

# Tercer Examen Geometría Diferencial III

Cristo Daniel Alvarado

13 de enero de 2024

# Índice general

|                            |          |
|----------------------------|----------|
| <b>1. Examen</b>           | <b>2</b> |
| 1.1. Ejercicio 1 . . . . . | 2        |
| 1.2. Ejercicio 2 . . . . . | 4        |
| 1.3. Ejercicio 3 . . . . . | 6        |
| 1.4. Ejercicio 4 . . . . . | 8        |

# Capítulo 1

## Examen

### 1.1. Ejercicio 1

**Ejercicio 1.1.1 (Pullback de una forma diferencial)**

Considere  $U \subseteq ]0, \infty[ \times ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[$  abierto en el espacio  $(\rho, \phi, \theta)$  de  $\mathbb{R}^3$ . Defina  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada como

$$(x, y, z) = F(\rho, \phi, \theta) = (\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi)$$

pruebe que  $F^*(dx \wedge dy \wedge dz) = \rho^2 \sin \phi d\rho \wedge d\phi \wedge d\theta$ .

**Demostración:**

Primeramente, veamos que

$$F^*(dx \wedge dy \wedge dz) = F^*dx \wedge F^*dy \wedge F^*dz$$

pues  $F$  es un mapeo  $C^\infty$  entre las variedades  $U$  y  $\mathbb{R}^3$ . Por la Proposición 18.11 se sigue la identidad de arriba. Pero, el producto wedge conmuta con la diferencial exterior, por lo cual

$$F^*dx = d(F^*x), \quad F^*dy = d(F^*y) \quad \text{y} \quad F^*dz = d(F^*z) \quad (1.1)$$

siendo  $x, y, z : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  las funciones coordenadas de  $\mathbb{R}^3$ . Con esto en mente, analicemos cada una de las diferenciales exteriores de (1.1).

(I) Notemos que  $F^*x = x \circ F$ , por lo cual

$$\begin{aligned} d(F^*x) &= d(x \circ F) \\ &= d(F_1) \end{aligned}$$

donde  $F_1 : U \rightarrow \mathbb{R}$  es la función tal que  $((\rho, \phi, \theta)) \mapsto x \circ F((\rho, \phi, \theta)) = \rho \sin \phi \cos \theta$ , para todo  $(\rho, \phi, \theta) \in U$ . Por lo cual

$$\begin{aligned} d(F^*x) &= d(\rho \sin \phi \cos \theta) \\ &= \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \sin \phi \cos \theta) d\rho + \frac{\partial}{\partial \phi}(\rho \sin \phi \cos \theta) d\phi + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho \sin \phi \cos \theta) d\theta \\ &= \sin \phi \cos \theta d\rho + \rho \cos \phi \cos \theta d\phi - \rho \sin \phi \sin \theta d\theta \\ \Rightarrow d(F^*x) &= \sin \phi \cos \theta d\rho + \rho \cos \phi \cos \theta d\phi - \rho \sin \phi \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

(II) De forma similar al inciso (I), se tiene que

$$\begin{aligned} d(F^*y) &= d(y \circ F) \\ &= d(F_2) \end{aligned}$$

donde  $F_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$  es la función tal que  $((\rho, \phi, \theta)) \mapsto y \circ F((\rho, \phi, \theta)) = \rho \sin \phi \sin \theta$ , para todo  $(\rho, \phi, \theta) \in U$ . Luego

$$\begin{aligned} d(F^*y) &= d(\rho \sin \phi \sin \theta) \\ &= \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \sin \phi \sin \theta) d\rho + \frac{\partial}{\partial \phi}(\rho \sin \phi \sin \theta) d\phi + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho \sin \phi \sin \theta) d\theta \\ &= \sin \phi \sin \theta d\rho + \rho \cos \phi \sin \theta d\phi + \rho \sin \phi \cos \theta d\theta \\ \Rightarrow d(F^*y) &= \sin \phi \sin \theta d\rho + \rho \cos \phi \sin \theta d\phi + \rho \sin \phi \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

(III) De forma similar al inciso (I), se tiene que

$$\begin{aligned} d(F^*z) &= d(z \circ F) \\ &= d(F_3) \end{aligned}$$

donde  $F_3 : U \rightarrow \mathbb{R}$  es la función tal que  $((\rho, \phi, \theta)) \mapsto z \circ F((\rho, \phi, \theta)) = \rho \cos \phi$ , para todo  $(\rho, \phi, \theta) \in U$ . Luego

$$\begin{aligned} d(F^*z) &= d(\rho \cos \phi) \\ &= \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \cos \phi) d\rho + \frac{\partial}{\partial \phi}(\rho \cos \phi) d\phi + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho \cos \phi) d\theta \\ &= \cos \phi d\rho - \rho \sin \phi d\phi \\ \Rightarrow d(F^*z) &= \cos \phi d\rho - \rho \sin \phi d\phi \end{aligned}$$

Por los tres incisos anteriores, se sigue que

$$\begin{aligned} F^*(dx \wedge dy \wedge dz) &= (\sin \phi \cos \theta d\rho + \rho \cos \phi \cos \theta d\phi - \rho \sin \phi \sin \theta d\theta) \\ &\quad \wedge (\sin \phi \sin \theta d\rho + \rho \cos \phi \sin \theta d\phi + \rho \sin \phi \cos \theta d\theta) \wedge (\cos \phi d\rho - \rho \sin \phi d\phi) \end{aligned}$$

Computemos  $(\sin \phi \sin \theta d\rho + \rho \cos \phi \sin \theta d\phi + \rho \sin \phi \cos \theta d\theta) \wedge (\cos \phi d\rho - \rho \sin \phi d\phi)$ :

$$\begin{aligned} &(\sin \phi \sin \theta d\rho + \rho \cos \phi \sin \theta d\phi + \rho \sin \phi \cos \theta d\theta) \wedge (\cos \phi d\rho - \rho \sin \phi d\phi) \\ &= (\rho \cos^2 \phi \sin \theta d\phi \wedge d\rho + \rho \sin \phi \cos \phi \cos \theta d\theta \wedge d\rho) + (-\rho \sin^2 \phi \sin \theta d\phi \wedge d\phi - \rho^2 \sin^2 \phi \cos \theta d\theta \wedge d\phi) \\ &= (-\rho \cos^2 \phi \sin \theta d\rho \wedge d\phi - \rho \sin \phi \cos \phi \cos \theta d\rho \wedge d\theta) + (-\rho \sin^2 \phi \sin \theta d\rho \wedge d\phi + \rho^2 \sin^2 \phi \cos \theta d\phi \wedge d\theta) \\ &= -\rho \sin \theta d\rho \wedge d\phi - \rho \sin \phi \cos \phi \cos \theta d\rho \wedge d\theta + \rho^2 \sin^2 \phi \cos \theta d\phi \wedge d\theta \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned} \Rightarrow &(\sin \phi \cos \theta d\rho + \rho \cos \phi \cos \theta d\phi - \rho \sin \phi \sin \theta d\theta) \\ &\quad \wedge (\sin \phi \sin \theta d\rho + \rho \cos \phi \sin \theta d\phi + \rho \sin \phi \cos \theta d\theta) \wedge (\cos \phi d\rho - \rho \sin \phi d\phi) \\ &= (\sin \phi \cos \theta d\rho + \rho \cos \phi \cos \theta d\phi - \rho \sin \phi \sin \theta d\theta) \\ &\quad \wedge (-\rho \sin \theta d\rho \wedge d\phi - \rho \sin \phi \cos \phi \cos \theta d\rho \wedge d\theta + \rho^2 \sin^2 \phi \cos \theta d\phi \wedge d\theta) \\ &= \rho^2 \sin \phi \sin^2 \theta d\theta \wedge d\rho \wedge d\phi - \rho^2 \sin \phi \cos^2 \phi \cos^2 \theta d\phi \wedge d\rho \wedge d\theta + \rho^2 \sin^3 \phi \cos^2 \theta d\rho \wedge d\phi \wedge d\theta \\ &= \rho^2 \sin \phi \sin^2 \theta d\rho \wedge d\phi \wedge d\theta + \rho^2 \sin \phi \cos^2 \phi \cos^2 \theta d\rho \wedge d\phi \wedge d\theta + \rho^2 \sin^3 \phi \cos^2 \theta d\rho \wedge d\phi \wedge d\theta \\ &= \rho^2 \sin \phi \sin^2 \theta d\rho \wedge d\phi \wedge d\theta + \rho^2 \sin \phi \cos^2 \theta [\cos^2 \phi + \sin^2 \phi] d\rho \wedge d\phi \wedge d\theta \\ &= \rho^2 \sin \phi \sin^2 \theta d\rho \wedge d\phi \wedge d\theta + \rho^2 \sin \phi \cos^2 \theta d\rho \wedge d\phi \wedge d\theta \\ &= \rho^2 \sin \phi [\sin^2 \theta + \cos^2 \theta] d\rho \wedge d\phi \wedge d\theta \\ &= \rho^2 \sin \phi d\rho \wedge d\phi \wedge d\theta \end{aligned}$$

por tanto

$$F^*(dx \wedge dy \wedge dz) = \rho^2 \sin \phi d\rho \wedge d\phi \wedge d\theta$$

□

## 1.2. Ejercicio 2

### Ejercicio 1.2.1 (Pullback de una forma diferencial)

Sea  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la función dada por

$$F(x, y) = (u, v) = (x^2 + y^2, xy)$$

Compute  $F^*(u du + v dv)$ .

#### Demostración:

Como el pullback es lineal, se tiene entonces que

$$F^*(u du + v dv) = F^*(u du) + F^*(v dv)$$

Determinemos  $F^*(u du)$  y  $F^*(v dv)$ .

(I) Veamos que

$$\begin{aligned} F^*(u du) &= F^*(u \wedge du) \\ &= (F^*u) \wedge (F^*du) \\ &= (F^*u) \wedge d(F^*u) \end{aligned}$$

pues, podemos ver a la 1-forma  $u du$  como el producto wedge de una 0-forma con una 1-forma. De esta forma, por propiedades del pullback, se sigue la primera y segunda igualdad. Para la tercera, se cumple ya que el producto wedge conmuta con la diferencial exterior.

Computemos  $F^*u$ :

$$F^*u = u \circ F$$

es decir,  $F^*u$  es la función de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}$  tal que  $(x, y) \mapsto u \circ F(x, y) = u(x^2 + y^2, xy) = x^2 + y^2$ . De esta forma, se tiene que

$$\begin{aligned} d(F^*u) &= d(x^2 + y^2) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) dx + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2) dy \\ &= 2x dx + 2y dy \\ \Rightarrow d(F^*u) &= 2x dx + 2y dy \end{aligned}$$

Por lo cual

$$\begin{aligned} F^*(u du) &= (F^*u) \wedge d(F^*u) \\ &= (x^2 + y^2) \wedge (2x dx + 2y dy) \\ &= (2x^3 + 2xy^2) dx + (2x^2y + 2y^3) dy \end{aligned}$$

(II) Como en el inciso (I), se tiene que

$$\begin{aligned} F^*(v dv) &= F^*(v \wedge dv) \\ &= (F^*v) \wedge (F^*dv) \\ &= (F^*v) \wedge d(F^*v) \end{aligned}$$

siendo  $F^*v = v \circ F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $(x, y) \mapsto xy$ . Por lo cual

$$\begin{aligned} d(F^*v) &= \frac{\partial}{\partial x}(xy) dx + \frac{\partial}{\partial y}(xy) dy \\ &= y dx + x dy \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \Rightarrow F^*(v dv) &= (F^*v) \wedge d(F^*v) \\ &= (xy) \wedge (y dx + x dy) \\ &= xy^2 dx + x^2y dy \end{aligned}$$

Por el inciso (I) y (II), se sigue que

$$\begin{aligned} F^*(u du + v dv) &= F^*(u du) + F^*(v dv) \\ &= [(2x^3 + 2xy^2) dx + (2x^2y + 2y^3) dy] + [xy^2 dx + x^2y dy] \\ &= (2x^3 + 3xy^2) dx + (2y^3 + 3x^2y) dy \\ &= (2x^2 + 3y^2)x dx + (2y^2 + 3x^2)y dy \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\therefore F^*(u du + v dv) = (2x^2 + 3y^2)x dx + (2y^2 + 3x^2)y dy$$

□

## 1.3. Ejercicio 3

### Ejercicio 1.3.1 (Pullback de una forma diferencial por una curva)

Sea  $\omega$  la 1-forma dada por

$$\omega = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Defina  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ . Compute  $c^*\omega$ .

#### Demostración:

Observemos que

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} \\ &= -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \\ &= -\frac{y}{x^2 + y^2} \wedge dx + \frac{x}{x^2 + y^2} \wedge dy\end{aligned}$$

(viendo a la 1-forma  $\omega$  como el producto wedge de una 0-forma con una 1-forma). Por tanto:

$$\begin{aligned}c^*\omega &= c^*\left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \wedge dx + \frac{x}{x^2 + y^2} \wedge dy\right) \\ &= c^*\left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \wedge dx\right) + c^*\left(\frac{x}{x^2 + y^2} \wedge dy\right) \\ &= c^*\left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \wedge dx\right) + c^*\left(\frac{x}{x^2 + y^2} \wedge dy\right) \\ &= c^*\left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right) \wedge c^*(dx) + c^*\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) \wedge c^*(dy) \\ &= c^*\left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right) \wedge d(c^*x) + c^*\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) \wedge d(c^*y)\end{aligned}$$

donde

(I) Para el primer elemento se tiene que

$$c^*\left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right) \circ c$$

por lo cual,

$$\begin{aligned}c^*\left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right)(t) &= \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right) \circ c(t) \\ &= \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right)(\cos t, \sin t) \\ &= -\frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \\ &= -\sin t\end{aligned}$$

(II) Para el segundo se tiene

$$\begin{aligned}d(c^*x) &= d(x \circ c) \\ &= d(x(\cos t, \sin t)) \\ &= d(\cos t) \\ &= -\sin t dt\end{aligned}$$

(III) Para el tercero se tiene

$$c^* \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \circ c$$

por lo cual

$$\begin{aligned} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \circ c(t) &= \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) (\cos t, \sin t) \\ &= \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \\ &= \cos t \end{aligned}$$

(IV) Para el cuarto se tiene

$$\begin{aligned} d(c^*y) &= d(y \circ c) \\ &= d(y(\cos t, \sin t)) \\ &= d(\sin t) \\ &= \cos t \, dt \end{aligned}$$

Por los incisos (I)-(IV), se sigue que

$$\begin{aligned} c^*\omega &= c^* \left( -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \wedge d(c^*x) + c^* \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \wedge d(c^*y) \\ &= (-\sin t)(-\sin t \, dt) + (\cos t)(\cos t \, dt) \\ &= \sin^2 t \, dt + \cos^2 t \, dt \\ &= dt \\ \Rightarrow c^*\omega &= dt \end{aligned}$$

□



## 1.4. Ejercicio 4

### Ejercicio 1.4.1 (Una forma que no se desvanece sobre una híperversuperficie suave)

Resuelva los siguientes incisos.

- (a) Sea  $f(x, y)$  una función  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}^2$  y asuma que 0 es valor regular de  $f$ . Por el teorema del valor regular, el conjunto cero  $M$  de  $f(x, y)$  es una subvariedad 1-dimensional de  $\mathbb{R}^2$ . Construya una 1-forma que no se anula en  $M$ .
- (b) Sea  $f(x, y, z)$  una función  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}^3$  y asuma que 0 es valor regular de  $f$ . Por el teorema del valor regular, el conjunto cero  $M$  de  $f(x, y, z)$  es una subvariedad 2-dimensional de  $\mathbb{R}^3$ . Sean  $f_x$ ,  $f_y$  y  $f_z$  las derivadas parciales de  $f$  con respecto a  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente. Muestre que las igualdades

$$\frac{dx \wedge dy}{f_z} = \frac{dy \wedge dz}{f_x} = \frac{dz \wedge dx}{f_y}$$

son válidas en  $M$  siempre y cuando estas tengan sentido, y por tanto juntas dan una 2-forma sobre  $M$  que no se desvanece en ninguna parte.

- (c) Generalice este problema al conjunto de nivel regular de  $f(x^1, \dots, x^{n+1})$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

### Demostración:

Recordemos una proposición y el teorema del valor regular

---

#### Proposición 1.8.23

Para una función real valuada  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $M$  es una variedad, se tiene que  $p \in M$  es un punto crítico de  $M$ , si y sólo si relativo a alguna carta  $(U, x^1, \dots, x^n)$  que contiene a  $p$ , todas la derivadas parciales de  $f$  satisfacen

$$\frac{\partial f}{\partial x^j}(p) = 0, \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

---

---

#### Teorema 1.9.9 (Teorema del valor regular)

Sea  $F : N \rightarrow M$  un mapeo  $C^\infty$  entre variedades, donde  $\dim N = n$  y  $\dim M = m$ . Entonces el conjunto de nivel no vacío  $F^{-1}(c)$ , donde  $c \in M$ , es una subvariedad regular de  $N$  con dimensión  $n - m$ .

---

De (I): En este caso,  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}$  son variedades suaves, y

$$\begin{aligned} M &= f^{-1}(0) \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\} \end{aligned}$$

siendo  $M$  el conjunto cero de  $f(x, y)$ . Observemos que

$$f(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in M$$

Por lo cual, tomando diferencial exterior de ambos lados, se sigue que

$$\begin{aligned} df(x, y) &= 0 \\ \Rightarrow f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy &= 0, \quad \forall (x, y) \in M \end{aligned}$$

donde  $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$  y  $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ . Considere los conjuntos

$$U_x = \{(x, y) \in M | f_x(x, y) \neq 0\} \text{ y } U_y = \{(x, y) \in M | f_y(x, y) \neq 0\}$$

se tiene que en  $U_x \cap U_y$ :

$$\begin{aligned} f_x dx + f_y dy &= 0 \\ \Rightarrow f_x dx &= -f_y dy \end{aligned} \quad (1.2)$$

Defina así la 1-forma  $\omega$  como sigue

$$\omega(x, y) = \begin{cases} f_x(x, y) dx & \text{si } (x, y) \in U_x \\ -f_y(x, y) dy & \text{si } (x, y) \in U_y \end{cases} \quad (1.3)$$

para todo  $(x, y) \in M$ . Por (1.2), esta 1-forma está bien definida en  $M$ , ya que las 1-formas  $-f_y dy$  y  $f_x dx$  coinciden en  $U_x \cap U_y$ . Veamos que  $\omega$  es  $C^\infty$  y no se anula en  $M$ . Para ello, consideremos las cartas de  $\mathbb{R}^2$ . Sean

$$\begin{aligned} U_x^+ &= \{(x, y) \in M | f_x(x, y) > 0\} \\ U_x^- &= \{(x, y) \in M | f_x(x, y) < 0\} \\ U_y^+ &= \{(x, y) \in M | f_y(x, y) > 0\} \\ U_y^- &= \{(x, y) \in M | f_y(x, y) < 0\} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Es claro que  $U_x = U_x^+ \cup U_x^-$  y  $U_y = U_y^+ \cup U_y^-$ . Notemos que, como 0 es un valor regular de  $f$ , entonces todo punto de  $f^{-1}(0) = M$  es un punto regular. Por tanto, de la Proposición (8.23) se tiene que para todo punto  $p \in M$ , alguna de las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) = f_x(p), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(p) = f_y(p)$$

no se anula. Es decir, que  $p$  se encuentra en alguno de los conjuntos de (1.4). Luego,  $M$  está totalmente contenida en la unión de estos conjuntos. Por tanto,  $\omega$  no se anula en  $M$ .

Y, claramente  $\omega$  es  $C^\infty$ , pues las funciones  $f_x$  y  $f_y$  lo son. Así, la 1-forma buscada es  $\omega$ .

De (II): En este caso,  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{R}$  son variedades suaves, y

$$\begin{aligned} M &= f^{-1}(0) \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | f(x, y, z) = 0\} \end{aligned}$$

siendo  $M$  el conjunto cero de  $f(x, y, z)$ . Observemos que

$$\begin{aligned} df(x, y, z) &= 0 \\ \Rightarrow f_x(x, y, z) dx + f_y(x, y, z) dy + f_z(x, y, z) dz &= 0, \quad \forall (x, y, z) \in M \end{aligned} \quad (1.5)$$

por tanto, en  $M$  se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} f_y dy \wedge dx + f_z dz \wedge dx &= 0 \\ f_x dx \wedge dy + f_z dz \wedge dy &= 0 \\ f_x dx \wedge dz + f_y dy \wedge dz &= 0 \end{aligned}$$

(haciendo el producto wedge de (1.5) con  $dx$ ,  $dy$  y  $dz$ ). Las igualdades anteriores son equivalentes a

$$\begin{aligned} -f_y dx \wedge dy + f_z dz \wedge dx &= 0 \Rightarrow f_y dx \wedge dy = f_z dz \wedge dx \\ f_x dx \wedge dy - f_z dy \wedge dz &= 0 \Rightarrow f_x dx \wedge dy = f_z dy \wedge dz \\ -f_x dz \wedge dx + f_y dy \wedge dz &= 0 \Rightarrow f_x dz \wedge dx = f_y dy \wedge dz \end{aligned}$$

por tanto

$$\frac{dx \wedge dy}{f_z} = \frac{dz \wedge dx}{f_y} \text{ y } \frac{dx \wedge dy}{f_z} = \frac{dy \wedge dz}{f_x}$$

(siempre que  $f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z) \neq 0$ , con  $(x, y, z) \in M$ ). Luego

$$\frac{dx \wedge dy}{f_z} = \frac{dy \wedge dz}{f_x} = \frac{dz \wedge dx}{f_y} \quad (1.6)$$

Sean

$$\begin{aligned} U_x &= \{(x, y, z) \in M \mid f_x(x, y, z) \neq 0\} \\ U_y &= \{(x, y, z) \in M \mid f_y(x, y, z) \neq 0\} \\ U_z &= \{(x, y, z) \in M \mid f_z(x, y, z) \neq 0\} \end{aligned} \quad (1.7)$$

como en el inciso (I), es claro que  $M$  está contenida en la unión de estos conjuntos (ya que al ser 0 valor regular de  $f$ , todos los puntos de  $M$  son regulares y por ende, alguna de las derivadas parciales no se anula en  $p \in M$ ). Definamos

$$\omega(x, y, z) = \begin{cases} \frac{dy \wedge dz}{f_x(x, y, z)} & \text{si } (x, y, z) \in U_x \\ \frac{dz \wedge dx}{f_y(x, y, z)} & \text{si } (x, y, z) \in U_y \\ \frac{dx \wedge dy}{f_z(x, y, z)} & \text{si } (x, y, z) \in U_z \end{cases} \quad (1.8)$$

Por (1.7), es claro que  $\omega$  es una 2-forma está bien definida en  $M$ , pues en la intersección de 2 conjuntos de (1.6), se cumplen las igualdades en (1.7). Y además es  $C^\infty$ , pues cada una de las funciones  $f_x, f_y$  y  $f_z$  lo es.

De (III): Sea  $f$  una función  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$  y suponga que  $c \in \mathbb{R}$  es un valor regular de  $f$ . Entonces por el teorema del valor regular, el conjunto  $M = f^{-1}(c)$  es una subvariedad  $n$ -dimensional de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Construya una  $n$ -forma que no se anula en  $M$ .

Para ello, notemos que si  $(x^1, \dots, x^{n+1}) \in M$ , donde

$$\begin{aligned} M &= f^{-1}(c) \\ &= \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(x^1, \dots, x^{n+1}) = c\} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} f(x^1, \dots, x^{n+1}) &= c \\ \Rightarrow df(x^1, \dots, x^{n+1}) &= 0 \\ \Rightarrow f_{x^1}(x^1, \dots, x^{n+1})dx_1 + \dots + f_{x^{n+1}}(x^1, \dots, x^{n+1})dx_{n+1} &= 0 \end{aligned}$$

Si  $I = (i_1, i_2, \dots, i_{n-1})$  es un multi-índice creciente de  $n-1$  de longitud  $n-1$ , se tiene que haciendo el producto wedge de la igualdad de arriba con  $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{n-1}}$ :

$$f_{x^{j_1}}(x^1, \dots, x^{n+1})dx_{j_1} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{n-1}} + f_{x^{j_2}}(x^1, \dots, x^{n+1})dx_{j_2} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{n-1}} = 0$$

donde  $j_1$  y  $j_2$  son tales que no están en  $I$ . Por tanto

$$f_{x^{j_1}}(x^1, \dots, x^{n+1})dx_{j_1} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{n-1}} = -f_{x^{j_2}}(x^1, \dots, x^{n+1})dx_{j_2} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{n-1}} \quad (1.9)$$

Con esto, de forma similar al inciso (II), se obtienen igualdades que relacionan a  $f_{x^i}$  con  $f_{x^j}$ , siendo  $i, j \in \{1, \dots, n+1\}$  con  $i < j$ , dadas por

$$\begin{aligned} f_{x^i}(x^1, \dots, x^{n+1}) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_{n+1} &= f_{x^j}(x^1, \dots, x^{n+1}) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_{n+1} \\ \Rightarrow \frac{dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_{n+1}}{f_{x^j}(x^1, \dots, x^{n+1})} &= \frac{dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_{n+1}}{f_{x^i}(x^1, \dots, x^{n+1})} \end{aligned} \quad (1.10)$$

(siempre que las derivadas parciales no se anulen). Definimos así a la  $n$ -forma  $\omega$ , como

$$\omega(x^1, \dots, x^{n+1}) = \frac{dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_{n+1}}{f_{x^i}(x^1, \dots, x^{n+1})} \quad (1.11)$$

si  $(x^1, \dots, x^{n+1}) \in U_{x^i}$ , donde

$$U_{x^i} = \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in M \mid f_{x^i}(x^1, \dots, x^{n+1}) \neq 0\}, \quad \forall i = 1, \dots, n+1$$

Por (1.10) esta  $n$ -forma está bien definida, y por la proposición (8.23), como  $c$  es valor regular de  $f$ , entonces  $M \subseteq \bigcup_{i=1}^{n+1} U_{x^i}$  (si  $p \in M$ , entonces alguna de las derivadas parciales de  $f$  no se anula en  $p$ ). De esta forma, como las funciones  $f_{x^i}$  son  $C^\infty$ , se sigue que  $\omega$  es una  $n$ -forma  $C^\infty$  que no se anula en  $M$ . □