} \left( u \sin u \Big|_0^{2n\pi} + \int_0^{2n\pi} \sin u du \right) \\ &= -\frac{1}{2\pi n^2} \left( u \sin u \Big|_0^{2n\pi} + \int_0^{2n\pi} \sin u du \right) \\ &= -\frac{1}{2\pi n^2} \left( [2n\pi \sin 2n\pi - 0] - \cos u \Big|_0^{2n\pi} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2\pi n^2} (0 - 0 - 1 + 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

para todo  $n \geq 0$ . Si  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin nx dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin nx dx - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x \sin nx dx \text{ haciendo } u = nx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2n\pi} \sin u \frac{du}{n} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2n\pi} \frac{u}{n} \sin u \frac{du}{n} \\
&= \frac{1}{2n} (-\cos u) \Big|_0^{2n\pi} - \frac{1}{2\pi n^2} \int_0^{2n\pi} u \sin u du \\
&= \frac{1}{2n} (-\cos 2n\pi + 1) - \frac{1}{2\pi n^2} \left( -u \cos u \Big|_0^{2n\pi} + \int_0^{2n\pi} \cos u du \right) \\
&= \frac{1}{2n} (-1 + 1) - \frac{1}{2\pi n^2} \left( -2n\pi \cos 2n\pi + 0 + \sin u \Big|_0^{2n\pi} \right) \\
&= -\frac{1}{2\pi n^2} (-2n\pi \cos 2n\pi + \sin 2n\pi - \sin 0) \\
&= -\frac{1}{2\pi n^2} (-2n\pi + \sin 2n\pi - \sin 0) \\
&= -\frac{1}{2\pi n^2} (-2n\pi) \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Por tanto, la serie de Fourier de  $f$  en  $x \in ]0, 2\pi[$  está dada por:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kx + b_k \sin kx] = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

Por el criterio de Dini se sigue que

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad \forall x \in ]0, 2\pi[$$

Ahora, como  $x \mapsto \frac{\pi-x}{2}$  es una función en  $\mathcal{L}_2^{2\pi}$ , por Parseval se tiene que

$$\begin{aligned}
 \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [|a_n|^2 + |b_n|^2] &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\pi-x}{2} \right|^2 dx \\
 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} |\pi-x|^2 dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} |\pi-x|^2 dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (\pi-x)^2 dx \text{ haciendo el cambio de variable } u = \pi-x \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^0 -u^2 du \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left. \frac{-u^3}{3} \right|_{\pi}^0 \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[ -\frac{0}{3} + \frac{\pi^3}{3} \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi^3}{3} \\
 &= \frac{\pi^2}{6} \\
 \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2}{6}
 \end{aligned}$$

Como se quería demostrar. ■

### Ejercicio 3.1.2

Sea  $f \in \mathcal{L}_2^{2\pi}(\mathbb{R})$  y sean  $a_n, b_n$  los coeficientes de Fourier de  $f$ . **Pruebe** que

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x f(x) dx = \pi a_0 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}.$$

**Demostración:** ■

### Ejercicio 3.1.3

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periódica de periodo  $2\pi$  definida como

$$f(x) = \begin{cases} \pi^2 & \text{si } -\pi \leq x < 0, \\ (x-\pi)^2 & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

calcule los coeficientes de Fourier  $a_n$ , con  $n = 0, 1, 2, \dots$  de  $f$  y **pruebe** las fórmulas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

**Demostración:** ■

**Ejercicio 3.1.4**

Pruebe que

$$\frac{1}{3}x(\pi - x)(\pi - 2x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{n^3}, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Deduzca el valor de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}.$$

**Demostración:**

■

**Ejercicio 3.1.5**

Haga lo siguiente:

i. **Pruebe** que

$$\int_0^{\pi} \log \sin \frac{x}{2} dx = -\pi \log 2.$$

*Sugerencia.* Haga el cambio de variables  $x = 2t$  y escriba  $\sin t = 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}$ .

ii. **Muestre** que

$$-\log \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}, \quad \text{si } x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

*Sugerencia.* Use el inciso (i) para probar que  $a_0 = 0$ . A fin de calcular  $a_n$  para  $n \in \mathbb{N}$ , escriba  $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \log \cos \frac{x}{2} dx$ , efectúe una integración por partes y transforme el nuevo integrando de suerte que aparezca el núcleo de Dirichlet.

iii. **Deduzca** de (ii) la fórmula

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

iv. **Desarrolle** en serie de Fourier la función

$$x \mapsto \log \left| 2 \cos \frac{x}{2} \right|$$

**Solución:**

□

**Ejercicio 3.1.6**

Sea  $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{R})$  y sea  $x \in \mathbb{R}$ . Se supone que para algún  $\alpha > 0$  se cumple

$$f(x+t) - f(x) = O(|t^\alpha|), \quad \text{cuando } t \rightarrow 0$$

**Demuestre** que la serie de Fourier de  $f$  en  $x$  converge a  $f(x)$ .

**Demostración:**

■

**Ejercicio 3.1.7**

Por el problema 3.1.1 se sabe que

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$$

i. Póngase

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} kx}{k}.$$

**Muestre** que

$$\frac{x}{2} + s_n(x) = \pi \int_0^{\pi} D_n(t) dt,$$

donde  $D_n$  es el núcleo de Dirichlet.

ii. Si  $x \in ]0, 2\pi[$ , **pruebe** que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \pi \int_0^x D_n(t) dt - \int_0^x \frac{\operatorname{sen} nt}{t} dt \right] = 0.$$

iii. **Deduzca** una nueva demostración de la fórmula

$$\int_0^{\rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

**Demostración:**

■

**Ejercicio 3.1.8**

Sea  $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$  y sean  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  los coeficientes de Fourier de  $f$ . **Demuestre** que

$$\int_0^x f = c + c_0 x + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{c_k e^{ikx}}{ik}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

donde  $c$  es una constante, la convergencia siendo uniforme en  $\mathbb{R}$ .

*Sugerencia.* Considere la función  $F(x) = \int_0^x (f - c_0)$ .

**Deduzca** que los coeficientes de Fourier  $b_n$  de cualquier función  $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$  satisfacen la condición de que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$$

es convergente. **Concluya** que la aplicación  $f \mapsto \{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  no es una aplicación suprayectiva de  $\mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{C})$  en  $c_0(\mathbb{Z})$ .

**Demostración:**

■

**Ejercicio 3.1.9**

Haga lo siguiente:



i. Sea  $\alpha$  un número real no entero. **Pruebe** que

$$\pi \cos \alpha x = 2\alpha \sin \pi \alpha \left( \frac{1}{2\alpha^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{\alpha^2 - n^2} \right), \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

De ahí obtenga las fórmulas clásicas

$$\frac{\pi \alpha}{\sin \pi \alpha} = 1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} \quad \text{y} \quad \pi \alpha \cot \pi \alpha = 1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}.$$

ii. Sea  $x \in ]0, 1[$ . **Pruebe** que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{n^2 - \alpha^2}$$

se puede integrar término por término en el intervalo  $[0, x]$ . De la última fórmula del inciso (i) **deduzca** la fórmula

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{n^2} \right), \quad \forall x \in ]-1, 1[.$$

**Demostración:**

### Ejercicio 3.1.10

Se supone que la serie de Fourier de una función  $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{K})$  converge en el sentido de Cesàro uniformemente en  $\mathbb{R}$ . **Pruebe** que  $f$  es equivalente a una función continua de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{K}$ .

**Demostración:**

### Ejercicio 3.1.11

Sea  $f \in \mathcal{C}^{2\pi}(\mathbb{R})$  la función

$$f(x) = \pi - |2x|, \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

Aplique el teorema 3.9 para mostrar que la serie de Fourier de  $f$  converge a  $f$  uniformemente en  $\mathbb{R}$ . **Calcule**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}.$$

**Solución:**

### Ejercicio 3.1.12

Sea  $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{R})$  la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi \leq x < 0, \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

**Calcule** la serie de Fourier de  $f$ . Usando el teorema fundamental para la convergencia de una

serie de Fourier, **muestre** que la serie de Fourier de  $f$  converge a alguna suma  $s(x)$  para todo  $x \in [-\pi, \pi]$ . **Calcule**  $s(x)$  para todo  $x \in [-\pi, \pi]$ .

**Solución:**

□

**Ejercicio 3.1.13**

Haga lo mismo que en el problema **3.12** con  $f \in \mathcal{L}_1^{2\pi}(\mathbb{R})$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi \leq x < 0, \\ x & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

**Solución:**

□