Revisión del examen.

1) M_i: Producido en la i-ésima máquina.

D: Salió defectuoso.

M_1 120 $\qquad 0.5 = P(D|M_1) = p_1$

M_2 350 $\qquad 0.15 = P(D|M_2) = p_2$

M_3 270 $\qquad 0.35 = P(D|M_3) = p_3$

Para a)

$$P(D) = P(D\cap M_1) + P(D\cap M_2) + P(D\cap M_3)$$
$$= P(D|M_1)\cdot P(M_1) + P(D|M_2)\cdot P(M_2) + P(D|M_3)\cdot P(M_3)$$

para b)

$$P(M_1|D) = \frac{P(D|M_1)\cdot P(M_1)}{P(D)}$$

2) a) Las cartas son diferentes entre sí.

$$13\binom{4}{2}\cdot 48\cdot 44\cdot 40 = \#\text{ Casos favorables.}$$

esto es con orden, sin orden:

$$\binom{13}{1}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{12}{3}\cdot\binom{4}{1}^3 = \#\text{casos favorables.}$$

b) Para el caso, sin orden:

$$\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}}$$

c) Para la escalera, podemos ver que:

A 2 3 4 5

2 3 4 5 6

...

10 J Q K A

Tenemos 10 posibles escaleras.

$$\frac{10\cdot 4^5\cdot 5!}{52\cdot 51\cdot\ldots\cdot 48}$$

Nota: Elaborar completamente bien el ejercicio 4 del cuaderno, de fecha 7 de diciembre.

4) Se realizan ensayos de Bernoulli independientes. Sea Z la variable aleatoria dada como:

Z: # de experimentos hasta obtener r-veces el evento A.

Claramente $z \in \{r, r+1, \dots\}$. Vemos que

$$f_Z(r) = P(Z = r) = P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_r) = p^r$$

donde A_i: sucedió A en la iésima repetición. Veamos que

$$f_Z(r+1) = P(Z = r+1) = r \cdot p^r (1-p) = \binom{r}{1} p^r (1-p)$$

el r es pq A_{r+1}^c no sucede, siempre A_{r+1} no lleva ^{c}.

Para $r+2$:

$$f_Z(r+2) = P(Z = r+2) = \binom{r+1}{2} \cdot p^r (1-p)^2$$

En general, para $Z = r+n$:

$$f_Z(r+n) = P(Z = r+n) = \binom{r+n-1}{n} p^r (1-p)^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si $z \in \mathbb{N}$:

$$\forall z \in \mathbb{N}.\ f_Z(z) = \begin{cases} \binom{z-1}{z-r} p^r (1-p)^{z-r} & \text{si } z \geq r. \\ 0 \quad \text{si } p < r. \end{cases}$$

Luego, la función de distribución será:

$$F(Z \leq z) = P(Z \leq z)$$

Si $z < r$, $F_Z(z) = 0$. Si $r \leq z < r+1$, entonces:

$$F(Z \leq z) = p(Z = r) = p^r$$

si $r+1 \leq z < r+2$, entonces

$$F(Z \leq z) = P(z = r) + P(z = r+1)$$
$$= p^r + \binom{r}{1} p^r (1-p)$$

en general:

$$P(Z \leq z) = \sum_{K=r}^{\lfloor z \rfloor} \binom{K-1}{K-r} p^r (1-p)^{K-r}$$

con $r \leq z$. Ahora sí:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < r. \\ \sum_{K=r}^{z} \binom{K-1}{K-r} p^r (1-p)^{K-r} & \text{, si } r \leq z. \end{cases}$$

Veamos que f_Z es función de densidad, esto es, f_Z cumple que:

i) $f_Z(z) \geq 0$.

ii) $\sum_{K=r}^{\infty} f_Z(K) = 1$.

(i) ya se cumple. Comprobar (ii):

5) Se lanza una moneda. Si cae águila, el jugador pierde 2 pesos. Si cae sol, se gira una ruleta con TODOS los números del 0 al 10, y se gana la cantidad mostrada. Sea X:

X: Cantidad ganada o pérdida.

¿Cuál será entonces $f_X(x)$? Para una sola tirada:

$$x \in [0, 10] \cup \{-2\}$$

por su naturaleza, X es una variable aleatoria mixta. Por ello, resulta más sencillo obtener a F_X. Veamos que:

$$F_X(x) = P(X \leqslant x).$$

Veamos los casos. Si $x < -2$, entonces $P(X \leqslant x) = 0$. Si $-2 \leqslant x < 0$, entonces $F_X(x) = P(X \leqslant x) = P(X = -2) = \frac{1}{2}$.

Si $0 \leqslant x < 10$, entonces $P(X \leqslant X) = P(X = -2) + P(0 \leqslant X \leqslant x)$, donde

$$P(0 \leqslant X \leqslant x) = P(S \cap N_x)$$

Donde S es la proba. de que salga sol, y N_x es de que el número sea menor o igual a x. Como S y N_x son independientes, entonces:

$$\begin{aligned} P(S \cap N_x) &= P(S) \cdot P(N_x) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{10}\right) \end{aligned}$$

Así $F_X(x) = P(X \leqslant x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{10}\right)$. Y si $x > 10$, entonces $F_X(x) = P(X \leqslant x) = 1$. Por lo tanto:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2. \\ \frac{1}{2} & \text{si } -2 \leqslant x < 0. \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{10}\right) & \text{si } 0 \leqslant x < 10. \\ 1 & \text{si } 10 \leqslant x. \end{cases}$$

De esta forma, f_X será:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in\ ]-\infty, -2[\ \cup\ ]-2, 0[\ \cup\ ]0, +\infty[\\ \frac{1}{2} & \text{si } x = -2 \\ \frac{1}{20} & \text{si } x \in [0, 10] \end{cases}$$

Así sería la función de densidad de una variable aleatoria mixta. Queremos determinar:

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - P(X \leq 5)$$
$$= 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \,//$$

14/Diciembre/2022.

Para el problema de demanda y utilidad, sólo se pide la relación entre demanda y utilidad.

Funciones De Variables Aleatorias.

1) Se lanzan 3 monedas y se propone a X como la variable aleatoria:

X: número de águilas obtenidas.

Claramente f_X:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{si } x \in \{0, 3\} \\ \frac{3}{8} & \text{si } x \in \{1, 2\} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En un juego se obtienen \$2 por cada águila que aparezca y se pagan \$3 por entrar en el juego. Sea Y: Ganancia de cada juego. Vemos que:

$$y \in \{-3, -1, 1, 3\}$$

Relacionamos a X y Y como: $Y = 2X - 3$. También, podemos notar que:

$$P(Y = 1) = P(X = 2) = \frac{3}{8}$$

pues, si $Y = 1$, entonces $X = 2$, así se obtiene el resultado anterior.

Podemos establecer una relación general como sigue:

$$P(\bar{Y}=y)=P(2\bar{X}-3=y)=P\left(\bar{X}=\frac{y+3}{2}\right), \text{ así}$$

$$P(\bar{Y}=y)=\begin{cases} \frac{1}{8} & \text{si } \frac{y+3}{2}\in\{0,3\} \rightsquigarrow y\in\{-3,3\} \\ \frac{3}{8} & \text{si } \frac{y+3}{2}\in\{1,2\} \rightsquigarrow y\in\{-1,1\} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Función de una nueva variable aleatoria discreta.

Sea $\bar{X}$ una variable aleatoria discreta con función de densidad $f_{\bar{X}}$. Sea $\bar{Y}=g(\bar{X})$. Entonces:

$$f_{\bar{Y}}(y)=P(\bar{Y}=y)=P(g(\bar{X})=y)$$
$$=\sum_{\{x\,|\,g(x)=y\}} P(\bar{X}=x\}$$

EJEMPLOS.

1) Sea $\bar{X}$ con función de densidad:

$$f_{\bar{X}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^x} & \text{si } x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Y, sea $\bar{Y}$ definida como:

$$\bar{Y} = g(\bar{X}) = \begin{cases} -1 & \text{si } \bar{X} \text{ es impar} \\ 1 & \text{si } \bar{X} \text{ es par.} \end{cases}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} P(\bar{Y}=-1) &= P(\bar{X}\in\{1,3,\dots\}) = P(\bar{X}=1)+P(\bar{X}=3)+\dots \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} P(\bar{X}=2n-1) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{2n-1}} \\ &= 2\cdot\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 = 2\cdot\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{4^n}\right) = 2\cdot\left(\frac{1/4}{1-1/4}\right) = 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

luego $P(\bar{Y}=1) = 1-P(\bar{Y}=-1) = \frac{1}{3}$.

2) Sea $\bar{X}$ una variable aleatoria que toma valores en $\{-1,0,1\}$ con probabilidades:

$$P(\bar{X}=-1)=0.2, \quad P(\bar{X}=0)=0.3 \quad \text{y } P(\bar{X}=1)=0.5$$

Sea $\bar{Y}=\bar{X}^2+1$. Vemos que $Y\in\{2,1\}$, además:

$$\begin{aligned} P(\bar{Y}=2) &= P(\bar{X}^2+1=2) = P(\bar{X}=1)+P(\bar{X}=-1) \\ &= 0.2+0.5=0.7 \end{aligned}$$

$$P(\bar{Y}=1) = 0.3.$$

3) Sea $\bar{X}$ la variable aleatoria con la siguiente función $f_{\bar{X}}$ de densidad:

$$f_{\bar{X}}(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & \forall\, x>0. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

claramente $x \in (0, +\infty)$. Si $Y = \ln(X)$, entonces queremos determinar $f_Y(y)$. Para ello, veamos que:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y)$$
$$= P(\ln(X) \leq y). \text{ Como } e^x \text{ es creciente:}$$
$$= P(X \leq e^y)$$
$$= F_X(e^y)$$

de esta forma:

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = F_X'(e^y) = F_X'(e^y) \cdot (e^y)'$$
$$= e^y \cdot F_X'(e^y) = e^y \cdot f_X(e^y)$$

lo cual implica:

$$f_Y(y) = e^y \cdot f_X(e^y) = \begin{cases} 2e^{y-2e^y} & \text{si } e^y > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

como $e^y > 0, \forall y \in \mathbb{R}$, entonces:

$$f_Y(y) = 2e^{y-2e^y}, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Veamos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} 2e^{y-2e^y}dy. \text{ Sea } u = e^y, du = e^y dy$$
$$= \int_0^{\infty} 2e^{-2u}du = \left(-e^{-2u}\Big|_0^{\infty}\right)$$
$$= \left(\lim_{u \to \infty} -e^{-2u} - (-e^0)\right) = (0 - (-1)) = 1$$

además $f_Y(y) \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}$. Por tanto, f_Y es una función de densidad.

Si ahora tomamos a la variable aleatoria Z dada como: $Z = |X|$. Entonces: $(z \in [0, +\infty[)$.

$$F_Z(z) = P(Z \leq z)$$
$$= P(|X| \leq z)$$

$$= P(-z \leq \bar{X} \leq z)$$
$$= P(\bar{X} \leq z) - P(\bar{X} < -z)$$
$$= F_{\bar{X}}(z) - F_{\bar{X}}(-z)$$
$$\Rightarrow f_Z(z) = F'_Z(z) = (F_{\bar{X}}(z) - F_{\bar{X}}(-z))'$$
$$= F'_{\bar{X}}(z) + F'_{\bar{X}}(-z) = f_{\bar{X}}(z) + f_{\bar{X}}(-z).$$

De esta forma:

$$\forall z \in \mathbb{R},\ f_Z(z) := \begin{cases} 2e^{-2z} & \text{si } z > 0. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

16/Diciembre/2022.

Recordando la clase anterior. Si tenemos una variable aleatoria discreta $\bar{X}$ y una $\bar{Y}$ tal que $\bar{Y} = g(\bar{X})$, conociendo la función de distribución de densidad de $f_{\bar{X}}$, entonces:

$$f_{\bar{Y}}(y) = P(\bar{Y} = y) = P(g(\bar{X}) = y)$$
$$= \sum_{x \in g^{-1}(\{y\})} P(\bar{X} = x) = \sum_{\{x \in G \mid g(x) = y\}} \underbrace{P(\bar{X} = x)}_{= f_{\bar{X}}(x)}$$

Función de una variable aleatoria continua.

Sea $\bar{X}$ una v.a absolutamente continua con función de densidad $f_{\bar{X}}$. Supongamos que $g(x)$ es una función estrictamente monótona (ya sea creciente o decreciente), diferenciable y por tanto, continua. Sea

$$\bar{Y} = g(\bar{X})$$

Entonces:

$$f_{\bar{Y}}(y) := \begin{cases} f_{\bar{X}}(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{\partial}{\partial y} g^{-1}(y) \right| & \text{si } y = g(x) \text{ para algún } x. \\ 0 & \text{si } y \neq g(x), \forall x \end{cases}$$

Dem:

Suponga que g es monótona creciente, diferenciable y X una v.a absolutamente continua con función de densidad f_X. Veamos la función de distribución de Y:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \leq g^{-1}(y))$$
$$= F_X(g^{-1}(y)).$$
$$\Rightarrow f_Y(y) = F_Y'(y) = (F_X(g^{-1}(y)))' = F_X'(g^{-1}(y)) \cdot (g^{-1}(y))'$$
$$= f_X(g^{-1}(y)) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(g^{-1}(y))$$

Si $y \neq g(x), \forall x$, entonces $f_Y(y)$ es o bien 0 ó 1. En cualquier caso $f_Y(y) = 0$. Si g es monótona decreciente:

$$P(g(X) \leq y) = P(g^{-1}(y) \leq X)$$
$$= 1 - P(X \leq g^{-1}(y))$$
$$= 1 - F_X(g^{-1}(y)).$$

Luego:

$$F_Y(y) = 1 - F_X(g^{-1}(y)) \Rightarrow f_Y(y) = -f_X(g^{-1}(y)) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(g^{-1}(y))$$

Como g es decreciente, su derivada siempre es negativa. Por tanto

$$\left|\frac{\partial}{\partial y}(g^{-1}(y))\right| = -\frac{\partial}{\partial y}(g^{-1}(y))$$

y si g es creciente, su derivada es positiva. Por tanto:

$$\left|\frac{\partial}{\partial y}(g^{-1}(y))\right| = \frac{\partial}{\partial y}(g^{-1}(y))$$

Así $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left|\frac{\partial}{\partial y}(g^{-1}(y))\right|$.

q.e.d.

EJEMPLO.

1) Si g es una función lineal, X y Y v.a absolutamente continuas, entonces:

$$F_Y(y) = P(Y = y) = (g(X) = y) = (aX + b \leq y)$$
$$= \left(X \leq \frac{y-b}{a}\right) = P(X \leq g^{-1}(y)) = F'_X(g^{-1}(y))$$

Se obtiene el resultado anterior.

2) Sea $Y = g(X) = X^2$, entonces:

$$F_Y(y) = P(X^2 \leq y) = P(|X| \leq \sqrt{y}) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$$
$$= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}), \text{ con } y > 0.$$

Luego

$$f_Y(y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})\right) = f_Y(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + f_X(-\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \left(f_X(\sqrt{y}) + f_Y(-\sqrt{y})\right).$$

De esta forma:

$$\forall y \in \mathbb{R},\ f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \left(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})\right) & \text{si } y > 0. \\ 0 & \text{si } y \leq 0. \end{cases}$$

Si $y \leq 0$, $P(X^2 \leq y) = P(X^2 \leq 0) = P(X = 0) = 0$.

3) Sea X v.a con función de distribución:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 + x + \frac{1}{6}, & \text{si } 0 < x < 1. \\ 0, & \text{e.o.c} \end{cases}$$

considerando los cambios de variable $Y = \sqrt{X}$ y $Z = (x-1)^2$

a) Si $0 < x < 1 \Rightarrow 0 < \sqrt{x} < 1 \Rightarrow 0 < y < 1$. Por tanto, $f_Y(y) = 0$ si $y \notin]0,1[$. Si $y \in]0,1[$:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\sqrt{X} \leq y) = P(X \leq y^2)$$

pues $\sqrt{\ }: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ es creciente. Así:

$$F_Y(y) = F_X(y^2)$$
$$\Rightarrow f_Y(y) = f_X(y^2) \cdot 2y = 2y \cdot f_X(y^2), \text{ si } 0 < y < 1.$$

En resumen:

$$\forall y\in\mathbb{R},\ f_Z(y)=\begin{cases}2y\left(y^4+y^2+\frac{1}{6}\right) & \text{si } 0<y<1.\\ 0 & \text{e.o.c.}\end{cases}$$

b) Si $0<x<1 \Rightarrow -1<x-1<0 \Rightarrow 0<(x-1)^2<1 \Rightarrow 0<Z<1$. Veamos que:

$$F_Z(z)=P(Z\leq z)=P((\bar{X}-1)^2\leq z).\ \text{Si } z>0:$$
$$=P(|\bar{X}-1|\leq\sqrt{z})=P(-\sqrt{z}\leq\bar{X}-1\leq\sqrt{z})$$
$$=P(-\sqrt{z}+1\leq\bar{X}\leq\sqrt{z}+1)$$
$$=P(\bar{X}\leq\sqrt{z}+1)-P(\bar{X}<-\sqrt{z}+1)$$
$$=1-F_X(1-\sqrt{z}),\ \text{pues } 1+\sqrt{z}\geq 1,\ y\ F_X(x)=1\ \forall x\geq 1$$

Como $Z<1$, entonces:

$$f_Z(z)=f_X(-\sqrt{z}+1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{z}}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{z}}f_X(1-\sqrt{z}),\ \text{aquí además } Z<1.$$

con $0<z<1$. Así

$$\forall z\in\mathbb{R},\ f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{z}}\left(1-2\sqrt{z}+z+1-\sqrt{z}+\frac{1}{6}\right) & \text{si } 0<z<1.\\ 0 & \text{e.o.c}\end{cases}$$

4) Hacer lo mismo que en 3), pero con

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x):=\begin{cases}x+1 & \text{si } -1<x<0.\\ 1-x & \text{si } 0<x<1.\end{cases}\qquad 0\ \text{e.o.c.}$$

Considerando los cambios de variable $\bar{Y}=\sqrt{\bar{X}}$, y $Z=(\bar{X}-1)^2$. Para $\bar{Y}=\sqrt{\bar{X}}$.

a) Si $Z=(\bar{X}-1)^2$, como con $x\in\,]0,1[\, \Rightarrow x-1\geq 0\Rightarrow (x-1)^2\geq 0$ $\Rightarrow z\geq 0$. Si $x\in\,]-1,0[\,\Rightarrow 1\geq x+1\geq 0\Rightarrow -1\geq x-1\geq -2\Rightarrow$ $4\geq(x-1)^2\geq 1$. Por tanto, $z\in[0,4]$, i.e. solo toma valores entre 0 y 4 (excluyendo al 1).

De esta forma, veamos que:

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P((\bar{X}-1)^2 \leq z), \text{ como } z \geq 0: (\text{si } z=0, P(\ldots)=0).$$

$$= P(-\sqrt{z} \leq \bar{X} - 1 \leq \sqrt{z}) = P(\bar{X} \leq \sqrt{z}+1) - P(\bar{X} \leq \sqrt{z}+1)$$

$$= 1 - F_{\bar{X}}(-\sqrt{z}+1), \text{ pues } \sqrt{z}+1 \geq 1 \Rightarrow P(\bar{X} \leq \sqrt{z}+1) = 1.$$

Luego:

$$F_Z'(z) = -F_{\bar{X}}'(-\sqrt{z}+1) = \frac{1}{2\sqrt{z}} f_{\bar{X}}(-\sqrt{z}+1), \text{ así: } z > 0.$$

Así

$$\forall z \in \mathbb{R},\ f_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{e.o.c.} \\ \frac{1}{2\sqrt{z}}(1-(-\sqrt{z}+1)) = \frac{1}{2} & \text{si } 0 < z < 1. \\ \frac{1}{2\sqrt{z}}(-\sqrt{z}+2) = \frac{1}{\sqrt{z}} - \frac{1}{2} & \text{si } 1 < z < 4. \end{cases}$$

20/Diciembre/2022.

Problema.

A y B participan en un juego. Se lanzan 2 dados, y se observa la diferencia de los resultados obtenidos.

- A gana \$1000 si la dif. es 0, 1, 2.
- B gana \$1000 si la dif. es 3, 4, 5.

Veamos el espacio muestral:

$(1,1), (1,2), \ldots, (1,6)$ $\qquad$ $\bar{X} = \#$ de dif.

$(2,1), (2,2), \ldots, (2,6)$ $\qquad$ $P(\bar{X}=0) = \frac{6}{36}$

$\vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots$ $\qquad$ $P(\bar{X}=1) = \frac{10}{36}$

$(6,1), (6,2), \ldots, (6,6)$ $\qquad$ $P(\bar{X}=2) = \frac{8}{36} \Rightarrow P(A) = \frac{24}{36}$

¿Cuánto debería cobrar el Casino (cómo mínimo)? Como el jugador gana 2 de 3 veces, entonces se debería cobrar $\frac{2}{3} \cdot 1000$ (para que sea justo).