强化学习 Q-Learning 入门

Q-Learning是强化学习方法中的一种，适合初学者入门。
适用条件：状态（state）和动作（action）空间离散且数量少。

状态空间：$\mathcal{S}$，维数为 N_s
动作空间：$\mathcal{A}$，维数为 N_a
某个状态 s 的动作空间：$\mathcal{A}(s)$

一、两张重要的表

R表：表示为 $\mathbf{R}_{N_\mathrm{s}\times N_\mathrm{a}}$，其中 $R(s,a)$ 表示在状态 s 下采取动作 a 所得奖励值：

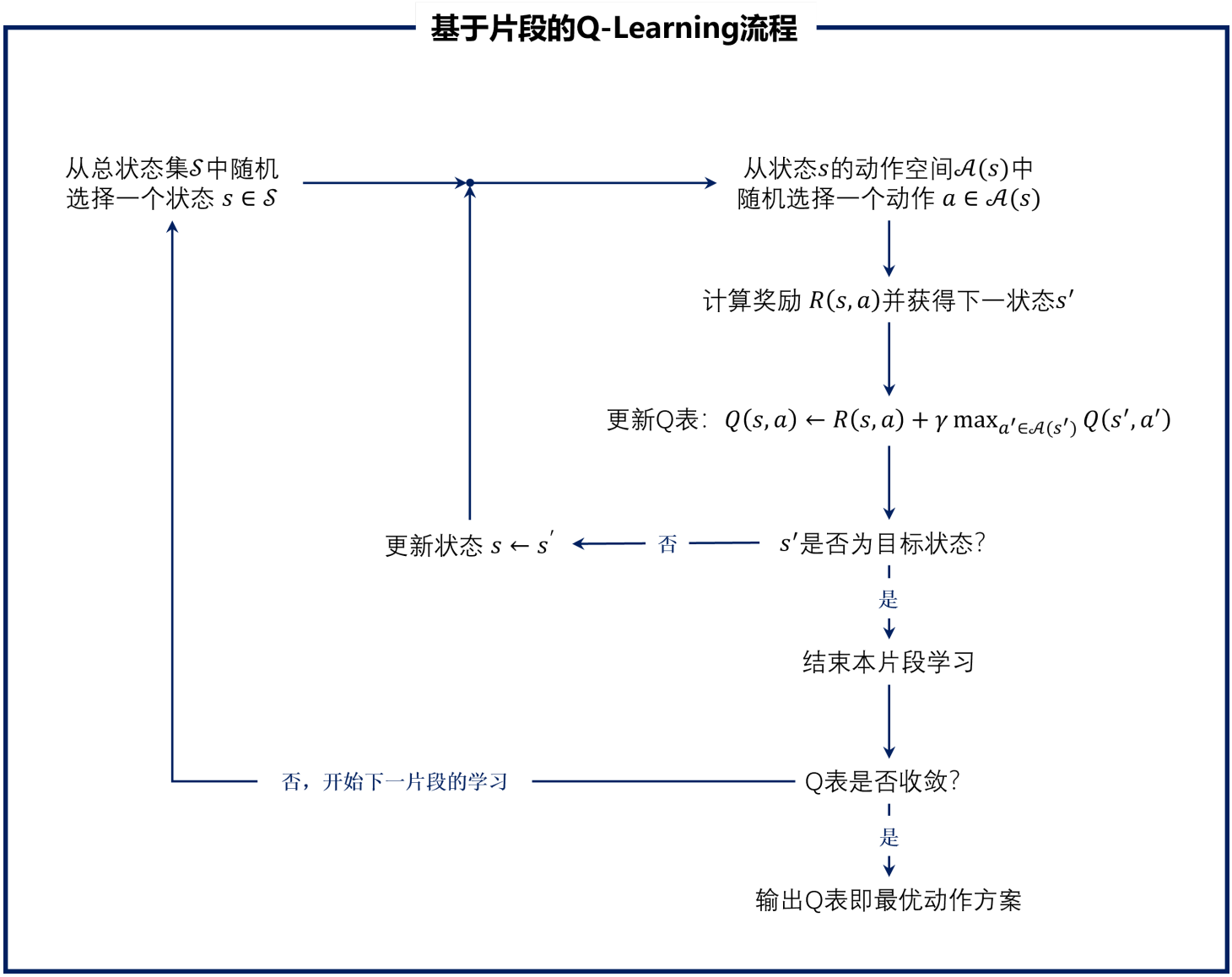
		action					
		1	2	3	4	$\cdots$	N_a
	1	$R_{1,1}$	$R_{1,2}$	$R_{1,3}$	$R(1,4)$	$\cdots$	$R(1,N_\mathrm{a})$
state	2	$R_{2,1}$	$R_{2,2}$	$R_{2,3}$	$R(2,4)$	$\cdots$	$R(2,N_\mathrm{a})$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	N_s	$R(N_\mathrm{s},1)$	$R(N_\mathrm{s},2)$	$R(N_\mathrm{s},3)$	$R(N_\mathrm{s},4)$	$\cdots$	$R(N_\mathrm{s},N_\mathrm{a})$

Q表：表示为 $\mathbf{Q}_{N_\mathrm{s}\times N_\mathrm{a}}$，其中 $Q(s,a)$ 表示在状态 s 下采取动作 a 的Q值（**状态 s 应执行对应于最高Q值的动作 a**）：

		action					
		1	2	3	4	$\cdots$	N_a
	1	$Q(1,1)$	$Q(1,2)$	$Q(1,3)$	$Q(1,4)$	$\cdots$	$Q(1,N_\mathrm{a})$
state	2	$Q(2,1)$	$Q(2,2)$	$Q(2,3)$	$Q(2,4)$	$\cdots$	$Q(2,N_\mathrm{a})$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	N_s	$Q(N_\mathrm{s},1)$	$Q(N_\mathrm{s},2)$	$Q(N_\mathrm{s},3)$	$Q(N_\mathrm{s},4)$	$\cdots$	$Q(N_\mathrm{s},N_\mathrm{a})$

二、Q-Learning 迭代过程

基于片段（episode）的学习：先初始化Q表，将所有的 $Q(s,a)$ 都设为 0，然后随机选择初始状态和动作，通过贝尔曼方程迭代不断更新Q表中的值，直至收敛。最终得到**稳定的Q表即最优策略**。



其中，Q表中元素的更新遵循如下**贝尔曼方程**（Bellman Equation）：

$$Q(s,a) \leftarrow Q(s,a) + \alpha \left[R(s,a) + \gamma \max_{a'} Q(s',a') - Q(s,a) \right] \tag{1}$$

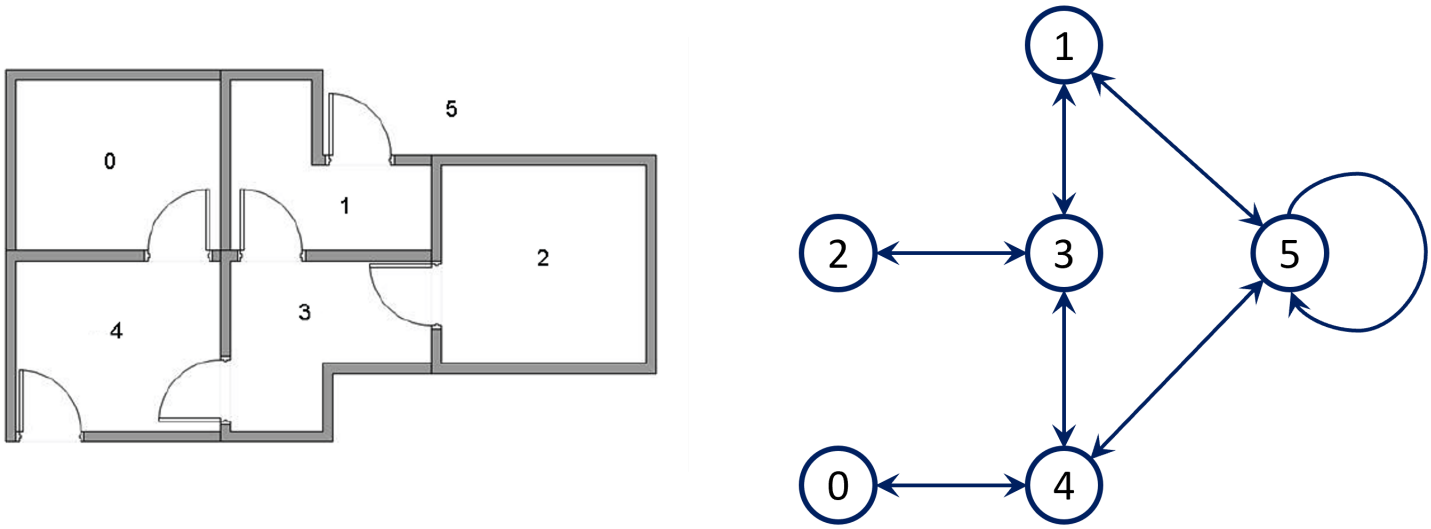
式中，R 是在当前状态 s 执行动作 a 后的奖励；$\max_{a'} Q(s',a')$ 是指在下一状态 s' 取得的最大Q值；α 为学习率，γ 为折扣因子。

如果取 $\alpha = 1$，则有

$$Q(s,a) \leftarrow R(s,a) + \gamma \max_{a'} Q(s',a') \tag{2}$$

三、简单案例

此案例参见：CSDN描述



已知各房间具有如图所示的连通关系，需要寻找从任一房间前往右上第5个房间的最佳（最短路径）策略。

各房间（即状态）之间的邻接矩阵为：

$$\mathbf{A}_{N_\mathrm{s}\times N_\mathrm{s}}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\1&0&0&1&0&1\\0&1&0&0&1&1\end{bmatrix}$$

R表为（注意这里用到了状态和动作间的**可达信息**；也可将不可达情形下的奖励值设为负数等其他较低的值）：

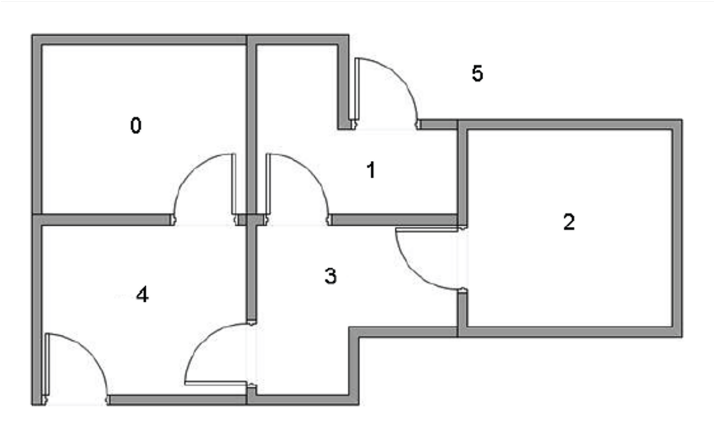
$$\mathbf{R}_{N_\mathrm{s}\times N_\mathrm{a}}=\begin{bmatrix}&&&&0&\\&&&0&&100\\&&&0&&\\&0&0&&0&\\0&&&0&&100\\&0&&&0&100\end{bmatrix}$$

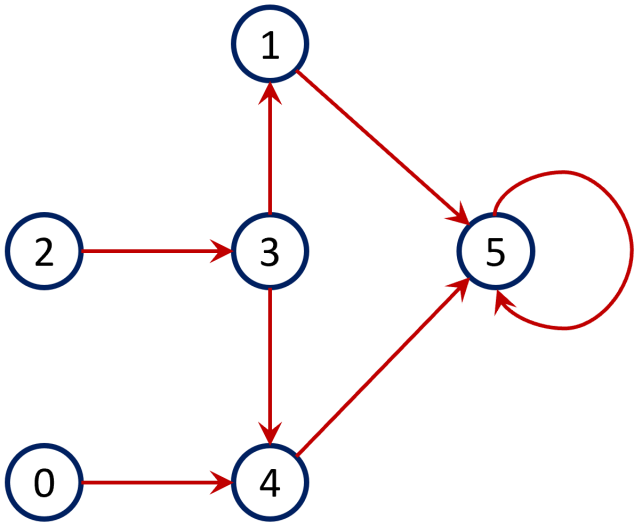
对于R表中任意元素 $r_{s,a}$，若状态 s 执行动作 a 后达到目标即房间5，则 $r_{s,a}=100$，否则 $r_{s,a}=0$。（**需思考对奖励值的设计**）

接下来，按照图1中流程对Q表进行学习，Python代码见本文最后。最终得到Q表为：

$$\mathbf{Q}_{N_s \times N_a} = \begin{bmatrix} & & & & \underline{400} & \\ & & & 320 & & \underline{500} \\ & & & \underline{320} & & \\ & \underline{400} & 256 & & \underline{400} & \\ 320 & & & 320 & & \underline{500} \\ & 400 & & & 400 & \underline{500} \end{bmatrix}$$

其中，每各状态对应的最优动作Q值已使用下划线标记，对应于下图：





四、案例代码

```
import numpy as np
import random

states = np.arange(6)
actions = np.arange(6)

# ---- 设置奖励矩阵R ----------------------------------------------------------------------

# 奖励矩阵，行：状态、列：动作、元素：奖励值
R = np.array([
    [-1, -1, -1, -1, 0, -1],
    [-1, -1, -1, 0, -1, 100],
    [-1, -1, -1, 0, -1, -1],
    [-1, 0, 0, -1, 0, -1],
    [0, -1, -1, 0, -1, 100],
    [-1, 0, -1, -1, 0, 100],
])

# 状态邻接矩阵：row -> col
A = np.array([
    [0, 0, 0, 0, 1, 0],
    [0, 0, 0, 1, 0, 1],
    [0, 0, 0, 1, 0, 0],
    [0, 1, 1, 0, 1, 0],
    [1, 0, 0, 1, 0, 1],
    [0, 1, 0, 0, 1, 1],
])

# ---- Q-Learning ------------------------------------------------------------------------

gamma = 0.8

# 初始化Q矩阵，行：状态、列：动作、元素：Q值
Q = np.zeros((len(states), len(actions)))

# 目标节点
s_end = 5

# 总迭代数，起始迭代数
iter, i = 1000, 0
```

```
while True:
    # 开始Episode: 随机选择一个状态
    s = random.choice(states)

    while True:
        # 查看状态s的可达状态，获得可选动作
        cand_states = np.argwhere(A[s, :] > 0).flatten()

        # 随机选择一个动作
        cand_actions = cand_states
        a = random.choice(cand_actions)

        # 下一状态和奖励
        r = R[s, a]
        s_next = a  # 执行编号a的动作便到达了下个具有相等编号的状态

        # 查看状态s_next的可达状态，获得可选动作
        cand_states_next = np.argwhere(A[s_next, :] > 0).flatten()

        # 求解max_{a_next} Q(s_next, a_next)
        cand_actions_next = cand_states_next
        max_q = np.max(Q[s_next, cand_actions_next])

        # 更新Q元素
        Q[s, a] = r + gamma * max_q

        if s_next == s_end:
            break
        else:
            s = s_next

    i += 1

    # TODO: 需采用Q表收敛判据替代以下部分
    if i == iter:
        break

Q = np.round(Q, 2)
```